UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ CENTRO DE GEOCIÊNCIAS CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM GEOFÍSICA

TESE DE MESTRADO

ANÁLISE DAS APROXIMAÇÕES R_{PP} E R_{SP} PARA MEIOS ISOTRÓPICOS

DARCICLÉA FERREIRA SANTOS



BELÉM - PARÁ 2002

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ CENTRO DE GEOCIÊNCIAS CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM GEOFÍSICA

ANÁLISE DAS APROXIMAÇÕES R_{PP} E R_{SP} PARA MEIOS ISOTRÓPICOS

TESE APRESENTADA POR

DARCICLÉA FERREIRA SANTOS

COMO REQUISITO PARCIAL À OBTENÇÃO DE GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS NA ÁREA DE GEOFÍSICA

Data da aprovação:	16 / 08 / 2002	
Nota: 9,3 (EXCELEN	NTE)	
COMITÊ DE TESE:		
		Prof. Dr. João dos Santos Protázio (Orientador)
		Prof. Dr. Lúcio Tunes dos Santos
		Prof. Dr. Renato Borges Guerra

BELÉM 2002

SANTOS, Darcicléa Ferreira. **Análise das aproximações R**_{pp} e **R**_{sp} **para meios isotrópicos**. Belém, Universidade Federal do Pará. Centro de Geociências, 2002. 81p.

Dissertação (Mestrado em Geofísica) – Curso de Pós – Graduação em Geofísica, CG, UFPA, 2002.

1.EQUAÇÕES DE KNOTT-ZOEPPRITZ 2.ANÁLISE DE SENSIBILIDADE

3.ANÁLISE DE AMBIGÜIDADE 4.INVERSÃO LINEAR DE AVO I.PROTÁZIO,

João dos Santos, Orient. II. Título.

Aos meus pais José Augusto e Estelia Maria, meu padrinho François Rubeaux e a minha sobrinha Jéssica Lisandra.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por ter me dado forças e inspiração para o desenvolvimento desta tese.

À Coordenação do Curso de Pós-Graduação em Geofísica (CPGf) da Universidade Federal do Pará (UFPa) pela oportunidade de capacitação do meu conhecimento na área de Métodos Sísmicos.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), A Agência Nacional do Petróleo (ANP) e a Financiadora de Estudos e Projetos (FINEP), através do Programa de Recursos Humanos da ANP para o Setor Petróleo e Gás Natural – PRH-ANP/MME/MCT pela concessão de bolsa, que sem seu auxílio seria quase impossível a realização deste trabalho.

Ao PRONEX/UNICAMP em Engenharia de Reservatórios pela infra-estrutura computacional.

Aos professores João dos Santos Protázio (Orientador), Jessé Carvalho Costa (Coorientador) e Ellen de Nazaré Souza Gomes (Co-orientadora), pela orientação, paciência e apoio dispensados a esta dissertação.

Ao professor João Batista Corrêa da Silva pelas discussões e sugestões, indispensáveis para a conclusão desta tese.

Ao corpo docente do CPGf pelo apoio na erudição do meu currículo.

Aos colegas de curso pelos esclarecimentos das dúvidas encontradas ao longo deste trabalho.

Aos professores Lúcio Tunes dos Santos e Renato Borges Guerra por participarem como membros da banca examinadora.

À secretária do CPGf Benildes Lopes Rodrigues de Souza, amiga e confidente, pelo incentivo e apoio nos momentos difíceis, pessoais e profissionais, que encontrei durante o período de curso de pós-graduação.

Aos amigos Felipe e Rosângela por estarem sempre presentes nos momentos que mais precisei de apoio, auxílio técnico e motivação.

Aos meus pais, em especial à minha mãe Estelia Maria Ferreira Santos, por sua preocupação, paciência e compreensão nos momentos em que me ausentei. Ao meu padrinho François Rubeaux por seus conselhos e incentivos na minha opção profissional.

SUMÁRIO

DEDIC	CATÓRIA	i
AGRA	DECIMENTOS	ii
LISTA	DE ILUSTRAÇÕES	V
RESUN	МО	1
ABSTE	RACT	2
1-	INTRODUÇÃO	3
2-	APROXIMAÇÕES DAS EQUAÇÕES DE KNOTT-ZOEPPRITZ	6
2.1-	EQUAÇÕES DE KNOTT-ZOEPPRITZ	7
2.2-	APROXIMAÇÕES QUADRÁTICAS	9
2.3-	APROXIMAÇÕES LINEARIZADAS	11
2.4-	COMPARAÇÃO DAS APROXIMAÇÕES	12
2.4.1 -	Análise dos Resultados	14
3 -	ANÁLISES DE SENSIBILIDADE E DE AMBIGÜIDADE	21
3.1 -	A MATRIZ DE SENSIBILIDADE	21
3.2 -	A MATRIZ DE RESOLUÇÃO	23
3.3 -	FORMULAÇÃO MATEMÁTICA DA FUNÇÃO OBJETIVO	24
3.4 -	ANÁLISES DE SENSIBILIDADE E DE AMBIGÜIDADE	25
3.5 -	OS RESULTADOS DAS ANÁLISES DE SENSIBILIDADE E DE AMBIGÜIDADE.	26
3.5.1	Número de Condição	27
3.5.2	Valores Singulares	29
3.5.3	Ângulos Formados pelas Retas das Curvas de Ambigüidade	33
4-	INVERSÃO LINEAR DE AVO	47
4.1-	FORMULAÇÃO MATEMÁTICA DO PROBLEMA DE INVERSÃO	47
4.2-	SIMULAÇÃO NUMÉRICA	48
4.3-	INVERSÃO LINEAR E ANÁLISE DOS RESULTADOS	49
4.3.1-	Modelo 1 e Modelo 4	50
4.3.2-	Modelo 2	51
4.3.3-	Modelo 3	51
5 -	CONCLUSÕES	57

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	59
APÊNDICES	62
APÊNDICE A: Formulação Exata dos Coeficientes de Reflexão e Transmissão	63
APÊNDICE B: Derivação das Aproximações dos Coeficientes de Reflexão e Transmissão	66
APÊNDICE C: Aproximações em Torno do Ângulo de Incidência ($\grave{\mathbf{e}}_1$)	67
APÊNDICE D: Aproximações em Torno da Média Angular $(\stackrel{-}{\hat{e}})$	69
APÊNDICE E: Tabelas de Resultados	73

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

FIGURAS

Figura 2.1	Espalhamento de uma onda incidente P	7
Figura 2.2	Resultados dos coeficientes R_{PP} e T_{PP} para o modelo 1 das aproximações lineares e Quadráticas expressas em função do ângulo	
	de incidência (θ_1) e da média angular $(\bar{\theta})$	15
Figura 2.3	Resultados dos coeficientes R _{SP} e T _{SP} para o modelo 1 das	
	aproximações lineares e Quadráticas expressas em função do ângulo	
	de incidência (θ_1) e da média angular $(\bar{\theta})$	16
Figura 2.4	Resultados dos coeficientes R _{PP} e T _{PP} para o modelo 2 das	
	aproximações lineares e Quadráticas expressas em função do ângulo	
	de incidência (θ_1) e da média angular $(\bar{\theta})$	17
Figura 2.5	Resultados dos coeficientes R _{SP} e T _{SP} para o modelo 2 das	
	aproximações lineares e Quadráticas expressas em função do ângulo	
	de incidência (θ_1) e da média angular $(\bar{\theta})$	18
Figura 2.6	Resultados dos coeficientes R _{PP} e T _{PP} para o modelo 3 das	
	aproximações lineares e Quadráticas expressas em função do ângulo	
	de incidência (θ_1) e da média angular $(\bar{\theta})$	19
Figura 2.7	Resultados dos coeficientes R _{SP} e T _{SP} para o modelo 3 das	
	aproximações lineares e Quadráticas expressas em função do ângulo	
	de incidência (θ_1) e da média angular $(\bar{\theta})$	20
Figura 3.1	Número de condição para as formas linearizadas do R _{PP} , R _{SP} e da	
	forma combinada [R_{PP} R_{SP}] versus o máximo ângulo de incidência	28
Figura 3.2	Logaritmos dos valores singulares da matriz $\mathbf{M_{PP}},\mathbf{M_{SP}}$ e $\widetilde{\mathbf{M}}$ versus	
	o máximo ângulo de incidência para o modelo 1.	30
Figura 3.3	Logaritmos dos valores singulares da matriz $\mathbf{M_{PP}},\mathbf{M_{SP}}$ e $\widetilde{\mathbf{M}}$ versus	
	o máximo ângulo de incidência para o modelo 2	31
Figura 3.4	Logaritmos dos valores singulares da matriz $\mathbf{M_{PP}}$, $\mathbf{M_{SP}}$ e $\widetilde{\mathbf{M}}$ máximo	

	ângulo de incidência para o modelo 3	32
Figura 3.5	Curvas de contorno do modelo 1 para a combinação de parâmetros	
	$\overline{\delta Z} \times \overline{\delta \alpha}$	36
Figura 3.6	Curvas de contorno do modelo 1 para a combinação de parâmetros	
	$\overline{\delta Z} \times \overline{\delta \mu} \$	37
Figura 3.7	Curvas de contorno do modelo 1 para a combinação de parâmetros	
	$\overline{\delta \alpha} \times \overline{\delta \mu}$	38
Figura 3.8	Curvas de contorno do modelo 2 para a combinação de parâmetros	
	$\overline{\delta Z} \times \overline{\delta \alpha}$	39
Figura 3.9	Curvas de contorno do modelo 2 para a combinação de parâmetros	
	$\overline{\delta Z} \times \overline{\delta \mu} \$	40
Figura 3.10	Curvas de contorno do modelo 2 para a combinação de parâmetros	
	$\overline{\delta \alpha} \times \overline{\delta \mu}$	41
Figura 3.11	Curvas de contorno do modelo 3 para a combinação de parâmetros	
	$\overline{\delta Z} \times \overline{\delta \alpha}$	42
Figura 3.12	Curvas de contorno do modelo 3 para a combinação de parâmetros	
	$\overline{\delta Z} \times \overline{\delta \mu} \$	43
Figura 3.13	Curvas de contorno do modelo 3 para a combinação de parâmetros	
	$\overline{\delta \alpha} \times \overline{\delta \mu}$	44
Figura 3.14	Matrizes de resolução da matriz M na cobertura angular [0°,30°]	
	para os modelos 1, 2 e 3,	46
Figura 4.1	Parâmetros estimados e erro relativo da estimativa do modelo 1	53
Figura 4.2	Parâmetros estimados e erro relativo da estimativa do modelo 2	54
Figura 4.3	Parâmetros estimados e erro relativo da estimativa do modelo 3	55
Figura 4.4	Parâmetros estimados e erro relativo da estimativa do modelo 4	56

TABELAS

Tabela 2.1	Parâmetros para o cálculo das amplitudes dos coeficientes de	
	reflexão, transmissão e suas convertidas	12
Tabela 2.2	Contrastes médios relativos dos modelos apresentados na tabela 1	12
Tabela 3.1	Projeções das colunas de V obtidas pelas aproximações R_{PP} e R_{SP}	33
Tabela 3.2	Projeções das colunas de V obtidas pela aproximação combinada[R_{PP}	
	R _{SP}]	34
Tabela 4.1	Parâmetros para o cálculo dos contrastes médios relativos do modelo	
	4	50
Tabela 4.2	Parâmetros reais e médios estimados, erros percentuais de inversão,	
	desvio padrão e o coeficiente de variação (CV) para o modelo 1	53
Tabela 4.3	Parâmetros reais e médios estimados, erros percentuais de inversão,	
	desvio padrão e o coeficiente de variação (CV) para o modelo 2	54
Tabela 4.4	Parâmetros reais e médios estimados, erros percentuais de inversão,	
	desvio padrão e o coeficiente de variação (CV) do modelo 1	55
Tabela 4.5	Parâmetros reais e médios estimados, erros percentuais de inversão,	
	desvio padrão e o coeficiente de variação (CV) para o modelo 4	56
Tabela E.1a	Resultados dos autovalores do modelo 1, usando a matriz de	
	sensibilidade M .	73
Tabela E.1b	Colunas da matriz V para o modelo 1, usando a matriz de	
	sensibilidade M	73
Tabela E.2a	Resultados dos autovalores do modelo 1, usando a matriz de	
	sensibilidade N.	74
Tabela E.2b	Colunas da matriz V para o modelo 1, usando a matriz de	
	sensibilidade N	74
Tabela E.3a	Resultados dos autovalores do modelo 1, usando a matriz de	
	sensibilidade $\widetilde{\mathbf{M}}$	75
Tabela E.3b	Colunas da matriz V para o modelo 1, usando a matriz de	
	sensibilidade $\widetilde{\mathbf{M}}$	75

Resultados dos autovalores do modelo 2, usando a matriz de
sensibilidade M .
Colunas da matriz V para o modelo 2, usando a matriz de
sensibilidade M
Resultados dos autovalores do modelo 2, usando a matriz de
sensibilidade N
Colunas da matriz \mathbf{V} para o modelo 2, usando a matriz de
sensibilidade N.
Resultados dos autovalores do modelo 2, usando a matriz de
sensibilidade $\widetilde{\mathbf{M}}$
Colunas da matriz V para o modelo 2, usando a matriz de
sensibilidade $\widetilde{\mathbf{M}}$
Resultados dos autovalores do modelo 3, usando a matriz de
sensibilidade M
Colunas da matriz V para o modelo 3, usando a matriz de
sensibilidade M
Resultados dos autovalores do modelo 3, usando a matriz de
sensibilidade N
Colunas da matriz V para o modelo 3, usando a matriz de
sensibilidade N
Resultados dos autovalores do modelo 3, usando a matriz de
sensibilidade $\widetilde{\mathbf{M}}$
Colunas da matriz V para o modelo 3, usando a matriz de
sensibilidade $\widetilde{\mathbf{M}}$

RESUMO

Neste trabalho são apresentadas aproximações lineares e quadráticas das equações de Zoeppritz para a obtenção dos coeficientes de reflexão e transmissão de eventos P-P e P-S em função dos ângulos de incidência e da média angular, bem como a análise de inversão linear de AVO, considerando os eventos de reflexão P-P e P-S dissociados e combinados. O uso das chamadas aproximações pseudo-quadráticas foi aplicado para obtenção de aproximações quadráticas apenas para eventos-PP, em torno dos contrastes médios das velocidades de ondas compressionais e cisalhantes e da razão Vs/Vp. Os resultados das aproximações desenvolvidas neste trabalho mostram que as aproximações quadráticas são mais precisas que as lineares, nas duas versões angulares. As comparações entre as aproximações em termos do ângulo de incidência e da média angular mostram que as aproximações quadráticas são equivalentes dentro do limite angular de [0°, 30°]. Por outro lado, as aproximações lineares em função do ângulo de incidência mostram-se mais precisas que as aproximações lineares em função da média angular. Na inversão linear, fez-se análises de sensibilidade e de ambigüidade e observou-se que, nos caso de eventos de reflexão P-P e P-S dissociados, apenas um parâmetro pode ser estimado e que a combinação destes eventos consegue estabilizar a inversão, permitindo a estimativa de dois dentre os parâmetros físicos dos meios (contrastes de impedância, de velocidade de onda P e de módulo de cisalhamento).

ABSTRACT

This work presents linear and quadratic approximations of the Zoeppritz equations for the derivation of reflection and transmission coefficients from P-P and P-S events as a function of incidence angles and angular average, as well as the linear inversion analysis, AVO, in respect to the disassociated and combined P-P and P-S reflection events. The use of the so-called pseudoquadratic approximations was applied for the derivation of quadratic approximations only for PPevents, around the average contrasts of compressional and shear waves velocities and Vs/Vp ratio. The results of approximations derived in this work show that quadratic approximations were more precise than the linear ones in the two angular versions. The comparisons between these approximations in terms incidence angle and angular average show that the quadratic approximations are equivalent within the angular limit of [0° to 30°]. In the other hand, the linear approximations as a function of incidence angle are more precise than the linear approximations as a function of the angular average. In the linear inversion, sensitivity and ambiguity analyses were carried out and one could see that in the case of disassociated reflection P-P and P-S events, just a parameter can be estimated and the combination of these events can stabilize the inversion permitting the estimation of two physical parameters for the media (impedance, P-wave velocity and shear bulk module contrasts).

1 - INTRODUÇÃO

Desde 1930 a exploração de hidrocarbonetos tem sido dominada pela técnica de reflexão sísmica. A alta resolução dos dados, a obtenção de amostragem contínua e o baixo custo comparado com as perfurações de poços fazem do método uma parte indispensável da moderna exploração de óleo e gás.

Perfis de reflexão sísmica são utilizados para localizar estruturas que têm o potencial de aprisionar hidrocarbonetos. A exploração será mais eficiente se o hidrocarboneto puder ser detectado direto das seções sísmicas. Uma das desvantagens é a possibilidade das armadilhas não conter hidrocarbonetos ou este se encontrar em níveis de saturação não comerciáveis.

Em 1960, os geofísicos descobriram que a presença de gás, em geral, produz altas amplitudes conhecidas como "bright spots". A exploração de "bright spot" tem obtido grande sucesso, em particular no Golfo do México, em experimentos "offshore". Apesar do método do "bright spot" ter potencial para detectar gás, este pode ser causado por outros fatores, como intrusões ígneas, carbonatos, linhitos ou areias úmidas (Allen & Peddy, 1993). Neste sentido tornam-se necessárias mais pesquisas e testes mais definitivos com o "bright spot" para detectar gás direto dos registros sísmicos.

Ostrander (1984) mostrou como utilizar o "bright spot" para prospectar hidrocarbonetos a partir de dados sísmicos através da análise da amplitude com afastamento entre fonte e receptor (AVO). O uso de AVO como um indicador direto de hidrocarbonetos em rochas clásticas está associado às diferentes respostas obtidas com a velocidade de onda P (Vp) e velocidade de onda S (Vs) em presença de gás nos poros. A presença de ar ou gás reduz a velocidade de onda P mas não afeta a velocidade de onda S. A velocidade de onda S depende da estrutura da rocha. Sendo assim, a análise de AVO é uma pesquisa para uma resposta sísmica anômala podendo também discriminar a litologia.

O decréscimo na razão Vp/Vs associada à presença de gás muda as amplitudes das reflexões do topo e base do reservatório como uma função do ângulo com as ondas espalhadas na interface. As expressões que determinam estas amplitudes são dadas pelas equações de Knott-Zoeppritz (Shoemberg & Protázio, 1992) e são bastante intricadas, tornando difícil a análise de AVO, ressaltando a necessidade do desenvolvimento de aproximações para as equações de Knott-Zoeppritz. Várias formas linearizadas das equações de Knott-Zoeppritz foram obtidas em

termos dos contrastes relativos dos parâmetros físicos e de incidências subnormais, em meios homogêneos isotrópicos e fracamente anisotrópicos (Shuey, 1985; Thomsen, 1986; Castagna, 1993; Kim et al. 1993). Linearizações para meios anisotrópicos mais gerais foram desenvolvidas por Rüger (1998); Psencik & Vavrycuk (1998); Vavrycuk (1999) e Gomes (1999). Entretanto, De Haas & Berkhout (1988) e Drufruca & Mazzotti (1995) constataram que nem todos os parâmetros físicos das linearizações podem ser recuperados na inversão sísmica de AVO, em particular, o contraste de densidade que pode revelar informações importantes sobre a presença e saturação de hidrocarbonetos. Por outro lado, constatou-se que as anomalias de AVO produzidas por reflexões de ondas P não distinguem o grau de saturação de gás em arenitos (Castagna, 2001). Wu (2000) analisando os coeficientes de reflexão de ondas convertidas observou a sua potencialidade não apenas para discriminar a saturação de gás em arenitos mas também para predizer a porosidade e estimar o conteúdo de saturação do gás. Lines (1998) verificou que o contraste de densidade, que possui informação sobre a presença e saturação de hidrocarbonetos, tem dificuldades de ser estimado com aproximações linearizadas, resultado confirmado por Kabir et al. (2000). Isto motivou as pesquisas para aproximações além das linearizações e da análise de AVO para as ondas convertidas.

Ursin & Dahl (1992) desenvolveram aproximações quadráticas em termos do parâmetro de raio e, nestas aproximações, a série de Taylor é calculada apenas em torno dos parâmetros físicos do modelo. Wang (1999) apresentou aproximações quadráticas para os coeficientes de reflexão e de transmissão de uma onda P-incidente em termos dos contrastes relativos dos meios, analisando a sensibilidade dos parâmetros físicos com propósitos de inversão não linear de AVO. Estas extensões quadráticas foram desenvolvidas em termos da média angular entre o ângulo incidente e o transmitido e resultaram em aproximações bastante robustas mesmo para contrastes moderados dos parâmetros físicos dos meios, mostrando ser possível estimar não apenas dois, mas três desses parâmetros: o contraste de velocidade da onda S, o contraste de velocidade da onda P e a razão destas velocidades na interface.

