

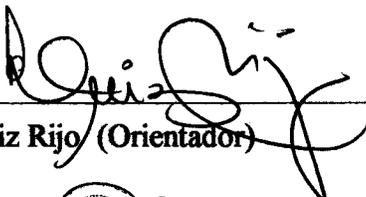
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
CENTRO DE GEOCIÊNCIAS
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM GEOFÍSICA

**MODELAGEM DE PERFIS DE INDUÇÃO NO
DOMÍNIO DO TEMPO POR DIFERENÇAS FINITAS**

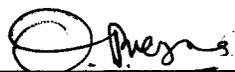
TESE APRESENTADA POR
ANTONIO ADELMO FREIRE BESERRA
COMO REQUISITO PARCIAL À OBTENÇÃO DE GRAU DE
MESTRE EM CIÊNCIAS NA ÁREA DE GEOFÍSICA

Data de Aprovação :

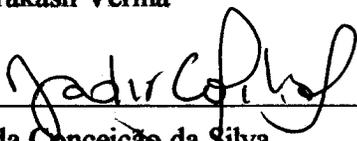
COMITÊ DE TESE:



Dr. Luiz Rijo (Orientador)



Dr. Om Prakash Verma



Dr. Jadir da Conceição da Silva

BELÉM

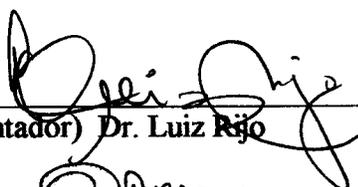
1997

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM GEOFÍSICA

PARECER FINAL DO COMITÊ DE TESE

Após exame minucioso do trabalho intitulado *“MODELAGEM DE PERFIS DE INDUÇÃO NO DOMÍNIO DO TEMPO POR DIFERENÇAS FINITAS”* de autoria de *Antonio Adelmo Freire Beserra*, julgamos que o mesmo preenche satisfatoriamente as condições para uma Tese de Mestrado em Ciências em Geofísica.

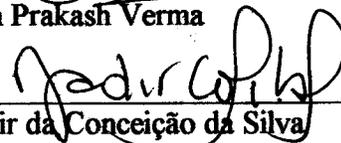
Belém (PA), 07 de janeiro de 1997.



(Orientador) Dr. Luiz Rijo



Dr. Om Prakash Verma



Dr. Jadir da Conceição da Silva

FREIRE BESERRA, Antonio Adelmo. Modelagem de perfis de indução no domínio do tempo por diferenças finitas. Belém, Universidade Federal do Pará. Centro de Geociências, 1996. 30p.

Tese (Mestrado em Geofísica) - Curso de Pós-Graduação em Geofísica, Centro de Geociências, UFPA, 1996.

1. PERFILAGEM DE INDUÇÃO. 2. DOMÍNIO DO TEMPO. 3. DIFERENÇAS FINITAS. I. Título.

Aos meus pais Luiz e Lourdes,
e aos meus irmãos.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, quero agradecer ao Prof. Allen Q. Howard pela orientação de boa parte da tese e ao Prof. Luiz Rijo pela sua orientação na fase final do trabalho.

Aos Drs. Jadir C. da Silva e Om P. Verma, membros da banca examinadora, pelas críticas e sugestões pertinentes.

Ao convênio UFPA/PETROBRÁS/FADESP/FINEP/CNPq, que proporcionou a infraestrutura indispensável ao bom andamento do curso de Pós-graduação.

Aos colegas de curso, pelo companheirismo.

Ao pessoal das áreas técnica e administrativa pelo bom funcionamento da infra-estrutura do curso.

Ao Depto. de Física da Universidade Federal do Pará pela minha liberação na fase final da tese.

Finalmente, agradeço à minha família, a quem dedico este trabalho.

SUMÁRIO

	p.
DEDICATÓRIA	i
AGRADECIMENTOS	ii
RESUMO	1
ABSTRACT	2
1 - INTRODUÇÃO	3
2 - METODOLOGIA	5
2.1 SOLUÇÃO NUMÉRICA DA EQUAÇÃO DE DIFUSÃO	5
2.2 O ALGORITMO DE DIFERENÇAS FINITAS	9
3 - RESULTADOS OBTIDOS	13
3.1 CAMPO ELÉTRICO GERADO POR UMA BOBINA NUM MEIO HOMOGENEO	13
3.2 COMPARAÇÃO ENTRE AS SOLUÇÕES NUMÉRICA E ANALÍTICA	13
3.3 PERFILAGEM NO DOMÍNIO DO TEMPO	14
4 - CONCLUSÃO E SUGESTÕES	25
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	26
APÊNDICE A - CAMPO ELÉTRICO INDUZIDO POR UM ANEL DE CORRENTE NUM MEIO HOMOGENEO NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA	28
APÊNDICE B - CAMPO ELÉTRICO INDUZIDO POR UM ANEL DE CORRENTE NUM MEIO HOMOGENEO NO DOMÍNIO DO TEMPO	30

RESUMO

Apresentamos aqui uma metodologia alternativa para modelagem de ferramentas de indução diretamente no domínio do tempo. Este trabalho consiste na solução da equação de difusão do campo eletromagnético através do método de diferenças finitas. O nosso modelo consiste de um meio estratificado horizontalmente, através do qual simulamos um deslocamento da ferramenta na direção perpendicular às interfaces. A fonte consiste de uma bobina excitada por uma função degrau de corrente e o registro do campo induzido no meio é feito através de uma bobina receptora localizada acima da bobina transmissora.

Na solução da equação de difusão determinamos o campo primário e o campo secundário separadamente. O campo primário é obtido analiticamente e o campo secundário é determinado utilizando-se o método de Direção Alternada Implícita, resultando num sistema tri-diagonal que é resolvido através do método recursivo proposto por Claerbout. Finalmente, determina-se o valor máximo do campo elétrico secundário em cada posição da ferramenta ao longo da formação, obtendo-se assim uma perfilagem no domínio do tempo. Os resultados obtidos mostram que este método é bastante eficiente na determinação do contato entre camadas, inclusive para camadas de pequena espessura.

ABSTRACT

A new approach of modeling the response of the induction tool in a borehole in the time domain is presented. Here I have solved electromagnetic field diffusion equation in a horizontally stratified medium by finite difference method. The transmitter loop is excited by the step function current. The receiver loop is positioned coaxially in the borehole above the transmitter at a fixed distance.

The solution of the diffusion equation takes into account the primary and secondary fields. The primary field is obtained analytically and the secondary is calculated by the Alternating Direction Implicit method. The resulting tri-diagonal system is solved by the recursive algorithm proposed by Claerbout.

Finally, the electric field in the receiver is computed at different positions of the tool in a borehole and these values are plotted against the depth of measurement. The results obtained show that measuring electric field in the time domain is very efficient to detect the bed boundaries, even if the beds are very thin.

1 - INTRODUÇÃO

Com o desenvolvimento de instrumentos digitais confiáveis, flexíveis e precisos, os métodos eletromagnéticos em geofísica, atualmente, são limitados principalmente pela falta de habilidade para interpretação. Soluções diretas para modelos unidimensionais já existem há bastante tempo (HOHMANN, 1989); estas consistem das Integrais de Fourier ou Bessel, as quais podem ser facilmente obtidas numericamente. As soluções obtidas por inversão para modelos unidimensionais também já existem há anos (HOHMANN, 1989). Entretanto, a obtenção da resposta para modelos bi-dimensionais (2-D) e tri-dimensionais (3-D) é muito mais difícil, exceto para geometrias simples como cilindros e esferas, onde as fronteiras de condutividade correspondem a superfícies com uma coordenada constante. Os avanços para o entendimento e interpretação dos métodos elétricos atualmente dependem de soluções numéricas diretas e inversas para modelos 2-D e 3-D.

As soluções numéricas são obtidas por aproximação de uma equação diferencial ou integral, através da solução de uma matriz de grande porte. A solução de uma equação diferencial (ED), por mais simples que seja a sua implementação, resulta em grandes matrizes bandeadas; entretanto, o método das equações diferenciais é preferido para simular geologias complexas, porque a solução é obtida em determinados pontos de uma malha. Este método tem obtido mais sucesso em modelos bi-dimensionais. As soluções obtidas por equações integrais (EI) envolvem um tratamento matemático mais complicado, mas os campos desconhecidos precisam ser determinados apenas em regiões anômalas. Portanto, as soluções de EI são mais viáveis para calcular a resposta de um ou poucos corpos pequenos, sendo mais úteis para avaliação de técnicas de campo, levantamentos e elaboração de catálogos para interpretação.

Soluções no domínio do tempo apareceram recentemente. Elas podem ser obtidas através de Transformadas de Fourier de respostas no domínio da frequência ou diretamente no domínio do tempo por *time-stepping*.

As soluções explícitas de ED são muito importantes, porque não necessitam da inversão de grandes matrizes. Entretanto, devido às diversas possibilidades de erros teóricos e de programação, faz-se necessária a comparação dos resultados obtidos por diferentes métodos até que uma solução numérica seja considerada válida. São necessários também testes de convergência e reciprocidade.

Nas frequências utilizadas nas ferramentas de indução, entre 10 e 100 kHz, o campo

eletromagnético produzido e medido pelas sondas no poço é descrito pela equação de difusão. Os métodos numéricos usados normalmente para resolver este tipo de problema são elementos finitos (CHANG & ANDERSON, 1984), "numerical mode matching" (CHEW et al., 1991; LIU, 1993) e aproximações de Born para equações integrais (HOWARD, 1986b, 1987). Aqui, apresentamos uma solução para a equação de difusão utilizando o método das diferenças finitas. A aplicação deste método não é recente em geo-eletromagnetismo. ORISTAGLIO & HOHMANN (1984) apresentam uma solução no domínio do tempo, utilizando diferenças finitas para um meio bi-dimensional não-homogêneo em coordenadas retangulares. Uma análise mais próxima ao ambiente do poço, mas aplicada para medidas de superfície é feita por GOLDMAN & STOYER (1983). Mais recentemente WANG & HOHMAN (1993) utilizaram o método de diferenças finitas para um modelo tri-dimensional em regime transiente.

