

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
CENTRO DE GEOCIÊNCIAS
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM GEOFÍSICA

TESE DE MESTRADO

**APLICAÇÃO DE DECONVOLUÇÃO HOMOMÓRFICA
A DADOS SÍSMICOS**

MARIA DE VALDIVIA COSTA NORAT GOMES



BELÉM

1998

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
CENTRO DE GEOCIÊNCIAS
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM GEOFÍSICA

APLICAÇÃO DE DECONVOLUÇÃO HOMOMÓRFICA
A DADOS SÍSMICOS

TESE APRESENTADA POR
MARIA DE VALDIVIA COSTA NORAT GOMES

COMO REQUISITO PARCIAL À OBTENÇÃO DO GRAU DE
MESTRE EM CIÊNCIAS NA ÁREA DE GEOFÍSICA

Data de Aprovação:

COMITÊ DE TESE:



Dr. Lourenildo Willame Barbosa Leite (Orientador)



Dr. Luis Rijo



Dr. Marco Polo Pereira da Boa Hora

BELÉM

1998

RESUMO

Um registro sísmico é frequentemente representado como a convolução de um pulso-fonte com a resposta do meio ao impulso, relacionada ao caminho da propagação. O processo de separação destes dois componentes da convolução é denominado deconvolução.

Existe uma variedade de aproximações para o desenvolvimento de uma deconvolução. Uma das mais comuns é o uso da filtragem linear inversa, ou seja, o processamento do sinal composto, através de um filtro linear, cuja resposta de frequência é a recíproca da transformada de Fourier de um dos componentes do sinal. Obviamente, a fim de usarmos a filtragem inversa, tais componentes devem ser conhecidas ou estimadas.

Neste trabalho, tratamos da aplicação a sinais sísmicos, de uma técnica de deconvolução não linear, proposta por Oppenheim (1965), a qual utiliza a teoria de uma classe de sistemas não lineares, que satisfazem um princípio generalizado de superposição, denominados de sistemas homomórficos. Tais sistemas são particularmente úteis na separação de sinais que estão combinados através da operação de convolução.

O algoritmo da deconvolução homomórfica transforma o processo de convolução em uma superposição aditiva de seus componentes, com o resultado de que partes simples podem ser separadas mais facilmente. Esta classe de técnicas de filtragem representa uma generalização dos problemas de filtragem linear.

O presente método oferece a considerável vantagem de que não é necessário fazer qualquer suposição prévia sobre a natureza do pulso sísmico fonte, ou da resposta do meio ao impulso, não requerendo assim, as considerações usuais de que o pulso seja de fase-mínima e que a distribuição dos impulsos seja aleatória, embora a qualidade dos resultados obtidos pela análise homomórfica seja muito sensível à razão sinal/ruído, como demonstrado.

A meus filhos Natália e Rodolfo.

AGRADECIMENTOS

Em especial, ao Prof. Dr. Lourenildo Williame Barbosa Leite, pela orientação, dedicação e valiosas sugestões dadas durante a execução deste trabalho.

Aos membros da banca examinadora, Drs. Luis Rijo e Marco Polo Pereira da Boa Hora , pela disponibilidade e revisão crítica deste trabalho.

Ao Departamento de Hidráulica e Saneamento do Centro Tecnológico da Universidade Federal do Pará, pela liberação para a realização deste curso.

A todos os professores que compõem o quadro docente do Curso de Pós-graduação em Geofísica pela dedicação durante a realização deste curso.

Ao Departamento de Geofísica pela infra-estrutura oferecida.

Aos funcionários do Curso de Pós-graduação em Geofísica pelo apoio dado durante a realização deste curso.

Aos colegas do Curso de Pós-graduação em Geofísica pela colaboração, apoio e incentivo no decorrer desta tese.

A Augusto Klautau Gomes por sua compreensão e incentivo durante a realização deste curso.

A minha mãe, Benedita de Macêdo Norat, pelo incentivo e apoio dados em todos os momentos da minha vida.

SUMÁRIO

DEDICATÓRIA	i
AGRADECIMENTOS	ii
RESUMO	1
ABSTRACT	2
1 - INTRODUÇÃO	3
2 - DECONVOLUÇÃO SÍSMICA	6
2.1 - O MODELO SÍSMICO.....	7
2.1.1 - Conteúdo do Sismograma.....	7
2.1.2 - O Modelo Convolutivo.....	8
2.1.3 - Ruídos Sísmicos.....	16
2.1.4 - Efeitos da Superfície.....	17
2.1.5 - Reverberação.....	19
2.2 - DECONVOLUÇÃO LINEAR.....	20
2.2.1 - Filtros Digitais de Wiener.....	22
2.2.2 - Filtros de Deconvolução Preditiva.....	25
3 - DECONVOLUÇÃO HOMOMÓRFICA	28
3.1 - SISTEMAS HOMOMÓRFICOS.....	29
3.1.1 - Princípio Generalizado da Superposição.....	29
3.1.2 - Representação Canônica dos Sistemas Homomórficos.....	31
3.1.3 - Análise Homomórfica de Sinais.....	32
3.2 - SISTEMAS HOMOMÓRFICOS PARA CONVOLUÇÃO.....	33
3.2.1 - Sistema Característico.....	33
3.2.2 - Sistema Característico Inverso.....	38
3.2.3 - Sistema Linear.....	39
3.2.4 - Cepstro Complexo.....	40
3.2.5 - Propriedades do Cepstro Complexo.....	41
3.2.6 - Análise Homomórfica de Sinais.....	48
3.2.7 - Ponderação Exponencial.....	49

4 - IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL.....	51
4.1 - IMPLEMENTAÇÃO DA TFD.....	51
4.2 - RESTAURAÇÃO DA FASE.....	53
4.3 - ALGORITMO DA FILTRAGEM HOMOMÓRFICA.....	56
4.4 - RESULTADOS OBTIDOS.....	59
4.4.1 - O Modelo Geofísico.....	60
4.4.2 - Filtragem Linear.....	64
4.4.3 - Ponderação Exponencial.....	66
4.4.4 - Efeito do Ruído.....	73
5 - CONCLUSÃO.....	85
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	87
APÊNDICES.....	90
APÊNDICE A – A Transformada-Z e sua relação com a Transformada de Fourier.....	91
APÊNDICE B – Teorema da Convolução.....	94
APÊNDICE C – Simbologia Utilizada.....	95
APÊNDICE D – Programas para Deconvolução Homomórfica.....	96

ABSTRACT

A seismic record is often represented as the convolution of a wavelet with the impulse response relative to the reflection path. The process of separating these two components of the convolution is termed deconvolution.

There are a number of approaches for carrying out a deconvolution. One of the most common is the use of linear inverse filtering, that is, processing the composite signal through a linear filter, whose frequency response is the reciprocal of the Fourier transform of one of the signal components. Obviously, in order to use inverse filtering, such components must be known or estimated.

In this work, we deal with the application to seismic signals, of a nonlinear deconvolution technique, proposed by Oppenheim (1965), which uses the theory of a class of nonlinear systems, that satisfy a generalized principle of superposition, which are termed homomorphic systems. Such systems are particularly useful in separating signals which have been combined through the convolution operation.

The homomorphic deconvolution algorithm transforms the convolutional process into an additive superposition of its components, with the result that the single parts can be separated more easily. This class of filtering techniques represent a generalization of linear filtering problems.

This method offers the considerable advantage that no prior assumption about the nature of the seismic wavelet or the impulse response of the reflection path need be made, that is, it does not require the usual assumptions of a minimum-phase wavelet and a random distribution of impulses, although the quality of the results obtained by the homomorphic analysis is very sensible to the signal/noise ratio, as demonstrated.

1 - INTRODUÇÃO

Sinais sísmicos representam a resposta da terra a excitações originadas de fenômenos naturais, tais como terremotos, ou de fontes “acústicas” produzidas pelo homem, como aquelas usadas na geofísica de exploração. A finalidade do processamento de sinais sísmicos é facilitar a interpretação dos dados recebidos em função da estrutura da subsuperfície da terra.

A representação detalhada dos sinais sísmicos envolve um modelo relativamente complicado, e o seu processamento frequentemente requer o uso de um conjunto de princípios baseados, cada um, em diferentes simplificações do modelo. Uma classe de técnicas de análise sísmica é baseada na representação matemática do traço sísmico como resultado da convolução de um pulso-fonte, representando a origem da onda sísmica com uma sequência de impulsos, representando a descrição matemática da geologia, resultando nas diversas amplitudes e tempos de chegada presentes no sinal registrado. Ao processo de separação destas duas componentes da convolução chamamos deconvolução.

Para uma terra estratificada, ondas sísmicas refletidas podem ser modeladas como a convolução de um pulso-fonte com a resposta da terra ao impulso, representada pela função refletividade. O objetivo da deconvolução sísmica é estimar esta sequência, removendo o pulso-fonte do traço sísmico. Desde que reflexões sísmicas sejam causadas por variações na impedância acústica, a estimativa da resposta da Terra ao impulso, a partir do traço, contribui para o nosso conhecimento da geologia da subsuperfície. Sinais sísmicos registrados dependem da velocidade de deslocamento destas ondas e de outras propriedades do meio e representam essencialmente a maneira pela qual a terra filtra, por espalhamento, o pulso-fonte original a partir de algum distúrbio, tal como uma explosão.

O problema da deconvolução sísmica é essencialmente duplo. Ele envolve a estimativa do pulso-fonte, bem como o desenho de filtros inversos para remoção deste pulso do sismograma.

A deconvolução, como comumente realizada através de filtragem inversa ou filtragem ótima de Wiener, sofre pela limitação de ser necessário conhecer a forma do pulso sísmico a ser removido, ou pressupor que este é de fase mínima.

A conveniência analítica da filtragem linear resulta primariamente de satisfazer o princípio da superposição. Sistemas homomórficos são uma classe de sistemas não lineares que satisfazem um princípio generalizado da superposição. Tais sistemas são particularmente úteis na separação de sinais que foram combinados através de convolução.

As técnicas baseadas na análise de Fourier têm sido valiosas nas operações de processamento de sinais em séries temporais, surgindo em vários campos diferentes de pesquisa. Robinson (1954) introduziu a idéia do cepstro na análise geofísica em sua discussão do problema de fatoração cepstral. Bogert et al. (1963) foram os primeiros a usar o cepstro como uma operação de processamento de sinais, investigando o problema de tentar determinar a profundidade de uma fonte sísmica profunda. O conhecimento da profundidade de uma perturbação sísmica é útil na diferenciação entre eventos sísmicos naturais e aqueles feitos pelo homem.

O presente método, conhecido como deconvolução homomórfica, explora as características distintas das componentes do sinal no domínio cepstral. Assim, o cepstro complexo de um traço sísmico é composto de uma parte associada com o pulso sísmico, e outra com a série refletora.

A técnica oferece a vantagem considerável de que não é necessário fazer qualquer suposição prévia sobre a natureza do pulso-fonte, ou da resposta do meio ao impulso do caminho de reflexão. O pulso-fonte recuperado por deconvolução homomórfica é de importância em estudos de atenuação de ondas elásticas e dispersão.

O objetivo central do presente trabalho é a aplicação e a avaliação do método de deconvolução homomórfica a dados sísmicos de reflexão de afastamento nulo, visando a recuperação tanto do pulso-fonte como da sequência de impulsos que representa a função refletividade. Para este fim, estruturamos o mesmo em três capítulos (capítulos 2 a 4).

No capítulo 2, revemos os conceitos básicos da deconvolução sísmica, como o modelo sísmico e as principais técnicas de deconvolução linear apresentadas na literatura geofísica.

No capítulo 3, apresentamos a fundamentação algébrica do processamento homomórfico de sinais, como foi originalmente desenvolvido por Oppenheim (1965). A representação canônica dos sistemas homomórficos é discutida em detalhes, a fim de fornecer um arcabouço para a caracterização analítica desses sistemas. A classe de sistemas homomórficos para convolução é definida por um sistema característico que mapeia um produto de transformadas de Fourier em

uma soma de transformadas de Fourier, usando um mapeamento logarítmico complexo no domínio- Z .

Finalmente, no capítulo 4 discutimos a implementação computacional dos sistemas homomórficos para convolução. A principal etapa computacional é a avaliação da parte imaginária do logaritmo complexo, usualmente referenciada como restauração de fase.

Estes métodos são avaliados em termos de uma estrutura comum de análise, essencialmente caracterizada pela representação de traços sísmicos, em função de modelos sísmicos invariantes no tempo e do uso da ponderação exponencial, quando necessário, para garantir o caráter de fase-mínima da sequência de impulsos.

O método estudado é verificado usando para dados modelos sintéticos baseados no princípio convolucional que incorpora a presença de ruído aditivo local e geológico, a fim de verificarmos a capacidade do operador linear no domínio cepstral de separar as componentes da mensagem. Com a utilização de tais sismogramas, uma avaliação qualitativa do algoritmo proposto para a análise sísmica pode ser feita, em função da estrutura em subsuperfície.

2 - DECONVOLUÇÃO SÍSMICA

Sismogramas de reflexão são compostos essencialmente de vários eventos ou pulsos, com diferentes amplitudes e tempos de chegada. Estes pulsos são, em geral, distintos uns dos outros em função de que eles sofrem diferentes graus de atenuação enquanto se propagam através das camadas geológicas.

O objetivo principal na análise desses sismogramas é a recuperação da série refletora terrestre, também chamada de função refletividade, ou ainda de solução fundamental. Isto implica idealmente na remoção de qualquer mecanismo múltiplo superficial, que pode gerar “fantasmas” ou reverberações, bem como na contração de cada pulso individual em impulso.

A resposta do meio geológico ao impulso é o que seria registrado se o pulso-fonte fosse exatamente um impulso de Dirac. A resposta ao impulso contém reflexões primárias (séries de refletividade) e todas as possíveis múltiplas. Idealmente, deconvolução deve comprimir o pulso-fonte e eliminar múltiplas, deixando somente a refletividade no traço sísmico.

Deconvolução é assim, um processo que busca melhorar a resolução temporal dos dados sísmicos por compressão do pulso-fonte primário, podendo remover uma parte significativa da energia múltipla da seção, através da otimização entre precisão (marcação temporal dos impulsos significativos) e resolução (separação entre os impulsos).

No presente capítulo estudamos o modelo sísmico e as principais técnicas de deconvolução linear. O estudo do modelo de sinais sísmicos apresentado na seção 2.1 tem como objetivo identificar claramente as várias componentes de um sismograma, como também definir os objetivos básicos da análise de dados sísmicos. A revisão das técnicas de deconvolução linear na seção 2.2 está limitada a dois métodos: a filtragem digital de Wiener e a deconvolução preditiva, os quais são amplamente utilizados. Os modelos vistos aqui servem também de base para uma técnica não linear de deconvolução, denominada de deconvolução homomórfica, que é apresentada no próximo capítulo.

2.1 – O MODELO SÍSMICO

Entre as técnicas de prospecção geofísica, a sísmica de reflexão é a mais amplamente utilizada. Com este método, a estrutura da subsuperfície é mapeada através da medição dos tempos de uma onda sísmica, gerada em pouca profundidade pela excitação de uma fonte “acústica” superficial, retornar à superfície após a sua reflexão nas interfaces entre formações com propriedades físicas diferentes.

As ondas refletidas são registradas na superfície por sensores, cujas saídas descrevem a variação no tempo das variáveis físicas pertinentes. Tais registros, comumente chamados sismogramas ou traços sísmicos, são sujeitos a um número de operações de processamento de sinais, seguido pela interpretação, em termos de profundidades e refletividades de cada horizonte refletor da subsuperfície. Tal interpretação é uma tarefa extremamente complexa, que requer familiaridade com os princípios físicos básicos que governam as características de propagação das ondas sísmicas no interior da terra. Isto inclui sua geração, transmissão, absorção e atenuação nos materiais terrestres, bem como sua reflexão, refração e características de difração nas descontinuidades.

2.1.1 – Conteúdo do Sismograma

A resposta do meio como é medida por receptores superficiais é um complexo de componentes distintos, alguns deles considerados como sinais, uma vez que eles carregam informações que permitem a recuperação potencial da informação sobre a subsuperfície, outros considerados como ruído, por não terem nenhuma relação com a estrutura da subsuperfície, ou são tão complexos para serem considerados em um esquema de processamento.

Convencionalmente, no presente estudo, o sinal é definido como o componente de reflexão em um sismograma e o restante como ruído. Uma tarefa primária no processamento de sinais na sismologia de reflexão é a eliminação dos componentes de ruído indesejáveis. Afortunadamente, as ondas de sinal e de ruído se propagam no meio geológico, com velocidades e direções diferentes, permitindo assim eventual discriminação, por meio de geometrias

apropriadas de arranjos de fonte e receptores, em conjunto com técnicas poderosas de processamento multicanal, como por exemplo o empilhamento de ponto comum em profundidade (CDP).

Os sismogramas resultantes, após a retirada da maior parte dos componentes de ruído, essencialmente consistem de vários pulsos, com diferentes amplitudes e tempos de chegada, devido às frentes de onda que se propagam por caminhos de fonte para receptor diferentes e sofrem diferentes graus de atenuação. Esta atenuação, usualmente, se manifesta em termos de um efeito progressivo de filtragem passa-baixa do pulso fonte, conforme este se propaga mais distante dentro da geologia. Em uma base de tempo curto, entretanto, a forma do pulso fonte é essencialmente estacionária, assim levando à representação do traço sísmico em termos de uma convolução da sequência de pulsos com a correspondente sequência de chegadas. O objetivo da análise é então resolver as várias chegadas, isto é, deconvolver a sequência de impulsos a partir do sinal composto.

2.1.2 – O Modelo Convolutacional

Do ponto de vista do estudo das ondas sísmicas, o meio geológico se comporta como um meio linear. Assim, podemos caracterizar este comportamento em termos de sua resposta a uma fonte sísmica impulsiva, como ilustrado na Figura (2.1). Tal caracterização é frequentemente feita com a ajuda de modelos geológicos simplificados, cuja finalidade é permitir o entendimento da geração dos vários componentes do sismograma, bem como capturar o fenômeno básico que motiva tarefas específicas de processamento de sinais.

Primeiramente, examinemos a construção dos blocos de um traço sísmico registrado. O meio geológico é composto por camadas de rochas com diferentes litologias e propriedades físicas. Sismicamente, unidades de rochas são definidas pelas densidades e velocidades com que as ondas sísmicas se propagam através delas. O produto da densidade e velocidade é chamado impedância acústica. O contraste de impedância entre camadas de rochas adjacentes causa as reflexões que são registradas ao longo de um perfil na superfície. Intuitivamente, o sismograma registrado pode ser modelado como uma convolução da resposta do meio ao impulso com o

pulso- fonte sísmico. O sismograma tem vários componentes, incluindo assinatura da fonte, sistema registrador, reflexões da superfície e resposta do geofone.

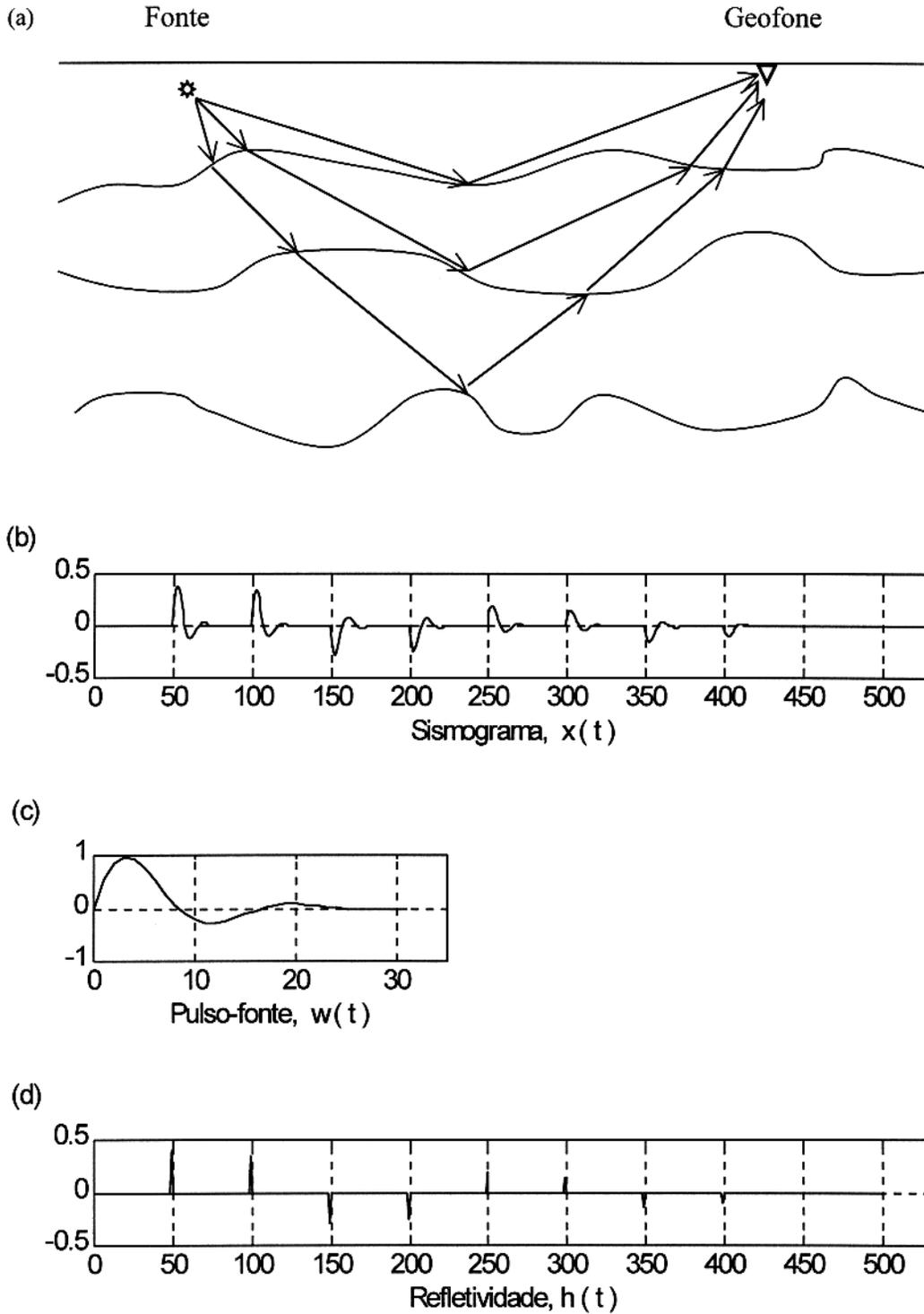


Figura 2.1 – (a) Modelo geológico simplificado; (b) Ilustração do sinal sísmico resultante da convolução das componentes; (c) Pulso-fonte; (d) Resposta do meio ao impulso.

Admitimos ao longo deste trabalho, que a maior parte dos componentes do ruído, no sentido mencionado na seção anterior, foram retirados dos sismogramas de nosso interesse. Devemos então descrever, através dos correspondentes modelos geológicos simplificados, a geração dos componentes da reflexão através da subsuperfície. Tais modelos simplificados foram introduzidos por Berryman et al. (1958) e foram desenvolvidos sucessivamente por Wuenschel (1960), Trorey (1962), Treitel e Robinson (1966), Claerbout (1968), Middleton e Whittlesey (1968) e outros. A feição comum para todos os modelos sísmicos é que a Terra consiste em um semiespaço, composto por infinitas camadas planas, paralelas e homogêneas, com velocidade v e densidade ρ , como ilustrado na Figura (2.2).

A partir de medidas em poços, verifica-se que o gradiente vertical de densidade é frequentemente muito menor que o gradiente vertical de velocidade. Portanto, frequentemente consideramos que o contraste de impedância entre camadas de rochas é essencialmente devido ao

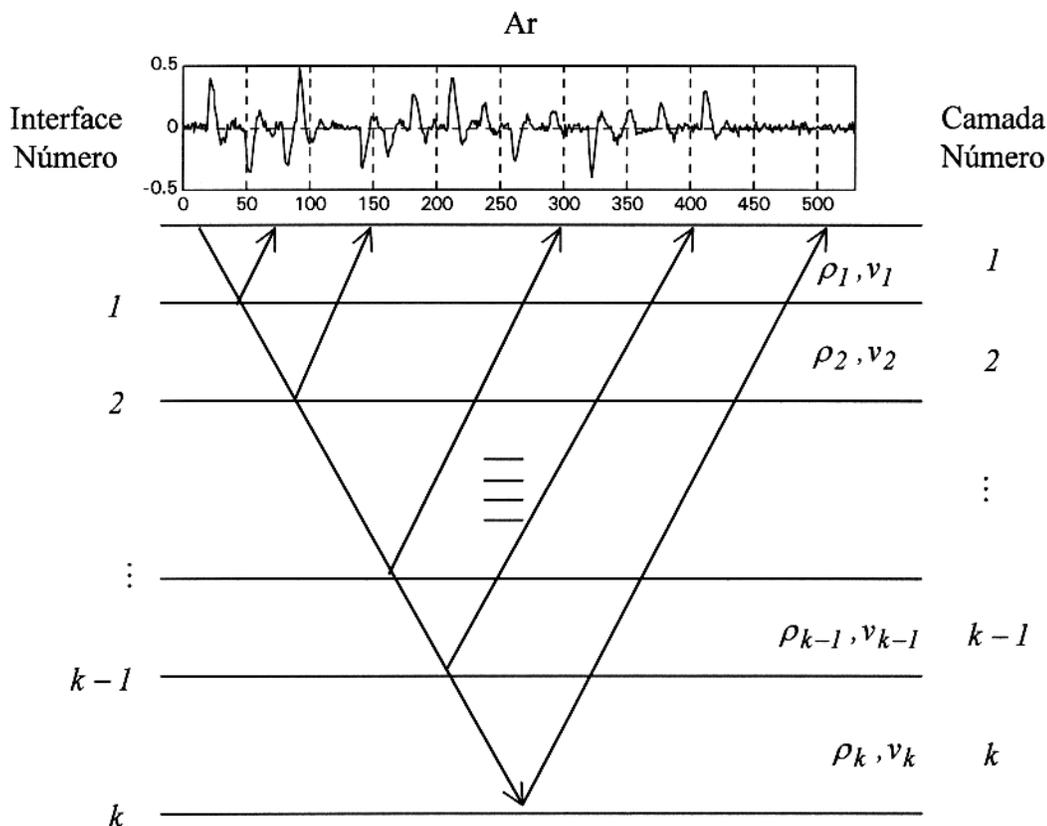


Figura 2.2 – Modelo sísmico consistindo de camadas planas, paralelas e homogêneas, sobre um semiespaço.

contraste de velocidade. Esta suposição não é sempre o caso. A razão pela qual podemos retirar o gradiente de densidade é que este normalmente tem o mesmo sinal que o gradiente de velocidade. Portanto, a função impedância derivada somente a partir da função velocidade, poderia ser correta dentro de um fator de escala.

O coeficiente de reflexão acústico (para pressão ou tensão) h_k , associado às interfaces, como ilustrado na Figura (2.3), é expresso por Waters (1992):

$$h_k = \frac{I_{k+1} \cos \alpha - I_k \cos \theta}{I_{k+1} \cos \alpha + I_k \cos \theta}, \quad (h_k \leq |I|), \quad (2.1)$$

onde I é a impedância sísmica associada com cada camada, dada pelo produto da densidade ρ e a velocidade v , α é o ângulo de incidência e reflexão do raio, P_i ; e θ é o ângulo de refração do raio transmitido, P_t . Esses dois ângulos estão relacionados pela lei de Snell:

$$\frac{\text{sen } \alpha}{\text{sen } \theta} = \frac{v_k}{v_{k+1}}, \quad (2.2)$$

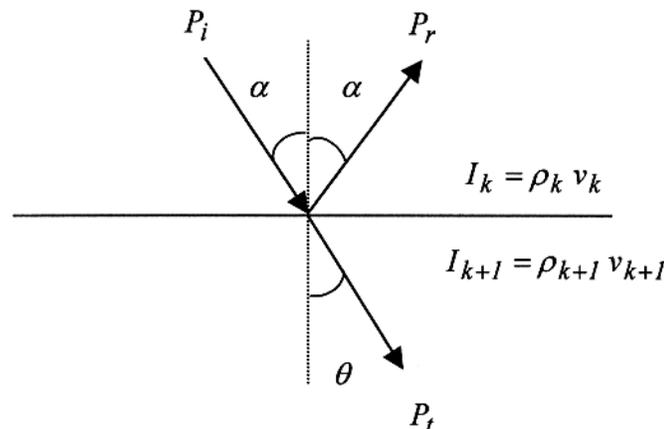


Figura 2.3 – Relações angulares entre os raios incidente, P_i , refletido, P_r , e transmitido, P_t , quando uma onda plana inclinada encontra uma interface entre dois meios com propriedades físicas diferentes. A ilustração não inclui o espalhamento das ondas transversais.

O primeiro conjunto de suposições que é usado aqui, para construir o modelo para o traço sísmico é o seguinte:

- (1ª) A Terra é composta de camadas horizontais de velocidades constantes.
 (2ª) A fonte gera uma onda plana compressional que incide nas interfaces das camadas com ângulo vertical. Sob tais condições nenhuma onda cizalhante é gerada.

A primeira consideração é violada em áreas de estruturas complexas e em áreas com rápidas mudanças laterais de fácies. A segunda consideração implica que dados de afastamento nulo devem ser usados. Entretanto, afastamento nulo nunca é registrado. Por outro lado, se as interfaces das camadas forem pouco inclinadas em relação ao comprimento do cabo do arranjo do levantamento sísmico de reflexão, admitimos que o ângulo de incidência em um dado contorno é pequeno e ignoramos a dependência do ângulo dos coeficientes de reflexão.

Baseado nessas duas primeiras considerações, para conservar a polaridade, temos que

$$h_k = \frac{I_{k+1} - I_k}{I_{k+1} + I_k} = \frac{\rho_{k+1} v_{k+1} - \rho_k v_k}{\rho_{k+1} v_{k+1} + \rho_k v_k}, \quad (h_k \leq |I|). \quad (2.3)$$

Se também admitimos que a densidade é invariante com a profundidade, ou que ela não varia tanto quanto a velocidade, obtemos que

$$h_k \approx \frac{v_{k+1} - v_k}{v_{k+1} + v_k}, \quad (h_k \leq |I|). \quad (2.4)$$

Para incidência vertical, o coeficiente de reflexão é a razão entre a amplitude da onda refletida e a amplitude da onda incidente.

