

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
CENTRO DE GEOCIÊNCIAS
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM GEOFÍSICA

TESE DE MESTRADO

**APLICAÇÃO DO MÉTODO DE KALMAN
A DADOS GEOFÍSICOS**

MARCUS PINTO DA COSTA DA ROCHA



BELÉM

1998

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
CENTRO DE GEOCIÊNCIAS
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM GEOFÍSICA

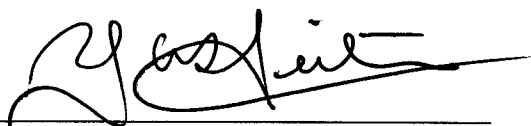
**APLICAÇÃO DO MÉTODO DE KALMAN A DADOS
GEOFÍSICOS**

TESE APRESENTADA POR
MARCUS PINTO DA COSTA DA ROCHA

COMO REQUISITO PARCIAL À OBTENÇÃO DE GRAU DE
MESTRE EM CIÊNCIAS NA ÁREA DE GEOFÍSICA

Data de Aprovação : 03 / 03 / 1998

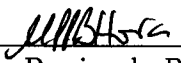
COMITÊ DE TESE:



Dr. Lourenildo Willame Barbosa Leite (Orientador)



Dr. Walter Franz Söllner



Dr. Marco Polo Pereira da Boa Hora

BELÉM

1998

Aos meus avós Moacyr Pinto da Costa da Rocha (em memória) e Carmen Travassos Pinto da Costa, e a meus pais, João Borges da Rocha e Sylvia Travassos Pinto da Costa, e a minha esposa Emiliana Guerra da Rocha e a meus filhos, Marcus Guerra da Rocha e Felipe Guerra da Rocha

AGRADECIMENTOS

Em especial, ao Dr. Lourenildo Willame Barbosa Leite, pela orientação, pela paciência e pelas sugestões valiosas à realização deste trabalho.

Aos membros da banca examinadora, Drs Walter Franz Söllner e Marco Polo Pereira da Boa Hora, pela disponibilidade e revisão crítica do trabalho de tese.

Aos professores que compõem o quadro docente do Curso de Pós-Graduação em Geofísica.

A todos os demais funcionários do prédio de Pós-Graduação em Geofísica.

Ao Departamento de Geofísica, pela infra-estrutura oferecida.

Aos amigos Dr. André, Andrade e Luiz Montes Vides e a todos os amigos do curso de Pós-Graduação em Geofísica pelo apoio, sugestões e incentivo no decorrer da tese.

A Emiliana Guerra da Rocha por todo o seu amor, dedicação e paciência para comigo durante a tese.

SUMÁRIO

DEDICATÓRIA.....	i
AGRADECIMENTO.....	ii
RESUMO.....	1
ABSTRACT.....	2
1-INTRODUÇÃO.....	3
2- FORMULAÇÃO BÁSICA DO PROBLEMA	5
2.1 - O MODELO SÍSMICO.....	5
2.2 - O PROBLEMA A SER RESOLVIDO.....	6
2.3 - VARIÁVEIS DE ESTADO.....	10
2.3.1 - Equações Dinâmicas na Forma Contínua.....	10
2.3.2 - Solução da Equação do Sistema	13
2.3.3 - Discretização do Processo Contínuo	15
3 - FILTRO DE KALMAN	18
3.1 - FORMA CONTÍNUA.....	18
3.1.1 - Descrição Estocástica dos Processos Envolvidos.....	18
3.1.2 - Introdução da Equação de Medidas nas Propriedades Estocásticas.....	20
3.1.3 - Introdução da Equação de Estado nas Propriedades Estocásticas.....	22
3.1.4 - Matriz Ganho e a Solução da Equação Integral	24
3.1.5 - Equação Diferencial de Ricatti	27
3.2 - APROXIMAÇÃO DE EULER AO DISCRETIZADO	31

3.2.1 - Aproximações Básicas	31
3.2.2 - Equação Diferencial de Estado Discretizada.....	34
3.2.3 - Equação Diferencial da Estimativa Discretizada	35
3.2.4 - Equação de Ricatti na Forma Discretizada	36
3.3 - MÉTODO DE GELB	38
3.3.1 - Matriz Covariância do Erro.....	40
3.3.2 - Matriz Ganho.....	41
3.3.3 - Transformação à Forma Contínua	43
4 - O PROBLEMA GEOFÍSICO.....	48
4.2 - SOLUÇÃO FECHADA DA EQUAÇÃO DE RICATTI	51
4.3 - SOLUÇÃO NUMÉRICA DA EQUAÇÃO DA ESTIMATIVA DE KALMAN	55
4.3.1 - Método de Runge-Kutta	55
4.4 - RESULTADOS OBTIDOS.....	57
4.4.1 - Dados Sintéticos.....	57
4.4.2 - Dados Reais.....	59
5 - CONCLUSÕES.....	77
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	79
APÊNDICES.....	81
APÊNDICE A - Programa para calcular a saída do filtro de Kalman.....	82
APÊNDICE B - Programa para comparar o filtro de Kalman com o PB.....	88

RESUMO

O filtro de Kalman é aplicado para filtragem inversa ou problema de deconvolução. Nesta dissertação aplicamos o método de Kalman, considerado como uma outra visão de processamento no domínio do tempo, para separar sinal-ruído em perfil sônico admitido como uma realização de um processo estocástico não estacionário. Em um trabalho futuro estudaremos o problema da deconvolução.

A dedução do filtro de Kalman destaca a relação entre o filtro de Kalman e o de Wiener. Estas deduções são baseadas na representação do sistema por variáveis de estado e modelos de processos aleatórios, com a entrada do sistema linear acrescentado com ruído branco.

Os resultados ilustrados indicam a aplicabilidade dessa técnica para uma variedade de problemas de processamento de dados geofísicos, por exemplo, ideal para well log. O filtro de Kalman oferece aos geofísicos de exploração informações adicionais para o processamento, problemas de modelamento e a sua solução.

ABSTRACT

The Kalman filter is applied to the inverse filtering or deconvolution problem. In this dissertation we applied the Kalman method, it is considered like a processing operation on time domain, to separate signal-noise within seismic profile which is admitted like a stationary stochastic process. In next work will survey deconvolution problem.

The derivation given of the Kalman filter emphasizes the relationship between the Kalman and Wiener filter. This derivation is based on the modeling of random processes as the output of linear systems excited by white noise.

Illustrative results indicate the applicability of these techniques to a variety of geophysical data processing problems, for example the ideal well log treated here. The Kalman filter offers exploration geophysicists additional insight into processing problem modeling and solution

1 - INTRODUÇÃO

Um sinal sísmico representa a resposta transiente da Terra a excitações devido a fenômenos naturais, tais como terremotos, ou a fontes artificiais como as usadas em explorações geofísicas. O objetivo do processamento do sinal sísmico é permitir a interpretação dos dados registrados. A representação detalhada do sinal sísmico requer um modelo relativamente complicado, e o processamento usa de um conjunto de técnicas baseadas em propriedades estocásticas do modelo. Uma dessas técnicas de recuperar um sinal em meio a ruído é estudada neste trabalho, sendo chamada de método de Kalman.

A finalidade central da presente dissertação é o estudo e a aplicação do método Kalman para obtenção de informações sobre a função refletividade do meio com base em dados de perfis sônicos, fazendo uso da propriedade de que eles representam realizações de um processo estocástico não estacionário. Sobre outro ponto de vista mais simples, este processamento pode ser entendido como sendo o de prover a separação sinal-ruído no domínio do tempo. Um grande problema que continua é como descrever a componente ruído presente em dados observados. A simplificação mais consistente é o conceito de série branca.

A técnica de Kalman é considerada como uma outra visão de processamento no domínio do tempo, complementar à teoria de Wiener. A valorização e a importância do filtro de Kalman vem da sua aplicabilidade e versatilidade, bem como da essência da sua conceituação, fundamental aos processos geofísicos. As referências básicas de aplicação na geosíffica aqui estudadas são BAYLESS e BRIGHAM (1970) e CRUMP (1974).

Para a formulação do filtro de Kalman dividimos esta dissertação em três partes que compõem os capítulos 2, 3 e 4. No capítulo 2 descrevemos a representação de um sistema não

estacionário por variáveis de estado no contínuo e estendida para o discretizado, como exposto em detalhes por KUO (1992) e OGATA (1995), entre outros.

No capítulo 3, realizamos um completo estudo matemático descritivo das equações diferenciais ordinárias lineares e não lineares que representam a solução da equação integral de Wiener, para isto são estabelecidas condições estocásticas entre as funções. Em seguida apresentamos a forma discretizada apropriada para o cálculo numérico, utilizando a regra de aproximação de Euler para encontrar a solução numérica computacional realizável das derivadas presentes do filtro de Kalman. Para unificar o contínuo ao discretizado, e vice-versa, seguimos o método exposto por GELB et al (1974).

No capítulo 4 apresentamos os experimentos sobre dados sintéticos e reais. Para dados sintéticos adotamos o modelo segundo BAYLESS e BRIGHAM (1970), que consideram uma função-meio aleatória e uma função-fonte do tipo degrau-simples, que por convolução gera a mensagem, e a esta adicionamos um ruído aleatório para compor o sinal. O que se deseja é recuperar a mensagem em meio ao ruído. Neste exemplo, para aplicarmos o filtro é necessário achar a solução fechada da equação não linear de Ricatti para o ganho, e para isto seguimos GELB et al (1974) e LEWIS (1986), e para solução numérica da estimativa do estado usamos o método de Runge-Kutta. Após a solução destas equações diferenciais, aplicamos o filtro no modelo em questão e obtemos o sinal recuperado (estimado) mais próximo do real (desejado). Esta simulação é típica de perfis sônicos e de densidade, onde se busca definir as impedâncias acústicas que caracterizam a função refletividade do meio.

Para mostrarmos a versatilidade e a aplicabilidade do filtro de Kalman aos vários outros ramos da geofísica, promovemos a sua aplicação para o caso de dados de geofísica de poço, onde utilizamos o perfil calculado de volume de argila ou perfil de argilosidade o qual satisfaz em boa ordem os requisitos necessários do modelo teórico.

2 - FORMULAÇÃO BÁSICA DO PROBLEMA

2.1 - O MODELO SÍSMICO

Existem dois princípios básicos para tratar de dados observados na natureza, e em particular dados representados no sismograma; um é o determinístico e o outro é o estocástico. Muitos consideram estes dois métodos conflitantes, porém sabemos que eles são fundamentalmente equivalentes.

O formalismo matemático em sismica tem sido quase exclusivamente determinístico. As regras são consideradas precisas nos cálculos, embora as observações sobre as quantidades envolvidas podem ser imprecisas, e certamente são incompletas.

O método determinístico utiliza quantidades na forma em que elas são observadas. Nos métodos estocásticos, as distribuições e funções estatísticas destas quantidades são examinadas em combinação com essa escolha. É claro que se tem liberdade considerável na seleção das quantidades, e que é uma forma subjetiva na investigação estatística.

A sismica pode ser representada por dois tipos de métodos matemáticos para tratamento de dados são os métodos: determinístico e o estocástico. O método determinístico consiste na utilização de teorias físicas de propagação de ondas envolvendo soluções de equações integral e diferenciais satisfazendo condições de contorno e iniciais. O método estocástico consiste da utilização da teoria estatística de series temporais para serem usadas nas expressões das leis da dinâmicas como fato estatístico.

A composição do sinal sísmico é dada em termos de duas componentes de acordo com o teorema de Wold; ou seja, um processo aleatório não branco pode ser decomposto em um

determinístico e um não determinístico (aleatório). Admitimos que um sismograma é o resultado da convolução da fonte com o meio acrescido de ruído; ou seja, representado pela equação simbólica:

$$(\text{sismograma}) = (\text{fonte}) * (\text{meio}) + (\text{ruído}).$$

Pelo teorema de Wold temos correspondentemente que

$$(\text{aleatório}) = (\text{determinístico}) * (\text{aleatório}) + (\text{aleatório}).$$

2.2 - O PROBLEMA A SER RESOLVIDO

Os trabalhos de KALMAN (1960) são referidos na literatura geofísica como sendo de uma contribuição significativa para os processos de recuperação de mensagens em meio a ruídos, a partir do trabalho de WIENER (1949). Essencialmente, o método de Kalman é a solução do problema de Wiener para processos não estacionários, através da transformação da equação integral numa equação diferencial mais apropriada ao cálculo numérico.

A Figura 2.1 tem como objetivo iniciar com a apresentação do problema mais simples que é a obtenção do filtro ótimo invariante no tempo, $h(t)$, que opera sobre o sinal medido $z(t)$ e minimiza o erro entre a saída real, $\hat{x}(t)$, e a saída desejada, $x(t)$. O modelo matemático do problema é expresso pela equação

$$z(t) = x(t) + v(t), \quad (2.1)$$

onde $v(t)$ é o ruído aditivo. Estas componentes descritas são caracterizadas como processos aleatórios. A relação básica deste problema é dado através da seguinte equação:

$$\hat{x}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) z(t - \tau) d\tau. \quad (2.2)$$

A função objeto de minimização é a covariância dos resíduos dada pela função

$$I(h) = E\left\{\left[\hat{x}(t) - \underline{x}(t)\right]^2\right\}, \quad (2.3)$$

que resulta nas equações normais entre os desvios e as observações,

$$E\left\{\left[\hat{x}(t) - \underline{x}(t)\right] \underline{z}(t)\right\} = 0. \quad (2.4)$$

A resposta do filtro ao impulso, invariante no tempo, satisfaz a equação de Wiener-Hopf

$$\phi_{xz}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h_w(\tau) \phi_{zz}(t - \tau) d\tau, \quad (t \geq 0) \quad (2.5)$$

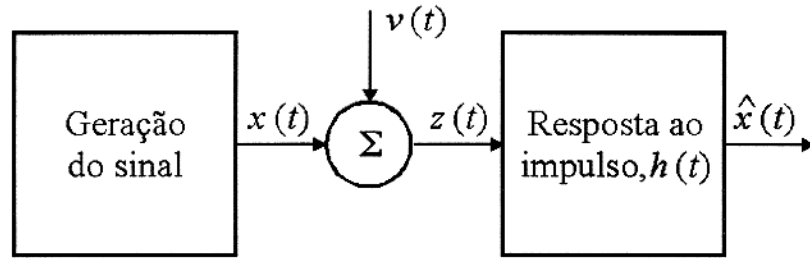


Figura 2.1 - Ilustração do filtro de Wiener na forma canônica por diagrama de blocos.

onde $\phi_{xz}(t)$ e $\phi_{zz}(t)$ são respectivamente as funções correlação cruzada e autocorrelação, teóricas, estocásticas, e é considerado que $\underline{x}(t)$ e $\underline{v}(t)$ sejam sinais aleatórios estacionários.

Para especificar o filtro ótimo de Wiener é necessário resolver a equação integral (2.5) que apresenta a desvantagem de admitir a estacionaridade. A situação torna-se cada vez mais difícil quanto maior for a complexidade do problema. Além disso, ela não satisfaz necessariamente as características do problema em questão, que é do tipo não estacionário.

A teoria clássica do filtro de Wiener é válida somente para processos estacionários unidimensionais. DAVIS (1963) expandiu os resultados de Wiener para incluir o caso do sinal n -dimensional para uma certa classe de problemas. BOOTON (1952) estendeu a teoria matemática original para incluir processos aleatórios não estacionários.

As generalizações do problema quanto a estacionariedade e da janela dos dados não satisfazem a integral da convolução; por isto ela é reescrita na forma de média móvel segundo a teoria de Wiener-Kolmogorov. A primeira integral escalar resultante é:

$$\phi_{xz}(t, \sigma) = \int_{t_0}^T h(t, \tau) \phi_{zz}(\tau, \sigma) d\tau, \quad (t_0 \leq \sigma \leq T), \quad (2.6)$$

e a equação do valor $\hat{x}(t)$, o estimado, é dado por

$$\hat{x}(t) = \int_{t_0}^T h(t, \tau) z(\tau) d\tau \quad (2.7)$$

onde $h(t, \tau)$ é o filtro ótimo, variante no tempo.

As condições originais deste problema são para processos estacionários e unidimensionais, tendo sido, posteriormente, estendido a problemas multidimensionais, a incluir condições de não-estacionariedade e a séries de comprimento finito. Estas novas extensões mudam a solução (2.2) e a propriedade (2.5); como consequência, uma forma de expressar estas generalidades é uma estrutura matricial para (2.6) assim definida

$$\begin{bmatrix} \phi(t, \sigma)_{11} & \phi(t, \sigma)_{12} & \cdots & \phi(t, \sigma)_{1N} \\ \phi(t, \sigma)_{21} & \phi(t, \sigma)_{22} & \cdots & \phi(t, \sigma)_{2N} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \phi(t, \sigma)_M & \phi(t, \sigma)_{N2} & \cdots & \phi(t, \sigma)_{NN} \end{bmatrix}_{xz} = \int_{t_0}^T d\tau \begin{bmatrix} h(t, \tau)_{11} & h(t, \tau)_{12} & \cdots & h(t, \tau)_{1N} \\ h(t, \tau)_{21} & h(t, \tau)_{22} & \cdots & h(t, \tau)_{2N} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ h(t, \tau)_M & h(t, \tau)_{N2} & \cdots & h(t, \tau)_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi(\tau, \sigma)_{11} & \phi(\tau, \sigma)_{12} & \cdots & \phi(\tau, \sigma)_{1N} \\ \phi(\tau, \sigma)_{21} & \phi(\tau, \sigma)_{22} & \cdots & \phi(\tau, \sigma)_{2N} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \phi(\tau, \sigma)_M & \phi(\tau, \sigma)_{N2} & \cdots & \phi(\tau, \sigma)_{NN} \end{bmatrix}_{zz}, \quad (2.8)$$

ou

$$\left[\phi_{=xz}(t, \sigma) \right]_{ij} = \sum_{k=1}^N h(t, \tau)_{ik} \phi_{zz}(\tau, \sigma)_{kj}. \quad (2.9)$$

Escrevendo (2.8) na forma de integral compacta temos que

$$\phi_{=xz}(t, \sigma) = \int_{t_0}^T h(t, \tau) \phi_{=zz}(\tau, \sigma) d\tau, \quad (t_0 \leq \sigma \leq T). \quad (2.10)$$

Analogamente, podemos representar a estimativa, equação (2.7), como um produto linha coluna dada por

$$\hat{x}(t) = \int_{t_0}^T h(t, \tau) \underline{z}(t, \tau) d\tau, \quad (2.11)$$

sendo a saída composta por um vetor-coluna. Na forma expandida:

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_1(t) \\ \hat{x}_2(t) \\ \vdots \\ \hat{x}_N(t) \end{bmatrix} = \int_{t_0}^T d\tau \begin{bmatrix} h(t, \tau)_{11} & h(t, \tau)_{12} & \cdots & h(t, \tau)_{1N} \\ h(t, \tau)_{21} & h(t, \tau)_{22} & \cdots & h(t, \tau)_{2N} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ h(t, \tau)_{N1} & h(t, \tau)_{N2} & \cdots & h(t, \tau)_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(t, \tau) \\ z_2(t, \tau) \\ \vdots \\ z_N(t, \tau) \end{bmatrix}. \quad (2.12)$$

Além disso, analisando a dependência da função peso $h(\tau)$, temos que para cada valor de t o cálculo de um conjunto de pesos diferentes $h(\tau)$, por isto esta função depende das duas variáveis t e τ , isto é $h = h(t, \tau)$. A condição $T = t$ caracteriza o problema como filtragem, que é o interesse específico do presente trabalho.

A equação (2.10) é difícil de ser resolvida nesta forma, de outro lado é útil para o tratamento de processos aleatórios multidimensionais e não estacionários, e inclui observações finitas e estimativa variante no tempo. KALMAN & BUCY (1961) converteu a equação integral (2.10) para equações diferenciais adaptáveis para a solução do problema; o filtro ótimo é completamente especificado e sintetizado com a solução destas equações diferenciais ordinária. Para se resolver esta equação diferencial é necessário utilizar teorias estatísticas de séries

temporais, e as estruturas das expressões dinâmicas através do método variáveis de estado, descrito a seguir.

2.3 - VARIÁVEIS DE ESTADO

Usando notação matricial-vetorial, uma equação diferencial de ordem N pode ser reduzida a uma equação matricial-diferencial de primeira ordem. Nesta seção apresentamos métodos para obtenção de representação de espaços de estados de sistemas contínuos necessários para a resolução do filtro de Kalman (OGATA, 1990). A Tabela 2.1 foi montada para comparar as nomenclaturas adotadas pelos diferentes autores da bibliografia especializada utilizada como referência.

2.3.1 - Equações Dinâmicas na forma Contínua

Dada uma equação diferencial ordinária não homogênea de ordem N

$$\left[D^N - a_{N-1}(t)D^{N-1} + \dots + a_1(t)D + a_0(t) \right] y(t) = w(t), \quad (2.13)$$

onde $D = \frac{d}{dt}$, se deseja uma solução particular, sem levar em consideração derivadas na função

forçante, $w(t)$. Definimos um conjunto de variáveis de estado $x_1(t), \dots, x_N(t)$ na forma:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= y(t), \\ x_2(t) &= \dot{x}_1(t), \\ &\vdots \\ x_N(t) &= \dot{x}_{N-1}(t). \end{aligned} \quad (2.14)$$

Essas relações podem ser escritas como um conjunto de N equações diferenciais lineares de primeira ordem:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) &= x_3(t), \\ &\vdots \\ \dot{x}_N(t) &= -a_0(t)x_1(t) - a_1(t)x_2(t) \dots - a_{N-1}(t)x_N(t) + w(t).\end{aligned}\quad (2.15)$$

Com estas definições, a equação (2.13) pode ser reescrita na forma matricial expandida:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_{N-1} \\ \dot{x}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_{N-1}(t) \\ x_N(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} w(t), \quad (2.16)$$

e na forma compacta por

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{\underline{F}}(t)\underline{x}(t) + \underline{\underline{G}}(t)\underline{w}(t), \quad (\text{sistema}). \quad (2.17)$$

A matriz do sistema tem dimensão $(N \times N)$, correspondendo a ordem da equação diferencial original. A equação (2.16) é ilustrada na forma de diagrama de blocos, Figura 2.2. Neste diagrama, as variáveis de estado são as saídas dos integradores.