O objetivo do presente trabalho é desenvolver um algoritmo alternativo para modelagem direta da resposta de uma ferramenta de indução, no domínio do tempo, usando o método de diferenças finitas. O modelo aqui apresentado consiste de um meio estratificado horizontalmente, excitado por um anel de corrente. Será considerada também uma sonda de duas bobinas, colocadas axialmente no poço, onde o transmissor induz um campo eletromagnético na formação, quando excitado por uma corrente elétrica na forma de degrau, sendo a resposta do meio captada na bobina receptora.

No Capítulo 2, será apresentada a metodologia utilizada para resolver a equação de difusão do campo eletromagnético. Como pode ser observado, o campo elétrico primário foi determinado analiticamente e o campo secundário foi obtido numericamente através do método de diferenças finitas, utilizando-se também o método de direção alternada implícita. Finalmente, o sistema tri-diagonal resultante foi resolvido pelo método proposto por CLAERBOUT (1976). No final do capítulo, é apresentado o algoritmo desenvolvido e as condições de contorno utilizadas.

No Capítulo 3, será mostrado o campo elétrico obtido analiticamente nos domínios da frequência e do tempo. Para ajustar a malha utilizada, será feita uma comparação entre as soluções analítica e numérica, obtidas num meio homogêneo. Neste capítulo, serão apresentados ainda vários perfis sintéticos, obtidos diretamente no domínio do tempo, considerando um meio estratificado horizontalmente.

No Capítulo 4, estão formalizadas as conclusões extraídas do trabalho e são feitas algumas sugestões para continuação do mesmo.

2 - METODOLOGIA

A metodologia usada aqui consiste basicamente em resolver numericamente a equação de difusão do campo eletromagnético e comparar com uma solução analítica no domínio do tempo.

2.1 SOLUÇÃO NUMÉRICA DA EQUAÇÃO DE DIFUSÃO

Utilizando o sistema de coordenadas cilíndricas e considerando simetria axial, numa região livre de fonte, a equação de difusão do campo eletromagnético é dada por GOLDMAN & STOYER (1983) :

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \theta}{\partial \rho} - \frac{\theta}{\rho^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = \mu \sigma \frac{\partial \theta}{\partial t}, \quad (2.1)$$

onde $\theta = \theta(\rho, z, t)$ é o campo eletromagnético total, μ é a permeabilidade magnética do meio e σ é a condutividade.

Na equação acima, não foram consideradas as correntes de deslocamento, tendo como base o trabalho de CHEW et al. (1981). Neste artigo, os autores determinam a resposta de uma ferramenta de indução no domínio do tempo, considerando o poço num meio homogêneo. Como pode ser verificado nas Figuras 5, 6, 7 e 8 do referido artigo, o intervalo de tempo de observação da resposta da ferramenta (t) está em torno de 300 ns. Portanto, neste intervalo de observação, os autores afirmam que as correntes de deslocamento são negligenciáveis, uma vez que $t \gg \epsilon/\sigma$, onde ϵ é a permissividade elétrica do meio.

Considerando os operadores

$$L_\rho = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho^2} \quad (2.2)$$

e

$$L_z = \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad (2.3)$$

a equação (2.1) pode ser escrita da seguinte maneira :

$$L_\rho \theta + L_z \theta = \mu \sigma \frac{\partial \theta}{\partial t}. \quad (2.4)$$

Todavia, como a singularidade do transmissor tem uma grande influência na vizinhança do receptor, numericamente é preferível calcular o campo secundário usando diferenças finitas,

uma vez que este é uma função do tempo mais suave no receptor, podendo, portanto, ser amostrada com um Δt maior. Para isso, faz-se necessário modificar a equação anterior para calcular somente o campo secundário.

De acordo com GOLDMAN & SFOYER (1983), o campo elétrico azimutal total pode ser representado como a soma de dois campos, ou seja, $\theta = \Phi + \Psi$, onde Φ é o campo elétrico primário e Ψ é o campo secundário. Considerando a fonte como uma função degrau de corrente com mudança na amplitude de corrente em $t = 0$, o campo primário pode ser obtido pela equação abaixo (Apêndice B) :

$$\Phi(\rho, z, t) = \frac{-u(t)I_0N_t a}{\sqrt{2\pi\sigma_b}} \left(\frac{q}{2t}\right)^{3/2} I_1\left(\frac{qa\rho}{2t}\right) e^{\left(\frac{-qR^2}{4t}\right)}, \quad (2.5)$$

onde

$$q = \mu_0\sigma_b$$

e

$$R^2 = \rho^2 + a^2 + (z - z_t)^2.$$

Sendo μ_0 a permeabilidade magnética do vácuo, σ_b a condutividade elétrica do meio, z_t a posição do transmissor em relação à origem do sistema de coordenadas, a o raio da bobina transmissora, N_t o número de espiras da bobina transmissora e I_1 a função de Bessel modificada de primeira ordem.

Por outro lado, o campo primário, a exemplo do campo total, também deve satisfazer a equação de difusão (2.4). Assim, pode-se escrever

$$L_\rho\theta + L_z\theta - \mu\sigma\frac{\partial\theta}{\partial t} = 0 \quad (2.6)$$

e

$$L_\rho\Phi + L_z\Phi - \mu\sigma_b\frac{\partial\Phi}{\partial t} = 0. \quad (2.7)$$

Como $\theta = \Phi + \Psi$, tem-se

$$L_\rho(\Phi + \Psi) + L_z(\Phi + \Psi) - \mu\sigma\frac{\partial(\Phi + \Psi)}{\partial t} = 0, \quad (2.8)$$

$$(L_\rho\Phi + L_z\Phi) + (L_\rho\Psi + L_z\Psi) = \mu\sigma\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \mu\sigma\frac{\partial\Psi}{\partial t}, \quad (2.9)$$

$$L_\rho\Psi + L_z\Psi - \mu\sigma\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -(L_\rho\Phi + L_z\Phi) + \mu\sigma\frac{\partial\Phi}{\partial t}, \quad (2.10)$$

$$L_\rho\Psi + L_z\Psi - \mu\sigma\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\mu\sigma_b\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \mu\sigma\frac{\partial\Phi}{\partial t}. \quad (2.11)$$

Finalmente, obtém-se para o campo secundário

$$L_\rho \Psi + L_z \Psi - \mu\sigma \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \mu(\sigma - \sigma_b) \frac{\partial \Phi}{\partial t}. \quad (2.12)$$

Portanto, o campo secundário Ψ satisfaz a mesma equação que o campo total, com exceção do termo da fonte no lado direito da equação (2.12).

A solução numérica da equação (2.12) será obtida em todos os pontos da malha mostrada na Figura 2.1. Como pode ser visto nesta figura, houve uma discretização do meio, de tal modo que $z = l\Delta z$, para $l = 1, n_z$, sendo n_z o número de pontos da malha na direção z , assim como, $\rho = m\Delta\rho$, para $m = 1, n_\rho$, onde n_ρ é o número de pontos na direção ρ . De maneira análoga, a variável t também foi discretizada, de modo que $t = n\Delta t$, onde $n = 1, n_t$, sendo n_t o número máximo de intervalos de tempo. Assim, utilizando-se o método de diferenças finitas (RICHTMYER & MORTON, 1967) tem-se :

$$L_\rho \Psi_{lm}^n = \frac{\Psi_{lm+1}^n - 2\Psi_{lm}^n + \Psi_{lm-1}^n}{(\Delta\rho)^2} + \frac{\Psi_{lm+1}^n - \Psi_{lm-1}^n}{2m(\Delta\rho)^2} - \frac{\Psi_{lm}^n}{(m\Delta\rho)^2}, \quad (2.13)$$

$$L_z \Psi_{lm}^n = \frac{\Psi_{l+1m}^n - 2\Psi_{lm}^n + \Psi_{l-1m}^n}{(\Delta z)^2}, \quad (2.14)$$

$$\frac{\partial \Psi_{lm}^n}{\partial t} = \frac{\Psi_{lm}^{n+1} - \Psi_{lm}^n}{\Delta t}. \quad (2.15)$$

Assim, pode-se escrever

$$\mu\sigma \frac{\Psi_{lm}^{n+1} - \Psi_{lm}^n}{\Delta t} = L_\rho \Psi_{lm}^n + L_z \Psi_{lm}^n. \quad (2.16)$$

Finalmente, tem-se que

$$\Psi_{lm}^{n+1} - \Psi_{lm}^n = \frac{\Delta t}{\mu\sigma} (L_\rho \Psi_{lm}^n + L_z \Psi_{lm}^n). \quad (2.17)$$

Utilizando o método de Direção Alternada Implícita (DAI) (RICHTMYER & MORTON, 1967) a equação anterior se desdobra nas seguintes equações :

$$\frac{2\mu\sigma}{\Delta t} (\Psi_{lm}^{n+1/2} - \Psi_{lm}^n) = (L_\rho \Psi_{lm}^{n+1/2} + L_z \Psi_{lm}^n) + S_{lm}^n, \quad (2.18)$$

$$\frac{2\mu\sigma}{\Delta t} (\Psi_{lm}^{n+1} - \Psi_{lm}^{n+1/2}) = (L_\rho \Psi_{lm}^{n+1/2} + L_z \Psi_{lm}^{n+1}) + S_{lm}^{n+1/2}, \quad (2.19)$$

onde

$$S_{lm}^n = \frac{2\mu}{\Delta t} (\sigma - \sigma_b) (\Phi_{lm}^{n+1/2} - \Phi_{lm}^n), \quad (2.20)$$

$$S_{lm}^{n+1/2} = \frac{2\mu}{\Delta t} (\sigma - \sigma_b) (\Phi_{lm}^{n+1} - \Phi_{lm}^{n+1/2}). \quad (2.21)$$

Assim, a partir da equação (2.18), obtém-se

$$A_m \Psi_{lm+1}^{n+1/2} + B_m \Psi_{lm}^{n+1/2} + C_m \Psi_{lm-1}^{n+1/2} = D_m^{(\rho)}, \quad (2.22)$$

onde

$$A_m = - \left(1 + \frac{1}{2m} \right), \quad (2.23)$$

$$B_m = \frac{1}{\alpha_\rho} + 2 + \frac{1}{m^2}, \quad (2.24)$$

$$C_m = - \left(1 - \frac{1}{2m} \right), \quad (2.25)$$

$$D_m^{(\rho)} = \beta^2 \Psi_{l+1m}^n + \left(\frac{1}{\alpha_\rho} - 2\beta^2 \right) \Psi_{lm}^n + \beta^2 \Psi_{l-1m}^n + S_{\rho lm}, \quad (2.26)$$

$$\alpha_\rho = \frac{\Delta t}{2\mu\sigma(\Delta\rho)^2}, \quad (2.27)$$

$$\beta = \frac{\Delta\rho}{\Delta z}, \quad (2.28)$$

$$S_{\rho lm} = \frac{1}{\alpha_\rho} \left(\frac{\sigma_b}{\sigma} - 1 \right) (\Phi_{lm}^{n+1/2} - \Phi_{lm}^n). \quad (2.29)$$