A refletividade, como função apenas do tempo, é definida pela expressão

$$h(t) = \sum_{k=1}^{\infty} h_k(t_k) \delta(t - t_k), \quad (2.5)$$

onde k representa a sequência de interfaces, e $\delta(t)$ a função delta de Dirac.

A onda de pressão característica criada por uma fonte, tal como dinamite ou disparo de ar comprimido, é chamada de assinatura da fonte. Todas as assinaturas são processadas admitindo-os como pulsos banda-limitados e de duração finita.

Enquanto esta forma de onda se propaga no interior da Terra, dois fenômenos acontecem. Primeiro, a amplitude decai devido à divergência esférica. Segundo, frequências são atenuadas devido a efeitos de absorção inelástica das rochas. A variação da amplitude com o tempo resulta em um sinal transiente com a propriedade chamada não-estacionariedade. Uma correção imposta para a não-estacionariedade usualmente é feita antes da aplicação do processamento, que é a curva de ganho automático. Como resultado, o modelo convolucional simples discutido aqui não incorpora não-estacionariedade. Isto leva à terceira suposição:

(3ª) A forma da onda da fonte é conservada na sua propagação em subsuperfície, isto é, é estacionária.

O modelo convolucional para o sismograma registrado, representado no diagrama de blocos da Figura (2.4), é descrito pela expressão

$$x(t) = w(t) * h(t) + r(t), \quad (2.6)$$

onde $w(t)$ representa o pulso sísmico fonte, $h(t)$ a resposta do meio ao impulso, $r(t)$ o ruído ambiental aleatório e $x(t)$ o sismograma registrado.

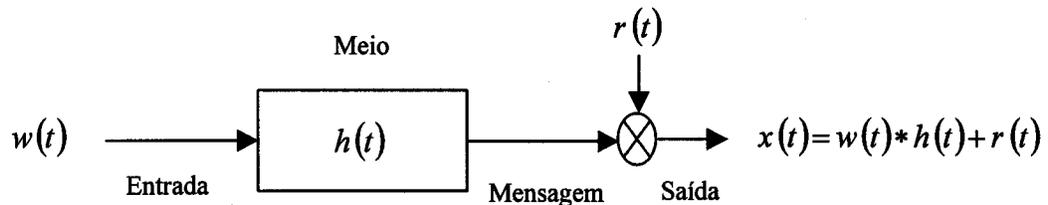


Figura 2.4 – Representação em diagrama de blocos do modelo convolucional.

A equação (2.6) é a formulação matemática do modelo convolucional descrito na Figura (2.4). Deconvolução visa recuperar a série de refletividade, ou seja, a resposta do meio ao impulso, a partir do sismograma.

Examinando a equação para o modelo convolucional, podemos observar que tudo que normalmente é conhecido é o sismograma registrado, $x(t)$. A resposta do meio ao impulso, $h(t)$, deve ser estimada em qualquer lugar, exceto onde existam poços, com bons perfis sônicos. A forma da onda da fonte, $w(t)$, normalmente também é desconhecida. Em certos casos, entretanto, ela é parcialmente conhecida, por exemplo, a assinatura de um arranjo de ar comprimido pode ser medido. Entretanto, o que é medido é somente a forma da onda no exato instante de sua excitação e não o pulso que é registrado no receptor. Finalmente, não existe nenhum conhecimento a priori, sobre o ruído ambiental, $r(t)$. Agora temos três variáveis desconhecidas, uma conhecida e somente uma equação. Poderíamos dizer assim que este problema não pode ser resolvido. Porém, na prática, deconvolução é aplicada aos dados sísmicos como uma parte integrante do processamento convencional. Portanto, ao longo dos anos, deconvolução se tornou um método importante para aumentar a resolução temporal. Para resolver a incógnita $h(t)$, outras considerações devem ser feitas:

(4^a) A componente de ruído, $r(t)$, é zero.

(5^a) A forma do pulso-fonte é conhecida.

Sob estas suposições, temos uma equação e uma incógnita. Na realidade, entretanto, nenhuma das duas considerações acima, normalmente são válidas. Se a forma da onda for conhecida, então a solução para o problema de deconvolução é determinístico. Se for desconhecida (caso usual), então a solução para o problema de deconvolução é estatístico.

O modelo convolucional para o sismograma sem ruído, ilustrado na Figura (2.5), é representado simplesmente pela seguinte equação

$$x(t) = w(t) * h(t) \quad (2.7)$$

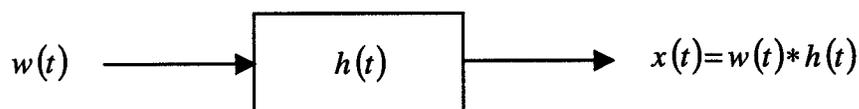


Figura 2.5 – Representação em diagrama de blocos do sismograma sem ruído.

A convolução no domínio do tempo é equivalente a multiplicação no domínio da frequência. Em particular, o espectro de amplitude do sismograma é igual ao produto dos espectros de amplitude do pulso sísmico com o da resposta do meio ao impulso.

A semelhança na forma geral entre os espectros de amplitude do pulso e do sismograma é evidente. De fato, uma versão suavizada do espectro de amplitude é aproximadamente indistinguível do espectro de amplitude do pulso. Geralmente é imaginado que as rápidas flutuações observadas no espectro de amplitude do sismograma são uma manifestação da resposta do meio ao impulso, enquanto que a forma básica primariamente é associada com o pulso da fonte.

Matematicamente, a semelhança entre os espectros de amplitude do sismograma e do pulso, sugere que o espectro de amplitude da resposta do meio ao impulso deve ser aproximadamente planar. Uma série branca que representa um processo aleatório tem um espectro planar. A partir de um exame detalhado do espectro de amplitude da resposta ao impulso, vemos que este não é totalmente plano: as componentes de alta frequência têm uma tendência a aumentar gradualmente.

As funções autocorrelação do pulso básico e do sismograma são também semelhantes. Esta semelhança é confinada a deslocamentos para os quais a autocorrelação do pulso é não nula. Matematicamente, isto sugere que a resposta ao impulso tem uma função autocorrelação que é pequena em todos os deslocamentos, exceto no ponto zero. A função autocorrelação de uma série aleatória tem características similares. Entretanto, existe uma diferença, quando comparadas, a autocorrelação da resposta ao impulso tem um valor negativo de deslocamento significativamente grande, seguido o retardo zero. Este não é o caso para a autocorrelação do ruído aleatório. O máximo positivo (retardo nulo), seguido pelo máximo negativo menor no autocorrelograma da resposta ao impulso, surge do comportamento espectral discutido acima. Particularmente, o máximo positivo e o negativo menor adjacente do autocorrelograma, aproximadamente juntos, agem como um operador derivativo fracionário, que tem um efeito de rampa no espectro de amplitude.

As observações acima, feitas no espectro de amplitude e nas funções de autocorrelação, implicam que a refletividade não é inteiramente um processo branco. Entretanto, a seguinte consideração quase sempre é feita sobre a refletividade, para eliminar a quinta consideração:

(6ª) A refletividade é um processo aleatório (branco). Isto implica em que o sismograma tem as características do pulso sísmico, em que suas autocorrelações e espectros de amplitude são similares.

Esta premissa é fundamental na implementação da deconvolução preditiva. Isto permite a autocorrelação do sismograma, que é conhecido, substituir a autocorrelação do pulso sísmico, que é desconhecida. Como resultado desta última suposição, filtros inversos podem ser estimados diretamente, a partir da função autocorrelação do sismograma. Para este tipo de deconvolução, a quinta consideração, que quase nunca é uma realidade, não é requerida.

2.1.3 – Ruídos Sísmicos

Um problema sempre presente nos traços de um sismograma é o da existência de ruído. Em uma definição ampla, ruído é todo e qualquer sinal que não seja a informação desejada; um sismograma, portanto, é a soma, ou uma mistura de sinais (desejados) e ruídos (não desejados).

Da grande variedade de formas de ondas que retornam à superfície, como resultado de uma explosão e são observadas em um sismograma, somente poucas são utilizadas na sismologia prática. Podemos chamá-las de eventos úteis. As outras ondas podem interferir com as ondas úteis, interferindo no seu reconhecimento, ou, tendo a aparência completa de ondas longitudinais úteis, elas podem ser interpretadas como tal; e, como resultado, um número de erros são introduzidos na interpretação. Por esta razão, todas estas ondas indesejáveis são chamadas de ruído, e um esforço é feito para eliminá-las do sismograma por vários procedimentos.

Naturalmente, tal divisão em ondas úteis ou não, é um tanto arbitrária e condicional, dependendo do que se quer determinar; por exemplo, a onda longitudinal direta, a primeira chegada em um sismograma de reflexão, é útil quando se deseja determinar a velocidade da primeira camada consolidada, mas pode ser considerada como ruído quando ela interfere com eventos posteriores. Ondas transversais podem ser de uso sob certas condições, mas em geral elas não são úteis e pertencem a categoria de ruído. Atualmente as ondas transversais têm tido

aplicação crescente para o conhecimento da razão v_p/v_s , por exemplo, com implicações importantes na característica permo-porosa do meio atravessado, como em estudos de anisotropia sísmica. Também, ondas difratadas podem ser bastante úteis para a determinação de falhas, mas podem também ser prejudiciais se elas interferem com as reflexões principais. Mesmo as ondas sonoras transmitidas através do ar podem ser utilizadas algumas vezes, como um teste para distância, embora, em geral, elas sejam indesejáveis.

Por outro lado, ondas de superfície, tipo Rayleigh e Love, junto com seus efeitos secundários, propagadas próximo à superfície do solo em baixas velocidades e baixas frequências, são sempre indesejáveis e constituem uma forma de ruído que é extremamente prejudicial. Ainda pior, por causa da dificuldade na sua eliminação, estão os eventos aleatórios presentes em todos os sismogramas. Estes são nada além do que inúmeras difrações e reflexões, com suas múltiplas, de irregularidades e de mudanças de velocidade na subsuperfície, que interagem em uma forma errática e complicada. Várias ondas são consideradas ruído porque não conhecemos como interpretá-las. Se pudéssemos interpretá-las, talvez fosse possível obter informações valiosas.

Existem outras fontes de ruídos naturais e artificiais: cachoeiras e água corrente em rios situados próximos às linhas sísmicas, movimento de ondas no litoral, nos trabalhos de prospecção em terrenos costeiros, oscilação do mar em trabalhos marinhos, e muitas outras.

A razão sinal/ruído, S/N , é uma medida muito importante no processamento de sinais, e pode ser definida de várias formas. O ideal é termos essa razão bem maior do que a unidade nos sismogramas. Para valores de S/N em torno de um, fica difícil, em certos casos, distinguirmos o que seja sinal de ruído, ainda mais se esse ruído for do tipo coerente, isto é, aparecer com um alinhamento traço-a-traço típico de sinal.

2.1.4 – Efeitos da Superfície

Até aqui, caracterizamos a resposta de uma estrutura geológica idealizada, para uma excitação sísmica idealizada. Na prática, a fonte sísmica pode ser enterrada próxima à superfície, como acontece com fontes explosivas; na superfície, como os vibroseis, ou também dentro da camada de água, como na prospecção marinha.

A estrutura e geometria superficiais frequentemente impõem restrições específicas na iluminação dos refletores profundos. No solo, os sedimentos superiores, sendo normalmente não consolidados, formam a camada de intemperismo e afetam o pulso-fonte em propagação, em modos que não podem ser modelados de formas simples, mas especialmente descritos em termos de um retardo e significativa distorção do pulso-fonte, conforme este transita para baixo.

Velocidades sísmicas que são mais baixas do que a velocidade na água, usualmente implicam em que gás (ar ou metano resultante da decomposição de vegetais) preenche pelo menos alguns dos espaços porosos. Tais velocidades baixas são normalmente vistas somente próximo à superfície, em uma zona chamada de camada de intemperismo, ou camada de baixa velocidade, CBV. Esta camada, que geralmente tem espessura entre quatro e cinquenta metros, podendo atingir espessuras bem maiores em algumas regiões, é caracterizada por velocidades sísmicas que não são somente baixas (comumente entre 250 e 1000 m/s), mas algumas vezes, bastante variável. Frequentemente, a base dessa camada coincide com o topo do nível freático, indicando que a camada de baixa velocidade corresponde à zona aerada acima da zona saturada de água, mas este não é sempre o caso. Obviamente, o termo “intemperismo”, como usado por geofísicos, difere do sentido dado ao termo por geólogos, que denota a desintegração das rochas, sob a influência de agentes da natureza.

A importância da camada de baixa velocidade tem quatro aspectos: a absorção da energia sísmica é alta nessa zona; a velocidade baixa e as mudanças rápidas na velocidade têm um efeito desproporcionalmente grande nos tempos de trânsito; a marcante mudança de velocidade na base da CBV orienta fortemente os raios sísmicos, de tal forma que seus percursos através dessa camada é aproximadamente vertical, independente de suas direções de trânsito em baixo da CBV, e o grande contraste de impedância na base da CBV faz com que esta seja um excelente refletor, importante em reflexões múltiplas. Em função do primeiro fator, registros de tiros nessa camada, frequentemente são pobres em qualidade, e esforços são feitos para posicionar a fonte abaixo dela.

O resultado dessa camada de intemperismo, é que o pulso transiente, chegando nos refletores profundos, não mais se assemelha ao pulso original. Claramente, a camada de intemperismo também afeta a energia ascendente. A relação entre os pulsos que chegam e o original é assim muito mais complicada, e como consequência, o conhecimento do pulso fonte é

de pouco uso na recuperação eventual dos tempos de chegada dos pulsos, naquelas situações onde os efeitos da camada de intemperismo são significantes.

2.1.5 - Reverberação

Outro exemplo onde a estrutura superficial afeta profundamente a iluminação dos refletores mais profundos é quando a fonte é posicionada acima de um forte refletor. Neste caso, a energia da fonte que se propaga para cima é refletida para baixo por tal refletor, criando uma iluminação secundária que gera “fantasmas” de cada refletor profundo, como mostrado na Figura (2.6). Este é, claramente, sempre o caso em prospecção marinha, já que a interface água/ar age semelhante a um refletor quase perfeito das ondas sísmicas. Além disso, sempre que o fundo do mar, ou os refletores superficiais forem bons refletores, um efeito reverberante ocorre como resultado do aprisionamento da maior parte da energia na camada líquida. Em tal situação, as reflexões mais profundas podem se sobrepostas pelas chegadas destas reflexões múltiplas, levando a significantes problemas de análise de dados.

A reverberação da coluna d’água pode ser frequentemente representada em termos de modelos paramétricos simples, a partir dos quais, técnicas de processamento de dados específicas são desenvolvidas, com o objetivo básico de aumentar as reflexões primárias profundas sobre as múltiplas da coluna d’água. O princípio para tais modelos é a natureza periódica do fenômeno da reverberação.

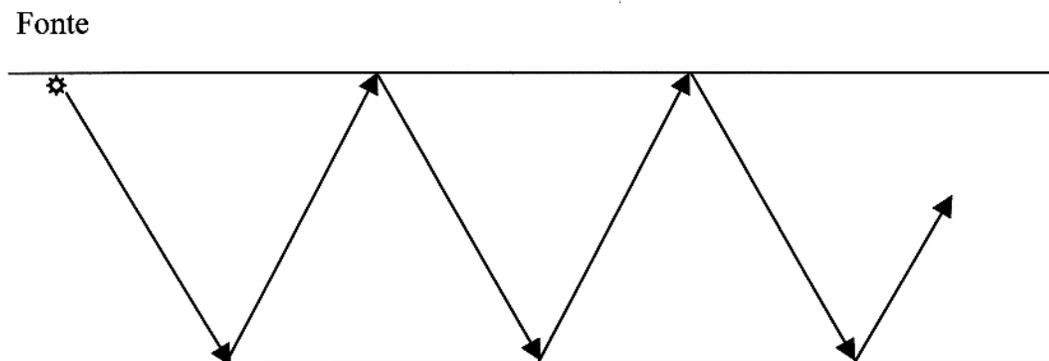


Figura 2.6 – Mecanismo de reverberação do pulso-fonte (múltiplas).

A remoção das reverberações sísmicas é chamada desreverberação sísmica. Várias técnicas de filtragem têm sido desenvolvidas com este propósito, sendo as mais comuns aquelas baseadas em formalismos de filtragem preditiva, e mais recentemente a análise homomórfica de sinais.

2.2 – DECONVOLUÇÃO LINEAR

As mais notáveis técnicas de análise sísmica linear são a filtragem digital de Wiener e a deconvolução preditiva. Mais recentemente, através dos trabalhos de Oppenheim e Schaffer (1965), foi despertado o interesse pela análise homomórfica.

Tanto os métodos lineares como o homomórfico têm vantagens e desvantagens peculiares a cada um. Suas aplicações, na análise de dados reais, dependem do grau em que os mesmos se ajustam às considerações mais críticas de cada método.

Consideremos um traço sísmico, $x(n)$, dado por

$$x(n) = s(n) + r(n) = w(n) * h(n) + r(n), \quad (2.8)$$

e façamos $h(n)$ ser não correlacionável. Denotando por $\phi_{hh}(n)$, a função autocorrelação estocástica, FAC, da sequência $h(n)$, temos que

$$\phi_{hh}(n) = \phi_{hh}(0) \delta(n). \quad (2.9)$$

Portanto, a FAC do traço sísmico é simplesmente proporcional à FAC do correspondente pulso, uma vez que

$$\phi_{xx}(n) = \phi_{ww}(n) * \phi_{hh}(n) = \phi_{hh}(0) \phi_{ww}(n). \quad (2.10)$$

Antes de apresentarmos o desenho de filtros específicos de deconvolução, baseados somente na informação fornecida pela FAC do traço sísmico, vamos investigar a sua suficiência, em termos do desenho de um filtro inverso ideal, ou seja, converter o pulso-fonte, $w(n)$, em um impulso em $n=0$, a fim de transformar o sismograma em uma série de impulsos, que define a resposta ao impulso. Seja $f(n)$, tal filtro ideal, como representado na Figura (2.7). Fazendo $F(e^{i\omega})$ denotar sua transformada de Fourier, temos por definição que

$$F(e^{i\omega}) = W(e^{i\omega})^{-1}, \quad (2.11)$$

ou, equivalentemente,

$$|F(e^{i\omega})| = |W(e^{i\omega})|^{-1}, \quad (2.12)$$

e

$$\arg |F(e^{i\omega})| = -\arg |W(e^{i\omega})|. \quad (2.13)$$

Podemos modelar este filtro inverso ideal como uma cascata de um filtro de fase nula com função transferência dada pela equação (2.12), com um filtro passa-tudo com uma função transferência dada pela equação (2.13). Claramente, a FAC do traço transporta informação suficiente para o desenho do primeiro destes sistemas, mas em geral não fornece informação para o outro. Uma importante exceção é quando o pulso fonte, $w(n)$, é de fase-mínima, já que sua fase pode ser derivada a partir de sua amplitude, através da transformação de Hilbert.

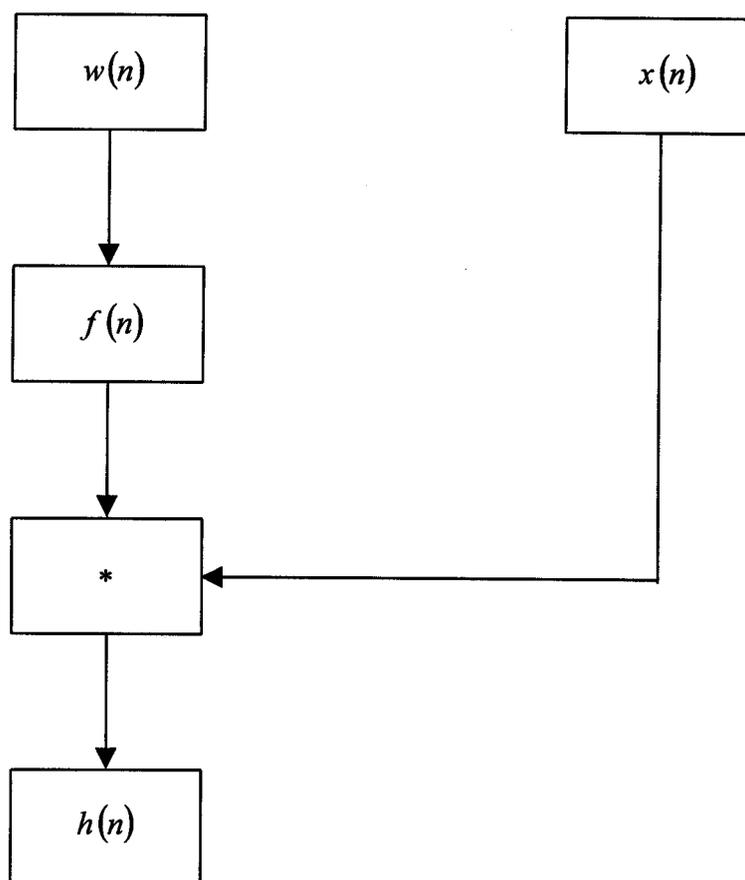


Figura 2.7 – Representação em diagrama de blocos de um filtro ideal.

Na prática, as características de amplitude e fase de um filtro de deconvolução deve ser desenhado a partir dos dados, porque o pulso-fonte, em geral, é desconhecido. Mesmo se for possível obter uma estimativa de $w(n)$, normalmente não é desejável realizar a deconvolução através da divisão exata no domínio da frequência, como é postulado pelo filtro ideal das equações (2.12) e (2.13), já que o modelo da equação (2.8) deve ser visto como uma representação aproximada dos dados sísmicos reais. Então, filtros deconvolucionais devem ser desenhados para que se aproximem do comportamento ideal em um modo controlado.

Duas classes de filtros lineares que têm sido usados extensivamente na análise de dados sísmicos são os filtros digitais de Wiener e os filtros de deconvolução preditiva, sendo ambos desenhados por métodos paramétricos de mínimos-quadrados.

Filtros de Wiener tentam converter otimamente o sismograma nas séries de refletividade, e seus desenhos requerem uma estimativa a priori do pulso sísmico. Filtros de deconvolução preditiva são usualmente direcionados para desreverberação sísmica. Seus usos, como filtros deconvolucionais, são apropriados somente quando o pulso sísmico é de fase mínima.

2.2.1 – Filtros Digitais de Wiener

Filtros de Wiener são operadores lineares invariantes no tempo, que têm como base o ajuste do sinal real ao desejado, baseados no princípio dos mínimos-quadrados. No contexto da deconvolução sísmica, o objetivo é, então, converter o sismograma $x(n)$, em uma saída que se aproxima da saída desejada, isto é, na série refletora $h(n)$, minimizando o erro entre a saída real, $y(n)$, e a saída desejada do filtro, $d(n)$, como mostra esquematicamente a Figura (2.8). Para fazer com que este problema possa ser computacionalmente realizável, restringimos os filtros para serem de resposta finita ao impulso, RFI. A classe resultante de filtros RFI de mínimos quadrados tem sido referenciada comumente em Geofísica, como filtros digitais de Wiener.

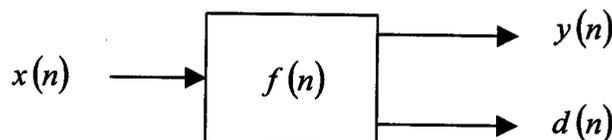


Figura 2.8 – Representação canônica do filtro ótimo segundo Wiener.

O filtro, $f(n)$, é representado através dos seus coeficientes:

$$f(n) = (f_0, f_1, \dots, f_m), \quad (2.14)$$

com comprimento $m + 1$, a partir dos dados conhecidos, de entrada $x(n)$, e saída desejada $d(n)$.

A função objeto de minimização é a variância dos desvios dada por

$$e(f(n)) = \sum_n [d(n) - y(n)]^2. \quad (2.15)$$

Como admitimos o modelo linear (convolucional simples), a saída do filtro pode ser expressa como

$$y(n) = x(n) * f(n) = \sum_{\tau=0}^M f(\tau)x(n-\tau). \quad (2.16)$$

Inserindo a equação (2.16) em (2.15), obtemos

$$\begin{aligned} e &= \sum_n \left[d(n) - \sum_{\tau=0}^m f(\tau)x(n-\tau) \right]^2 = \\ &= \sum_n d^2(n) - 2 \sum_n d(n) \sum_{\tau} f(\tau)x(n-\tau) + \sum_n \left[\sum_{\tau} f(\tau)x(n-\tau) \right]^2. \end{aligned} \quad (2.17)$$

A condição de “mínimo” da função erro médio é medida pela derivada parcial com respeito aos coeficientes do filtro, f_i , através da relação

$$\frac{\partial e}{\partial f_i} = 0, \quad (i=0, 1, 2, \dots, m). \quad (2.18)$$

Diferenciando a função erro, com respeito aos coeficientes do filtro, temos que

$$\frac{\partial e}{\partial f_i} = -2 \sum_n d(n)x(n-i) + 2 \sum_n \left[\sum_{\tau} f(\tau)x(n-\tau)x(n-i) \right] = 0, \quad (2.19)$$

e rearrumando, obtemos o sistema de equações

$$\sum_{\tau=0}^m f(\tau) \sum_n x(n-\tau)x(n-i) = \sum_n d(n)x(n-i), \quad (2.20)$$

que em forma mais conveniente

$$\sum_{\tau=0}^m f(\tau)\phi_{xx}(i-\tau)=\phi_{dx}(i), \quad (2.21)$$

chamada de equação de Wiener-Hopf, onde fazemos por conveniência da nomenclatura usada adiante $\tau \rightarrow j$. Podemos escrever a equação (2.21) na forma matricial expandida

$$\begin{bmatrix} \phi_{xx}(0) & \phi_{xx}(1) & \phi_{xx}(2) & \cdots & \phi_{xx}(m) \\ \phi_{xx}(1) & \phi_{xx}(0) & \phi_{xx}(1) & \cdots & \phi_{xx}(m-1) \\ \phi_{xx}(2) & \phi_{xx}(1) & \phi_{xx}(0) & \cdots & \phi_{xx}(m-2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \phi_{xx}(m) & \phi_{xx}(m-1) & \phi_{xx}(m-2) & \cdots & \phi_{xx}(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{dx}(0) \\ \phi_{dx}(1) \\ \phi_{dx}(2) \\ \vdots \\ \phi_{dx}(m) \end{bmatrix}, \quad (2.22)$$

onde ϕ_{xx} são os valores da autocorrelação estocástica da entrada, e ϕ_{dx} os valores da correlação cruzada estocástica entre a entrada e a saída desejada.

As equações (2.21) e (2.22) são chamadas de equações normais para o filtro digital de Wiener, que transforma otimamente o sinal sísmico $x(n)$, na sequência $d(n)$. Por esta razão, a classe dos filtros de Wiener são comumente referidos como filtros impulsivos, com autocorrelação, ϕ_{xx} , do sismograma de entrada $x(n)$, e correlação cruzada, ϕ_{dx} , do sinal de entrada $x(n)$, com o sinal de saída desejado $d(n)$, definido como a sequência refletora $h(n)$, ou a redução ao impulso $\delta(n)$.

A medida do erro para o filtro obtido a partir de (2.21) e (2.17) na forma normalizada resulta em

$$E=1-\sum_{\tau=0}^m f_{\tau} \frac{\phi_{dx}(\tau)}{\phi_{dd}(0)}, \quad (2.23)$$

que é igual a zero para desempenho perfeito, igual a um para fracasso total, e varia entre zero e um para todos os outros casos. Genericamente, quanto maior o comprimento do filtro, menor é o erro. Segundo Robinson (1967), filtros de Wiener, com dado comprimento, com diferentes retardos, podem ser derivados uns dos outros, por técnicas recursivas. Graças a estes algoritmos recursivos, é possível procurar eficientemente por filtros de Wiener de retardo otimizado.

Existem duas aplicações comuns dos filtros de Wiener para deconvolução: deconvolução ao impulso e deconvolução preditiva. O uso dos filtros de Wiener em deconvolução sísmica tem

sido limitado pelo fato que seu uso requer conhecimento do pulso fonte. Embora simples para desenhar, estes filtros não são obviamente capazes, em geral, de fornecer compensação apropriada de fase, desde que, a que eles fornecem é apropriada somente para compressão de pulsos de fase mínima.

2.2.2 – Filtros de Deconvolução Preditiva

Na presença de reverberação, um traço sísmico é frequentemente modelado como

$$x(n) = s(n) * q(n) = w(n) * h(n) * q(n), \quad (2.24)$$

onde $q(n)$ é um operador periódico de reverberação.

Uma das mais poderosas técnicas de desreverberação sísmica é o método de deconvolução preditiva, originalmente proposto por Robinson (1957), e posteriormente desenvolvido por Peacock e Treitel (1969), com o objetivo de remover eventos repetitivos, tendo periodicidades específicas.

Em essência, um filtro de deconvolução preditiva, $f(n)$, é um filtro de resposta finita ao impulso, com função transferência $F(z)$, usando a transformada- Z (ver Apêndice A) dada por

$$F(z) = 1 - z^{-D} A(z), \quad (2.25)$$

onde

$$A(z) = \sum_{k=0}^{P-1} a(k) z^{-k}, \quad (2.26)$$

chamado de operador preditivo.

Dada uma entrada $x(n)$, desejamos “predizer” o seu valor em algum tempo futuro $(n + D)$, onde D é a distância de predição e $x(n + D)$ é uma versão avançada no tempo, da entrada $x(n)$. A Figura (2.9) ilustra esquematicamente, este processo de filtragem. O operador preditivo satisfaz então o seguinte conjunto de equações normais:

$$\sum_{j=0}^{P-1} h(j) \phi_{xx}(j-i) = \phi_{xx}(D+i), \quad (i=0, \dots, P-1), \quad (2.27)$$

isto é, que o desejado seja a entrada deslocada de j posições.

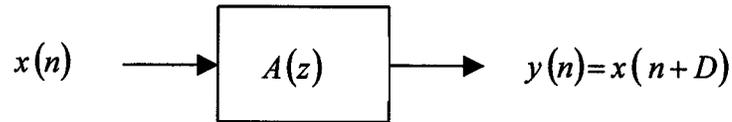


Figura 2.9 – Representação em diagrama de blocos da filtragem preditiva.