A saída $\underline{y}(t)$ em termos do estado $\underline{x}(t)$ e da entrada $\underline{w}(t)$, sem ruído é dada por

$$\underline{y}(t) = \underline{\underline{H}}(t)\underline{x}(t), \quad (2.18)$$

cujas estruturas matriciais são:

$$\underline{\underline{H}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{y}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}. \quad (2.19, 2.20)$$

Tabela 2.1 - Descrição das funções matriciais por diferentes autores. Neste trabalho é adotado a nomenclatura de BAYLESS & BRIGHAM (1970) (B. e B.).

OGATA	KUO	GELB	B. e B.	CRUMP	DESCRIÇÃO
$x/\hat{x}$	$x/\hat{x}$	$x/\hat{x}$	$x/\hat{x}$	$x/\hat{x}$	vetor de estado
u	U	w	w	U	função forçante
z	z	z	z	Y	vetor de saída
v	v	v	v	V	ruído presente
A	A	F	F	A	Matrizes dos Elementos Contínuos
B	B	G	G	B	
C	D	H	H	H	
	Φ	Φ	Φ	Φ	matrizes dos elemen- tos discretizados
	Θ	Γ	Θ	G	
	K	K	K	K	matriz de ganho
	P	P	P	P	matriz de erro

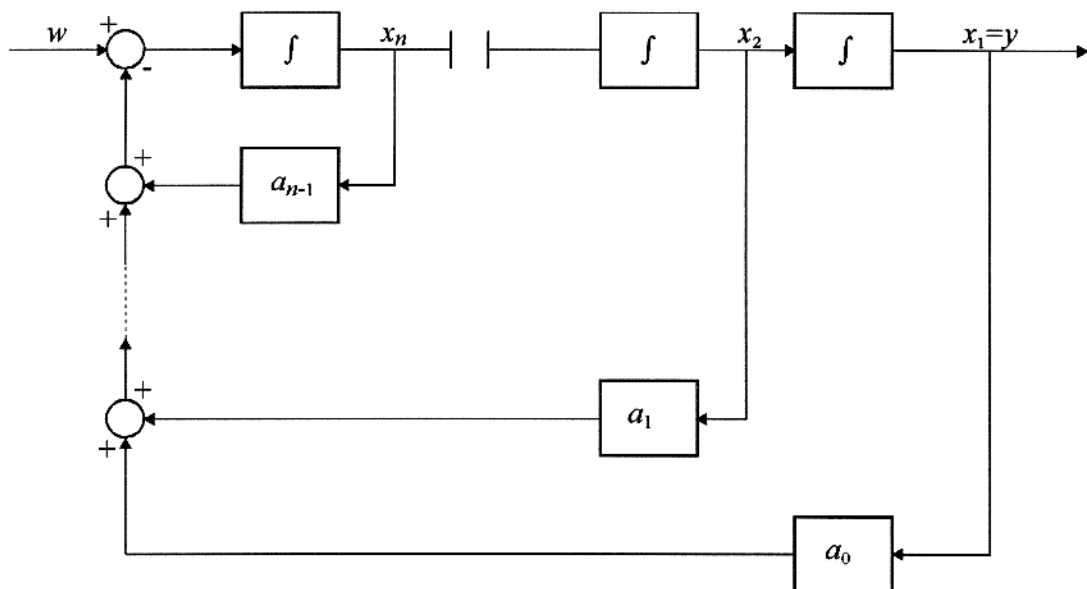


Figura 2.2 - Representação da equação (2.16) em diagrama de blocos.

2.3.2 - Solução da Equação do Sistema

Nesta seção iniciamos a solução geral da equação de estado linear, invariante no tempo ($\underline{\underline{F}}$ e $\underline{\underline{G}}$ são constantes). Consideremos a equação de estado não homogênea

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{\underline{F}}\underline{x}(t) + \underline{\underline{G}}\underline{w}(t), \quad (2.21)$$

onde $\underline{x}(t)$, $(N \times 1)$; $\underline{w}(t)$, $(M \times 1)$; $\underline{\underline{F}}$, $(N \times N)$ e $\underline{\underline{G}}$, $(N \times M)$. Escrevendo a equação (2.21) como

$$\dot{\underline{x}}(t) - \underline{\underline{F}}\underline{x}(t) = \underline{\underline{G}}\underline{w}(t), \quad (2.22)$$

e pré-multiplicando ambos os lados desta equação por $e^{-\underline{\underline{F}}t}$ obtemos

$$e^{-\underline{\underline{F}}t} \left[\dot{\underline{x}}(t) - \underline{\underline{F}}\underline{x}(t) \right] = \frac{d}{dt} \left[e^{-\underline{\underline{F}}t} \underline{x}(t) \right] = e^{-\underline{\underline{F}}t} \underline{\underline{G}}\underline{w}(t). \quad (2.23)$$

Integrando esta equação entre t_0 e t , resulta em

$$e^{-\underline{\underline{F}}t} \underline{x}(t) = \underline{x}(t_0) + \int_{t_0}^t e^{-\underline{\underline{F}}\tau} \underline{\underline{G}}\underline{w}(\tau) d\tau, \quad (2.24)$$

ou, equivalentemente

$$\underline{x}(t) = e^{\underline{\underline{F}}t} \underline{x}(t_0) + \int_{t_0}^t e^{\underline{\underline{F}}(t-\tau)} \underline{\underline{G}}\underline{w}(\tau) d\tau. \quad (2.25)$$

Com isto, a solução da equação diferencial matricial (2.21) é dada por

$$\underline{x}(t) = \underline{\underline{\Phi}}(t-t_0) \underline{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \underline{\underline{\Phi}}(t-\tau) \underline{\underline{G}}\underline{w}(\tau) d\tau, \quad (2.26)$$

onde $\underline{\underline{\Phi}}(t) = e^{\underline{\underline{F}}t}$, é chamada de matriz de transição de dimensão $(N \times N)$. O cálculo de $e^{\underline{\underline{F}}t}$ é obtido através da expansão

$$e^{\underline{\underline{F}}t} = \underline{\underline{I}} + \underline{\underline{F}}t + \frac{\underline{\underline{F}}t}{2} \left(\frac{\underline{\underline{F}}t}{1!} \right) + \frac{\underline{\underline{F}}t}{3} \left(\frac{\underline{\underline{F}}^2 t^2}{2!} \right) + \dots + \frac{\underline{\underline{F}}t}{n+1} \left(\frac{\underline{\underline{F}}^n t^n}{n!} \right). \quad (2.27)$$

A matriz de transição $\underline{\underline{\Phi}}(t - t_0)$ transfere a contribuição de $\underline{x}(t_0)$ para o ponto $\underline{x}(t)$. O segundo termo de (2.26) é a contribuição a $\underline{x}(t)$ devido a entrada $\underline{w}(t)$.

O segundo caso é a solução para o sistema variante no tempo ($\underline{\underline{F}}$ e $\underline{\underline{G}}$ são variáveis)

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{\underline{F}}(t)\underline{x}(t) + \underline{\underline{G}}(t)\underline{w}(t), \quad (\text{sistema}) \quad (2.28)$$

$$\underline{y}(t) = \underline{\underline{H}}(t)\underline{x}(t). \quad (\text{saída}) \quad (2.29)$$

A solução desta equação diferencial é

$$\underline{x}(t) = \underline{\underline{\Phi}}(t, t_0)\underline{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \underline{\underline{\Phi}}(t, \tau)\underline{\underline{G}}(\tau)\underline{w}(\tau)d\tau, \quad (2.30)$$

onde

$$\underline{\underline{\Phi}}(t, t_0) = \exp \left[\int_{t_0}^t \underline{\underline{F}}(\tau)d\tau \right], \quad (N \times N). \quad (2.31)$$

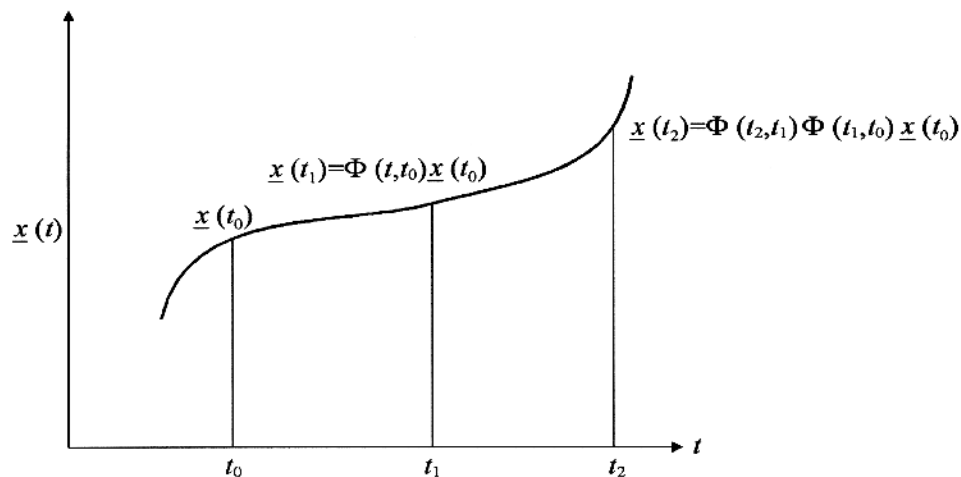


Figura 2.3 - Ilustração da evolução no tempo de um vetor estado através da função de propagação $\underline{\Phi}(t, t_0)$.

2.3.3 - Discretização do Processo Contínuo

Fazemos agora a transformação das equações de estado na forma contínua, descritas na seção anterior, para a forma discretizada. Isto é necessário para que possamos utilizá-las em algoritmos computacionais.

Para a discretização das equações de estado (2.17) e da solução (2.26), é admitido o procedimento de amostragem de ordem-zero para a função de entrada descrita por

$$w_j(t) = w_j(k\Delta t), \quad [k\Delta t \leq t < (k+1)\Delta t], \quad (k = 0, 1, 2, \dots; j = 0, 1, 2, \dots, L-1), \quad (2.32)$$

sendo $\underline{w}(t)$ considerado constante no intervalo de amostragem Δt . Observamos que a função amostrada exibirá um valor em $t = k\Delta t$ descrito por $w(k\Delta t) = w(k) = w_k$; um valor imediatamente posterior a k , descrito convenientemente por $w_k(+)$; e um valor imediatamente anterior a k descrito por $w_k(-)$. O erro na descontinuidade da amostragem de ordem zero é dado, portanto, por $\Delta w(k) = w_k(+)-w_k(-)$. Como mostra a Figura 2.4.

Iniciamos a descrição da discretização das equações dinâmicas de estado e soluções com o caso dos coeficientes invariantes em t ($\underline{F}$ e $\underline{G}$ são constantes). Substituindo $t_0 = k\Delta t$ na integral (2.26) e $k\Delta t \leq t < (k+1)\Delta t$, obtemos

$$\underline{x}(t) = \underline{\Phi}(t - k\Delta t)\underline{x}(k\Delta t) + \left[\int_{k\Delta t}^t \underline{\Phi}(t - \tau)\underline{G}d\tau \right] \underline{w}(k\Delta t), \quad (2.33)$$

válido no intervalo onde $\underline{\Phi}(t)$ é contínua. No entanto, para o tratamento numérico é conveniente conservar apenas os pontos de amostragem. Desta forma, substituindo t por $(k+1)\Delta t$, o primeiro termo na equação (2.33) acima simplifica para

$$\underline{\Phi}(\Delta t) = e^{\underline{F}\Delta t} = \underline{I} + \underline{F}\Delta t + \frac{1}{2!}\underline{F}^2\Delta t^2 + \frac{1}{3!}\underline{F}^3\Delta t^3 + \dots \quad (2.34)$$

A matriz transição de estado de $\underline{\underline{G}}$ é dada por

$$\underline{\underline{\Theta}}(\Delta t) = \int_0^{\Delta t} \underline{\underline{\Phi}}(\Delta t - \tau) \underline{\underline{G}} d\tau. \quad (2.35)$$

Com as relações (2.34) e (2.35) acima, a equação (2.33) toma a forma da equação de diferenças

$$\underline{x}[(k+1)\Delta t] = \underline{\underline{\Phi}}(\Delta t) \underline{x}(k\Delta t) + \underline{\underline{\Theta}}(\Delta t) \underline{w}(k), \quad (\text{sistema}) \quad (2.36)$$

$$\underline{y}(k\Delta t) = \underline{\underline{H}} \underline{x}(k\Delta t). \quad (\text{saída}) \quad (2.37)$$

As expressões (2.36) e (2.37) acima são equações dinâmicas que representam o sistema linear invariante em t na forma discretizada.

Sob o mesmo procedimento, estendemos as definições anteriores para o caso do sistema linear variante em t . Com isto, definimos as equações dinâmicas (2.28) e (2.29) na forma discretizada como:

$$\underline{x}[(k+1)\Delta t] = \underline{\underline{\Phi}}[(k+1)\Delta t, k\Delta t] \underline{x}(k\Delta t) + \underline{\underline{\Theta}}[(k+1)\Delta t, k\Delta t] \underline{w}(\Delta t), \quad (\text{sistema}) \quad (2.38)$$

$$\underline{y}(k) = \underline{\underline{H}}(k\Delta t) \underline{x}(k\Delta t), \quad (\text{saída}), \quad (2.39)$$

onde

$$\underline{\underline{\Phi}}[(k+1)\Delta t, k\Delta t] = \exp \left[\int_{k\Delta t}^{(k+1)\Delta t} \underline{\underline{F}}(\tau) d\tau \right], \quad (2.40)$$

é definida como matriz transição de estado de $\underline{\underline{F}}(t)$ e

$$\underline{\underline{\Theta}}[(k+1)\Delta t, \Delta t] = \int_{k\Delta t}^{(k+1)\Delta t} \underline{\underline{\Phi}}(\Delta t - \tau) \underline{\underline{G}}(\tau) d\tau, \quad (2.41)$$

como a matriz de transição de estado de $\underline{w}(t)$. Estas relações acima serão utilizadas para definir as equações diferenciais do filtro de Kalman.

Na tabela 2.2 apresentamos um resumo das equações dinâmicas tanto na forma contínua como na discretizada.

Tabela 2.2 - Equações dinâmicas na forma contínua e discretizada

	Forma Contínua	Forma Discretizada ($\Delta t = 1$)
t -invariante	$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{F}\underline{x}(t) + \underline{G}\underline{w}(t)$ $\underline{y}(t) = \underline{H}\underline{x}(t)$	$\underline{x}(k+1) = \underline{\Phi}(1)\underline{x}(k) + \underline{\Theta}(1)\underline{w}(k)$ $\underline{y}(k) = \underline{H}\underline{x}(k)$
t -variante	$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{F}(t)\underline{x}(t) + \underline{G}(t)\underline{w}(t)$ $\underline{y}(t) = \underline{H}(t)\underline{x}(t) + \underline{D}(t)\underline{w}(t)$	$\underline{x}(k+1) = \underline{\Phi}(k+1, k)\underline{x}(k) + \underline{\Theta}(k+1, k)\underline{w}(k)$ $\underline{y}(k) = \underline{H}(k)\underline{x}(k) + \underline{D}(k)\underline{w}(k)$

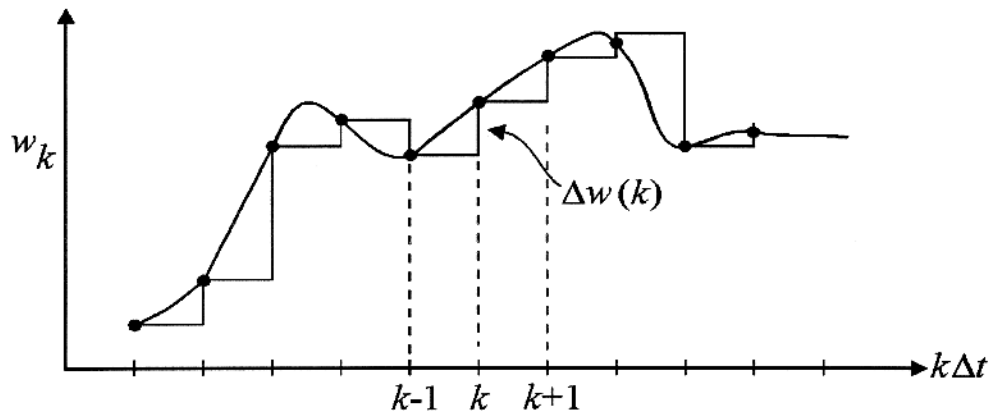


Figura 2.4 - Ilustração do processo de amostragem de ordem-zero mostrando o erro ao redor do ponto de amostragem k .

3 - FILTRO DE KALMAN

3.1 - FORMA CONTÍNUA

Nesta seção transformamos as equações integrais (2.10) e (2.11), que definem o problema geral de Wiener-Kolmogorov, para equações diferenciais ordinárias linear e não linear através do método de equações de estado. Para facilitar o entendimento desta transformação, dividimos esta seção em cinco partes, de forma que, uma vez estas etapas sejam concluídas temos, então, definidas as equações do filtro de Kalman na forma contínua.

3.1.1 - Descrição Estocástica dos Processos Envolvidos

Para desenvolver as equações do filtro na forma contínua, BAYLESS & BRIGHAM (1970) seguem o desenvolvimento original da KALMAN (1961) que conserva a relação com a teoria de Wiener. Iniciamos a formulação com as equações dinâmicas de estado reescritas abaixo na forma mais geral que é a variante no tempo:

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{\underline{F}}(t)\underline{x}(t) + \underline{\underline{G}}(t)\underline{w}(t), \quad (\text{sistema}), \quad (3.1)$$

$$\underline{z}(t) = \underline{\underline{H}}(t)\underline{x}(t) + \underline{v}(t), \quad (\text{medida}). \quad (3.2)$$

$\underline{\underline{F}}(t)$, $\underline{\underline{G}}(t)$ e $\underline{\underline{H}}(t)$ são matrizes dos elementos variantes em t , e $\underline{w}(t)$ é o vetor de geração do estado (sinal) $\underline{x}(t)$. $\underline{z}(t)$ é a saída selecionada através da forma de $\underline{\underline{H}}(t)$ com a presença de ruído aditivo.

Para o desenvolvimento do filtro de Kalman é necessário definirmos as propriedades estocástica gerais dos processos $\underline{w}(t)$ e $\underline{v}(t)$ envolvidos que são o valor médio (espectância), a autocorrelação e a correlação cruzada estocásticas dadas por:

$$E\{\underline{w}(t)\} = 0, \quad \phi_{\underline{ww}}(t, \tau) = E\{\underline{w}(t)\underline{w}^T(\tau)\} = \underline{\underline{Q}}(t)\delta(t-\tau), \quad (3.3, 3.4)$$

$$E\{\underline{v}(t)\} = 0, \quad \phi_{\underline{vv}}(t, \tau) = E\{\underline{v}(t)\underline{v}^T(\tau)\} = \underline{\underline{R}}(t)\delta(t-\tau), \quad (3.5, 3.6)$$

$$\phi_{\underline{wz}}(t, \tau) = E\{\underline{w}(t)\underline{z}^T(\tau)\} = 0, \quad \phi_{\underline{wv}}(t, \tau) = E\{\underline{w}(t)\underline{v}^T(\tau)\} = 0. \quad (3.7, 3.8)$$

O uso da nomenclatura $\phi_{\underline{\quad}}(t, \tau)$ implica em que t e τ são as variáveis de integração, de forma a ficar conveniente com a definição do lado direito, segundo BAYLESS & BRIGHAM (1970). $\delta(t)$ é o delta Dirac, que multiplicado por $\underline{\underline{Q}}(t)$ e $\underline{\underline{R}}(t)$ define matrizes diagonais para as autocorrelações. Para uma melhor visualização escrevemos as expressões (3.4) e (3.6) nas suas formas expandidas:

$$\begin{bmatrix} \phi(t, \tau)_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \phi(t, \tau)_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \phi(t, \tau)_{NN} \end{bmatrix}_{\underline{ww}} = \begin{bmatrix} Q(t)_{11} & Q(t)_{12} & \cdots & Q(t)_{1N} \\ Q(t)_{21} & Q(t)_{22} & \cdots & Q(t)_{2N} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ Q(t)_{N1} & Q(t)_{N2} & \cdots & Q(t)_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta(t-\tau)_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \delta(t-\tau)_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \delta(t-\tau)_{NN} \end{bmatrix}, \quad (3.9)$$

$$\begin{bmatrix} \phi(t, \tau)_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \phi(t, \tau)_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \phi(t, \tau)_{NN} \end{bmatrix}_{\underline{vv}} = \begin{bmatrix} R(t)_{11} & R(t)_{12} & \cdots & R(t)_{1N} \\ R(t)_{21} & R(t)_{22} & \cdots & R(t)_{2N} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ R(t)_{N1} & R(t)_{N2} & \cdots & R(t)_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta(t-\tau)_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \delta(t-\tau)_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \delta(t-\tau)_{NN} \end{bmatrix}, \quad (3.10)$$

onde

$$\underline{Q}(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T d\tau \begin{bmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \\ \vdots \\ w_N(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1(t-\tau) & w_2(t-\tau) & \cdots & w_N(t-\tau) \end{bmatrix}, \quad (3.11)$$

e

$$\underline{R}(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T d\tau \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \\ \vdots \\ v_N(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1(t-\tau) & v_2(t-\tau) & \cdots & v_N(t-\tau) \end{bmatrix}. \quad (3.12)$$

Resolvendo a integral devido a presença de $\delta(t-\tau)$ ficamos com a matriz diagonal com elementos $\phi_{ii}(\tau)$.