O objetivo deste trabalho é desenvolver aproximações lineares e quadráticas para os coeficientes de ondas P refletidas, transmitidas e convertidas em termos do ângulo de incidência e também da média angular e aplicar métodos de inversão linear visando estimar os parâmetros físicos dos meios a partir de dados de AVO em meios perfeitamente elásticos, homogêneos e isotrópicos. Todos os testes usados neste trabalho utilizaram dados sintéticos, gerados a partir das

equações de Zoeppritz, em modelos cujos contrastes médios relativos são considerados como fracos, moderados e altos. Na seção 2 são obtidas as aproximações dependentes de três parâmetros: os contrastes médios de impedância, de velocidade de onda compressional e do módulo de cisalhamento. No desenvolvimento de tais expressões são considerados os seguintes pressupostos: baixos contrastes dos parâmetros físicos entre os meios envolvidos e ângulos de incidência subnormais. Estas aproximações são comparadas com as expressões exatas, obtidas das equações de Zoeppritz, visando-se estabelecer a sua precisão e seus limites de validade. Na seção 3, preparando o processo de inversão linear de AVO a partir de dados sintéticos, utilizou-se o método SVD (Decomposição em Valores Singulares) e as curvas de contorno das funções objetivo para analisar a sensibilidade e a ambigüidade das aproximações linearizadas para resolução dos parâmetros estimados. Na seção 4 foram aplicadas inversões utilizando-se o estimador da inversa generalizada e a reconstrução dos coeficientes a partir dos parâmetros estimados, que são comparados com os dados sintéticos. Os resultados obtidos nestas estimativas são analisados e comparados com os resultados da seção 3.

2 - APROXIMAÇÕES DAS EQUAÇÕES DE KNOTT-ZOEPPRITZ

As equações que descrevem o comportamento dos coeficientes de reflexão e de transmissão como função do ângulo de incidência e das propriedades elásticas do modelo foram estudadas inicialmente por Knott¹ e Zoeppritz² *apud* Castagna (1993).

Na literatura de AVO existem várias formulações para as expressões exatas dos coeficientes de reflexão e de transmissão (Muskat & Meres³; Koefoed⁴ e Tooley et al.⁵ *apud* Mallick, 1993 e Aki & Richards, 1980), mas na elaboração deste trabalho serão utilizadas as equações apresentadas em Shoemberg & Protázio (1992).

No desenvolvimento desta dissertação são considerados apenas meios isotrópicos e, desta forma, as chamadas matrizes de impedância que determinam os coeficientes de reflexão, transmissão e de suas convertidas são de ordem 2x2, o que torna as soluções apresentadas por Schoenberg & Protázio (1992) bastante simples. As equações de Knott-Zoepptriz, ou apenas equações de Zoeppritz, como são conhecidas, são governadas pelos parâmetros elásticos (velocidade de onda compressional, velocidade de onda cisalhante e densidade) e os ângulos de incidência. Como a sua formulação exata apresenta várias combinações entre as propriedades elásticas, tornando seus termos bastante intricados para a análise de AVO, os geofísicos buscam a obtenção de aproximações que simplifiquem o problema, especialmente quando usadas em procedimentos de inversão.

Nesta seção são apresentadas aproximações lineares e quadráticas dos coeficientes de reflexão e de transmissão em torno do parâmetro de raio *s* e das propriedades elásticas, considerando-se a incidência de uma onda plana P. Estas expressões são regidas pelos contrastes médios das velocidades de ondas compressional (onda P) e cisalhante (onda S) e pelo contraste

¹ KNOTT, C. G. 1899. Reflexion and refraction of elastic waves with seismological applications: *Phil. Mag.*, 48: 64-97.

² ZOEPPRITZ, K. 1919. Erdbebenwellen VIIIB, On the reflection and propagation of seismic waves: *Gottinger Nachrichten*, I.: 66-84.

³ MUSKAT, M. & MERES, M. W. 1940. Reflection and transmission coefficients for plane waves in elastic coefficients for plane waves in elastic media: *Geophysics*, 5: 115-148.

⁴ KOEFOED, O. 1955. On the effect of Poisson's ratios of rock strata on the reflection coefficients of plane waves: *Geophys. Prosp.*, 3: 381-387.

⁵ TOOLEY, R.D.; SPENCER, T.W.; SAGOCI, H.F. 1965. Reflection and transmission of plane compressional waves: *Geophysics*, 30: 552-570.

médio de densidade e são apresentadas em dois níveis: como funções do ângulo de incidência e da média angular entre o ângulo incidente e o ângulo de transmissão.

2.1 - EQUAÇÕES DE KNOTT-ZOEPPRITZ

Sejam dois semi-espaços elásticos, homogêneos e isotrópicos separados por uma interface plana horizontal ($x_3 = 0$) com densidade, ρ_{γ} ; velocidade da onda P, α_{γ} ; e velocidade da onda S, β_{γ} , associadas aos meios incidente ($\gamma = 1$) e subjacente ($\gamma = 2$). A incidência de uma onda plana P dará origem a quatro outras ondas: duas no meio incidente (a refletida R_{PP} e a sua convertida R_{SP}) e duas no meio subjacente (a transmitida T_{PP} e a sua convertida T_{SP}), conforme ilustração na Figura 2.1.

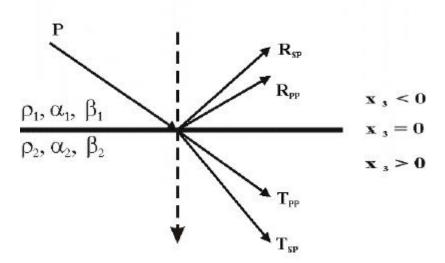


Figura 2.1. Espalhamento de uma onda incidente P.

Sendo *s* o parâmetro do raio e considerando-se as continuidades do campo de deslocamento (Lei de Snell) e das componentes verticais do campo de tração, as amplitudes das ondas planas espalhadas através da interface são dadas de forma exata pela solução das equações generalizadas de Zoeppritz (Shoemberg & Protázio,1992):

$$\mathbf{X}_{1}(\mathbf{i} + \mathbf{r}) = \mathbf{X}_{2}\mathbf{t}, \qquad (2.1)$$

$$\mathbf{Y}_{1}(\mathbf{i} - \mathbf{r}) = \mathbf{Y}_{2}\mathbf{t},\tag{2.2}$$

sendo i, r e t as amplitudes da onda incidente, refletida e transmitida, respectivamente e

$$\mathbf{X}_{\tilde{\mathbf{a}}} = \begin{bmatrix} \alpha_{\gamma} \mathbf{s} & \mathbf{q}_{3s\gamma} \\ -\rho_{\gamma} \alpha_{\gamma} (1 - 2\beta_{\gamma}^{2} \mathbf{s}^{2}) & 2\rho_{\gamma} \beta_{\gamma}^{2} \mathbf{s} \mathbf{q}_{3s\gamma} \end{bmatrix}, \tag{2.3}$$

e

$$\mathbf{Y}_{\tilde{\mathbf{a}}} = \begin{bmatrix} -2\rho_{\gamma}\beta_{\gamma}^{2}\mathbf{s}\mathbf{q}_{3p\gamma} & -\rho_{\gamma}\beta_{\gamma}(1-2\beta_{\gamma}^{2}\mathbf{s}^{2}) \\ \mathbf{q}_{3p\gamma} & -\beta_{\gamma}\mathbf{s} \end{bmatrix}, \tag{2.4}$$

as matrizes de impedância associadas aos meios $\gamma = 1$ e $\gamma = 2$. As expressões

$$q_{3p\gamma} = (1 - \alpha_{\gamma}^2 s^2)^{1/2} e q_{3s\gamma} = (1 - \beta_{\gamma}^2 s^2)^{1/2},$$
 (2.5)

são as componentes verticais da direção de fase.

Considerando possíveis as inversões das matrizes envolvidas, as amplitudes das ondas refletidas e transmitidas são dadas analiticamente pelas equações

$$\mathbf{r} = (\mathbf{X}_{1}^{-1}\mathbf{X}_{2} - \mathbf{Y}_{1}^{-1}\mathbf{Y}_{2})(\mathbf{X}_{1}^{-1}\mathbf{X}_{2} + \mathbf{Y}_{1}^{-1}\mathbf{Y}_{2})^{-1}\mathbf{i} \equiv \mathbf{R}\mathbf{i},$$
(2.6)

$$\mathbf{t} = 2(\mathbf{X}_{1}^{-1}\mathbf{X}_{2} + \mathbf{Y}_{1}^{-1}\mathbf{Y}_{2})^{-1}\mathbf{i} \equiv \mathbf{T}\mathbf{i}.$$
 (2.7)

As estruturas das matrizes de reflexão (**R**) e transmissão (**T**) são dadas por

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} R_{PP} & R_{PS} \\ R_{SP} & R_{SS} \end{bmatrix} e \mathbf{T} = \begin{bmatrix} T_{PP} & T_{PS} \\ T_{SP} & T_{SS} \end{bmatrix}, \tag{2.8}$$

sendo que o primeiro sub-índice refere-se ao tipo de onda espalhado e o segundo, ao tipo de onda incidente. Os coeficientes de ondas refletidas (R_{PP}), transmitidas (T_{PP}) e convertidas (R_{SP} e T_{PP}) são apresentadas de forma exata no Apêndice A.

2.2 - APROXIMAÇÕES QUADRÁTICAS

Para obter as aproximações define-se $\overline{\rho} = \frac{\rho_2 + \rho_1}{2}$, $\overline{\alpha} = \frac{\alpha_2 + \alpha_1}{2}$ e $\overline{\beta} = \frac{\beta_2 + \beta_1}{2}$ como sendo as médias aritméticas entre as densidades, as velocidades das ondas P e das ondas S, respectivamente; $\delta \rho = \frac{\rho_2 - \rho_1}{2}$, $\delta \alpha = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}$ e $\delta \beta = \frac{\beta_2 - \beta_1}{2}$ como sendo os contrastes médios entre as densidades, as velocidades das ondas P e das ondas S, respectivamente, e $\overline{\delta \rho} = \frac{\delta \rho}{\overline{\rho}}$, $\overline{\delta \alpha} = \frac{\delta \alpha}{\overline{\alpha}}$ e $\overline{\delta \beta} = \frac{\delta \beta}{\overline{\beta}}$ como sendo os contrastes médios relativos entre as densidades, as velocidades das ondas P e das ondas S, respectivamente, valendo as seguintes relações:

$$\rho_{1} = \overline{\rho}(1 - \overline{\delta\rho}); \quad \rho_{2} = \overline{\rho}(1 + \overline{\delta\rho});
\alpha_{1} = \overline{\alpha}(1 - \overline{\delta\alpha}); \quad \alpha_{2} = \overline{\alpha}(1 + \overline{\delta\alpha});
\beta_{1} = \overline{\beta}(1 - \overline{\delta\beta}); \quad \beta_{2} = \overline{\beta}(1 + \overline{\delta\beta}).$$
(2.9)

A lei de Snell afirma que na interface:

$$s = \frac{\sin\theta_1}{\alpha_1} = \frac{\sin\theta_2}{\alpha_2} = \frac{\sin\phi_1}{\beta_1} = \frac{\sin\phi_2}{\beta_2}, \qquad (2.10)$$

sendo θ_1 e θ_2 , os ângulos de incidência e de transmissão e ϕ_1 e ϕ_2 , os ângulos das convertidas nos meios 1 e 2, respectivamente.

Na literatura de AVO aproximações são desenvolvidadas considerando-se tanto o ângulo de incidência θ_1 quanto a média angular $\bar{\theta}$. Estas duas abordagens serão discutidas nesta seção, e a apresentação do formalismo utilizado para a obtenção dos vários níveis de aproximações é estabelecida no Apêndice B. Para isso são assumidos os seguintes pressupostos:

- (i) não há ocorrência de ondas evanescentes, ou seja, todos os eventos são pré-críticos.
- (ii) as aproximações assumem apenas pequenos contrastes do material.
- (iii) há dois níveis de aproximações nas equações que definem as amplitudes exatas dos coeficientes de reflexão, de transmissão e de suas convertidas: a) em torno do parâmetro do raio s; b) em torno dos contrastes médios relativos $\overline{\delta\rho}$, $\overline{\delta\alpha}$ e $\overline{\delta\beta}$.
- (iv) o meio subjacente é interpretado como uma perturbação do meio incidente.

Sendo $k=\frac{\beta_1}{\alpha_1}$ a razão entre a velocidade da onda S (β_1) e a velocidade da onda P (α_1) do

meio incidente, as duas versões de aproximações quadráticas em termos de θ_1 e $\overline{\theta}$ são dadas explicitamente por:

$$R_{PP}(\theta_{j}) \cong \mathbf{m}(\theta_{j})^{t} \delta \mathbf{p} + \delta \mathbf{p}^{t} \mathbf{M}(\theta_{j}) \delta \mathbf{p},$$

$$T_{PP}(\theta_{j}) \cong 1 + \mathbf{n}(\theta_{j})^{t} \delta \mathbf{p} + \delta \mathbf{p}^{t} \mathbf{N}(\theta_{j}) \delta \mathbf{p},$$

$$R_{SP}(\theta_{j}) \cong \mathbf{q}(\theta_{j})^{t} \delta \mathbf{p} + \delta \mathbf{p}^{t} \mathbf{Q}(\theta_{j}) \delta \mathbf{p},$$

$$T_{SP}(\theta_{j}) \cong \mathbf{w}(\theta_{j})^{t} \delta \mathbf{p} + \delta \mathbf{p}^{t} \mathbf{W}(\theta_{j}) \delta \mathbf{p},$$

$$(2.11)$$

na versão do ângulo de incidência. As expressões definidas em (2.11) correspondem às aproximações quadráticas dos coeficientes de reflexão, de transmissão e das convertidas em termos do *j*-ésimo ângulo de incidência θ_j , $j=1,...,n_{obs}$, sendo n_{obs} o número de ângulos observados. Os vetores $\mathbf{m}(\theta_j)$, $\mathbf{n}(\theta_j)$, $\mathbf{q}(\theta_j)$ e $\mathbf{w}(\theta_j)$ são vetores que carregam informações da geometria de aquisição dos dados em cada ângulo de incidência θ_j , o mesmo acontecendo para as matrizes $\mathbf{M}(\theta_j)$, $\mathbf{N}(\theta_j)$, $\mathbf{Q}(\theta_j)$ e $\mathbf{W}(\theta_j)$. A perturbação $\delta \mathbf{p}$ é definida por $\delta \mathbf{p} = (\overline{\delta Z}, \overline{\delta \alpha}, \overline{\delta \mu})^{\mathrm{t}}$, sendo $\overline{\delta Z} = \overline{\delta \rho} + \overline{\delta \alpha}$ o contraste médio relativo da impedância e $\overline{\delta \mu} = \overline{\delta \rho} + 2\overline{\delta \beta}$, o contraste médio relativo do módulo de cisalhamento. As matrizes e vetores supracitados são explicitados nos Apêndices C.

Na versão da média angular, as expressões para as aproximações quadráticas são dadas de forma análoga:

$$R_{pp}(\overline{\theta}_{j}) \cong \overline{\mathbf{m}}(\overline{\theta}_{j})^{t} \delta \mathbf{p} + \delta \mathbf{p}^{t} \overline{\mathbf{M}}(\overline{\theta}_{j}) \delta \mathbf{p},$$

$$T_{pp}(\overline{\theta}_{j}) \cong 1 + \overline{\mathbf{n}}(\overline{\theta}_{j})^{t} \delta \mathbf{p} + \delta \mathbf{p}^{t} \overline{\mathbf{N}}(\overline{\theta}_{j}) \delta \mathbf{p},$$

$$R_{SP}(\overline{\theta}_{j}) \cong \overline{\mathbf{q}}(\overline{\theta}_{j})^{t} \delta \mathbf{p} + \delta \mathbf{p}^{t} \overline{\mathbf{Q}}(\overline{\theta}_{j}) \delta \mathbf{p},$$

$$T_{SP}(\overline{\theta}_{j}) \cong \overline{\mathbf{w}}(\overline{\theta}_{j})^{t} \delta \mathbf{p} + \delta \mathbf{p}^{t} \overline{\mathbf{W}}(\overline{\theta}_{j}) \delta \mathbf{p},$$

$$(2.12)$$

sendo $\overline{\theta}_j$ a *j*-ésimo média angular, $j=1,...,n_{obs}$. Os vetores e as matrizes nas expressões acima são apresentados no Apêndice D. Expressões semelhantes para as aproximações quadráticas dos coeficientes de reflexão R_{PP} e transmissão T_{PP} foram obtidos por Wang (1999).

2.3 - APROXIMAÇÕES LINEARIZADAS

As aproximações linearizadas das amplitudes R_{PP} , T_{PP} , R_{SP} e T_{SP} nas duas versões são obtidas a partir da parte linear das aproximações quadráticas. A sua importância se deve ao fato de ela ser muito útil em problemas de inversão linear de AVO e são dadas por:

$$R_{pp}(\theta_{j}) \cong \mathbf{m}(\theta_{j})^{t} \delta \mathbf{p}, \qquad T_{pp}(\theta_{j}) \cong 1 + \mathbf{n}(\theta_{j})^{t} \delta \mathbf{p},$$

$$R_{SP}(\theta_{j}) \cong \mathbf{q}(\theta_{j})^{t} \delta \mathbf{p}, \qquad T_{SP}(\theta_{j}) \cong \mathbf{w}(\theta_{j})^{t} \delta \mathbf{p},$$

$$(2.13)$$

na versão do ângulo de incidência e

$$R_{pp}(\overline{\theta}_{j}) \cong \overline{\mathbf{m}}(\overline{\theta}_{j})^{t} \delta \mathbf{p}, \qquad T_{pp}(\overline{\theta}_{j}) \cong 1 + \overline{\mathbf{n}}(\overline{\theta}_{j})^{t} \delta \mathbf{p},$$

$$R_{sp}(\overline{\theta}_{i}) \cong \overline{\mathbf{q}}(\overline{\theta}_{j})^{t} \delta \mathbf{p}, \qquad T_{sp}(\overline{\theta}_{i}) \cong \overline{\mathbf{w}}(\overline{\theta}_{i})^{t} \delta \mathbf{p},$$

$$(2.14)$$

na versão da média angular, com $j = 1,...,n_{obs}$.

As expressões (2.13) até (2.14), são equivalentes às aproximações apresentadas por Bortfeld (1961), Richards & Fraiser (1976), Aki & Richards (1980) e Wang (1999).

2.4 - COMPARAÇÃO DAS APROXIMAÇÕES

Os modelos geológicos apresentados na Tabela 2.1 têm a finalidade de comparar e mostrar tanto a precisão quanto os limites de validade das aproximações apresentadas nas seções 2.2 e 2.3.

Tabela 2.1. Parâmetros para o cálculo das amplitudes dos coeficientes de reflexão, transmissão e suas convertidas.

Modelos	Material	ρ (g/cm ³)	α (m/seg)	β (m/seg)
Modelo 1	Folhelho	2,20	3270	1650
	Arenito com gás	2,05	3040	2050
Modelo 2	Anidrito	2,95	6095	3770
	Arenito	2,65	3780	2360
Modelo 3	Folhelho	2,45	3098	2490
	Cristal de Quartzo	2,00	1875	826

Em cada modelo apresentado na Tabela 2.1, o primeiro material corresponde ao meio incidente e o segundo ao meio subjacente. E são classificados em contrastes baixos, contrastes moderados e contrastes altos, apresentados em ordem crescente, como se observa na Tabela 2.2.

Tabela 2.2. Contrastes médios relativos dos modelos apresentados na Tabela 2.1.

Modelos	K	δρ	$\overline{\delta \alpha}$	δβ
Modelo 1	0,5864	-0,0353	-0,0365	0,1081
Modelo 2	0,6208	-0,0536	-0,2344	-0,2300
Modelo 3	0,6668	-0,1011	-0,2459	-0,5018

O Modelo 1 é o tipo mais comum do contato de interfaces de rochas selante/reservatório tendo muitas ocorrências em depósitos de turbiditos. Os dados deste modelo foram retirados de Drufuca & Mazzotti (1995). No Modelo 2 temos um anidrito que por ser um evaporito, é uma das melhores rochas selantes, o que o torna um bom exemplo de contato de interfaces com uma rocha reservatório. Os dados deste modelo foram retirados de Wang (1999). O Modelo 3 foi escolhido para mostrar o comportamento das aproximações diante de altos contrastes e sua ilustração tem caráter apenas didático. Os dados deste modelo foram retirados de Thomsen (1986).