Se $h(n)$ é considerado como sendo não correlacionável, esta equação na forma paramétrica se torna

$$\sum_{j=0}^{P-1} h(j) \phi_{w_q w_q}(j-i) = \phi_{w_q w_q}(D+i), \quad (i=0, \dots, P-1), \quad (2.28)$$

onde denotamos por $w_q(n)$ o pulso sísmico reverberado, que é,

$$w_q(n) = w(n) * q(n). \quad (2.29)$$

Considerando o tempo duplo de trânsito através da camada reverberante, chamado de período de reverberação, T_w , as reverberações de primeira e segunda ordens podem ser removidas por tais filtros, selecionando apropriadamente a distância de predição, D , no intervalo

$$D \leq T_w \leq P. \quad (2.30)$$

Filtros preditivos são determinados pela solução da equação (2.27). Sua habilidade na remoção efetiva da reverberação da fonte, depende crucialmente em quanto realmente a solução está próxima da solução desejada. Em outras palavras, depende de quanto, de fato, a série refletora é não correlacionável acima do retardo $n = P + D$. Como mostrado por Baggeroer (1973), este tende a ser o caso na prospecção de águas profundas, enquanto isto não é frequente em águas rasas.

É demonstrado que filtros preditivos, com distância de predição unitária, são idênticos a filtros de resposta ao impulso unitário de Wiener, exceto para um ganho constante.

Predição linear é frequentemente usada como uma base para a estimação do pulso sísmico fonte, dada a FAC do traço. A transformada- Z do pulso fonte, $W(z)$, é estimada da transformada- Z do filtro preditivo linear como

$$W(z) = \frac{G}{1 - \sum_{k=1}^P a_k z^{-k}}, \quad (2.31)$$

onde G é uma constante. Como já mencionado na seção (2.2), esta representação é apropriada somente para pulsos de fase mínima, para que haja convergência no operador inverso.

3 – DECONVOLUÇÃO HOMOMÓRFICA

Neste capítulo, apresentamos em duas seções a teoria algébrica dos sistemas homomórficos para a análise de sinais, que estão combinados através do modelo convolucional visto no capítulo anterior. A deconvolução homomórfica é aqui apresentada como uma técnica para separação de sinais, que difere das estudadas anteriormente por ser um processo não linear, que transforma uma combinação convolucional em uma combinação aditiva. Esta teoria matemática da transformação homomórfica serve de base para as implementações computacionais apresentadas no próximo capítulo.

O tratamento sísmico por filtragem homomórfica explora as características distintas dos componentes do sinal no domínio cepstral, sendo uma poderosa e promissora técnica, já que não requer, *a priori*, conhecimento da forma do pulso sísmico fonte. Além disso, o pulso fonte não é considerado como sendo de fase mínima, nem a série refletora como sendo não correlacionável, como acontece com a deconvolução preditiva e com as técnicas de filtragem de Wiener.

As primeiras aplicações de sistemas homomórficos para convolução foram feitas por Oppenheim e Schafer (1968), nas áreas de análise de voz, remoção e detecção de ecos. Atualmente, sistemas homomórficos convolucionais são aplicados a uma grande variedade de problemas, incluindo a deconvolução sísmica (Stoffa et al., 1974).

A estratégia da análise homomórfica de sinais deve levar em conta tanto os modelos de composição dos sinais, como os objetivos da análise. As várias estratégias que têm sido exploradas para a análise sísmica são caracterizadas pelo fato de serem baseadas no modelo invariante no tempo da equação (2.6). Portanto, o cepstro complexo do traço sísmico, $x(n)$, consiste de um componente associado com o pulso sísmico fonte, mais um componente associado com a série refletora.

A estrutura do cepstro complexo é tal que, para um número de aplicações, o cepstro dos componentes do sinal tendem a ocupar intervalos distintos no tempo. Esta tendência permite a separação desses componentes por janelamento cepstral. Dentro deste contexto, deconvolução homomórfica se compara favoravelmente com a filtragem linear inversa, já que ela não requer o conhecimento detalhado de um dos componentes do sinal.

3.1 – SISTEMAS HOMOMÓRFICOS

A classe de sistemas a ser discutida, é baseada na generalização da classe de sistemas lineares, já que estes sistemas são importantes por causa de serem relativamente passíveis de análise e caracterização, levando a representações matemáticas elegantes e poderosas, e também por ser possível desenhar esse tipo de sistemas para realizar uma variedade de funções úteis de processamento de sinais.

De fato, sistemas lineares são relativamente simples e úteis, na separação de sinais combinados por adição, o que é uma consequência direta do princípio da superposição, que define a classe dos sistemas lineares. Esta observação leva à consideração de classes de sistemas não lineares, que obedecem um *princípio generalizado da superposição*. Tais sistemas são representados por transformações algébricas lineares entre espaços vetoriais de entrada e saída e são denominados de *sistemas homomórficos*.

Nesta seção fazemos uma descrição geral da teoria dos sistemas homomórficos, e vemos que o problema no desenvolvimento deles se reduz ao desenho de um sistema linear.

3.1.1 – Princípio Generalizado de Superposição

Quando nos deparamos com o problema de separação de sinais que foram somados, frequentemente usamos um filtro linear. Uma razão para isto é que filtros lineares são analiticamente convenientes para tratamento de sinais que foram somados, como uma consequência do princípio da superposição. É estabelecido para sistemas lineares, com L sendo o operador da transformação do sistema, para quaisquer duas entradas $x_1(n)$ e $x_2(n)$ e qualquer escalar c , que

$$L[x_1(n) + x_2(n)] = L[x_1(n)] + L[x_2(n)] \quad (3.1)$$

e

$$L[cx_1(n)] = cL[x_1(n)]. \quad (3.2)$$

Em diversas situações físicas, entretanto, encontramos sinais que podem ser representados em termos de componentes que estão combinados de acordo com uma regra sem ser de adição,

por exemplo, a convolução. Isto leva a consideração de classes de sistemas não lineares que obedecem a um *princípio generalizado da superposição* (Oppenheim, 1965).

Para generalizar este princípio, denotamos pelo símbolo \oplus uma regra para combinar entradas (adição, multiplicação, convolução, etc.), e por \otimes uma regra para combinação de entradas com escalares. Similarmente, \diamond denotará uma regra para combinação de saídas de sistema, e ∇ uma regra para combinar saída com escalares. Então, com T denotando a transformação do sistema, generalizamos as equações (3.1) e (3.2), requerendo que

$$T [x_1(n) \oplus x_2(n)] = T [x_1(n)] \diamond T [x_2(n)] \quad (3.3)$$

e

$$T [c \otimes x_1(n)] = c \nabla T [x_1(n)]. \quad (3.4)$$

Tais sistemas obedecem um princípio generalizado da superposição, com uma operação de entrada \oplus e uma operação de saída \diamond , como ilustrado na Figura (3.1). Sistemas não lineares deste tipo são representados algebricamente por transformações lineares entre espaços vetoriais de entrada e saída e têm sido denominados de sistemas homomórficos. Claramente, sistemas lineares são um caso especial para os quais \oplus e \diamond são adição, e \otimes e ∇ são multiplicação.

A teoria dos espaços vetoriais lineares fornece o formalismo matemático para a representação de sistemas dessa classe. Se interpretamos as entradas e saídas do sistema como vetores em espaços vetoriais, com as regras \oplus e \diamond , correspondendo à adição vetorial e ∇ , correspondendo à multiplicação escalar, então a transformação do sistema, T , é uma transformação algébrica linear do espaço vetorial de entrada para o espaço vetorial de saída.

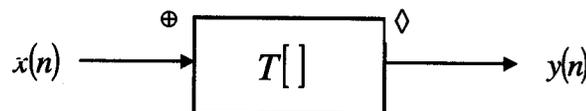


Figura 3.1 - Representação em diagrama de blocos de um sistema homomórfico, com operação de entrada, \oplus , operação de saída, \diamond , e transformação do sistema, $T[]$.

3.1.2 – Representação Canônica dos Sistemas Homomórficos

Podemos mostrar que, se as entradas do sistema constituem um espaço vetorial com \oplus e \otimes correspondendo, respectivamente, a adição vetorial e multiplicação escalar, e as saídas do sistema constituem um espaço vetorial com \diamond e ∇ correspondendo, respectivamente, a adição vetorial e multiplicação, então, todos os sistemas desta classe podem ser representados como uma cascata de três sistemas ilustrados na Figura (3.2), a qual é referida como a representação canônica dos sistemas homomórficos. O primeiro sistema, T_{\oplus} , tem a propriedade que

$$T_{\oplus}[x_1(n) \oplus x_2(n)] = T_{\oplus}[x_1(n)] + T_{\oplus}[x_2(n)] = \hat{x}_1(n) + \hat{x}_2(n) \quad (3.5)$$

e

$$T_{\oplus}[c \otimes x_1(n)] = c T_{\oplus}[x_1(n)] = c \hat{x}_1(n). \quad (3.6)$$

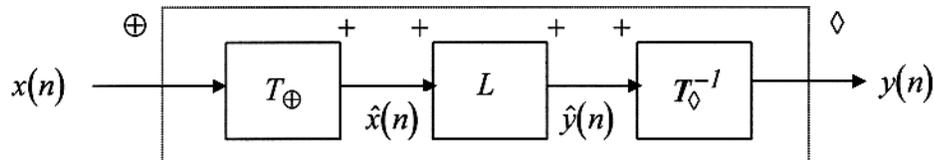


Figura 3.2 - Representação canônica dos sistemas homomórficos.

Observamos que T_{\oplus} obedece um princípio generalizado da superposição, onde a operação de entrada é \oplus , e a operação de saída é $+$. O efeito do sistema T_{\oplus} é transformar a combinação dos sinais $x_1(n)$ e $x_2(n)$ de acordo com a regra \oplus , em uma combinação linear convencional de sinais correspondentes $T_{\oplus}[x_1(n)]$ e $T_{\oplus}[x_2(n)]$. O sistema L é um sistema linear convencional. Assim,

$$L[\hat{x}_1(n) + \hat{x}_2(n)] = L[\hat{x}_1(n)] + L[\hat{x}_2(n)] = \hat{y}_1(n) + \hat{y}_2(n) \quad (3.7)$$

e

$$L[c \hat{x}_1(n)] = c L[\hat{x}_1(n)] = c \hat{y}_1(n). \quad (3.8)$$

Finalmente, o sistema T_{\diamond}^{-1} transforma a operação de adição para a de \diamond . Sendo assim,

$$T_{\diamond}^{-1}[\hat{y}_1(n) + \hat{y}_2(n)] = T_{\diamond}^{-1}[\hat{y}_1(n)] \diamond T_{\diamond}^{-1}[\hat{y}_2(n)] = y_1(n) \diamond y_2(n) \quad (3.9)$$

e

$$T_{\diamond}^{-1}[c\hat{y}_1(n)] = c \nabla T_{\diamond}^{-1}[\hat{y}_1(n)] = c \nabla y_1(n). \quad (3.10)$$

3.1.3 – Análise Homomórfica de Sinais

Uma vez fixado o sistema T_{\oplus} pelas operações \oplus e \diamond , o mesmo é característico da classe e é, então, chamado de sistema característico para a operação \oplus . Similarmente, T_{\diamond} é o sistema característico para a operação \diamond . Portanto, é claro que todos os sistemas homomórficos com as mesmas operações de entrada e saída diferem somente na parte linear. Este resultado é de fundamental importância, porque implica que, uma vez determinados os sistemas característicos para a classe, ficamos com um problema de filtragem linear. Por exemplo, se desejamos recuperar $x_1(n)$ do sinal

$$x(n) = x_1(n) \oplus x_2(n), \quad (3.11)$$

devemos escolher o sistema linear, tal que sua saída, $\hat{y}(n)$, seja

$$\hat{y}(n) = L[\hat{x}(n)] = \hat{x}_1(n). \quad (3.12)$$

Então, com $T_{\diamond} = T_{\oplus}$,

$$y(n) = T_{\oplus}^{-1}[\hat{x}_1(n)] = x_1(n). \quad (3.13)$$

Portanto, para realizarmos a perfeita separação de $x_1(n)$ e $x_2(n)$, devemos ser capazes de separar $\hat{x}_1(n)$ e $\hat{x}_2(n)$, usando um filtro linear. Como melhor podemos aproximar esta situação ideal, depende da operação \oplus e das propriedades dos sinais $x_1(n)$ e $x_2(n)$.

3.2 - SISTEMAS HOMOMÓRFICOS PARA CONVOLUÇÃO

Uma importante classe de técnicas de análise sísmica é baseada na representação de um sinal sísmico como uma convolução entre componentes. Um método comum para a separação dos componentes de tais sinais, é a filtragem linear inversa. Infelizmente, visto que sistemas lineares não são combinados com a estrutura das combinações convolucionais, a filtragem inversa requer conhecimento detalhado de um dos componentes do sinal. Como uma alternativa, podemos considerar uma classe de sistemas homomórficos que obedecem um princípio generalizado da superposição para convolução. Qualquer sistema não linear T que satisfaz a propriedade da superposição convolucional é chamado de sistema homomórfico para convolução.

3.2.1 – Sistema Característico

Consideremos sequências combinadas através da convolução

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(k)x_2(n-k) = x_1(n) * x_2(n) . \quad (3.14)$$

Facilmente podemos observar que a operação de convolução satisfaz os postulados algébricos para adição vetorial e, conseqüentemente, é permissível a escolha para uma classe de sistemas homomórficos. Multiplicação escalar por um inteiro c , corresponde à convolução repetida de $x(n)$ com ela própria, c vezes, e a multiplicação escalar, quando c não é um inteiro, é uma generalização disso.

A forma canônica para sistemas homomórficos para convolução é ilustrada na Figura (3.3). O sistema característico, T_* , tem a propriedade

$$T_*[x_1(n) * x_2(n)] = T_*[x_1(n)] + T_*[x_2(n)] = \hat{x}_1(n) + \hat{x}_2(n) \quad (3.15)$$

e

$$T_*[c \otimes x_1(n)] = c T_*[x_1(n)] = c \hat{x}_1(n) . \quad (3.16)$$

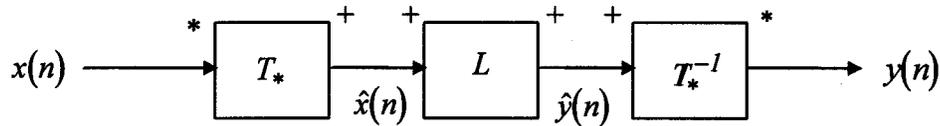


Figura 3.3 - Representação canônica de sistemas homomórficos para convolução.

O sistema L é um sistema linear, e T_*^{-1} é o inverso de T_* . Então, se podemos determinar o sistema T_* , temos uma representação de todos os sistemas que obedecem a um princípio generalizado da superposição para convolução.

A chave para a representação matemática do sistema característico T_* é baseada no fato de que a transformada- Z de uma convolução de duas sequências é igual ao produto das transformadas- Z de cada uma das sequências. Assim, considerando a equação (3.14), temos que

$$X(z) = X_1(z)X_2(z). \quad (3.17)$$

Isto é, a operação transformada- Z pode ser vista como uma transformação homomórfica, com a convolução como operação de entrada, e a multiplicação como operação de saída, como ilustrado na Figura (3.4).

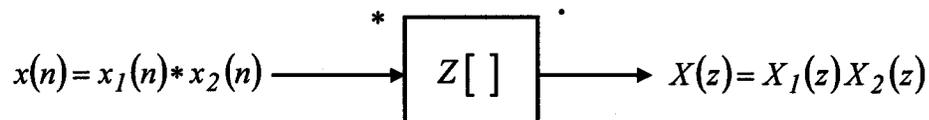


Figura 3.4 - Representação da transformação- Z como uma transformação homomórfica, com a convolução como operação de entrada e a multiplicação como operação de saída.

Usando a transformação- Z , combinações convolucionais podem ser transformadas em combinações multiplicativas, que podem ser, então, processadas por um sistema homomórfico multiplicativo. Se representamos sinais por suas transformadas- Z , o sistema canônico da Figura (3.3) pode ser substituído pelo apresentado na Figura (3.5). Uma vez que a função $X(z)$ é normalmente complexa, o logaritmo complexo deve ser empregado. Quando sinais são representados como sequências, em vez de por suas transformadas- Z , podemos representar

formalmente o sistema característico T_* , como uma cascata de três sistemas homomórficos, com operações de interface compatíveis, como ilustrado na Figura (3.6), onde Z^{-1} é a transformada- Z inversa. Por outro lado, transformadas- Z são transformações lineares no sentido convencional, bem como transformações homomórficas entre espaços vetoriais convolucionais e multiplicativos.

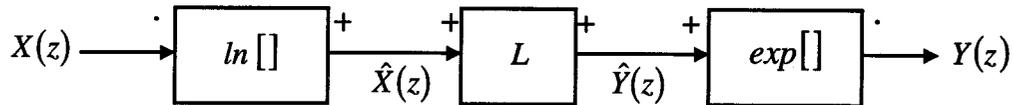


Figura 3.5 - Representação do sistema característico logaritmo complexo.

Existem algumas considerações importantes implícitas na representação do sistema característico T_* , como representado na Figura (3.6). Primeiro, o logaritmo complexo, $\ln[X(z)]$, deve ser definido univocamente, assim, considerando a equação (3.17), temos

$$\hat{X}(z) = \ln[X(z)] = \ln[X_1(z)X_2(z)] = \ln[X_1(z)] + \ln[X_2(z)]. \quad (3.18)$$

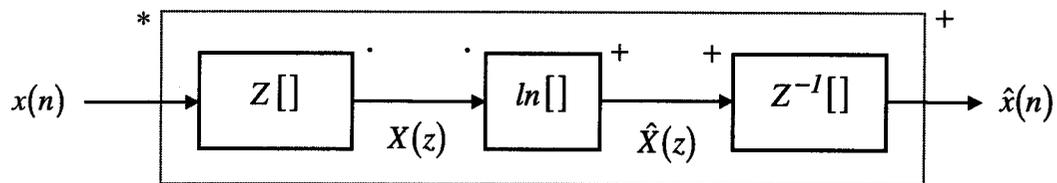


Figura 3.6 - Representação do sistema característico para convolução T_* .

Segundo, $\hat{X}(z)$ deve ser uma transformada- Z válida. Terceiro, a fim de que $\hat{x}(n)$ seja definida univocamente, devemos escolher primeiramente, uma região de convergência para $\hat{X}(z) = \ln[X(z)]$. Admitimos que $x(n)$ e $\hat{x}(n)$ são sequências reais e estáveis, portanto, as regiões de convergência, tanto de $X(z)$ como de $\hat{X}(z)$ devem incluir o círculo unitário.

Se $\hat{X}(z) = \ln[X(z)]$ é uma transformada-Z bilateral, então, ela tem uma expressão em série de Laurent, dada por

$$\hat{X}(z) = \ln[X(z)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{x}(n) z^{-n}, \quad (3.19)$$

com uma região de convergência que inclui o círculo unitário. Isto é, $\hat{X}(z)$ deve ser analítica em uma região que inclui o círculo unitário.

Expressando $\hat{X}(z)$ no círculo unitário como

$$\hat{X}(e^{i\omega}) = \hat{X}_R(e^{i\omega}) + i \hat{X}_I(e^{i\omega}), \quad (3.20)$$

e desde que $\hat{x}(n)$ seja real, $\hat{X}_R(e^{i\omega})$ deve ser uma função par em ω , e $\hat{X}_I(e^{i\omega})$ deve ser uma função ímpar em ω . Adicionalmente, $\hat{X}(e^{i\omega})$ deve ser uma função periódica em ω , com período 2π . A mais importante implicação da analiticidade de $\hat{X}(z)$ no círculo unitário é que $\hat{X}(e^{i\omega})$ deve ser uma função contínua em ω . Sendo

$$X(e^{i\omega}) = |X(e^{i\omega})| e^{i \arg[X(e^{i\omega})]}, \quad (3.21)$$

então

$$\hat{X}(e^{i\omega}) = \ln |X(e^{i\omega})| + i \arg[X(e^{i\omega})]. \quad (3.22)$$

Isto implica que

$$\hat{X}_R(e^{i\omega}) = \ln |X(e^{i\omega})| \quad (3.23)$$

e que

$$\hat{X}_I(e^{i\omega}) = \arg[X(e^{i\omega})], \quad (3.24)$$

devem ser funções contínuas em ω . Desde que $X(z)$ não tenha zeros no círculo unitário, a continuidade de $\hat{X}_R(e^{i\omega})$ é garantida pelo fato que $X(e^{i\omega})$ seja analítica no círculo unitário. No entanto, a continuidade de $\hat{X}_I(e^{i\omega})$ depende da definição do logaritmo complexo. Então, a

condição de que $\hat{X}(z)$ seja uma transformada-Z válida, e a remoção da ambiguidade do logaritmo complexo, estão interrelacionadas

Visto que a fase de um número complexo é uma função plurívoca, a continuidade de $\arg\left[X\left(e^{i\omega}\right)\right]$ não depende somente das propriedades específicas de $x(n)$, mas também da definição do logaritmo complexo.

Uma forma de sua definição é considerarmos que o logaritmo complexo contínuo seja obtido pela integração de sua derivada. Admitindo um logaritmo complexo simplesmente diferenciável, temos que

$$\frac{d}{dz} \ln[X(z)] = \frac{d\hat{X}(z)}{dz} = \frac{1}{X(z)} \frac{dX(z)}{dz}. \quad (3.25)$$

Avaliando esta derivada logarítmica no círculo unitário, obtemos

$$\hat{X}'\left(e^{i\omega}\right) = \frac{X'\left(e^{i\omega}\right)}{X\left(e^{i\omega}\right)} = \hat{X}'_R\left(e^{i\omega}\right) + i\left[\hat{X}'_I\left(e^{i\omega}\right)\right], \quad (3.26)$$

onde o apóstrofo denota diferenciação em relação a ω . A partir desta expressão, temos que

$$\frac{d\hat{X}'_I\left(e^{i\omega}\right)}{d\omega} = \frac{X_R\left(e^{i\omega}\right)X'_I\left(e^{i\omega}\right) - X_I\left(e^{i\omega}\right)X'_R\left(e^{i\omega}\right)}{X_R^2\left(e^{i\omega}\right) + X_I^2\left(e^{i\omega}\right)}. \quad (3.27)$$

A definição da função fase por integração de sua derivada é única, para uma constante de integração. Esta constante deve ser determinada, de acordo com a necessidade de que o logaritmo faça um mapeamento homomórfico entre a multiplicação e a adição, como representado na Figura (3.6). Portanto, devemos ter

$$\arg\left[X_1\left(e^{i\omega}\right)X_2\left(e^{i\omega}\right)\right] = \arg\left[X_1\left(e^{i\omega}\right)\right] + \arg\left[X_2\left(e^{i\omega}\right)\right], \quad (3.28)$$

o que, para uma sequência real $x(n)$, pode somente ser satisfeito se a constante de integração for escolhida de tal forma que, integrando a equação (3.27) com respeito a ω , podemos aplicar a condição

$$\arg \left[X(e^{i\omega}) \right]_{\omega=0} = 0, \quad (3.29)$$

para garantir que $\arg \left[X(e^{i\omega}) \right]$ seja uma função ímpar e contínua em ω .

Deste modo, usando a transformada- Z bilateral, temos que

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} \quad (3.30)$$

e

$$\hat{x}(n) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \hat{X}(z) z^{n-1} dz, \quad (n=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots) \quad (3.31)$$

Onde C denota um contorno fechado, no sentido horário, que envolve a origem, na região de convergência de $\hat{X}(z)$.

3.2.2 - Sistema Característico Inverso

A representação matemática do sistema característico inverso T_*^{-1} resulta simplesmente a partir da representação de T_* , e está ilustrado na Figura (3.7).

Temos por definição que

$$T_*^{-1}[T_*[x(n)]] = x(n). \quad (3.32)$$

A transformação realizada pelo sistema homomórfico T_*^{-1} é de um espaço aditivo para um espaço convolucional.

A partir de que $x(n)$ e $\hat{x}(n)$ são consideradas como estáveis, então, ambas $y(n)$ e $\hat{y}(n)$, são também sequências estáveis. Portanto, as regiões de convergência de $Y(z)$ e $\hat{Y}(z)$, devem incluir o círculo unitário. Assim,

$$y(n) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C Y(z) z^{n-1} dz, \quad (3.33)$$

onde C é o círculo unitário, e

$$Y(z) = \exp[\hat{Y}(z)]. \quad (3.34)$$

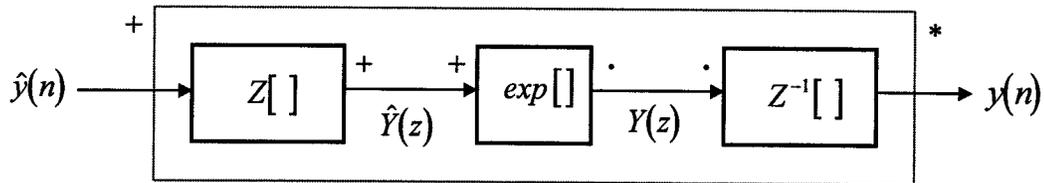


Figura 3.7 - Representação do sistema característico inverso T_*^{-1} .

Como a função exponencial complexa não tem problemas de unicidade, e se $\hat{Y}(z)$ é analítica no círculo unitário, então assim o é $\exp[\hat{Y}(z)]$.

3.2.3 – Sistema Linear

Dadas as representações matemáticas para os sistemas característico T_* e seu inverso T_*^{-1} , o que resta para ser especificado no sistema canônico da Figura (3.3) é o sistema linear, L . Teoricamente, qualquer sistema que obedece a superposição para adição, pode ser usado naquele sistema canônico. Entretanto, na prática, encontramos que uma classe particular de sistemas lineares é mais utilizada.

Relembramos na Figura (3.5) que se sinais são representados por suas transformadas- Z , então podemos imaginar um sistema linear operando no logaritmo complexo da transformada- Z . Isto é, embora sistemas lineares invariantes no tempo possam teoricamente ser usados, é de particular interesse considerarmos a classe de sistemas lineares invariantes na frequência, para os quais

$$\hat{Y}(e^{i\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \hat{X}(e^{i\theta}) L(e^{i(\omega-\theta)}) d\theta. \quad (3.35)$$

Para tal sistema, a transformada de Fourier de saída é obtida a partir do logaritmo complexo $\hat{X}(e^{i\omega}) = \ln[X(e^{i\omega})]$, por uma convolução periódica variável continuamente. Alternativamente, esse sistema tem uma representação no domínio do tempo como

$$\hat{y}(n) = l(n)\hat{x}(n), \quad (3.36)$$

onde $l(n)$ é a transformada inversa de $L(e^{i\omega})$. Desde que $x(n)$, $\hat{x}(n)$, $y(n)$ e $\hat{y}(n)$ sejam todas consideradas como sequências reais e estáveis, segue que $l(n)$ deve ser real, e em geral, deve ser também estável. Isto implica que $L(z)$, a transformada-Z de $l(n)$, tem uma região de convergência, que inclui o círculo unitário, e que as partes real e imaginária de $L(e^{i\omega})$ são funções par e ímpar de ω , respectivamente.

3.2.4 - Cepstro Complexo

A saída $\hat{x}(n)$ do sistema T_* é denominada de *cepstro complexo* da entrada $x(n)$. A palavra cepstro foi introduzida no trabalho de Bogert et al. (1963) para a detecção de ecos, onde a parte real do logaritmo do espectro de amplitude do sinal foi denominada como cepstro por paráfrase direta da palavra espectro. O conceito de cepstro estava direcionado para a detecção de ecos em vez de deconvolução, assim, a retenção na informação de fase não era importante. Desta forma, este não utiliza informação de fase e envolve o logaritmo de valores reais e positivos. Por outro lado, a saída do sistema T_* é referido como cepstro complexo, pelo fato de requerer o uso do logaritmo complexo. O termo complexo foi adicionado por Oppenheim et al. (1968) para enfatizar quando o cepstro é computado, utilizando tanto as informações de amplitude como de fase contidas em $x(n)$. É importante dizer, entretanto, que o cepstro complexo de uma sequência real é também uma sequência real.

Definindo as componentes par e ímpar do cepstro complexo $\hat{x}_p(n)$ e $\hat{x}_i(n)$, como

$$\hat{x}(n) = \hat{x}_p(n) + \hat{x}_i(n), \quad (3.37)$$

onde

$$\hat{x}_p(n) = \frac{\hat{x}(n) + \hat{x}(-n)}{2} = \hat{x}_p(-n), \quad (3.38)$$

e

$$\hat{x}_i(n) = \frac{\hat{x}(n) - \hat{x}(-n)}{2} = -\hat{x}_i(-n), \quad (3.39)$$

temos que

$$\hat{x}_p(n) = \frac{1}{2} F^{-1} \left\{ \ln \left| X(e^{i\omega}) \right|^2 \right\}, \quad (3.40)$$

e

$$\hat{x}_i(n) = F^{-1} \left\{ \arg \left[X(e^{i\omega}) \right] \right\}. \quad (3.41)$$

O cepstro, como definido por Bogert et al. (1962), é proporcional à parte par do cepstro complexo. A sequência $\hat{x}_p(n)$ é também referenciada como cepstro real. As sequências $\hat{x}_p^2(n)$ e $\hat{x}_i^2(n)$ têm sido referidas na literatura como cepstro de amplitude e cepstro de fase, respectivamente.

3.2.5 – Propriedades do Cepstro Complexo

Para realizarmos uma deconvolução usando filtragem homomórfica, devemos fazer uma escolha apropriada para o sistema linear L . Pelo fato de que o cepstro complexo de uma convolução de dois ou mais sinais é a soma dos seus cepstros complexos individuais, a escolha do sistema linear está intimamente ligada às características específicas de cada componente do sinal no domínio cepstral.

A fim de vermos como podemos empregar sistemas homomórficos convolucionais, devemos considerar as propriedades do cepstro complexo, ou, equivalentemente, $\ln \left[X(e^{i\omega}) \right]$, para uma classe útil de sinais de entrada, a classe de sequências exponenciais.