3.1.2 - Introdução da Equação de Medidas nas Propriedades Estocásticas

Aqui introduzimos a equação de medida nas funções autocorrelação e correlação cruzada estocásticas (teóricas) definidas na seção anterior, e que serão utilizadas no desenvolvimento matemático da transformação da equação integral em equações diferenciais ordinárias não lineares que definem o filtro.

Com as propriedades a priori definidas na seção anterior, iniciamos a transformação da integral (2.10) de Wiener-Kolmogorov, calculando as correlações entre $\phi_{=zz}(t, \sigma)$ e

$\phi_{=xx}(t, \sigma)$. Para isto, é necessário o desenvolvimento da correlação cruzada estocástica,

$\phi_{=xz}(t, \sigma)$, definida por

$$\phi_{=xz}(t, \sigma) = E \left\{ \underline{x}(t) \underline{z}^T(\sigma) \right\} = E \left\{ \underline{x}(t) \left[\underline{H}(t) \underline{x}(\sigma) + \underline{v}(\sigma) \right]^T \right\}, \quad (3.13)$$

$$\phi_{=xz}(t, \sigma) = E\left\{\underline{x}(t)\underline{x}^T(\sigma)\right\}\underline{H}^T(t) + E\left\{\underline{x}(t)\underline{v}^T(\sigma)\right\}. \quad (3.14)$$

A não correlação entre $\underline{x}(t)$ e $\underline{v}(t)$ leva a obtermos uma equação intermediária

$$\phi_{=xz}(t, \sigma) = \phi_{=xx}(t, \sigma)\underline{H}^T(t). \quad (3.15)$$

Para a autocorrelação $\phi_{=zz}(t, \sigma)$ temos que

$$\phi_{=zz}(t, \sigma) = E\left\{\underline{z}(t)\underline{z}^T(\sigma)\right\} = E\left\{\left[\underline{H}(t)\underline{x}(t) + \underline{v}(t)\right]\left[\underline{H}(\sigma)\underline{x}(\sigma) + \underline{v}(\sigma)\right]^T\right\}. \quad (3.16)$$

Desenvolvendo e reagrupando os seus termos

$$\begin{aligned} \phi_{=zz}(t, \sigma) = & \underline{H}(t)E\left\{\underline{x}(t)\underline{x}^T(\sigma)\right\}\underline{H}^T(t) + \underline{H}(t)E\left\{\underline{x}(t)\underline{v}^T(\sigma)\right\} \\ & + \underline{H}(t)E\left\{\underline{v}(t)\underline{x}^T(\sigma)\right\} + E\left\{\underline{v}(t)\underline{v}^T(\sigma)\right\} \end{aligned} \quad (3.17)$$

Aplicando as relações (3.6) e (3.8), em (3.17), ela simplifica para uma equação intermediária

$$\phi_{=zz}(t, \sigma) = \underline{H}(t)\phi_{=xx}(t, \sigma)\underline{H}^T(t) + \underline{R}(t)\delta(t - \sigma). \quad (3.18)$$

Continuando, substituindo (3.15) na equação original (2.10) resulta na equação integral

$$\phi_{=xx}(t, \sigma)\underline{H}^T(t) = \int_{t_0}^t \underline{h}(t, \tau)\phi_{=zz}(\tau, \sigma)d\tau; \quad (t_0 < \sigma < t). \quad (3.19)$$

As expressões (3.19) e (3.18) são as relações intermediárias de $\phi_{=zz}(t, \sigma)$ e

$\phi_{=xx}(t, \sigma)$ que serão simplificadas na próxima seção e aplicadas na equação (2.10).

3.1.3 - Introdução da Equação de Estado nas Propriedades Estocásticas

Nesta etapa introduzimos a equação do sistema através da autocorrelação variante no tempo, como passo intermediário a obtenção da equação diferencial da estimativa de estado. Para isto é necessário fazer a diferenciação de $\phi_{xx}(t, \sigma)$ para que a equação (3.1) seja introduzida, sendo assim

$$\frac{\partial \phi_{xx}(t, \sigma)}{\partial t} = E \left\{ \frac{d\underline{x}(t)}{dt} \underline{x}^T(\sigma) \right\}. \quad (3.20)$$

Desenvolvendo-a, temos que:

$$\frac{\partial \phi_{xx}(t, \sigma)}{\partial t} = E \left\{ \left[\underline{F}(t) \underline{x}(t) + \underline{G}(t) \underline{w}(t) \right] \underline{x}^T(\sigma) \right\}, \quad (3.21)$$

$$\frac{\partial \phi_{xx}(t, \sigma)}{\partial t} = \underline{F}(t) E \left\{ \underline{x}(t) \underline{x}^T(\sigma) \right\} + \underline{G}(t) E \left\{ \underline{w}(t) \underline{x}^T(\sigma) \right\}. \quad (3.22)$$

Considerando as propriedades estocásticas (3.4) a (3.8), a equação (3.22) resulta em

$$\frac{\partial \phi_{xx}(t, \sigma)}{\partial t} = \underline{F}(t) \phi_{xx}(t, \sigma), \quad (\sigma < t). \quad (3.23)$$

Multiplicando à direita ambos os lados por $\underline{H}^T(t)$ obtemos

$$\frac{\partial \phi_{xx}(t, \sigma)}{\partial t} \underline{H}^T(t) = \underline{F}(t) \phi_{xx}(t, \sigma) \underline{H}^T(t). \quad (3.24)$$

Continuando, diferenciando a equação (3.19) usando a regra de Leibniz (BARTLE, 1976), obtemos

$$\frac{\partial \phi_{xx}(t, \sigma)}{\partial t} \underline{H}^T(t) = \underline{h}(t, t) \phi_{zz}(t, \sigma) + \int_{t_0}^t \frac{\partial \underline{h}(t, \tau)}{\partial t} \phi_{zz}(\tau, \sigma) d\tau, \quad (t_0 < \sigma < t). \quad (3.25)$$

Analisando o primeiro termo do lado direito $h(t, t)$ aparece naturalmente como resultado da diferenciação, e com a substituição da equação (3.18) para $\sigma < t$ obtemos

$$\underline{\underline{h}}(t, t) \phi_{=zz}(t, \sigma) = \underline{\underline{h}}(t, t) \underline{\underline{H}}(t) \phi_{=xx}(t, \sigma) \underline{\underline{H}}^T(t). \quad (3.26)$$

Transportando (3.19) para (3.26) obtemos

$$\underline{\underline{h}}(t, t) \phi_{=zz}(t, \sigma) = \int_{t_0}^t \underline{\underline{h}}(t, t) \underline{\underline{H}}(t) \underline{\underline{h}}(t, \tau) \phi_{=zz}(\tau, \sigma) d\tau, \quad (t_0 < \sigma < t). \quad (3.27)$$

Substituindo (3.19) em (3.24) obtemos

$$\frac{\partial \phi_{=xx}(t, \tau)}{\partial t} \underline{\underline{H}}^T(t) = \int_{t_0}^t \underline{\underline{F}}(t) \underline{\underline{h}}(t, \tau) \phi_{=zz}(\tau, \sigma) d\tau, \quad (t_0 < \sigma < t). \quad (3.28)$$

Manipulando as expressões (3.25), (3.27) e (3.28) encontramos a equação

$$\int_{t_0}^t \underline{\underline{F}}(t) \underline{\underline{h}}(t, \tau) \phi_{=zz}(\tau, \sigma) d\tau = \int_{t_0}^t \underline{\underline{h}}(t, t) \underline{\underline{H}}(t) \underline{\underline{h}}(t, \tau) \phi_{=zz}(\tau, \sigma) d\tau + \int_{t_0}^t \frac{\partial \underline{\underline{h}}(t, \tau)}{\partial t} \phi_{=zz}(\tau, \sigma) d\tau. \quad (3.29)$$

Reagrupando os seus termos

$$0 = \int_{t_0}^t \left[-\underline{\underline{F}}(t) \underline{\underline{h}}(t, \tau) + \underline{\underline{h}}(t, t) \underline{\underline{H}}(t) \underline{\underline{h}}(t, \tau) + \frac{\partial \underline{\underline{h}}(t, \tau)}{\partial t} \right] \phi_{=zz}(\tau, \sigma) d\tau, \quad (t_0 < \sigma < t). \quad (3.30)$$

Substituindo (3.18) em (3.30) obtemos

$$\begin{aligned} 0 = & \int_{t_0}^t \left[-\underline{\underline{F}}(t) \underline{\underline{h}}(t, \tau) + \underline{\underline{h}}(t, t) \underline{\underline{H}}(t) \underline{\underline{h}}(t, \tau) + \frac{\partial \underline{\underline{h}}(t, \tau)}{\partial t} \right] \underline{\underline{H}}(t) \phi_{=xx}(\tau, \sigma) \underline{\underline{H}}^T(t) d\tau + \\ & + \int_{t_0}^t \left[-\underline{\underline{F}}(t) \underline{\underline{h}}(t, \sigma) + \underline{\underline{h}}(t, t) \underline{\underline{H}}(t) \underline{\underline{h}}(t, \sigma) + \frac{\partial \underline{\underline{h}}(t, \sigma)}{\partial t} \right] \underline{\underline{R}}(t) d\tau. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Desde que $|\underline{\underline{R}}| \neq 0$, concluímos que

$$\frac{\partial \underline{h}(t, \tau)}{\partial t} = \underline{F}(t) \underline{h}(t, \tau) - \underline{h}(t, \tau) \underline{H}(t) \underline{h}(t, \tau), \quad (t_0 < \tau < t). \quad (3.32)$$

Esta é a equação diferencial que o operador tempo-variante $\underline{h}(t, \tau)$ deve satisfazer, sendo o resultado procurado nesta seção. A equação (3.32) acima é usada na próxima seção para achar a equação diferencial para $\hat{x}(t)$.

3.1.4 - Matriz Ganho e a Solução da Equação Integral

Nesta seção é definida a matriz ganho do problema, e encontrada a forma de solução da equação integral (2.10), usando as relações (3.32), (3.15) e (3.18) definidas nas seções anteriores, mantendo as condições de validade da solução no intervalo (t_0, t) .

Diferenciando a equação (2.11) pela regra de Leibnitz, encontramos uma equação diferencial do valor estimado $\hat{x}(t)$ na forma

$$\frac{d\hat{x}(t)}{dt} = \underline{h}(t, t) \underline{z}(t) + \int_{t_0}^t \frac{\partial \underline{h}(t, \tau)}{\partial t} \underline{z}(t, \tau) d\tau. \quad (3.33)$$

Introduzindo a equação (3.32) na equação acima obtemos agora que

$$\hat{x}(t) = \underline{h}(t, t) \underline{z}(t) + \int_{t_0}^t \left[\underline{F}(t) \underline{h}(t, \tau) - \underline{h}(t, \tau) \underline{H}(t) \underline{h}(t, \tau) \right] \underline{z}(t, \tau) d\tau. \quad (3.34)$$

Reagrupando os seus termos

$$\hat{x} = \underline{h}(t, t) \underline{z}(t) + \int_{t_0}^t \underline{F}(t) \underline{h}(t, \tau) \underline{z}(t, \tau) d\tau - \underline{h}(t, t) \underline{H}(t) \int_{t_0}^t \underline{h}(t, \tau) \underline{z}(t, \tau) d\tau, \quad (3.35)$$

substituindo (2.11)

$$\hat{x}(t) = \underline{h}(t, t) \underline{z}(t) + \underline{F}(t) \hat{x}(t) - \underline{H}(t) \underline{h}(t, t) \hat{x}(t), \quad (3.36)$$

ou, equivalentemente

$$\dot{\hat{x}}(t) = \underline{\underline{F}}(t)\hat{x}(t) + \underline{\underline{h}}(t,t)[\underline{\underline{z}}(t) - \underline{\underline{H}}(t)\hat{x}(t)]. \quad (3.37)$$

Esta é uma equação diferencial intermediária para o valor estimado do estado, em termos de funções conhecidas e de informação existente.

Falta obtermos uma expressão explícita para $\underline{\underline{h}}(t,t)$, e isto significa que o intervalo de definição do operador coincidente a dos dados, ou seja, $\tau = t$. Neste caso especial, a identificação é $\underline{\underline{h}}(t,t) = \underline{\underline{K}}(t)$ sendo denominado de ganho.

Para deduzirmos a matriz de ganho de Kalman, $\underline{\underline{K}}(t) = \underline{\underline{h}}(t,t)$ introduzimos (3.15) e (3.18) na equação de Wiener-Kolmogorov (2.10), para obtermos

$$\phi_{=xx}(t, \sigma) \underline{\underline{H}}^T(t) = \int_{t_0}^t \underline{\underline{h}}(t, \tau) \left[\underline{\underline{H}}(t) \phi_{=xx}(\tau, \sigma) \underline{\underline{H}}^T(t) + \underline{\underline{R}}(t) \delta(\tau - \sigma) \right] d\tau, \quad (3.38)$$

que desdobra para

$$\phi_{=xx}(t, \sigma) \underline{\underline{H}}^T(t) = \int_{t_0}^t \underline{\underline{h}}(t, \tau) \underline{\underline{H}}(t) \phi_{=xx}(\tau, \sigma) \underline{\underline{H}}^T(t) d\tau + \int_{t_0}^t \underline{\underline{h}}(t, \tau) \underline{\underline{R}}(t) \delta(\tau - \sigma) d\tau. \quad (3.39)$$

Para $\sigma = t$, condição de coincidência intervalar do filtro em estudo, a expressão acima simplifica para

$$\phi_{=xx}(t, t) \underline{\underline{H}}^T(t) - \int_{t_0}^t \underline{\underline{h}}(t, \tau) \underline{\underline{H}}(t) \phi_{=xx}(\tau, t) \underline{\underline{H}}^T(t) d\tau = \underline{\underline{h}}(t, t) \underline{\underline{R}}(t). \quad (3.40)$$

Por definição, o erro é

$$\Delta x(t) = x(t) - \hat{x}(t). \quad (3.41)$$

e a covariância do erro dada por

$$\underline{\underline{P}}(t) = E \left\{ \Delta x(t) \Delta x^T(t) \right\}. \quad (3.42)$$

Substituindo (3.41) obtemos

$$\underline{\underline{P}}(t) = E\{\underline{\underline{x}}(t)\underline{\underline{x}}^T(t)\} - E\{\underline{\underline{\hat{x}}}(t)\underline{\underline{\hat{x}}}^T(t)\}. \quad (3.43)$$

Substituindo (2.7) e (2.10) em (3.43) obtemos

$$\underline{\underline{P}}(t) = \underline{\underline{\phi}}_{xx}(t, t) - \int_{t_0}^t \underline{\underline{h}}(t, \tau) \underline{\underline{\phi}}_{zx}(\tau, t) d\tau. \quad (3.44)$$

Comparando as equações (3.44) e (3.40) obtemos a relação

$$\underline{\underline{P}}(t) \underline{\underline{H}}^T(t) = \underline{\underline{h}}(t, t) \underline{\underline{R}}(t), \quad (3.45)$$

de onde se escreve que

$$\underline{\underline{h}}(t, t) = \underline{\underline{P}}(t) \underline{\underline{H}}^T(t) \underline{\underline{R}}^{-1}(t), \quad (3.46)$$

definida como a matriz de ganho de Kalman $\underline{\underline{K}}(t)$, ou seja,

$$\underline{\underline{K}}(t) = \underline{\underline{h}}(t, t) = \underline{\underline{P}}(t) \underline{\underline{H}}^T(t) \underline{\underline{R}}^{-1}(t). \quad [\underline{\underline{R}}^{-1}(t) \text{ existe}]. \quad (3.47)$$

Assim, obtemos a transformação da equação integral (2.10) para a equação diferencial de estado na forma

$$\frac{d\underline{\underline{\hat{x}}}(t)}{dt} = [\underline{\underline{F}}(t) - \underline{\underline{K}}(t) \underline{\underline{H}}(t)] \underline{\underline{\hat{x}}}(t) + \underline{\underline{K}}(t) \underline{\underline{z}}(t). \quad (3.48)$$

Esta equação é a forma própria ao cálculo numérico, que veremos na seção (3.2.3).

No entanto, para calcular $\underline{\underline{K}}(t)$ necessitamos achar ainda a equação covariância do erro

$\underline{\underline{P}}(t)$ em termos de $\underline{\underline{F}}(t)$, $\underline{\underline{H}}(t)$, $\underline{\underline{R}}(t)$, $\underline{\underline{G}}(t)$ e $\underline{\underline{Q}}(t)$, o qual será demonstrada na próxima seção.

3.1.5 - Equação Diferencial de Ricatti

Passamos agora a deduzir a equação diferencial para a covariância do erro $\underline{\underline{P}}(t)$, necessária ao cálculo da equação diferencial do estado (sistema). Por definição, a covariância do erro é dada pela expressão

$$\underline{\underline{P}}(t) = E\left\{\Delta \underline{x}(t) \Delta \underline{x}^T(t)\right\}. \quad (3.49)$$

Diferenciando-a

$$\dot{\underline{\underline{P}}}(t) = E\left\{\frac{d\Delta \underline{x}(t)}{dt} \Delta \underline{x}^T(t)\right\} + E\left\{\Delta \underline{x}^T(t) \frac{d\Delta \underline{x}(t)}{dt}\right\}. \quad (3.50)$$

O próximo passo é desenvolver os dois termos do lado direito desta equação.

O erro do sistema é dado por

$$\Delta \dot{\underline{x}}(t) = \dot{\underline{x}}(t) - \dot{\hat{\underline{x}}}(t). \quad (3.51)$$

Substituindo (3.37), (3.1) e (3.2) em (3.51) obtemos

$$\Delta \dot{\underline{x}}(t) = \underline{\underline{F}}(t) \underline{x}(t) + \underline{\underline{G}}(t) \underline{w}(t) - \underline{\underline{F}}(t) \hat{\underline{x}}(t) - \underline{\underline{K}}(t) [\underline{\underline{H}}(t) \underline{x}(t) - \underline{v}(t) - \underline{\underline{H}}(t) \hat{\underline{x}}(t)]. \quad (3.52)$$

Reagrupando os termos

$$\Delta \dot{\underline{x}}(t) = [\underline{\underline{F}}(t) - \underline{\underline{K}}(t) \underline{\underline{H}}(t)] \Delta \underline{x}(t) - \underline{\underline{K}}(t) \underline{v}(t) + \underline{\underline{G}}(t) \underline{w}(t). \quad (3.53)$$

A matriz de transição de estado, $\underline{\underline{\Phi}}(t, t_0)$, é reconhecida acima, e

$$\underline{\underline{\Phi}}(t, t_0) = \underline{\underline{F}}(t) - \underline{\underline{K}}(t) \underline{\underline{H}}(t). \quad (3.54)$$

Com isto, a solução para a equação diferencial (3.53) é dada por (2.25), o que equivale a

$$\Delta \underline{x}(t) = \underline{\underline{\Phi}}(t, t_0) \Delta \underline{x}(t_0) - \int_{t_0}^t \underline{\underline{\Phi}}(t, \tau) \underline{\underline{K}}(\tau) \underline{v}(\tau) d\tau + \int_{t_0}^t \underline{\underline{\Phi}}(t, \tau) \underline{\underline{G}}(\tau) \underline{w}(\tau) d\tau. \quad (3.55)$$

De acordo com equação (3.53), podemos expandir o primeiro termo da equação (3.50) da seguinte forma

$$E\left\{\frac{d\Delta\mathbf{x}(t)}{dt}\Delta\mathbf{x}^T(t)\right\} = E\left\{\left[\left(\underline{\underline{F}}(t) - \underline{\underline{K}}(t)\underline{\underline{H}}(t)\right)\Delta\mathbf{x}(t) - \underline{\underline{K}}(t)\underline{\underline{v}}(t) + \underline{\underline{G}}(t)\underline{\underline{w}}(t)\right]\Delta\mathbf{x}^T(t)\right\}. \quad (3.56)$$

Reagrupando os termos

$$E\left\{\frac{d\Delta\mathbf{x}(t)}{dt}\Delta\mathbf{x}^T(t)\right\} = \left[\underline{\underline{F}}(t) - \underline{\underline{K}}(t)\underline{\underline{H}}(t)\right]E\left\{\Delta\mathbf{x}(t)\Delta\mathbf{x}^T(t)\right\} \\ - \underline{\underline{K}}(t)E\left\{\underline{\underline{v}}(t)\Delta\mathbf{x}^T(t)\right\} + \underline{\underline{G}}(t)E\left\{\underline{\underline{w}}(t)\Delta\mathbf{x}^T(t)\right\}. \quad (3.57)$$

Observamos que para resolver a equação (3.57) é necessário encontrarmos as correlações cruzadas $\phi_{=v\Delta x}(t, t)$ e $\phi_{=w\Delta x}(t, t)$. Primeiramente, consideramos a expressão

$$\phi_{=v\Delta x}(t, t) = E\left\{\underline{\underline{v}}(t)\Delta\mathbf{x}^T(t)\right\}, \quad (3.58)$$

onde não podemos afirmar sobre as condições de não correlação devido ao desdobramento de $\Delta\mathbf{x}(t)$. Usando a equação (3.55) obtemos

$$\phi_{=v\Delta x}(t, t) = E\left\{\underline{\underline{v}}(t)\left[\underline{\underline{\Phi}}(t, t_0)\Delta\mathbf{x}(t_0) - \int_{t_0}^t \underline{\underline{\Phi}}(t, \tau)\underline{\underline{K}}(\tau)\underline{\underline{v}}(\tau)d\tau + \int_{t_0}^t \underline{\underline{\Phi}}(t, \tau)\underline{\underline{G}}(\tau)\underline{\underline{w}}(\tau)d\tau\right]^T\right\}. \quad (3.59)$$