De forma análoga, a partir da equação (2.19) tem-se

$$A_l \Psi_{l+1m}^{n+1} + B_l \Psi_{lm}^{n+1} + C_l \Psi_{l-1m}^{n+1} = D_l^{(z)}, \quad (2.30)$$

onde

$$A_l = -1, \quad (2.31)$$

$$B_l = \frac{1}{\alpha_z} + 2, \quad (2.32)$$

$$C_l = -1, \quad (2.33)$$

$$D_l^{(z)} = \frac{1}{\beta^2} \left(1 + \frac{1}{2m} \right) \Psi_{lm+1}^{n+1/2} + \left[\frac{1}{\alpha_z} - \frac{1}{\beta^2} \left(2 + \frac{1}{m^2} \right) \right] \Psi_{lm}^{n+1/2} + \left[\frac{1}{\beta^2} \left(1 - \frac{1}{2m} \right) \right] \Psi_{lm-1}^{n+1/2} + S_{z lm}^{n+1/2}, \quad (2.34)$$

$$S_{z lm}^{n+1/2} = \frac{1}{\alpha_z} \left(\frac{\sigma_b}{\sigma} - 1 \right) (\Phi_{lm}^{n+1} - \Phi_{lm}^{n+1/2}). \quad (2.35)$$

Como pode ser visto, as equações (2.22) e (2.30) constituem um sistema tri-diagonal, que será resolvido através de uma relação de recorrência proposta por CLAERBOUT (1976). O método proposto é utilizado para resolver um sistema do tipo :

$$A_m \Psi_{m+1} + B_m \Psi_m + C_m \Psi_{m-1} = D_m. \quad (2.36)$$

A relação de recorrência proposta é a seguinte :

$$\Psi_m = E_m \Psi_{m+1} + F_m. \quad (2.37)$$

Substituindo-se (2.37) em (2.36), obtém-se

$$E_m = -\frac{A_m}{B_m + C_m E_{m-1}} \quad (2.38)$$

e

$$F_m = \frac{D_m - C_m F_{m-1}}{B_m + C_m E_{m-1}}. \quad (2.39)$$

2.2 O ALGORITMO DE DIFERENÇAS FINITAS

Como foi mostrado na secção anterior, após aplicar o método de DAI, foram obtidas duas equações para serem resolvidas utilizando-se o método recursivo.

Primeiramente, será apresentada a forma de resolução da equação (2.22), a qual envolve variação apenas na direção ρ , na primeira metade do intervalo de tempo, ou seja, em $t = (n + 1/2)\Delta t$.

Para resolver a equação (2.22), será considerada a relação de recorrência a seguir:

$$\Psi_{lm}^{n+1/2} = E_m \Psi_{lm+1}^{n+1/2} + F_m, \quad (2.40)$$

onde

$$E_m = -\frac{A_m}{B_m + C_m E_{m-1}} \quad (2.41)$$

e

$$F_m = \frac{D_m^\rho - C_m F_{m-1}}{B_m + C_m E_{m-1}} \quad (2.42)$$

Ora, para resolver a equação (2.40) é necessário, em primeiro lugar, conhecer os valores de E_m e F_m em todos os pontos da malha na direção ρ . Para isso, é preciso aplicar as condições de contorno do problema. Assim, sabendo-se que o campo no centro da bobina é nulo em qualquer instante e para qualquer valor de z , tem-se:

$$\Psi_{l1}^n = 0, \rho = 0, \forall z = l\Delta z, \forall t = n\Delta t. \quad (2.43)$$

Portanto, aplicando esta condição na equação (2.40), obtém-se o seguinte resultado :

$$\Psi_{l1}^{n+1/2} = E_1 \Psi_{l2}^{n+1/2} + F_1 = 0. \quad (2.44)$$

Assim, considerando-se $E_1 = 0$ na equação anterior, tem-se $F_1 = 0$. Substituindo-se agora estes valores de E_1 e F_1 nas equações (2.41) e (2.42), determina-se todos os valores de E_m e F_m na direção ρ . Agora, utiliza-se a segunda condição de contorno na equação (2.40). Como se sabe, à medida que ρ aumenta, o campo se aproxima de zero, ou seja, na extremidade direita da malha

$$\Psi_{ln\rho}^n \simeq 0, \forall z = l\Delta z, \forall t = n\Delta t, \rho = \rho_{m\acute{a}x} = n_\rho\Delta\rho. \quad (2.45)$$

Aplicando-se esta condição na equação (2.40), calcula-se recursivamente os valores de $\Psi_{lm}^{n+1/2}$, em todos os pontos da malha, na direção ρ .

Em seguida, faz-se necessário resolver a equação (2.30), que envolve variação apenas direção z , na segunda metade do intervalo de tempo Δt , ou seja, em $t = (n + 1)\Delta t$.

Como pode ser verificado na equação (2.34), aqui já será utilizada a solução obtida anteriormente em $t = (n + 1/2)\Delta t$.

Neste caso, a relação de recorrência proposta é análoga ao caso anterior, ou seja,

$$\Psi_{lm}^{n+1} = E_l\Psi_{l+1m}^{n+1} + F_l, \quad (2.46)$$

onde

$$E_l = -\frac{A_l}{B_l + C_l E_{l-1}} \quad (2.47)$$

e

$$F_l = \frac{D_l^z - C_l F_{l-1}}{B_l + C_l E_{l-1}} \quad (2.48)$$

De maneira análoga, utiliza-se agora as condições de contorno no topo e na base da malha para resolver a equação (2.30).

Considerando o campo como sendo aproximadamente nulo tanto no topo como na base da malha, em qualquer instante e para qualquer valor de ρ , tem-se :

$$\Psi_{1m}^n \simeq 0, \forall \rho = m\Delta\rho, \forall t = n\Delta t, \quad (2.49)$$

no topo da malha, e

$$\Psi_{nz m}^n \simeq 0, \forall \rho = m\Delta\rho, \forall t = n\Delta t, z = z_{m\acute{a}x} = n_z\Delta z, \quad (2.50)$$

na base da malha. Assim, aplicando-se a condição (2.49) na equação (2.46), tem-se :

$$\Psi_{1m}^{n+1} = E_1\Psi_{2m}^{n+1} + F_1 = 0. \quad (2.51)$$

Considerando-se $E_1 = 0$, obtém-se diretamente da equação (2.51) $F_1 = 0$. Agora, conhecendo-se A_i, B_i, C_i e D_i^z , determina-se todos os valores de E_i e F_i , através das equações (2.47) e (2.48).

Finalmente, aplicando-se a condição de contorno (2.50) na equação (2.46), determina-se os valores do campo recursivamente em todos os pontos da malha na direção z , a partir de $z_{máx}$ (base da malha) até $z_{mín}$ (topo da malha).

Fica claro, observando-se as equações (2.18) e (2.19), que se faz necessário conhecer o campo elétrico secundário no instante inicial, ou seja, em $t = 0$ s.

Como se sabe, no instante inicial, o campo secundário é zero em todos os pontos da malha. A partir daí o método de DAI possibilita a determinação da evolução temporal do campo ao longo de toda malha utilizada. Portanto, conhecendo-se o campo em $t = n\Delta t$, determina-se o campo em $t = (n + \frac{1}{2})\Delta t$ em todos os pontos da malha, admitindo-se variação apenas na direção ρ . Em seguida, conhecendo-se o campo em todos os pontos da malha no tempo $t = (n + \frac{1}{2})\Delta t$, calcula-se o campo em todos os pontos da malha, supondo-se variação apenas na direção z . A composição das duas soluções, gerando a solução final, é garantida pelo método de DAI. Esta divisão abstrata do intervalo de tempo Δt é chamada de *time splitting*.

