

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA  
DEPARTAMENTO DE MICROONDA E ÓPTICA

MÉTODO RIGOROSO DAS DIFERENÇAS FINITAS EM ANÁLISE  
DE ESTRUTURAS DE GUIAS DIELÉTRICOS ANISOTRÓPICOS COM  
PERFIL DE ÍNDICE DE REFRAÇÃO VARIÁVEL

Autor : *Carlos Leônidas da Silva Souza Sobrinho*

Orientador : *Atílio José Giarola* ✱

Tese apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de *Doutor em Engenharia Elétrica*.

Este exemplar corresponde à versão final da tese defendida por *Carlos Leônidas da Silva Souza Sobrinho* e aprovada pela Comissão Julgadora em *13/07/92*.

*Atílio José Giarola*  
Orientador

Julho de 1992

## AGRADECIMENTOS

- Ao Professor Atílio José Giarola, pelas contribuições, orientação, e por ter acreditado em nosso trabalho.
- Aos Professores da FEE (UNICAMP), que contribuíram para a minha formação.
- À minha filha, pelo carinho.
- À minha esposa, pelo carinho e por ter estado sempre ao nosso lado, mesmo nos momentos difíceis.
- À minha mãe e meus irmãos pelo apoio e incentivo.
- Ao CIFEE (UNICAMP), em particular ao professor Akebo, pelo apoio que tem dado aos alunos da Pós-Graduação.
- Aos funcionários da FEE (UNICAMP), em particular à Maria Lúcia Costa Cardoso e ao Airton Ramos, pelos excelentes serviços de desenho, à Ademilde Félix e Janete Sayoko Toma, pelos excelentes serviços de digitação.
- À Universidade Federal do Pará, pela nossa liberação e apoio financeiro.
- Ao Departamento de Engenharia Elétrica da Universidade Federal do Pará, em particular aos professores, pela confiança depositada e por terem assumido as aulas que tínhamos que ministrar.
- Ao Professor Gervásio P. Cavalcante, pelo apoio e amizade.
- À PROPESP-UFPa, pelo apoio indispensável.
- À CAPES, pelo suporte financeiro.
- Aos colegas da Pós-Graduação da FEE (UNICAMP), pela amizade e espírito de companheirismo.

À minha esposa

*Felma*

À minha filha

*Andréa*

À minha mãe

*Raimunda*

À minha avó

*Lourdes*

Aos meus irmãos

*Ribamar*

*Torquato e*

*Antônio*

# CONTEÚDO

---

<b>SUMÁRIO</b>	v
<b>CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO</b>	1
1.1 - INTRODUÇÃO	1
1.2 - AS ESTRUTURAS DE GUIAS DIELETRICOS USADAS NESTE TRABALHO	3
1.3 - OBJETIVOS E ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO	6
<b>REFERÊNCIAS</b>	11
<b>CAPÍTULO 2 -FORMULAÇÃO DO PROBLEMA PELO         MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS</b>	19
2.1 - A EQUAÇÃO DE ONDA ESCALAR	23
2.2 - APROXIMAÇÃO NUMÉRICA POR DIFERENÇAS FINITAS	26
2.3 - O SISTEMA DE EQUAÇÕES LINEARES HOMOGÊNEAS	29
2.3.1 - CONDIÇÕES DE CONTORNO PARA A MALHA GRADUAL DE CINCO PONTOS	30
2.3.2 - LIMITAÇÃO DA REGIÃO DE DISCRETIZAÇÃO	34
<b>REFERÊNCIAS</b>	41
<b>CAPÍTULO 3 -APRESENTAÇÃO DOS         RESULTADOS NUMÉRICOS</b>	42
3.1 - INTRODUÇÃO	42
3.2 - O GUIA DE ONDA DIELETRICO RETANGULAR EMBEBIDO	42
3.2.1 - VERIFICAÇÃO DA FORMULAÇÃO	43
3.2.2 - GUIA DE ONDA DIELETRICO ANISOTRÓPICO COM PERFIL DE ÍNDICE DE REFRAÇÃO GAUSSIANO-GAUSSIANO	49
3.2.3 - ACOPLAMENTO DIRECIONAL ENTRE GUIAS EMBEBIDOS	55
3.2.3.1 - Acoplamento Simples Para Guias	

<b>Dielétricos Anisotrópicos</b>	56
<b>3.2.3.2 - Acoplamento em uma Estrutura</b>	
<b>Periódica Infinita</b>	61
<b>3.3 - O GUIA DE ONDA CANAL DIELÉTRICO INTEGRADO</b>	70
<b>3.3.1 - VERIFICAÇÃO DA FORMULAÇÃO</b>	70
<b>3.3.2 - O GUIA DE ONDA CANAL DIELÉTRICO ANISOTRÓPICO</b>	
<b>INTEGRADO COM PERFIL DE ÍNDICE DE REFRAÇÃO</b>	
<b>GAUSSIANO-GAUSSIANO</b>	72
<b>3.3.3 - O GUIA DE ONDA CANAL DIELÉTRICO ANISOTRÓPICO</b>	
<b>INTEGRADO EM SUBSTRATO ANISOTRÓPICO</b>	79
<b>3.3.4 - ACOPLAMENTO DIRECIONAL ENTRE GUIAS DE ONDAS</b>	
<b>CANAIS DIELÉTRICOS ANISOTRÓPICOS INTEGRADOS</b>	82
<b>3.3.4.1 - Acoplamento Simples Entre Guias</b>	82
<b>3.4 - ANÁLISE DE FIBRA ÓPTICA</b>	86
<b>3.4.1 - VERIFICAÇÃO DA FORMULAÇÃO</b>	88
<b>3.4.2 - ANÁLISE DE FIBRA ÓPTICA COM DIELÉTRICO</b>	
<b>ANISOTRÓPICO UNIAXIAL E PERFIL</b>	
<b>DE ÍNDICE DE REFRAÇÃO VARIÁVEL</b>	88
<b>REFERÊNCIAS</b>	95
<b>CAPÍTULO 4 - CONCLUSÕES</b>	97
<b>APÊNDICE A - OBTENÇÃO DAS EQUAÇÕES ACOPLADAS</b>	
<b>(2.29)</b>	101
<b>APÊNDICE B - OBTENÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES</b>	
<b>LINEARES HOMOGÊNEAS</b>	108
<b>APÊNDICE C - OBTENÇÃO DA EQUAÇÃO (2.30)</b>	115
<b>APÊNDICE D - OBTENÇÃO DA EQUAÇÃO (2.32)</b>	122
<b>APÊNDICE E - OBTENÇÃO DA EQUAÇÃO (2.39)</b>	128

## SUMÁRIO

Uma formulação rigorosa, geral e versátil, das diferenças finitas para a análise das características de propagação de estruturas onde o elemento básico constitutivo é o guia de onda dielétrico, é apresentada.

Nesta formulação, o método das diferenças finitas é usado na solução numérica da equação de onda escalar, escrita em termos das componentes transversais do campo magnético. Como resultado, um problema de autovalores convencional é obtido sem a presença de modos espúrios (observada em formulações anteriores), devido à inclusão implícita do divergente do campo magnético igual a zero. A formulação foi desenvolvida para incluir dielétricos anisotrópicos biaxiais, com perfil de índice de refração variando arbitrariamente na seção transversal do guia. As características de dispersão, para estruturas envolvendo o guia de onda dielétrico isolado e acoplado a outro(s), são calculadas. O desenvolvimento teórico, assim obtido, foi usado para resolver problemas particulares, e os resultados têm mostrado boa concordância com aqueles obtidos usando-se outros métodos. Resultados foram obtidos para uma variedade de estruturas de guiamento de ondas, de grande interesse, particularmente para o desenvolvimento de óptica integrada.

## SUMMARY

A rigorous, general and versatile finite-difference formulation for the analysis of the propagation characteristics in structures, having the dielectric waveguide as the basic element, is presented here.

In this formulation, the finite-difference method is used in the numerical solution of the scalar wave equation, written in terms of the transverse components of the magnetic field. As a result, a conventional eigenvalue problem is obtained without the presence of spurious modes (present in previous formulations), due to the implicit inclusion of the divergence of the magnetic field equal to zero. The general case of biaxial anisotropic dielectrics is considered, with the refractive index profile varying arbitrarily in the waveguide cross section.

Dispersion characteristics for isolated and parallel coupled dielectric waveguides are calculated. The theoretical development was then used to solve particular problems and the results agree with those available from other methods. Results were obtained for a variety of guiding wave structures, of much interest, particularly for the development of integrated optics.

# CAPÍTULO 1

## INTRODUÇÃO

### 1.1 - INTRODUÇÃO

A aplicação prática de guia de onda dielétrico na implementação de dispositivos integrados (acopladores direcionais, moduladores eletroópticos, chaves, filtros, amostradores, divisores de potência, combinadores, amplificadores com realimentação distribuída, multiplexadores, etc.), na faixa de frequências de ondas milimétricas e ópticas [1] - [21], depende criticamente das características de propagação neste tipo de guia. Por esta razão, tem havido um interesse crescente em métodos de análise mais eficientes visando a determinação das características de propagação em tais estruturas práticas.

O método do ponto de casamento ("point-matching"), uma das técnicas mais antigas e simples para a solução de guia de onda dielétrico homogêneo e isotrópico, foi usado por muitos autores para analisar o guia de onda dielétrico de seção transversal retangular com duas camadas [12], [22]-[24]. O guia de onda dielétrico homogêneo e isotrópico foi, também, analisado através de aproximações variacional e integral [25]-[27] e mediante o uso de equações integral e diferencial combinadas [28], [29]. Um outro método, bastante utilizado na análise de guia de onda dielétrico, é o método dos elementos finitos [30]-[47]. Sua aplicação no estudo de guias tridimensionais, tanto através da formulação em termos das componentes longitudinais dos campos elétrico ( $E_z$ ) e magnético ( $H_z$ ),

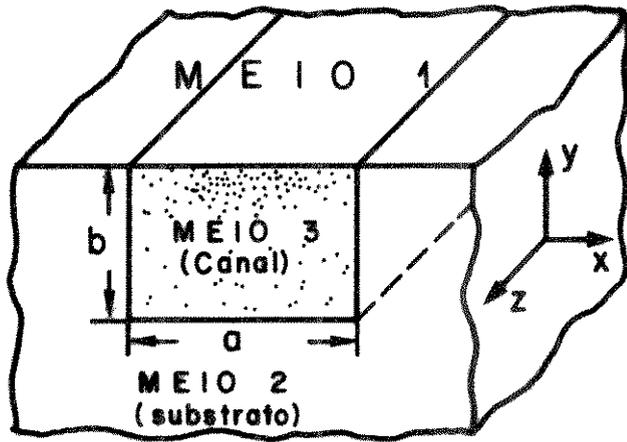
[15], [30]-[35] quanto da formulação que utiliza as três componentes do campo magnético ( $H_x$ ,  $H_y$ ,  $H_z$ ) ou elétrico ( $E_x$ ,  $E_y$ ,  $E_z$ ) [36]-[38], têm gerado problemas de modos espúrios na solução. Objetivando-se contornar tal problema, aproximações têm sido utilizadas, na segunda formulação acima [39]- [45]. Dentre as aproximações, pode-se citar o método da função "Penalty" [39]- [41], [43]-[45], que em alguns casos ainda aparecem modos espúrios [41], [43], [45], e o método desenvolvido por Hano [42], o qual utiliza o método dos elementos finitos vetorial em termos de todas as três componentes do campo elétrico e/ou magnético, onde os modos espúrios são eliminados. Por outro lado, K. Hayata *et al.* [46] também usou o método dos elementos finitos vetorial, na análise de guia de onda dielétrico, sendo que a formulação foi desenvolvida em termos das componentes transversais do campo magnético,  $H_x$  e  $H_y$ . Nesta formulação, a relação do divergente do campo magnético igual a zero ( $\nabla \cdot \vec{H} = 0$ ) é garantida implicitamente. Com isto, os modos espúrios são completamente eliminados. O método dos elementos finitos, após a eliminação dos modos espúrios e da sua aplicação na análise de guias de ondas anisotrópicos não-homogêneos, com perfil de índice de refração degrau [46], [47], tornou-se mais atrativo.

Além dos métodos acima citados, o método das diferenças finitas, por sua flexibilidade e facilidade de aplicação, tem sido bastante utilizado na solução de problemas de autovalores [48]-[52]. Mas a sua aplicação na solução de problemas de guias dielétricos (voltados para circuitos integrados) é bem recente [48]. Dentre as diversas aplicações deste método, pode-se citar a referência [53]. Neste trabalho, o método das diferenças finitas variacional é usado na análise do guia de onda canal dielétrico com perfil de índice de refração variando arbitrariamente. Nesta formulação, é ignorada a realidade física dos modos híbridos, assim como o efeito de acoplamento entre eles. A eliminação dos modos espúrios do método das diferenças finitas, através da inclusão da condição de que o divergente do campo magnético é igual a zero ( $\nabla \cdot \vec{H} = 0$ ), descrito por Bierwirth *et al.* [54] e Schulz *et al.* [55], [56], tem aumentado o interesse pelo

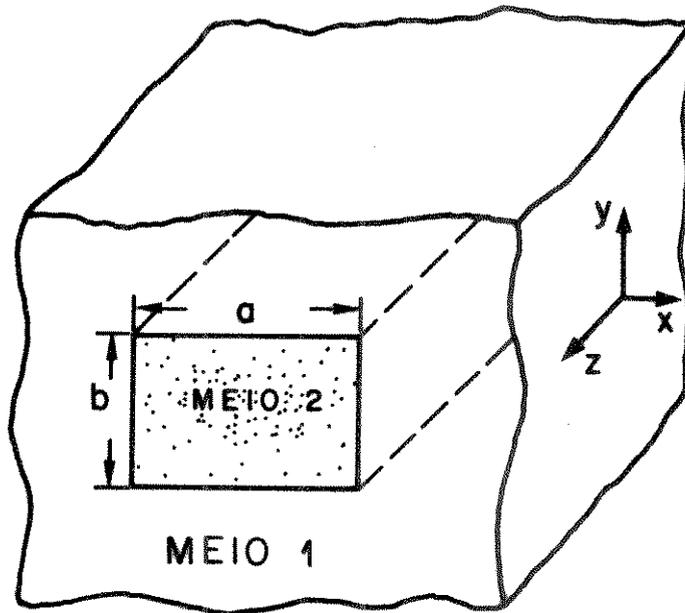
uso deste método para resolver problemas envolvendo o guia de onda dielétrico. Esses autores resolvem a equação de onda vetorial em termos das componentes transversais do campo magnético,  $H_x$  e  $H_y$ , o que permite a transformação do problema em um problema de autovalores convencional. Enquanto a análise desenvolvida por Bierwirth *et al.* [54] foi aplicada para guia de onda dielétrico com perfil de índice de refração degrau em sua seção transversal, Schulz *et al.* [55], [56] estenderam a análise para incluir guia de onda com perfil de índice de refração gradual. Em adição, em [56], acoplamento entre guias de ondas com canal integrado e perfil de índice de refração variando na forma Gaussiana-Gaussiana foi analisado. Em suas análises, [54]-[56], entretanto, somente dielétricos isotrópicos foram utilizados. Ainda com relação à análise de estruturas acopladas em [57] e [58], é feita a análise do acoplamento entre dois guias de ondas com dielétricos isotrópicos e perfil de índice de refração degrau, sendo que, no primeiro caso [57], a análise é feita através do método das diferenças finitas e em [58] através da técnica de casamento de modos. Em [59], estudam-se as características de propagação de um conjunto ("array") infinito de guias de ondas, formados por dielétricos isotrópicos e perfil de índice de refração degrau, mediante o uso de Equação Integral.

## 1.2 - AS ESTRUTURAS DE GUIAS DIELETRICOS USADAS NESTE TRABALHO

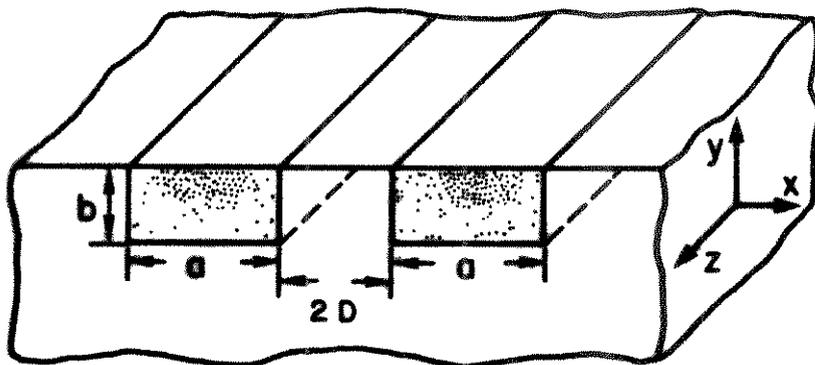
A Fig. 1.1a mostra o elemento básico na construção de estruturas integradas, tanto na faixa de frequências ópticas quanto na de ondas milimétricas, o guia canal. Este guia é constituído, basicamente, de três regiões: o canal (meio 3), o substrato (meio 2) e um outro meio (meio 1), que normalmente é o ar e encontra-se em contato com os outros dois meios. A integração do canal no substrato pode ser feita através de implantação iônica, permutação iônica, ou através de técnicas de difusão [53], [60]-[66]. Desta maneira, é possível obter,



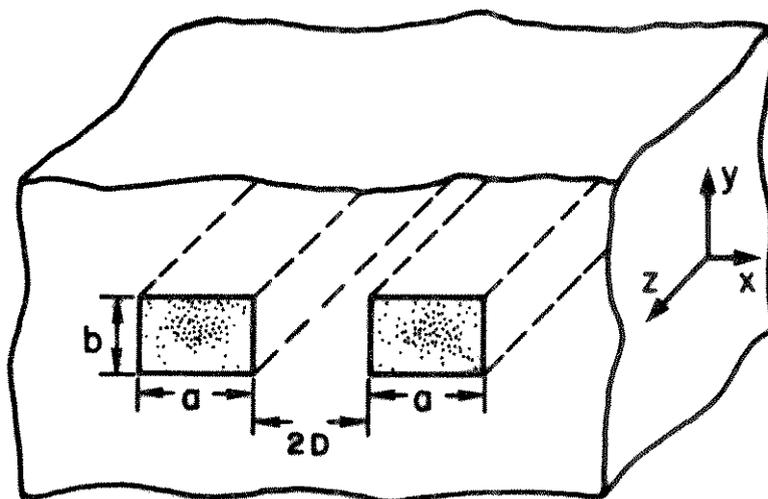
(a)



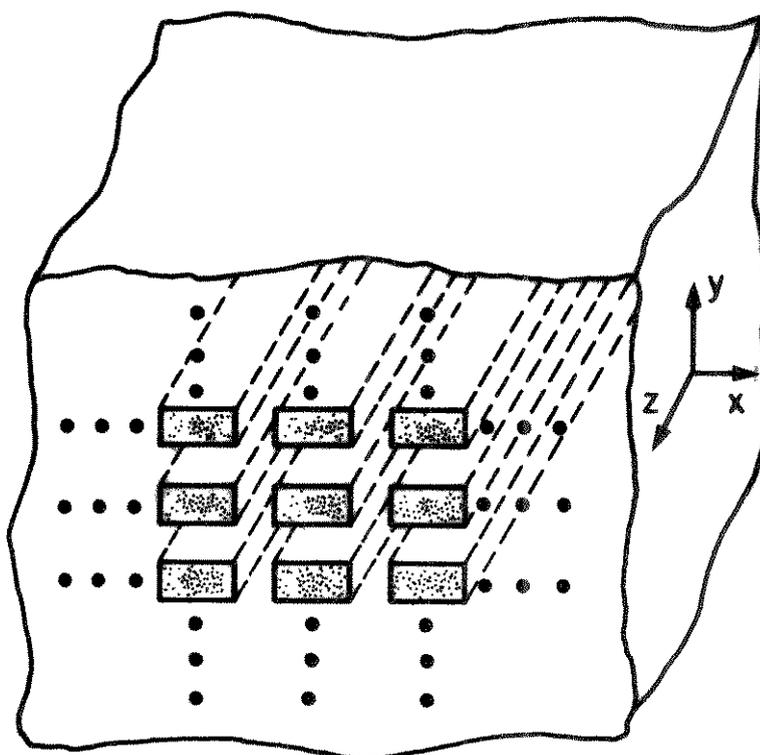
(b)



(c)



(d)



(e)

Fig. 1.1 - Estruturas que serão analisadas neste trabalho: (a) guia de onda canal dielétrico integrado; (b) guia de onda dielétrico embebido em material dielétrico; (c) acoplamento direcional ente dois guias de ondas, ca nais dielétricos integrados; (d) acoplamento direcional entre dois guias de ondas dielétricos embebidos; (e) rede infinita de guias de ondas dielétricos embebidos.

para o canal, perfis de índice de refração na forma Gaussiana, erro complementar, exponencial, funções quadráticas, etc., sendo que, neste trabalho, somente guias com perfis de índice de refração bidimensional (variação do índice no plano, xy, transversal à direção de propagação, z), são considerados. Ainda com relação à Fig. 1.1a, quando os meios 1 e 2 são idênticos, o guia passa a estar embebido em um único meio, conforme mostrado na Fig. 1.1b. Estas estruturas são atrativas por serem geometricamente simples, haver precisão na construção, serem mecanicamente estáveis e pela facilidade de se obter índice de refração, para o canal, bem próximo daquele do substrato, de forma que a operação aproximada em modo simples pode ser conseguida fazendo-se as dimensões transversais do guia grandes em comparação com o comprimento de onda no espaço livre [2].

As estruturas inicialmente apresentadas serão usadas na análise de fibra óptica, acopladores direcionais (Figs. 1.1c e 1.1d) e de redes ("arrays") infinitas (Fig. 1.1e).

Na Fig. 1.1, as dimensões transversais, a e b, dos guias são valores efetivos, de forma que a definição das mesmas será feita mediante a definição do perfil de índice de refração usado para cada caso a ser considerado.

### 1.3 - OBJETIVOS E ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

Um dos objetivos deste trabalho é estender a teoria apresentada em [54]-[57] para incluir dielétrico anisotrópico com perfil de índice de refração variando arbitrariamente em sua seção transversal. A formulação é geral e aplicada para dielétricos anisotrópicos biaxiais. A permeabilidade magnética é assumida ser constante e igual à do espaço livre ( $\mu=\mu_0$ ). Também, é objetivo deste trabalho o desenvolvimento de um programa computacional, através do qual estruturas envolvendo o guia de onda dielétrico bidimensional possam ser anali-

sadas.

O corpo principal da presente tese foi dividido em mais três capítulos.

No Capítulo 2, é feita a apresentação do problema e o desenvolvimento da formulação utilizada em sua análise. A formulação é desenvolvida partindo-se das equações de Maxwell, escritas na forma matricial. Destas, obtém-se as equações de ondas escalares, para as componentes transversais do campo magnético,  $H_x$  e  $H_y$ .

Sobre a seção transversal da estrutura a ser analisada, é construída uma malha gradual de pontos (Fig. 1.2a) que tem como célula a então denominada malha gradual dos cinco pontos (Fig. 1.2b). Nesta, as regiões 1, 2, 3 e 4, em torno do ponto P, devem ser pequenas de modo que o índice de refração em cada uma delas possa ser considerado constante. Desta forma, as equações de ondas escalares para  $H_x$  e  $H_y$  são, então, resolvidas numericamente através do método das diferenças finitas para cada uma das quatro regiões da Fig. 1.2b. A eliminação dos modos espúrios é obtida pela inclusão implícita do divergente do campo magnético igual a zero. Desta condição ( $\nabla \cdot \vec{H} = 0$ ), obtém-se, também, as equações para a componente longitudinal do campo magnético ( $H_z$ ) em cada uma das quatro regiões da Fig. 1.2b. Estas equações são usadas para atenderem à condição imposta de continuidade de  $H_z$  nas interfaces das regiões 1, 2, 3 e 4 (Fig. 1.2b). Tal procedimento pode, então, ser estendido para todos os pontos da malha (Fig. 1.2a).

Uma limitação computacional para a solução numérica deste problema é que o número de pontos utilizados na malha de discretização seja finito e compatível com a capacidade do computador a ser utilizado. Daí a necessidade de se limitar a região em análise. A Fig. 1.2a mostra um guia de onda dielétrico retangular com paredes elétricas e/ou magnéticas limitando a região que o envolve. Estas paredes formam uma caixa que deve ser grande o bastante [48],

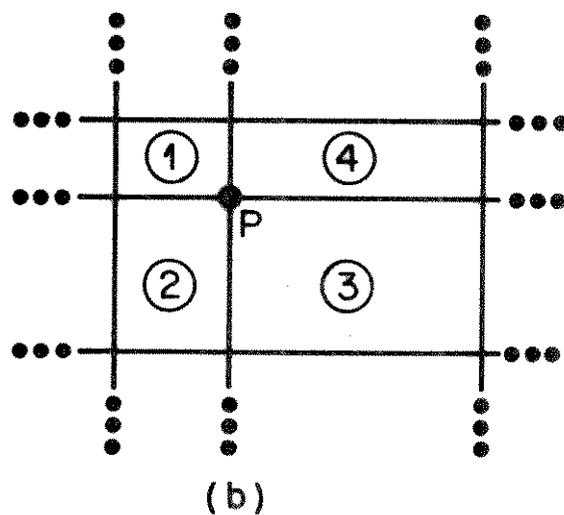
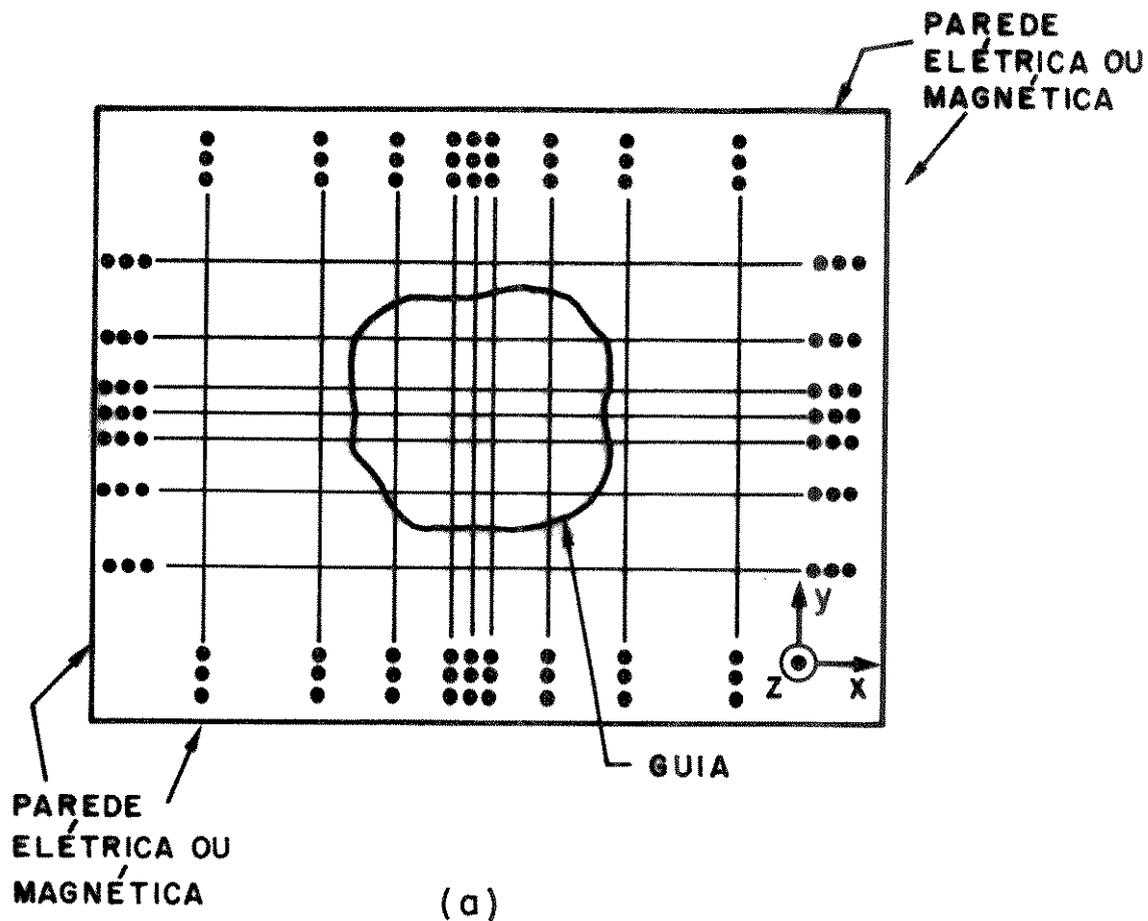


Fig. 1.2 - (a) Malha gradual de pontos construída sobre a seção transversal de um guia de onda dielétrico. A região a ser analisada é limitada por paredes elétricas e/ou magnéticas; (b) célula (malha gradual dos cinco pontos) da malha gradual de pontos.

[51], [52]–[57] de modo que a sua influência sobre os modos propagantes seja desprezível.

Levando-se em conta as condições de contorno nas paredes elétricas e/ou magnéticas (Fig. 1.2a), um sistema de equações lineares homogêneas é, então, obtido, o qual é escrito na forma de um problema de autovalores convencional.

A vantagem do uso da malha gradual, como mostrado na Fig. 1.2, permite um melhoramento na precisão dos resultados calculados sem incrementar o número de pontos da malha. Isto é conseguido usando-se uma discretização mais fina nas regiões de maior densidade de potência em detrimento das regiões onde a densidade de potência é menor [60].

A análise de estruturas acopladas (Fig. 1.1c, d, e) pode ser feita simplesmente aproximando-se a(s) parede(s) elétrica(s) e/ou magnética(s) (Fig. 1.2a) do guia [54]–[57], como será detalhado no Capítulo 2.

No Capítulo 3, são apresentados os resultados numéricos para as características de dispersão de várias estruturas. A formulação foi exaustivamente testada e alguns resultados comparados com aqueles obtidos por outros métodos bem conhecidos na literatura, havendo uma boa concordância entre os mesmos. A maioria dos resultados aqui apresentados foram submetidos para publicação, dos quais alguns já foram publicados [61]–[63], outros foram aceitos para publicação [64], [65] e outros foram submetidos para publicação mas estão aguardando as avaliações finais [66]–[68].

No Capítulo 4, apresentam-se as conclusões sobre todo o trabalho desenvolvido e as perspectivas para trabalhos futuros, dentro desta linha de pesquisa.

No final da tese, são incluídos cinco apêndices (A, B, C, D e E), onde são feitas algumas demonstrações relativas ao desenvolvimento apresentado no Ca-

pítulo 2. O objetivo destes apêndices é tornar este trabalho mais completo e facilitar a leitura do corpo principal da tese, principalmente para aqueles que desejam se familiarizar com o desenvolvimento teórico do método aqui utilizado.

## REFERÊNCIAS

- [01] S.E. Miller, "Integrated Optics: An introduction", Bell Syst. Tech. J., vol. 48, pp. 2059-2069, Set. 1969.
- [02] E.A.J. Marcatili, "Dielectric rectangular waveguide and directional coupler for integrated optics", Bell Syst. Tech. J., vol. 48, pp. 2071-2102, Set. 1969.
- [03] R.M. Knox, "Dielectric waveguide microwave integrated circuits - An overview", IEEE Trans. Microwave Theory Tech., vol. MTT-24, pp. 806-814, Nov. 1976.
- [04] T. Itoh, "Inverted strip dielectric waveguide for millimeter-wave integrated circuits", IEEE Trans. Microwave Theory Tech., vol. MTT-24, pp. 821-827, Nov. 1976.
- [05] W.V. Mclevige, T. Itoh, e R.J. Mittra, "New waveguide structure for millimeter-wave and optical integrated circuits", IEEE Trans. Microwave Theory Tech., vol. MTT-23, pp. 788-794, Out. 1975.
- [06] D.D. King, "Circuit components in dielectric images lines", IRE Trans. Microwave Theory Tech., vol. MTT-3, pp. 35-39, Dez. 1955.
- [07] T. Itoh, "Application of gratings in a dielectric waveguide for leaky-wave antennas and band-reject filters", IEEE Trans. Microwave Theory Tech., vol. MTT-25, pp. 1134-1138, Dez. 1977.
- [08] J.A. Paul e Y.W. Chang, "Millimeter wave image-guide integrated passive devices", IEEE Trans. Microwave Theory Tech., vol. MTT-26, pp. 751-754, Out. 1978.
- [09] K. Solbach, "The calculation and the measurements of the coupling properties of dielectric image lines of rectangular cross section", IEEE Trans. Microwave Theory Tech., vol. MTT-27, pp. 54-58, Jan. 1979.

- [10] J.A. Paul e P.C.H. Yen, "Millimeter-wave components and six-port network analyzer in dielectric waveguide", IEEE Trans. Microwave Theory Tech., vol. MTT-29, pp. 948-954, Set. 1981.
- [11] T. Itoh, "Open guiding structures for mmW integrated circuits", Microwave J., pp. 113-126, Set. 1982.
- [12] J.E. Goell, "A circular-harmonic computer analysis of rectangular dielectric waveguides", Bell Syst. Tech. J., vol. 48, pp. 2133-2160, Set. 1969.
- [13] R.M. Knox e P.D. Toullos, "Integrated circuits for the millimeter through optical frequency range", em Proc. of the Symp. Submillimeter Waves (New York), Mar. 1970, pp. 497-516.
- [14] R.M. Knox, "Dielectric waveguides: a low-cost option for IC's", Microwaves, pp. 56-64, Mar. 1976.
- [15] M. Ikeuchi, H. Swami e H. Niki, "Analysis of open-type dielectric waveguides by the finite element iterative method", IEEE Trans. Microwave Theory Tech., vol. MTT-29, pp. 234-239, Mar. 1981.
- [16] S.-T. Peng e A.A. Oliner, "Guidance and leakage properties of a class of open dielectric waveguides: Part I - Mathematical formulations", IEEE Trans. Microwave Theory Tech., vol. MTT-29, pp. 843-855, Set. 1981.
- [17] A.A. Oliner, S.-T. Peng, T.I. Hsu e A. Sanchez, "Guidance and leakage properties of a class of open dielectric waveguides: Part II - New physical effects", IEEE Trans. Microwave Theory Tech., vol. MTT-29, pp. 855-869, Set. 1981.
- [18] G.L. Matthaei, "A note concerning modes in dielectric waveguide gratings for filter applications", IEEE Trans. Microwave Theory Tech., vol. MTT-31, pp. 309-312, Mar. 1983.
- [19] G.L. Matthaei, D. Park, Y.M. Kim e D.L. Johnson, "A study of the filter properties of single and parallel-coupled dielectric waveguide gratings", IEEE Trans. Microwave Theory Tech., vol. MTT-31, pp. 825-835, Out. 1983.

- [20] T. Yoneyama e S. Nishida, "Nonradiative dielectric waveguide for millimeter-wave integrated circuits", IEEE Trans. Microwave Theory Tech., vol. MTT-29, pp. 1188-1192, Nov. 1981.
- [21] T. Yoneyama, F. Kuroki e S. Nishida, "Design of nonradiative dielectric waveguide filters", IEEE Trans. Microwave Theory Tech., vol. MTT-32, pp. 1659-1662, Dez. 1984.
- [22] A.L. Cullen, O. Ozkan e L.A. Jackson, "Point-matching technique for rectangular cross-section dielectric rod", Electron. Letters, vol. 7, nº 17, pp. 497-499, Agos. 1971.
- [23] A.L. Cullen e O. Ozkan, "Coupled parallel rectangular dielectric waveguides", Proc. Int. Elec. Eng., vol. 122, nº 6, pp. 593-599, Jun. 1975.
- [24] C. Hafner e R. Ballisti, "Electromagnetic waves on cylindrical structures calculated by the method of moments and by the point-matching technique", em Dig. Int. IEEE/AP-S Symp., Jun. 1981, pp. 331-333.
- [25] J.R. James e I.N.L. Gallet, "Modal analysis of triangular-cored glass-fibre waveguide", Proc. Inst. Elec. Eng., vol.120, nº 11, pp. 1362-1370, Nov. 1973.
- [26] E.F. Keuster e R.C. Pate, "Fundamental mode propagation on dielectric fibres of arbitrary cross section", Proc. Inst. Elec. Eng., vol. 127, pt. H, nº 1, pp. 41-51, Fev. 1980.
- [27] L. Eyges, P. Gianino, e P. Wintersteiner, "Modes of dielectric waveguides of arbitrary cross sectional shape", J. Opt. Soc. Am., vol. 69, nº 9, pp. 1226-1235, Set. 1979.
- [28] C.G. Williams e G.K. Cambrell, "Computation of surface waveguide modes by use of reactance boundary conditions", Electron. Lett. vol. 7, nº 12, pp. 323 - 324, Jun. 1971.

- [29] \_\_\_\_\_, "Numerical solution of surface waveguide modes using transverse field components", IEEE Trans. Microwave Theory Tech., vol. MTT-22, pp. 329-330, Mar. 1974.
- [30] P. Daly, "Hybrid-mode analysis of microstrip by finite-element methods", IEEE Trans. Microwave Theory Tech., vol. MTT-19, pp. 19-25, Jan. 1971.
- [31] C. Yeh, S.B. Dong e W. Oliver, "Arbitrarily shaped inhomogeneous optical fiber or integrated optical waveguides", J. Appl. Phys., vol. 46, pp. 2125-2129, Maio 1975.
- [32] C. Yeh, K. Ha, S.B. Dong e W.P. Brown, "Single-mode optical waveguides", Appl. Opt., vol. 18, pp. 1490-1504, Maio 1979.
- [33] N. Mabaya, P.E. Lagasse e P. Vandenbulckle, "Finite element analysis of optical waveguides", IEEE Trans. Microwave Theory Tech., vol. MTT-29, pp. 600-605, Jun. 1981.
- [34] K. Oyamada e T. Okoshi, "Two-dimensional finite-element calculation of propagation characteristics of axially nonsymmetrical optical fibers", Radio Sci., vol. 17, pp. 109-116, Jan.-Fev. 1982.
- [35] D. Welt e J. Webb, "Finite-element analysis of dielectric waveguides with curved boundaries", IEEE Trans. Microwave Theory Tech., vol. MTT-33, pp. 576-585, Jul. 1985.
- [36] A. Konrad, "Vector variational formulation of electromagnetic fields in anisotropic media", IEEE Trans. Microwave Theory Tech., vol. MTT-24, pp. 553-559, Set. 1976.
- [37] A. Konrad, "High-order triangular finite elements for electromagnetic waves in anisotropic media", IEEE Trans. Microwave Theory Tech., vol. MTT-25, pp. 353-360, Maio 1977.
- [38] B.M.A. Rahman e J.B. Davies, "Finite-element analysis of optical and microwave waveguide problems", IEEE Trans. Microwave Theory Tech., vol. MTT-32, pp. 20-28, Jan. 1984.

- [39] M. Koshiha, K. Hayata e M. Suzuki, "Vectorial finite-element formulation without spurious modes for dielectric waveguides" (em japonês), Trans. Inst. Electron. Commun. Eng. Japan, vol. E67, pp. 191-196, Abr. 1984.
- [40] M. Koshiha, K. Hayata e M. Suzuki, "Vectorial finite-element method without spurious solutions for dielectric waveguide problems", Electron. Lett., vol. 20, pp. 409-410, Maio 1984.
- [41] B.M.A. Rahman e J.B. Davies, "Penalty function improvement of waveguide solution by finite elements", IEEE Trans. Microwave Theory Tech., vol. MTT-32, pp. 922-928, Agos. 1984.
- [42] M. Hano, "Finite-element analysis of dielectric-loaded waveguides", IEEE Trans. Microwave Theory Tech., vol. MTT-32, pp. 1275-1279, Out. 1984.
- [43] M. Koshiha, K. Hayata e M. Suzuki, "Study of spurious solutions of finite-element methods in the three-component magnetic-field formulation for dielectric waveguide problems" (em japonês), Trans. Inst. Electron. Commun. Eng. Japan, vol. J67-B, pp. 1333-1338, Dez. 1984.
- [44] M. Koshiha, K. Hayata e M. Suzuki, "Improved finite-element formulation in terms of the magnetic-field vector for dielectric waveguides", IEEE Trans. Microwave Theory Tech., vol. MTT-33, pp. 227-233, Mar. 1985.
- [45] M. Koshiha, K. Hayata e M. Suzuki, "Finite-element formulation in terms of the electric-field vector for electromagnetic waveguide problems", IEEE Trans. Microwave Theory Tech., vol. MTT-33, pp. 900-906, Out. 1985.
- [46] K. Hayata, M. Koshiha, M. Eguchi, e M. Suzuki, "Vectorial finite-element method without any spurious solutions for dielectric waveguiding problems using transverse magnetic-field component", IEEE Trans. Microwave Theory Tech., vol. MTT-34, pp. 1120-1124, Nov. 1986.
- [47] M. Koshiha, K. Hayata, e M. Suzuki, "Approximate scalar finite-element analysis of anisotropic optical waveguides", Electron. Lett., vol. 18, nº 10, pp. 411-412, 13 Maio 1982.

- [48] E. Schweig e W.B. Bridges, "Computer analysis of dielectric waveguides: A finite-difference method", IEEE Trans. Microwave Theory Tech., vol. MTT-32, pp. 531-541, Maio 1984.
- [49] J.B. Davies e C.A. Mulwyk, "Numerical solution of uniform hollow waveguides of arbitrary shape", Proc. Inst. Elec. Eng., vol. 113, pp. 277-284, Fev. 1966.
- [50] M.J. Baubien e A. Wexler, "An accurate finite-difference method for higher order waveguide modes", IEEE Trans. Microwave Theory Tech., vol. MTT-16, pp. 1007-1017, Dez. 1968.
- [51] J.S. Hornsby e A. Gopinath, "Numerical analysis of a dielectric-loaded waveguide with a microstrip line - finite difference methods", IEEE Trans. Microwave Theory Tech., vol. MTT-17, pp. 684-690, Set. 1969.
- [52] D.G. Corr e J.B. Davies, "Computer analysis of the fundamental and higher order modes in single and coupled microstrip", IEEE Tans. Microwave Theory Tech., vol. MTT-20, pp. 669-678, Out. 1972.
- [53] R.K. Lagu, e R.V. Ramaswamy, "A variational finite-difference method for analyzing channel waveguides with arbitrary index profiles", IEEE Journal of Quantum Electronics, vol. QE-22, nº 6, pp. 968-976, Jun. 1986.
- [54] K. Bierwirth, N. Schulz, e F. Arndt, "Finite-difference analysis of rectangular dielectric waveguide structures", IEEE Trans. Microwave Theory Tech., vol. MTT-34, pp. 1104-1114, Nov. 1986.
- [55] N. Schulz, K. Bierwirth, F. Arndt e U. Köster, "Finite-difference method without spurious solutions for the hybrid-mode analysis of diffused channel waveguides", IEEE Trans. Microwave Theory Tech., vol. 38, pp. 722 - 729, Jun. 1990.
- [56] N. Schulz, K. Bierwirth, F. Arndt e U. Köster, "Rigorous finite-difference analysis of coupled channel waveguides with arbitrarily varying index profile", J. Lightwave Technol., vol. 9, nº 10, pp. 1244-1253, Out. 1991.

- [57] R.P. Oliveira, "Análise de guias dielétricos retangulares acoplados pelo método das diferenças finitas", 1991, Tese de Mestrado, FEE-UNICAMP, Campinas - SP.
- [58] U. Crombach, "Analysis of single and coupled rectangular dielectric waveguide", IEEE Trans. Microwave Theory Tech., vol. MTT-29, nº 9, pp. 870-874, Set. 1981.
- [59] H. Yang, J.A. Castaneda, e N.G. Alexopoulos, "An integral equation analysis of an infinite array of rectangular dielectric waveguides", IEEE Trans. Microwave Theory Tech., vol. 38, nº 7, pp. 873-880, Jul. 1990.
- [60] J.B. Davies, "Finite element solution of microwave and optical waveguides", em SBMO.91 - International Microwave Conference/Brazil, Rio de Janeiro, pp. 40-49, Julho 1991.
- [61] C.L. da S.S. Sobrinho e A.J. Giarola, "Analysis of rectangular anisotropic dielectric waveguide structures", em 1991 IEEE Antennas and Propagation Society Symposium Digest - University of Western Ontario - Canada, pp. 500-503, Jun. 1991.
- [62] C.L. da S.S. Sobrinho e A.J. Giarola, "Finite-difference method for the analysis of an infinite array of rectangular dielectric waveguides", em Proceedings of the Sixteenth International Conference on Infrared and Millimeter Waves, Lausanne - Switzerland, pp. 375-376, Set. 1991.
- [63] C.L. da S.S. Sobrinho e A.J. Giarola, "Analysis of an infinite array of rectangular anisotropic dielectric waveguides using the finite-difference method", IEEE Trans. Microwave Theory Tech., vol. MTT-40, pp. 1021-25, Maio 1992.
- [64] C.L. da S.S. Sobrinho e A.J. Giarola, "Analysis of anisotropic dielectric channel waveguides with Gaussian-Gaussian index of refraction profiles using the finite-difference method", aceito em 1992 Joint Symposia, IEEE - APS/URSI/NEM International Symposium, Chicago-USA, Jul. 1992.

- [65] C.L. da S.S. Sobrinho e A.J. Giarola, "Uso do método rigoroso das diferenças finitas na análise de guia de onda dielétrico anisotrópico e retangular", aceito em TELEMO'92 - UnB, Brasília - Brasil, Jul. 1992.
- [66] C.L. da S.S. Sobrinho e A.J. Giarola, "Analysis of anisotropic dielectric waveguides with Gaussian-Gaussian index of refraction profiles by the finite-difference method", submetido ao Proc. Inst. Elec. Eng., 1992.
- [67] C.L. da S.S. Sobrinho e A.J. Giarola, "Analysis of optical fibers having an uniaxial anisotropic dielectric with a variable index of refraction profile, by the finite-difference method" submetido à 17th International Conference on Infrared and Millimeter Waves, Pasadena - USA, Dez. 1992.
- [68] C.L. da S.S. Sobrinho e A.J. Giarola, "Analysis of rectangular anisotropic dielectric waveguides by the finite-difference method", submetido à 17th International Conference on Infrared and Millimeter Waves, Pasadena - USA, Dez. 1992.

## CAPÍTULO 2

### FORMULAÇÃO DO PROBLEMA PELO MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS

Seja um guia de onda cilíndrico, infinito, de seção reta arbitrária e constante ao longo de seu eixo. Seja ele formado por dielétrico anisotrópico e com perfil de índice de refração variando arbitrariamente em sua seção transversal. Considere, também, que o guia esteja imerso em um dielétrico anisotrópico e com perfil de índice de refração variando de forma arbitrária. Neste trabalho, as perdas não são consideradas.

A estrutura definida acima é posicionada em um sistema de coordenadas retangulares, de tal forma que o eixo do guia de onda tenha a mesma direção do eixo  $z$ , e que os eixos ópticos dos dielétricos coincidam com as direções dos eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$  (Fig. 2.1).

Pela característica bidimensional do problema, a equação de onda vetorial que descreve a propagação de onda é expressa em termos das componentes transversais do campo magnético na seção transversal do guia (Fig. 2.2). Desta forma, duas equações diferenciais de segunda ordem são, então, obtidas.

Com o objetivo de contornar o problema de modos espúrios, a condição do divergente do campo magnético igual a zero é incluída implicitamente na formulação e produz a expressão para a componente longitudinal do campo magnético, usada para satisfazer as condições de contorno nas interfaces das regiões da malha gradual de pontos (Fig. 2.3).

A solução das equações diferenciais é obtida numericamente através do método das diferenças finitas. A formulação assim desenvolvida resultará em um

problema de autovalores, cuja solução é bem conhecida.

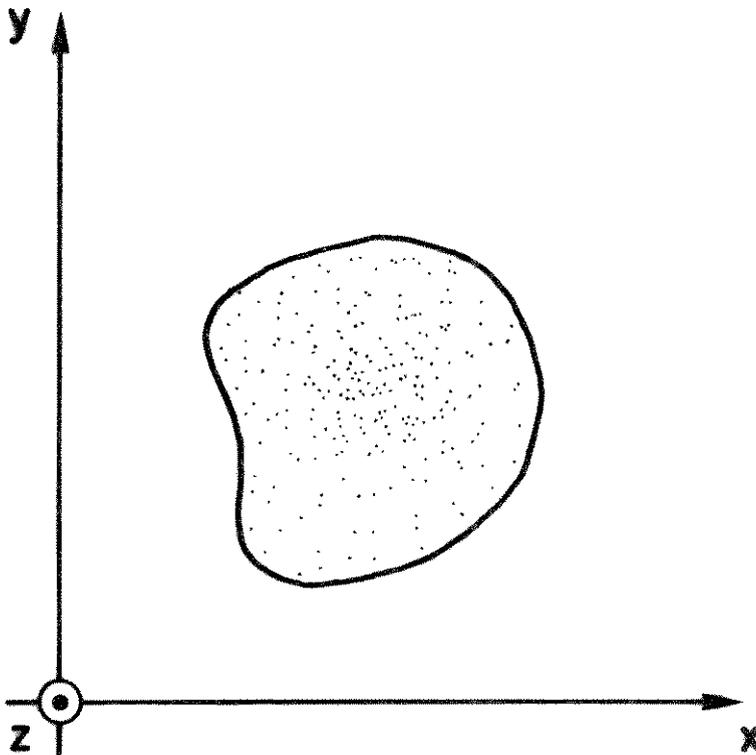


Fig. 2.1 - Seção transversal do guia de onda dielétrico anisotrópico imerso em um dielétrico, também, anisotrópico.

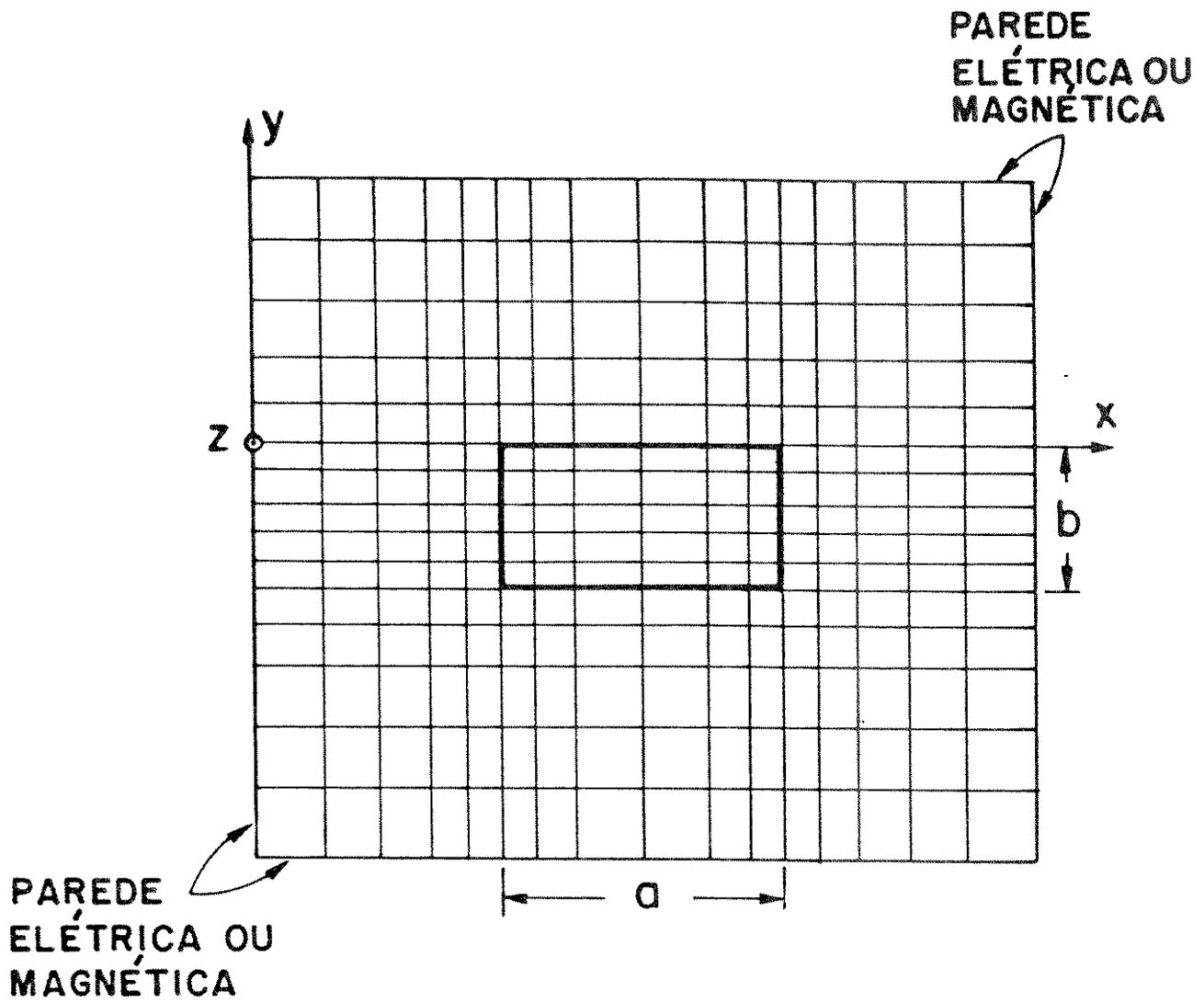


Fig. 2.2 - Malha gradual da representação das diferenças finitas.

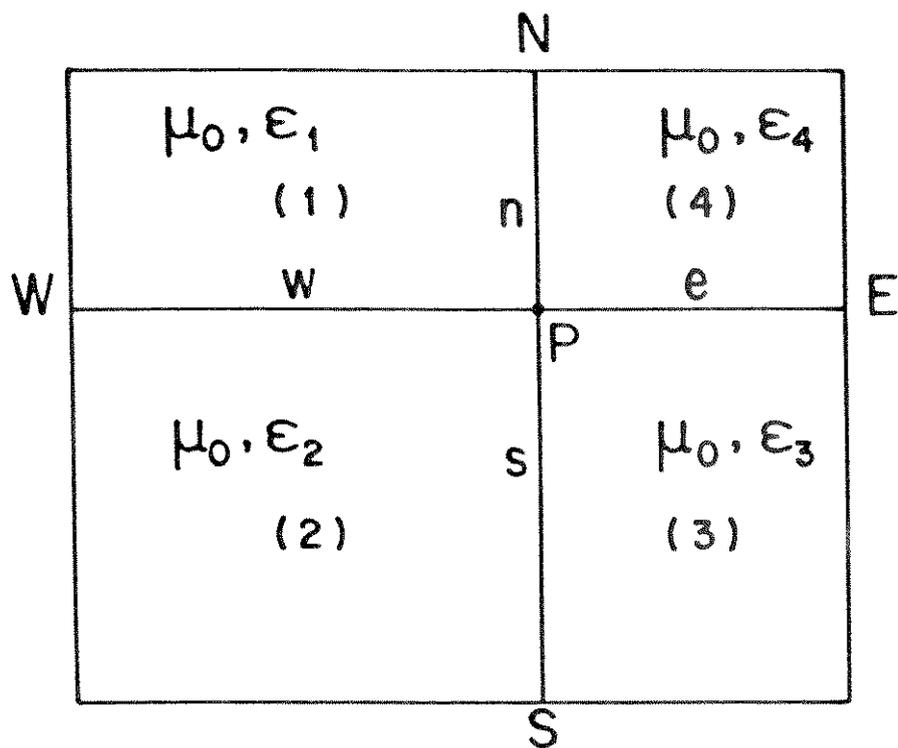


Fig. 2.3 - Malha gradual da representação dos cinco pontos.

## 2.1 - A EQUAÇÃO DE ONDA ESCALAR

Na formulação descrita aqui, o caso mais geral de dielétricos anisotrópicos biaxiais são considerados. Seus eixos ópticos são posicionados de modo que coincidam com os eixos do sistema de coordenadas mostrados na Fig. 2.2. Como resultado, o tensor permissividade,  $[\epsilon]$ , pode ser escrito como:

$$[\epsilon] = \begin{bmatrix} \epsilon_x(x,y) & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_y(x,y) & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_z(x,y) \end{bmatrix} . \quad (2.1)$$

Como estamos considerando materiais dielétricos, a permeabilidade magnética é feita igual à do espaço livre,  $\mu = \mu_0$ . Os campos são supostos com dependência harmônica no tempo, expressa por  $\exp(j\omega t)$ , e propagando-se ao longo da direção  $z$ , com dependência em  $z$  da forma  $\exp(-\gamma_z z)$ , onde  $\omega$  é a frequência angular e  $\gamma_z$  é a constante de propagação. Desta forma, as equações de Maxwell podem, então, ser escritas da seguinte maneira:

$$\nabla \times \bar{E} = -j\omega\mu\bar{H} , \quad (2.2)$$

$$\nabla \times \bar{H} = j\omega[\epsilon] \bar{E} , \quad (2.3)$$

$$\nabla \cdot ([\epsilon] \bar{E}) = 0 , \quad (2.4)$$

$$\nabla \cdot (\mu \bar{H}) = 0 . \quad (2.5)$$

Nestas equações,  $\bar{H}$  e  $\bar{E}$  representam os vetores campo magnético e elétrico, respectivamente.

A equação de onda vetorial, descrevendo a propagação ao longo de um guia de ondas cilíndrico, com seção transversal não homogênea, mas uniforme na direção de propagação, e material dielétrico anisotrópico, pode ser expressa em termos de duas componentes de campo, das quais as componentes longitudinais do

campo magnético ( $H_z$ ) e do campo elétrico ( $E_z$ ) são geralmente usadas [1], [2]. A formulação em termos das componentes transversais  $H_x$  e  $H_y$  do campo magnético é preferida, uma vez que, pela inclusão implícita do divergente do campo magnético igual à zero ( $\nabla \cdot \vec{H} = 0$ ) [3]-[5], a mesma contorna o problema dos modos espúrios, que ocorre no caso anterior. Desta forma, o problema é transformado em um problema de autovalores convencional, com a vantagem de que a sua solução é bem conhecida. Com este objetivo, as equações (2) e (3) são primeiramente escritas na forma matricial como:

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} = \frac{1}{j\omega} \begin{bmatrix} \epsilon_x^{-1}(x,y) \left( \frac{\partial}{\partial y} H_z - \frac{\partial}{\partial z} H_y \right) \\ \epsilon_y^{-1}(x,y) \left( \frac{\partial}{\partial z} H_x - \frac{\partial}{\partial x} H_z \right) \\ \epsilon_z^{-1}(x,y) \left( \frac{\partial}{\partial x} H_y - \frac{\partial}{\partial y} H_x \right) \end{bmatrix}, \quad (2.6)$$

$$\begin{bmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{bmatrix} = \frac{j}{\mu\omega} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial y} E_z - \frac{\partial}{\partial z} E_y \\ \frac{\partial}{\partial z} E_x - \frac{\partial}{\partial x} E_z \\ \frac{\partial}{\partial x} E_y - \frac{\partial}{\partial y} E_x \end{bmatrix}, \quad (2.7)$$

respectivamente. Onde  $E_x$ ,  $E_y$ ,  $E_z$  e  $H_x$ ,  $H_y$ ,  $H_z$  representam as intensidades das componentes dos campos elétrico e magnético nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$ , respectivamente (Fig. 2.2). Substituindo-se a equação (2.6) em (2.7), obtém-se as equações acopladas para  $H_x$  e  $H_y$ :

$$H_{\alpha} = \frac{1}{\omega^2 \mu} \left[ \left( \frac{\partial}{\partial \alpha} H_{\tau} - \frac{\partial}{\partial \tau} H_{\alpha} \right) \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{1}{\epsilon_z(x,y)} \right) + \frac{1}{\epsilon_z(x,y)} \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \tau} H_{\tau} - \right. \\ \left. - \frac{1}{\epsilon_z(x,y)} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} H_{\alpha} - \frac{1}{\epsilon_{\tau}(x,y)} \frac{\partial^2}{\partial z^2} H_{\alpha} + \frac{1}{\epsilon_{\tau}(x,y)} \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial z} H_z \right], \quad (2.8)$$

onde  $\alpha = x$  quando  $\tau = y$  e  $\alpha = y$  quando  $\tau = x$ . Da equação (2.5), pode-se escrever:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \left[ - \frac{\partial H_z}{\partial z} \right] = \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} H_{\alpha} + \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \tau} H_{\tau}, \quad (2.9)$$

que, substituída em (2.8), e considerando-se que  $\frac{\partial^2}{\partial z^2} H_{\alpha \text{ ou } \tau} = \gamma_z^2 H_{\alpha \text{ ou } \tau}$ , chega-se às seguintes equações de ondas acopladas:

$$\frac{\epsilon_{\alpha}(x,y)}{\epsilon_z(x,y)} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} H_{\tau} + \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} H_{\tau} + \frac{\epsilon_z(x,y) - \epsilon_{\alpha}(x,y)}{\epsilon_z(x,y)} \frac{\partial^2}{\partial \tau \partial \alpha} H_{\alpha} + \\ + \frac{\epsilon_{\alpha}(x,y)}{\epsilon_z^2(x,y)} \frac{\partial}{\partial \alpha} \epsilon_z(x,y) \left[ \frac{\partial}{\partial \tau} H_{\alpha} - \frac{\partial}{\partial \alpha} H_{\tau} \right] + \left[ k_0^2 \frac{\epsilon_{\alpha}(x,y)}{\epsilon_0} + \gamma_z^2 \right] H_{\tau} = 0, \quad (2.10)$$

onde  $\epsilon_0$  é a permissividade do espaço livre,  $k_0 = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$  é o número de onda e, novamente,  $\alpha=x$  quando  $\tau=y$  e  $\alpha=y$  quando  $\tau=x$ .