Na análise comparativa das várias aproximações é usado o erro relativo percentual:

máx Erro = abs
$$\left(\frac{A_{ex} - A_{ap}}{|A_{ex}|}\right) \times 100 \%,$$
 (2.15)

sendo A_{ex} e A_{ap} os valores exato e aproximado da quantidade em estudo, respectivamente.

2.4. 1 - Análise dos Resultados.

As Figuras 2.2 a 2.7 ilustram o desempenho das aproximações lineares e quadráticas dos coeficientes de reflexão, de transmissão e das convertidas comparadas com as suas formas exatas nas ilustrações (a) e (c) e dos erros percentuais relativos na faixa angular $[0^{\circ}, 30^{\circ}]$ nas ilustrações (b) e (d), em duas situações: para ângulo de incidência (θ_1) e para a média angular $(\overline{\theta})$.

Para os Modelos 1 e 2, os resultados comparativos, a partir das Figuras (b) e (d), mostram que, dentro da faixa angular de $[0^{\circ}, 30^{\circ}]$, as aproximações quadráticas, sejam em termos do ângulo de incidência θ_1 ou da média angular $\overline{\theta}$, apresentam uma performance muito melhor que as aproximações linearizadas, com erros percentuais menores que 5%. Quanto à comparação entre as aproximações em termos de θ_1 e de $\overline{\theta}$, as duas versões quadráticas são competitivas, dentro da faixa de $[0^{\circ}, 30^{\circ}]$, mostrando que seu uso pode ser feito de forma indistinta.

No caso do modelo 3, as duas aproximações quadráticas conseguem manter uma boa performance em torno de 20° de incidência, como mostram as Figuras (a) e (c), apresentando erros percentuais menores que 4%. Mas à medida que o ângulo de incidência cresce, uma das aproximações chega a alcançar erro percentual de 15%, como pode ser observado nas Figuras (b) e (d).

Com relação às aproximações linearizadas, observa-se que o melhor desempenho são daquelas dependentes de θ_1 considerando-se os Modelos 2 e 3, que apresentam contraste mais elevados. Apenas no caso do Modelo 1, que apresenta baixos contrastes as duas aproximações são competitivas na faixa de $[0^{\circ}, 30^{\circ}]$, em todos os experimentos.

MODELO 1 RPP e TPP

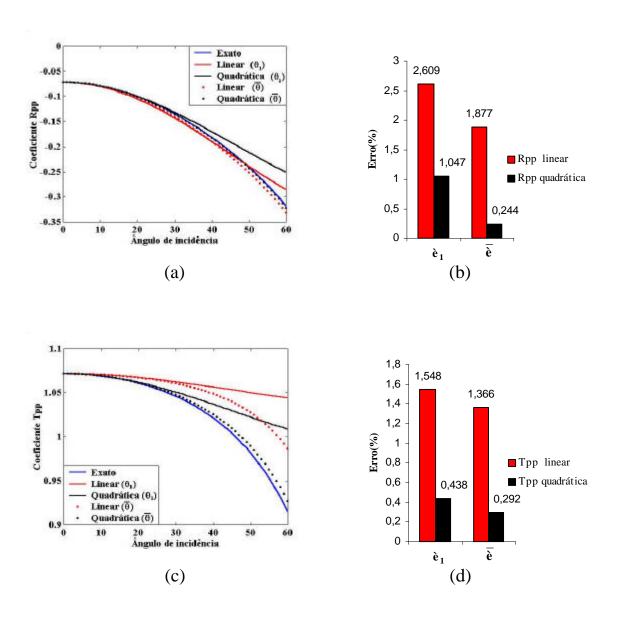


Figura 2.2. Resultados dos coeficientes R_{PP} e T_{PP} para o modelo 1: nas ilustrações (a) e (c) as curvas azuis representam os coeficientes R_{PP} e T_{PP} exatos, as curvas vermelhas e pretas sólidas são respectivamente as aproximações lineares e quadráticas para ângulo de incidência e as curvas vermelhas e pretas pontilhadas são respectivamente as aproximações lineares e quadráticas para a média angular. (b) e (d) esboçam o erro máximo absoluto até 30 graus de incidência para as aproximações lineares e quadráticas expressas para o ângulo de incidência (θ_1) e para a média angular $(\bar{\theta})$.

MODELO 1 R_{SP} e T_{SP}

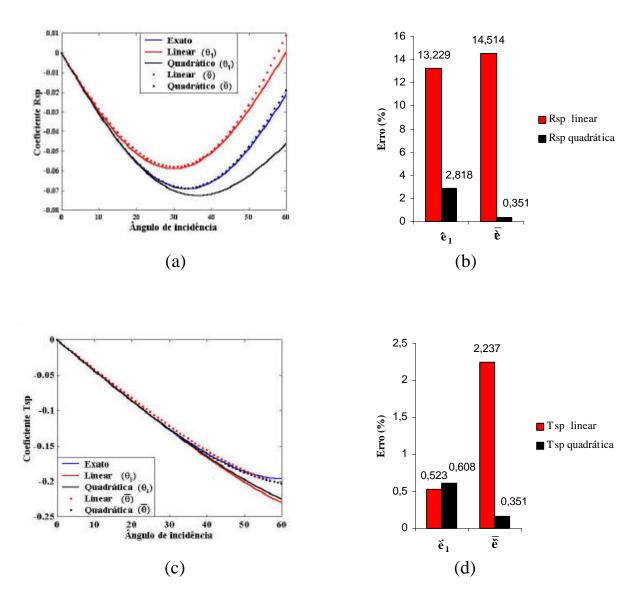


Figura 2.3. Resultados dos coeficientes R_{SP} e T_{SP} para o modelo 1: nas ilustrações (a) e (c) as curvas azuis representam os coeficientes R_{SP} e T_{SP} exatos, as curvas vermelhas e pretas sólidas são respectivamente as aproximações lineares e quadráticas para ângulo de incidência e as curvas vermelhas e pretas pontilhadas são respectivamente as aproximações lineares e quadráticas para a média angular. (b) e (d) esboçam o erro máximo absoluto até 30 graus de incidência para as aproximações lineares e quadráticas expressas para o ângulo de incidência (θ_1) e para a média angular ($\overline{\theta}$).

MODELO 2 RPP e TPP

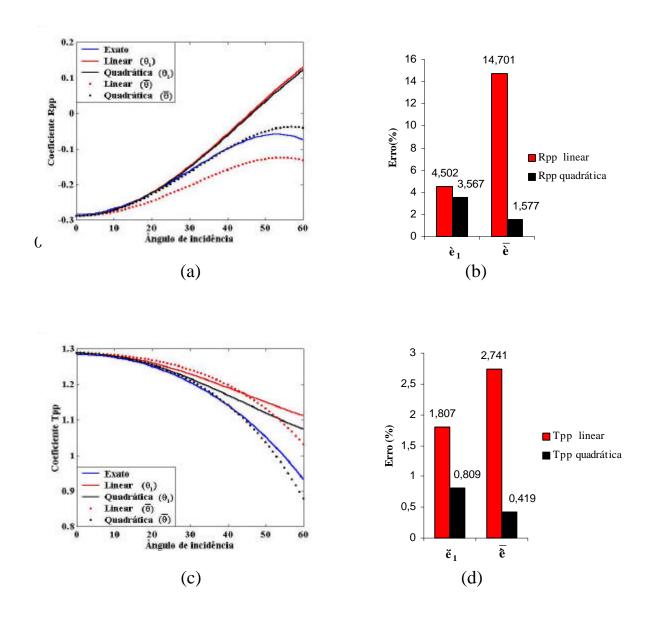


Figura 2.4. Resultados dos coeficientes R_{PP} e T_{PP} para o modelo 2: nas ilustrações (a) e (c) as curvas azuis representam os coeficientes R_{PP} e T_{PP} exatos, as curvas vermelhas e pretas sólidas são respectivamente as aproximações lineares e quadráticas para ângulo de incidência e as curvas vermelhas e pretas pontilhadas são respectivamente as aproximações lineares e quadráticas para a média angular. (b) e (d) esboçam o erro máximo absoluto até 30 graus de incidência para as aproximações lineares e quadráticas expressas para o ângulo de incidência (θ_1) e para a média angular $(\bar{\theta})$.

MODELO 2 R_{SP} e T_{SP}

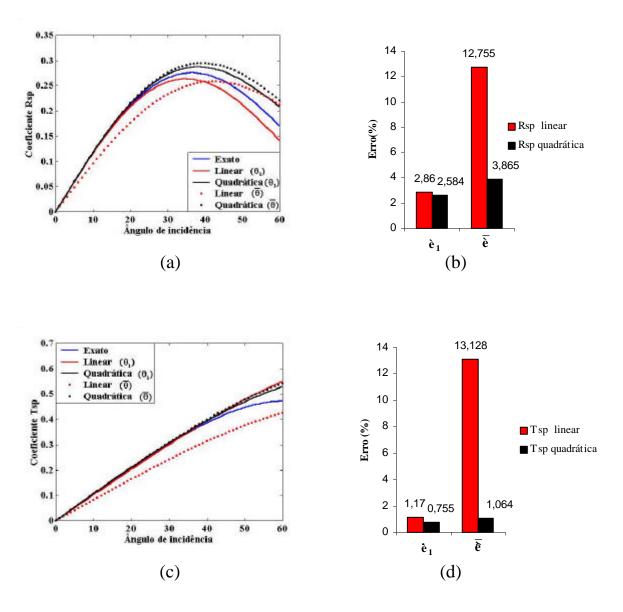


Figura 2.5. Resultados dos coeficientes R_{SP} e T_{SP} para o modelo 2: nas ilustrações (a) e (c) as curvas azuis representam os coeficientes R_{SP} e T_{SP} exatos, as curvas vermelhas e pretas sólidas são respectivamente as aproximações lineares e quadráticas para ângulo de incidência e as curvas vermelhas e pretas pontilhadas são respectivamente as aproximações lineares e quadráticas para a média angular. (b) e (d) esboçam o erro máximo absoluto até 30 graus de incidência para as aproximações lineares e quadráticas expressas para o ângulo de incidência (θ_1) e para a média angular $(\bar{\theta})$.

MODELO 3 RPP e TPP

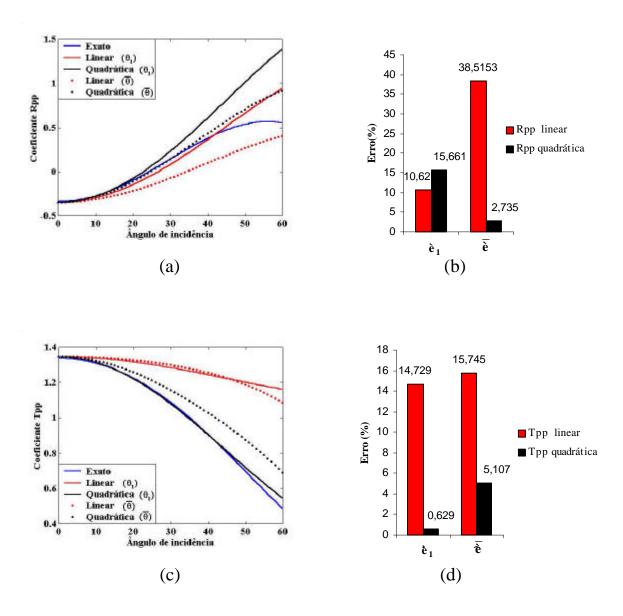


Figura 2.6. Resultados dos coeficientes R_{PP} e T_{PP} para o modelo 3: nas ilustrações (a) e (c) as curvas azuis representam os coeficientes R_{PP} e T_{PP} exatos, as curvas vermelhas e pretas sólidas são respectivamente as aproximações lineares e quadráticas para ângulo de incidência e as curvas vermelhas e pretas pontilhadas são respectivamente as aproximações lineares e quadráticas para a média angular. (b) e (d) esboçam o erro máximo absoluto até 30 graus de incidência para as aproximações lineares e quadráticas expressas para o ângulo de incidência (θ_1) e para a média angular $(\bar{\theta})$.

MODELO 3 R_{SP} e T_{SP}

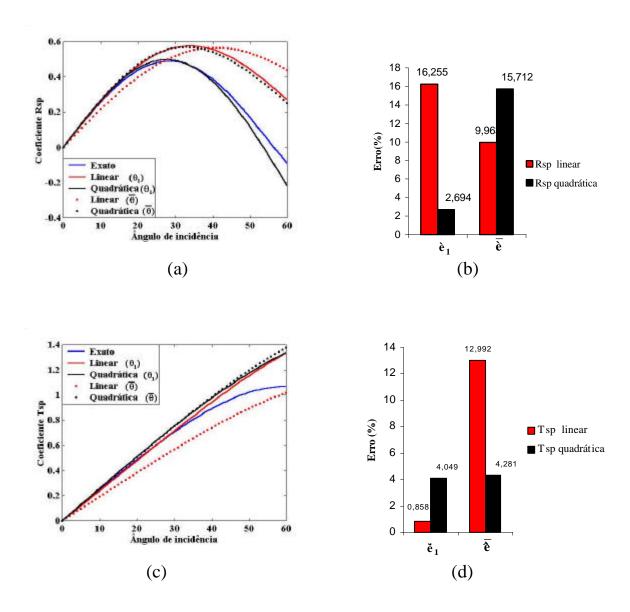


Figura 2.7. Resultados dos coeficientes R_{SP} e T_{SP} para o modelo 3: nas ilustrações (a) e (c) as curvas azuis representam os coeficientes R_{SP} e T_{SP} exatos, as curvas vermelhas e pretas sólidas são respectivamente as aproximações lineares e quadráticas para ângulo de incidência e as curvas vermelhas e pretas pontilhadas são respectivamente as aproximações lineares e quadráticas para a média angular. (b) e (d) esboçam o erro máximo absoluto até 30 graus de incidência para as aproximações lineares e quadráticas expressas para o ângulo de incidência (θ_1) e para a média angular $(\bar{\theta})$.

3 - ANÁLISES DE SENSIBILIDADE E DE AMBIGÜIDADE

As análises de sensibilidade e de ambigüidade são procedimentos que antecedem à inversão. São técnicas que auxiliam na interpretação de quais parâmetros podem ser bem invertidos e quais apresentarão problemas na inversão dos dados. Tais problemas são caracterizados pela pequena quantidade de informações, pela natureza ambígua do problema ou por falta de informações 'a priori' (Meju, 1994).

Existem vários tipos de parametrizações encontradas na literatura de AVO e, como já foi mencionado, estas parametrizações são responsáveis pelas sensibilidade e ambigüidade que os parâmetros possuirão com relação ao seu espaço de resolução (Mallick, 1993).

Nesta seção são feitas as análises de sensibilidade e de ambigüidade considerando-se apenas as aproximações lineares em termos dos ângulos de incidência, conforme o exposto na seção 2 deste trabalho. Os modelos são definidos na Tabela 2.1 e são usados tanto nas análises de sensibilidade e de ambigüidade quanto na inversão linear de dados sintéticos. Os dados sintéticos são gerados a partir das equações exatas de Zoeppritz. Neste trabalho não se considerou a incidência normal nas observações do coeficiente R_{SP} por não haver conversão nesta incidência.

Na análise de sensibilidade utilizou-se o Método de Decomposição em Valores Singulares (SVD), que aplicado à matriz de sensibilidade definida na sub-seção 3.1, determina a *matriz de resolução* (Lanczos, 1961) definida na sub-seção 3.2. Análise do comportamento dos valores singulares e da matriz de resolução permite estudar a sensibilidade dos parâmetros em relação ao seu espaço de resolução. Além da SVD, para as conclusões sobre a análise de ambigüidade, utilizou-se a visualização das curvas de contorno das funções objetivos (sub-seção 3.3), visando auxiliar as conclusões e interpretações dos resultados obtidos na inversão linear, considerando-se a parametrização assumida neste trabalho.

3.1 - MATRIZ DE SENSIBILIDADE

A matriz de sensibilidade é definida como:

$$\mathcal{L}_{ij} = \frac{\partial \mathbf{r}_{i}}{\partial (\delta \mathbf{p}_{j})} \quad ; \quad i = 1,..., \mathbf{n}_{obs} \quad \mathbf{e} \quad j = 1, 2, 3 \quad , \tag{3.1}$$

sendo \mathbf{r}_i o funcional representado pelas linearizações na *i*-ésima observação dos coeficientes refletido \mathbf{R}_{PP} e convertido \mathbf{R}_{SP} e $\delta\mathbf{p}_j$, a *j*-ésima componente da parametrização $\delta\mathbf{p}$ assumida, de acordo com a sub-seção (2.2).

Matricialmente, estas aproximações são dadas por:

$$\begin{bmatrix} r_{pp}(\theta_1) \\ r_{pp}(\theta_2) \\ \vdots \\ r_{pp}(\theta_{n_{obs}}) \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & \sin^2\theta_1 & -4k^2\sin^2\theta_1 \\ 1 & \sin^2\theta_2 & -4k^2\sin^2\theta_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \sin^2\theta_{n_{obs}} & -4k^2\sin^2\theta_{n_{obs}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{\delta Z} \\ \overline{\delta \alpha} \\ \overline{\delta \mu} \end{bmatrix}, \tag{3.2}$$

no caso da aproximação R_{PP} e

$$\begin{bmatrix} \mathbf{r}_{\mathrm{SP}}(\theta_{\mathrm{l}}) \\ \mathbf{r}_{\mathrm{SP}}(\theta_{\mathrm{2}}) \\ \vdots \\ \mathbf{r}_{\mathrm{SP}}(\theta_{\mathrm{n}_{obs}}) \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} -\left(1 + \frac{k^{2}}{2}\sin^{2}\theta_{1}\right)\sin\theta_{1} & \left(1 + \frac{k^{2}}{2}\sin^{2}\theta_{1}\right)\sin\theta_{1} & -2k\left[1 - \left(\frac{1}{2} + k\right)\sin^{2}\theta_{1}\right]\sin\theta_{1} \\ -\left(1 + \frac{k^{2}}{2}\sin^{2}\theta_{2}\right)\sin\theta_{2} & \left(1 + \frac{k^{2}}{2}\sin^{2}\theta_{2}\right)\sin\theta_{2} & -2k\left[1 - \left(\frac{1}{2} + k\right)\sin^{2}\theta_{2}\right]\sin\theta_{2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -\left(1 + \frac{k^{2}}{2}\sin^{2}\theta_{\mathrm{n}_{obs}}\right)\sin\theta_{\mathrm{n}_{obs}} & \left(1 + \frac{k^{2}}{2}\sin^{2}\theta_{\mathrm{n}_{obs}}\right)\sin\theta_{\mathrm{n}_{obs}} & -2k\left[1 - \left(\frac{1}{2} + k\right)\sin^{2}\theta_{\mathrm{n}_{obs}}\right]\sin\theta_{\mathrm{n}_{obs}} \end{bmatrix}$$

$$(3.3)$$

no caso da aproximação R_{SP}.

As equações (3.2) e (3.3) podem ser representadas sinteticamente como:

$$\mathbf{r}_{\rm pp} \approx \mathbf{M}_{\rm pp} \, \delta \mathbf{p} \,, \tag{3.4}$$

$$\mathbf{r}_{\mathrm{SP}} \approx \mathbf{M}_{\mathrm{SP}} \, \delta \mathbf{p} \, , \qquad (3.5)$$

respectivamente.

Nota-se que no caso das linearizações, as matrizes de sensibilidade dos coeficientes R_{PP} e R_{SP} são exatamente iguais a \mathbf{M}_{PP} e \mathbf{M}_{SP} .

A matriz \mathbf{M}_{PP} definida em (3.4) possui duas colunas linearmente dependentes (LD), informando que a inversão linear não consegue inverter todos os parâmetros para a aproximação

 R_{PP} . De forma análoga, a matriz \mathbf{M}_{SP} também possui duas colunas LD na inversão da aproximação R_{SP} . Entretanto, a combinação das duas matrizes \mathbf{M}_{PP} e \mathbf{M}_{SP} produz três colunas linearmente independentes (LI), sugerindo uma análise de sensibilidade sobre esta combinação. A combinação das duas matrizes é obtida através de:

$$\tilde{\mathbf{r}} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{PP} \\ \mathbf{r}_{SP} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{PP} \\ \mathbf{M}_{SP} \end{bmatrix} \delta \mathbf{p} \equiv \tilde{\mathbf{M}} \delta \mathbf{p},$$
(3.6)

em que $\widetilde{\mathbf{M}}$ é a matriz associada. Na literatura de AVO, Castagna (2001) discute a potencialidade dessa associação na inversão em melhorar a identificação da presença de fluido.