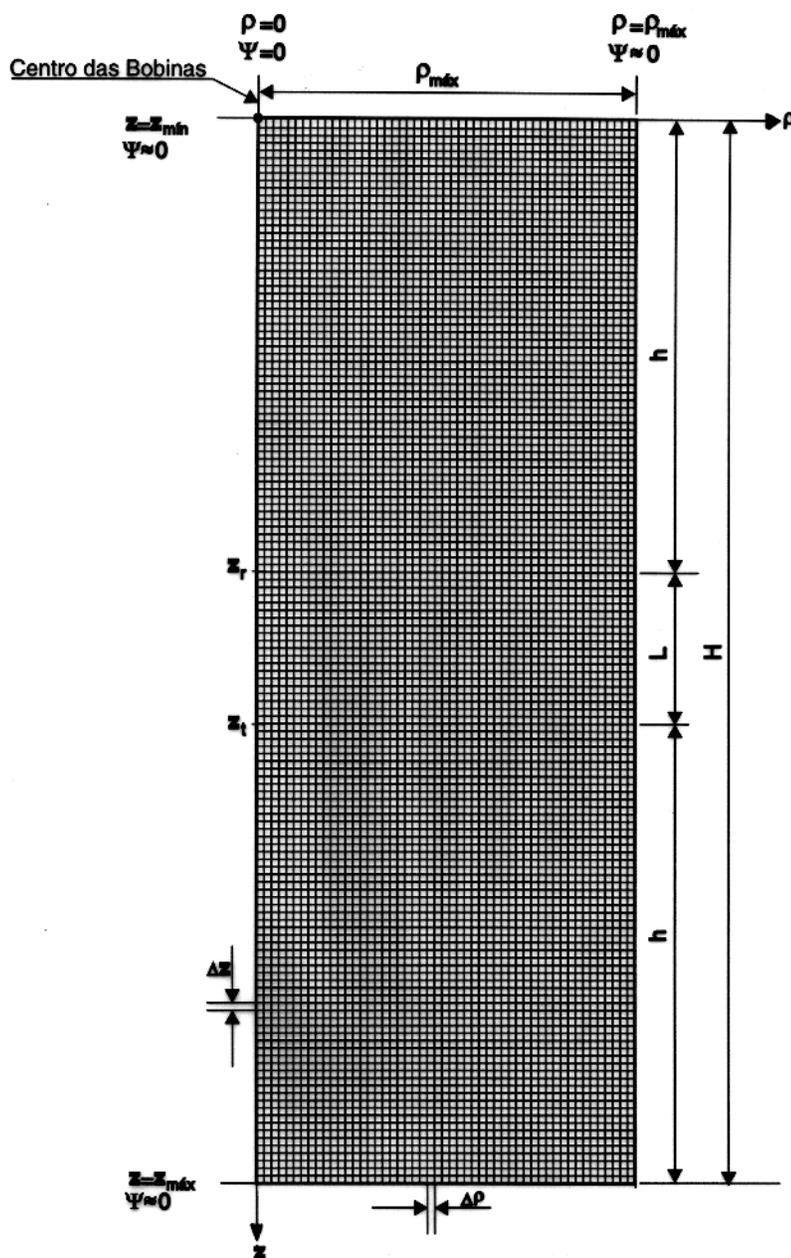


Figura 2.1 - Malha utilizada para cálculo do campo secundário

3 - RESULTADOS OBTIDOS

3.1 CAMPO ELÉTRICO GERADO POR UMA BOBINA NUM MEIO HOMOGÊNEO

Na Figura 3.1, tem-se o campo elétrico gerado por uma bobina num meio homogêneo de condutividade igual a $1.0 S/m$. A distância entre a bobina transmissora e a receptora é de $1.0 m$ e os raios de ambas as bobinas medem $4.0 cm$. O número de espiras tanto da bobina transmissora quanto da receptora foi considerado igual a 10.

Na parte superior da Figura 3.1, o campo foi calculado analiticamente no domínio da frequência, utilizando-se a equação deduzida no Apêndice A. No espectro de frequências negativas, o campo elétrico foi obtido através do complexo conjugado dos valores do campo calculado para o espectro de frequências positivas, baseado na relação de simetria causal do problema. A linha contínua representa a parte real do campo elétrico, enquanto a linha tracejada representa a parte imaginária do mesmo.

Na parte inferior da Figura 3.1, está representado o campo elétrico calculado no domínio do tempo de duas maneiras diferentes. A linha contínua representa o campo elétrico obtido através da Transformada de Fourier da parte real do campo calculado no domínio da frequência, mostrado na parte superior da mesma figura. Já as pequenas circunferências representam o campo elétrico calculado diretamente no domínio do tempo, através da equação deduzida no Apêndice B.

Vale salientar que, como já foi explicado no Capítulo 2, não foram consideradas as correntes de deslocamento no modelo, uma vez que, de acordo com CHEW et al. (1981), quando o intervalo de tempo de observação do fenômeno de propagação do campo é muito maior que a relação entre a permissividade elétrica do meio e a condutividade elétrica do mesmo, as correntes de deslocamento são negligenciáveis.

3.2 COMPARAÇÃO ENTRE AS SOLUÇÕES NUMÉRICA E ANALÍTICA

Com a finalidade de ajustar a malha utilizada, a solução numérica obtida por diferenças finitas foi comparada com uma solução analítica no domínio do tempo, considerando um meio homogêneo. A Figura 3.2 mostra o resultado obtido para um meio de condutividade

igual a $2.0 S/m$, considerando $\sigma_b = 1.0 S/m$.

Os dados da malha foram :

altura total : $H = 3.0 m$

raio máximo de investigação : $\rho_{max} = 1.0 m$;

incremento na direção ρ : $\Delta\rho = 0.02 m$;

incremento na direção z : $\Delta z = 0.02 m$;

incremento no tempo : $\Delta t = 1.0 \times 10^{-9} s$.

Os dados da sonda foram os seguintes :

distância entre o transmissor e o receptor : $L = 0.5 m$;

raio da bobina transmissora : $R_t = 0.04 m$;

raio da bobina receptora : $R_r = 0.04 m$.

Como pode ser observado, há uma perfeita concordância entre as duas soluções. Este ajuste depende muito da discretização do meio, do intervalo de tempo Δt e do parâmetro α_ρ , que foi mantido igual a 1.0 após um processo de tentativa-e-erro.

3.3 PERFILAGEM NO DOMÍNIO DO TEMPO

Como aplicação prática do método utilizado foi feita a simulação de uma perfilagem no domínio do tempo, após o ajuste dos parâmetros mostrados na secção anterior. Os modelos apresentados na Figura 3.4 e na Figura 3.5 representam meios estratificados horizontalmente e o gráfico à esquerda mostra o valor máximo do campo elétrico secundário registrado no receptor, supondo um deslocamento da ferramenta de indução ao longo do meio, na direção z . A Figura 3.6 e a Figura 3.7 mostram meios também estratificados horizontalmente com cinco camadas. Todos os parâmetros anteriores foram mantidos e o incremento em profundidade foi de $4.0 cm$. Finalmente, a Figura 3.8 e a Figura 3.9 apresentam modelos de uma camada fina de $0.20 m$ e $0.10 m$ respectivamente, mostrando a limitação do método na detecção de camadas de pequena espessura.

O gráfico à esquerda, por exemplo, aquele mostrado na Figura 3.4, intitulado de Perfilagem no Domínio do Tempo, é obtido da seguinte maneira :

- inicialmente, a bobina transmissora é excitada por uma função degrau de corrente elétrica (*step function*);
- a seguir, é feito o registro do campo elétrico secundário no receptor, em função do tempo de observação, $\Psi_r(t)$, obtendo-se um gráfico semelhante àquele mostrado na Figura 3.3. Observa-se que o campo secundário é mais sensível à variação da condutividade

da formação do que o campo total;

- determina-se, então, o valor absoluto máximo do campo elétrico secundário, $\Psi_r(t)$, o qual é plotado em função da posição da ferramenta. Na plotagem, é considerado o sinal do campo elétrico, ou seja, plota-se o valor máximo ou mínimo global da função $\Psi_r(t)$. A escolha do valor a ser plotado é feita pelo valor absoluto máximo da função $\Psi_r(t)$.
- em seguida, supõe-se um deslocamento da sonda na direção vertical e repete-se o procedimento anterior.

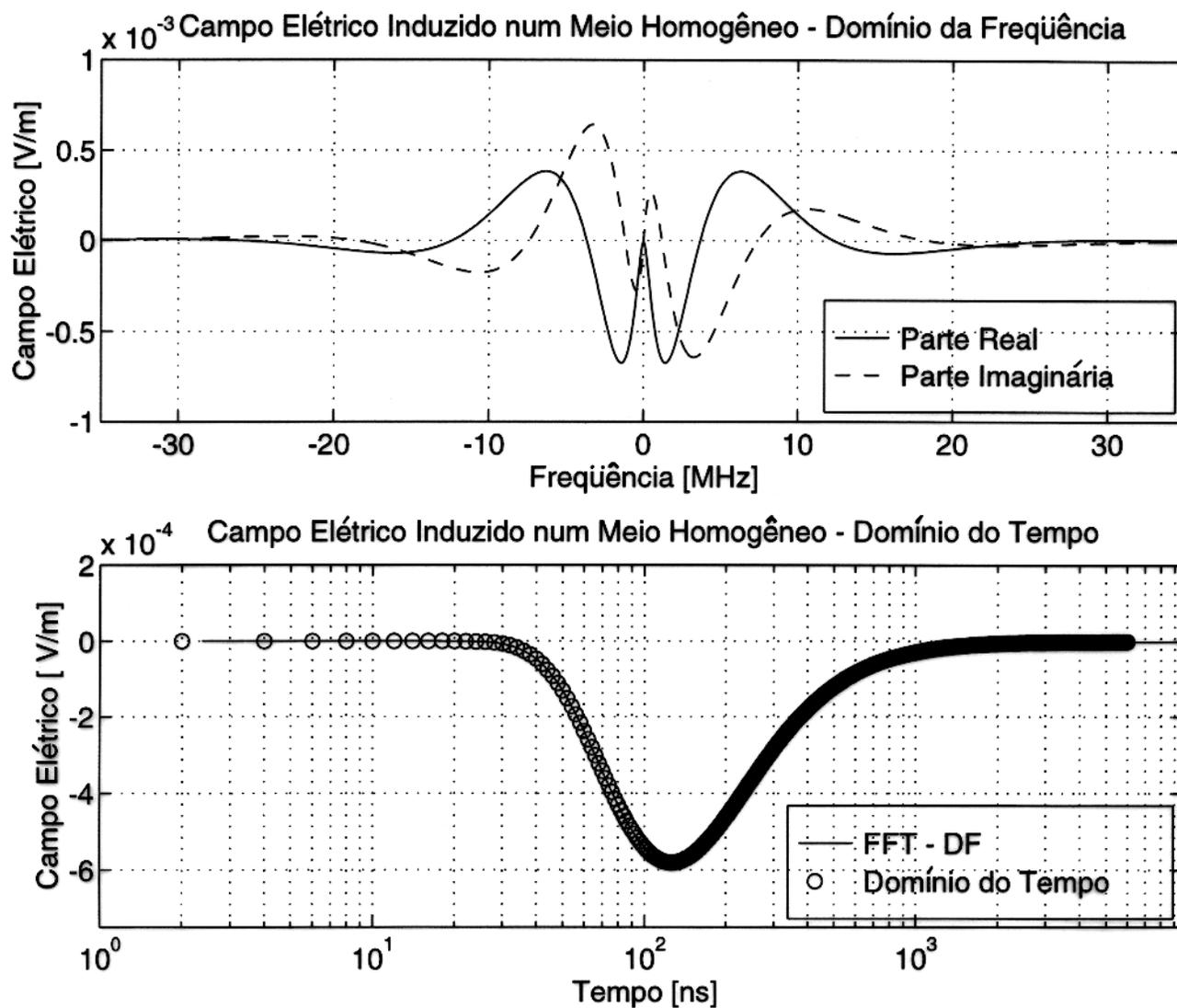


Figura 3.1 - Campo elétrico induzido por uma bobina num meio homogêneo de condutividade igual a $1.0 S/m$.