A componente longitudinal do campo elétrico é obtida diretamente de (2.6), com o resultado:

$$E_z = \frac{1}{j\omega\epsilon_z(x,y)} \left[ \frac{\partial}{\partial x} H_y - \frac{\partial}{\partial y} H_x \right], \quad (2.11)$$

e a componente longitudinal do campo magnético é obtida de (2.5), como:

$$H_z = \frac{1}{\gamma_z} \left[ \frac{\partial}{\partial x} H_x + \frac{\partial}{\partial y} H_y \right]. \quad (2.12)$$

## 2.2 - APROXIMAÇÃO NUMÉRICA POR DIFERENÇAS FINITAS

Para desenvolver-se a técnica das diferenças finitas na solução numérica de (2.10), uma malha gradual de pontos é desenhada na seção transversal do guia de ondas, como mostra a Fig. 2.2. Nesta figura, um guia dielétrico de seção reta retangular é usado por conveniência, mas a formulação continua sendo geral. Desta forma, um ponto genérico P está distante de seus quatro pontos vizinhos ao norte, sul, leste e oeste por n, s, e, w, respectivamente, como mostrado na Fig. 2.3. As equações acopladas (2.10) são, então, usadas para escrever as equações para as componentes transversais,  $H_x$  e  $H_y$ , do campo magnético para o ponto P (Fig. 2.3). Isto é realizado, inicialmente, aplicando-se (2.10) para cada uma das regiões 1, 2, 3 e 4 da Fig. 2.3. Resultam então 8 (oito) equações que, escritas na forma das diferenças finitas dos cinco pontos (Fig. 2.3) [6], podem ser expressas da seguinte forma:

$$\frac{\epsilon_{\alpha\ell}(x,y)}{\epsilon_{z\ell}(x,y)} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} H_\tau \Big|_\ell + \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} H_\tau \Big|_\ell + \frac{\epsilon_{z\ell}(x,y) - \epsilon_{\alpha\ell}(x,y)}{\epsilon_{z\ell}(x,y)} \frac{\partial^2}{\partial \tau \partial \alpha} H_\alpha \Big|_\ell + \frac{\epsilon_{\alpha\ell}(x,y)}{\epsilon_{z\ell}^2(x,y)} \cdot$$

$$\cdot \frac{\partial}{\partial \alpha} \epsilon_{z\ell}(x,y) \left[ \frac{\partial}{\partial \tau} H_\alpha \Big|_\ell - \frac{\partial}{\partial \alpha} H_\tau \Big|_\ell \right] + \left[ k_o^2 \frac{\epsilon_{\alpha\ell}(x,y)}{\epsilon_o} + \gamma_z^2 \right] H_{\tau P} = 0. \quad (2.13)$$

O mesmo é feito para as componentes longitudinais dos campos elétrico e magné-

tico (equações (2.11) e (2.12), respectivamente). Como resultado obtém-se:

$$E_{z\ell} = \frac{1}{j\omega\epsilon_{z\ell}(x,y)} \left[ \frac{\partial}{\partial x} H_y \Big|_{\ell} - \frac{\partial}{\partial y} H_x \Big|_{\ell} \right], \quad (2.14)$$

$$H_{z\ell} = \frac{1}{\gamma_z} \left[ \frac{\partial}{\partial x} H_x \Big|_{\ell} + \frac{\partial}{\partial y} H_y \Big|_{\ell} \right], \quad (2.15)$$

onde  $\ell = 1, 2, 3, 4$  e representa as regiões 1, 2, 3 e 4 da Fig. 2.3.

Para as equações expressas em (2.13),  $\epsilon_{\alpha\ell}(x,y)$ ,  $\epsilon_{z\ell}(x,y)$ , e as derivadas de  $\epsilon_{z\ell}(x,y)$ , são obtidas analiticamente através das equações que definem os perfis de índice de refração (como será visto nos exemplos propostos). As derivadas de primeira e segunda ordens das componentes transversais do campo magnético (equações (2.13), (2.14) e (2.15)) são obtidas expandindo-se  $H_x$  e  $H_y$  em série de Taylor ao redor do ponto P, tendo como vizinhos os pontos N, S, E e W, mostrados na Fig. 2.3 [5]. Desta forma, as derivadas de primeira ordem são aproximadamente obtidas pelo truncamento das séries até termos em primeira potência da distância:

$$H_{N1,4} \cong H_P + n \frac{\partial H}{\partial y} \Big|_{1,4}, \quad (2.16)$$

$$H_{S2,3} \cong H_P - s \frac{\partial H}{\partial y} \Big|_{2,3}, \quad (2.17)$$

$$H_{E3,4} \cong H_P + e \frac{\partial H}{\partial x} \Big|_{3,4}, \quad (2.18)$$

$$H_{W1,2} \cong H_P - w \frac{\partial H}{\partial x} \Big|_{1,2}, \quad (2.19)$$

As derivadas de segunda ordem são aproximadamente obtidas pelo truncamento das séries até termos em segunda potência da distância:

$$H_{N1,4} \cong H_P + n \left. \frac{\partial H}{\partial y} \right|_{1,4} + \frac{1}{2} n^2 \left. \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} \right|_{1,4}, \quad (2.20)$$

$$H_{S2,3} \cong H_P - s \left. \frac{\partial H}{\partial y} \right|_{2,3} + \frac{1}{2} s^2 \left. \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} \right|_{2,3}, \quad (2.21)$$

$$H_{E3,4} \cong H_P + e \left. \frac{\partial H}{\partial x} \right|_{3,4} + \frac{1}{2} e^2 \left. \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \right|_{3,4}, \quad (2.22)$$

$$H_{W1,2} \cong H_P - w \left. \frac{\partial H}{\partial x} \right|_{1,2} + \frac{1}{2} w^2 \left. \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \right|_{1,2}. \quad (2.23)$$

As derivadas mistas, da forma:

$$\left. \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} \right|_{1,2,3,4} = \frac{1}{2} \left\{ \left. \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial H}{\partial y} \right] \right|_{1,2,3,4} + \left. \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial H}{\partial x} \right] \right|_{1,2,3,4} \right\}, \quad (2.24)$$

são calculadas usando-se as aproximações para as derivadas de primeira ordem (equações (2.16), (2.17), (2.18) e (2.19)), resultando em:

$$\left. \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} \right|_1 \cong \frac{H_N - 2H_P + H_W}{2nw}, \quad (2.25)$$

$$\left. \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} \right|_2 \cong \frac{-H_S + 2H_P - H_W}{2sw}, \quad (2.26)$$

$$\left. \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} \right|_3 \cong \frac{H_E - 2H_P + H_S}{2es}, \quad (2.27)$$

$$\left. \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} \right|_4 \cong \frac{-H_N + 2H_P - H_E}{2en}, \quad (2.28)$$

As equações de (2.16) a (2.28), escritas em  $H$ , valem para ambas as componentes  $H_x$  ou  $H_y$ . Substituindo-se estas expressões em (2.13), obtém-se

$$\begin{aligned}
0 = & -\frac{m_{q\tau}}{m_{i\alpha}} H_{\alpha M_{i\alpha}} - \frac{m_{i\alpha}}{m_{q\tau}} \frac{\epsilon_{\tau l}}{\epsilon_{z l}} \left[ 1 \pm m_{q\tau} \frac{\epsilon_{z\tau l}}{2\epsilon_{z l}} \right] H_{\alpha M_{q\tau}} + \left[ \frac{m_{i\alpha}}{m_{q\tau}} \frac{\epsilon_{\tau l}}{\epsilon_{z l}} \left( 1 \pm m_{q\tau} \frac{\epsilon_{z\tau l}}{2\epsilon_{z l}} \right) + \frac{m_{q\tau}}{m_{i\alpha}} \right] \\
& \cdot H_{\alpha p} - \frac{1}{2} m_{q\tau} m_{i\alpha} \left[ \omega^2 \mu \epsilon_{\tau l} + \gamma_z^2 \right] H_{\alpha p} + \left[ \pm m_{q\tau} \frac{\epsilon_{\tau l}}{2\epsilon_{z l}^2} \epsilon_{z\tau l} \pm \frac{\epsilon_{z l} - \epsilon_{\tau l}}{4\epsilon_{z l}} \right] H_{\tau M_{i\alpha}} \pm \frac{\epsilon_{z l} - \epsilon_{\tau l}}{4\epsilon_{z l}} \\
& \cdot H_{\tau M_{q\tau}} + \left[ \pm m_{q\tau} \frac{\epsilon_{\tau l}}{2\epsilon_{z l}^2} \epsilon_{z\tau l} \pm \frac{\epsilon_{z l} - \epsilon_{\tau l}}{2\epsilon_{z l}} \right] H_{\tau p} \pm m_{i\alpha} \frac{\epsilon_{\tau l}}{\epsilon_{z l}} H_{\alpha\tau l} \pm m_{q\tau} H_{\alpha\alpha l}, \quad (2.29)
\end{aligned}$$

onde  $m_{i\alpha} = w$  ou  $e$ ;  $m_{q\tau} = n$  ou  $s$ ;  $M_{i\alpha} = W$  ou  $E$ ;  $M_{q\tau} = N$  ou  $S$ , para  $\alpha = x$  quando  $\tau = y$  e  $m_{i\alpha} = n$  ou  $s$ ;  $m_{q\tau} = w$  ou  $e$ ;  $M_{i\alpha} = N$  ou  $S$ ;  $M_{q\tau} = W$  ou  $E$ , para  $\alpha = y$  quando  $\tau = x$ ;  $\epsilon_{\tau l} = \epsilon_{\tau l}(x,y)$ ;  $\epsilon_{z l} = \epsilon_{z l}(x,y)$ ;

$$\epsilon_{z\tau l} = \frac{\partial \epsilon_z(x,y)}{\partial \tau} \Big|_{\ell}; \quad H_{\alpha\tau l} = \frac{\partial H_{\alpha}}{\partial \tau} \Big|_{\ell}; \quad H_{\alpha\alpha l} = \frac{\partial H_{\alpha}}{\partial \alpha} \Big|_{\ell}.$$

O índice  $\ell = 1, 2, 3$  ou  $4$  representa as regiões  $1, 2, 3$  e  $4$ , mostradas na Fig. 2.3, respectivamente;  $i$  e  $q$  assumem os seguintes pares de valores  $(i,q) = (1;1), (1;2), (2;2), (2;1)$  com  $\alpha = x$  quando  $\tau = y$  e os pares de valores  $(i;q) = (1;1), (2;1), (2;2), (1;2)$  com  $\alpha = y$  quando  $\tau = x$ , para as regiões  $1, 2, 3$  e  $4$  (Fig. 2.3), respectivamente. Nesta equação encontram-se implícitas  $8$  (oito) equações, duas para cada uma das regiões da Fig. 2.3 (o desenvolvimento destas equações encontra-se no Apêndice A: equações (A.3), (A.4), (A.7), (A.8), (A.9), (A.10), (A.11), e (A.12).

### 2.3 - O SISTEMA DE EQUAÇÕES LINEARES HOMOGÊNEAS

Para se transformarem as equações acopladas (2.29) em um sistema de equações lineares homogêneas, inicialmente multiplicam-se as equações (A.3), (A.4), (A.7), (A.8), (A.9), (A.10), (A.11), e (A.12) pelas expressões:

$- 2\varepsilon_{z2}/(n\varepsilon_{z2} + s\varepsilon_{z1}), - 2\varepsilon_{z1}/(s\varepsilon_{z1} + n\varepsilon_{z2}), - 2\varepsilon_{z4}/(n\varepsilon_{z3} + s\varepsilon_{z4}),$   
 $- 2\varepsilon_{z3}/(n\varepsilon_{z3} + s\varepsilon_{z4}), - 2w\varepsilon_{z2}/(n^2\varepsilon_{z2} + ns\varepsilon_{z1}), + 2w\varepsilon_{z1}/(s^2\varepsilon_{z1} + ns\varepsilon_{z2}),$   
 $- 2e\varepsilon_{z4}/(nse_{z3} + s^2\varepsilon_{z4}), + 2e\varepsilon_{z3}/(n^2\varepsilon_{z3} + nse_{z4}),$  respectivamente. As equações, assim obtidas, são somadas e a equação resultante é apresentada no Apêndice B (equação B.1). De forma semelhante, uma segunda equação é obtida, multiplicando-se as mesmas equações (A.3), (A.4), (A.7), (A.8),..., e (A.12) pelas expressões:

$$\begin{aligned}
 & - 2n\varepsilon_{z4}/(ew\varepsilon_{z1} + w^2\varepsilon_{z4}), + 2s\varepsilon_{z3}/(ew\varepsilon_{z2} + w^2\varepsilon_{z3}), \\
 & - 2s\varepsilon_{z2}/(e^2\varepsilon_{z2} + ew\varepsilon_{z3}), + 2n\varepsilon_{z1}/(e^2\varepsilon_{z1} + ew\varepsilon_{z4}), \\
 & - 2\varepsilon_{z4}/(e\varepsilon_{z1} + w\varepsilon_{z4}), - 2\varepsilon_{z3}/(e\varepsilon_{z2} + w\varepsilon_{z3}), \\
 & - 2\varepsilon_{z2}/(e\varepsilon_{z2} + w\varepsilon_{z3}), - 2\varepsilon_{z1}/(e\varepsilon_{z1} + w\varepsilon_{z4}), \text{ respectivamente.}
 \end{aligned}$$

As equações, assim obtidas, são somadas e a equação resultante é apresentada no Apêndice B (equação B.8). As equações (B.1) e (B.8) são apresentadas no Apêndice B por se tratarem de equações muito grandes. elas estão expressas em termos das componentes transversais,  $H_x$  e  $H_y$ , do campo magnético nos pontos N, S, E, W e P (Fig. 2.3).

### 2.3.1 - CONDIÇÕES DE CONTORNO PARA A MALHA GRADUAL DE CINCO PONTOS

Nas interfaces entre as 4 (quatro) regiões da malha gradual de cinco pontos (Fig. 2.3), as condições de contorno, que requerem a continuidade da componente longitudinal do campo elétrico ( $E_z$ ) e do campo magnético ( $H_z$ ), são, então, impostas. Destas condições obtém-se diversas relações entre as derivadas das componentes transversais de campo magnético,  $H_x$  e  $H_y$ . Dos vários grupos de relações possíveis [3], escolheu-se, para  $H_x$ , o seguinte:  $E_{z1} = E_{z2}$ ,  $E_{z3} = E_{z4}$ .

$H_{z1} = H_{z2}$ ,  $H_{z3} = H_{z4}$ ,  $H_{z1} = H_{z4}$ . Estas relações, associadas com as equações (2.14) e (2.15), produzem [3]:

$$-\frac{1}{\epsilon_{z1}} H_{xy1} + \frac{1}{\epsilon_{z2}} H_{xy2} + \frac{1}{\epsilon_{z1}} H_{yx1} - \frac{1}{\epsilon_{z2}} H_{yx2} = 0 ,$$

$$\frac{1}{\epsilon_{z3}} H_{xy3} - \frac{1}{\epsilon_{z4}} H_{xy4} - \frac{1}{\epsilon_{z3}} H_{yx3} + \frac{1}{\epsilon_{z4}} H_{yx4} = 0 ,$$

$$H_{xx1} - H_{xx2} + H_{yy1} - H_{yy2} = 0 ,$$

$$H_{xx3} - H_{xx4} + H_{yy3} - H_{yy4} = 0 ,$$

$$H_{xx1} - H_{xx4} + H_{yy1} - H_{yy4} = 0 , \quad (2.30a)$$

respectivamente. Para  $H_y$  escolheu-se:  $E_{z1} = E_{z4}$ ,  $E_{z2} = E_{z3}$ ,  $H_{z1} = H_{z4}$ ,  $H_{z2} = H_{z3}$ ,

$H_{z1} = H_{z2}$ , que, associadas às equações (2.14) e (2.15), resultam nas seguintes expressões:

$$-\frac{1}{\epsilon_{z1}} H_{xy1} + \frac{1}{\epsilon_{z4}} H_{xy4} + \frac{1}{\epsilon_{z1}} H_{yx1} - \frac{1}{\epsilon_{z4}} H_{yx4} = 0 ,$$

$$\frac{1}{\epsilon_{z3}} H_{xy3} - \frac{1}{\epsilon_{z2}} H_{xy2} - \frac{1}{\epsilon_{z3}} H_{yx3} + \frac{1}{\epsilon_{z2}} H_{yx2} = 0 ,$$

$$H_{xx1} - H_{xx4} + H_{yy1} - H_{yy4} = 0 ,$$

$$H_{xx3} - H_{xx2} + H_{yy3} - H_{yy2} = 0 ,$$

$$H_{xx2} - H_{xx1} + H_{yy2} - H_{yy1} = 0 , \quad (2.30b)$$

respectivamente. É importante salientar que o uso de outros grupos de relações pode implicar em resultados com convergência mais rápida ou lenta, e que, estes resultados serão tão mais próximos quanto mais fina for a malha de discretização (Fig. 2.2) usada. Esta conclusão foi obtida por K. Bierwirth *et al.* [3], onde a convergência dos resultados calculados para a característica de dispersão de uma dada estrutura é analisada como função de vários grupos de relações, inclusive para os grupos utilizados neste trabalho.

As equações expressas implicitamente em (2.29), associadas com os grupos de equações em (2.30), produzem a solução desejada para a equação de onda vetorial, que descreve a propagação ao longo do guia.

Através de algumas manipulações algébricas dos quatro últimos termos da equação (B.1) (A, B, C, e D) e considerando-se as equações de (2.16) a (2.19) e (2.30a), encontra-se a expressão geral:

$$0 = A_W H_{XW} + A_E H_{XE} + A_N H_{XN} + A_S H_{XS} + A_P H_{XP} + \\ + B_W H_{YW} + B_E H_{YE} + B_N H_{YN} + B_S H_{YS} + B_P H_{YP} + \gamma_z^2 A_{P\gamma} H_{XP} + \gamma_z^2 B_{P\gamma} H_{YP}, \quad (2.31)$$

como demonstrado no Apêndice C. De forma análoga, o mesmo pode ser feito para os quatro últimos termos da equação (B.8), levando-se em conta as equações (2.18), (2.19) e (2.30b). Como resultado, a seguinte expressão geral é obtida:

$$0 = C_W H_{YW} + C_E H_{YE} + C_N H_{YN} + C_S H_{YS} + C_P H_{YP} + \\ + D_W H_{XW} + D_E H_{XE} + D_N H_{XN} + D_S H_{XS} + D_P H_{XP} + \gamma_z^2 C_{P\gamma} H_{YP} + \gamma_z^2 D_{P\gamma} H_{XP}, \quad (2.32)$$

como demonstrado no Apêndice D. Os coeficientes  $A_W, A_E, A_N, A_S, A_P, B_W, B_E, B_N, B_S, B_P, A_{P\gamma}$  e  $B_{P\gamma}$  da equação (2.31) e  $C_W, C_E, C_N, C_S, C_P, D_W, D_E, D_N, D_S, D_P, C_{P\gamma}$  e  $D_{P\gamma}$  da equação (2.32), são funções dos parâmetros geométricos e eletromagnéticos da estrutura em análise, e suas expressões são apresentadas,

também, nos Apêndices C e D, respectivamente.

As equações (2.31) e (2.32) podem ser escritas de forma compacta da seguinte maneira:

$$\sum_{i=W,E,N,S} A_i H_{Xi} + \sum_{i=W,E,N,S} B_i H_{Yi} + A_P H_{XP} + B_P H_{YP} + \gamma_z^2 A_{P\gamma} H_{XP} + \gamma_z^2 B_{P\gamma} H_{YP} = 0, \quad (2.33)$$

$$\sum_{i=W,E,N,S} C_i H_{Yi} + \sum_{i=W,E,N,S} D_i H_{Xi} + D_P H_{XP} + C_P H_{YP} + \gamma_z^2 D_{P\gamma} H_{XP} + \gamma_z^2 C_{P\gamma} H_{YP} = 0. \quad (2.34)$$

As equações (2.33) e (2.34) podem ser desacopladas em termos de  $\gamma_z^2 H_{YP}$  e  $\gamma_z^2 H_{XP}$ . Para isto, pode-se multiplicar (2.33) por  $D_{P\gamma}$  e (2.34) por  $A_{P\gamma}$ , subtrair os resultados e dividir a equação resultante por  $(B_{P\gamma} D_{P\gamma} - C_{P\gamma} A_{P\gamma})$ . O resultado é:

$$\sum_{i=W,E,N,S} D^i H_{Xi} + \sum_{i=W,E,N,S} C^i H_{Yi} + D^P H_{XP} + C^P H_{YP} = -\gamma_z^2 H_{YP}, \quad (2.35)$$

Similarmente, multiplicando-se (2.33) por  $C_{P\gamma}$  e (2.34) por  $B_{P\gamma}$ , subtraindo-se os resultados e dividindo-se a equação resultante por  $(A_{P\gamma} C_{P\gamma} - D_{P\gamma} B_{P\gamma})$  resulta:

$$\sum_{i=W,E,N,S} A^i H_{Xi} + \sum_{i=W,E,N,S} B^i H_{Yi} + A^P H_{XP} + B^P H_{YP} = -\gamma_z^2 H_{XP}, \quad (2.36)$$

onde,

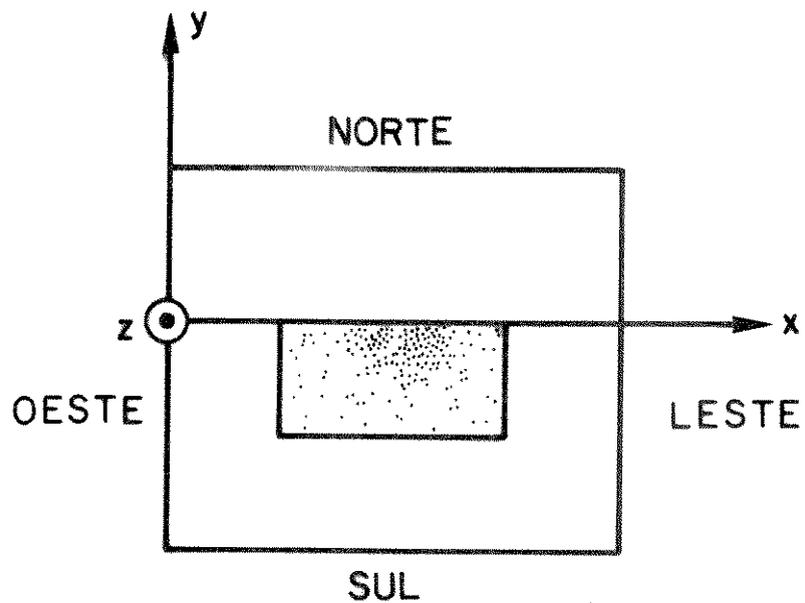
$$\begin{aligned} A^i &= (A_i C_{P\gamma} - D_i B_{P\gamma})/D; & B^i &= (B_i C_{P\gamma} - C_i B_{P\gamma})/D; \\ A^P &= (A_P C_{P\gamma} - D_P B_{P\gamma})/D; & B^P &= (B_P C_{P\gamma} - C_P B_{P\gamma})/D; \\ D^i &= (D_i A_{P\gamma} - A_i D_{P\gamma})/D; & C^i &= (C_i A_{P\gamma} - B_i D_{P\gamma})/D; \\ D^P &= (D_P A_{P\gamma} - A_P D_{P\gamma})/D; & C^P &= (C_P A_{P\gamma} - B_P D_{P\gamma})/D; \\ D &= A_{P\gamma} C_{P\gamma} - D_{P\gamma} B_{P\gamma}. \end{aligned} \quad (2.37)$$

### 2.3.2 - LIMITAÇÃO DA REGIÃO DE DISCRETIZAÇÃO

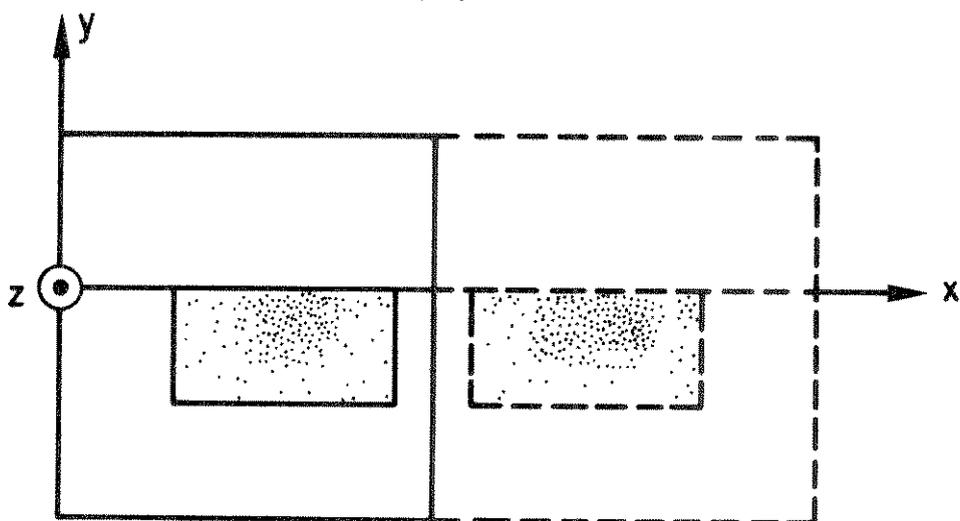
Note que, para a malha gradual da Fig. 2.2 contendo  $N$  pontos, haverá  $N$  incógnitas  $H_{XP}$  e  $N$  incógnitas  $H_{YP}$ , uma para cada ponto  $P$  da malha. Ou seja, podem-se aplicar as equações (2.35) e (2.36) para cada ponto da malha, tal que um total de  $2N$  equações resultará. Tem-se, desta forma, um número de equações igual ao número de incógnitas. Obviamente, para resolver o problema,  $N$  deve ser um número finito. Isto pode ser feito, confinando a seção transversal do guia mediante paredes elétricas e/ou magnéticas, como mostrado na Fig. 2.2. Neste trabalho, as paredes opostas (Norte-Sul e Leste-Oeste, Fig. 2.4a) serão consideradas de mesma natureza, ou seja, ambas elétricas ou ambas magnéticas, de modo a simular uma estrutura periódica infinita (Fig. 2.4d). Caso as paredes ao Norte, Sul, Leste e Oeste estejam suficientemente afastadas do guia (Fig. 2.4a), a estrutura assim formada define uma estrutura periódica onde os guias estão praticamente desacoplados. Ou seja, tem-se, com muito boa aproximação, a análise de um guia isolado (Fig. 2.4a). As Figuras 2.4b, 2.4c e 2.4d mostram algumas situações possíveis de acoplamento. Na Fig. 2.4b tem-se acoplamento não desprezível somente através da parede a Leste do guia, o que caracteriza um acoplamento simples de dois guias; na Fig. 2.4c o acoplamento não desprezível verifica-se através das paredes ao Leste e Oeste do guia, resultando numa estrutura periódica infinita, com guias acoplados na direção  $x$ ; e na Fig. 2.4d, o acoplamento dá-se através das quatro paredes, resultando em uma estrutura periódica infinita com acoplamento dos guias nas direções  $x$  e  $y$ .

Levando-se em conta o fato de que as paredes opostas (Norte-Sul e Leste-Oeste), na Fig. 2.4a, têm a mesma natureza (elétrica ou magnética), quatro associações destas paredes são, então, possíveis.

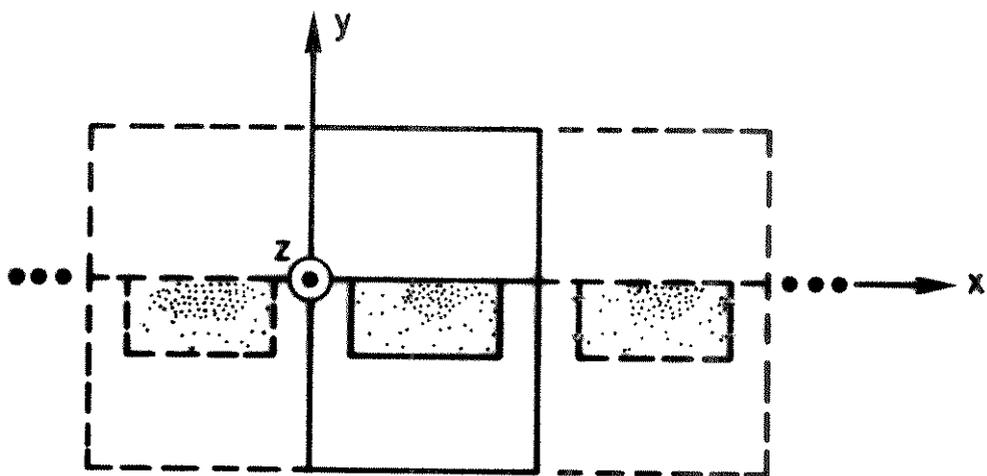
Com isto, a análise das características de dispersão dos modos de uma estrutura será feita através de 4 (quatro) grupos de modos, um para cada combinação das paredes. O primeiro grupo é definido quando paredes magnéticas são



(a)



(b)



(c)

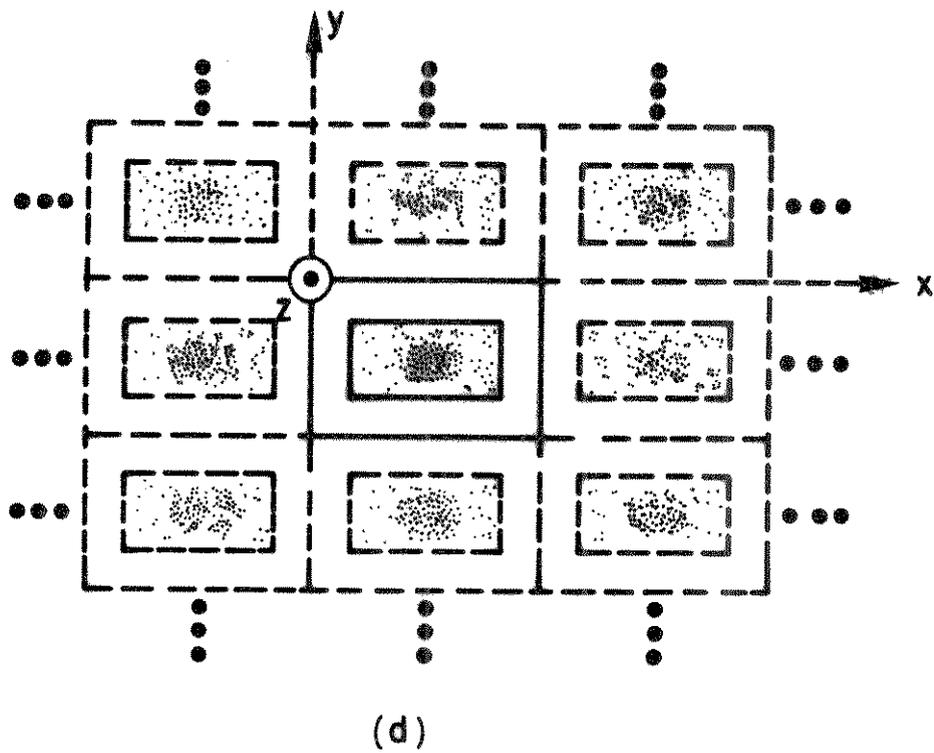


Fig. 2.4 - (a) Guia desacoplado

(b) Acoplamento simples a leste do guia

(c) Acoplamento a leste e a oeste do guia

(d) Acoplamento ao norte, sul, leste e a oeste do guia

usadas ao Norte e Sul do guia e paredes elétricas são posicionadas ao Leste e Oeste do mesmo; o segundo e terceiro grupos são definidos quando todas as paredes são elétricas ou magnéticas, respectivamente; e o quarto grupo é obtido permutando-se as paredes elétricas e magnéticas do primeiro grupo [7]. Para a análise das características de dispersão dos modos da estrutura mostrada na Fig. 2.4a, somente um dos grupos, citados acima, faz-se necessário tendo em vista que os guias estão desacoplados. No caso das Figs. 2.4b e 2.4c, dois grupos são necessários, devido ao acoplamento em uma única direção (no caso, direção x). Estes grupos devem ser escolhidos de modo que tenham paredes com naturezas diferentes (modos pares e ímpares) onde ocorre o acoplamento. Por exemplo, o primeiro e terceiro grupos podem ser utilizados. Para a estrutura da Fig. 2.4d, os quatro grupos terão que ser usados para caracterizar o conjunto completo de modos, pelo fato de haver acoplamento nas direções x e y.

É importante observar que, caso a estrutura em análise apresente simetria, somente a metade da mesma (parte simétrica) precisa ser analisada. Com isto, ganha-se em termos de espaço de memória, principalmente quando malhas mais finas são exigidas.

Quando um ponto P genérico da malha de pontos da Fig. 2.2. encontra-se sobre a fronteira (paredes elétricas ou magnéticas, como mostra a Fig. 2.5) da região de interesse, as seguintes condições de contorno na malha de cinco pontos da Fig. 2.3 são usadas:

#### Parede Magnética

$$H_{\tan_p} = 0 ,$$

$$H_{\tan_e} = - H_{\tan_i} ,$$

$$H_{\text{norm}_e} = H_{\text{norm}_i} ; \tag{2.38a}$$

### Parede Elétrica

$$H_{\text{norm}_p} = 0 ,$$

$$H_{\text{tan}_e} = H_{\text{tan}_i} ,$$

$$H_{\text{norm}_e} = - H_{\text{norm}_i} , \quad (2.38b)$$

onde  $H_{\text{tan}}$  e  $H_{\text{norm}}$  são as componentes tangencial e normal do campo magnético em relação às paredes da fronteira, respectivamente, e os índices "p", "e" e "i" são usados para indicar os pontos, na parede, adjacente externo à parede (a uma distância pequena,  $h$ , da mesma) e adjacente interno à parede (a uma mesma distância pequena,  $h$ , da mesma), respectivamente (Fig. 2.5).

Após definida a malha gradual de pontos da Fig. 2.2 e escolhidas as paredes que limitam a seção transversal do guia de ondas, as equações (2.35) e (2.36) podem ser aplicadas para cada ponto P da malha, usando-se as condições de contorno nas paredes elétricas e/ou magnéticas, dadas por (2.38). Desta maneira, um sistema de equações lineares homogêneas é obtido, o qual pode ser escrito como um problema de autovalores convencional [3]-[5], ou seja:

$$[(A) - \lambda(U)] (X) = 0 , \quad (2.39)$$

conforme demonstrado no Apêndice E. Na equação (2.39)  $\lambda = -\gamma_z^2$ , (U) é a matriz unitária, (X) é um vetor coluna que contém os autovetores, dado por:

$$(X) = (H_{X1,1}, H_{Y1,1}, \dots, H_{XI,J}, H_{YI,J})^T, \quad (2.40)$$

sendo I o número de linhas e J o número de colunas da malha de pontos (Fig. 2.2), e (A) sendo uma matriz quadrada, de ordem  $2IJ \times 2IJ$ , expressa na seguinte forma:

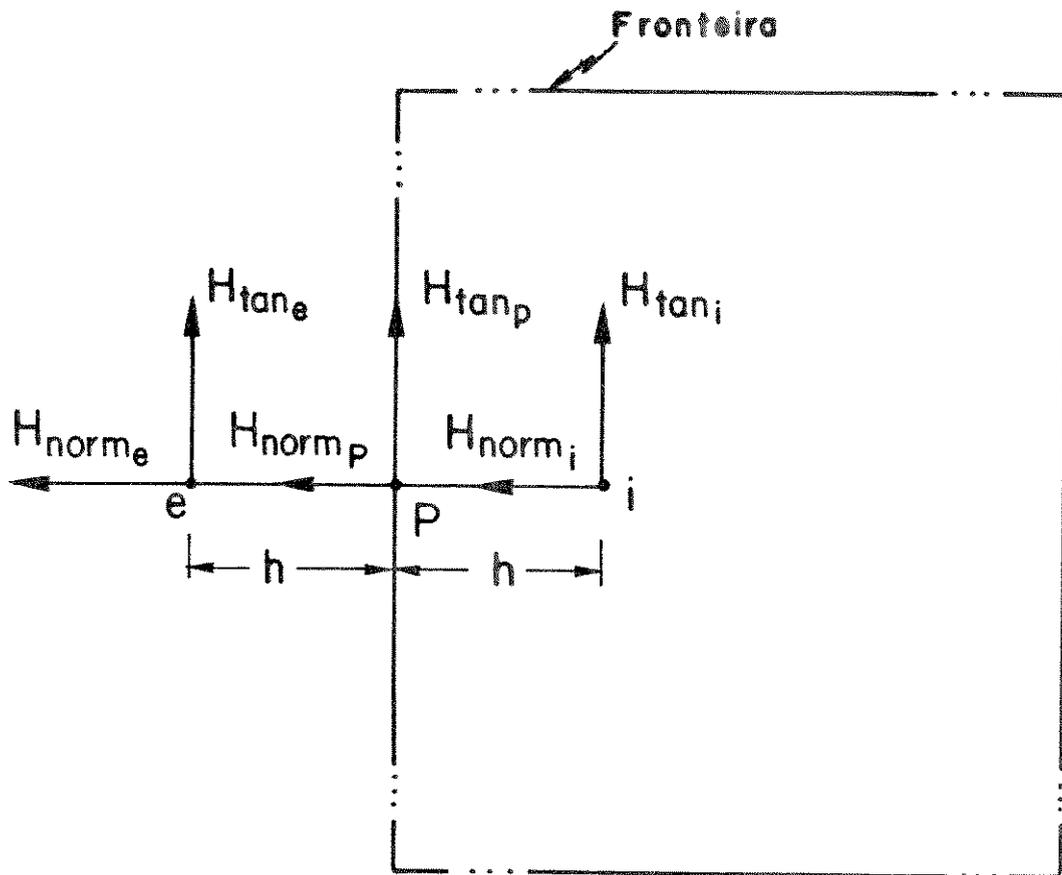


Fig. 2.5 - Condições de contorno na fronteira que limita a região a ser analisada.

$$(A) = \begin{bmatrix} a_{1,1} & b_{1,1} & a_{1,2} & b_{1,2} & \dots & a_{1,N} & b_{1,N} \\ d_{1,1} & C_{1,1} & d_{1,2} & C_{1,2} & \dots & d_{1,N} & C_{1,N} \\ a_{2,1} & b_{2,1} & a_{2,2} & b_{2,2} & \dots & a_{2,N} & b_{2,N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ d_{N,1} & C_{N,1} & d_{N,2} & C_{N,2} & \dots & d_{N,N} & C_{N,N} \end{bmatrix}, \quad (2.41)$$

onde  $N = IJ$ . Os elementos  $H_{x_{i,j}}$  e  $H_{y_{i,j}}$  no vetor (X) e  $a_{i,j}$ ,  $b_{i,j}$ ,  $C_{i,j}$  e  $d_{i,j}$ , na matriz (A), podem ser arrumados de forma diferente para cada um dos quatro grupos de modos, definidos anteriormente, de forma que a matriz (A) tenha sempre a mesma forma, como demonstrado no Apêndice E. Os autovalores  $\lambda$  que satisfazem (2.39) podem ser obtidos usando-se o programa Eispack [3]. Os valores da constante de atenuação,  $\alpha_z$ , e a constante de fase,  $\beta_z$ , para cada modo propagante, são obtidos de cada autovalor através da equação:

$$\lambda = -(\alpha_z + j\beta_z)^2. \quad (2.42)$$

As componentes transversais,  $H_x$  e  $H_y$ , do campo magnético, em cada ponto da malha gradual (Fig. 2.2) são obtidas dos autovetores (2.40) para cada modo de propagação.

## REFERÊNCIAS

- [01] J.S. Hornsby e A. Gopinath, "Numerical analysis of a dielectric-loaded waveguide with a microstrip line-Finite difference methods", IEEE Trans. Microwave Theory Tech., vol. MTT-17, pp. 684-690, Set. 1969.
- [02] D.G. Corr e J.B. Davies, "Computer analysis of the fundamental and higher order modes in single and coupled microstrip", IEEE Trans. Microwave Theory Tech., vol. MTT-20, pp. 669-678, Out. 1972.
- [03] K. Bierwirth, N. Schulz, e F. Arndt, "Finite-difference analysis of rectangular dielectric waveguide structures", IEEE Trans. Microwave Theory Tech., vol. MTT-34, pp. 1104-1114, Nov. 1986.
- [04] N. Schulz, K. Bierwirth, F. Arndt, e U. Köster, "Finite-difference method without spurious solutions for the hybrid-mode analysis of diffused channel waveguides", IEEE Trans. Microwave Theory Tech., vol. 38, pp. 722-729, Jun. 1990.
- [05] N. Schulz, K. Bierwirth, F. Arndt, e U. Köster, "Rigorous finite-difference analysis of coupled channel waveguides with arbitrarily varying index profile", J. Lightwave Technol., vol. 9, No. 10, pp. 1244-1253, Out. 1991.
- [06] J.B. Davies e C.A. Muilwyk, "Numerical solution of uniform hollow waveguides of arbitrary shape", Proc. Inst. Elec. Eng., vol. 113, pp. 277-284, Fev. 1966.
- [07] H. Yang, J.A. Castaneda, e N.G. Alexopoulos, "An integral equation analysis of an infinite array of rectangular dielectric waveguides", IEEE Trans. Microwave Theory Tech., vol. 38, No. 7, pp. 873-880, Jul. 1990.

## CAPÍTULO 3

### APRESENTAÇÃO DOS RESULTADOS NUMÉRICOS

#### 3.1 - INTRODUÇÃO

Objetiva-se, com este capítulo, apresentar e analisar os resultados numéricos obtidos para diversas estruturas envolvendo o guia de onda dielétrico integrado (Fig. 1.1) com perfil de índice de refração variando arbitrariamente. Esses resultados são apresentados em termos da constante de fase ( $\beta_z$ ) normalizada em função da frequência, também normalizada (características de dispersão), e/ou através da distribuição das intensidades das componentes transversais,  $H_x$  e  $H_y$ , do campo magnético, sobre a seção transversal das estruturas.

Para confirmar a teoria aqui desenvolvida, algumas simulações foram realizadas e os resultados comparados com aqueles obtidos através de outros métodos numéricos, igualmente consagrados na literatura.

#### 3.2 - O GUIA DE ONDA DIELETRICO RETANGULAR EMBEBIDO

Nesta seção, apresenta-se um teste de convergência para o método das diferenças finitas. Além dos testes de verificação da formulação, analisa-se o

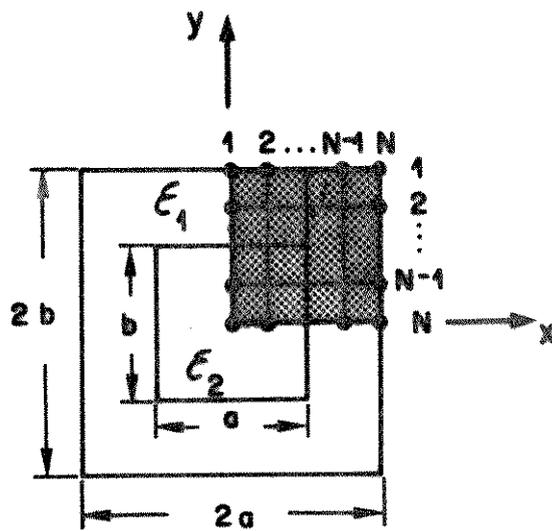
efeito da anisotropia, da mudança do posicionamento do eixo óptico dos cristais e do acoplamento entre guias dielétricos embebidos.

### 3.2.1 - VERIFICAÇÃO DA FORMULAÇÃO

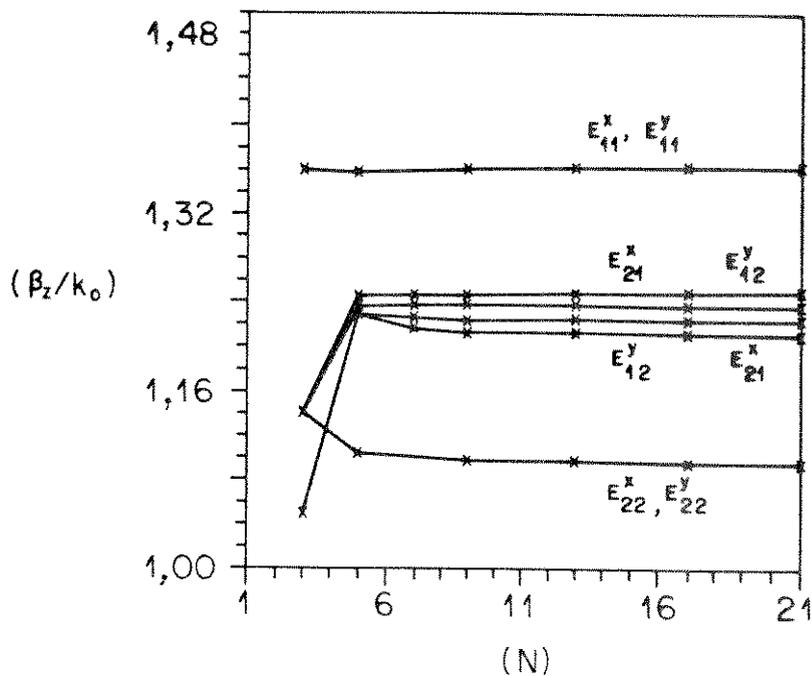
Para se fazer a análise de uma dada estrutura, mediante a utilização de um método numérico, é importante que se conheça o comportamento do método sob o aspecto de convergência. A Fig. 3.1b mostra esse comportamento para um guia de onda dielétrico ( $\epsilon_2 = 2,1$ ) embebido no ar ( $\epsilon_1 = 1,0$ ) [1] (Fig. 3.1a). O guia tem dimensões transversais  $a$  e  $b$ , sendo  $a=b$ .

Para efeito de análise, a estrutura, assim definida, é confinada em uma caixa de dimensões transversais  $2a$  e  $2b$ , com paredes elétricas e/ou magnéticas (ver seção 2.3.2). Em se tratando de uma estrutura simétrica em relação aos eixos  $x$  e  $y$  (Fig. 3.1a), somente um quarto da mesma precisa ser analisada (região evidenciada na Fig. 3.1a). Nesta análise, os quatro grupos de modos definidos na seção 2.3.2 são, então, utilizados. Na Fig. 3.1b apresenta-se a variação da constante de fase normalizada em função do número de pontos ( $N$ ), da malha gradual de pontos, nas direções  $x$  e  $y$ , conforme mostrado na Fig. 3.1a. Os resultados obtidos, nesse caso, mostram um bom comportamento convergente do método das diferenças finitas e são praticamente coincidentes com os resultados apresentados por Schulz *et al.* [1]. Para este caso particular, observa-se da Fig. 3.1b que os valores para  $N=9$  são praticamente os mesmos que aqueles para  $N$  maiores, até  $N=21$ . Portanto, boa precisão deve ser obtida com  $N=9$ , sendo que esta precisão será pouco afetada com o aumento de  $N$ . Desta forma, o uso adequado de  $N$  torna o método numérico suficientemente preciso e particularmente eficiente.

Outro aspecto importante relacionado com a precisão e eficiência do



(a)



(b)

Fig. 3.1 - (a) Guia de onda dielétrico retangular embebido. Somente um quarto da estrutura (região hachurada) é usada na análise.  $N$  é o nº de pontos, nas direções  $x$  e  $y$ , para a malha gradual de pontos.

(b) Constante de fase normalizada para os modos  $E_{pq}^x$  e  $E_{pq}^y$ , em função de  $N$ . Para  $\epsilon_1 = 1,0$ ;  $\epsilon_2 = 2,1$ ;  $a=b$  e  $k_0 a \sqrt{\epsilon_2 - \epsilon_1} = 8,0$ .

método discutido aqui é a escolha adequada da malha. É natural que a densidade de pontos da malha deve aumentar nas regiões que apresentam maiores variações dos campos elétricos e magnéticos (densidade de potência) predominantes e, conseqüentemente, deve diminuir nas outras regiões.

Todos os resultados apresentados aqui foram cuidadosamente examinados, procurando-se a escolha mais adequada da malha, de modo a permitir a otimização dos resultados.

Ainda com o objetivo de testar a formulação apresentada neste trabalho, para o guia embebido, dois casos são considerados (ver Figs. 3.2 e 3.3):

- Inicialmente, um guia de onda de dimensões transversais  $a$  e  $b$ , sendo  $a = 2b$ , é considerado. Neste caso, o guia (meio 2, Fig. 3.2a) e o meio que o envolve (meio 1, Fig. 3.2a) são isotrópicos e possuem índices de refração iguais a  $\sqrt{2,25}$  e 1,0, respectivamente. A Fig. 3.2a mostra as características de dispersão para os quatro primeiros modos deste guia. Nesta figura, os resultados aqui obtidos (linha contínua) são comparados com aqueles encontrados por Goell [2] (representados por pontos), e uma boa concordância é observada. A determinação da constante de fase, para os modos que se propagam neste guia, foi feita utilizando-se a simetria apresentada pela estrutura, de forma que somente um quarto da mesma foi analisada. Para isto, uma malha de pontos de  $15 \times 15$  foi considerada e os quatro grupos de modos, definidos na seção 2.3.2, foram usados. Desta forma, a característica do modo  $E_{11}^x$  foi obtida mediante a utilização do primeiro grupo; para o modo  $E_{11}^y$  usou-se o quarto grupo; para o modo  $E_{21}^x$  o terceiro grupo e para o modo  $E_{21}^y$  o segundo grupo.

Para os modos  $E_{11}^y$  e  $E_{21}^x$ , que se propagam nessa estrutura, apresenta-se, nas Figs. 3.2b e 3.2c, respectivamente, a variação (em módulo) das componentes do campo magnético,  $H_x$  (Fig. 3.2b) e  $H_y$  (Fig. 3.2c). Essas distribuições são importantes na identificação dos modos propagantes.

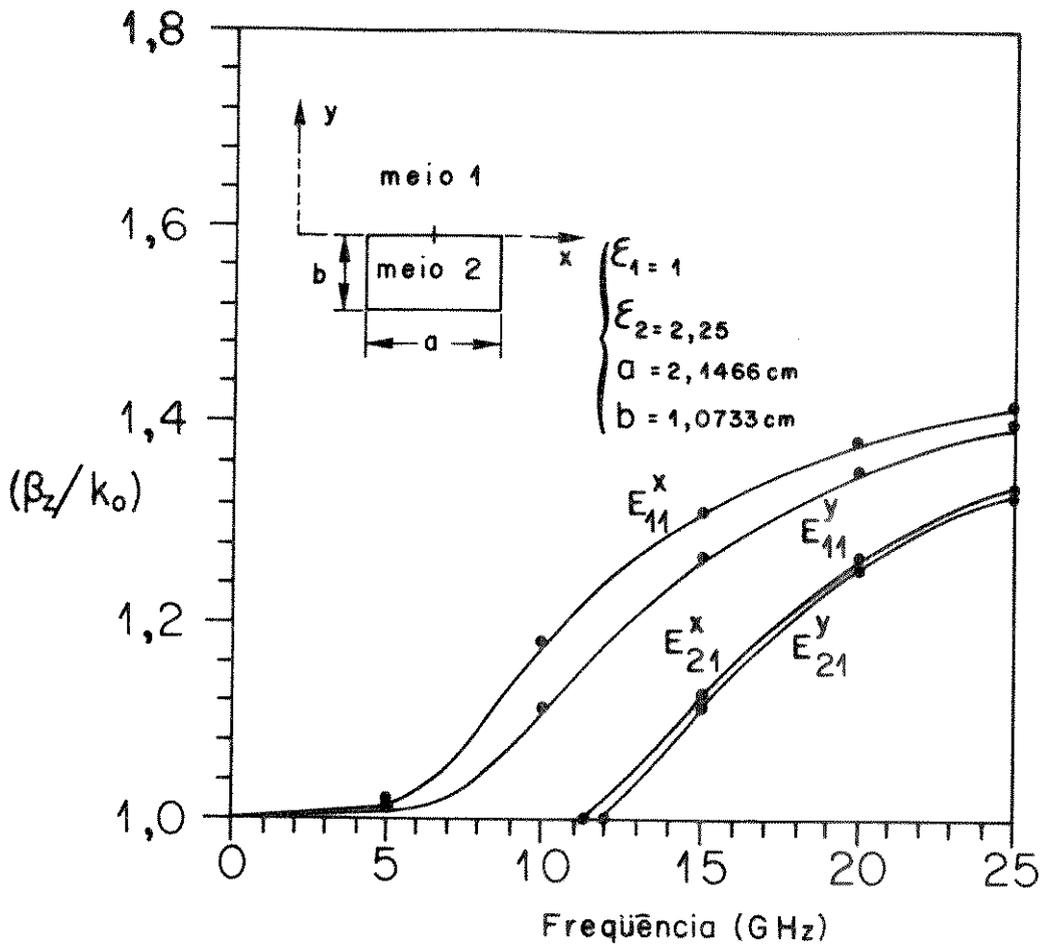


Fig. 3.2a - Comparação dos resultados, para a constante de fase normalizada em função da frequência, obtidos através desta formulação (—) com aqueles encontrados por Goell [2] (...), para os quatro primeiros modos de um guia imerso no espaço livre.

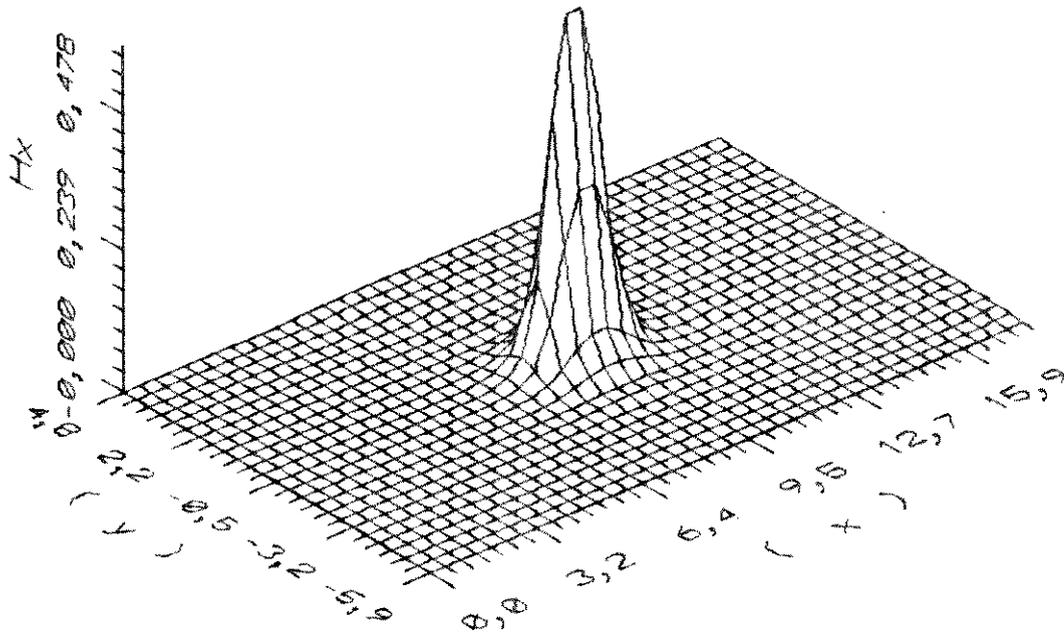


Fig. 3.2b - Variação da intensidade da componente transversal do campo magnético  $H_x$  em função das coordenadas  $x$  e  $y$  para o modo  $E_{11}^y$  do guia da Fig. 3.2a. O valor máximo de  $H_x$  coincide com o centro do guia.

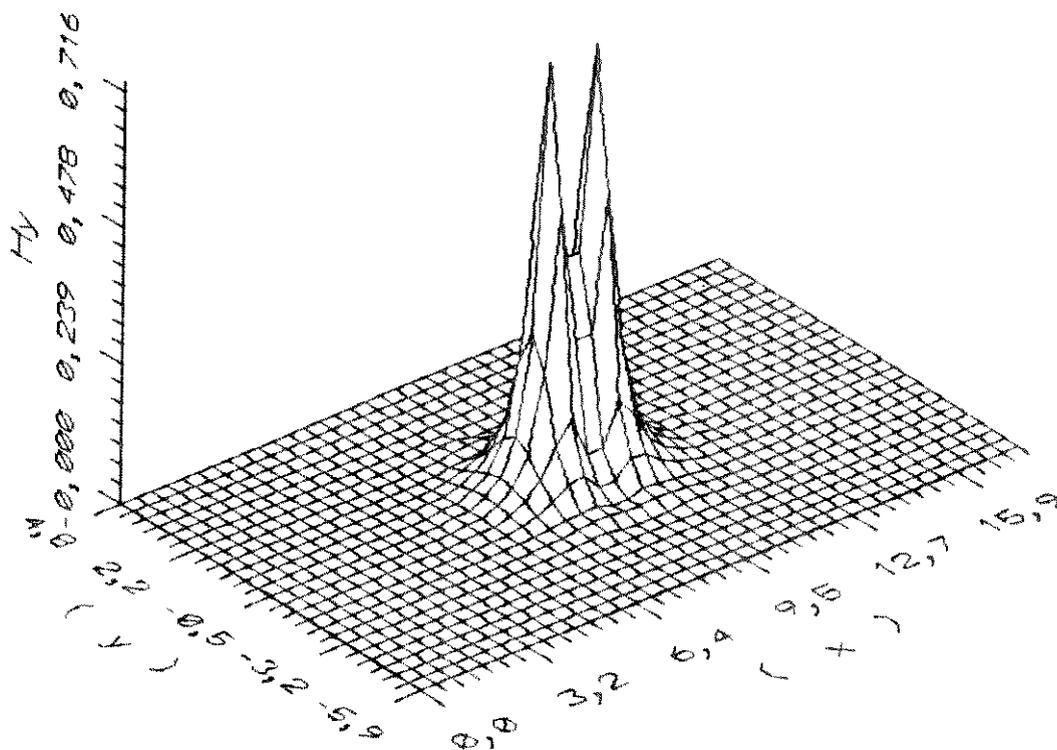


Fig. 3.2c - Variação do valor absoluto da componente transversal do campo magnético  $H_y$  em função das coordenadas  $x$  e  $y$  para o modo  $E_{21}^x$  do guia da Fig. 3.2a.

- O segundo teste foi realizado, considerando-se um guia de onda dielétrico retangular anisotrópico com dimensões transversais  $a$  e  $b$ , sendo  $a = 2b$ . Aqui, o guia está embebido em um dielétrico isotrópico de índice de refração  $\sqrt{2,05}$  e os índices de refração ordinário e extraordinário do guia foram escolhidos iguais a  $\sqrt{2,31}$  e  $\sqrt{2,19}$ , respectivamente. Desta forma, na Fig. 3.3, apresentam-se as características de dispersão para os modos  $E_{pq}^x$  e  $E_{pq}^y$ . Nesta figura, os resultados obtidos através desta análise (linha contínua) apresentam uma boa concordância com aqueles encontrados mediante o método dos elementos finitos vetorial obtidos por Hayata *et al.* [3], representados por pontos. A simetria apresentada pela estrutura foi levada em consideração, de forma que somente um quarto da mesma precisou ser analisada. Esta análise foi realizada mediante uma malha de pontos de  $10 \times 10$ .