3.2 - MATRIZ DE RESOLUÇÃO

A análise da matriz de resolução é importante na inversão de dados pois determina a sensibilidade dos parâmetros em relação ao espaço efetivo das observações. Ela é obtida através da decomposição em valores singulares (SVD) (Golub & Van Loan, 1983) da matriz de sensibilidade.

O método SVD consiste em fatorar uma matriz A de ordem mxn na forma:

$$\mathbf{A} = \mathbf{USV}^{\mathsf{t}},\tag{3.7}$$

sendo **U** uma matriz mxm, ortogonal no espaço dos dados das observações, **V** uma matriz nxn, ortogonal no espaço dos parâmetros e **S** uma matriz mxn, diagonal, cujos elementos são os valores singulares de **A**. As colunas de **U** são os autovetores de **A** A^t e as colunas de **V** são autovetores de **A** (Golub E Van Loan, 1989), o sobrescrito ^t indicando a usual transposição matricial.

A matriz de resolução (Lanczos, 1961) é definida como:

$$\mathbf{M}_{resol} = \mathbf{V}_{ef} \, \mathbf{V}_{ef}^{\mathrm{t}} \,, \tag{3.8}$$

em que $\mathbf{V}_{e\!f}$ é a matriz ortogonal do espaço dos parâmetros associada ao espaço efetivo de \mathbf{S} .

Para obter o espaço efetivo de S utiliza-se um critério de corte para eliminar os valores singulares muito próximos de zero a fim de evitar instabilidade e ambigüidade, determinando um novo posto para a matriz S, denominado de *posto efetivo* (Sen & Stoffa, 1995). A sub-matriz obtida de S pela eliminação dos valores singulares determinados pelo critério de corte tem dimensão do posto efetivo e é denotada por S_{ef} (Sen & Stoffa, 1995). O valor de corte é escolhido através do número de condições n_{cond} dado por:

$$n_{cond} = \frac{m\acute{a}x(S)}{min(S)}.$$
 (3.9)

O posto efetivo de S é escolhido como o maior inteiro r que satisfaz a desigualdade:

$$\frac{\text{máx}(\mathbf{S})}{S_r} < n_{cond}. \tag{3.10}$$

Este critério determina os valores singulares que estão no espaço nulo.

3.3 - FORMULAÇÃO MATEMÁTICA DA FUNÇÃO OBJETIVO

Matematicamente, a função objetivo corresponde a um funcional com a finalidade de ajustar os dados observados e os dados do modelo produzidos pelas aproximações definidas em (3.4), (3.5) e (3.6). Neste trabalho optou-se pelo uso do método dos quadrados mínimos e tal funcional apresenta a forma:

$$\phi(\delta \mathbf{p}) = \left\| \mathbf{r}^{(obs)} - \mathbf{r}^{(mod)}(\delta \mathbf{p}) \right\|^2; \quad j = 1, 2, 3, \tag{3.11}$$

sendo $\mathbf{r}^{(obs)}$ e $\mathbf{r}^{(mod)}$ os vetores dos dados sintéticos e do modelo de ajuste, respectivamente, e que são apresentados em (3.2) e (3.3). O vetor $\mathbf{r}^{(obs)}$ é dependente da geometria de aquisição dos dados e das propriedades físicas dos meios envolvidos, enquanto o vetor $\mathbf{r}^{(mod)}$ possui dependência do vetor das perturbações $\delta \mathbf{p}$.

Para o problema de inversão de AVO, a partir dos modelos linearizadas neste trabalho, foram escolhidas três funções objetivos. Duas, definidas pelas aproximações das amplitudes de R_{PP} e de R_{SP} , e dadas por:

$$\min \phi_{PP}(\delta \mathbf{p}) = \min \sum_{i=1}^{n_{obs}} \left(r_{PP_i} - \sum_{j=1}^{3} M_{PP_{ij}} \delta p_j \right)^2, \tag{3.12}$$

$$\min \phi_{SP}(\delta \mathbf{p}) = \min \sum_{i=1}^{n_{obs}} \left(\mathbf{r}_{SPi} - \sum_{j=1}^{3} \mathbf{M}_{SPij} \delta \mathbf{p}_{j} \right)^{2}, \tag{3.13}$$

em que $r_{PP\,i}$, r_{SPi} , $M_{PP\,ij}$, $M_{SP\,ij}$ e $\delta p_{\,j}$ são as coordenadas dos vetores e matrizes definidos em (3.2) e (3.3). A terceira é dada pela combinação das duas aproximações acima, e definida por:

$$\min \widetilde{\phi}(\delta \mathbf{p}) = \min \left[\sum_{i=1}^{n_{obs}} \left(r_{PPi} - \sum_{j=1}^{3} M_{PPij} \delta p_j \right)^2 + \lambda \sum_{i=1}^{n_{obs}} \left(r_{SPi} - \sum_{j=1}^{3} M_{SPij} \delta p_j \right)^2 \right] , \quad (3.14)$$

sendo λ um fator que controla uma maior ou menor ênfase dada às informações dos dados das ondas convertidas. Neste trabalho $\lambda = 1$.

A análise de ambigüidade será feita a partir das visualizações gráficas das curvas de níveis das funções objetivos propostas nesta seção. No capítulo 4 estas funções objetivos serão usadas para a inversão de dados sintéticos.

3.4 - ANÁLISES DE SENSIBILIDADE E DE AMBIGÜIDADE.

Através da análise de sensibilidade pode-se determinar quais parâmetros terão problemas de estabilidade e de não unicidade. Estas análises denominam-se análise de sensibilidade e de ambigüidade, respectivamente, e serão realizadas utilizando-se o método SVD.

As matrizes \mathbf{S}_{ef} e \mathbf{V}_{ef} referenciadas na sub-seção 3.3, oriundas do método SVD aplicado na matriz de sensibilidade, são as matrizes alvos para o estudo da sensibilidade e da ambigüidade. Isto se deve à relação que a matriz \mathbf{V}_{ef} possui com o espaço dos parâmetros.

A análise dos elementos da matriz $\mathbf{S}_{e\!f}$ associada às colunas da matriz $\mathbf{V}_{e\!f}$ mostra a qualidade de resolução do parâmetro associado a cada valor singular. Estas análises são realizadas segundo os seguintes passos:

- 1. Ao menor valor singular associa-se a coluna correspondente da matriz \mathbf{V}_{ef} .
- 2. Para cada elemento desta coluna associa-se um elemento δp_j correspondente do vetor de parâmetros.
- 3. A menor projeção da matriz \mathbf{V}_{ef} , em valor absoluto, vai estar associada ao parâmetro de melhor resolução e a maior projeção, ao parâmetro mais instável e ambíguo.

Após determinar a coluna de \mathbf{V}_{ef} a ser analisada, as suas projeções sobre os planos de referência determinam direções que coincidem com as feições das curvas de contorno da função objetivo nestes planos. Tais direções servem para mostrar que parâmetros ou combinações de parâmetros irão produzir ambigüidade. A ambigüidade é caracterizada por um conjunto de parâmetros que ajustam os dados definidos pela função objetivo sem a presença de ruído nos dados sintéticos.

Além das análises de ambigüidade apresentadas através do método SVD, são apresentadas, também, ilustrações através de mapas de contornos das funções objetivos definidas em (3.12), (3.13) e (3.14). Para isto, fixa-se um dos parâmetros e constroem-se os mapas de contornos com relação aos outros dois. Estes mapas produzem vales nos quais se pode observar que parâmetros ou combinações de parâmetros produzem maior ou menor região de ambigüidade. Observa-se, a partir destes mapas, uma perfeita consonância entre os ângulos das projeções da coluna analisada de \mathbf{V}_{ef} e das feições dos vales de ambigüidade acima referenciados.

3.5 - OS RESULTADOS DAS ANÁLISES DE SENSIBILIDADE E DE AMBIGÜIDADE.

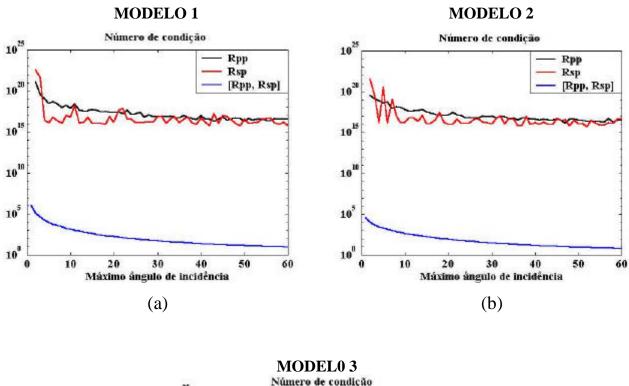
Em todos os testes realizados nesta seção usou-se uma abertura angular máxima de [0°, 60°] com intervalos de 1°. Esta faixa angular foi tomada para efeito didático com a finalidade de demonstrar o desempenho das aproximações em relação ao número de observações. E assim estipular um limite plausível sobre a melhor cobertura angular.

Os experimentos abordados nesta seção para as matrizes de sensibilidade \mathbf{M}_{PP} , \mathbf{M}_{SP} e $\widetilde{\mathbf{M}}$ serão apresentados na seguinte ordem: número de condições, valores singulares e as relações entre as direções das projeções das colunas de V analisadas e as feições das curvas de contorno. O objetivo dos experimentos realizados é mostrar que a combinação das duas informações R_{PP} e R_{SP} é a melhor opção para a inversão linear do que as inversões isoladas R_{PP} e R_{SP} .

3.5.1 - Número de Condição

Para a análise do número de condição (em escala logarítmica) definido em (3.9), os gráficos são apresentados em função da máxima cobertura angular e mostram o desempenho da inversão linear para a estimativa dos três parâmetros, sendo ilustrados nas figuras (a), (b) e (c) em Figura 3.1. Estes experimentos informam que, para os três modelos definidos neste trabalho, tanto a inversão R_{PP} quanto a inversão R_{SP} possuem um parâmetro no espaço nulo, o que é constatado através da grande magnitude do número de condição (média em torno de 10^{17}) das duas matrizes \mathbf{M}_{PP} e \mathbf{M}_{SP} . Isto informa que, nos dois casos, $\min(S_{ij}) \approx 0$. Quanto à inversão combinada, as figuras mostram que o número de condições para todos os modelos diminui consideravelmente em relação às matrizes dissociadas. O valor máximo do número de condições para a matriz $\tilde{\mathbf{M}}$ é 10^5 e o valor mínimo é 10, o que implica afirmar que o mínimo valor singular para a matrizes $\tilde{\mathbf{M}}$ é bem maior do que o mínimo valor singular para as matrizes \mathbf{M}_{PP} e \mathbf{M}_{SP} , respectivamente. Observou-se ainda que a resolução dos parâmetros melhora com o uso da matriz $\tilde{\mathbf{M}}$ quanto maior for a cobertura angular.

Este tipo de análise foi realizado por Wang (1999) apenas nas aproximações linear e quadrática de R_{PP}. Nos seus experimentos, Wang mostra que a aproximação quadrática consegue estimar os três parâmetros definidos em seu trabalho enquanto a aproximação linear não consegue, por possuir um número de condições muito alto. Os resultados aqui apresentados confirmam que a utilização das aproximações lineares combinadas torna o problema da inversão bem mais estável do que nos casos das aproximações dissociadas.



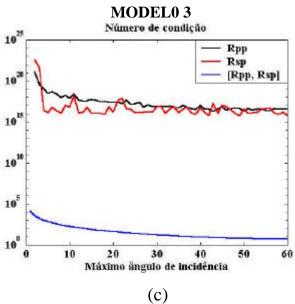


Figura 3.1. As figuras (a), (b) e (c) são correspondentes ao número de condição para as formas linearizadas do Rpp, Rsp e da forma combinada $[R_{pp} \ R_{SP}]$ versus o máximo ângulo de incidência para os modelos 1, 2 e 3, respectivamente.

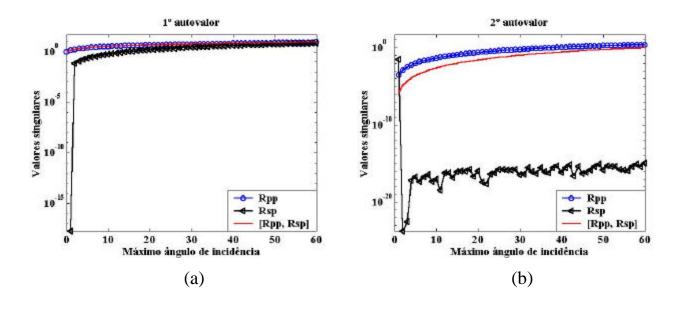
3.5. 2 - Valores Singulares

As Figuras (3.2) à (3.4) são referentes ao logaritmo dos valores singulares da matriz \mathbf{M}_{PP} , \mathbf{M}_{SP} e $\tilde{\mathbf{M}}$. Estes experimentos se basearam nos testes de sensibilidade produzidos por Wang (1999) e têm o objetivo de ilustrar o desempenho dos três tipos de matrizes de sensibilidade e a sensibilidade dos parâmetros em relação à cobertura angular. Cada figura em (3.2), (3.3) e (3.4) está associada a cada um dos valores singulares de \mathbf{S}_{ef} . Como na sub-seção 3.5.1, os gráficos são apresentados em termos da máxima cobertura angular.

Observou-se, nos experimentos, que os autovalores crescem com o aumento da máxima cobertura angular e que a partir de aproximadamente 30° cada valor singular tende a estabilizar-se em um único valor, para todos os modelos. Em vista deste resultado, restringiu-se os próximos experimentos na cobertura angular de [0° 30°].

Nota-se, por outro lado, que as matrizes de sensibilidade das amplitudes dos coeficientes R_{PP} e R_{SP} possuem o terceiro e o segundo valores singulares, respectivamente, menores que 10^{-10} . Isto implica dizer que os parâmetros que produzem instabilidade para o R_{PP} podem ser identificados através da análise da terceira coluna da matriz \mathbf{V}_{ef} . No caso do R_{SP} , os parâmetros que produzem instabilidade podem ser identificados através da análise da segunda coluna da matriz \mathbf{V}_{ef} . Os resultados dos autovalores e das matrizes \mathbf{V}_{ef} , para todas as matrizes de sensibilidades e modelos, são apresentados no Apêndice E. Estas análises informam que o terceiro autovalor e o segundo autovalor produzem instabilidade e ambigüidade no problema de inversão linear para o R_{PP} e o R_{SP} devido às colunas da matriz \mathbf{V}_{ef} associadas às ordens destes autovalores encontrarem-se no espaço nulo. Ou seja, o problema de inversão linear é mal-posto conforme observado nas figuras (3.2) à (3.4).

Para a aproximação R_{PP} observa-se que a menor projeção na terceira coluna da matriz \mathbf{V}_{ef} identifica o parâmetro melhor resolvido, no caso $\overline{\delta Z}$ enquanto a maior projeção identifica aquele que possui maior ambigüidade e instabilidade, no caso $\overline{\delta \mu}$. Da mesma forma analisa-se a segunda coluna da matriz \mathbf{V}_{ef} em relação à aproximação \mathbf{R}_{SP} . E assim têm-se para o \mathbf{R}_{SP} que o parâmetro melhor resolvido é $\overline{\delta \mu}$ e que $\overline{\delta \alpha}$ é o mais ambíguo e instável.



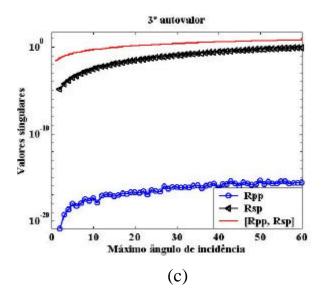
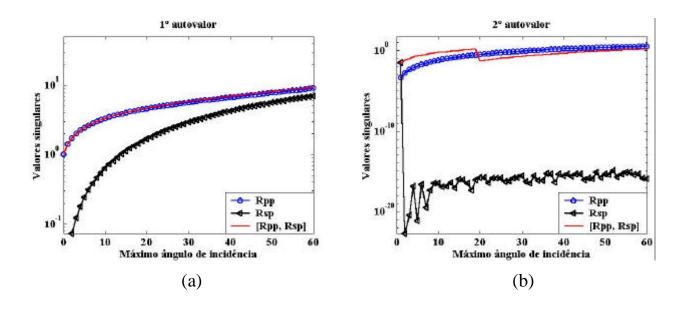


Figura 3.2. As figuras (a), (b) e (c) referem-se aos logaritmos dos valores singulares da matriz \mathbf{M}_{PP} , \mathbf{M}_{SP} e $\widetilde{\mathbf{M}}$ versus o máximo ângulo de incidência para o modelo 1.



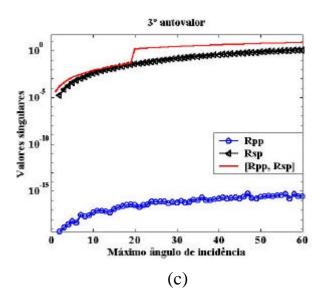
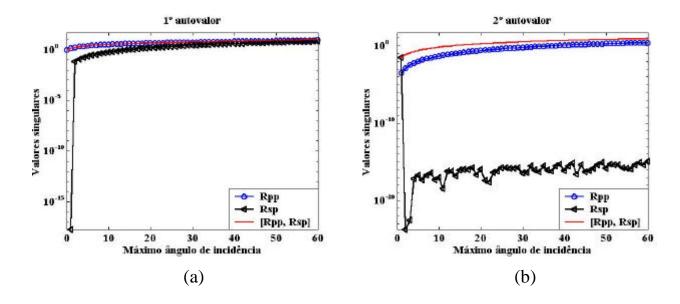


Figura 3.3. As figuras (a), (b) e (c) referem-se aos logaritmos dos valores singulares da matriz \mathbf{M}_{PP} , \mathbf{M}_{SP} e $\widetilde{\mathbf{M}}$ versus o máximo ângulo de incidência para o modelo 2.



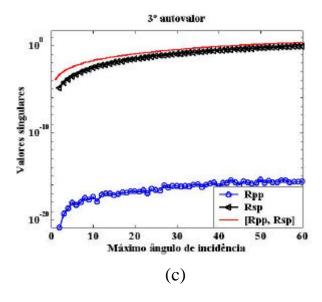


Figura 3.4. As figuras (a), (b) e (c) referem-se aos logaritmos dos valores singulares da matriz $\mathbf{M_{PP}}$, $\mathbf{M_{SP}}$ e $\widetilde{\mathbf{M}}$ máximo ângulo de incidência para o modelo 3.

A combinação das aproximações de R_{PP} e de R_{SP} no intervalo $[0^{\circ}, 30^{\circ}]$ estabilizam os valores singulares para os três modelos na faixa de 10^{-1} . Os valores singulares para os modelos 1 e 2 indicam que a segunda coluna da matriz \mathbf{V}_{ef} será analisada e para o modelo 3, a terceira coluna da matriz \mathbf{V}_{ef} , segundo o apêndice E. Assim sendo, o parâmetro melhor resolvido é $\overline{\delta Z}$ por apresentar a menor projeção e o mais ambíguo é $\overline{\delta \alpha}$ por apresentar a maior projeção, em todos os casos aqui apresentados. Como o menor autovalor é da ordem de 10^{-1} , o problema é bem mais estável que as outras duas aproximações aqui analisadas. Ou seja, a combinação das duas informações tende a estabilizar o problema de inversão linear, confirmando as análises do número de condição.

3.5. 3 - Projeções das colunas de V x Curvas de Ambigüidade.

Considerando-se os resultados obtidos em (3.5.2), analisa-se as projeções das colunas analisadas da matriz \mathbf{V}_{ef} na cobertura angular de $[0^{\circ}, 30^{\circ}]$. Tais projeções são apresentadas nas seguintes tabelas de resultados:

Tabela 3.1- Projeções das colunas de V obtidas pelas aproximações R_{PP} e R_{SP}.

		$\mathbf{R}_{\mathtt{PP}}$			R_{SP}	
Projeção	Modelo 1	Modelo 2	Modelo 3	Modelo 1	Modelo 2	Modelo 3
$\overline{\delta Z} \times \overline{\delta \alpha}$	$(.09,71)^{t}$	$(.14,83)^{t}$	$(.23,90)^{t}$	$(61, .71)^{t}$	(09, .54) ^t	$(54, .71)^{t}$
$\overline{\delta Z} \times \overline{\delta \mu}$	$(.09,70)^{t}$	$(.14, .55)^{t}$	$(.23,36)^{t}$	(61, .36) ^t	(09, .84) ^t	(54, .46) ^t
$\overline{\delta\alpha}\times\overline{\delta\mu}$	(71,70) ^t	$(83, .55)^{t}$	$(.90,36)^{t}$	$(.71, .36)^{t}$	$(.54, .84)^{t}$	(.71, .46) ^t

Tabela 3.2- Projeções das colunas de V obtidas pela aproximação combinada [R_{PP} R_{SP}].