Reescrevendo-a, com $\underline{\underline{\Phi}}^T(t, t_0) = \underline{\underline{\Phi}}(t, t_0)$,

$$\phi_{=v\Delta x}(t, t) = \underline{\underline{\Phi}}(t, t_0)E\left\{\underline{\underline{v}}(t)\Delta\mathbf{x}^T(t)\right\} - \int_{t_0}^t E\left\{\underline{\underline{v}}(t)\underline{\underline{v}}^T(\tau)\right\}\underline{\underline{K}}^T(t)\underline{\underline{\Phi}}^T(t, \tau)d\tau \\ + \int_{t_0}^t E\left\{\underline{\underline{v}}(t)\underline{\underline{w}}^T(\tau)\right\}\underline{\underline{\Phi}}(t, \tau)\underline{\underline{G}}(t)d\tau. \quad (3.60)$$

Usando as propriedades de não correlação, deduzimos que

$$\phi_{=v\Delta x}(t, t) = - \int_{t_0}^t E \left\{ \underline{v}(t) \underline{v}^T(\tau) \right\} \underline{K}^T(\tau) \underline{\Phi}^T(t, \tau) d\tau. \quad (3.61)$$

A partir da equação (3.6)

$$\phi_{=vv}(t, \tau) = \underline{R}(t) \delta(t - \tau), \quad (3.62)$$

que substituindo em (3.61) resulta em

$$\phi_{=v\Delta x}(t, t) = - \int_{t_0}^t \underline{R}(t) \underline{K}^T(\tau) \underline{\Phi}^T(t, \tau) \delta(t - \tau) d\tau \quad (3.63)$$

A integral (3.63) tem para limite superior t . O impulso unitário é descrito através de funções simétricas par como:

$$\delta(t) = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{1}{T} \Pi\left(\frac{t}{T}\right), \quad (3.64)$$

onde a função retangular é simétrica e definida por

$$\frac{1}{T} \Pi\left(\frac{t}{T}\right) = \begin{cases} \frac{1}{T}, & |t| < T \\ 0, & \text{de outro modo} \end{cases} \quad (3.65)$$

Para o problema em questão o integrando é causal. Também $\underline{\Phi}(t, t_0) = \underline{I}$. Com isto, a equação (3.63) resulta na forma abaixo, por cobrir apenas a metade do intervalo de simetria de $\delta(t)$,

$$\phi_{=v\Delta x}(t, t) = - \frac{1}{2} \underline{R}(t) \underline{K}^T(t). \quad (3.66)$$

De forma similar, determinamos $\phi_{=w\Delta x}(t, t)$ pelas seguintes relações:

$$\phi_{=w\Delta x}(t, t) = E \left\{ \underline{w}(t) \underline{x}^T(\tau) \right\}, \quad (3.67)$$

$$\phi_{=w\Delta x}(t, t) = \int_{t_0}^t E \left\{ \underline{w}(t) \underline{w}^T(\tau) \right\} \underline{G}^T(t) \underline{\Phi}(t, \tau) d\tau, \quad (3.68)$$

de onde

$$\phi_{=w\Delta x}(t, t) = \frac{1}{2} \underline{Q}(t) \underline{G}^T(t). \quad (3.69)$$

Substituindo as equações (3.66), (3.69) em (3.57) obtemos

$$E \left\{ \frac{d\Delta x}{dt} \Delta x^T(t) \right\} = \left[\underline{F}(t) - \underline{K}(t) \underline{H}(t) \right] \underline{P}(t) + \frac{1}{2} \underline{K}(t) \underline{R}(t) \underline{K}^T(t) + \frac{1}{2} \underline{G}(t) \underline{Q}(t) \underline{G}^T(t). \quad (3.70)$$

De forma análoga, obtemos o segundo termo da expressão (3.50) como dada por

$$E \left\{ \Delta x(t) \frac{d\Delta x^T}{dt}(t) \right\} = \left[\underline{F}(t) - \underline{K}(t) \underline{H}(t) \right]^T \underline{P}(t) + \frac{1}{2} \underline{K}(t) \underline{R}(t) \underline{K}^T(t) + \frac{1}{2} \underline{G}(t) \underline{Q}(t) \underline{G}^T(t). \quad (3.71)$$

Somando (3.70) com (3.71) temos, de acordo com (3.50), que

$$\begin{aligned} \dot{\underline{P}}(t) = & \left[\underline{F}(t) - \underline{K}(t) \underline{H}(t) \right] \underline{P}(t) + \underline{P}(t) \left[\underline{F}(t) - \underline{K}(t) \underline{H}(t) \right]^T + \\ & + \underline{K}(t) \underline{R}(t) \underline{K}^T(t) + \underline{G}(t) \underline{Q}(t) \underline{G}^T(t). \end{aligned} \quad (3.72)$$

Finalmente, usando (3.47), chegamos a equação diferencial matricial de Ricatti não linear para a covariância do erro:

$$\dot{\underline{P}}(t) = \underline{F}(t) \underline{P}(t) + \underline{P}(t) \underline{F}^T(t) - \underline{P}(t) \underline{H}^T(t) \underline{R}^{-1}(t) \underline{H}(t) \underline{P}(t) + \underline{G}(t) \underline{Q}(t) \underline{G}^T(t). \quad (3.73)$$

Observamos com estes resultados que a transformação da equação integral Wiener-Kolmogorov é centrada na equação diferencial ordinária linear de estado, tendo acoplado a ela uma equação não linear de Ricatti para o ganho.

As equações diferenciais que fazem parte da formulação completa do filtro de Kalman (3.47), (3.48) e (3.73) na forma contínua estão sumarizadas na Tabela 3.1.

Tabela 3.1 - Equações do filtro de Kalman na forma contínua.

Modelo do Sistema	$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{F}(t)\underline{x}(t) + \underline{G}(t)\underline{w}(t)$ (3.1)
Medida do Modelo	$\underline{z}(t) = \underline{H}(t)\underline{x}(t) + \underline{v}(t)$ (3.2)
Condições Iniciais	$E\{\underline{x}(0)\} = \hat{\underline{x}}_0, E\{(\underline{x}(0) - \hat{\underline{x}}_0)(\underline{x}(0) - \hat{\underline{x}}_0)^T\} = P_0$
Estimativa do Estado	$\dot{\hat{\underline{x}}}(t) = \underline{F}(t)\hat{\underline{x}}(t) + \underline{K}(t)[\underline{z}(t) - \underline{H}(t)\hat{\underline{x}}(t)]$ (3.48)
Matriz de Covariância do erro	$\underline{P}(t) = \underline{F}(t)\underline{P}(t) + \underline{P}(t)\underline{F}^T(t) + \underline{G}(t)\underline{Q}(t)\underline{G}^T(t) - \underline{K}(t)\underline{R}(t)\underline{K}^T(t)$ (3.73)
Matriz Ganho de Kalman	$\underline{K}(t) = \underline{P}(t)\underline{H}^T(t)\underline{R}^{-1} = [\underline{P}(t)\underline{H}^T(t) + \underline{G}(t)\underline{H}(t)]\underline{R}^{-1}(t)$ (3.47)

3.2 - APROXIMAÇÃO DE EULER AO DISCRETIZADO

O estudo desta seção é transformar as equações diferenciais linear de estado e não linear de Ricatti que definem o filtro de Kalman na forma contínua, vistas na seção anterior, para a forma discretizada, com o objetivo de escreve-las na forma conveniente ao cálculo computacional. Para isto, dividimos esta seção em quatro partes que são apresentadas a seguir, tendo como referência básica LEWIS (1986).

3.2.1 - Aproximações Básicas

Iniciamos com a aproximação de Euler, para algumas equações necessárias para descrever as próximas etapas.

Na seção 2.3.3, a equação (2.34) é escrita como

$$\underline{\underline{\Phi}}(k\Delta t) = e^{\underline{\underline{F}}\Delta t} = \underline{\underline{I}} + \underline{\underline{F}}(t)\Delta t + \frac{1}{2!}\underline{\underline{F}}^2(t)\Delta t^2 + \frac{1}{3!}\underline{\underline{F}}^3(t)\Delta t^3 + \dots \quad (3.74)$$

Portanto, quando $\Delta t \rightarrow 0$, desprezando os termos de ordem superior, encontramos o seguinte aproximação

$$\underline{\underline{\Phi}}(\Delta t) = \underline{\underline{\Phi}}_k = \underline{\underline{I}} + \underline{\underline{F}}(t)\Delta t. \quad (3.75)$$

A autocovariância da função forçante w_k , é definida como

$$\underline{\underline{Q}}(t, \tau) = E\{w(t)w(\tau)^T\}, \quad (t = k\Delta t, \quad \tau = k\Delta t). \quad (3.76)$$

Partindo das equações (2.31) e (2.30) concluímos que

$$\underline{\underline{w}}(\Delta t) = \int_0^{\Delta t} \underline{\underline{\Phi}}(\Delta t - \tau) \underline{\underline{G}}(t) w(\tau) d\tau. \quad (3.77)$$

Substituindo (3.77) em (3.76) resulta em

$$\underline{\underline{Q}}(\Delta t) = \int_0^{\Delta t} \int_0^{\Delta t} \underline{\underline{\Phi}}(\Delta t - \tau) \underline{\underline{G}}(t) E\{w(t)w^T(\tau)\} \underline{\underline{G}}^T(t) \underline{\underline{\Phi}}(\Delta t - \tau) d\tau dt. \quad (3.78)$$

Rescrevendo a equação (3.4) na forma

$$E\{w(t)w^T(\tau)\} = \underline{\underline{Q}}(t)\delta(t - \tau), \quad (3.79)$$

e introduzindo (3.79) em (3.78) obtemos

$$\underline{\underline{Q}}(\Delta t) = \int_0^{\Delta t} \underline{\underline{\Phi}}(\Delta t - \tau) \underline{\underline{G}}(t) \underline{\underline{Q}}(t) \underline{\underline{G}}^T(t) \underline{\underline{\Phi}}(\Delta t - \tau) d\tau. \quad (3.80)$$

Usando as propriedades de integral definida de Riemann podemos reescrever a equação (3.80) e a (3.77) na forma numérica

$$\underline{\underline{Q}}_k = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{N-1} \underline{\underline{\Phi}}(\Delta t) \underline{\underline{G}}(\xi_i) \underline{\underline{Q}}(\xi_i) \underline{\underline{G}}^T(\xi_i) \underline{\underline{\Phi}}(\Delta t) \Delta t \quad (3.81)$$

e

$$\underline{w}_k = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{N-1} \underline{\Phi}(\Delta t) \underline{G}(\xi_i) \underline{w}(\xi_i) \Delta t, \quad (3.82)$$

onde $t_i \leq \xi_i \leq t_{i+1}$; $\Delta t = t_{i+1} - t_i$; $i = 0, 1, 2, \dots, (N-1)$. Substituindo (3.75) nas expressões (3.82) e (3.81) obtemos

$$\underline{Q}_{\underline{k}} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{N-1} (\underline{I} + \underline{F}(t) \Delta t) \underline{G}(\xi_i) \underline{Q}(\xi_i) \underline{G}^T(\xi_i) (\underline{I} + \underline{F}(t) \Delta t) \Delta t, \quad (3.83)$$

e

$$\underline{w}_k = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{N-1} (\underline{I} + \underline{F}(t) \Delta t) \underline{G}(\xi_i) \underline{w}(\xi_i) \Delta t. \quad (3.84)$$

Reagrupando e desprezando os termos de ordem superior obtemos o seguinte resultado para as expressões acima

$$\underline{Q}_{\underline{k}} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{N-1} \underline{G}(\xi_i) \underline{Q}(\xi_i) \underline{G}^T(\xi_i) \Delta t, \quad (3.85)$$

e

$$\underline{w}_k = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{N-1} \underline{G}(\xi_i) \underline{w}(\xi_i) \Delta t. \quad (3.86)$$

Portanto, podemos considerar no limite as seguintes relações:

$$\underline{Q}_{\underline{k}} \rightarrow \underline{G}(t) \underline{Q}(t) \underline{G}^T(t) \Delta t, \quad (3.87)$$

e

$$\underline{w}_k \rightarrow \underline{G}(t) \underline{w}(t) \Delta t. \quad (3.88)$$

A partir das definições na seção 3.1, a autocovariância $\underline{R}(t)$ diagonal é dada por

$$\underline{R}(t) = E \left[\underline{v}(t) \underline{v}^T(\tau) \right] = \underline{R}(t) \delta(t - \tau), \quad (3.89)$$

A sequência ruído branco discretizado pode ser tratada para aproximar ao processo de ruído branco contínuo, reduzindo o comprimento (Δt) e incrementando sua amplitude, da forma que $R_k \rightarrow R/\Delta t$. Isto é, no limite $\Delta t \rightarrow 0$, a função ruído branco discretizado tende para o valor de um dos pulsos infinitos de duração zero, assim a área sob a função de autocorrelação e $R_k \Delta t$ igual a área sobre a função contínua de autocorrelação, GELB et el (1974). Com isto temos definido as três relações básicas desejáveis (3.87), (3.88) e (3.75).

3.2.2 - Equação Diferencial de Estado Discretizada

Passamos agora a transformar as equações do filtro de Kalman na forma contínua para a forma discretizada, utilizando as aproximações demonstradas na seção anterior.

Iniciamos com a equação diferencial de estado dada por:

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{F}(t)\underline{x}(t) + \underline{G}(t)\underline{w}(t). \quad (3.90)$$

Aplicando a simples aproximação de Euler, temos que

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\underline{x}_{k+1} - \underline{x}_k}{\Delta t} = \underline{F}(t)\underline{x}_k + \underline{G}(t)\underline{w}_k. \quad (3.91)$$

Na forma recursiva

$$\underline{x}_{k+1} = \underline{x}_k \left(I + \underline{F}(t)\Delta t \right) + \underline{G}(t)\underline{w}(t)\Delta t. \quad (3.92)$$

Considerando as relações (3.75) e (3.88) em (3.92) temos que

$$\underline{x}_{k+1} = \underline{x}_k \underline{\Phi}_k + \underline{w}_k \quad (3.93)$$

3.2.3 - Equação Diferencial da Estimativa do Discretizada

Partimos para a discretização da equação diferencial da estimativa do erro definida pela equação (3.43), pelo mesmo procedimento da seção anterior. Com,

$$\frac{d\hat{\underline{x}}(t)}{dt} = [\underline{F}(t) - \underline{K}(t)\underline{H}(t)]\hat{\underline{x}}(t) + \underline{K}(t)\underline{z}(t), \quad (3.94)$$

e utilizando a aproximação de Euler, e admitindo o processo de amostragem descrito como

$$\hat{\underline{x}}(t) = \hat{\underline{x}}(k\Delta t) \quad \text{e} \quad \underline{z}(t) = \underline{z}(k\Delta t), \quad [k\Delta t \leq t \leq (k+1)\Delta t], \quad (3.95)$$

obtemos

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\hat{\underline{x}}_{k+1} - \hat{\underline{x}}_k}{\Delta t} = [\underline{F}(t) - \underline{K}(t)\underline{H}(t)]\hat{\underline{x}}_k + \underline{K}(t)\underline{z}_k, \quad (3.96)$$

escrevendo na forma recursiva e reagrupando os termos, então,

$$\hat{\underline{x}}_{k+1} = \hat{\underline{x}}_k [\underline{I} + \underline{F}(t)\Delta t] + \underline{K}(t)\Delta t [\underline{z}_k - \underline{H}(t)\hat{\underline{x}}_k]. \quad (3.97)$$

Com as relações

$$\underline{\Phi}_k \rightarrow \underline{I} + \underline{F}_k \Delta t, \quad (3.98)$$

e

$$\underline{K}_k \rightarrow \underline{K}(t)\Delta t, \quad (3.99)$$

substituindo-as em (3.97) obtemos

$$\hat{\underline{x}}_{k+1} = \underline{\Phi}_k \hat{\underline{x}}_k + \underline{K}_k (\underline{z}_k - \underline{H}_k \hat{\underline{x}}_k). \quad (3.100)$$

Escrevemos agora a equação (3.100) na forma da estimativa procurada para o estado atualizado ao redor do ponto de medida k segundo a amostragem de ordem zero. Considerando a extrapolação da estimativa do estado como sendo dado por

$$\hat{\underline{x}}_{k+1}(-) = \underline{\Phi}_k \hat{\underline{x}}_k(+), \quad (3.101)$$

que substituída em (3.100) resulta em

$$\hat{\underline{x}}_{k+1}(+) = \hat{\underline{x}}_{k+1}(-) + \underline{K}_k \left[\underline{z}_k - \underline{H}_k \hat{\underline{x}}_{k+1}(-) \right], \quad (3.102)$$

definida como a estimativa atualizado do estado.

3.2.4 - Equação de Ricatti na Forma Discretizada

Para o caso da equação diferencial matricial da covariância do erro, procedemos de forma similar como foi realizado nas seções anteriores. Dada a equação de Ricatti na forma contínua (3.73), isto é,

$$\frac{d\underline{P}(t)}{dt} = \underline{F}(t)\underline{P}(t) - \underline{P}(t)\underline{F}^T(t) - \underline{P}(t)\underline{H}^T(t)\underline{R}^{-1}(t)\underline{H}(t)\underline{P}(t) + \underline{G}(t)\underline{Q}(t)\underline{G}^T(t). \quad (3.103)$$

Segundo a aproximação de Euler

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\underline{P}_{k+1} - \underline{P}_k}{\Delta t} = \underline{F}(t)\underline{P}(t) - \underline{P}(t)\underline{F}^T(t) - \underline{P}(t)\underline{H}^T(t)\underline{R}^{-1}(t)\underline{H}(t)\underline{P}(t) + \underline{G}(t)\underline{Q}(t)\underline{G}^T(t). \quad (3.104)$$

Sabemos que a matriz ganho (3.47) é definida como

$$\underline{K}(t) = \underline{P}(t)\underline{H}^T(t)\underline{R}^{-1}(t). \quad (3.105)$$

Substituindo-a em (3.104), escrevendo a forma recursiva e reagrupando os termos, obtemos que

$$\underline{P}_{k+1} = \left(\underline{I} + \underline{F}(t)\Delta t \right) \underline{P}_k \left(\underline{I} + \underline{F}(t)\Delta t \right)^T - \underline{K}(t)\underline{H}(t)\underline{P}_k \Delta t - \underline{G}(t)\underline{Q}(t)\underline{G}^T(t)\Delta t. \quad (3.106)$$

Usando as aproximações (3.75) e (3.87) em (3.106), isto é,

$$\underline{\Phi}_k \rightarrow \underline{I} + \underline{F}(t)\Delta t \quad (3.107)$$

e

$$\underline{Q}_k \rightarrow \underline{G}(t)\underline{Q}(t)\underline{G}^T(t)\Delta t, \quad (3.108)$$

obtemos como resultado

$$\underline{P}_{k+1} = \underline{\Phi} \underline{P}_k \underline{\Phi}^T - \underline{K} \underline{H} \underline{P}_k + \underline{Q}. \quad (3.109)$$

Consideremos que a extrapolação da covariância do erro é dada por

$$\underline{P}_{k+1}(-) = \underline{\Phi} \underline{P}_k(+) \underline{\Phi}^T + \underline{Q}. \quad (3.110)$$

Então, representamos a covariância do erro atualizado como

$$\underline{P}_{k+1}(+) = \underline{P}_{k+1}(-) - [\underline{K} \underline{H} \underline{P}_{k+1}(-)], \quad (3.111)$$

ou, equivalentemente,

$$\underline{P}_{k+1}(+) = [I - \underline{K} \underline{H}] \underline{P}_{k+1}(-). \quad (3.112)$$

As equações que fazem parte da formulação do filtro de Kalman na forma discretizada obtidas neste capítulo estão sumarizadas nas Tabelas 3.2.

Tabela 3.2 - Equações do filtro de Kalman na forma discretizada.

Modelo do sistema	$\underline{x}_{k+1} = \underline{\Phi}_k \underline{x}_k + \underline{w}_k$	(3.93)
Modelo de medidas	$\underline{z}_{k+1} = \underline{H}_{k+1} \underline{x}_{k+1} + \underline{v}_k$	(3.115)
Condições iniciais	$E\{\underline{x}(0)\} = \hat{\underline{x}}_0, \quad E\{(\underline{x}(0) - \hat{\underline{x}}_0)(\underline{x}(0) - \hat{\underline{x}}_0)^T\} = \underline{P}_0$	
Extrapolção da estimativa do estado	$\hat{\underline{x}}_{k+1}(-) = \underline{\Phi}_k \hat{\underline{x}}_k(+)$	(3.101)
Extrapolção da covariância do erro	$\underline{P}_{k+1}(-) = \underline{\Phi}_k \underline{P}_k(+) \underline{\Phi}_k^T + \underline{Q}$	(3.110)
Estimativa do estado atualizado	$\hat{\underline{x}}_{k+1}(+) = \hat{\underline{x}}_{k+1}(-) + \underline{K}_{k+1} [\underline{z}_{k+1} - \underline{H}_{k+1} \hat{\underline{x}}_{k+1}(-)]$	(3.102)
Covariância do erro atualizado	$\underline{P}_{k+1}(+) = [I - \underline{K}_{k+1} \underline{H}_{k+1}] \underline{P}_{k+1}(-)$	(3.112)
Matriz de ganho de Kalman	$\underline{K}_{k+1} = \underline{P}_{k+1}(-) \underline{H}_{k+1}^T [\underline{H}_{k+1} \underline{P}_{k+1}(-) \underline{H}_{k+1}^T + \underline{R}_{k+1}]^{-1}$	(3.105)

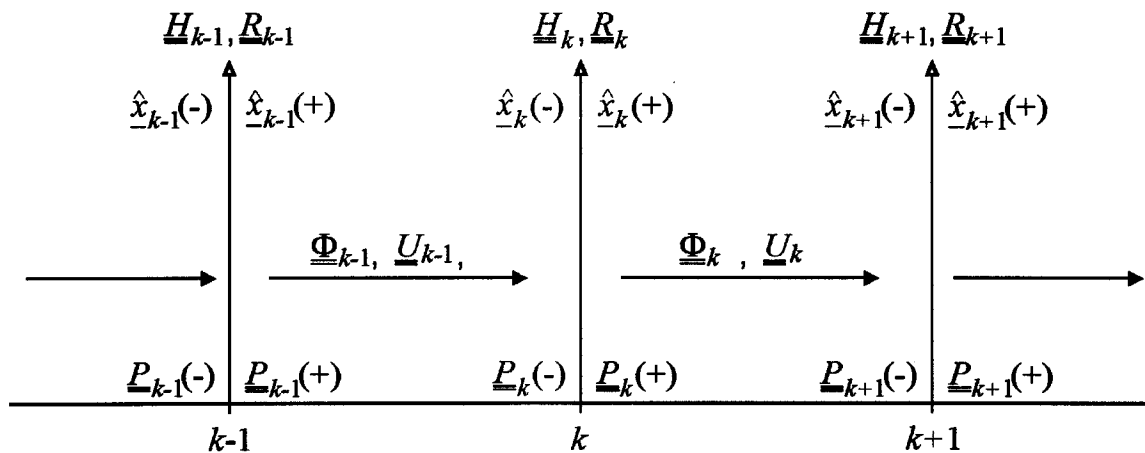


Figura 3.1 - Ilustração da transferência das funções envolvidas na formulação do filtro de Kalman na forma discretizada.