### 3.2.2 - GUIA DE ONDA DIELÉTRICO ANISOTRÓPICO COM PERFIL DE ÍNDICE DE REFRAÇÃO GAUSSIANO-GAUSSIANO

As Figs. 3.4, 3.5 e 3.6 mostram as características de dispersão dos modos  $E_{pq}^x$  e  $E_{pq}^y$ , para um guia de onda dielétrico retangular embebido. Nestas três situações, os guias com dimensões transversais  $a$  e  $b$  ( $a = 2b$ ), e os meios que os envolvem são denominados de meio 2 e meio 1, respectivamente. Na Fig. 3.4 o meio 1 é formado por um dielétrico isotrópico com índice de refração  $n_1 = \sqrt{2,31}$  e o meio 2 é constituído de um dielétrico, também isotrópico, com perfil de índice de refração Gaussiano-Gaussiano (Fig. 3.7) dado por:  $n_2 = \sqrt{2,31} [1 + 0,05f(x,y)]$ , com

$$f(x,y) = \exp \left[ -4 \left( \frac{x-x_0}{a} \right)^2 \right] \exp \left[ -4 \left( \frac{y-y_0}{b} \right)^2 \right], \text{ onde}$$

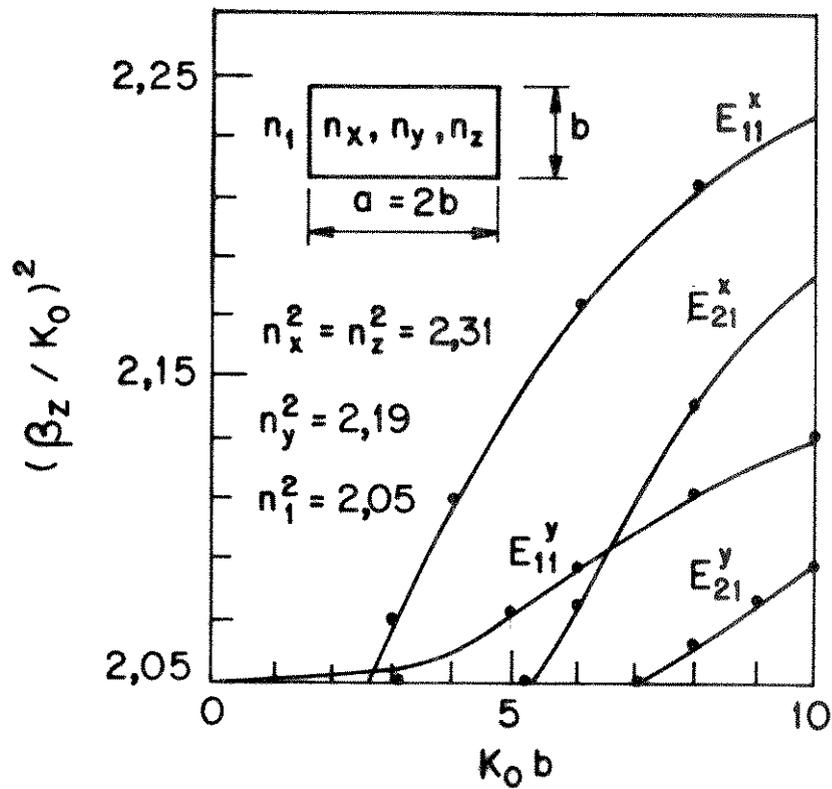


Fig. 3.3 - Comparação dos resultados encontrados através desta formulação (linha contínua) com aqueles obtidos por Hayata et al. [3] representados por pontos, para as características de dispersão de um guia de onda dielétrico anisotrópico retangular.

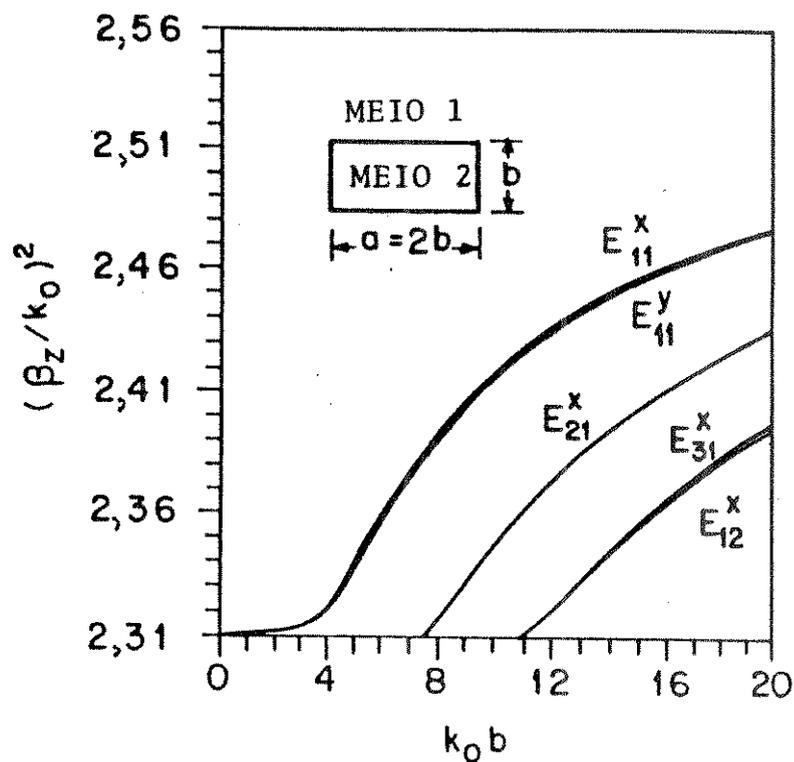


Fig. 3.4 - Características de dispersão do guia de onda embebido em um dielétrico isotrópico com índices de refração:  $n_1 = \sqrt{2,31}$  e  $n_2 = \sqrt{2,31} [1 + 0,05 f(x,y)]$  com  $f(x,y) = \exp \left[ -4 \left( \frac{x - x_0}{a} \right)^2 \right] \exp \left[ -4 \cdot \left( \frac{y - y_0}{b} \right)^2 \right]$  onde  $x_0$  e  $y_0$  são as coordenadas do ponto central do guia.

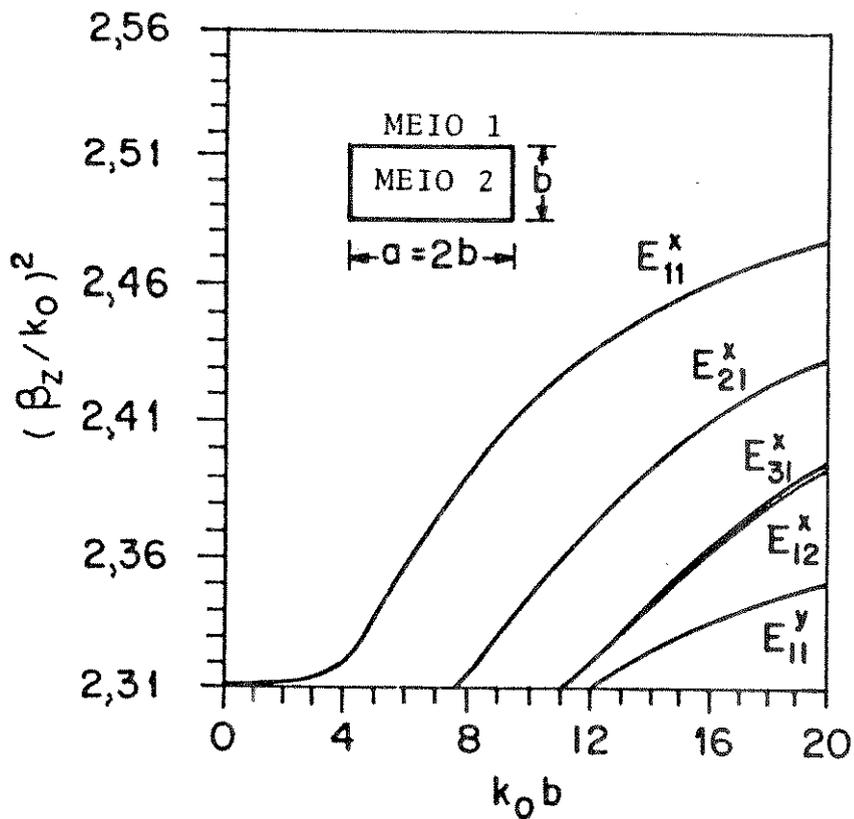


Fig. 3.5 - Características de dispersão do guia de ondas embebido em um dielétrico anisotrópico uniaxial com índices de refração:  $n_{1x} = n_{1z} = \sqrt{2,31}$ ;  $n_{1y} = \sqrt{2,19}$ ;  $n_{2x} = n_{2z} = \sqrt{2,31} [1 + 0,05 f(x,y)]$ ;  $n_{2y} = \sqrt{2,19} + 0,05 \sqrt{2,31} f(x,y)$ , onde  $f(x,y)$  é dado na Fig. 3.4.

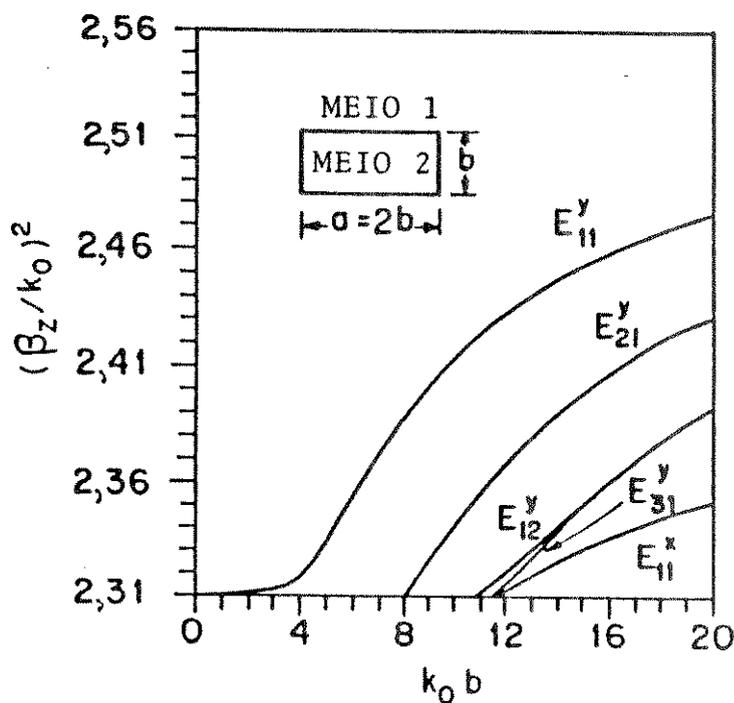


Fig. 3.6 - Características de dispersão do guia de onda embebido em um dielétrico anisotrópico uniaxial com índices de refração:  $n_{1y} = n_{1z} = \sqrt{2,31}$  ;  $n_{1x} = \sqrt{2,19}$  ;  $n_{2y} = n_{2z} = \sqrt{2,31} [1 + 0,05 f(x,y)]$  ;  $n_{2x} = \sqrt{2,19} + 0,05 \sqrt{2,31} f(x,y)$ , onde  $f(x,y)$  é dado na Fig. 3.4.

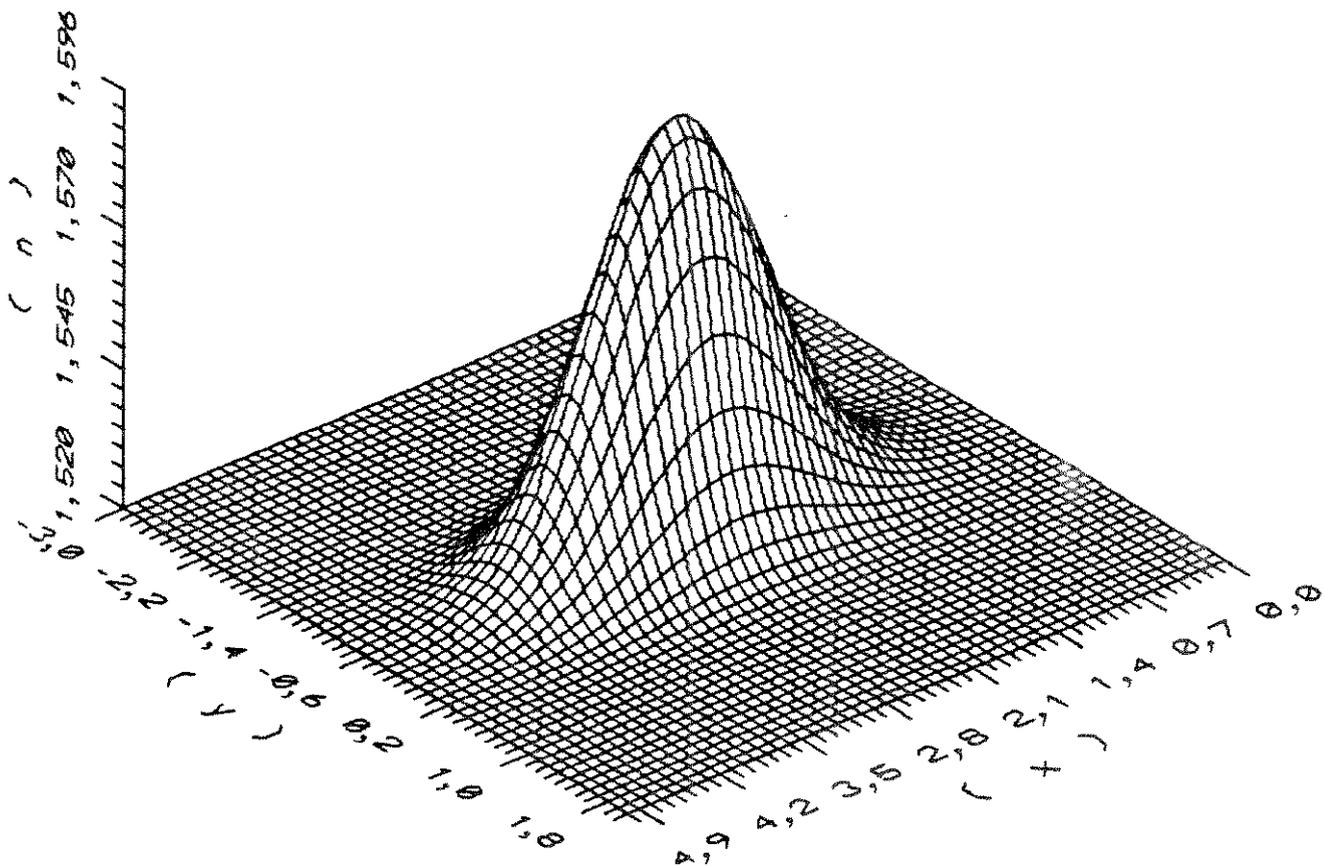


Fig. 3.7 - Perfil de índice de refração com uma dependência Gaussiana-Gaussiana em x e y. Para o meio 2 (Figs. 3.4, 3.5 e 3.6), com  $a = 2b$ .

$x_0$  e  $y_0$  são as coordenadas do ponto central do guia.

Nas Figs. 3.5 e 3.6 o meio 1 e o meio 2 são constituídos de dielétricos anisotrópicos uniaxiais. Para o caso considerado na Fig. 3.5 utilizaram-se os seguintes índices de refração:  $n_{1x} = n_{1z} = \sqrt{2,31}$  ;  $n_{1y} = \sqrt{2,19}$  para o meio 1, e  $n_{2x} = n_{2z} = \sqrt{2,31} [1 + 0,05 f(x,y)]$ ;  $n_{2y} = \sqrt{2,19} + 0,05 \sqrt{2,31} \cdot f(x,y)$  para o meio 2. Para o caso da Fig. 3.6 foram considerados:  $n_{1y} = n_{1z} = \sqrt{2,31}$  ;  $n_{1x} = \sqrt{2,19}$  para o meio 1 e  $n_{2y} = n_{2z} = \sqrt{2,31} [1 + 0,05 f(x,y)]$  ;  $n_{2x} = \sqrt{2,19} + 0,05 \sqrt{2,31} f(x,y)$ , para o meio 2, onde  $f(x,y)$  segue a mesma lei de variação considerada na Fig. 3.4.

Na Fig. 3.4, os modos  $E_{21}^y$ ,  $E_{12}^y$  e  $E_{31}^y$  foram omitidos com o objetivo de não sobrecarregar a figura. Entretanto, estes modos têm comportamento igual aos seus correspondentes mostrados na Fig. 3.6.

Uma comparação dos resultados mostrados nas Figs. 3.4, 3.5 e 3.6 indica que a orientação apropriada do eixo óptico, na direção  $y$  para a Fig. 3.5 e na direção  $x$  para a Fig. 3.6, pode permitir a obtenção de um guia de onda podendo excitar um único modo  $E_{11}^x$  (Fig. 3.5) ou  $E_{11}^y$  (Fig. 3.6), de sua frequência de corte até a frequência de corte do próximo modo de ordem superior, que são  $E_{21}^x$  e  $E_{21}^y$ , respectivamente. Para os dielétricos isotrópicos da Fig. 3.4 isso não seria possível pois os dois modos inferiores  $E_{11}^x$  e  $E_{11}^y$  coexistem em, praticamente, toda a faixa de frequências.

### 3.2.3 - ACOPLAMENTO DIRECIONAL ENTRE GUIAS EMBEBIDOS

Nesta sub-seção é feita a análise das características de dispersão para estruturas envolvendo acoplamento direcional entre guias embebidos. O estudo envolve tanto o acoplamento simples (entre dois guias) quanto para uma estrutura periódica infinita.

### 3.2.3.1 - Acoplamento Simples para Guias Dielétricos Anisotrópicos

Sabe-se (sub-seção 2.3.2) que a utilização de paredes elétricas e/ou magnéticas para limitar a região de uma dada estrutura (Fig. 3.8), em análise, simula uma estrutura periódica infinita. A Fig. 3.8 mostra um guia de onda dielétrico de dimensões transversais  $a$  e  $b$ , sendo  $a = 2b$ . Considere, inicialmente, que as paredes (elétricas e/ou magnéticas), que limitam a região a ser analisada, estão suficientemente afastadas do guia, o que caracteriza um guia essencialmente desacoplado (isolado). O acoplamento deste guia com um outro (Fig. 3.8), pode ser simulado, simplesmente, diminuindo-se o valor de  $D$ .

Para se estudarem os efeitos do acoplamento, utilizou-se o guia considerado na Fig. 3.3, ou seja,  $n_1^2 = 2,05$  ;  $n_x^2 = n_z^2 = 2,31$  ;  $n_y^2 = 2,19$ . Para este caso, e especificamente para o modo ímpar de  $E_{11}^x$ , a Fig. 3.9 mostra a variação da constante de fase normalizada em função de  $(D/a)$  (Fig. 3.8), considerando-se vários valores de  $k_0 b$ . Como era de se esperar, o efeito do acoplamento na constante de fase manifesta-se mais acentuadamente nas baixas frequências (Fig. 3.9) e nos modos de ordem superior (Fig. 3.10). Pode-se, também, observar nestas figuras que, para  $(D/a) > 1$ , praticamente não há acoplamento.

Ainda cabem algumas observações com relação à estrutura da Fig. 3.8, usando-se o guia da Fig. 3.3. Na Fig. 3.11, apresentam-se as características de dispersão para o modo  $E_{11}^x$ , considerando-se vários valores de  $(D/a)$ . Nesta figura, a linha tracejada (---) caracteriza o guia desacoplado, o que corresponde à situação mostrada na Fig. 3.3, e as linhas acima e abaixo desta, caracterizam os modos ímpares e pares de  $E_{11}^x$ , respectivamente, com  $(D/a)$  assumindo os valores: 0,00 ; 0,05 ; 0,20 ; 3,45.

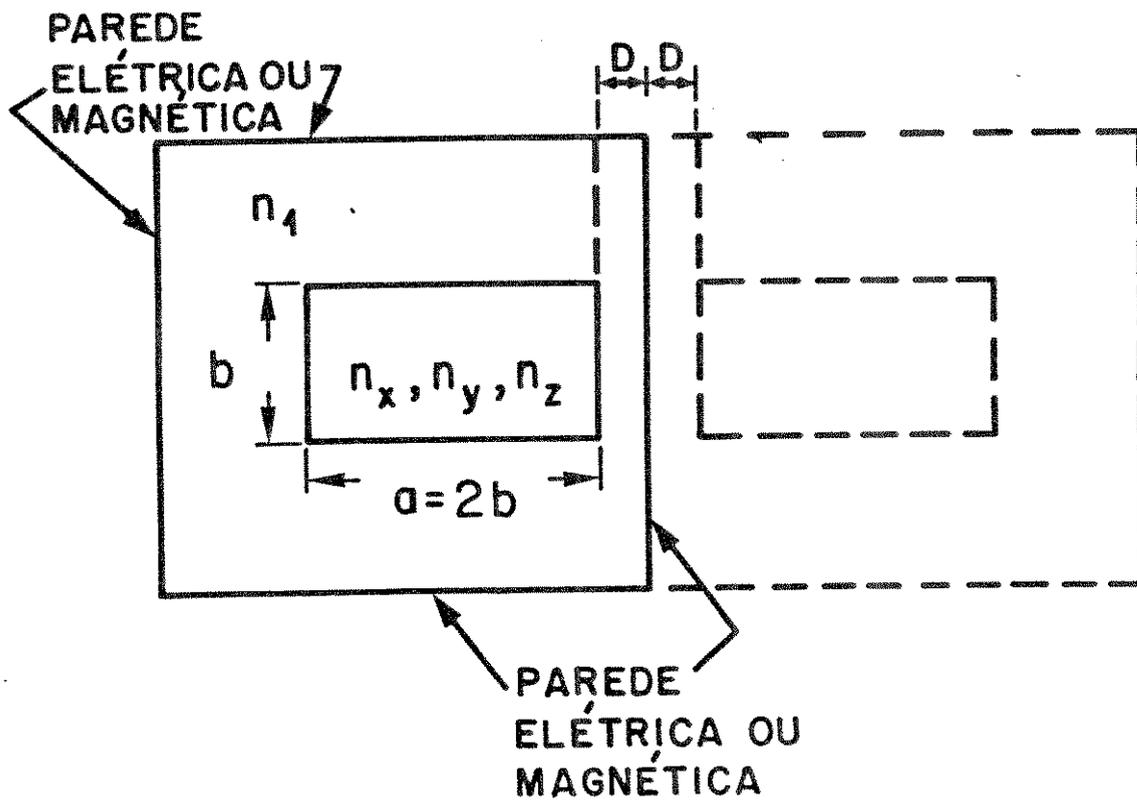


Fig. 3.8 - Simulação do acoplamento entre dois guias de ondas embebidos pela simples variação de  $D$ .

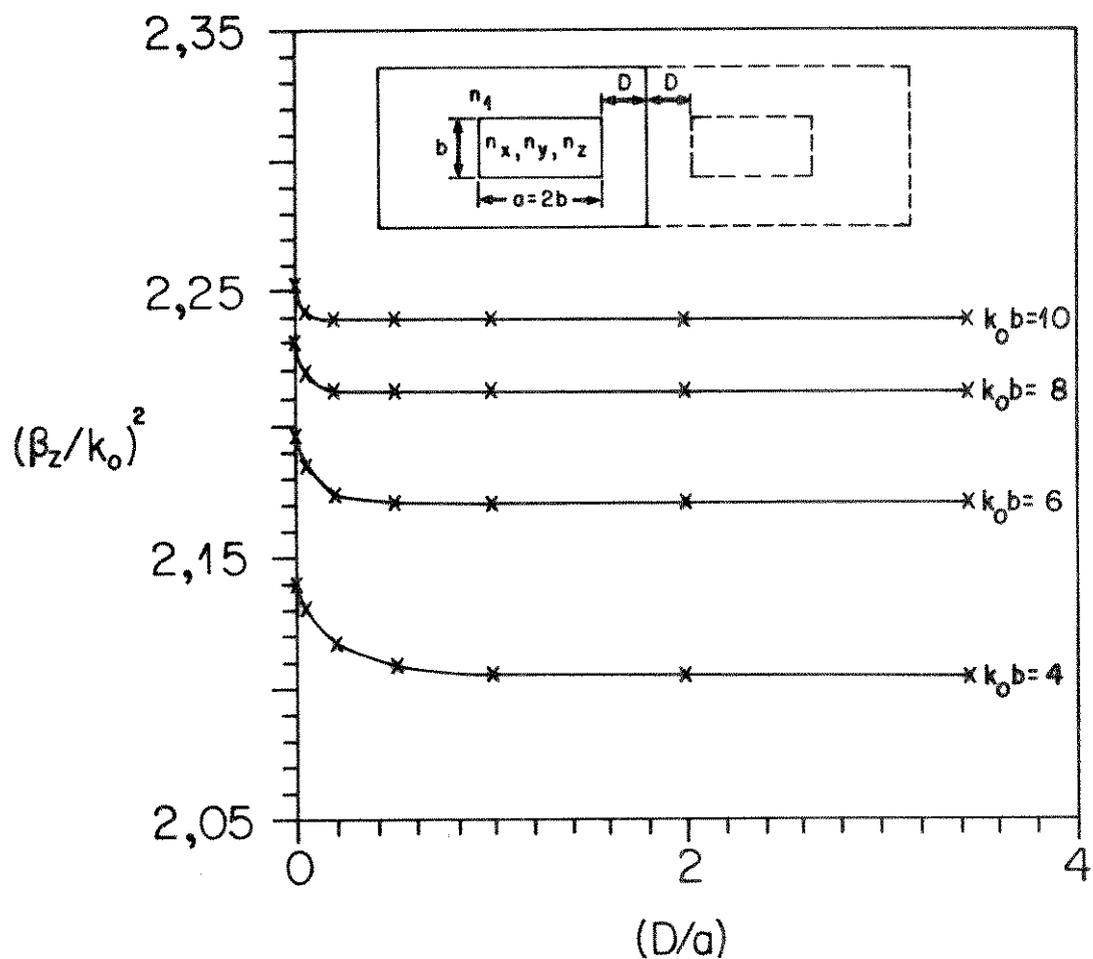


Fig. 3.9 - Constante de fase normalizada em função de  $(D/a)$  (Fig. 3.8), para vários valores de  $k_0 b$  e para o modo ímpar de  $E_{11}^x$ , considerando-se o guia da Fig. 3.3 ( $n_1^2 = 2,05$  ;  $n_x^2 = n_z^2 = 2,31$  ;  $n_y^2 = 2,19$ ).

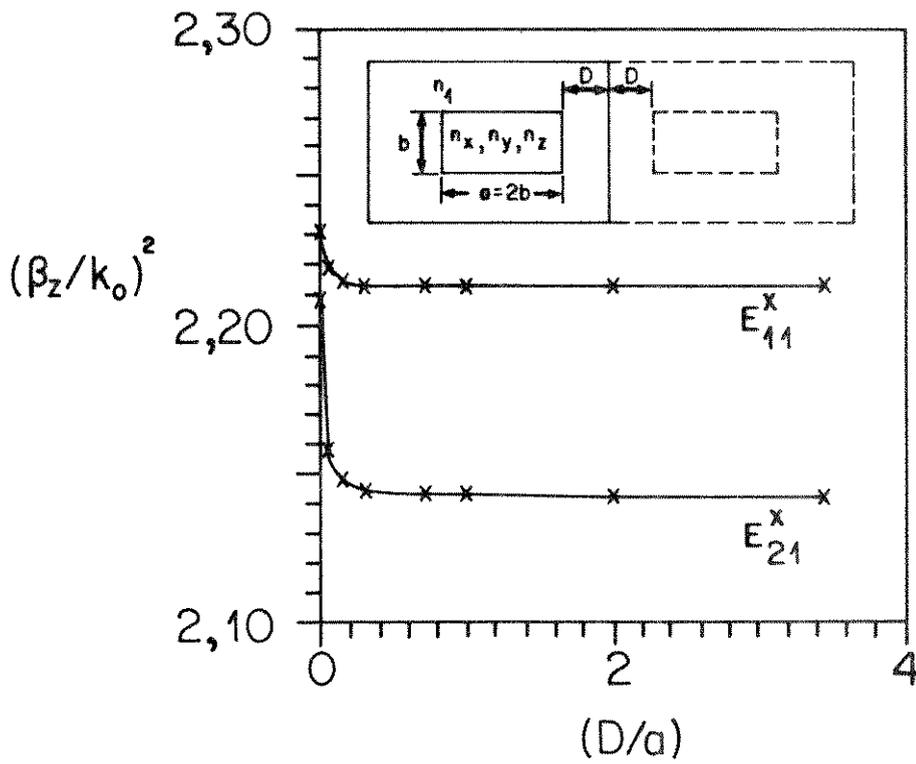


Fig. 3.10 - Variação da constante de fase normalizada em função de  $(D/a)$  (Fig. 3.8), para o modo ímpar de  $E_{11}^x$  e  $E_{21}^x$ , considerando-se o guia da Fig. 3.3 ( $n_1^2 = 2,05$ ;  $n_x^2 = n_z^2 = 2,31$ ;  $n_y^2 = 2,19$ ) e para  $k_0 b = 8,0$ .

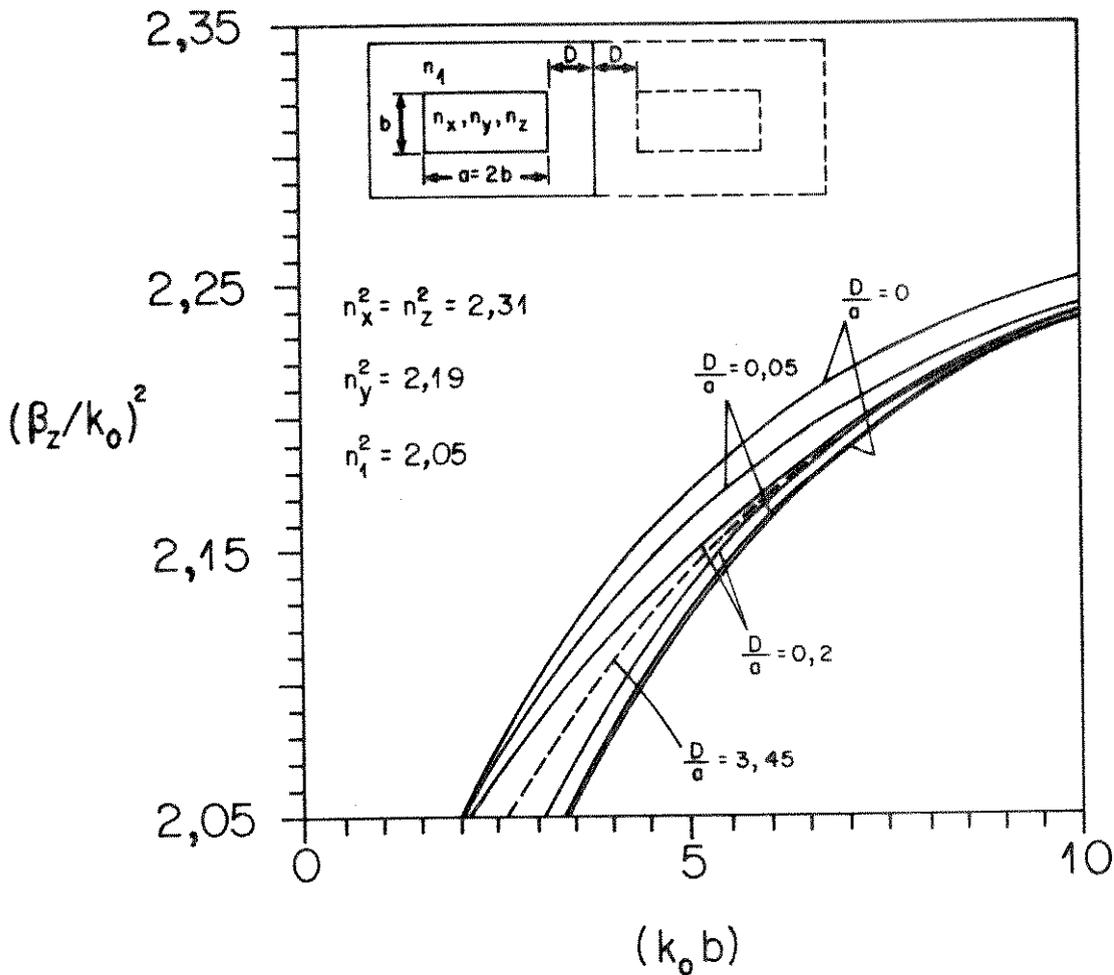


Fig. 3.11 - Características de dispersão do modo  $E_{11}^x$ , para vários valores de  $\left(\frac{D}{a}\right)$  (Fig. (3.8)). Linha tracejada (---) guia desacoplado (Fig. 3.3). As linhas acima e abaixo desta representam os modos ímpares e pares de  $E_{11}^x$ , respectivamente.

### 3.2.3.2 - Acoplamento em uma Estrutura Periódica Infinita

A formulação apresentada neste trabalho é usada na análise das características de propagação de uma estrutura periódica infinita, onde a célula da estrutura é o guia de onda dielétrico retangular embebido, cuja seção transversal é mostrada na Fig. 3.12. Note que cada guia de onda dielétrico tem dimensões transversais  $a$  e  $b$ , com a permissividade elétrica relativa  $\epsilon_c$  e a permeabilidade magnética,  $\mu_o$ . Para um dielétrico anisotrópico,  $\epsilon_c$  é um tensor. O meio que envolve cada guia de onda dielétrico retangular é um dielétrico com permissividade elétrica relativa,  $\epsilon_1$ , e permeabilidade magnética,  $\mu_o$ . Devido à periodicidade da estrutura, é suficiente que somente uma célula da estrutura periódica seja examinada. Esta célula é mostrada na Fig. 3.12, e tem as dimensões transversais  $A$  e  $B$ . Note, em adição, que esta célula tem simetria com relação aos eixos 2-3 e 3-4. Desta forma, somente a região delimitada pelos pontos 1-2-3-4 precisa ser examinada. Isto é feito considerando-se paredes elétricas e/ou magnéticas sobre os lados 1-2, 2-3, 3-4 e 4-1 da célula 1-2-3-4, com a correspondente utilização dos grupos definidos na seção 2.3.2 [4].

A constante de fase normalizada como função da frequência, expressa em GHz, é mostrada nas Figs. 3.13 e 3.14 para o primeiro e quarto grupos, respectivamente. Para ambos os casos, dielétricos isotrópicos, foram usados, com  $\epsilon_1 = 1,0$  e  $\epsilon_c = 2,25$  e as dimensões foram escolhidas como  $a = 2,324$  cm,  $b = 1,162$  cm,  $A = 6,0$  cm e  $B = 3,0$  cm [4]. Nas Figs. 3.13 e 3.14, somente os cinco primeiros modos são apresentados. Nestas figuras, as linhas contínuas (—) representam os resultados obtidos mediante esta formulação e os resultados obtidos por Yang *et al.* [4], usando o método da equação integral, são representados por pontos (\*). Uma boa concordância é observada entre os resultados, principalmente para os primeiros modos e nas frequências mais baixas. Ainda com relação à estrutura da Fig. 3.12 e para o primeiro e quarto grupos, tem-se as observações que seguem:

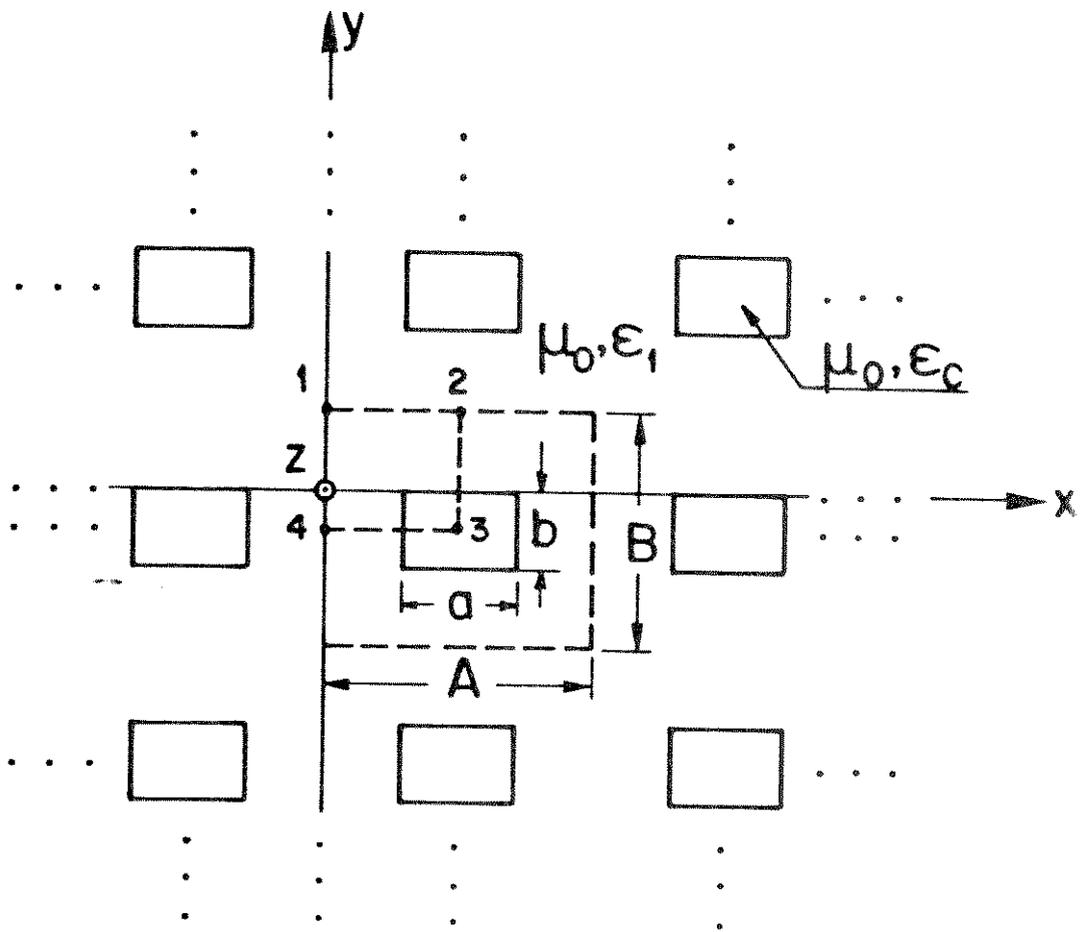


Fig. 3.12 - Seção transversal de uma estrutura periódica infinita.

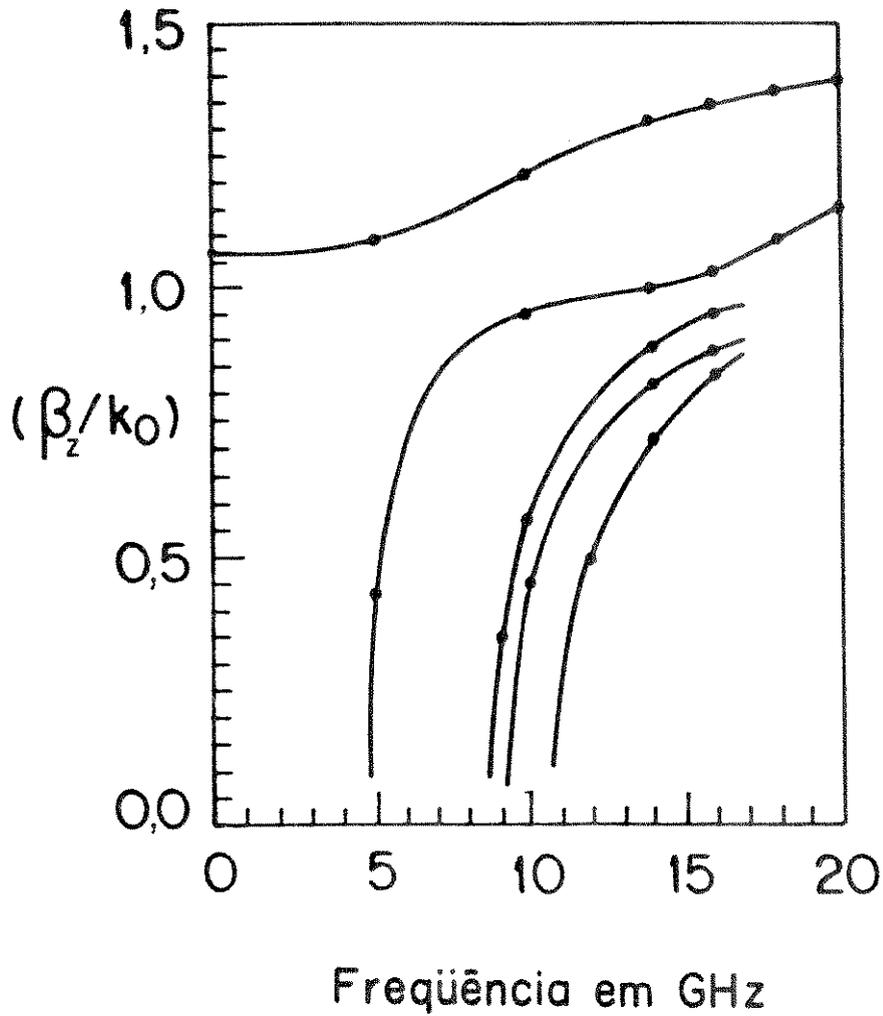


Fig. 3.13 - Comparação da constante de fase normalizada, para os cinco primeiros modos do primeiro grupo, obtida por esta teoria (—), com os resultados encontrados por Yang *et al.* [4] (•••). Para:  $\epsilon_1 = 1,0$ ;  $\epsilon_c = 2,25$ ;  $a = 2,324$  cm;  $b = 1,162$  cm;  $A = 6,0$  cm e  $B = 3,0$  cm.

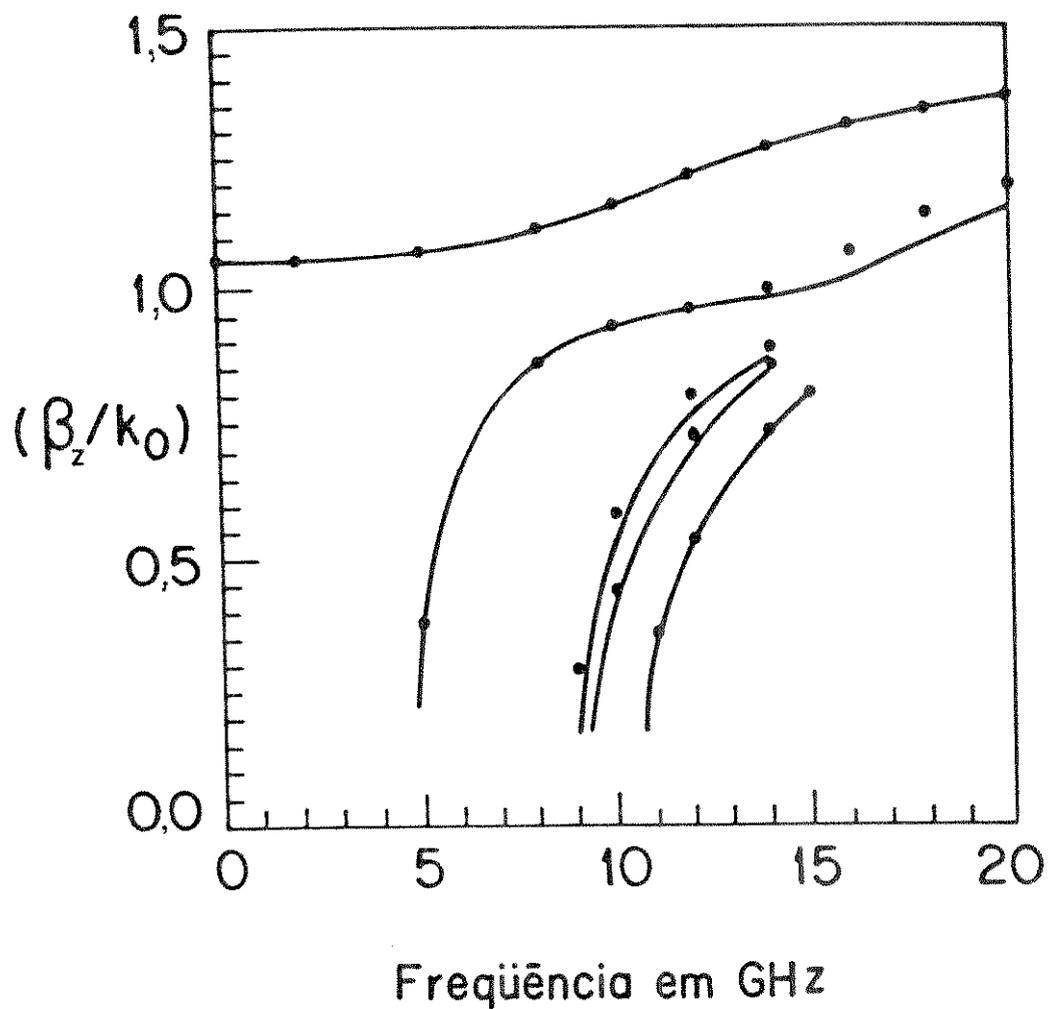


Fig. 3.14 - Comparação da constante de fase normalizada, para os cinco primeiros modos do quarto grupo, obtida por esta teoria (—), com os resultados encontrados por Yang et al. [4] (•••). Para:  $\epsilon_1 = 1,0$ ;  $\epsilon_c = 2,25$ ;  $a = 2,324$  cm;  $b = 1,162$  cm;  $A = 6,0$  cm e  $B = 3,0$  cm.

As Figs. 3.15 e 3.16 apresentam a variação das componentes transversais,  $H_x$  e  $H_y$ , respectivamente, do campo magnético em função da coordenada  $x$  (Fig. 3.12) e, especificamente, para os pontos do segmento de reta que vai do ponto 4 ao ponto 3. As curvas apresentadas na Fig. 3.15 foram obtidas para a frequência de 16 GHz e aquelas da Fig. 3.16 para 12 GHz. Essas figuras são importantes pelo fato de mostrarem claramente o efeito do acoplamento entre os guias, sendo que alguns modos são mais afetados que outros.

As curvas correspondentes aos dois primeiros modos da Fig. 3.13 são repetidas na Fig. 3.17 (linha contínua). Esses resultados são, então, comparados com os resultados (linha tracejada) obtidos para os dois primeiros modos do primeiro grupo, considerando-se a mesma estrutura (Fig. 3.12), com a troca do valor de  $\epsilon_1$ , de 1,0 para 2,05. Como esperado, a constante de fase aproxima-se do seu valor para um meio homogêneo e ilimitado, quando  $\epsilon_1$  tende para  $\epsilon_c$ .

A seguir é apresentado um estudo do efeito da anisotropia na estrutura da Fig. 3.12. Inicialmente, considera-se o guia de onda dielétrico retangular com  $\epsilon_c = 2,19$ , mantendo-se  $\epsilon_1 = 1,0$ . As características de dispersão, assim obtidas para os dois primeiros modos do primeiro grupo, são apresentadas na Fig. 3.18 (—). Em seguida, substitui-se o dielétrico isotrópico que forma o guia ( $\epsilon_c = 2,19$ ), por um dielétrico anisotrópico uniaxial. Neste caso, o eixo óptico do cristal é posicionado ao longo da direção  $y$ . Então, duas situações são propostas: para um primeiro caso, as componentes do tensor permissividade elétrica assumem os seguintes valores;  $\epsilon_{cx} = \epsilon_{cz} = 2,31$  e  $\epsilon_{cy} = 2,19$  e, para um segundo caso,  $\epsilon_{cx} = \epsilon_{cz} = 2,19$  e  $\epsilon_{cy} = 2,31$ . Os resultados obtidos, para os dois primeiros modos do primeiro grupo, são mostrados na Fig. 3.18. Nesta figura, os resultados encontrados para o segundo caso (\*) coincidem com aqueles obtidos no caso isotrópico (—). Isto ocorre pelo fato da componente do campo elétrico na direção  $y$  ser praticamente nula, para os dois modos considerados. Já no primeiro caso, nota-se a diferença dos resultados obtidos (•) com relação ao caso isotró-

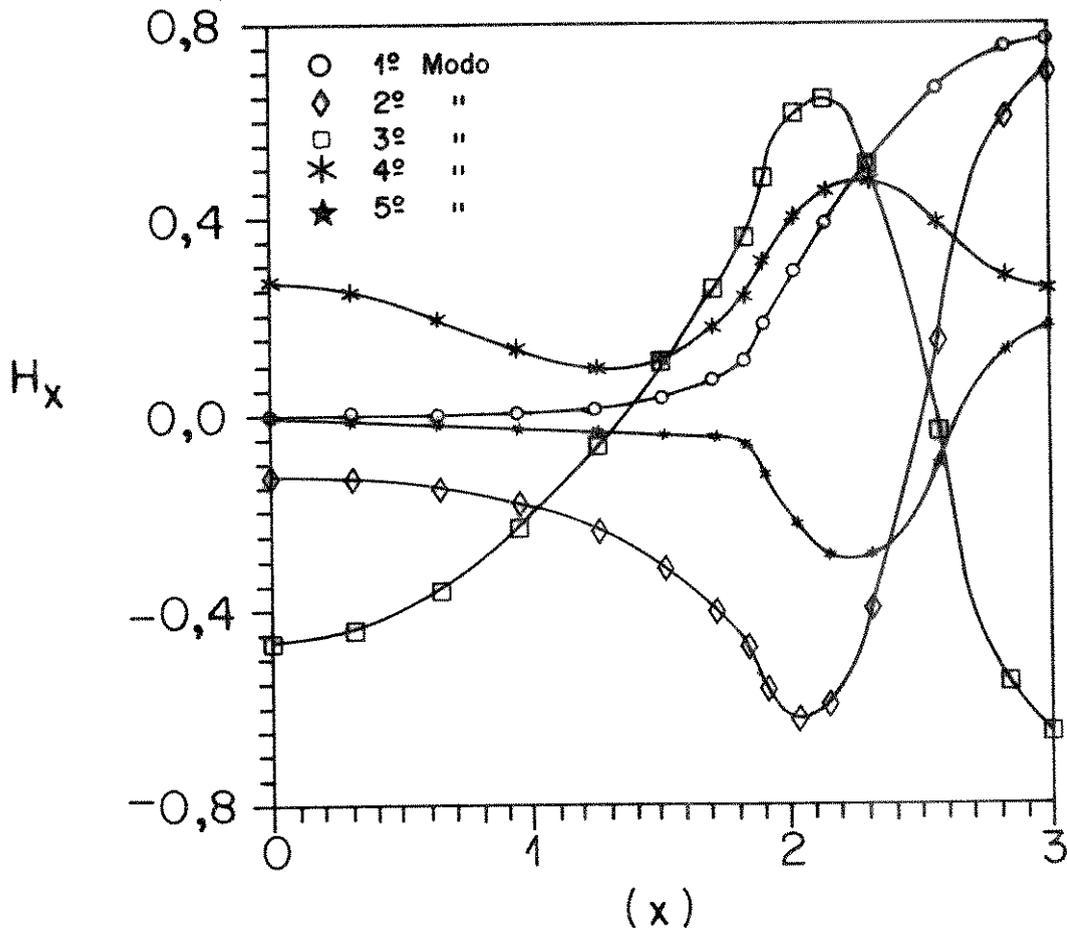


Fig. 3.15 - Variação da componente transversal,  $H_x$ , do campo magnético em função da coordenada  $x$  e para os pontos do segmento que vai do ponto 4 ao ponto 3 (Fig. 3.12). Para o grupo 1, frequência 16 GHz e os 5 primeiros modos.

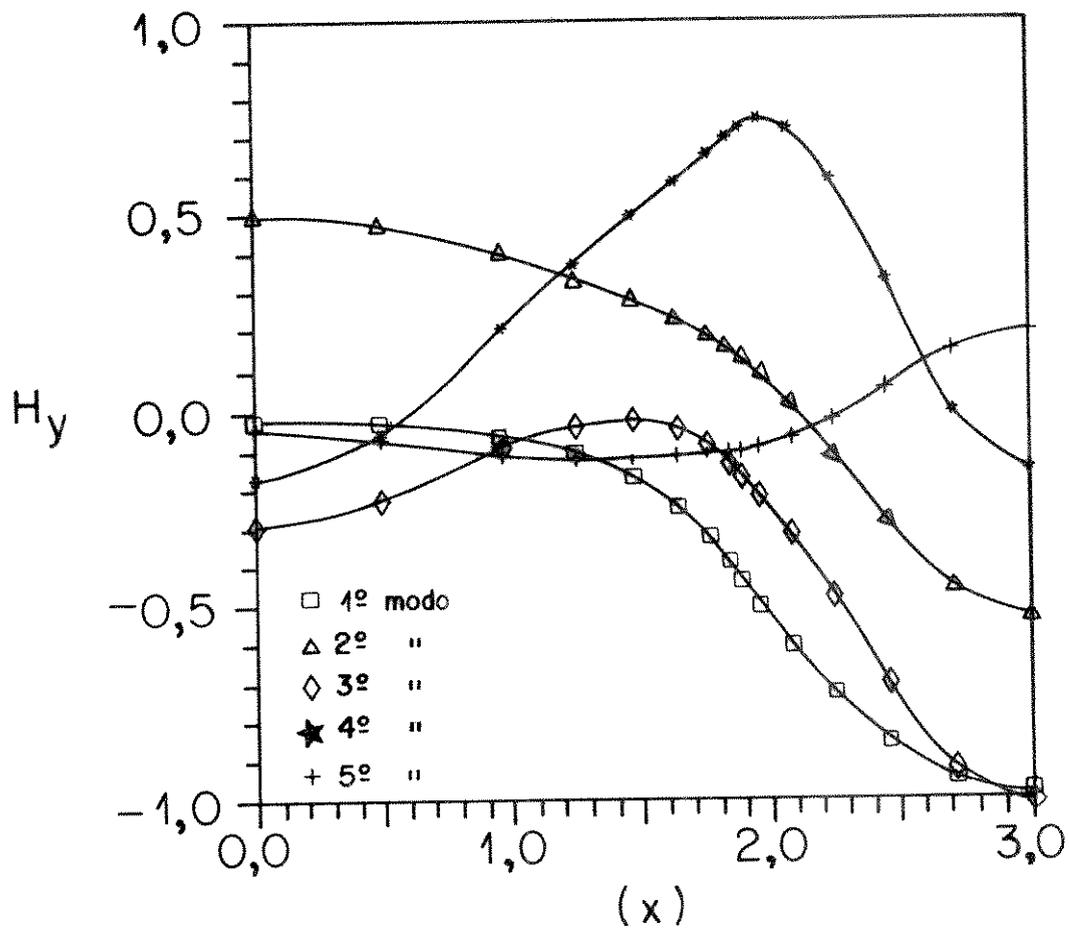


Fig. 3.16 - Variação da componente transversal,  $H_y$ , do campo magnético em função da coordenada  $x$  e para os pontos do segmento que vai do ponto 4 ao ponto 3 (Fig. 3.12). Para o grupo 4, frequência 12 GHz e os 5 primeiros modos.

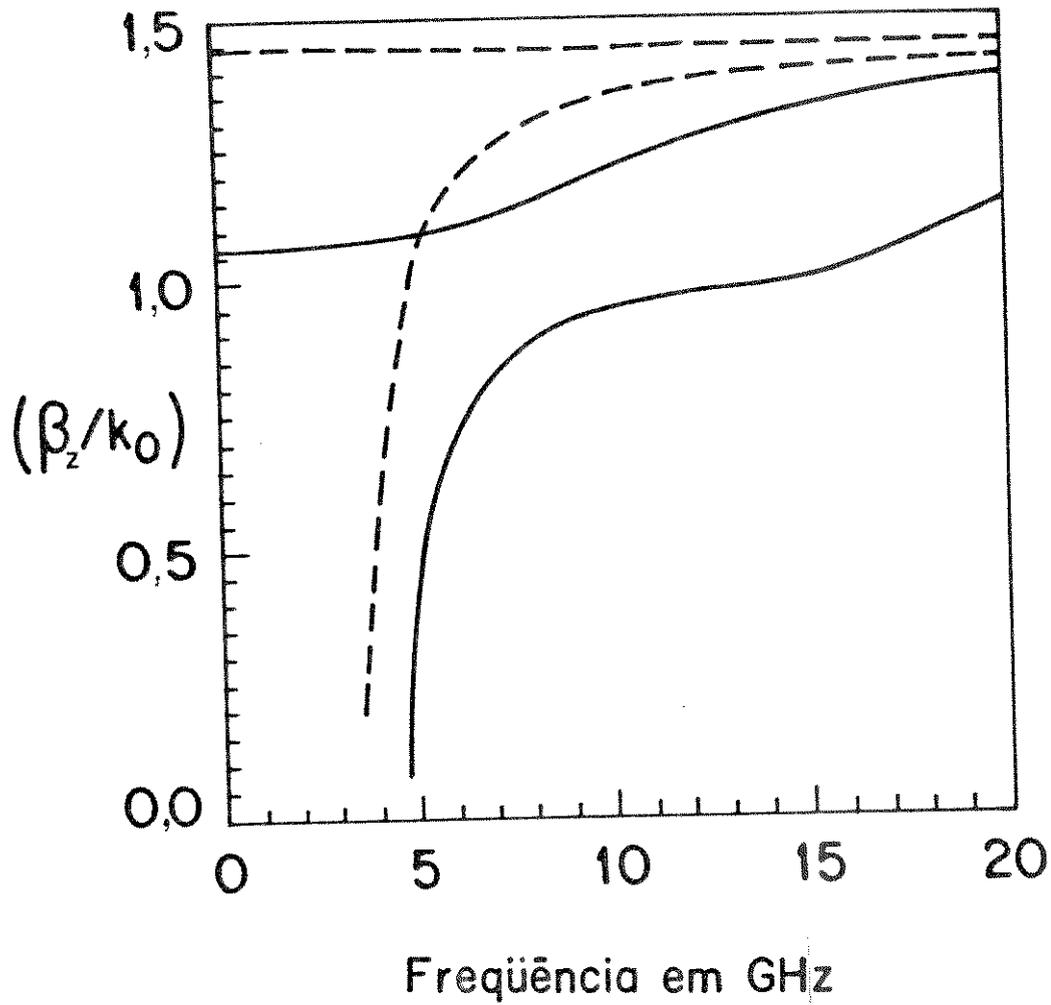


Fig. 3.17 - Os mesmos resultados para os dois primeiros modos da Fig. 3.13 (linha contínua) com os resultados obtidos para os dois primeiros modos, quando  $\epsilon_1$  (Fig. 3.12) é feito igual a 2,05 (linha tracejada).