A partir das coordenadas das projeções apresentadas nas tabelas acima observa-se que as suas direções coincidem com as das feições das curvas de contornos apresentadas nas figuras (3.5) à (3.13).

A análise de ambigüidade é feita através de curvas de contorno das funções objetivos estipuladas no trabalho. Para isto, fixa-se um dos parâmetros e produzem-se as curvas de contorno com relação aos dois outros. O domínio dos parâmetros ativos é determinado pela região $\mathbb{R} = [-1 \ 1] \ x \ [-1 \ 1]$ uma vez que os parâmetros de interesse são contrastes médios relativos, possuindo norma menor que 1. Os resultados obtidos são mostrados nas Figuras (3.5) a (3.13) e as conclusões referentes são as seguintes:

- a) Para o parâmetro δZ , observa-se que as projeções de suas regiões de ambigüidade sobre o seu eixo apresentam pequenos intervalos de variações nos casos do R_{PP} e do combinado $[R_{PP} \ R_{SP}]$, para todos os modelos. Conclui-se que para estes experimentos este parâmetro é sempre bem resolvido. Quanto ao R_{SP} , verifica-se que suas projeções apresentam grandes intervalos de variações quando comparado com o caso do R_{PP} . Logo, para este tipo de experimento este parâmetro apresenta grande instabilidade e ambigüidade.
- b) Para o parâmetro $\overline{\delta\alpha}$, notou-se que as projeções de suas regiões de ambigüidade sobre o seu eixo apresentam grandes intervalos de variações nos casos do R_{PP} e do R_{SP} . Isto implica dizer que este parâmetro, para estes casos, é muito ambíguo e instável. Em relação ao caso combinado $[R_{PP} \ R_{SP}]$, observa-se

que ocorre uma maior estabilidade e redução do intervalo de ambigüidade, quando comparado com os casos dissociados.

c) Para o parâmetro $\overline{\delta\mu}$, verificou-se que as projeções de suas regiões de ambigüidade comportam-se de forma análoga às observações do parâmetro $\overline{\delta\alpha}$, para todos os casos de aproximações e modelos.

Observa-se que quando as feições das regiões de ambigüidade, nos casos dissociados, apresentam uma quase ortogonalidade para a mesma combinação de parâmetros, a inversão combinada tende a estabilizar e diminuir as regiões de ambigüidade. Entretanto, se estas feições são quase paralelas às regiões de ambigüidade, preserva as mesmas características dos casos dissociados.

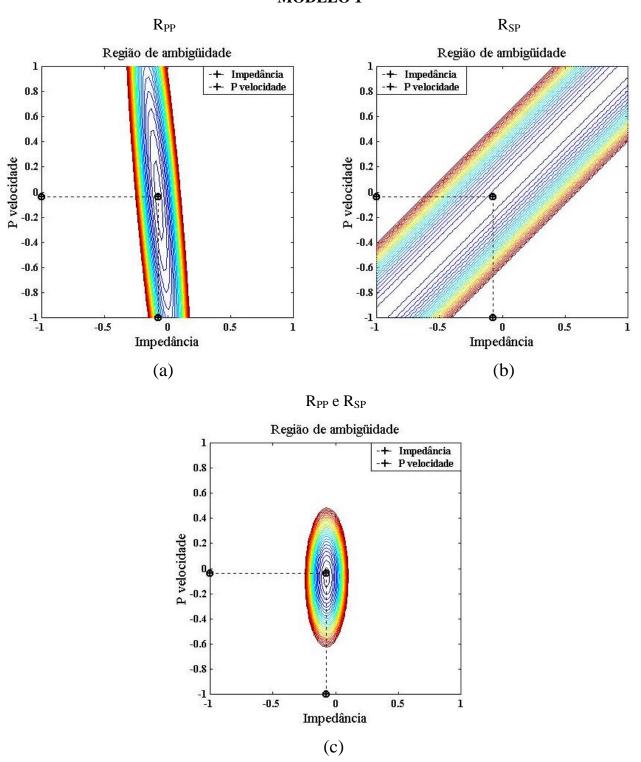


Figura 3.5. As figuras (a), (b) e (c) são as curvas de contorno do modelo 1 para a combinação de parâmetros $\overline{\delta Z} \times \overline{\delta \alpha}$ em que as funções objetivas são definidas pelas aproximações R_{PP} , R_{SP} e $[R_{PP} R_{SP}]$, respectivamente.

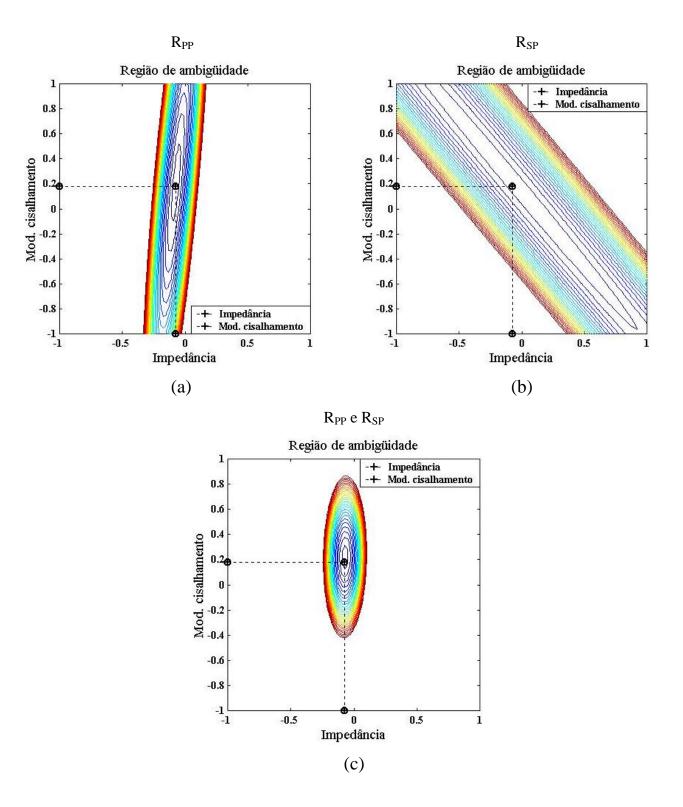


Figura 3.6. As figuras (a), (b) e (c) são as curvas de contorno do modelo 1 para a combinação de parâmetros $\overline{\delta Z} \times \overline{\delta \mu}$ em que as funções objetivas são definidas pelas aproximações R_{PP} , R_{SP} e $[R_{PP} \, R_{SP}]$, respectivamente.

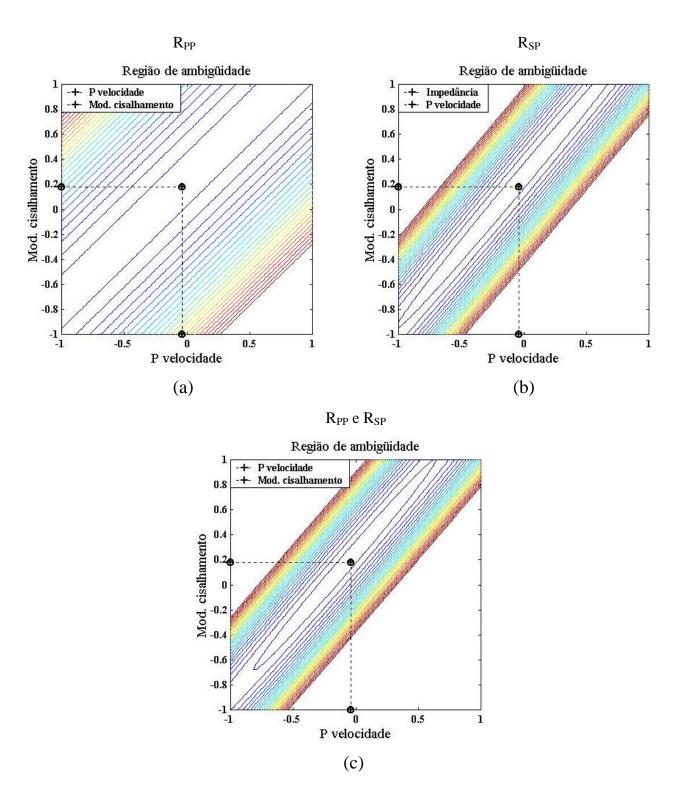


Figura 3.7. As figuras (a), (b) e (c) são curvas de contorno do modelo 1 para a combinação de parâmetros $\overline{\delta\alpha}\times\overline{\delta\mu}$ em que as funções objetivas são definidas pelas aproximações R_{PP} , R_{SP} e $[R_{PP}\,R_{SP}]$, respectivamente.

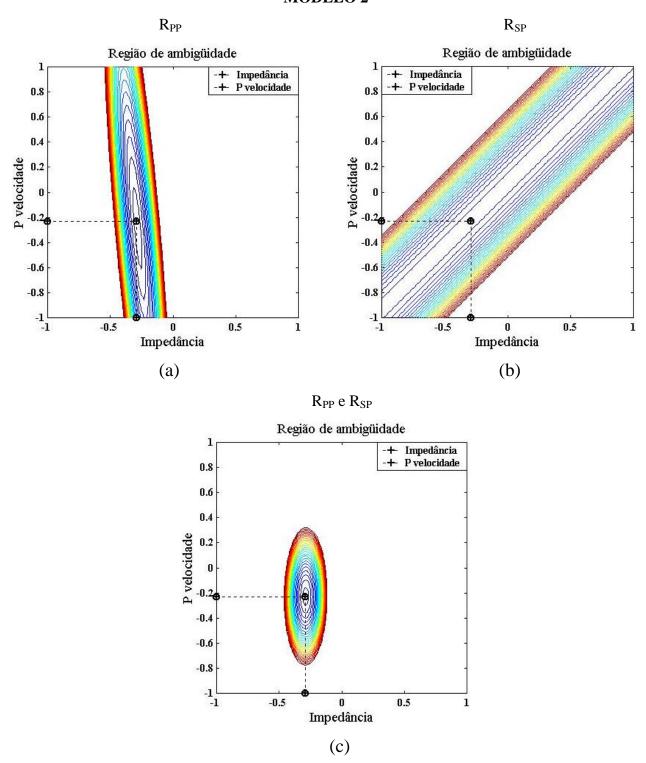


Figura 3.8. As figuras (a), (b) e (c) são as curvas de contorno do modelo 2 para a combinação de parâmetros $\delta \overline{Z} \times \overline{\delta \alpha}$ em que as funções objetivas são definidas pelas aproximações R_{PP} , R_{SP} e $[R_{PP} R_{SP}]$, respectivamente.

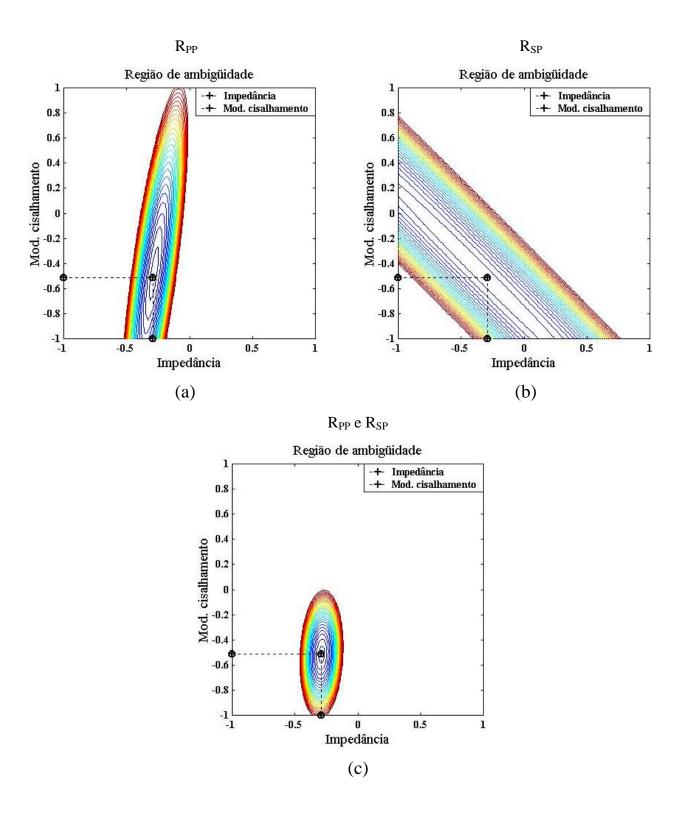


Figura 3.9. As figuras (a), (b) e (c) são as curvas de contorno do modelo 2 para a combinação de parâmetros $\overline{\delta Z} \times \overline{\delta \mu}$ em que as funções objetivas são definidas pelas aproximações R_{PP} , R_{SP} e $[R_{PP} R_{SP}]$, respectivamente.

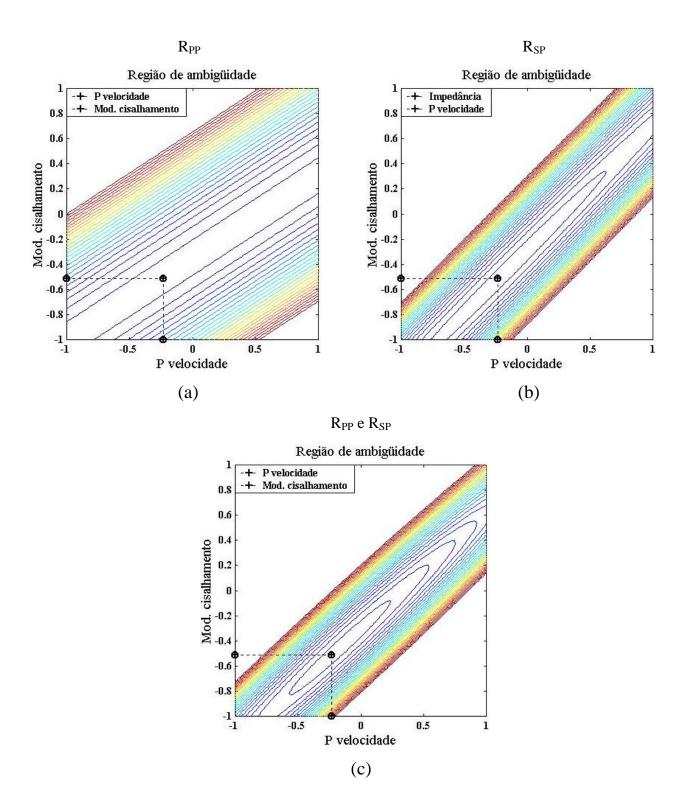


Figura 3.10. As figuras (a), (b) e (c) são curvas de contorno do modelo 2 para a combinação de parâmetros $\overline{\delta\alpha}\times\overline{\delta\mu}$ em que as funções objetivas são definidas pelas aproximações R_{PP} , R_{SP} e $[R_{PP}\,R_{SP}]$, respectivamente.

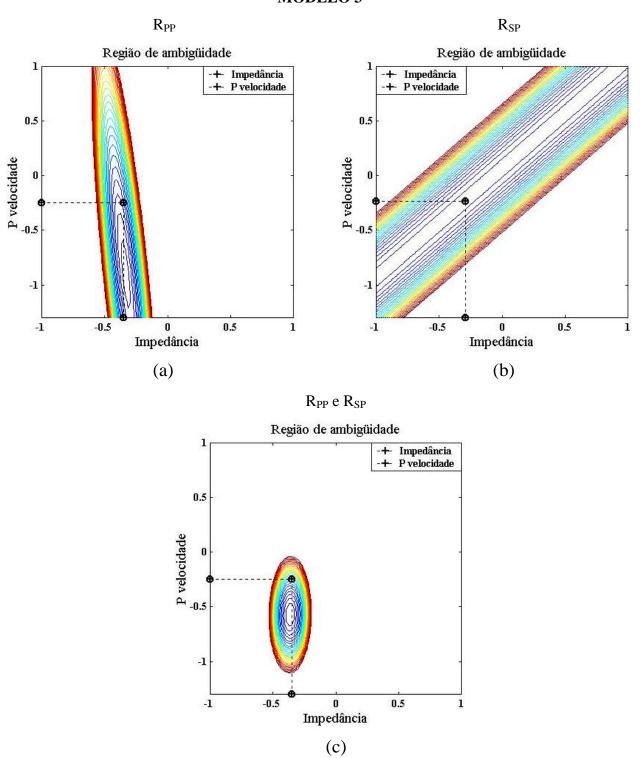


Figura 3.11. As figuras (a), (b) e (c) são as curvas de contorno do modelo 3 para a combinação de parâmetros $\overline{\delta Z} \times \overline{\delta \alpha}$ em que as funções objetivas são definidas pelas aproximações R_{PP} , R_{SP} e $[R_{PP} \ R_{SP}]$, respectivamente.

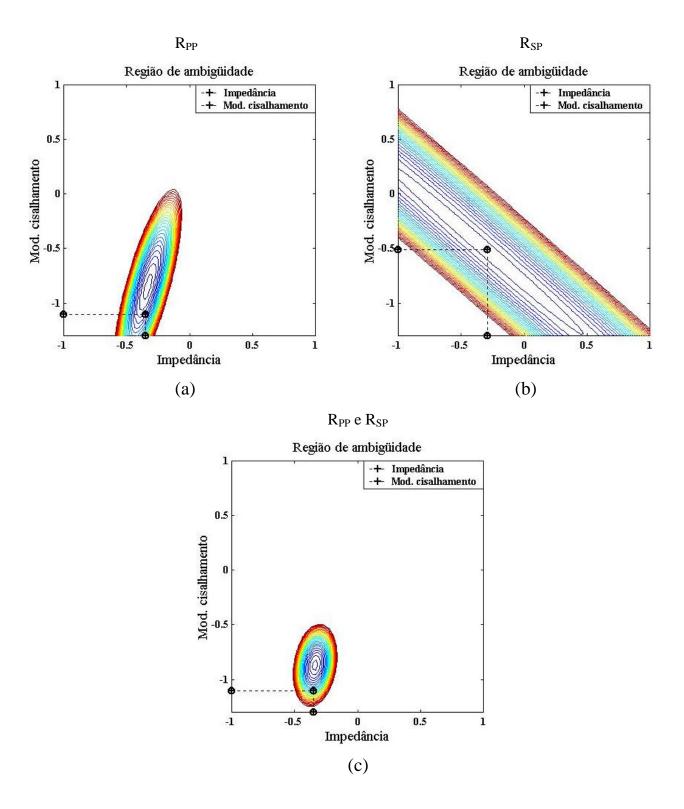


Figura 3.12. As figuras (a), (b) e (c) são as curvas de contorno do modelo 3 para a combinação de parâmetros $\overline{\delta Z} \times \overline{\delta \mu}$ em que as funções objetivas são definidas pelas aproximações R_{PP} , R_{SP} e $[R_{PP} \ R_{SP}]$, respectivamente.

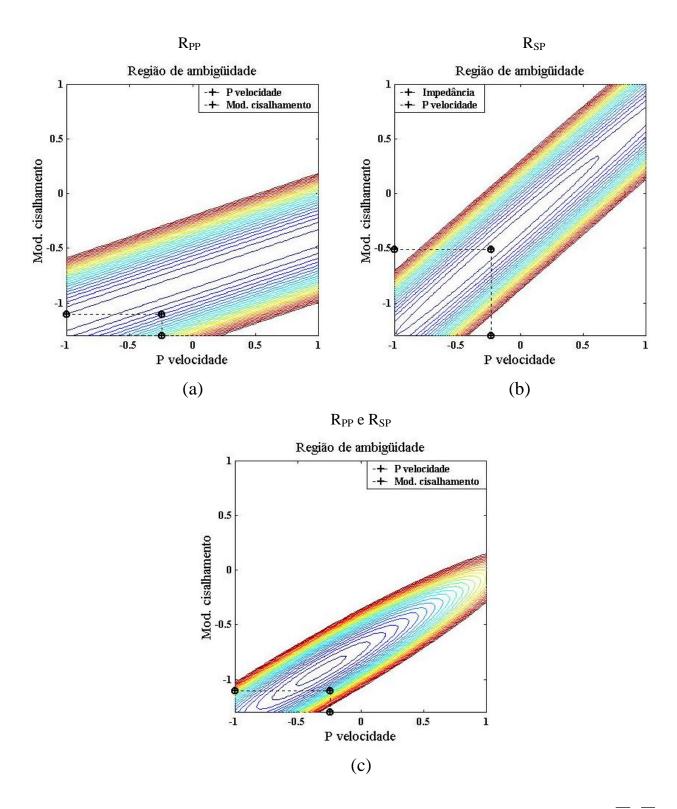


Figura 3.13. As figuras (a), (b) e (c) são curvas de contorno do modelo 3 para a combinação de parâmetros $\overline{\delta\alpha}\times\overline{\delta\mu}$ em que as funções objetivas são definidas pelas aproximações R_{PP} , R_{SP} e $[R_{PP}\,R_{SP}]$, respectivamente.