3.3 - MÉTODO DE GELB

GELB et al (1974) apresenta um desenvolvimento completo para obter as equações de diferenças que fazem parte do filtro de Kalman, e em seguida chegar à forma contínua. A nossa intenção aqui é a complementação do formalismo unificando os dois procedimentos: o contínuo e o discretizado.

Iniciamos escrevendo as relações de aproximação ao redor de um ponto de medida k :

$$\hat{x}_k(+) = x_k + \Delta x_k(+), \quad (3.113)$$

$$\hat{x}_k(-) = x_k + \Delta x_k(-), \quad (3.114)$$

$\hat{x}_k(+)$ e $\hat{x}_k(-)$ representam as estimativas imediatamente posterior e anterior a $t = k\Delta t$, como mostra a Figura (2.4). As equações de estado de partida são dadas por

$$z_k = H_k x_k + v_k, \quad (\text{medidas}), \quad (3.115)$$

$$\underline{x}_{k+1} = \underline{\Phi}_k \underline{x}_k + w_k, \quad (\text{sistema}), \quad (3.116)$$

onde $\underline{H}_k$ e $\underline{\Phi}_k$ são as matrizes de estado e saída, respectivamente, v_k é o ruído presente com média zero e covariância $\underline{R}_k$, e w_k a função forçante com média zero e covariância $\underline{Q}_k$.

A partir da estimativa a priori do estado do sistema no tempo t_k , denotado de $\hat{x}_k(-)$, buscamos uma estimativa de um dado posterior, $\hat{x}_k(+)$, baseada na medida z_k . Com o objetivo de evitar o crescimento da memória do filtro, este estimador é estruturado na forma linear e recursiva na forma

$$\hat{x}_k(+) = \underline{K}'_k \hat{x}_k(-) + \underline{K}_k z_k, \quad (3.117)$$

onde $\underline{K}'_k$ e $\underline{K}_k$ são matrizes variantes em t a determinar. Manipulando as expressões (3.113, 3.116, 3.117) obtemos que

$$\Delta x_k(+) = \left[\underline{K}'_k + \underline{K}_k \underline{H}_k - \underline{I} \right] x_k + \underline{K}'_k \Delta x_k(-) + \underline{K}_k v_k. \quad (3.118)$$

Por definição temos que $E\{v_k\} = 0$. Se $E\{\Delta x_k(-)\} = 0$ este estimador será não tendencioso. Isto é, $E\{\Delta x_k(+)\} = 0$, para um dado vetor de estado x_k somente se o termo entre colchetes for zero. Sendo assim, isto requer que

$$\underline{K}'_k = \underline{I} - \underline{K}_k \underline{H}_k. \quad (3.119)$$

Substituindo (3.119) em (3.117), obtemos o estimador na forma

$$\hat{x}_k(+) = \left(\underline{I} - \underline{K}_k \underline{H}_k \right) \hat{x}_k(-) + \underline{K}_k z_k, \quad (3.120)$$

ou, equivalentemente,

$$\hat{x}_k(+) = \hat{x}_k(-) + \underline{K}_k \left[z_k - \underline{H}_k \hat{x}_k(-) \right]. \quad (3.121)$$

O erro estimado correspondente resulta em

$$\Delta \underline{x}_k (+) = \left(\underline{I} - \underline{K}_k \underline{H}_k \right) \Delta \underline{x}_k (-) + \underline{K}_k \underline{v}_k. \quad (3.122)$$

A relação (3.122) é importante para determinar a matriz de ganho $\underline{K}_k$, que é obtida através da minimização da matriz de covariância do erro $\underline{P}_k$ quando uma medida é processada.

3.3.1 - Matriz Covariância do Erro

A medida de dependência (espalhamento) entre duas variáveis aleatórias é chamada de covariância. A relação covariância-correlação faz parte da construção dos filtro lineares ótimos. A covariância do erro $\underline{P}_k$ é a medida do espalhamento de $\Delta \underline{x}$, representada pela expressão

$$\underline{P}_k (+) = E \left\{ \Delta \underline{x}_k (+) \Delta \underline{x}_k^T (+) \right\}. \quad (3.123)$$

Substituindo a equação (3.122) em (3.123) obtemos

$$\underline{P}_k (+) = E \left\{ \left(\underline{I} - \underline{K}_k \underline{H}_k \right) \Delta \underline{x}_k (-) \left[\Delta \underline{x}_k^T (-) \left(\underline{I} - \underline{K}_k \underline{H}_k \right)^T + \underline{v}_k^T \underline{K}_k^T \right] + \underline{K}_k \underline{v}_k \left[\Delta \underline{x}_k^T (-) \left(\underline{I} - \underline{K}_k \underline{H}_k \right)^T + \underline{v}_k^T \underline{K}_k^T \right] \right\}. \quad (3.124)$$

Por definição temos que:

$$\underline{P}_k (-) = E \left\{ \Delta \underline{x}_k (-) \Delta \underline{x}_k^T (-) \right\}, \quad (3.125)$$

$$\underline{R}_k = E \left\{ \underline{v}_k \underline{v}_k^T \right\}. \quad (3.126)$$

Como o erro é admitido como não correlacionável ao ruído

$$E \left\{ \Delta \underline{x}_k (-) \underline{v}_k^T \right\} = E \left\{ \underline{v}_k \Delta \underline{x}_k^T (-) \right\} = 0, \quad (3.127)$$

Substituindo (3.125), (3.126) e (3.127) em (3.124) obtemos

$$\underline{P}_k (+) = \left(\underline{I} - \underline{K}_k \underline{H}_k \right) \underline{P}_k (-) \left(\underline{I} - \underline{K}_k \underline{H}_k \right)^T + \underline{K}_k \underline{R}_k \underline{K}_k^T. \quad (3.128)$$

Esta relação será utilizada na próxima seção para determinarmos a matriz de ganho $\underline{K}_k$. Além disso, uma relação simplificada da matriz de ganho da covariância do erro $\underline{P}_k$.

Na Figura 3.1, seção 3.22, temos representado a relação entre $\underline{P}_k$, $\underline{P}_k (+)$ e $\underline{P}_k (-)$.

3.3.2 - Matriz Ganho

Nesta seção temos como objetivo determinar a matriz de ganho $\underline{K}_k$ e a forma simplificada da matriz de covariância do erro $\underline{P}_k$ atualizado. O critério para se determinar a matriz de ganho $\underline{K}_k$ é a minimização da norma do vetor dos desvios dado por

$$J_k = E \left\{ \Delta \underline{x}_k^T (+) \underline{S} \Delta \underline{x}_k (+) \right\}, \quad (3.129)$$

que corresponde aos elementos da matriz de covariância do erro $\underline{P}_k (+)$, e onde a matriz qualquer $\underline{S}$ é positiva semi-definida. Escolhendo $\underline{S} = \underline{I}$, a equação (3.129) resulta em

$$J_k = \text{traço} \left[\underline{P}_k (+) \right]. \quad (3.130)$$

Para determinar o valor $\underline{K}_k$ é necessário minimizar o comprimento do vetor erro estimado calculando a derivada parcial de J_k em relação a $\underline{K}_k$ e igualar a zero, isto é

$$\frac{\partial J_k}{\partial \underline{K}_k} = 0. \quad (3.131)$$

Usando a relação

$$\frac{\partial}{\partial \underline{A}} [\text{traço} (\underline{A} \underline{B} \underline{A}^T)] = 2 \underline{B}, \quad (3.132)$$

obtemos

$$-2 \left(\underline{I} - \underline{K} \underline{H} \right) \underline{P}_k (-) \underline{H}_k^T + 2 \underline{K} \underline{R}_k = 0, \quad (3.133)$$

e o resultado

$$\underline{K}_k = \underline{P}_k (-) \underline{H}_k^T \left[\underline{H}_k \underline{P}_k (-) \underline{H}_k^T + \underline{R}_k \right]^{-1}, \quad (3.134)$$

para a chamada de matriz de ganho de Kalman desejada.

Substituindo (3.134) em (3.128) resulta em

$$\underline{P}_k (+) = \underline{P}_k (-) - \underline{P}_k (-) \underline{H}_k^T \left[\underline{H}_k \underline{P}_k (-) \underline{H}_k^T + \underline{R}_k \right]^{-1} \underline{H}_k \underline{P}_k (-), \quad (3.135)$$

ou, substituindo o valor de $\underline{K}_k$ da expressão (3.134) na equação (3.135) obtemos

$$\underline{P}_k (+) = \left[\underline{I} - \underline{K}_k \underline{H}_k \right] \underline{P}_k (-), \quad (3.136)$$

que é a forma simplificada da matriz de covariância do erro atualizada.

Podemos concluir esta seção dizendo que descrevemos as estimativas da descontinuidade da variável de estado e da matriz covariância do erro ao redor do ponto temporal da medida. A extrapolação entre os pontos de medidas a esquerda e a direita são dadas pela expressões:

$$\hat{\underline{x}}_{k+1} (-) = \underline{\Phi}_k \hat{\underline{x}}_k (+), \quad (3.137)$$

$$\underline{P}_{k+1} (-) = \underline{\Phi}_k \underline{P}_k (+) \underline{\Phi}_k^T + \underline{Q}_k. \quad (3.138)$$

Estas equações estão sumarizadas na Tabela 3.2.

3.3.3 - Transformação à Forma Contínua

A transformação das equações do filtro de Kalman da forma discretizada para a contínua é realizada e descrita a seguir. Temos como intenção fechar o ciclo de formulação da transformação discretizado-contínuo e contínuo-discretizado, com o objetivo de analisar e entender se a formulação da solução do problema original existe, se ela é única e se ela é estável, ou melhor, se ela é consistente.

Por definições anteriores, temos que as equações dinâmicas na forma discretizada, são dadas por

$$\dot{\underline{x}}_k = \underline{F}_k \underline{x}_k + \underline{G}_k \underline{w}_k, \quad (\text{sistema}) \quad (3.139)$$

$$\underline{z}_k = \underline{H}_k \underline{x}_k + \underline{v}_k, \quad (\text{medidas}) \quad (3.140)$$

onde $\underline{w}_k$ e $\underline{v}_k$ são processos branco média zero e matrizes de densidade espectrais $\underline{Q}_k$ e

$\underline{R}_k$, respectivamente. As propriedades a serem observadas são de equivalência válidas no

limite quando $t_k - t_{k-1} = \Delta t \rightarrow 0$, demonstradas na seção (3.2.1) e que são:

$$\underline{\Phi}_k \rightarrow \underline{I} + \underline{F}(t)\Delta t, \quad (3.141)$$

$$\underline{Q}_k \rightarrow \underline{G}(t)\underline{Q}(t)\underline{G}^T(t)\Delta t, \quad (3.142)$$

$$\underline{R}_k \rightarrow \frac{\underline{R}}{\Delta t}. \quad (3.143)$$

A matriz de covariância do erro foi definida por

$$\underline{P}_{k+1}(-) = \underline{\Phi}_k \underline{P}_k(+) \underline{\Phi}_k^T + \underline{Q}_K. \quad (3.144)$$

Substituindo as relações (3.141), (3.142) em (3.143) obtemos

$$\underline{P}_{k+1}(-) = \left[\underline{I} + \underline{F}(t)\Delta t \right] \underline{P}_k(+) \left[\underline{I} + \underline{F}(t)\Delta t \right]^T + \underline{G}(t)\underline{Q}(t)\underline{G}^T(t)\Delta t. \quad (3.145)$$

Desenvolvendo o produto e colocando Δt em evidência chegamos ao resultado intermediário

$$\underline{P}_{k+1}(-) = \underline{P}_k(+) + \left[\underline{F}(t)\underline{P}_k(+) + \underline{P}_k(+)\underline{F}^T(t) + \underline{G}(t)\underline{Q}(t)\underline{G}^T(t) \right] \Delta t + O(\Delta t^2), \quad (3.146)$$

onde $O(\Delta t^2)$ refere-se aos termos de segunda ordem e que são desprezados. Reescrevendo a equação (3.136) da seção (3.3.2) definida como

$$\underline{P}_k(+) = \left[\underline{I} - \underline{K} \underline{H} \right] \underline{P}_k(-), \quad (3.147)$$

e substituindo-a na equação (3.146), reagrupando os termos, e calculando o limite para $\Delta t \rightarrow 0$, obtemos

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\underline{P}_{k+1}(-) - \underline{P}_k(-)}{\Delta t} &= \underline{F}(t)\underline{P}_k(-) + \underline{P}_k(-)\underline{F}^T(t) + \\ &+ \underline{G}(t)\underline{Q}(t)\underline{G}^T(t) + \frac{1}{\Delta t} \underline{K} \underline{H} \underline{P}_k(-) - \underline{F}(t)\underline{K}(t)\Delta t \underline{H} \underline{P}_k(-) - \underline{K}(t)\Delta t \underline{H} \underline{P}_k(-)\underline{F}^T(t). \end{aligned} \quad (3.148)$$

A partir da equação (3.134) podemos escrever o termo $\frac{1}{\Delta t} \underline{K}$ na forma

$$\frac{1}{\Delta t} \underline{K} = \frac{1}{\Delta t} \underline{P}_k(-) \underline{H}^T \left[\underline{H} \underline{P}_k(-) \underline{H}^T + \underline{R} \right]^{-1}, \quad (3.149)$$

ou, reagrupando, na forma

$$\frac{1}{\Delta t} \underline{K} = \underline{P}_k(-) \underline{H}^T \left[\underline{H} \underline{P}_k(-) \underline{H}^T \Delta t + \underline{R} \Delta t \right]^{-1}. \quad (3.150)$$

Como $\underline{R}_k \rightarrow R/\Delta t$ segundo (3.143), então,

$$\frac{1}{\Delta t} \underline{K} = \underline{P}_k(-) \underline{H}^T \left[\underline{H} \underline{P}_k(-) \underline{H}^T \Delta t + \underline{R} \right]^{-1}. \quad (3.151)$$

No limite $\Delta t \rightarrow 0$, obtemos o resultado

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \underline{\underline{K}}_k = \underline{\underline{P}}(t) \underline{\underline{H}}^T(t) \underline{\underline{R}}^{-1}(t). \quad (3.152)$$

Com isto a equação (3.148) é também reescrita como

$$\dot{\underline{\underline{P}}}(t) = \underline{\underline{F}}(t) \underline{\underline{P}}(t) + \underline{\underline{P}}(t) \underline{\underline{F}}^T(t) + \underline{\underline{G}}(t) \underline{\underline{Q}}(t) \underline{\underline{G}}^T(t) - \underline{\underline{P}}(t) \underline{\underline{H}}^T(t) \underline{\underline{R}}^{-1}(t) \underline{\underline{H}}(t) \underline{\underline{P}}(t). \quad (3.153)$$

Esta equação é não linear e chamada de equação diferencial matricial de Ricatti, como visto na seção (3.1.5), equação (3.72).

Partimos agora a transformar a equação (3.111) para a forma contínua, e com isto temos definidas um conjunto de equações diferenciais do filtro de Kalman na forma contínua. Substituindo na equação (3.111) a expressão

$$\hat{\underline{\underline{x}}}_{k+1}(-) = \underline{\underline{\Phi}}_k \hat{\underline{\underline{x}}}_k(+), \quad (3.154)$$

ela resulta em

$$\hat{\underline{\underline{x}}}_{k+1}(+) = \underline{\underline{\Phi}}_k \hat{\underline{\underline{x}}}_k(+) + \underline{\underline{K}}_k \left[\underline{\underline{z}}_k - \underline{\underline{H}}_k \underline{\underline{\Phi}}_k \hat{\underline{\underline{x}}}_k(+) \right]. \quad (3.155)$$

Substituindo $\underline{\underline{\Phi}}_k$ por $\underline{\underline{I}} + \underline{\underline{F}}(t) \Delta t$ e $\underline{\underline{K}}_k$ por $\underline{\underline{P}}(t) \underline{\underline{H}}^T(t) \underline{\underline{R}}^{-1}(t) \Delta t$ obtemos

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\hat{\underline{\underline{x}}}_{k+1}(+) - \hat{\underline{\underline{x}}}_k(+)}{\Delta t} = \underline{\underline{F}}(t) \hat{\underline{\underline{x}}}_k(+) + \underline{\underline{P}}(t) \underline{\underline{H}}^T(t) \underline{\underline{R}}^{-1}(t) \left[\underline{\underline{z}}_k - \underline{\underline{H}}_k \hat{\underline{\underline{x}}}_k(+) \right] + o(\Delta t). \quad (3.156)$$

No limite $\Delta t \rightarrow 0$ temos que

$$\dot{\hat{\underline{\underline{x}}}}(t) = \underline{\underline{F}}(t) \hat{\underline{\underline{x}}}(t) + \underline{\underline{P}}(t) \underline{\underline{H}}^T(t) \underline{\underline{R}}^{-1}(t) \left[\underline{\underline{z}}(t) - \underline{\underline{H}}(t) \hat{\underline{\underline{x}}}(t) \right]. \quad (3.157)$$

Esta é a equação diferencial da estimativa do estado do filtro de Kalman na forma contínua, sumarizadas na Tabela 3.1.

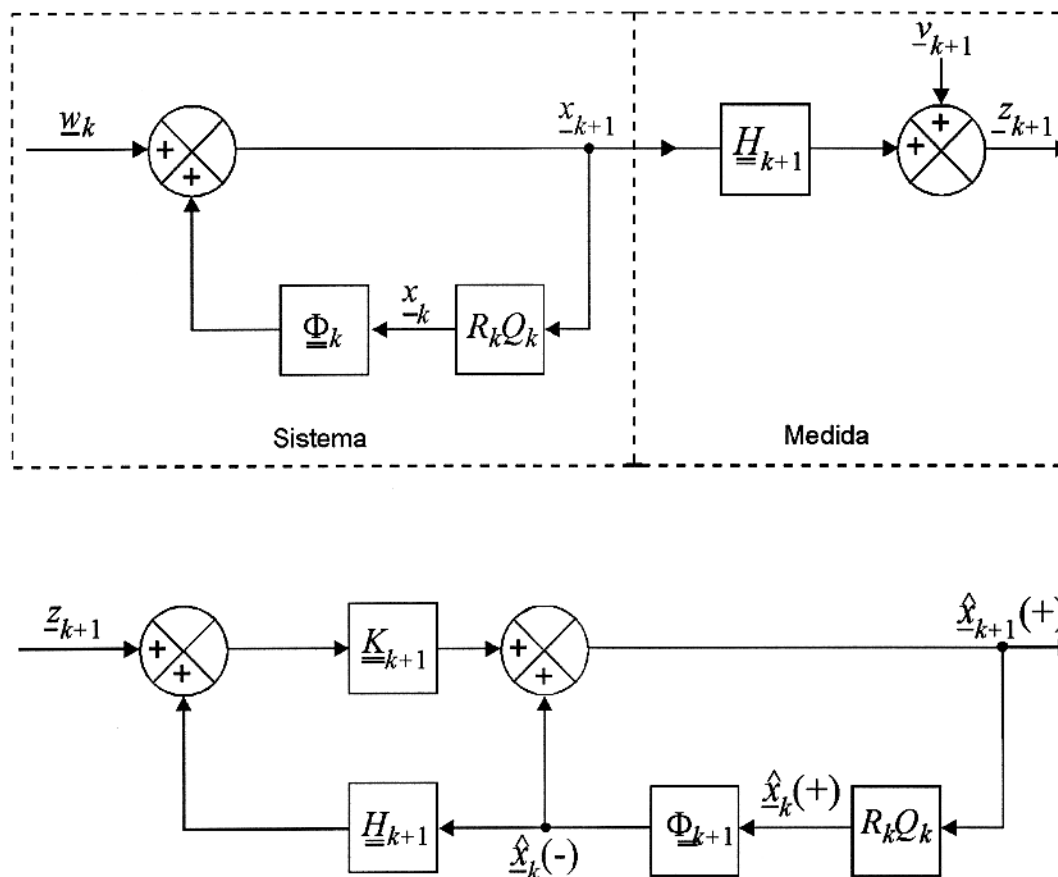


Figura 3.2 – Representação do processo do filtro de Kalman na forma de diagrama de blocos onde $Q_k = C\{w_k\}$ e $E\{w_k\} = 0$, $R_k = C\{v_k\}$ e $E\{v_k\} = 0$. A parte superior mostra os modelos matemáticos do sistema de estado e de medida propostos. A parte inferior mostra o processo de estimativa do sinal desejado em meio a ruído. A parte superior é a geração do sinal e a inferior é a de filtragem.

