



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ  
INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM GEOFÍSICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**MIGRAÇÃO FFD 3D EM PROFUNDIDADE USANDO  
APROXIMAÇÃO DE PADÉ COMPLEXA**

ITAMARA DO SOCORRO DA SILVEIRA CAMPOS

BELÉM  
2011

ITAMARA DO SOCORRO DA SILVEIRA CAMPOS

**MIGRAÇÃO FFD 3D EM PROFUNDIDADE USANDO  
APROXIMAÇÃO DE PADÉ COMPLEXA**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Geofísica do Instituto de Geociências da Universidade Federal do Pará, em cumprimento às exigências para obtenção do grau de mestre em Ciências na área de Geofísica.

Área de Concentração: Métodos Sísmicos

Orientador: Prof. Dr. Jessé Carvalho Costa

BELÉM  
2011

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação(CIP)  
Biblioteca Geólogo. Raimundo Montenegro Garcia de Montalvão

---

C198m Campos, Itamara do Socorro da Silveira  
Migração FFD 3D em profundidade usando aproximação de Padé complexa / Itamara do Socorro da Silveira Campos; Orientador: Jessé Carvalho Costa– 2011  
93 fl.: il.

Dissertação (Mestrado em Geofísica) – Universidade Federal do Pará, Instituto de Geociências, Programa de Pós-Graduação em Geofísica, Belém, 2011.

1. Geofísica aplicada. 2. Anisotropia. 3. Migração 3D. 4. FFD. 5. Aproximação de Padé complexa. 6. Método iterativo. I. Costa, Jessé Carvalho, *orient.* II. Universidade Federal do Pará. III. Título.

---

CDD 22º ed.: 551.22

ITAMARA DO SOCORRO DA SILVEIRA CAMPOS

**MIGRAÇÃO FFD 3D EM PROFUNDIDADE USANDO  
APROXIMAÇÃO DE PADÉ COMPLEXA**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Geofísica do Instituto de Geociências da Universidade Federal do Pará, em cumprimento às exigências para obtenção do grau de mestre em Ciências na área de Geofísica.

Área de Concentração: Métodos Sísmicos

Data de Aprovação: \_\_\_\_/\_\_\_\_/\_\_\_\_

**Banca Examinadora:**

---

Prof. Jessé Carvalho Costa - Orientador

Doutor em Geofísica

Universidade Federal do Pará - UFPA

---

Prof. Cícero Roberto Teixeira Régis

Doutor em Geofísica

Universidade Federal do Pará - UFPA

---

Prof. Joerg Dietrich Wilhelm Schleicher

Doutor em Matemática Aplicada

Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP

BELÉM  
2011

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço ao professor Dr. Jessé Costa pela orientação e por críticas sempre construtivas em relação ao trabalho, sem o qual não haveria ciência. A todos os membros da banca por aceitarem o convite para minha defesa de dissertação.

Agradeço a generosa contribuição nesse trabalho de Carlos N. Costa e Francisco A. Neto

Agradeço aos financiadores desta pesquisa: CNPq, CAPES e a PETROBRAS.

## RESUMO

Implementações dos métodos de migração diferença finita e Fourier (FFD) usam fatoração direcional para acelerar a performance e economizar custo computacional. Entretanto essa técnica introduz anisotropia numérica que podem erroneamente posicionar os refletores em mergulho ao longo das direções em que o não foi aplicado a fatoração no operador de migração. Implementamos a migração FFD 3D, sem usar a técnica do fatoração direcional, no domínio da frequência usando aproximação de Padé complexa. Essa aproximação elimina a anisotropia numérica ao preço de maior custo computacional buscando a solução do campo de onda para um sistema linear de banda larga. Experimentos numéricos, tanto no modelo homogêneo e heterogêneo, mostram que a técnica da fatoração direcional produz notáveis erros de posicionamento dos refletores em meios com forte variação lateral de velocidade. Comparamos a performance de resolução do algoritmo de FFD usando o método iterativo gradiente biconjugado estabilizado (BICGSTAB) e o *multifrontal massively parallel direct solver* (MUMPS). Mostrando que a aproximação de Padé complexa é um eficiente preconditionador para o BICGSTAB, reduzindo o número de iterações em relação a aproximação de Padé real. O método iterativo BICGSTAB é mais eficiente que o método direto MUMPS, quando usamos apenas um termo da expansão de Padé complexa. Para maior ângulo de abertura do operador, mais termos da série são requeridos no operador de migração, e neste caso, a performance do método direto é mais eficiente. A validação do algoritmo e as propriedades da evolução computacional foram avaliadas para a resposta ao impulso do modelo de sal SEG/EAGE.

**Palavras-Chave:** Geofísica aplicada. Anisotropia numérica. FFD. Migração 3d. Aproximação de Padé complexa. Método iterativo

## ABSTRACT

Fourier finite-difference (FFD) migration implementations use splitting techniques to accelerate performance and save computational cost. However, such techniques introduce numerical anisotropy which leads to mispositioning of dipping reflectors along directions not used for splitting the migration operator. We implement 3D FFD continuation migration without splitting in the frequency-space domain using the complex Padé approximation and implicit finite differences. This approach eliminates numerical anisotropy at the expense of a computationally more intensive solution of a large banded linear system. Numerical experiments in homogeneous and heterogeneous models show that splitting techniques produce noticeable positioning errors for models with strong lateral velocity variation. We compare the performance of the iterative stabilized biconjugate gradient (BICGSTAB) and the multifrontal massively parallel direct solver (MUMPS). It turns out that the use of the complex Padé approximation provides an effective preconditioner for the BICGSTAB, reducing the number of iterations relative to the real Padé expansion. The iterative BICGSTAB method is more efficient than the direct MUMPS method when solving for a single term in the Padé expansion. For wide angle approximations more terms are required to represent the migration operator, in this case direct methods are required. The algorithm is validated and the properties evaluated computing the migration impulse response in the SEG/EAGE salt model.

**Keywords:** Applied Geophysics. Numerical anisotropy. FFD. 3d migration. Complex Padé approximation. Iterative method

## LISTA DE ILUSTRAÇÃO

Figura 3.1	<i>Linha de corte e linha de corte modificada por um ângulo <math>\varphi</math> no plano complexo.</i>	31
Figura 3.2	<i>Curva de dispersão para ângulo na linha de corte de <math>\varphi = 25^\circ</math>, usando 1 termo da série de Padé complexa. a) para <math>\rho = 0.3</math>, b) <math>\rho = 0.5</math> e c) <math>\rho = 0.75</math>.</i>	37
Figura 3.3	<i>Curva de dispersão para ângulo na linha de corte de <math>\varphi = 45^\circ</math>, usando 1 termo da série de Padé complexa.. a) para <math>\rho = 0.3</math>, b) <math>\rho = 0.5</math> e c) <math>\rho = 0.75</math>.</i>	38
Figura 3.4	<i>Curvas de dispersão usando 3 termos da série de Padé complexa e variação de <math>\rho = 0.5</math>. a) Com ângulo na linha de corte de <math>\varphi = 25^\circ</math> . b) Com ângulo na linha de corte de <math>\varphi = 45^\circ</math>.</i>	39
Figura 4.1	<i>Gráficos com a relação <math>c/\Delta x = 150</math>. A esquerda, a) c) e e), temos <math>\rho = 0.5</math>. A direita, b), d) e f), temos <math>\rho = 0.75</math>.</i>	53
Figura 4.2	<i>Gráficos com o mesmo modelo de velocidade <math>c = 4500</math>. Coluna a esquerda, (a), c) e e)) com <math>\rho = 0.5</math>. Colunas a direita (b), d) e f)) com <math>\rho = 0.75</math>. De cima para baixo aumenta a discretização da malha a partir de 10m.</i>	54
Figura 4.3	<i>Gráficos do condicionamento da matriz avaliados para o limite de frequência mínima.</i>	55
Figura 5.1	<i>Cortes verticais da resposta ao impulso no plano <math>x_1=4160</math> m. Coluna direita com ângulo de <math>25^\circ</math> e coluna esquerda com ângulo de <math>45^\circ</math>. Em (a) e (b): FFD com fatoração direcional. Em (c) e (d) sem fatoração direcional.</i>	59
Figura 5.2	<i>Cortes verticais da resposta ao impulso no plano <math>x_1=3380</math> m. Coluna direita com ângulo de <math>25^\circ</math> e coluna esquerda com ângulo de <math>45^\circ</math>. Em (a) e (b): FFD com fatoração direcional. Em (c) e (d) sem fatoração direcional.</i>	60
Figura 5.3	<i>Cortes horizontais da resposta ao impulso no plano <math>x_3=550</math> m. Coluna direita com ângulo de <math>25^\circ</math> e coluna esquerda com ângulo de <math>45^\circ</math>. Em (a) e (b): FFD com</i>	

<i>fatoração direcional. Em (c) e (d) sem fatoração direcional. ....</i>	61
Figura 5.4 <i>Cortes horizontais da resposta ao impulso no plano <math>x_3=1050</math> m. Coluna direita com ângulo de <math>25^\circ</math> e coluna esquerda com ângulo de <math>45^\circ</math>. Em (a) e (b): FFD com fatoração direcional. Em (c) e (d) sem fatoração direcional. ....</i>	62
Figura 5.5 <i>Cortes horizontais da resposta ao impulso no plano <math>x_3=1550</math> m. Coluna direita com ângulo de <math>25^\circ</math> e coluna esquerda com ângulo de <math>45^\circ</math>. Em (a) e (b): FFD com fatoração direcional. Em (c) e (d) sem fatoração direcional. ....</i>	63
Figura 5.6 <i>Cortes verticais da resposta ao impulso. No plano <math>x_1=3380</math> m de (a) e (b). No plano <math>x_1=4160</math> m de (c) e (d). Coluna esquerda com ângulo de <math>0^\circ</math> e coluna direita com ângulo de <math>25^\circ</math>. Ambos sem splitting usando <math>\rho = 0.5</math>. ....</i>	64
Figura 5.7 <i>Cortes verticais da resposta ao impulso no plano <math>x_1=3380</math> m. (a) FFD-BICGSTAB, (b) FFD com fatoração multi-direcional, (c) FFDPI, (d) RTM. ....</i>	65
Figura 5.8 <i>Cortes horizontais da resposta ao impulso no plano <math>x_3=1050</math> m. (a) FFD-BICGSTAB, (b) FFD com fatoração multi-direcional, (c) FFDPI e (d) RTM. ...</i>	66
Figura 5.9 <i>Cortes horizontais da resposta ao impulso no plano <math>x_3=1350</math> m. (a) FFD-BICGSTAB, (b) FFD com fatoração multi-direcional, (c) FFDPI e (d) RTM. ...</i>	67
Figura 5.10 <i>Cortes verticais do modelo de velocidade de sal SEG/EAGE após aplicação de filtro de mediana móvel. (a) plano <math>x_1=1690</math> m, (b) plano <math>x_1=3380</math> m, (c) plano <math>x_1=4160</math> m, (d) plano <math>x_2=1690</math> m, (e) plano <math>x_2=3380</math> m e (f) plano <math>x_1=4160</math> m, ...</i>	70
Figura 5.11 <i>Cortes horizontais do modelo de velocidade de sal da SEG/EAGE após aplicação de filtro de mediana móvel. (a) plano <math>x_3=550</math> m, (b) plano <math>x_3=1050</math> m, (c) plano <math>x_3=1350</math> m e (d) plano <math>x_3=1550</math> m. ....</i>	71
Figura 5.12 <i>Cortes verticais da respostas ao impulso no plano <math>x_1=1690</math> m. (a) FFD-BICGSTAB, (b) FFD com fatoração, (c) FFDPI, (d) FFD-MUMPS e (e) RTM. ...</i>	72
Figura 5.13 <i>Cortes verticais da respostas ao impulso no plano <math>x_1=3380</math> m. (a) FFD-BICGSTAB, (b) FFD com fatoração, (c) FFDPI, (d) FFD-MUMPS e (e) RTM. ...</i>	73
Figura 5.14 <i>Cortes verticais na resposta ao impulso no plano <math>x_1=4160</math> m. (a) FFD-BICGSTAB, (b) FFD com fatoração, (c) FFDPI, (d) FFD-MUMPS e (e) RTM. ...</i>	74

Figura 5.15 *Cortes verticais da resposta ao impulso no plano  $x_2=1690$  m. (a) FFD-BICGSTAB, (b) FFD com fatoração, (c) FFDPI, (d) FFD-MUMPS e (e) RTM.* 75

Figura 5.16 *Cortes verticais da resposta ao impulso no plano  $x_2=3380$  m. (a) FFD-BICGSTAB, (b) FFD com fatoração, (c) FFDPI, (d) FFD-MUMPS e (e) RTM.* 76

Figura 5.17 *Cortes verticais da resposta ao impulso no plano  $x_2=4160$  m. (a) FFD-BICGSTAB, (b) FFD com fatoração, (c) FFDPI, (d) FFD-MUMPS e (e) RTM.* 77

Figura 5.18 *Cortes horizontais da resposta ao impulso no plano  $x_3=550$  m. (a) FFD-BICGSTAB, (b) FFD com fatoração, (c) FFDPI, (d) FFD-MUMPS e (e) RTM.* 78

Figura 5.19 *Cortes horizontais da resposta ao impulso no plano  $x_3=1050$  m. (a) FFD-BICGSTAB, (b) FFD com fatoração, (c) FFDPI, (d) FFD-MUMPS e (e) RTM.* 79

Figura 5.20 *Cortes horizontais da resposta ao impulso no plano  $x_3=1350$  m. (a) FFD-BICGSTAB, (b) FFD com fatoração, (c) FFDPI, (d) FFD-MUMPS e (e) RTM.* 80

Figura 5.21 *Cortes horizontais da resposta ao impulso no plano  $x_3=1550$  m. (a) FFD-BICGSTAB, (b) FFD com fatoração, (c) FFDPI, (d) FFD-MUMPS e (e) RTM.* 81

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ABREVIATURA	DESCRIÇÃO
BICG	Do inglês “Biconjugate Gradient”
BICGSTAB	Do inglês “Biconjugate Gradient Stabilized”
CG	Do inglês “Conjugate Gradient”
CGS	Do inglês “Conjugate Gradient Squared”
FD	Do inglês “Finite-Difference”
FFD	Do inglês “Fourier Finite-Difference”
FFDPI	Do inglês “Fourier Finite-Difference Plus Interpolation”
MUMPS	Do inglês “MUltifrontal Massively Parallel sparse direct Solver”
RTM	Do inglês “Reverse Time Migration”
SEG/EAGE	Do inglês SEG “Society Exploration Geophysicists” e EAGE “European Association of Geoscientists and Engineers”

## LISTA DE SÍMBOLOS

SÍMBOLO LATINO	DESCRIÇÃO
$a_i$	Parâmetro do operador de Ristow and Rürh
$a_n$	Coefficiente de Padé real
$A_n$	Coefficiente de Padé complexo
$A_{\eta,\nu}$	Elemento da matriz $\mathbf{A}$ na linha $\eta$ e coluna $\nu$
$\mathbf{A}$	Matriz de coeficientes do operador FFD com Padé complexo
$b_i$	Parâmetro do operador de Ristow and Rürh
$b_n$	Coefficiente de Padé real
$B_n$	Coefficiente de Padé complexo
$\mathbf{b}$	Vetor conhecido do operador FFD
$c_0$	Coefficiente de Padé real
$C_0$	Coefficiente de Padé complexo
$c(\mathbf{x})$	Velocidade do modelo
$\mathbf{D}_{\mathbf{x}_1}$ e $\mathbf{D}_{\mathbf{x}_2}$	Derivadas discretizadas na forma matricial na direções de $x_1$ e $x_2$
$i$	Unidade imaginária $\sqrt{-1}$ , a menos que seja dito o contrário
$\mathbf{I}$	Matriz identidade
$I(\mathbf{x})$	Imagem migrada em $\mathbb{R}$
$\mathbf{k}$	Coordenada frequência-espaco na direções de $k_1$ , $k_2$ e $k_3$
$\mathcal{K}(A, b)$	Espaco de Krylov associado a $A$ e $b$
$\mathcal{K}_k$ e $\mathcal{L}_k$	Subespaços de Krylov de ordem $k$
$\mathbf{H}$	Matriz diagonal qualquer
$\tilde{\mathbf{H}}$	Matriz de Heisenberg superior
$N$	Números de termos da série de Padé
$p_{i+1}$ e $q_{i+1}$	Vetores de busca na iteração $i$
$p(\mathbf{x}, t)$	Campo de pressão no domínio do tempo $t$
$P(\mathbf{x}, \omega)$	Campo de pressão no domínio do número de onda
$\mathbf{P}$	Campo de pressão na forma matricial
$s$	Vagarosidade
$S$	Superfície
$r_0$ e $t_0$	Vetores de resíduo iniciais

---



---

**SÍMBOLO LATINO    DESCRIÇÃO**

---



---

$r_{i+1}$ e $t_{i+1}$	Vetores de resíduo na iteração $i$
$R$	Refletividade ou Refletor
$t$	Coordenada temporal
$v$	Velocidade constante para uma camada,
$v_j$	Vetor de uma base $\mathbf{V}$ para qualquer índice $j$
$\mathbf{V}_k$ e $\mathbf{Z}_k$	Bases do subespaço de Krylov
$\mathbf{x}$	Coordenada espacial $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ , a menos que seja dito o contrário
$y_0$	Vetor solução inicial
$y_{i+1}$	Vetor solução na iteração $i$
$\mathbf{y}$	Vetor solução do operador FFD
$z_j$	Vetor de uma base $\mathbf{Z}$ para qualquer índice $j$

---



---



---

**SÍMBOLO GREGO    DESCRIÇÃO**

---



---

$\alpha_i$	Escalar de atualização do vetor solução $y_{i+1}$
$\alpha_m$ e $\alpha_0$	Coefficientes do polinômio mínimo associado à $\mathbf{A}$
$\beta_{i+1}$	Escalar de atualização do vetor de busca $p_i$
$\delta_{ij}$	Delta de Kronecker
$\Delta x_3$	Varição vertical
$\eta_j$	Produto interno de vetores $\langle v_{j+1}, v_j \rangle$
$\theta$	Ângulo de abertura de um refletor em mergulho
$\varphi$	Ângulo de rotação de linha de corte
$\omega$	Frequência angular

---

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>16</b>
<b>2</b>	<b>MIGRAÇÃO COM EQUAÇÃO DA ONDA UNIDIRECIONAL 3D</b>	<b>18</b>
2.1	EQUAÇÃO DA ONDA ACÚSTICA UNIDIRECIONAL	19
2.2	MÉTODOS DE MIGRAÇÃO	19
2.2.1	O método de deslocamento de fase	20
2.2.2	O método de <i>split-step</i>	21
2.2.3	O método de diferenças finitas - FD	23
2.2.4	O método de diferenças finitas e Fourier - FFD	23
2.2.5	O método de diferenças finitas e Fourier mais interpolação - FFDPI	26
2.3	CONDIÇÃO DE IMAGEM	29
<b>3</b>	<b>ALGORITMO 3D USANDO FFD COM APROXIMAÇÃO DE PADÉ COMPLEXA</b>	<b>30</b>
3.1	APROXIMAÇÃO DE PADÉ REAL	30
3.2	APROXIMAÇÃO DE PADÉ COMPLEXA	31
3.3	ALGORITMO 3D DE FFD COM APROXIMAÇÃO DE PADÉ	32
3.3.1	Aproximação por série de potência	32
3.3.2	Aproximação alternativa	33
3.4	IMPLEMENTAÇÃO USANDO CRANK-NILCOLSON	33
3.5	ANÁLISE DA RELAÇÃO DE DISPERSÃO	35
3.6	REPRESENTAÇÃO MATRICIAL	40
<b>4</b>	<b>SISTEMAS LINEARES</b>	<b>42</b>
4.1	TÉCNICA DA FATORAÇÃO DIRECIONAL	42

4.2	MÉTODOS DIRETOS . . . . .	43
4.3	MÉTODOS ITERATIVOS . . . . .	45
4.3.1	Gradiente conjugado - CG . . . . .	48
4.3.2	Gradiente biconjugado - BICG . . . . .	49
4.3.3	Gradiente biconjugado estabilizado - BICGSTAB . . . . .	50
4.4	ANÁLISE DE CONVERGÊNCIA DO BICGSTAB . . . . .	51
4.5	ALGORITMOS . . . . .	56
5	EXPERIMENTOS NUMÉRICOS . . . . .	58
5.1	RESULTADOS NO MODELO HOMOGÊNEO . . . . .	58
5.2	RESULTADOS NO MODELO SAL SEG/EAGE . . . . .	67
6	CONCLUSÃO . . . . .	82
	REFERÊNCIAS . . . . .	84
	APÊNDICES . . . . .	87
	APÊNDICE A - DEMOSTRAÇÃO DAS EQUAÇÕES DA ONDA ACÚSTICA UNIDIRECIONAL . . . . .	88
	APÊNDICE B - APROXIMAÇÃO DE PADÉ COMPLEXA . . . . .	90
	APÊNDICE C - OPERADOR DIFERENÇA FFD COM APROXIMAÇÃO DE PADÉ . . . . .	92

# 1 INTRODUÇÃO

O termo migração se refere ao processo de gerar imagem de refletores em subsuperfície a partir dos dados sísmicos registrados para um dado modelo de velocidade. Dentre os vários métodos de migração existentes, os métodos de migração com equação da onda acústica, apesar do maior custo computacional, vem substituindo a migração Kirchhoff devido a sua vantagem de imagear modelos com forte variação lateral de velocidade.

Os métodos de migração por continuação para baixo utilizam a equação da onda acústica unidirecional para extrapolar o campo de onda em profundidade. Nesta abordagem a propagação é descrita aproximadamente ao longo da vertical. O tipo de aproximação para a equação unidirecional determina vários algoritmos de migração: deslocamento de fase (GAZDAG, 1978), *split-step* (STOFFA et al., 1990), diferenças finitas (FD) (CLAERBOUT, 1985), diferenças finitas e Fourier (FFD) (RISTOW; RÜHL, 1994) e diferenças finitas e Fourier mais interpolação (FFDPI) (BIONDI, 2002). Estes algoritmos diferem no tratamento de variações laterais de velocidade na propagação do campo de onda.

A migração com equação da onda unidirecional usando FD ou FFD, tem algumas limitações como imagear eventos com grandes ângulos de mergulho e no tratamento de modos evanescentes. A expansão de Padé complexa do operador associado a equação unidirecional permite contornar parcialmente estas limitações (AMAZONAS, 2007).

A implementação do método de migração 3D FD ou FFD requer a solução de um grande número de sistemas lineares. Cada solução representa o campo de onda extrapolado em cada passo em profundidade para cada frequência. Para reduzir o custo computacional destes algoritmos é comum usar a técnica da fatoração direcional do operador de continuação (CLAERBOUT, 1985). Esta abordagem aumenta a eficiência computacional, pois requer apenas a solução de sistemas lineares tridiagonais, mas introduz anisotropia numérica. Este efeito resulta no posicionando incorreto de refletores.

Essa dissertação investiga a implementação da migração FFD 3D sem usar a fatoração do operador ao longo de direções ortogonais, o que requer a solução de sistema lineares bandeados com larga banda. Para isso usamos dois métodos para a solução: (1) um método direto, decomposição Gaussiana, utilizando o pacote MUMPS (AMESTOY et al., 2001, 2006), que requer maior armazenamento de memória; (2) um método iterativo, gradiente biconjugado

estabilizado (BICGSTAB) (VORST, 1992), com custo de armazenamento muito menor. Os algoritmos implementados foram validados em modelos homogêneos e no modelo heterogêneo sintético do sal 3D da SEG/EAGE (AMINZEDEH et al., 1995).

A dissertação está organizada em cinco capítulos. O capítulo 2 apresenta uma revisão de métodos de migração por continuação do campo de ondas. Discutimos a fatoração da equação de onda em equações unidirecionais e diferentes estratégias de construir a solução destas equações: deslocamento de fase, *split-step*, FD, FFD e FFDPI.

O capítulo 3 discute a expansão de Padé complexa e sua aplicação na migração FFD. Apresentamos a dedução do algoritmo FFD e a análise da curva de dispersão deste algoritmo. Discutimos porque a aproximação de Padé complexa representa uma aproximação mais estável do operador de propagação que a aproximação de Padé real.

O capítulo 4 apresenta uma introdução aos algoritmos de solução numérica de sistemas lineares. Enfatizamos algoritmos de solução através de métodos iterativos. Discutimos a aplicação dos algoritmos de solução de sistemas lineares na migração FFD em 3D. Apresentamos uma discussão sobre a convergência do algoritmos BICGSTAB na migração FFD sem fatoração direcional do operador de continuação.

O capítulo 5 apresentamos o resultado de experimentos numéricos. Efetuamos a comparação da resposta ao impulso do migração FFD proposto com implementações da migração FFD com fatoração multi-direcional (RISTOW; RÜHL, 1997), migração FFDPI (BIONDI, 2002) e migração reversa no tempo (RTM)(BAYSAL; KOSLOFF; SHERWOOD, 1983). Estes experimentos indicam que a migração FFD com fatoração multi-direcional apresenta erros de posicionamento em regiões com forte variação lateral de velocidade. Para meios com menor variação lateral em suas propriedades a fatoração multi-direcional é adequada. Finalmente, a conclusão apresenta uma síntese dos principais resultados deste trabalho e discute suas limitações e perspectivas de trabalhos futuros.

## 2 MIGRAÇÃO COM EQUAÇÃO DA ONDA UNIDIRECIONAL 3D

Considere a superfície de afastamento nulo em que a posição da fonte  $S_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$  para  $n$  fontes) também é a posição do receptor. Cada fonte emite um pulso que se propaga esfericamente até o refletor, e deste retorna para ser captado pelo receptor. Esse processo é feito separadamente para cada par de fonte e receptor e depois repetido até todas as fontes e receptores de uma linha sísmica.

Dada uma fonte  $S_i$ , cujo pulso propaga-se em um meio até um refletor. A direção de propagação do pulso incidente é vertical até o refletor, e o pulso refletido se propaga perpendicularmente ao refletor. Se o refletor não for horizontal, então, o pulso refletido não retorna pelo mesmo caminho do pulso incidente causando um erro referente à localização do refletor, e um erro referente ao tempo de propagação. Existem programas que visam corrigir esses erros, chamados de programas de “migração” que ajustam parâmetros como tempo  $t$ , velocidade do modelo  $v$  e a inclinação do refletor  $\theta$ .

Migração em geofísica, consiste em um processo de posicionamento dos refletores em subsuperfície em suas posições reais, sem erros aparentes devido ao um refletor em mergulho, com aquisição de afastamento nulo. Entretanto, em sísmica não temos apenas um único refletor, o que exige um número maior de dados para o *input*. Além de que, em uma secção de afastamento nulo temos eventos cruzados, mudando a figura migrada causada pela soma de amplitudes diferentes exigindo métodos para corrigir esses erros conhecidos como métodos de migração.

Os métodos de migração são baseados na propagação dos campos de ondas em profundidade, gerados por pulsos nas posições das fontes  $S_i$ ; e aplicação de condições que permitam a formação da imagem, chamadas de condições de imagem.

Com várias técnicas de migração criadas ao longo dos anos, a indústria melhora seus métodos exigindo como *input* um bom modelo de velocidade para que os programas de migração mostrem as posições reais dos refletores, mesmo com superposição de eventos. E muito destes métodos são geralmente referidos como técnicas de migração da equação da onda acústica unidirecional (CLAERBOUT, 1985).

## 2.1 EQUAÇÃO DA ONDA ACÚSTICA UNIDIRECIONAL

A equação da onda acústica 3D sem fonte, que rege a propagação em um meio heterogêneo e ilimitado em todas as direções, é dado por

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2(\mathbf{x})} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) p(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (2.1)$$

em que  $c(\mathbf{x})$  é a velocidade de propagação da onda compressional e  $p(\mathbf{x}, t)$  corresponde ao campo de pressão, na posição  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$  no instante  $t$ .

Para obter as equações unidirecionais da onda, devemos trabalhar no domínio da frequência. Aplicando a transformada de Fourier direta temporal, na equação (2.1), separando o operador dessa nova equação em relação as derivadas parciais em  $x_3$  e fatorando-a encontramos duas formas de representação do campo de onda, que são duas equações unidirecionais em relação a profundidade  $x_3$ , dadas por (veja apêndice A):

$$\frac{\partial P(\mathbf{x}, \omega)}{\partial x_3} = \frac{i\omega}{c(\mathbf{x})} \sqrt{1 + \frac{c^2(\mathbf{x})}{\omega^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right)} P(\mathbf{x}, \omega) \quad (2.2)$$

e

$$\frac{\partial P(\mathbf{x}, \omega)}{\partial x_3} = -\frac{i\omega}{c(\mathbf{x})} \sqrt{1 + \frac{c^2(\mathbf{x})}{\omega^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right)} P(\mathbf{x}, \omega) \quad (2.3)$$

em que  $\omega$  é a frequência angular. Sendo (2.2) a representação para campo de onda que se propaga para cima (ascendente), e (2.3) o que se propaga para baixo (descendente). Usando o sentido descendente do campo de onda unidirecional, devemos extrapolá-lo para baixo, usando como condição inicial  $P(x_1, x_2, x_3 = 0, t)$  até a condição limite de  $P(\mathbf{x}, t = 0)$ .

A equação da onda unidirecional, é uma ferramenta importante para imageamento de meios complexos (ZHANG; WANG; YAO, 2009). A aproximação para o operador unidirecional de propagação em profundidade determina o tipo de migração (AMAZONAS, 2007).

## 2.2 MÉTODOS DE MIGRAÇÃO

Tomando um determinado intervalo do modelo de velocidade em profundidade. Se o meio não tem variação lateral de velocidade, temos a solução exata da equação da onda, e o

operador unidirecional pode ser representado no domínio de Fourier (GAZDAG, 1978). Enquanto, para meios com variação lateral de velocidade os operadores unidirecionais precisam ser aproximados, como por exemplo, a expansão em Taylor, usada quando essas variações de velocidades do modelo são suaves (STOFFA et al., 1990). Ou a expansão em frações continuadas, utilizada para modelo de velocidades com fortes variações laterais (CLAERBOUT, 1985; RISTOW; RÜHL, 1994; BIONDI, 2002).

### 2.2.1 O método de deslocamento de fase

A migração por deslocamento de fase, conhecida como migração *phase-shift*, foi proposta por Gazdag (1978). Sendo um método de migração no domínio da frequência temporal e espacial, usado somente em situações onde o modelo de velocidade não varia lateralmente e a velocidade do modelo será  $c(\mathbf{x}) = c(x_3)$ . Então, para uma camada de velocidade constante em profundidade, a velocidade  $c(x_3)$  passa a ser  $v$  e o operador unidirecional (2.3) fica como:

$$-\frac{i\omega}{c(\mathbf{x})} \sqrt{1 + \frac{c^2(\mathbf{x})}{\omega^2} \left( \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right)} = -\frac{i\omega}{v} \sqrt{1 + \frac{v^2}{\omega^2} \left( \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right)} \quad (2.4)$$

em um intervalo genérico de  $x_3$  e  $x_3 + \Delta x_3$ , mantendo a forma para o operador da equação de onda unidirecional. Aplicando a transformada de Fourier direta espacial nas direções horizontais<sup>1</sup>. A nova equação de onda unidirecional de extrapolação do campo passa a ser,

$$\frac{\partial P(k_1, k_2, x_3, \omega)}{\partial x_3} = -\frac{i\omega}{v} \sqrt{1 - \left(\frac{v}{\omega}\right)^2 [k_1^2 + k_2^2]} P(k_1, k_2, x_3, \omega), \quad (2.5)$$

sendo  $k_1$  e  $k_2$  o número de onda nas direções horizontais  $x_1$  e  $x_2$ , respectivamente. Cujas solução analítica é

$$P(k_1, k_2, x_3 + \Delta x_3, \omega) = P(k_1, k_2, x_3, \omega) \exp(ik_3^v \Delta x_3), \quad (2.6)$$

Para cada número de onda  $k_3^v$ , onde a exponencial representa o deslocamento de fase; e  $k_3^v$  também é a relação de dispersão, que pode ser expressa como a terceira componente do vetor número de onda, definida por

---

<sup>1</sup>Definida no apêndice A.

$$k_3^v = -\frac{\omega}{v} \sqrt{1 - \left(\frac{v}{\omega}\right)^2 [k_1^2 + k_2^2]}. \quad (2.7)$$

Portanto, para a extrapolação do campo de onda para baixo  $\Delta x_3 > 0$ , e no sentido positivo do tempo  $k_3^v > 0$  e  $\omega < 0$  (GAZDAG; SGUAZZERO, 1984), a equação (2.6) passa a ser

$$P(k_1, k_2, x_3 + \Delta x_3, \omega) = P(k_1, k_2, x_3, \omega) \exp \left\{ -i \frac{\omega}{v} \sqrt{1 - \left(\frac{v}{\omega}\right)^2 [k_1^2 + k_2^2]} \Delta x_3 \right\}. \quad (2.8)$$

A equação de extrapolação do campo muda de fase ao encontrar uma nova interface em profundidade. Então, aplica-se a transformada de Fourier inversa encontrando um novo campo de onda, a partir do qual se estima a refletividade do meio (FERGUSON; MARGRAVE, 1999). Esse processo é repetido, de modo que a solução do campo de onda para a próxima camada  $P(k_1, k_2, x_3 + \Delta x_3, \omega)$ , é baseada no campo de onda da camada atual  $P(k_1, k_2, x_3, \omega)$ . Sendo esta uma condição inicial para a solução de todos os campos de ondas para todas as camadas com  $j = 1, 2, \dots, Nx_3$ , para cada intervalo de  $x_3^j$  a  $x_3^j + j\Delta x_3$ .