Mostrou-se até aqui, que os modelos linearizados dos coeficientes de R_{PP} e R_{SP} , para a inversão de dados sintéticos, possuem um parâmetro totalmente no espaço nulo. E que apenas um parâmetro é bem resolvido tanto para a aproximação R_{PP} quanto para a aproximação R_{SP} . Já no caso da aproximação combinada $[R_{PP} \ R_{SP}]$ a ambigüidade é reduzida e a inversão dos seus parâmetros é mais estável, comparadas com as aproximações de R_{PP} e R_{SP} , o que é confirmado pela análise das projeções e pelas feições das curvas de contorno, conforme Tabela (3.1) e (3.2).

Por estes motivos optou-se por analisar a inversão dos dados apenas na aproximação combinada [R_{PP} R_{SP}]. O próximo teste é realizado sobre o posto efetivo da matriz de sensibilidade $\widetilde{\mathbf{M}}$ afim de analisar a matriz de resolução definida em (3.8).

Pelas características da matriz de resolução, a análise de sensibilidade enfatiza os elementos da diagonal principal. Quanto mais próxima da identidade a matriz de resolução estiver, melhor é a resolução dos parâmetros estimados. Esta análise pode informar quais parâmetros podem ser estimados a partir dos dados de observações e quais não podem.

A Figura (3.14) mostra as matrizes de resolução para todos os modelos com escala de cores variando de aproximadamente -0.4 até 1. Da observação acima, portanto, quanto mais próximo da unidade o parâmetro correspondente na matriz de resolução estiver, melhor é a sua resolução. Observou-se que, em todos os modelos, o parâmetro $\overline{\delta Z}$ possui uma excelente resolução e não depende de nenhum outro parâmetro como já constatado na análise de ambigüidade. Já os parâmetros $\overline{\delta \mu}$ e $\overline{\delta \alpha}$ estão inter-relacionados, como é mostrado nos mapas das curvas de contorno. Estas análises permitem concluir que os parâmetros $\overline{\delta \mu}$ e $\overline{\delta \alpha}$ causam problemas de instabilidade e não unicidade nos procedimentos de inversão.

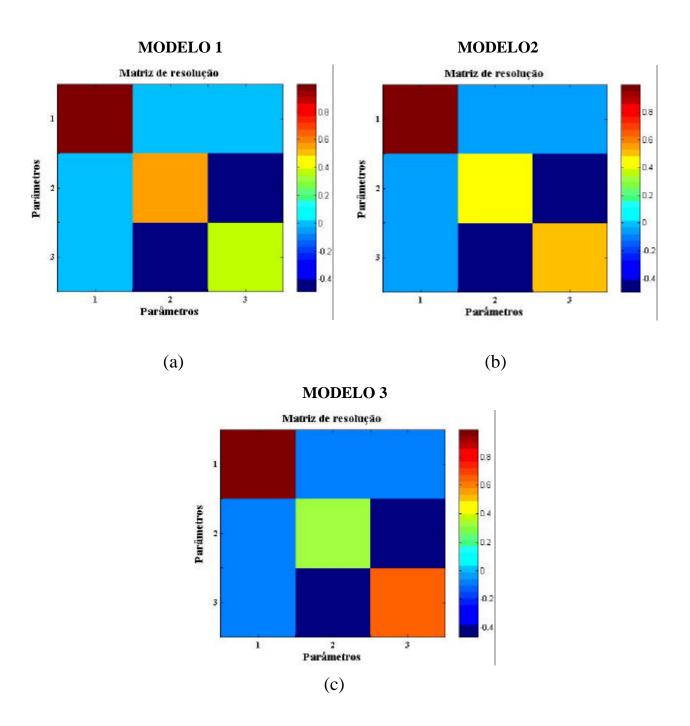


Figura 3.14. As figuras (a), (b) e (c) são referentes as matrizes de resolução da matriz \tilde{M} na cobertura angular $[0^{\circ} 30^{\circ}]$ para os modelos 1, 2 e 3, respectivamente.

4 - INVERSÃO LINEAR DE AVO

O objetivo da inversão de AVO é estimar os contrastes elásticos a partir dos dados obtidos na exploração sísmica. É uma técnica bastante usada na prospecção sísmica pela sua potencialidade de produzir informações que caracterizam a litologia assim como o conteúdo e saturação de fluído na formação (Kabir et al. 2000). De fato, a inversão de AVO associada às estimativas petrofísicas tem a potencialidade de ser usada para identificar o tipo de fluído (Regueiro & Pena⁶, *apud* Castagna, 2001).

Nos testes de dados sintéticos realizados nesta seção, as observações foram contaminadas com ruído uniforme de 5%, no intervalo de amostragem tomado na faixa angular de [0°, 30°]. Aborda-se neste trabalho, a inversão de AVO sobre a estimativa dos contrastes médios relativos dos parâmetros elásticos utilizando o operador do inverso generalizado como estimador.

4.1 - FORMULAÇÃO MATEMÁTICA DO PROBLEMA DE INVERSÃO

O problema da inversão de AVO, no nosso caso, vai consistir na solução dos problemas (3.12) a (3.14). Como se vai proceder a inversão apenas para o caso da combinação [R_{PP} R_{SP}] será analisado apenas o problema (3.14) e para encontrar a sua solução, calcula-se e zera-se o gradiente da função $\tilde{\phi}(\delta \mathbf{p})$:

$$\nabla_{\delta p} \widetilde{\phi}(\delta \mathbf{p}) = 0. \tag{4.1}$$

A solução de (4.1) resolve a equação:

$$\widetilde{\mathbf{M}}\,\delta\mathbf{p} = \widetilde{\mathbf{r}}\,\,\,(4.2)$$

definida na sub-seção 3.1 e é dada pela sua solução de norma mínima cuja forma é (Lines & Treitel, 1984):

$$\delta \widetilde{\mathbf{p}} = \left[\left(\widetilde{\mathbf{M}}^{t} \widetilde{\mathbf{M}} \right)^{-1} \widetilde{\mathbf{M}}^{t} \right] \widetilde{\mathbf{r}} , \qquad (4.3)$$

⁶ REGUEIRO, J. & PENA, A. 1996. AVO in North of Paria, Venezuela: Gas methane versus condensate reservoirs: *Geophysics*, 61: 937-946.

sendo $\delta \tilde{\mathbf{p}}$ a solução. A matriz $\left[\left(\tilde{\mathbf{M}}^t \tilde{\mathbf{M}} \right)^{-1} \tilde{\mathbf{M}}^t \right]$ é conhecida como a pseudo-inversa de $\tilde{\mathbf{M}}$ e o estimador $\delta \tilde{\mathbf{p}}$ só é possível se $\tilde{\mathbf{M}}^t \tilde{\mathbf{M}}$ for inversível.

A matriz de sensibilidade $\widetilde{\mathbf{M}}$ é sobre-determinada e uma forma de se estimar $\delta\widetilde{\mathbf{p}}$ é através da inversa generalizada (Lines & Treitel, 1984) obtida pela Decomposição em Valores Singulares (SVD) de $\widetilde{\mathbf{M}}$.

$$\widetilde{\mathbf{M}} = \mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{V}^{\mathsf{t}} \tag{4.4}$$

e o seu inverso generalizado é definido por:

$$\widetilde{\mathbf{M}}^{+} = \mathbf{V}_{ef} \mathbf{S}_{ef}^{-1} \mathbf{U}_{ef}^{t}, \qquad (4.5)$$

sendo \mathbf{V}_{ef} , \mathbf{S}_{ef} e \mathbf{U}_{ef} as matrizes definidas na sub-seção (3.2) e que são provenientes do método SVD, considerando-se o seu posto efetivo. A razão de considerar o posto efetivo é eliminar as colunas da matriz \mathbf{U} , os valores singulares de \mathbf{S} e as colunas da matriz \mathbf{V} que causam instabilidade e ambigüidade ao problema de inversão linear, definidas na sub-seção (3.2). A inversa generalizada será usado na expressão (4.5), obtendo-se a estimativa dos parâmetros para o problema de inversão, dada por:

$$\delta \widetilde{\mathbf{p}} = \mathbf{V}_{ef} \mathbf{S}_{ef}^{-1} \mathbf{U}_{ef}^{ t} \widetilde{\mathbf{r}} . \tag{4.6}$$

4.2 - SIMULAÇÃO NUMÉRICA

Como o modelo de ajuste para a inversão é linear, pode acontecer dos parâmetros estimados possuírem instabilidade e ambigüidade. Estes problemas já foram analisados na seção 3. Nesta seção, os dados sintéticos serão contaminados com 5% de ruído normal duzentas vezes. Este tipo de experimento denomina-se simulação numérica e tem o objetivo de confirmar os resultados obtidos nas análises de sensibilidade e ambigüidade. Cada parâmetro invertido apresentado neste trabalho é resultado da média aritmética do número de simulações e é dado por:

$$\delta \overline{p}_{j} = \frac{\sum_{i=1}^{n_{simu}} \delta \widetilde{p}_{ij}}{n_{simu}}, \quad j = 1, 2, 3,$$
(4.7)

em os sub-índices i e j correspondem à i-ésima simulação e ao j-ésimo parâmetro $\delta \widetilde{p}_{ij}$, respectivamente, e n_{simu} ao número se simulações. Para todas as análises no processo de inversão usou-se o parâmetro médio $\delta \overline{p}_i$.

A simulação numérica permite quantificar o quanto o parâmetro é estável através do coeficiente de variação CV dado por:

$$CV = \frac{\sigma_p}{\delta \overline{p}_j}, \tag{4.8}$$

sendo σ_p o desvio padrão:

$$\sigma_{p} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n_{simu}} \left(\delta \tilde{p}_{ij}^{2} - n_{simu} \delta \bar{p}_{ij}\right)^{2}}{n_{simu} - 1}}.$$
(4.9)

O desvio padrão explicita as variações que as soluções de parâmetros possuem em relação ao valor do parâmetro médio dado em (4.7).

4.3 - INVERSÃO LINEAR E ANÁLISE DOS RESULTADOS

Para simular a técnica de inversão supõe-se que os dados já passaram pelas etapas principais de processamento sísmico. Os dados sintéticos são amostrados em um intervalo de [0°, 30°] e contaminados com 5% de ruído uniforme. Os parâmetros a serem estimados são definidos na seção 2 e será dado por:

$$\ddot{a}\bar{p} = (\overline{\delta Z}_{est}, \overline{\delta \alpha}_{est}, \overline{\delta \mu}_{est})^{t}. \tag{4.10}$$

Para inverter os dados usa-se o estimador definido em (4.5). Os modelos escolhidos para a inversão são quatro, sendo os Modelos 1, 2 e 3 definidos na Tabela (3.1) e classificados como de baixo contraste, contraste moderado e forte contraste, respectivamente e o Modelo 4, definido na Tabela (4.1):

Tabela 4.1. Parâmetros para o cálculo dos contrastes médios relativos dos meios envolvidos.

	Material	ρ	α	β
Modelo		(g/cm^3)	(m/seg)	(m/seg)
Modelo 4	Folhelho	2.20	3270	1650
Wiodelo 4	Brine sand	2.05	3040	1740

O Modelo 4 faz parte de um conjunto de 25 modelos usado por Castagna & Smith (1994) e foi escolhido por apresentar contrastes médios relativos muito fracos, na ordem de 10^{-2} . As análises de sensibilidade e de ambigüidade deste modelo produzem os mesmos resultados daqueles apresentados para o Modelo 1.

4.3. 1 - Modelo 1 e Modelo 4

Os Modelos 1 e 4 são dotados de fracos contrastes e seus parâmetros reais e estimados são dados nas Tabelas 4.2 e 4.5.

Observa-se que o Modelo 1 consegue estimar δZ e $\delta \mu$ com erro relativo em torno de 1%, mas não consegue estimar o parâmetro $\delta \alpha$. O parâmetro $\delta \alpha$ apresenta erro relativo de quase 100% no processo de inversão. Isto se deve ao fato do modelo possuir o contraste de velocidade cisalhante bem maior que o contraste de velocidade de onda compressional, na ordem de grandeza de 10^{-1} conforme Tabela 4.2.

As curvas de ambigüidade para o Modelo 1 descritas nas Figuras (3.5) a (3.7) mostram que a combinação de parâmetros que possuem ambigüidade relaciona $\overline{\delta\alpha}$ e $\overline{\delta\mu}$. Isto informa que qualquer solução para estes parâmetros que recaía dentro do vale de ambigüidade é uma solução para a inversão. Este fato é confirmado nas Figuras (4.1) e (4.4), correspondentes à reconstrução dos coeficientes de reflexão e de sua convertida, usando-se os parâmetros estimados. Nota-se que

o erro relativo entre os coeficientes reconstruídos depois do processo de inversão e os exatos é menor que 1,5%. Este experimento confirma a natureza ambígua do problema linear. O coeficiente de variação (CV) mostra que os parâmetros são bastante estáveis na presença de ruído, pois o maior valor do CV é de 0,7% e corresponde ao parâmetro $\overline{\delta\alpha}$.

No Modelo 4 observou-se que os contrastes estão na mesma ordem de grandeza, na faixa de 10^{-2} , e os parâmetros melhor estimados são $\overline{\delta Z}$ e $\overline{\delta \alpha}$, com erro relativo menor que 2%. O parâmetro $\overline{\delta \mu}$ possui erro relativo de 30%, porém é considerada como uma boa estimativa. As suas curvas de ambigüidades são idênticas àquelas produzidas para o modelo 1. O erro relativo cometido na reconstrução do coeficiente de reflexão e da sua convertida após o processo de inversão é inferior a 2%. O seu CV mostra que o parâmetro mais estável é o $\overline{\delta Z}$ com 0,1% de CV. O parâmetro $\overline{\delta \alpha}$ tem uma boa estabilidade com 4% de CV e $\overline{\delta \mu}$ não é estável pois possui 7,6% de CV, implicando dizer que $\overline{\delta \mu}$ é mais sensível às variações de ruído que os outros parâmetros.

4.3. 2 - Modelo 2

O Modelo 2 foi classificado como de contraste moderado e seus parâmetros reais e estimados estão descritos na Tabela (4.3), estando seus contrastes na mesma ordem de magnitude ($\approx 10^{-1}$). Neste modelo os parâmetros melhor estimados são $\overline{\delta Z}$ com erro relativo de 1% e $\overline{\delta \mu}$ com erro relativo de 18%. O parâmetro $\overline{\delta \alpha}$ possui erro relativo de 44% e a resolução deste parâmetro é considerada apenas razoável. Na reconstrução do coeficiente de reflexão e da sua convertida, o erro relativo continua sendo inferior a 2%, conforme se observa nas figuras 4.3 (c) e 4.3 (d).

O CV do Modelo 2 mostra que o parâmetro mais estável é $\overline{\delta Z}$ com 1% de CV, o parâmetro $\overline{\delta \mu}$ possui uma estabilidade razoável com 9% de CV e o parâmetro $\overline{\delta \alpha}$ é instável, possuindo 30% de CV, prescrevendo as análises de sensibilidade e de ambigüidade realizadas para este modelo.

4.3. 3 - Modelo 3

O Modelo 3 é classificado como de alto contraste por apresentar o parâmetro $\overline{\delta\mu}$ na ordem 10^0 e seus parâmetros reais e estimados estão descritos na Tabela (4.5). Neste modelo, todos os parâmetros são bem estimados, sendo que o maior erro relativo do processo de inversão é de 20% e corresponde ao parâmetro $\overline{\delta\mu}$. Na reconstrução do coeficiente de reflexão e da sua convertida o erro relativo é de 7% e 2%, respectivamente. O seu CV mostra que os parâmetros mais estáveis são $\overline{\delta Z}$ e $\overline{\delta\mu}$ com 2% e 4% de CV, respectivamente, e o mais instável é $\overline{\delta\alpha}$ com 19% de CV.

Em todos os modelos analisados, os resultados obtidos pela inversão linear concordam com as análises de sensibilidade e de ambigüidade feitas com a combinação de $\overline{\delta\alpha}$ e $\overline{\delta\mu}$. Constatou-se que no processo de inversão estes parâmetros ou são instáveis ou são mal estimados, confirmando os resultados obtidos no capítulo 3. O problema de ambigüidade é mostrado na reconstrução das curvas de reflexão e da sua convertida, se ajustando muito bem aos seus respectivos coeficientes exatos, apesar dos parâmetros $\overline{\delta\alpha}$ e $\overline{\delta\mu}$ não terem sido bem estimados ou apresentarem instabilidade.

Chama-se atenção para o fato de não serem consideradas informações 'a priori', porém o estimador da inversa generalizada já inclui alguma informação através do parâmetro de corte usada para obter o posto efetivo. Estas informações aumentam a percentagem de ruído das observações em até 10 vezes. Uma alternativa que não foi usada neste trabalho, mas que é proposto para futuras investigações, é o uso do método do Ridge-Regression.

MODELO 1 Reais Estimados 120 0.2 99,7 100 0.15 80 Parametros 0.1 Erro (%) 60 0.05 40 20 1,2 1,28 -0.05 0 $\overline{\delta Z}$ δα δμ Ordem do parámetro (b) (a) Exate Exato Reconstruido Reconstruido -0.08 -0.09 -0.02 Oefficiente Rpp Coeficiente Rsp -0.1 -0.11 -0.12-0.05 10 15 20 Ângulo de incidência 25 15 20 25 5 Ângulo de incidência (c) (d)

Figura 4.1. As figuras (a) e (b) correspondem aos parâmetros estimados e ao erro absoluto da estimativa do modelo 1, respectivamente. As figuras (c) e (d) são os coeficientes de reflexão e da sua convertida, a curva azul sólida corresponde aos coeficientes exatos, e a curva preta descrita por asteriscos corresponde aos coeficientes reconstruídos usando os parâmetros estimados.

Tabela 4.2 – Parâmetros reais e médios estimados, erros percentuais de inversão, desvio padrão e o coeficiente de variação (CV) para o modelo 1

	äp reais	ä p estimados	Erro(%)	ó _p	CV(%)
$\overline{\delta Z}$	-0,07174	-0,0709	1,2	$2,73\times10^{-5}$	0,039
$\overline{\delta \alpha}$	-0,03645	-0,0728	99,7	$4,78 \times 10^{-4}$	0,658
δμ	0,180922	0,1786	1,28	$5,82 \times 10^{-4}$	0,326

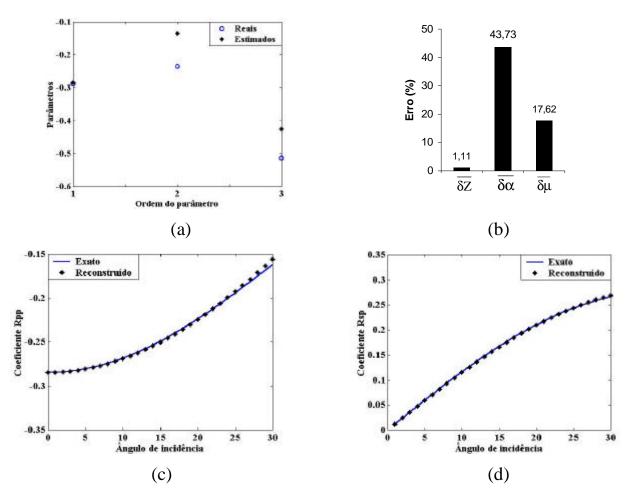


Figura 4.2. As figuras (a) e (b) correspondem aos parâmetros estimados e ao erro absoluto da estimativa do modelo 2, respectivamente. As figuras (c) e (d) são os coeficientes de reflexão e da sua convertida, a curva azul sólida corresponde aos coeficientes exatos, e a curva preta descrita por asteriscos corresponde aos coeficientes reconstruídos usando os parâmetros estimados.

Tabela 4.3 – Parâmetros reais e médios estimados, erros percentuais de inversão, desvio padrão e o coeficiente de variação (CV) para o modelo 2.