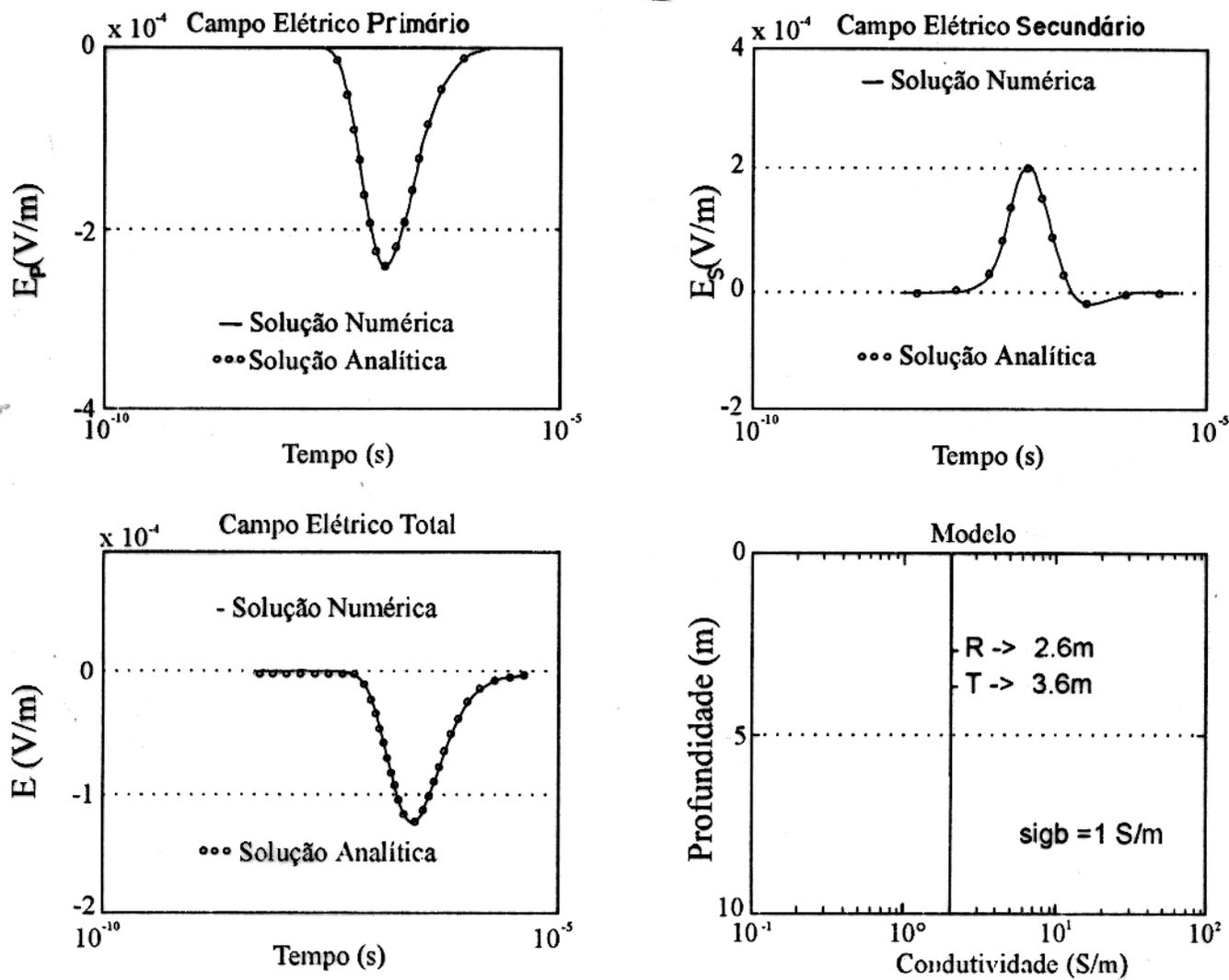


Figura 3.2 - Comparação entre as respostas analítica e numérica para um meio homogêneo de condutividade $\sigma = 2.0 \text{ S/m}$.

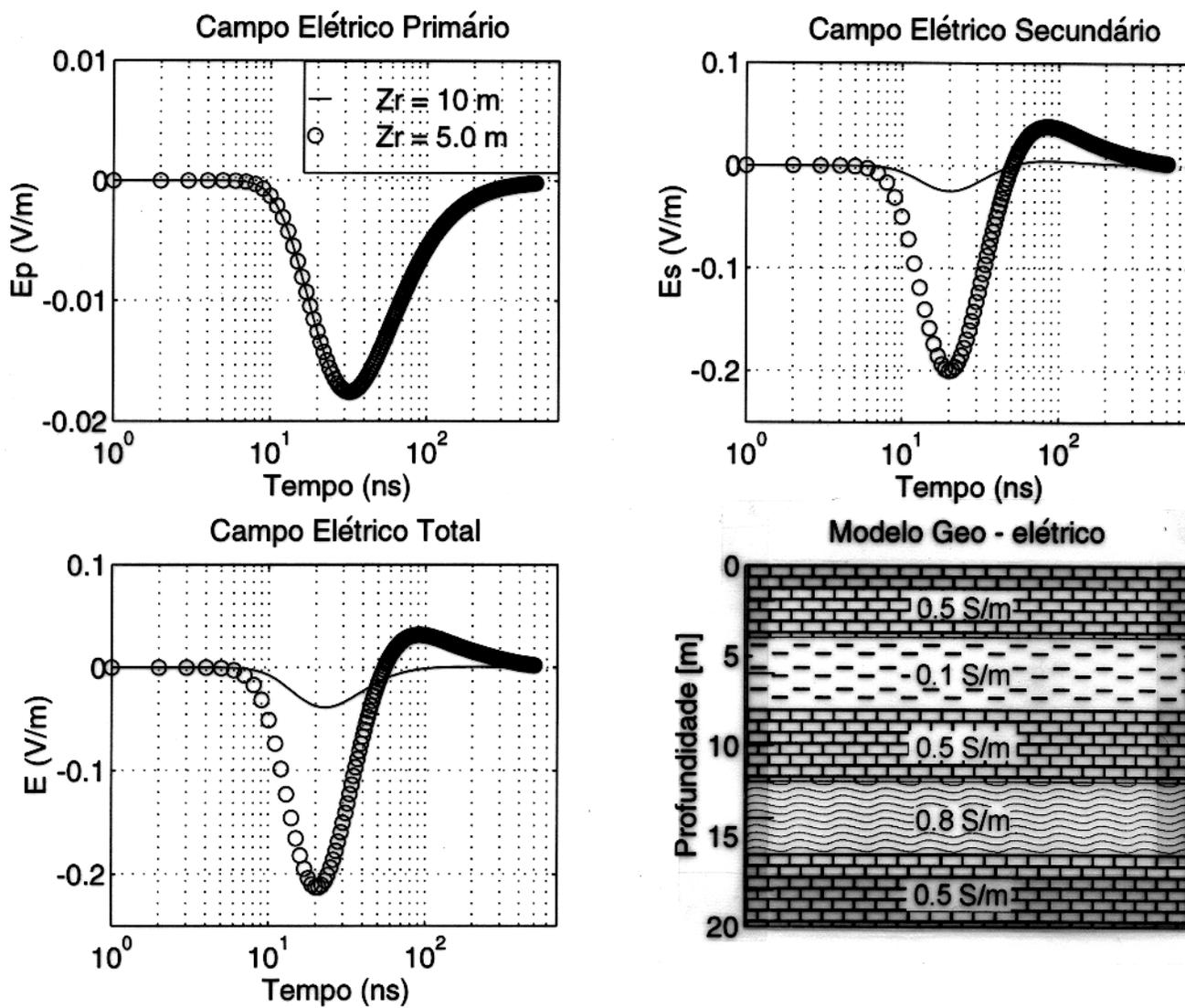


Figura 3.3 - Variação do campo elétrico com a posição da ferramenta. As pequenas circunferências representam o campo a uma profundidade de 5.0 m e as linhas cheias, a 10.0 m de profundidade.

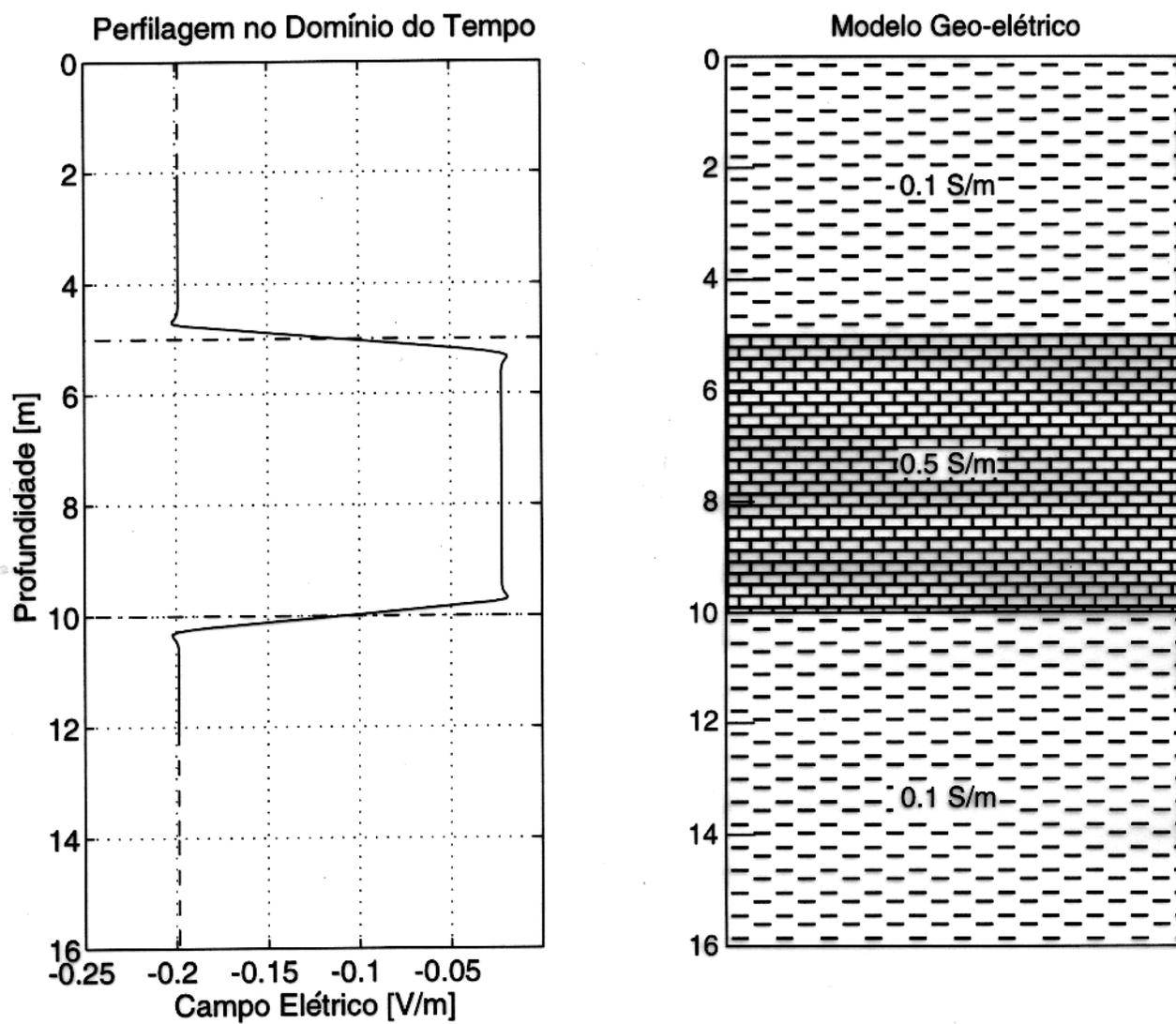


Figura 3.4 - Perfilagem no domínio do tempo, considerando um meio estratificado horizontalmente, constituído de uma camada espessa entre duas camadas menos condutivas.