Observe que para obter a solução de (2.8) não foi necessária nenhuma aproximação. Então, como método preciso pode imagear refletores de até 90° de inclinação (HAN, 1998). Logo, a vantagem desse método é permitir encontrar refletividades com grande abertura angular. Mas, é limitado às variações apenas na direção vertical do modelo, sendo assim, esse método não representa muito bem múltiplas e reflexões.

### 2.2.2 O método de *split-step*

O método de *split-step* foi inicialmente introduzido por Stoffa et al (1990), admitindo pequenas variações laterais de velocidade, como se fossem perturbações em um meio considerado inicialmente homogêneo, com velocidade de referência  $v$ . A aplicação do *split-step* é baseada no domínio da frequência, alternando entre: frequência temporal e frequência espacial.

Partindo do operador unidirecional da equação (2.3) e somamos e subtraímos por outro operador unidirecional com a velocidade de referência constante  $v$ . Logo, o operador torna-se

$$\frac{\omega}{c(\mathbf{x})} \sqrt{1 + X^2} = \frac{\omega}{v} \sqrt{1 + \frac{v^2}{\omega^2} \left( \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right)} +$$

$$+ \left[ \frac{\omega}{c(\mathbf{x})} \sqrt{1 + X^2} - \frac{\omega}{v} \sqrt{1 + \frac{v^2}{\omega^2} \left( \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right)} \right]. \quad (2.9)$$

onde

$$X^2 \equiv \frac{c^2(\mathbf{x})}{\omega^2} \left[ \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right]. \quad (2.10)$$

O termo em colchetes de (2.9) representa a perturbação, e por isso expandí-lo em Taylor, até ordem zero, é uma boa tentativa de aproximação para um modelo de velocidade com uma pequena variação lateral, tornando-se

$$\frac{\partial P(\mathbf{x}, \omega)}{\partial x_3} \approx -\frac{i\omega}{v} \left[ \sqrt{1 + \frac{v^2}{\omega^2} \left( \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right)} + \frac{v}{c(\mathbf{x})} - 1 \right] P(\mathbf{x}, \omega). \quad (2.11)$$

Usando o método da fatoração (CLAERBOUT, 1985), podemos separá-la em duas partes,

$$\frac{\partial P(\mathbf{x}, \omega)}{\partial x_3} = -\frac{i\omega}{v} \sqrt{1 + \frac{v^2}{\omega^2} \left( \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right)} P(\mathbf{x}, \omega) \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial P(\mathbf{x}, \omega)}{\partial x_3} \approx -\frac{i\omega}{v} \left[ \frac{v}{c(\mathbf{x})} - 1 \right] P(\mathbf{x}, \omega). \quad (2.13)$$

A primeira representa a aproximação por deslocamento de fase da secção anterior, cuja solução é representada pela equação (2.8). A segunda parte representa a correção para a variação lateral de velocidade, cujo resultado é dado por:

$$P(x_1, x_2, x_3 + \Delta x_3, \omega) = P'(x_1, x_2, x_3 + \Delta x_3, \omega) \exp \left\{ -\frac{i\omega}{v} \left( \frac{v}{c(\mathbf{x})} - 1 \right) \Delta x_3 \right\}, \quad (2.14)$$

onde  $P'(x_1, x_2, x_3 + \Delta x_3, \omega)$  é a transformada de Fourier inversa de  $P(k_1, k_2, x_3 + \Delta x_3, \omega)$  em  $x_1$  e  $x_2$  da equação (2.8). A igualdade de (2.14) é uma forma de introduzir a correção para a variação lateral de velocidade no operador de deslocamento de fase (STOFFA et al., 1990).

A solução de (2.14) servirá de condição inicial para o próximo operador de deslocamento de fase (2.8) em outro nível em profundidade, cuja solução deste servirá de condição inicial para a próxima correção de *split-step* no mesmo nível em profundidade. Recomeçando o procedimento em outro nível em profundidade até todas as camadas do modelo de velocidade.

A vantagem desse método é introduzir pequenas variações laterais de velocidade, e com esse propósito o mesmo é incondicionalmente estável. Porém, pode apresentar problemas para imagear grandes ângulos de mergulho, além de precisar de mais de uma velocidade de referência  $v$  se lateralmente o modelo tiver várias velocidades.

### 2.2.3 O método de diferenças finitas - FD

A grande vantagem do método de diferenças finitas (FD) em relação ao *split-step* é permitir que o modelo de velocidade tenha forte variações laterais. Então, tomando a equação da onda unidirecional (2.3) devemos encontrar uma aproximação para o operador unidirecional; Claerbout (1985) faz duas possíveis aproximações: o método de Muir e a expansão em Taylor. Enquanto, Amazonas (2007) propõe usar série de Padé.

A partir da idéia original de Claerbout (1985), o operador da equação em (2.3) pode ser aproximado por uma série de frações parciais. Logo, o operador de migração unidirecional pode ser representado por uma série de Padé (BAMBERGER et al., 1988), admitindo a seguinte forma:

$$-\frac{i\omega}{c(\mathbf{x})}\sqrt{1+X^2} \approx -\frac{i\omega}{c^2(\mathbf{x})} \left[ c_0 + \sum_{n=1}^N \frac{a_n X^2}{1+b_n X^2} \right], \quad (2.15)$$

em que  $a_n$ ,  $b_n$  e  $c_0$  são os coeficientes dessa série e serão definidos no próximo capítulo; e  $N$  é o número de termos da série. Substituindo (2.15) em (2.3) e aplicando a técnica da fatoração (CLAERBOUT, 1985), temos

$$\frac{\partial P(\mathbf{x}, \omega)}{\partial x_3} = -\frac{i\omega}{c(\mathbf{x})} c_0 P(\mathbf{x}, \omega) \quad (2.16)$$

$$\frac{\partial P(\mathbf{x}, \omega)}{\partial x_3} \approx -\frac{i\omega}{c(\mathbf{x})} \sum_{n=1}^N \frac{a_n X^2}{1+b_n X^2} P(\mathbf{x}, \omega) \quad (2.17)$$

em que (2.16) pode ser resolvida analiticamente. Enquanto, em (2.17) usa-se a aproximação de Crank-Nicolson, conhecido por ser incondicionalmente estável, e para operador de derivada parcial aplica-se o FD (CLAERBOUT, 1985). As soluções de (2.16) e de (2.17) servirão de condições iniciais para a próxima extrapolação do campo em profundidade (COSTA, 2011). Esse método apresenta limitações para grandes ângulos de incidência e no tratamento de ondas evanescentes (AMAZONAS, 2007; BIONDI, 2002), e para evitar reflexões nas bordas do modelo, precisam de condições de fronteira absorvente.

## 2.2.4 O método de diferenças finitas e Fourier - FFD

O método de diferenças finita e Fourier (FFD) foi inicialmente proposto por Ristow e Rühl (1994) com o objetivo de resolver dois grandes problemas geofísicos: imageamento em refletores com grande ângulo de mergulho e imageamento em meio com variação arbitrária de velocidade em todas as direções. No qual esse operador é a combinação de outros dois métodos: o deslocamento de fase (GAZDAG, 1978) e o FD (CLAERBOUT, 1985). O FFD consiste em combinar as vantagens de cada método, cujo objetivo é generalizar e melhorar a aproximação *split-step* de Stoffa et al (1990) usando forte variação lateral de velocidade com adição do termo de correção por FD.

Partindo da equação da onda unidirecional descendente para um meio com velocidade de referência constante  $v$ , representando uma aproximação para o equação (2.3), satisfazendo a condição de  $v \leq c(\mathbf{x})$ . Em seguida é calculado o erro dessa aproximação, ou seja, a diferença dos operadores unidirecionais para velocidades  $c(\mathbf{x})$  e  $v$ ,

$$d = \frac{\omega}{c(\mathbf{x})} \sqrt{1 + \frac{c(\mathbf{x})}{\omega^2} \left( \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right)} - \frac{\omega}{v} \sqrt{1 + \frac{v^2}{\omega^2} \left( \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right)}. \quad (2.18)$$

A escolha para  $v \leq c(\mathbf{x})$  não é arbitrária, nota-se que  $v$  é escolhido dessa maneira para manter o sinal de  $d$  positivo, mantendo o sinal dos operadores unidirecionais acima.

Fazendo expansão em Taylor de ambas as raízes quadradas do operador (2.18) até a quarta ordem e reordenando essa diferença em termos de frações parciais, encontramos o operador unidirecional (2.3) representado por uma soma de três equações. A primeira parcela, segunda e terceira do operador são dados, respectivamente, por:

$$A = -\frac{i\omega}{v} \sqrt{1 + \frac{v^2}{c^2(\mathbf{x})} X^2}, \quad (2.19)$$

$$B = -\frac{i\omega}{c(\mathbf{x})} \left( 1 - \frac{c(\mathbf{x})}{v} \right), \quad (2.20)$$

$$C \approx -\frac{i\omega}{c(\mathbf{x})} \left( 1 - \frac{v}{c(\mathbf{x})} \right) \left( \frac{a_1 X^2}{1 + b_1 X^2} + \frac{a_2 X^2}{1 + b_2 X^2} \dots \right). \quad (2.21)$$

Em que o termo de  $A$  é conhecido como o operador de deslocamento de fase de Gazdag (1978), aplicado no domínio  $\omega$  e  $\mathbf{k}$ . O termo de  $B$  corresponde ao termo de correção de Stoffa et al (1990); e a respeito do termo de  $C$ , temos uma soma de frações parciais, que

correspondem a expansão de Padé real. A soma de  $A$ ,  $B$  e  $C$  correspondem ao operador de FFD (RISTOW; RÜHL, 1994), logo,

$$-\frac{i\omega}{c(\mathbf{x})}\sqrt{1+X^2} \approx A + B + C. \quad (2.22)$$

os parâmetros  $a_1$ ,  $b_1$ ,  $a_2$  e  $b_2$  de (2.21) são determinados como

$$a_i = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad b_i = \frac{1}{4} \left\{ \frac{v^2}{c^2(\mathbf{x})} + \frac{v}{c(\mathbf{x})} + 1 \right\},$$

para  $a_i = (a_1, a_2)$  e  $b_i = (b_1, b_2)$ . O que mostra que o parâmetro  $b_i$  não é constante e é adaptado para a velocidade do meio  $c(\mathbf{x})$ . O termo  $C$  da aproximação de FFD pode ser: o termo de correção de segunda ordem, quando  $b_i = 0$ , correspondente para ângulos de abertura de  $15^\circ$  para os refletores. Ou de terceira ordem, quando  $b_i \neq 0$ , em que os ângulos de abertura podem ser de até  $45^\circ$ . Levando a três análises importantes sobre o modelo de velocidade:

1. Para o primeiro caso, sem variação lateral de velocidade, ou seja,  $c(\mathbf{x}) = v$ . Observe que os termos de  $B$  e  $C$  desaparecem da forma final do operador de migração, resultando em,

$$\frac{\omega}{c(\mathbf{x})}\sqrt{1+X^2} = \frac{\omega}{v}\sqrt{1 + \frac{v^2}{c^2(\mathbf{x})}X^2}$$

para o método FFD proposto.

2. No segundo caso, com forte variação lateral de velocidade, então,  $v/c(\mathbf{x}) \approx 0$ , restando

$$\sqrt{1+X^2} \approx \left(1 - \frac{v}{c(\mathbf{x})}\right) \sum_{i=1}^2 \left( \frac{a_i X^2}{1 + b_i X^2} + \dots \right).$$

Observe que para esse caso, que o parâmetro  $b_i = 0,25$ , correspondendo ao operador de migração unidirecional com o ângulo de abertura de  $45^\circ$  de Claerbout (1985). Para  $b_i = 0$  obtêm-se o operador de migração unidirecional para ângulo de abertura igual a  $15^\circ$ .

3. Para o terceiro caso, com variação moderada de velocidade, ou seja,  $0 < v/c(\mathbf{x}) < 1$ . Note que  $b_i$  é variável no intervalo  $0,25 \leq b_i \leq 0,75$ , representando um bom operador para tratar dados com variáveis ângulos de abertura. Tal qual deve ser a maioria dos dados reais, cujo modelo de velocidade é bastante variável além de possíveis interfaces com grande ângulo

de abertura.

O operador de migração 3D de FFD apresentado neste trabalho usamos expansão em Padé complexa proposta por Amazonas. et al. (2007) em um meio 2D. Para melhor entendimento dessa expansão e desse operador proposto veja capítulo 3 em que a aproximação de Padé é melhor explicada e o operador é explicitado.

### 2.2.5 O método de diferenças finitas e Fourier mais interpolação - FFDPI

O método de FFDPI foi proposto por Biondi (1992) surgindo como uma combinação do método de *phase-screen* (JIN; WU; PENG, 1998), *generalized-screen propagators* (ROUSSEAU; HOOP, 2001), *local Born-Fourier migration* (HUANG; FEHLER; WU, 1999) juntamente com o FFD proposto por Ristow e Rühl (1994), que pode apresentar instabilidades numéricas quando aplicado em refletores com descontinuidades acentuadas. O FFDPI consiti em uma aproximação em Taylor de primeira ordem do campo de pressão, na profundidade  $x_3 + \Delta x_3$ , em relação a vagarosidade  $s$

$$P(k_1, k_2, x_3 + \Delta x_3) = P_{x_3} e^{ik_3^v \Delta x_3} \approx P_{x_3} \exp \left\{ i \left[ k_3^v + ik \frac{dk_3}{ds} \Delta s \right] \Delta x_3 \right\} \quad (2.23)$$

em que  $k_3^v$  é o número de onda vertical para um meio com velocidade de referência  $v$ , cuja forma foi mostrada na secção 1.3, e sua derivada em relação à vagarosidade  $s = 1/c$  é

$$\frac{dk_3^v}{ds} = \frac{\omega}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{\omega^2} [k_1^2 + k_2^2]}},$$

sabendo que a correção para o FFD corresponde a uma diferença entre as raízes quadradas dos operadores para velocidade do meio e velocidade de referência, então  $dk_3^v/ds$  passa a ser  $\Delta k_3/\Delta s$ , usando expansão para frações continuadas de Muir até segunda ordem, considerando  $Y^2 = \frac{1}{c^2(\mathbf{x})} X^2$  ( $X^2$  definido em (2.10)) e sabendo que  $\Delta s = [v - c(\mathbf{x})]/vc(\mathbf{x})$ , encontramos uma determinada forma para  $\Delta k_3/\Delta s$ . Entretanto, para essa aproximação pode ocorrer instabilidades numéricas sendo somente estável para modelos cuja variação de velocidades seja suave, além de instabilidades quando existe uma acentuada descontinuidade no campo de velocidades, apresentando comportamento randômico em regiões com baixa vagarosidade (BIONDI, 2002). Para evitar esses problemas o termo  $[v^2 + c^2(\mathbf{x}) + vc(\mathbf{x})]Y^2$  passa a ser um produto de matrizes equivalente à  $\Sigma'Y^2\Sigma$ . Então reescrevendo  $dk_3/ds$  na forma matricial,

encontramos

$$\frac{\Delta k_3}{\Delta s} \Delta s \approx \omega \left\{ \frac{v - c(\mathbf{x})}{vc(\mathbf{x})} + \text{sign}[v - c(\mathbf{x})] \Delta \frac{\Sigma' Y^2 \Sigma}{I + \Sigma' Y^2 \Sigma} \right\} \quad (2.24)$$

sendo,

$$\begin{aligned} \Sigma' Y^2 \Sigma &= -\frac{1}{\omega^2 \Delta x_1^2} \Sigma' D' D \Sigma = -\frac{1}{\omega^2 \Delta x_1^2} \Sigma' T \Sigma \\ &= -\frac{1}{\omega^2 \Delta x_1^2} \Sigma' \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \Sigma \end{aligned}$$

onde

$$\Sigma = \frac{1}{2} \text{Diag} \begin{bmatrix} \sqrt{c_1^2 + v_1^2 + c_1 v_1} \\ \vdots \\ \sqrt{c_{i-1}^2 + v_{i-1}^2 + c_{i-1} v_{i-1}} \\ \sqrt{c_i^2 + v_i^2 + c_i v_i} \\ \sqrt{c_{i+1}^2 + v_{i+1}^2 + c_{i+1} v_{i+1}} \\ \vdots \\ \sqrt{c_n^2 + v_n^2 + c_n v_n} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \Delta = 2 \text{Diag} \begin{bmatrix} \frac{|v_1 + c_1|}{c_1^2 + v_1^2 + c_1 v_1} \\ \vdots \\ \frac{|v_{i-1} + c_{i-1}|}{c_{i-1}^2 + v_{i-1}^2 + c_{i-1} v_{i-1}} \\ \frac{|v_i + c_i|}{c_i^2 + v_i^2 + c_i v_i} \\ \frac{|v_{i+1} + c_{i+1}|}{c_{i+1}^2 + v_{i+1}^2 + c_{i+1} v_{i+1}} \\ \vdots \\ \frac{|v_n + c_n|}{c_n^2 + v_n^2 + c_n v_n} \end{bmatrix}$$

onde  $v_i$  e  $c_i$  são respectivamente, a velocidade de referência e velocidade do meio em uma localização  $i$  na malha. Sendo os autovalores da matriz positivos garantidos por  $\Sigma' Y^2 \Sigma$  e  $I$  pois são matrizes invertíveis. E para demonstrar que essa aproximação evita possíveis instabilidades Biondi (2002) multiplicou o campo de onda pela exponencial do segundo termo de (2.24) mostrando equivalência com a resolução da equação diferencial abaixo,

$$\frac{d}{dx_3} P = i\omega \text{sign}[v - c(\mathbf{x})] \Delta \frac{\Sigma' Y^2 \Sigma}{I + \Sigma' Y^2 \Sigma} P \quad (2.25)$$

onde o operador de migração assumiu a seguinte forma:

$$-\frac{i\omega}{c(\mathbf{x})} \sqrt{1 + X^2} \approx -i\omega \text{sign}[v - c(\mathbf{x})] \Delta \frac{\Sigma' Y^2 \Sigma}{I + \Sigma' Y^2 \Sigma};$$

note que a equivalência é verdadeira somente se  $\text{sign}[v - c(\mathbf{x})]$  for constante. Fazendo uma mudança de variável  $P = \Delta^{1/2}Q$ , então

$$\frac{d}{dx_3}Q = \Delta^{1/2} \left\{ i\omega \text{sign}[v - c(\mathbf{x})] \frac{\Sigma'Y^2\Sigma}{I + \Sigma'Y^2\Sigma} \right\} \Delta^{1/2}Q = \Delta^{1/2}(i\omega\mathcal{S})\Delta^{1/2}Q.$$

A norma  $\|Q\|_{\Delta^{-1}}$  é constante com a profundidade porque os autovalores de  $\mathcal{S}$  são reais e obedecem a seguinte equação diferencial

$$\frac{d}{dx_3}\|Q\|_{\Delta^{-1}}^2 = Q^*(i\omega\mathcal{S} - i\omega\mathcal{S}^*)Q = 0.$$

garantindo a estabilidade para o FFDPI, independente do valor de  $\text{sign}[v - c(\mathbf{x})]$ . Da equação (2.25) pode-se resolve-la sob o esquema de Crank-Nilcolson, porém, esta solução pode ser muito cara computacionalmente, e Biondi (2002) sugere usarmos a técnica do *splitting* (JAKUBOWICZ; LEVIN, 1983), cuja estabilidade deriva diretamente das análises feitas acima, desde que seja consistente com o FFDPI ao longo das duas direções horizontais  $x_1$  e  $x_2$ .

No algoritmo de FFDPI, precisamos definir duas velocidades de referência, uma acima e outra abaixo, em relação a camada atual  $c$  do modelo, ou seja

$$\begin{aligned} v^- &= \sum_{j=1}^{N_v} \delta^- v^j & \text{onde } \delta^- &= \begin{cases} 1, & \text{se } v^j \leq c \leq v^{j+1} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \\ v^+ &= \sum_{j=1}^{N_v} \delta^+ v^j & \text{onde } \delta^+ &= \begin{cases} 1, & \text{se } v^{j-1} \leq c \leq v^j \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \end{aligned}$$

corresponde a duas formas para o campo de onda em relação a velocidade  $v$  tomada,

$$\begin{aligned} P_{x_3+\Delta x_3}^- &= \exp \left[ i \frac{\Delta k_3}{\Delta s} \frac{(v^- - c)}{v^- c} \Delta x_3 \right] \sum_{j=1}^{N_v} \delta^- P_{x_3+\Delta x_3}^{v^j} \\ P_{x_3+\Delta x_3}^+ &= \exp \left[ i \frac{\Delta k_3}{\Delta s} \frac{(v^+ - c)}{v^+ c} \Delta x_3 \right] \sum_{j=1}^{N_v} \delta^+ P_{x_3+\Delta x_3}^{v^j} \end{aligned}$$

interpolando os dois campos de onda temos

$$P_{x_3+\Delta x_3} = W^- P_{x_3+\Delta x_3}^- + W^+ P_{x_3+\Delta x_3}^+. \quad (2.26)$$

o peso da interpolação pode ser encontrado em ordem zero do erro da fase para uma dada propagação angular como segue:

$$W^- = \begin{cases} \frac{k_3 - k_3^{v^+} - \frac{\Delta k_3}{\Delta s} \frac{v^+ - c}{v^+ c}}{k_3^{v^-} + \frac{\Delta k_3}{\Delta s} \frac{v^- - c}{v^- c} - k_3^{v^+} - \frac{\Delta k_3}{\Delta s} \frac{v^+ - c}{v^+ c}}, & \text{se } \Im(k_3^{v^+}) = 0 \\ 1, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (2.27)$$

$$W^+ = 1 - W^-. \quad (2.28)$$

Note que  $W^- = 1$  onde o campo de onda torna-se evanescentes para o alta velocidade de referência  $v^+$ , isto é, quando  $\Im(k_3^{v^+}) \neq 0$ . Sendo  $\Im(k_3^{v^+})$  a parte imaginária de  $k_3^{v^+}$ .

### 2.3 CONDIÇÃO DE IMAGEM

Para visualizar o refletor  $R$ , depois da extrapolação do campo para baixo, é necessário condições que permitem a formação da imagem em  $R$ . Essas condições são chamadas de “condição de imagem”. Na literatura existem diversos tipos de condições como por exemplo: correlação cruzada (CLAERBOUT, 1985), de imagem generalizada (SAVA; FOMEL, 2005), com deslocamento temporal (SAVA; FOMEL, 2006) e por suavização (GUITTON; VALENCIANO; BEVC, 2006).

Neste trabalho mostramos cortes de seções da resposta ao impulso com aquisição de afastamento nulo. Como nossa imagens foram obtidas de dados pós-empilhamento, usamos a seguinte condição:

$$I(\mathbf{x}) = \sum_{\omega_j}^{\omega} P(\mathbf{x}, \omega_j) \exp(i\omega_j t). \quad (2.29)$$

cuja soma de  $P(\mathbf{x}, \omega)$  corresponde a cada campo de onda formado para cada intervalo em profundidade  $x_{3_j} + \Delta x_{3_j}$ , com uma determinada frequência  $\omega_j$ , onde as imagens são formadas pela a soma de todas as frequências em  $\omega_j$ . Em outras palavras, temos a transformada de Fourier inversa com a condição de  $t = 0$  para cada profundidade.

### 3 ALGORITMO 3D USANDO FFD COM APROXIMAÇÃO DE PADÉ COMPLEXA

Os tipos de métodos de migração, que usam a equação da onda unidirecional, são determinados pelos tipos de aproximação feitos sobre o operador de raiz quadrada como o operador da equação (2.3). A aproximação de Padé, real e complexa, permite manter a ordem para os operadores de derivadas, independentemente do número de termos utilizados da expansão, além de tratar modos evanescentes (AQUILERA-NAVARRO et al., 1999).

#### 3.1 APROXIMAÇÃO DE PADÉ REAL

A série de Padé são funções racionais de coeficientes de dois polinômios que representam uma expansão. A expansão de Padé real aproxima operadores de raiz quadrada como mostrado de (2.3). Usando  $X^2$  de (2.10) como  $X^2 = Z$ , então o operador de raiz quadrada passa a ter a forma de  $R(Z) = \sqrt{1+Z}$ , que podem ser escritas como funções da seguinte maneira (LU, 1998; BAMBERGER et al., 1988):

$$R_N(Z) = \prod_{n=1}^N \frac{1 + c_n Z}{1 + b_n Z} \quad \text{ou} \quad (3.1)$$

$$R_N(Z) = c_0 + \sum_{n=1}^N \frac{a_n Z}{1 + b_n Z} \quad (3.2)$$

sendo (3.2) a forma mais comum, onde os coeficientes  $a_n$ ,  $b_n$ ,  $c_n$  e  $c_0$  são coeficientes de Padé real (BAMBERGER et al., 1988; LU, 1998; MILINAZZO; ZALA; BROOKE, 1997),

$$b_n = \cos^2\left(\frac{n\pi}{2n+1}\right), \quad c_n = \sin^2\left(\frac{n\pi}{2n+1}\right) \quad \text{e} \quad a_n = \frac{2}{2n+1}c_n \quad (3.3)$$

sendo  $c_0 = 1$ , de modo que a seqüência de funções de  $R_N(Z)$  converge para  $R(Z)$  para algum  $Z$  em que  $Z > -1$  em um plano complexo. Observe que para  $Z < -1$ ,  $R(Z)$  passa a ser um número puramente complexo com a parte imaginária positiva. Enquanto,  $R_N(Z)$  permanece real, mostrando uma inconsistência na equação (3.2) exigindo que  $R_N(Z)$  seja também complexo, além de satisfazer a condição para  $R(Z)$  real, portanto, os coeficientes de

(3.3) devem ser estendidos para o plano complexo (AMAZONAS, 2007; LU, 1998).

## 3.2 APROXIMAÇÃO DE PADÉ COMPLEXA

Considerando a linha de corte no plano complexo, ao longo do eixo real negativo, correspondente a aproximação de Padé real, como mostra a Figura 3.1. Millinazzo, Zala e Broke (1997) propuseram a introdução de uma fase, que rotaciona a linha de corte. Melhorando a representação da parte evanescente do espectro, e conseqüentemente a estabilidade da aproximação (AMAZONAS, 2007).

Figura 3.1: *Linha de corte e linha de corte modificada por um ângulo  $\varphi$  no plano complexo.*



Fonte: Do autor.

Obtemos uma nova representação para a raiz quadrada  $R_N(Z)$  com a seguinte forma,

$$R_{\varphi,N}(Z) = C_0 + \sum_{n=1}^N \frac{A_n Z}{1 + B_n Z}, \quad (3.4)$$

em que os coeficientes complexos são dados por (LU, 1998) (apêndice B)

$$A_n \equiv \frac{a_n e^{-i\varphi/2}}{[1 + b_n(e^{-i\varphi} - 1)]^2}, \quad (3.5)$$

$$B_n \equiv \frac{b_n e^{-i\varphi}}{1 + b_n(e^{-i\varphi} - 1)} \quad e \quad (3.6)$$

$$C_0 \equiv e^{i\varphi/2} \left[ c_0 + \sum_{n=1}^N \frac{a_n(e^{-i\varphi} - 1)}{[1 + b_n(e^{-i\varphi} - 1)]} \right]. \quad (3.7)$$

A equação (3.4) corresponde a uma generalização da equação (3.2), cujos coeficientes  $C_0$ ,  $A_n$  e  $B_n$  são representados pelas expressões acima. A importância dessa nova expansão de Padé está centrada no tratamento de autovalores dos modos evanescentes<sup>1</sup> cujos vetores de

<sup>1</sup>de ondas transmitidas, geradas por uma onda que incidente em uma interface, cujo ângulo de incidência está acima do ângulo crítico.

onda possuem valores complexos ao encontrar uma interface com ângulo acima do crítico, e por isso a análise é mapeada no eixo positivo imaginário, produzindo imagens com menos ruído numérico.

### 3.3 ALGORITMO 3D DE FFD COM APROXIMAÇÃO DE PADÉ

Dada a diferença  $d$  de acordo com a equação (2.18) em que  $v$  deve ser a menor velocidade do modelo, logo  $v < c(\mathbf{x})$ . Usando (2.10) e adotando a seguinte notação:

$$k \equiv \frac{\omega}{c(\mathbf{x})}, \quad k_r \equiv \frac{\omega}{v}, \quad \rho \equiv \frac{k}{k_r};$$

reescrevendo o operador diferença, usando aproximação de Padé complexa nos operadores de raiz quadrada, encontramos

$$d = ik_r \left\{ C_0(\rho - 1) + \sum_{n=1}^N A_n \rho X^2 \left( \frac{1}{1 + B_n X^2} - \frac{\rho}{1 + B_n \rho^2 X^2} \right) \right\}. \quad (3.8)$$

#### 3.3.1 Aproximação por série de potência

Expandindo as frações de (3.8) em série de potências (apêndice B), temos

$$d \approx ik_r \left\{ C_0(\rho - 1) + \sum_{n=1}^N A_n \rho (1 - \rho) X^2 [1 - B_n (1 + \rho + \rho^2) X^2 + B_n^2 (1 + \rho + \rho^2 + \rho^3 + \rho^4) X^4 + \dots] \right\}. \quad (3.9)$$

A partir desse ponto temos três importantes situações a considerar a respeito do modelo de velocidade  $c(\mathbf{x})$  em relação a velocidade de referência  $v$ : (1) se a velocidade do modelo for igual à velocidade de referência  $c(\mathbf{x}) = v$ , isso implica em  $\rho = 1$ . Então, a diferença do operador (3.9) não existe, logo  $d = 0$ , e o operador (2.3) se resume ao operador de deslocamento de fase de (2.4); (2) se o modelo tem forte variação de velocidade  $v/c(\mathbf{x}) \approx 0$ ; então o operador não irá ser eficiente caso o modelo apresente grandes variações de velocidade e (3) e se existe variação moderada de velocidade  $0 < v/c(\mathbf{x}) < 1$ .

Considerando um intervalo de  $0 < v/c(\mathbf{x}) < 1$ , na ordem de  $\rho^4$ , correspondendo a primeira linha da equação (3.9), em que o operador  $d$  seja válido para um modelo de velocidades com

variação fraca à variações fortes,

$$d \approx ik_r \left\{ C_0 (\rho - 1) + \sum_{n=1}^N A_n \rho (1 - \rho) X^2 [1 - B_n (1 + \rho + \rho^2) X^2] \right\}$$

na forma racional, torna-se

$$d \approx ik_r \left\{ C_0 (\rho - 1) + \sum_{n=1}^N \frac{A_n \rho (1 - \rho) X^2}{1 + B_n (1 + \rho + \rho^2) X^2} \right\}. \quad (3.10)$$

A representação da equação (3.10), é equivalente ao operador de Ristow e Rühl (1994), e dessa forma, pode ser usada para definir operadores de migração em modelos com pequenos contrastes lateral de velocidade e com contrastes consideráveis.