A classe de sequências que possui transformadas- Z racionais, é afortunadamente útil e sensível para analisar. Por essa razão, consideramos sequências de entrada $x(n)$, cujas transformadas- Z são representáveis pela forma geral (Oppenheim & Schaffer, 1975):

$$X(z) = A z^r \frac{\prod_{k=1}^{m_i} (1 - a_k z^{-1}) \prod_{k=1}^{m_o} (1 - b_k z)}{\prod_{k=1}^{p_i} (1 - c_k z^{-1}) \prod_{k=1}^{p_o} (1 - d_k z)}, \quad (3.42)$$

onde $|a_k|$, $|b_k|$, $|c_k|$ e $|d_k|$ são todos menores do que a unidade, tal que fatores da forma $(1 - a_k z^{-1})$ e $(1 - c_k z^{-1})$, correspondem aos m_i zeros e p_i pólos dentro do círculo unitário, e os fatores $(1 - b_k z)$ e $(1 - d_k z)$, correspondem aos m_o zeros e p_o pólos fora daquele círculo. A sequência $x(n)$ é portanto, em geral, de fase-mista (Tribolet, 1979). Tais transformadas-Z são características de sequências compostas de uma soma de sequências exponenciais. No caso especial, quando não existem pólos, ou seja, o denominador da equação (3.42) é unitário, essa equação corresponde a uma sequência de comprimento finito.

É útil associar todos os pólos e zeros dentro do círculo unitário em um único fator. Definindo especificamente para uma sequência de fase-mínima, $x_{min}(n)$, ou seja, que não possui zeros ou pólos fora do círculo unitário, ($m_o = p_o = 0$), cuja transformada-Z é:

$$X_{min}(z) = \frac{\prod_{k=1}^{m_i} (1 - a_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^{p_i} (1 - c_k z^{-1})}, \quad (3.43)$$

Similarmente, definimos uma sequência de fase-máxima, $x_{max}(n)$, que não possui zeros ou pólos dentro do círculo unitário, ($m_i = p_i = 0$), cuja transformada-Z é:

$$X_{max}(z) = \frac{\prod_{k=1}^{m_o} (1 - b_k z)}{\prod_{k=1}^{p_o} (1 - d_k z)}, \quad (3.44)$$

Desta forma, a sequência $x(n)$ satisfaz a relação

$$x(n) = A z^r [x_{min}(n) * x_{max}(n)], \quad (3.45)$$

onde $x_{min}(n)=0$, para $n<0$ (componente causal), e $x_{max}(n)=0$, para $n>0$ (componente anti-causal). Temos assim que

$$X(z) = A z^r X_{min}(z) X_{max}(z), \quad (3.46)$$

e segue que

$$\hat{X}(z) = \ln[A z^r] + \ln[X_{min}(z)] + \ln[X_{max}(z)]. \quad (3.47)$$

Consequentemente,

$$\hat{x}(n) = \ln[A z^r] \delta(n) + \hat{x}_{min}(n) + \hat{x}_{max}(n), \quad (3.48)$$

Se $\ln[X(z)]$ é computado como considerado na seção anterior, podemos formalmente escrever que:

$$\begin{aligned} \hat{X}(z) = & \ln(A) + \ln(z^r) + \sum_{k=1}^{m_i} \ln(1 - a_k z^{-1}) + \sum_{k=1}^{m_o} \ln(1 - b_k z) \\ & - \sum_{k=1}^{p_i} \ln(1 - c_k z^{-1}) - \sum_{k=1}^{p_o} \ln(1 - d_k z). \end{aligned} \quad (3.49)$$

Se consideramos cada termo na equação (3.49) como uma transformada-Z, então, as propriedades de $\hat{x}(n)$ dependerão das propriedades compostas das transformadas inversas de cada termo.

Para seqüências reais, A é real, e se A é positivo, o primeiro termo, $\ln(A)$, simplesmente contribui para $\hat{x}(0)$. Especificamente,

$$\hat{x}(0) = \ln|A|. \quad (3.50)$$

Se A é negativo, é mais difícil determinarmos a contribuição para o cepstro complexo, devido ao termo $\ln|A|$. Similarmente, o termo z^r , corresponde somente ao retardo ou avanço da seqüência $x(n)$. Se $r=0$, este termo desaparece da equação (3.43). Entretanto, se $r \neq 0$, existirá uma contribuição não nula para o cepstro complexo. Embora os casos de A negativo e/ou $r \neq 0$ possam ser formalmente acomodados, fazer assim não oferece nenhuma vantagem real, porque se duas transformadas da forma da equação (3.42) são multiplicadas, não podemos esperar ser capazes de determinar quanto A ou r contribuem para cada componente. Assim, na prática, esta

questão é evitada medindo o sinal algébrico de A e o valor de r , e então alterando a entrada de tal forma que sua transformada- Z é da forma (Oppenheim & Schaffer, 1975)

$$X(z) = |A| \frac{\prod_{k=1}^{m_i} (1 - a_k z^{-1}) \prod_{k=1}^{m_o} (1 - b_k z)}{\prod_{k=1}^{p_i} (1 - c_k z^{-1}) \prod_{k=1}^{p_o} (1 - d_k z)}. \quad (3.51)$$

Da mesma maneira, a equação (3.49) se torna

$$\begin{aligned} \hat{X}(z) = \ln|A| + \sum_{k=1}^{m_i} \ln(1 - a_k z^{-1}) + \sum_{k=1}^{m_o} \ln(1 - b_k z) \\ - \sum_{k=1}^{p_i} \ln(1 - c_k z^{-1}) - \sum_{k=1}^{p_o} \ln(1 - d_k z). \end{aligned} \quad (3.52)$$

Com a exceção do termo $\ln|A|$, que já foi analisado, todos os termos na equação (3.46) são da forma $\ln(1 - \alpha z^{-1})$ e $\ln(1 - \beta z)$. Levando em conta que estes fatores representam transformadas- Z , com regiões de convergência que incluem o círculo unitário, podemos fazer as expansões em séries de potência:

$$\ln(1 - \alpha z^{-1}) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n} z^{-n}, \quad (|z| > |\alpha|), \quad (3.53)$$

e

$$\ln(1 - \beta z) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta^n}{n} z^n, \quad (|z| < |\beta^{-1}|). \quad (3.54)$$

Usando estas expressões, é claro que para entradas com transformadas- Z racionais, como na equação (3.51), $\hat{x}(n)$ tem a forma geral

$$\hat{x}(n) = \ln|A|, \quad (n = 0), \quad (3.55)$$

$$= - \sum_{k=1}^{m_i} \frac{a_k^n}{n} + \sum_{k=1}^{p_i} \frac{c_k^n}{n}, \quad (n > 0), \quad (3.56)$$

$$= \sum_{k=1}^{m_o} \frac{b_k^{-n}}{n} - \sum_{k=1}^{p_o} \frac{d_k^{-n}}{n}, \quad (n < 0). \quad (3.57)$$

Notamos que para o caso especial de seqüências de comprimento finito, ($p_i = p_o = 0$), o segundo termo estaria ausente em cada uma das equações (3.56) e (3.57). Das equações acima, (3.55), (3.56) e (3.57), observamos as seguintes propriedades do cepstro complexo descritas a seguir (Tribolet, 1979).

Propriedade (1)

O cepstro complexo decai, no mínimo, tão rápido quanto $1/n$, como indicado pelo denominador das equações. Especificamente

$$|\hat{x}(n)| < c \left| \frac{\alpha^n}{n} \right|, \quad (-\infty < n < \infty), \quad (3.58)$$

onde c é uma constante e α é igual ao máximo de $|a_k|$, $|b_k|$, $|c_k|$ e $|d_k|$.

Propriedade (2)

O cepstro complexo de uma seqüência de duração finita, ou seja, quando não existem pólos, ($p_i = p_o = 0$), jamais terá duração infinita.

Propriedade (3)

O cepstro complexo de uma seqüência de fase-mínima, ou seja, que não possui zeros ou pólos fora do círculo unitário, ($m_o = p_o = 0$), eliminando os termos da expressão (3.57), é causal. Então,

$$\hat{x}(n) = 0, \quad (n < 0). \quad (3.59)$$

Propriedade (4)

O cepstro complexo de uma seqüência de fase-máxima, isto é, que não possui zeros ou pólos dentro do círculo unitário, ($m_i = p_i = 0$), anulando os termos da expressão (3.56), é anti-causal. Assim,

$$\hat{x}(n) = 0, \quad (n > 0). \quad (3.60)$$

Propriedade (5)

O cepstro complexo $\hat{w}(n)$, de um pulso $w(n)$ cujo espectro é suave, tende a ficar concentrado ao redor de baixos valores de tempo. Esta propriedade decorre do fato de que uma sequência $w(n)$ com um espectro suave $|W(e^{i\omega})|^2$ é compelido a ter pólos e zeros relativamente de banda larga. Em termos da primeira propriedade, isto significa que $|\alpha^n/n|$ decai muito rapidamente em relação a n .

Propriedade (6)

Definindo em geral, uma sequência de impulsos periódicos, $h(n)$, com período $T > 1$, para os quais os tempos entre chegadas são múltiplos de T , tal que

$$n_k = n_{k-1} + l_k T, \quad (k=2, \dots, M, \forall l_k > 0). \quad (3.61)$$

Portanto, o cepstro complexo $\hat{h}(n)$, de uma sequência de impulsos periódicos $h(n)$, é também uma sequência de impulsos periódicos, com o mesmo período, que é

$$\hat{h}(k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{h}(n) \delta(n - kT). \quad (3.62)$$

Notamos que o resultado acima, em geral, não sofre influência dos valores das amplitudes dos impulsos, h_k . Por conseguinte, o cepstro complexo de uma sequência de impulsos não periódicos, ou seja, uma sequência de impulsos para os quais os tempos entre chegada não são mensurados, ($T=1$), será em geral, não nulo para todos os tempos.

Em várias situações físicas, as amplitudes da sequência de impulsos $h(n)$, obedecem certas leis determinísticas ou probabilísticas. Frequentemente é possível deduzir, *a priori*, o fato de que uma sequência de impulsos seja de fase-mínima. Usando a relação recursiva para sequências de fase-mínima (Propriedade 4), o seguinte pode ser mostrado.

Propriedade (7)

Consideremos uma sequência de impulsos de fase-mínima $h(n)$, para a qual o primeiro tempo de chegada é N , tal que

$$n_2 - n_1 = N, \quad (n_k \text{ arbitrário, } k > 2). \quad (3.67)$$

Então, o cepstro complexo é nulo, para $0 < n < N$. Em geral, $\hat{h}(n)$ é não nulo, somente nos instantes $0, n_2 - n_1, n_3 - n_1, \dots, n_M - n_1$, bem como em todas as combinações lineares positivas destes instantes. Podemos derivar uma propriedade semelhante para sequências de fase-máxima.

Propriedade (8)

Consideremos uma sequência de impulsos de fase-máxima $h(n)$, para a qual o último tempo de chegada é N , de forma que

$$n_M - n_{M-1} = N, \quad (n_k \text{ arbitrário, } k < M - 1). \quad (3.64)$$

Então, o cepstro complexo é nulo, para $-N < n < 0$. Em geral, $\hat{h}(n)$ é não nulo, somente nos instantes $0, -(n_M - n_{M-1}), -(n_M - n_{M-2}), \dots, -(n_M - n_1)$, bem como em todas as combinações lineares positivas destes instantes.

As propriedades 6, 7 e 8 são extremamente úteis em várias aplicações, de vez que elas nos permitem prever as características cepstrais de uma grande classe de sequências de impulsos, dada uma quantidade mínima de conhecimento da estrutura temporal correspondente.

A única classe que resta para ser discutida é a classe de sequências de impulsos não periódicos de fase-mista. Neste caso, as relações implícitas nas equações não fornecem ajuda para estabelecer relações entre as estruturas temporal e cepstral.

Através de um grande número de experimentos relatados na literatura, duas descobertas foram observadas repetidamente. A primeira é que a estrutura cepstral de uma sequência de impulsos pode ser muito sensível a pequenas mudanças nas amplitudes dos impulsos. A segunda é que os cepstros de sequências de impulsos de fase-mista frequentemente exibem uma estrutura bastante elaborada, apresentando componentes para baixos e altos valores de n , ($-\infty < n < \infty$), fazendo com que os componentes da convolução não mais se encontrem separados, o que, dentro dos limites impostos por nosso presente entendimento do mapeamento cepstral, não oferece vestígios com respeito à estrutura temporal correspondente, e vice-versa.

3.2.6 - Análise Homomórfica de Sinais

A análise da convolução de duas sequências através de um sistema homomórfico para convolução, depende exclusivamente da habilidade em desenharmos um operador linear no domínio cepstral capaz de recuperar o cepstro de cada componente a partir da sua adição. Tal sistema linear deve ser desenhado na prática com pequeno conhecimento detalhado da estrutura no domínio do tempo das componentes do sinal.

Como comentário geral, podemos dizer que os sinais para os quais a análise homomórfica tem sido útil são aqueles cujo cepstro complexo dos componentes do sinal se separam. Um exemplo claro disto é a análise de um sinal em seus componentes de fase-mínima e fase-máxima. Portanto, o tipo de sistemas lineares que têm sido úteis na separação do cepstro complexo das componentes convolvidas são os sistemas invariantes na frequência, apresentados na seção (3.2.3), sob a forma

$$\hat{y}(n) = L[x(n)] = l(n) \hat{x}(n), \quad (3.65)$$

os quais, essencialmente, reduzem a zero os intervalos no domínio cepstral, que são imaginados estarem associados com os componentes indesejados do sinal. Estes sistemas, são comumente referenciados como *janelas cepstrais*. Tal classe de sistemas encontra-se ilustrado na Figura (3.8).

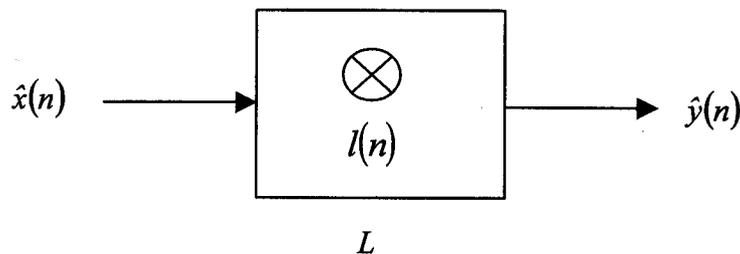


Figura (3.8) – Operadores lineares no domínio cepstral.

Em geral, o uso de diferentes tipos de sistemas lineares, no domínio cepstral é, claramente, teoricamente possível. Entretanto, dentro da estrutura da deconvolução por filtragem homomórfica, a classe de filtros lineares ilustrados na Figura (3.8) tem sido a única útil para ser utilizada. Uma variedade de tipos básicos de janelas tem sido incorporada em filtros homomórficos, dependendo da estrutura cepstral das componentes do sinal.

Na deconvolução homomórfica, temos como objetivo a filtragem de um sinal composto através de um sistema homomórfico, a fim de recuperar um de seus componentes como saída. Para isto, envolvemos duas considerações básicas. A primeira é que os componentes do sinal ocupam intervalos separados no domínio cepstral. Esta consideração é válida para uma classe grande de modelos de sinais, onde um dos componentes é um pulso com espectro suave e o outro é uma sequência de impulsos periódicos, ou de fase-mínima, ou de fase-máxima. Esta consideração, em geral, não tem validade quando um dos componentes é uma sequência de impulsos de fase misturada.

A segunda consideração envolve o desenho da janela cepstral. Esta, normalmente, requer simplesmente a estimativa de uns poucos parâmetros, tais como o período de uma sequência de impulsos periódicos, ou o primeiro tempo de chegada de uma sequência de fase-mínima. Esta estimativa pode, frequentemente, ser feita tanto através de considerações físicas, como por estimativa direta no domínio cepstral. Sob esta ótica, comparamos favoravelmente a deconvolução homomórfica com métodos de filtragem linear inversa, visto que a mesma não requer conhecimento de um dos componentes do sinal.

3.2.7 – Ponderação Exponencial

A estrutura do cepstro complexo, para algumas aplicações, é tal que, os cepstros complexos das componentes do sinal tendem a ocupar intervalos separados. Entretanto, para uma sequência de impulsos de fase-mista este fato não é verdadeiro, e apresentam uma estrutura complicada, tornando necessária a prática de ponderar exponencialmente os dados, a fim de garantir uma estrutura tão simples e predizível quanto possível, contribuindo assim para a separação das componentes do sinal no domínio cepstral

Não temos permitido zeros ou pólos no círculo unitário. Tanto do ponto de vista teórico e computacional, existem boas razões para isto. Na representação matemática do sistema característico, escolhemos como contorno de integração o círculo unitário. Se $X(z)$ tem um pólo ou zero no círculo unitário não podemos associar uma região de convergência que inclua o círculo unitário com $\ln[X(z)]$. Preferimos evitar esta dificuldade a mais, se possível. Formalmente, isto pode ser evitado, usando um contorno C diferente para a computação de

$\hat{x}(n)$, a partir de $\ln[X(z)]$. Equivalentemente, podemos multiplicar a sequência de entrada por uma sequência exponencial, como em

$$x_{pon} = \alpha^n x(n), \quad (3.66)$$

onde α é real e positivo. A sequência resultante tem uma transformada- Z

$$X_{pon}(z) = X(\alpha^{-1}z). \quad (3.67)$$

Então, os pólos e zeros de $X(z)$ são deslocados radialmente pelo fator α^{-1} . É importante notar que, se

$$x(n) = x_1(n) * x_2(n), \quad (3.68)$$

então,

$$X_{pon}(z) = X(\alpha^{-1}z) = X_1(\alpha^{-1}z) X_2(\alpha^{-1}z), \quad (3.69)$$

tal que

$$x_{pon}(n) = \alpha^n x_1(n) * \alpha^n x_2(n). \quad (3.70)$$

Ou seja, a ponderação exponencial de uma convolução fornece uma convolução de sequências ponderadas exponencialmente.

Adicionalmente ao fornecimento de meios para mover singularidades de $\ln[X(z)]$, para fora do círculo unitário, a ponderação exponencial é também uma técnica útil para converter um sinal de fase-mista, em um sinal de fase-mínima ou de fase-máxima.

Portanto, a escolha de um fator de ponderação exponencial α^n , suficientemente pequeno, de tal forma que todos os zeros que se localizam fora do círculo unitário, sejam movidos para o seu interior, converte uma sequência de fase-mista em fase-mínima, introduzindo assim, um grau de liberdade extra na análise homomórfica de sinais, em função de que a sequência de impulsos sendo de fase-mínima tem uma estrutura cepstral que pode ser facilmente determinada.

Esta técnica, primeiro sugerida por Schafer (1968), tem sido amplamente utilizada em deconvolução sísmica, e pode ser estendida para outros métodos com base nos resultados apresentados nesta forma de análise.

4 – IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

No capítulo anterior fornecemos várias representações matemáticas da transformação homomórfica T_* , as quais chamamos de sistema característico para convolução, e cujo objetivo é transformar uma combinação convolucional em uma combinação aditiva, de tal forma que a filtragem linear possa então ser aplicada. Implícita nessas representações está a consideração da unicidade e continuidade do logaritmo complexo, e em algumas dessas representações a transformada de Fourier é um componente básico. Se usamos estas representações matemáticas como base para as realizações computacionais do sistema T_* , então devemos lidar com os problemas da computação da transformada de Fourier e do logaritmo complexo.

Este capítulo se refere à implementação de sistemas homomórficos em um computador digital. Desde que computadores digitais realizam computações finitas, estamos limitados a sequências de entrada de comprimento finito, e podemos calcular as transformadas de Fourier somente em um número finito de pontos. Isto é, em vez de usarmos a transformada de Fourier (TF) devemos usar a transformada de Fourier discreta (TFD).

A principal etapa computacional em uma implementação de TFD de sistema homomórfico é a avaliação das amostras do logaritmo complexo contínuo. O problema recai na avaliação da fase contínua. Esta avaliação é comumente referida como restauração de fase.

4.1 – IMPLEMENTAÇÃO DA TRANSFORMADA DE FOURIER DISCRETA (TFD)

O sistema T_* é representado pelas equações:

$$X(e^{i\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-i\omega n}, \quad (4.1)$$

$$\hat{X}(e^{i\omega}) = \ln \left[X(e^{i\omega}) \right], \quad (4.2)$$

e

$$\hat{x}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \hat{X}(e^{i\omega}) e^{i\omega n} d\omega. \quad (4.3)$$

Uma vez que, na prática, estamos limitados a sequências de entrada de comprimento finito, devemos considerar que $x(n)$ existe no intervalo $0 \leq n \leq N-1$; então, considerando as grandes vantagens dos algoritmos, usamos a transformada de Fourier discreta. Assim, substituímos as equações acima, por:

$$X(k) = X\left(e^{i\omega}\right)\Big|_{\omega=(2\pi/N)k} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-i(2\pi/N)kn}, \quad (4.4)$$

$$\hat{X}(k) = \ln\left[X\left(e^{i\omega}\right)\right]\Big|_{\omega=(2\pi/N)k} = \ln[X(k)], \quad (4.5)$$

e

$$\hat{x}_M(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \hat{X}(k) e^{i(2\pi/N)kn}. \quad (4.6)$$

Pelo teorema da amostragem, $\hat{x}_M(n)$ está relacionado ao desejado $\hat{x}(n)$, por

$$\hat{x}_M(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{x}(n+kN), \quad (\forall N). \quad (4.7)$$

Uma vez que o cepstro complexo $\hat{x}(n)$, em geral, tem duração infinita, $\hat{x}_M(n)$ é uma versão com álias de $\hat{x}(n)$. Portanto, rescrevendo a equação (4.7), como

$$\hat{x}_M(n) = \hat{x}(n) + \hat{x}_a(n), \quad (|n| < N/2), \quad (4.8)$$

onde $\hat{x}_a(n)$ denota o componente de álias, no intervalo $|n| < N/2$, qual seja,

$$\hat{x}_a(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{x}(n+kN), \quad (|n| < N/2 \text{ e } k \neq 0). \quad (4.9)$$

Entretanto, observamos na 1ª propriedade do cepstro complexo que $\hat{x}(n)$ decai mais rapidamente do que uma sequência exponencial. Portanto, é esperado que o componente de álias, $\hat{x}_a(n)$, pode ser reduzido, estendendo os dados $x(n)$ com zeros antes da computação da TFD, a fim de aumentar o comprimento N , com o objetivo de que o logaritmo complexo seja amostrado em uma razão suficientemente alta, para que não ocorra álias severo, na computação do cepstro complexo. Isto corresponde a uma amostragem espectral mais fina em $\hat{X}(e^{i\omega})$.

A escolha do tamanho de uma dada transformada está associada, então, com o julgamento de quanto álias cepstral podemos tolerar. Como em todos os problemas envolvendo o fenômeno de álias, tal julgamento é muito dependente da aplicação.

A implementação da TFD do mapeamento cepstral inverso fornece

$$y_M(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} Y(k) e^{i(2\pi/N)kn}, \quad (4.10)$$

onde novamente $y_M(n)$ é uma versão com álias de $y(n)$, com período N , que pode corretamente representar $y(n)$, já que esta é uma sequência finita de comprimento não maior do que N .

4.2 – RESTAURAÇÃO DA FASE

A implementação da TFD discutida anteriormente, requer a avaliação de amostras do logaritmo complexo contínuo. Particularmente, necessitamos determinar amostras da função fase contínua.

Escrevendo as equações (4.4), (4.5), (4.6) e (4.7), admitimos que $\hat{X}(k)$ representa uma versão amostrada do logaritmo complexo contínuo. Então, devemos considerar meios para a computação de amostras de $\arg \left[X(e^{i\omega}) \right]$ a partir da TFD, $X(k)$. O $\arg [X(k)] = \theta_I(k)$ é o valor inicial como definido pela periodicidade da função *arctag* que limita a

$$-\frac{\pi}{2} \leq \theta_I(k) = \text{arctag} \left[\frac{\text{Re al}(k)}{\text{Im ag}(k)} \right] \leq \frac{\pi}{2}. \quad (4.11)$$

Um algoritmo simples é baseado na computação do valor principal, $\theta_P(k)$

$$-\pi < \text{ARG}[X(k)] = \theta_P(k) \leq \pi; \quad (4.12)$$

o que é feito usando rotinas de tangente padronizadas, realizadas na maioria dos computadores. Este valor principal amostrado da fase é então desdobrado para obter amostras da curva de fase suave. O desdobramento tem a finalidade de retirar os saltos $\pm \pi$ de $\theta_P(k)$.

$$\theta_L(k) = \theta_P(k) \pm 2\pi n, \quad (4.13)$$

através de algoritmos de busca (Poggiagliolmi et al., 1982).

Esta operação faz a inclusão de tendências lineares por parte. A próxima etapa é retirar a tendência linear média de $\theta_L(k)$. Após isto nova procura de saltos $\pm\pi$ é realizada, repetindo o ciclo, até não haver saltos de $\pm\pi$ e tendência linear. Outro método de restauração de fase é descrito na seção 3.2.1 (equação 3.27).

Consideremos uma sequência de entrada $x(n)$ de comprimento finito, cuja transformada de Fourier é

$$X(e^{i\omega}) = \sum_{n=0}^M x(n)e^{-i\omega n} = Ae^{-i\omega m_o} \prod_{k=1}^{m_i} (1 - a_k e^{-i\omega}) \prod_{k=1}^{m_o} (1 - b_k e^{i\omega}), \quad (4.14)$$

onde $|a_k|$ e $|b_k|$ são menores do que a unidade e $M = m_o + m_i$. Para obtermos as amostras da fase desejada, devemos somar um múltiplo inteiro apropriado de 2π às amostras do valor principal. O múltiplo apropriado de 2π pode ser determinado a partir do valor principal, $ARG[X(k)]$, se as amostras estão próximas o bastante, de tal forma que as descontinuidades possam ser detectadas. Se $arg\left[X(e^{i\omega})\right]$ varia rapidamente, podemos esperar que $\hat{x}(n)$ decaia menos rapidamente do que se estivesse variando vagarosamente. Portanto, se $arg\left[X(e^{i\omega})\right]$ varia rapidamente, requer amostragem mais fina para garantir a detecção das descontinuidades de $ARG\left[X(e^{i\omega})\right]$. Desta maneira, o desejo de minimizar o alíás é consistente com o sucesso computacional das amostras da curva de fase contínua. Quanto maior o valor de N melhor é a aproximação computacional. Esta não é geralmente uma limitação severa por causa da existência dos algoritmos de transformada rápida de Fourier (FFT).

Um comentário final sobre o cálculo do logaritmo complexo contínuo diz respeito ao sinal da constante A e à componente linear de fase. O sinal da constante A pode ser facilmente determinado, desde que é idêntico ao sinal de $X(k)$ em $k=0$. O valor de m_o pode ser determinado a partir do resultado de adicionar a correção ao $ARG[X(k)]$, pois a partir da equação (4.14), temos que

$$arg\left[X(e^{i\pi})\right] = -m_o\pi. \quad (4.15)$$

Esta componente linear de fase é subtraída da fase, e o sinal da constante A é feito positivo, antes da computação do cepstro complexo.

Como uma alternativa para a computação do logaritmo complexo, uma representação matemática, baseada na derivada logarítmica, pode ser demonstrada. Em termos da transformada de Fourier, esta representação é:

$$X(e^{i\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-i\omega n}, \quad (4.16)$$

$$X'(e^{i\omega}) = -i \sum_{n=-\infty}^{\infty} n x(n)e^{-i\omega n}, \quad (4.17)$$

$$\hat{x}(n) = \frac{-1}{2\pi ni} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{X'(e^{i\omega})}{X(e^{i\omega})} e^{i\omega n} d\omega, \quad (n \neq 0), \quad (4.18)$$

e

$$\hat{x}(0) = \frac{-1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln |X(e^{i\omega})| d\omega. \quad (4.19)$$

Para seqüências de comprimento finito e usando a TFD, em vez da transformada de Fourier, estas equações se tornam

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-i(2\pi/N)kn} = X(e^{i\omega}) \Big|_{\omega=2\pi k/N}, \quad (4.20)$$

$$X'(k) = -i \sum_{n=0}^{N-1} n x(n)e^{-i(2\pi/N)kn} = X'(e^{i\omega}) \Big|_{\omega=2\pi k/N}, \quad (4.21)$$

$$\hat{x}_{dp}(n) = -\frac{1}{inN} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{X'(k)}{X(k)} e^{i(2\pi/N)kn}, \quad (1 \leq n \leq N-1), \quad (4.22)$$

e

$$\hat{x}_{dp}(0) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \ln |X(k)|. \quad (4.23)$$

Onde o subscrito d se refere ao uso da derivada logarítmica, e o subscrito p antecipa a periodicidade inerente aos cálculos da TFD. Neste caso, evitamos os problemas na computação do logaritmo complexo às custas, de álias mais severo, desde que agora

$$\hat{x}_{dp}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (n + kN) \hat{x}(n + kN). \quad (4.24)$$

Portanto, considerando que a curva de fase amostrada é computada corretamente, devemos esperar que, para um dado valor de N , $\hat{x}_M(n)$ na equação (4.6) poderia ser uma aproximação melhor de $\hat{x}(n)$, do que seria $\hat{x}_{dp}(n)$ na equação (4.22).

Para sequências de comprimento finito, com transformada de Fourier, como na equação (4.1), podemos mostrar que

$$m_o = \frac{-1}{2\pi i} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{X'(e^{i\omega})}{X(e^{i\omega})} d\omega. \quad (4.25)$$

Avaliando esta expressão, através da TFD inversa, temos que

$$m_{op} = -\frac{1}{iN} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{X'(k)}{X(k)}. \quad (4.26)$$

A quantidade m_{op} , em geral, não é um inteiro; entretanto, para grandes valores de N esperamos que m_{op} se aproxime de m_o , que representa o número de zeros de $X(z)$ fora do círculo unitário.

4.3 – ALGORITMO DA FILTRAGEM HOMOMÓRFICA

O diagrama de blocos da filtragem homomórfica está ilustrado na Figura (4.1), e envolve as etapas descritas abaixo (Buttkus, 1975)

(1^a) A computação do espectro complexo $X(\omega)$ da série temporal $x(n)$, a qual é admitida como sendo dada pela seguinte integral convolucional:

$$x(n) = w(n) * h(n) = \int_{-\infty}^{\infty} w(\tau) h(n - \tau) d\tau, \quad (4.27)$$

dá a superposição do produto dos componentes simples $W(\omega)$ e $H(\omega)$ no domínio da frequência:

$$X(\omega) = W(\omega) H(\omega) = |X(\omega)| e^{i\theta(\omega)}. \quad (4.28)$$

(2^a) A determinação do logaritmo natural do espectro complexo fornece a superposição aditiva das partes individuais:

$$\hat{X}(\omega) = \ln[X(\omega)] = \ln[W(\omega)] + \ln[H(\omega)] = \ln|X(\omega)| + i\theta(\omega). \quad (4.29)$$

(3^a) O cálculo da transformada de Fourier inversa, F^{-1} , do logaritmo do espectro complexo dá o cepstro complexo da função, $\hat{x}(n)$, que é definido como a transformada de Fourier inversa do logaritmo da transformada de Fourier de $x(n)$:

$$\hat{x}(n) = F^{-1}\{\hat{X}(\omega)\} = \hat{w}(n) + \hat{h}(n). \quad (4.30)$$

Agora estamos novamente em um “domínio do tempo”, denominado de *domínio cepstral*, onde a soma das partes simples permanece em uma forma simplificada. As partes periódicas do espectro logarítmico complexo são reduzidas a impulsos, como pode ser visto no seguinte exemplo simples, o qual mostra a superposição de dois sinais, com um representando retardo no tempo:

$$x(n) = s(n) + a s(n - n_0), \quad (4.31)$$

onde a , é uma constante e n_0 o deslocamento.