	äp reais	ä p estimados	Erro(%)	ó _p	CV(%)
$\overline{\delta Z}$	-0,288	-0,2848	1,11	$2,784 \times 10^{-3}$	0,98
$\overline{\delta lpha}$	-0,2344	-0,1319	43,73	$3,956 \times 10^{-2}$	29,99
$\overline{\delta\mu}$	-0,5136	-0,4231	17,62	$3,89 \times 10^{-2}$	9,19

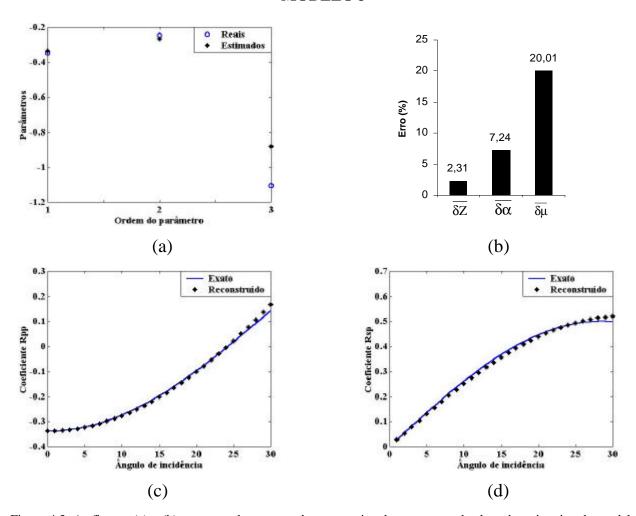


Figura 4.3. As figuras (a) e (b) correspondem aos parâmetros estimados e ao erro absoluto da estimativa do modelo 3, respectivamente. As figuras (c) e (d) são os coeficientes de reflexão e da sua convertida, a curva azul sólida corresponde aos coeficientes exatos, e a curva preta descrita por asteriscos corresponde aos coeficientes reconstruídos usando os parâmetros estimados.

Tabela 4.4 – Parâmetros reais e médios estimados, erros percentuais de inversão, desvio padrão e o coeficiente de variação (CV) do modelo 1

	äp reais	ä p estimados	Erro(%)	ó _p	CV(%)
$\overline{\delta Z}$	-0,347	-0,339	2,31	$5,99 \times 10^{-3}$	1,77
$\overline{\delta \alpha}$	-0,246	-0,2638	7,24	$5,07 \times 10^{-2}$	19,21
$\overline{\delta\mu}$	-1,105	-0,8829	20,01	$3,85 \times 10^{-2}$	4,36

MODELO 4 0 Reais 35 Estimados 29,6 0.02 30 25 Parámetros Erro (%) 20 -0.02 15 10 -0.06 5 1,98 0 -0.08 $\overline{\delta Z}$ 2 Ordem do parámetro $\delta \alpha$ $\overline{\delta\mu}$ (b) (a) 0.01 Exato Exate Reconstruido Reconstruido 0.008 Coefficiente Rsp 900'0 700'0 Coefficiente Rpp -0.08 0.002 -0.09 10 15 20 Ângulo de incidência 25 25 30

Figura 4.4. As figuras (a) e (b) correspondem aos parâmetros estimados e ao erro absoluto da estimativa do modelo 4, respectivamente. As figuras (c) e (d) são os coeficientes de reflexão e da sua convertida, a curva azul sólida corresponde aos coeficientes exatos, e a curva preta descrita por asteriscos corresponde aos coeficientes reconstruídos usando os parâmetros estimados.

(d)

Ângulo de incidência

(c)

Tabela 4.5 – Parâmetros reais e médios estimados, erros percentuais de inversão, desvio padrão e o coeficiente de variação (CV) para o modelo 4

	äp reais	ä p estimados	Erro(%)	ó _p	CV(%)
$\overline{\delta Z}$	-0,07174	-0,07167	0,1	8,23×10 ⁻⁵	0,115
$\overline{\delta \alpha}$	-0,03645	-0,03573	1,98	$1,44 \times 10^{-3}$	4,032
δμ	0,0178	0,02306	29,6	$1,75 \times 10^{-3}$	7,598

5 - CONCLUSÕES

Neste trabalho foram apresentadas as aproximações lineares e quadráticas para os coeficientes de reflexão, de transmissão e de suas convertidas e procedimentos de inversão linear de AVO. Os experimentos desenvolvidos utilizaram dados sintéticos, gerados a partir das equações de Zoeppritz, em modelos considerados como de fracos, moderados e altos contrastes médios relativos dos meios envolvidos.

As aproximações lineares e quadráticas foram obtidas usando-se as aproximações de Taylor sobre os contrastes médios relativos dos parâmetros elásticos de impedância, da velocidade de onda P e do módulo de cisalhamento. Estas expressões foram apresentadas em duas versões: em função do ângulo de incidência e da média angular. Observou-se que dentro da faixa angular de $[0^{\circ}, 60^{\circ}]$ o desempenho das aproximações quadráticas é bem melhor, em geral, do que das aproximações lineares nas duas versões, sugerindo uma possível análise de inversão usando-se as aproximações quadráticas. Na faixa angular de $[0^{\circ}, 30^{\circ}]$, notou-se que tanto as aproximações lineares quanto as quadráticas possuem desempenhos similares e que o desempenho das linearizações em termos do ângulo incidente e da média angular são também similares. Como a média angular tem dependência implícita de $\overline{\delta\alpha}$, optou-se em analisar a inversão linear e seus procedimentos antecedentes tomando-se os modelos linearizados pelo ângulo de incidência.

Nos procedimentos que antecedem à inversão linear analisou-se a sensibilidade e a ambigüidade utilizando o método SVD e as curvas de contorno das funções objetivo. A partir das análises sobre o número de condição, dos valores singulares e das projeções das colunas de V, observa-se que as aproximações combinadas dos coeficientes de R_{PP} e R_{SP} produzem inversões muito mais estáveis do que as dissociadas, em todos os testes apresentados. Analisando-se as curvas de contorno das funções objetivo, observa-se que combinações dos parâmetros $\overline{\delta\alpha}$ e $\overline{\delta\mu}$ produzem sempre ambigüidade e instabilidade para o problema de inversão linear, sugerindo que estas combinações possuem alguma dependência linear. Este fato é confirmado pelas análises das matrizes de resolução.

Na inversão linear utilizou-se o método do inverso generalizado como estimador, não sendo utilizadas, em momento algum, informações 'a priori'. Para constatar a estabilidade e a ambigüidade dos parâmetros $\overline{\delta\alpha}$ e $\overline{\delta\mu}$ usou-se um experimento denominado de simulação

numérica. Nesta análise os dados sintéticos foram contaminados duzentas vezes com 5% de ruído normal e seus parâmetros estimados, sendo então calculado o parâmetro estimado médio e seu coeficiente de variação (CV). O parâmetro estimado médio foi usado para reconstruir os coeficientes de reflexão e da sua convertida. O CV quantifica, em valores percentuais, a estabilidade do parâmetro.

Analisando os quatro modelos propostos na inversão, constatou-se que o parâmetro δZ é sempre bem estimado. Já os parâmetros $\overline{\delta\alpha}$ e $\overline{\delta\mu}$ estão sempre linearmente relacionados em todos os modelos. O parâmetro estimado $\overline{\delta Z}$ possui erro relativo menor do que 2,5%, em todos os experimentos. Já os parâmetros $\overline{\delta\alpha}$ e $\overline{\delta\mu}$ apresentam mais de 50% de erro relativo em alguns modelos. As reconstruções dos coeficientes de reflexão e de sua convertida mostram a ambigüidade do problema de inversão. Estes resultados são conclusivos e validam as análises de sensibilidade e de ambigüidade estabelecidas na seção 3.

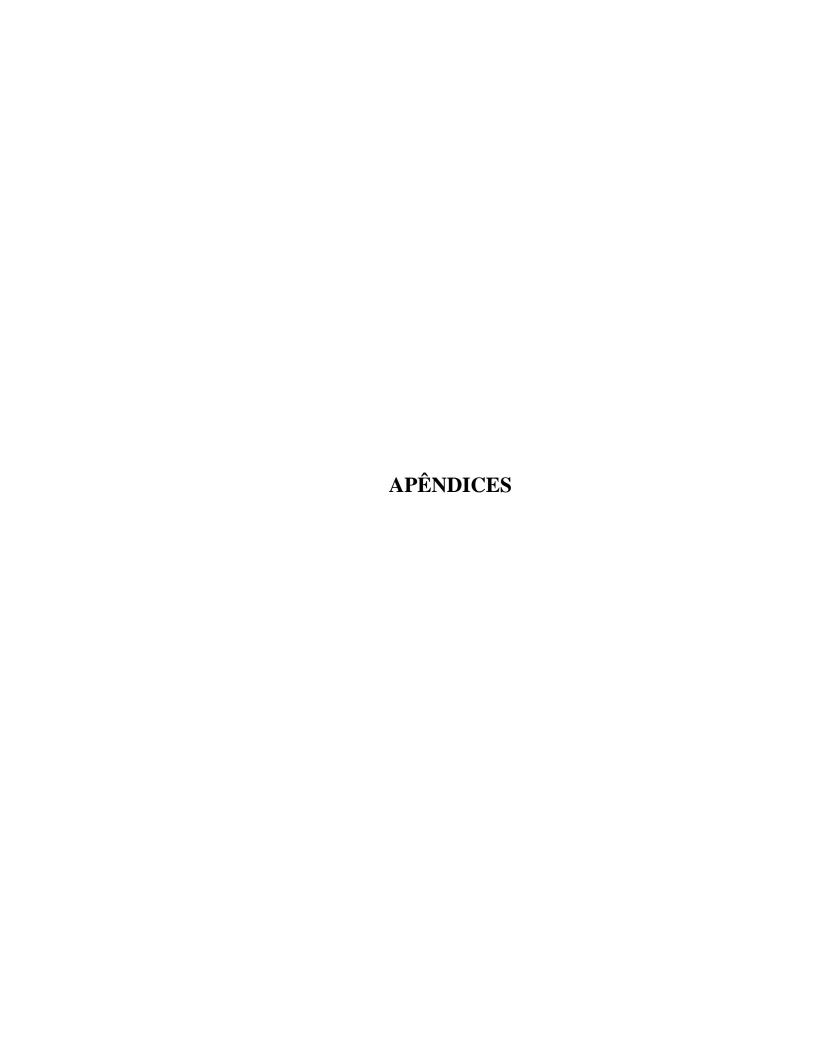
Os desdobramentos naturais deste trabalho são: (a) incluir informações 'a priori' e aplicar o método Ridge-Regression na inversão linear; (b) aplicar procedimentos de inversão não linear considerando-se os modelos quadráticos aqui apresentados e/ou mesmo considerando-se os modelos exatos; (c) estender as análises aqui aplicadas em meios com presença de anisotropia.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- AKI, K. & RICHARDS, P.G. 1980. Quantitative seismology, theory and methods. W.H. Freeman and Company. v. 1
- ALLEN, J.L. & PEDDY, C.P. 1993. **Amplitude variation with offset:** Gulf Coast Case Studies. Tulsa, Society of Exploration geophysicists, OK.
- BORTFELD, R. 1961. Approximation to the reflection and transmission coefficients of plane longitudinal and transverse waves: **Geophys. Prosp.**, 9: 485-502.
- CASTAGNA, J.P. 1993. AVO analysis Tutorial and review. In CASTAGNA, J.P. & BACKUS, M.M. (Eds.). **Offset-dependent reflectivity-Theory and practice in AVO analysis:** SEG: p.3-35.
- CASTAGNA, J.P. 2001. Recent advances in seismic lithologic analysis. **Geophysics**, 66: 42-46.
- CASTAGNA, J.P. & SMITH, S.W. 1994. A comparison of AVO indicators: A modeling study. **Geophysics**, 59: 1849-1855.
- DE HAAS, J.C. & BERKHOUT, A.J. 1988. On the information content of P-P, P-SV, SV-SV, and SV-P reflections. In: 58TH ANN. INT. MTG. SEG. **Expanded Abstract...**: SEG. p.1190-1194.
- DRUFUCA, G. & MAZZOTTI, A. 1995. Ambiguities in AVO inversion of reflections from a gas-sand. **Geophysics**, 60: 134-141.
- GOLUB, G.H. & VAN LOAN, C.F. 1983. **Matrix Computations.** Baltimore, The Johns Hopkins University Press, 476p.

- GOMES, E.N.S. 1999. **Reflectividade de ondas P em meios anisotrópicos.** Belém: Universidade Federal do Pará. Centro de Ciências Exatas e Naturais. 110p. (Tese de Mestrado).
- KABIR, N.; LAVAUD, B.; CHAVENT, G. 2000. Estimation of the density contrast by AVO inversion beyond the linearized approximation: an indicator of gas saturation. In: ANNUAL MEETING SEG, 2000, Calgary. **Anais eletrônicos...** Calgary. Disponível em: http://www.seg.org. Acesso: 21 marc. 2001.
- KIM, K. Y.; WROLSTAD, K. H.; AMINZADEH, F. 1993. Effects of transverse isotropy on P-wave AVO for gas sands. **Geophysics**, 58: 883-888.
- LANCZOS, C. 1961. Linear Differential operators, D. Van Nostrand Co., Lond.
- LINES, L.G. 1998. Density contrast is difficult to determine from AVO, **CREWES Research Report**, 10: 47-1 47-8.
- LINES, L.R. & TREITEL, S. 1984. A review of least-squares inversion and its application to geophysical problems, **Geophys. Prospecting**, 32: 159-186.
- MALLICK, S. 1993. A simple approximation to the P-wave reflection coefficient and its implication in the inversion of the amplitude variation with offset data. **Geophysics**, 58: 544-552.
- MEJU, M.A. 1994. Understanding inverse problem theory and practice. S.N. Domenico. v.6
- OSTRANDER, W.J. 1984. Plane-wave reflection coefficients for gas sands at nonnormal angles of incidence, **Geophysics**, 49 (10): 1637-1648.
- PŠENCIK, I. & VAVRYÈUK, V. 1998. Weak contrast PP wave displacement R/T coefficients in weakly anisotropic elastic media. *Pure* **appl.** *Geophys.*, (151): 699-718.

- RICHARDS, P.G. & FRAISER, C.W. 1976. Scattering of elastic waves from depth-dependent inhomogeneities: **Geophysics**, 41: 441-458.
- RÜGER, A. 1998. Variation of P-wave reflectivity with offset and azimuth in anisotropic media. **Geophysics**, 63 (3): 935–947.
- SCHOENBERG, M. & PROTÁZIO, J.S. 1992. Zoeppritz rationalized and generalized to anisotropy. **Journal of Seismic Exploration**, (1): 125-144.
- SEN, M. & STOFFA, P. L. 1995. Global optimization methods in geophysical inversion. Elsevier.
- SHUEY, R. T. 1985. The simplification of the Zoeppritz equations. **Geophysics**, 50: 609-614.
- THOMSEN, L. 1986. Weak elastic anisotropy. **Geophysics**, 51: 1954-1966.
- URSIN, B. & DAHL, T. 1992, Seismic reflection amplitudes, **Geophys. Prosp.**, 40: 483-512.
- VAVRYCUK, V. 1999. Weak contrast reflection/transmition coefficients in weakly anisotropic elastic media: P-wave incidence. **Geophys. J. Int.,** (138): 553-562.
- WANG, Y. 1999. Approximations to the Zoeppritz equations and their use in AVO analysis. **Geophysics**, 64 (6): 1920-1927.
- WU, Y. 2000. Estimation of gas saturation using P-to-S converted waves. In: ANNUAL MEETING SEG, 2000, Calgary. **Anais eletrônicos...** Calgary. Disponível em: http://www.seg.org. Acesso: 21 marc. 2001.



APÊNDICE A: Formulação Exata dos Coeficientes de Reflexão e Transmissão.

Neste apêndice será descrito o desenvolvimento dos coeficientes de reflexão e de transmissão citadas na seção 2.

Os coeficientes de reflexão e de transmissão são definidos em torno do parâmetro de raio s e são dados de forma exata pelas soluções das equações generalizadas de Zoeppritz discutidas em Schoenberg & Protázio (1992).

De (2.3) e (2.4), com o índice 1 correspondendo ao meio incidente e 2 correspondendo ao meio subjacente, obtêm-se que:

$$\mathbf{X}_{1}^{-1}\mathbf{X}_{2} = \begin{bmatrix} \frac{\alpha_{2}(\rho_{2} - 2G s^{2})}{\rho_{1}\alpha_{1}} & \frac{-2G sq_{3s2}}{\rho_{1}\alpha_{1}} \\ \frac{-\alpha_{2}[(\rho_{2} - \rho_{1}) - 2G s^{2}]s}{\rho_{1}q_{3s1}} & \frac{(\rho_{1} + 2G s^{2}) q_{3s2}}{\rho_{1}q_{3s1}} \end{bmatrix}, \tag{A1}$$

$$\mathbf{Y}_{1}^{-1}\mathbf{Y}_{2} = \begin{bmatrix} \frac{(\rho_{1} + 2G s^{2}) q_{3p2}}{\rho_{1}q_{3p1}} & \frac{\beta_{2}[(\rho_{2} - \rho_{1}) - 2G s^{2}] s}{\rho_{1}q_{3p1}} \\ \frac{2G sq_{3p2}}{\rho_{1}\beta_{1}} & \frac{\beta_{2}(\rho_{2} - 2G s^{2})}{\rho_{1}\beta_{1}} \end{bmatrix}.$$
(A2)

A partir de (2.6) e (2.7), as amplitudes das ondas espalhadas são dadas por:

$$R_{PP}(s) = \frac{(A_0 - B_0) + (A_2 - B_2)s^2 + (A_4 - B_4)s^4 - B_6s^6}{(A_0 + B_0) + (A_2 + B_2)s^2 + (A_4 + B_4)s^4 + B_6s^6},$$
(A3)

$$T_{PP}(s) = \frac{2\rho_1 \alpha_1 (C_0 + C_2 s^2) q_{3p1}}{(A_0 + B_0) + (A_2 + B_2) s^2 + (A_4 + B_4) s^4 + B_6 s^6},$$
(A4)

$$R_{SP}(s) = \frac{2\alpha_1 s (D_0 + D_2 s^2 + D_4 s^4) q_{3p1}}{(A_0 + B_0) + (A_2 + B_2) s^2 + (A_4 + B_4) s^4 + B_6 s^6}$$
(A5)

e

$$T_{SP}(s) = \frac{-2\rho_1 \alpha_1 s (E_0 + E_2 s^2) q_{3pl}}{(A_0 + B_0) + (A_2 + B_2) s^2 + (A_4 + B_4) s^4 + B_6 s^6},$$
(A6)

sendo:

$$\begin{split} &A_0 = \rho_2 \alpha_2 (\rho_2 \beta_2 q_{3s1} + \rho_1 \beta_1 q_{3s2}) q_{3p1}\,, \\ &A_2 = 4Gq_{3p1}q_{3s1} (Gq_{3p2}q_{3s2} - \rho_2 \alpha_2 \beta_2)\,, \\ &A_4 = 4G^2 \alpha_2 \beta_2 q_{3p1}q_{3s1}\,, \\ &B_0 = \rho_1 \alpha_1 (\rho_2 \beta_2 q_{3s1} + \rho_1 \beta_1 q_{3s2}) q_{3p2}\,, \\ &B_2 = \alpha_1 \beta_1 [4\rho_1 Gq_{3p2}q_{3s2} + (\rho_2 - \rho_1)^2 \alpha_2 \beta_2]\,, \\ &B_4 = 4G\alpha_1 \beta_1 [Gq_{3p2}q_{3s2} - (\rho_2 - \rho_1)\alpha_2 \beta_2]\,, \\ &B_6 = 4G^2 \alpha_1 \beta_1 \alpha_2 \beta_2\,, \\ &C_0 = \rho_2 \beta_2 q_{3s1} + \rho_1 \beta_1 q_{3s2}\,, \\ &C_2 = -2G(\beta_2 q_{3s1} - \beta_1 q_{3s2})\,, \\ &D_0 = -[\rho_2 (\rho_2 - \rho_1)\alpha_2 \beta_2 + 2\rho_1 Gq_{3p2}q_{3s2}]\,, \\ &D_2 = 2G[(2\rho_2 - \rho_1)\alpha_2 \beta_2 - 2Gq_{3p2}q_{3s2}]\,, \\ &D_4 = -4G^2 \alpha_2 \beta_2 \\ &E_0 = 2Gq_{3p2}q_{3s1} - (\rho_2 - \rho_1)\alpha_2 \beta_1\,, \\ &E_2 = 2G\alpha_2 \beta_1\,. \end{split}$$

e

Nas expressões acima, as densidades, as velocidades de ondas compressionais e cisalhantes, as componentes verticais da vagarosidade e o módulo de cisalhamento são definidos na seção 2.1.