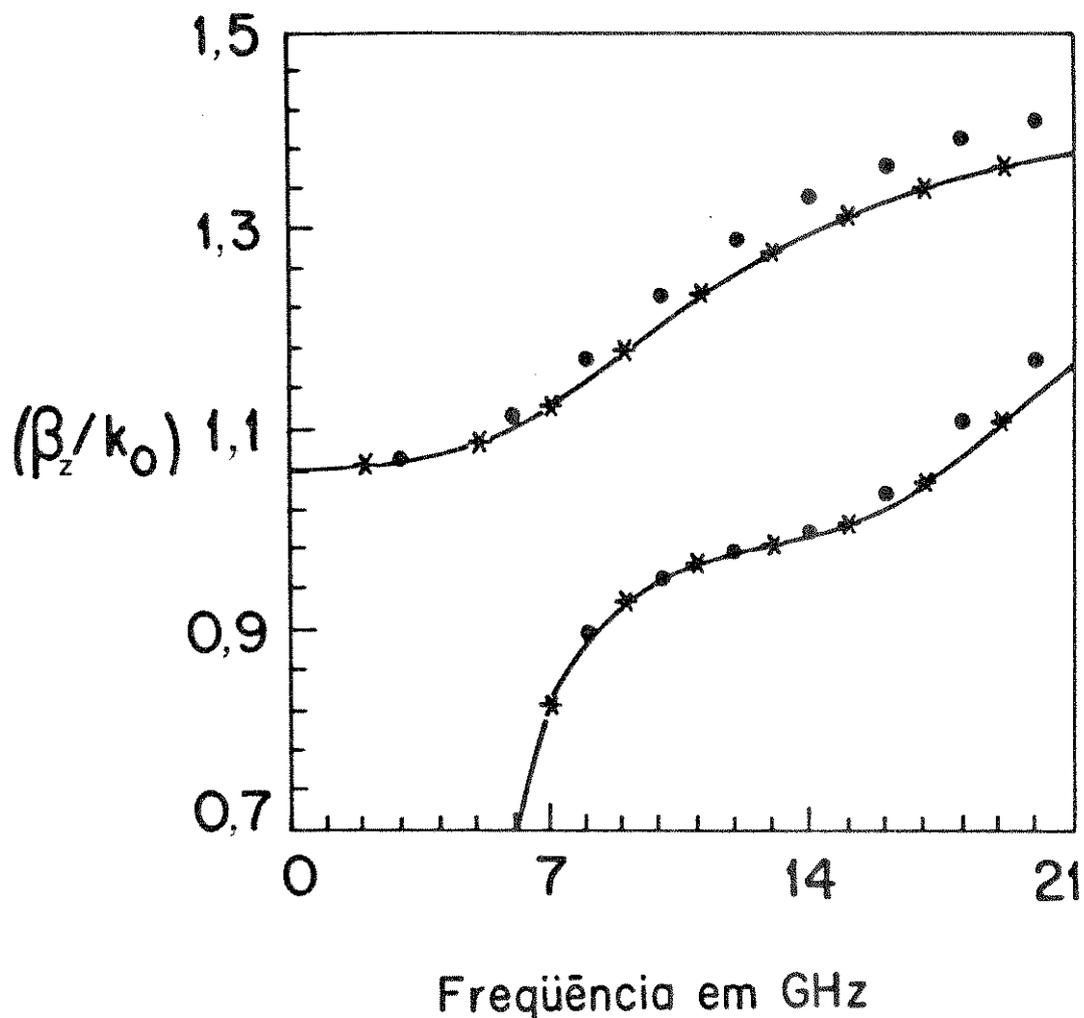


Fig. 3.18 - Constante de fase normalizada, para os dois primeiros modos do primeiro grupo, para a estrutura da Fig. 3.12, nos casos: (a) guia dielétrico isotrópico com  $\epsilon_c = 2,19$  (—); (b) guia dielétrico anisotrópico com  $\epsilon_{cx} = \epsilon_{cz} = 2,31$  e  $\epsilon_{cy} = 2,19$  (•••); e (c) guia dielétrico anisotrópico com  $\epsilon_{cx} = \epsilon_{cz} = 2,19$  e  $\epsilon_{cy} = 2,31$  (\*\*\*) .  $\epsilon_1 = 1,0$ ;  $a = 2b = 2,324$  cm;  $A = 2B = 6,0$  cm.

pico (—), isto porque a componente do campo elétrico na direção x é predominante. Não são mostrados na Fig. 3.18 os resultados que foram calculados para o caso em que o eixo óptico do cristal é posicionado ao longo da direção x, com  $\epsilon_{cy} = \epsilon_{cz} = 2,19$  e  $\epsilon_{cx} = 2,31$ . Estes resultados são quase que coincidentes com aqueles obtidos para  $\epsilon_{cx} = \epsilon_{cz} = 2,31$  e  $\epsilon_{cy} = 2,19$ , como era de se esperar, pois a componente do campo elétrico na direção x é bem maior que aquelas nas direções y e z.

Pode-se, também, observar nas Figuras 3.13, 3.14, 3.17 e 3.18 que, quando a frequência tende para zero,  $\beta_z/k_0$  do modo fundamental tende para  $\sqrt{\epsilon_{ef}}$ , onde  $\epsilon_{ef}$  é a permissividade elétrica relativa efetiva da estrutura, para a frequência zero.

### 3.3 - O GUIA DE ONDA CANAL DIELÉTRICO INTEGRADO

Nesta seção, o guia de onda canal dielétrico difundido em substrato isotrópico (ou anisotrópico) é analisado. Inicialmente, são feitos testes de verificação da formulação, seguidos de um estudo sobre os efeitos causados pela introdução da anisotropia e pelo acoplamento entre guias, na constante de fase.

#### 3.3.1 - VERIFICAÇÃO DA FORMULAÇÃO

A formulação apresentada no Capítulo 2 é, agora, testada para o guia de onda canal dielétrico integrado. Com este objetivo, apresenta-se na Fig. 3.19 as características de dispersão para os modos  $E_{11}^y$  e  $E_{21}^y$  de um guia de onda canal dielétrico anisotrópico, com as componentes do tensor de índice de refração assumidas iguais a:  $n'_x = 2,222$ ;  $n'_y = n'_z = 2,3129$  (Fig. 3.19). As dimensões transversais do canal são a e b, sendo  $a = 5b$ . O substrato dielétrico anisotrópico ( $\text{LiNbO}_3$ ), onde o canal é difundido, apresenta componentes do tensor de índice de refração dadas por:  $n_x = 2,2$ ;  $n_y = n_z = 2,29$ , com  $n_1 = 1,0$  (Fig. 3.19). Na Fig. 3.19 comparam-se os resultados obtidos mediante esta formulação

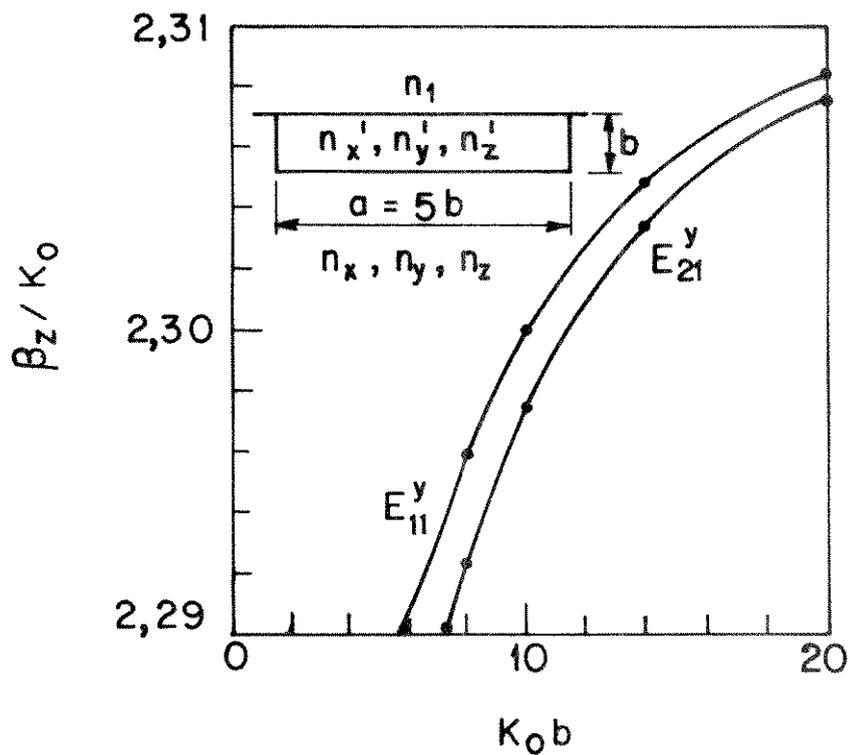


Fig. 3.19 - Comparação das características de dispersão dos modos  $E_{11}^y$  e  $E_{21}^y$  de um guia de onda canal dielétrico anisotrópico difundido em  $\text{LiNbO}_3$ . Resultados desta análise (—). Resultados encontrados por Koshiba et al. [5] (•••). Índices de refração utilizados:  $n_x = 2,2$ ;  $n_y = n_z = 2,29$ ;  $n'_x = 2,222$ ;  $n'_y = n'_z = 2,3129$ ;  $n_1 = 1,0$ .

(linha contínua) com aqueles encontrados através do método dos elementos finitos escalar [5] (pontos), onde uma boa concordância entre os resultados é observada.

Para verificar a formulação para perfis de índice de refração variando continuamente, um guia de onda canal dielétrico isotrópico com perfil de índice de refração bidimensional, variando na forma Gaussiana-Gaussiana em relação aos eixos  $x$  e  $y$  (Fig. 3.20), foi considerado. A seção transversal deste guia de onda é mostrada na Fig. 3.21. Nesta figura, os índices de refração para os meios 1, 2 e 3 foram considerados iguais a:  $n_1 = 1,0$  para o meio 1;  $n_2 = \sqrt{2,1}$  para o meio 2 e  $n_3 = n_2 [1 + 0,05 f(x,y)]$  para o meio 3, onde  $f(x,y) = \exp [-4 (x-x_0)^2/a^2] \cdot \exp [-(y/b)^2]$ ,  $x_0$  é a abscissa do centro do guia e  $a$  e  $b$  são os valores absolutos de  $2(x-x_0)$  e  $y$ , respectivamente, correspondentes a  $f(x,y)$  caindo para  $1/e$  ( $e : 2,7182821 \dots$ ) do seu valor máximo, nas direções  $x$  e  $y$ , respectivamente. As características de dispersão para os modos  $E_{11}^y$  e  $E_{12}^y$ , mostrados na Fig. 3.21, são apresentadas em termos de  $B$  como uma função de  $V$ , onde  $B$  é a constante de fase normalizada,  $B = [(\beta_z/k_0)^2 - n_2^2]/(n_{3\max}^2 - n_2^2)$ ,  $n_{3\max}$  é o valor máximo do índice de refração do meio 3 (Fig. 3.20), e  $V$  é a frequência normalizada,  $V = k_0 b \sqrt{n_{3\max}^2 - n_2^2}$ . Os resultados obtidos com a presente formulação (linha contínua) são comparados, na Fig. 3.21, com aqueles obtidos por Lagu e Ramaswamy [6] (representados por pontos), usando o método das diferenças finitas variacional para a aproximação quase-TE. Como esperado, a melhor concordância entre os resultados é observada nas baixas frequências, onde a aproximação quase-TE apresenta melhores resultados.

### 3.3.2 - O GUIA DE ONDA CANAL DIELÉTRICO ANISOTRÓPICO INTEGRADO COM PERFIL DE ÍNDICE DE REFRAÇÃO GAUSSIANO-GAUSSIANO

Nas Figs. 3.22, 3.23 e 3.24 mostram-se as características de dispersão para um guia de onda canal (meio 3) integrado, com perfil de índice de refração

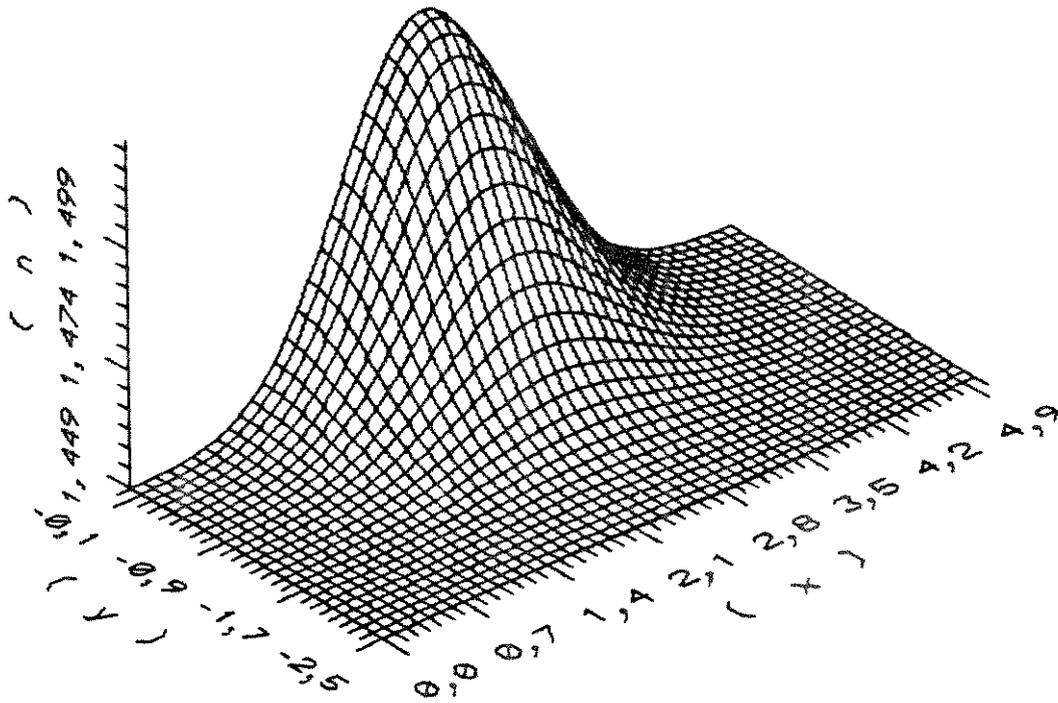


Fig. 3.20 - Perfil de índice de refração com dependência Gaussiana-Gaussiana nas direções x e y, para o meio 3 (Fig. 3.21), com  $a = 2b$ .

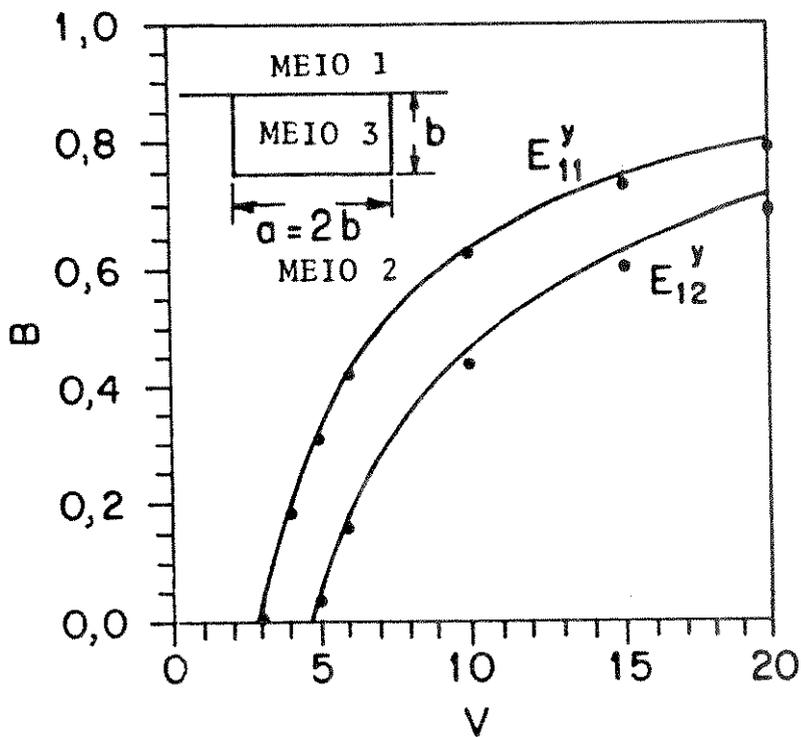


Fig. 3.21 - Comparação das características de dispersão normalizadas dos modos  $E_{11}^y$  e  $E_{12}^y$  de um guia de onda canal dielétrico difundido. Resultados desta análise (—). Resultados encontrados por Lagu e Ramaswany [6] (•••). Índices de refração utilizados:  $n_1 = 1,0$ ;  $n_2 = \sqrt{2,1}$  e  $n_3 = n_2 [1 + 0,05 f(x,y)]$ , onde  $f(x,y) = \exp \cdot \left[ -4 \cdot \left( \frac{x - x_0}{a} \right)^2 \right] \exp \left[ - (y/b)^2 \right]$  e  $x_0$  é a abscissa do ponto central do guia.

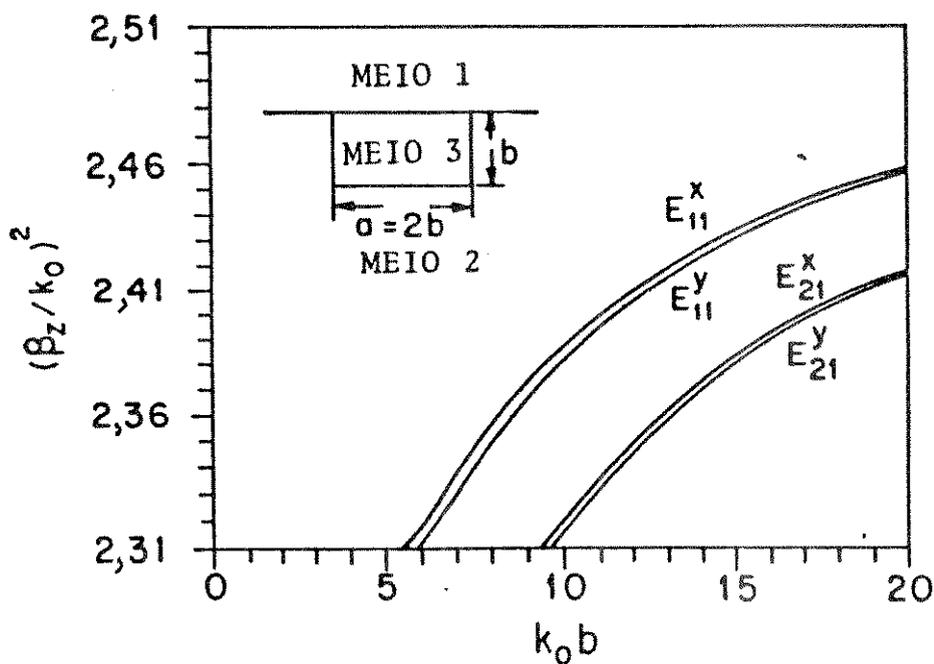


Fig. 3.22 - Características de dispersão dos modos  $E_{pq}^x$  e  $E_{pq}^y$  para um guia de onda canal dielétrico difundido, considerando-se os seguintes índices de refração:  $n_1 = 1,0$ ;  $n_2 = \sqrt{2.31}$  e  $n_3 = n_2 (1 + 0,05 f(x,y))$ , com  $f(x,y) = \exp \left[ -4 \left( \frac{x - x_0}{a} \right)^2 \right] \exp \left[ - (y/b)^2 \right]$  e  $x_0$  é a abscissa do ponto central do guia.

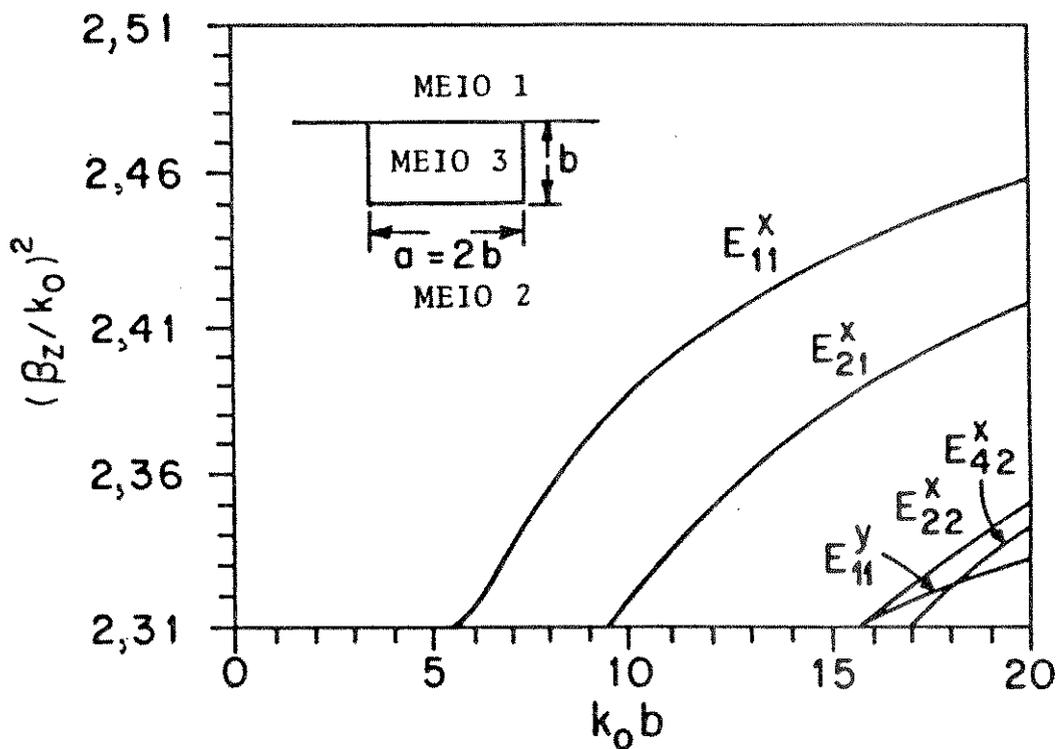


Fig. 3.23 - Características de dispersão dos modos  $E_{pq}^x$  e  $E_{pq}^y$  para o guia de onda canal dielétrico difundido, considerando-se os seguintes índices de refração:  $n_1 = 1,0$ ;  $n_{2x} = n_{2z} = \sqrt{2,31}$ ;  $n_{2y} = \sqrt{2,19}$ ;  $n_{3y} = n_{2y} + 0,05 n_{2x} f(x,y)$ , e  $n_{3x} = n_{3z} = n_{2x} (1 + 0,05 f(x,y))$ , onde  $f(x,y)$  é dado na Fig. 3.22.

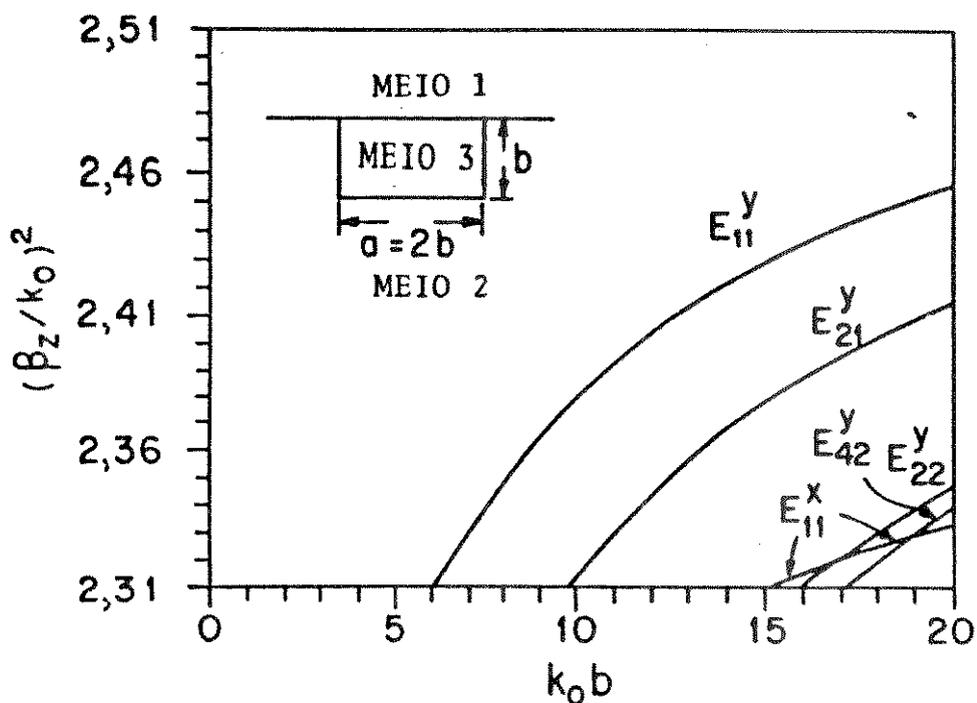


Fig. 3.24 - Características de dispersão dos modos  $E_{pq}^x$  e  $E_{pq}^y$ , para o guia de canal dielétrico difundido, considerando-se os seguintes índices de refração:  $n_1 = 1,0$ ;  $n_{2x} = \sqrt{2,19}$ ;  $n_{2y} = n_{2z} = \sqrt{2,31}$ ;  $n_{3x} = n_{2x} + 0,05 n_{2y} f(x,y)$ , e  $n_{3y} = n_{3z} = n_{2y} (1 + 0,05 f(x,y))$ , onde  $f(x,y)$  é dado na Fig. 3.22.

variando ao longo das direções  $x$  e  $y$ , seguindo a dependência Gaussiana-Gaussiana, mostrada na Fig. 3.20. Para o caso analisado na Fig. 3.22, todos os dielétricos (meios 1, 2 e 3) são isotrópicos, com índices de refração iguais a:  $n_1 = 1,0$  para o meio 1;  $n_2 = \sqrt{2,31}$  para o meio 2 e  $n_3 = n_2 [1 + 0,05 f(x,y)]$  para o meio 3, onde  $f(x,y) = \exp [-4(x-x_0)^2/a^2] \exp [-(y/b)^2]$ ,  $x_0$  é a abscissa do centro do guia e,  $a$  e  $b$  são as dimensões transversais efetivas do guia de onda, com  $a = 2b$ . Na Fig. 3.22, somente os quatro primeiros modos são mostrados.

Nas Figs. 3.23 e 3.24, os meios 2 e 3 são constituídos de dielétricos anisotrópicos uniaxiais. Na Fig. 3.23 o eixo óptico do material é posicionado ao longo da direção  $y$ , e os índices de refração para os meios 1, 2 e 3 são assumidos iguais a:  $n_1 = 1,0$  para o meio 1;  $n_{2x} = n_{2z} = \sqrt{2,31}$ , e  $n_{2y} = \sqrt{2,19}$ , para o meio 2;  $n_{3y} = n_{2y} + 0,05 n_{2x} f(x,y)$ , e  $n_{3x} = n_{3z} = n_{2x} [1 + 0,05 f(x,y)]$  para o meio 3. Já na Fig. 3.24 o eixo óptico é posicionado ao longo da direção  $x$ , com  $n_1 = 1,0$  para o meio 1,  $n_{2x} = \sqrt{2,19}$ ; e  $n_{2y} = n_{2z} = \sqrt{2,31}$  para o meio 2;  $n_{3x} = n_{2x} + 0,05 n_{2y} f(x,y)$ , e  $n_{3y} = n_{3z} = n_{2y} [1 + 0,05 f(x,y)]$  para o meio 3. Para os casos analisados nas Figs. 3.23 e 3.24,  $f(x,y)$  tem expressão idêntica àquela usada na Fig. 3.22.

Uma inspeção das Figs. 3.22, 3.23 e 3.24 permite observar que a anisotropia e a orientação adequada do eixo óptico do cristal podem ser úteis na obtenção de guias de ondas operando em modo único,  $E_{11}^x$  (Fig. 3.23) ou  $E_{11}^y$  (Fig. 3.24), do corte até a excitação do próximo modo de ordem superior, o que constitui uma característica importante em termos práticos.

Na Fig. 3.23, entre o segundo modo ( $E_{21}^x$ ) e o modo  $E_{11}^y$  existem outros modos que foram omitidos para não sobrecarregar a figura, o mesmo acontecendo com relação à Fig. 3.24, entre o segundo modo ( $E_{21}^y$ ) e o modo  $E_{11}^x$ .

### 3.3.3 - O GUIA DE ONDA CANAL DIELÉTRICO ANISOTRÓPICO INTEGRADO EM SUBSTRATO ANISOTRÓPICO

Sob o aspecto prático, é importante que se conheça o comportamento da constante de fase dos modos que se propagam em uma dada estrutura, como função de suas dimensões transversais e da frequência. A Fig. 3.25 mostra essa dependência para a estrutura analisada na Fig. 3.19, usando-se os mesmos índices de refração. Na Fig. 3.25, apresentam-se as características de dispersão do modo fundamental ( $E_{11}^y$ ) (linhas contínuas), considerando-se várias relações entre as dimensões transversais, a e b (Fig. 3.25), do canal. Também mostra-se, nesta figura, a curva característica (linha tracejada) para o primeiro harmônico espacial ( $E_{21}^y$ ), quando  $a=b$ . Pode-se observar na Fig. 3.25 que, à medida que a relação (a/b) varia linearmente, a frequência "limite" do modo fundamental varia segundo uma função de maior grau. Como este efeito também ocorre para os demais modos, é de interesse prático (sub-seção 3.3.2) saber de que forma a faixa de frequência, limitada pela frequência "limite" do modo fundamental ( $f_{cf}$ ) (ver Fig. 3.25, para  $a=b$ ) e pela frequência de corte do primeiro harmônico espacial ( $f_{c1}$ ) (ver Fig. 3.25, para  $a=b$ ), varia em função de (a/b). A Fig. 3.26, mostra a variação desta faixa de frequências, normalizada segundo a expressão  $\Delta(k_0 b) =$

$$= \frac{f_{c1} - f_{cf}}{f_{cf}}, \text{ em função de (a/b). Desta figura se conclui que, à medida que as}$$

dimensões transversais do guia convergem para um mesmo valor ( $a/b \rightarrow 1$ ),  $\Delta(k_0 b)$  aumenta, aumentando assim a faixa de frequência que o guia pode operar com um único modo.

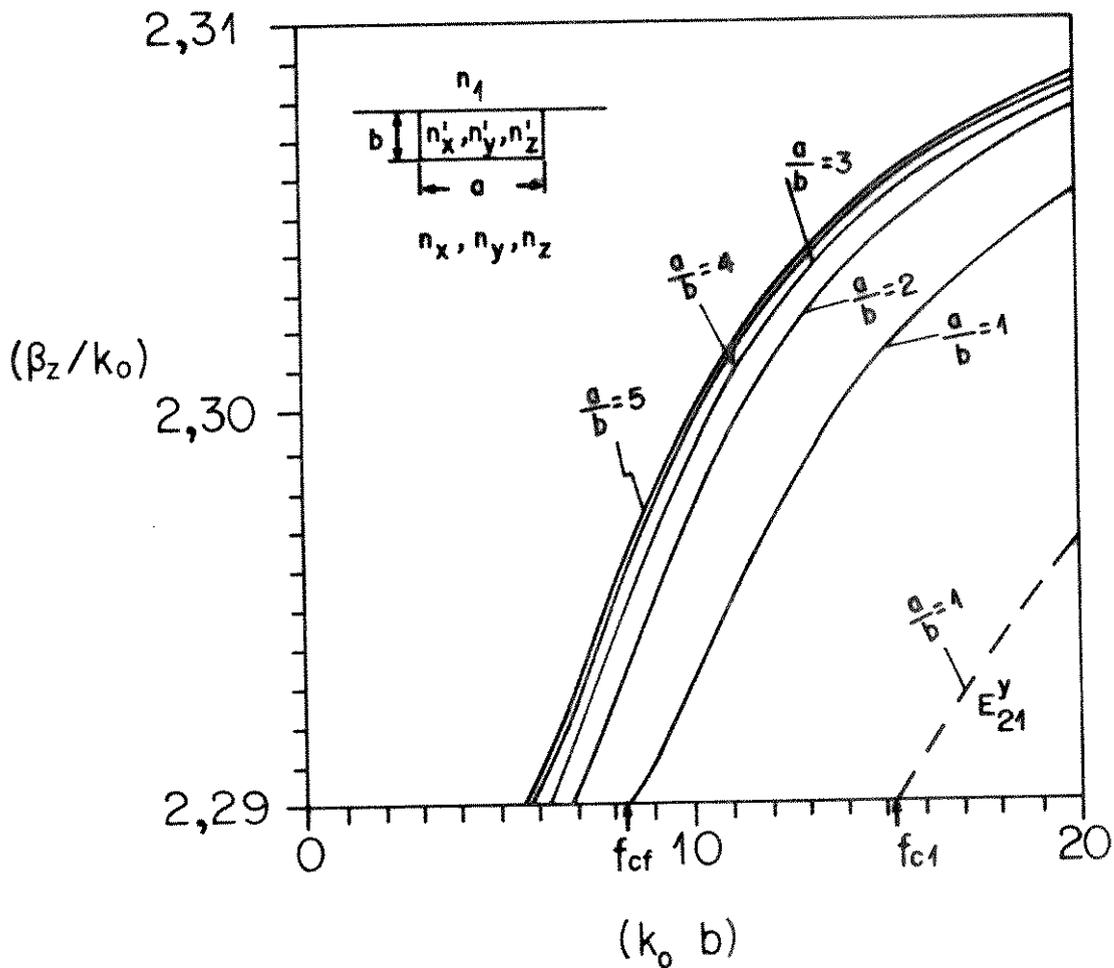


Fig. 3.25 - Característica de dispersão para o modo fundamental (linhas contínuas), como função de  $(a/b)$  e para o primeiro harmônico (linha tracejada), quando  $a=b$ , para um guia de onda canal dielétrico anisotrópico difundido em substrato anisotrópico.  $n_1 = 1,0$ ;  $n_x = 2,2$ ;  $n_y = n_z = 2,29$ ;  $n'_x = 2,222$ ;  $n'_y = n'_z = 2,3129$ .

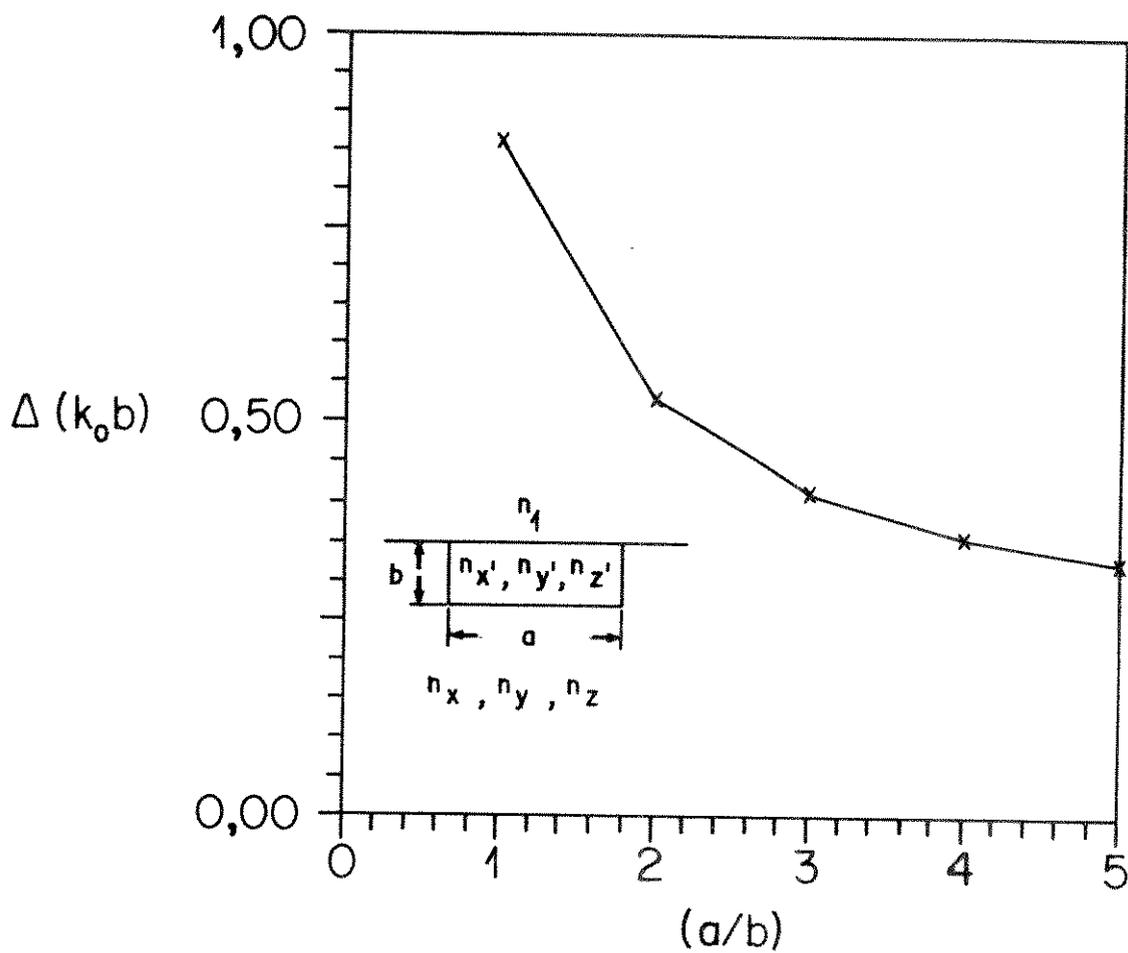


Fig. 3.26 - Variação da faixa de frequências  $\Delta(k_0 b) = (f_{cl} - f_{cf})/f_{cf}$  em função de  $(a/b)$ , para um guia de onda canal dielétrico anisotrópico difundido em substrato anisotrópico.  $n_1 = 1,0$ ;  $n_x = 2,2$ ;  $n_y = n_z = 2,29$ ;  $n'_x = 2,222$ ;  $n'_y = n'_z = 2,3129$ .

### 3.3.4 - ACOPLAMENTO DIRECIONAL ENTRE GUIAS DE ONDAS CANAIS DIELÉTRICOS ANISOTRÓPICOS INTEGRADOS

Nesta sub-seção são apresentadas e analisadas as características de dispersão para estruturas envolvendo o acoplamento direcional entre guias de ondas canais dielétricos anisotrópicos difundidos em substratos, também anisotrópicos.

#### 3.3.4.1 - Acoplamento Simples Entre Guias

O procedimento usado na análise do acoplamento simples entre guias de ondas dielétricos embebidos (sub-seção 3.2.3.1), é utilizado no estudo do acoplamento entre dois guias de ondas canais dielétricos anisotrópicos difundidos, em substratos dielétricos anisotrópicos (Fig. 3.27).

Na Fig. 3.27 o meio 1 é considerado isotrópico, com índice de refração igual a  $n_1 = 1,0$ , o meio 2 é anisotrópico com índices de refração assumidos iguais a  $n_{2x} = 2,2$ ;  $n_{2y} = n_{2z} = 2,29$ ; e o meio 3 é, também, anisotrópico com os seguintes índices de refração  $n_{3x} = 2,222$ ;  $n_{3y} = n_{3z} = 2,3129$ .

Para efeito de análise do acoplamento entre os dois guias mostrados na Fig. 3.27, mostra-se, na Fig. 3.28, a variação da constante de fase normalizada em função de  $(D/a)$ , considerando-se alguns valores de  $k_0 b$ . Desta figura, pode-se concluir que o efeito do acoplamento manifesta-se mais intensamente para as baixas frequências e para  $(D/a) < 1$ . Os resultados apresentados na Fig. 3.28 são válidos para o modo par de  $E_{11}^y$ . Eles foram obtidos mediante a utilização do quarto grupo (aplicado para a região em linha contínua (Fig. 3.27)) e para uma malha de 21 x 21 pontos. Ainda, com relação à estrutura mostrada na Fig. 3.27, a Fig. 3.29 apresenta a variação da constante de fase normalizada em função de

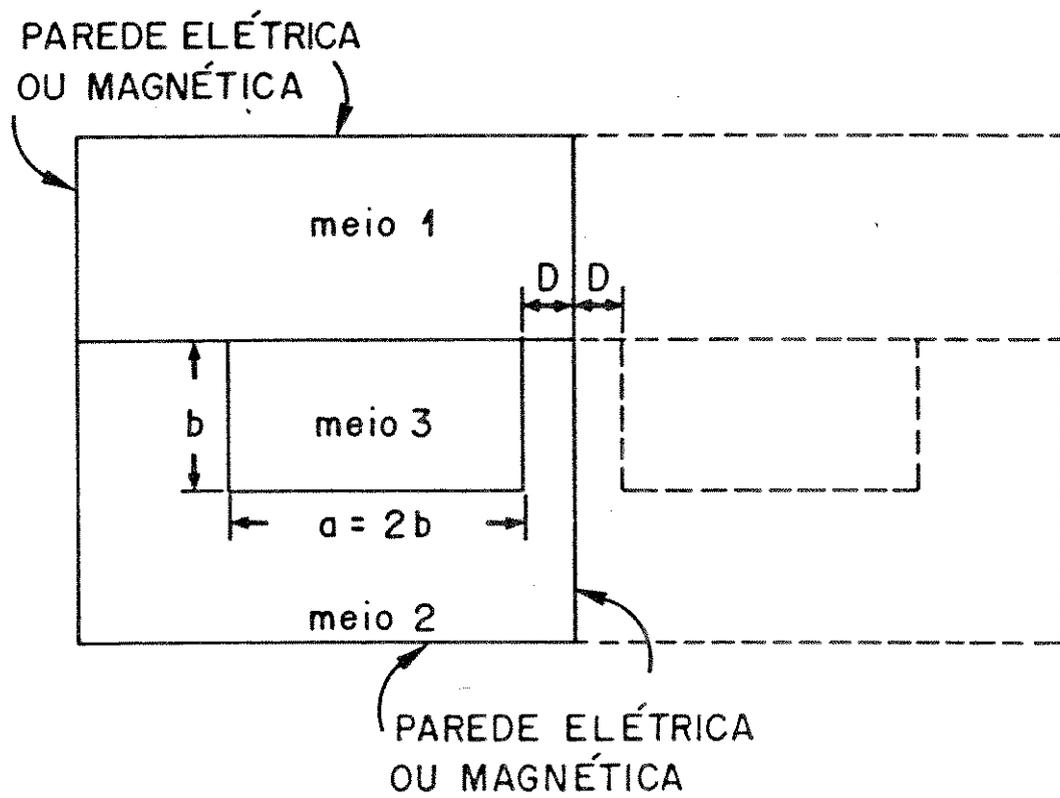


Fig. 3.27 - Simulação para o acoplamento entre dois guias de ondas com canais dielétricos anisotrópicos integrados em substratos anisotrópicos.

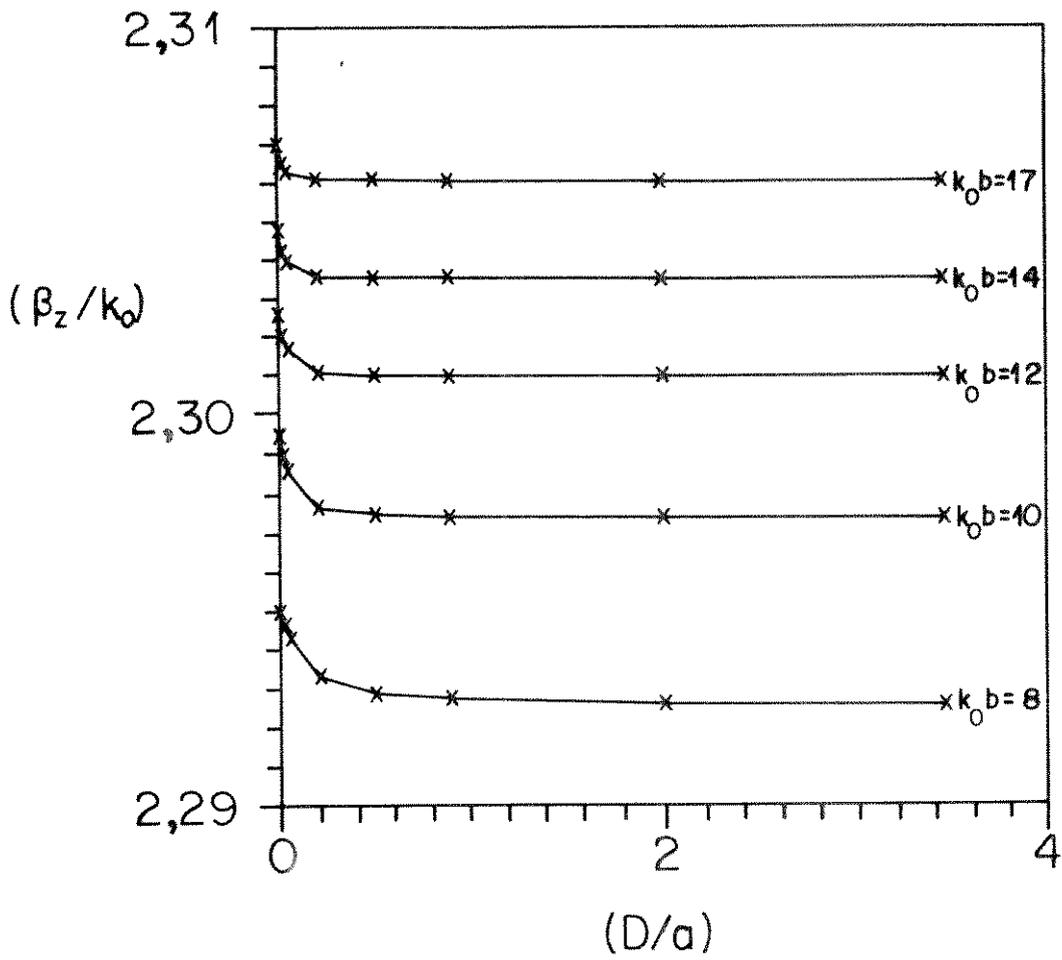


Fig. 3.28 - Constante de fase normalizada em função de  $(D/a)$  para a estrutura da Fig. 3.27, para vários valores de  $k_0 b$ , e para o modo par de  $E_{11}^y$ .  
 $n_1 = 1,0$ ;  $n_{2x} = 2,2$ ;  $n_{2y} = n_{2z} = 2,29$ ;  $n_{3x} = 2,222$ ;  $n_{3y} = n_{3z} = 2,3129$  ;  
 $a = 2b$ .

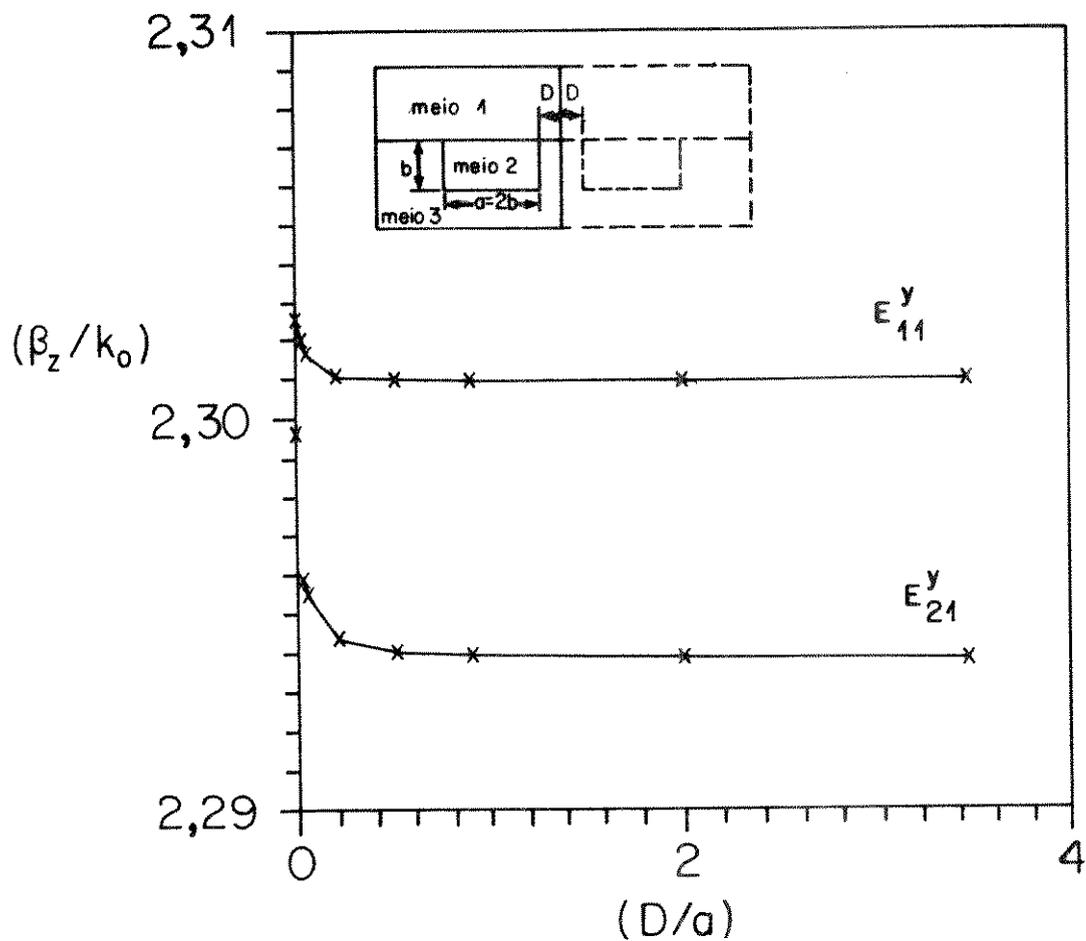


Fig. 3.29 - Variação da constante de fase normalizada, em função de  $(D/a)$  para os modos pares de  $E_{11}^y$ ,  $E_{21}^y$ , para a estrutura da Fig. 3.27, com:  $n_1 = 1,0$ ;  $n_{2x} = 2,2$ ;  $n_{2y} = n_{2z} = 2,29$ ;  $n_{3x} = 2,222$ ;  $n_{3y} = n_{3z} = 2,3129$  e para  $k_0 b = 12,0$ .

(D/a), para os modos pares de  $E_{11}^y$  e  $E_{21}^y$ , e para  $k_0 b = 12,0$ . Nesta figura, observa-se uma maior influência do acoplamento sobre o modo de maior ordem, no caso  $E_{21}^y$ , e, para  $D/a > 1$ , praticamente não há acoplamento entre os guias.

Quando dois guias idênticos se acoplam, cada modo do guia isolado dá origem a dois novos modos (modos pares e ímpares). A Fig. 3.30 mostra esse efeito para o modo  $E_{11}^y$ , considerando-se a estrutura da Fig. 3.27, e para vários valores de (D/a). A curva representada pela linha tracejada (---) representa a característica do modo  $E_{11}^y$  para um dos guias isolado e as curvas acima e abaixo desta representam os modos pares e ímpares de  $E_{11}^y$ , respectivamente. Considerando-se vários níveis de acoplamento (definidos pela relação D/a).

### 3.4 - ANÁLISE DE FIBRA ÓPTICA

A fibra óptica, como um sistema de transmissão de ondas guiadas, tem sido bastante estudada devido às suas propriedades de transmissão com baixas perdas. Por outro lado, experiências têm mostrado que, a introdução da anisotropia nos meios dielétricos das fibras, produzem vários efeitos de interesse prático, tais como: controle de fluxo de potência [7], características de perdas [8] e redução do pico de atenuação próximo ao corte [9].

Devido a estas e outras características peculiares da fibra óptica, além do teste de verificação da formulação para uma fibra de índice de refração degrau, analisam-se também nesta seção as características de dispersão dos modos híbridos, que se propagam em uma fibra com dielétrico anisotrópico e perfil de índice de refração variando continuamente.

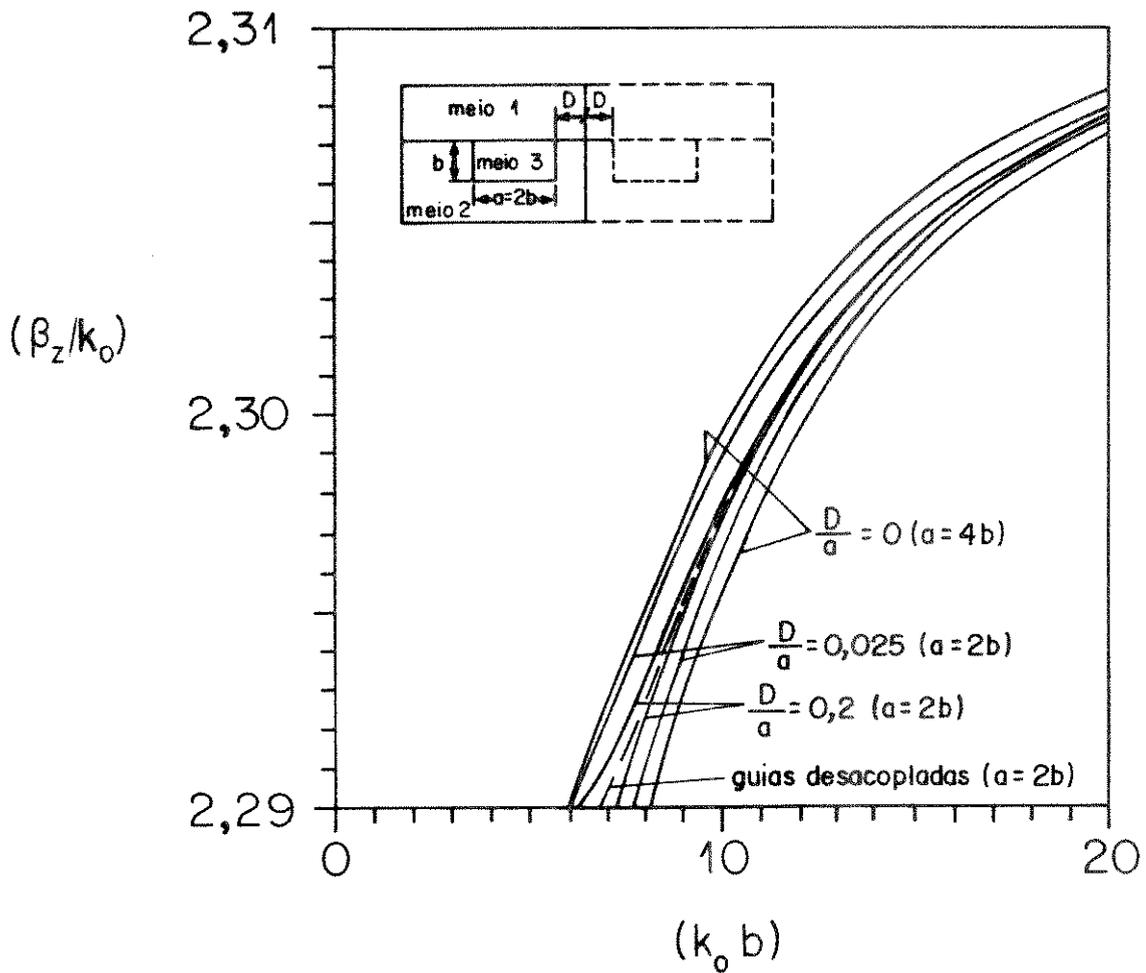


Fig. 3.30 - Características de dispersão do modo  $E_{11}^y$ , para vários valores de  $(D/a)$ . A linha tracejada (---) se refere ao guia desacoplado. As linhas acima e abaixo desta representam os modos pares e ímpares de  $E_{11}^y$ , respectivamente.  $n_1 = 1,0$ ;  $n_{2x} = 2,2$ ;  $n_{2y} = n_{2z} = 2,29$ ;  $n_{3x} = 2,222$ ;  $n_{3y} = n_{3z} = 2,3129$ .

### 3.4.1 - VERIFICAÇÃO DA FORMULAÇÃO

A Fig. 3.31 mostra a característica de dispersão para o modo  $HE_{11}$ , numa região bem próxima ao corte de uma fibra de índice de refração  $\epsilon_1 = 2,53 \epsilon_0$ . A curva representada por linha contínua (—) representa os resultados obtidos mediante esta formulação e os pontos (•••) representam os resultados encontrados através do método do ponto de casamento ("point-matching") [10]. Uma boa concordância entre os mesmos é, então, observada. Em decorrência da simetria cilíndrica da fibra, somente um quarto da estrutura foi analisada. Nesta análise, foi utilizada uma malha de 20 x 20 pontos.

### 3.4.2 - ANÁLISE DE UMA FIBRA ÓPTICA COM DIELÉTRICO ANISOTRÓPICO E PERFIL DE ÍNDICE DE REFRAÇÃO VARIÁVEL

A formulação rigorosa das diferenças finitas é, então, aplicada na determinação das características de dispersão de uma fibra óptica, usando-se material anisotrópico uniaxial, com o eixo óptico posicionado ao longo do eixo da fibra (eixo z) e com perfil de índice de refração variando continuamente.

A Fig. 3.32 mostra a variação das componentes  $\epsilon_x(\rho)$ ,  $\epsilon_y(\rho)$  e  $\epsilon_z(\rho)$  do tensor permissividade elétrica  $[\epsilon]$  em função da variável  $\rho$ , para uma fibra onde o núcleo tem raio equivalente a. Nesta figura, consideram-se quatro tipos diferentes de perfis. A curva caracterizada pela linha contínua (—) representa um perfil Gaussiano, para  $\epsilon_{x,y,z}(\rho)$  dado por:

$$\epsilon_{x,y,z}(\rho) = \epsilon_{c_{x,y,z}} \left\{ 1 + \left( \frac{\epsilon_{x,y,z} - \epsilon_{c_{x,y,z}}}{\epsilon_{c_{x,y,z}}} \right) \exp \left[ - (\rho/B)^2 \right] \right\},$$

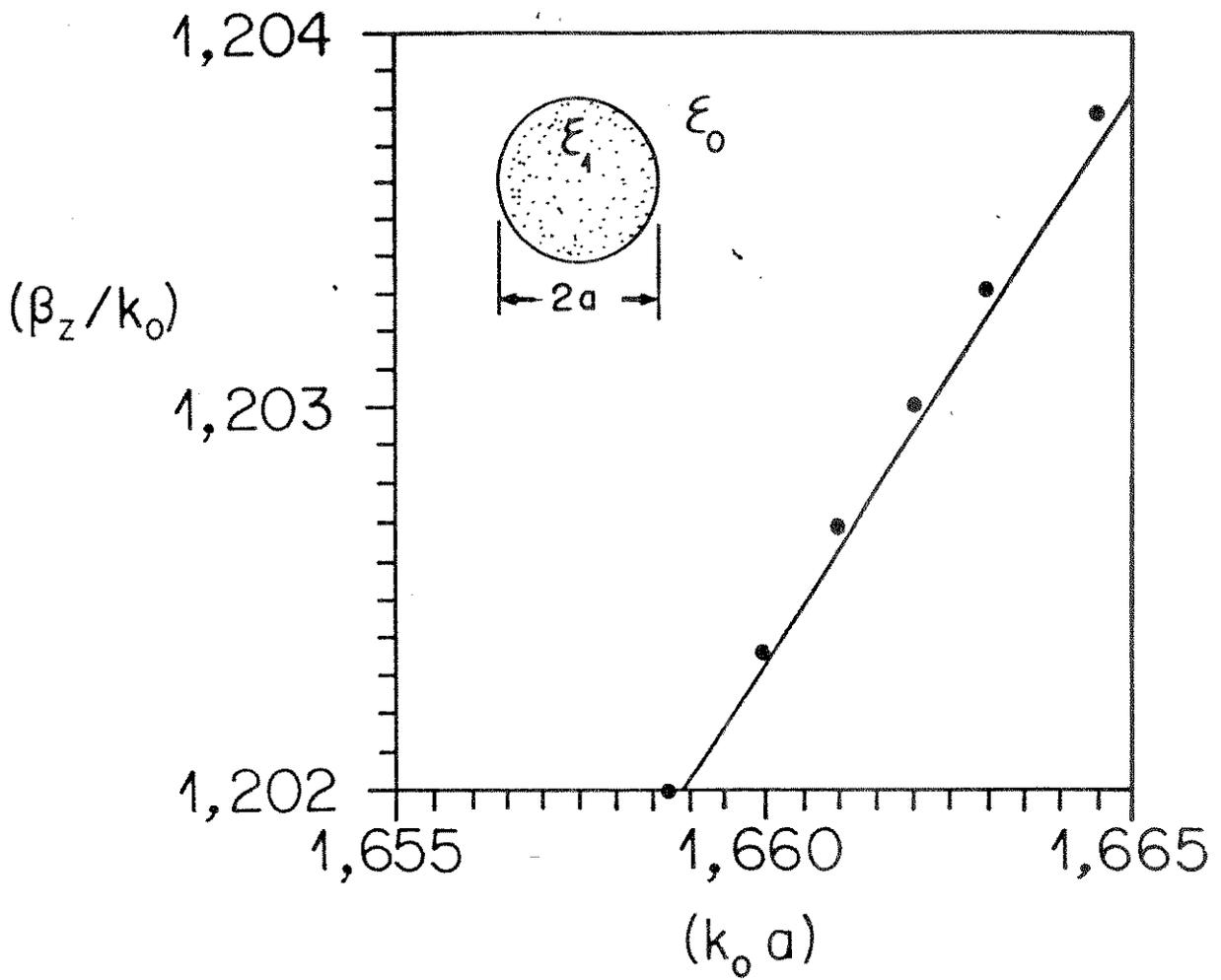


Fig. 3.31 - Características de dispersão do modo  $HE_{11}$ , para uma fibra de índice de refração degrau.  $\epsilon_1 = 2,53 \epsilon_0$ . Resultados obtidos por Yamashita e Atsuki [10] são apresentados por pontos.