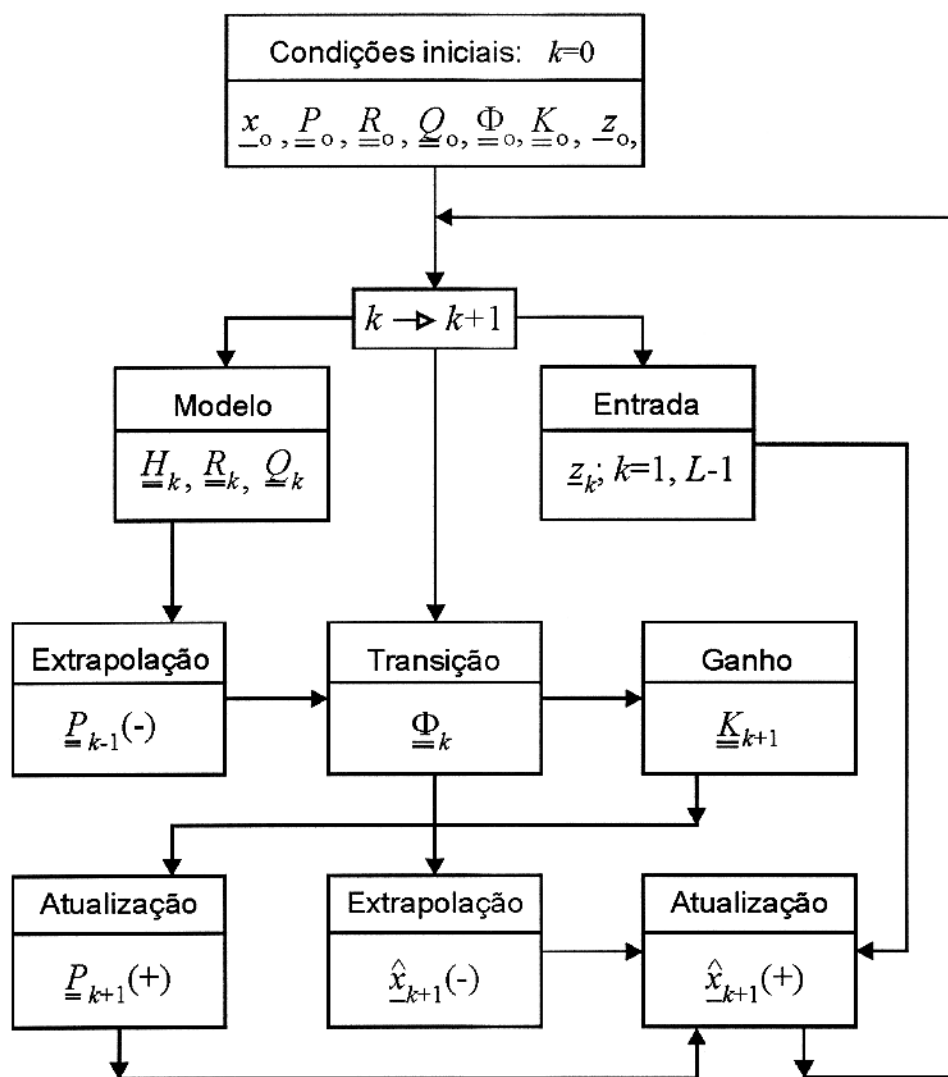


Figura 3.3 - Diagrama de bloco do fluxograma computacional do processo de filtragem segundo as equações de Ricatti e ganho, mostrando as etapas necessárias para o cálculo da estimativa do estado. A condição inicial para cada evento é definido em $k = 0$, iniciando nova contagem de k .

4 - O PROBLEMA GEOFÍSICO

Neste capítulo faremos a aplicação do filtro de Kalman através do exemplo esboçado na Figura 4.1. Nela temos uma função contínua por partes, que serve para representar medidas geofísicas gerais ideais em poço, entre elas as de sísmica onde se deseja estudar a função refletividade do meio representada por descontinuidades nos tempos intervalares. Neste exemplo, desejamos recuperar o sinal embutido em ruído considerado como a primeira etapa na busca da função matemática que descreve o meio geológico. O sinal $x(t)$ é medido na presença de ruído, $v(t)$, que tem média zero e variância σ_a^2 .

O presente modelo é baseado no modelo convolucional, onde o meio geológico é representado pela função refletividade aleatória $s(t)$, que por convolução com a função fonte do tipo degrau-simples, $u(t)$, determinística, gera a mensagem $x(t)$, e a ela adicionamos um ruído aleatório $v(t)$.

Um modelo conveniente para representar a função refletividade $s(t)$ é o Poisson-Gaussiano, descrito pelas seguintes propriedades:

1. A subsuperfície é relativamente horizontal, perfeitamente elástica, e formada por camadas homogêneas e isotrópicas.
2. A diferença da impedância acústica nas interfaces entre as camadas é tal que os coeficientes de reflexão correspondentes são não correlacionáveis, média zero, e as amplitudes tem distribuição Gaussiana.
3. Estes coeficientes de reflexão são suficientemente pequenos de modo que reflexões múltiplas e efeitos de transmissão podem ser ignorados.

Obviamente, estas considerações não são totalmente válidas; entretanto, elas são relativamente fortes e não são incomuns na geofísica, SILVIA & ROBINSON (1979).

A função $s(t)$ consiste de uma distribuição de impulsos que pode ser descrita por

$$s(t) = \sum_{i=0}^{+\infty} a_i \delta(t - \tau_i), \quad (4.1)$$

onde a_i e τ_i , refere-se a amplitude e localização de cada impulso, respectivamente. A partir das considerações citadas podemos admitir a_i como variáveis aleatórias com distribuição Gaussiana com média zero, $\mu = 0$ e variância $\sigma^2 = \sigma_a^2$, e τ_i é descrito como processo de Poisson de parâmetro λ , como mostra a Figura 4.1, MENDEL, (1983).

As equações que representam o modelo convolucional são :

$$x(t) = s(t) * u(t), \quad (4.2)$$

$$z(t) = s(t) * u(t) + v(t). \quad (4.3)$$

Este modelo normalizado satisfaz claramente o teorema da decomposição de Wold. Com base neste teorema a componente ruído $v(t)$ pode ser escrita como

$$v(t) = s(t) * \mu(t) + \eta(t), \quad (4.4)$$

onde $\mu(t)$ representa uma componente de ruído geológico relacionado a distribuição de $s(t)$, e $\eta(t)$ são ruídos aditivos considerados como relacionados as medidas e a outros efeitos locais e externos.

A partir do que foi exposto acima, temos então estabelecidas as propriedades estocásticas do modelo descrito, que são sumarizadas abaixo:

$$E\{x(t)\} = 0, \quad \phi_{xx}(t_1, t_2) = E\{x(t_1)x(t_2)\} = \lambda\sigma_a^2\delta(t_1 - t_2), \quad (4.5, 4.6)$$

$$E\{w(t)\} = 0, \quad \phi_{ww}(t_1, t_2) = E\{w(t_1)w(t_2)\} = \lambda\sigma_a^2\delta(t_1 - t_2), \quad (4.7, 4.8)$$

$$E\{v(t)\} = 0, \quad \phi_{vv}(t_1, t_2) = E\{v(t_1)v(t_2)\} = \sigma_v^2 \delta(t_1 - t_2). \quad (4.9, 4.10)$$

Comparando as premissas (3.4), (3.6) e (3.8) com $t = t_1$, $\tau = t_2$ com as (4.6, 4.8 e 4.10) obtemos

$$\underline{\underline{Q}}(t) = Q = \lambda \sigma_a^2, \quad (4.11)$$

$$\underline{\underline{R}}(t) = R = \sigma_r^2. \quad (4.12)$$

Para a solução do problema específico aqui posto para estudo, é necessário definirmos as variáveis de estado, de acordo com o desenvolvimento na seção (2.3.1), equações (2.14) e (2.15) para obtermos (2.17) e (2.18). Estas variáveis são selecionadas na forma:

$$x_1(t) = x(t) = y(t) \quad x_2(t) = \dot{x}_1(t) = x(t) = w(t). \quad (4.13, 4.14)$$

As equações de estado são dadas por:

$$\dot{\underline{\underline{x}}}(t) = \underline{\underline{F}}(t)\underline{\underline{x}}(t) + \underline{\underline{G}}(t)\underline{\underline{w}}(t), \quad (\text{sistema}) \quad (4.15)$$

$$\underline{\underline{y}}(t) = \underline{\underline{H}}(t)\underline{\underline{x}}(t). \quad (\text{saída}) \quad (4.16)$$

Comparando as equações (4.15, 4.16) e as (4.13, 4.14) encontramos que:

$$\left. \begin{array}{l} \dot{x}_1 = 0 + w(t) \\ y(t) = x_1(t) \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{\underline{F}} = 0; \underline{\underline{G}} = 1; \underline{\underline{H}} = 1. \quad (4.17, 4.18, 4.19)$$

Substituindo estas relações acima na equação diferencial de Ricatti (3.73) para a covariância obtemos

$$\frac{d\underline{\underline{P}}(t)}{dt} = -\underline{\underline{P}}(t)\underline{\underline{R}}^{-1}(t)\underline{\underline{P}}(t) + \underline{\underline{Q}}(t). \quad (4.20)$$

A equação do ganho (3.47) resulta em

$$\underline{\underline{K}}(t) = \underline{\underline{P}}(t)\underline{\underline{R}}^{-1}(t). \quad (4.21)$$

Transportando as equações (4.11, 4.12) para (4.20) e (4.21) e reagrupando os termos, obtemos a equação diferencial da covariância do erro na forma escalar dada por

$$\frac{dp(t)}{dt} = -\frac{p^2(t)}{\sigma_v^2} + \lambda \sigma_a^2, \quad (4.22)$$

e o ganho na forma escalar por

$$K(t) = \frac{p(t)}{\sigma_v^2}. \quad (4.23)$$

O Próximo passo é encontrar a solução fechada da equação de Ricatti na forma geral para ser aplicada nas equações (4.22) e (4.23). Com este resultado, podemos obter a equação diferencial da estimativa do estado do filtro de Kalman na forma escalar.

4.2 - SOLUÇÃO FECHADA DA EQUAÇÃO DE RICATTI E DA ESTIMATIVA

Nesta seção procuramos uma solução para a equação diferencial (4.22), com a finalidade de obtermos a estimativa do filtro de Kalman na forma escalar. Partimos da forma geral da equação diferencial de Ricatti apresentada por LEWIS (1986),

$$\dot{p}(t) = -\frac{h^2}{r} p^2(t) + 2fp(t) + q, \quad (4.24)$$

onde h, r, f e q são valores constantes na forma escalar correspondente na forma vetorial à $\underline{H}, \underline{R}, \underline{F}$ e $\underline{Q}$, respectivamente, definidos a partir do modelo em estudo. Fazendo algumas mudanças em (4.24) obtemos

$$dp(t) = \left(-\frac{h^2}{r} p^2(t) + 2fp(t) + q \right) dt, \quad (4.25)$$

$$\frac{dp(t)}{-\frac{h^2}{r} p^2(t) + 2fp(t) + q} = dt, \quad (4.26)$$

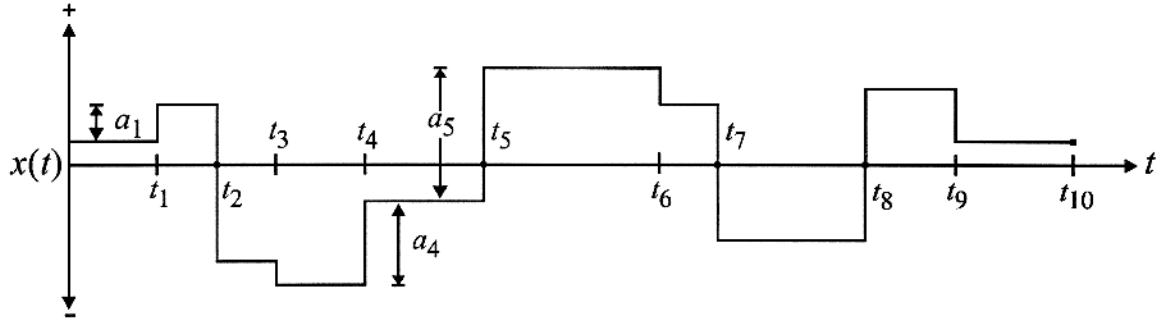


Figura 4.1 - Forma de onda quadrada do processo aleatório, a ser recuperada em meio a ruído através do processo de Kalman. Este sinal é considerado como a convolução de uma função fonte do tipo degrau-simples determinística, $u(t)$, com função refletividade aleatória, $s(t)$. Ela serve para representar medidas ideais geofísicas, como por exemplo medidas em poço, incluindo o sônico, com a distribuição de densidades e velocidades intervalares

Integrando a expressão (4.26) a partir dos limites inferiores $p(0) = p_0$ e $t(0) = 0$, como mostra a Figura 4.2, obtemos

$$\int_{p_0}^{p(t)} \frac{dp}{(h^2/r)p^2(t) - 2fp(t) - q} = \int_0^t dt \quad (4.27)$$

Usando a tabela de integrais, PISKUNOV (1977), temos para resultado da integral definida

$$\left[\frac{\left(\frac{h^2}{r} \right) p(t) - f - \beta}{\left(\frac{h^2}{r} \right) p(t) - f + \beta} \right] \left[\frac{\left(\frac{h^2}{r} \right) p_0 - f + \beta}{\left(\frac{h^2}{r} \right) p_0 - f - \beta} \right] = e^{-2\beta t}, \quad (4.28)$$

onde

$$\beta = \sqrt{f^2 + h^2(q/r)}. \quad (4.29)$$

A próxima simplificação algébrica é obtida definindo:

$$p_1 = \frac{r}{h^2}(\beta - f), \quad (4.30)$$

e

$$p_2 = \frac{r}{h^2}(\beta + f). \quad (4.31)$$

A solução geral da equação diferencial de Riccati na forma presente é reescrita como

$$p(t) = p_2 + \frac{p_1 + p_2}{\left[\frac{(p_0 + p_1)}{(p_0 - p_2)} \right] e^{2\beta t} - 1} \quad (4.32)$$

Para o problema em pauta, ou seja, a solução da equação (4.22), começamos comparando-a com a solução geral dada pela equação (4.24), e as seguintes relações são óbvias: $a = 0$ e $h = 1$. Substituindo-as em (4.29), (4.30) e (4.31) encontramos que:

$$p_1 = p_2 = r\sqrt{qr}, \quad (4.33)$$

$$\beta = \sqrt{\frac{q}{r}}. \quad (4.34)$$

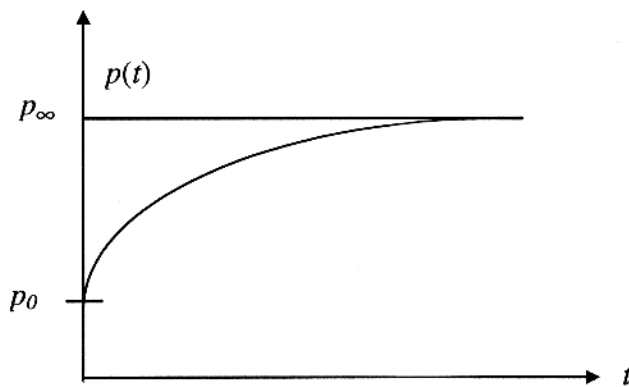


Figura 4.2 – Forma de variação da função $p(t)$, que no problema em estudo corresponde à covariância do erro para sistema de primeira ordem.

A equação (4.32) resulta em

$$p(t) = \sqrt{rq} + \frac{2\sqrt{rq}}{\left[\frac{(p_0 + \sqrt{qr})}{(p_0 - \sqrt{qr})} \right] e^{2\sqrt{\frac{q}{r}}t} - 1}. \quad (4.35)$$

Considerando como condição inicial $p_0 = 0$, para que possamos representá-la na condição de uma tangente hiperbólica simétrica, segundo BAYLES & BRIGHAM (1970), a equação (4.35) simplifica em

$$p(t) = \sqrt{rq} - \frac{2\sqrt{rq}}{e^{2\sqrt{\frac{q}{r}}t} + 1}. \quad (4.36)$$

Reagrupando os termos, podemos reescrever (4.36) na forma

$$p(t) = -\sqrt{rq} \left(\frac{1 - e^{2\sqrt{\frac{q}{r}}t}}{1 + e^{2\sqrt{\frac{q}{r}}t}} \right). \quad (4.37)$$

Comparando (4.22) com (4.24) concluímos que

$$r = \sigma_r^2 \quad \text{e} \quad q = \lambda \sigma_a^2. \quad (4.38)$$

Substituindo-as em (4.37) resulta em

$$p(t) = -\sqrt{\sigma_r^2 \lambda \sigma_a^2} \left(\frac{1 - \exp \left[2\sqrt{\frac{\lambda \sigma_a^2}{\sigma_r^2}} t \right]}{1 + \exp \left[2\sqrt{\frac{\lambda \sigma_a^2}{\sigma_r^2}} t \right]} \right). \quad (4.39)$$

Levando a equação (4.39) até (4.23) e reagrupando os termos obtemos

$$K(t) = -\sqrt{\frac{\lambda\sigma_a^2}{\sigma_r^2}} \left(\frac{1 - \exp\left[2\sqrt{\frac{\lambda\sigma_a^2}{\sigma_r^2}}t\right]}{1 + \exp\left[2\sqrt{\frac{\lambda\sigma_a^2}{\sigma_r^2}}t\right]} \right). \quad (4.40)$$

Neste ponto, chegamos a solução na forma fechada para a equação de Ricatti com auxílio da função tangente hiperbólica, e dada por

$$K(t) = \sqrt{\gamma} \left(\frac{1 - e^{2\sqrt{\gamma}t}}{1 + e^{2\sqrt{\gamma}t}} \right), \quad \gamma = \lambda \frac{\sigma_a^2}{\sigma_r^2}. \quad (4.41)$$

Substituindo (4.41), (4.17) e (4.19) em (3.46) obtemos a equação diferencial da estimativa do estado do filtro de Kalman na forma escalar desejada, dada por

$$\frac{d\hat{x}(t)}{dt} = -\sqrt{\gamma} \left[\frac{1 - \exp[-2\sqrt{\gamma}t]}{1 + \exp[-2\sqrt{\gamma}t]} \right] \hat{x}(t) + \sqrt{\gamma} \left[\frac{1 - \exp[-2\sqrt{\gamma}t]}{1 + \exp[-2\sqrt{\gamma}t]} \right] z(t). \quad (4.42)$$

4.3 - SOLUÇÃO NUMÉRICA DA EQUAÇÃO DA ESTIMATIVA DE KALMAN

O objetivo desta seção é a integração numérica da equação (4.41) com o auxílio do método do tipo Runge-Kutta, e desenvolver o algoritmo computacional conveniente para usar em dados sintéticos e reais.

4.3.1 - Método Runge-Kutta

Fazemos inicialmente uma descrição deste método de uma forma geral, para em seguida aplicá-lo na equação diferencial (4.42).

O método de Runge-Kutta de segunda ordem, BARROSO et al (1987), apresenta duas soluções que são descritas abaixo:

$$(a) \quad \hat{x}_{j+1} = \hat{x}_j + \frac{\Delta t}{2}(C_1 + C_2), \quad (j = 0, 1, 2, \dots, M-1), \quad (4.43)$$

onde

$$C_1 = F(z_j, \hat{x}_j), \quad (4.44)$$

$$C_2 = f(z_j + \Delta t, \hat{x}_j + \Delta t F(z_j, \hat{x}_j)). \quad (4.45)$$

$$(b) \quad \hat{x}_{j+1} = \hat{x}_j + \Delta t C_2, \quad (j = 0, 1, 2, \dots, M-1), \quad (4.46)$$

onde

$$C_1 = F(z_j, \hat{x}_j), \quad (4.47)$$

$$C_2 = F(z_j + \frac{\Delta t}{2}, \hat{x}_j + \frac{\Delta t}{2} C_1). \quad (4.48)$$

Fazemos agora a comparação dos dois métodos aplicados a equação diferencial (4.42) reescrita na forma

$$\frac{d\hat{x}(t)}{dt} = -\sqrt{\gamma}K(t)\hat{x}(t) + \sqrt{\gamma}K(t)z(t). \quad (4.49)$$

Para a primeira solução temos as seguintes relações:

$$\hat{x}_{n+1} = \hat{x}_n + \frac{\Delta t}{2}(C_1 + C_2), \quad (n = 0, 1, 2, \dots, M-1), \quad (4.50)$$

onde

$$C_1 = \sqrt{\gamma}K_n[z_n - \hat{x}_n], \quad (4.51)$$

$$C_2 = \sqrt{\gamma}K_n[(z_n + \Delta t) - (\hat{x}_n + \Delta t(C_1))]. \quad (4.52)$$

Para a outra solução temos que

$$\hat{x}_{n+1} = x_n + \Delta t C_2, \quad (n = 0, 1, 2, \dots, M-1), \quad (4.53)$$

onde

$$C_1 = \sqrt{\gamma} K_n [z_n - \hat{x}_n] \quad (4.54)$$

$$C_2 = \sqrt{\gamma} K_n \left[\left(z_n + \frac{\Delta t}{2} \right) - \left(\hat{x}_n + \frac{\Delta t}{2} C_1 \right) \right], \quad (4.55)$$

Δt representa o espaçamento uniforme da amostra no processo de integração numérica. Com as expressões dos dois métodos definidas, passamos a elaborar o algoritmo para testar o filtro matemático em dados sintéticos e reais.

Foram também desenvolvidos algoritmos para os métodos de Runge-Kutta de terceira e quarta ordem. Observamos que a diferença entre estes e o método de segunda ordem é muito pequena e imperceptível na escala visual conveniente para interpretação de sinais. Por este motivo decidimos apresentar apenas o método de resolução numérica de segunda ordem.

4.4 - RESULTADOS OBTIDOS

Nesta seção, descrevemos de que forma obtivemos os dados sintéticos e os dados reais, e os resultados obtidos após a aplicação do filtro de resolução. Para melhor entendimento dividimos a seção em duas subseções seguir.