Observa-se que a anulação dos coeficientes A_2, A_4, B_2, B_4 e B_6 , determina:

$$R_{PP}(s) = R_f(s) = \frac{\rho_2 \alpha_2 q_{3p1} - \rho_1 \alpha_1 q_{3p2}}{\rho_2 \alpha_2 q_{3p1} + \rho_1 \alpha_1 q_{3p2}},$$
(A7)

$$T_{PP}(s) = 1 - R_f(s) = \frac{2\rho_1 \alpha_1 q_{3p1}}{\rho_2 \alpha_2 q_{3p1} + \rho_1 \alpha_1 q_{3p2}},$$
(A8)

que são expressões limites para os coeficientes de reflexão e transmissão no caso fluido-fluido.

Com o uso da lei de Snell em (A7) e (A8), têm-se:

$$R_{PP}(\theta_1) = R_f(\theta_1) = \frac{\rho_2 \alpha_2 \cos \theta_1 - \rho_1 \alpha_1 \cos \theta_2}{\rho_2 \alpha_2 \cos \theta_1 + \rho_1 \alpha_1 \cos \theta_2},$$
(A9)

$$T_{PP}(\theta_1) = 1 - R_f(\theta_1) = \frac{2\rho_1 \alpha_1 \cos \theta_2}{\rho_2 \alpha_2 \cos \theta_1 + \rho_1 \alpha_1 \cos \theta_2}.$$
 (A10)

APÊNDICE B: Derivação das Aproximações dos Coeficientes de Reflexão e Transmissão.

Neste apêndice será descrito o desenvolvimento das aproximações dos coeficientes de reflexão e de transmissão citadas na seção 2.

Com a hipótese de não haver ocorrência de eventos evanescentes, o parâmetro do raio s deve ser tomado pequeno, o que torna as componentes verticais da vagarosidade sempre reais. As aproximações para a reflexão, a transmissão e as suas convertidas definidas em (A3) à (A6), são obtidas pela sua expansão em série de Taylor até o termo s² para os casos da reflexão e transmissão e até o termo s³ para os casos das convertidas.

De forma geral, as aproximações são escritas da seguinte maneira:

$$R_{PP}(s) \approx R_f(s) \left[1 + \left(\frac{A_2 - B_2}{A_0 - B_0} - \frac{A_2 + B_2}{A_0 + B_0} \right) s^2 \right],$$
 (B1)

$$T_{PP}(s) \approx [1 - R_f(s)] \left[1 + \left(\frac{C_2}{C_0} - \frac{A_2 + B_2}{A_0 + B_0} \right) s^2 \right],$$
 (B2)

$$R_{SP}(s) \approx 2\alpha_1 s \left[1 + \left(\frac{D_2}{D_0} - \frac{A_2 + B_2}{A_0 + B_0} \right) s^2 \right] q_{3p1},$$
 (B3)

$$T_{SP}(s) \approx -2\rho_1 \alpha_1 s \left[1 + \left(\frac{E_2}{E_0} - \frac{A_2 + B_2}{A_0 + B_0} \right) s^2 \right] q_{3p1},$$
 (B4)

em que A_0 , A_2 , B_0 , B_2 , C_0 , C_2 , D_0 , D_2 , E_0 , E_2 e $R_f(s)$ são definidos no Apêndice A. Observa-se que as aproximações acima não são aproximações quadráticas propriamente ditas uma vez que A_0 , A_2 , B_0 , B_2 , C_0 , C_2 , D_0 , D_2 , E_0 , E_2 e $R_f(s)$ são ainda funções dependentes de s Por isto, tais aproximações são conhecidas como aproximações pseudo-quadráticas (Wang, 1999).

APÊNDICE C: Aproximações em Torno do Ângulo de Incidência (è1)

Sendo a onda incidente uma onda P, a lei de Snell (2.10) determina que:

$$R_{pp}(\theta_1) \approx R_f(\theta_1) \left[1 + \left(\frac{A_2 - B_2}{A_0 - B_0} - \frac{A_2 + B_2}{A_0 + B_0} \right) \frac{\sin^2 \theta_1}{\alpha_1^2} \right],$$
 (C1)

$$T_{PP}(\theta_1) \approx [1 - R_f(\theta_1)] \left[1 + \left(\frac{C_2}{C_0} - \frac{A_2 + B_2}{A_0 + B_0} \right) \frac{\sin^2 \theta_1}{\alpha_1^2} \right],$$
 (C2)

$$R_{SP}(\theta_1) \approx 2 \left[1 + \left(\frac{D_2}{D_0} - \frac{A_2 + B_2}{A_0 + B_0} \right) \frac{\sin^2 \theta_1}{\alpha_1^2} \right] \cos \theta_1 \sin \theta_1, \tag{C3}$$

$$T_{SP}(\theta_1) \approx -2\rho_1 \left[1 + \left(\frac{E_2}{E_0} - \frac{A_2 + B_2}{A_0 + B_0} \right) \frac{\sin^2 \theta_1}{\alpha_1^2} \right] \cos \theta_1 \sin \theta_1, \tag{C4}$$

em que $\,\theta_1\,$ é o ângulo de incidência.

O desenvolvimento da série de Taylor até segunda ordem com relação aos parâmetros elásticos aplicados em (C1) a (C4) determinam as aproximações definidas em (2.11). Os vetores e matrizes lá referenciados são dados por:

$$\mathbf{m}(\theta_{1}) = \begin{bmatrix} 1 & \sin^{2}\theta_{1} & -4k^{2}\sin^{2}\theta_{1} \end{bmatrix}^{t},$$

$$\mathbf{n}(\theta_{1}) = \begin{bmatrix} -1 & \sin^{2}\theta_{1} & 0 \end{bmatrix}^{t},$$

$$\mathbf{q}(\theta_{1}) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2k \end{bmatrix}^{t}\sin\theta_{1} + \begin{bmatrix} -k^{2}/2 & k^{2}/2 & k(1+2k) \end{bmatrix}^{t}\sin^{3}\theta_{1},$$

$$\mathbf{w}(\theta_{1}) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2k \end{bmatrix}^{t}\sin\theta_{1} + \begin{bmatrix} k^{2}/2 & -k^{2}/2 & k(1-2k) \end{bmatrix}^{t}\sin^{3}\theta_{1},$$
(C5)

$$\mathbf{M}(\theta_1) = \begin{bmatrix} -k & k & 0\\ 2-k & -4k^2\\ 4k^3 \end{bmatrix} \sin^2\theta_1, \tag{C6}$$

$$\mathbf{N}(\theta_1) = \begin{bmatrix} -k & -(1-k) & 2k^2 \\ 2-k & 0 \\ & -4k^3 \end{bmatrix} \sin^2 \theta_1,$$
 (C7)

$$\mathbf{Q}(\theta_1) = \begin{bmatrix} -1/2 & 0 & -1/4(1-4k) \\ & 1/2 & 1/4(1-4k) \\ & & 0 \end{bmatrix} \sin \theta_1 + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) \right] \sin \theta_1 \right] + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) \right] \sin \theta_1 \right] + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right] \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) \right] \sin \theta_1 \right] + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right] \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) \right] \sin \theta_1 \right] + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right] \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right] \sin \theta_1 \right] + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right] \sin \theta_1 \right] + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}$$

$$\begin{bmatrix} -k^{2}/4 & -1/2(1+k^{2}) & -k/8(4-19k+4k^{2}) \\ 1/4(4+5k^{2}) & k/8(12+5k+4k^{2}) \\ & k^{2}(1-7k) \end{bmatrix} \sin^{3}\theta_{1},$$
(C8)

$$\mathbf{W}(\theta_1) = \begin{bmatrix} -1/2 & 1 & -1/4(1-4k) \\ & -3/2 & 1/4(1-4k) \\ & & 0 \end{bmatrix} \sin \theta_1 + \frac{1}{2} \sin \theta_2 + \frac{1}{2} \sin \theta_1 + \frac{1}{2} \sin \theta_2 + \frac$$

$$\begin{bmatrix} -k^{2}/4 & 1/2(1+2k^{2}) & k/8(-4+3k+4k^{2}) \\ & -1/4(4+7k^{2}) & k/8(12-27k-4k^{2}) \\ & & k^{2}(1-k) \end{bmatrix} \sin^{3}\theta_{1}.$$
(C9)

APÊNDICE D: Aproximações em Torno da Média Angular ($\bar{\mathbf{e}}$)

Uma outra forma de se aproximar os coeficientes de ondas espalhadas é com o uso da média angular entre os ângulos de incidência θ_1 e o de transmissão θ_2 . Da lei de Snell:

$$\theta_2 = \arcsin(s\alpha_2). \tag{D1}$$

A média angular é definida como:

$$\overline{\theta} = \frac{\theta_2 + \theta_1}{2},\tag{D2}$$

e o contraste médio angular por:

$$\delta\theta = \frac{\theta_2 - \theta_1}{2} \,. \tag{D3}$$

Ainda pela lei de Snell, o parâmetro do raio s pode ser expresso em termos da média angular e do contraste médio:

$$s = \frac{\sin(\overline{\theta} - \delta\theta)}{\overline{\alpha}(1 - \overline{\delta\alpha})} = \frac{\sin(\overline{\theta} + \delta\theta)}{\overline{\alpha}(1 + \overline{\delta\alpha})} = \frac{\sin\overline{\theta}\cos\delta\theta}{\overline{\alpha}},$$
 (D4)

sendo $\overline{\alpha}$ e $\delta\alpha$ como definidos na seção 2.1.

De (D4), obtém-se a importante relação:

$$\tan \delta\theta = \overline{\delta\alpha} \tan \overline{\theta}, \qquad (D5)$$

a relação (D5) pode ser usada para obter as aproximações em função do $\overline{\theta}$. No caso de baixos contrastes angulares, tem-se que $\theta_1 \approx \theta_2$ e, portanto, $\cos \delta \theta \approx 1$. Logo, (D4) pode ser reescrita como:

$$s \approx \frac{\sin\overline{\theta}}{\overline{\alpha}}.$$
 (D6)

De forma análoga ao desenvolvimento das aproximações para o ângulo de incidência, obtêm-se:

$$\operatorname{Rpp}(\overline{\theta}) \approx \operatorname{R}_{f}(\overline{\theta}) \left[1 + \left(\frac{\operatorname{A}_{2} - \operatorname{B}_{2}}{\operatorname{A}_{0} - \operatorname{B}_{0}} - \frac{\operatorname{A}_{2} + \operatorname{B}_{2}}{\operatorname{A}_{0} + \operatorname{B}_{0}} \right) \frac{\sin^{2}\overline{\theta}}{\overline{\alpha}^{2}} \right], \tag{D7}$$

$$Tpp(\overline{\theta}) \approx [1 - R_f(\overline{\theta})] \left[1 + \left(\frac{C_2}{C_0} - \frac{A_2 + B_2}{A_0 + B_0} \right) \frac{\sin^2 \overline{\theta}}{\overline{\alpha}^2} \right], \tag{D8}$$

$$\operatorname{Rsp}(\overline{\theta}) \approx 2 \left[1 + \left(\frac{D_2}{D_0} - \frac{A_2 + B_2}{A_0 + B_0} \right) \frac{\sin^2 \overline{\theta}}{\alpha^2} \right] \cos \overline{\theta} \sin \overline{\theta}, \tag{D9}$$

$$\operatorname{Tsp}(\overline{\theta}) \approx -2\rho_1 \left[1 + \left(\frac{E_2}{E_0} - \frac{A_2 + B_2}{A_0 + B_0} \right) \frac{\sin^2 \overline{\theta}}{\overline{\alpha}^2} \right] \cos \overline{\theta} \sin \overline{\theta}, \tag{D10}$$

em que $\,\overline{\theta}\,$ é a média angular definida na seção 2.

O desenvolvimento da série de Taylor até segunda ordem com relação aos parâmetros elásticos aplicados em (C1) a (C4) determinam as aproximações definidas em (2.12). Os vetores e matrizes lá referenciados são dados por:

(D11)

$$\overline{\mathbf{m}}(\overline{\theta}) = \begin{bmatrix} 1 & \tan^2 \overline{\theta} & -4k^2 \sin^2 \overline{\theta} \end{bmatrix}^t,$$

$$\overline{\mathbf{n}}(\overline{\theta}) = \begin{bmatrix} -1 & \tan^2 \overline{\theta} & 0 \end{bmatrix}^t,$$

 $\overline{\mathbf{q}}(\overline{\theta}) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2k\cos\overline{\theta} \end{bmatrix}^{t}\sin\overline{\theta} + k^{2}\begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 & 2 \end{bmatrix}^{t}\sin^{3}\overline{\theta},$

$$\overline{\mathbf{w}}(\overline{\theta}) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2k\cos\overline{\theta} \end{bmatrix}^{t}\sin\overline{\theta} + \begin{bmatrix} k^{2}/2 & -k^{2}/2 & -2k^{2} \end{bmatrix}^{t}\sin^{3}\overline{\theta},$$

$$\overline{\mathbf{M}}(\overline{\theta}) = \mathbf{k} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ & -1 & 0 \\ & & 4\mathbf{k}^2 \cos^2 \overline{\theta} \end{bmatrix} \sec \overline{\theta} \sin^2 \overline{\theta}, \tag{D12}$$

$$\overline{\mathbf{N}}(\overline{\theta}) = \begin{bmatrix} -k & k - \sec \overline{\theta} & 2k^2 \cos \overline{\theta} \\ -k & 0 \\ -4k^3 \cos^2 \overline{\theta} \end{bmatrix} \sec \overline{\theta} \sin^2 \overline{\theta}, \tag{D13}$$

$$\overline{\mathbf{Q}}(\overline{\theta}) = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 & 1/4(4k\cos\overline{\theta} - 1) \\ & -1/2 & 1/4 \\ & & 0 \end{bmatrix} \sin\overline{\theta} + \frac{1}{2} \sin\overline{$$

$$\begin{bmatrix} -k^{2}/2 & -1/4(2\sec^{2}\overline{\theta}-k^{2}) & k^{2}/8(19-4k\cos\overline{\theta}) \\ & 1/4(4\sec^{2}\overline{\theta}-k^{2}) & -k^{2}/8(19-4k\cos\overline{\theta}) \\ & k^{2}(1-7k\cos\overline{\theta}) \end{bmatrix} \sin^{3}\overline{\theta},$$
(D14)

$$\overline{\mathbf{W}}(\overline{\theta}) = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 & -1/4(1-4k\cos\overline{\theta}) \\ & -1/2 & 1/4 \\ & & 0 \end{bmatrix} \sin\overline{\theta} + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1$$

$$\begin{bmatrix} -k^{2}/4 & 1/4(k^{2} + 2\sec^{2}\overline{\theta}) & k^{2}/8(3 + 4k\cos\overline{\theta}) \\ -1/4(k^{2} + 4\sec^{2}\overline{\theta}) & -k^{2}/8(3 + 4k\cos\overline{\theta}) \\ & k^{2}(1 - k\cos\overline{\theta}) \end{bmatrix} \sin^{3}\overline{\theta}.$$
(D15)

APÊNDICE E: Tabelas de Resultados

Neste apêndice apresenta-se os resultados da decomposição em valores singulares para os modelos utilizados nas analises de sensibilidade e ambigüidade.

Tabela E.1a – Resultados dos autovalores do modelo 1, usando a matriz de sensibilidade M.

Ordem do Parâmetro	Autovalor S
10	5,611835318
20	0,615140111
3º	7,42E-17

Tabela E.1b – Colunas da matriz V para o modelo 1, usando a matriz de sensibilidade M.

Ordem do	Colunas da Matriz V		
Parâmetro	V ₁	V_2	Vз
1º	-0,99205	-0,08816	0,08979
2°	-0,12584	0,69505	-0,70786
30	0	-0,71353	-0,70062

Tabela E.2a – Resultados dos autovalores do modelo 1, usando a matriz de sensibilidade N.

Ordem do	Autovalor S	
Parâmetro		
1°	2,762217004	
20	3,80E-17	
30	0,106510657	

Tabela E.2b — Colunas da matriz ${f V}$ para o modelo 1, usando a matriz de sensibilidade ${f N}.$

Ordem do	Colunas da Matriz V		
Parâmetro	V_1	V_2	Vз
1º	0,60903	-0,60903	0,5081
2°	0,70711	0,70711	0
30	-0,35928	0,35928	0,8613

Tabela E.3a – Resultados dos autovalores do modelo 1, usando a matriz de sensibilidade $\widetilde{\mathbf{M}}$.

Ordem do	Autovalor S	
Parâmetro		
1º	5,816970642	
2°	0,108527487	
30	2,379780371	

Tabela E.3b – Colunas da matriz ${f V}$ para o modelo 1, usando a matriz de sensibilidade $\widetilde{{f M}}$.

Ordem do	Colunas da Matriz V		
Parâmetro	V ₁	V ₂	V ₃
1º	-0,99991	0,00242	0,01296
2°	-0,0114	-0,65226	-0,75791
30	0,00662	-0,75799	0,65223

Tabela E.4a – Resultados dos autovalores do modelo 2, usando a matriz de sensibilidade M.

Ordem do	do Autovalor S	
Parâmetro		
1°	5,640438211	
2°	0,783886558	
30	5,58E-17	

Tabela E.4b – Colunas da matriz ${f V}$ para o modelo 2, usando a matriz de sensibilidade ${f M}$.

Ordem do	Colunas da Matriz V		
Parâmetro	V ₁	V_2	V ₃
1º	-0,98686	-0,08838	0,13526
2°	-0,16158	0,53982	-0,82613
3°	0	0,83713	0,54701

Tabela E.5a – Resultados dos autovalores do modelo 2, usando a matriz de sensibilidade N.

Ordem do	o Autovalor S	
parâmetro		
1º	2,933981719	
20	2,72E-16	
30	0,142244984	

Tabela E.5b — Colunas da matriz ${f V}$ para o modelo 2, usando a matriz de sensibilidade ${f N}.$

Ordem do	Colunas da Matriz V		
Parâmetro	V ₁	V_2	V ₃
1º	-0,98686	-0,08838	0,13526
2°	-0,16158	0,53982	-0,82613
30	0	0,83713	0,54701

Tabela E.6a – Resultados dos autovalores do modelo 2, usando a matriz de sensibilidade $\widetilde{\mathbf{M}}$.

Ordem do	Autovalor S	
parâmetro		
1º	5,826221932	
2°	0,18636714	
30	2,660433987	

Tabela E.6b – Colunas da matriz ${\bf V}$ para o modelo 2, usando a matriz de sensibilidade $\widetilde{{\bf M}}$.

Ordem do	Colunas da Matriz V		
Parâmetro	V_1	V_2	V ₃
1º	-0,99906	0,00045	0,04343
2°	-0,02997	-0,73089	-0,68184
3º	0,03143	-0,6825	0,73021

Tabela E.7a – Resultados dos autovalores do modelo 3, usando a matriz de sensibilidade M.

Ordem do	Autovalor S	
parâmetro		
1º	5,737462353	
20	1,167997677	
30	9,04E-17	

 $Tabela\ E.7b-Colunas\ da\ matriz\ \textbf{V}\ para\ o\ modelo\ 3,\ usando\ a\ matriz\ de\ sensibilidade\ \textbf{M}.$

Ordem do	Colunas da Matriz V		
Parâmetro	V ₁	V_2	V ₃
1º	-0,96912	-0,08899	0,22996
2°	-0,24657	0,34977	-0,90381
30	0	-0,93260	-0,36091

Tabela E.8a – Resultados dos autovalores do modelo 3, usando a matriz de sensibilidade N.

Ordem do Parâmetro	Autovalor S
10	3,23543491
20	6,15E-17
3º	0,208168589

 $Tabela\ E.8b-Colunas\ da\ matriz\ \textbf{V}\ para\ o\ modelo\ 3,\ usando\ a\ matriz\ de\ sensibilidade\ \textbf{N}.$

Ordem do	Colunas da Matriz V		
Parâmetro	V ₁	V_2	Vз
10	0,53503	-0,53503	0,65382
2°	0,70711	0,70711	0
30	-0,46232	0,46232	0,75665

Tabela E.9a – Resultados dos autovalores do modelo 3, usando a matriz de sensibilidade $\widetilde{\mathbf{M}}$.

Ordem do	Autovalor S	
parâmetro		
1°	5,867903465	
20	3,200489142	
30	0,344447694	

Tabela E.9b – Colunas da matriz ${\bf V}$ para o modelo 3, usando a matriz de sensibilidade $\widetilde{{\bf M}}$.

Ordem do	Colunas da Matriz V		
Parâmetro	V_1	V_2	V ₃
1º	-0,992	-0,01018	0,12581
2°	0,10898	-0,57189	0,81306
30	0,06367	0,82027	0,56842