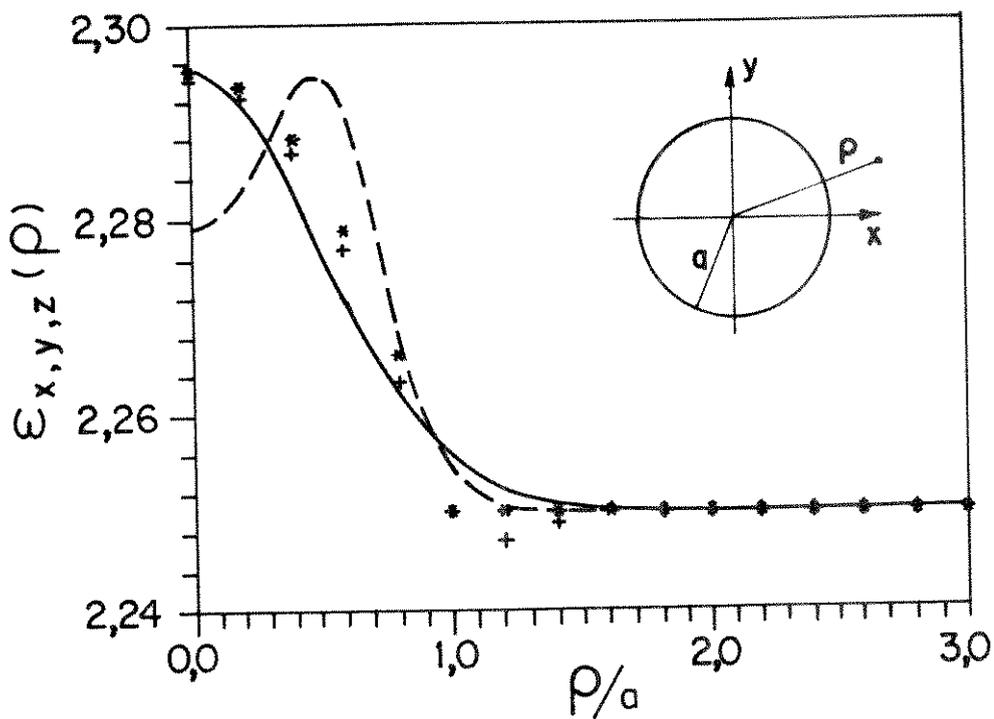


Fig. 3.32 - Perfis para as componentes do tensor permissividade considerando-se as seguintes variações: Gaussiana (— ), Parabólica (\*\*\*) , "Coseno" (---) e "Tangente" (····).

onde  $B = 0,7 a$ . A curva representada por asteriscos (\*) caracteriza um perfil parabólico, com  $\epsilon_{x,y,z}(\rho)$  igual a:

$$\epsilon_{x,y,z}(\rho) = \epsilon_{x,y,z} \left\{ 1 - \left( \frac{\epsilon_{x,y,z} - \epsilon_{c_{x,y,z}}}{\epsilon_{x,y,z}} \right) (\rho/a)^2 \right\},$$

para  $\rho \leq a$  e  $\epsilon_{x,y,z}(\rho) = \epsilon_{c_{x,y,z}}$  para  $\rho > a$ . A curva representada pela linha tracejada (---) caracteriza um perfil "cosseno", para  $\epsilon_{x,y,z}(\rho)$  dado pela expressão:

$$\epsilon_{x,y,z}(\rho) = \epsilon_{c_{x,y,z}} \left\{ 1 + \left( \frac{\epsilon_{x,y,z} - \epsilon_{c_{x,y,z}}}{\epsilon_{c_{x,y,z}}} \right) / \cos \left[ (\rho/B)^2 - 1 \right] \right\},$$

onde  $B = 0,5 a$ . E, a curva caracterizada pelo sinal de adição (+) define um perfil "tangente" para  $\epsilon_{x,y,z}(\rho)$  dado por:

$$\epsilon_{x,y,z}(\rho) = \epsilon_{x,y,z} \left\{ 1 - \left( \frac{\epsilon_{x,y,z} - \epsilon_{c_{x,y,z}}}{2\epsilon_{x,y,z}} \right) \left[ (\rho/a)^2 + 1 + \right. \right. \\ \left. \left. + \left[ (\rho/a)^2 - 1 \right] \operatorname{tgh} \left( \frac{\rho^2 - a^2}{c^2} \right) \right] \right\},$$

onde  $c^2 = 0,35 a^2$ . Nas equações acima  $\epsilon_{x,y,z}$  representa o valor máximo e  $\epsilon_{c_{x,y,z}}$  o valor correspondente a  $\rho \gg a$ , nas direções x, y e z, para as componentes  $\epsilon_x(\rho)$ ,  $\epsilon_y(\rho)$  e  $\epsilon_z(\rho)$ , respectivamente. Os resultados mostrados nas Figs. 3.33 e 3.34 envolvem dois casos distintos, um correspondente ao uso de dielétrico

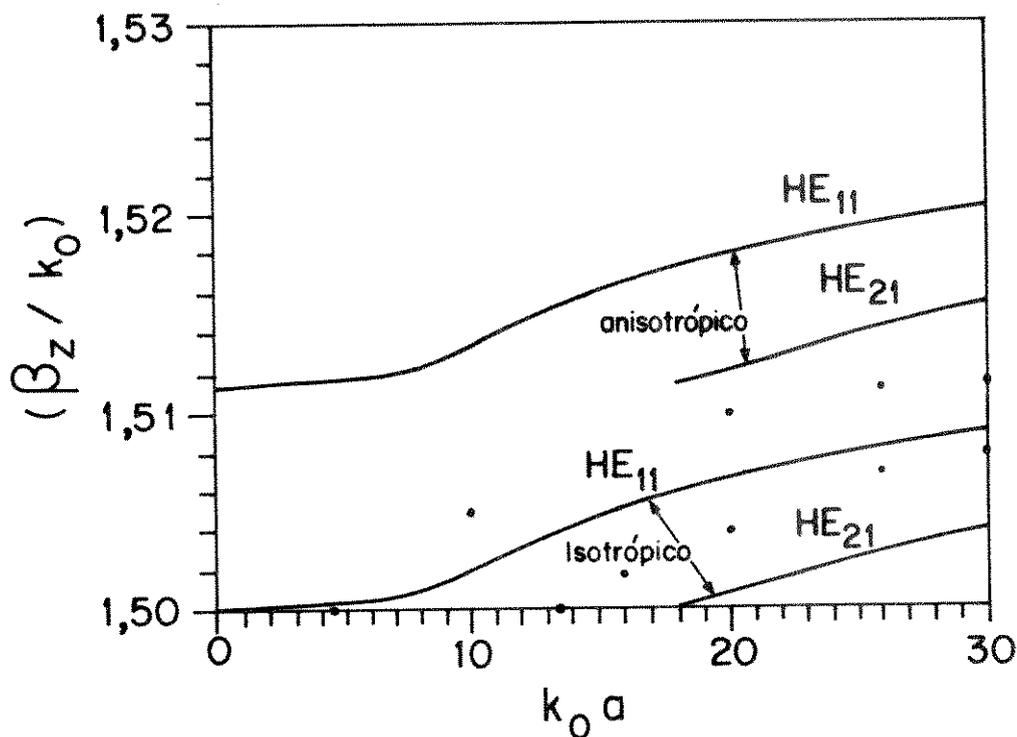


Fig. 3.33 - Características de dispersão dos modos  $HE_{11}$  e  $HE_{21}$ , para uma fibra com núcleo de raio equivalente  $a$ . Nesta análise (—) o perfil Gaussiano (Fig. 3.32) foi usado para as componentes do tensor permissividade  $[\epsilon]$ . Para o caso da fibra com dielétrico isotrópico:  $\epsilon_{x,y,z} = 2,295225$  e  $\epsilon_c = 2,25$ . Para o caso anisotrópico:  $\epsilon_x = \epsilon_y = 2,295225$ ;  $\epsilon_c = \epsilon_c = 2,25$ ;  $\epsilon_z = 2,3296534$  e  $\epsilon_c = 2,2844284$ . Os resultados representados por pontos correspondem àqueles obtidos por [11].

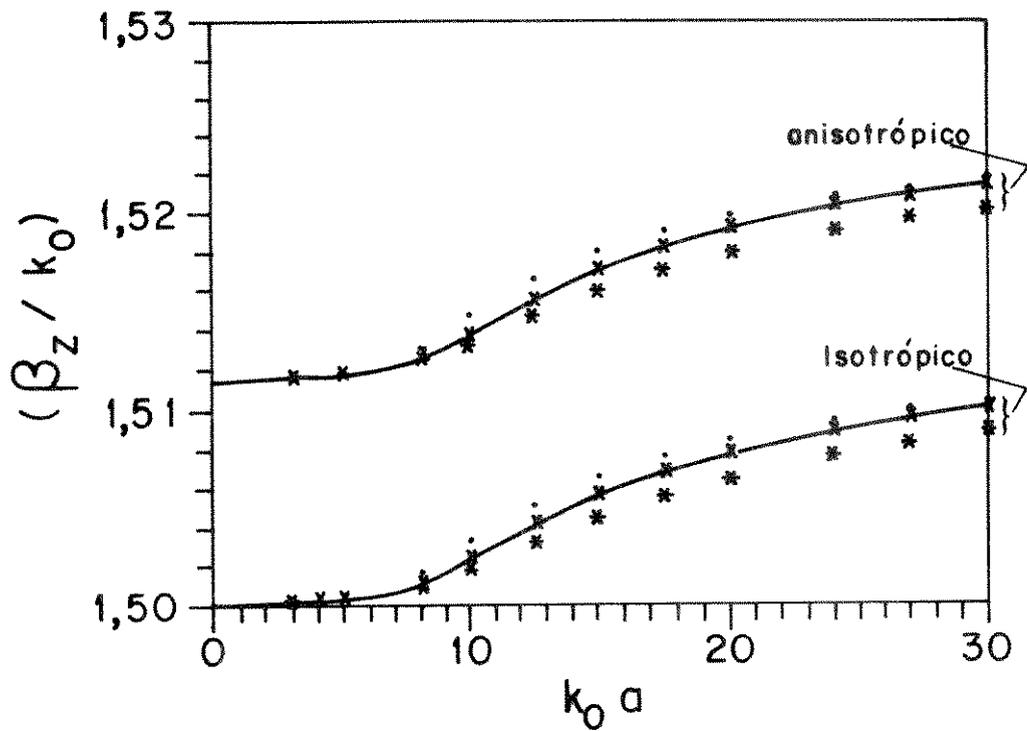


Fig. 3.34 - Características de dispersão do modo  $HE_{11}$  para uma fibra com núcleo de raio equivalente  $a$ , considerando-se os quatro tipos de perfis (Fig. 3.32) para as componentes do tensor permissividade  $[\epsilon]$ . Perfil Gaussiano (\*); Parabólico (x); "Cosseno" (•) e "Tangente" (—). Para o caso da fibra com dielétrico isotrópico  $\epsilon_{x,y,z} = 2,295225$  e  $\epsilon_c = 2,25$ . Para o caso anisotrópico  $\epsilon_x = \epsilon_y = 2,295225$ ;  $\epsilon_c = \epsilon_x = \epsilon_y = 2,25$ ;  $\epsilon_c = 2,2844284$  e  $\epsilon_z = 2,3296534$ .

isotrópico, cuja frequência de corte de cada modo permitido ocorre para  $\beta_z/k_0 = 1,5$  e o outro para dielétrico anisotrópico, cuja frequência de corte de cada modo permitido ocorre para  $\beta_z/k_0 \approx 1,511432$ . No primeiro caso foram utilizados  $\epsilon_{c_{x,y,z}} = 2,25$  e  $\epsilon_{x,y,z} = 2,295225$ , enquanto que, no segundo caso usaram-se os seguintes valores:  $\epsilon_{x,y} = 2,295225$  ;  $\epsilon_{c_{x,y}} = 2,25$  ;  $\epsilon_z = 2,3296534$  e  $\epsilon_{c_z} = 2,2844284$ .

A Fig. 3.33 mostra as características de dispersão para os modos  $HE_{11}$  e  $HE_{21}$  em uma fibra. As curvas representadas pelas linhas contínuas correspondem aos resultados obtidos através desta formulação, considerando-se o perfil Gaussiano definido na Fig. 3.32, tanto para dielétrico isotrópico quanto para dielétrico anisotrópico. Os resultados representados por pontos correspondem àqueles obtidos por [11] para uma fibra onde o tensor permissividade é diagonal com suas componentes sendo função das coordenadas cilíndricas  $\rho$ ,  $\phi$  e  $z$ , e variando na forma parabólica, segundo o perfil correspondente da Fig. 3.32. Como era de se esperar, estes resultados não coincidem com aqueles obtidos através da formulação aqui apresentada por se tratarem de materiais diferentes.

A Fig. 3.34 mostra as características de dispersão para o modo  $HE_{11}$ , em uma fibra, para os quatro tipos de perfis definidos na Fig. 3.32, considerando-se dielétricos isotrópicos e anisotrópicos.

É importante observar que, a introdução da anisotropia longitudinal na fibra não provoca alteração na frequência de corte dos modos superiores (ver Fig. 3.33, modo  $HE_{21}$ ) alterando apenas o valor da constante de fase normalizada. Observa-se, também, que a constante de fase normalizada é muito pouco influenciada pelo perfil de índice de refração da fibra (entre aqueles utilizados neste trabalho).

## REFERÊNCIAS

- [01] N. Schulz, K. Bierwirth, F. Arndt e U. Köster, "Rigorous finite-difference analysis of coupled channel waveguides with arbitrarily varying index profile", J. Lightwave Technol., vol. 9, nº 10, pp. 1244-1253, Out. 1991.
- [02] J.E. Goell, "A circular-harmonic computer analysis of rectangular dielectric waveguide", Bell Syst. Tech. J., pp. 2133-2160, Set. 1969.
- [03] K. Hayata, M. Koshiha, M. Eguchi e M. Suzuki, "Vectorial finite-element method without any spurious solutions for dielectric waveguiding problems using transverse magnetic-field component", IEEE Trans. Microwave Theory Tech., vol. MTT-34, pp. 1120-1124, Nov. 1986.
- [04] H. Yang, J.A. Castaneda, e N.G. Alexopoulos, "An integral equation analysis of an infinite array of rectangular dielectric waveguides", IEEE Trans. Microwave Theory Tech., vol. 38, nº 7, pp. 873-880, Jul. 1990.
- [05] M. Koshiha, K. Hayata, e M. Suzuki, "Approximate scalar finite-element analysis of anisotropic optical waveguides", Electron. Lett., vol. 18, nº 10, pp. 411-412, 13 Maio 1982.
- [06] R.K. Lagu, e R.V. Ramaswamy, "A variational finite-difference method for analyzing channel waveguides with arbitrary index profiles", IEEE Journal of Quantum Electronics, vol. QE-22, nº 6, pp. 968-976, Jun. 1986.
- [07] D.K. Paul, "On powerflow through anisotropic circular, cylindrical dielectric rod waveguide", J. Inst. Telecommun. Eng., vol. 13, pp. 437-451, Nov. 1967.
- [08] B.B. Chaudhuri e D.K. Paul, "Propagation through hollow cylindrical anisotropic dielectric guides", IEEE Trans. Microwave Theory Tech., vol. MTT-27, pp. 170-172, Fev. 1979.
- [09] D.K. Paul e R.K. Shevgaonkar, "Multimode propagation in anisotropic optical waveguides", Radio Sci., vol. 16, pp. 525-533, julho-agosto 1981.

- [10] E. Yamashita e K. Atsuki, "Analysis methods for electromagnetic wave problems", Artech House, Boston-London, 1990.
- [11] S.F. Kawalko e P.L.E. Uslenghi, "A method for the analysis of biaxial graded-index optical fibers", IEEE Trans. Microwave Theory Tech., vol. 39, nº 6, pp. 961-968, junho 1991.

## CAPÍTULO 4

### CONCLUSÕES

As características de dispersão de algumas estruturas guiadas (bidimensionais), onde o elemento básico constitutivo é o guia de onda dielétrico, foram calculadas e analisadas através de uma formulação baseada no método rigoroso das diferenças finitas. Nesta formulação, a equação de onda vetorial, que descreve a propagação ao longo da estrutura, é escrita em termos das componentes transversais do campo magnético, eliminando, desta forma, o problema de modos espúrios, pela inclusão do divergente do campo magnético igual a zero. A formulação desenvolvida, em termos das componentes transversais do campo magnético, permite que o problema seja convertido em um problema convencional de autovalores, com a vantagem de que sua solução é bem conhecida.

A formulação aqui apresentada é geral e pode ser aplicada na análise de estruturas cilíndricas, constituídas de dielétricos isotrópicos e anisotrópicos, com perfil de índice de refração variando arbitrariamente em sua seção transversal. A análise permite a investigação do grupo completo de modos híbridos em estruturas de guias de ondas, isolados e acoplados, de interesse prático. Além do mais, o método leva em conta a presença de ondas complexas  $\gamma_z$  complexas, caso existam.

O uso da malha gradual de pontos mostrou-se vantajoso, a partir do momento que permite a utilização otimizada da capacidade do computador, através

da discretização mais fina em regiões de maior densidade de potência, em detrimento das regiões de menor densidade de potência. Outro fator, que contribui para a redução do tamanho da malha, é a simetria (caso exista) das estruturas, de forma que somente a parte simétrica precisa ser analisada. Neste trabalho, esta característica sempre foi considerada, quando presente.

A consistência da formulação foi examinada através de teste de convergência do método das diferenças finitas e mediante a comparação dos resultados obtidos (constante de fase normalizada), para várias estruturas, com aqueles encontrados na literatura especializada, onde uma boa concordância foi sempre observada. A identificação dos modos,  $E_{pq}^x$  e  $E_{pq}^y$ , propagantes foi feita mediante o cálculo das componentes transversais do campo magnético,  $H_x$  e  $H_y$  (componentes do autovetor (x)), em cada ponto da malha gradual de pontos, o que permite, desta forma, a obtenção do diagrama de variação do campo e, conseqüentemente, a identificação dos modos.

Os resultados apresentados, neste trabalho, foram obtidos através do programa ACOSIM de nossa autoria e cujo processamento dos dados foi realizado no computador IBM-3090.

A introdução de materiais anisotrópicos biaxiais mostrou-se vantajosa em relação aos isotrópicos, pelo fato de propiciarem propagação de modo único (modo fundamental), em uma faixa de frequências mais ampla. Este efeito pode ser reforçado com a utilização de guia de onda dielétrico de seção transversal quadrada, podendo representar, em termos práticos, um dado de grande relevância.

Dentre as diversas estruturas aqui estudadas, pode-se destacar a análise feita para a fibra óptica, que, apesar de sua geometria circular, bons resultados foram obtidos para a constante de fase, principalmente para a região próxima ao corte. Isto foi conseguido, tanto para a fibra constituída de material isotrópico e índice de refração degrau quanto para a fibra com dielé-

trico anisotrópico e perfil de índice de refração variando continuamente. Neste caso, pode-se destacar que, quando o eixo óptico do cristal é posicionado ao longo do eixo da fibra, a frequência de corte para cada modo propagante é igual à que se obteve, quando o material é isotrópico (para  $n_z = n_x = n_y$ , sendo  $n_x$  e  $n_y$  os mesmos do caso anisotrópico).

O efeito do acoplamento entre guias, sobre a constante de fase, foi analisado. Os resultados mostram uma maior influência do acoplamento, nas baixas frequências, nos modos de ordem superior e para  $(D/a) < 1$ .

A partir deste trabalho, outros estudos poderão ser realizados, dentro desta mesma linha de pesquisa. Como exemplo, pode se enumerar:

- Análise de estruturas envolvendo materiais giroelétricos, giromagnéticos e outros.
- Estudo da interferência eletromagnética, partindo-se do conhecimento de acoplamento.
- Aplicação da formulação no estudo de estruturas de multicamadas (homogêneas na direção x) dielétricas, o que poderá ser feito mediante a inclusão da condição de periodicidade (na direção x).
- Análise de guias acoplados com dimensões geométricas e características físicas diferentes entre si.

Com o objetivo de melhorar o desempenho do programa ACOSIM, sugere-se a elaboração de uma rotina que, a partir de cálculos prévios dos campos magnético e elétrico, possa gerar automaticamente uma malha de pontos, partindo-se do princípio de densidade de potência constante. Ou seja, gera-se uma malha inicial, calculam-se os campos e, em seguida, determina-se a densidade de potência para cada retângulo elementar da malha gradual de pontos (Fig. 2.2).

Ajusta-se a malha e repete-se somente o processo. Ainda, com este objetivo, pode-se lançar mão do fato da matriz (A) ser esparsa para calcular os seus autovalores e autovetores. Feito isto, ter-se-á uma redução no espaço de memória virtual utilizada e, conseqüentemente, será possível analisar estruturas mais complexas, com um melhor aproveitamento da capacidade do computador a ser usado.

## APÊNDICE A

### OBTENÇÃO DAS EQUAÇÕES ACOPLADAS (2.29)

Para a obtenção das equações acopladas (2.29), utilizam-se as 2 (duas) equações acopladas dadas por (2.13), para cada uma das regiões 1, 2, 3 e 4 da malha gradual de cinco pontos (Fig. 2.3), com  $\alpha = x$  quando  $\tau = y$  e  $\alpha = y$  quando  $\tau = x$  e levando-se em conta as equações de (2.16) a (2.28). Como resultado obtém-se:

Região 1 :

Nesta região  $l = 1$ , e a equação (2.13), para  $\alpha = x$  quando  $\tau = y$ , resulta em:

$$\frac{\epsilon_{x1}}{\epsilon_{z1}} \frac{\partial^2}{\partial x^2} H_y \Big|_1 + \frac{\partial^2}{\partial y^2} H_y \Big|_1 + \frac{\epsilon_{z1} - \epsilon_{x1}}{\epsilon_{z1}} \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} H_x \Big|_1 + \frac{\epsilon_{x1}}{\epsilon_{z1}^2} \epsilon_{zx1} \left[ \frac{\partial}{\partial y} H_x \Big|_1 - \frac{\partial}{\partial x} H_y \Big|_1 \right] + \left[ k_o^2 \frac{\epsilon_{x1}}{\epsilon_o} + \gamma_z^2 \right] H_{YP} = 0 , \quad (A.1)$$

e, para  $\alpha = y$  quando  $\tau = x$ , resulta em:

$$\frac{\epsilon_{y1}}{\epsilon_{z1}} \frac{\partial^2}{\partial y^2} H_x \Big|_1 + \frac{\partial^2}{\partial x^2} H_x \Big|_1 + \frac{\epsilon_{z1} - \epsilon_{y1}}{\epsilon_{z1}} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} H_y \Big|_1 + \frac{\epsilon_{y1}}{\epsilon_{z1}^2} \epsilon_{zy1} \left[ \frac{\partial}{\partial x} H_y \Big|_1 - \frac{\partial}{\partial y} H_x \Big|_1 \right] +$$

$$+ \left[ k_o^2 \frac{\epsilon_{y1}}{\epsilon_o} + \gamma_z^2 \right] H_{XP} = 0 . \quad (A.2)$$

Nestas equações,  $\epsilon_{x1} = \epsilon_{x1}(x, y)$ ;  $\epsilon_{y1} = \epsilon_{y1}(x, y)$ ;  $\epsilon_{z1} = \epsilon_{z1}(x, y)$ ;

$$\epsilon_{zx1} = \frac{\partial}{\partial x} \epsilon_{z1}(x, y) \text{ e } \epsilon_{zy1} = \frac{\partial}{\partial y} \epsilon_{z1}(x, y) .$$

Substituindo-se em (A.1) e (A.2) as equações para as derivadas (equações de (2.16) a (2.28)) das componentes transversais,  $H_x$  e  $H_y$ , do campo magnético, agrupando-se os termos comuns e dividindo-se as equações resultantes por  $\left(-\frac{nw}{2}\right)$ , tem-se:

$$0 = -\frac{n}{w} \frac{\epsilon_{x1}}{\epsilon_{z1}} \left(1 + w \frac{\epsilon_{zx1}}{2\epsilon_{z1}}\right) H_{YW} - \frac{w}{n} H_{YN} + \left[\frac{n}{w} \frac{\epsilon_{x1}}{\epsilon_{z1}} \left(1 + w \frac{\epsilon_{zx1}}{2\epsilon_{z1}}\right) + \frac{w}{n}\right] H_{YP} -$$

$$- \frac{1}{2} n w \omega^2 \mu_o \epsilon_{x1} H_{YP} - \frac{1}{2} n w \gamma_z^2 H_{YP} - \left(w \frac{\epsilon_{x1} \epsilon_{zx1}}{2\epsilon_{z1}^2} + \frac{\epsilon_{z1} - \epsilon_{x1}}{4\epsilon_{z1}}\right) H_{XN} -$$

$$- \frac{\epsilon_{z1} - \epsilon_{x1}}{4\epsilon_{z1}} H_{XW} + \left(w \frac{\epsilon_{x1} \epsilon_{zx1}}{2\epsilon_{z1}^2} + \frac{\epsilon_{z1} - \epsilon_{x1}}{2\epsilon_{z1}}\right) H_{XP} - n \frac{\epsilon_{x1}}{\epsilon_{z1}} H_{yx1} + w H_{yy1} , \quad (A.3)$$

$$0 = -\frac{n}{w} H_{XW} - \frac{w}{n} \frac{\epsilon_{y1}}{\epsilon_{z1}} \left(1 - n \frac{\epsilon_{zy1}}{2\epsilon_{z1}}\right) H_{XN} + \left[\frac{w}{n} \frac{\epsilon_{y1}}{\epsilon_{z1}} \left(1 - n \frac{\epsilon_{zy1}}{2\epsilon_{z1}}\right) + \frac{n}{w}\right] H_{XP} -$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2} \omega^2 \mu n w \epsilon_{y1} H_{XP} - \frac{1}{2} n w \gamma_z^2 H_{XP} + \left( n \frac{\epsilon_{y1} \epsilon_{zy1}}{2\epsilon_{z1}^2} - \frac{\epsilon_{z1} - \epsilon_{y1}}{4\epsilon_{z1}} \right) H_{YW} - \frac{\epsilon_{z1} - \epsilon_{y1}}{4\epsilon_{z1}} H_{YN} + \\
& + \left( -n \frac{\epsilon_{y1} \epsilon_{zy1}}{2\epsilon_{z1}^2} + \frac{\epsilon_{z1} - \epsilon_{y1}}{2\epsilon_{z1}} \right) H_{YP} + w \frac{\epsilon_{y1}}{\epsilon_{z1}} H_{xy1} - n H_{xx1}, \tag{A.4}
\end{aligned}$$

respectivamente. Em (A.3) e (A.4)  $H_{yx1} = \frac{\partial H}{\partial x} \Big|_1$ ;  $H_{yy1} = \frac{\partial H}{\partial y} \Big|_1$ ;  $H_{xy1} = \frac{\partial H}{\partial y} \Big|_1$

$$\text{e } H_{xx1} = \frac{\partial H}{\partial x} \Big|_1.$$

Região 2 :

Para esta região  $\ell = 2$ , e a equação (2.13), para  $\alpha = x$  quando  $\tau = y$ , resulta em:

$$\begin{aligned}
& \frac{\epsilon_{x2}}{\epsilon_{z2}} \frac{\partial^2}{\partial x^2} H_y \Big|_2 + \frac{\partial^2}{\partial y^2} H_y \Big|_2 + \frac{\epsilon_{z2} - \epsilon_{x2}}{\epsilon_{z2}} \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} H_x \Big|_2 + \frac{\epsilon_{x2}}{\epsilon_{z2}^2} \epsilon_{zx2} \left[ \frac{\partial}{\partial y} H_x \Big|_2 - \frac{\partial}{\partial x} H_y \Big|_2 \right] + \\
& + \left[ k_o^2 \frac{\epsilon_{x1}}{\epsilon_o} + \gamma_z^2 \right] H_{YP} = 0. \tag{A.5}
\end{aligned}$$

e, para  $\alpha = y$  quando  $\tau = x$ , resulta em:

$$\begin{aligned}
& \frac{\epsilon_{y2}}{\epsilon_{z2}} \frac{\partial^2}{\partial y^2} H_x \Big|_2 + \frac{\partial^2}{\partial x^2} H_x \Big|_2 + \frac{\epsilon_{z2} - \epsilon_{y2}}{\epsilon_{z2}} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} H_y \Big|_2 + \frac{\epsilon_{y2}}{\epsilon_{z2}^2} \epsilon_{zy2} \left[ \frac{\partial}{\partial x} H_y \Big|_2 - \frac{\partial}{\partial y} H_x \Big|_2 \right] + \\
& + \left[ k_o^2 \frac{\epsilon_{y1}}{\epsilon_o} + \gamma_z^2 \right] H_{XP} = 0 . \tag{A.6}
\end{aligned}$$

Nestas equações,  $\epsilon_{x2} = \epsilon_{x2}(x, y)$  ;  $\epsilon_{y2} = \epsilon_{y2}(x, y)$  ;  $\epsilon_{z2} = \epsilon_{z2}(x, y)$  ;

$\epsilon_{zx2} = \frac{\partial}{\partial x} \epsilon_{z2}(x, y)$  e  $\epsilon_{zy2} = \frac{\partial}{\partial y} \epsilon_{z2}(x, y)$ . Substituindo-se em (A.5) e (A.6) as equações para as derivadas (equações de (2.16) a (2.28)) das componentes transversais,  $H_x$  e  $H_y$ , do campo magnético, agrupando-se os termos comuns e dividindo-se as equações resultantes por  $\left(-\frac{ws}{2}\right)$ , obtém-se:

$$\begin{aligned}
0 = & -\frac{s}{w} \frac{\epsilon_{x2}}{\epsilon_{z2}} \left(1 + w \frac{\epsilon_{zx2}}{2\epsilon_{z2}}\right) H_{YW} - \frac{w}{s} H_{YS} + \left[\frac{s}{w} \frac{\epsilon_{x2}}{\epsilon_{z2}} \left(1 + w \frac{\epsilon_{zx2}}{2\epsilon_{z2}}\right) + \frac{w}{s}\right] H_{YP} - \\
& - \frac{1}{2} w s \omega^2 \mu_o \epsilon_{x2} H_{YP} - \frac{1}{2} w s \gamma_z^2 H_{YP} + \left(w \frac{\epsilon_{x2} \epsilon_{zx2}}{2\epsilon_{z2}^2} + \frac{\epsilon_{z2} - \epsilon_{x2}}{4\epsilon_{z2}}\right) H_{XS} + \\
& + \frac{\epsilon_{z2} - \epsilon_{x2}}{4\epsilon_{z2}} H_{XW} + \left(-w \frac{\epsilon_{x2} \epsilon_{zx2}}{2\epsilon_{z2}^2} - \frac{\epsilon_{z2} - \epsilon_{x2}}{2\epsilon_{z2}}\right) H_{XP} - s \frac{\epsilon_{x2}}{\epsilon_{z2}} H_{yx2} - w H_{yy2} , \tag{A.7}
\end{aligned}$$

$$0 = -\frac{s}{w} H_{XW} - \frac{w}{s} \frac{\epsilon_{y2}}{\epsilon_{z2}} \left(1 + s \frac{\epsilon_{zy2}}{2\epsilon_{z2}}\right) H_{XS} + \left[\frac{w}{s} \frac{\epsilon_{y2}}{\epsilon_{z2}} \left(1 + s \frac{\epsilon_{zy2}}{2\epsilon_{z2}}\right) + \frac{s}{w}\right] H_{XP} -$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2} s w \omega^2 \mu \epsilon_{y2} H_{XP} - \frac{1}{2} s w \gamma_z^2 H_{XP} + \left( s \frac{\epsilon_{y2} \epsilon_{zy2}}{2\epsilon_{z2}^2} + \frac{\epsilon_{z2} - \epsilon_{y2}}{4\epsilon_{z2}} \right) H_{YW} + \\
& + \frac{\epsilon_{z2} - \epsilon_{y2}}{4\epsilon_{z2}} H_{YS} - \left( s \frac{\epsilon_{y2} \epsilon_{zy2}}{2\epsilon_{z2}^2} + \frac{\epsilon_{z2} - \epsilon_{y2}}{2\epsilon_{z2}} \right) H_{YP} - w \frac{\epsilon_{y2}}{\epsilon_{z2}} H_{xy2} - s H_{xx2}, \quad (A.8)
\end{aligned}$$

respectivamente. Em (A.7) e (A.8)  $H_{yx2} = \frac{\partial}{\partial x} H_y \Big|_2$ ;  $H_{yy2} = \frac{\partial}{\partial y} H_y \Big|_2$ ;  $H_{xy2} = \frac{\partial}{\partial y} H_x \Big|_2$

$$\text{e } H_{xx2} = \frac{\partial}{\partial x} H_x \Big|_2.$$

Região 3 :

Neste caso,  $\ell = 3$ . Seguindo-se os passos realizados para as regiões 1 e 2, as seguintes equações são encontradas:

$$\begin{aligned}
0 = & -\frac{s}{e} \frac{\epsilon_{x3}}{\epsilon_{z3}} \left( 1 - e \frac{\epsilon_{zx3}}{2\epsilon_{z3}} \right) H_{YE} - \frac{c}{s} H_{YS} + \left[ \frac{s}{e} \frac{\epsilon_{x3}}{\epsilon_{z3}} \left( 1 - e \frac{\epsilon_{zx3}}{2\epsilon_{z3}} \right) + \frac{c}{s} \right] H_{YP} - \\
& -\frac{1}{2} e s \omega^2 \mu \epsilon_{x3} H_{YP} - \frac{1}{2} e s \gamma_z^2 H_{YP} + \left( e \frac{\epsilon_{x3} \epsilon_{zx3}}{2\epsilon_{z3}^2} - \frac{\epsilon_{z3} - \epsilon_{x3}}{4\epsilon_{z3}} \right) H_{XS} - \\
& - \frac{\epsilon_{z3} - \epsilon_{x3}}{4\epsilon_{z3}} H_{XE} + \left( -e \frac{\epsilon_{x3} \epsilon_{zx3}}{2\epsilon_{z3}^2} + \frac{\epsilon_{z3} - \epsilon_{x3}}{2\epsilon_{z3}} \right) H_{XP} + s \frac{\epsilon_{x3}}{\epsilon_{z3}} H_{yx3} - e H_{yy3}, \quad (A.9)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 = & -\frac{s}{e} H_{XE} - \frac{e}{s} \frac{\epsilon_{y3}}{\epsilon_{z3}} \left( 1 + s \frac{\epsilon_{zy3}}{2\epsilon_{z3}} \right) H_{XS} + \left[ \frac{e}{s} \frac{\epsilon_{y3}}{\epsilon_{z3}} \left( 1 + s \frac{\epsilon_{zy3}}{2\epsilon_{z3}} \right) + \frac{s}{e} \right] H_{XP} - \\
& - \frac{1}{2} \operatorname{sew}^2 \mu \epsilon_{y3} H_{XP} - \frac{1}{2} \operatorname{se}\gamma_z^2 H_{XP} - \left( s \frac{\epsilon_{y3} \epsilon_{zy3}}{2\epsilon_{z3}^2} + \frac{\epsilon_{z3} - \epsilon_{y3}}{4\epsilon_{z3}} \right) H_{YE} - \\
& - \frac{\epsilon_{z3} - \epsilon_{y3}}{4\epsilon_{z3}} H_{YS} + \left( s \frac{\epsilon_{y3} \epsilon_{zy3}}{2\epsilon_{z3}^2} + \frac{\epsilon_{z3} - \epsilon_{y3}}{2\epsilon_{z3}} \right) H_{YP} - e \frac{\epsilon_{y3}}{\epsilon_{z3}} H_{xy3} + s H_{xx3} ,
\end{aligned} \tag{A.10}$$

respectivamente. Nas equações (A.9) e (A.10)  $\epsilon_{x3} = \epsilon_{x3}(x, y)$ ;  $\epsilon_{y3} = \epsilon_{y3}(x, y)$ ;

$$\epsilon_{z3} = \epsilon_{z3}(x, y); \epsilon_{zx3} = \frac{\partial}{\partial x} \epsilon_{z3}(x, y); \epsilon_{zy3} = \frac{\partial}{\partial y} \epsilon_{z3}(x, y); H_{yx3} = \frac{\partial}{\partial x} H_y \Big|_3;$$

$$H_{yy3} = \frac{\partial}{\partial y} H_z \Big|_3; H_{xy3} = \frac{\partial}{\partial y} H_x \Big|_3; e H_{xx3} = \frac{\partial}{\partial x} H_x \Big|_3.$$

Região 4 :

Nesta região  $\ell = 4$ . De forma análoga ao que foi feito anteriormente, as seguintes equações são obtidas:

$$\begin{aligned}
0 = & -\frac{n}{e} \frac{\epsilon_{x4}}{\epsilon_{z4}} \left( 1 - e \frac{\epsilon_{zx4}}{2\epsilon_{z4}} \right) H_{YE} - \frac{e}{n} H_{YN} + \left[ \frac{n}{e} \frac{\epsilon_{x4}}{\epsilon_{z4}} \left( 1 - e \frac{\epsilon_{zx4}}{2\epsilon_{z4}} \right) + \frac{e}{n} \right] H_{YP} - \\
& - \frac{1}{2} \operatorname{new}^2 \mu \epsilon_{x4} H_{YP} - \frac{1}{2} \operatorname{ne}\gamma_z^2 H_{YP} - \left( e \frac{\epsilon_{x4} \epsilon_{zx4}}{2\epsilon_{z4}^2} - \frac{\epsilon_{z4} - \epsilon_{x4}}{4\epsilon_{z4}} \right) H_{XN} +
\end{aligned}$$

$$+ \frac{\epsilon_{z4} - \epsilon_{x4}}{4\epsilon_{z4}} H_{XE} + \left( e \frac{\epsilon_{x4}\epsilon_{zx4}}{2\epsilon_{z4}^2} - \frac{\epsilon_{z4} - \epsilon_{x4}}{2\epsilon_{z4}} \right) H_{XP} + n \frac{\epsilon_{x4}}{\epsilon_{z4}} H_{yx4} + e H_{yy4} ,$$

(A.11)

$$0 = - \frac{n}{e} H_{XE} - \frac{e}{n} \frac{\epsilon_{y4}}{\epsilon_{z4}} \left( 1 - n \frac{\epsilon_{zy4}}{2\epsilon_{z4}} \right) H_{XN} + \left[ \frac{e}{n} \frac{\epsilon_{y4}}{\epsilon_{z4}} \left( 1 - n \frac{\epsilon_{zy4}}{2\epsilon_{z4}} \right) + \frac{e}{n} \right] H_{XP} -$$

$$- \frac{1}{2} n\omega^2 \mu \epsilon_{y4} H_{XP} - \frac{1}{2} n\epsilon_z^2 H_{XP} - \left( n \frac{\epsilon_{y4}\epsilon_{zy4}}{2\epsilon_{z4}^2} - \frac{\epsilon_{z4} - \epsilon_{y4}}{4\epsilon_{z4}} \right) H_{YE} +$$

$$+ \frac{\epsilon_{z4} - \epsilon_{y4}}{4\epsilon_{z4}} H_{YN} + \left( n \frac{\epsilon_{y4}\epsilon_{zy4}}{2\epsilon_{z4}^2} - \frac{\epsilon_{z4} - \epsilon_{y4}}{2\epsilon_{z4}} \right) H_{YP} + e \frac{\epsilon_{y4}}{\epsilon_{z4}} H_{xy4} + n H_{xx4} ,$$

(A.12)

respectivamente. Nas equações (A.11) e (A.12)  $\epsilon_{x4} = \epsilon_{x4}(x, y)$  ;  $\epsilon_{y4} = \epsilon_{y4}(x, y)$  ;

$$\epsilon_{z4} = \epsilon_{z4}(x, y) ; \epsilon_{zx4} = \frac{\partial}{\partial x} \epsilon_{z4}(x, y) ; \epsilon_{zy4} = \frac{\partial}{\partial y} \epsilon_{z4}(x, y) ; H_{yx4} = \frac{\partial}{\partial x} H_y \Big|_4 ;$$

$$H_{yy4} = \frac{\partial}{\partial y} H_z \Big|_4 ; H_{xy4} = \frac{\partial}{\partial y} H_x \Big|_4 \text{ e } H_{xx4} = \frac{\partial}{\partial x} H_x \Big|_4 .$$

As equações (A.3), (A.4), (A.7), (A.8), (A.9), (A.10), (A.11) e (A.12), podem ser convenientemente expressas, em forma condensada, por uma única equação, expressa em (2.29).

## APÊNDICE B

### OBTENÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES LINEARES HOMOGÊNEAS

Como referenciado no Capítulo 2, as equações (B.1) e (B.8) são apresentadas aqui por se tratarem de equações muito grandes. Procedendo-se como indicado na seção 2.3, obtém-se:

$$\begin{aligned}
 0 = & \left\{ \frac{2}{w} + \frac{w}{2} \left[ \frac{1}{n} - \frac{1}{C_1} \left( \frac{\epsilon_{x1} \epsilon_{z2}}{n \epsilon_{z1}} + \frac{\epsilon_{x2} \epsilon_{z1}}{s \epsilon_{z1}} \right) \right] \right\} H_{XW} + \\
 & + \left\{ \frac{2}{e} + \frac{e}{2C_2} \left[ \frac{\epsilon_{z4} (\epsilon_{z3} - \epsilon_{x3})}{s \epsilon_{z3}} + \frac{\epsilon_{z3} (\epsilon_{z4} - \epsilon_{x4})}{n \epsilon_{z4}} \right] \right\} H_{XE} + \\
 & + \frac{2}{n} \left\{ \frac{w}{C_1} \left[ \frac{\epsilon_{z2} \epsilon_{y1}}{\epsilon_{z1}} \left( 1 - \frac{n \epsilon_{zy1}}{2 \epsilon_{z1}} \right) + \frac{\epsilon_{z2}}{2 \epsilon_{z1}} \left( \frac{w \epsilon_{x1} \epsilon_{zx1}}{\epsilon_{z1}} + \frac{\epsilon_{z1} - \epsilon_{x1}}{2} \right) \right] \right\} + \\
 & + \frac{e}{C_2} \left[ \frac{\epsilon_{z3} \epsilon_{y4}}{\epsilon_{z4}} \left( 1 - \frac{n \epsilon_{zy4}}{2 \epsilon_{z4}} \right) - \frac{\epsilon_{z3}}{2 \epsilon_{z4}} \left( \frac{e \epsilon_{x4} \epsilon_{zx4}}{\epsilon_{z4}} - \frac{\epsilon_{z4} - \epsilon_{x4}}{2} \right) \right] \right\} H_{XN} +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2}{s} \left\{ \frac{w}{C_1} \left[ \frac{\epsilon_{z1} \epsilon_{y2}}{\epsilon_{z2}} \left( 1 + \frac{s \epsilon_{zy2}}{2 \epsilon_{z2}} \right) + \frac{\epsilon_{z1}}{2 \epsilon_{z2}} \left( \frac{w \epsilon_{x2} \epsilon_{zx2}}{\epsilon_{z2}} + \frac{\epsilon_{z2} - \epsilon_{x2}}{2} \right) \right] + \right. \\
& + \frac{e}{C_2} \left[ \frac{\epsilon_{z4} \epsilon_{y3}}{\epsilon_{z3}} \left( 1 + s \frac{\epsilon_{zy3}}{2 \epsilon_{z2}} \right) - \frac{\epsilon_{z4}}{2 \epsilon_{z3}} \left( \frac{e \epsilon_{x3} \epsilon_{zx3}}{\epsilon_{z3}} - \frac{\epsilon_{z3} - \epsilon_{x3}}{2} \right) \right] \left. \right\} H_{XS} - \\
& - 2 \left\{ \frac{1}{C_1} \left[ \epsilon_{z2} \left[ \frac{w}{n \epsilon_{z1}} \left( \epsilon_{y1} \left( 1 - \frac{n \epsilon_{zy1}}{2 \epsilon_{z1}} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{w \epsilon_{x1} \epsilon_{zx1}}{\epsilon_{z1}} + \epsilon_{z1} - \epsilon_{x1} \right) \right) \right] + \frac{n}{w} \right] + \right. \\
& + \epsilon_{z1} \left[ \frac{w}{s \epsilon_{z2}} \left( \epsilon_{y2} \left( 1 + \frac{s \epsilon_{zy2}}{2 \epsilon_{z2}} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{w \epsilon_{x2} \epsilon_{zx2}}{\epsilon_{z2}} + \epsilon_{z2} - \epsilon_{x2} \right) \right) + \frac{s}{w} \right] \left. \right\} + \\
& + \frac{1}{C_2} \left[ \epsilon_{z4} \left[ \frac{e}{s \epsilon_{z3}} \left( \epsilon_{y3} \left( 1 + \frac{s \epsilon_{zy3}}{2 \epsilon_{z3}} \right) + \frac{1}{2} \left( - \frac{e \epsilon_{x3} \epsilon_{zx3}}{\epsilon_{z3}} + \epsilon_{z3} - \epsilon_{x3} \right) \right) \right] + \frac{s}{e} \right] + \\
& + \epsilon_{z3} \left[ \frac{e}{n \epsilon_{z4}} \left( \epsilon_{y4} \left( 1 - \frac{n \epsilon_{zy4}}{2 \epsilon_{z4}} \right) + \frac{1}{2} \left( - \frac{e \epsilon_{x4} \epsilon_{zx4}}{\epsilon_{z4}} + \epsilon_{z4} - \epsilon_{x4} \right) \right) + \frac{n}{e} \right] - \\
& - \frac{1}{2} k_o^2 \left[ \frac{w}{C_1} (n \epsilon_{y1} \epsilon_{z2} + s \epsilon_{z1} \epsilon_{z2}) + \frac{e}{C_2} (s \epsilon_{y3} \epsilon_{z4} + n \epsilon_{z3} \epsilon_{z4}) \right] \left. \right\} H_{XP} + \\
& + (w + e) \gamma_z^2 H_{XP} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2}{C_1} \left\{ \epsilon_{z2} \left[ \frac{\epsilon_{x1}}{\epsilon_{z1}} \left( 1 + \frac{w\epsilon_{zx1}}{2\epsilon_{z1}} \right) - \frac{1}{2\epsilon_{z1}} \left( \frac{n\epsilon_{y1}\epsilon_{zy1}}{\epsilon_{z1}} - \frac{\epsilon_{z1} - \epsilon_{y1}}{2} \right) \right] - \right. \\
& - \epsilon_{z1} \left[ \frac{\epsilon_{x2}}{\epsilon_{z2}} \left( 1 + \frac{w\epsilon_{zx2}}{2\epsilon_{z2}} \right) + \frac{1}{2\epsilon_{z2}} \left( \frac{s\epsilon_{y2}\epsilon_{zy2}}{\epsilon_{z2}} + \frac{\epsilon_{z2} - \epsilon_{y2}}{2} \right) \right] \left. \right\} H_{YW} + \\
& + \frac{2}{C_2} \left\{ \epsilon_{z4} \left[ \frac{\epsilon_{x3}}{\epsilon_{z3}} \left( 1 - \frac{e\epsilon_{zx3}}{2\epsilon_{z3}} \right) + \frac{1}{2\epsilon_{z3}} \left( \frac{s\epsilon_{y3}\epsilon_{zy3}}{\epsilon_{z3}} + \frac{\epsilon_{z3} - \epsilon_{y3}}{2} \right) \right] - \right. \\
& + \epsilon_{z3} \left[ - \frac{\epsilon_{x4}}{\epsilon_{z4}} \left( 1 - \frac{e\epsilon_{zx4}}{2\epsilon_{z4}} \right) + \frac{1}{2\epsilon_{z4}} \left( \frac{n\epsilon_{y4}\epsilon_{zy4}}{\epsilon_{z4}} - \frac{\epsilon_{z4} - \epsilon_{y4}}{2} \right) \right] \left. \right\} H_{YE} + \\
& + \left\{ \frac{\epsilon_{z2}}{C_1} \left[ \frac{2w^2}{n} + \frac{1}{2\epsilon_{z1}} (\epsilon_{z1} - \epsilon_{y1}) \right] - \frac{\epsilon_{z3}}{C_2} \left[ \frac{2e^2}{n} + \frac{1}{2\epsilon_{z4}} (\epsilon_{z4} - \epsilon_{y4}) \right] \right\} H_{YN} + \\
& + \left\{ - \frac{\epsilon_{z1}}{C_1} \left[ \frac{2w^2}{s} + \frac{1}{2\epsilon_{z2}} (\epsilon_{z2} - \epsilon_{y2}) \right] + \frac{\epsilon_{z4}}{C_2} \left[ \frac{2e^2}{s} + \frac{1}{2\epsilon_{z3}} (\epsilon_{z3} - \epsilon_{y3}) \right] \right\} H_{YS} + \\
& + \left\{ \frac{1}{C_1} \left[ - \epsilon_{z2} \left[ \frac{2w}{n} \left[ \frac{n}{w} \frac{\epsilon_{x1}}{\epsilon_{z1}} \left( 1 + \frac{w\epsilon_{zx1}}{2\epsilon_{z1}} \right) + \frac{w}{n} \right] + \frac{1}{\epsilon_{z1}} \left( - \frac{n\epsilon_{y1}\epsilon_{zy1}}{\epsilon_{z1}} + \epsilon_{z1} - \epsilon_{y1} \right) \right] \right] + \right. \\
& + \epsilon_{z1} \left[ \frac{2w}{s} \left[ \frac{s}{w} \frac{\epsilon_{x2}}{\epsilon_{z2}} \left( 1 + \frac{w\epsilon_{zx2}}{2\epsilon_{z2}} \right) + \frac{w}{s} \right] + \frac{1}{\epsilon_{z2}} \left( \frac{s\epsilon_{y2}\epsilon_{zy2}}{\epsilon_{z2}} + \epsilon_{z2} - \epsilon_{y2} \right) \right] \left. \right\} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{C_2} \left[ -\epsilon_{z4} \left[ \frac{2e}{s} \left[ \frac{s}{e} \frac{\epsilon_{x3}}{\epsilon_{z3}} \left( 1 - \frac{e\epsilon_{zx3}}{2\epsilon_{z3}} \right) + \frac{e}{s} \right] + \frac{1}{\epsilon_{z3}} \left( \frac{s\epsilon_{y3}\epsilon_{zy3}}{\epsilon_{z3}} + \epsilon_{z3} - \epsilon_{y3} \right) \right] \right. \\
& + \epsilon_{z3} \left[ \frac{2e}{n} \left[ \frac{n}{e} \frac{\epsilon_{x4}}{\epsilon_{z4}} \left( 1 - \frac{e\epsilon_{zx4}}{2\epsilon_{z4}} \right) + \frac{e}{n} \right] - \frac{1}{\epsilon_{z4}} \left( \frac{n\epsilon_{y4}\epsilon_{zy4}}{\epsilon_{z4}} - \epsilon_{z4} + \epsilon_{y4} \right) \right] \left. \right] \Big\} H_{YP} + \\
& + k_0^2 \left\{ \frac{w^2}{C_1} \left[ \epsilon_{x1}\epsilon_{z2} - \epsilon_{x2}\epsilon_{z1} \right] + \frac{e^2}{C_2} \left[ \epsilon_{x3}\epsilon_{z4} - \epsilon_{x4}\epsilon_{z3} \right] \right\} H_{YP} + A + B + C + D ,
\end{aligned} \tag{B.1}$$

onde:

$$A = \frac{2w}{C_1} \frac{\epsilon_{z1}\epsilon_{z2}}{\epsilon_{z1}^2} \left\{ \frac{1}{\epsilon_{z1}^2} \left[ \epsilon_{x1} H_{yx1} - \epsilon_{y1} H_{xy1} \right] + \frac{1}{\epsilon_{z2}^2} \left[ \epsilon_{y2} H_{xy2} - \epsilon_{x2} H_{yx2} \right] \right\} , \tag{B.2}$$

$$B = \frac{2e}{C_2} \frac{\epsilon_{z3}\epsilon_{z4}}{\epsilon_{z3}^2} \left\{ \frac{1}{\epsilon_{z3}^2} \left[ \epsilon_{y3} H_{xy3} - \epsilon_{x3} H_{yx3} \right] + \frac{1}{\epsilon_{z4}^2} \left[ \epsilon_{x4} H_{yx4} - \epsilon_{y4} H_{xy4} \right] \right\} , \tag{B.3}$$

$$C = \frac{2}{C_1} \left\{ \epsilon_{z1} \left[ s H_{xx2} - \frac{w^2}{s} H_{yy2} \right] + \epsilon_{z2} \left[ n H_{xx1} - \frac{w^2}{n} H_{yy1} \right] \right\} , \tag{B.4}$$

$$D = \frac{2}{C_2} \left\{ \epsilon_{z3} \left[ \frac{e^2}{n} H_{yy4} - n H_{xx4} \right] + \epsilon_{z4} \left[ \frac{e^2}{s} H_{yy3} - s H_{xx3} \right] \right\} , \tag{B.5}$$

$$C_1 = s\epsilon_{z1} + n\epsilon_{z2} , \tag{B.6}$$

$$C_2 = n\epsilon_{z3} + s\epsilon_{z4} , \tag{B.7}$$

$$\begin{aligned}
0 = & \left\{ \frac{\epsilon_{z4}}{C_3} \left[ 2 \left( \frac{n}{w} \right)^2 + \frac{\epsilon_{z1} - \epsilon_{x1}}{2\epsilon_{z1}} \right] - \frac{\epsilon_{z3}}{C_4} \left[ 2 \left( \frac{s}{w} \right)^2 + \frac{\epsilon_{z2} - \epsilon_{x2}}{2\epsilon_{z2}} \right] \right\} H_{XW} + \\
& + \frac{1}{C_3} \left\{ \frac{\epsilon_{z4}}{\epsilon_{z1}} \left[ \frac{w\epsilon_{x1}\epsilon_{zx1}}{\epsilon_{z1}} + \frac{\epsilon_{z1} - \epsilon_{x1}}{2} + 2\epsilon_{y1} \left( 1 - \frac{n\epsilon_{zy1}}{2\epsilon_{z1}} \right) \right] + \right. \\
& + \left. \frac{\epsilon_{z1}}{\epsilon_{z4}} \left[ \frac{e\epsilon_{x4}\epsilon_{zx4}}{\epsilon_{z4}} - \frac{\epsilon_{z4} - \epsilon_{x4}}{2} - 2\epsilon_{y4} \left( 1 - \frac{n\epsilon_{zy4}}{2\epsilon_{z4}} \right) \right] \right\} + H_{XN} + \\
& + \frac{1}{C_4} \left\{ - \frac{\epsilon_{z3}}{\epsilon_{z2}} \left[ 2\epsilon_{y2} \left( 1 + \frac{s\epsilon_{zy2}}{2\epsilon_{z2}} \right) + \frac{w\epsilon_{x2}\epsilon_{zx2}}{\epsilon_{z2}} + \frac{\epsilon_{z2} - \epsilon_{x2}}{2} \right] + \right. \\
& + \left. \frac{\epsilon_{z2}}{\epsilon_{z3}} \left[ 2\epsilon_{y3} \left( 1 + \frac{s\epsilon_{zy3}}{2\epsilon_{z3}} \right) - \frac{e\epsilon_{x3}\epsilon_{zx3}}{\epsilon_{z3}} + \frac{\epsilon_{z3} - \epsilon_{x3}}{2} \right] \right\} H_{XS} + \\
& + \left\{ \frac{\epsilon_{z2}}{C_4} \left[ 2 \left( \frac{s}{e} \right)^2 + \frac{\epsilon_{z3} - \epsilon_{x3}}{2\epsilon_{z3}} \right] - \frac{\epsilon_{z1}}{C_3} \left[ 2 \left( \frac{n}{e} \right)^2 + \frac{\epsilon_{z4} - \epsilon_{x4}}{2\epsilon_{z4}} \right] \right\} H_{XE} + \\
& + \left\{ \frac{1}{C_3} \left[ - 2\epsilon_{z4} \left[ \frac{\epsilon_{y1}}{\epsilon_{z1}} \left( 1 - \frac{n\epsilon_{zy1}}{2\epsilon_{z1}} \right) + \left( \frac{n}{w} \right)^2 \right] + 2\epsilon_{z1} \left[ \frac{\epsilon_{y4}}{\epsilon_{z4}} \left( 1 - \frac{n\epsilon_{zy4}}{2\epsilon_{z4}} \right) + \left( \frac{n}{e} \right)^2 \right] - \right. \right. \\
& - \left. \frac{\epsilon_{z4}}{\epsilon_{z1}} \left[ \frac{w\epsilon_{x1}\epsilon_{zx1}}{\epsilon_{z1}} + \epsilon_{z1} - \epsilon_{x1} \right] + \frac{\epsilon_{z1}}{\epsilon_{z4}} \left[ - \frac{e\epsilon_{x4}\epsilon_{zx4}}{\epsilon_{z4}} + \epsilon_{z4} - \epsilon_{x4} \right] \right\} + \\
& + \frac{1}{C_4} \left[ 2\epsilon_{z3} \left[ \frac{\epsilon_{y2}}{\epsilon_{z2}} \left( 1 + \frac{s\epsilon_{zy2}}{2\epsilon_{z2}} \right) + \left( \frac{s}{w} \right)^2 \right] - 2\epsilon_{z2} \left[ \frac{\epsilon_{y3}}{\epsilon_{z3}} \left( 1 + \frac{s\epsilon_{zy3}}{2\epsilon_{z3}} \right) + \left( \frac{s}{e} \right)^2 \right] + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\epsilon_{z3}}{\epsilon_{z2}} \left[ \frac{w\epsilon_{x2}\epsilon_{zx2}}{\epsilon_{z2}} + \epsilon_{z2} - \epsilon_{x2} \right] + \frac{\epsilon_{z2}}{\epsilon_{z3}} \left[ \frac{e\epsilon_{x3}\epsilon_{zx3}}{\epsilon_{z3}} - \epsilon_{z3} + \epsilon_{x3} \right] + \\
& + k_0^2 \left[ \frac{n^2}{C_3} (\epsilon_{y1}\epsilon_{z4} - \epsilon_{y4}\epsilon_{z1}) + \frac{s^2}{C_4} (\epsilon_{y3}\epsilon_{z2} - \epsilon_{y2}\epsilon_{z3}) \right] + \gamma_z^2 \left[ \frac{n^2}{C_3} (\epsilon_{z4} - \epsilon_{z1}) - \right. \\
& \left. - \frac{s^2}{C_4} (\epsilon_{z3} - \epsilon_{z2}) \right] \Big\} H_{XP} + \left\{ \frac{n\epsilon_{z4}}{w\epsilon_{z1}C_3} \left[ -\frac{n\epsilon_{y1}\epsilon_{zy1}}{\epsilon_{z1}} + \frac{\epsilon_{z1} - \epsilon_{y1}}{2} + 2\epsilon_{x1} \left( 1 + \frac{w\epsilon_{zx1}}{2\epsilon_{z1}} \right) \right] + \right. \\
& + \frac{s\epsilon_{z3}}{w\epsilon_{z2}C_4} \left[ \frac{s\epsilon_{y2}\epsilon_{zy2}}{\epsilon_{z2}} + \frac{\epsilon_{z2} - \epsilon_{y2}}{2} + 2\epsilon_{x2} \left( 1 + \frac{w\epsilon_{zx2}}{2\epsilon_{z2}} \right) \right] \Big\} H_{YW} + \\
& + \left\{ \frac{n\epsilon_{z1}}{e\epsilon_{z4}C_3} \left[ 2\epsilon_{x4} \left( 1 - \frac{e\epsilon_{zx4}}{2\epsilon_{z4}} \right) - \frac{n\epsilon_{y4}\epsilon_{zy4}}{\epsilon_{z4}} + \frac{\epsilon_{z4} - \epsilon_{y4}}{2} \right] + \right. \\
& + \frac{s\epsilon_{z2}}{e\epsilon_{z3}C_4} \left[ 2\epsilon_{x3} \left( 1 - \frac{e\epsilon_{zx3}}{2\epsilon_{z3}} \right) + \frac{s\epsilon_{y3}\epsilon_{zy3}}{\epsilon_{z3}} + \frac{\epsilon_{z3} - \epsilon_{y3}}{2} \right] \Big\} H_{YE} + \\
& + \frac{1}{C_3} \left\{ \epsilon_{z4} \left[ \frac{n}{w} \left( \frac{\epsilon_{z1} - \epsilon_{y1}}{2\epsilon_{z1}} \right) + \frac{2w}{n} \right] + \epsilon_{z1} \left[ \frac{n}{e} \left( \frac{\epsilon_{z4} - \epsilon_{y4}}{2\epsilon_{z4}} \right) + \frac{2e}{n} \right] \right\} H_{YN} + \\
& + \frac{1}{C_4} \left\{ \epsilon_{z3} \left[ \frac{s}{w} \left( \frac{\epsilon_{z2} - \epsilon_{y2}}{2\epsilon_{z2}} \right) + \frac{2w}{s} \right] + \epsilon_{z2} \left[ \frac{s}{e} \left( \frac{\epsilon_{z3} - \epsilon_{y3}}{2\epsilon_{z3}} \right) + \frac{2e}{s} \right] \right\} H_{YS} + \\
& + \left\{ \frac{1}{C_3} \left[ -\frac{n\epsilon_{z4}}{w\epsilon_{z1}} \left( -\frac{n\epsilon_{y1}\epsilon_{zy1}}{\epsilon_{z1}} + \epsilon_{z1} - \epsilon_{y1} \right) + \frac{n\epsilon_{z1}}{e\epsilon_{z4}} \left( \frac{n\epsilon_{y4}\epsilon_{zy4}}{\epsilon_{z4}} - \epsilon_{z4} + \epsilon_{y4} \right) - \right. \right. \\
& \left. \left. - 2\epsilon_{z4} \left[ \frac{n\epsilon_{x1}}{w\epsilon_{z1}} \left( 1 + \frac{w\epsilon_{zx1}}{2\epsilon_{z1}} \right) + \frac{w}{n} \right] - 2\epsilon_{z1} \left[ \frac{n\epsilon_{x4}}{e\epsilon_{z4}} \left( 1 - \frac{e\epsilon_{zx4}}{2\epsilon_{z4}} \right) + \frac{e}{n} \right] \right] + \right. \\
& \left. + \frac{1}{C_4} \left[ -\frac{s\epsilon_{z3}}{w\epsilon_{z2}} \left( \frac{s\epsilon_{y2}\epsilon_{zy2}}{\epsilon_{z2}} + \epsilon_{z2} - \epsilon_{y2} \right) - \frac{s\epsilon_{z2}}{e\epsilon_{z3}} \left( \frac{s\epsilon_{y3}\epsilon_{zy3}}{\epsilon_{z3}} + \epsilon_{z3} - \epsilon_{y3} \right) - \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - 2\varepsilon_{z3} \left[ \frac{s\varepsilon_{x2}}{w\varepsilon_{z2}} \left( 1 + \frac{w\varepsilon_{zx2}}{2\varepsilon_{z2}} \right) + \frac{w}{s} \right] - 2\varepsilon_{z2} \left[ \frac{s\varepsilon_{x3}}{e\varepsilon_{z3}} \left( 1 - \frac{e\varepsilon_{zx3}}{2\varepsilon_{z3}} \right) + \frac{e}{s} \right] + \\
& + k_o^2 \left[ \frac{n}{C_3} (w\varepsilon_{x1}\varepsilon_{z4} + e\varepsilon_{x4}\varepsilon_{z1}) + \frac{1}{C_4} (w\varepsilon_{x2}\varepsilon_{z3} + e\varepsilon_{x3}\varepsilon_{z2}) \right] + \\
& + \gamma_z^2 \left[ \frac{n}{C_3} (w\varepsilon_{z4} + e\varepsilon_{z1}) + \frac{1}{C_4} (w\varepsilon_{z3} + e\varepsilon_{z2}) \right] \Big\} H_{YP} + A' + B' + C' + D' , \quad (B.8)
\end{aligned}$$

onde:

$$A' = \frac{2n \varepsilon_{z1} \varepsilon_{z4}}{C_3} \left[ \frac{1}{\varepsilon_{z1}^2} \left( -\varepsilon_{y1} H_{xy1} + \varepsilon_{x1} H_{yx1} \right) + \frac{1}{\varepsilon_{z4}^2} \left( \varepsilon_{y4} H_{xy4} - \varepsilon_{x4} H_{yx4} \right) \right], \quad (B.9)$$

$$B' = \frac{2s \varepsilon_{z2} \varepsilon_{z3}}{C_4} \left[ \frac{1}{\varepsilon_{z2}^2} \left( -\varepsilon_{y2} H_{xy2} + \varepsilon_{x2} H_{yx2} \right) + \frac{1}{\varepsilon_{z3}^2} \left( \varepsilon_{y3} H_{xy3} - \varepsilon_{x3} H_{yx3} \right) \right], \quad (B.10)$$

$$C' = \frac{2}{C_3} \left[ \varepsilon_{z4} \left( \frac{n^2}{w} H_{xx1} - wH_{yy1} \right) + \varepsilon_{z1} \left( \frac{n^2}{e} H_{xx4} - eH_{yy4} \right) \right], \quad (B.11)$$

$$D' = \frac{2}{C_4} \left[ \varepsilon_{z3} \left( w H_{yy2} - \frac{s^2}{w} H_{xx2} \right) + \varepsilon_{z2} \left( eH_{yy3} - \frac{s^2}{e} H_{xx3} \right) \right], \quad (B.12)$$

$$C_3 = e\varepsilon_{z1} + w\varepsilon_{z4}, \quad (B.13)$$

$$C_4 = e\varepsilon_{z2} + w\varepsilon_{z3}. \quad (B.14)$$

## APÊNDICE C

### OBTENÇÃO DA EQUAÇÃO (2.31)

Na equação (B.1), as expressões para A e B (equações B.2 e B.3, respectivamente) podem ser somadas e, ao resultado, podem ser adicionadas as expressões:

$$\frac{2w \epsilon_{z1} \epsilon_{z2}}{C_1} \left[ \frac{1}{\epsilon_{z1}} H_{xy1} - \frac{1}{\epsilon_{z2}} H_{xy2} - \frac{1}{\epsilon_{z1}} H_{yx1} + \frac{1}{\epsilon_{z2}} H_{yx2} \right] e$$

$$\frac{2e \epsilon_{z3} \epsilon_{z4}}{C_2} \left[ -\frac{1}{\epsilon_{z3}} H_{xy3} + \frac{1}{\epsilon_{z4}} H_{xy4} + \frac{1}{\epsilon_{z3}} H_{yx3} - \frac{1}{\epsilon_{z4}} H_{yx4} \right],$$

pois, como pode ser visto das duas primeiras equações de (2.30a), as expressões acima são identicamente nulas. Como resultado, obtém-se:

$$A + B = \frac{2w \epsilon_{z1} \epsilon_{z2}}{C_1} \left\{ \frac{1}{\epsilon_{z1}} \left( 1 - \frac{\epsilon_{y1}}{\epsilon_{z1}} \right) H_{xy1} + \frac{1}{\epsilon_{z2}} \left( \frac{\epsilon_{y2}}{\epsilon_{z2}} - 1 \right) H_{xy2} + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{\epsilon_{z1}} \left( \frac{\epsilon_{x1}}{\epsilon_{z1}} - 1 \right) H_{yx1} + \frac{1}{\epsilon_{z2}} \left( 1 - \frac{\epsilon_{x2}}{\epsilon_{z4}} \right) H_{yx2} \Big\} + \\
& + \frac{2e}{C_2} \frac{\epsilon_{z3} \epsilon_{z4}}{\epsilon_{z3}} \left\{ \frac{1}{\epsilon_{z3}} \left( \frac{\epsilon_{y3}}{\epsilon_{z3}} - 1 \right) H_{xy3} + \frac{1}{\epsilon_{z4}} \left( 1 - \frac{\epsilon_{y4}}{\epsilon_{z4}} \right) H_{xy4} + \right. \\
& \left. + \frac{1}{\epsilon_{z3}} \left( 1 - \frac{\epsilon_{x3}}{\epsilon_{z3}} \right) H_{yx3} + \frac{1}{\epsilon_{z4}} \left( \frac{\epsilon_{x4}}{\epsilon_{z4}} - 1 \right) H_{yx4} \right\}. \tag{C.1}
\end{aligned}$$