### 3.3.2 Aproximação alternativa

Partindo da equação (3.8), cujo termo dentro do somatório podemos deixar com o mesmo denominador e desconsideramos termos de ordem ( $X^4$ ) chegamos a

$$d \approx ik_r \left[ C_0 (\rho - 1) + \sum_{n=1}^N \frac{A_n \rho (1 - \rho) X^2}{1 + B_n (1 + \rho^2) X^2} \right]. \quad (3.11)$$

## 3.4 IMPLEMENTAÇÃO USANDO CRANK-NILCOLSON

Como vimos nas subseções anteriores, o operador de diferença entre os operadores unidirecionais  $d$  pode ser representado pelas equações (3.10) e (3.11). Então, generalizando-as usando um novo parâmetro  $\sigma$ , logo

$$d \approx ik_r \left[ C_0 (\rho - 1) + \sum_{n=1}^N \frac{A_n \rho (1 - \rho) X^2}{1 + B_n \sigma X^2} \right].$$

em que  $\sigma$  pode ser  $\sigma = 1 + \rho^2$  ou  $\sigma = 1 + \rho + \rho^2$ . A partir da equação generalizada acima, usando a definição do operador diferença  $d$  de (2.18), objetivamos obter uma nova forma para o operador unidirecional da equação da onda (2.3). Então, o operador unidirecional 3D usando aproximação de Padé complexa é dado por:

$$-ik\sqrt{1+X^2} \approx -ik_r \left[ \sqrt{1+\rho^2 X^2} + C_0(\rho-1) + \sum_{n=1}^N \frac{A_n \rho(1-\rho)X^2}{1+B_n \sigma X^2} \right], \quad (3.12)$$

em que a equação do campo de onda para o operador de FFD 3D passa a ser:

$$\frac{\partial P(\mathbf{x}, \omega)}{\partial x_3} = -ik \left[ \frac{\sqrt{1+\rho^2 X^2}}{\rho} + \frac{C_0(\rho-1)}{\rho} + \sum_{n=1}^N \frac{A_n(1-\rho)X^2}{1+B_n \sigma X^2} \right] P(\mathbf{x}, \omega). \quad (3.13)$$

Sendo o operador implementado no esquema de cascata para cada termo dentro do somatório, e usando a técnica da fatoração (CLAERBOUT, 1985), nos permite separá-la em três outras equações

$$\frac{\partial P(\mathbf{x}, \omega)}{\partial x_3} = -ik_r \sqrt{1+\rho^2 X^2} P(\mathbf{x}, \omega) \quad (3.14)$$

$$\frac{\partial P(\mathbf{x}, \omega)}{\partial x_3} = -ik_r C_0(\rho-1) P(\mathbf{x}, \omega) \quad (3.15)$$

$$\frac{\partial P(\mathbf{x}, \omega)}{\partial x_3} = -ik \sum_{n=1}^N \frac{A_n(1-\rho)X^2}{1+B_n \sigma X^2} P(\mathbf{x}, \omega) \quad (3.16)$$

cujas soluções analíticas para (3.14) e (3.15), são:

$$P(x_1, x_2, x_3 + \Delta x_3, \omega) = \exp \left\{ -ik_r \sqrt{1+\rho^2 X^2} \Delta x_3 \right\} \quad (3.17)$$

$$P(x_1, x_2, x_3 + \Delta x_3, \omega) = \exp \left\{ -ik_r C_0(\rho-1) \Delta x_3 \right\}, \quad (3.18)$$

onde os operadores correspondem aos operadores de deslocamento de fase (GAZDAG, 1978) e *split-step* (STOFFA et al., 1990), respectivamente. Aplicando Crank-Nicolson em (3.16), e deixando implícito o somatório nos coeficientes de Padé, temos

$$\frac{P_{p,q}^{t+1} - P_{p,q}^t}{\Delta x_3} = -ik \frac{A_n(1-\rho)X^2}{1+B_n \sigma X^2} \frac{P_{p,q}^{t+1} + P_{p,q}^t}{2}$$

ou ainda,

$$(\alpha \delta_{sp} \delta_{rq} + \beta^+ X'^2) P_{s,r}^{t+1} = (\alpha \delta_{sp} \delta_{rq} + \beta^- X'^2) P_{s,r}^t \quad (3.19)$$

sendo

$$s \in \{1, \dots, N_{x_1}\} \text{ e } r \in \{1, \dots, N_{x_2}\}$$

em que  $X'^2 = \left( D_{x_1}^2 + R^2 D_{x_2}^2 \right)$  representa a aproximação para as derivadas de diferença finitas

$$\begin{aligned} D_{x_1}^2 &\equiv (\delta_{s,p+1}\delta_{r,q} - 2\delta_{s,p}\delta_{r,q} + \delta_{s,p-1}\delta_{r,q}) \quad \text{e} \\ D_{x_2}^2 &\equiv (\delta_{s,p}\delta_{r,q+1} - 2\delta_{s,p}\delta_{r,q} + \delta_{s,p}\delta_{r,q-1}), \end{aligned}$$

onde

$$R^2 \equiv \frac{\Delta x_2^2}{\Delta x_1^2}, \quad \alpha \equiv \frac{\omega^2 \Delta x_1^2}{c^2(\mathbf{x})} \quad \text{e} \quad \beta^\pm \equiv B_n \sigma \pm i \frac{k \Delta x_3}{2} A_n \rho (1 - \rho).$$

Note que o operador do lado direito de (3.19) aplicado em  $P_{s,r}^{t+1}$ , corresponde ao operador do lado esquerdo aplicado em  $P_{s,r}^t$ , quando trocamos o sinal da unidade imaginária de  $\beta^+$ . Lembrando que o simples fato de mudar o sinal de  $\beta^+$  não significa que  $\beta^-$  seja complexo conjugado de  $\beta^+$ , pois os coeficientes de Padé são complexos e continuam os mesmos em ambos os lados da equação (3.19).

### 3.5 ANÁLISE DA RELAÇÃO DE DISPERSÃO

A análise numérica da relação de dispersão do operador de FFD com aproximação de Padé complexa é baseado na comparação com a relação de dispersão do operador unidirecional exato, dado por (2.3). De modo, que as curvas de dispersão são plotadas uma sobre a outra, e a análise é feita escolhendo o parâmetro  $\sigma$  para o operador de FFD que melhor se adéqua a curva exata.

A relação de dispersão do operador exato de (2.3) é dada a partir da relação de dispersão de (2.7), reescrita como

$$\cos \theta = \sqrt{1 - (\text{sen} \theta)^2}; \quad (3.20)$$

e para a curva de dispersão do operador de FFD com aproximação de Padé complexa, temos a seguinte relação de dispersão:

$$\cos \theta \approx \frac{\sqrt{1 - (\rho \operatorname{sen} \theta)^2}}{\rho} + \frac{C_0(\rho - 1)}{\rho} - \sum_{n=1}^N \frac{A_n(1 - \rho) (\operatorname{sen} \theta)^2}{1 - \sigma B_n (\operatorname{sen} \theta)^2}, \quad (3.21)$$

em que o ângulo de fase vem de  $\cos \theta = k_3^v/k$  e  $\operatorname{sen} \theta = k_1/k$ . Portanto, esta relação só mostra resultados reais para ângulos de fase no intervalo de  $0^\circ < \theta \leq 90^\circ$ . Entretanto, ondas evanescentes são propagadas com energia acima desse limite real, logo  $\operatorname{sen} \theta > 1$  deixando a raiz quadrada imaginária positiva, e é nesse contexto que a aproximação de Padé complexa tem sua importância.

Para avaliar como a aproximação de Padé complexa atenua os modos evanescentes consideramos as equações (3.20) e (3.21) em apenas uma direção. Observe que a relação de dispersão de (3.21), corresponde a relação de (3.20) quando  $\rho = 1$ , significando que a velocidade de referência é igual à velocidade do modelo, ou seja, o modelo é homogêneo. Mas, o que avaliamos foi quando o operador de FFD com Padé complexo for aplicado em um modelo com variação lateral de velocidade, logo,  $\rho \neq 1$ , e a curva de dispersão do FFD for o mais próximo possível da curva de dispersão exata.

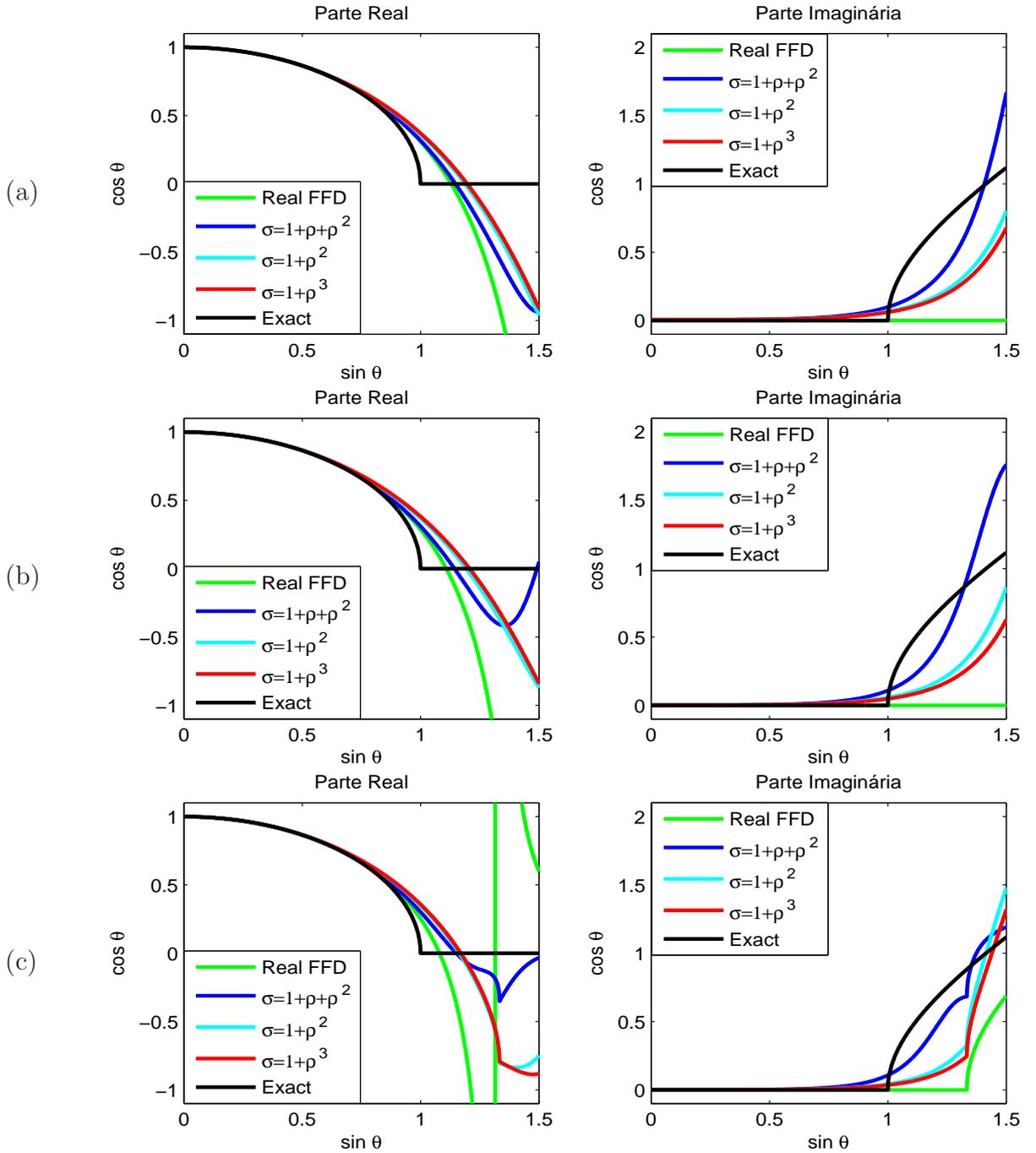
Nos gráficos das Figuras 3.2 e 3.3 comparamos as curvas de dispersão dadas pelas equações (3.20) e (3.21). Nas Figuras 3.2 e 3.3 avaliamos essas relações para modelos de contraste de  $\rho = 0.3$ ,  $\rho = 0.5$  e  $\rho = 0.75$ , com dois ângulos de abertura do operador. Todas as Figuras apresentam parte real e parte imaginária.

De acordo com nossas deduções matemáticas o parâmetro  $\sigma$  pode ser  $\sigma = 1 + \rho + \rho^2$  ou  $\sigma = 1 + \rho^2$ . Contudo, Amazonas et al. (2007) sugere experimentos numéricos com  $\sigma = 1 + \rho^3$ . Mas essas aproximações são ótimas para três termos da série de Padé, veja Figura 3.4. O que não é o nosso caso, pois queremos a melhor aproximação usando o menor número possível de termos da série.

De acordo com a Figura 3.2, com ângulo de rotação de  $\varphi = 25^\circ$ , notamos que o parâmetro  $\sigma = 1 + \rho + \rho^2$  se apresenta mais próximo da curva real para todos os  $\rho$ 's considerados. E na parte imaginária as curvas com esse parâmetro têm maiores crescimentos após  $\operatorname{sen} \varphi$  mostrando um maior amortecimento das ondas evanescentes. Entretanto, o parâmetro  $\sigma = 1 + \rho^3$  proposto por Amazonas et al (2007) não é o melhor candidato quando usamos apenas um termo da série de Padé complexa.

De acordo com a Figura 3.3, com ângulo de rotação de  $\varphi = 45^\circ$ , notamos que para variação muito altas como a parte imaginária de (a) as curvas de dispersão pra o FFD

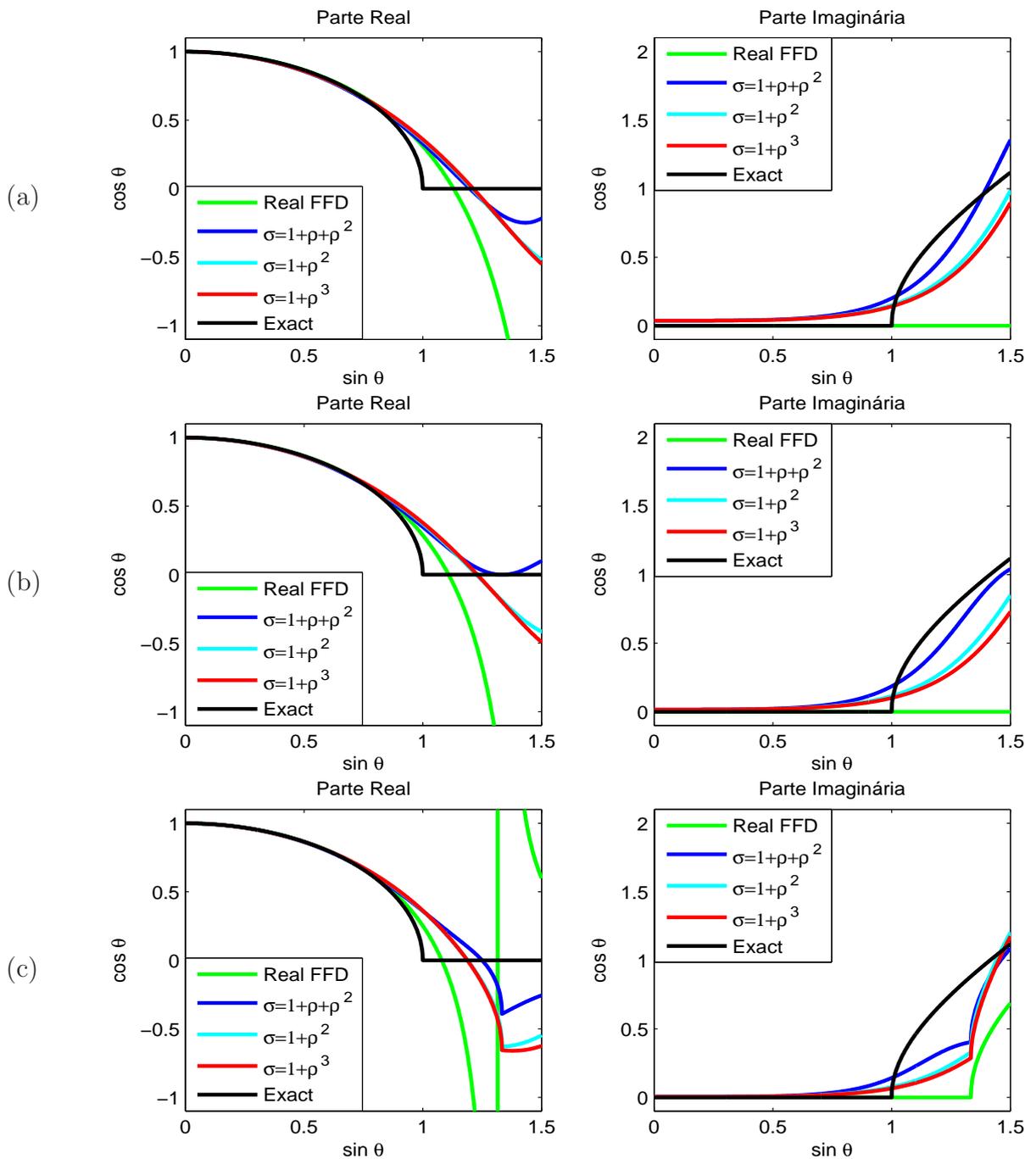
Figura 3.2: Curva de dispersão para ângulo na linha de corte de  $\varphi = 25^\circ$ , usando 1 termo da série de Padé complexa. a) para  $\rho = 0.3$ , b)  $\rho = 0.5$  e c)  $\rho = 0.75$ .



Fonte: Do autor.

mostram um deslocamento em relação a curva de dispersão exata. Esse deslocamento some quando aumentamos o valor de  $\rho$ . Note que para todas as variações de velocidade dessa Figura, o parâmetro  $\sigma = 1 + \rho + \rho^2$  é o melhor candidato.

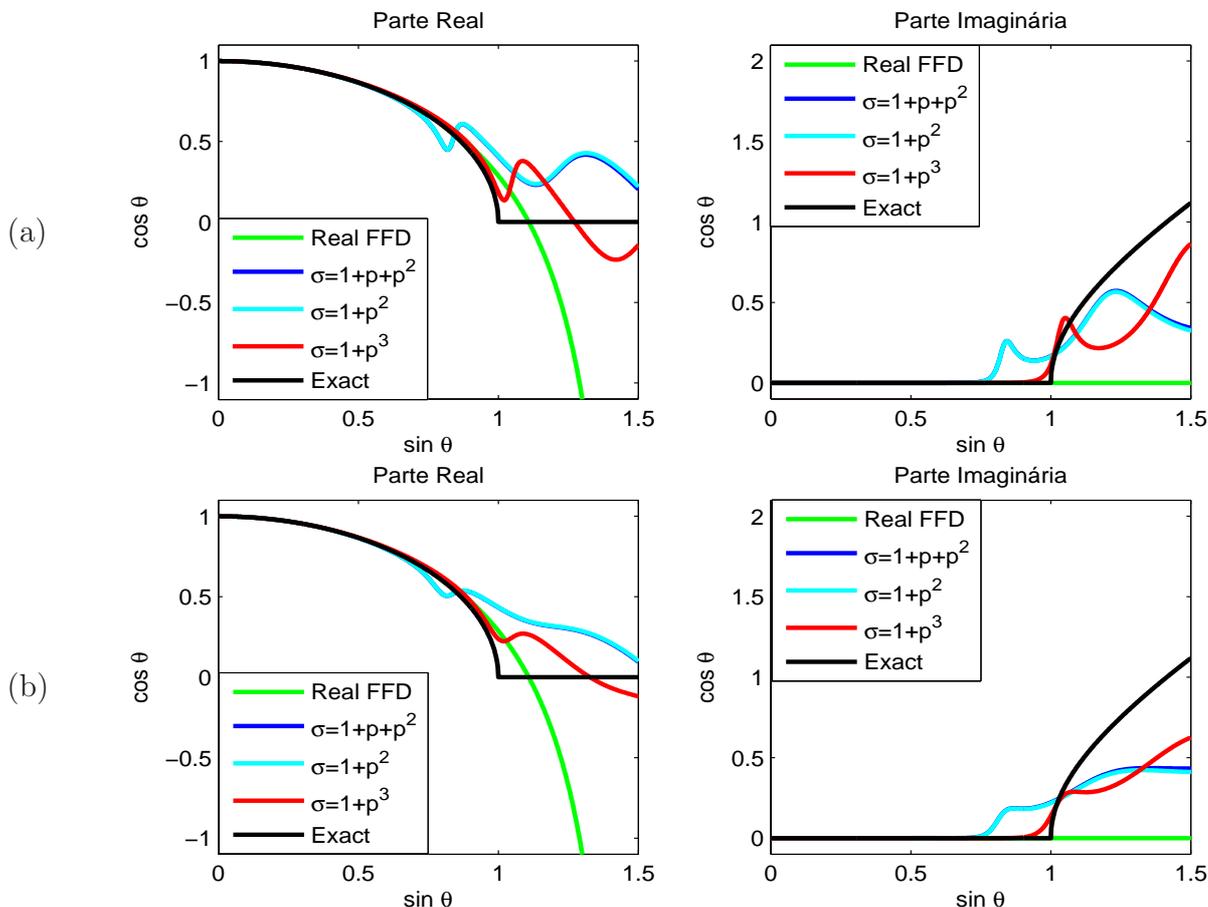
Figura 3.3: Curva de dispersão para ângulo na linha de corte de  $\varphi = 45^\circ$ , usando 1 termo da série de Padé complexa.. a) para  $\rho = 0.3$ , b)  $\rho = 0.5$  e c)  $\rho = 0.75$ .



Fonte: Do autor.

De acordo com a análise das Figuras 3.2 e 3.3 escolhemos o parâmetro  $\sigma = 1 + \rho + \rho^2$ , quando analisamos a parte real do espectro, notamos que para o referido parâmetro, a curva de dispersão do operador de FFD é muito mais próxima a curva do operador exato, do que para todos os outros parâmetros analisados. Analisando a parte imaginária do espectro,

Figura 3.4: Curvas de dispersão usando 3 termos da série de Padé complexa e variação de  $\rho = 0.5$ . a) Com ângulo na linha de corte de  $\varphi = 25^\circ$ . b) Com ângulo na linha de corte de  $\varphi = 45^\circ$ .



Fonte: Do autor.

notamos que  $\sigma = 1 + \rho + \rho^2$  tende a crescer mais que todos os outros  $\sigma$ 's, o que significa que este atenua melhor os modos evanescentes.

Nas Figuras 3.2 e 3.3 mostram o comportamento da curva de dispersão para FFD com Padé real (linha verde) e para a curva exata (linha preta). Observe que a curva para FFD com Padé real tende a se distanciar da curva exata, o que vem a se tornar uma instabilidade no algoritmo. Em todos os gráficos das Figuras 3.2 e 3.3 percebemos que quando as curvas de dispersões da parte real, com Padé complexo, não é mais eficiente, as curvas de dispersões da parte imaginária atenua o sinal, o que não acontece com Padé real e por isso, a aproximação de Padé complexa é capaz de atenuar energia de grandes ângulos bem como tratar ondas evanescentes (AMAZONAS et al., 2007).

### 3.6 REPRESENTAÇÃO MATRICIAL

Podemos representar a equação (3.19) na forma matricial. Para isso utilizamos o seguinte mapeamento:

$$P_{r,s} \rightarrow P_I$$

em que

$$I(s,r) = r + (s-1)N_{x_1}.$$

Este mapeamento permite reescrever a equação (3.19) na forma:

$$\left(\mathbf{S} + \mathbf{B}^+ \mathbf{X}^2\right) \mathbf{P}^{t+1} = \left(\mathbf{S} + \mathbf{B}^- \mathbf{X}^2\right) \mathbf{P}^t, \quad (3.22)$$

sendo  $\mathbf{S}$  a multiplicação de  $\alpha$  discretizado com a matriz identidade, e  $\mathbf{B}^\pm$  a representação discretizada e matricial de  $\beta^\pm$ , ambas definidas como

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &\equiv \text{Diag} \left[ \left( \frac{\omega \Delta x_1}{c_1} \right)^2, \left( \frac{\omega \Delta x_1}{c_2} \right)^2, \dots, \left( \frac{\omega \Delta x_1}{c_{N_{x_{1,2}}}} \right)^2 \right] \\ \mathbf{B}^\pm &\equiv B_n \Gamma_{h,l} \pm i \frac{k \Delta x_3}{2} A_n \frac{v}{c_{h,l}} \left( 1 - \frac{v}{c_{h,l}} \right). \end{aligned}$$

Para cada ponto discretizado do modelo de velocidade  $c_{h,l}$  na malha, com  $h, l = 1, 2, \dots, N_{x_{1,2}}$ , com  $N_{x_{1,2}} = N_{x_1} \cdot N_{x_2}$ , sendo  $N_{x_i}$  o número de pontos na direção discretizada  $x_i$  ( $i = 1, 2$ ). E a representação para  $\mathbf{B}^+$  é análoga à  $\mathbf{B}^-$ , como o sinal da unidade imaginária trocado, e com as mesmas especificações de  $\beta^+$  e  $\beta^-$ . Sendo  $\Gamma_{h,l}$ , a representação matricial de  $\sigma$ , e de acordo com a secção anterior, o definiremos por

$$\Gamma_{h,l} = 1 + \frac{v}{c_{h,l}} + \left( \frac{v}{c_{h,l}} \right)^2.$$

Além disso,  $\mathbf{X}^2 = (\mathbf{D}_{x_1}^2 + R^2 \mathbf{D}_{x_2}^2)$  é a definição matricial de  $X'^2$ . Dessa forma, podemos associar a este equação um sistema linear dado por:

$$\mathbf{A} \mathbf{y} = \mathbf{b} \quad (3.23)$$

em que  $\mathbf{y}$  é a solução do vetor campo de pressão  $\mathbf{P}^{t+1}$  para cada passo em profundidade do modelo de velocidade, usando valores conhecidos: o valor da matriz  $\mathbf{A} = (\mathbf{S} + \mathbf{B}^+\mathbf{X}^2)$ , e o valor do vetor  $\mathbf{b} = (\mathbf{S} + \mathbf{B}^-\mathbf{X}^2) \mathbf{P}^t$ . Note que a matriz possui cinco elementos não-nulos por linha, dados por,

$$A_{h,h} = \left[ \frac{\omega \Delta x_1}{c_h} \right]^2 + 2(1 + R^2) \left[ B_n \Gamma_h + i \frac{k \Delta x_3}{2} A_n \left( 1 - \frac{v}{c_h} \right) \right] \quad (3.24)$$

$$A_{h,l} = B_n \Gamma_{h,l} + i \frac{k \Delta x_3}{2} A_n \left( 1 - \frac{v}{c_{h,l}} \right), \quad h \neq l \quad (3.25)$$

sendo os elementos da diagonal principal dados por  $A_{h,h}$ , e fora da diagonal principal temos quatro elementos dados por  $A_{h,l}$ . Em que  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times m}$  e  $\mathbf{y}, \mathbf{b} \in \mathbb{C}^m$  em que  $m = Nx_{1,2}$ .

O sistema linear (3.23), é um sistema esparso e de banda larga. Métodos de encontrar a solução desse sistema são discutidos no próximo capítulo.

## 4 SISTEMAS LINEARES

O custo computacional do algoritmo FFD 3D é determinado pelo custo da solução do sistema linear representado na equação (3.22). Para aumentar a eficiência do algoritmo foi proposta a aproximação de fatoração da matriz em direções ortogonais (CLAERBOUT, 1985). Esta abordagem reduz a solução do sistema linear (3.22) à solução de uma sequência de sistemas lineares tridiagonais, cuja solução numérica é muito eficiente. Entretanto, esta fatoração gera anisotropia numérica. Para mitigar este problema Li (1991) propôs uma estratégia de correção no domínio do número de onda, e Ristow e Rühl (1997) propuseram a fatoração multi-direcional, em que a fatoração é feita em múltiplas direções não necessariamente ortogonais.

Nossa proposta é determinar a solução do sistema linear (3.22) sem fatoração direcional, portanto sem os efeitos de anisotropia numérica. Esta abordagem requer que se utilizem estratégias eficientes para solução de sistemas lineares de maior dimensão e banda larga, o que também requer maior espaço de armazenamento de memória. Neste capítulo discutimos a técnica de fatoração direcional e algoritmos eficientes de solução de sistemas lineares complexos utilizando métodos diretos e métodos iterativos.

### 4.1 TÉCNICA DA FATORAÇÃO DIRECIONAL

Essa técnica consiste em separar a equação do sistema linear (3.22) em dois novos sistemas de equações lineares nas direções ortogonais, também conhecidos como direções *inline* e *crossline*. Este processo é repetido para cada camada horizontal do modelo. Dessa forma, aumentado os números de sistemas lineares a ser resolvido pelo algoritmo em cada camada do modelo de velocidade.

Partindo da equação (3.22) e aplicando a técnica da fatoração direcional, encontramos

$$\begin{aligned} \left[ \left( \mathbf{S}_1 + \mathbf{B}^+ \mathbf{D}_{x_1}^2 \right) \left( \mathbf{S}_2 + \mathbf{B}^+ \mathbf{D}_{x_2}^2 \right) \right] \mathbf{P}^{t+1} &= \\ &= \left[ \left( \mathbf{S}_1 + \mathbf{B}^- \mathbf{D}_{x_1}^2 \right) \left( \mathbf{S}_2 + \mathbf{B}^- \mathbf{D}_{x_2}^2 \right) \right] \mathbf{P}^t \end{aligned} \quad (4.1)$$

sendo

$$\mathbf{S}_1 \equiv \text{Diag} \left[ \left( \frac{\omega \Delta x_1}{c_1} \right)^2, \left( \frac{\omega \Delta x_1}{c_2} \right)^2, \dots, \left( \frac{\omega \Delta x_1}{c_{Nx_1}} \right)^2 \right]$$

$$\mathbf{S}_2 \equiv \text{Diag} \left[ \left( \frac{\omega \Delta x_2}{c_1} \right)^2, \left( \frac{\omega \Delta x_2}{c_2} \right)^2, \dots, \left( \frac{\omega \Delta x_2}{c_{Nx_2}} \right)^2 \right].$$

onde  $\mathbf{D}_{x_1}^2$  e  $\mathbf{D}_{x_2}^2$  são derivadas de segunda ordem na forma matricial, nas respectivas direções de  $x_1$  e  $x_2$ . Cujo números de pontos máximos discretizados são dados por  $Nx_1$  e  $Nx_2$ , respectivamente. Dessa forma, encontramos um campo de onda extrapolado para cada plano vertical do modelo de velocidade, ou seja,  $P(x_3, x_1, \omega)$  e  $P(x_3, x_2, \omega)$ , e depois correlacionamos os resultados.

Essa aproximação reduz o custo computacional, pois diminui o custo de memória utilizada para armazenar os elementos da matriz, que são necessários para encontrar a solução do campo de onda. Entretanto, essa aproximação gera anisotropia numérica, que em um modelo homogêneo com algum contraste resulta em uma forma losangular da forma do campo de onda ao visualizarmos no plano horizontal. Representando que o campo se propaga diferentemente para as direções  $x_1$  e  $x_2$ , quando na verdade o campo deveria ser representado por um círculo no plano horizontal.

Uma das maneiras de reduzir essa anisotropia é usar a correção de Li (LI, 1991) consistindo na interpolação do campo de onda no domínio do número de onda e da frequência. Ou usar fatoração multi-direcional (RISTOW; RÜHL, 1997) baseado na divisão da equação (3.22) não só em duas como foi mostrado acima em (4.1), mas em quantas equações forem necessárias para atenuar o problema da anisotropia.

## 4.2 MÉTODOS DIRETOS

Os métodos diretos buscam a solução da equação (3.23) evitando o cálculo direto da inversa da matriz  $\mathbf{A}$ . Ao contrário dos métodos iterativos, que buscam soluções aproximadas para o problema, os métodos diretos visam à solução exata do sistema linear, a menos de erros de arredondamento de pontos flutuantes da máquina utilizada.

Por buscar a solução exata do sistema linear, é interessante que o número de operações seja minimizados, e dessa forma reduzir o tempo computacional e evitar propagação dos erros de arredondamentos. Existem vários tipos de solução para métodos diretos, dentre os mais comuns temos:

1. O método da eliminação de Gauss: que consiste em transformar o sistema linear original, em um sistema equivalente. Baseado em operações de multiplicação, permutação e substituição de linhas, visando uma matriz de coeficientes triangular superior, e dessa forma, buscar a solução exata por retrosubstituição.
2. O método da eliminação de Gauss-Jordan: usa os mesmos procedimentos matemáticos que o método de Gauss. Porém, objetiva transformar a matriz  $\mathbf{A}$  em uma matriz identidade  $\mathbf{I}$ , e assim, encontrar a solução do sistema linear.
3. O método de fatoração LU: também conhecido como decomposição LU, esse método consiste em dividir a matriz  $\mathbf{A}$  do sistema linear (3.23) em duas outras matrizes.