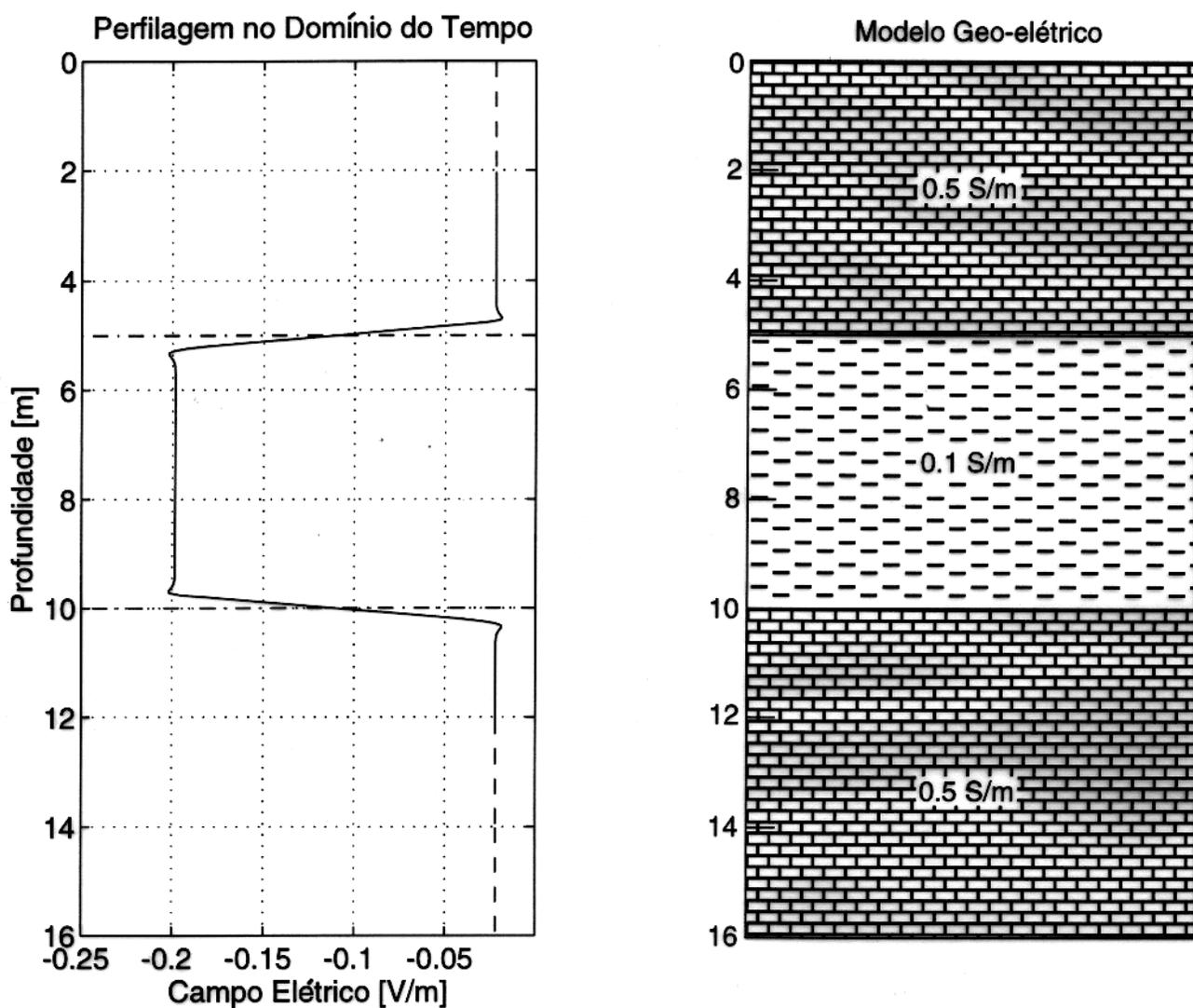


Figura 3.5 - Perfilagem no domínio do tempo, considerando um meio estratificado horizontalmente, constituído de uma camada espessa entre duas camadas mais condutivas.

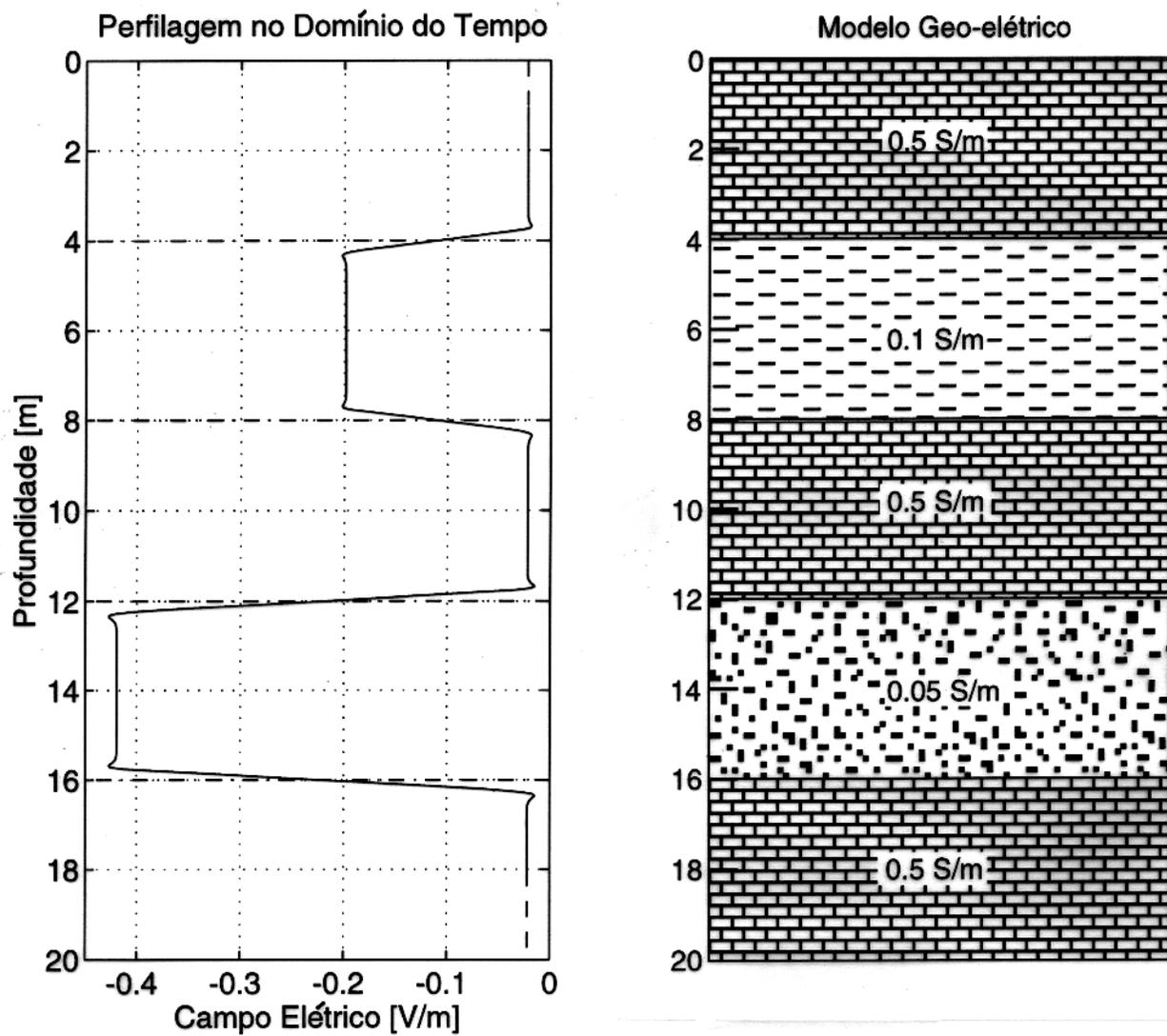


Figura 3.6 - Perfilagem no domínio do tempo, considerando um meio estratificado horizontalmente, constituído de cinco camadas espessas de diferentes condutividades.