Substituindo-se as expressões aproximadas para as derivadas de primeira ordem (equações de (2.16) a (2.19)) tem-se:

$$\begin{aligned}
A + B = & \frac{2w}{C_1} \frac{\epsilon_{z1} \epsilon_{z2}}{\epsilon_{z1}} \left[ \frac{1}{\epsilon_{z1}} \left( 1 - \frac{\epsilon_{y1}}{\epsilon_{z1}} \right) \left( \frac{H_{XN} - H_{XP}}{n} \right) + \frac{1}{\epsilon_{z2}} \left( \frac{\epsilon_{y2}}{\epsilon_{z2}} - 1 \right) \left( \frac{H_{XP} - H_{XS}}{s} \right) + \right. \\
& \left. + \left[ \frac{1}{\epsilon_{z1}} \left( \frac{\epsilon_{x1}}{\epsilon_{z1}} - 1 \right) + \frac{1}{\epsilon_{z2}} \left( 1 - \frac{\epsilon_{x2}}{\epsilon_{z2}} \right) \right] \left( \frac{H_{YP} - H_{YN}}{w} \right) \right] + \\
& + \frac{2e}{C_2} \frac{\epsilon_{z3} \epsilon_{z4}}{\epsilon_{z3}} \left\{ \frac{1}{\epsilon_{z3}} \left( \frac{\epsilon_{y3}}{\epsilon_{z3}} - 1 \right) \left( \frac{H_{XP} - H_{XS}}{s} \right) + \frac{1}{\epsilon_{z4}} \left( 1 - \frac{\epsilon_{y4}}{\epsilon_{z4}} \right) \left( \frac{H_{XN} - H_{XP}}{n} \right) + \right. \\
& \left. + \left[ \frac{1}{\epsilon_{z3}} \left( 1 - \frac{\epsilon_{x3}}{\epsilon_{z3}} \right) + \frac{1}{\epsilon_{z4}} \left( \frac{\epsilon_{x4}}{\epsilon_{z4}} - 1 \right) \right] \left( \frac{H_{YE} - H_{YP}}{e} \right) \right\}. \tag{C.2}
\end{aligned}$$

É importante observar que, para o caso isotrópico, a expressão acima é identicamente nula.

De forma análoga, as expressões para C e D (equações B.4 e B.5, respectivamente), podem ser somadas e, ao resultado, podem ser adicionadas e

subtraídas as seguintes expressões:  $\frac{2}{C_1} \left[ n\epsilon_{z2} H_{yy1} + s\epsilon_{z1} H_{yy2} \right]$ ,  $\frac{2}{C_2} \left[ s\epsilon_{z4} H_{yy3} + n\epsilon_{z3} H_{yy4} \right]$ , sem que o resultado se altere. Portanto:

$$C + D = \frac{2}{C_1} \left\{ n\epsilon_{z2} \left[ H_{xx1} + H_{yy1} \right] + s\epsilon_{z1} \left[ H_{xx2} + H_{yy2} \right] \right\} - \\ - \frac{2}{C_2} \left\{ s\epsilon_{z4} \left[ H_{xx3} + H_{yy3} \right] + n\epsilon_{z3} \left[ H_{xx4} + H_{yy4} \right] \right\} - CD, \quad (C.3)$$

onde

$$CD = \frac{2}{C_1} \left\{ n\epsilon_{z2} \left( \frac{w^2}{n^2} + 1 \right) H_{yy1} + s\epsilon_{z1} \left( \frac{w^2}{s^2} + 1 \right) H_{yy2} \right\} - \\ - \frac{2}{C_2} \left\{ s\epsilon_{z4} \left( \frac{e^2}{s^2} + 1 \right) H_{yy3} + n\epsilon_{z3} \left( \frac{e^2}{n^2} + 1 \right) H_{yy4} \right\}. \quad (C.4)$$

Semelhantermente, podem-se somar e subtrair da equação (C.3) as expressões

$$\frac{2s\epsilon_{z1}}{C_1} \left[ H_{xx1} + H_{yy1} \right] \text{ e } \frac{2s\epsilon_{z4}}{C_2} \left[ H_{xx4} + H_{yy4} \right], \text{ resultando:}$$

$$C + D = 2 \left( H_{xx1} + H_{yy1} - H_{xx4} - H_{yy4} \right) - \frac{2s\epsilon_{z1}}{C_1} \left( H_{xx1} + H_{yy1} - H_{xx2} - H_{yy2} \right) + \\ + \frac{2s\epsilon_{z4}}{C_2} \left( H_{xx4} + H_{yy4} - H_{xx3} - H_{yy3} \right) - CD, \quad (C.5)$$

Da equação (2.30a), conclui-se que as expressões entre parênteses da equação (C.5) são identicamente nulas. Fazendo-se uso das equações (2.16) e (2.17), a expressão acima pode ser escrita na forma:

$$C + D = -\frac{2}{C_1} \left\{ n\epsilon_{z2} \left[ \left( \frac{w}{n} \right)^2 + 1 \right] \left( \frac{H_{YN} - H_{YP}}{n} \right) + s\epsilon_{z1} \left[ \left( \frac{w}{n} \right)^2 + 1 \right] \left( \frac{H_{YP} - H_{YS}}{s} \right) \right\} +$$

$$+ \frac{2}{C_2} \left\{ s\epsilon_{z4} \left[ \left( \frac{e}{s} \right)^2 + 1 \right] \left( \frac{H_{YP} - H_{YS}}{s} \right) + n\epsilon_{z3} \left[ \left( \frac{e}{n} \right)^2 + 1 \right] \left( \frac{H_{YN} - H_{YP}}{n} \right) \right\}. \quad (C.6)$$

Substituindo-se as expressões para A + B (equação (C.2)) e C + D (equação (C.5)), na equação (B.1), e agrupando-se os termos comuns para  $H_i$  (onde  $i = N, S, E, W, P$ , com H representando  $H_x$  ou  $H_y$ ), chega-se na equação (2.31). Ou seja:

$$0 = A_W H_{XW} + A_E H_{XE} + A_N H_{XN} + A_S H_{XS} + A_P H_{XP} + B_W H_{YW} + B_E H_{YE} + B_N H_{YN} +$$

$$+ B_S H_{YS} + B_P H_{YP} + \gamma_z^2 A_{p\gamma} H_{XP} + \gamma_z^2 B_{p\gamma} H_{YP}, \quad (C.7)$$

onde

$$A_W = \frac{2}{w} + \frac{w}{2C_1} \left[ \frac{\epsilon_{z2}}{n} \left( \epsilon_{z1} - \epsilon_{x1} \right) + \frac{\epsilon_{z1}}{s} \left( \epsilon_{z2} - \epsilon_{x2} \right) \right], \quad (C.8)$$

$$A_E = \frac{2}{e} + \frac{e}{2C_2} \left[ \frac{\epsilon_{z4}}{s} \left( \epsilon_{z3} - \epsilon_{x3} \right) + \frac{\epsilon_{z3}}{n} \left( \epsilon_{z4} - \epsilon_{x4} \right) \right], \quad (C.9)$$

$$A_N = \frac{2w\epsilon_{z2}}{nC_1} \left\{ \frac{1}{2\epsilon_{z1}} \left[ \frac{1}{\epsilon_{z1}} \left( -n\epsilon_{y1} \epsilon_{zy1} + w\epsilon_{x1} \epsilon_{zx1} \right) + \frac{\epsilon_{z1} - \epsilon_{x1}}{2} \right] + 1 \right\} +$$

$$+ \frac{2e\epsilon_{z3}}{nC_2} \left\{ \frac{1}{2\epsilon_{z4}} \left[ -\frac{1}{\epsilon_{z4}} \left( e\epsilon_{x4} \epsilon_{zx4} + n\epsilon_{y4} \epsilon_{zy4} \right) + \frac{\epsilon_{z4} - \epsilon_{x4}}{2} \right] + 1 \right\}, \quad (C.10)$$

$$A_S = \frac{2w\epsilon_{z1}}{sC_1} \left\{ \frac{1}{2\epsilon_{z2}} \left[ \frac{1}{\epsilon_{z2}} \left( s\epsilon_{y2} \epsilon_{zy2} + w\epsilon_{x2} \epsilon_{zx2} \right) + \frac{\epsilon_{z2} - \epsilon_{x2}}{2} \right] + 1 \right\} +$$

$$+ \frac{2e\epsilon_{z4}}{sC_2} \left\{ \frac{1}{2\epsilon_{z3}} \left[ \frac{1}{\epsilon_{z3}} \left( s\epsilon_{y3} \epsilon_{zy3} - e\epsilon_{x3} \epsilon_{zx3} \right) + \frac{\epsilon_{z3} - \epsilon_{x3}}{2} \right] + 1 \right\}, \quad (C.11)$$

$$A_P = -2 \left\{ \frac{1}{C_1} \left[ \epsilon_{z2} \left[ \frac{w\epsilon_{y1}}{n\epsilon_{z1}} \left( 1 - \frac{n\epsilon_{zy1}}{2\epsilon_{z1}} \right) + \frac{n}{w} \right] + \epsilon_{z1} \left[ \frac{w\epsilon_{y2}}{s\epsilon_{z2}} \left( 1 + \frac{s\epsilon_{zy1}}{2\epsilon_{z2}} \right) + \frac{s}{w} \right] + \right. \right.$$

$$+ \frac{w}{2} \left[ \frac{\epsilon_{z1}}{s\epsilon_{z2}} \left( \frac{w\epsilon_{x2} \epsilon_{zx2}}{\epsilon_{z2}} + 3\epsilon_{z2} - \epsilon_{x2} \right) + \frac{\epsilon_{z2}}{n\epsilon_{z1}} \left( \frac{w\epsilon_{x1} \epsilon_{zx1}}{\epsilon_{z1}} + 3\epsilon_{z1} - \epsilon_{x1} \right) \right] \left. \right\} +$$

$$+ \frac{1}{C_2} \left[ \epsilon_{z4} \left[ \frac{e\epsilon_{y3}}{s\epsilon_{z3}} \left( 1 + \frac{s\epsilon_{zy3}}{2\epsilon_{z3}} \right) + \frac{s}{e} \right] + \epsilon_{z3} \left[ \frac{e\epsilon_{y4}}{n\epsilon_{z4}} \left( 1 - \frac{n\epsilon_{zy4}}{2\epsilon_{z4}} \right) + \frac{n}{e} \right] + \right.$$

$$+ \frac{e}{2} \left[ \frac{\epsilon_{z4}}{s\epsilon_{z3}} \left( -\frac{e\epsilon_{x3} \epsilon_{zx3}}{\epsilon_{z3}} + 3\epsilon_{z3} - \epsilon_{x3} \right) + \frac{\epsilon_{z3}}{n\epsilon_{z4}} \left( -\frac{e\epsilon_{x4} \epsilon_{zx4}}{\epsilon_{z4}} + 3\epsilon_{z4} - \epsilon_{x4} \right) \right] \left. \right\} +$$

$$+ k_o^2 \left[ \frac{w}{C_1} \left( n\epsilon_{y1} \epsilon_{z2} + s\epsilon_{z1} \epsilon_{y2} \right) + \frac{e}{C_2} \left( s\epsilon_{y3} \epsilon_{z4} + n\epsilon_{z3} \epsilon_{y4} \right) \right] +$$

$$+ 2 \left[ \frac{w\epsilon_{z1} \epsilon_{z2}}{C_1} \left( \frac{\epsilon_{y1}}{n\epsilon_{z1}^2} + \frac{\epsilon_{y2}}{s\epsilon_{z2}^2} \right) + \frac{e\epsilon_{z3} \epsilon_{z4}}{C_2} \left( \frac{\epsilon_{y3}}{n\epsilon_{z3}^2} + \frac{\epsilon_{y4}}{n\epsilon_{z4}^2} \right) \right], \quad (C.12)$$

$$A_{P\gamma} = w + e, \quad (C.13)$$

$$B_W = \frac{1}{C_1} \left\{ \epsilon_{z2} \left[ \frac{1}{\epsilon_{z1}} \left( \frac{w\epsilon_{x1}\epsilon_{zx1}}{\epsilon_{z1}} - \frac{n\epsilon_{y1}\epsilon_{zy1}}{\epsilon_{z1}} + \frac{\epsilon_{z1} - \epsilon_{y1}}{2} \right) + 2 \right] - \right. \\ \left. - \epsilon_{z1} \left[ \frac{1}{\epsilon_{z2}} \left( \frac{w\epsilon_{x2}\epsilon_{zx2}}{\epsilon_{z2}} + \frac{s\epsilon_{y2}\epsilon_{zy2}}{\epsilon_{z2}} + \frac{\epsilon_{z2} - \epsilon_{zy2}}{2} \right) + 2 \right] \right\}, \quad (C.14)$$

$$B_E = \frac{1}{C_2} \left\{ \epsilon_{z4} \left[ \frac{1}{\epsilon_{z3}} \left( -\frac{e\epsilon_{x3}\epsilon_{zx3}}{\epsilon_{z3}} + \frac{s\epsilon_{y3}\epsilon_{zy3}}{\epsilon_{z3}} + \frac{\epsilon_{z3} - \epsilon_{y3}}{2} \right) + 2 \right] + \right. \\ \left. + \epsilon_{z3} \left[ \frac{1}{\epsilon_{z4}} \left( \frac{e\epsilon_{x4}\epsilon_{zx4}}{\epsilon_{z4}} + \frac{n\epsilon_{y4}\epsilon_{zy4}}{\epsilon_{z4}} - \frac{\epsilon_{z4} - \epsilon_{y4}}{2} \right) + 2 \right] \right\}, \quad (C.15)$$

$$B_N = \frac{\epsilon_{z2}}{C_1} \left( \frac{\epsilon_{z1} - \epsilon_{y1}}{2\epsilon_{z1}} - 2 \right) - \frac{\epsilon_{z3}}{C_2} \left( \frac{\epsilon_{z4} - \epsilon_{y4}}{2\epsilon_{z4}} - 2 \right), \quad (C.16)$$

$$B_S = \frac{\epsilon_{z1}}{C_1} \left( 2 - \frac{\epsilon_{z2} - \epsilon_{y2}}{2\epsilon_{z2}} \right) - \frac{\epsilon_{z4}}{C_2} \left( 2 - \frac{\epsilon_{z3} - \epsilon_{y3}}{2\epsilon_{z3}} \right), \quad (C.17)$$

$$B_P = \frac{1}{C_1} \left\{ \frac{\epsilon_{z2}}{\epsilon_{z1}} \left[ \frac{1}{\epsilon_{z1}} \left( n\epsilon_{y1}\epsilon_{zy1} - w\epsilon_{x1}\epsilon_{zx1} \right) - \epsilon_{z1} + \epsilon_{y1} \right] + \right. \\ \left. + \frac{\epsilon_{z1}}{\epsilon_{z2}} \left[ \frac{1}{\epsilon_{z2}} \left( s\epsilon_{y2}\epsilon_{zy2} + w\epsilon_{x2}\epsilon_{zx2} \right) + \epsilon_{z2} - \epsilon_{y2} \right] \right\} + \\ + \frac{1}{C_2} \left\{ \frac{\epsilon_{z4}}{\epsilon_{z3}} \left[ \frac{1}{\epsilon_{z3}} \left( e\epsilon_{x3}\epsilon_{zx3} - s\epsilon_{y3}\epsilon_{zy3} \right) - \epsilon_{z3} + \epsilon_{y3} \right] + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\epsilon_{z3}}{\epsilon_{z4}} \left[ -\frac{1}{\epsilon_{z4}} \left( n\epsilon_{y4}\epsilon_{zy4} + e\epsilon_{x4}\epsilon_{zx4} \right) + \epsilon_{z4} - \epsilon_{y4} \right] \Big\} + \\
& + k_o^2 \left[ \frac{w^2}{C_1} \left( \epsilon_{x1}\epsilon_{z2} - \epsilon_{x2}\epsilon_{z1} \right) + \frac{e^2}{C_2} \left( \epsilon_{x3}\epsilon_{z4} - \epsilon_{x4}\epsilon_{z3} \right) \right] , \tag{C.18}
\end{aligned}$$

$$\mathbf{B}_{P\gamma} = \frac{w^2}{C_1} \left( \epsilon_{z2} - \epsilon_{z1} \right) + \frac{e^2}{C_2} \left( \epsilon_{z4} - \epsilon_{z3} \right) . \tag{C.19}$$

## APÊNDICE D

### OBTENÇÃO DA EQUAÇÃO (2.32)

Na equação (B.8), as expressões para A' e B' (equações (B.9) e (B.10), respectivamente), podem ser somadas e, ao resultado, podem ser adicionadas as expressões:

$$\frac{2n\epsilon_{z1}\epsilon_{z4}}{C_3} \left\{ \frac{H_{xy1}}{\epsilon_{z1}} - \frac{H_{xy4}}{\epsilon_{z4}} - \frac{H_{yx1}}{\epsilon_{z1}} + \frac{H_{yx4}}{\epsilon_{z4}} \right\},$$

$$\frac{2s\epsilon_{z2}\epsilon_{z3}}{C_4} \left\{ -\frac{H_{xy3}}{\epsilon_{z3}} + \frac{H_{xy2}}{\epsilon_{z2}} + \frac{H_{yx3}}{\epsilon_{z3}} - \frac{H_{yx2}}{\epsilon_{z2}} \right\},$$

pois, como pode ser visto das duas primeiras equações de (2.30b), as expressões acima são identicamente nulas. Como resultado obtém-se:

$$\begin{aligned} A' + B' = & \frac{2n\epsilon_{z1}\epsilon_{z4}}{C_3} \left\{ \frac{H_{xy1}}{\epsilon_{z1}} \left( 1 - \frac{\epsilon_{y1}}{\epsilon_{z1}} \right) + \frac{H_{xy4}}{\epsilon_{z4}} \left( \frac{\epsilon_{y4}}{\epsilon_{z4}} - 1 \right) + \frac{H_{yx1}}{\epsilon_{z1}} \left( \frac{\epsilon_{x1}}{\epsilon_{z1}} - 1 \right) + \right. \\ & \left. + \frac{H_{yx4}}{\epsilon_{z4}} \left( 1 - \frac{\epsilon_{x4}}{\epsilon_{z4}} \right) \right\} + \frac{2s\epsilon_{z2}\epsilon_{z3}}{C_4} \left\{ \frac{H_{xy3}}{\epsilon_{z3}} \left( \frac{\epsilon_{y3}}{\epsilon_{z3}} - 1 \right) + \frac{H_{xy2}}{\epsilon_{z2}} \left( 1 - \frac{\epsilon_{y2}}{\epsilon_{z2}} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{H_{yx3}}{\epsilon_{z3}} \left( 1 - \frac{\epsilon_{x3}}{\epsilon_{z3}} \right) + \frac{H_{yx2}}{\epsilon_{z2}} \left( \frac{\epsilon_{x2}}{\epsilon_{z2}} - 1 \right) \right\}. \end{aligned} \tag{D.1}$$

Substituindo as expressões aproximadas para as derivadas de primeira ordem (equações de (2.16) a (2.19)), tem-se:

$$\begin{aligned}
 A' + B' = & \frac{2n\epsilon_{z1}\epsilon_{z4}}{C_3} \left\{ \left[ \frac{1}{\epsilon_{z1}} \left( 1 - \frac{\epsilon_{y1}}{\epsilon_{z1}} \right) + \frac{1}{\epsilon_{z4}} \left( \frac{\epsilon_{y4}}{\epsilon_{z4}} - 1 \right) \right] \left( \frac{H_{XN} - H_{XP}}{n} \right) + \right. \\
 & + \frac{1}{\epsilon_{z1}} \left( \frac{\epsilon_{x1}}{\epsilon_{z1}} - 1 \right) \left( \frac{H_{YP} - H_{YW}}{w} \right) + \frac{1}{\epsilon_{z4}} \left( 1 - \frac{\epsilon_{x4}}{\epsilon_{z4}} \right) \left( \frac{H_{YE} - H_{YP}}{e} \right) \left. \right\} + \\
 & + \frac{2s\epsilon_{z2}\epsilon_{z3}}{C_4} \left\{ \left[ \frac{1}{\epsilon_{z2}} \left( 1 - \frac{\epsilon_{y2}}{\epsilon_{z2}} \right) + \frac{1}{\epsilon_{z3}} \left( \frac{\epsilon_{y3}}{\epsilon_{z3}} - 1 \right) \right] \left( \frac{H_{XP} - H_{XS}}{s} \right) + \right. \\
 & + \frac{1}{\epsilon_{z2}} \left( \frac{\epsilon_{x2}}{\epsilon_{z2}} - 1 \right) \left( \frac{H_{YP} - H_{YW}}{w} \right) + \frac{1}{\epsilon_{z3}} \left( 1 - \frac{\epsilon_{x3}}{\epsilon_{z3}} \right) \left( \frac{H_{YE} - H_{YP}}{e} \right) \left. \right\}. \quad (D.2)
 \end{aligned}$$

É importante observar que, para o caso isotrópico, a expressão acima é identicamente nula. Desta forma, as expressões para C' e D' (equação (B.8)), podem ser somadas, e ao resultado, podem ser somadas e subtraídas as seguintes expressões:

$$\frac{2}{C_3} \left\{ w\epsilon_{z4} H_{xx1} + e\epsilon_{z1} H_{xx4} \right\},$$

$$\frac{2}{C_4} \left\{ w\epsilon_{z3} H_{xx2} + e\epsilon_{z2} H_{xx3} \right\},$$

o que não altera o resultado. Portanto:

$$C' + D' = - \frac{2}{C_3} \left\{ w\epsilon_{z4} \left[ H_{xx1} + H_{yy1} \right] + e\epsilon_{z1} \left[ H_{xx4} + H_{yy4} \right] \right\} +$$

$$+ \frac{2}{C_4} \left\{ w \epsilon_{z3} \left[ H_{xx2} + H_{yy2} \right] + e \epsilon_{z2} \left[ H_{xx3} + H_{yy3} \right] \right\} + CD' , \quad (D.3)$$

onde

$$CD' = \frac{2}{C_3} \left\{ \left( \frac{n^2}{w} + w \right) \epsilon_{z4} H_{xx1} + \left( \frac{n^2}{e} + e \right) \epsilon_{z1} H_{xx4} \right\} - \\ - \frac{2}{C_4} \left\{ \left( \frac{s^2}{w} + w \right) \epsilon_{z3} H_{xx2} + \left( \frac{s^2}{e} + e \right) \epsilon_{z2} H_{xx3} \right\} . \quad (D.4)$$

Semelhantemente, podem-se somar e subtrair da equação (D.3), as expressões:

$$\frac{2e\epsilon_{z1}}{C_3} \left[ H_{xx1} + H_{yy1} \right] \text{ e}$$

$$\frac{2e\epsilon_{z2}}{C_4} \left[ H_{xx2} + H_{yy2} \right] , \text{ resultando:}$$

$$C' + D' = 2 \left( H_{xx2} + H_{yy2} - H_{xx1} - H_{yy1} \right) - \frac{2e\epsilon_{z1}}{C_3} \left( H_{xx4} + H_{yy4} - H_{xx1} - H_{yy1} \right) + \\ + \frac{2e\epsilon_{z2}}{C_4} \left( H_{xx3} + H_{yy3} - H_{xx2} - H_{yy2} \right) + CD' . \quad (D.5)$$

Da equação (2.30b), conclui-se que as expressões entre parênteses da equação (D.5), são identicamente nulas. Fazendo-se uso das equações (2.18) e (2.19), a equação (D.5) pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
C' + D' = 2 \left\{ \left[ \frac{\left[ \left( \frac{n}{w} \right)^2 + 1 \right] \epsilon_{z4}}{C_3} - \frac{\left[ \left( \frac{s}{w} \right)^2 + 1 \right] \epsilon_{z3}}{C_4} \right] (H_{XP} - H_{XW}) + \right. \\
\left. + \left[ \frac{\left[ \left( \frac{n}{e} \right)^2 + 1 \right] \epsilon_{z1}}{C_3} - \frac{\left[ \left( \frac{s}{e} \right)^2 + 1 \right] \epsilon_{z2}}{C_4} \right] (H_{XE} - H_{XP}) \right\}. \quad (D.6)
\end{aligned}$$

Substituindo-se as expressões para  $A' + B'$  (equação (D.2)) e  $C' + D'$  (equação (D.6)), na equação (B.8), e agrupando-se os termos comuns para  $H_i$  (onde  $i = N, S, E, W, P$ , com  $H$  representando  $H_x$  ou  $H_y$ ), chega-se na equação (2.32). Ou seja:

$$\begin{aligned}
0 = C_W H_{YW} + C_E H_{YE} + C_N H_{YN} + C_S H_{YS} + C_P H_{YP} + D_W H_{XW} + D_E H_{XE} + D_N H_{XN} + \\
+ D_S H_{XS} + D_P H_{XP} + \gamma_z^2 C_{P\gamma} H_{Y\gamma P} + \gamma_z^2 D_{P\gamma} H_{X\gamma P}, \quad (D.7)
\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
C_W = \frac{n\epsilon_{z4}}{w\epsilon_{z1} C_3} \left[ \frac{1}{\epsilon_{z1}} \left( w\epsilon_{x1} \epsilon_{zx1} - n\epsilon_{y1} \epsilon_{zy1} \right) + \frac{5\epsilon_{z1} - \epsilon_{y1}}{2} \right] + \\
+ \frac{s\epsilon_{z3}}{w\epsilon_{z2} C_4} \left[ \frac{1}{\epsilon_{z2}} \left( s\epsilon_{y2} \epsilon_{zy2} + w\epsilon_{x2} \epsilon_{zx2} \right) + \frac{5\epsilon_{z2} - \epsilon_{y2}}{2} \right], \quad (D.8)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_E = \frac{s\epsilon_{z2}}{e\epsilon_{z3} C_4} \left[ \frac{1}{\epsilon_{z3}} \left( s\epsilon_{y3} \epsilon_{zy3} - e\epsilon_{x3} \epsilon_{zx3} \right) + \frac{5\epsilon_{z3} - \epsilon_{y3}}{2} \right] + \\
+ \frac{n\epsilon_{z1}}{e\epsilon_{z4} C_3} \left[ -\frac{1}{\epsilon_{z4}} \left( n\epsilon_{y4} \epsilon_{zy4} + e\epsilon_{x4} \epsilon_{zx4} \right) + \frac{5\epsilon_{z4} - \epsilon_{y4}}{2} \right], \quad (D.9)
\end{aligned}$$

$$C_N = \frac{2}{n} + \frac{n}{2C_3} \left[ \frac{\epsilon_{z4} (\epsilon_{z1} - \epsilon_{y1})}{w\epsilon_{z1}} + \frac{\epsilon_{z1} (\epsilon_{z4} - \epsilon_{y4})}{e\epsilon_{z4}} \right], \quad (D.10)$$

$$C_S = \frac{2}{s} + \frac{s}{2C_4} \left[ \frac{\epsilon_{z3}(\epsilon_{z2} - \epsilon_{y2})}{w\epsilon_{z2}} - \frac{\epsilon_{z2}(\epsilon_{z3} + \epsilon_{y3})}{e\epsilon_{z3}} \right], \quad (D.11)$$

$$\begin{aligned} C_P = & \frac{1}{C_3} \left\{ -\frac{n\epsilon_{z4}}{w\epsilon_{z1}} \left( -\frac{n\epsilon_{y1}\epsilon_{zy1}}{\epsilon_{z1}} + 3\epsilon_{z1} - \epsilon_{y1} \right) + \frac{n\epsilon_{z1}}{e\epsilon_{z4}} \left( \frac{n\epsilon_{y4}\epsilon_{zy4}}{\epsilon_{z4}} - 3\epsilon_{z4} + \epsilon_{y4} \right) - \right. \\ & - 2\epsilon_{z4} \left( \frac{n\epsilon_{x1}\epsilon_{zx1}}{2\epsilon_{z1}^2} + \frac{w}{n} \right) - 2\epsilon_{z1} \left( \frac{n\epsilon_{x4}\epsilon_{zx4}}{2\epsilon_{z4}^2} + \frac{e}{n} \right) \left. \right\} + \\ & + \frac{1}{C_4} \left\{ -\frac{s\epsilon_{z3}}{w\epsilon_{z2}} \left( \frac{s\epsilon_{y2}\epsilon_{zy2}}{\epsilon_{z2}} + 3\epsilon_{z2} - \epsilon_{y2} \right) - \frac{s\epsilon_{z2}}{e\epsilon_{z3}} \left( \frac{s\epsilon_{y3}\epsilon_{zy3}}{\epsilon_{z3}} + 3\epsilon_{z3} - \epsilon_{y3} \right) - \right. \\ & - 2\epsilon_{z3} \left( \frac{s\epsilon_{x2}\epsilon_{zx2}}{2\epsilon_{z2}^2} + \frac{w}{s} \right) - 2\epsilon_{z2} \left( \frac{s\epsilon_{x3}\epsilon_{zx3}}{2\epsilon_{z3}^2} + \frac{e}{s} \right) \left. \right\} + k_o^2 \left\{ \frac{n}{C_3} (w\epsilon_{x1}\epsilon_{z4} + e\epsilon_{x4}\epsilon_{z1}) + \right. \\ & \left. + \frac{s}{C_4} (w\epsilon_{x2}\epsilon_{z3} + e\epsilon_{x3}\epsilon_{z2}) \right\}, \quad (D.12) \end{aligned}$$

$$D_W = \frac{\epsilon_{z3}}{2C_4} \left( 3 + \frac{\epsilon_{x2}}{\epsilon_{z2}} \right) - \frac{\epsilon_{z4}}{2C_3} \left( 3 + \frac{\epsilon_{x1}}{\epsilon_{z1}} \right), \quad (D.13)$$

$$D_E = \frac{\epsilon_{z1}}{2C_3} \left( 3 + \frac{\epsilon_{x4}}{\epsilon_{z4}} \right) - \frac{\epsilon_{z2}}{2C_4} \left( 3 + \frac{\epsilon_{x3}}{\epsilon_{z3}} \right), \quad (D.14)$$

$$\begin{aligned} D_N = & \frac{2}{C_3} \left\{ \frac{\epsilon_{z4}}{2\epsilon_{z1}} \left[ \frac{1}{\epsilon_{z1}} (w\epsilon_{x1}\epsilon_{zx1} - n\epsilon_{y1}\epsilon_{zy1}) + \frac{5\epsilon_{z1} - \epsilon_{x1}}{2} \right] + \right. \\ & \left. + \frac{\epsilon_{z1}}{2\epsilon_{z4}} \left[ \frac{1}{\epsilon_{z4}} (e\epsilon_{x4}\epsilon_{zx4} + n\epsilon_{y4}\epsilon_{zy4}) - \frac{5\epsilon_{z4} - \epsilon_{x4}}{2} \right] \right\}, \quad (D.15) \end{aligned}$$

$$D_S = \frac{2}{C_4} \left\{ \frac{\epsilon_{z2}}{2\epsilon_{z3}} \left[ \frac{1}{\epsilon_{z3}} \left( s\epsilon_{y3}\epsilon_{zy3} - e\epsilon_{x3}\epsilon_{zx3} \right) + \frac{5\epsilon_{z3} - \epsilon_{x3}}{2} \right] - \frac{\epsilon_{z3}}{2\epsilon_{z2}} \left[ \frac{1}{\epsilon_{z2}} \left( s\epsilon_{y2}\epsilon_{zy2} + w\epsilon_{x2}\epsilon_{zx2} \right) + \frac{5\epsilon_{z2} - \epsilon_{x2}}{2} \right] \right\}, \quad (D.16)$$

$$D_P = \frac{1}{C_3} \left\{ n \left( \frac{\epsilon_{z4}\epsilon_{zy1}}{\epsilon_{z1}} - \frac{\epsilon_{z1}\epsilon_{zy4}}{\epsilon_{z4}} \right) - \frac{\epsilon_{z4}}{\epsilon_{z1}} \left( \frac{w\epsilon_{x1}\epsilon_{zx1}}{\epsilon_{z1}} + \epsilon_{z1} - \epsilon_{x1} \right) + \frac{\epsilon_{z1}}{\epsilon_{z4}} \left( \frac{e\epsilon_{x4}\epsilon_{zx4}}{\epsilon_{z4}} - \epsilon_{z4} + \epsilon_{x4} \right) \right\} + \frac{1}{C_4} \left\{ s \left( \frac{\epsilon_{z3}\epsilon_{zy2}}{\epsilon_{z2}} - \frac{\epsilon_{z2}\epsilon_{zy3}}{\epsilon_{z3}} \right) + \frac{\epsilon_{z3}}{\epsilon_{z2}} \left( \frac{w\epsilon_{x2}\epsilon_{zx2}}{\epsilon_{z2}} + \epsilon_{z2} - \epsilon_{x2} \right) + \frac{\epsilon_{z2}}{\epsilon_{z3}} \left( \frac{e\epsilon_{x3}\epsilon_{zx3}}{\epsilon_{z3}} - \epsilon_{z3} + \epsilon_{x3} \right) \right\} + k_o^2 \left\{ \frac{n^2}{C_3} \left( \epsilon_{y1}\epsilon_{z4} - \epsilon_{y4}\epsilon_{z1} \right) + \frac{s^2}{C_4} \left( \epsilon_{y3}\epsilon_{z2} - \epsilon_{y2}\epsilon_{z3} \right) \right\}, \quad (D.17)$$

$$C_{P\gamma} = n + s, \quad (D.18)$$

$$D_{P\gamma} = \frac{n^2}{C_3} \left( \epsilon_{z4} - \epsilon_{z1} \right) - \frac{s^2}{C_4} \left( \epsilon_{z3} - \epsilon_{z2} \right). \quad (D.19)$$

## APÉNDICE E

### OBTENÇÃO DA EQUAÇÃO (2.39)

Para efeito de obtenção da equação (2.39) uma malha gradual de pontos  $I \times J$  (onde  $I$  é o número de linhas e  $J$  o número de colunas da malha) é considerada sobre a seção transversal da estrutura. A Fig. E.1 mostra a malha de pontos e as paredes que limitam a região a ser analisada. Dependendo da natureza das paredes (elétrica ou magnética), como considerado na seção 2.3.2, quatro grupos de modos são possíveis. Desta forma, para cada grupo, tem-se expressões diferentes para o cálculo dos elementos da matriz (A) (equação (2.39)). A seguir é feita a demonstração da equação (2.39), para cada um dos grupos considerados neste trabalho.

#### 1.1 - PRIMEIRO GRUPO

Neste caso, como definido na seção 2.3.2, as paredes superior e inferior são magnéticas e as laterais elétricas (Fig. E.2). Feito isto, podem-se, então, aplicar as equações (2.35) e (2.36) para cada ponto  $P$  da malha, levando-se em conta as condições de contorno, nas paredes magnéticas e elétricas, impostas pelas equações (2.38a) e (2.38b), respectivamente.

Da Fig. E.2, observa-se que cada ponto  $P$  da malha é caracterizado pelo

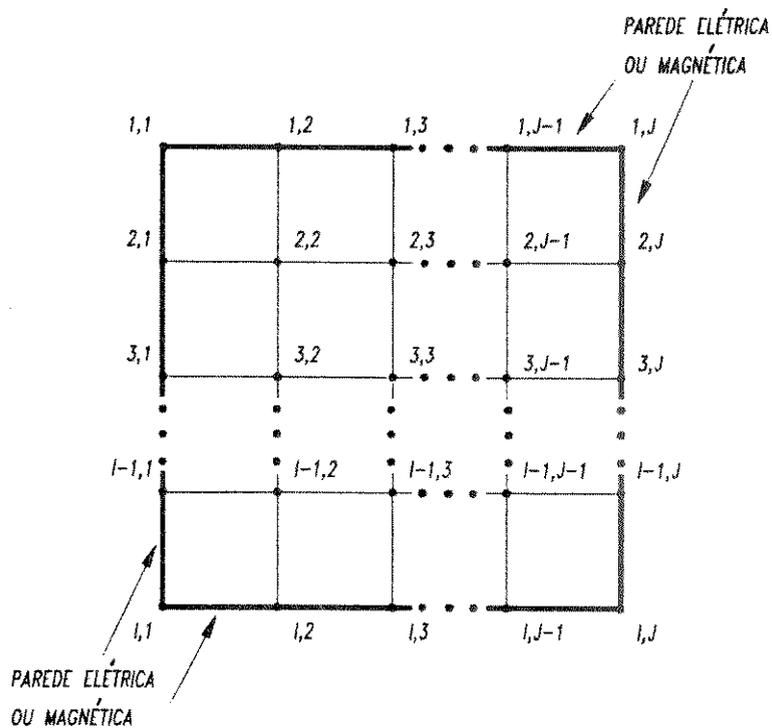


Fig. E.1 - Malha gradual de pontos com I linhas e J colunas.

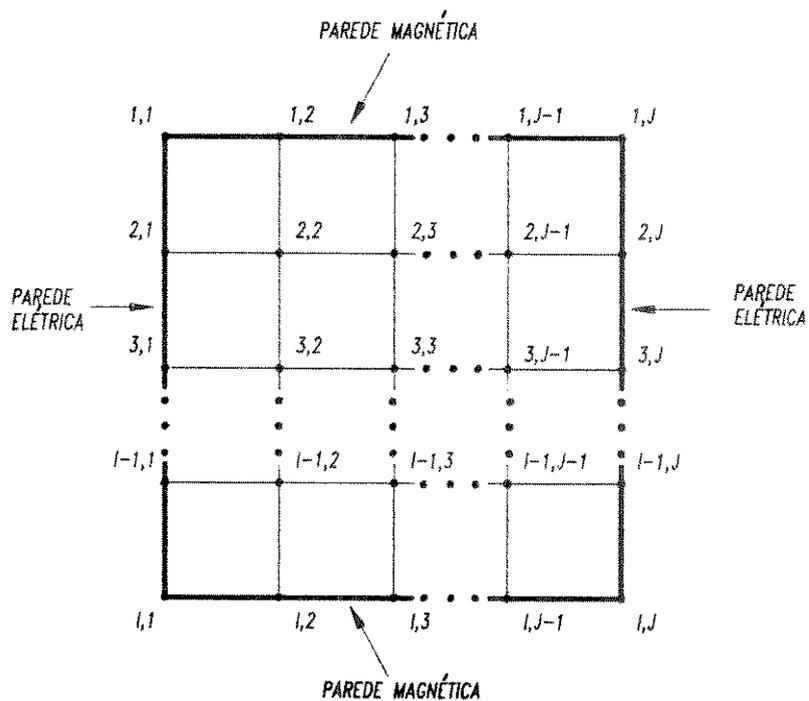


Fig. E.2 - Malha gradual de pontos  $(i,j)$  ( $i = 1,2,\dots,I$  e  $j = 1,2,\dots,J$ ) para o primeiro grupo.

par ordenado (i,j). Obviamente que os pontos W, E, N e S (Fig. 2.2) serão caracterizados por (i,j-1), (i,j+1), (i-1,j) e (i+1,j), respectivamente.

Desta forma, para os pontos (1,j), tem-se:

(1,1)

$$-\gamma_z^2 H_{y1,1} = C_{1,1}^P H_{y1,1} + [C_{1,1}^W + C_{1,1}^E] H_{y1,2} + [C_{1,1}^N + C_{1,1}^S] H_{y2,1} \text{ e}$$

$$H_{x1,1} = 0 . \quad (\text{E.1})$$

(1,2)

$$-\gamma_z^2 H_{y1,2} = [D_{1,2}^S - D_{1,2}^N] H_{x2,2} + C_{1,2}^W H_{y1,1} + C_{1,2}^P H_{y1,1} + C_{1,2}^E H_{y1,3} + \\ + [C_{1,2}^N + C_{1,2}^S] H_{y2,2} \text{ e}$$

$$H_{x1,1} = 0 . \quad (\text{E.2})$$

Pelo fato das equações para os pontos (1,3), (1,4), ..., (1,J-1) serem semelhantes às equações para o ponto (1,2), estas não são apresentadas.

Finalmente, para o ponto (1,J), tem-se:

(1,J)

$$-\gamma_z^2 H_{y1,J} = [C_{1,J}^W + C_{1,J}^E] H_{y1,J-1} + C_{1,J}^P H_{y1,J} + [C_{1,J}^N + C_{1,J}^S] H_{y2,J} \text{ e}$$

$$H_{x1,J} = 0. \quad (\text{E.3})$$

Para os pontos (2,j):

(2,1)

$$-\gamma_z^2 H_{y2,1} = [D_{2,1}^E - D_{2,1}^W] H_{x2,2} + C_{2,1}^N H_{y1,1} + C_{2,1}^P H_{y2,1} +$$

$$+ \left[ C_{2,1}^W + C_{2,1}^E \right] H_{y2,2} + C_{2,1}^S H_{y3,1} \quad e$$

$$H_{x2,1} = 0. \quad (E.4)$$

(2,2)

$$\begin{aligned} -\gamma_z^2 H_{y2,2} &= D_{2,2}^P H_{x2,2} + D_{2,2}^E H_{x2,3} + D_{2,2}^S H_{x3,2} + C_{2,2}^N H_{y1,2} + \\ &+ C_{2,2}^W H_{y2,1} + C_{2,2}^P H_{y2,2} + C_{2,2}^E H_{y2,3} + C_{2,2}^S H_{y3,2} \quad e \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\gamma_z^2 H_{x2,2} &= A_{2,2}^P H_{x2,2} + A_{2,2}^E H_{x2,3} + A_{2,2}^S H_{x3,2} + B_{2,2}^N H_{y1,2} + \\ &+ B_{2,2}^W H_{y2,1} + B_{2,2}^P H_{y2,2} + B_{2,2}^E H_{y2,3} + B_{2,2}^S H_{y3,2} \quad (E.5) \end{aligned}$$

(2,3)

$$\begin{aligned} -\gamma_z^2 H_{y2,3} &= D_{2,3}^W H_{x2,2} + D_{2,3}^P H_{x2,3} + D_{2,3}^E H_{x2,4} + D_{2,3}^S H_{x3,3} + C_{2,3}^N H_{y1,3} + \\ &+ C_{2,3}^W H_{y2,2} + C_{2,3}^P H_{y2,3} + C_{2,3}^E H_{y2,4} + C_{2,3}^S H_{y3,3} \quad e \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\gamma_z^2 H_{x2,3} &= A_{2,3}^W H_{x2,2} + A_{2,3}^P H_{x2,3} + A_{2,3}^E H_{x2,4} + A_{2,3}^S H_{x3,3} + B_{2,3}^N H_{y1,3} + \\ &+ B_{2,3}^W H_{y2,2} + B_{2,3}^P H_{y2,3} + B_{2,3}^E H_{y2,4} + B_{2,3}^S H_{y3,3} \quad (E.6) \end{aligned}$$

Idem para os pontos (2,4), (2,5), ..., (2,J-2), que possuem equações semelhantes àquelas do ponto (2,3). Finalmente, para (2,J-1) e (2,J), tem-se:

(2,J-1)

$$\begin{aligned} -\gamma_z^2 H_{y2,J-1} &= D_{2,J-1}^W H_{x2,J-2} + D_{2,J-1}^P H_{x2,J-1} + D_{2,J-1}^S H_{x3,J-1} + \\ &+ C_{2,J-1}^N H_{y1,J-1} + C_{2,J-1}^W H_{y2,J-2} + C_{2,J-1}^P H_{y2,J-1} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + C_{2,J-1}^E H_{y2,J} + C_{2,J-1}^S H_{y3,J-1} \quad e \\
-\gamma_z^2 H_{x2,J-1} & = A_{2,J-1}^W H_{x2,J-2} + A_{2,J-1}^P H_{x2,J-1} + A_{2,J-1}^S H_{x3,J-1} + \\
& + B_{2,J-1}^N H_{y1,J-1} + B_{2,J-1}^W H_{y2,J-2} + B_{2,J-1}^P H_{y2,J-1} + \\
& + B_{2,J-1}^E H_{y2,J} + B_{2,J-1}^S H_{y3,J-1} \quad (E.7)
\end{aligned}$$

(2,J)

$$\begin{aligned}
-\gamma_z^2 H_{y2,J} & = \left[ D_{2,J}^W - D_{2,J}^E \right] H_{x2,J-1} + C_{2,J}^N H_{y1,J} + \left[ C_{2,J}^W + C_{2,J}^E \right] H_{y2,J-1} + \\
& + C_{2,J}^P H_{y2,J} + C_{2,J}^S H_{y3,J} \quad e
\end{aligned}$$

$$H_{x2,J} = 0. \quad (E.8)$$

Para os pontos (3,j):

(3,1)

$$\begin{aligned}
-\gamma_z^2 H_{y3,1} & = \left[ D_{3,1}^E - D_{3,1}^W \right] H_{x3,2} + C_{3,1}^N H_{y2,1} + C_{3,1}^P H_{y3,1} + \\
& + \left[ C_{3,1}^W + C_{3,1}^E \right] H_{y3,2} + C_{3,1}^S H_{y4,1} \quad e
\end{aligned}$$

$$H_{x3,1} = 0. \quad (E.9)$$

(3,2)

$$\begin{aligned}
-\gamma_z^2 H_{y3,2} & = D_{3,2}^N H_{x2,2} + D_{3,2}^P H_{x3,2} + D_{3,2}^E H_{x3,3} + D_{3,2}^S H_{x4,2} + C_{3,2}^N H_{y2,2} + \\
& + C_{3,2}^W H_{y3,1} + C_{3,2}^P H_{y3,2} + C_{3,2}^E H_{y3,3} + C_{3,2}^S H_{y4,2} \quad e
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-\gamma_z^2 H_{x3,2} & = A_{3,2}^N H_{x2,2} + A_{3,2}^P H_{x3,2} + A_{3,2}^E H_{x3,3} + A_{3,2}^S H_{x4,2} + B_{3,2}^N H_{y2,2} + \\
& + B_{3,2}^W H_{y3,1} + B_{3,2}^P H_{y3,2} + B_{3,2}^E H_{y3,3} + B_{3,2}^S H_{y4,2} \quad (E.10)
\end{aligned}$$

(3,3)

$$\begin{aligned}
-\gamma_z^2 H_{y3,3} &= D_{3,3}^N H_{x2,3} + D_{3,3}^W H_{x3,2} + D_{3,3}^P H_{x3,3} + D_{3,3}^E H_{x3,4} + D_{3,3}^S H_{x4,3} + \\
&+ C_{3,3}^N H_{y2,3} + C_{3,3}^W H_{y3,2} + C_{3,3}^P H_{y3,3} + C_{3,3}^E H_{y3,4} + C_{3,3}^S H_{y4,3} \quad e
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-\gamma_z^2 H_{x3,3} &= A_{3,3}^N H_{x2,3} + A_{3,3}^W H_{x3,2} + A_{3,3}^P H_{x3,3} + A_{3,3}^E H_{x3,4} + A_{3,3}^S H_{x4,3} + \\
&+ B_{3,3}^N H_{y2,3} + B_{3,3}^W H_{y3,2} + B_{3,3}^P H_{y3,3} + B_{3,3}^E H_{y3,4} + B_{3,3}^S H_{y4,3}
\end{aligned}$$

(E.11)

Idem para os pontos (3,4), (3,5), ..., (3,J-2), que possuem equações semelhantes àquelas do ponto (3,3). Finalmente, para (3,J-1) e (3,J), tem-se:

(3,J-1)

$$\begin{aligned}
-\gamma_z^2 H_{y3,J-1} &= D_{3,J-1}^N H_{x2,J-1} + D_{3,J-1}^W H_{x3,J-2} + D_{3,J-1}^P H_{x3,J-1} + \\
&+ D_{3,J-1}^S H_{x4,J-1} + C_{3,J-1}^N H_{y2,J-1} + C_{3,J-1}^W H_{y3,J-2} + \\
&+ C_{3,J-1}^P H_{y3,J-1} + C_{3,J-1}^E H_{y3,J} + C_{3,J-1}^S H_{y4,J-1} \quad e
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-\gamma_z^2 H_{x3,J-1} &= A_{3,J-1}^N H_{x2,J-1} + A_{3,J-1}^W H_{x3,J-2} + A_{3,J-1}^P H_{x3,J-1} + \\
&+ D_{3,J-1}^S H_{x4,J-1} + B_{3,J-1}^N H_{y2,J-1} + C_{3,J-1}^W H_{y3,J-2} + \\
&+ C_{3,J-1}^P H_{y3,J-1} + C_{3,J-1}^E H_{y3,J} + C_{3,J-1}^S H_{y4,J-1}
\end{aligned}$$

(E.12)

(3,J)

$$\begin{aligned}
-\gamma_z^2 H_{y3,J} &= \left[ D_{3,J}^W - D_{3,J}^E \right] H_{x3,J-1} + C_{3,J}^N H_{y2,J} + \left[ C_{3,J}^W + C_{3,J}^E \right] H_{y3,J-1} + \\
&+ C_{3,J}^P H_{y3,J} + C_{3,J}^S H_{y4,J} \quad e
\end{aligned}$$

$$H_{x3,J} = 0. \quad (E.13)$$

As equações para os pontos das linhas (4,j), (5,j), ..., (I-2,j) são semelhantes às equações dos pontos da linha (3,j), mantendo-se as respectivas posições relativas dos pontos. Tem-se para as linhas seguintes:

Para os pontos (I-1,j):

(I-1,1)

$$\begin{aligned} -\gamma_z^2 H_{yI-1,1} = & \left[ D_{I-1,1}^E - D_{I-1,1}^W \right] H_{xI-1,2} + C_{I-1,1}^N H_{yI-2,1} + C_{I-1,1}^P H_{yI-1,1} + \\ & + \left[ C_{I-1,1}^W + C_{I-1,1}^E \right] H_{yI-1,2} + C_{I-1,1}^S H_{yI,1} \quad e \end{aligned}$$

$$H_{xI-1,1} = 0. \quad (E.14)$$

(I-1,2)

$$\begin{aligned} -\gamma_z^2 H_{yI-1,2} = & D_{I-1,2}^N H_{xI-2,2} + D_{I-1,2}^P H_{xI-1,2} + D_{I-1,2}^E H_{xI-1,3} + \\ & + C_{I-1,2}^N H_{yI-2,2} + C_{I-1,2}^W H_{yI-1,1} + C_{I-1,2}^P H_{yI-1,2} + \\ & + C_{I-1,2}^E H_{yI-1,3} + C_{I-1,2}^S H_{yI,2} \quad e \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\gamma_z^2 H_{xI-1,2} = & A_{I-1,2}^N H_{xI-2,2} + A_{I-1,2}^P H_{xI-1,2} + A_{I-1,2}^E H_{xI-1,3} + \\ & + B_{I-1,2}^N H_{yI-2,2} + B_{I-1,2}^W H_{yI-1,1} + B_{I-1,2}^P H_{yI-1,2} + \\ & + B_{I-1,2}^E H_{yI-1,3} + B_{I-1,2}^S H_{yI,2} \quad (E.15) \end{aligned}$$

(I-1,3)

$$-\gamma_z^2 H_{yI-1,3} = D_{I-1,3}^N H_{xI-2,3} + D_{I-1,3}^W H_{xI-1,2} + D_{I-1,3}^P H_{xI-1,3} +$$

$$\begin{aligned}
& + D_{I-1,3}^E H_{xI-1,4} + C_{I-1,3}^N H_{yI-2,3} + C_{I-1,3}^W H_{yI-1,2} + \\
& + C_{I-1,3}^P H_{yI-1,3} + C_{I-1,3}^E H_{yI-1,4} + C_{I-1,3}^S H_{yI,3} \quad e \\
-\gamma_z^2 H_{xI-1,3} & = A_{I-1,3}^N H_{xI-2,3} + A_{I-1,3}^W H_{xI-1,2} + A_{I-1,3}^P H_{xI-1,3} + \\
& + A_{I-1,3}^E H_{xI-1,4} + B_{I-1,3}^N H_{yI-2,3} + B_{I-1,3}^W H_{yI-1,2} + \\
& + B_{I-1,3}^P H_{yI-1,3} + B_{I-1,3}^E H_{yI-1,4} + B_{I-1,3}^S H_{yI,3} \quad (E.16)
\end{aligned}$$

Idem para os pontos (I-1,4), (I-1,5), ..., (I-1,J-2), que possuem equações semelhantes àquelas do ponto (I-1,3). Finalmente, para (I-1,J-1) e (I-1,J), tem-se:

(I-1,J-1)

$$\begin{aligned}
-\gamma_z^2 H_{yI-1,J-1} & = D_{I-1,J-1}^N H_{xI-2,J-1} + D_{I-1,J-1}^W H_{xI-1,J-2} + D_{I-1,J-1}^P H_{xI-1,J-1} + \\
& + C_{I-1,J-1}^N H_{yI-2,J-1} + C_{I-1,J-1}^W H_{yI-1,J-2} + C_{I-1,J-1}^P H_{yI-1,J-1} + \\
& + C_{I-1,J-1}^E H_{yI-1,J} + C_{I-1,J-1}^S H_{yI,J-1} \quad e \\
-\gamma_z^2 H_{xI-1,J-1} & = A_{I-1,J-1}^N H_{xI-2,J-1} + A_{I-1,J-1}^W H_{xI-1,J-2} + \\
& + A_{I-1,J-1}^P H_{xI-1,J-1} + B_{I-1,J-1}^N H_{yI-2,J-1} + \\
& + B_{I-1,J-1}^W H_{yI-1,J-2} + B_{I-1,J-1}^P H_{yI-1,J-1} + \\
& + B_{I-1,J-1}^E H_{yI-1,J} + B_{I-1,J-1}^S H_{yI,J-1} \quad (E.17)
\end{aligned}$$

(I-1,J)

$$-\gamma_z^2 H_{yI-1,J} = \left[ D_{I-1,J}^W - D_{I-1,J}^E \right] H_{xI-1,J-1} + C_{I-1,J}^N H_{yI-2,J} +$$

$$+ \left[ C_{I-1,J}^W + C_{I-1,J}^E \right] H_{y_{I-1,J-1}} + C_{I-1,J}^P H_{y_{I-1,J}} + C_{I-1,J}^S H_{y_{I,J}} \quad e$$

$$H_{x_{I-1,J}} = 0. \quad (E.18)$$

Para os pontos (I,j):

$$(I,1)$$

$$-\gamma_z^2 H_{y_{I,1}} = \left[ C_{I,1}^N + C_{I,1}^S \right] H_{y_{I-1,1}} + C_{I,1}^P H_{y_{I,1}} + \left[ C_{I,1}^W + C_{I,1}^E \right] H_{y_{I,2}} \quad e$$

$$H_{x_{I,1}} = 0. \quad (E.19)$$

$$(I,2)$$

$$-\gamma_z^2 H_{y_{I,2}} = \left[ D_{I,2}^N - D_{I,2}^S \right] H_{x_{I-1,2}} + \left[ C_{I,2}^N + C_{I,2}^S \right] H_{y_{I-1,2}} +$$

$$+ C_{I,2}^W H_{y_{I,1}} + C_{I,2}^P H_{y_{I,2}} + C_{I,2}^E H_{y_{I,3}} \quad e$$

$$H_{x_{I,2}} = 0. \quad (E.20)$$

Idem para os pontos (I,3), (I,4), ..., (I,J-2), cujas equações são semelhantes às equações para o ponto (I,2). Finalmente para o ponto (I,J), tem-se:

$$(I,J)$$

$$-\gamma_z^2 H_{y_{I,J}} = \left[ C_{I,J}^N + C_{I,J}^S \right] H_{y_{I-1,J}} + \left[ C_{I,J}^W + C_{I,J}^E \right] H_{y_{I,J-1}} + C_{I,J}^P H_{y_{I,J}} \quad e$$

$$H_{x_{I,J}} = 0. \quad (E.21)$$

As equações, assim obtidas para os pontos da malha da Fig. E.2, formam um sistema de equações lineares, que podem ser arrumadas e escritas na seguinte forma matricial:

$$(A)(X) = -\gamma_z^2(X) \quad (E.22)$$

ou, na forma de um problema de autovalores convencional (equação 2.39):

$$\left[ (A) - \lambda(U) \right] (X) = 0, \quad (E.23)$$

onde  $\lambda = -\gamma_z^2$ , (U) é a matriz unitária, (X) é um vetor coluna que contém os autovetores e (A) é uma matriz quadrada, de ordem  $2IJ \times 2IJ$ . Como referenciado anteriormente as equações de (E.1) a (E.21) podem ser dispostas, de modo que o vetor (X) e a matriz (A) venham a ser escritas da seguinte maneira:

$$(X) = \left( H_{y1,1}, H_{x1,1}, H_{y1,2}, H_{x1,2}, \dots, H_{y1,J}, H_{x1,J}, H_{y2,1}, H_{x2,1}, \right. \\ \left. H_{y2,2}, H_{x2,2}, \dots, H_{yI,J}, H_{xI,J} \right)^T, \quad (E.24)$$

sendo  $H_{xi,j}$  e  $H_{yi,j}$  as intensidades das componentes transversais,  $H_x$  e  $H_y$ , do campo magnético, em cada ponto (i,j) da malha gradual de pontos (Fig. E.2), e

$$(A) = \begin{bmatrix} C_{1,1} & d_{1,1} & C_{1,2} & d_{1,2} & \dots & C_{1,M} & d_{1,M} \\ b_{1,1} & a_{1,1} & b_{1,2} & a_{1,2} & \dots & b_{1,M} & a_{1,M} \\ C_{2,1} & d_{2,1} & C_{2,2} & d_{2,2} & \dots & C_{2,M} & d_{2,M} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{M,1} & a_{M,1} & b_{M,2} & a_{M,2} & \dots & b_{M,M} & a_{M,M} \end{bmatrix}, \quad (E.25)$$

Com este arranjo, a matriz (A) é escrita como um bloco tridiagonal, o que facilitou a obtenção dos autovalores e autovetores. Nesta equação  $M = IJ$ , e os coeficientes  $a_{i,j}$ ,  $b_{i,j}$ ,  $C_{i,j}$  e  $d_{i,j}$  são obtidos diretamente das equações (E.1) a (E.21), como segue:

Das equações (E.1), tem-se:

$C_{1,1} = C_{1,1}^P$ ,  $C_{1,2} = C_{1,1}^W + C_{1,1}^E$ ,  $C_{1,J+1} = C_{1,1}^N + C_{1,1}^S$ ; os demais valores de  $C_{1,m}$  são iguais a zero.