A fatoração LU, basea-se em,

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{U}$$

onde  $\mathbf{L}$  é a matriz triangular inferior (*lower*), e  $\mathbf{U}$  é a matriz triangular superior (*upper*), genericamente dadas da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ L_{21} & 1 & 0 \\ L_{31} & L_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ 0 & U_{22} & U_{23} \\ 0 & 0 & U_{33} \end{bmatrix}$$

em que o sistema linear de (3.23), passa a ser dois sistemas lineares. O primeiro sistema linear busca a solução de  $\mathbf{L}\mathbf{y}' = \mathbf{b}$ , e o segundo busca a solução de  $\mathbf{U}\mathbf{y} = \mathbf{y}'$ .

A desvantagem de usamos métodos diretos é que para matrizes esparsas como  $\mathbf{A}$  (do nosso sistema linear), esses métodos geram matrizes como  $L$  e  $U$  que não preservam a esparsidade da matriz original. Tornando as novas matrizes muito densas, exigindo um armazenamento extra de memória, dessa forma, aumentando o números de iterações.

Na solução direta, ao aumentar a dimensão de um sistema linear esparso, a armazenagem cresce muito rápido, se comparado com os números de elementos não-nulos. Portanto, esses métodos não são aconselháveis para sistemas lineares de grande porte.

Nos algoritmos de extrapolação do campo de onda, como de FFD e FFDPI em que foram usados a técnica da fatoração direcional, foram utilizados sistemas de solução diretas de sistemas lineares baseados na decomposição LU.

### 4.3 MÉTODOS ITERATIVOS

Geralmente esses métodos tratam de sistemas lineares de grande porte, ou seja, quando a matriz  $\mathbf{A}$  é muito grande<sup>1</sup>, e/ou também esparsa ou ainda quando não é conhecida. Muitos desses métodos de solução são baseados no espaço de Krylov, por isso faz-se necessário o entendimento da definição básica desse espaço e do subespaço (LAGO, 2010).

Chamamos de espaço e de subespaço de Krylov, se  $\mathbf{b} \neq 0$ , quando

$$\mathcal{K}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \text{span} \{ \mathbf{A}, \mathbf{A}\mathbf{b}, \mathbf{A}^2, \dots \}; \quad \text{e} \quad (4.2)$$

$$\mathcal{K}_k(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \text{span} \{ \mathbf{A}, \mathbf{A}\mathbf{b}, \mathbf{A}^2, \dots, \mathbf{A}^{k-1}\mathbf{b} \} \quad (4.3)$$

associados à  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{b}$ , ao espaço e ao subespaço, e no último caso, de ordem  $k$ . De modo que,  $\dim(\mathcal{K}_k) \leq m$ , e portanto existirá um primeiro valor  $j$ , onde  $0 < j \leq k$  tal que  $\mathbf{A}^j\mathbf{b}$  será linearmente dependente com os vetores anteriores da seqüência de Krylov, ou seja

$$\mathbf{A}^j\mathbf{b} = \sum_{n=0}^{j-1} \alpha_n \mathbf{A}^n\mathbf{b}.$$

A respeito da matriz  $\mathbf{A}$  temos dois casos a considerar: (1) se for não-singular, então, todos os seus autovalores são diferentes de zero, logo,  $\alpha_0 \neq 0$ , o que significa que  $\mathbf{y} \in \mathcal{K}_k(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ . (2) se for singular, podemos encontrar uma solução, porém, para  $\mathbf{y} \notin \mathcal{K}_k(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ . Existe um teorema chamado decomposição Cerne-Nilpotente, cuja solução pertence ao subespaço  $\mathcal{K}_k(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ , mas, o resultado é válido considerando precisão infinita da máquina (LAGO, 2010).

Sendo  $\mathcal{K}_k(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \text{span}\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$  e  $\mathbf{V}_k = \{v_1 v_2 \dots v_k\}$ , poderíamos considerar  $v_1 = \mathbf{b}$ ,  $v_2 = \mathbf{A}\mathbf{b}$ , ...,  $v_k = \mathbf{A}^{k-1}\mathbf{b}$ , entretanto essa seqüência de vetores converge para um autovalor associado ao maior autovalor da matriz  $\mathbf{A}$  em módulo, tornando-se linearmente dependente quando utilizamos uma máquina de precisão finita, o que faz com que a base  $\mathbf{V}_k$  seja mal-condicionada. A solução para esse problema é ortogonalizar cada vetor, como por exemplo os processos de *ortogonalização de Arnoldi* e *ortogonalização Lanczos*.

No processo de ortogonalização, toma-se um vetor inicial  $v_1$ , cujo produto interno gera um novo vetor  $v_2$ , que deve ser ortogonalizado com o vetor inicial  $v_1$  e a matriz  $\mathbf{A}$ . Esse processo é repetido para cada vetor gerado  $v_l$ , o mesmo deve se ortogonalizar com os anteriormente formados  $v_{l-1}$ ,  $v_{l-2}$ , ...,  $v_1$ , gerando uma base para o espaço de Krylov  $\mathcal{K}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ . O critério

---

<sup>1</sup> $n$  é muito grande, ou de ordem igual ou superior a  $10^9$ .

de parada é quando algum vetor formado  $v_j$  for linearmente depende do vetor anterior  $v_{j-1}$ .

No processo de ortogonalização de Arnoldi esse processo gera uma matriz de Heisenberg superior,  $\tilde{\mathbf{H}}_k \in \mathbb{C}^{(k+1) \times k}$ , cujos elementos são os produtos internos  $\eta_{(j+1,j)} = \|v_j\|_2$  dos vetores formados. Ao consideramos todo o conjunto de vetores  $\mathbf{V}$  e lembramos do critério de parada já mencionada, teremos o seguinte resultado desse processo:

$$\mathbf{A}\mathbf{V}_j = \mathbf{V}_j\mathbf{H}_j,$$

ou seja, já obtemos a base para o subespaço  $\mathcal{K}_j(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  invariante de  $\mathbf{A}$  na iteração  $j$ , em que  $\mathbf{H}_j \in \mathbb{C}^{j \times j}$  e é formado pelas  $j$  primeiras linhas de  $\tilde{\mathbf{H}}_k$ , veja o algoritmo de Arnoldi 1.

```

input:  $\mathbf{A}, \mathbf{b}$ 
1.1  $v_1 = \frac{\mathbf{b}}{\|\mathbf{b}\|_2};$ 
1.2 for  $j = 1 \dots$  do
1.3    $v_{j+1} = \mathbf{A}v_j;$ 
1.4   for  $i = 1..j$  do
1.5      $\eta_{(i,j)} = \langle v_i, v_{j+1} \rangle;$ 
1.6      $v_{j+1} = v_{j+1} - \eta_{(i,j)}v_i;$ 
1.7   end
1.8    $\eta_{(j+1,j)} = \|v_{j+1}\|_2;$ 
1.9   if  $\eta_{(j+1,j)} = 0$  then Stop;
1.10   $v_{j+1} = \frac{v_{j+1}}{\eta_{(j+1,j)}};$ 
1.11 end

```

**Algoritmo 1:** Processo de Ortogonalização de Arnoldi usando Gram-Schmidt

O processo de ortogonalização de Arnoldi vale para  $\mathbf{A}$  não simétrica<sup>2</sup>, se  $\mathbf{A}$  for simétrica, então, temos o processo de ortogonalização de Lanczos, onde  $\mathbf{H}_j$  será uma matriz diagonal com três elementos na diagonal principal dispostos como  $\text{diag} = [v_{k-2} \ \eta_{k-1} \ v_{k-1}]$ , para cada linha  $k$  da matriz. Portanto, no processo de Lanczos só precisamos ortogonalizar com os dois últimos vetores, diminuindo o custo computacional, infelizmente só é válido para  $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$ ; veja o algoritmo de Lanczos em algoritmo 2.

Com o objetivo de diminuir o custo computacional do método de Arnoldi temos o *processo de Lanczos não-hermitiano* que a partir de duas bases vetoriais biortogonais,  $\mathbf{V}_k$  e  $\mathbf{Z}_k$ , geram dois subespaços de Krylov  $\mathcal{K}_k(\mathbf{A}, \mathbf{b})$  e  $\mathcal{L}_k(\mathbf{A}^H, \mathbf{b})$ , que devem satisfazer a condição de  $\langle v_j, z_i \rangle = \delta_{ij}$ , com o objetivo de triagonalizar a matriz  $\tilde{\mathbf{H}}_k$ , veja algoritmo 3. No final do processo

---

<sup>2</sup>não simétrica:  $\mathbf{A} \neq \mathbf{A}^T$

```

input:  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{b}$ 
2.1  $v_1 = \frac{\mathbf{b}}{\|\mathbf{b}\|_2}$ ;
2.2  $\mu_0 = 0$ ;
2.3 for  $j = 1 \dots$  do
2.4    $v_{j+1} = \mathbf{A}v_j$ ;
2.5    $\eta_j = \langle v_j, v_{j+1} \rangle$ ;
2.6    $v_{j+1} = v_{j+1} - \eta_j v_j - \mu_{j-1} v_{j-1}$ ;
2.7    $\mu_j = \|v_{j+1}\|_2$ ;
2.8   if  $\mu_{j+1} = 0$  then Stop;
2.9    $v_{j+1} = \frac{v_{j+1}}{\mu_{j+1}}$ ;
2.10 end

```

**Algoritmo 2:** Processo de Ortogonalização de Lanczos

temos apenas uma base, entretanto a mesma não é ortogonal, o que não tira a vantagem desse método.

```

input:  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{b}$ 
3.1  $v_1 = z_1 = \frac{\mathbf{b}}{\|\mathbf{b}\|_2}$ ;
3.2  $\xi_0 = \mu_0 = 0$ ;
3.3 for  $j = 1 \dots$  do
3.4    $v_{j+1} = \mathbf{A}v_j$ ;
3.5    $z_{j+1} = \mathbf{A}^H z_j$ ;
3.6    $\eta_{(i,j)} = \langle z_j, v_{j+1} \rangle$ ;
3.7    $v_{j+1} = v_{j+1} - \eta_j v_j - \xi_j^* v_{j-1}$ ;
3.8    $z_{j+1} = z_{j+1} - \eta_j^* z_j - \mu_j^* z_{j-1}$ ;
3.9    $\mu_{j+1} \xi_{j+1} = \langle v_{j+1}, z_{j+1} \rangle$ ;
3.10  if  $\mu_{j+1} \xi_{j+1} = 0$  then Stop;
3.11   $v_{j+1} = \frac{v_{j+1}}{\mu_{j+1}}$ ;
3.12   $z_{j+1} = \frac{z_{j+1}}{\xi_{j+1}}$ ;
3.13 end

```

**Algoritmo 3:** Processo de BiOrtogonalização de Lanczos não-Hermitiano

Depois de construída a base, podemos escolher qual método iterativo usar para encontrar a solução para o problema em (3.23), de acordo com as especificidades da matriz  $\mathbf{A}$ .

A seguir apresentaremos alguns métodos de solução de sistemas lineares iterativos que servem como introdução para o método do Gradiente Bigradiente Estabilizado, dos quais nosso algoritmo de FFD-BICGSTAB deriva.

### 4.3.1 Gradiente conjugado - CG

O método do Gradiente Conjugado (CG) (HESTENES; STIEFEL, 1952) foi criado ao mesmo tempo em que o método de Lanczos foi publicado, e por muitas vezes é conhecido como um caso particular de Lanczos.

Para encontrar a solução do sistema linear consiste em gerar uma seqüência de soluções aproximadas que são atualizada a cada iteração. A primeira iteração consiste em “chutar” uma solução inicial  $y_0$  e encontrar o resíduo  $r_0$  correspondente. Para cada nova iteração devemos executar dois produtos internos, que devem satisfazer algumas condições de ortogonalidade, gerando dois escalares  $\alpha_i$  e  $\beta_i$ , na iteração  $i$ . O escalar  $\alpha_i$  multiplica o vetor de direção de busca  $p_i$  e conseqüentemente gera uma nova solução  $y_{i+1}$ . Enquanto, o escalar  $\beta_i$  atualiza o vetor de direção de busca  $p_{i+1}$ , e em seguida o resíduo  $r_{i+1}$ . A cada dois produtos internos, que geram  $\alpha_i$  e  $\beta_i$ , é tirada uma norma em que relaciona a solução atual com a solução anterior, que ao ser minimizada significa que encontramos o solução  $\mathbf{y}$ . Esse procedimento está representado no algoritmo 4.

```

input:  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $y_0$ 
4.1  $r_0 = \mathbf{b} - \mathbf{A}y_0$ ;
4.2  $y_0 = r_0$ ;
4.3 while  $\|r_i\|_2^2 > tol$  do
4.4    $\alpha_i = \frac{\|r_i\|_2^2}{\langle p_i, \mathbf{A}p_i \rangle}$ ;
4.5    $y_{i+1} = y_i + \alpha_i p_i$ ;
4.6    $r_{i+1} = r_i - \alpha_i \mathbf{A}p_i$ ;
4.7    $\beta_{i+1} = \frac{\|r_{i+1}\|_2^2}{\|r_i\|_2^2}$ ;
4.8    $p_{i+1} = r_{i+1} + \beta_{i+1} p_i$ ;
4.9 end

```

**Algoritmo 4:** CG: Gradientes Conjugados

Observe que esse método é econômico computacionalmente, só tem dois produtos internos, e a cada loop armazena somente três vetores, e dois escalares, além de apresentar apenas uma multiplicação matriz×vetor. Entretanto, a solução só é válida para  $\mathbf{A}$  hermitiana<sup>3</sup>, positiva definida<sup>4</sup> além de não-singular.

<sup>3</sup>Matriz cujos autovalores são distintos e ortogonais ou ainda  $\mathbf{A} = \mathbf{A}^*$

<sup>4</sup> $\mathbf{y} \neq 0 \Rightarrow \mathbf{y}^H \mathbf{A} \mathbf{y} > 0$

### 4.3.2 Gradiente biconjugado - BICG

A diferença do método do gradiente biconjugado (BICG) (LANCZOS, 1952) em relação ao CG está essencialmente na forma da matriz  $\mathbf{A}$ ; pois no BICG a mesma pode não ser simétrica. E Além do BICG usar a matriz  $\mathbf{A}$ , também usa a sua hermetiana no algoritmo <sup>5</sup> (LEE; ZHANG; LU, 2003).

O fato da matriz não ser simétrica impossibilita a ortogonalização por Lanczos, e Arnoldi tem um custo computacional alto. Então, usa-se o método de Lanczos não-Hermitiano, cujos vetores  $v_j$  e  $z_j$  geram os subespaço de Krylov,  $\mathcal{K}_k = \mathcal{K}_k(\mathbf{A}, r_0)$  e  $\mathcal{L}_k = \mathcal{L}_k(\mathbf{A}^H, t_0)$ , e seu resíduo  $r_0 = y_0 - \mathbf{A}\mathbf{b}$ , bem como o seu dual  $t_0 = y_0 - \mathbf{A}^H\mathbf{b}$ , que satisfazem as seguintes propriedades:

$$\langle t_j, r_i \rangle = 0 \quad \text{e} \quad \langle q_j, \mathbf{A}p_i \rangle = 0 \quad i \neq j$$

na iteração  $i$ , gerando novos escalares  $\alpha_i$  e  $\beta_{i+1}$ ; além de satisfazem as relações de ortogonalidade  $r_i \perp \mathcal{L}_i$  e  $t_i \perp \mathcal{K}_i$ , veja o algoritmo 5.

<pre> <b>input:</b> <math>\mathbf{A}, \mathbf{b}, y_0</math> 5.1 <math>r_0 = \mathbf{b} - \mathbf{A}y_0;</math> 5.2 <math>t_0 = p_0 = r_0;</math> 5.3 <b>while</b> <math>\ r_i\ _2^2 &gt; tol</math> <b>do</b> 5.4   <math>\alpha_i = \frac{\langle t_i, r_i \rangle}{\langle q_i, \mathbf{A}p_i \rangle};</math> 5.5   <math>y_{i+1} = y_i + \alpha_i p_i;</math> 5.6   <math>r_{i+1} = r_i - \alpha_i \mathbf{A}p_i;</math> 5.7   <math>t_{i+1} = t_i - \alpha_i \mathbf{A}^H q_i;</math> 5.8   <math>\beta_{i+1} = \frac{\langle t_{i+1}, r_{i+1} \rangle}{\langle t_i, r_i \rangle};</math> 5.9   <math>p_{i+1} = r_{i+1} + \beta_{i+1} p_i;</math> 5.10  <math>q_{i+1} = t_{i+1} + \beta_{i+1} p_i;</math> 5.11 <b>end</b> </pre>
--

**Algoritmo 5:** BICG: Gradientes BiConjugados

Em que  $r_{i+1}$  é o resíduo e  $p_{i+1}$  o vetor de busca referente ao subespaço  $\mathcal{K}_k$ ; e  $t_{i+1}$  é o resíduo e  $q_{i+1}$  o vetor de busca referente ao subespaço  $\mathcal{L}_k$ . As relações de biortogonalidades são asseguradas pelos produtos internos. Por outro lado, a base não é ortogonal, logo a convergência não é garantida.

---

<sup>5</sup> $\mathbf{A}^H = (\mathbf{A}^*)^T$

### 4.3.3 Gradiente biconjugado estabilizado - BICGSTAB

O método do gradiente biconjugado estabilizado (BICGSTAB) (VORST, 1992) foi criado com o intuito de corrigir as instabilidades do BICG. Entretanto, antes de criar o BICGSTAB, Sonneveld publicou o método gradiente conjugado quadrado (CGS) em 1989 (SONNEVELD, 1989), que resolve sistemas lineares esparsos e não usa a matriz hermitiana. Embora, o CGS apresentava-se mais rápido ainda mostrava problemas com instabilidade (LAGO, 2010)

O BICGSTAB veio com a proposta do corrigir estas instabilidades além de manter, como entrada do algoritmo, a matriz esparsa, nesse sentido concluímos que o mesmo é uma combinação do BICG e do CGS. Então, o BICGSTAB tem como entrada uma matriz  $\mathbf{A}$  qualquer, veja o algoritmo em 6.

```

input:  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $y_0$ 
5.1  $r_0 = \mathbf{b} - \mathbf{A}y_0$ ;
5.2  $p_0 = r_0$ ;
5.3 while  $\|r_i\|_2^2 > tol$  do
5.4    $\alpha_i = \frac{\langle r_i, r_0 \rangle}{\langle \mathbf{A}p_i, r_0 \rangle}$ ;
5.5    $s_i = r_i - \alpha_i \mathbf{A}p_i$ ;
5.6    $\omega_i = \frac{\langle \mathbf{A}s_i, s_i \rangle}{\langle \mathbf{A}s_i, \mathbf{A}s_i \rangle}$ ;
5.7    $y_{i+1} = y_i + \alpha_i p_i + \omega_i s_i$ ;
5.8    $r_{i+1} = s_i - \omega_i \mathbf{A}s_i$ ;
5.9    $\beta_{i+1} = \frac{\langle r_{i+1}, r_0 \rangle}{\langle r_i, r_0 \rangle} \times \frac{\alpha_i}{\omega_i}$ ;
5.10   $p_{i+1} = r_{i+1} + \beta_{i+1} (p_i - \omega_i \mathbf{A}p_i)$ ;
6.11 end

```

**Algoritmo 6:** BICGSTAB: Gradiente Biconjugado Estabilizado

Podemos pensar  $\omega_i$  como um parâmetro livre. Uma simples escolha e talvez a mais natural é selecionar  $\omega_i$  de modo que tenha sempre passos decrescentes na direção do resíduo obtido antes da atualização da norma (LAGO, 2010; SAAD, 2003).

Todos os vetores,  $s_i$ ,  $y_{i+1}$ ,  $r_{i+1}$  e  $p_{i+1}$ , e os escalares,  $\alpha_i$ ,  $\omega_i$  e  $\beta_{i+1}$ , nascem das definições e propriedades gerais do BICG, com a diferença de não necessitar da matriz hermitiana de  $\mathbf{A}$  nem do sistema dual, logo não precisa gerar os resíduos  $t_i$ . Note que, o algoritmo do BICGSTAB apresenta quatro produtos internos, dois a mais que o BICG, e se mostra mais rápido que o CGS (SAAD, 2003).

#### 4.4 ANÁLISE DE CONVERGÊNCIA DO BICGSTAB

Dentre os métodos iterativos descritos no capítulo 4, o método BICGSTAB mostra-se mais adequado para resolver o sistema linear (3.23), pois a matriz é complexa e esparsa.

Uma condição suficiente para garantir a convergência de métodos iterativos é que a matriz seja diagonalmente dominante, ou seja, a soma dos módulos dos elementos fora da diagonal principal deve ser menor ou igual ao módulo dos elementos da diagonal principal (GOLUB; LOAN, 1983),

$$|A_{j,j}| \geq \sum_{k=1}^M |A_{j,k}|_{j \neq k} \quad (4.4)$$

em que, neste caso,  $k = 1, 2, \dots, M$  para  $M$  elementos fora da diagonal principal da matriz  $\mathbf{A}$ .

Utilizando a condição (4.4) Cole (1989) avaliou a convergência de alguns métodos iterativos<sup>6</sup> na solução de sistemas lineares para migração por diferenças finitas FD utilizando aproximação de Padé real. Experimentos numéricos mostraram que a aproximação de Padé de pequena abertura angular,  $15^\circ$ , resultou em sistemas lineares em que todos os métodos convergiram. Para aproximações de maior abertura angular,  $45^\circ$ , alguns dos métodos iterativos apresentaram instabilidade no sistema linear associado. Este autor também verificou que para baixas frequências a matriz associada ao sistema linear deixa de ser diagonalmente dominante, deixando os métodos iterativos lentos, e para alguns a convergência não foi atingida (COLE, 1989). Por outro lado, Nichols (1997) resolveu o mesmo sistema linear que Cole (1989) usando o método de gradientes conjugados e eliminando modos evanescentes na fonte. Novamente, a convergência foi mais lenta quando não se filtra modos evanescente e quanto mais baixa for a frequência (NICHOLS, 1997).

Avaliamos a condição de matriz diagonal dominante para a matriz associada ao operador FFD 3D com aproximação de Padé real e complexa, equação (3.22) em uma malha regular. Para a expansão de Padé real encontramos,

$$\omega \geq \frac{c}{\Delta x} \sqrt{8b_n \sigma}. \quad (4.5)$$

Para expansão de Padé complexa obtivemos a desigualdade

---

<sup>6</sup>Jacobe, Gauss-Seidel e sobrerelaxamento sucessivo.

$$\frac{\omega^2 \Delta x^2}{c^2} + 4 \frac{\omega \Delta x}{c} (1 - \rho) \Im\{A_n\} - 8\sigma \Re\{B_n\} \geq 0 \quad (4.6)$$

sendo  $\Im\{A_n\}$  e  $\Re\{B_n\}$ , partes imaginária de  $A_n$  e real de  $B_n$ , respectivamente. Cujas soluções para a equação acima, no limite de frequência superior  $\omega_s$  e inferior  $\omega_i$  são:

$$\omega_s \leq \frac{c}{\Delta x} \left[ -2(1 - \rho) \Im\{A_n\} - \sqrt{4(1 - \rho)^2 \Im^2\{A_n\} + 8\sigma \Re\{B_n\}} \right] \quad (4.7)$$

$$\omega_i \geq \frac{c}{\Delta x} \left[ -2(1 - \rho) \Im\{A_n\} + \sqrt{4(1 - \rho)^2 \Im^2\{A_n\} + 8\sigma \Re\{B_n\}} \right]. \quad (4.8)$$

Baseado nestas desigualdades efetuamos experimentos numéricos em meios homogêneos para avaliar a convergência do algoritmo BICGSTAB em função da frequência para um único termo da expansão de Padé. Observamos que o sistema iterativo apresenta convergência em um menor número de iterações para frequências no limite da frequência superior  $\omega_s$ , e convergência lenta para frequências dentro do limite de frequências inferior  $\omega_i$ .

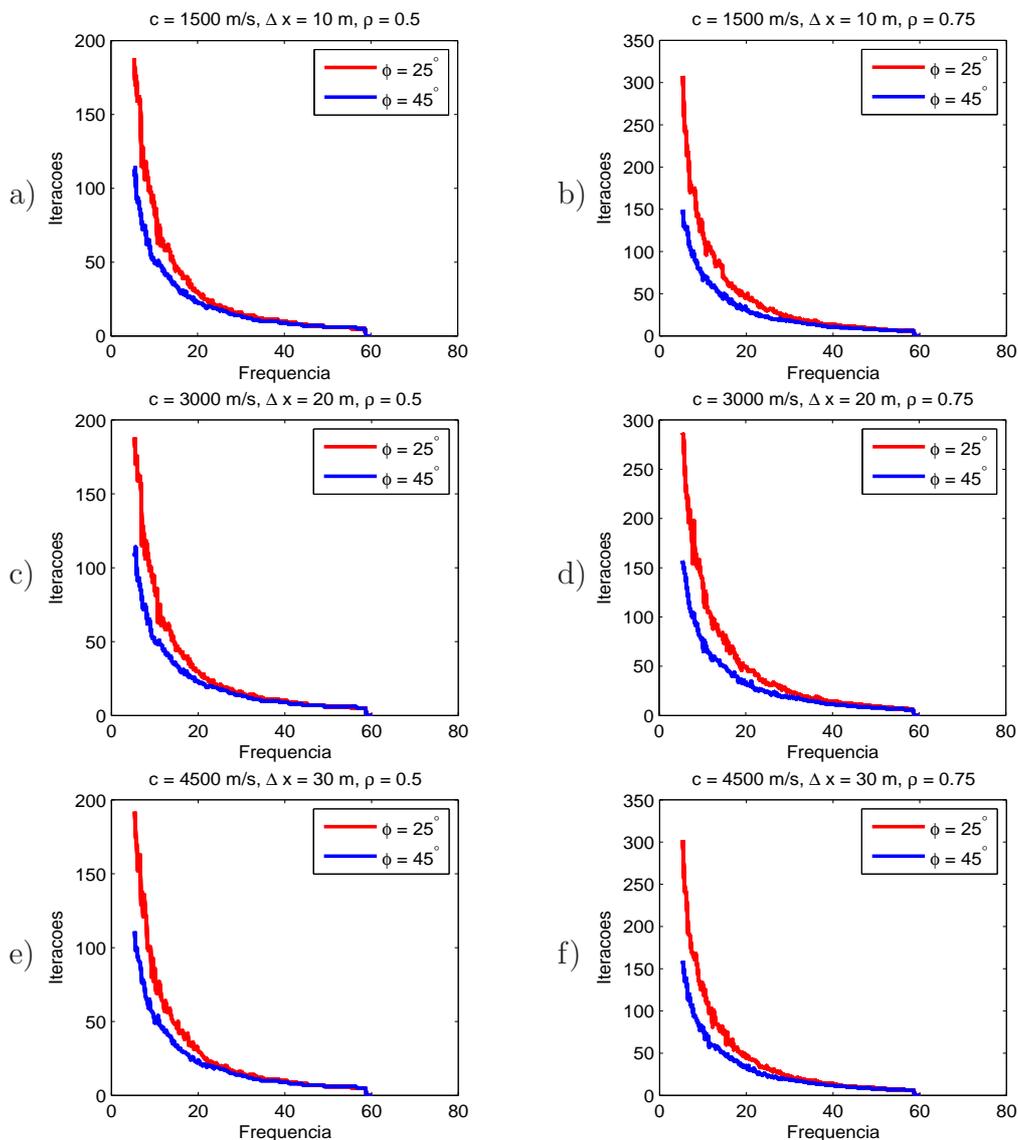
As Figuras 4.1 e 4.2 mostram alguns gráficos do números de iterações de convergência para qual  $\omega_i$  usando o algoritmo de BICGSTAB. Observe de acordo com (4.8) o condicionamento da matriz depende do espaçamento da malha  $\Delta x$ , dos ângulos na linha de corte de Padé através de  $A_n$  e  $B_n$ , bem como depende da velocidade do modelo  $c$  e do contraste de velocidades  $\rho$ . Todos os gráficos foram feitos usando  $\sigma = 1 + \rho + \rho^2$ .

Na Figura 4.1 a relação numérica entre modelo de velocidade e o tamanho da malha é mantida constante de  $|c/\Delta x| = 150$ . Embora variamos o modelo de velocidade e a discretização da malha na mesma proporção. Na coluna esquerda ((a), (c) e (e) ) note que o número de iterações não muda quando  $c$  e  $\Delta x$  variam. Na coluna direita vemos uma pequena mudança no limite de iterações máximas (b) e (f) para (d), mas, não é significativa<sup>7</sup>. Então podemos afirmar que o número de iteração não muda se a relação  $|c/\Delta x|$  for mantida constante para a série de Padé complexa. O mesmo padrão não se observa quando usamos Padé real, ou seja, ângulo de  $0^\circ$ . Em relação a (a) e (b) o número de iterações máximas permanece em 1293. Enquanto para (c) esse número é de 1232, uma variação muito pequena. Contudo, para (b) e (d) esses números passam para 3187 e 3801, respectivamente, uma diferença razoável de aproximadamente 610 iterações.

Ainda com relação análise da Figura 4.1 observamos que quando mudamos a variável  $\rho$  notamos uma mudança nos números de iterações. Comparando os gráficos da coluna

<sup>7</sup>Para ângulo de  $25^\circ$ , (b) tem 302, (d) tem 287 e (f) tem 307 iterações máximas.

Figura 4.1: Gráficos com a relação  $c/\Delta x = 150$ . A esquerda, a) c) e e), temos  $\rho = 0.5$ . A direita, b), d) e f), temos  $\rho = 0.75$ .

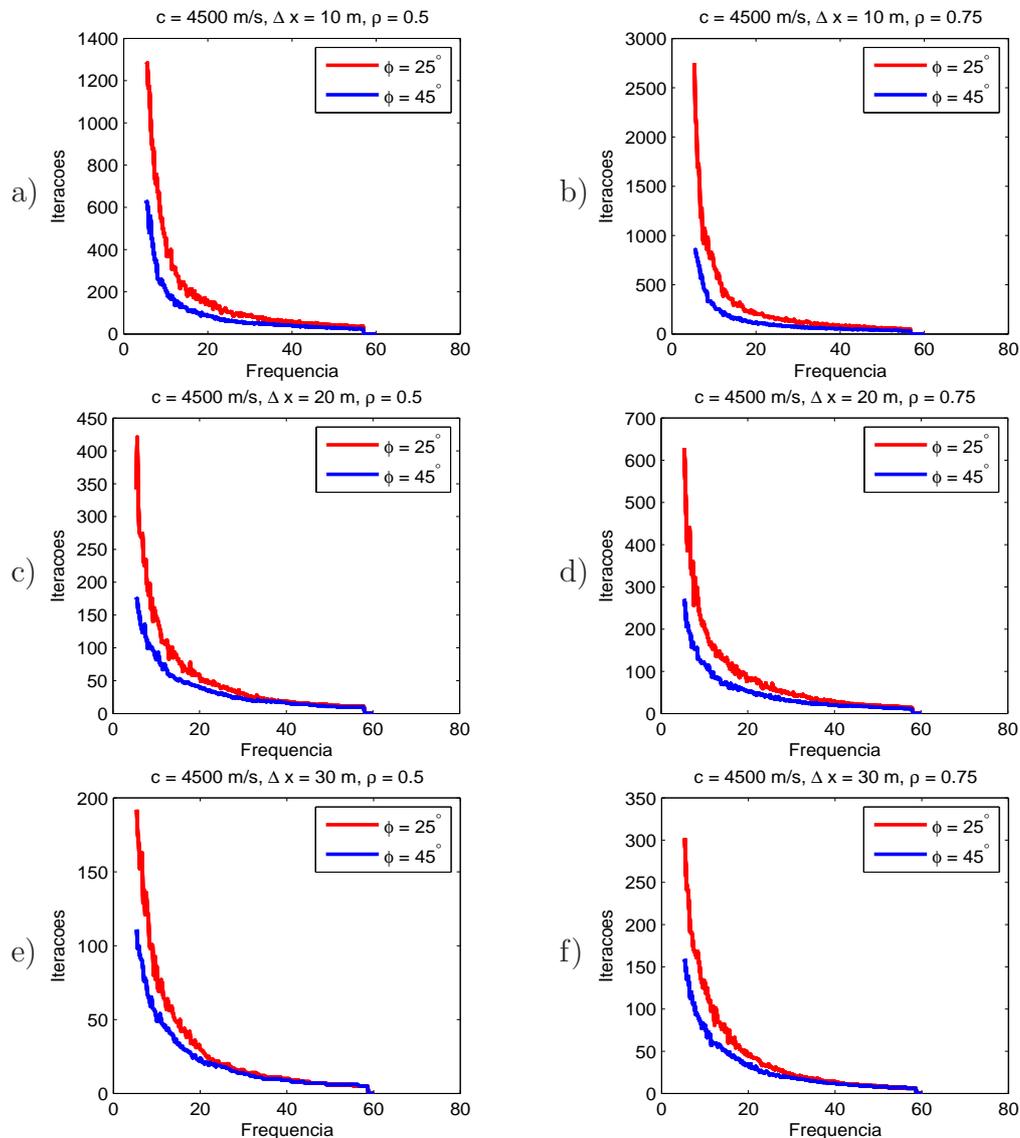


Fonte: Do autor.

esquerda com os gráficos da coluna direita, para os mesmo parâmetros, notamos que para modelos de velocidades com maior contraste  $\rho = 0.5$  temos menos iterações, ao comparado com os modelos de contraste moderado  $\rho = 0.75$ .