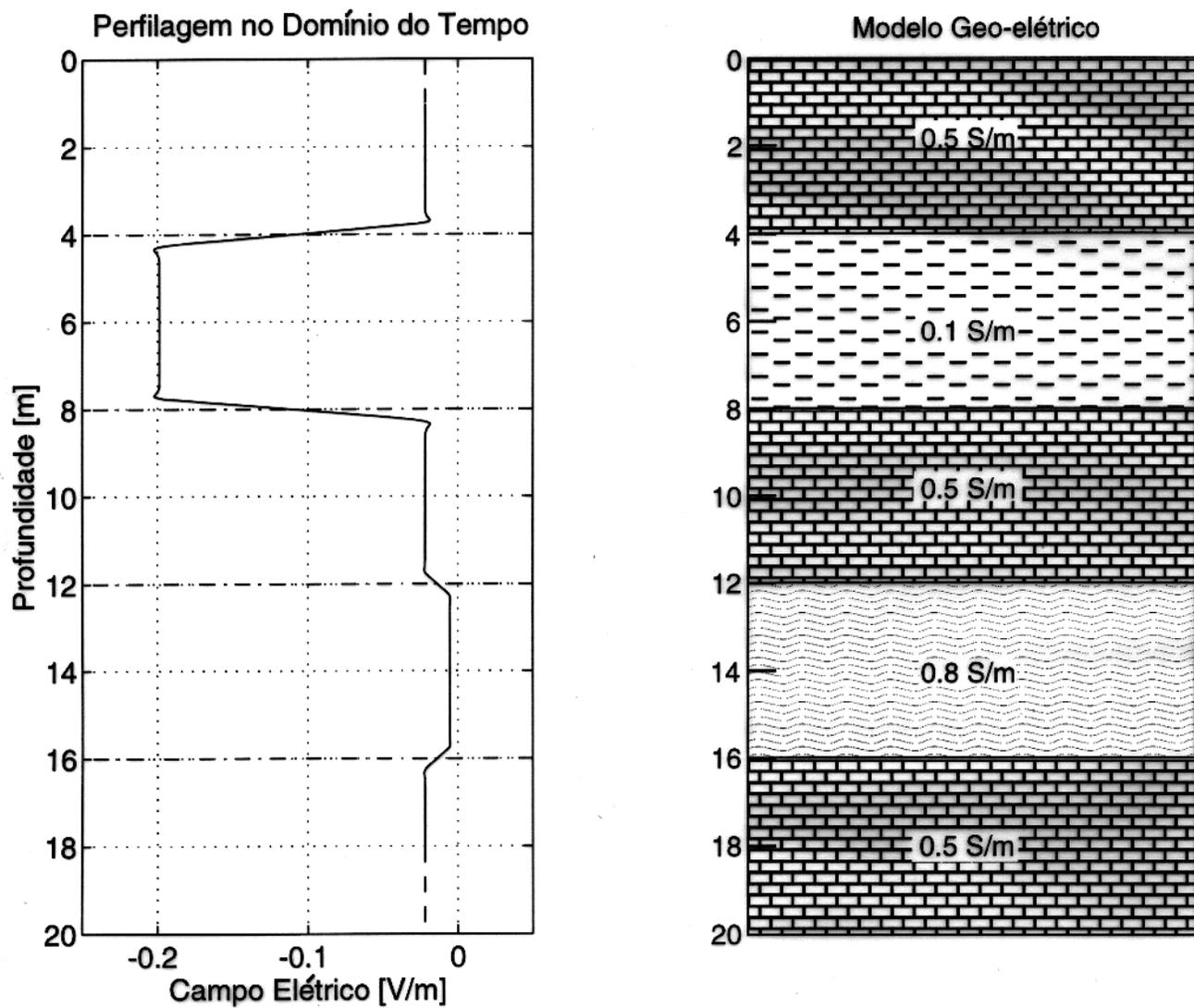


Figura 3.7 - Outra aplicação da perfilagem no domínio do tempo, considerando ainda um meio estratificado horizontalmente, constituído de cinco camadas espessas.

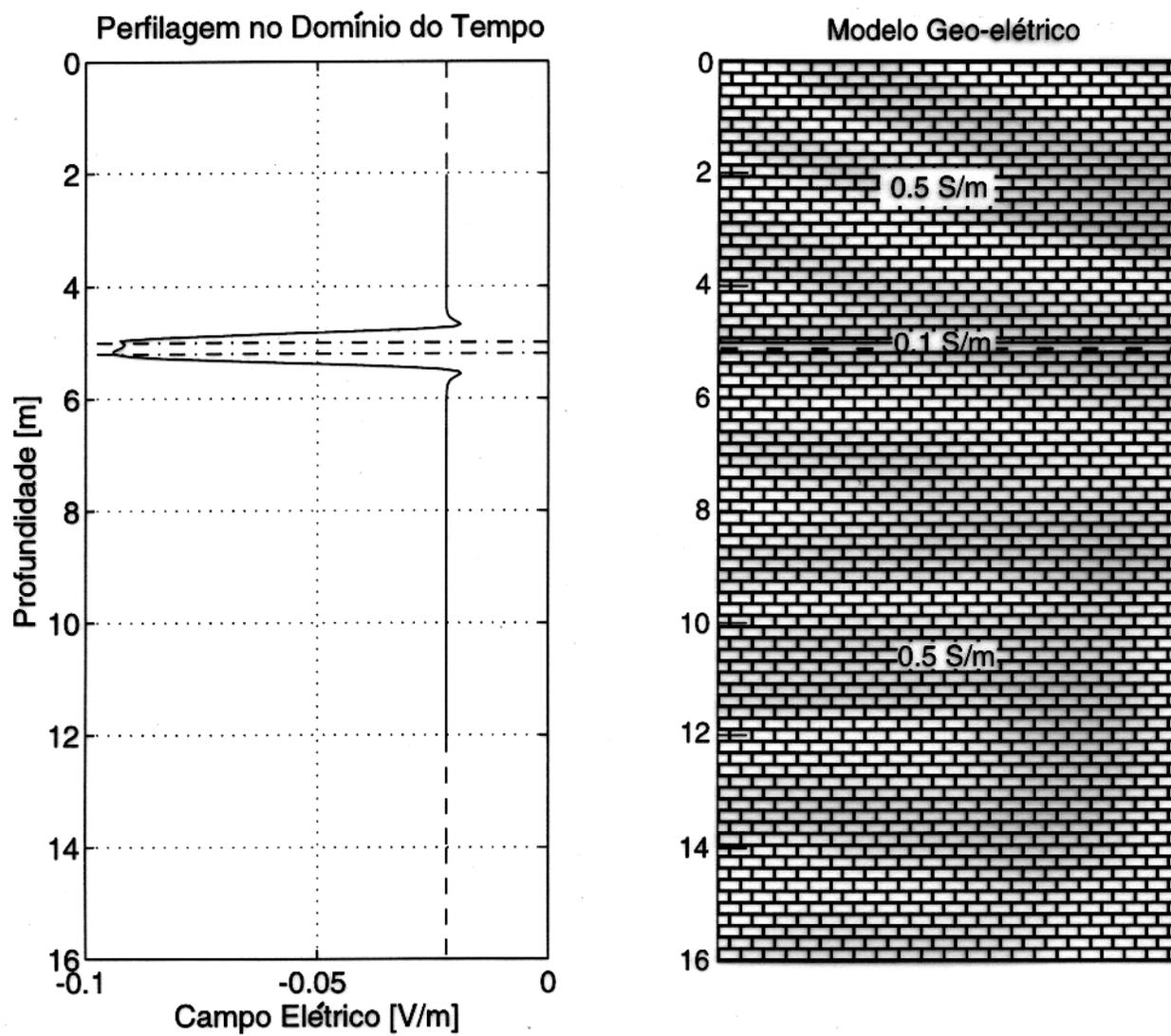


Figura 3.8 - Perfilagem no domínio do tempo, considerando uma camada fina de 0.20 m entre duas camadas espessas.

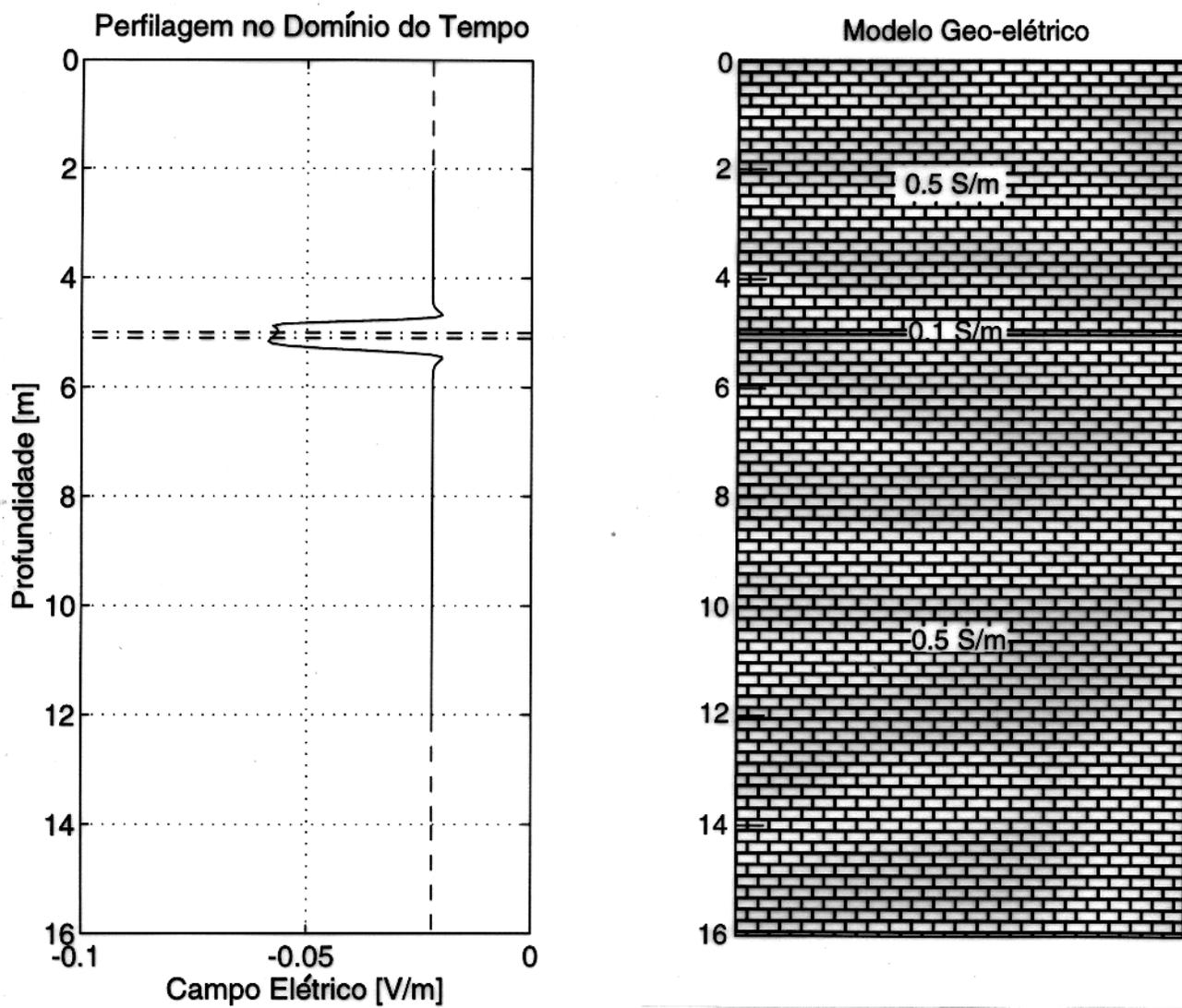


Figura 3.9 - Perfilagem no domínio do tempo, considerando uma camada fina de 0.10 m entre duas camadas espessas.