Se $\delta(n)$ é a função delta de Dirac, se rescreve como

$$x(n) = s(n) * [\delta(n) + a \delta(n - n_0)]. \quad (4.32)$$

Calculando a transformada de Fourier de $x(n)$, temos que

$$X(\omega) = S(\omega) \left[1 + a e^{-i\omega n_0} \right]. \quad (4.33)$$

O espectro logarítmico complexo da sequência $x(n)$ é, portanto,

$$\hat{X}(\omega) = \ln[X(\omega)] = \ln[S(\omega)] + \ln\left(1 + a e^{-i\omega n_0}\right), \quad (4.34)$$

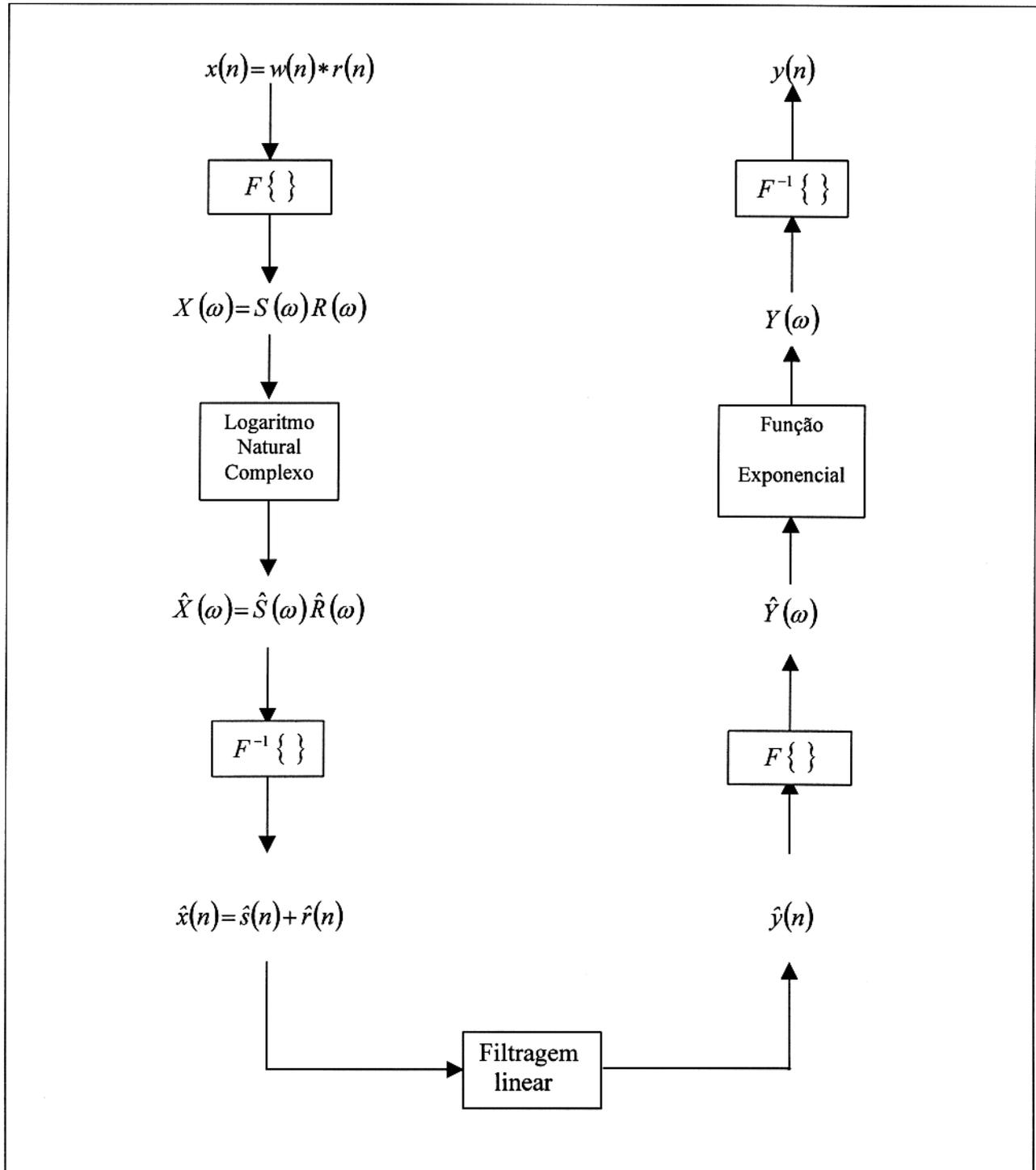


Figura (4.1) – Representação em diagrama de blocos do algoritmo da filtragem homomórfica usando a transformada de Fourier (TF).

com o cepstro complexo e a expansão do exponencial em série

$$\begin{aligned} \hat{x}(n) = F^{-1} \{ \hat{X}(\omega) \} = F^{-1} \{ \ln[S(\omega)] + a \delta(n - n_0) - \frac{a^2}{2} \delta(n - 2n_0) \pm \dots \\ \pm \frac{a^m}{m} \delta(n - mn_0) \pm \dots \} \end{aligned} \quad (4.35)$$

Como se pode ver, há uma distribuição de impulsos com a amplitude a^m/m .

O resultado das três primeiras etapas do algoritmo descritas acima é o cepstro complexo, onde as partes não desejadas devem ser suprimidas. Para o método homomórfico este é o processo de filtragem. O caminho inverso através daquelas três operações, como ilustrado no lado direito da Figura (4.1), fornece o resultado final do processo, na forma do traço filtrado $y(n)$, dado pelas seguintes expressões:

$$\hat{y}(n) = l(n) \hat{x}(n), \quad (4.36)$$

$$\hat{Y}(\omega) = F \{ \hat{y}(n) \}, \quad (4.37)$$

$$Y(\omega) = \exp[\hat{Y}(\omega)], \quad (4.38)$$

e

$$y(n) = F^{-1} \{ Y(\omega) \}. \quad (4.39)$$

4.4 – RESULTADOS OBTIDOS

A filtragem homomórfica é um processo determinístico, no sentido de que partes fixadas do cepstro complexo que estão relacionadas às componentes não desejados são eliminadas. O sucesso do método depende primeiramente da distância de separação dos componentes individuais no cepstro complexo. Isto significa para a sísmica de reflexão que, se modelamos um sismograma como a convolução do pulso-fonte com a função refletividade, o sucesso depende da distância entre os cepstros das duas componentes. Portanto, a aplicação do método é criticamente determinada pela capacidade do operador de separar as componentes a partir do cepstro do sismograma.

4.4.1 – O Modelo Geofísico

A fim de ilustrar as potencialidades e as limitações da análise homomórfica, mostramos na Figura (4.2) o pulso-fonte $w(n)$, representado por uma função Berlage (Aldridge,1990) e a resposta da Terra ao impulso $h(n)$ representada por uma sequência de oito impulsos, espaçados uniformemente contendo informação sobre a estrutura em subsuperfície e na Figura (4.3) o sismograma sintético $x(n)$, obtido através do modelo convolucional descrito pela expressão (4.27), com seus correspondentes espectros de amplitude e fase.

Como visto no capítulo anterior, o logaritmo complexo é uma função plurívoca, uma vez que a função fase calculada pelos algoritmos de transformada rápida de Fourier é uma função descontínua. Assim, a fim de que possamos alcançar a condição de que o sistema homomórfico T_* seja único, procedemos o desdobramento, ou restauração, da fase do sismograma, tornando-a contínua, seguida da retirada da tendência linear, como mostra também a Figura (4.3).

Na Figura (4.4) mostramos os cepstros do pulso-fonte, $\hat{w}(n)$, da função refletividade, $\hat{h}(n)$, e do sismograma sintético, $\hat{x}(n)$, nos quais podemos observar que a informação relacionada ao pulso-fonte é compactada na origem, ao redor de zero, enquanto que a contribuição referente à refletividade se dá para valores maiores de n se afastando da origem e estando bem separada da anterior. Para sinais sísmicos, considerados como sendo o resultado da convolução de um pulso-fonte com uma sequência de impulsos, esta observação é geralmente verdadeira. Assim, observamos a partir da Figura (4.4) que os componentes do sinal podem ser removidos simplesmente através da filtragem linear.

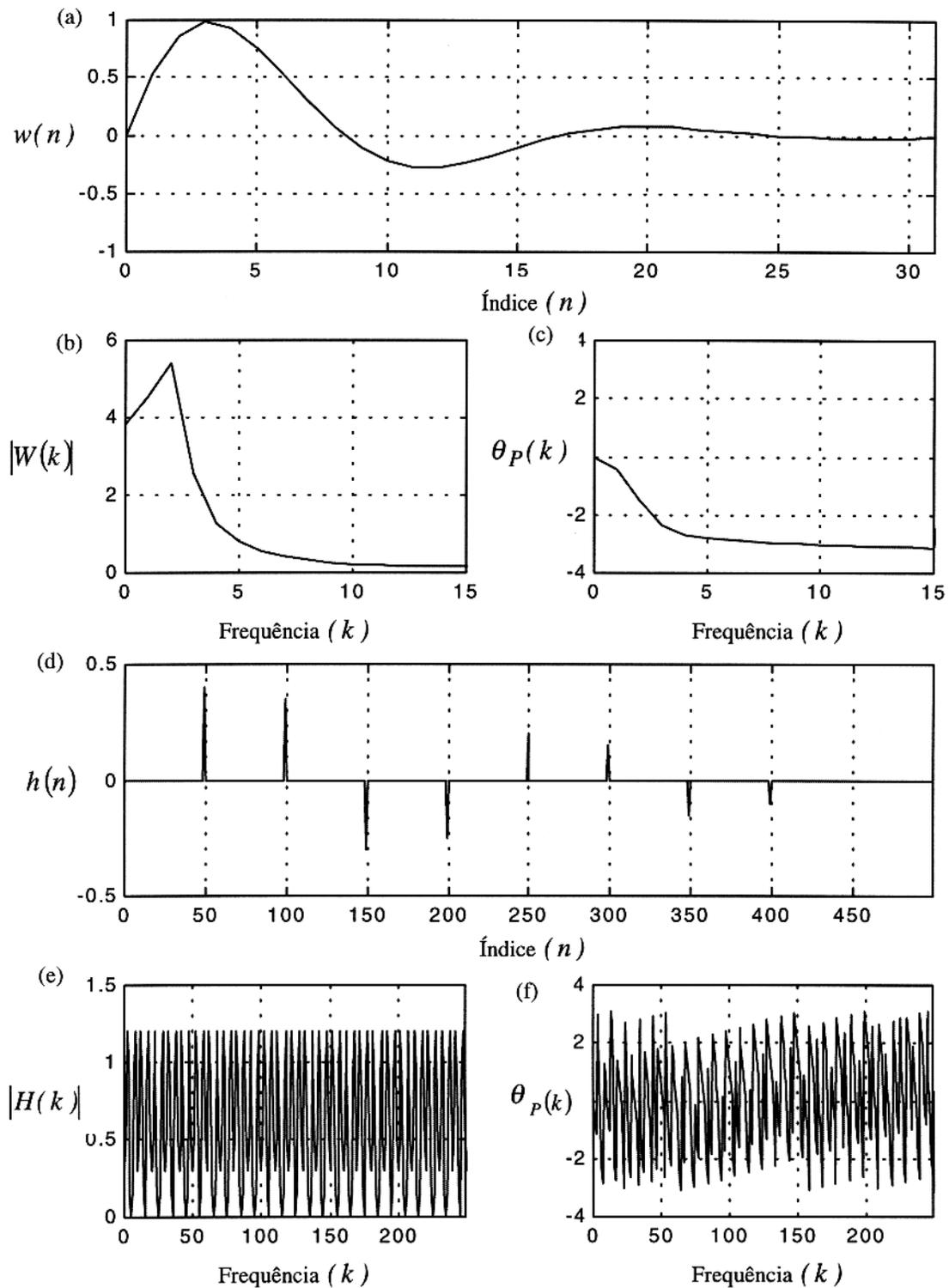


Figura 4.2 – (a) Pulso-fonte, $w(n)$, representado pela função Berlage; (b) Espectro de amplitude da função Berlage; (c) Espectro de fase da função Berlage (rd); (d) Função

refletividade, $h(n)$, representada por uma sequência de impulsos, espaçados uniformemente, que contém informação sobre a estrutura em subsuperfície; (e) Espectro de amplitude da função refletividade; (f) Espectro de fase da função refletividade.

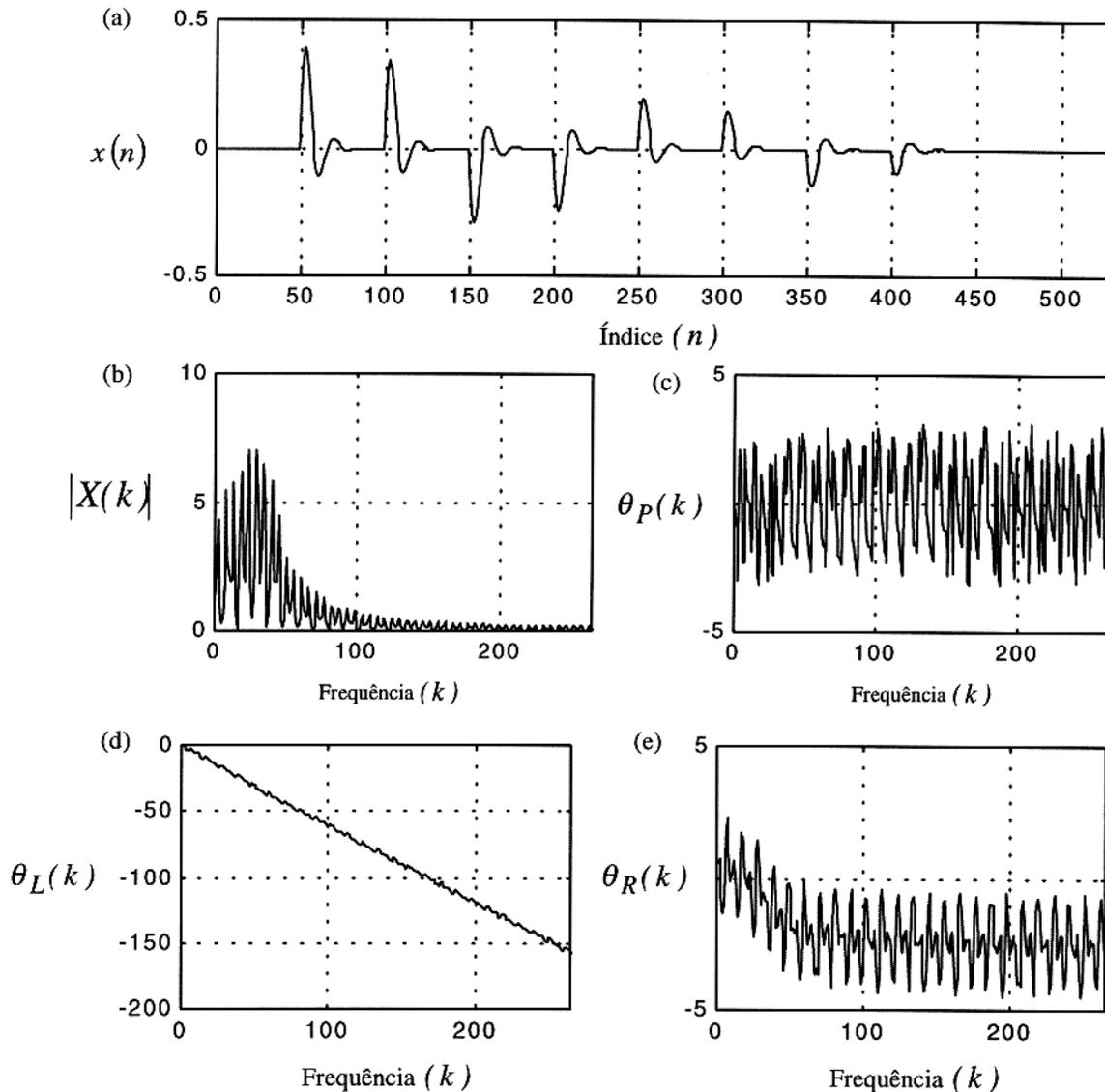


Figura 4.3 - O modelo geofísico: (a) Sismograma sintético $x(n)$, calculado pelo modelo convolucional; (b) Espectro de amplitude do sismograma; (c) Espectro de fase inicial do sismograma (módulo 2π); (d) Espectro de fase restaurado com tendência linear; (e) Espectro de fase restaurado com a tendência linear retirada.

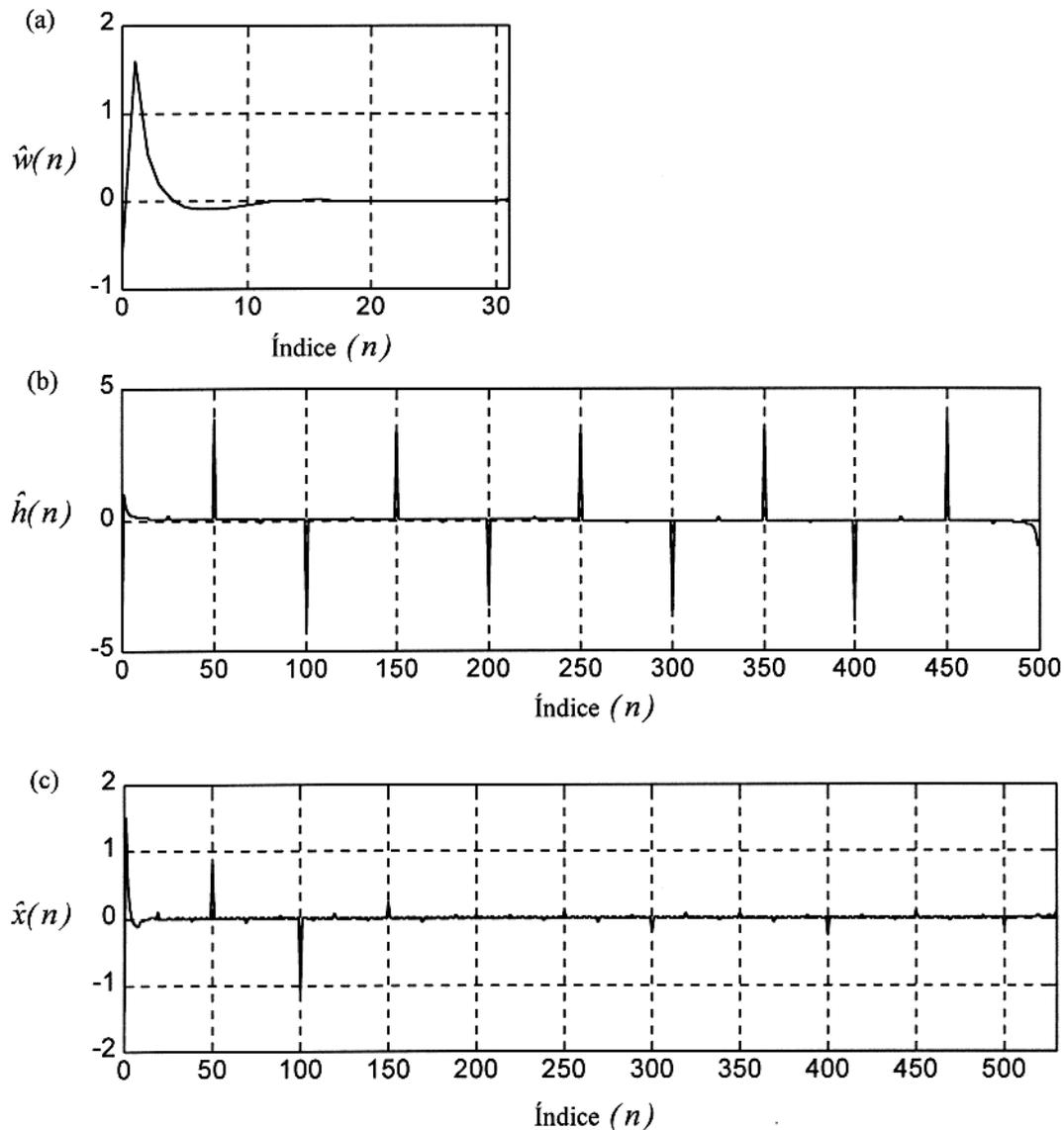


Figura 4.4 – Representação cepstral. (a) Cepstro complexo do pulso-fonte, $\hat{w}(n)$, onde observamos que a informação é compactada na origem, ao redor de zero; (b) Cepstro complexo da função refletividade, $\hat{h}(n)$, no qual se observa que a contribuição se dá para valores afastados da origem; (c) Cepstro complexo do sismograma sintético $\hat{x}(n)$, que contém as contribuições somadas das componentes individuais.

4.4.2 – Filtragem Linear

Como podemos observar no exemplo mostrado na Figura (4.4), o cepstro complexo contém as contribuições somadas do pulso-fonte e da resposta ao impulso. Neste caso, podemos facilmente separar estas contribuições através de filtros ideais passa-baixa (PB) e passa-alta (PA). Os resultados da filtragem passa-baixa e passa-alta do cepstro da Figura (4.4 - c), seguidos do processamento com o sistema T_*^{-1} , estão mostrados nas Figuras (4.5) e (4.6). Uma comparação entre o pulsos de entrada e o deconvolvido mostra que a forma do pulso é essencialmente preservada, como também acontece com a sequência de impulsos, mostrando o bom resultado da análise homomórfica, para o exemplo em questão.

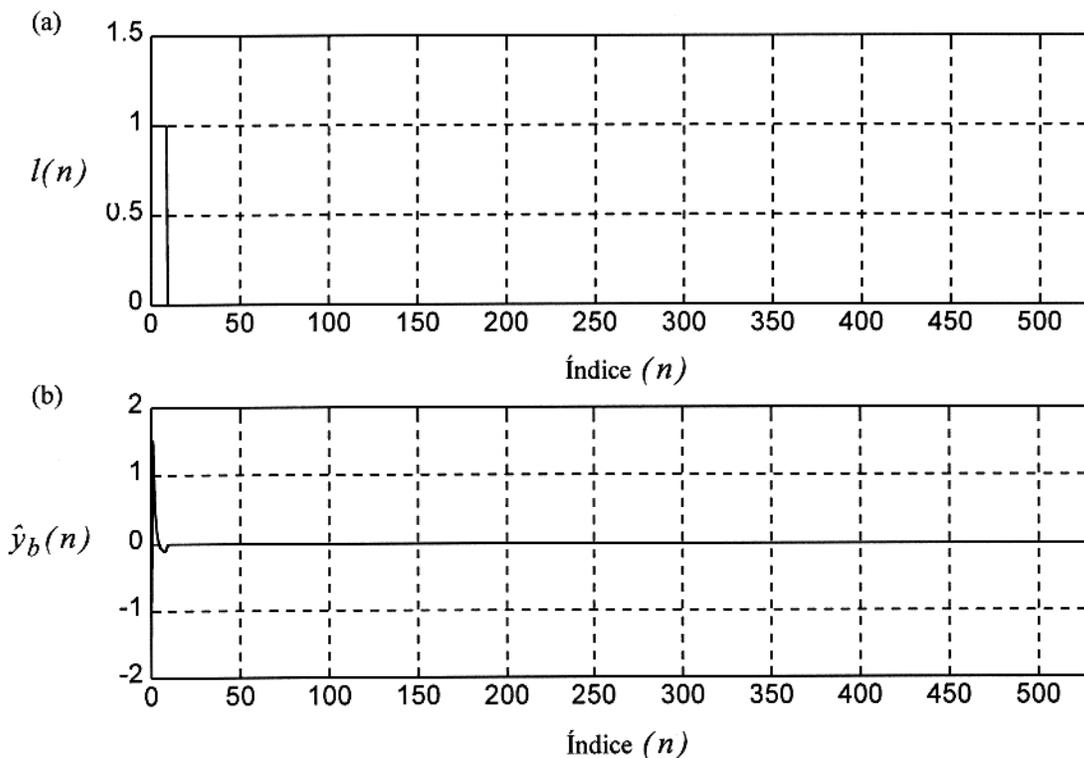


Figura 4.5 – Filtragem linear passa-baixa. (a) Filtro linear no domínio cepstral, $l(n)$; (b) Saída cepstral passa-baixa, $\hat{y}_b(n)$.

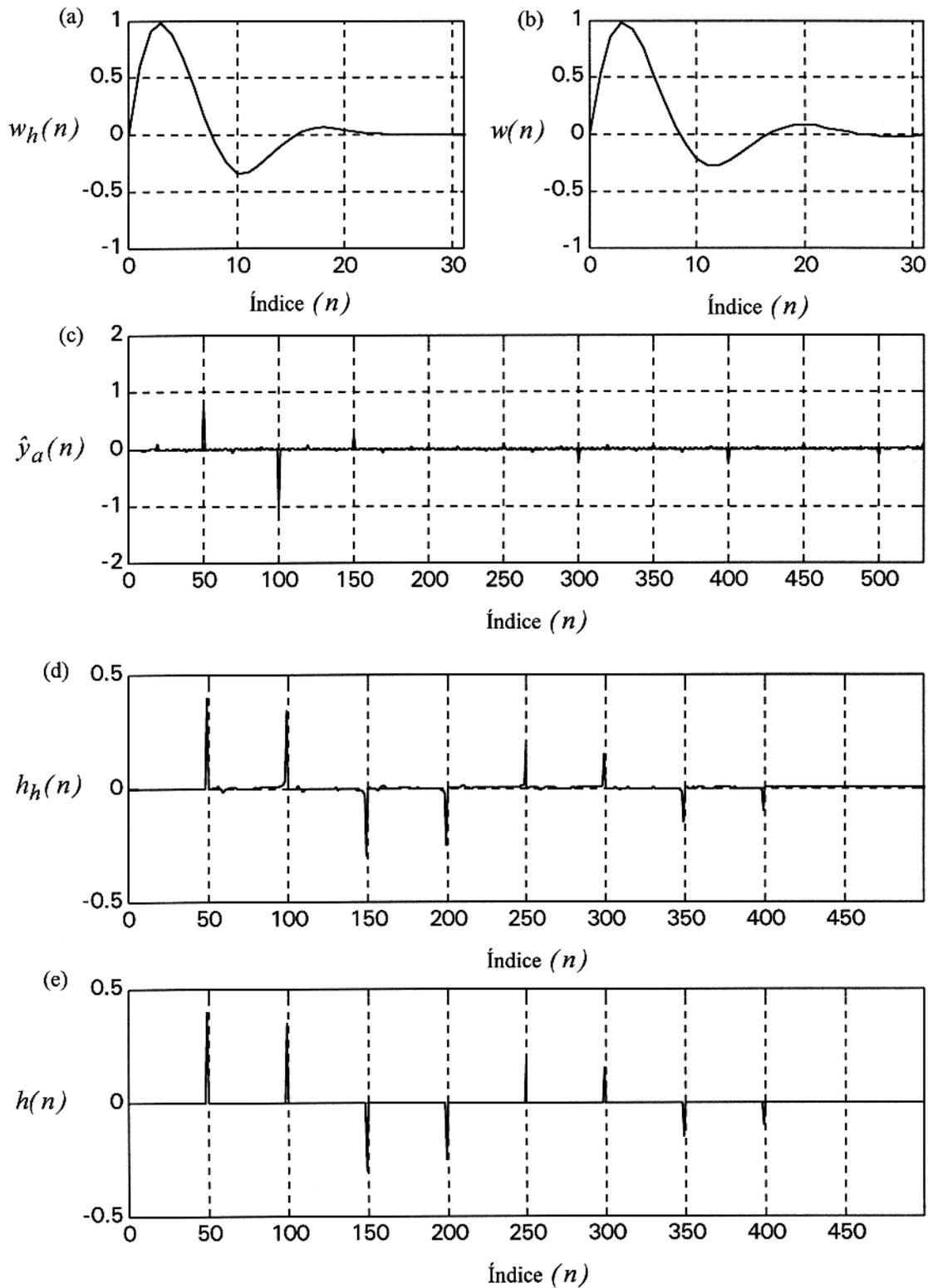


Figura 4.6 – Filtragem linear. (a) Pulso-fonte recuperado por filtragem homomórfica; (b) Pulso-fonte original para efeito comparativo visual, mostrando o bom resultado deste método; (c) Saída cepstral passa-alta; (d) Função refletividade recuperada por

filtragem homomórfica; (e) Função refletividade original, para efeito comparativo visual, mostrando o bom resultado do método.

4.4.3 – Ponderação Exponencial

O cepstro complexo de sequências de impulsos de fase-mista, são geralmente muito complicados e as duas componentes da convolução não mais se encontram separadas no domínio cepstral. A Figura (4.7) mostra o pulso sísmico de entrada e uma sequência de impulsos localizados arbitrariamente, com os seus respectivos cepstros complexos.

A Figura (4.8) mostra o traço sísmico sintético obtido através da convolução dessas duas componentes individuais, com seus espectros de amplitude e fase, bem como o seu cepstro complexo, ilustrando a complexidade que pode surgir, onde as contribuições individuais não mais se encontram separadas. A filtragem linear passa-baixa e passa-alta, para recuperar o pulso e a refletividade, respectivamente, com os mesmos filtros do exemplo anterior e mostradas na Figura (4.9), produzem um pulso e uma sequência de impulsos que apresentam pouca semelhança com os originais. Isto é devido ao fato que a região do cepstro complexo do sismograma, próxima a $n = 0$, agora contém as contribuições combinadas do pulso-fonte e da sequência de impulsos.

A fim de explorar as propriedades especiais de sequências de fase-mínima, uma sequência de fase-mista pode ser transformada em outra de fase-mínima, através da ponderação exponencial, utilizando o método proposto por Schafer (1968), conforme visto no capítulo anterior (seção 3.2.7).