4.4.1 - Dados Sintéticos

O sismograma sintético (perfilagem simulada) foi obtido a partir da convolução da função meio, $s(t)$, com a função degrau simples, $u(t)$, gerando a onda quadrada (perfil ideal), $x(t)$, tendo a ela sido acrescentado um ruído aleatório $v(t)$.

Para os diversos experimentos realizados, escolhemos para apresentação apenas dois tipos de ondas quadradas e dois tipos de ruído. Combinando-os, geramos três perfilagens simuladas e distintas, como mostra as Figuras 4.4, 4.7 e 4.10. Na Figura 4.4 temos uma perfilagem simulada com a razão sinal/ruído $S/N = 5,73$, na Figura 4.7 $S/N = 44,63$ e na Figura 4.10 $S/N = 5,73$. Observamos que na Figura 4.10 a influência do ruído é maior, por este motivo quando o filtro é aplicado há maior perda na resolução do sinal, o que é coerente.

Apresentamos na Figura 4.15 a correlação cruzada estocástica entre o sinal $z(t)$ e o ruído $v(t)$, mostrando que o nível de correlação entre ambos é muito pequeno, embora a teoria requer que seja zero (equação 3.8). As autocorrelações estocásticas da mensagem $x(t)$ e do ruído $v(t)$, demonstram que o ruído se aproxima ao exigido na teoria (equação 3.6 e 4.10).

Nestes procedimentos o que se ganha na resolução do processo não estacionário se perde na operação prática, uma vez que é necessário definir cada intervalo das janelas sequenciais de aplicação do filtro ($t_0 \leq \tau \leq t$) para a detecção dos eventos. Consideramos t_0 e t como posições imediatamente anterior e posterior à informação da presença dos eventos representados pelos degraus da onda quadrada, como mostra a Figura 4.3. A discretização é da forma $t = n\Delta t$. A profundidade é relacionada ao índice n , sendo Δt uniforme e pode representar qualquer unidade do SI ou seja; metro, quilômetro, centímetro, segundo, etc...

Baseado nas considerações teóricas para a aplicação do filtro de Kalman, desenvolvemos um algoritmo computacional que foi testado em várias situações. No entanto, separamos alguns resultados que são mostrados nas Figuras 4.5, 4.6, 4.8 4.9, 4.11 e 4.12, onde γ é o parâmetro de Poisson-Gaussiano que determina a qualidade do filtro, e Δt é o espaçamento da amostragem.

Analisando os resultados obtidos, observamos que o filtro é muito versátil e tem boa aplicabilidade para as situações seleccionadas de não estacionariedade, apresentando uma melhora

na resolução quanto menor for o espaçamento da amostragem, ou seja $\Delta t \rightarrow 0$, como mostra as Figuras 4.6, 4.9 e 4.11. Em todos os resultados obtidos podemos notar a influência da resposta transiente do operador do filtro caracterizado pela forma simétrica da tangente hiperbólica.

A aplicação do filtro para sinais com muito ruído, ou seja, $S/N = 5.73$, Figura 4.10, é bem aceitável, como mostra as Figuras 4.11 e 4.12. Com isto, podemos concluir que este processo de filtragem não é limitado por valores relativos da relação S/N , o que é coerente. O valor da razão sinal/ruído é calculada a partir da expressão:

$$\frac{S}{R} = \frac{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (v_i - \bar{v})^2} \quad (4.56)$$

As Figura 4.16 (a) e (b) mostram as formas das funções transferência no domínio do tempo $h'(t)$ e da frequência, $H'(\omega)$, calculadas através da divisão da transformada de Fourier da saída final $\hat{X}(\omega)$, pela entrada inicial, $Z(\omega)$, com o objetivo de comparação. A função transferência propriamente dita, esta relacionada ao operador em cada janela (ver Figura 4.3).

Após a análise sobre dados sintéticos, com os exemplos selecionados, passamos agora a aplicar este processo de filtragem de dados reais.

4.4.2 - Dados Reais

Para verificar a operacionalidade e a resolução do método de Kalman sobre dados reais, utilizamos um perfil de volume de argila obtido em um poço do lago Maracaibo, Venezuela, com mostra a Figura 6.1.1.

A primeira etapa constou da definição inicial de cada intervalo das janelas sequenciais sem superposição para a aplicação do filtro ($t_0 \leq \tau \leq T$) em pontos onde a variância é considerada conhecida. O intervalo da amostragem foi fixado em $\Delta t = 0,1$. A variação do parâmetro γ do modelo Poisson-Gaussiano foi entre 10 e 20.

O dado real disponível e utilizado não se apresenta como tipicamente muito ruidoso, o que impede de verificarmos uma melhor resolução do filtro, embora tenhamos obtido um resultado satisfatório demonstradas através da suavização do ruído em todo intervalo amostrado como é visto nas Figuras 4.13.b e 4.14.b.

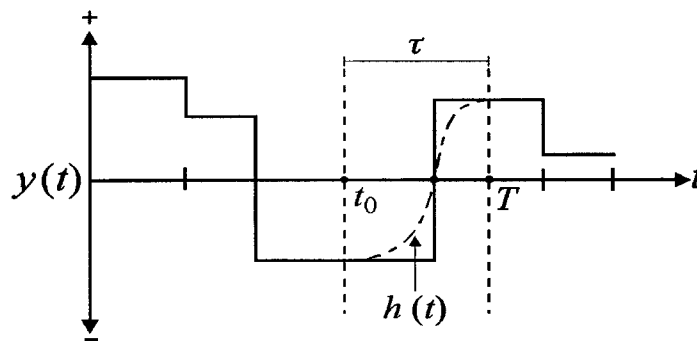


Figura 4.3 - Ilustração da janela de aplicação do filtro ($t_0 \leq \tau \leq T$) e da forma hiperbólica do operador linear $h(t)$ para detecção dos eventos representados pelos degraus-simples. A variável t pode representar tempo (se for o caso de função temporal) ou profundidade (para o caso de funções espaciais) como no caso presente. A escolha dos parâmetros t_0 , τ e γ é feita de forma dinâmica com a multiplicidade de opções apresentada na tela do monitor, cuja decisão é feita pela análise das varreduras apresentadas. Apenas alguns exemplos típicos foram selecionados para a ilustração.

Tabela 4.1 – Exemplos da seleção do parâmetro Piosson-Gaussiano γ , nos intervalos de amostragem. Na primeira linha temos o parâmetro γ constante em todos os intervalos; na segunda linha γ varia de forma sequencial; e na terceira linha γ varia de forma aleatória. Isto exemplifica a versatilidade e aplicabilidade da técnica no processos não estacionário.

Experimentos	t_0	t_1	t_1	t_2	t_2	t_3	t_3	t_4	t_4	t_5
1 Uniforme	γ		γ		γ		γ		γ	
2 Sequencial	γ_1		γ_2		γ_3		γ_4		γ_5	
3 Aleatório	γ_i		γ_j		γ_k		γ_l		γ_m	

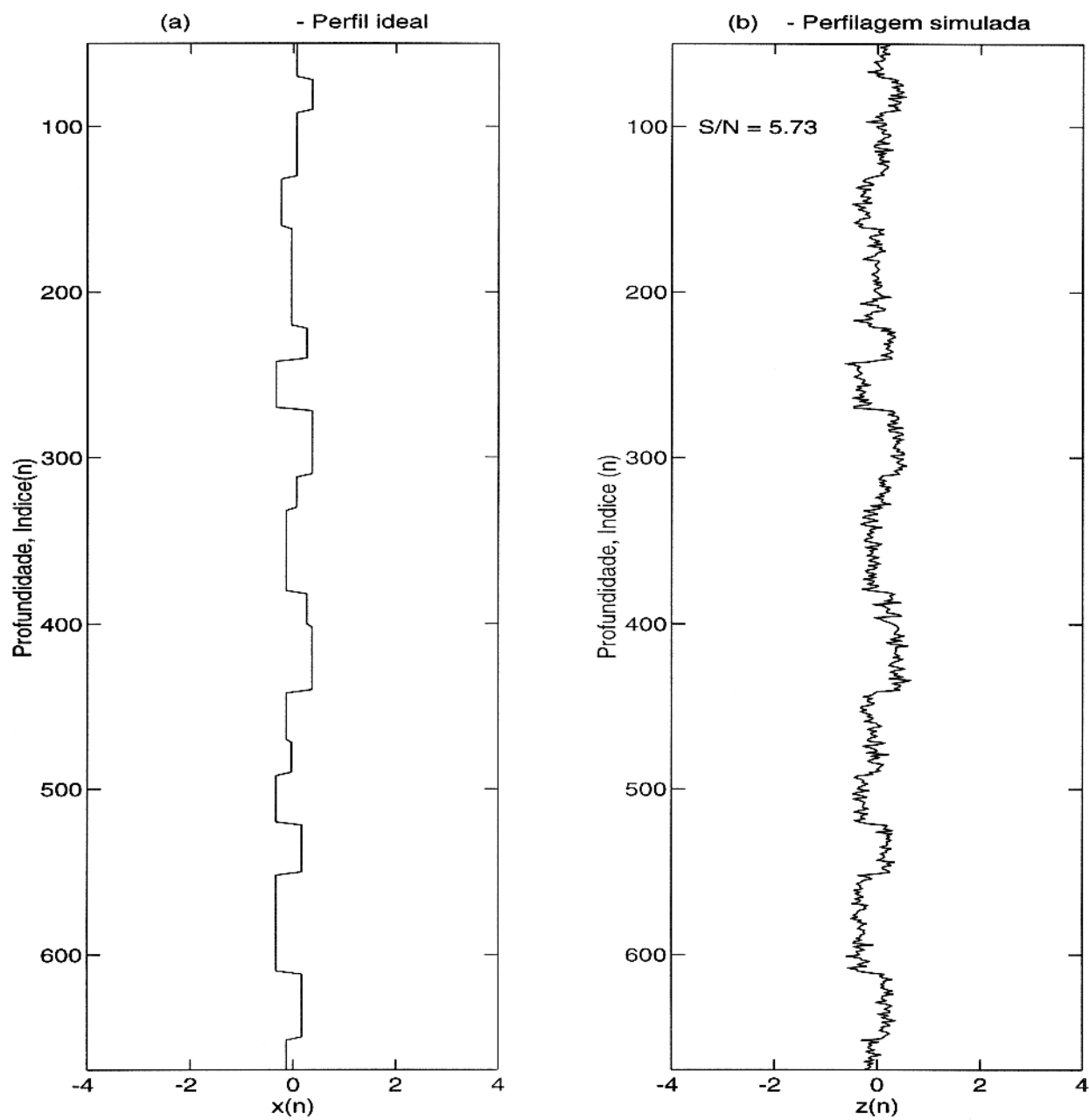


Figura 4.4 - (a) Perfil ideal 1.

(b) Perfilagem simulada, com razão razão/sinal de $S/N = 5,73$.

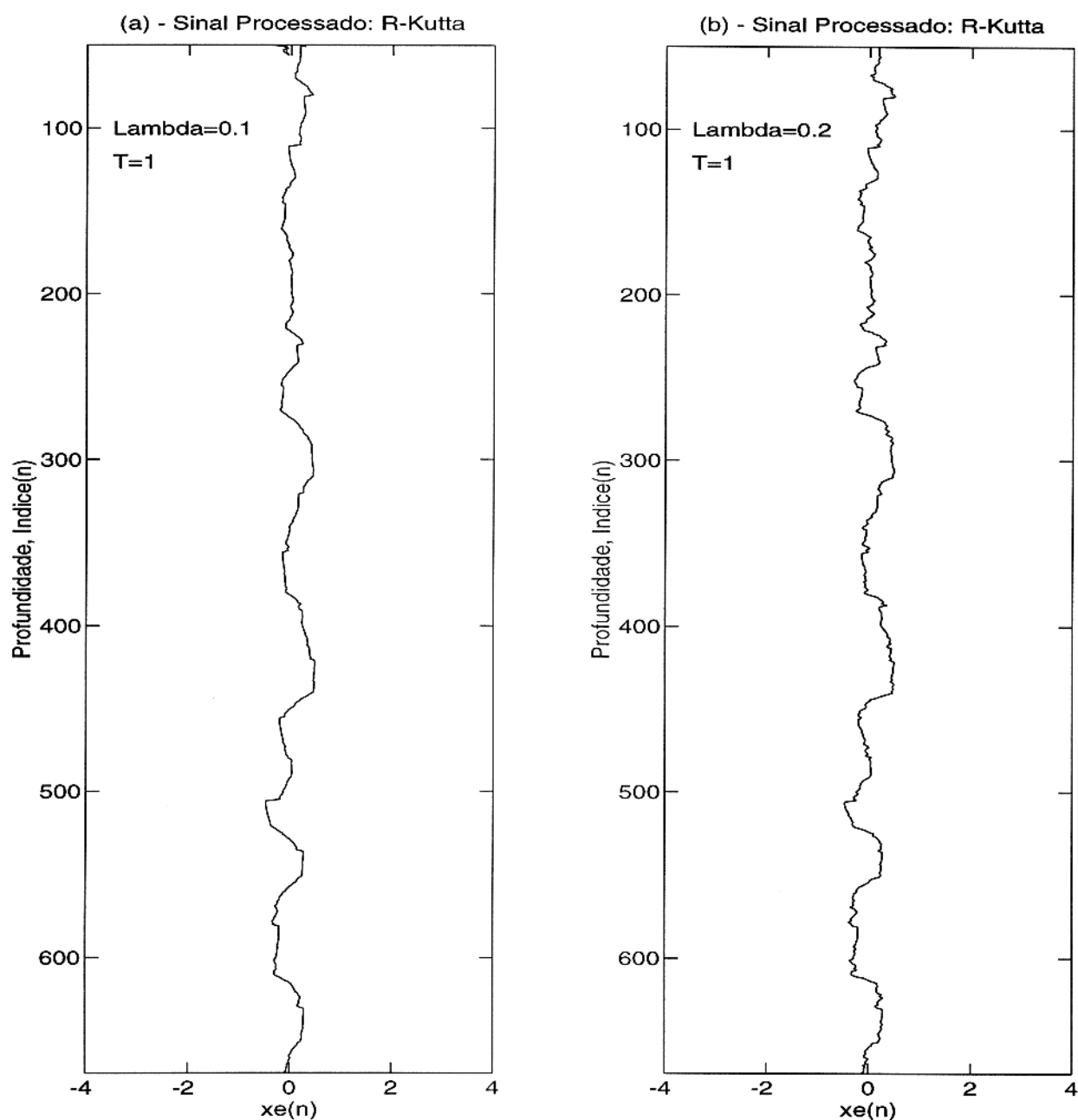


Figura 4.5 - Sinais processados da perfilagem simulada da Figura 4.3.b utilizando o método de resolução numérica Runge-Kutta. ($S/N = 5,73$).

(a) Parâmetro $\gamma = 0,1$ e espaçamento da amostragem $\Delta t = 1$.

(b) Parâmetro $\gamma = 0,2$ e espaçamento da amostragem $\Delta t = 1$.

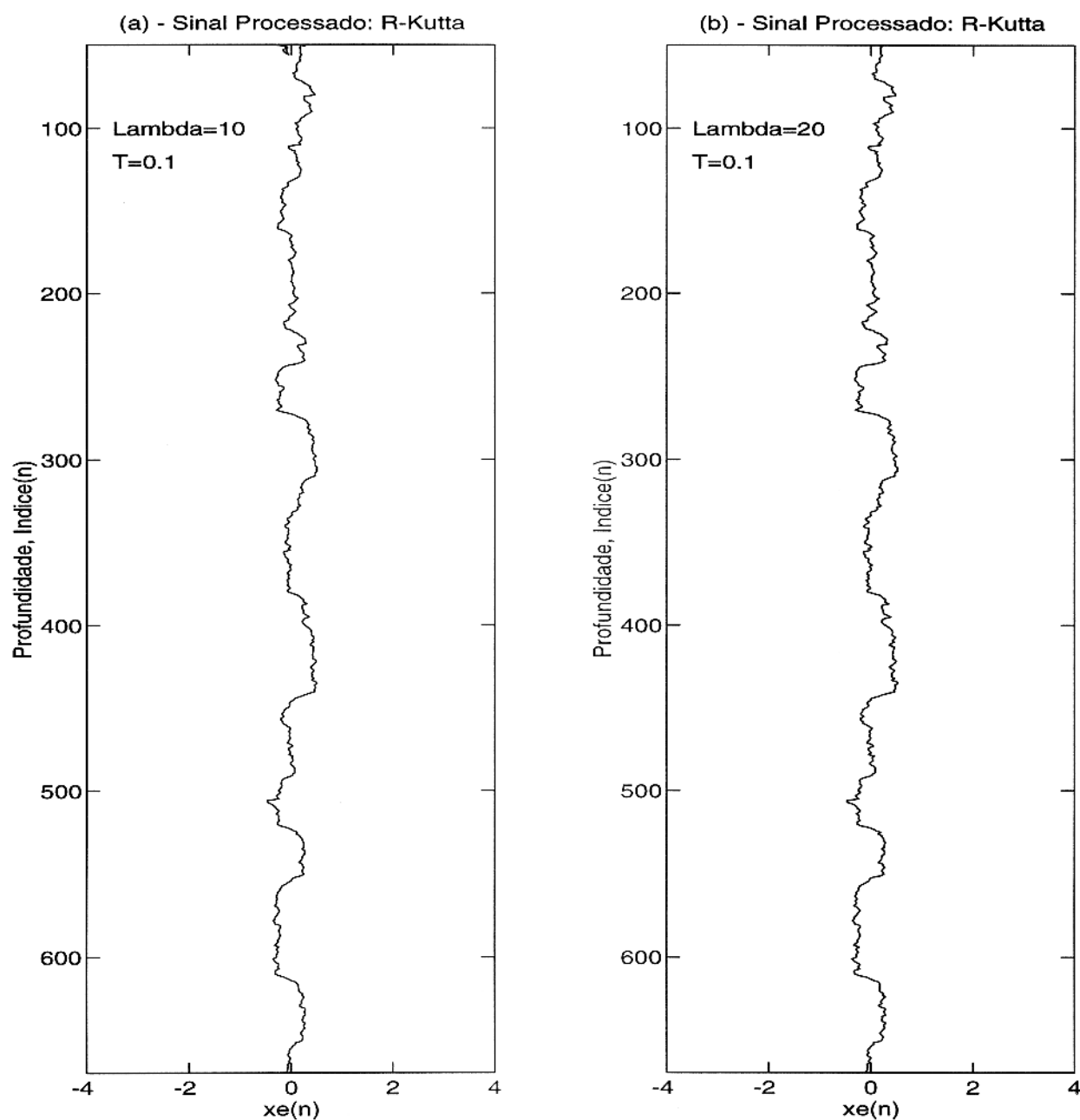


Figura 4.6 - Sinais processados da perfilagem simulada da Figura 4.3.b utilizando o método de resolução numérica Runge-Kutta. ($S/N = 5,73$).

(a) Parâmetro $\gamma = 10$ e espaçamento da amostragem $\Delta t = 0,1$.

(b) Parâmetro $\gamma = 20$ e espaçamento da amostragem $\Delta t = 0,1$.

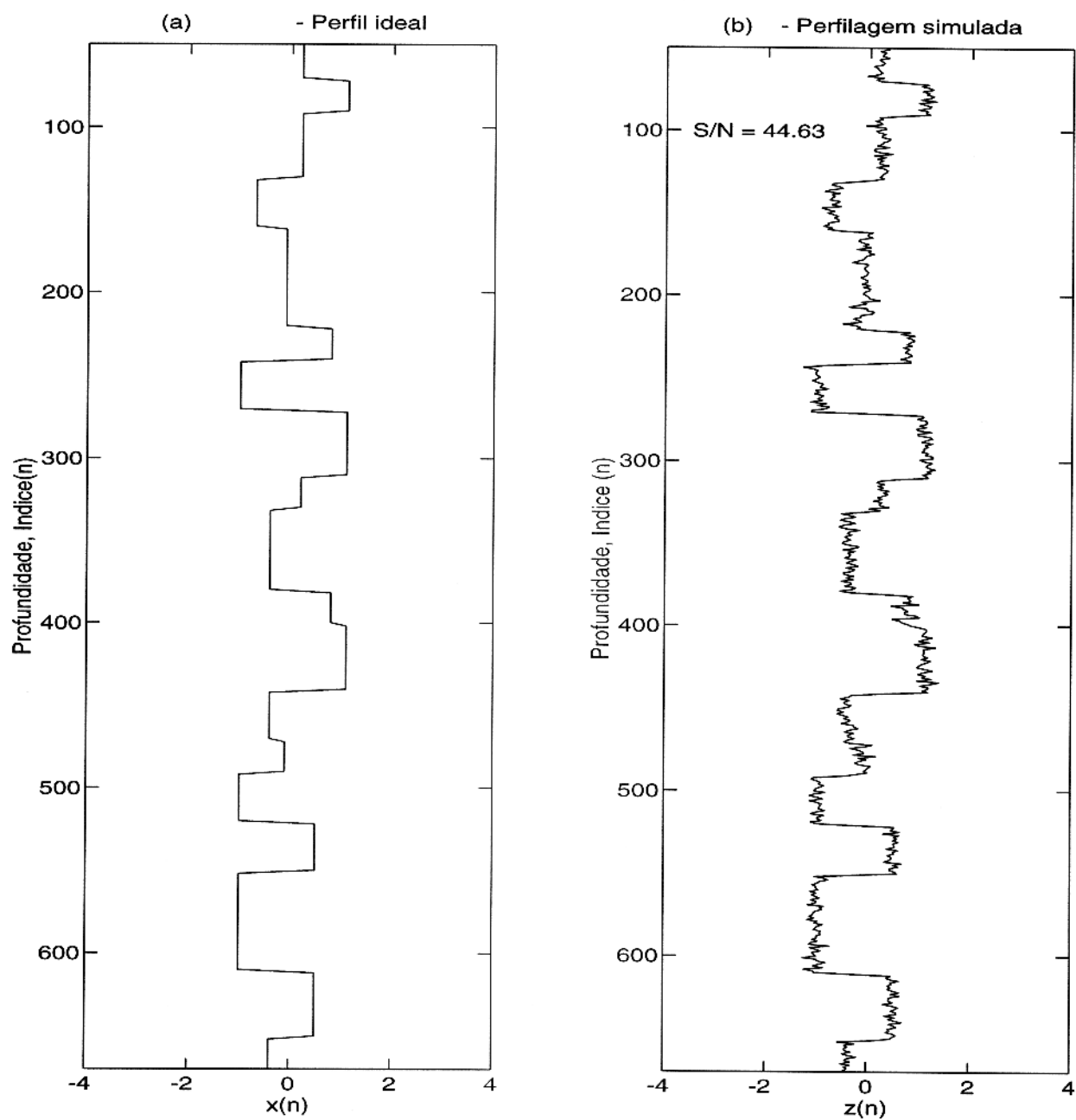


Figura 4.7 - (a) Perfil ideal 2.