4 - CONCLUSÃO E SUGESTÕES

Pelos resultados mostrados anteriormente, pode-se concluir que o método de diferenças finitas mostra-se bastante adequado para modelagem de ferramentas de indução no domínio do tempo. Pode-se verificar também que o método é bastante preciso na detecção do contacto entre camadas, inclusive quando se trata de camadas bastante finas.

A grande dificuldade na utilização do método de diferenças finitas consiste no ajuste da malha utilizada. Resultados satisfatórios foram conseguidos utilizando-se uma malha bastante fina : $\Delta\rho = 2.0 \text{ cm}$ e $\Delta z = 2.0 \text{ cm}$. O incremento no tempo também tem uma importância muito grande. Dependendo do valor de Δt utilizado, não se obtém uma solução numérica estável, por isso, após um processo de tentativa-e-erro, foi conseguido um resultado satisfatório para Δt em torno de 1.0 ns . Foi observada também uma grande influência do parâmetro α_p na obtenção de uma solução estável, de modo que, após várias tentativas, foi obtido um valor ótimo em torno de 1.0.

Como pode ser verificado na Figura 3.3, o campo elétrico secundário é muito mais sensível à variação da condutividade da formação do que o campo total, razão pela qual o mesmo foi escolhido para obtenção do perfil elétrico transiente.

Como continuação do presente trabalho, pode-se sugerir a inclusão do poço com a zona invadida e estudar os efeitos tanto de variação no diâmetro do poço, como no raio da zona invadida, nos perfis de indução no domínio do tempo.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- CHANG, S.K. & ANDERSON, B. 1984. Synthetic Induction Logs by Finite Element Method. *Geophysics*, 23(6): 17-26.
- CHEW, W. C.; GIANZERO, S.; KAPLIN, K. J. 1981. Transient Response of an Induction Logging Tool in a Borehole. *Geophysics*, 46(9): 1291-1300.
- CHEW, W. C.; NIE, Z.; LIU, Q.; ANDERSON, B. 1991. An Efficient Solution for the Response of Electrical Well Logging Tools in Complex Environment. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 29(2): 308-313.
- CLAERBOUT, J. F. 1976. **Fundamental of Geophysical Data Processing with Applications to Petroleum Prospecting**. Mc Graw-Hill, New York. 274 p.
- GOLDMAN, M. M. & STOYER, C. H. 1983. Finite Difference Calculations of the Transient Field of an Axially Symmetric Earth for Vertical Magnetic Dipole Excitation. *Geophysics*, 48(7): 953-963.
- HOHMANN, G. W. 1989. Numerical Modeling for Electromagnetic Methods of Geophysics. In: NABIGHIAN, M. N., ed., **Electromagnetic Methods in Applied Geophysics**. Soc. Expl. Geophysics, v.1. p. 131-311.
- HOWARD, A. Q., Jr. 1986a. Transient Response from a Thin Sheet in a Conductive Medium for a Loop Excitation. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 24(2): 198-203.
- HOWARD, A. Q., Jr. 1986b. A Fourier Method for Borehole Electromagnetic Problems. *Geophysics*, 51(6): 1181-1190.
- HOWARD, A. Q., Jr. 1987. A Spectral Method for the Inverse Electromagnetic Logging Problem. *Geophysics*, 52(2): 186-193.
- LIU, Q.-H. 1993. Electromagnetic Field Generated by an Off-Axis Source in a Cylindrical Layered Medium with an Arbitrary Number of Horizontal Discontinuities. *Geophysics*, 58(5): 616-625.

- ORISTAGLIO, M. L. & HOHMANN, G. W. 1984. Diffusion of Electromagnetic Fields in a Two-Dimensional Earth : A Finite Difference Approach. **Geophysics**, 49(7): 870-894.
- RICHTMYER, R. D. & MORTON, K. W. 1967. **Difference Methods for Initial - Value Problems**. 2. ed. USA. Interscience Publishers - USA. Pages 211-217.
- RYU, J.; MORRISON, H. F.; WARD, S. H. 1970. Electromagnetic Fields About a Loop Source of Current. **Geophysics**, 35(5): 862-896.
- WANG, T. & HOHMANN, G. W. 1993. A Finite-Difference, Time-domain Solution for Three-dimensional Electromagnetic Modeling. **Geophysics**, 58(6): 797-809.

APÊNDICE A - CAMPO ELÉTRICO INDUZIDO POR UM ANEL DE CORRENTE NUM MEIO HOMOGENEO NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA

No domínio da frequência, o campo elétrico gerado num meio homogêneo por uma bobina, excitada por uma corrente $I = I_0 e^{-i\omega t}$, é dado por (RYU et al., 1970; HOWARD, 1986a)

$$E_0(z, \rho, \omega) = \int_0^\infty \hat{E}_0(K) J_1(K\rho) e^{iK_z|z-z_t|} K dK,$$

onde

$$\hat{E}_0(K) = -\omega\mu_0 I_0 N_t a \frac{J_1(Ka)}{2K_z},$$

sendo a o raio da bobina, z_t a sua localização no meio e N_t o número de espiras.

$$\begin{aligned} K_z &= \sqrt{k_1^2 - K^2}, \\ \text{Im}(K_z) &\geq 0, \\ k_1^2 &= i\omega\mu_0\sigma, \end{aligned}$$

onde, μ_0 é a permeabilidade magnética, σ é a condutividade elétrica e ϵ a permissividade elétrica do meio. Assim, aplicando o Teorema da Adição seguinte:

$$\int_0^\infty J_0(KR) \cos\phi d\phi = \pi J_1(K\rho) J_1(K\rho'),$$

$$R = \sqrt{(\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho'\cos\phi)},$$

tem-se que

$$\int_0^\infty e^{iK_z|z-z_t|} \frac{J_1(K\rho) J_1(Ka)}{K_z} K dK = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos\phi d\phi \int_0^\infty e^{iK_z|z-z_t|} \frac{J_0(KR_1)}{K_z} K dK,$$

$$R_1 = \sqrt{\rho^2 + a^2 - 2\rho a \cos\phi}.$$

Resolvendo a segunda integral à direita, obtém-se

$$\int_0^\infty e^{iK_z|z-z_t|} \frac{J_1(K\rho) J_1(Ka)}{K_z} K dK = \frac{i}{\pi} \int_0^\pi \cos\phi d\phi \frac{e^{ikR}}{R},$$

$$R^2 = (z - z_t)^2 + \rho^2 + a^2 - 2\rho a \cos\phi.$$

Finalmente, a expressão para o campo elétrico será

$$E_0(z, \rho, \omega) = \frac{i\omega\mu_0 I_0 N_t a}{2\pi} \int_0^\pi \cos\phi \frac{e^{ikR}}{R} d\phi.$$

Considerando um caso especial, onde $Ka \ll 1$, tem-se aproximadamente um dipolo magnético. Neste caso, pode-se considerar

$$J_1(Ka) \simeq \frac{Ka}{2},$$

e o campo elétrico será dado por

$$E_0(z, \rho, \omega) \simeq -\frac{\omega\mu_0 I_0 N_t a^2}{4} \int_0^\pi \frac{J_1(K\rho)}{k_z} e^{ik_z|z-z_t|} K^2 dK,$$

Porém, considerando-se que

$$J_1(x) = -\frac{d}{dx} J_0(x),$$

$$E_0(z, \rho, \omega) \simeq \frac{\omega\mu_0 I_0 N_t a^2}{4} \frac{d}{d\rho} \int_0^\infty \frac{J_0(K\rho)}{K_z} e^{ik_z|z-z_t|} K dK = -\frac{i\omega\mu_0 I_0 N_t a^2}{4} \frac{d}{d\phi} \frac{e^{ikR}}{R},$$

$$R = \sqrt{\rho^2 + (z - z_t)^2}.$$

Assim, o campo elétrico gerado pelo dipolo magnético é dado por

$$E_0(z, \rho, \omega) \simeq \frac{i\omega\mu_0 I_0 N_t a^2}{4} (1 - ik_1 L) \frac{e^{ikL}}{L^3} \rho_r,$$

$$L = |z - z_t|.$$

APÊNDICE B - CAMPO ELÉTRICO INDUZIDO POR UM ANEL DE CORRENTE NUM MEIO HOMOGENEO NO DOMÍNIO DO TEMPO

Na determinação do campo elétrico secundário pelo método de diferenças finitas, foi utilizada uma solução analítica para o campo elétrico induzido por um anel excitado por uma função degrau de corrente no domínio do tempo. Esta solução analítica foi obtida através da Transformada de Fourier da solução mostrada anteriormente no domínio da frequência, como será mostrado a seguir :

$$e_0(z, \rho, t) = \int_{-\infty}^{\infty} (i/\omega) E_0(z, \rho, \omega) e^{-i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi},$$

$$E_0(z, \rho, \omega) = \frac{i\omega\mu_0}{2\pi} I_0 N_t a \int_0^{\infty} \frac{J_1(K\rho) J_1(Ka)}{K^2 - k_1^2} e^{iKz} d^2 K.$$

Desta forma, tem-se

$$e_0(z, \rho, t) = -\frac{\mu_0 I_0}{(2\pi)^2} N_t a \int_0^{\infty} J_1(K\rho) J_1(Ka) e^{iKz} d^2 K \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega t}}{K^2 - i\omega\mu_0\sigma} d\omega.$$

Resolvendo as integrais acima, obtém-se a expressão final para o campo, dada abaixo :

$$e_0(\rho, z, t) = -\frac{u(t) I_0 N_t a}{\sqrt{2\pi\sigma}} \left(\frac{q}{2t}\right)^{3/2} I_1\left(\frac{qa\rho}{2t}\right) e^{-\frac{qR^2}{4t}},$$

$$R^2 = \rho^2 + a^2 + (z - z_t)^2,$$

onde I_1 é a função de Bessel modificada de primeira ordem, $q = \mu_0\sigma$ e

$$u(t) = 1, t > 0,$$

$$u(t) = 0, t \leq 0.$$