Na Figura 4.2, avaliando coluna esquerda ou coluna direita, correspondente a um mesmo valor de contraste para o modelo de velocidade, vemos que o número de iterações diminui se aumentarmos a discretização da malha, como mostra os gráficos (a), (c) e (e), ou analisando os gráficos (b), (d) e (f).

Figura 4.2: Gráficos com o mesmo modelo de velocidade  $c = 4500$ . Coluna a esquerda, (a), c) e e)) com  $\rho = 0.5$ . Colunas a direita (b), d) e f)) com  $\rho = 0.75$ . De cima para baixo aumenta a discretização da malha a partir de 10m.

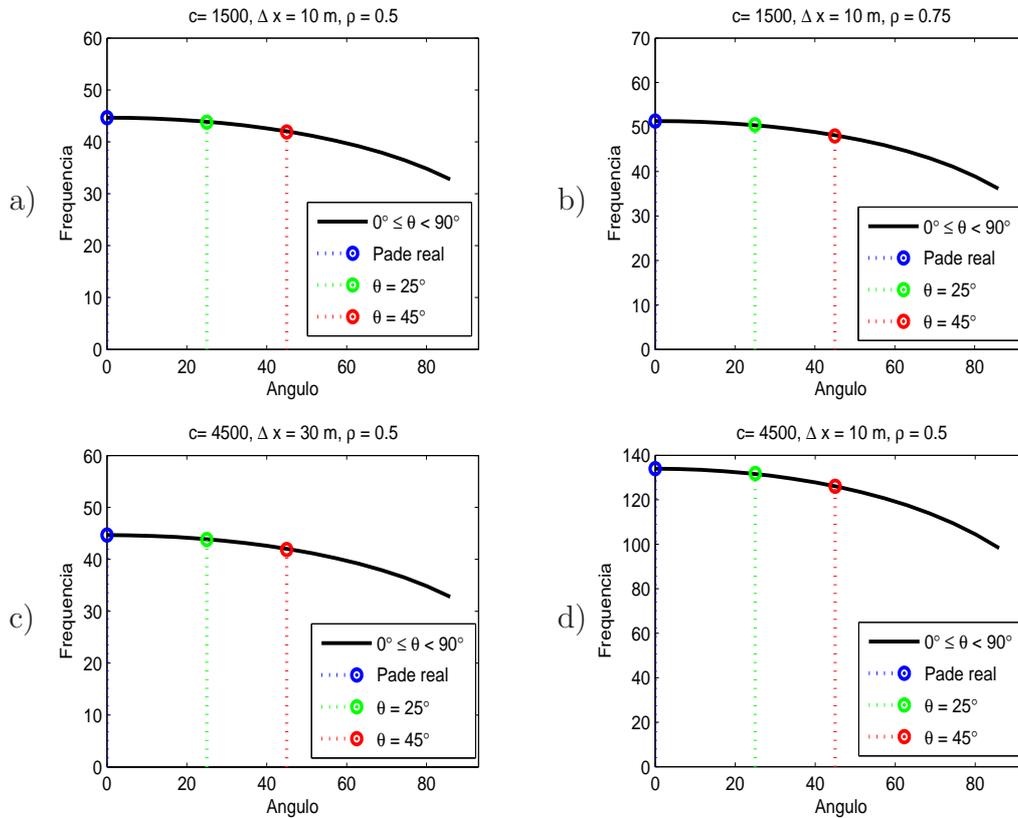


Fonte: Do autor.

Outra análise feita foi em relação a curva de condicionamento da matriz<sup>8</sup>. Avaliamos para a faixa de frequência mínima correspondente a equação (4.8), veja Figura 4.3. Os ângulos avaliados são representados por pontos que interceptam a curva. Note que para Padé real  $\theta = 0^\circ$  a matriz está no seu pior condicionamento. Enquanto que para ângulos de  $25^\circ$  a matriz está melhor condicionada, ficando ainda melhor para  $45^\circ$ . Embora a curva seja sutil, não podemos ignorar a maneira como a mudança do limite de frequência mínima interfere

<sup>8</sup>Lembrando que é uma condição suficiente de convergência, mas, não necessária.

Figura 4.3: Gráficos do condicionamento da matriz avaliados para o limite de frequência mínima.



Fonte: Do autor.

nos números de iterações no algoritmo.

Note a relação entre condicionamento da matriz com o número de iterações, veja que quanto menor for o limite de frequência mínima, menor será o número de iteração para esse ângulo. Por exemplo, (a) da Figura 4.1 corresponde a curva (a) da Figura 4.3; note que a frequência mínima de condicionamento para  $\theta = 25^\circ$  é aproximadamente  $44Hz$  é quando a curva de números de iterações começa a crescer. Enquanto, para  $\theta = 45^\circ$  a curva de condicionamento tem como frequência limite  $42Hz$ . E observe a diferença refletida no números de interações de ambos os ângulos.

Para os gráficos da coluna esquerda da Figura 4.1, a curva de dominância da matriz é dada pelo gráfico (a) da Figura 4.3. Observe a correspondência dos gráficos de (a) e (c) da Figura 4.3, ou seja, mudando a velocidade e o espaçamento da malha na mesma proporção temos o mesmo gráfico para o limite de frequência mínima o que é refletido nos números de iterações.

E para os gráficos a direita na Figura 4.1, a curva de dominância da matriz é dada por (b) na Figura 4.3. Note que mudando o valor do contraste do modelo de velocidade de

$\rho = 0.5$  para  $\rho = 0.75$ , como mostra (a) e (b) na Figura 4.3. O que muda a curva mínima de condicionamento da matriz, e esse limite de frequência mínima aumenta, refletindo no número de iterações, como mostra a coluna esquerda e direita na Figura 4.1.

O gráfico (d) na Figura 4.3 corresponde ao (a) na Figura 4.2, o que mostra que para um modelo com alta velocidade a curva de frequência mínima é alta. Aumentando o número de iterações como mostra (a) na Figura 4.2. Uma alternativa para diminuir essa curva de frequência mínima é aumentar o espaçamento da malha como, por exemplo, em (c) na Figura 4.2, diminuindo o número de iterações, e a curva de frequência mínima passa a ser representada por (c) na Figura 4.3.

Abaixo temos importantes observações resumidas do capítulo anterior e deste em questão. A respeito da análise da relação de dispersão e da análise de convergência do BICGSTAB.

A equação do sistema linear de (3.23) correspondente a equação de migração FFD com aproximação de Padé complexa de (3.22) na forma matricial. Vimos da análise de convergência que a matriz do sistema linear é melhor condicionada usando aproximação de Padé complexa para ângulo de  $45^\circ$ , do que para ângulo de  $25^\circ$ . Usando o sistema de solução iterativa do BICGSTAB, notamos que o campo de onda foi encontrada com menor número de iterações usando ângulo de  $45^\circ$ , do que para  $25^\circ$ .

Para o algoritmo FFD usando aproximação de Padé real, notamos que para o método BICGSTAB o número de iterações necessárias para a convergência aumenta drasticamente. Também vimos que a relação de dispersão deixa o algoritmo instável para  $0^\circ$ , e não atenua os modos evanescentes. Avaliando a inequação (4.4) para coeficientes de Padé real, encontramos a inequação (4.5), de modo que a desigualdade deixa a matriz do sistema linear pior condicionada, de acordo com a descrição dos números de iterações feita pelos gráficos da Figura 4.1 e das curvas de condicionamento da Figura 4.3.

Vimos também que para um modelo de contraste maior  $\rho = 0.5$ , a curva limite de frequência inferior da matriz deixa o sistema melhor condicionado, tal como mostra a análise dos gráficos das colunas á esquerda das Figuras 4.1 e 4.2, e das curvas de condicionamento (a) e (c) da Figura 4.3. E para ângulos de  $25^\circ$  e  $45^\circ$  a relação de dispersão mantém a estabilidade do algoritmo como foi mostrado nas Figuras 3.2 e 3.3.

Para modelos com alta velocidade se o espaçamento da malha for pequeno, a curva de frequência mínima deixa a matriz pior condicionada, como alternativa podemos aumentar o tamanho da malha, como mostra a análise da Figura 4.2.

## 4.5 ALGORITMOS

Efetuamos duas implementações do algoritmo de FFD 3D sem fatoração direcional. Uma usamos o método iterativo e em outra usamos método direto, em ambos usamos aproximação de Padé complexa. A seguir a descrição dos algoritmos implementados nesse trabalho, além de comparar com outros algoritmos, cujos resultados foram avaliados no capítulo seguinte.

FFD-BICGSTAB: usamos a equação (3.22) com aproximação de Padé complexa com ângulo de rotação na linha de corte de  $25^\circ$  e  $45^\circ$  para 1 termo da série real e complexa. Usando o método iterativo BICGSTAB para encontrar a solução do sistema linear de cada plano horizontal sem fatoração direcional do modelo de velocidade.

FFD-MUMPS: o MUMPS é um aplicativo de *software* que usa o método direto para resolução de grandes sistemas lineares esparsamente distribuídos. Usamos uma versão desse pacote e resolvemos a equação (3.22), ou seja, FFD sem fatoração direcional (AMESTOY et al., 2001, 2006), com ângulo de rotação na linha de corte de  $25^\circ$ , para um único termo da série de Padé complexa.

FFD com fatoração direcional: avaliamos com ângulo de  $25^\circ$  e  $45^\circ$  de rotação na linha de corte, para um único termo da série de Padé complexa. Partindo da representação matricial da equação do algoritmo de FFD com fatoração nas direções ortogonais (4.1). E com fatoração em quatro direções, também conhecido como *four-way splitting*, neste trabalho o referimos como fatoração multi-direcional. Foi usado método direto para solucionar os sistemas lineares triangulares do modelo de velocidade.

FFDPI: foi utilizado com fatoração direcional ortogonal, de acordo com a aproximação da seção 2.2.5; usando método direto para resolver os sistemas lineares.

RTM: é um método de migração baseado na propriedade de reversão temporal da equação da onda completa (BAYSAL; KOSLOFF; SHERWOOD, 1983) permitindo gerar imagens precisas em áreas com grande grau de complexidade do modelo de velocidade.

No capítulo seguinte mostramos, para o modelo homogêneo, a resposta ao impulso do algoritmo de FFD-BICGSTAB usamos aproximação de Padé real e complexa. Para o FFD-BICGSTAB e FFD com fatoração direcional, escolhemos a linha de corte para o ângulo de rotação da aproximação Padé complexo, entre  $25^\circ$  e  $45^\circ$ , de acordo com os gráficos da análise da relação de dispersão. Além de avaliar a fatoração, direcional ou multi-direcional. Baseados na análise dos resultados do modelo homogêneo, estendemos a análise para o modelo heterogêneo sal SEG/EAGE.

## 5 EXPERIMENTOS NUMÉRICOS

Para validar as implementações do algoritmo de FFD 3D, sem fatoração direcional do operador de continuação, avaliamos sua resposta ao impulso em meio homogêneo e em um meio heterogêneo com forte variação lateral de velocidade, o modelo de sal SEG/EAGE (AMINZEDEH et al., 1995). Comparamos a resposta ao impulso do algoritmo com a resposta ao impulso calculada com o algoritmo FFD 3D com fatoração multi-direcional, com o algoritmo FFDPI e com o algoritmo de migração por reversão temporal (RTM), o qual utiliza a equação de onda completa (BAYSAL; KOSLOFF; SHERWOOD, 1983). Estes experimentos numéricos permitem avaliar os erros causados pela fatoração direcional na migração FFD 3D em meios fortemente heterogêneos e o desempenho dos algoritmos de solução de sistemas lineares de grande porte, MUMPS e BICGSTAB, além de avaliar as limitações da migração FFD 3D em relação à migração com a equação de onda completa.

Em todos os experimentos numéricos, para calcular a resposta ao impulso utilizando algoritmos de continuação, utilizamos um pulso Ricker de fase zero com frequência pico de 25 Hz, com intervalo de amostragem de 8 ms. A este pulso aplicamos um filtro trapezoidal de vértices 5 Hz, 25 Hz, 45 Hz e 60 Hz. Para a resposta ao impulso da migração RTM avaliamos a utilizamos a versão causal do mesmo pulso. Analisamos a resposta ao impulso após 1 s de tempo de propagação.

### 5.1 RESULTADOS NO MODELO HOMOGÊNEO

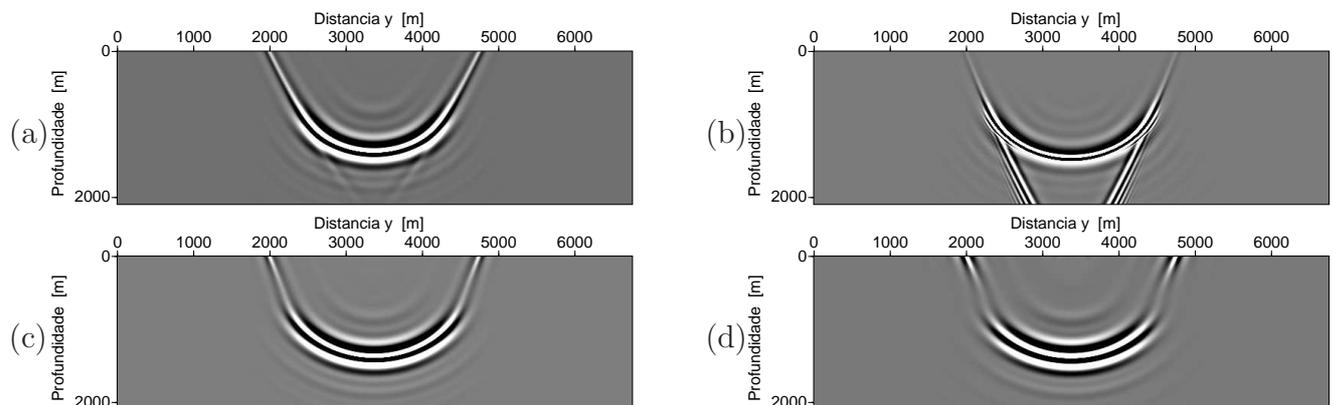
O modelo homogêneo tem velocidade de 1500 m/s e está especificado em uma malha regular de dimensões  $676 \times 676 \times 210$  ao longo das direções  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$ , respectivamente. O intervalo de amostragem é uniforme de 10 m. Esta seção do trabalho foi dividida em duas outras seções. A primeira é denominada de: FFD com e sem fatoração direcional. A respeito do algoritmo de FFD sem fatoração direcional, usamos nosso algoritmo de FFD-BICGSTAB. Para o algoritmo com fatoração direcional, também conhecido somente por *splitting*, usamos fatoração nas direções ortogonais. A segunda seção denominamos por: FFD com e sem fatoração multi-direcional, neste caso, para o algoritmo de FFD com fatoração, além da fatoração ortogonal, usamos também a fatoração bi-diagonal no algoritmo de migração, também conhecido por *four-way splitting*. Além de avaliamos para o nosso algoritmo de

FFD-BICGSTAB, comparamos os cortes de seções de resposta ao impulso do modelo com os algoritmos de FFDPI e do RTM.

### FFD com e sem fatoração direcional

O primeiro experimento avalia o efeito do ângulo de rotação da linha de corte na aproximação de Padé complexa na resposta ao impulso para o algoritmo FFD 3D com e sem fatoração direcional. Para avaliar a resposta ao impulso sem fatoração direcional utilizamos o algoritmo de FFD-BICGSTAB. Utilizamos apenas um termo na expansão de Padé e ângulos de rotação de  $25^\circ$  e  $45^\circ$  para linha de corte. Para destacar o efeito da correção de diferenças finitas em relação as correções de deslocamento de fase e *split-step* na expansão FFD, a velocidade de referência foi escolhida de modo a que  $\rho = 0.5$  em todos os experimentos em meio homogêneo.

Figura 5.1: Cortes verticais da resposta ao impulso no plano  $x_1=4160$  m. Coluna direita com ângulo de  $25^\circ$  e coluna esquerda com ângulo de  $45^\circ$ . Em (a) e (b): FFD com fatoração direcional. Em (c) e (d) sem fatoração direcional.

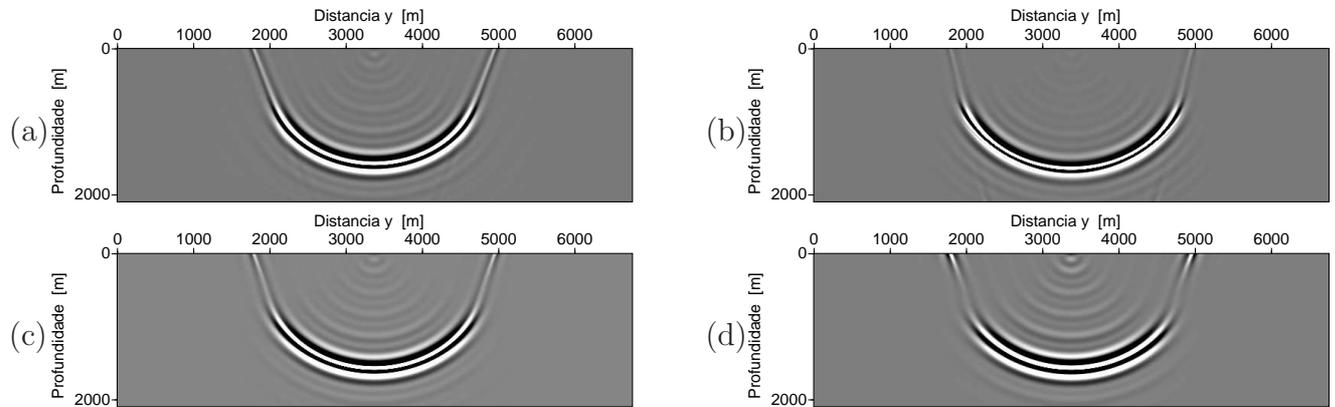


Fonte: Do autor.

As respostas ao impulso destes experimentos em diferentes planos estão apresentadas nas figuras de 5.1 a 5.5. Em cada uma destas figuras a primeira coluna contém os resultados com ângulo de rotação da linha de corte de  $25^\circ$ , a segunda coluna os resultados para ângulo de  $45^\circ$ . Os cortes (a) e (b) foram obtidos com algoritmo de FFD com fatoração direcional, e os cortes em (c) e (d) foram obtidos do nosso algoritmo de FFD-BICGSTAB.

Da análise da Figura 5.1, referente aos cortes (a) e (b), com fatoração direcional, existe um evento linear não físico na parte central e inferior das frentes de ondas. Enquanto, para os cortes sem fatoração direcional, (c) e (d), esses eventos não aparecem. Observe que esses

Figura 5.2: Cortes verticais da resposta ao impulso no plano  $x_1=3380$  m. Coluna direita com ângulo de  $25^\circ$  e coluna esquerda com ângulo de  $45^\circ$ . Em (a) e (b): FFD com fatoração direcional. Em (c) e (d) sem fatoração direcional.



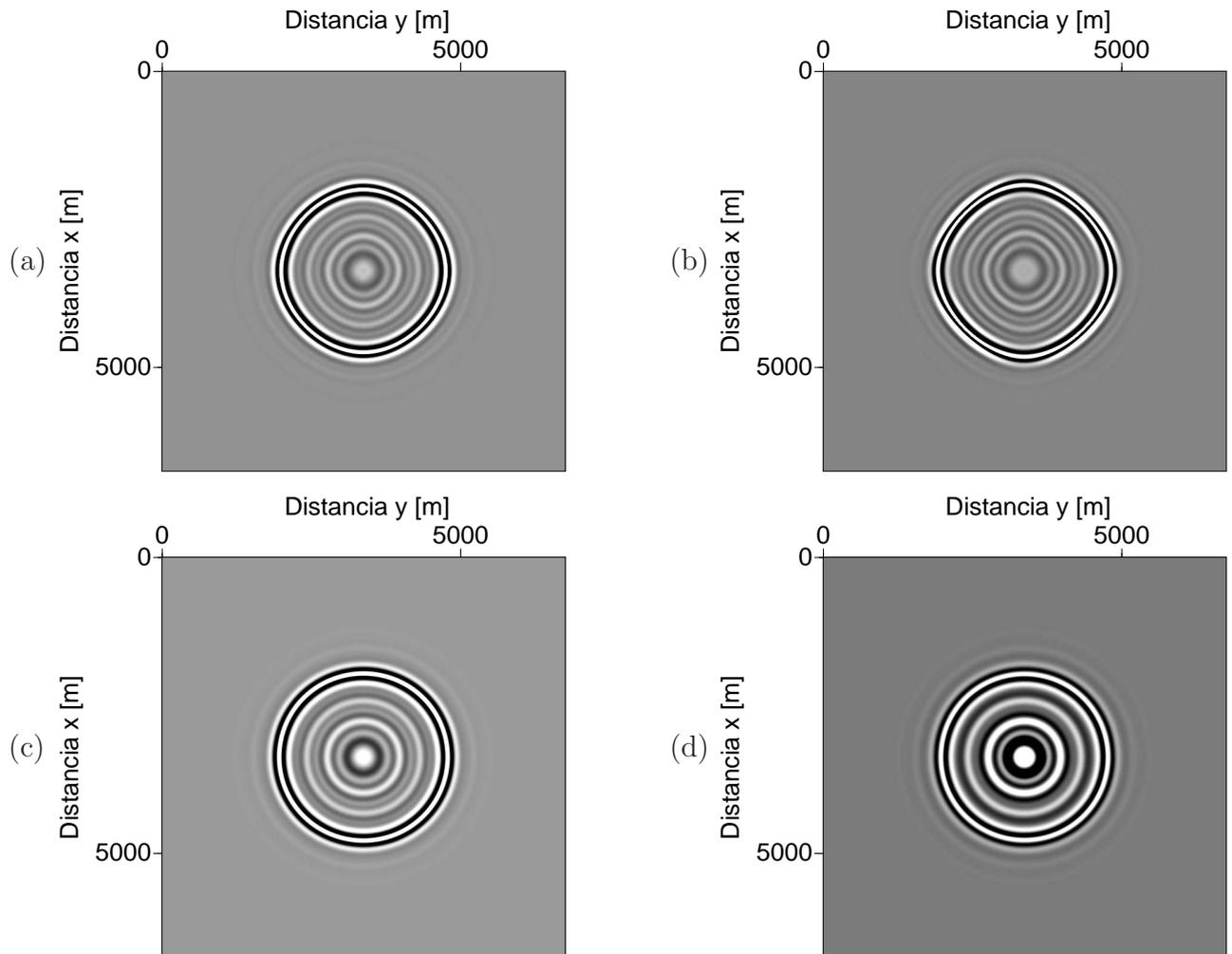
Fonte: Do autor.

eventos são notados apenas nos algoritmos de FFD com fatoração, e como esses eventos não são eventos verdadeiros do modelo de velocidade podemos inferir a estes eventos como erros que o algoritmo com fatoração propaga. Comparando entre si, os cortes sem fatoração, é notório que o evento não linear em (b), que tem maior abertura angular, está mais visível que em (a), cuja abertura angular é menor.

Na Figura 5.2 todos os cortes se mostram com menos atenuação da forma do pulso propagado ao serem comparados com os cortes da Figura 5.1. Neste cortes feitos no meio do modelo no plano vertical, notamos que os cortes (a) e (b) apresentam os mesmos eventos lineares que foram visualizados nos cortes (a) e (b) da Figura 5.1; entretanto, esses eventos são menos marcados na Figura 5.2. Já nos cortes (c) e (d), os eventos lineares discutidos anteriormente não ocorrem.

Observando os cortes verticais nas Figura 5.1 e 5.2 observamos a limitação do operador FFD para calcular a resposta ao impulso para abertura angular acima de  $45^\circ$ . Este resultado está de acordo com a análise da relação de dispersão do operador FFD na seção 3.5. Estas figuras também destacam que a fatoração direcional produz eventos lineares não causais na resposta ao impulso. Estes eventos são mais pronunciados no corte fora do plano contendo a fonte. O aumento do ângulo de rotação da linha de corte causou o alargamento da forma de onda, este efeito pode ser justificado pela parte imaginária da relação de dispersão quando se usa apenas um termo na aproximação de Padé. Para ângulo de rotação de  $45^\circ$  há atenuação fora da região de evanescência, ver Figura 3.3 na seção 3.5.

Figura 5.3: Cortes horizontais da resposta ao impulso no plano  $x_3=550$  m. Coluna direita com ângulo de  $25^\circ$  e coluna esquerda com ângulo de  $45^\circ$ . Em (a) e (b): FFD com fatoração direcional. Em (c) e (d) sem fatoração direcional.

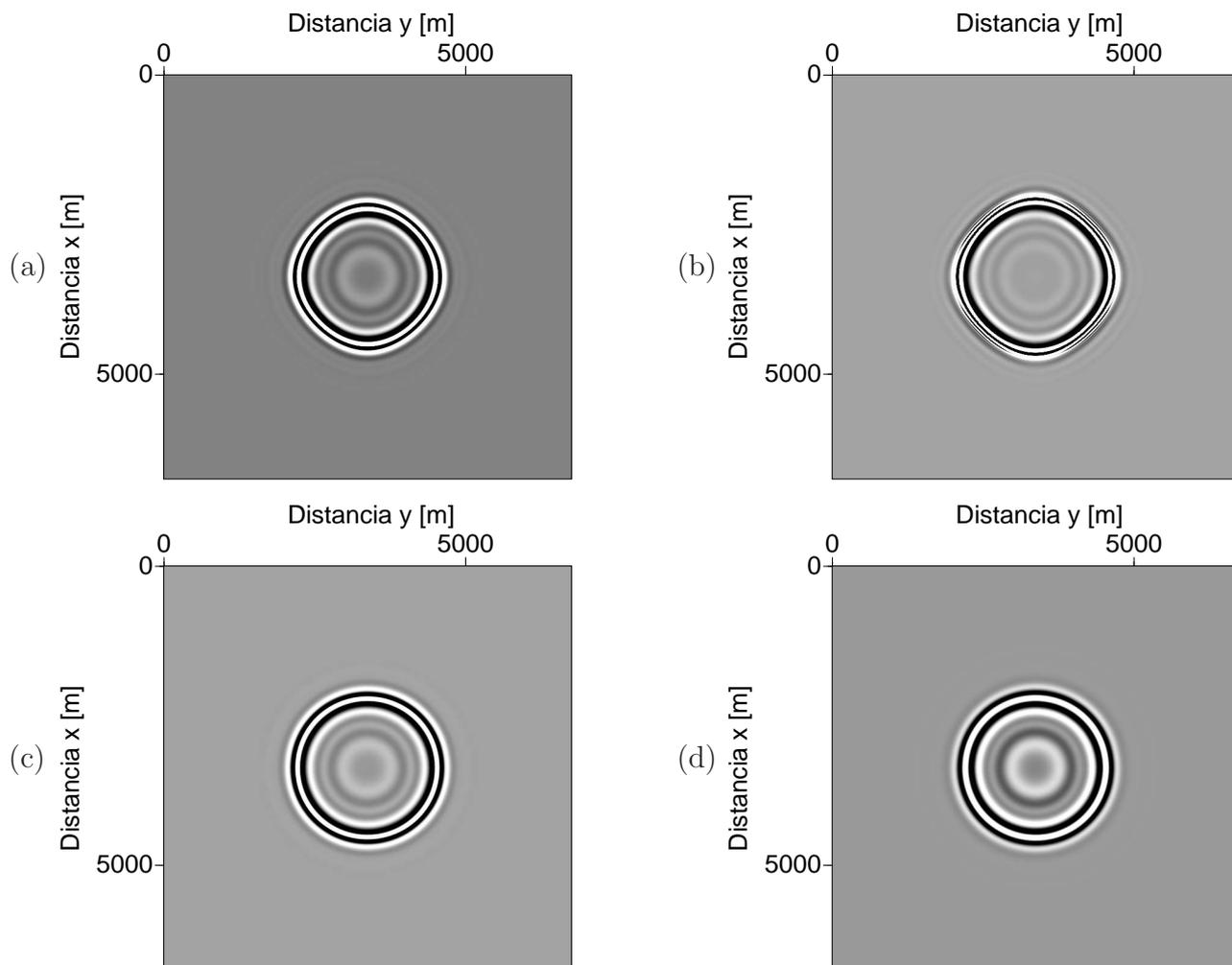


Fonte: Do autor.

A anisotropia numérica associada a fatoração direcional do operador FFD pode ser melhor avaliada em seções horizontais da resposta ao impulso, apresentadas nas Figuras de 5.3 a 5.5, em ordem crescente de profundidade.

Da Figura 5.3 temos os cortes no plano horizontal próximos a superfície. Para esse nível de profundidade a anisotropia numérica já é visível nos cortes (a) e (b), principalmente quando aumentamos o ângulo de rotação na linha de corte. No entanto, para os cortes (c) e (d) feitos pelo nosso algoritmo de FFD sem fatoração direcional, a anisotropia numérica não aparece. Com isso, podemos afirmar que o problema da anisotropia é facilmente resolvido se optarmos por não usar a técnica da fatoração direcional.