Em casos onde as séries de entrada não são de fase-mínima, uma pequena quantidade de ponderação normalmente é suficiente para transformá-las em fase-mínima (Stofa et al., 1974), sendo que a escolha do fator de ponderação, α , depende presentemente em experiência somente (Ulrych, 1971).

Para ilustrar este ponto, a sequência de entrada da Figura (4.8 – a) é ponderada exponencialmente com três valores de α . As Figuras (4.10), (4.11) e (4.12) mostram o cepstro complexo da entrada ponderada, a saída passa-baixa, antes da retirada da ponderação exponencial, o pulso recuperado, a saída passa-alta, antes da retirada da ponderação exponencial e a função refletividade recuperada mostrando o bom desempenho do método após a retirada da ponderação exponencial, para o valor de α igual a 0,95.

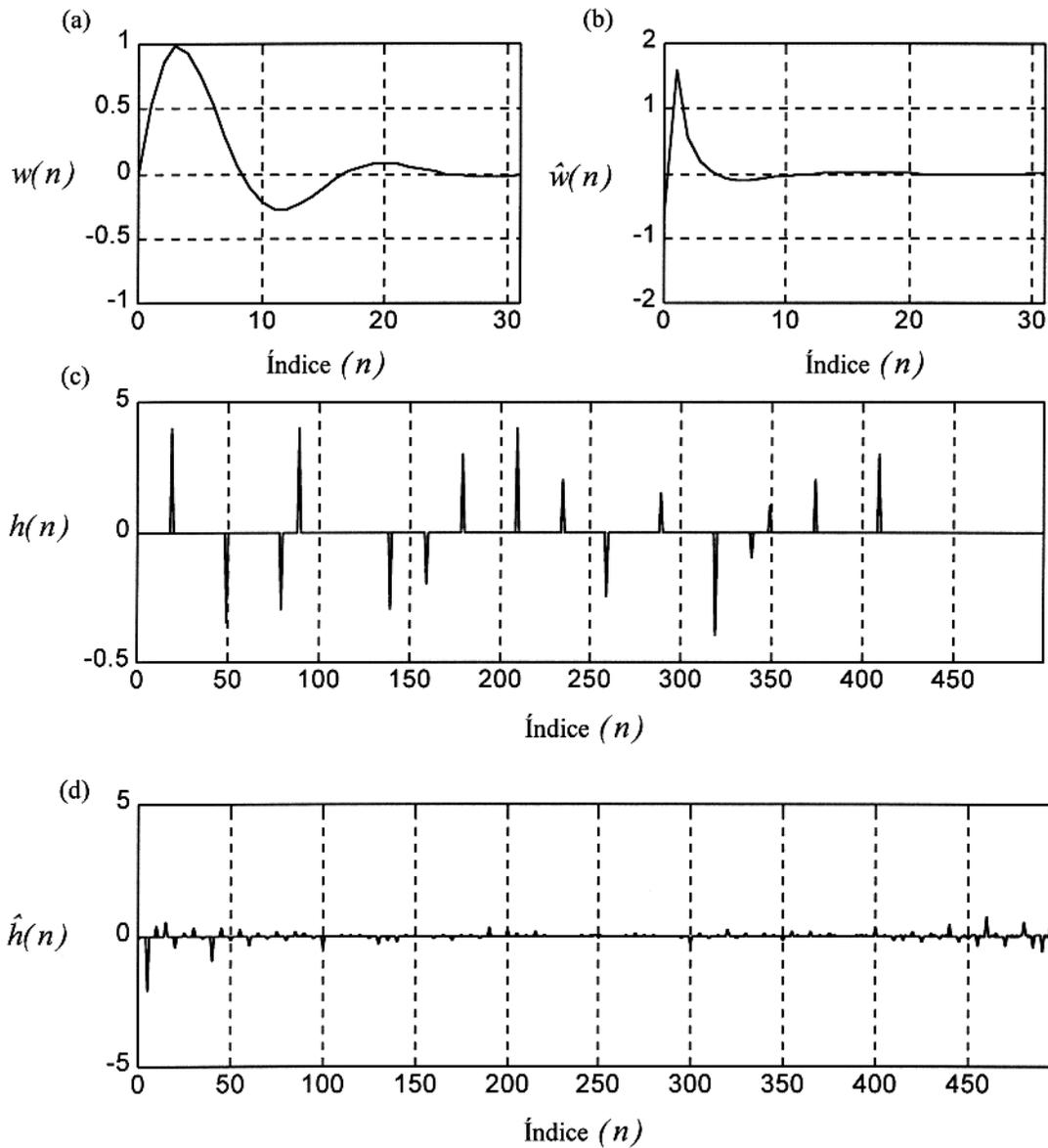


Figura 4.7 – Sequências de entrada de fase-mista. (a) Pulso-fonte, $w(n)$, representado pela função Berlage; (b) Cepstro complexo do pulso-fonte, $\hat{w}(n)$, com a contribuição compactada na origem; (c) Função refletividade, $h(n)$, representada por uma seqüência de impulsos localizados arbitrariamente; (d) Cepstro complexo da função refletividade, $\hat{h}(n)$, onde a contribuição se distribui ao longo de n .

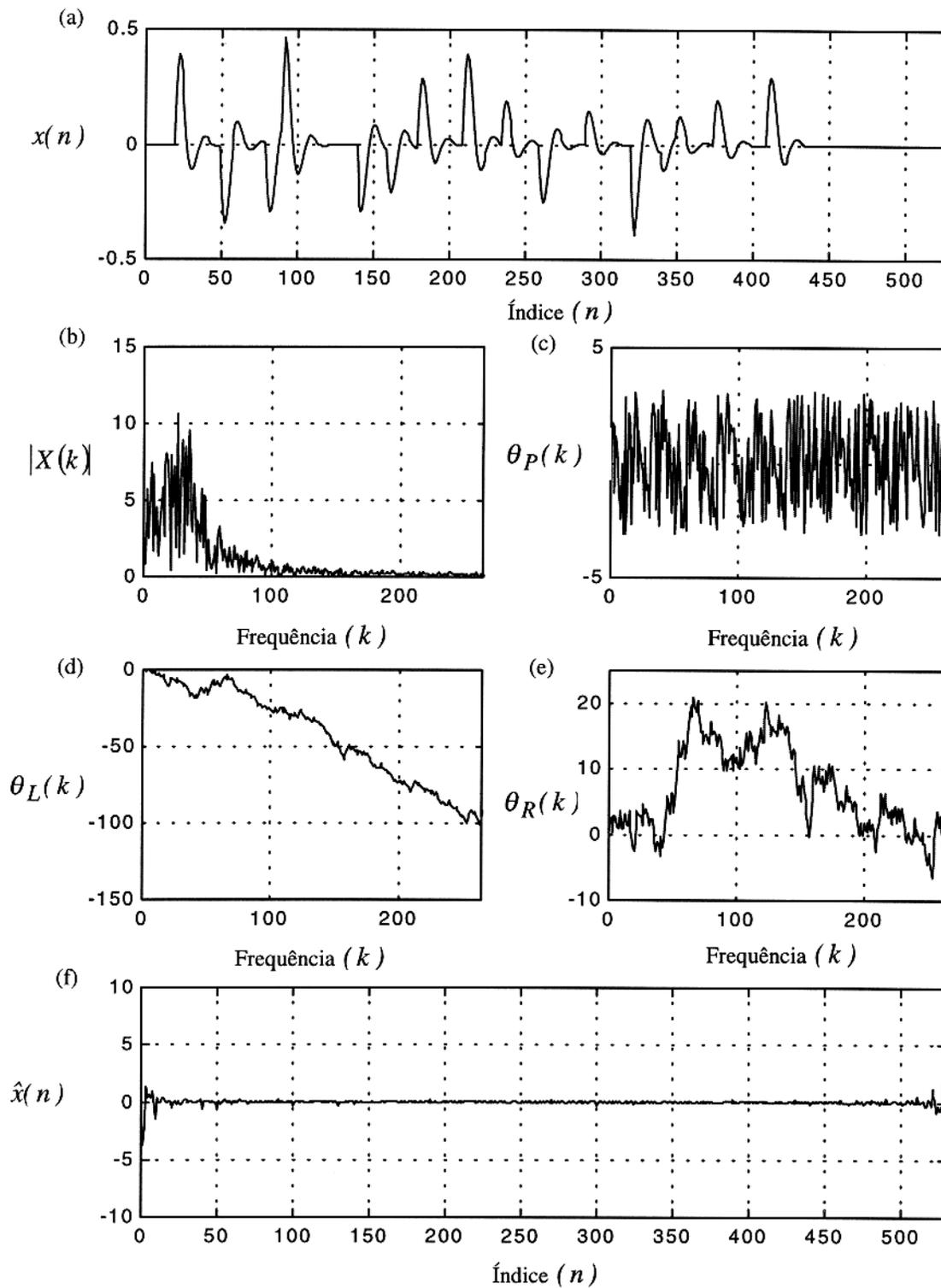


Figura 4.8 - (a) Sismograma sintético, $x(n)$, calculado pelo modelo convolucional; (b) Espectro de amplitude; (c) Espectro de fase (módulo 2π); (d) Fase restaurada com tendência

linear, $\theta_L(k)$; (e) Fase retirada a tendência linear, $\theta_R(k)$; (f) Cepstro complexo do sismograma sintético, $\hat{x}(n)$, onde as contribuições individuais não mais se encontram separadas.

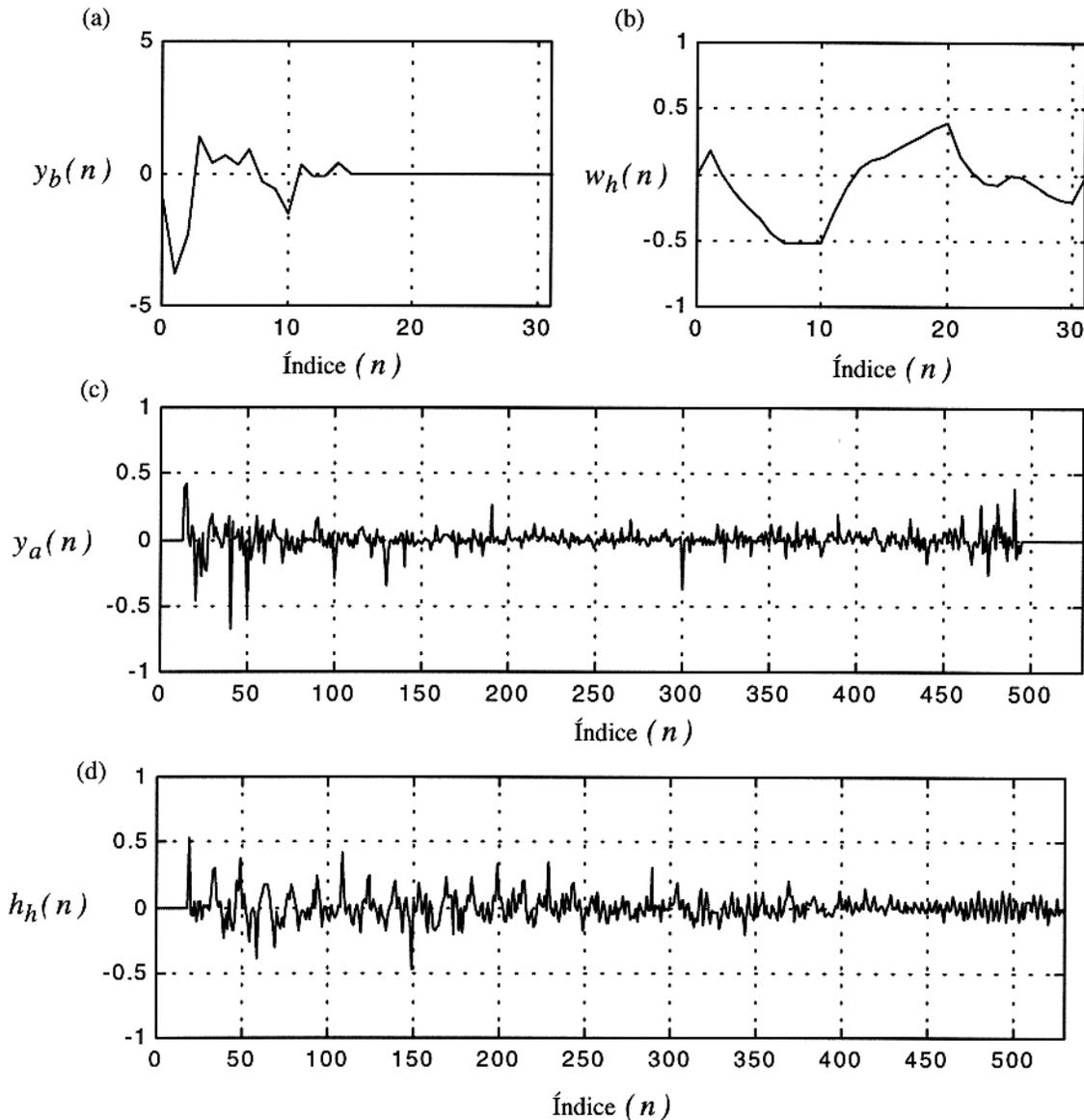


Figura 4.9 – Filtragem linear no domínio cepstral. (a) Saída cepstral passa-baixa; (b) Pulso recuperado por filtragem homomórfica apresentando pouca semelhança com o original; (c) Saída cepstral passa-alta; (d) Função refletividade recuperada por filtragem homomórfica apresentado pouca semelhança com a original, não sendo um bom resultado.

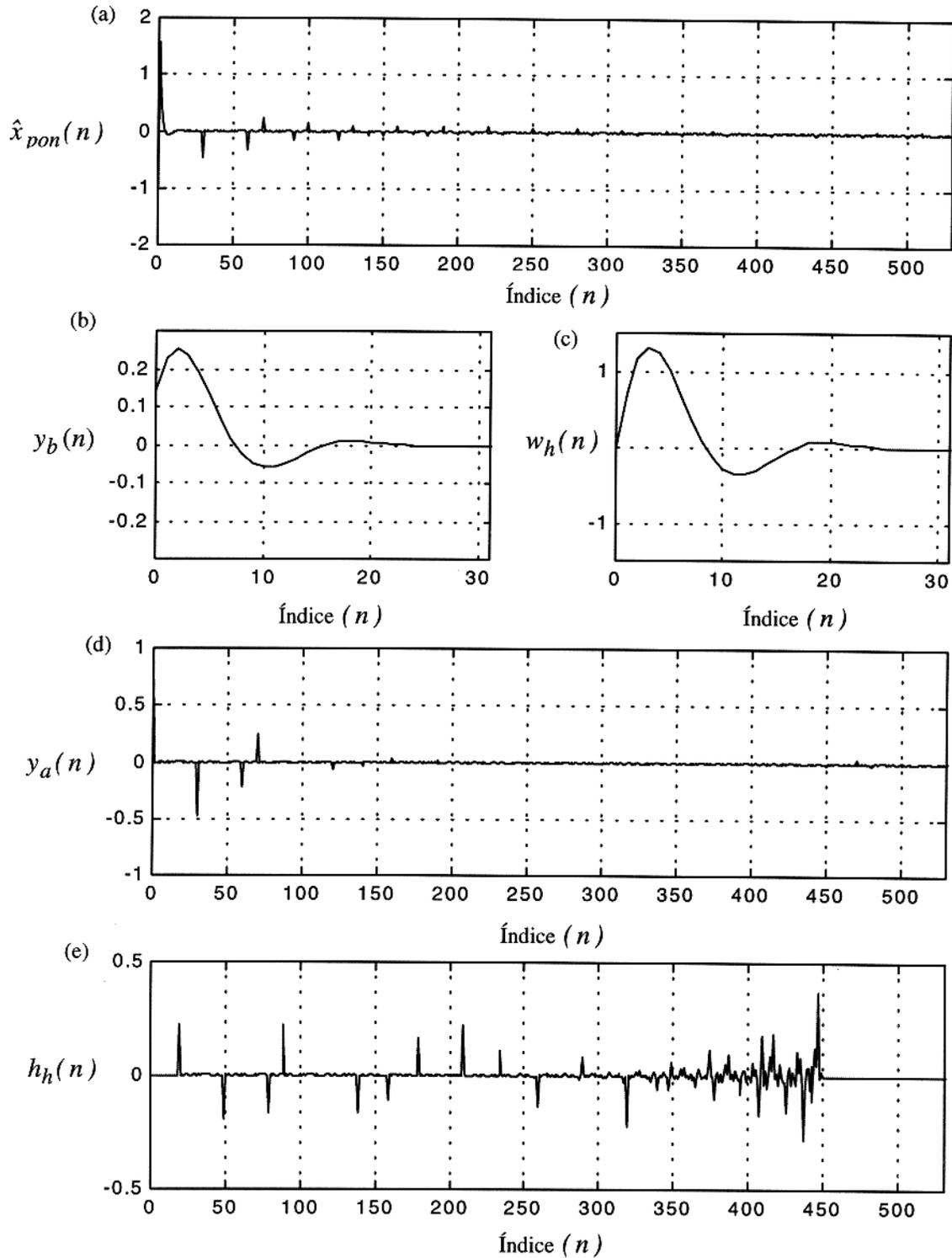


Figura 4.10 - (a) Cepstro complexo do sismograma ponderado com $\alpha=0.98$; (b) Saída passa-baixa; (c) Pulso recuperado; (d) Saída passa-alta; (e) Função refletividade recuperada, mostrando que o fator de ponderação usado foi insuficiente para transformar a sequência em fase-mínima, não produzindo um bom resultado

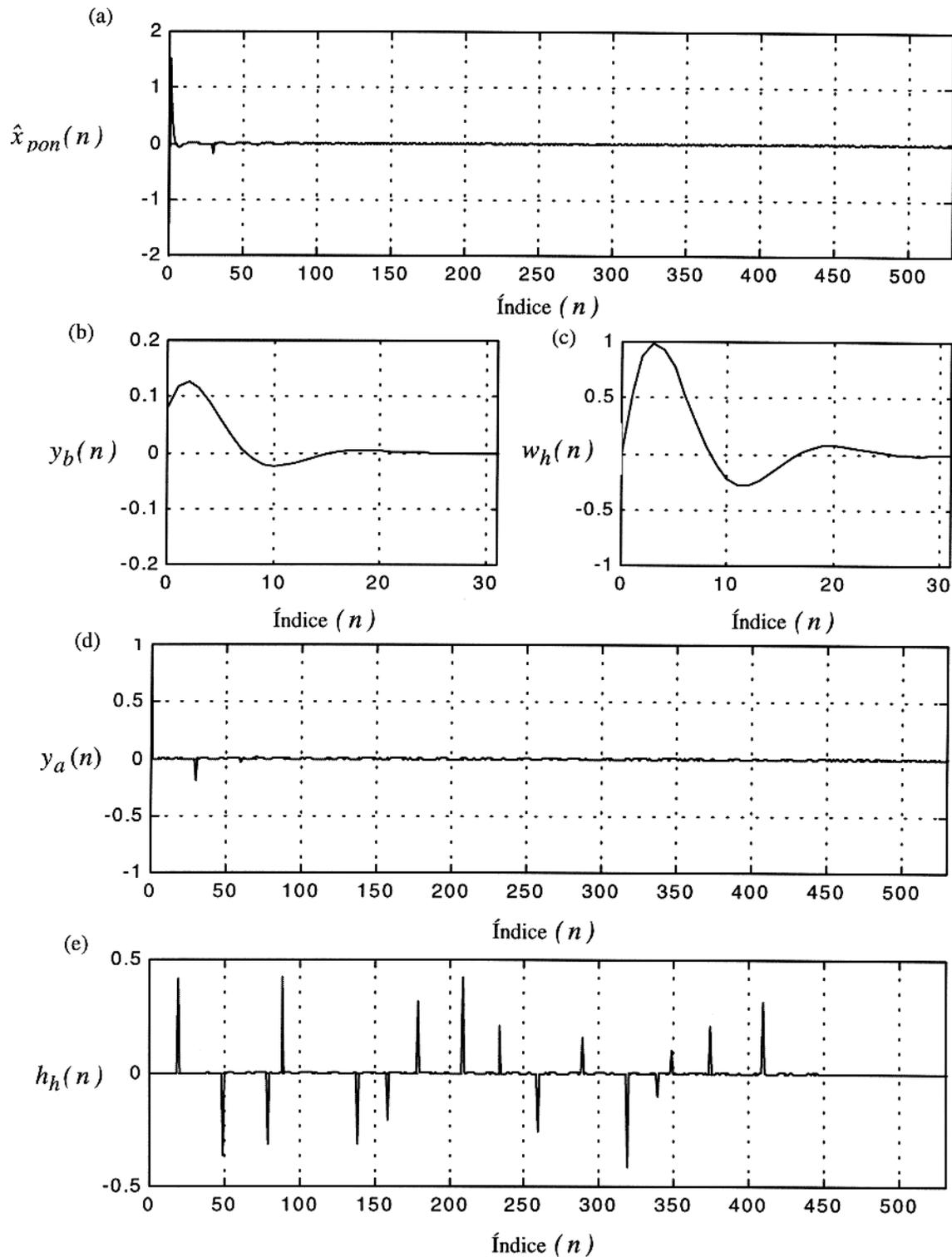


Figura 4.11 - (a) Cepstro complexo do sismograma ponderado com $\alpha=0.95$; (b) Saída passa-baixa; (c) Pulso recuperado após a retirada da ponderação exponencial; (d) Saída passa-alta; (e) Função refletividade recuperada após a retirada da ponderação exponencial, mostrando um bom resultado.

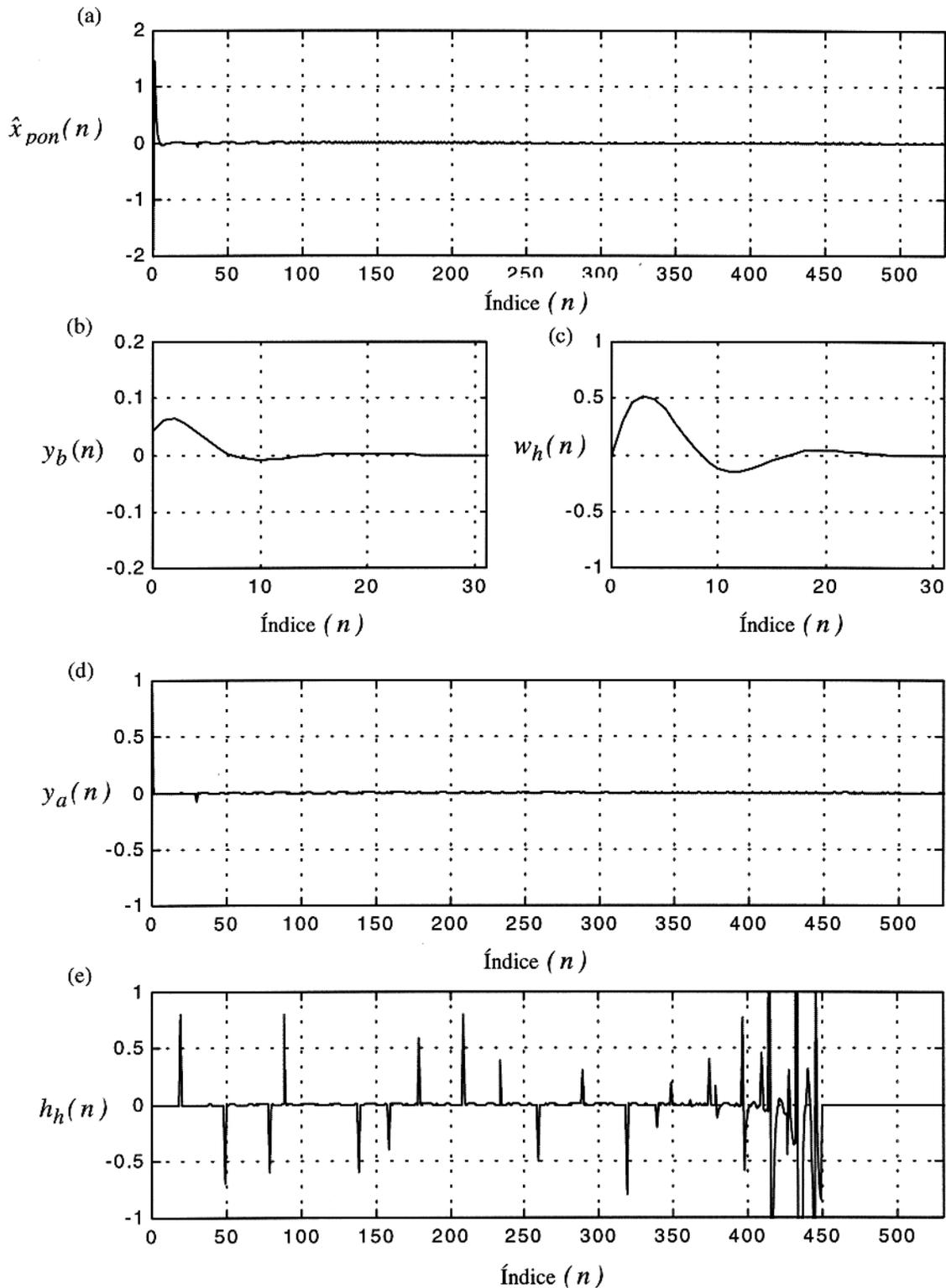


Figura 4.12 - (a) Cepstro complexo do sismograma ponderado com $\alpha=0.92$; (b) Saída passa-baixa; (c) Pulso recuperado; (d) Saída passa-alta; (e) Função refletividade recuperada mostrando que o fator de ponderação usado foi demasiado para transformar a sequência em fase-mínima, não produzindo um bom resultado.

4.4.4 – Efeito do Ruído

Os exemplos considerados anteriormente são ideais no sentido em que as sequências de entrada são livres de ruído. Como visto anteriormente, um traço sísmico real, $x(n)$, pode ser representado como

$$x(n) = s(n) + r(n) = w(n) * h(n) + r(n), \quad (4.40)$$

onde $r(n)$ é o ruído superimposto ao traço sísmico.

A adição de $r(n)$ complica o cálculo de uma curva de fase suave, e desde que o cepstro complexo depende da contribuição da componente de fase da sequência de entrada, a simplicidade do cepstro complexo de uma sequência sem ruído, tal como é ilustrado na Figura (4.4), é destruída. Entretanto, desde que a sequência de impulsos seja transformada em fase-mínima, por ponderação exponencial, a porção do cepstro complexo próxima a $n = 0$, pode ainda ser usada para recuperar o pulso-fonte sísmico. As Figuras (4.13), (4.14), (4.15), (4.16), (4.17) e (4.18) mostram o ruído aleatório com distribuição normal $r(n)$ e o sismograma sintético da Figura (4.7) juntamente com o ruído aleatório somado, $x(n)$, com seus respectivos espectros de amplitude e fase, como também seus cepstros complexos, para três valores diferentes de razão sinal/ruído, S/N . Após a ponderação exponencial com $\alpha = 0,95$, calculamos os cepstros complexos do traço ponderado exponencialmente, como mostram as Figuras (4.19), (4.20) e (4.21), para posterior filtragem linear.

Com a aplicação do sistema característico inverso T_*^{-1} , e a retirada da ponderação exponencial, chegamos ao pulso e a refletividade recuperados, mostrados nas mesmas Figuras. Os pulsos sísmicos recuperados a partir da porção inicial dos cepstros apresentados nessas Figuras, ilustra um aspecto importante da filtragem homomórfica. Embora ele agora apresente ligeira deformação, provocada em decorrência do ruído, ainda apresenta grande semelhança com o original. O ruído parece influenciar na curva de fase, a parte mais distante da origem no cepstro complexo, em um grau maior do que na porção próxima à origem. Entretanto, a informação da série refletora é praticamente imersa em ruído, embora o primeiro refletor seja bem resolvido, assim tornando esta estimativa praticamente sem uso. Desta forma, o pulso sísmico deconvolvido homomórficamente é muito menos sensível ao ruído aditivo do que a sequência de impulsos

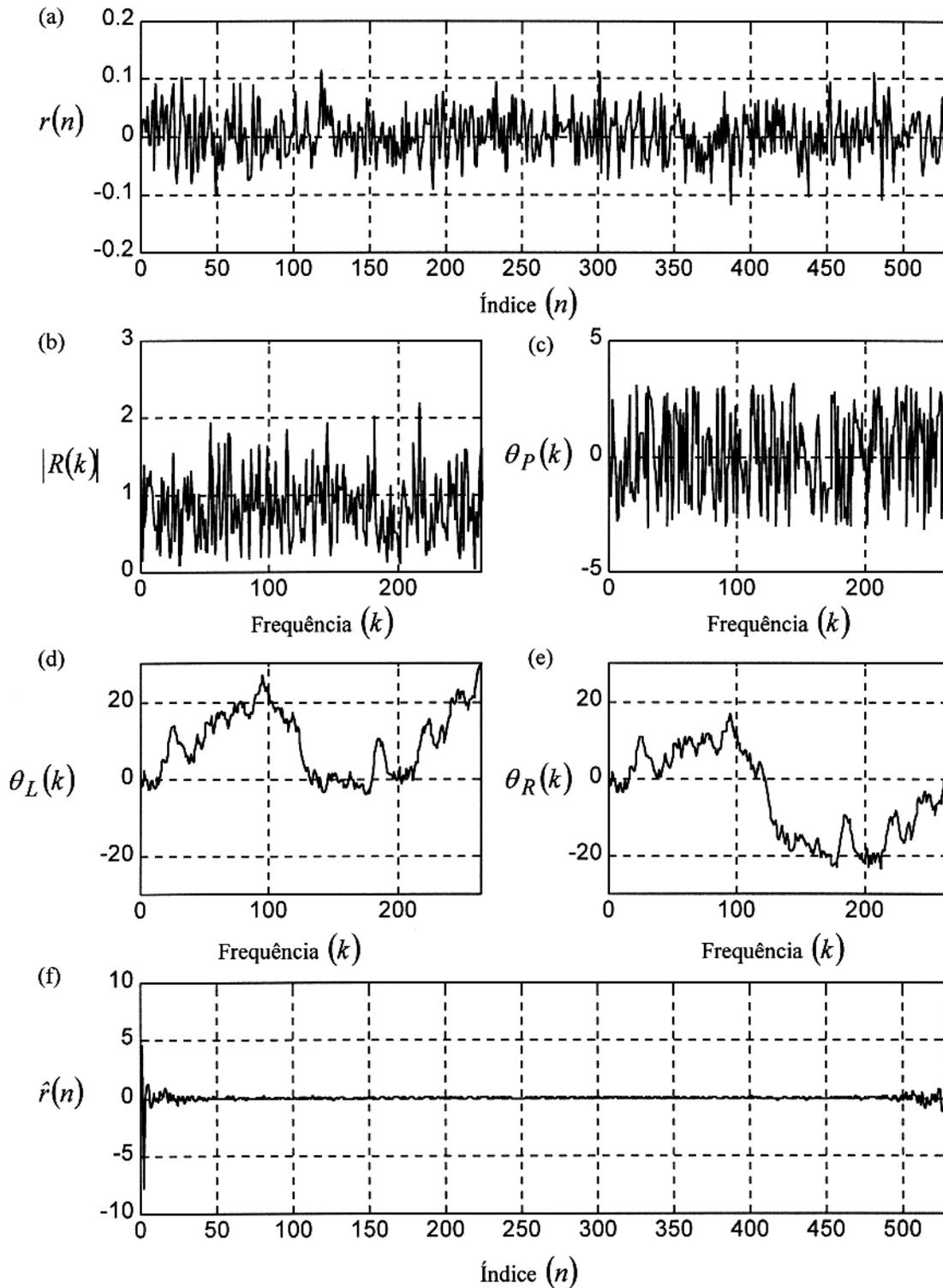


Figura 4.13 - Análise do ruído aditivo ($S/N = 7,73$). (a) Ruído aleatório $r(n)$; (b) Espectro de amplitude; (c) Espectro de fase (módulo 2π); (d) Fase restaurada com tendência linear; (e) Fase com tendência linear retirada; (f) Cepstro complexo.