Em adição

$d_{1,m} = 0$ ; para todos os valores.

$a_{1,m} = 0$ ; para todos os valores.

$b_{1,m} = 0$ ; para todos os valores.

Das equações (E.2), tem-se:

$C_{2,1} = C_{1,2}^W$ ,  $C_{2,2} = C_{1,2}^P$ ,  $C_{2,3} = C_{1,2}^E$ ,  $C_{2,J+2} = C_{1,2}^N + C_{1,2}^S$ ; os demais valores de  $C_{2,m}$  são iguais a zero.

Em adição,

$d_{2,J+2} = D_{1,2}^S - D_{1,2}^N$ ; os demais valores de  $d_{2,m}$  são iguais a zero.

$a_{2,m} = 0$ ; para todos os valores.

$b_{2,m} = 0$ ; para todos os valores.

Das equações (E.3), tem-se:

$C_{J,J-1} = C_{1,J}^W + C_{1,J}^E$ ,  $C_{J,J} = C_{1,J}^P$ ,  $C_{J,2J} = C_{1,J}^N + C_{1,J}^S$ ; os demais valores de  $C_{J,m}$  são iguais a zero.

Em adição,

$d_{J,m} = 0$ ; para todos os valores.

$a_{J,m} = 0$ ; para todos os valores.

$b_{J,m} = 0$ ; para todos os valores.

Das equações (E.4), tem-se:

$C_{J+1,1} = C_{2,1}^N$ ,  $C_{J+1,J+1} = C_{2,1}^P$ ,  $C_{J+1,J+2} = C_{2,1}^W + C_{2,1}^E$ ,  $C_{J+1,2J+1} = C_{2,1}^S$ ; os

demais valores de  $C_{J+1,m}$  são iguais a zero.

$d_{J+1,J+2} = D_{2,1}^E - D_{2,1}^W$ ; os demais valores de  $d_{J+1,m}$  são iguais a zero.

Em adição,

$a_{J+1,m} = 0$ ; para todos os valores.

$b_{J+1,m} = 0$ ; para todos os valores.

Das equações (E.5), tem-se:

$C_{J+2,2} = C_{2,2}^N$ ,  $C_{J+2,J+1} = C_{2,2}^W$ ,  $C_{J+2,J+2} = C_{2,2}^P$ ,  $C_{J+2,J+3} = C_{2,2}^E$ ,  $C_{J+2,2J+2} = C_{2,2}^S$ ; os demais valores de  $C_{J+2,m}$  são iguais a zero.

$d_{J+2,J+2} = D_{2,2}^P$ ,  $d_{J+2,J+3} = D_{2,2}^E$ ,  $d_{J+2,2J+2} = D_{2,2}^S$ ; os demais valores de  $d_{J+2,m}$  são iguais a zero.

$a_{J+2,J+2} = A_{2,2}^P$ ,  $a_{J+2,J+3} = A_{2,2}^E$ ,  $a_{J+2,2J+2} = A_{2,2}^S$ ; os demais valores de  $a_{J+2,m}$  são iguais a zero.

$b_{J+2,2} = B_{2,2}^N$ ,  $b_{J+2,J+1} = B_{2,2}^W$ ,  $b_{J+2,J+2} = B_{2,2}^P$ ,  $b_{J+2,J+3} = C_{2,2}^E$ ,  $b_{J+2,2J+2} = B_{2,2}^S$ ; os demais valores de  $b_{J+2,m}$  são iguais a zero.

Das equações (E.6), tem-se:

$C_{J+3,3} = C_{2,3}^N$ ,  $C_{J+3,J+2} = C_{2,3}^W$ ,  $C_{J+3,J+3} = C_{2,3}^P$ ,  $C_{J+3,J+4} = C_{2,3}^E$ ,  $C_{J+3,2J+3} = C_{2,3}^S$ ; os demais valores de  $C_{J+3,m}$  são iguais a zero.

$d_{J+3,J+2} = D_{2,3}^W$ ,  $d_{J+3,J+3} = D_{2,3}^P$ ,  $d_{J+3,J+4} = D_{2,3}^E$ ,  $d_{J+3,2J+3} = D_{2,3}^S$ ; os demais valores de  $d_{J+3,m}$  são iguais a zero.

$a_{J+3,J+2} = A_{2,3}^W$ ,  $a_{J+3,J+3} = A_{2,3}^P$ ,  $a_{J+3,J+4} = A_{2,3}^E$ ,  $a_{J+3,2J+3} = A_{2,3}^S$ ; os demais valores de  $a_{J+3,m}$  são iguais a zero.

$b_{J+3,3} = B_{2,3}^N$ ,  $b_{J+2,J+2} = B_{2,3}^W$ ,  $b_{J+3,J+3} = B_{2,3}^P$ ,  $b_{J+3,J+4} = B_{2,3}^E$ ,  $b_{J+3,2J+3} = B_{2,3}^S$ ; os demais valores de  $b_{J+3,m}$  são iguais a zero.

Das equações (E.7), tem-se:

$C_{2J-1,J-1} = C_{2,J-1}^N$ ,  $C_{2J-1,2J-2} = C_{2,J-1}^W$ ,  $C_{2J-1,2J-1} = C_{2,J-1}^P$ ,  $C_{2J-1,2J} = C_{2,J-1}^E$ ,  
 $C_{2J-1,3J-1} = C_{2,J-1}^S$ ; os demais valores de  $C_{2J-1,m}$  são iguais zero.

$d_{2J-1,2J-2} = D_{2,J-1}^W$ ,  $d_{2J-1,2J-1} = D_{2,J-1}^P$ ,  $d_{2J-1,3J-1} = D_{2,J-1}^S$ ; os demais valores  
de  $d_{2J-1,m}$  são iguais a zero.

$a_{2J-1,2J-2} = A_{2,J-1}^W$ ,  $a_{2J-1,2J-1} = A_{2,J-1}^P$ ,  $a_{2J-1,3J-1} = A_{2,J-1}^S$ ; os demais valores  
de  $a_{2J-1,m}$  são iguais a zero.

$b_{2J-1,J-1} = B_{2,J-1}^N$ ,  $b_{2J-1,2J-2} = B_{2,J-1}^W$ ,  $b_{2J-1,2J-1} = B_{2,J-1}^P$ ,  $b_{2J-1,2J} = B_{2,J-1}^E$ ,  
 $b_{2J-1,3J-1} = B_{2,J-1}^S$ ; os demais valores de  $b_{2J-1,m}$  são iguais a zero.

Das equações (E.8), tem-se:

$C_{2J,J} = C_{2,J}^N$ ,  $C_{2J,2J-1} = C_{2,J}^W + C_{2,J}^E$ ,  $C_{2J,2J} = C_{2,J}^P$ ,  
 $C_{2J,3J} = C_{2,J}^S$ ; os demais valores de  $C_{2J,m}$  são iguais a zero.

$d_{2J,2J-1} = D_{2,J}^W - D_{2,J}^E$ ; os demais valores de  $d_{2J,m}$  são iguais a zero.

Em adição,

$a_{2J,m} = 0$ ; para todos os valores.

$b_{2J,m} = 0$ ; para todos os valores.

Das equações (E.9), tem-se:

$$C_{2J+1,J+1} = C_{3,1}^N, \quad C_{2J+1,2J+1} = C_{3,1}^P, \quad C_{2J+1,2J+2} = C_{3,1}^W + C_{3,1}^E, \quad C_{2J+1,3J+1} = C_{3,1}^S;$$

os demais valores de  $C_{2J+1,m}$  são iguais a zero.

$$d_{2J+1,2J+2} = D_{3,1}^E - D_{3,1}^W;$$

os demais valores de  $d_{2J+1,m}$  são iguais a zero.

Em adição,

$$a_{2J+1,m} = 0; \text{ para todos os valores.}$$

$$b_{2J+1,m} = 0; \text{ para todos os valores.}$$

Das equações (E.10), tem-se:

$$C_{2J+2,J+2} = C_{3,2}^N, \quad C_{2J+2,2J+1} = C_{3,2}^W, \quad C_{2J+2,2J+2} = C_{3,2}^P, \quad C_{2J+2,2J+3} = C_{3,2}^E, \\ C_{2J+2,3J+2} = C_{3,2}^S;$$

os demais valores de  $C_{2J+2,m}$  são iguais a zero.

$$d_{2J+2,J+2} = D_{3,2}^N, \quad d_{2J+2,2J+2} = D_{3,2}^P, \quad d_{2J+2,2J+3} = D_{3,2}^E, \quad d_{2J+2,3J+2} = D_{3,2}^S;$$

os demais valores de  $d_{2J+2,m}$  são iguais a zero.

$$a_{2J+2,J+2} = A_{3,2}^N, \quad a_{2J+2,2J+2} = A_{3,2}^P, \quad a_{2J+2,2J+3} = A_{3,2}^E, \quad a_{2J+2,3J+2} = A_{3,2}^S;$$

os demais de valores  $a_{2J+2,m}$  são iguais a zero.

$$b_{2J+2,J+2} = B_{3,2}^N, \quad b_{2J+2,2J+1} = B_{3,2}^W, \quad b_{2J+2,2J+2} = B_{3,2}^P, \quad b_{2J+2,2J+3} = B_{3,2}^E, \\ b_{2J+2,3J+2} = B_{3,2}^S;$$

os demais valores de  $b_{2J+2,m}$  são iguais a zero.

Das equações (E.11), tem-se:

$$C_{2J+3,J+3} = C_{3,3}^N, \quad C_{2J+3,2J+2} = C_{3,3}^W, \quad C_{2J+3,2J+3} = C_{3,3}^P, \quad C_{2J+3,2J+4} = C_{3,3}^E, \\ C_{2J+3,3J+3} = C_{3,3}^S;$$

os demais valores de  $C_{2J+3,m}$  são iguais a zero.

$$d_{2J+3,J+3} = D_{3,3}^N, \quad d_{2J+3,2J+2} = D_{3,3}^W, \quad d_{2J+3,2J+3} = D_{3,3}^P, \quad d_{2J+3,2J+4} = D_{3,3}^E, \\ d_{2J+3,3J+3} = D_{3,3}^S;$$

os demais valores de  $d_{2J+3,m}$  são iguais a zero.

$$a_{2J+3,J+3} = A_{3,3}^N, \quad a_{2J+3,2J+2} = A_{3,3}^W, \quad a_{2J+3,2J+3} = A_{3,3}^P, \quad a_{2J+3,2J+4} = A_{3,3}^E, \\ a_{2J+3,3J+3} = A_{3,3}^S; \text{ os demais valores de } a_{2J+3,m} \text{ são iguais a zero.}$$

$$b_{2J+3,J+3} = B_{3,3}^N, \quad b_{2J+3,2J+2} = B_{3,3}^W, \quad b_{2J+3,2J+3} = B_{3,3}^P, \quad b_{2J+3,2J+4} = B_{3,3}^E, \\ b_{2J+3,3J+3} = B_{3,3}^S; \text{ os demais valores de } b_{2J+3,m} \text{ são iguais a zero.}$$

Das equações (E.12), tem-se:

$$C_{3J-1,2J-1} = C_{3,J-1}^N, \quad C_{3J-1,3J-2} = C_{3,J-1}^W, \quad C_{3J-1,3J-1} = C_{3,J-1}^P, \quad C_{3J-1,3J} = \\ C_{3,J-1}^E, \quad C_{3J-1,4J-1} = C_{3,J-1}^S; \text{ os demais valores de } C_{3J-1,m} \text{ são iguais a zero.}$$

$$d_{3J-1,2J-1} = D_{3,J-1}^N, \quad d_{3J-1,3J-2} = D_{3,J-1}^W, \quad d_{3J-1,3J-1} = D_{3,J-1}^P, \quad d_{3J-1,4J-1} = \\ D_{3,J-1}^S; \text{ os demais valores de } d_{3J-1,m} \text{ são iguais a zero.}$$

$$a_{3J-1,2J-1} = A_{3,J-1}^N, \quad a_{3J-1,3J-2} = A_{3,J-1}^W, \quad a_{3J-1,3J-1} = A_{3,J-1}^P, \quad a_{3J-1,4J-1} = \\ A_{3,J-1}^S; \text{ os demais valores de } a_{3J-1,m} \text{ são iguais a zero.}$$

$$b_{3J-1,2J-1} = B_{3,J-1}^N, \quad b_{3J-1,3J-2} = B_{3,J-1}^W, \quad b_{3J-1,3J-1} = B_{3,J-1}^P, \quad b_{3J-1,3J} = \\ B_{3,J-1}^E, \quad b_{3J-1,4J-1} = B_{3,J-1}^S; \text{ os demais valores de } b_{3J-1,m} \text{ são iguais a zero.}$$

Das equações (E.13), tem-se:

$$C_{3J,2J} = C_{3,J}^N, \quad C_{3J,3J-1} = C_{3,J}^W + C_{3,J}^E, \quad C_{3J,3J} = C_{3,J}^P, \quad C_{3J,4J} = C_{3,J}^S; \text{ os demais} \\ \text{valores de } C_{3J,m} \text{ são iguais a zero.}$$

$$d_{3J,3J-1} = D_{3,J}^W - D_{3,J}^E; \text{ os demais valores de } d_{3J,m} \text{ são iguais a zero.}$$

Em adição,

$$a_{3J,m} = 0; \text{ para todos os valores.}$$

$$b_{3J,m} = 0; \text{ para todos os valores.}$$

Das equações (E.14), tem-se:

$$C_{(I-2)J+1,(I-3)J+1} = C_{I-1,1}^N, \quad C_{(I-2)J+1,(I-2)J+1} = C_{I-1,1}^P, \quad C_{(I-2)J+1,(I-2)J+2} = C_{I-1,1}^E + C_{I-1,1}^W, \quad C_{(I-2)J+1,(I-1)J+1} = C_{I-1,1}^S; \text{ os demais valores de } C_{(I-2)J+1,m} \text{ são iguais a zero.}$$

$$d_{(I-2)J+1,(I-2)J+2} = D_{I-1,1}^E - D_{I-1,1}^W; \text{ os demais valores de } d_{(I-2)J+1,m} \text{ são iguais a zero.}$$

Em adição,

$$a_{(I-2)J+1,m} = 0; \text{ para todos os valores.}$$

$$b_{(I-2)J+1,m} = 0; \text{ para todos os valores.}$$

Das equações (E.15), tem-se:

$$C_{(I-2)J+2,(I-3)J+2} = C_{I-1,2}^N, \quad C_{(I-2)J+2,(I-2)J+1} = C_{I-1,2}^W, \quad C_{(I-2)J+2,(I-2)J+2} = C_{I-1,2}^P, \quad C_{(I-2)J+2,(I-2)J+3} = C_{I-1,2}^E, \quad C_{(I-2)J+2,(I-1)J+2} = C_{I-1,2}^S; \text{ os demais valores de } C_{(I-2)J+2,m} \text{ são iguais a zero.}$$

$$d_{(I-2)J+2,(I-3)J+2} = D_{I-1,2}^N, \quad d_{(I-2)J+2,(I-2)J+2} = D_{I-1,2}^P, \quad d_{(I-2)J+2,(I-2)J+3} = D_{I-1,2}^E; \text{ os demais valores de } d_{(I-2)J+2,m} \text{ são iguais a zero.}$$

$$a_{(I-2)J+2,(I-3)J+2} = A_{I-1,2}^N, \quad a_{(I-2)J+2,(I-2)J+2} = A_{I-1,2}^P, \quad a_{(I-2)J+2,(I-2)J+3} = A_{I-1,2}^E; \text{ os demais valores de } a_{(I-2)J+2,m} \text{ são iguais a zero.}$$

$$b_{(I-2)J+2,(I-3)J+2} = B_{I-1,2}^N, \quad b_{(I-2)J+2,(I-2)J+1} = B_{I-1,2}^W, \quad b_{(I-2)J+2,(I-2)J+2} = B_{I-1,2}^P, \quad b_{(I-2)J+2,(I-2)J+3} = B_{I-1,2}^E, \quad b_{(I-2)J+2,(I-1)J+2} = B_{I-1,2}^S; \text{ os demais valores de } b_{(I-2)J+2,m} \text{ são iguais a zero.}$$

Das equações (E.16), obtém-se:

$$C_{(I-2)J+3,(I-3)J+3} = C_{I-1,3}^N, \quad C_{(I-2)J+3,(I-2)J+2} = C_{I-1,3}^W, \quad C_{(I-2)J+3,(I-2)J+3} = C_{I-1,3}^P, \quad C_{(I-2)J+3,(I-2)J+4} = C_{I-1,3}^E, \quad C_{(I-2)J+3,(I-1)J+3} = C_{I-1,3}^S; \text{ os demais valores de } C_{(I-2)J+3,m} \text{ são iguais a zero.}$$

$$d_{(I-2)J+3,(I-3)J+3} = D_{I-1,3}^N, \quad d_{(I-2)J+3,(I-2)J+2} = D_{I-1,3}^W, \quad d_{(I-2)J+3,(I-2)J+3} = D_{I-1,3}^P, \quad d_{(I-2)J+3,(I-2)J+4} = D_{I-1,3}^E; \text{ os demais valores de } d_{(I-2)J+3,m} \text{ são iguais a zero.}$$

$$a_{(I-2)J+3,(I-3)J+3} = A_{I-1,3}^N, \quad a_{(I-2)J+3,(I-2)J+2} = A_{I-1,3}^W, \quad a_{(I-2)J+3,(I-2)J+3} = A_{I-1,3}^P, \quad a_{(I-2)J+3,(I-2)J+4} = A_{I-1,3}^E; \text{ os demais valores de } a_{(I-2)J+3,m} \text{ são iguais a zero.}$$

$$b_{(I-2)J+3,(I-3)J+3} = B_{I-1,3}^N, \quad b_{(I-2)J+3,(I-2)J+2} = B_{I-1,3}^W, \quad b_{(I-2)J+3,(I-2)J+3} = B_{I-1,3}^P, \quad b_{(I-2)J+3,(I-2)J+4} = B_{I-1,3}^E, \quad b_{(I-2)J+3,(I-1)J+3} = B_{I-1,3}^S; \text{ os demais valores de } b_{(I-2)J+3,m} \text{ são iguais a zero.}$$

Das equações (E.17), obtém-se:

$$C_{(I-1)J-1,(I-2)J-1} = C_{I-1,J-1}^N, \quad C_{(I-1)J-1,(I-1)J-2} = C_{I-1,J-1}^W, \quad C_{(I-1)J-1,(I-1)J-1} = C_{I-1,J-1}^P, \quad C_{(I-1)J-1,(I-1)J} = C_{I-1,J-1}^E, \quad C_{(I-1)J-1,(I-1)J-1} = C_{I-1,J-1}^S; \text{ os demais valores de } C_{(I-1)J-1,m} \text{ são iguais a zero.}$$

$d_{(I-1)J-1, (I-2)J-1} = D_{I-1, J-1}^N$      $d_{(I-1)J-1, (I-1)J-2} = D_{I-1, J-1}^W$      $d_{(I-1)J-1, (I-1)J-1} = D_{I-1, J-1}^P$ ; os demais valores de  $d_{(I-1)J-1, m}$  são iguais a zero.

$a_{(I-1)J-1, (I-2)J-1} = A_{I-1, J-1}^N$      $a_{(I-1)J-1, (I-1)J-2} = A_{I-1, J-1}^W$      $a_{(I-1)J-1, (I-1)J-1} = A_{I-1, J-1}^P$ ; os demais valores de  $a_{(I-1)J-1, m}$  são iguais a zero.

$b_{(I-1)J-1, (I-2)J-1} = B_{I-1, J-1}^N$      $b_{(I-1)J-1, (I-1)J-2} = B_{I-1, J-1}^W$      $b_{(I-1)J-1, (I-1)J-1} = B_{I-1, J-1}^P$      $b_{(I-1)J-1, (I-1)J} = B_{I-1, J-1}^E$      $b_{(I-1)J-1, IJ-1} = B_{I-1, J-1}^S$ ; os demais valores de  $b_{(I-1)J-1, m}$  são iguais a zero.

Das equações (E.18), obtém-se:

$C_{(I-1)J, (I-2)J} = C_{I-1, J}^N$      $C_{(I-1)J, (I-1)J-1} = C_{I-1, J}^W + C_{I-1, J}^E$      $C_{(I-1)J, (I-1)J} = C_{I-1, J}^P$      $C_{(I-1)J, IJ} = C_{I-1, J}^S$ ; os demais valores de  $C_{(I-1)J, m}$  são iguais a zero.

$d_{(I-1)J, (I-1)J-1} = D_{I-1, J}^W - D_{I-1, J}^E$ ; os demais valores de  $d_{(I-1)J, m}$  são iguais a zero.

Em adição,

$a_{(I-1)J, m} = 0$ ; para todos os valores.

$b_{(I-1)J, m} = 0$ ; para todos os valores.

Das equações (E.19), obtém-se:

$C_{(I-1)J+1, (I-2)J+1} = C_{I, 1}^N + C_{I, 1}^S$      $C_{(I-1)J+1, (I-1)J+1} = C_{I, 1}^P$      $C_{(I-1)J+1, (I-1)J+2} = C_{I, 1}^E + C_{I, 1}^W$ ; os demais valores de  $C_{(I-1)J+1, m}$  são iguais a zero.

Em adição,

$$d_{(I-1)J+1,m} = 0; \text{ para todos os valores.}$$

$$a_{(I-1)J+1,m} = 0; \text{ para todos os valores.}$$

$$b_{(I-1)J+1,m} = 0; \text{ para todos os valores.}$$

Das equações (E.20), obtém-se:

$$C_{(I-1)J+2,(I-2)J+2} = C_{I,2}^N + C_{I,2}^S, \quad C_{(I-1)J+2,(I-1)J+1} = C_{I,2}^W, \quad C_{(I-1)J+2,(I-1)J+2} = C_{I,2}^P, \quad C_{(I-1)J+2,(I-1)J+3} = C_{I,2}^E; \text{ os demais valores de } C_{(I-1)J+2,m} \text{ são iguais a zero.}$$

$$d_{(I-1)J+2,(I-2)J+2} = D_{I,2}^N - D_{I,2}^S; \text{ os demais valores de } d_{(I-1)J+2,m} \text{ são iguais a zero.}$$

Em adição,

$$a_{(I-1)J+2,m} = 0; \text{ para todos os valores.}$$

$$b_{(I-1)J+2,m} = 0; \text{ para todos os valores.}$$

Das equações (E.21), obtém-se:

$$C_{II,(I-1)J} = C_{I,J}^N + C_{I,J}^S, \quad C_{II,II-1} = C_{I,J}^E + C_{I,J}^W, \quad C_{II,II} = C_{I,J}^P; \text{ os demais valores de } C_{II,m} \text{ são iguais a zero.}$$

Em adição,

$$d_{II,m} = 0; \text{ para todos os valores.}$$

$$a_{II,m} = 0; \text{ para todos os valores.}$$

$$b_{II,m} = 0; \text{ para todos os valores.}$$

onde m pode assumir os valores 1,2,3,...,IJ.

Alternativamente, os elementos da matriz (A) podem ser, facilmente, identificados, através das seguintes expressões compactadas:

$$A \left( 2i-1 + 2(j-1)I, 2i + 1+2(j-1)I \right) = \begin{cases} 0; i = 1 \\ C_{j,i}^W + C_{j,i}^E; i = 1 \\ C_{j,i}^E; \text{ para os demais } i \text{ e } j \end{cases} \quad (\text{E.26})$$

OBS.: A condição  $i = 1$  e  $j = J$ , implica em um ponto fora da matriz, logo, não deve ser usada.

$$A \left( 2i-1 + 2(j-1)I, 2i - 1 + 2(j-1)I \right) = C_{j,i}^P; \text{ para todos } i \text{ e } j \quad (\text{E.27})$$

$$A \left( 2i - 1 + 2(j-1)I, 2i - 3 + 2(j-1)I \right) = \begin{cases} 0; i = 1 \\ C_{j,i}^W + C_{j,i}^E; i = 1 \\ C_{j,i}^W; \text{ para os demais } i \text{ e } j \end{cases} \quad (\text{E.28})$$

OBS.: A condição  $i = 1$  e  $j = 1$ , implica em um ponto fora da matriz, logo, não deve ser usada.

$$A \left( 2i - 1 + 2(j-1)I, 2i - 1 + 2jI \right) = \begin{cases} C_{j,i}^N + C_{j,i}^S; j = 1 \\ C_{j,i}^S; \text{ para os demais } i \text{ e } j \end{cases} \quad (\text{E.29})$$

OBS.: A condição  $j = J$ , implica em um ponto fora da matriz, logo, não deve ser usada.

$$A \left( 2i - 1 + 2(j-1)I, 2i - 1 + 2(j-2)I \right) = \begin{cases} C_{j,i}^N + C_{j,i}^S; i = J \\ C_{j,i}^N; \text{ para os demais } i \text{ e } j \end{cases} \quad (\text{E.30})$$

OBS.: A condição  $j = 1$ , implica em um ponto fora da matriz, logo, não serve.

$$A\left(2i - 1 + 2(j-1)I, 2i + 2jI\right) = \begin{cases} 0; j = J-1 \\ 0; i = 1, I \\ D_{j,i}^S - D_{j,i}^N; j = 1 \\ D_{j,i}^S; \text{ para os demais } i \text{ e } j \end{cases} \quad (\text{E.31})$$

OBS.: A condição  $j = J$ , implica em pontos fora da matriz, logo, não deve ser usada.

$$A\left(2i - 1 + 2(j-1)I, 2i + 2(j-1)I\right) = \begin{cases} 0; j = 1, J \\ 0; i = 1, I \\ D_{j,i}^P; \text{ para os demais } i \text{ e } j \end{cases} \quad (\text{E.32})$$

$$A\left(2i - 1 + 2(j-1)I, 2i + 2 + 2(j-1)I\right) = \begin{cases} 0; j = 1, J \\ 0; i = I-1, I \\ D_{j,i}^E - D_{j,i}^W; i = 1 \\ D_{j,i}^E; \text{ para os demais } i \text{ e } j \end{cases} \quad (\text{E.33})$$

OBS.: A condição  $i = I$  e  $j = J$ , implica em pontos fora da matriz, logo, não serve.

$$A\left(2i - 1 + 2(j-1)I, 2i - 2 + 2(j-1)I\right) = \begin{cases} 0; j = 1, J \\ 0; i = 1, 2 \\ D_{j,i}^W - D_{j,i}^E; i = I \\ D_{j,i}^W; \text{ para os demais } i \text{ e } j \end{cases} \quad (\text{E.34})$$

OBS.: A condição  $i = 1$  e  $j = 1$ , implica em pontos fora da matriz, logo, não serve.

$$A\left(2i - 1 + 2(j-1)I, 2i + 2(j-2)I\right) = \begin{cases} 0; j = 2 \\ 0; i = 1, I \\ D_{j,i}^N - D_{j,i}^S; j = J \\ D_{j,i}^N; \text{ para os demais } i \text{ e } j \end{cases} \quad (\text{E.35})$$

OBS.: A condição  $j = 1$ , implica em pontos fora da matriz, logo, não serve.

$$A\left(2i + 2(j-1)I, 2i - 3 + 2(j-1)I\right) = \begin{cases} 0; j = 1, J \\ 0; i = 1, I \\ B_{j,i}^W; \text{ para os demais } i \text{ e } j \end{cases} \quad (\text{E.36})$$

OBS.: A condição  $i = 1$  e  $j = 1$ , implica em pontos fora da matriz, logo, não serve.

$$A\left(2i + 2(j-1)I, 2i - 1 + 2(j-1)I\right) = \begin{cases} 0; j = 1, J \\ 0; i = 1, I \\ B_{j,i}^P; \text{ para os demais } i \text{ e } j \end{cases} \quad (\text{E.37})$$

$$A\left(2i + 2(j-1)I, 2i - 1 + 2(j-2)I\right) = \begin{cases} 0; j = J \\ 0; i = 1, I \\ B_{j,i}^N; \text{ para os demais } i \text{ e } j \end{cases} \quad (\text{E.38})$$

OBS.: A condição  $j = 1$ , implica em pontos fora da matriz, logo, não deve ser usada.

$$A\left(2i + 2(j-1)I, 2i - 1 + 2jI\right) = \begin{cases} 0; j = 1 \\ 0; i = 1, I \\ B_{j,i}^S; \text{ para os demais } i \text{ e } j \end{cases} \quad (\text{E.39})$$

OBS.: A condição  $j = J$ , implica em pontos fora da matriz, logo, não serve.

$$A\left(2i + 2(j-1)I, 2i + 1 + 2(j-1)I\right) = \begin{cases} 0; & j = 1, J \\ 0; & i = 1, I \\ B_{j,i}^E; & \text{para os demais } i \text{ e } j \end{cases} \quad (\text{E.40})$$

OBS.: A condição  $i = I$  e  $j = J$ , implica em pontos fora da matriz, logo, não deve ser usada.

$$A\left(2i + 2(j-1)I, 2i + 2jI\right) = \begin{cases} 0; & j = 1, J-1 \\ 0; & i = 1, I \\ A_{j,i}^S; & \text{para os demais } i \text{ e } j \end{cases} \quad (\text{E.41})$$

OBS.: A condição  $j = J$ , implica em pontos fora da matriz, logo, não serve.

$$A\left(2i + 2(j-1)I, 2i + 2(j-1)I\right) = \begin{cases} 0; & j = 1, J \\ 0; & i = 1, I \\ A_{j,i}^P; & \text{para os demais } i \text{ e } j \end{cases} \quad (\text{E.42})$$

$$A\left(2i + 2(j-1)I, 2i + 2 + 2(j-1)I\right) = \begin{cases} 0; & j = 1, J \\ 0; & i = 1, I-1, I \\ A_{j,i}^E; & \text{para os demais } i \text{ e } j \end{cases} \quad (\text{E.43})$$

OBS.: A condição  $i = I$  e  $j = J$ , implica em pontos fora da matriz, logo, não serve.

$$A\left(2i + 2(j-1)I, 2i + 2(j-2)I\right) = \begin{cases} 0; & j = 2, J \\ 0; & i = 1, I \\ A_{j,i}^N; & \text{para os demais } i \text{ e } j \end{cases} \quad (\text{E.44})$$

OBS.: A condição  $j = 1$ , implica em pontos fora da matriz, logo, não deve ser usada.

$$A(2i + 2(j-1)I, 2i - 2 + 2(j-1)I) = \begin{cases} 0; & j = 1, J \\ 0; & i = 1, 2, I \\ A_{j,i}^w; & \text{para os demais } i \text{ e } j \end{cases} \quad (\text{E.45})$$

OBS.: A condição  $i = 1$  e  $j = 1$ , implica em pontos fora da matriz, logo, não serve.

A matriz (A), assim obtida, é mostrada na Fig. E.3, considerando-se  $I = 7$  e  $J = 8$ .

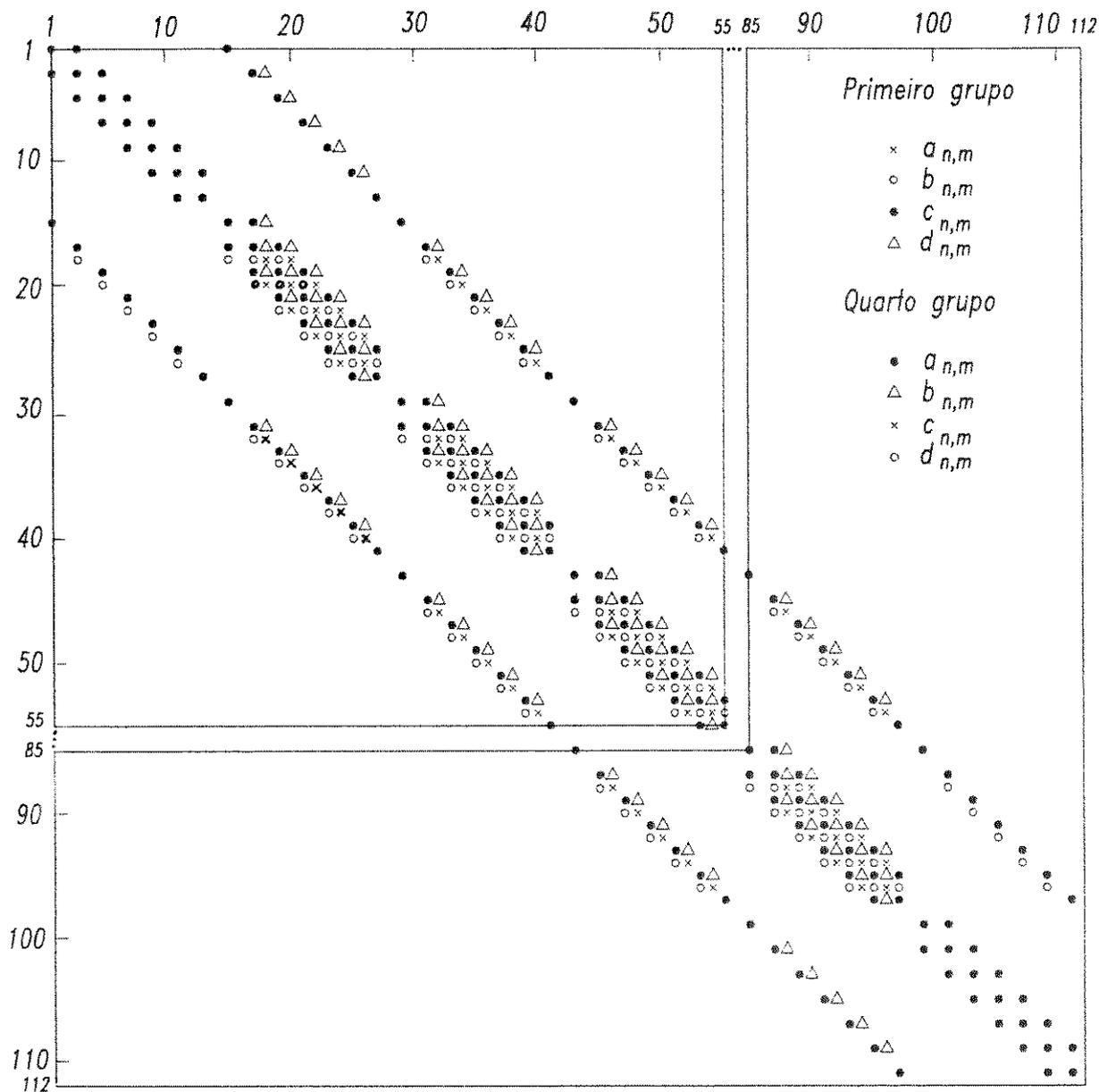


Fig. E.3 - Estrutura rearranjada da matriz (A) para o primeiro e quarto grupos.

## 1.2. SEGUNDO GRUPO

Neste grupo, como definido na seção 2.3.2, as quatro paredes que limitam a região em análise, são elétricas (Fig. E.4). Desta forma, aplicando-se as equações (2.35) e (2.36) para cada ponto P (caracterizado pelo par ordenado (i,j) (Fig. E.4)) da malha, e levando-se em consideração as condições de contorno nas paredes elétricas (equações (2.38b)), tem-se:

Para os pontos (1,j):

(1,1)

$$H_{y1,1} = 0.$$

$$H_{x1,1} = 0.$$

(E.46)

(1,2)

$$H_{y1,2} = 0.$$

$$-\gamma_z^2 H_{x1,2} = A_{1,2}^P H_{x1,2} + A_{1,2}^E H_{x1,3} + [A_{1,2}^N + A_{1,2}^S] H_{x2,2} + [B_{1,2}^S - B_{1,2}^N] H_{y2,2}.$$

(E.47)

(1,3)

$$H_{y1,3} = 0.$$

$$-\gamma_z^2 H_{x1,3} = A_{1,3}^W H_{x1,2} + A_{1,3}^P H_{x1,3} + A_{1,3}^E H_{x1,4} + [A_{1,3}^N + A_{1,3}^S] H_{x2,3} + [B_{1,3}^S - B_{1,3}^N] H_{y2,3}.$$

(E.48)

Como as equações para os pontos (1,4),(1,5),..., (1,J-2), são semelhantes às equações obtidas para o ponto (1,3), elas não serão apresentadas.

Dando continuidade, tem-se:

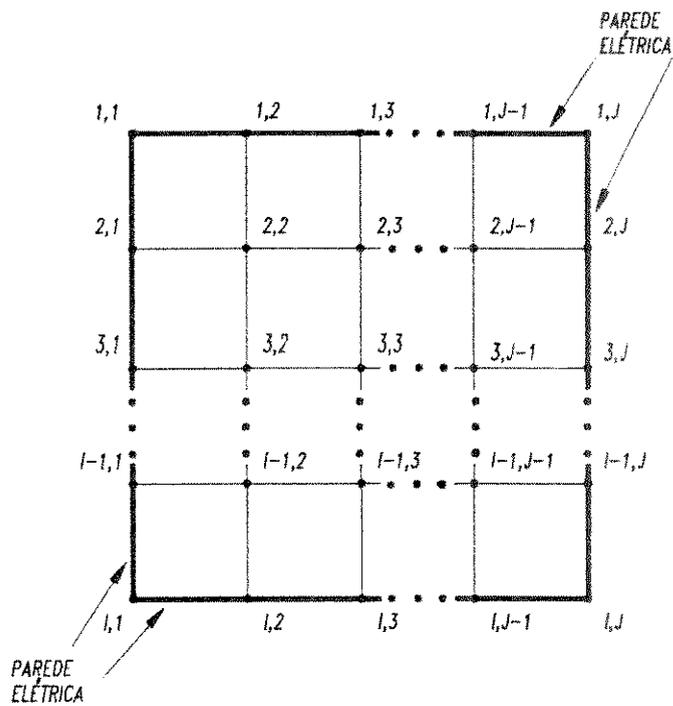


Fig. E.4 - Malha Gradual de Pontos  $(i,j)$  ( $i = 1,2,\dots,l$  e  $j = 1,2,\dots,J$ ) para o segundo grupo.

(1,J-1)

$$H_{y1,J-1} = 0.$$

$$\begin{aligned} -\gamma_z^2 H_{x1,J-1} &= A_{1,J-1}^W H_{x1,J-2} + A_{1,J-1}^P H_{x1,J-1} + \left[ A_{1,J-1}^N + A_{1,J-1}^S \right] H_{x2,J-1} + \\ &+ \left[ B_{1,J-1}^S - B_{1,J-1}^N \right] H_{y2,J-1}. \end{aligned} \quad (\text{E.49})$$

(1,J)

$$H_{y1,J} = 0.$$

$$H_{x1,J} = 0. \quad (\text{E.50})$$

Para os pontos (2,j):

(2,1)

$$\begin{aligned} -\gamma_z^2 H_{y2,1} &= \left[ D_{2,1}^E - D_{2,1}^W \right] H_{x2,2} + \left[ C_{2,1}^W + C_{2,1}^E \right] H_{y2,2} + C_{2,1}^P H_{y2,1} + \\ &+ C_{2,1}^S H_{y3,1}. \end{aligned}$$

$$H_{x2,1} = 0. \quad (\text{E.51})$$

(2,2)

$$\begin{aligned} -\gamma_z^2 H_{y2,2} &= D_{2,2}^N H_{x1,2} + D_{2,2}^P H_{x2,2} + D_{2,2}^E H_{x2,3} + D_{2,2}^S H_{x3,2} + \\ &+ C_{2,2}^W H_{y2,1} + C_{2,2}^P H_{y2,2} + C_{2,2}^E H_{y2,3} + C_{2,2}^S H_{y3,2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\gamma_z^2 H_{x2,2} &= A_{2,2}^N H_{x1,2} + A_{2,2}^P H_{x2,2} + A_{2,2}^E H_{x2,3} + A_{2,2}^S H_{x3,2} + \\ &+ B_{2,2}^W H_{y2,1} + B_{2,2}^P H_{y2,2} + B_{2,2}^E H_{y2,3} + B_{2,2}^S H_{y3,2}. \end{aligned} \quad (\text{E.52})$$

(2,3)

$$\begin{aligned} -\gamma_z^2 H_{y2,3} &= D_{2,3}^N H_{x1,3} + D_{2,3}^W H_{x2,2} + D_{2,3}^P H_{x2,3} + D_{2,3}^E H_{x2,4} + D_{2,3}^S H_{x3,3} + \\ &+ C_{2,3}^W H_{y2,2} + C_{2,3}^P H_{y2,3} + C_{2,3}^E H_{y2,4} + C_{2,3}^S H_{y3,3}. \\ -\gamma_z^2 H_{x2,3} &= A_{2,3}^N H_{x1,3} + A_{2,3}^W H_{x2,2} + A_{2,3}^P H_{x2,3} + A_{2,3}^E H_{x2,4} + A_{2,3}^S H_{x3,3} + \\ &+ B_{2,3}^W H_{y2,2} + B_{2,3}^P H_{y2,3} + B_{2,3}^E H_{y2,4} + B_{2,3}^S H_{y3,3}. \end{aligned} \quad (E.53)$$

De forma análoga, as equações para os pontos (2,4),(2,5),..., (2,J-2) não são apresentadas. Logo:

(2,J-1)

$$\begin{aligned} -\gamma_z^2 H_{y2,J-1} &= D_{2,J-1}^N H_{x1,J-1} + D_{2,J-1}^W H_{x2,J-2} + D_{2,J-1}^P H_{x2,J-1} + \\ &+ D_{2,J-1}^S H_{x3,J-1} + C_{2,J-1}^W H_{y2,J-2} + C_{2,J-1}^P H_{y2,J-1} + \\ &+ C_{2,J-1}^E H_{y2,J} + C_{2,J-1}^S H_{y3,J-1}. \\ -\gamma_z^2 H_{x2,J-1} &= A_{2,J-1}^N H_{x1,J-1} + A_{2,J-1}^W H_{x2,J-2} + A_{2,J-1}^P H_{x2,J-1} + \\ &+ A_{2,J-1}^S H_{x3,J-1} + B_{2,J-1}^W H_{y2,J-2} + B_{2,J-1}^P H_{y2,J-1} + \\ &+ B_{2,J-1}^E H_{y2,J} + B_{2,J-1}^S H_{y3,J-1}. \end{aligned} \quad (E.54)$$

(2,J)

$$\begin{aligned} -\gamma_z^2 H_{y2,J} &= \left[ D_{2,J}^W - D_{2,J}^E \right] H_{x2,J-1} + \left[ C_{2,J}^W + C_{2,J}^E \right] H_{y2,J-1} + \\ &+ C_{2,J}^P H_{y2,J} + C_{2,J}^S H_{y3,J}. \end{aligned}$$

$$H_{x2,J} = 0. \quad (E.55)$$

Para os pontos (3,j):

(3,1)

$$\begin{aligned}
-\gamma_z^2 H_{y3,1} &= \left[ D_{3,1}^E - D_{3,1}^W \right] H_{x3,2} + C_{3,1}^N H_{y2,1} + \left[ C_{3,1}^W + C_{3,1}^E \right] H_{y3,2} + \\
&+ C_{3,1}^P H_{y3,1} + C_{3,1}^S H_{y4,1}.
\end{aligned}$$

$$H_{x3,1} = 0. \quad (\text{E.56})$$

(3,2)

$$\begin{aligned}
-\gamma_z^2 H_{y3,2} &= D_{3,2}^N H_{x2,2} + D_{3,2}^P H_{x3,2} + D_{3,2}^E H_{x3,3} + D_{3,2}^S H_{x4,2} + C_{3,2}^N H_{y2,2} + \\
&+ C_{3,2}^W H_{y3,1} + C_{3,2}^P H_{y3,2} + C_{3,2}^E H_{y3,3} + C_{3,2}^S H_{y4,2}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-\gamma_z^2 H_{x3,2} &= A_{3,2}^N H_{x2,2} + A_{3,2}^P H_{x3,2} + A_{3,2}^E H_{x3,3} + A_{3,2}^S H_{x4,2} + B_{3,2}^N H_{y2,2} + \\
&+ B_{3,2}^W H_{y3,1} + B_{3,2}^P H_{y3,2} + B_{3,2}^E H_{y3,3} + B_{3,2}^S H_{y4,2}.
\end{aligned} \quad (\text{E.57})$$

(3,3)

$$\begin{aligned}
-\gamma_z^2 H_{y3,3} &= D_{3,3}^N H_{x2,3} + D_{3,3}^W H_{x3,2} + D_{3,3}^P H_{x3,3} + D_{3,3}^E H_{x3,4} + D_{3,3}^S H_{x4,3} + \\
&+ C_{3,3}^N H_{y2,3} + C_{3,3}^W H_{y3,2} + C_{3,3}^P H_{y3,3} + C_{3,3}^E H_{y3,4} + C_{3,3}^S H_{y4,3}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-\gamma_z^2 H_{x3,3} &= A_{3,3}^N H_{x2,3} + A_{3,3}^W H_{x3,2} + A_{3,3}^P H_{x3,3} + A_{3,3}^E H_{x3,4} + A_{3,3}^S H_{x4,3} + \\
&+ B_{3,3}^N H_{y2,3} + B_{3,3}^W H_{y3,2} + B_{3,3}^P H_{y3,3} + B_{3,3}^E H_{y3,4} + B_{3,3}^S H_{y4,3}.
\end{aligned}$$

(E.58)

⋮

(3,J-1)

$$\begin{aligned}
-\gamma_z^2 H_{y3,J-1} &= D_{3,J-1}^N H_{x2,J-1} + D_{3,J-1}^W H_{x3,J-2} + D_{3,J-1}^P H_{x3,J-1} + \\
&+ D_{3,J-1}^S H_{x4,J-1} + C_{3,J-1}^N H_{y2,J-1} + C_{3,J-1}^W H_{y3,J-2} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + C_{3,J-1}^P H_{y3,J-1} + C_{3,J-1}^E H_{y3,J} + C_{3,J-1}^S H_{y4,J-1} \\
-\gamma_z^2 H_{x3,J-1} & = A_{3,J-1}^N H_{x2,J-1} + A_{3,J-1}^W H_{x3,J-2} + A_{3,J-1}^P H_{x3,J-1} + \\
& + A_{3,J-1}^S H_{x4,J-1} + B_{3,J-1}^N H_{y2,J-1} + B_{3,J-1}^W H_{y3,J-2} + \\
& + B_{3,J-1}^P H_{y3,J-1} + B_{3,J-1}^E H_{y3,J} + B_{3,J-1}^S H_{y4,J-1}. \tag{E.59}
\end{aligned}$$

(3,J)

$$\begin{aligned}
-\gamma_z^2 H_{y3,J} & = \left[ D_{3,J}^W - D_{3,J}^E \right] H_{x3,J-1} + C_{3,J}^N H_{y2,J} + \left[ C_{3,J}^W + C_{3,J}^E \right] H_{y3,J-1} + \\
& + C_{3,J}^P H_{y3,J} + C_{3,J}^S H_{y4,J}.
\end{aligned}$$

$$H_{x3,J} = 0. \tag{E.60}$$

Como as equações para os pontos das linhas (4,j),(5,j),...,(I-2,j), são semelhantes às equações obtidas para os pontos da linha (3,j), respeitando-se as posições relativas, elas não são apresentadas. Continuando, tem-se:

Para os pontos (I-1,j):

(I-1,1)

$$\begin{aligned}
-\gamma_z^2 H_{yI-1,1} & = \left[ D_{I-1,1}^E - D_{I-1,1}^W \right] H_{xI-1,2} + C_{I-1,1}^N H_{yI-2,1} + C_{I-1,1}^P H_{yI-1,1} + \\
& + \left[ C_{I-1,1}^W + C_{I-1,1}^E \right] H_{yI-1,2}.
\end{aligned}$$

$$H_{xI-1,1} = 0. \tag{E.61}$$

(I-1,2)

$$\begin{aligned}
-\gamma_z^2 H_{yI-1,2} & = D_{I-1,2}^N H_{xI-2,2} + D_{I-1,2}^P H_{xI-1,2} + D_{I-1,2}^E H_{xI-1,3} + \\
& + D_{I-1,2}^S H_{xI,2} + C_{I-1,2}^N H_{yI-2,2} + C_{I-1,2}^W H_{yI-1,1} + \\
& + C_{I-1,2}^P H_{yI-1,2} + C_{I-1,2}^E H_{yI-1,3}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-\gamma_z^2 H_{xI-1,2} &= A_{I-1,2}^N H_{xI-2,2} + A_{I-1,2}^P H_{xI-1,2} + A_{I-1,2}^E H_{xI-1,3} + \\
&+ A_{I-1,2}^S H_{xI,2} + B_{I-1,2}^N H_{yI-2,2} + B_{I-1,2}^W H_{yI-1,1} + \\
&+ B_{I-1,2}^P H_{yI-1,2} + B_{I-1,2}^E H_{yI-1,3}.
\end{aligned} \tag{E.62}$$

(I-1,3)

$$\begin{aligned}
-\gamma_z^2 H_{yI-1,3} &= D_{I-1,3}^N H_{xI-2,3} + D_{I-1,3}^W H_{xI-1,2} + D_{I-1,3}^P H_{xI-1,3} + \\
&+ D_{I-1,3}^E H_{xI-1,4} + D_{I-1,3}^S H_{xI,3} + C_{I-1,3}^N H_{yI-2,3} + \\
&+ C_{I-1,3}^W H_{yI-1,2} + C_{I-1,3}^P H_{yI-1,3} + C_{I-1,3}^E H_{yI-1,4}. \\
-\gamma_z^2 H_{xI-1,3} &= A_{I-1,3}^N H_{xI-2,3} + A_{I-1,3}^W H_{xI-1,2} + A_{I-1,3}^P H_{xI-1,3} + \\
&+ A_{I-1,3}^E H_{xI-1,4} + A_{I-1,3}^S H_{xI,3} + B_{I-1,3}^N H_{yI-2,3} + \\
&+ B_{I-1,3}^W H_{yI-1,2} + B_{I-1,3}^P H_{yI-1,3} + B_{I-1,3}^E H_{yI-1,4}. \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{E.63}$$

(I-1,J-1)

$$\begin{aligned}
-\gamma_z^2 H_{yI-1,J-1} &= D_{I-1,J-1}^N H_{xI-2,J-1} + D_{I-1,J-1}^W H_{xI-1,J-2} + \\
&+ D_{I-1,J-1}^P H_{xI-1,J-1} + D_{I-1,J-1}^S H_{xI,J-1} + \\
&+ C_{I-1,J-1}^N H_{yI-2,J-1} + C_{I-1,J-1}^W H_{yI-1,J-2} + \\
&+ C_{I-1,J-1}^P H_{yI-1,J-1} + C_{I-1,J-1}^E H_{yI-1,J}. \\
-\gamma_z^2 H_{xI-1,J-1} &= A_{I-1,J-1}^N H_{xI-2,J-1} + A_{I-1,J-1}^W H_{xI-1,J-2} + \\
&+ A_{I-1,J-1}^P H_{xI-1,J-1} + A_{I-1,J-1}^S H_{xI,J-1} + \\
&+ B_{I-1,J-1}^N H_{yI-2,J-1} + B_{I-1,J-1}^W H_{yI-1,J-2} +
\end{aligned}$$

$$+ B_{I-1,J-1}^P H_{yI-1,J-1} + B_{I-1,J-1}^E H_{yI-1,J} \quad (\text{E.64})$$

(I-1, J)

$$\begin{aligned} -\gamma_z^2 H_{yI-1,J} = & \left[ D_{I-1,J}^W - D_{I-1,J}^E \right] H_{xI-1,J-1} + C_{I-1,J}^N H_{yI-2,J} + \\ & + \left[ C_{I-1,J}^W + C_{I-1,J}^E \right] H_{yI-1,J-1} + C_{I-1,J}^P H_{yI-1,J}. \end{aligned}$$

$$H_{xI-1,J} = 0. \quad (\text{E.65})$$

Para os pontos (I, j):

(I, 1)

$$H_{yI,1} = 0.$$

$$H_{xI,1} = 0. \quad (\text{E.66})$$

(I, 2)

$$H_{yI,2} = 0.$$

$$\begin{aligned} -\gamma_z^2 H_{xI,2} = & \left[ A_{I,2}^N + A_{I,2}^S \right] H_{xI-1,2} + A_{I,2}^P H_{xI,2} + A_{I,2}^E H_{xI,3} + \\ & + \left[ B_{I,2}^N - B_{I,2}^S \right] H_{yI-1,2}. \end{aligned} \quad (\text{E.67})$$

(I, 3)

$$H_{yI,3} = 0.$$

$$\begin{aligned} -\gamma_z^2 H_{xI,3} = & \left[ A_{I,3}^N + A_{I,3}^S \right] H_{yI-1,3} + A_{I,3}^W H_{xI,2} + A_{I,3}^P H_{xI,3} + A_{I,3}^E H_{xI,4} + \\ & + \left[ B_{I,3}^N - B_{I,3}^S \right] H_{yI-1,3}. \end{aligned} \quad (\text{E.68})$$

⋮

(I, J-1)

$$\begin{aligned}
H_{yI,J-1} &= 0. \\
-\gamma_z^2 H_{xI,J-1} &= \left[ A_{I,J-1}^N + A_{I,J-1}^S \right] H_{yI-1,J-1} + A_{I,J-1}^W H_{xI,J-2} + A_{I,J-1}^P H_{xI,J-1} + \\
&\quad + \left[ B_{I,J-1}^N - B_{I,J-1}^S \right] H_{yI-1,J-1}.
\end{aligned} \tag{E.69}$$

(I,J)

$$\begin{aligned}
H_{yI,J} &= 0. \\
H_{xI,J} &= 0.
\end{aligned} \tag{E.70}$$

De forma análoga ao que foi feito para o primeiro grupo, as equações para os pontos da malha (equações (E.46) a (E.70)) (Fig. E.4), podem ser escritas na forma de um problema de autovalores convencional (equação (E.23)), ou seja:

$$[(A) - \lambda(U)](X) = 0. \tag{E.71}$$

Para manter a forma da matriz (A), como bloco tridiagonal, as equações (E.46) a (E.70) são arrumadas, de modo que os coeficientes do vetor (X) e da matriz (A) sejam posicionados como segue:

$$\begin{aligned}
(X) = & (H_{x1,1}, H_{y1,1}, H_{x1,2}, H_{y1,2}, \dots, H_{x1,J}, H_{y1,J}, \\
& H_{x2,1}, H_{y2,1}, H_{x2,2}, H_{y2,2}, \dots, H_{xI,J}, H_{yI,J})^T,
\end{aligned} \tag{E.72}$$

$$(A) = \begin{bmatrix} a_{1,1} & b_{1,1} & a_{1,2} & b_{1,2} & \dots & a_{1,M} & b_{1,M} \\ d_{1,1} & C_{1,1} & d_{1,2} & C_{1,2} & \dots & d_{1,M} & C_{1,M} \\ a_{2,1} & b_{2,1} & a_{2,2} & b_{2,2} & \dots & a_{2,M} & b_{2,M} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ d_{M,1} & C_{M,1} & d_{M,2} & C_{M,2} & \dots & d_{M,M} & c_{M,M} \end{bmatrix}, \tag{E.73}$$

onde  $M = IJ$ , e os coeficientes  $a_{ij}$ ,  $b_{ij}$ ,  $C_{ij}$  e  $d_{ij}$  são obtidos diretamente das equações (E.46) a (E.70), como segue.