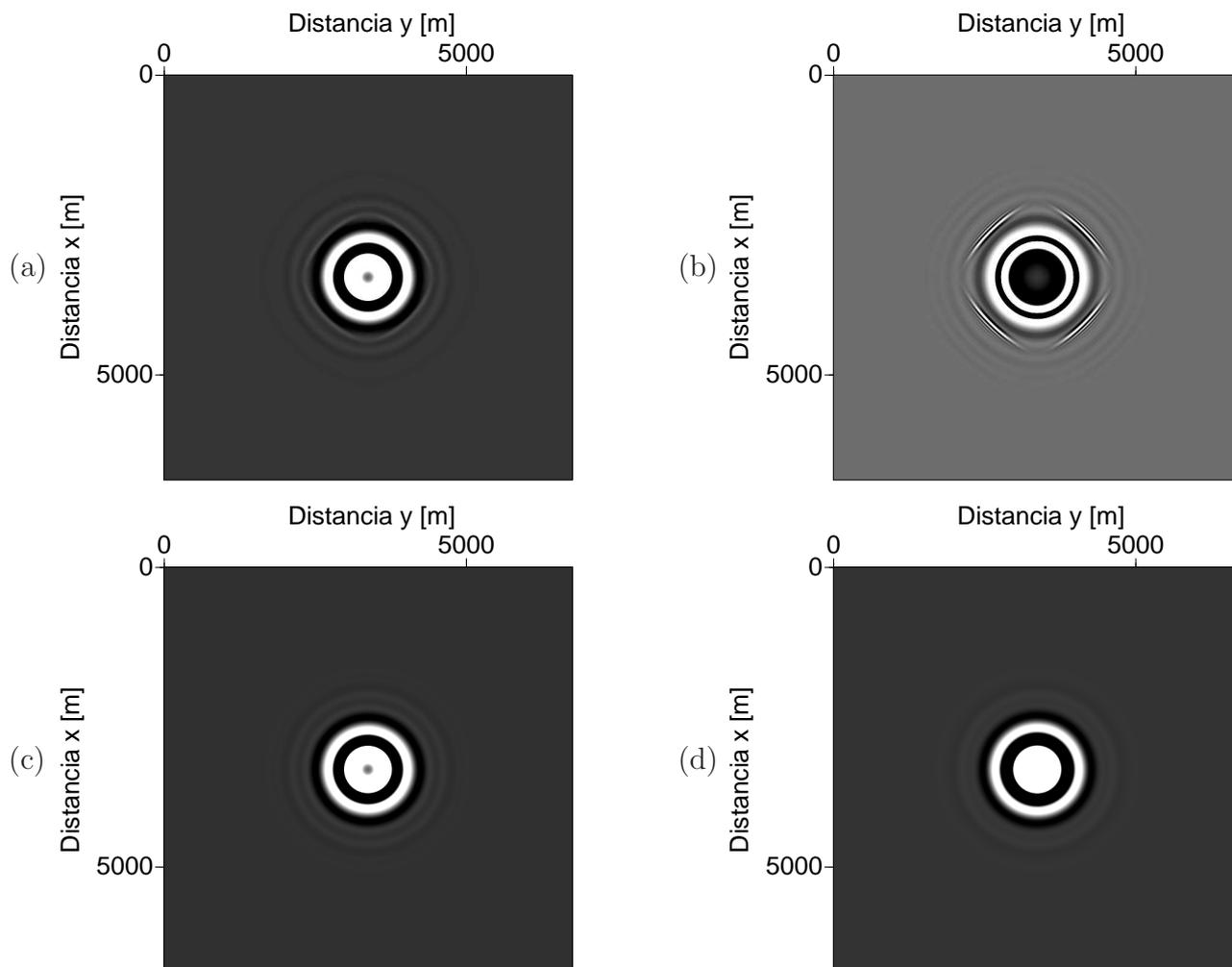
Figura 5.4: Cortes horizontais da resposta ao impulso no plano  $x_3=1050$  m. Coluna direita com ângulo de  $25^\circ$  e coluna esquerda com ângulo de  $45^\circ$ . Em (a) e (b): FFD com fatoração direcional. Em (c) e (d) sem fatoração direcional.



Fonte: Do autor.

Analisando os cortes (a) e (b) das Figs. 5.3 e 5.4 com os cortes de (a) e (b) da Figura 5.5, notamos que a anisotropia é presente devido a alta variação de contraste do modelo de velocidade. Notamos também que a anisotropia fica ainda mais evidente quando consideramos planos horizontais com maiores profundidades. Por exemplo, comparando os cortes (a) e (b) da Figura 5.3, que está próximo a superfície, com os cortes (a) e (b) da Fig. 5.4 vemos neste último que a anisotropia é mais evidente. Entretanto, comparando os cortes (a) e (b) da Fig. 5.4 com os cortes (a) e (b) da Fig. 5.5 notamos que a anisotropia é mais forte nos cortes da Fig. 5.5.

Figura 5.5: Cortes horizontais da resposta ao impulso no plano  $x_3=1550$  m. Coluna direita com ângulo de  $25^\circ$  e coluna esquerda com ângulo de  $45^\circ$ . Em (a) e (b): FFD com fatoração direcional. Em (c) e (d) sem fatoração direcional.



Fonte: Do autor.

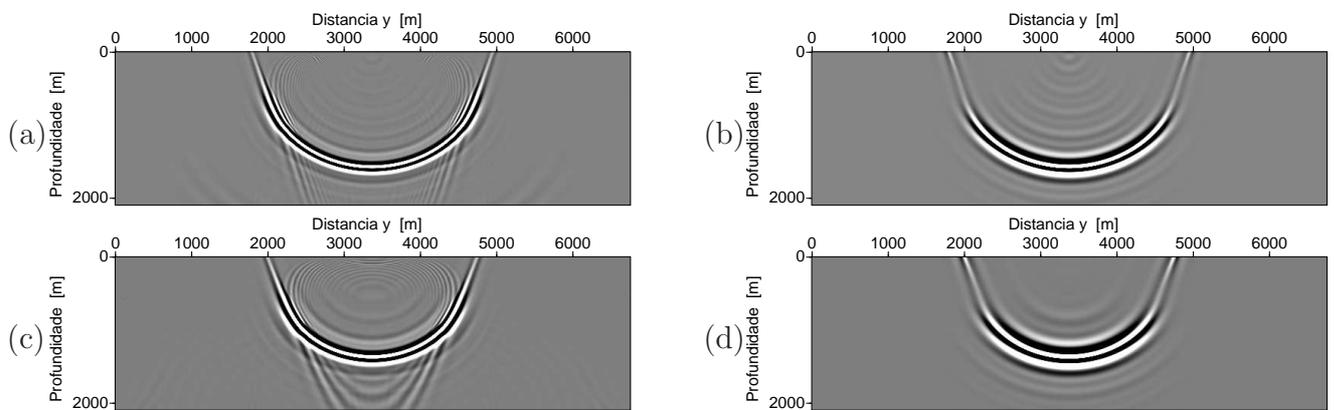
Nas Figuras 5.2 e 5.5 indicam que a fatoração direcional ao longo das coordenadas produz anisotropia considerável quando a velocidade de referência é bem menor que a velocidade do meio. Esta situação ocorre sempre a o algoritmo FFD é aplicado a meios com forte variação lateral de velocidade, pois a velocidade de referência é tomada como a velocidade mínima do modelo em cada nível.

Baseado nas análises dos parágrafos anteriores vamos mostrar cortes nos planos verticais e horizontais, resultados da resposta ao impulso nos modelos de velocidades, usando ângulo de  $25^\circ$  na linha de corte para Padé complexa. Pois a forma da frente de onda é melhor preservada para  $25^\circ$  do que para ângulo de  $45^\circ$ , que como vimos infere no algoritmo um

efeito de atenuação na propagação do pulso.

O segundo experimento compara o efeito da aproximação de Padé real e complexa na resposta ao impulso do algoritmo de FFD-BICGSTAB. Para o algoritmo com aproximação de Padé real mostramos dois cortes da resposta ao impulso na seção vertical. Estes cortes mostram as ondas evanescentes que a aproximação de Padé real não atenua. Para o algoritmo com aproximação de Padé complexa mostramos apenas dois cortes na seção vertical.

Figura 5.6: Cortes verticais da resposta ao impulso. No plano  $x_1=3380$  m de (a) e (b). No plano  $x_1=4160$  m de (c) e (d). Coluna esquerda com ângulo de  $0^\circ$  e coluna direita com ângulo de  $25^\circ$ . Ambos sem *splitting* usando  $\rho = 0.5$ .



Fonte: Do autor.

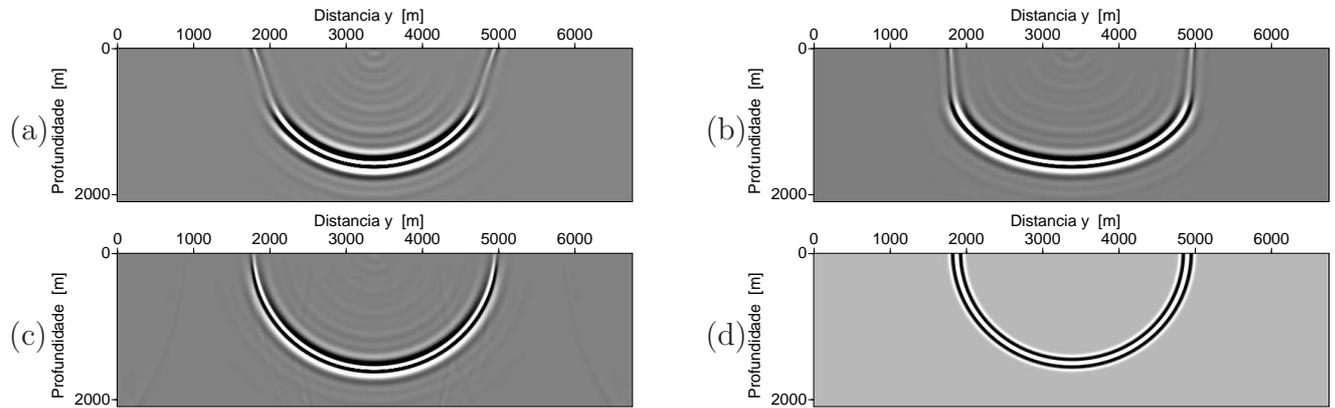
A Figura 5.6 representa o quanto a expansão de Padé real não é boa para processos de migração, tendo em vista que em (a) e (c), mostram eventos que não existem, que são exatamente as ondas evanescentes que o algoritmo de FFD com Padé real não atenua, e por isso tenta migrá-los, causando um erro na imagem representando refletividades que não existem. Em (b) e (d) para ângulos de abertura de  $25^\circ$  o algoritmo não apresenta esses efeitos de frente de ondas.

### FFD com e sem fatoração multi-direcional

O terceiro experimento avalia o efeito da fatoração multi-direcional na aproximação de Padé complexa com ângulo de  $25^\circ$  na linha de corte para o algoritmo de migração FFD 3D. A esta fatoração multi-direcional foram escolhidas as direções ortogonais e bi-diagonais aplicadas simultaneamente no mesmo plano horizontal para cada extrapolação do campo de onda em profundidade. Para avaliar a resposta ao impulso sem fatoração utilizamos o algoritmo de FFD-BICGSTAB. Para ambos os algoritmos de FFD usamos apenas um termo

da série de Padé complexa. Além de compararmos a resposta ao impulso dos algoritmos de FFD, com e sem fatoração, também utilizamos os algoritmos de migração FFDPI e RTM.

Figura 5.7: Cortes verticais da resposta ao impulso no plano  $x_1=3380$  m. (a) FFD-BICGSTAB, (b) FFD com fatoração multi-direcional, (c) FFDPI, (d) RTM.

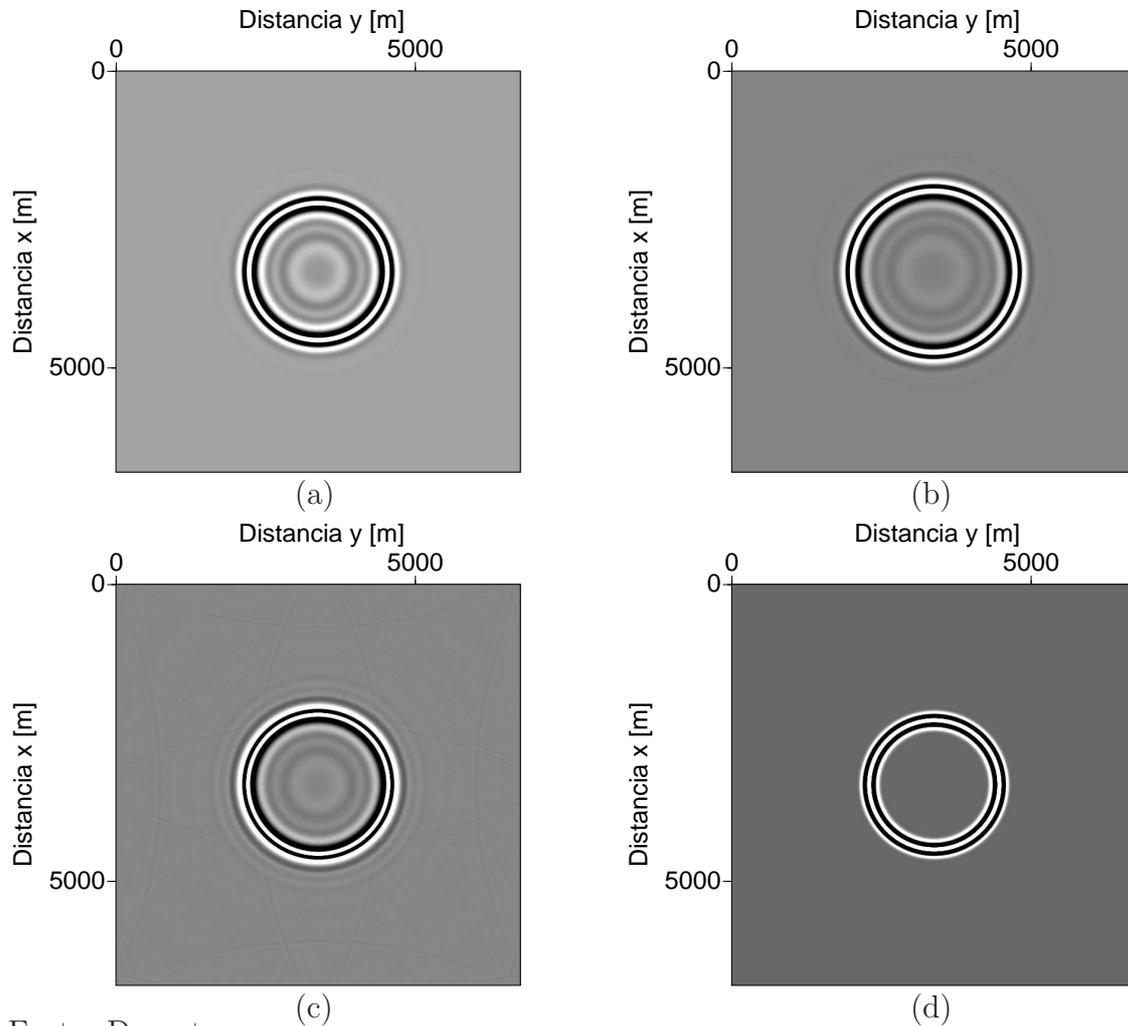


Fonte: Do autor.

Na Figura 5.7 mostra a resposta ao impulso dos algoritmos de FFD, com e sem fatoração multi-direcional, FFDPI e RTM. Em (a) nota-se que a forma da frente de onda é diferente de (d) e isso é devido ao algoritmo não preservar a amplitude do sinal. Em (b) observamos uma frente de onda cujo diâmetro é maior se comparada com (a). Porém, a posição da fase da frente de onda de (a) é a mesma que (c). Em (c) comparada com os outros cortes tem o raio da frente de onda um pouco maior, tanto em profundidade quanto nas laterais, mostrando também eventos fracos que são devidos a fatoração direcional. O corte que melhor se compara com (d), ou seja, o RTM, se considerarmos a forma da frente de onda é o corte (c), por outro lado, se considerarmos a qualidade da imagem, sem os efeitos devidos a técnica da fatoração, o corte (a) é a melhor candidata, salvo os efeitos de atenuação e o limite de abertura angular.

Na Figura 5.8 temos os cortes para o plano horizontal. Em relação à uniformidade da fase do pulso (a) está mais parecida com o RTM. Enquanto, em (b) e (c) as fases não estão uniformes. Em relação ao diâmetro do corte, todos apresentam diâmetro maior em relação ao RTM, seguindo a ordem,  $(d) < (a) < (c) < (b)$ , então, a melhor imagem no plano para este nível comparada com o RTM é o corte (a), e a pior é o FFD com fatoração multi-direcional, pois não preserva a fase da frente de onda. Observe que as imagens (b) e (c) não mostram anisotropia numérica. O mesmo padrão se observa para os cortes da Figura 5.9. Como vimos no primeiro experimento numérico desse capítulo, o aumento da profundidade somando a uma variação forte do modelo de velocidade, aumenta o aspecto da anisotropia numérica, para o FFD com fatoração direcional. Entretanto, não ocorre para os cortes (b) e (c) das

Figura 5.8: Cortes horizontais da resposta ao impulso no plano  $x_3=1050$  m. (a) FFD-BICGSTAB, (b) FFD com fatoração multi-direcional, (c) FFDPI e (d) RTM.

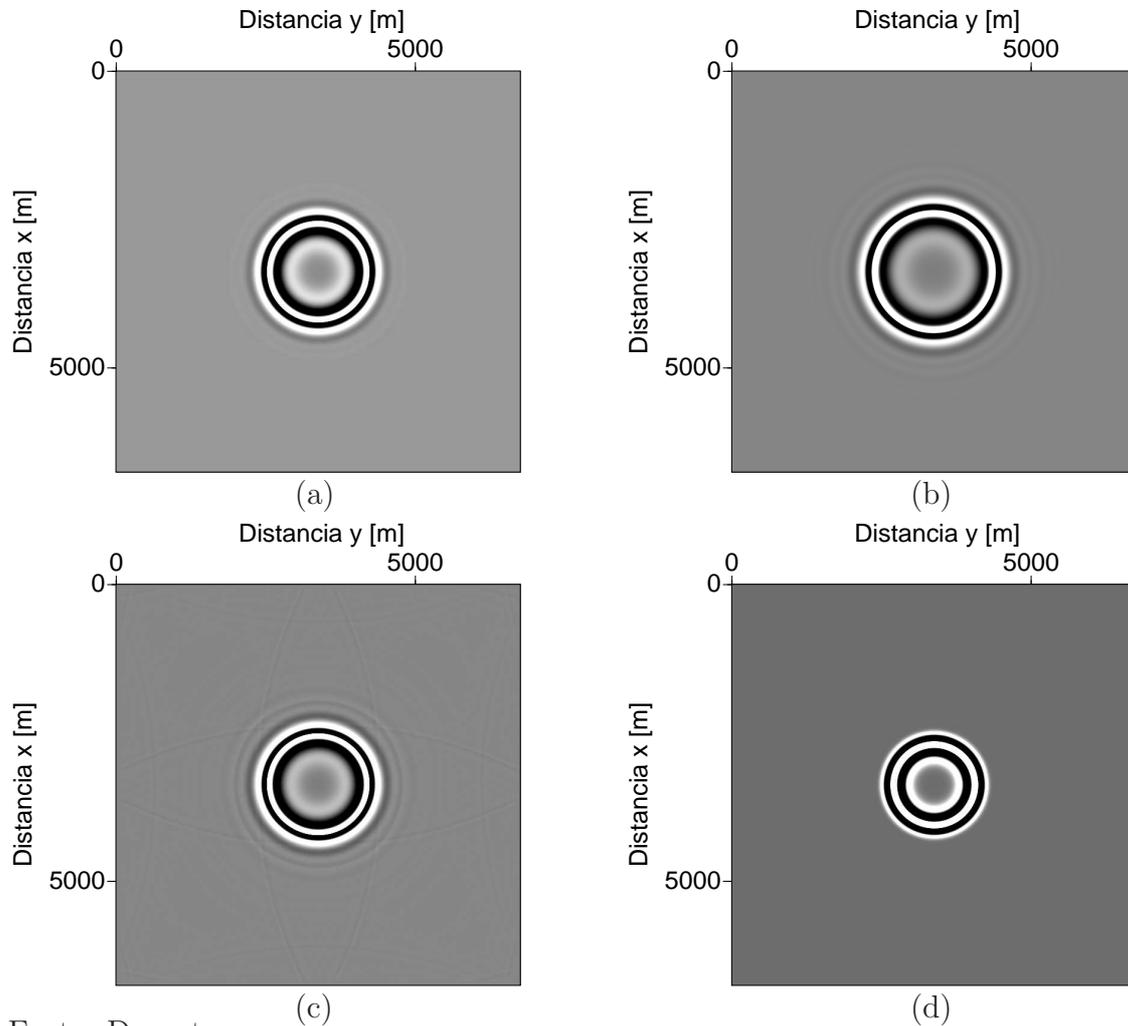


Fonte: Do autor.

Figuras 5.8 e 5.9 que são algoritmos com fatoração multi-direcional, mesmo para um meio com forte variação lateral de velocidade.

Concluimos que para o modelo homogêneo usar a técnica da fatoração multi-direcional para o algoritmo de FFD 3D, é suficiente para corrigir o problema da anisotropia numérica, presente em meios com forte variação lateral de velocidade. Entretanto, mostra alguns efeitos como mudança de uniformidade da fase do sinal, e o tamanho do diâmetro da frente de onda quando analisamos as imagens em planos horizontais, mesmo dentro do limite de abertura angular, que validam os algoritmos de FFD. Ressaltamos que o FFDPI com fatoração direcional também resolve o problema da anisotropia. Embora, o uso da técnica da fatoração multi-direcional para o algoritmo de FFD 3D, no modelo homogêneo, não invalidarem o método, estamos interessados na resposta ao impulso para o modelo heterogêneo.

Figura 5.9: Cortes horizontais da resposta ao impulso no plano  $x_3=1350$  m. (a) FFD-BICGSTAB, (b) FFD com fatoração multi-direcional, (c) FFDPI e (d) RTM.



Fonte: Do autor.

## 5.2 RESULTADOS NO MODELO SAL SEG/EAGE

Em meios fortemente heterogêneos o algoritmo FFD com aproximação de Padé real é instável (BIONDI, 2002). O algoritmo FFDPI (BIONDI, 2002) foi proposto para superar esta limitação. Amazonas et al. (2007) mostraram que a aproximação de Padé complexa também é estável na migração 2D em meios fortemente heterogêneos. Os experimentos numéricos a seguir avaliam a estabilidade da expansão de Padé complexa para a migração FFD 3D, em um meio fortemente heterogêneo, com e sem fatoração multi-direcional. Neste modelo a velocidade de referência é menor que metade da velocidade máxima em alguns níveis, ou seja, o parâmetro  $\rho$  é menor que 0.5. O outro objetivo destes experimentos é avaliar a acurácia da migração FFD com expansão de Padé complexa em relação à migração FFDPI na presença

de forte variação lateral de velocidade. Adicionalmente, comparamos a resposta ao impulso destes algoritmos com a resposta ao impulso da migração RTM. Finalmente, com o objetivo de melhorar a resposta do algoritmo para grandes ângulos de mergulho, avaliamos a resposta ao impulso da migração FFD complexa utilizando dois termos na expansão de Padé com e sem fatoração multi-direcional.

O modelo heterogêneo utilizado para avaliar a resposta ao impulso foi obtido aplicando ao modelo de sal SEG/EAGE um filtro de mediana móvel de dimensão  $7 \times 7 \times 7$ . Este filtro eliminou os contrastes de velocidade utilizados para simular refletores na porção sedimentar do modelo. O filtro de mediana móvel não suaviza o forte contraste de velocidade entre a porção sedimentar do modelo e o corpo de sal. O modelo de velocidade está especificado em uma malha regular de dimensões  $676 \times 676 \times 210$  ao longo das direções  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$ , respectivamente. O intervalo de amostragem espacial é uniforme e de 10 m. A fonte está localizada no topo do modelo nas coordenadas (3380 m, 3380 m, 0). As Figuras 5.10-5.11 apresentam seções do modelo de velocidade utilizado para propagação. O forte contraste de velocidade neste modelo produz valores para o parâmetro  $\rho$  da migração FFD menor que 0.5 em alguns níveis do modelo.

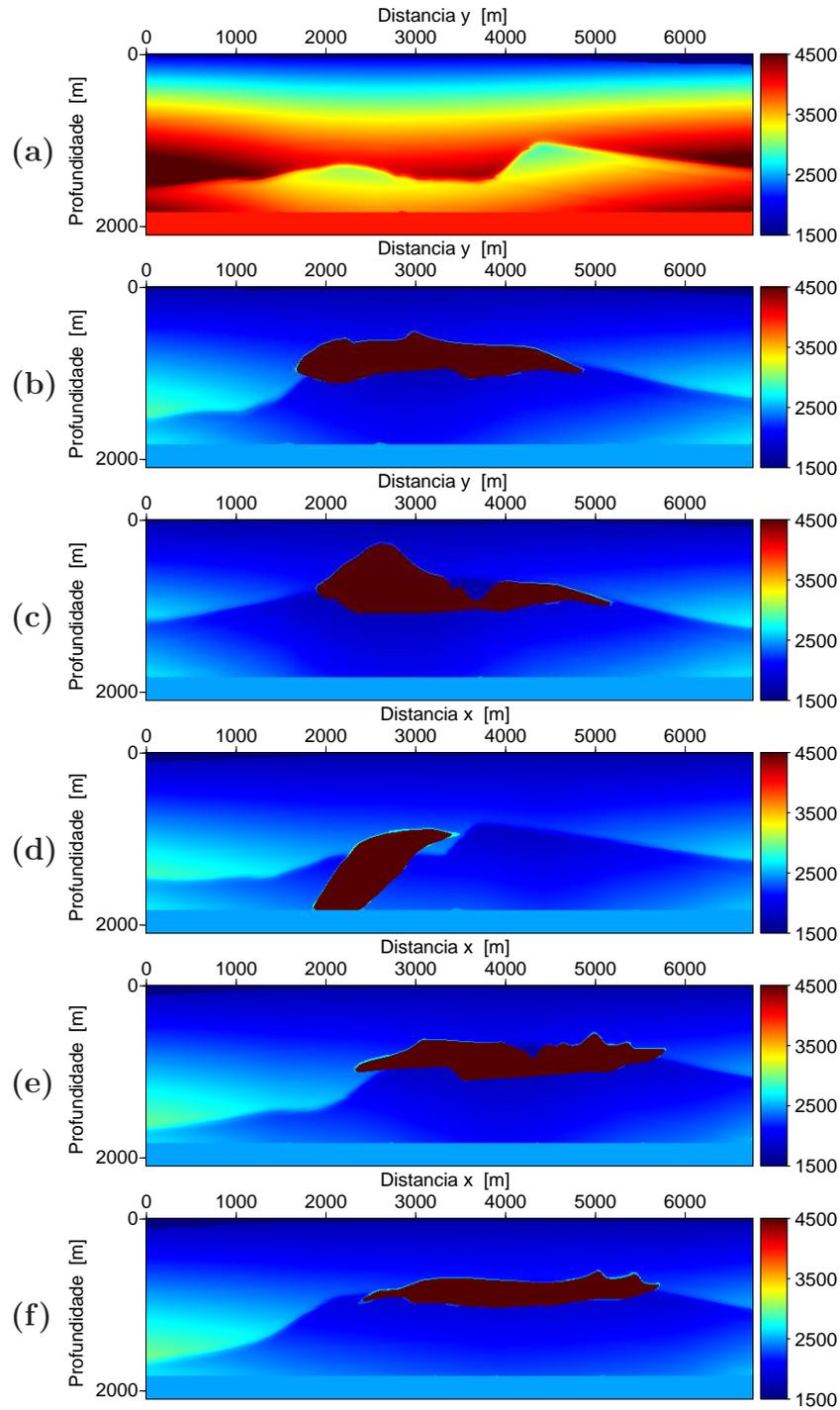
O primeiro experimento numérico avalia a resposta ao impulso para os algoritmos FFD-BICGSTAB, FFD-MUMPS, FFD com fatoração multi-direcional, FFDPI e RTM. Os algoritmos FFD com aproximação de Padé complexa utilizam ângulo de rotação da linha de corte de  $25^\circ$  e um único termo da expansão. As respostas impulso estão apresentadas sobre as mesmas seções utilizadas nas Figuras 5.10-5.11. As seções verticais da resposta ao impulso em três planos de coordenada  $x_1$  constante estão apresentadas nas Figuras 5.12 a 5.14. As Figuras 5.15 a 5.17 apresentam três seções em planos de coordenada  $x_2$  constante. Finalmente, quatro seções da resposta ao impulso em planos horizontais estão nas Figuras 5.18 a 5.21.

As seções de resposta ao impulso indicam que a resposta da migração FFD com aproximação de Padé complexa é estável, independentemente de sua implementação. Adicionalmente, as implementações do algoritmo FFD sem fatoração multi-direcional, FFD-BICGSTAB e FFD-MUMPS, produziram respostas idênticas. Entretanto há diferenças de posicionamento entre eventos calculados por estes algoritmos com eventos correspondentes calculados pela propagação FFD com fatoração multi-direcional. As diferenças podem ser melhor observadas nas Figuras 5.14 e 5.20, comparando-se o posicionamento dos eventos próximos aos quadros vermelhos. Estas diferenças são mais evidentes para eventos com maior mergulho, ver Figura 5.14. A resposta ao impulso calculada com fatoração multi-direcional está um pouco atrasada em relação à resposta calculada sem fatoração.

Comparando a resposta ao impulso do algoritmo FFDPI com os algoritmos de FFD com aproximação de Padé complexa podemos observar diferenças acentuadas no posicionamento e forma de alguns eventos, ver Figuras 5.12 a 5.21. Estas diferenças são causadas pelo processo de interpolação de campos propagados com velocidade constante, necessário para acomodar a variação de velocidade e corrigir a anisotropia numérica no algoritmo FFDPI. Neste exemplo numérico a propagação através do algoritmo FFDPI resultou em uma velocidade efetivamente maior para a propagação que os outros algoritmos. Portanto, em meios com forte variação lateral de velocidade a migração FFD com expansão de Padé complexa não é equivalente a migração FFDPI.

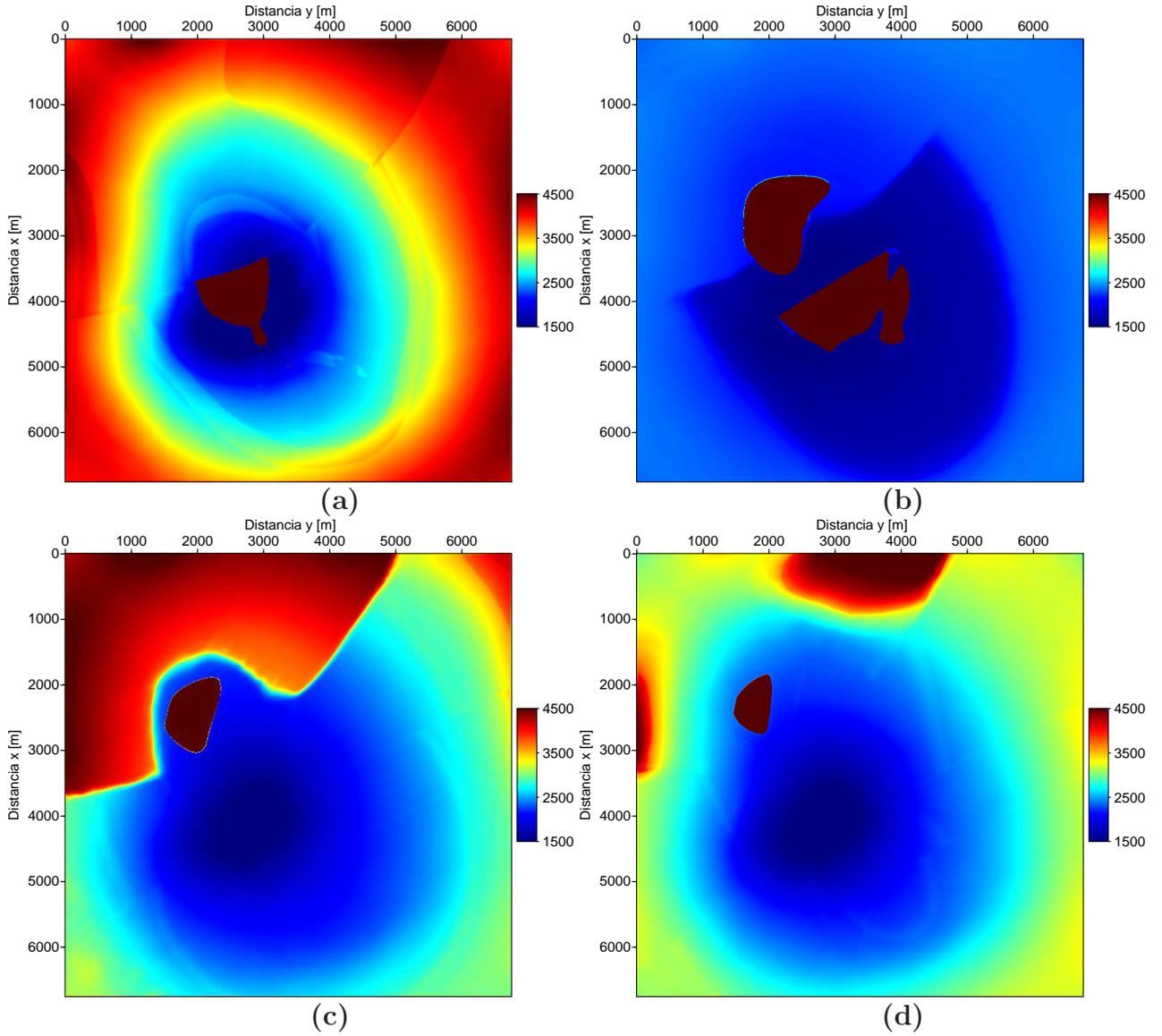
Há diferenças marcantes entre a resposta ao impulso do algoritmo de reversão temporal e as respostas ao impulso calculadas por FFD, independentemente da implementação. Entretanto, se consideramos apenas a envoltória da resposta ao impulso na região de validade dos algoritmos FFD, podemos identificar maior correspondência entre eventos, apesar da diferença de amplitudes entre o algoritmo RTM e os algoritmos FFD. A maior complexidade da resposta ao impulso calculada através de reversão no tempo decorre da propagação oni-direcional do tratamento correto do espalhamento geométrico do algoritmo RTM. A complexidade da resposta ao impulso da migração RTM exige maior refinamento das condições de imagem na migração pré-empilhamento. Adicionalmente o custo do algoritmo RTM cresce com a quarta potência da frequência o que limita o uso deste algoritmo no imageamento sísmico de alta resolução. Para o imageamento pré-empilhamento em 3D de alta resolução com condição de imagem de baixo custo, por exemplo, correlação cruzada, os algoritmos FFD ainda são atrativos computacionalmente.