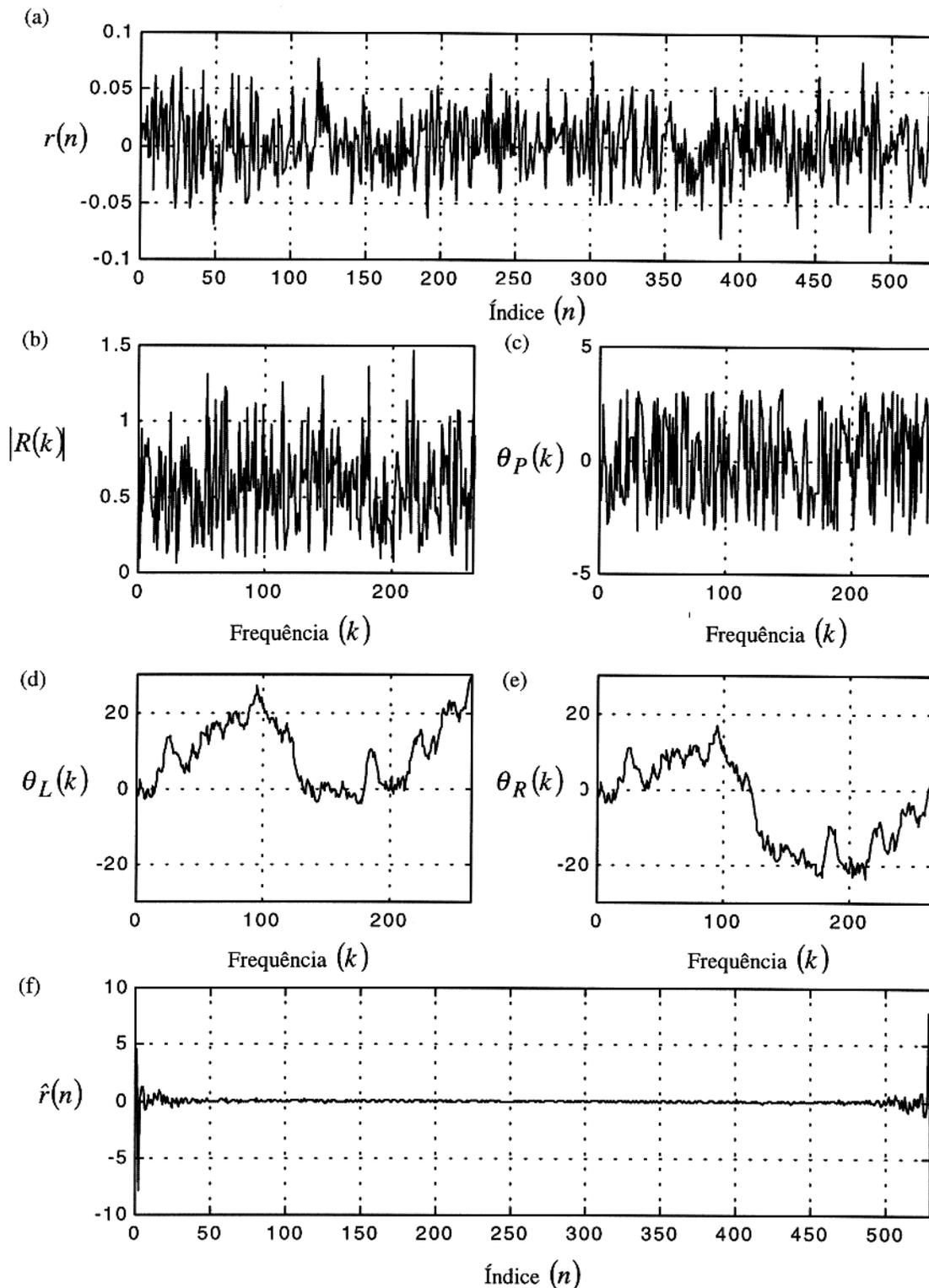


Figura 4.14 - Análise do ruído aditivo ($S/N=15,65$). (a) Ruído aleatório $r(n)$; (b) Espectro de amplitude; (c) Espectro de fase (módulo 2π); (d) Fase restaurada com tendência linear; (e) Fase com tendência linear retirada; (f) Cepstro complexo.

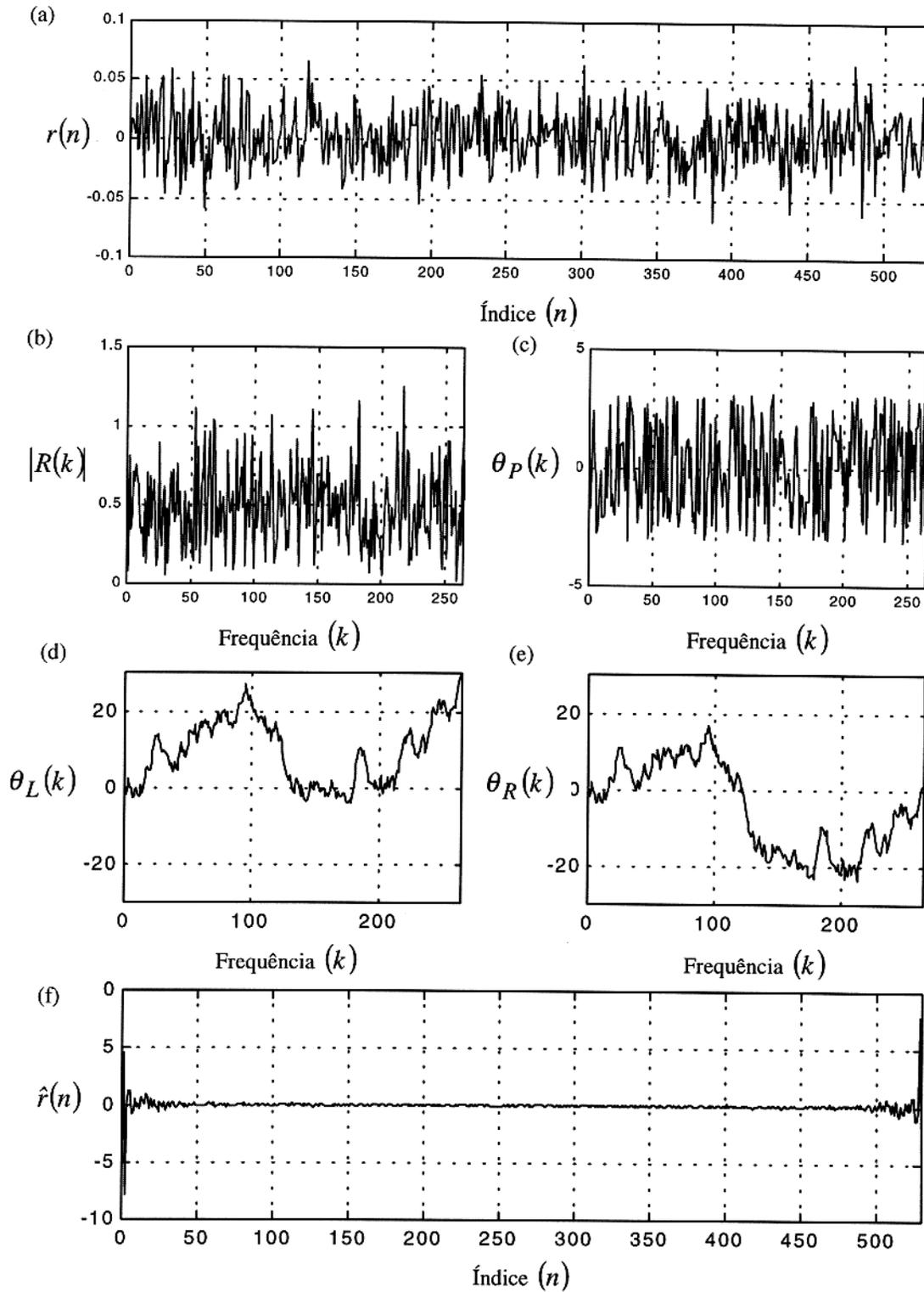


Figura 4.15 - Análise do ruído aditivo ($S/N=21,13$). (a) Ruído aleatório $r(n)$; (b) Espectro de amplitude; (c) Espectro de fase (módulo 2π); (d) Fase restaurada com tendência linear; (e) Fase com tendência linear retirada; (f) Cepstro complexo.

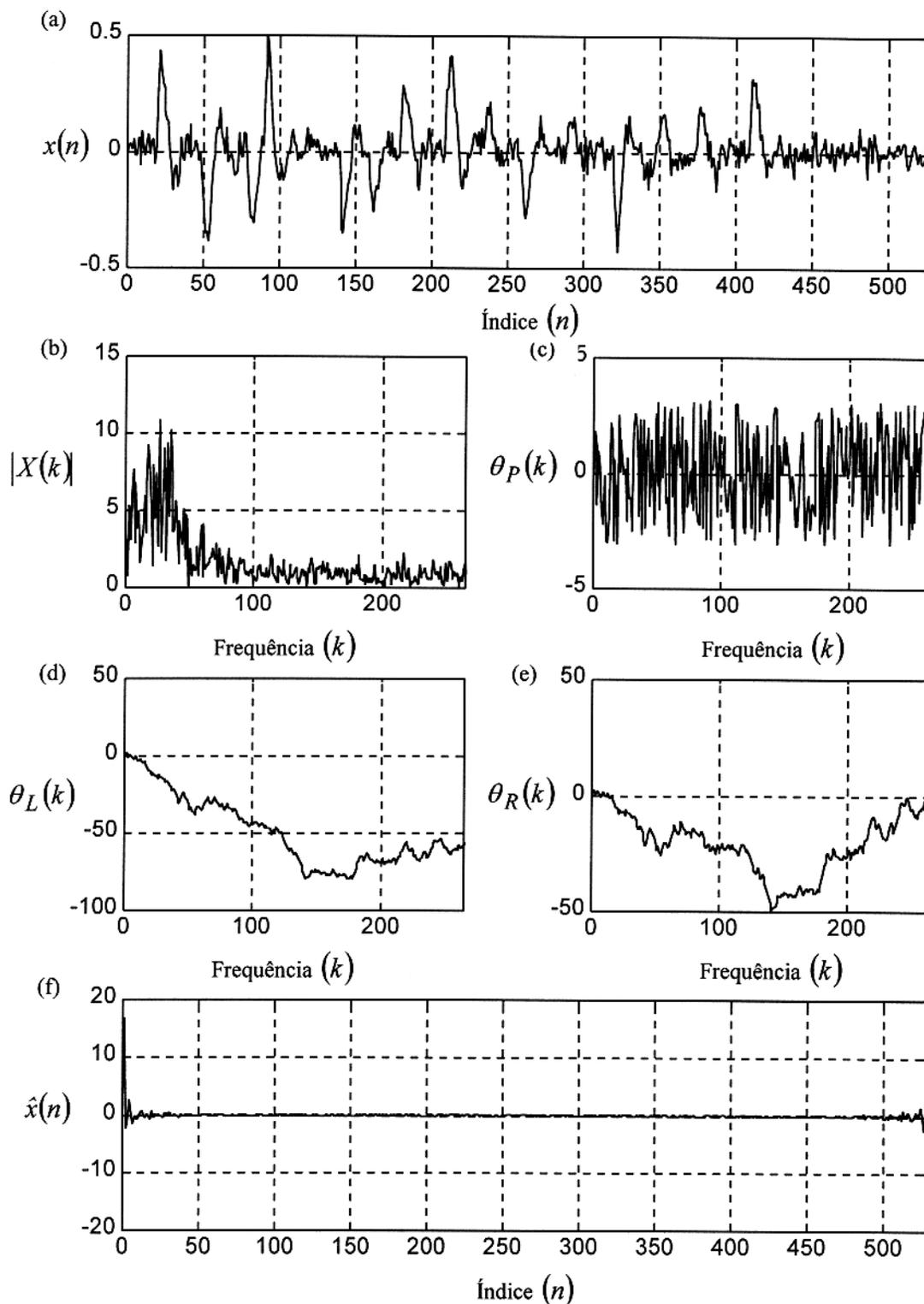


Figura 4.16 - Análise do sismograma sintético com ruído aditivo ($S/N = 7,73$). (a) Sismograma sintético com componente de ruído aditivo $x(n)$, calculado pela expressão (4.38); (b) Espectro de amplitude; (c) Espectro de fase (módulo 2π); (d) Fase restaurada com tendência linear; (e) Fase com tendência linear retirada; (f) Cepstro complexo.

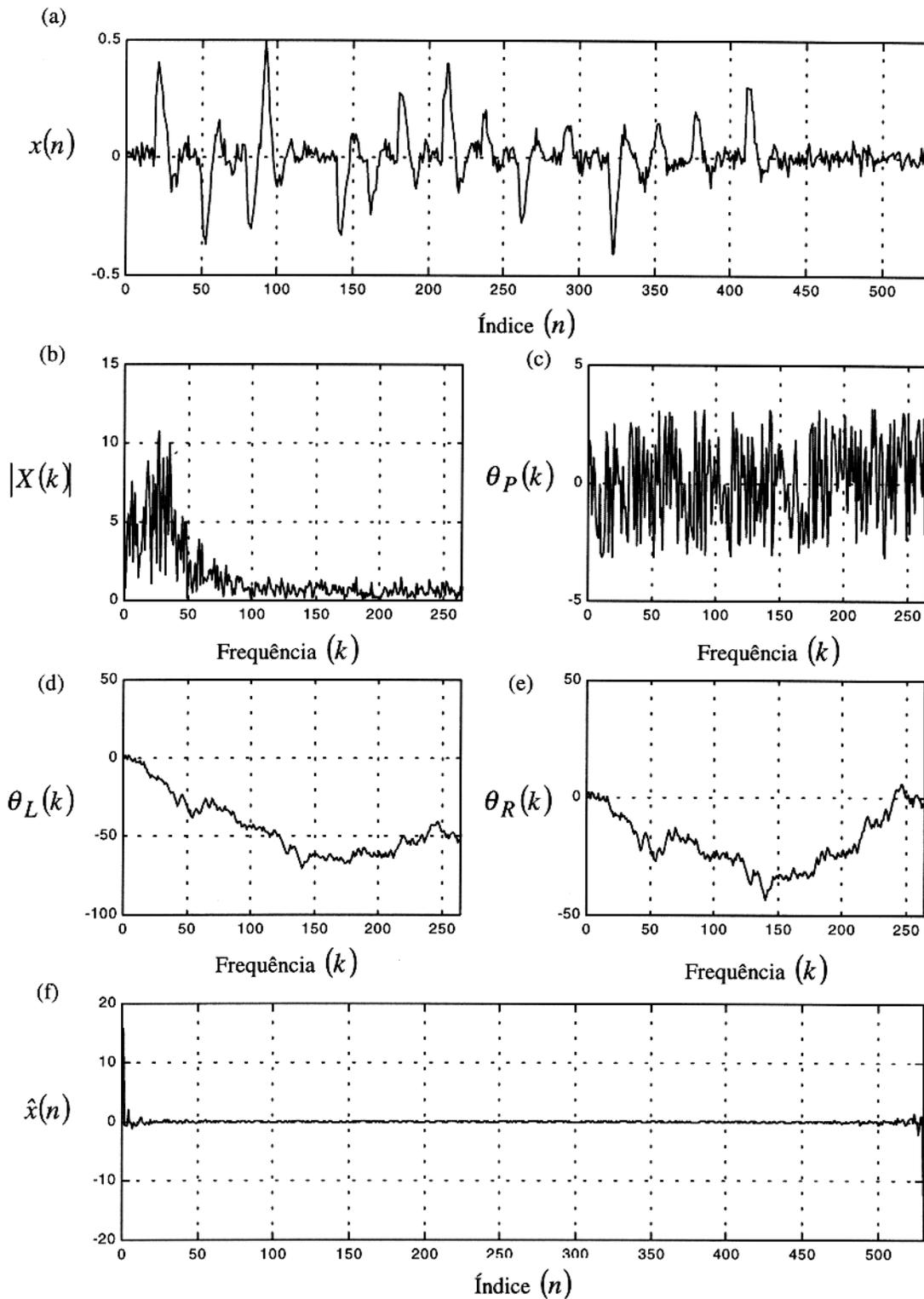


Figura 4.17 - Análise do sismograma sintético com ruído aditivo ($S/N=15,65$). (a) Sismograma sintético com componente de ruído aditivo $x(n)$, calculado pela expressão (4.38); (b) Espectro de amplitude; (c) Espectro de fase (módulo 2π); (d) Fase restaurada com tendência linear; (e) Fase com tendência linear retirada; (f) Cepstro complexo.

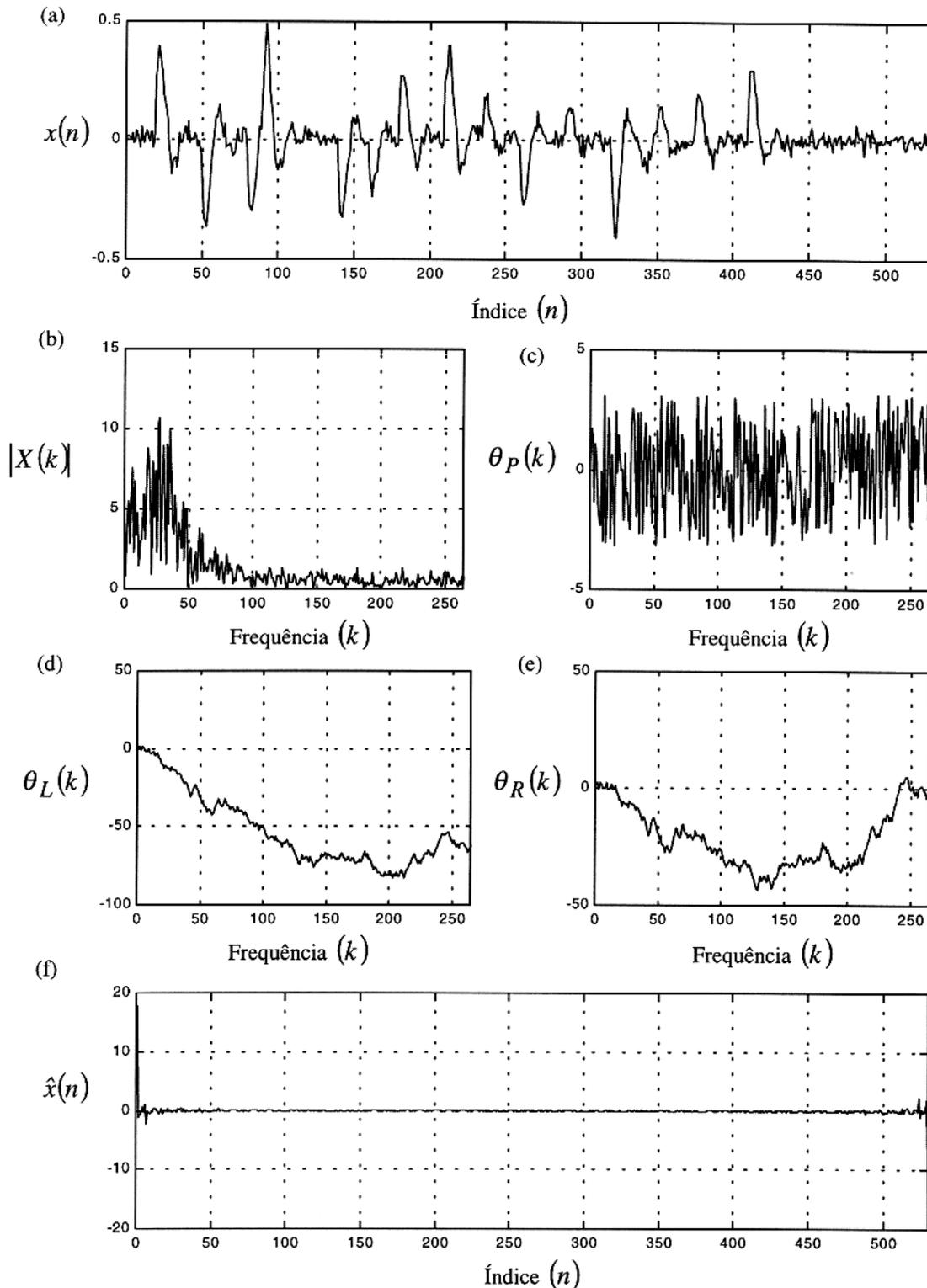


Figura 4.18 - Análise do sismograma sintético com ruído aditivo ($S/N=21,13$). (a) Sismograma sintético com componente de ruído aditivo $x(n)$, calculado pela expressão (4.38); (b) Espectro de amplitude; (c) Espectro de fase (módulo 2π); (d) Fase restaurada com tendência linear; (e) Fase com tendência linear retirada; (f) Cepstro complexo.

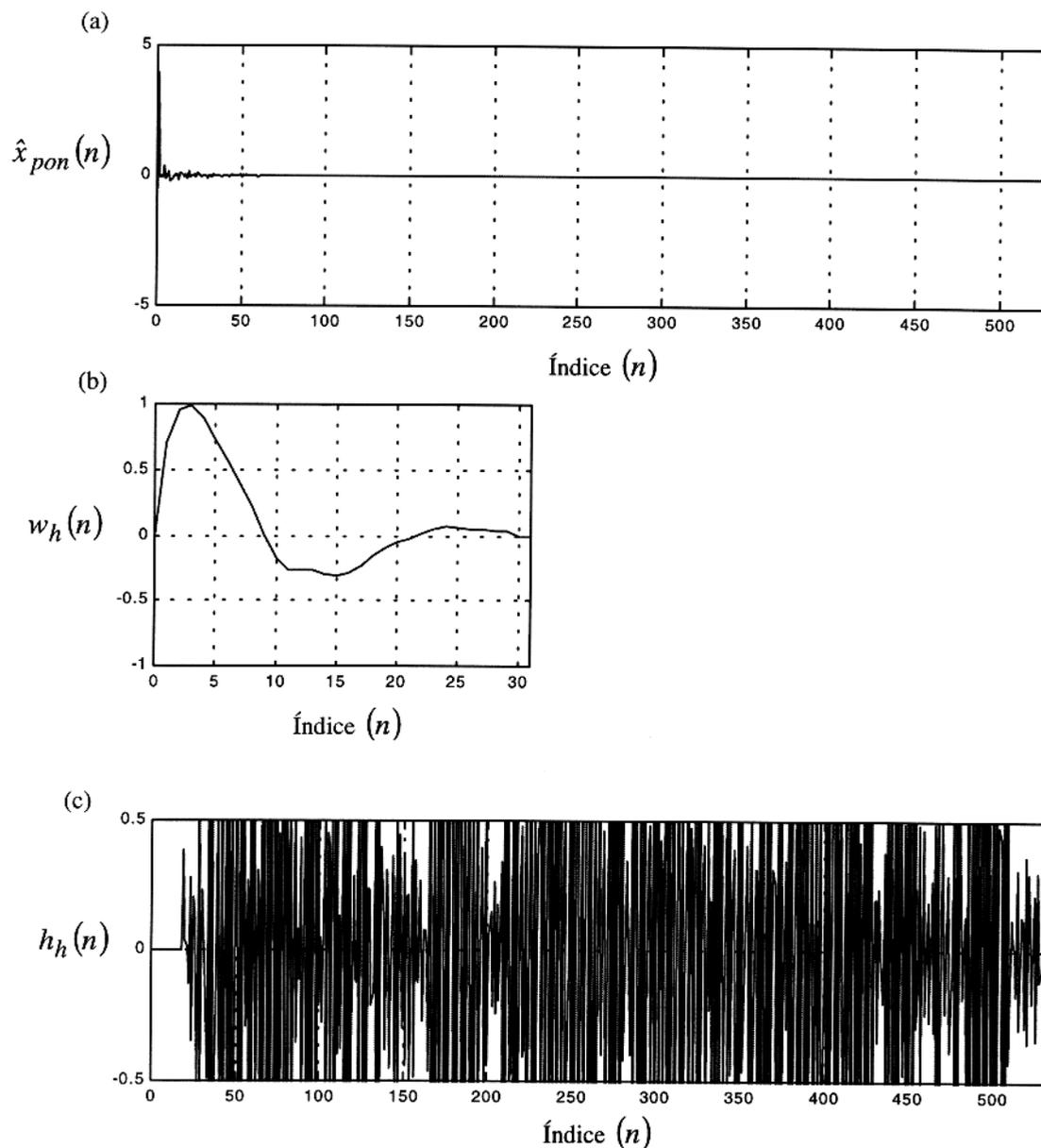


Figura 4.19 - Ponderação exponencial e filtragem linear do sismograma com ruído ($S/N=7,73$). (a) Cepstro complexo do traço ponderado exponencialmente com $\alpha = 0,95$; (b) Pulso-fonte recuperado por deconvolução homomórfica; (c) Sequência de impulsos recuperada por deconvolução homomórfica imersa em ruído, apresentando boa resolução apenas para o primeiro refletor, não sendo um bom resultado.

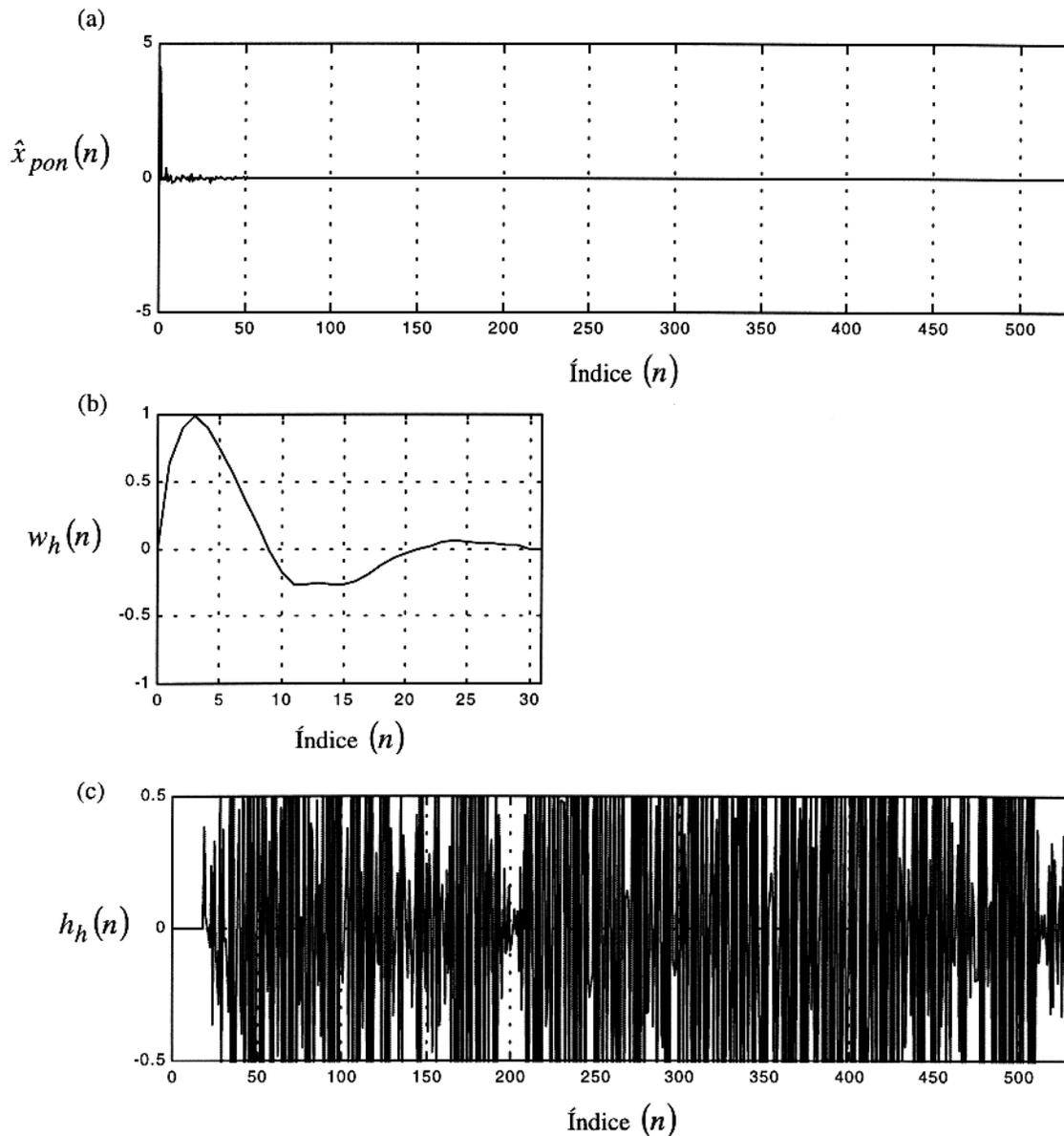


Figura 4.20 - Ponderação exponencial e filtragem linear do sismograma com ruído ($S/N=15,65$). (a) Cepstro complexo do traço ponderado exponencialmente com $\alpha = 0,95$; (b) Pulso-fonte recuperado por deconvolução homomórfica; (c) Sequência de impulsos recuperada por deconvolução homomórfica imersa em ruído, apresentando boa resolução apenas para o primeiro refletor, não sendo um bom resultado.