Das equações (E.46), conclui-se que:

$$C_{1,m} = 0; \text{ para todos os valores de } m.$$

$$d_{1,m} = 0; \text{ para todos os valores de } m.$$

$$a_{1,m} = 0; \text{ para todos os valores de } m.$$

$$b_{1,m} = 0; \text{ para todos os valores de } m.$$

Das equações (E.47), obtém-se:

$$C_{2,m} = 0; \text{ para todos os valores de } m.$$

$$d_{2,m} = 0; \text{ para todos os valores de } m.$$

$a_{2,2} = A_{1,2}^P$ ,  $a_{2,3} = A_{1,2}^E$ ,  $a_{2,J+2} = A_{1,2}^N + A_{1,2}^S$ , os demais valores de  $a_{2,m}$  são iguais a zero.

$$b_{2,J+2} = B_{1,2}^S - B_{1,2}^N; \text{ os demais valores de } b_{2,m} \text{ são iguais a zero.}$$

Das equações (E.48), obtém-se:

$$C_{3,m} = 0; \text{ para todos os valores de } m.$$

$$d_{3,m} = 0; \text{ para todos os valores de } m.$$

$a_{3,2} = A_{1,3}^W$ ,  $a_{3,3} = A_{1,3}^P$ ,  $a_{3,4} = A_{1,3}^E$ ,  $a_{3,J+3} = A_{1,3}^N + A_{1,3}^S$ , os demais valores de  $a_{3,m}$  são iguais a zero.

$$b_{3,J+3} = B_{1,3}^S - B_{1,3}^N; \text{ os demais valores de } b_{3,m} \text{ são iguais a zero.}$$

Das equações (E.49), obtém-se:

$$C_{J-1,m} = 0; \text{ para todos os valores de } m.$$

$$d_{J-1,m} = 0; \text{ para todos os valores de } m.$$

$a_{J-1,J-2} = A_{1,J-1}^W$ ,  $a_{J-1,J-1} = A_{1,J-1}^P$ ,  $a_{J-1,2J-1} = A_{1,J-1}^N + A_{1,J-1}^S$ ; os demais valores de  $a_{J-1,m}$  são iguais a zero.

$b_{J-1,2J-1} = B_{1,J-1}^S - B_{1,J-1}^N$ ; os demais valores de  $b_{J-1,m}$  são iguais a zero.

Das equações (E.50), conclui-se que:

$$C_{J,m} = 0; \text{ para todos os valores de } m.$$

$$d_{J,m} = 0; \text{ para todos os valores de } m.$$

$$a_{J,m} = 0; \text{ para todos os valores de } m.$$

$$b_{J,m} = 0; \text{ para todos os valores de } m.$$

Das equações (E.51), obtém-se:

$C_{J+1,J+1} = C_{2,1}^P$ ,  $C_{J+1,J+2} = C_{2,1}^W + C_{2,1}^E$ ,  $C_{J+1,2J+1} = C_{2,1}^S$ ; os demais valores de  $C_{J+1,m}$  são iguais a zero.

$d_{J+1,J+2} = D_{2,1}^E - D_{2,1}^W$ ; os demais valores de  $d_{J+1,m}$  são iguais a zero.

$$a_{J+1,m} = 0; \text{ para todos os valores de } m.$$

$$b_{J+1,m} = 0; \text{ para todos os valores de } m.$$

Das equações (E.52), obtém-se:

$C_{J+2,J+1} = C_{2,2}^W$ ,  $C_{J+2,J+2} = C_{2,2}^P$ ,  $C_{J+2,J+3} = C_{2,2}^E$ ,  $C_{J+2,2J+2} = C_{2,2}^S$ ; os demais valores de  $C_{J+2,m}$  são iguais a zero.

$d_{J+2,2} = D_{2,2}^N$ ,  $d_{J+2,J+2} = D_{2,2}^P$ ,  $d_{J+2,J+3} = D_{2,2}^E$ ,  $d_{J+2,2J+2} = D_{2,2}^S$ ; os demais valores de  $d_{J+2,m}$  são iguais a zero.

$a_{J+2,2} = A_{2,2}^N$ ,  $a_{J+2,J+2} = A_{2,2}^P$ ,  $a_{J+2,J+3} = A_{2,2}^E$ ,  $a_{J+2,2J+2} = A_{2,2}^S$ ; os demais valores de  $a_{J+2,m}$  são iguais a zero.

$b_{J+2,J+1} = B_{2,2}^W$ ,  $b_{J+2,J+2} = B_{2,2}^P$ ,  $b_{J+2,J+3} = B_{2,2}^E$ ,  $b_{J+2,2J+2} = B_{2,2}^S$ ; os demais valores de  $b_{J+2,m}$  são iguais a zero.

Das equações (E.53), obtém-se:

$C_{J+3,J+2} = C_{2,3}^W$ ,  $C_{J+3,J+3} = C_{2,3}^P$ ,  $C_{J+3,J+4} = C_{2,3}^E$ ,  $C_{J+3,2J+3} = C_{2,3}^S$ ; os demais valores de  $C_{J+3,m}$  são iguais a zero.

$d_{J+3,3} = D_{2,3}^N$ ,  $d_{J+3,J+2} = D_{2,3}^W$ ,  $d_{J+3,J+3} = D_{2,3}^P$ ,  $d_{J+3,J+4} = D_{2,3}^E$ ,  $d_{J+3,2J+3} = D_{2,3}^S$ ; os demais valores de  $d_{J+3,m}$  são iguais a zero.

$a_{J+3,3} = A_{2,3}^N$ ,  $a_{J+3,J+2} = A_{2,3}^W$ ,  $a_{J+3,J+3} = A_{2,3}^P$ ,  $a_{J+3,J+4} = A_{2,3}^E$ ,  $a_{J+3,2J+3} = A_{2,3}^S$ ; os demais valores de  $a_{J+3,m}$  são iguais a zero.

$b_{J+3,J+2} = B_{2,3}^W$ ,  $b_{J+3,J+3} = B_{2,3}^P$ ,  $b_{J+3,J+4} = B_{2,3}^E$ ,  $b_{J+3,2J+3} = B_{2,3}^S$ ; os demais valores de  $b_{J+3,m}$  são iguais a zero.

Das equações (E.54), obtém-se:

$C_{2J-1,2J-2} = C_{2,J-1}^W$ ,  $C_{2J-1,2J-1} = C_{2,J-1}^P$ ,  $C_{2J-1,2J} = C_{2,J-1}^E$ ,  $C_{2J-1,3J-1} = C_{2,J-1}^S$ ; os demais valores de  $C_{2J-1,m}$  são iguais a zero.

$d_{2J-1,J-1} = D_{2,J-1}^N$ ,  $d_{2J-1,2J-2} = D_{2,J-1}^W$ ,  $d_{2J-1,2J-1} = D_{2,J-1}^P$ ,  $d_{2J-1,3J-1} = D_{2,J-1}^S$ ; os demais valores de  $d_{2J-1,m}$  são iguais a zero.

$a_{2J-1,J-1} = A_{2,J-1}^N$ ,  $a_{2J-1,2J-2} = A_{2,J-1}^W$ ,  $a_{2J-1,2J-1} = A_{2,J-1}^P$ ,  $a_{2J-1,3J-1} = A_{2,J-1}^S$ ; os demais valores de  $a_{2J-1,m}$  são iguais a zero.

$b_{2J-1,2J-2} = B_{2,J-1}^W$ ,  $b_{2J-1,2J-1} = B_{2,J-1}^P$ ,  $b_{2J-1,2J} = B_{2,J-1}^E$ ,  $b_{2J-1,3J-1} = B_{2,J-1}^S$ ; os demais valores de  $b_{2J-1,m}$  são iguais a zero.

Das equações (E.55), obtém-se:

$C_{2J,2J-1} = C_{2,J}^W + C_{2,J}^E$ ,  $C_{2J,2J} = C_{2,J}^P$ ,  $C_{2J,3J} = C_{2,J}^S$ ; os demais valores de  $C_{2J,m}$  são iguais a zero.

$d_{2J,2J-1} = D_{2,J}^W - D_{2,J}^E$ ; os demais valores de  $d_{2J,m}$  são iguais a zero.

$a_{2J,m} = 0$ ; para todos os valores de  $m$ .

$b_{2J,m} = 0$ ; para todos os valores de  $m$ .

Das equações (E.56), obtém-se:

$C_{2J+1,J+1} = C_{3,1}^N$ ,  $C_{2J+1,2J+1} = C_{3,1}^P$ ,  $C_{2J+1,2J+2} = C_{3,1}^W + C_{3,1}^E$ ,  
 $C_{2J+1,3J+1} = C_{3,1}^S$ ; os demais valores de  $C_{2J+1,m}$  são iguais a zero.

$d_{2J+1,2J+2} = D_{3,1}^E - D_{3,1}^W$ ; os demais valores de  $d_{2J+1,m}$  são iguais a zero.

$a_{2J+1,m} = 0$ ; para todos os valores de  $m$ .

$b_{2J+1,m} = 0$ ; para todos os valores de  $m$ .

Das equações (E.57), obtém-se

$C_{2J+2,J+2} = C_{3,2}^N$ ,  $C_{2J+2,2J+1} = C_{3,2}^W$ ,  $C_{2J+2,2J+2} = C_{3,2}^P$ ,  $C_{2J+2,2J+3} = C_{3,2}^E$ ,  
 $C_{2J+2,3J+2} = C_{3,2}^S$ ; os demais valores de  $C_{2J+2,m}$  são iguais a zero.

$d_{2J+2,J+2} = D_{3,2}^N$ ,  $d_{2J+2,2J+2} = D_{3,2}^P$ ,  $d_{2J+2,2J+3} = D_{3,2}^E$ ,  $d_{2J+2,3J+2} = D_{3,2}^S$ ;  
os demais valores de  $d_{2J+2,m}$  são iguais a zero.

$a_{2J+2,J+2} = A_{3,2}^N$ ,  $a_{2J+2,2J+2} = A_{3,2}^P$ ,  $a_{2J+2,2J+3} = A_{3,2}^E$ ,  
 $a_{2J+2,3J+2} = A_{3,2}^S$ ; os demais valores de  $a_{2J+2,m}$  são iguais a zero.

$b_{2J+2,J+2} = B_{3,2}^N$ ,  $b_{2J+2,2J+1} = B_{3,2}^W$ ,  $b_{2J+2,2J+2} = B_{3,2}^P$ ,  $b_{2J+2,2J+3} = B_{3,2}^E$ ,  
 $b_{2J+2,3J+2} = B_{3,2}^S$ ; os demais valores de  $b_{2J+2,m}$  são iguais a zero.

Das equações (E.58), obtém-se

$$\begin{aligned}
& C_{2J+3,J+3} = C_{3,3}^N, \quad C_{2J+3,2J+2} = C_{3,3}^W, \quad C_{2J+3,2J+3} = C_{3,3}^P, \quad C_{2J+3,2J+4} = \\
= C_{3,3}^E, \quad C_{2J+3,3J+3} = C_{3,3}^S; \text{ os demais valores de } C_{2J+3,m} \text{ são iguais a zero.} \\
& d_{2J+3,J+3} = D_{3,3}^N, \quad d_{2J+3,2J+2} = D_{3,3}^W, \quad d_{2J+3,2J+3} = D_{3,3}^P, \quad d_{2J+3,2J+4} = \\
= D_{3,3}^E, \quad d_{2J+3,3J+3} = D_{3,3}^S; \text{ os demais valores de } d_{2J+3,m} \text{ são iguais a zero.} \\
& a_{2J+3,J+3} = A_{3,3}^N, \quad a_{2J+3,2J+2} = A_{3,3}^W, \quad a_{2J+3,2J+3} = A_{3,3}^P, \quad a_{2J+3,2J+4} = \\
= A_{3,3}^E, \quad a_{2J+3,3J+3} = A_{3,3}^S; \text{ os demais valores de } a_{2J+3,m} \text{ são iguais a zero.} \\
& b_{2J+3,J+3} = B_{3,3}^N, \quad b_{2J+3,2J+2} = B_{3,3}^W, \quad b_{2J+3,2J+3} = B_{3,3}^P, \quad b_{2J+3,2J+4} = \\
= B_{3,3}^E, \quad b_{2J+3,3J+3} = B_{3,3}^S; \text{ os demais valores de } b_{2J+3,m} \text{ são iguais a zero.}
\end{aligned}$$

Das equações (E.59), obtém-se

$$\begin{aligned}
& C_{3J-1,2J-1} = C_{3,J-1}^N, \quad C_{3J-1,3J-2} = C_{3,J-1}^W, \quad C_{3J-1,3J-1} = C_{3,J-1}^P, \\
C_{3J-1,3J} = C_{3,J-1}^E, \quad C_{3J-1,4J-1} = C_{3,J-1}^S; \text{ os demais valores de } C_{3J-1,m} \text{ são iguais} \\
\text{a zero.} \\
& d_{3J-1,2J-1} = D_{3,J-1}^N, \quad d_{3J-1,3J-2} = D_{3,J-1}^W, \quad d_{3J-1,3J-1} = D_{3,J-1}^P, \\
d_{3J-1,3J} = D_{3,J-1}^S; \text{ os demais valores de } d_{3J-1,m} \text{ são iguais a zero.} \\
& a_{3J-1,2J-1} = A_{3,J-1}^N, \quad a_{3J-1,3J-2} = A_{3,J-1}^W, \quad a_{3J-1,3J-1} = A_{3,J-1}^P, \\
a_{3J-1,3J} = A_{3,J-1}^S; \text{ os demais valores de } a_{3J-1,m} \text{ são iguais a zero.} \\
& b_{3J-1,2J-1} = B_{3,J-1}^N, \quad b_{3J-1,3J-2} = B_{3,J-1}^W, \quad b_{3J-1,3J-1} = B_{3,J-1}^P, \\
b_{3J-1,3J} = B_{3,J-1}^E, \quad b_{3J-1,4J-1} = B_{3,J-1}^S; \text{ os demais valores de } b_{3J-1,m} \text{ são iguais} \\
\text{a zero.}
\end{aligned}$$

Das equações (E.60), obtém-se:

$$\begin{aligned}
& C_{3J,2J} = C_{3,J}^N, \quad C_{3J,3J-1} = C_{3,J}^W + C_{3,J}^E, \quad C_{3J,3J} = C_{3,J}^P, \quad C_{3J,4J} = C_{3,J}^S; \\
\text{os demais valores de } C_{3J,m} \text{ são iguais a zero.} \\
& d_{3J,3J-1} = D_{3,J}^W - D_{3,J}^E; \text{ os demais valores de } d_{3J,m} \text{ são iguais a zero.} \\
& a_{3J,m} = 0; \text{ para todos os valores de } m.
\end{aligned}$$

$b_{3J,m} = 0$ ; para todos os valores de  $m$ .

Das equações (E.61), obtém-se:

$$C_{(I-2)J+1,(I-3)J+1} = C_{I-1,1}^N, \quad C_{(I-2)J+1,(I-2)J+1} = C_{I-1,1}^P$$

$$C_{(I-2)J+1,(I-2)J+2} = C_{I-1,1}^W + C_{I-1,1}^E; \text{ os demais valores de } C_{(I-2)J+1,m} \text{ são iguais a zero.}$$

$$d_{(I-2)J+1,(I-2)J+2} = D_{I-1,1}^E - D_{I-1,1}^W; \text{ os demais valores de } d_{(I-2)J+1,m} \text{ são iguais a zero.}$$

$a_{(I-2)J+1,(I-2)J+2} = 0$ ; para todos os valores de  $m$ .

$b_{(I-2)J+1,(I-2)J+2} = 0$ ; para todos os valores de  $m$ .

Das equações (E.62), obtém-se:

$$C_{(I-2)J+2,(I-3)J+2} = C_{I-1,2}^N, \quad C_{(I-2)J+2,(I-2)J+1} = C_{I-1,2}^W$$

$$C_{(I-2)J+2,(I-2)J+2} = C_{I-1,2}^P, \quad C_{(I-2)J+2,(I-2)J+3} = C_{I-1,2}^E; \text{ os demais valores de } C_{(I-2)J+2,m} \text{ são iguais a zero.}$$

$$d_{(I-2)J+2,(I-3)J+2} = D_{I-1,2}^N, \quad d_{(I-2)J+2,(I-2)J+2} = D_{I-1,2}^P$$

$$d_{(I-2)J+2,(I-2)J+3} = D_{I-1,2}^E, \quad d_{(I-2)J+2,(I-1)J+2} = D_{I-1,2}^S; \text{ os demais valores de } d_{(I-2)J+2,m} \text{ são iguais a zero.}$$

$$a_{(I-2)J+2,(I-3)J+2} = A_{I-1,2}^N, \quad a_{(I-2)J+2,(I-2)J+2} = A_{I-1,2}^P$$

$$a_{(I-2)J+2,(I-2)J+3} = A_{I-1,2}^E, \quad a_{(I-2)J+2,(I-1)J+2} = A_{I-1,2}^S; \text{ os demais valores de } a_{(I-2)J+2,m} \text{ são iguais a zero.}$$

$$b_{(I-2)J+2,(I-3)J+2} = B_{I-1,2}^N, \quad b_{(I-2)J+2,(I-2)J+1} = B_{I-1,2}^W$$

$$b_{(I-2)J+2,(I-2)J+2} = B_{I-1,2}^P, \quad b_{(I-2)J+2,(I-2)J+3} = B_{I-1,2}^E; \text{ os demais valores de } b_{(I-2)J+2,m} \text{ são iguais a zero.}$$

Das equações (E.63), obtém-se:

$$\begin{aligned}
C_{(I-2)J+3,(I-3)J+3} &= C_{I-1,3}^N, & C_{(I-2)J+3,(I-2)J+2} &= C_{I-1,3}^W, \\
C_{(I-2)J+3,(I-2)J+3} &= C_{I-1,3}^P, & C_{(I-2)J+3,(I-2)J+4} &= C_{I-1,3}^E; \text{ os demais valores de} \\
C_{(I-2)J+3,m} &\text{ são iguais a zero.} \\
d_{(I-2)J+3,(I-3)J+3} &= D_{I-1,3}^N, & d_{(I-2)J+3,(I-2)J+2} &= D_{I-1,3}^W, \\
d_{(I-2)J+3,(I-2)J+3} &= D_{I-1,3}^P, & d_{(I-2)J+3,(I-2)J+4} &= D_{I-1,3}^E, & d_{(I-2)J+3,(I-1)J+3} &= \\
&= D_{I-1,3}^S; \text{ os demais valores de } d_{(I-2)J+3,m} \text{ são iguais a zero.} \\
a_{(I-2)J+3,(I-3)J+3} &= A_{I-1,3}^N, & a_{(I-2)J+3,(I-2)J+2} &= A_{I-1,3}^W, \\
a_{(I-2)J+3,(I-2)J+3} &= A_{I-1,3}^P, & a_{(I-2)J+3,(I-2)J+4} &= A_{I-1,3}^E, & a_{(I-2)J+3,(I-1)J+3} &= \\
&= A_{I-1,3}^S; \text{ os demais valores de } a_{(I-2)J+3,m} \text{ são iguais a zero.} \\
b_{(I-2)J+3,(I-3)J+3} &= B_{I-1,3}^N, & b_{(I-2)J+3,(I-2)J+2} &= B_{I-1,3}^W, \\
b_{(I-2)J+3,(I-2)J+3} &= B_{I-1,3}^P, & b_{(I-2)J+3,(I-2)J+4} &= B_{I-1,3}^E; \text{ os demais valores de} \\
b_{(I-2)J+3,m} &\text{ são iguais a zero.}
\end{aligned}$$

Das equações (E.64), obtém-se:

$$\begin{aligned}
C_{(I-1)J-1,(I-2)J-1} &= C_{I-1,J-1}^N, & C_{(I-1)J-1,(I-1)J-2} &= C_{I-1,J-1}^W, \\
C_{(I-1)J-1,(I-1)J-1} &= C_{I-1,J-1}^P, & C_{(I-1)J-1,(I-1)J} &= C_{I-1,J-1}^E; \text{ os demais valores de} \\
C_{(I-1)J-1,m} &\text{ são iguais a zero.} \\
d_{(I-1)J-1,(I-2)J-1} &= D_{I-1,J-1}^N, & d_{(I-1)J-1,(I-1)J-2} &= D_{I-1,J-1}^W, \\
d_{(I-1)J-1,(I-1)J-1} &= D_{I-1,J-1}^P, & d_{(I-1)J-1,(I-1)J} &= D_{I-1,J-1}^S; \text{ os demais valores de} \\
d_{(I-1)J-1,m} &\text{ são iguais a zero.} \\
a_{(I-1)J-1,(I-2)J-1} &= A_{I-1,J-1}^N, & a_{(I-1)J-1,(I-1)J-2} &= A_{I-1,J-1}^W, \\
a_{(I-1)J-1,(I-1)J-1} &= A_{I-1,J-1}^P, & a_{(I-1)J-1,(I-1)J} &= A_{I-1,J-1}^S; \text{ os demais valores de} \\
a_{(I-1)J-1,m} &\text{ são iguais a zero.} \\
b_{(I-1)J-1,(I-2)J-1} &= B_{I-1,J-1}^N, & b_{(I-1)J-1,(I-1)J-2} &= B_{I-1,J-1}^W, \\
b_{(I-1)J-1,(I-1)J-1} &= B_{I-1,J-1}^P, & b_{(I-1)J-1,(I-1)J} &= B_{I-1,J-1}^E; \text{ os demais valores de} \\
b_{(I-1)J-1,m} &\text{ são iguais a zero.}
\end{aligned}$$

Das equações (E.65), obtém-se:

$$C_{(I-1)J,(I-2)J} = C_{I-1,J}^N, \quad C_{(I-1)J,(I-1)J-1} = C_{I-1,J}^W + C_{I-1,J}^E,$$

$C_{(I-1)J,(I-1)J} = C_{I-1,J}^P$ ; os demais valores de  $C_{(I-1)J,m}$  são iguais a zero.

$$d_{(I-1)J,(I-1)J-1} = D_{I-1,J}^W - D_{I-1,J}^E;$$
 os demais valores de  $d_{(I-1)J,m}$  são iguais a zero.

$$a_{(I-1)J,m} = 0; \text{ para todos os valores de } m.$$

$$b_{(I-1)J,m} = 0; \text{ para todos os valores de } m.$$

Das equações (E.66), obtém-se

$$C_{(I-1)J+1,m} = 0; \text{ para todos os valores de } m.$$

$$d_{(I-1)J+1,m} = 0; \text{ para todos os valores de } m.$$

$$a_{(I-1)J+1,m} = 0; \text{ para todos os valores de } m.$$

$$b_{(I-1)J+1,m} = 0; \text{ para todos os valores de } m.$$

Das equações (E.67), obtém-se

$$C_{(I-1)J+2,m} = 0; \text{ para todos os valores de } m.$$

$$d_{(I-1)J+2,m} = 0; \text{ para todos os valores de } m.$$

$$a_{(I-1)J+2,(I-2)J+2} = A_{I,2}^N + A_{I,2}^S, \quad a_{(I-1)J+2,(I-1)J+2} = A_{I,2}^P,$$

$$a_{(I-1)J+2,(I-1)J+3} = A_{I,2}^E;$$
 os demais valores de  $a_{(I-1)J+2,m}$  são iguais a zero.

$$b_{(I-1)J+2,(I-2)J+2} = B_{I,2}^N - B_{I,2}^S;$$
 os demais valores de  $b_{(I-1)J+2,m}$  são iguais a zero.

Das equações (E.68), obtém-se

$$C_{(I-1)J+3,m} = 0; \text{ para todos os valores de } m.$$

$$d_{(I-1)J+3,m} = 0; \text{ para todos os valores de } m.$$

$a_{(I-1)J+3,(I-2)J+3} = A_{I,3}^N + A_{I,3}^S$ ,  $a_{(I-1)J+3,(I-1)J+2} = A_{I,3}^W$ ,  
 $a_{(I-1)J+3,(I-1)J+3} = A_{I,3}^P$ ,  $a_{(I-1)J+3,(I-1)J+4} = A_{I,3}^E$ ; os demais valores de  
 $a_{(I-1)J+3,m}$  são iguais a zero.

$b_{(I-1)J+3,(I-2)J+3} = B_{I,3}^N - B_{I,3}^S$ ; os demais valores de  $b_{(I-1)J+3,m}$  são  
 iguais a zero.

Das equações (E.69), obtém-se

$c_{IJ-1,m} = 0$ ; para todos os valores de  $m$ .

$d_{IJ-1,m} = 0$ ; para todos os valores de  $m$ .

$a_{IJ-1,(I-1)J-1} = A_{I,J-1}^N + A_{I,J-1}^S$ ,  $a_{IJ-1,IJ-2} = A_{I,J-1}^W$ ,  $a_{IJ-1,IJ-1} =$   
 $= A_{I,J-1}^P$ ; os demais valores de  $a_{IJ-1,m}$  são iguais a zero.

$b_{IJ-1,(I-1)J-1} = B_{I,J-1}^N - B_{I,J-1}^S$ ; os demais valores de  $b_{IJ-1,m}$  são  
 iguais a zero.

Das equações (E.70), obtém-se

$c_{IJ,m} = 0$ ; para todos os valores de  $m$ .

$d_{IJ,m} = 0$ ; para todos os valores de  $m$ .

$a_{IJ,m} = 0$ ; para todos os valores de  $m$ .

$b_{IJ,m} = 0$ ; para todos os valores de  $m$ ,

onde  $m$  pode assumir os valores  $m = 1, 2, 3, \dots, IJ$ .

Alternativamente, os elementos da matriz (A) podem ser, facilmente, identificados através das seguintes expressões compactadas:

$$A(2i-1 + 2I(j-1), 2i-1 + 2I(j-1)) = \begin{cases} 0 & ; i=1, I \\ A_{j,i}^P & ; \text{para os demais valores de } i \text{ e } j \end{cases} \quad (\text{E.74})$$

$$A(2i-1 + 2I(j-1), 2i-3 + 2I(j-1)) = \begin{cases} 0 & ; i=1,2,I \\ A_{j,i}^W & ; \text{para os demais valores de } i \text{ e } j \end{cases} \quad (\text{E.75})$$

Obs.: A condição de  $i=1$  com  $j=1$ , implica em um ponto fora da matriz, logo, não serve.

$$A(2i-1 + 2I(j-1), 2i+1 + 2I(j-1)) = \begin{cases} 0 & ; i=1,I-1,I \\ A_{j,i}^E & ; \text{para os demais valores de } i \text{ e } j \end{cases} \quad (\text{E.76})$$

Obs.: A condição de  $i=I$  com  $j=J$ , implica em um ponto fora da matriz, logo, não serve.

$$A(2i-1 + 2I(j-1), 2i-1 + 2Ij) = \begin{cases} 0 & ; i=1, I \\ 0 & ; j=J \\ A_{j,i}^N + A_{j,i}^S & ; j=1 \\ A_{j,i}^S & ; \text{para os demais valores de } i \text{ e } j \end{cases} \quad (\text{E.77})$$

OBS.: A condição  $j=J$ , implica em pontos fora da matriz, logo, não serve.

$$A(2i-1 + 2I(j-1), 2i-1 + 2I(j-2)) = \begin{cases} 0 & ; i=1, I \\ A_{j,i}^N + A_{j,i}^S & ; j = J \\ A_{j,i}^N & ; \text{para os demais valores de } i \text{ e } j \end{cases} \quad (\text{E.78})$$

OBS.: A condição  $j=1$ , implica em pontos fora da matriz, logo, não serve.

$$A(2i-1 + 2I(j-1), 2i + 2I(j-1)) = \begin{cases} 0 & ; j=1, J \\ 0 & ; i=1, I \\ B_{j,i}^P & ; \text{para os demais valores de } i \text{ e } j \end{cases} \quad (\text{E.79})$$

$$A(2i-1 + 2I(j-1), 2i + 2 + 2I(j-1)) = \begin{cases} 0 & ; j=1, J \\ 0 & ; i=1, I \\ B_{j,i}^E & ; \text{para os demais valores de } i \text{ e } j \end{cases} \quad (\text{E.80})$$

OBS.: A condição  $i=I$  com  $j=J$ , implica em um ponto fora da matriz, logo, não

serve.

$$A(2i-1 + 2I(j-1), 2i + 2Ij) = \begin{cases} 0 ; j=J-1 \\ 0 ; i=1, I \\ B_{j,i}^S - B_{j,i}^N ; j=1 \\ B_{j,i}^S ; \text{ para os demais valores de } i \text{ e } j \end{cases} \quad (\text{E.81})$$

OBS.: A condição  $j=J$ , implica em pontos fora da matriz, portanto, não serve.

$$A(2i-1 + 2I(j-1), 2i - 2 + 2I(j-1)) = \begin{cases} 0 ; j=1, J \\ 0 ; i=1, I \\ B_{j,i}^W ; \text{ para os demais valores de } i \text{ e } j \end{cases} \quad (\text{E.82})$$

OBS.: A condição  $i=1$  com  $j=1$ , implica em um ponto fora da matriz, logo, não serve.

$$A(2i-1 + 2I(j-1), 2i + 2I(j-2)) = \begin{cases} 0 ; j=2 \\ 0 ; i=1, I \\ B_{j,i}^N - B_{j,i}^S ; j=J \\ B_{j,i}^N ; \text{ para os demais valores de } i \text{ e } j \end{cases} \quad (\text{E.83})$$

OBS.: A condição  $j=1$ , implica em pontos fora da matriz, logo, não serve.

$$A(2i + 2I(j-1), 2i + 2I(j-1)-1) = \begin{cases} 0 ; j=1, J \\ 0 ; i=1, I \\ D_{j,i}^P ; \text{ para os demais valores de } i \text{ e } j \end{cases} \quad (\text{E.84})$$

$$A(2i + 2I(j-1), 2i + 2I(j-1)-3) = \begin{cases} 0 ; j=1, J \\ 0 ; i=1, 2 \\ D_{j,i}^W ; \text{ para os demais valores de } i \text{ e } j \end{cases} \quad (\text{E.85})$$

OBS.: A condição  $i=1$  com  $j=1$ , implica em um ponto fora da matriz, logo, não

serve.

$$A(2i + 2I(j-1), 2i-1 + 2I(j-2)) = \begin{cases} 0 & ; j=1, J \\ 0 & ; i=1, I \\ D_{j,i}^N & ; \text{para os demais valores de } i \text{ e } j \end{cases} \quad (\text{E.86})$$

OBS.: A condição  $j=1$ , implica em pontos fora da matriz, logo, não serve.

$$A(2i + 2I(j-1), 2i + 2I(j-1)+1) = \begin{cases} 0 & ; j=1, J \\ 0 & ; i=I-1, I \\ D_{j,i}^E - D_{j,i}^W & ; i=1 \\ D_{j,i}^E & ; \text{para os demais valores de } i \text{ e } j \end{cases} \quad (\text{E.87})$$

OBS.: A condição  $i=I$  com  $j=J$ , implica em um ponto fora da matriz, portanto, não serve.

$$A(2i + 2I(j-1), 2i - 1 + 2Ij) = \begin{cases} 0 & ; j=1, J \\ 0 & ; i=1, I \\ D_{j,i}^S & ; \text{para os demais valores de } i \text{ e } j \end{cases} \quad (\text{E.88})$$

OBS.: A condição  $j=J$ , implica em pontos fora da matriz, logo, não deve ser usada.

$$A(2i + 2I(j-1), 2i + 2I(j-1)) = \begin{cases} 0 & ; i=1, J \\ C_{j,i}^P & ; \text{para os demais valores de } i \text{ e } j \end{cases} \quad (\text{E.89})$$

$$A(2i + 2I(j-1), 2i + 2I(j-1)+2) = \begin{cases} 0 & ; j=1, J \\ 0 & ; i=I \\ C_{j,i}^W + C_{j,i}^E & ; i=1 \\ C_{j,i}^E & ; \text{para os demais valores de } i \text{ e } j \end{cases} \quad (\text{E.90})$$

OBS.: A condição  $i=I$  com  $j=J$ , implica em um ponto fora da matriz, portanto, não serve.

$$A(2i + 2l(j-1), 2i + 2lj) = \begin{cases} 0 & ; j=1, J-1 \\ C_{j,i}^S & ; \text{para os demais valores de } i \text{ e } j \end{cases} \quad (\text{E.91})$$

OBS.: A condição  $j=J$ , implica em pontos fora da matriz, logo, não serve.

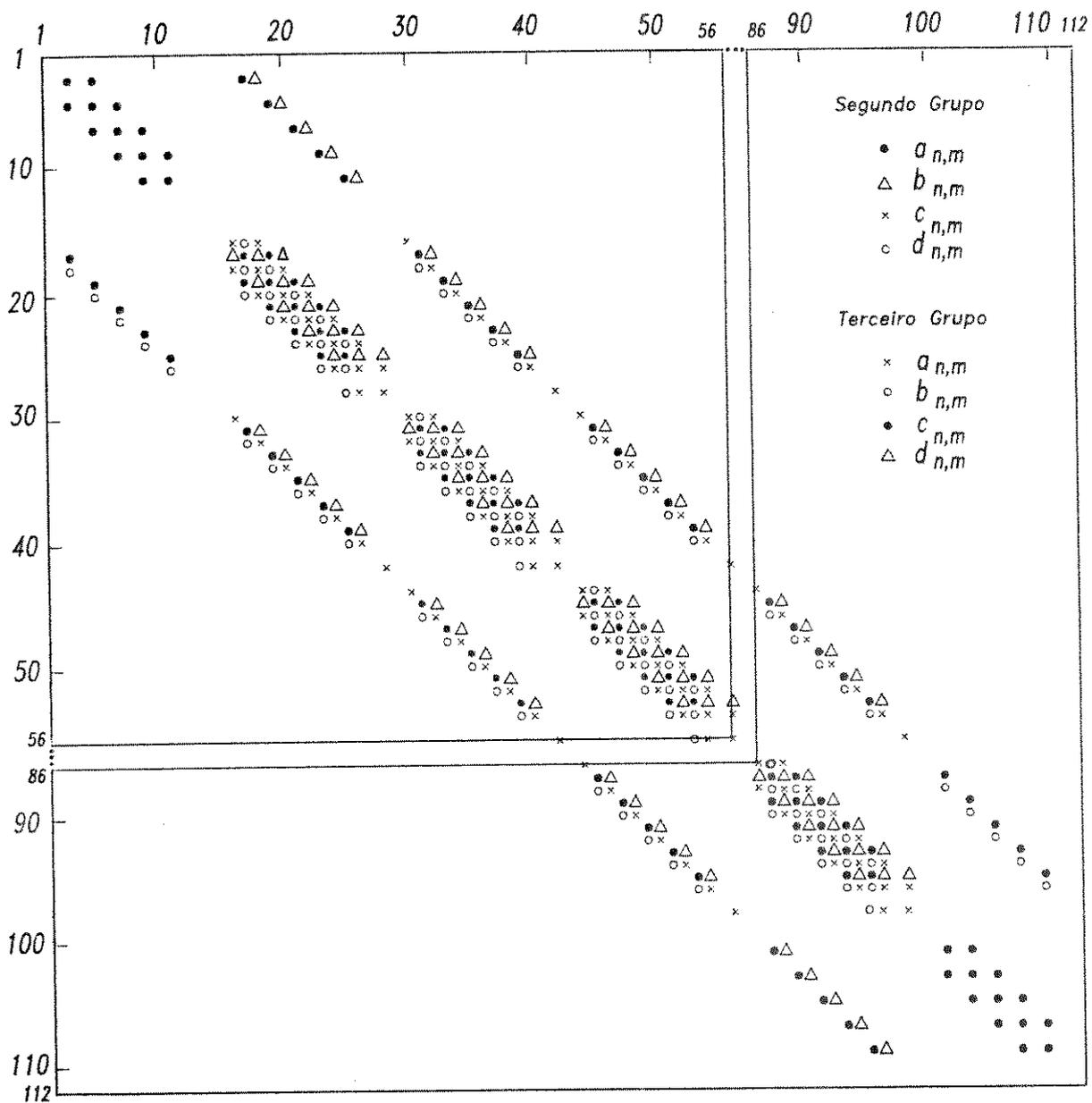
$$A(2i + 2l(j-1), 2i-2 + 2(j-1)l) = \begin{cases} 0 & ; j=1, J \\ 0 & ; i=1 \\ C_{j,i}^W + C_{j,i}^E & ; i=I \\ C_{j,i}^W & ; \text{para os demais valores de } i \text{ e } j \end{cases} \quad (\text{E.92})$$

OBS.: A condição  $i=1$  com  $j=1$ , implica em um ponto fora da matriz, portanto, não serve.

$$A(2i + 2l(j-1), 2i + 2l(j-2)) = \begin{cases} 0 & ; j=2, J \\ C_{j,i}^N & ; \text{para os demais valores de } i \text{ e } j \end{cases} \quad (\text{E.93})$$

OBS.: A condição  $j=1$ , implica em pontos fora da matriz, logo, não serve.

A matriz (A), assim obtida, é mostrada na Fig. E.5.



E.5 - Estrutura rearranjada da matriz (A) para o segundo e terceiro grupos.

### 1.3. TERCEIRO GRUPO

No terceiro grupo, conforme definição na seção 2.3.2, todas as paredes que limitam a região em análise são magnéticas (Fig. E.6). Ou seja, são duais às respectivas paredes usadas na definição do segundo grupo (Fig. E.4). Com isto, a aplicação das equações (2.35) e (2.36) para cada ponto P da malha da Fig. E.6, resultará em equações, também, duais àquelas obtidas para o segundo grupo (equações (E.46) a (E.70)). Conseqüentemente, o vetor (X) é obtido da equação (E.72), pela simples permutação de x e y, resultando:

$$(X) = \left( H_{y1,1}, H_{x1,1}, H_{y1,2}, H_{x1,2}, \dots, H_{y1,J}, H_{x1,J}, H_{y2,1}, H_{x2,1}, \right. \\ \left. H_{y2,2}, H_{x2,2}, \dots, H_{yI,J}, H_{xI,J} \right)^T \quad (E.94)$$

e, a matriz (A), é obtida substituindo-se a por C, b por d, C por a e d por b, resultando:

$$(A) = \begin{bmatrix} C_{1,1} & d_{1,1} & C_{1,2} & d_{1,2} & \dots & C_{1,M} & d_{1,M} \\ b_{1,1} & a_{1,1} & b_{1,2} & a_{1,2} & \dots & b_{1,M} & a_{1,M} \\ C_{2,1} & d_{2,1} & C_{2,2} & d_{2,2} & \dots & C_{2,M} & d_{2,M} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ b_{M,1} & a_{M,1} & b_{M,2} & a_{M,2} & \dots & b_{M,M} & a_{M,M} \end{bmatrix}, \quad (E.95)$$

Similarmente, nas equações (E.74) a (E.93), substitui-se A por C, B por D, C por A e D por B, resultando:

$$A(2i-1 + 2I(j-1), 2i-1 + 2I(j-1)) = \begin{cases} 0 & ; j=1, I \\ C_{j,i}^P & ; \text{para os demais valores de } i \text{ e } j \end{cases} \quad (E.96)$$

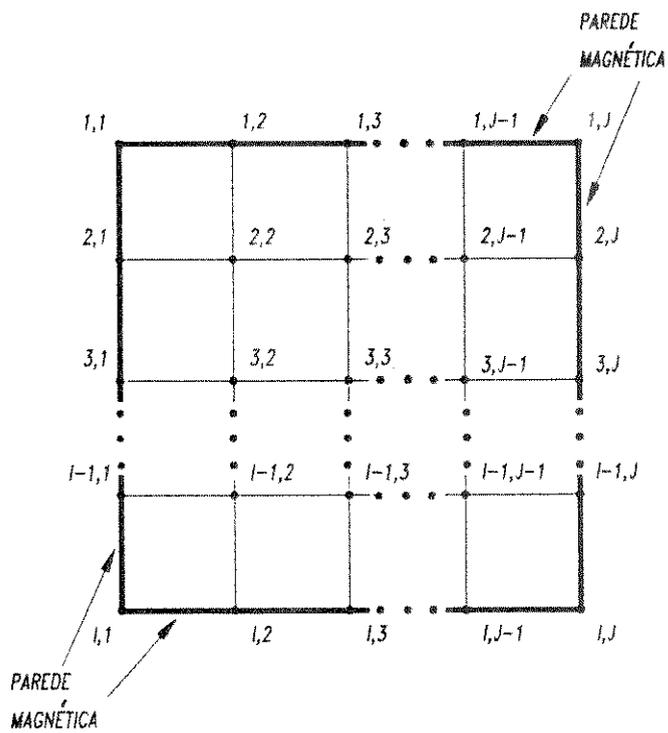


Fig. E.6. Malha gradual de pontos  $(i, j)$  ( $i=1, 2, \dots, I$  e  $j=1, 2, \dots, J$ ) para o terceiro grupo.

$$A(2i-1 + 2I(j-1), 2i-3 + 2I(j-1)) = \begin{cases} 0 & ; j=1,2,I \\ C_{j,i}^W & ; \text{para os demais valores de } i \text{ e } j \end{cases} \quad (\text{E.97})$$

OBS.: A condição  $i=1$  quando  $j=1$ , implica em um ponto fora da matriz, logo, não serve.

$$A(2i-1 + 2I(j-1), 2i+1 + 2I(j-1)) = \begin{cases} 0 & ; i=1,I-1,I \\ C_{j,i}^E & ; \text{para os demais valores de } i \text{ e } j \end{cases} \quad (\text{E.98})$$

OBS.: A condição  $i=I$  quando  $j=J$ , implica em pontos fora da matriz, logo, não serve.

$$A(2i-1 + 2I(j-1), 2i-1 + 2Ij) = \begin{cases} 0 & ; i=1, I \\ C_{j,i}^N + C_{j,i}^S & ; j=1 \\ C_{j,i}^S & ; \text{para os demais valores de } i \text{ e } j \end{cases} \quad (\text{E.99})$$

OBS.: A condição  $j=J$ , implica em pontos fora da matriz, logo, não serve.

$$A(2i-1 + 2I(j-1), 2i-1 + 2I(j-2)) = \begin{cases} 0 & ; i=1, I \\ C_{j,i}^N + C_{j,i}^S & ; j=J \\ C_{j,i}^N & ; \text{para os demais valores de } i \text{ e } j \end{cases} \quad (\text{E.100})$$

OBS.: A condição  $j=1$ , implica em pontos fora da matriz, logo, não serve.

$$A(2i-1 + 2I(j-1), 2i + 2I(j-1)) = \begin{cases} 0 & ; j=1, J \\ 0 & ; i=1, I \\ D_{j,i}^P & ; \text{para os demais valores de } i \text{ e } j \end{cases} \quad (\text{E.101})$$

$$A(2i-1 + 2I(j-1), 2i+2 + 2I(j-1)) = \begin{cases} 0 & ; i=1, J \\ 0 & ; i=1, I \\ D_{j,i}^E & ; \text{para os demais valores de } i \text{ e } j \end{cases} \quad (\text{E.102})$$

OBS.: A condição  $i=I$  quando  $j=J$ , implica em um ponto fora da matriz, logo,

não serve.

$$A(2i-1 + 2I(j-1), 2i + 2Ij) = \begin{cases} 0 ; j=J-1 \\ 0 ; i=1, I \\ D_{j,i}^S - D_{j,i}^N ; j=1 \\ D_{j,i}^S ; \text{ para os demais valores de } i \text{ e } j \end{cases} \quad (\text{E.103})$$

OBS.: A condição  $j=J$ , implica em pontos fora da matriz, logo, não serve.

$$A(2i-1 + 2I(j-1), 2i-2 + 2I(j-1)) = \begin{cases} 0 ; j=1, J \\ 0 ; i=1, I \\ D_{j,i}^W ; \text{ para os demais valores de } i \text{ e } j \end{cases} \quad (\text{E.104})$$

OBS.: A condição  $i=1$  quando  $j=1$ , implica em um ponto fora da matriz, logo, não serve.

$$A(2i-1 + 2I(j-1), 2i + 2I(j-2)) = \begin{cases} 0 ; j=2 \\ 0 ; i=1, I \\ D_{j,i}^N - D_{j,i}^S ; j=J \\ D_{j,i}^N ; \text{ para os demais valores de } i \text{ e } j \end{cases} \quad (\text{E.105})$$

OBS.: A condição  $j=1$ , implica em pontos fora da matriz, logo, não serve.

$$A(2i + 2I(j-1), 2i-1 + 2I(j-1)) = \begin{cases} 0 ; j=1, J \\ 0 ; i=1, I \\ B_{j,i}^P ; \text{ para os demais valores de } i \text{ e } j \end{cases} \quad (\text{E.106})$$

$$A(2i + 2I(j-1), 2i-3 + 2I(j-1)) = \begin{cases} 0 ; j=1, J \\ 0 ; i=1, 2 \\ B_{j,i}^W ; \text{ para os demais valores de } i \text{ e } j \end{cases} \quad (\text{E.107})$$

OBS.: A condição  $i=1$  com  $j=1$ , implica em um ponto fora da matriz, logo não serve.

$$A(2i + 2I(j-1), 2i-1 + 2I(j-2)) = \begin{cases} 0 & ; j=1, J \\ 0 & ; i=1, I \\ B_{j,i}^N & ; \text{para os demais valores de } i \text{ e } j \end{cases} \quad (\text{E.108})$$

OBS.: A condição  $j=1$ , implica em pontos fora da matriz, logo, não serve.

$$A(2i + 2I(j-1), 2i+1 + 2I(j-1)) = \begin{cases} 0 & ; j=1, J \\ 0 & ; i=I-1, I \\ B_{j,i}^E - B_{j,i}^W & ; i=1 \\ B_{j,i}^E & ; \text{para os demais valores de } i \text{ e } j \end{cases} \quad (\text{E.109})$$

OBS.: A condição  $i=I$  com  $j=J$ , implica em um ponto fora da matriz, logo, não serve.

$$A(2i + 2I(j-1), 2i-1 + 2Ij) = \begin{cases} 0 & ; j=1, J \\ 0 & ; i=1, I \\ B_{j,i}^S & ; \text{para os demais valores de } i \text{ e } j \end{cases} \quad (\text{E.110})$$

OBS.: A condição  $j=J$ , implica em pontos fora da matriz, logo, não serve.

$$A(2i + 2I(j-1), 2i + 2I(j-1)) = \begin{cases} 0 & ; j=1, J \\ A_{j,i}^P & ; \text{para os demais valores de } i \text{ e } j \end{cases} \quad (\text{E.111})$$

$$A(2i + 2I(j-1), 2i + 2I(j-1)+2) = \begin{cases} 0 & ; j=1, J \\ 0 & ; i=I \\ A_{j,i}^W + A_{j,i}^E & ; i=1 \\ A_{j,i}^E & ; \text{para os demais valores de } i \text{ e } j \end{cases} \quad (\text{E.112})$$

OBS.: A condição  $i=I$  com  $j=J$ , implica em um ponto fora da matriz, logo, não serve.

$$A(2i + 2I(j-1), 2i + 2Ij) = \begin{cases} 0 & ; j=1, J-1 \\ A_{j,i}^S & ; \text{para os demais valores de } i \text{ e } j \end{cases} \quad (\text{E.113})$$

OBS.: A condição  $j=J$ , implica em pontos fora da matriz, logo, não serve.

$$A(2i + 2I(j-1), 2i-2 + 2I(j-1)) = \begin{cases} 0 & ; j=1, J \\ 0 & ; i=1 \\ A_{j,i}^W + A_{j,i}^E & ; i=I \\ A_{j,i}^W & ; \text{para os demais valores de } i \text{ e } j \end{cases} \quad (\text{E.114})$$

OBS.: A condição  $i=1$  com  $j=1$ , implica em um ponto fora da matriz, logo, não serve.

$$A(2i + 2I(j-1), 2i + 2I(j-2)) = \begin{cases} 0 & ; j=2, J \\ A_{j,i}^N & ; \text{para os demais valores de } i \text{ e } j \end{cases} \quad (\text{E.115})$$

OBS.: A condição  $j=1$ , implica em pontos fora da matriz, logo, não serve.

A matriz (A) é mostrada na Fig. E.5, considerando-se  $I=7$  e  $J=8$ .

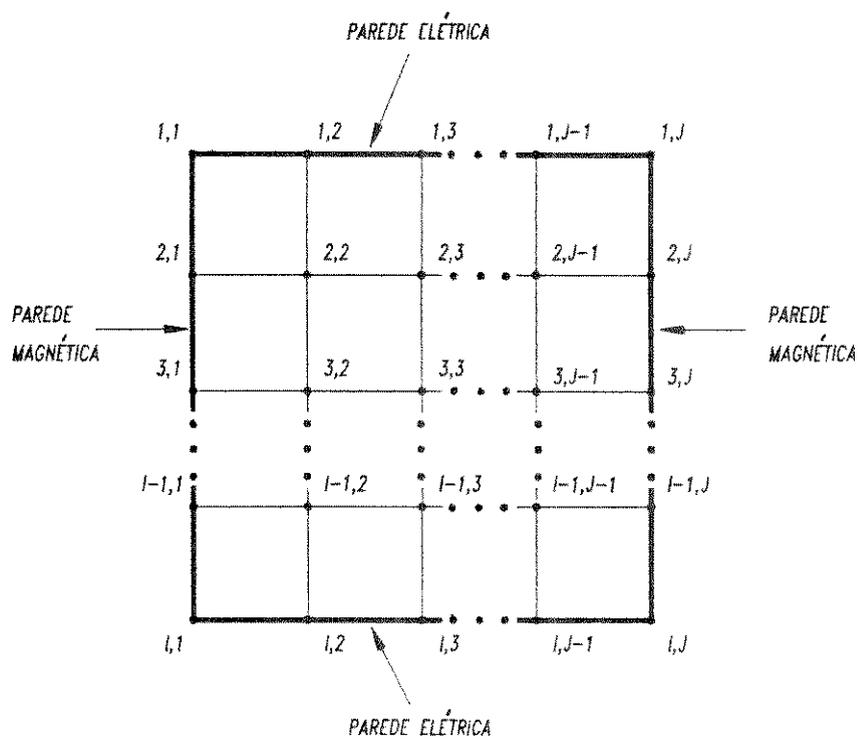


Fig. E.7 - Malha gradual de pontos  $(i,j)$  ( $i=1,2,\dots,I$  e  $j=1,2,\dots,J$ ) para o quarto grupo.

#### 1.4. QUARTO GRUPO

No quarto grupo, como definido na seção 2.3.2, as paredes que limitam a região em análise (Fig. E.7), são duais, respectivamente, àquelas usadas na definição do primeiro grupo (Fig. E.2). Desta forma, a aplicação das equações (2.35) e (2.36) para cada ponto P da malha gradual de pontos (Fig. E.7), resultará em equações, também, duais àquelas obtidas para o primeiro grupo (equações (E.1) a (E.21)). Com isto, o vetor (X) é obtido da equação (E.24), pela simples permutação de x e y, ou seja:

$$(X) = \left( H_{x1,1}, H_{y1,1}, H_{x1,2}, H_{y1,2}, \dots, H_{x1,J}, H_{y1,J}, H_{x2,1}, H_{y2,1}, \right. \\ \left. H_{x2,2}, H_{y2,2}, \dots, H_{xI,J}, H_{yI,J} \right)^T \quad (E.116)$$

e, a matriz (A), é obtida substituindo-se C por a, d por b, b por d e a por C, na equação (E.25), resultando em:

$$(A) = \begin{bmatrix} a_{1,1} & b_{1,1} & a_{1,2} & b_{1,2} & \dots & a_{1,M} & b_{1,M} \\ d_{1,1} & C_{1,1} & d_{1,2} & C_{1,2} & \dots & d_{1,M} & C_{1,M} \\ a_{2,1} & b_{2,1} & a_{2,2} & b_{2,2} & \dots & a_{2,M} & b_{2,M} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ d_{M,1} & C_{M,1} & d_{M,2} & C_{M,2} & \dots & d_{M,M} & C_{M,M} \end{bmatrix}, \quad (E.117)$$

Similarmente, nas equações (E.26) a (E.45), substitui-se C por A, D por B, B por D e A por C, o que resulta nas seguintes equações:

$$A(2i-1 + 2I(j-1), 2i+1 + 2I(j-1)) = \begin{cases} 0 & ; i=I \\ A_{j,i}^W + A_{j,i}^E & ; i=1 \\ A_{j,i}^E & ; \text{para os demais valores de } i \text{ e } j \end{cases} \quad (E.118)$$

OBS.: A condição  $i=I$  e  $j=J$ , implica em um ponto fora da matriz, logo, não deve ser usada.

$$A(2i-1 + 2(j-1)I, 2i-1 + 2I(j-1)) = \begin{cases} A_{j,i}^P; & \text{para todos } i \text{ e } j \end{cases} \quad (\text{E.119})$$

$$A(2i-1 + 2I(j-1), 2i-3 + 2(j-1)I) = \begin{cases} 0 & ; i=1 \\ A_{j,i}^W + A_{j,i}^E & ; i=I \\ A_{j,i}^W & ; \text{para os demais valores de } i \text{ e } j \end{cases} \quad (\text{E.120})$$

OBS.: A condição  $i=1$  e  $j=1$ , implica em um ponto fora da matriz, por isso, não deve ser usada.

$$A(2i-1 + 2I(j-1), 2i-1 + 2Ij) = \begin{cases} A_{j,i}^N + A_{j,i}^S & ; j=1 \\ A_{j,i}^S & ; \text{para os demais valores de } i \text{ e } j \end{cases} \quad (\text{E.121})$$

OBS.: A condição  $j=J$ , implica em pontos fora da matriz, logo, não deve ser usada.

$$A(2i-1 + 2I(j-1), 2i-1 + 2I(j-2)) = \begin{cases} A_{j,i}^N + A_{j,i}^S & ; j=J \\ A_{j,i}^N & ; \text{para os demais valores de } i \text{ e } j \end{cases} \quad (\text{E.122})$$

OBS.: A condição  $j=1$ , implica em pontos fora da matriz, por isto, não deve ser usada.

$$A(2i-1 + 2I(j-1), 2i + 2Ij) = \begin{cases} 0 & ; j=J-1 \\ 0 & ; i=1, I \\ B_{j,i}^S - B_{j,i}^N & ; j=1 \\ B_{j,i}^S & ; \text{para os demais valores de } i \text{ e } j \end{cases} \quad (\text{E.123})$$

OBS.: A condição  $j=J$ , implica em um ponto fora da matriz, logo, não deve ser usada.

$$A(2i-1 + 2I(j-1), 2i + 2(j-1)I) = \begin{cases} 0 & ; i=1, J \\ 0 & ; i=1, I \\ B_{j,i}^P & ; \text{para os demais valores de } i \text{ e } j \end{cases} \quad (\text{E.124})$$

$$A(2i-1 + 2I(j-1), 2i+2 + 2(j-1)I) = \begin{cases} 0 & ; j=1, J \\ 0 & ; i=I-1, I \\ B_{j,i}^E - B_{j,i}^W & ; i=1 \\ B_{j,i}^E & ; \text{para os demais valores de } i \text{ e } j \end{cases} \quad (\text{E.125})$$

OBS.: A condição  $i=I$  e  $j=J$ , implica em um ponto fora da matriz, desta forma, não deve ser usada.

$$A(2i-1 + 2I(j-1), 2i-2 + 2I(j-1)) = \begin{cases} 0 & ; j=1, J \\ 0 & ; i=1, 2 \\ B_{j,i}^W - B_{j,i}^E & ; i=I \\ B_{j,i}^W & ; \text{para os demais valores de } i \text{ e } j \end{cases} \quad (\text{E.126})$$

OBS.: A condição  $i=1$  e  $j=1$ , implica em um ponto fora da matriz, logo, não deve ser usada.

$$A(2i-1 + 2I(j-1), 2i+ 2I(j-2)) = \begin{cases} 0 & ; j=2 \\ 0 & ; i=1, I \\ B_{j,i}^N - B_{j,i}^S & ; i=J \\ B_{j,i}^N & ; \text{para os demais valores de } i \text{ e } j \end{cases} \quad (\text{E.127})$$

OBS.: A condição  $j=1$ , implica em pontos fora da matriz, logo, não deve ser usada.

$$A(2i + 2(j-1)I, 2i-3 + 2I(j-1)) = \begin{cases} 0 & ; j=1, J \\ 0 & ; i=1, I \\ D_{j,i}^W & ; \text{para os demais valores de } i \text{ e } j \end{cases} \quad (\text{E.128})$$

OBS.: A condição  $i=1$  e  $j=1$ , implica em um ponto fora da matriz, logo, não serve.

$$A(2i + 2I(j-1), 2i-1 + 2I(j-1)) = \begin{cases} 0 ; j=1, J \\ 0 ; i=1, I \\ D_{j,i}^P ; \text{ para os demais valores de } i \text{ e } j \end{cases} \quad (\text{E.129})$$

$$A(2i + 2(j-1)I, 2i-1 + 2I(j-2)) = \begin{cases} 0 ; j=J \\ 0 ; i=1, I \\ D_{j,i}^N ; \text{ para os demais valores de } i \text{ e } j \end{cases} \quad (\text{E.130})$$

OBS.: A condição  $j=1$ , implica em pontos fora da matriz, logo, não serve.

$$A(2i + 2(j-1)I, 2i-1 + 2Ij) = \begin{cases} 0 ; j=1 \\ 0 ; i=1, I \\ D_{j,i}^S ; \text{ para os demais valores de } i \text{ e } j \end{cases} \quad (\text{E.131})$$

OBS.: A condição  $j=J$ , implica em pontos fora da matriz, logo, não serve.

$$A(2i + 2I(j-1), 2i+1 + 2I(j-1)) = \begin{cases} 0 ; j=1, J \\ 0 ; i=1, I \\ D_{j,i}^E ; \text{ para os demais valores de } i \text{ e } j \end{cases} \quad (\text{E.132})$$

OBS.: A condição  $i=I$  e  $j=J$ , implica em um ponto fora da matriz, logo, não deve ser usada.

$$A(2i + 2(j-1)I, 2i + 2Ij) = \begin{cases} 0 ; j=1, J-1 \\ 0 ; i=1, I \\ C_{j,i}^S ; \text{ para os demais valores de } i \text{ e } j \end{cases} \quad (\text{E.133})$$

OBS.: A condição  $j=J$ , implica em pontos fora da matriz, logo, não serve.

$$A(2i + 2I(j-1), 2i + 2I(j-1)) = \begin{cases} 0 ; j=1, J \\ 0 ; i=1, I \\ C_{j,i}^P ; \text{ para os demais valores de } i \text{ e } j \end{cases} \quad (\text{E.134})$$

$$A(2i + 2I(j-1), 2i+2 + 2I(j-1)) = \begin{cases} 0 ; j=1, J \\ 0 ; i=1, I-1, I \\ C_{j,i}^E ; \text{ para os demais valores de } i \text{ e } j \end{cases} \quad (\text{E.135})$$

OBS.: A condição  $i=I$  e  $j=J$ , implica em um ponto fora da matriz, logo, não serve.

$$A(2i + 2I(j-1), 2i+ 2I(j-2)) = \begin{cases} 0 ; j=2, J \\ 0 ; i=1, I \\ C_{j,i}^N ; \text{ para os demais valores de } i \text{ e } j \end{cases} \quad (\text{E.136})$$

OBS.: A condição  $j=1$ , implica em pontos fora da matriz, logo, não deve ser usada.

$$A(2i + 2I(j-1), 2i-2 + 2I(j-1)) = \begin{cases} 0 ; j=1, J \\ 0 ; i=1, 2, I \\ C_{j,i}^W ; \text{ para os demais valores de } i \text{ e } j \end{cases} \quad (\text{E.137})$$

OBS.: A condição  $i=1$  e  $j=1$ , implica em um ponto fora da matriz, desta forma, não deve ser usada.

A matriz(A) é mostrada na Fig. E.3, para  $I=7$  e  $J=8$ .