Figura 5.10: Cortes verticais do modelo de velocidade de sal SEG/EAGE após aplicação de filtro de mediana móvel. (a) plano  $x_1=1690$  m, (b) plano  $x_1=3380$  m, (c) plano  $x_1=4160$  m, (d) plano  $x_2=1690$  m, (e) plano  $x_2=3380$  m e (f) plano  $x_1=4160$  m,



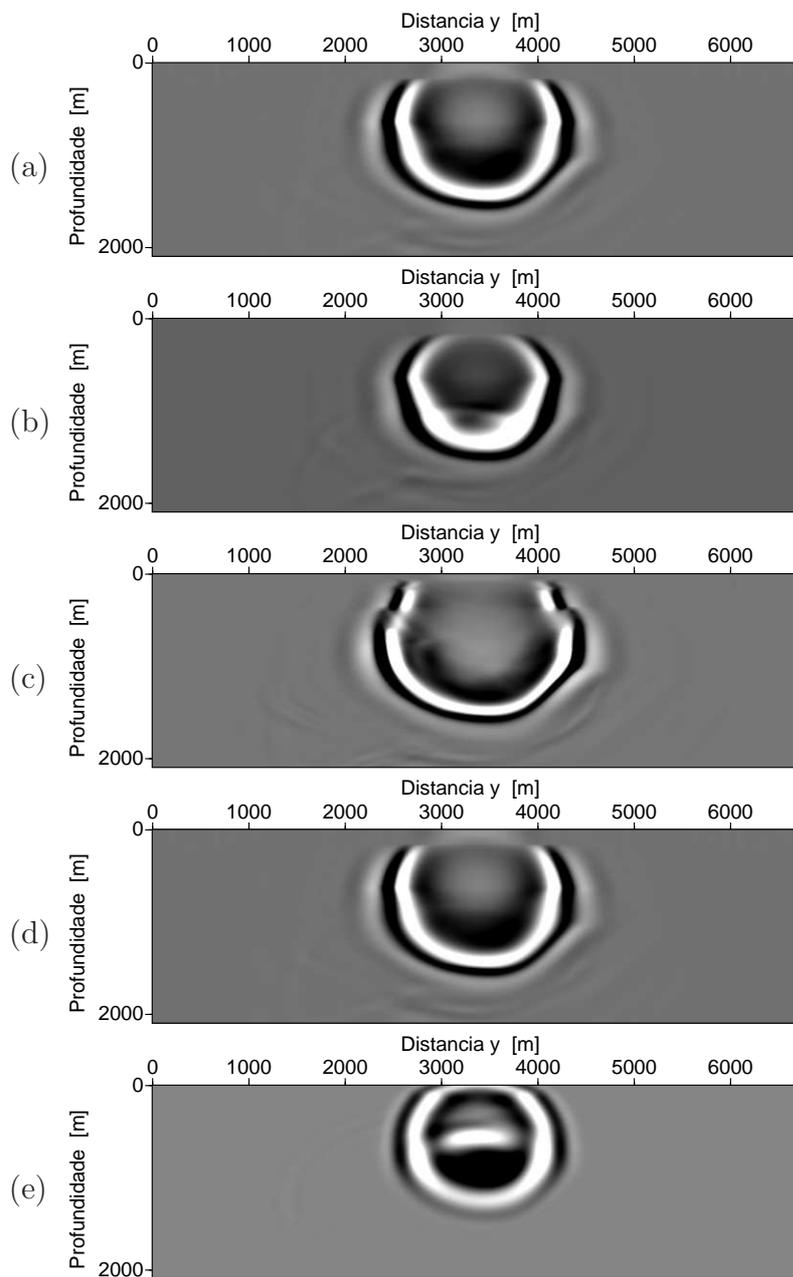
Fonte: Do autor.

Figura 5.11: Cortes horizontais do modelo de velocidade de sal da SEG/EAGE após aplicação de filtro de mediana móvel. (a) plano  $x_3=550$  m, (b) plano  $x_3=1050$  m, (c) plano  $x_3=1350$  m e (d) plano  $x_3=1550$  m.



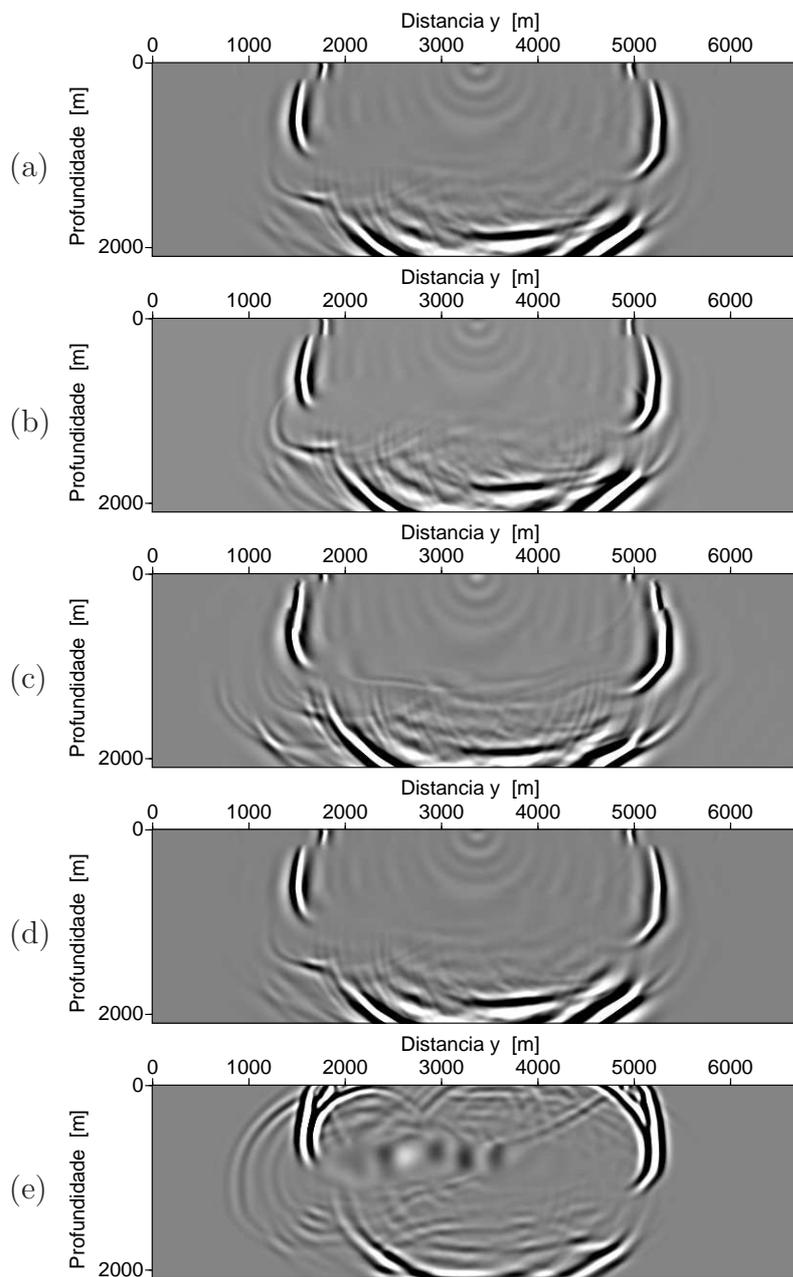
Fonte: Do autor.

Figura 5.12: Cortes verticais da respostas ao impulso no plano  $x_1=1690$  m. (a) FFD-BICGSTAB, (b) FFD com fatoração, (c) FFDPI, (d) FFD-MUMPS e (e) RTM.



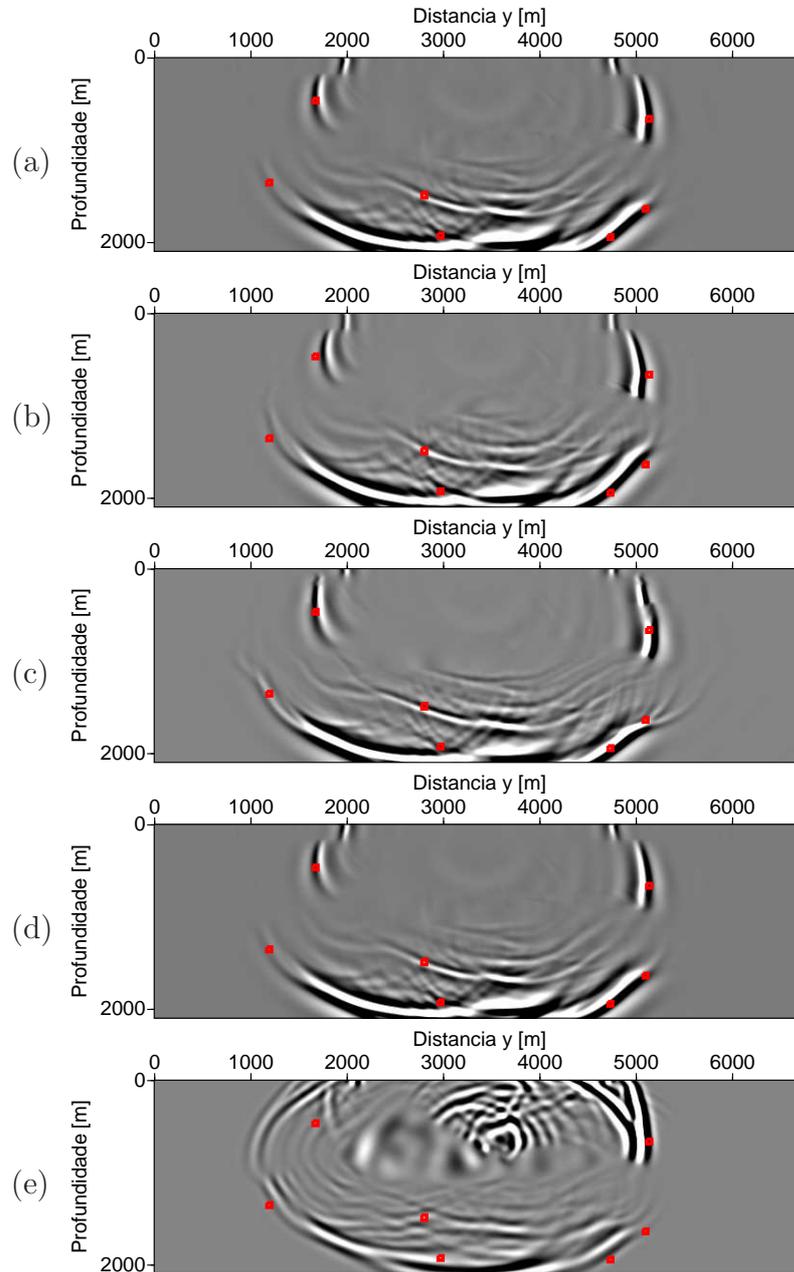
Fonte: Do autor.

Figura 5.13: Cortes verticais da respostas ao impulso no plano  $x_1=3380$  m. (a) FFD-BICGSTAB, (b) FFD com fatoração, (c) FFDPI, (d) FFD-MUMPS e (e) RTM.



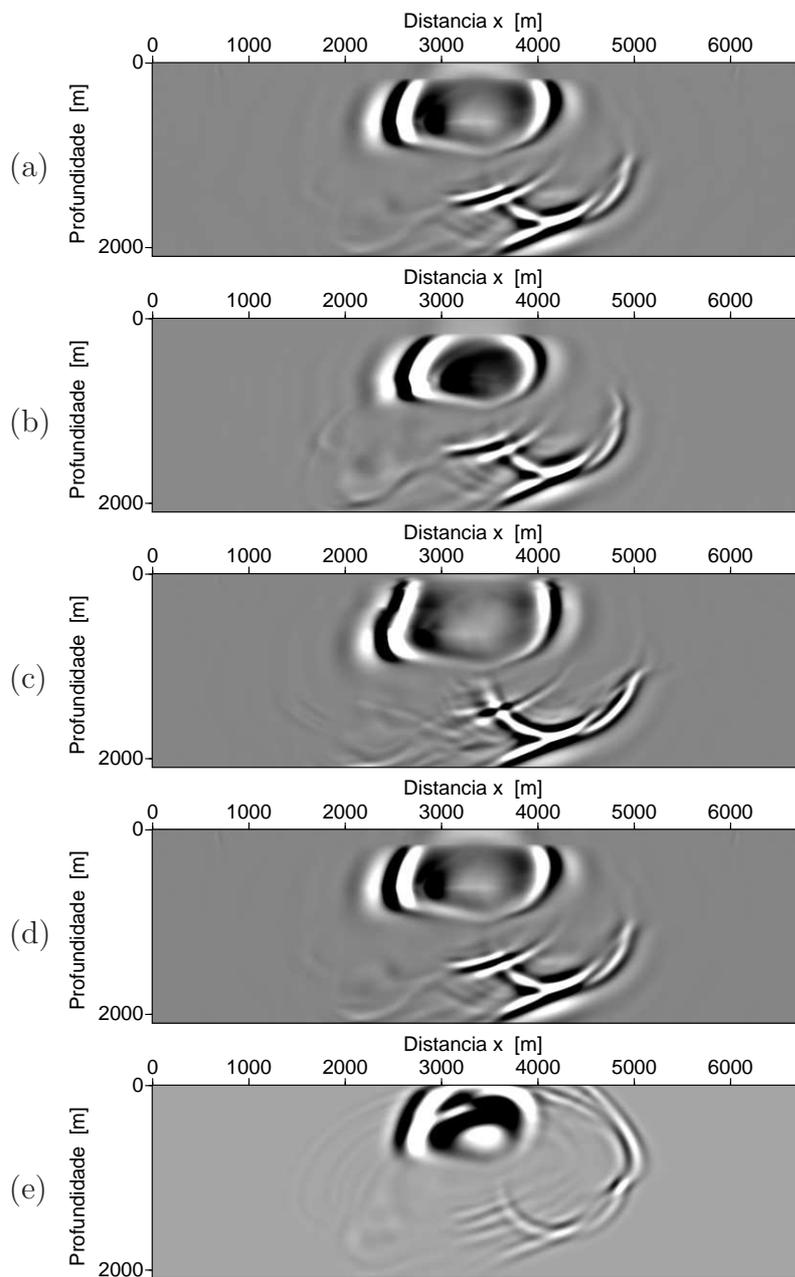
Fonte: Do autor.

Figura 5.14: Cortes verticais na resposta ao impulso no plano  $x_1=4160$  m. (a) FFD-BICGSTAB, (b) FFD com fatoração, (c) FFDPI, (d) FFD-MUMPS e (e) RTM.



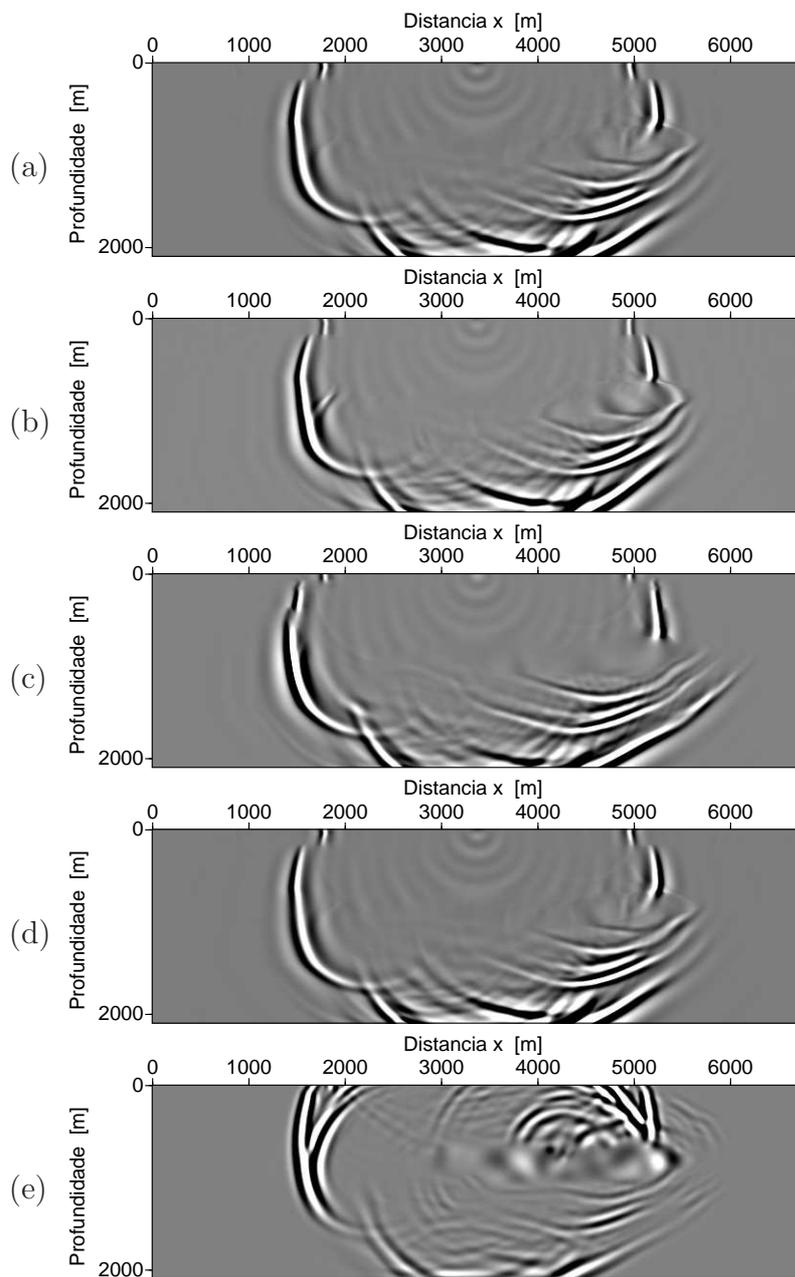
Fonte: Do autor.

Figura 5.15: Cortes verticais da resposta ao impulso no plano  $x_2=1690$  m. (a) FFD-BICGSTAB, (b) FFD com fatoração, (c) FFDPI, (d) FFD-MUMPS e (e) RTM.



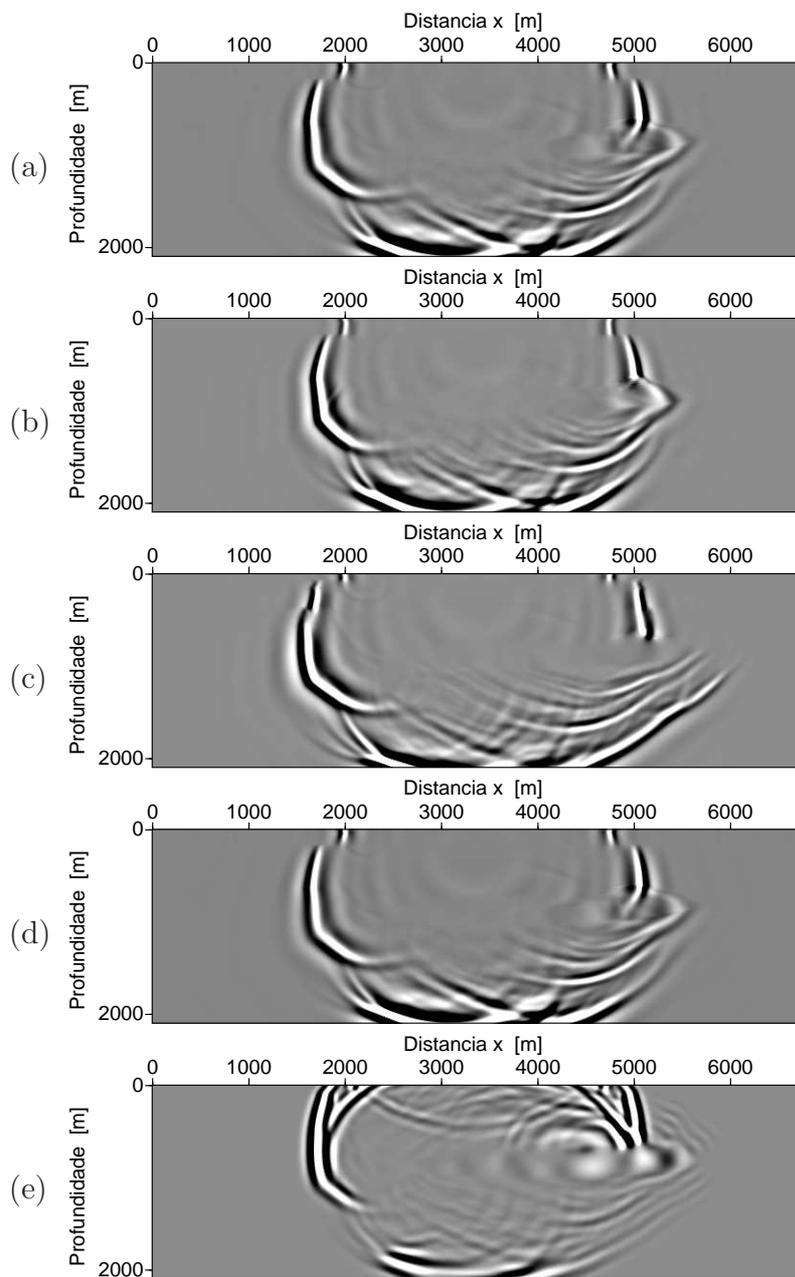
Fonte: Do autor.

Figura 5.16: Cortes verticais da resposta ao impulso no plano  $x_2=3380$  m. (a) FFD-BICGSTAB, (b) FFD com fatoração, (c) FFDPI, (d) FFD-MUMPS e (e) RTM.



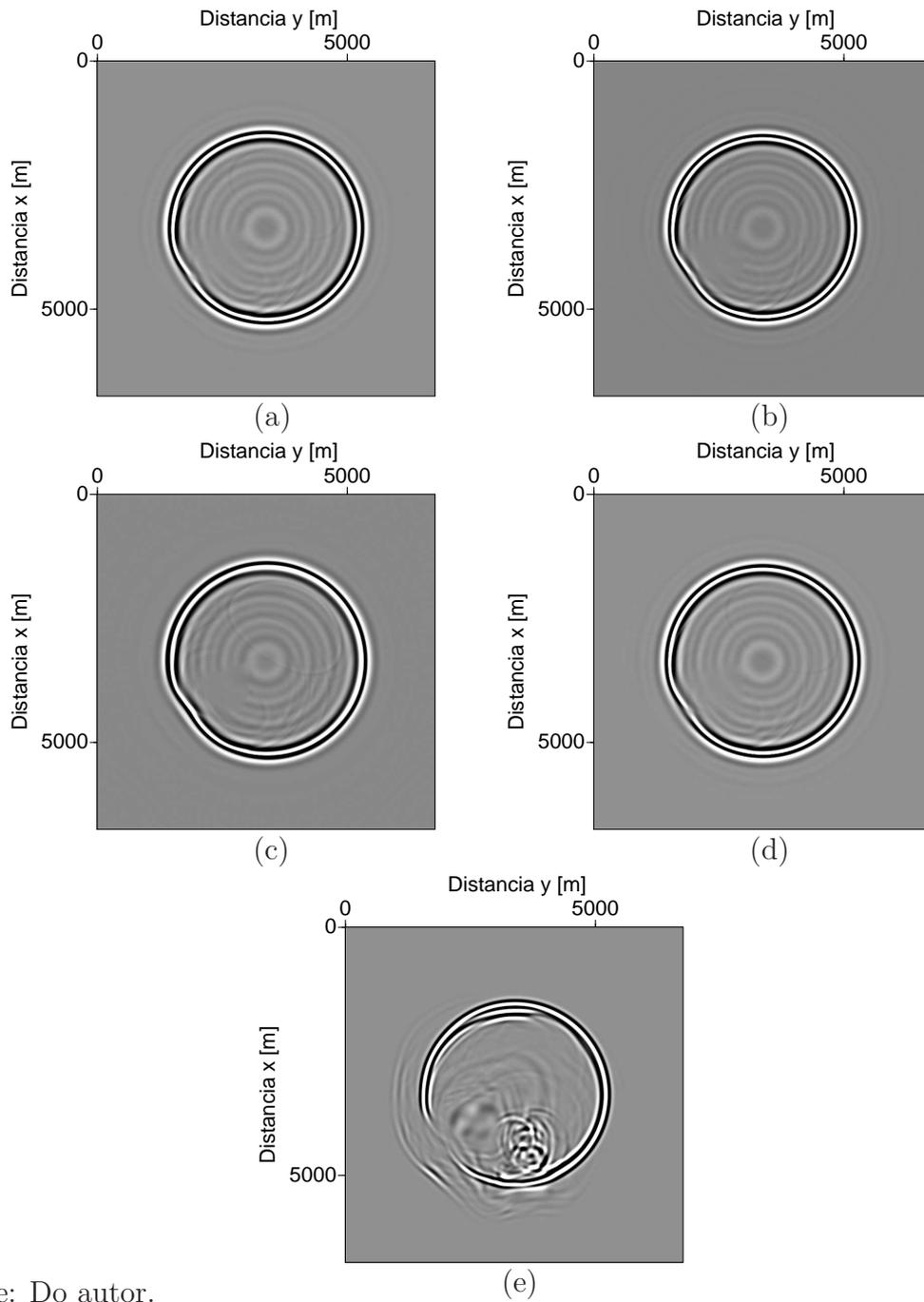
Fonte: Do autor.

Figura 5.17: Cortes verticais da resposta ao impulso no plano  $x_2=4160$  m. (a) FFD-BICGSTAB, (b) FFD com fatoração, (c) FFDPI, (d) FFD-MUMPS e (e) RTM.



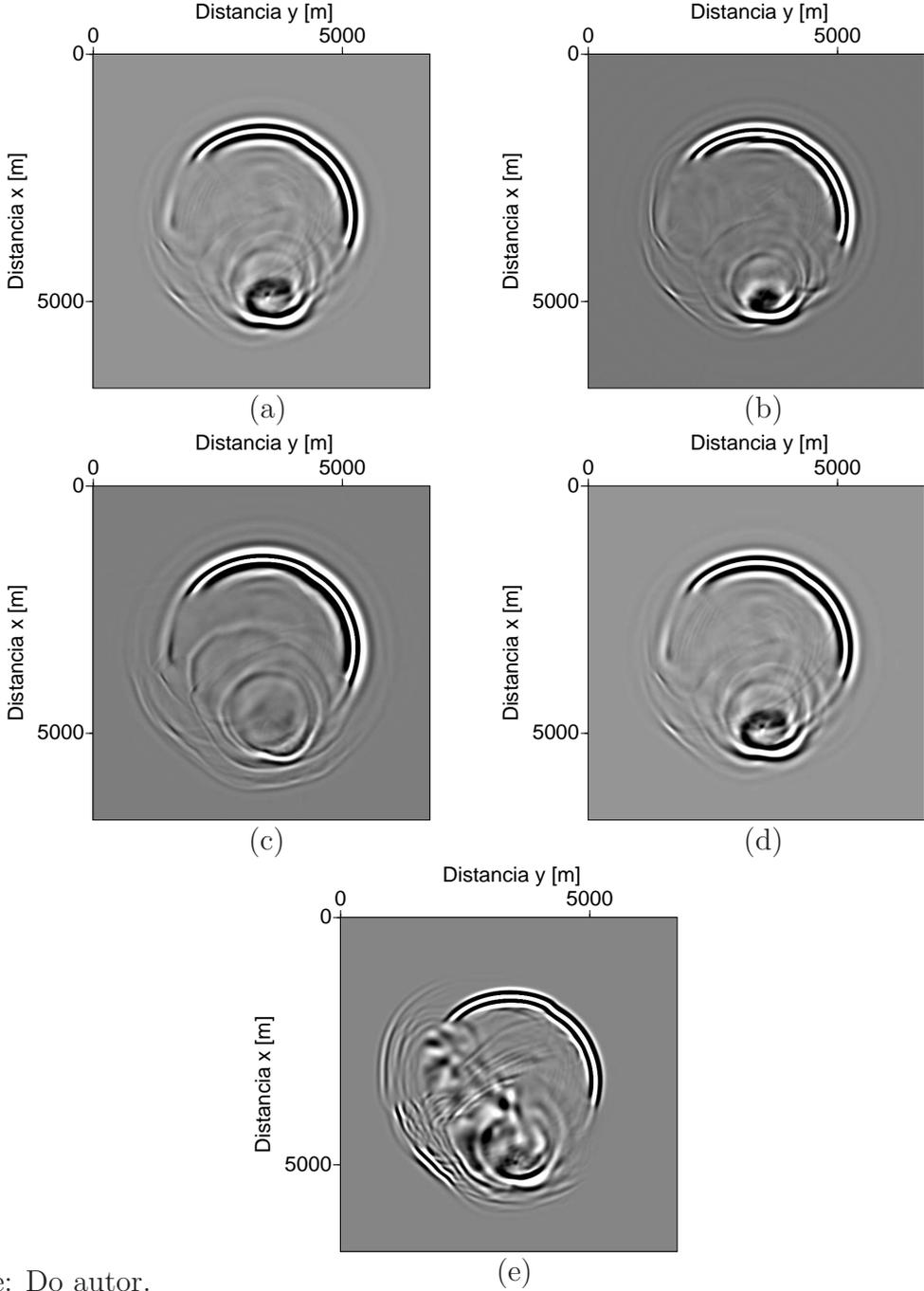
Fonte: Do autor.

Figura 5.18: Cortes horizontais da resposta ao impulso no plano  $x_3=550$  m. (a) FFD-BICGSTAB, (b) FFD com fatoração, (c) FFDPI, (d) FFD-MUMPS e (e) RTM.



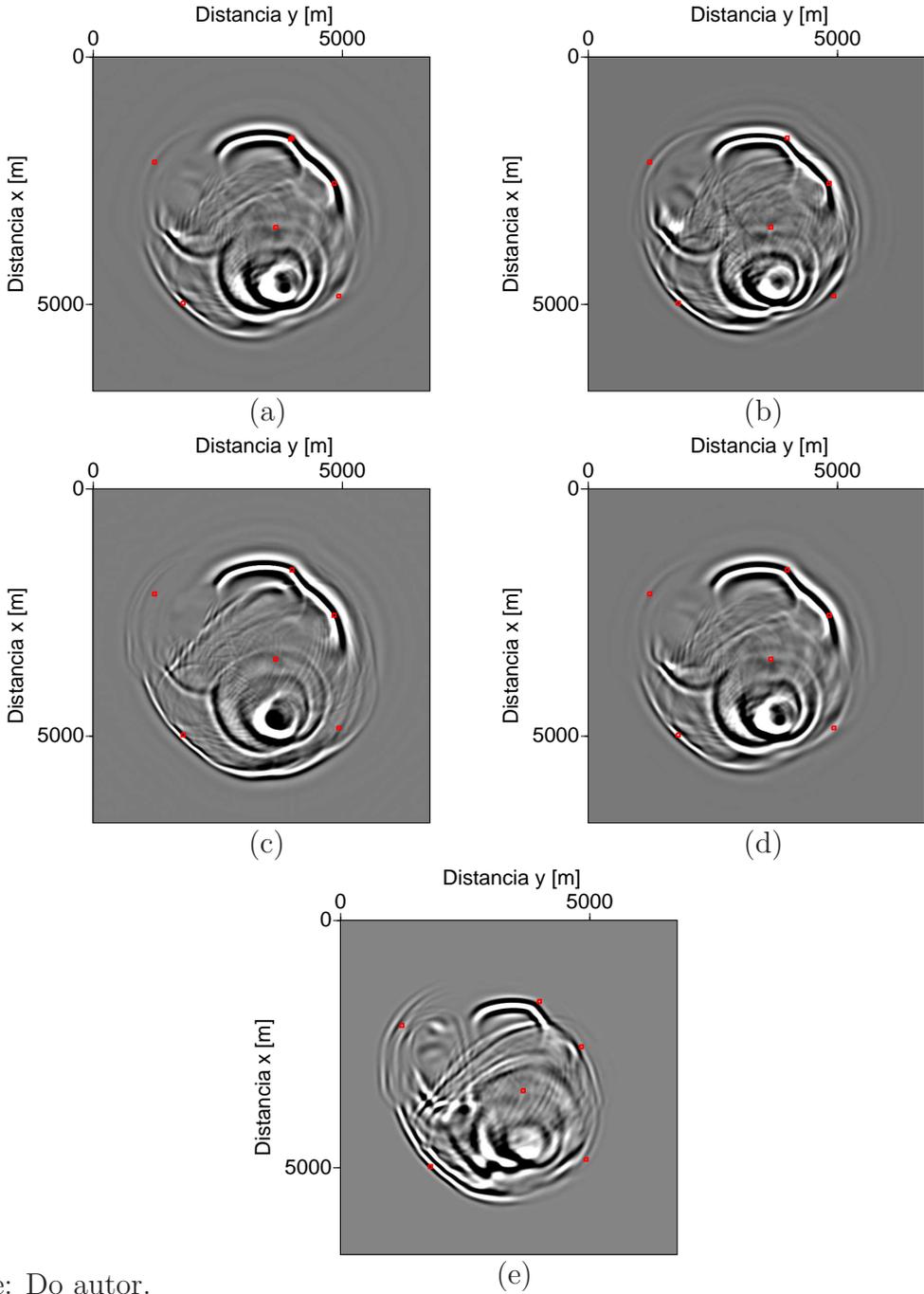
Fonte: Do autor.