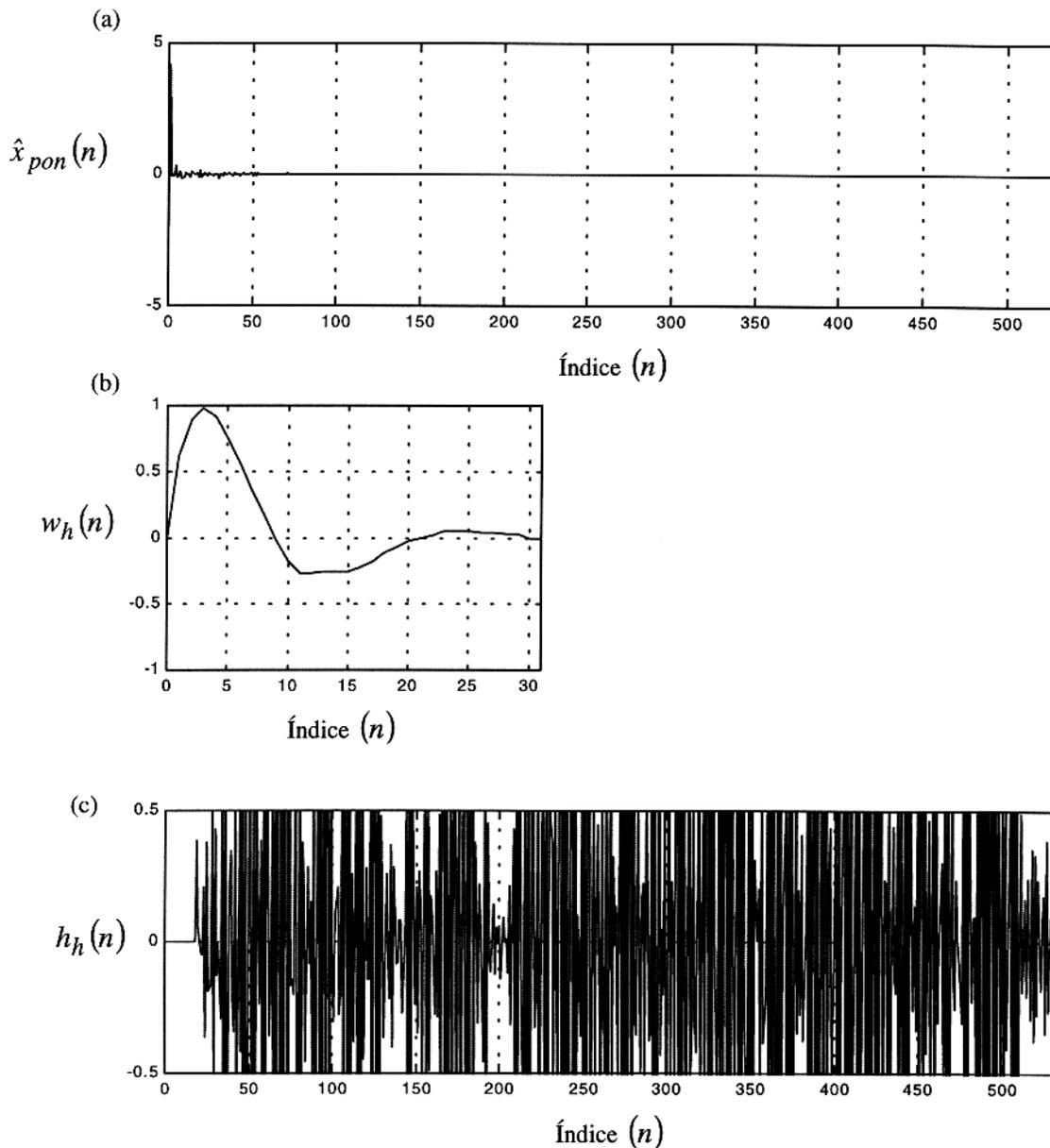


Figura 4.21 - Ponderação exponencial e filtragem linear do sismograma com ruído ($S/N=21,13$). (a) Cepstro complexo do traço ponderado exponencialmente com $\alpha = 0,95$; (b) Pulso-fonte recuperado por deconvolução homomórfica; (c) Sequência de impulsos recuperada por deconvolução homomórfica imersa em ruído, apresentando boa resolução apenas para o primeiro refletor, não sendo um bom resultado.

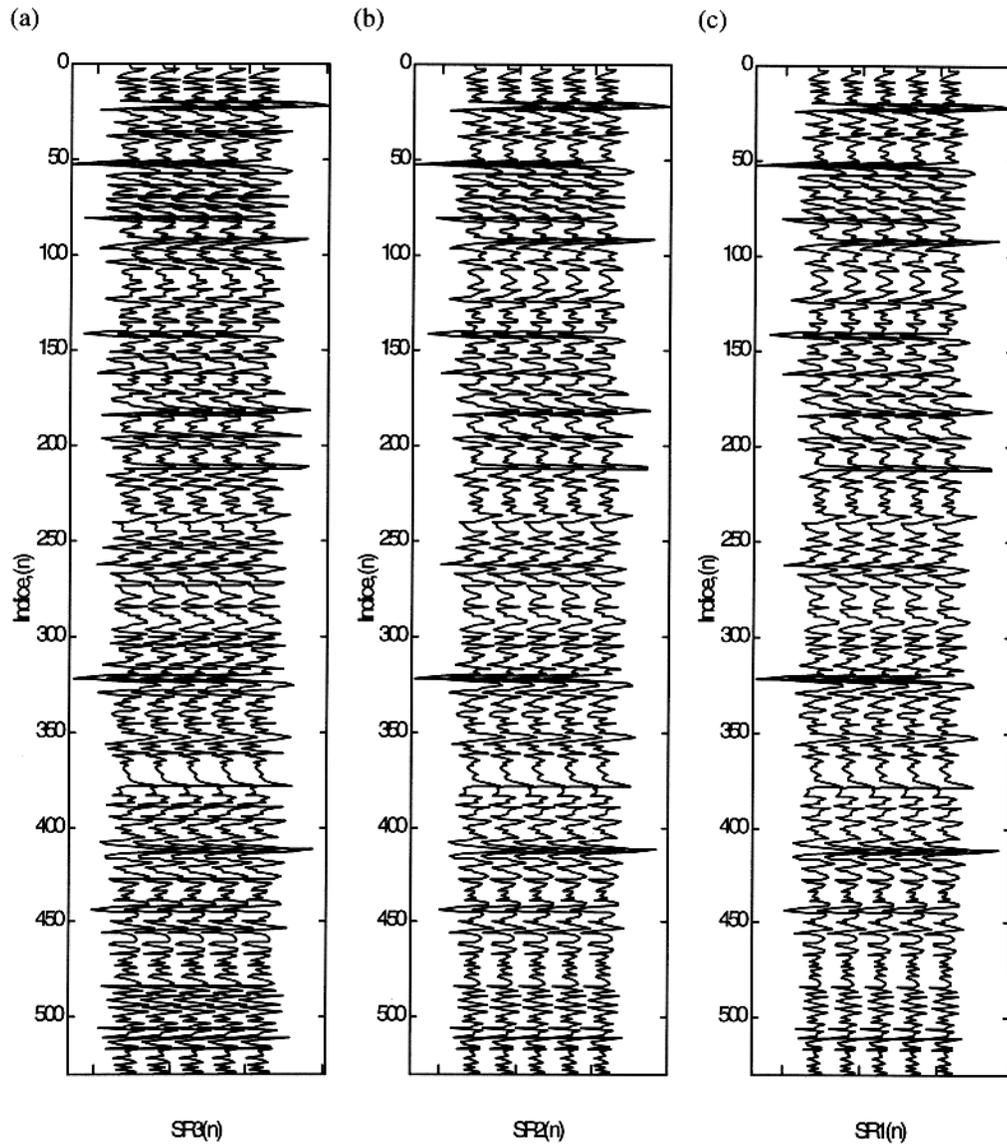


Figura 4.22 – Função refletividade recuperada através da metodologia de Kalman considerando processos estocásticos dos sismogramas das Figuras (4.16), (4.17) e (4.18), a partir dos pulsos recuperados pela deconvolução homomórfica, utilizando o programa cedido por Rocha (1998), com bons resultados: (a) $S / N=7,73$; (b) $S / N=15,65$; (c) $S / N=21,13$

deconvolvida. Por este motivo, para razões sinal/ruído pequenas, a sequência de impulsos é melhor recuperada através de outros métodos, como por exemplo a deconvolução utilizando a metodologia de Kalman considerando processos estocásticos (Rocha, 1998).

Na Figura (4.22) apresentamos os resultados obtidos através do método de Kalman, com utilização dos sismogramas sintéticos das Figuras (4.16), (4.17) e (4.18) e dos pulsos recuperados com a deconvolução homomórfica das Figuras (4.19), (4.20) e (4.21), ilustrando a utilização do método homomórfico para a recuperação do pulso-fonte, combinado com outra técnica para a obtenção da função refletividade, com bons resultados relativos ao caso puramente homomórfico.

5 – CONCLUSÃO

Um dos problemas principais em sismologia de exploração e de terremotos é a identificação do pulso sísmico primário (wavelet). O conhecimento da forma desse pulso possibilita a determinação das propriedades de atenuação e dispersão da trajetória de transmissão, um problema de considerável interesse na propagação de ondas sísmicas (Stoffa et al., 1974). Embora seja provável que na sísmica de exploração o pulso-fonte seja frequentemente considerado como sendo de fase-mínima, esta suposição não pode ser feita no caso da sismologia de terremotos. A deconvolução homomórfica aparece como um método poderoso de recuperação do pulso-fonte e, portanto, também da resposta do meio ao impulso. Mais importante, esta técnica remove a necessidade de fazermos as considerações usuais de um pulso de fase-mínima e de uma sequência de impulsos aleatória, uma vez que componentes de fase-máxima e de fase-mista são deconvolvidos tão facilmente quanto os de fase-mínima. O desvio nestas suposições, requeridas por métodos comumente usados em deconvolução de sequências consideradas neste trabalho, pode levar a erros grosseiros.

Uma classe de sistemas homomórficos para convolução pode ser definido usando um sistema característico logarítmico complexo, cuja saída é denominada de cepstro complexo da entrada. A estrutura do cepstro complexo é tal que, para um número de aplicações, os cepstros complexos dos componentes individuais do sinal ocupam posições distintas. Esta tendência permite a separação desses componentes através de janelamento cepstral. Dentro deste contexto, a deconvolução homomórfica se compara favoravelmente com a filtragem linear inversa, pelo fato de que a primeira não requer o conhecimento detalhado de um dos componentes do sinal.

Portanto, a deconvolução por filtragem homomórfica é um método atrativo e complementar, já que em primeiro lugar, reduz uma operação de convolução a uma superposição aditiva das componentes, e em segundo lugar, frequentemente alcança a separação das componentes individuais no domínio cepstral.

Todas as aplicações prévias do processamento homomórfico de sinais na análise de dados sísmicos publicados na literatura apresentam um arcabouço de análise comum, caracterizados pela representação de traços sísmicos por modelos invariantes no tempo e pelo uso da ponderação exponencial, quando necessário, para garantir o caráter de fase-mínima das séries refletoras.

A análise do cepstro complexo requer ainda o cálculo de um espectro de fase contínuo. Os algoritmos que detectam descontinuidades no valor principal da curva de fase encontram dificuldades na presença de um termo linear grande (rampa). Esta dificuldade é eliminada pelos métodos para restauração de fase, esboçados neste trabalho.

Para o caso de traços sísmicos sem ruído, o desempenho da deconvolução homomórfica depende de como os cepstros individuais do pulso-fonte e da série refletora podem ser melhor separados no cepstro do traço por filtragem linear.

O ruído aditivo pode causar grandes problemas no uso do método homomórfico, porque é difícil determinar seu efeito e posição no cepstro complexo. Além disso, o ruído somado ao traço sísmico pode causar severas instabilidades no processo de restauração da curva de fase. Certamente, se existe uma razão sinal/ruído pequena, são encontradas dificuldades na geração da curva de fase apropriada, uma vez que o tratamento do ruído aditivo não é facilmente manuseado nas computações cepstrais. O cálculo do cepstro complexo converte sequências que são convolvidas em sequências que são somadas, porém não é óbvio o que acontece para o ruído aditivo neste processamento.

A qualidade dos resultados obtidos pela análise homomórfica é, assim, muito sensível à razão sinal/ruído com distribuição normal, por causa dos efeitos indesejáveis do ruído no espectro de fase.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ALDRIDGE, D. F. 1990. Short Note: The Berlage Wavelet. *Geophysics*; 55 (11); 1508-1511.
- BAGGEROER, A. B. 1973. Tapped Delay Line Models for the Dereverberation of Deep Water Multiples. *Technical Report WHOI-73-66*. Woods Hole, Woods Hole Oceanographic Institution.
- BERKHOUT, A. J. 1985. Seismic Resolution: A Key to Detailed Geologic Information. *World Oil*; 47-51.
- BERRYMAN, L. et al. 1958. Reflections for Multiple Transition Layers. *Geophysics*; 23 (2); 223-243.
- BOGERT, B. P.; HEALY, M. J.; TUKEY, J. W. 1963. *The Quefreny Analysis of time Series for Echoes: Cepstrum, Pseudo-Auto-covariance, Cross-Cepstrum, and Saphe Cracking*. Time Series Analysis. New York, John Wiley & Sons, Inc.
- BUHL, P.; STOFFA, P. L.; BRYAN, G. M. 1974. The Application of Homomorphic Deconvolution to Shallow-water Marine Seismology. Part II: Real Data. *Geophysics*; 39 (4); 417-426.
- BUTTKUS, B. 1975. Homomorphic Filtering - Theory and Practice. *Geophysical Prospecting*; 23; 712-748.
- CLAERBOUT, J. 1968. Synthesis of a Layered Medium from Its Acoustic Transmission Response. *Geophysics*; 33 (2); 264-269.
- CLAERBOUT, J. F. 1976. *Fundamentals of Geophysical Data Processing: With Applications to Petroleum Prospecting*. New York, McGraw-Hill Book Company.
- GOUPILLAUD, P. L. 1961. An Approach to Inverse Filtering of Near-surface Layer Effects from Seismic Records. *Geophysics*; 26 (6); 754-760.
- LEINBACH, J. 1995. Wiener Spiking Deconvolution and Minimum-phase Wavelets: A Tutorial. *The Leading Edge*; 189-192.
- LEITE, L. W. B. 1998. *Introdução a Análise Espectral em Geofísica*. Curso de Pós-graduação em Geofísica. Belém, FADESP/CNPq
- LINES, L. R. & ULRYCH, T. J. 1977. The Old and the New in Seismic Deconvolution and Wavelet Estimation. *Geophysical Prospecting*; 25; 512-540.

- MIDDELTON, D. & WHITTLESEY, J. 1968. Seismic Models and Deterministic Operators for Marine Reverberation. *Geophysics*; 33 (4); 557-583.
- OLHOVICH, V. A. 1964. The Cause of Noise in Seismic Reflection and Refraction Work. *Geophysics*; 29 (6); 1015-1030.
- OPPENHEIM, A. V. 1965. Superposition in a Class of Nonlinear systems. *Technical Report*; 432. Cambridge, Research Laboratory of Electronics, M.I.T.
- OPPENHEIM, A. V. & SCHAFER, R. W. 1968. Homomorphic Analysis of Speech. *IEEE Trans. Audio Electroacoust*; AU-16 (2); 221-226.
- OPPENHEIM, A. V. & SCHAFER, R. W. 1975. *Digital Signal Processing*. New Jersey, Prentice Hall, Inc..
- OPPENHEIM, A. V.; SCHAFER, R. W.; STOCKHAM, T. G. 1968. Nonlinear filtering of Multiplied and Convolved Signals. *Proc. IEEE*; 65; 1264-1291.
- OTIS, R. M. & SMITH, R. B. 1977. Homomorphic Deconvolution by Spectral Averaging. *Geophysics*; 42; 1146-1157.
- PEACOCK, K. L. & TREITEL, S. 1969. Predictive Deconvolution: Theory and Practice. *Geophysics*; 34 (2); 155-169.
- POGGIAGLIOLMI, E.; BERKHOUT, A. J.; BOONE, M. M. 1982. Phase Unwrapping, Possibilities and Limitations. *Geophysical Prospecting*; 30; 281-291.
- ROBINSON, E. A. 1954. *Predictive Decomposition of Time Series with Applications to Seismic Exploration: Ph.D. thesis*. Cambridge, M.I.T.
- ROBINSON, E. 1957. Predictive Decomposition of Seismic Traces. *Geophysics*; 22 (4); 767-778.
- ROBINSON, E. 1967. *Multichannel time Series Analysis with digital Computer Programs*. San Francisco, Holden-Day, Inc.
- ROBINSON, E. & TREITEL, S. 1967. Principles of Digital Wiener Filtering. *Geophysical Prospecting*; 15 (3); 311-333.
- ROBINSON, E. A. & OSMAN, O. M. 1966. *Deconvolution 2: Introduction to Deconvolution*. Tulsa, Society of Exploration Geophysicists.
- ROCHA, M. P. C. 1998. *Aplicação do Método de Kalman a Dados Geofísicos*. Belém, Universidade Federal do Pará. Centro de Geociências. Tese (Mestrado em Geofísica).

- SCHAFER, R. W. 1968. Echo Removal by Discrete Generalized Linear Filtering. *Technical Report*; 466. Cambridge, Research Laboratory of Electronics, M. I.T.
- SILVIA, M. T. & ROBINSON, E. A. 1979. *Deconvolution of Geophysical Time Series in The Exploration for Oil and Natural Gas*. . New York, Elsevier Scientific Publishing Company.
- STOFFA, P. L.; BUHL, P.; BRYAN, G. M. 1974. The Application of Homomorphic Deconvolution to Shallow-water Marine Seismology. Part I: Models. *Geophysics*; 39 (4); 401-416.
- TREITEL, S. & ROBINSON, E. 1966. Seismic Propagation in Layered Media in Terms of Communication Theory. *Geophysics*; 31 (1); 17-32.
- TRIBOLET, J. M. 1978. Application of Short-time Homomorphic Signal Analysis to Seismic Wavelet Estimation. *Geoexploration*; 16; (75-96).
- TRIBOLET, J. M. 1979. *Seismic Applications of Homomorphic Signal Processing*. New Jersey, Prentice Hall.
- TROREY, A. 1962. Theoretical Seismograms with Frequency and Depth Dependent Absorption. *Geophysics*; 27 (6); 766-785.
- ULRYCH, T. J. 1971. Application of Homomorphic Deconvolution to Seismology. *Geophysics*; 36; 650-660.
- VÖSSING, H. 1990. *Homomorphe Dekonvolution*. Diplomarbeit. Alemanha, Institut für Geophysik der Technischen Universität Clausthal.
- WATERS, K. H. 1992. *Reflection Seismology: A Tool for Energy Resource Exploration*. Florida, Krieger Publishing Company.
- WUENSCHERL, P. C. 1960. Seismogram Synthesis Including Multiples and Transmission Coefficients. *Geophysics*; 25 (1); 106-129.
- YILMAZ, Ö. 1987. *Seismic Data Processing*. Tulsa, Society of Exploration Geophysicists.

APÊNDICES

APÊNDICE A – A Transformada-Z e sua relação com a Transformada de Fourier

A transformada-Z bilateral, TZ, de uma sequência $x(n)$ é definida como

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}, \quad (\text{A.1})$$

onde z é variável complexa,

$$z = x + iy, \quad (i = \sqrt{-1}). \quad (\text{A.2})$$

A TZ para a sequência unilateral (sequência causal) é definida por

$$X_I(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n}. \quad (\text{A.3})$$

Expressando a variável complexa z na forma polar como

$$z = r e^{i\omega\Delta t}, \quad (\text{A.4})$$

as equações (A.1) e (A.3) têm uma interpretação em termos da transformada de Fourier na forma discretizada, TFD. Especificamente, com z expresso dessa forma, as equações (A.1) e (A.3) se tornam:

$$X(r e^{i\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)r^{-n} e^{-i\omega n\Delta t}, \quad (\text{A.5})$$

e

$$X_I(r e^{i\omega}) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)r^{-n} e^{-i\omega n\Delta t}. \quad (\text{A.6})$$

De acordo com as equações (A.5) e (A.6), a TZ de $x(n)$ pode ser interpretada como a TFD de $x(n)$, multiplicada por uma sequência exponencial, r^{-n} . No raio unitário, ou seja, $r=1$, temos a relação direta entre a TZ e a TFD que é:

$$X(e^{i\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-i\omega n\Delta t}, \quad (\text{A.7})$$

e

$$X_1(e^{i\omega}) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)e^{-i\omega n\Delta t}. \quad (\text{A.8})$$

Portanto, a transformada- Z equivale à transformada de Fourier da sequência.

A TZ não converge para todas as sequências e para qualquer valor de z . O conjunto de valores de z para os quais uma determinada sequência converge é denominado de região de convergência. Aplicando o conceito de convergência uniforme às expressões acima, temos que:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)r^n| < \infty, \quad (\text{A.9})$$

e

$$\sum_{n=0}^{\infty} |x(n)r^n| < \infty, \quad (\text{A.10})$$

cujos resultados são garantidos por valores de r . Deste modo, é claro que, para sequências $x(n)$ onde a TF não seja convergente, é possível que a TZ convirja, através do produto $x(n)r^n$, para $r < 1$, como ilustrado na Figura (A.1).

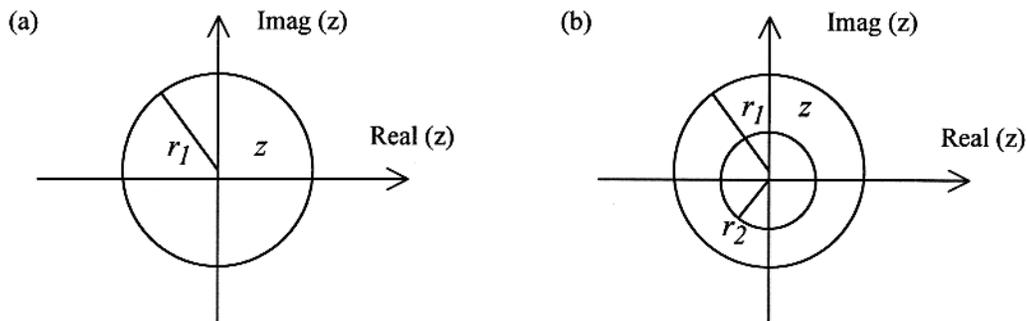


Figura A.1 – Plano- z complexo, 2D, ilustrando a região de convergência para a TZ. (a) TZ unilateral dentro do círculo de raio r_1 ; (b) TZ bilateral, entre r_1 e r_2 , $r_2 < |z| = 1 < r_1$.

Portanto, a região de convergência de $X_1(z)$ é limitada a valores máximos de r_1 e, conseqüentemente, definida pela região interior ao círculo $|z| < r_1$. A região de convergência de $X(z)$ é analisada rescrevendo a equação (A.5) na forma de duas sequências unilaterais, nulas para $n < 0$ e para $n > 0$, respectivamente,

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} x(-n)z^n - x(0), \quad (\text{A.11})$$

A primeira série converge para $|z| < r_1$ e a segunda para $|z| < r_2$. Se $r_1 > r_2$, então, a TZ bilateral existe e converge na região anular dada por (ver Figura A.1-b)

$$r_2 < |z| < r_1. \quad (\text{A.12})$$

As expansões adotadas, (A.1) e (A.3) têm a forma e propriedades das séries potenciais de Laurent e Taylor, respectivamente.

Para séries finitas, convenientes no trabalho prático, temos que

$$\sum_{n=0}^N x(n)z^{-n} = A_0 \prod_{m=1}^M (z - z_m) \prod_{p=1}^P (z - z_p), \quad (P + M = N) \quad (\text{A.13})$$

APÊNDICE B - TEOREMA DA CONVOLUÇÃO

Consideremos uma sequência $x(n)$ como a convolução bilateral de duas sequências $w(n)$ e $h(n)$ dada por

$$x(n) = w(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} w(k)h(n-k). \quad (\text{B.1})$$

A transformada- Z da sequência $x(n)$ é expressa por

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}. \quad (\text{B.2})$$

Substituindo a equação (A.1) em (A.2), obtemos

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} w(k)h(n-k) \right] z^{-n}. \quad (\text{B.3})$$

Trocando a ordem do somatório na equação (A.3), temos que

$$X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} w(k) \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n-k)z^{-n}. \quad (\text{B.4})$$

Substituindo o índice do segundo somatório por

$$m = n - k, \quad (\text{B.5})$$

obtemos

$$X(z) = \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} w(k)z^{-k} \right] \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)z^{-m} \right]. \quad (\text{B.6})$$

Assim, para valores de z dentro das regiões de convergência de $W(z)$ e $H(z)$, podemos escrever

$$X(z) = W(z)H(z), \quad (\text{B.7})$$

onde a região de convergência inclui a interseção das regiões de convergência de $W(z)$ e $H(z)$.

Portanto, se uma sequência $x(n)$ é representada como a convolução de duas sequências, $w(n)$ e $h(n)$, então a sua transformada- Z , $X(z)$, é o produto das transformadas- Z das duas componentes $W(z)$ e $H(z)$.

APÊNDICE C – Simbologia Utilizada

Apresentamos abaixo, uma tabela relacionando os símbolos utilizados no presente trabalho, com suas respectivas definições.

SÍMBOLO	VARIÁVEL
I	Impedância acústica
v	Velocidade
ρ	Densidade
t	Tempo
δ	Função delta de Dirac
h	Função refletividade
w	Pulso-fonte
x	Sismograma
r	Ruído aleatório
S/N	Razão sinal/ruído
ϕ	Função autocorrelação
f	Função filtro
y	Saída real do filtro
d	Saída desejada do filtro
E	Erro dos mínimos quadrados normalizado
T_*	Sistema característico
T_*^{-1}	Sistema característico inverso
\hat{w}	Cepstro complexo do pulso-fonte
\hat{h}	Cepstro complexo da refletividade
\hat{x}	Cepstro complexo do sismograma
l	Filtro linear no domínio cepstral
θ_I	Espectro de fase inicial (módulo π)
θ_P	Espectro de fase principal (módulo 2π)
θ_L	Espectro de fase restaurado com a tendência linear
θ_R	Espectro de fase restaurado com a tendência linear retirada

APÊNDICE D – PROGRAMA PARA DECONVOLUÇÃO HOMOMÓRFICA

```

%%%%%%%%%%
%          PROGRAMA DECHOM.M                      %
%          RECUPERAÇÃO DOS COMPONENTES DO SISMOGRAMA      %
%          POR FILTRAGEM HOMOMÓRFICA                    %
%%%%%%%%%%
clf;clear;
%  ENTRADA DE DADOS
a=0.95; (ponderação exponencial)
dt=1; (intervalo de tempo)
t1=20/dt; (filtro)
load fonreal.dat; (pulso-fonte)
load reflet2.dat; (função refletividade)
load sismo3.dat; (sismograma)
s=fonreal;
ref=reflet2;
x1=sismo3;
%  DUPLICAÇÃO DO SISMOGRAMA (refinamento da amostragem)
p=length(x1);
p2=2*p;
x=zeros(1,p2);
for i=1:p;
    x(i)=x1(i);
end;
%  GERACAO DO SISMOGRAMA COM RUIDO
randn('seed',828586);
n1=randn(size(x1))*0.023;
n=zeros(1,p2);
for i=1:p;
    n(i)=n1(i);
end;

```

```

xn=x+n;
% CALCULO DA RAZAO SINAL-RUIDO
sx=cov(xn);
sn=cov(n);
rsn=sx/sn
% PONDERAÇÃO EXPONENCIAL
for i=1:p2;
    xp(i)=(a^(i-1))*xn(i);
end;
% CÁLCULO DOS CEPSTROS COMPLEXOS
cx1=cceps(x1);
cx=cceps(xn);
cn=cceps(n);
cxp=cceps(xp);
% FILTRAGEM LINEAR NO DOMÍNIO CEPSTRAL
for i=1:ijan;
    cxwp(i)=cxp(i);
    cxrp(i)=0.;
end;
for i=ijan:p2;
    cxwp(i)=0.;
    cxrp(i)=cxp(i);
end;
% RECUPERAÇÃO DO PULSO
CXW=fft(cxwp);
xwp=exp(CXW);
wpc=ifft(xwp);
wp=real(wpc);
w1(1)=0.;
for i=2:p2;
    w(i)=(a^(-1*(i-2)))*wp(i-1);

```



```
% SISMOGRAMA ORIGINAL
subplot(3,1,1);
plot(x);
gtext('a');
axis([0 p -0.5 0.5]);
grid;
% RUIDO ALEATÓRIO
subplot(3,1,2);
plot(eixot,n);
gtext('b');
axis([0 p -0.1 0.1]);
grid;
% SISMOGRAMA COM RUIDO
subplot(3,1,3);
plot(eixot,xn);
gtext('c');
axis([0 p -0.5 0,5]);
grid;
figure(2);
% CEPSTRO DO SISMOGRAMA SEM RUIDO
subplot(3,1,1);
plot(eixox,cx1);
axis([0 p -10 10]);
gtext('d');
grid;
% CEPSTRO DO RUIDO
subplot(3,1,2);
plot(eixot,cn);
axis([0 p -20 20]);
gtext('e');
grid;
```

```
% CEPSTRO DO SISMOGRAMA COM RUIDO
subplot(3,1,3);
plot(eixot,cx);
axis([0 p -10 10]);
gtext('(f)');
grid;
figure(3);
% CEPSTRO DO SISMOGRAMA PONDERADO
subplot(3,1,1);
plot(eixot,cxp);
gtext('(a)');
axis([0 p -5 5]);
grid;
% PULSO RECUPERADO
subplot(3,2,3);
plot(eixot,w);
gtext('(b)');
axis([0 35 -1 1]);
grid;
% REFLETIVIDADE RECUPERADA
subplot(3,1,3);
plot(eixot,r);
gtext('(c)');
axis([0 p -0.5 0.5]);
grid;
```