Figura 5.19: Cortes horizontais da resposta ao impulso no plano  $x_3=1050$  m. (a) FFD-BICGSTAB, (b) FFD com fatoração, (c) FFDPI, (d) FFD-MUMPS e (e) RTM.



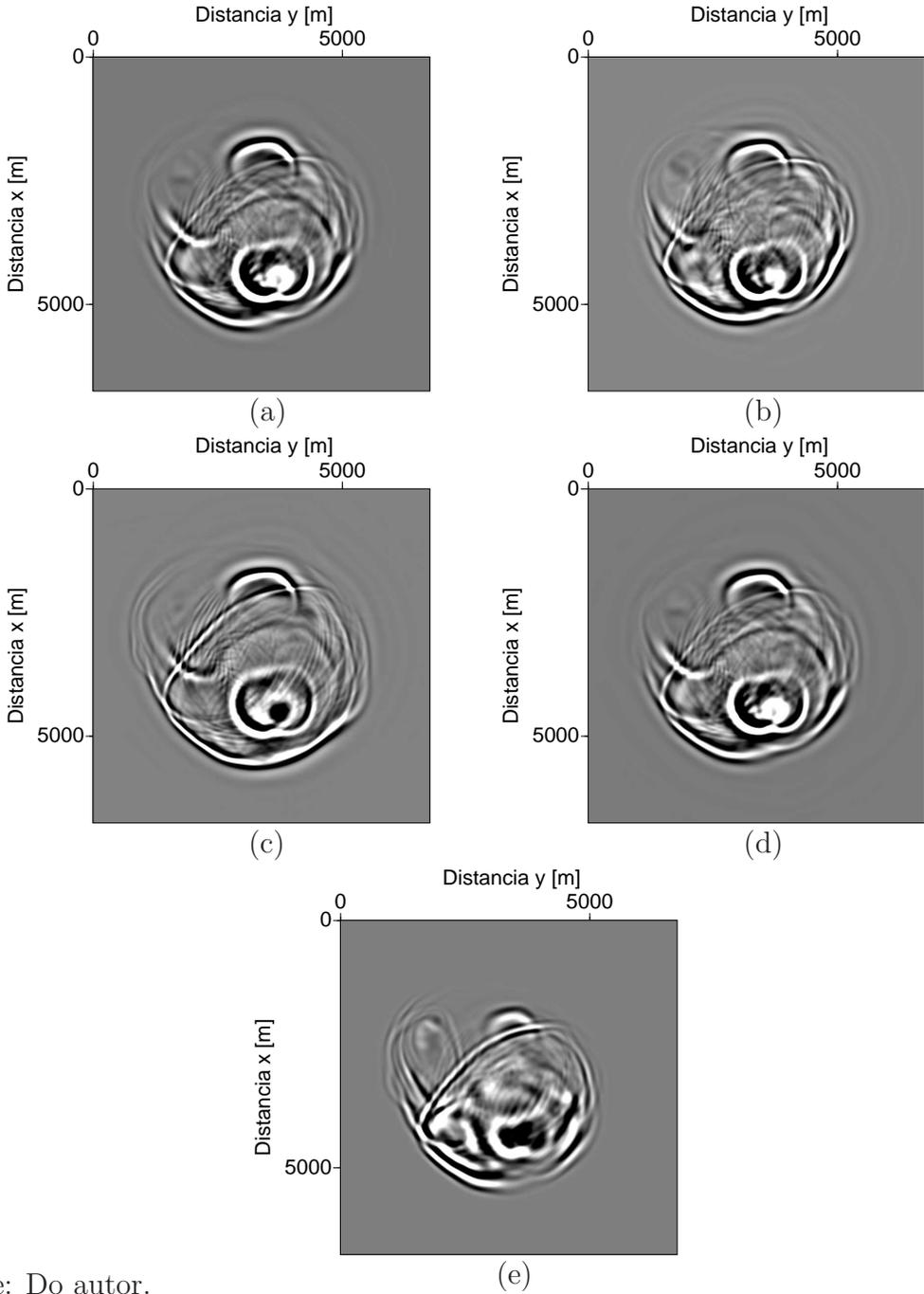
Fonte: Do autor.

Figura 5.20: Cortes horizontais da resposta ao impulso no plano  $x_3=1350$  m. (a) FFD-BICGSTAB, (b) FFD com fatoração, (c) FFDPI, (d) FFD-MUMPS e (e) RTM.



Fonte: Do autor.

Figura 5.21: Cortes horizontais da resposta ao impulso no plano  $x_3=1550$  m. (a) FFD-BICGSTAB, (b) FFD com fatoração, (c) FFDPI, (d) FFD-MUMPS e (e) RTM.



Fonte: Do autor.

## 6 CONCLUSÃO

Esta dissertação apresenta a extensão da migração FFD com aproximação de Padé (AMAZONAS, 2007) complexa para meios 3D. Investigamos duas implementações alternativas do algoritmo FFD as quais refletem o compromisso entre acurácia e eficiência computacional. Para validar os algoritmos propostos neste trabalho, comparamos as respostas ao impulso destes com as respostas correspondentes para o algoritmo FFDPI (BIONDI, 2002) e o algoritmo de reversão no tempo (BAYSAL; KOSLOFF; SHERWOOD, 1983).

A análise da relação de dispersão do operador de propagação FFD com expansão de Padé complexa permitiu estabelecer prescrições para o ângulo de rotação da linha de corte dependendo do número de termos da expansão. Para aproximação FFD com um único termo, o ângulo da linha de corte de  $15^\circ$  produz uma ótima aproximação e garante estabilidade para o operador. Ângulos acima de  $25^\circ$  introduzem atenuação para todos os números de onda, degradando progressivamente a resolução da imagem com o aumento do ângulo. Se dois termos são utilizados na expansão do operador FFD, um ângulo de rotação da linha de corte de  $25^\circ$  é adequado; para três termos na expansão do operador, um ângulo de rotação de  $45^\circ$  produz excelente aproximação, como observado por Amazonas (2007) para o caso 2D. Estas prescrições foram validadas em experimentos numéricos um meio fortemente heterogêneo, o modelo de sal SEG/EAGE. Como o custo do algoritmo FFD cresce com o aumento do número de termos utilizados na expansão de Padé, estes resultados são importantes para uma implementação eficiente da migração FFD com aproximação de Padé complexa.

A extensão do algoritmo de FFD para 3D foi efetuada anteriormente utilizando aproximação de Padé real e a estratégia de fatoração direcional dos operadores de diferenças finitas (RISTOW; RÜHL, 1997; BIONDI, 2002). Esta abordagem aproxima os operadores de diferenças finitas por uma sequência de operadores tridiagonais de menor dimensão, reduzindo em ordens de magnitude o tempo de computação. Entretanto, introduz anisotropia numérica e é instável na presença de forte contraste lateral de velocidade. Para eliminar a instabilidade e reduzir a anisotropia numérica desta abordagem, Biondi (2002) propôs o algoritmo de FFDPI, o qual utiliza interpolação do campo de ondas propagado em meios homogêneos com velocidades de referência selecionadas em função da heterogeneidade do modelo de velocidade. Neste trabalho implementamos a aproximação de Padé complexa sem fatoração direcional. Esta implementação não apresenta problemas de anisotropia numérica.

Estudando a região em que os operadores de diferenças finitas são diagonais dominantes verificamos que a aproximação de Padé complexa melhora o condicionamento dos operadores de diferenças finitas em relação a aproximação de Padé real. Esta análise indica que o condicionamento da matriz piora para baixas frequências e com o aumento do número de termos na expansão de Padé. Este resultado foi corroborado observando a convergência de algoritmos iterativos para solução do sistema linear. O uso da aproximação de Padé complexa reduz o número de iterações para o algoritmo BICGSTAB, ou seja, a expansão de Padé complexa atua como um preconditionador. Alternativamente utilizamos o algoritmo MUMPS para solução dos sistemas de diferenças finitas através de eliminação Gaussiana. Esta abordagem é menos eficiente que o uso de métodos iterativos quando se utiliza apenas um termo na expansão de Padé. Entretanto, de métodos diretos têm como vantagem um custo computacional que cresce linearmente com o número de termos da expansão de Padé o que não acontece com métodos iterativos.

Os algoritmos de migração FFD com aproximação de Padé complexa, sem fatoração direcional, permitiram avaliar os erros introduzidos pela fatoração direcional do operador em modelos de velocidade fortemente heterogêneos. Com este objetivo implementamos a migração FFD com expansão de Padé complexa e fatoração multi-direcional dos operadores de diferenças finitas.

Para avaliar a estabilidade e acurácia dos três algoritmos propostos nesta dissertação avaliamos a resposta ao impulso dos algoritmos no modelo de sal SEG/EAGE. As três implementações do algoritmo FFD com aproximação de Padé complexa foram estáveis. Como verificado por Biondi (2002) o algoritmo FFD com aproximação de Padé real não é estável para este modelo. Adicionalmente, os algoritmos sem fatoração direcional produziram a mesma resposta ao impulso. A resposta ao impulso do algoritmo com fatoração multi-direcional apresentou erros de posicionamentos para eventos de maior mergulho. Entretanto, a magnitude destes erros foi menor que os erros de posicionamento, amplitude e forma dos eventos obtidos com o algoritmo FFDPI. Estes experimentos numéricos justificam o uso do algoritmo FFD com expansão de Padé complexa e fatoração multi-direcional para o imageamento em profundidade em meios fortemente heterogêneos.

A migração FFD com expansão de Padé complexa sem fatoração direcional através de métodos iterativos é possível. Entretanto, o custo computacional do algoritmo precisa ser reduzido por um fator de ordem quatro para ser competitivo com a implementação com fatoração multi-direcional. Para isso é necessário uma estratégia adicional de preconditionamento além da expansão de Padé complexa.

## REFERÊNCIAS

- AMAZONAS, D. et al. Wide-angle fd and ffd migration using complex padé approximations. *Geophysics*, v. 72, n. 6, p. PS215–S220. 2007.
- AMAZONAS, D. R. *Migração FD e FFD com aproximações de grande abertura angular*. Dissertação (mestrado) — Universidade Federal do Pará, Instituto de Geociências. Programa de Pós-Graduação em Geofísica. Belém, 2007.
- AMESTOY, P. R. et al. A fully asynchronous multifrontal solver using distributed dynamic scheduling. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, v. 23, n. 1, p. 15–41. 2001.
- AMESTOY, P. R. et al. Hybrid scheduling for the parallel solution of linear systems. *Parallel Computing*, v. 32, n. 2, p. 136–156. 2006.
- AMINZEDEH, F. et al. 3-d modeling project: 3rd report. *The learning edge*, v. 14, n. 2, p. 125–128. 1995.
- AQUILERA-NAVARRO, M. C. K. et al. Os aproximantes de padé. *Matemática Universitária*, n. 26/27, p. 49–66. 1999.
- BAMBERGER, A. et al. Higher order paraxial wave equation approximations in heterogeneous media. *SIAM Journal on applied mathematics*, v. 48, n. 1, p. 129–154. 1988.
- BAYSAL, E.; KOSLOFF, D. D.; SHERWOOD, J. W. C. Reverse time migration. *Geophysics*, v. 48, n. 11, p. PS1514–S1524. 1983.
- BIONDI, B. Stable wide-angle fourier finite-difference downward extrapolation of 3-d wavefields. *Geophysics*, v. 67, n. 3, p. 872–882. 2002.
- CLAERBOUT, J. F. *Imaging the Earth's Interior*. [S.l.]: Blackwell Scientific Publications, 1985.
- COLE, S. Iterative methods for 3-d finite-difference migration and modeling. *Stanford exploration project*, v. 60, p. 149–164. 1989.
- COSTA, C. A. do N. *Migração FD 3D em profundidade usando aproximação de Padé complexa*. Dissertação (mestrado) — Universidade Federal do Pará, Instituto de Geociências. Programa de Pós-Graduação em Geofísica. Belém, 2011.
- FERGUSON, R. J.; MARGRAVE, G. F. Prestack depth migration by symmetric nonstationary phase shift. *Consortium for research in elastic wave exploration*, v. 11. 1999.
- GAZDAG, J. Wave equation migration with the phase-shift method. *Geophysics*, v. 42, n. 7, p. 1342–1351. 1978.

- GAZDAG, J.; SGUAZZERO, P. Migration of seismic data by phase-shift plus interpolation. *Geophysics*, v. 49, n. 124, p. 124–131. 1984.
- GOLUB, G. H.; LOAN, C. F. V. *Matrix computation*. [S.l.]: The Johns Hopkins University Press, 1983.
- GUITTON, A.; VALENCIANO, A.; BEVC, D. Robust illumination compensation for shot-profile migration. In: EAGE CONFERENCE and EXHIBITION 68<sup>th</sup>. 2006, [S.l.]. *Expanded abstracts*. [S.l.]: EAGE, 2006. p. 1059-1062. 2006.
- HAN, B. A comparison of four depth-migration methods. In: ANN. INTERNAT. MTG, 68<sup>th</sup>. 1998, [S.l.]. *Expanded abstracts*. [S.l.]: SEG, 1998. p. 1104-1107. 1998.
- HESTENES, M. R.; STIEFEL, E. Methods of conjugate gradients for solving linear systems. *Journal of research of the national Bureau of standards*, v. 49, n. 6, p. 409–436. 1952.
- HUANG, L.-J.; FEHLER, M. C.; WU, R.-S. Extended local born fourier migration method. *Geophysics*, v. 64, n. 5, p. 1524–1534. 1999.
- JAKUBOWICZ, H.; LEVIN, S. A simple exact method of three-dimensional migration-theory. *Geophysical Prospecting*, v. 31, n. 1, p. 34–56. 1983.
- JIN, S.; WU, S. C. R.-S.; PENG, C. Prestack depth migration using a hybrid pseudo-screen propagator. In: ANN. INTERNAT. MTG, 68<sup>th</sup>. 1998, [S.l.]. *Expanded abstracts*. [S.l.]: SEG, 1998. p. 1819-1822. 1998.
- LAGO, R. F. *Estudos sobre os métodos iterativos de Krylov para solução de sistemas de equação lineares*. Dissertação (mestrado) — Universidade Federal do Rio de Janeiro. Instituto Alberto Luiz Coimbra. Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Sistemas e Computação, Rio de Janeiro, 2010.
- LANCZOS, C. Solution of systems of linear equations by minimized iterations. *Journal of research of the national Bureau of standards*, v. 49, n. 1, p. 33–53. 1952.
- LEE, J.; ZHANG, J.; LU, C.-C. Incomplete lu preconditioning for large scale dense complex linear systems from electromagnetic wave scattering problems. *Journal of computational physics*, v. 185, n. 1, p. 159–175. 2003.
- LI, Z. Compensating finite-difference errors in 3-d migration and modeling. *Geophysics*, v. 56, n. 10, p. 1650–1660. 1991.
- LU, Y. Y. A complex coefficient rational approximation of  $\sqrt{1+Z}$ . *Applied numerical mathematics*, Tat Chee Avenue, Kowloon, Hong Kong, v. 27, n. 2, p. 141–154. 1998.
- MILINAZZO, F. A.; ZALA, C. A.; BROOKE, G. H. Rational square-root approximations for parabolic equation algorithms. *The Journal of the acoustical society of America*, v. 101, n. 2, p. 760–766. 1997.

- NICHOLS, D. 3-d depth migration by a predictor-corrector method. *Stanford exploration project*, n. 70, p. 1–43. 1997.
- OP'TROOT, t. One-way wave equation propagation with amplitude based on pseudo-differential operators. *Wave Motion*, v. 47, n. 2, p. 67–84. 2010.
- RISTOW, D.; RÜHL, T. Fourier finite-difference migration. *Geophysics*, v. 59, n. 12, p. 1882–1893. 1994.
- RISTOW, D.; RÜHL, T. 3d implicit finite-difference migration by multiway splitting. *Geophysics*, v. 62, n. 2, p. 554–567. 1997.
- ROUSSEAU, J. H. L.; HOOP, M. V. de. Modeling and imaging with the scalar generalized-screen algorithms in isotropic media. *Geophysics*, v. 66, n. 5, p. 1551–1568. 2001.
- SAAD, Y. *Iterative Methods for Sparse Linear Systems*. 2nd. ed. [S.l.]: SIAM, 2003.
- SAVA, P.; FOMEL, S. Time-shift imaging condition in seismic migration. *Geophysics*, v. 71, n. 6, p. S2009–S217. 2006.
- SAVA, P. C.; FOMEL, S. Coordinate-independent angle-gathers for wave equation migration. In: ANN. INTERNAT. MTG, 70<sup>th</sup>. 2005, [S.l.]. *Expanded abstracts*. [S.l.]: SEG, 2005. p. 1-43. 2005.
- SONNEVELD, P. CGS, a fast lanczos-type solver for nonsymmetric linear systems. *SIAM Journal on scientific computing*, v. 10, n. 1, p. 36–52. 1989.
- STOFFA, P. L. et al. Split-step fourier migration. *Geophysics*, v. 56, n. 4, p. 410–421. 1990.
- VIVAS, F. A.; PESTANA, R. C. True-amplitude one-way wave equation migration in the mixed domain. *Geophysics*, v. 75, n. 5, p. PS2199–S209. 2006.
- VORST, H. A. van der. bi-cgstab: A fast and smoothly converging variant of bi-cg for the solution of nonsymmetric linear systems. *SIAM Journal on scientific computing*, v. 13, n. 2, p. 613–644. 1992.
- ZHANG, J.; WANG, W.-M.; YAO, Z.-X. Comparison between the fourier finite-difference method and the generalized–screen method. *Geophysical Prospecting*, v. 57, n. 3, p. 355–365. 2009.
- ZHANG, Y.; ZHANG, G.; BLEISTEIN, N. Theory of true-amplitude one-way wave equation and true-amplitude common-shot migration. In: International Congress of The Brazilian Geophysical Society 8<sup>th</sup>. 2003, [S.l.]. *Expanded abstracts*. [S.l.]: CBGF, 2003.

## APÊNDICES

## APÊNDICE A – DEMOSTRAÇÃO DAS EQUAÇÕES DA ONDA ACÚSTICA UNIDIRECIONAL

Dada a equação da onda acústica (2.1), cujas definições encontram-se na seção 2.1. Esta equação não possui solução analítica exata. Sendo uma das possíveis aproximações é dividir o modelo de velocidade  $c(\mathbf{x})$  em diversas camadas horizontais, de modo que a velocidade do modelo seja constante para cada camada. Então,

$$\left( \nabla^2 - \frac{1}{v_i^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) p(\mathbf{x}, t) = 0$$

onde  $v_i$  é o modelo de velocidade para a camada  $i$ , para sermos didáticos chamaremos apenas por  $v$ . De modo, que abrindo o operador laplaciano  $\nabla^2$ , da equação acima, obtemos

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) p(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (\text{A.1})$$

Definindo a transformada de Fourier direta temporal e direta espacial, respectivamente por:

$$P(\mathbf{x}, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(\mathbf{x}, t) \exp[-i\omega t] dt \quad (\text{A.2})$$

$$P(k_1, k_2, x_3, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} p(\mathbf{x}, t) \exp[i(k_1 x_1 + k_2 x_2)] dx_1 dx_2, \quad (\text{A.3})$$

sendo  $k_1$  e  $k_2$  os números de onda nas direções horizontais  $x_1$  e  $x_2$ , respectivamente; e  $\omega$  é a frequência angular, no domínio do número de onda. Aplicando as transformadas de Fourier diretas, temporal e espacial, em (A.1), resulta em

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} - (k_1^2 + k_2^2) - \left( \frac{i\omega}{v} \right)^2 \right] P(x_3, k_1, k_2, t) = 0 \quad (\text{A.4})$$

fatorando-a, encontramos

$$\left\{ \left[ \frac{\partial}{\partial x_3} - \frac{i\omega}{v} \sqrt{1 - K^2} \right] \left[ \frac{\partial}{\partial x_3} + \frac{i\omega}{v} \sqrt{1 - K^2} \right] \right\} P(x_3, k_1, k_2, \omega) = 0, \quad (\text{A.5})$$

onde

$$K^2 \equiv \frac{v^2}{\omega^2} [k_1^2 + k_2^2]. \quad (\text{A.6})$$

Observe que os operadores  $\frac{\partial}{\partial x_3}$  e  $\frac{i\omega}{v}\sqrt{1-K^2}$  comutam. Dessa forma as equações

$$\frac{\partial P(x_3, k_1, k_2, \omega)}{\partial x_3} = \frac{i\omega}{v} \sqrt{1 - \frac{v^2}{\omega^2} (k_1^2 + k_2^2)} P(x_3, k_1, k_2, \omega) \quad \text{e} \quad (\text{A.7})$$

$$\frac{\partial P(x_3, k_1, k_2, \omega)}{\partial x_3} = -\frac{i\omega}{v} \sqrt{1 - \frac{v^2}{\omega^2} (k_1^2 + k_2^2)} P(x_3, k_1, k_2, \omega) \quad (\text{A.8})$$

são equações exatas que governam a propagação da onda acústica em uma direção preferencial na vertical. Por convenção, admi-ti-se que (A.7) propaga para cima e (A.8) propaga para baixo. Entretanto, é de interesse sísmico modelos de velocidades que são variáveis em cada ponto  $\mathbf{x}$  do espaço. Logo,  $v$  passa a ser  $c(\mathbf{x})$ . Para esses casos os operadores descritos anteriormente não comutam, sendo objeto de estudo da teoria dos operadores pseudodiferenciais (OP'TROOT, 2010; COSTA, 2011). Ignoremos o fato do comutador ser diferente de zero e admitindo que  $k_1 \rightarrow -i\frac{\partial}{\partial x_1}$  e  $k_2 \rightarrow -i\frac{\partial}{\partial x_2}$ , então as equações (A.7) e (A.8) passam a ser:

$$\frac{\partial P(\mathbf{x}, \omega)}{\partial x_3} = \frac{i\omega}{c(\mathbf{x})} \sqrt{1 + \frac{c^2(\mathbf{x})}{\omega^2} \left( \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right)} P(\mathbf{x}, \omega) \quad \text{e} \quad (\text{A.9})$$

$$\frac{\partial P(\mathbf{x}, \omega)}{\partial x_3} = -\frac{i\omega}{c(\mathbf{x})} \sqrt{1 + \frac{c^2(\mathbf{x})}{\omega^2} \left( \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right)} P(\mathbf{x}, \omega) \quad (\text{A.10})$$

onde (A.9) e (A.10) são equações da onda acústica unidirecional, sendo que (A.9) governa a propagação para cima e (A.10) governa a propagação para baixo. Esses métodos não descrevem corretamente as amplitudes (ZHANG; ZHANG; BLEISTEIN, 2003; VIVAS; PESTANA, 2006; OP'TROOT, 2010) que devem ser corrigidas por métodos de correção de amplitude, não considerados neste trabalho.

## APÊNDICE B - APROXIMAÇÃO DE PADÉ COMPLEXA

Considerando a rotação da linha de corte no plano complexo, como mostra a Figura 3.1, o que nos permite reescrever uma nova representação para o operador de raiz quadrada  $R(Z) = \sqrt{1+Z}$  com a seguinte forma

$$R_\varphi(Z) = e^{i\varphi/2} \sqrt{(1+Z)e^{-i\varphi}} = e^{i\varphi/2} \sqrt{1 + [(1+Z)e^{-i\varphi} - 1]}.$$

Substituindo a equação acima por uma aproximação em frações parciais, tal qual foi feita na secção 3.1, obtemos uma aproximação em frações parciais dada por:

$$R_{\varphi,N}(Z) = e^{i\varphi/2} \left\{ c_0 + \sum_{n=1}^N \frac{a_n [(1+Z)e^{-i\varphi} - 1]}{1 + b_n [(1+Z)e^{-i\varphi} - 1]} \right\},$$

colocando em evidência  $(e^{-i\varphi} - 1)$ , no numerador e no denominador, a fração torna-se

$$R_{\varphi,N}(Z) = e^{i\varphi/2} \left\{ c_0 + \sum_{n=1}^N \frac{a_n(e^{-i\varphi} - 1) + a_n e^{-i\varphi} Z}{[1 + b_n(e^{-i\varphi} - 1)] \left[ 1 + \frac{b_n e^{-i\varphi} Z}{1 + b_n(e^{-i\varphi} - 1)} \right]} \right\}. \quad (\text{B.1})$$

Definindo

$$B_n \equiv \frac{b_n e^{-i\varphi}}{1 + b_n(e^{-i\varphi} - 1)} \quad (\text{B.2})$$

reorganizando (B.1) como a definição de (B.2), além de somar e subtrair um mesmo somatório como é mostrado abaixo

$$R_{\varphi,N}(Z) = e^{i\varphi/2} \left\{ c_0 \pm \sum_{n=1}^N \frac{a_n(e^{-i\varphi} - 1)}{[1 + b_n(e^{-i\varphi} - 1)]} + \sum_{n=1}^N \frac{a_n(e^{-i\varphi} - 1) + a_n e^{-i\varphi} Z}{[1 + b_n(e^{-i\varphi} - 1)] [1 + B_n Z]} \right\}, \quad (\text{B.3})$$

e definindo

$$C_0 \equiv e^{i\varphi/2} \left[ c_0 + \sum_{n=1}^N \frac{a_n(e^{-i\varphi} - 1)}{[1 + b_n(e^{-i\varphi} - 1)]} \right]. \quad (\text{B.4})$$

Inserindo a definição acima na equação (B.3) e após algum trabalho algébrico, podemos reescrevê-la na seguinte forma:

$$R_{\varphi,N}(Z) = C_0 + e^{i\varphi/2} \sum_{n=1}^N \left\{ -a_n B_n (e^{-i\varphi} - 1) + a_n e^{-i\varphi} \right\} \frac{Z}{[1 + b_n(e^{-i\varphi} - 1)][1 + B_n Z]}.$$

Substituindo o valor de  $B_n$  na expressão em chaves, resulta em

$$R_{\varphi,N}(Z) = C_0 + e^{i\varphi/2} \sum_{n=1}^N \left\{ \frac{a_n e^{-i\varphi}}{1 + b_n(e^{-i\varphi} - 1)} \right\} \frac{Z}{[1 + b_n(e^{-i\varphi} - 1)][1 + B_n Z]}$$

então, podemos encontrar

$$R_{\varphi,N}(Z) = C_0 + \sum_{n=1}^N \left\{ \frac{a_n e^{-i\varphi/2}}{[1 + b_n(e^{-i\varphi} - 1)]^2} \right\} \frac{Z}{[1 + B_n Z]}$$

e finalmente definindo

$$A_n \equiv \frac{a_n e^{-i\varphi/2}}{[1 + b_n(e^{-i\varphi} - 1)]^2} \quad (\text{B.5})$$

logo, encontramos a aproximação em frações parciais para o operador de raiz quadrada, rotacionado por um ângulo  $\varphi$ , ou seja,

$$R_{\varphi,N}(Z) = C_0 + \sum_{n=1}^N \frac{A_n Z}{1 + B_n Z}. \quad (\text{B.6})$$

A equação (B.6) corresponde a uma generalização da equação (3.2), cujos coeficientes  $A_n$ ,  $B_n$  e  $C_0$  são pelas equações (B.5), (B.2) e (B.4), respectivamente.

## APÊNDICE C – OPERADOR DIFERENÇA FFD COM APROXIMAÇÃO DE PADÉ

### DEMOSTRAÇÃO DA EQUAÇÃO (3.9)

Reescrevendo o operador diferença (2.18) como todas os parâmetros inseridos na secção 3.3 e a definição dos operadores derivadas da equação (2.10), então,

$$d = ik_r \left\{ \rho \sqrt{1 + X^2} - \sqrt{1 + \rho^2 X^2} \right\}, \quad (\text{C.1})$$

usando a aproximação de Padé complexo (AMAZONAS et al., 2007)

$$d = ik_r \left\{ \rho \left[ C_0 + \sum_{n=1}^N \frac{A_n X^2}{1 + B_n X^2} \right] - \left[ C_0 + \sum_{n=1}^N \frac{A_n \rho^2 X^2}{1 + B_n \rho^2 X^2} \right] \right\} \quad (\text{C.2})$$

logo,

$$d = ik_r \left\{ C_0 (\rho - 1) + \sum_{n=1}^N A_n \rho X^2 \left( \frac{1}{1 + B_n X^2} - \frac{\rho}{1 + B_n \rho^2 X^2} \right) \right\}, \quad (\text{C.3})$$

expandindo as frações em série de potência

$$d \approx ik_r \left\{ C_0 (\rho - 1) + \sum_{n=1}^N A_n \rho X^2 \left[ (1 - B_n X^2 + B_n^2 X^4 - B_n^3 X^6 + \dots) + \right. \right. \\ \left. \left. - (\rho - B_n \rho^3 X^2 + B_n^2 \rho^5 X^4 - B_n^3 \rho^7 X^6 + \dots) \right] \right\},$$

agrupando os termos de mesma ordem de  $X$ ,

$$d \approx ik_r \left\{ C_0 (\rho - 1) + \sum_{n=1}^N A_n \rho X^2 \left[ (1 - \rho) - B_n X^2 (1 - \rho^3) + \right. \right. \\ \left. \left. + B_n^2 X^4 (1 - \rho^5) - B_n^3 X^6 (1 - \rho^7) \dots \right] \right\},$$

e colocando  $(1 - \rho)$  em evidência dentro do somatório, temos

$$d \approx ik_r \left\{ C_0 (\rho - 1) + \sum_{n=1}^N A_n \rho (1 - \rho) X^2 \left[ 1 - B_n \frac{(1 - \rho^3)}{(1 - \rho)} X^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + B_n^2 \frac{(1 - \rho^5)}{(1 - \rho)} X^4 - B_n^3 \frac{(1 - \rho^7)}{(1 - \rho)} X^6 + \dots \right] \right\} . \quad (\text{C.4})$$

Observe que os termos fracionados representam os termos da soma de uma PA, de modo que podem ser escritos usando a regra:

$$\frac{1 - \rho^{n+1}}{1 - \rho} = 1 + \rho + \rho^2 + \dots + \rho^n.$$

Então, o operador de diferenças da equação (C.4) pode ser representado pela seguinte expansão

$$d \approx ik_r \left\{ C_0 (\rho - 1) + \sum_{n=1}^N A_n \rho (1 - \rho) X^2 \left[ 1 - B_n (1 + \rho + \rho^2) X^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + B_n^2 (1 + \rho + \rho^2 + \rho^3 + \rho^4) X^4 + \right. \right. \\ \left. \left. - B_n^3 (1 + \rho + \rho^2 + \rho^3 + \rho^4 + \rho^5 + \rho^6) X^6 + \dots \right] \right\} . \quad (\text{C.5})$$

A equação (C.5) é exatamente a equação (3.9).