(b) Perfilagem simulada com razão sinal/ruído igual a $S/N = 44,63$.

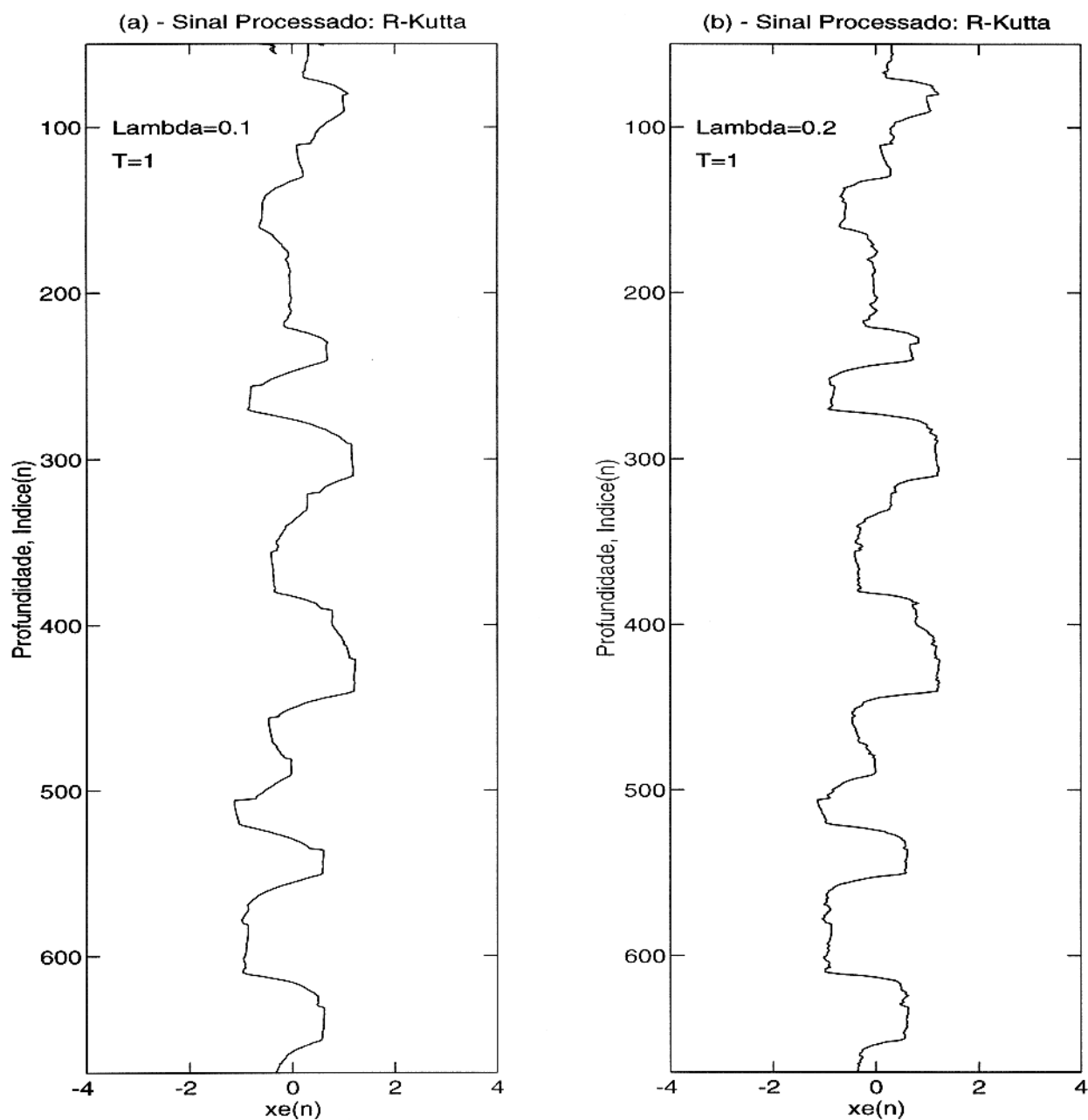


Figura 4.8 - Sinais processados da perfilagem simulada da Figura 4.6.b utilizando o método de resolução numérica Runge-Kutta. (S/N = 44,63).

(a) Parâmetro $\gamma = 0,1$ e espaçamento da amostragem $\Delta t = 1$.

(b) Parâmetro $\gamma = 0,2$ e espaçamento da amostragem $\Delta t = 1$.

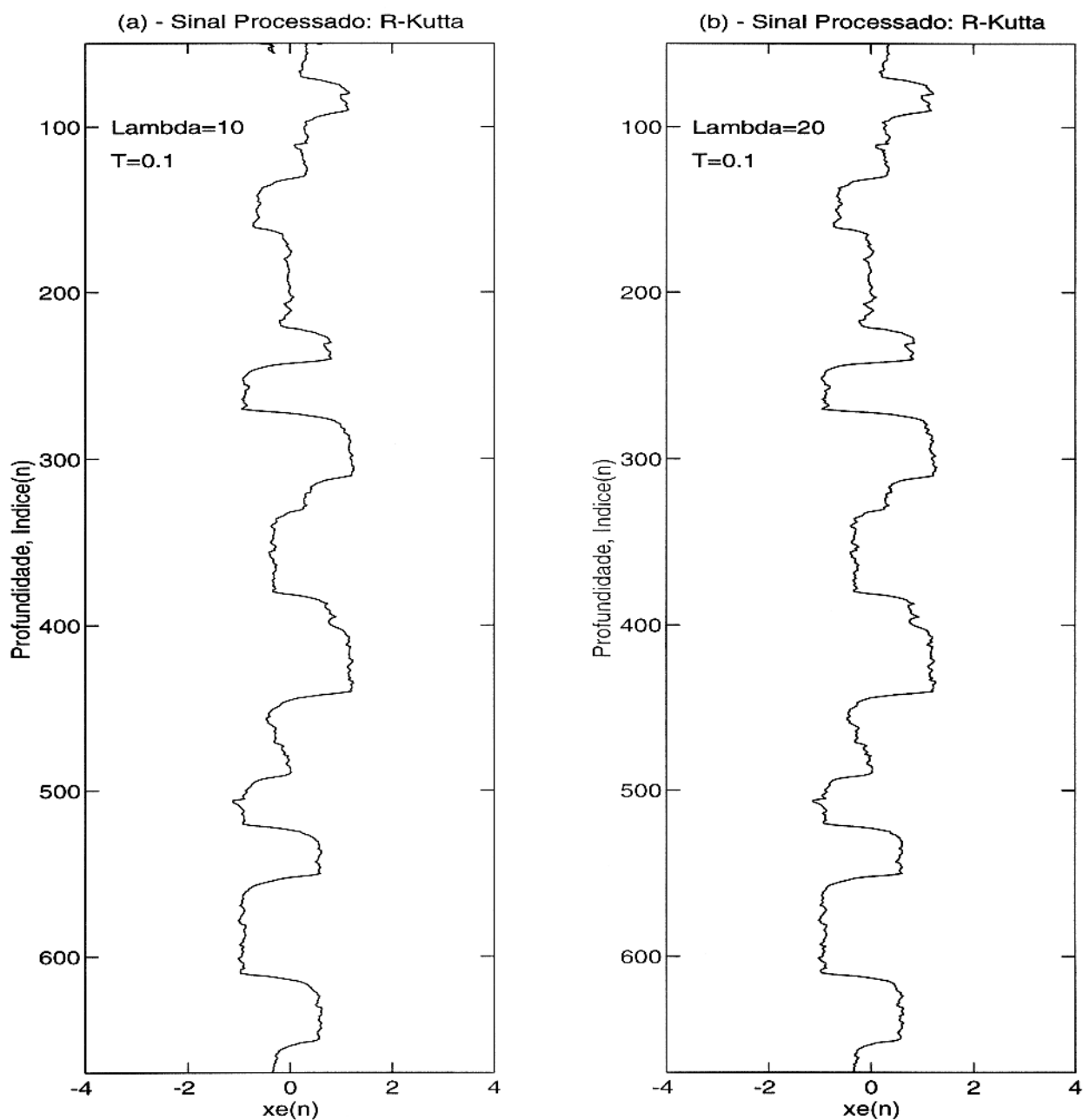


Figura 4.9 - Sinais processados da perfilagem simulada da Figura 4.6.b utilizando o método de resolução numérica Runge-Kutta. ($S/N = 44,63$).

(a) Parâmetro $\gamma = 10$ e espaçamento da amostragem $\Delta t = 0,1$.

(b) Parâmetro $\gamma = 20$ e espaçamento da amostragem $\Delta t = 0,1$.

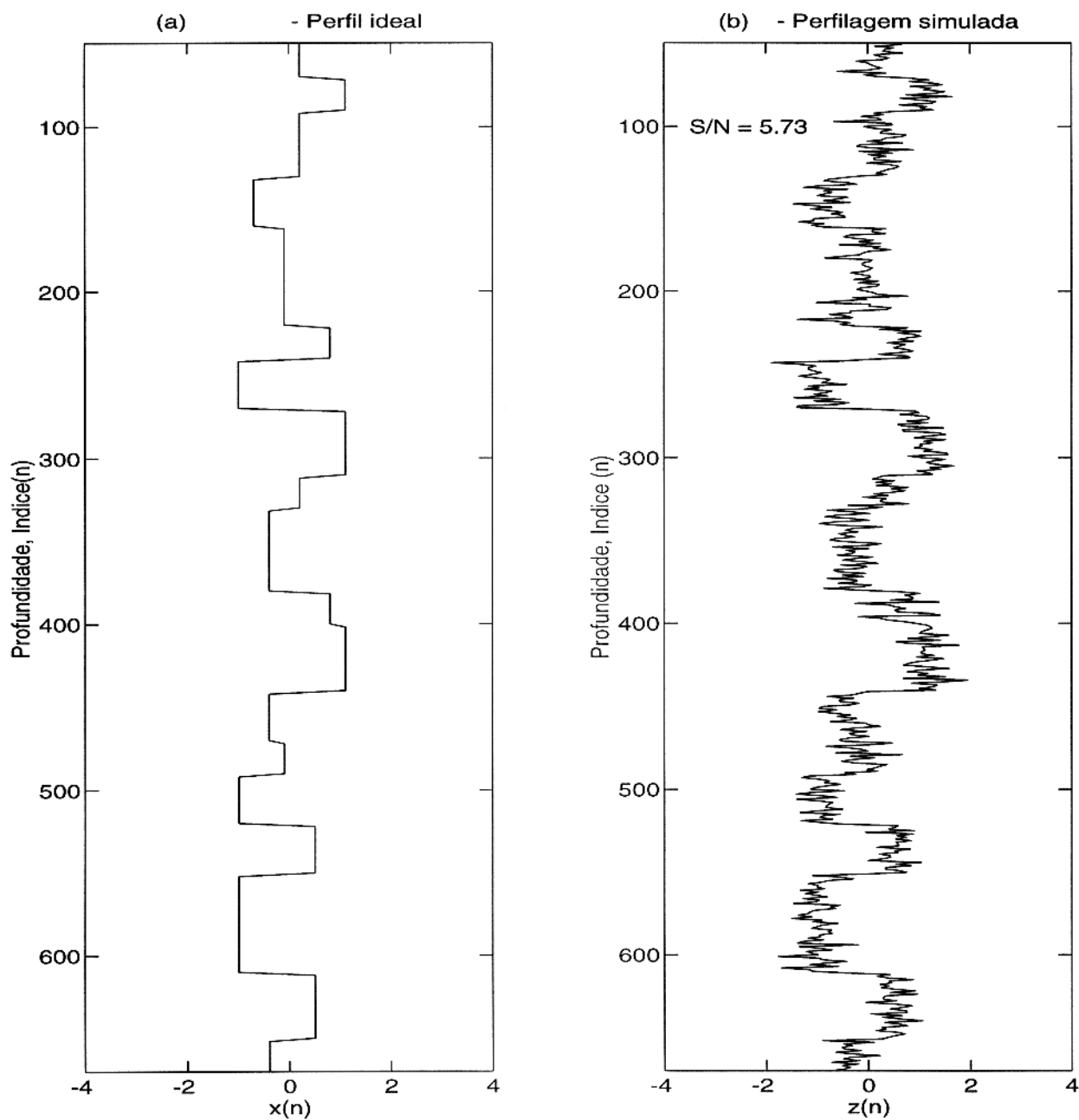


Figura 4.10 - (a) Perfil ideal 3.

(b) Perfilagem simulada com razão sinal/ruído de $S/N = 5,73$.

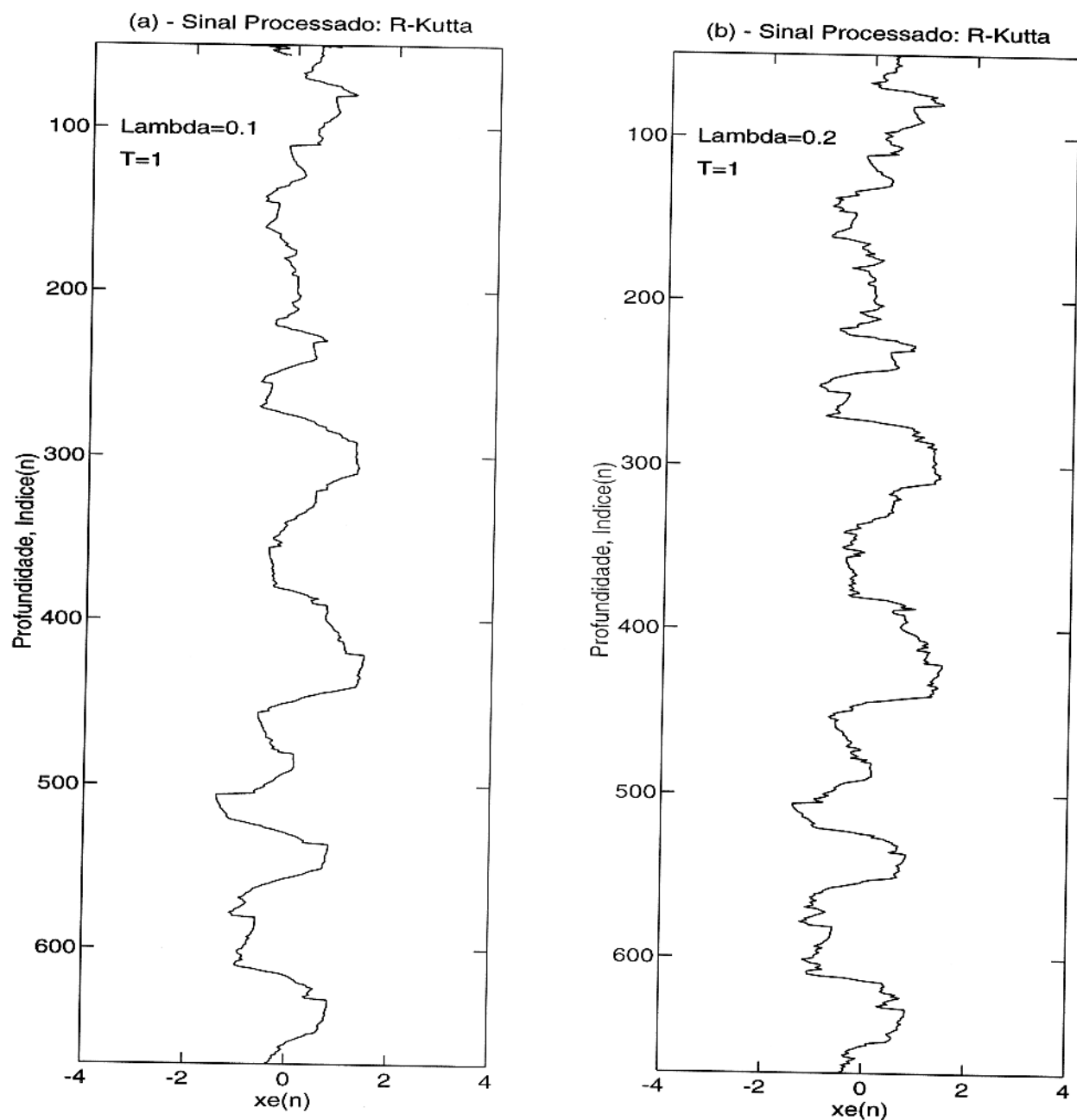


Figura 4.11 - Sinais processados da perfilagem simulada da Figura 4.9.b utilizando o método de resolução numérica Runge-Kutta. (S/N = 5,73).

(a) Parâmetro $\gamma = 0,1$ e espaçamento da amostragem $\Delta t = 1$.

(b) Parâmetro $\gamma = 0,2$ e espaçamento da amostragem $\Delta t = 1$.

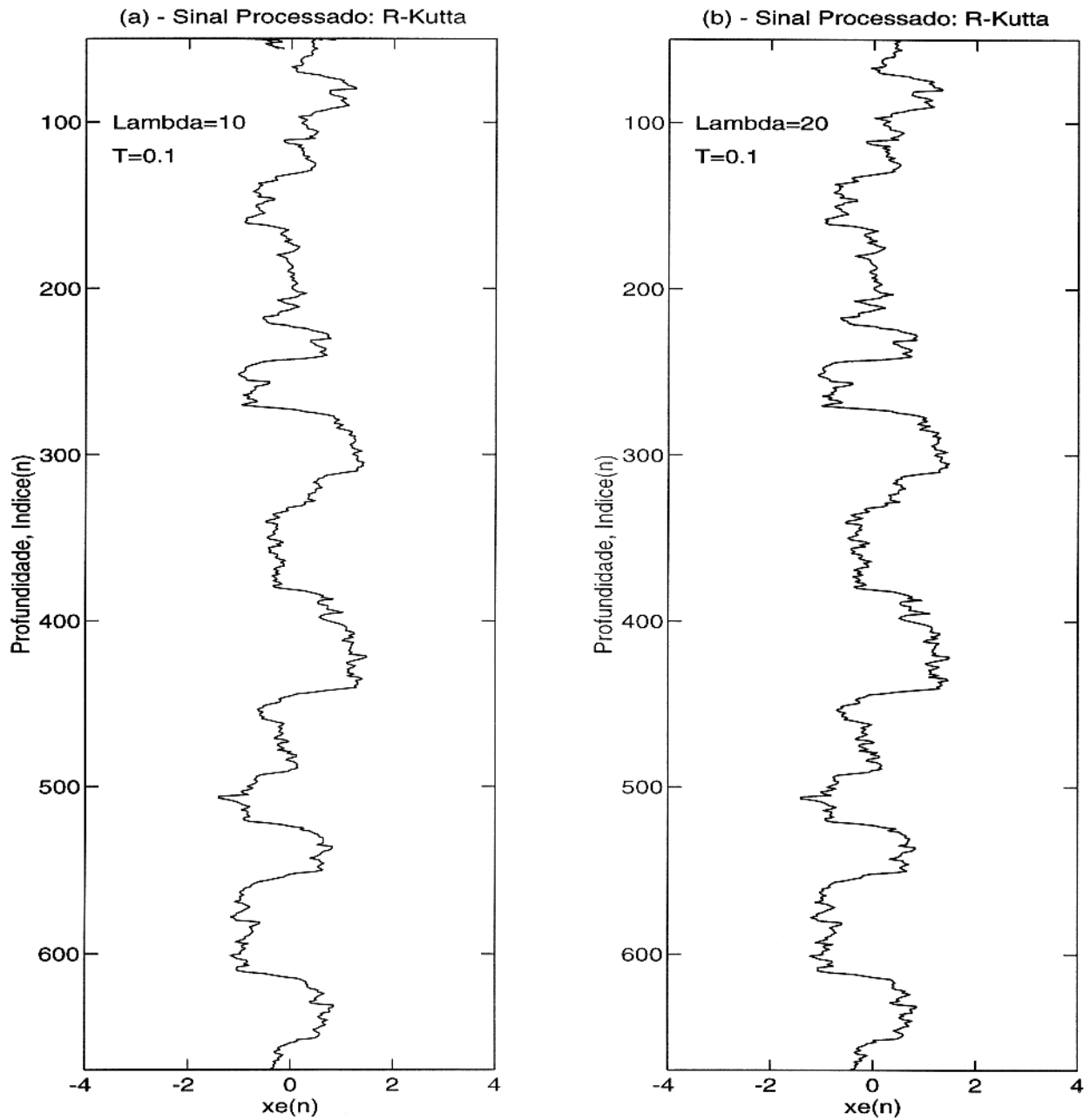


Figura 4.12 - Sinais processados da perfilagem simulada da Figura 4.9.b utilizando o método de resolução numérica Runge-Kutta. (S/N = 5,73).

(a) Parâmetro $\gamma = 10$ e espaçamento da amostragem $\Delta t = 0,1$.

(b) Parâmetro $\gamma = 20$ e espaçamento da amostragem $\Delta t = 0,1$.

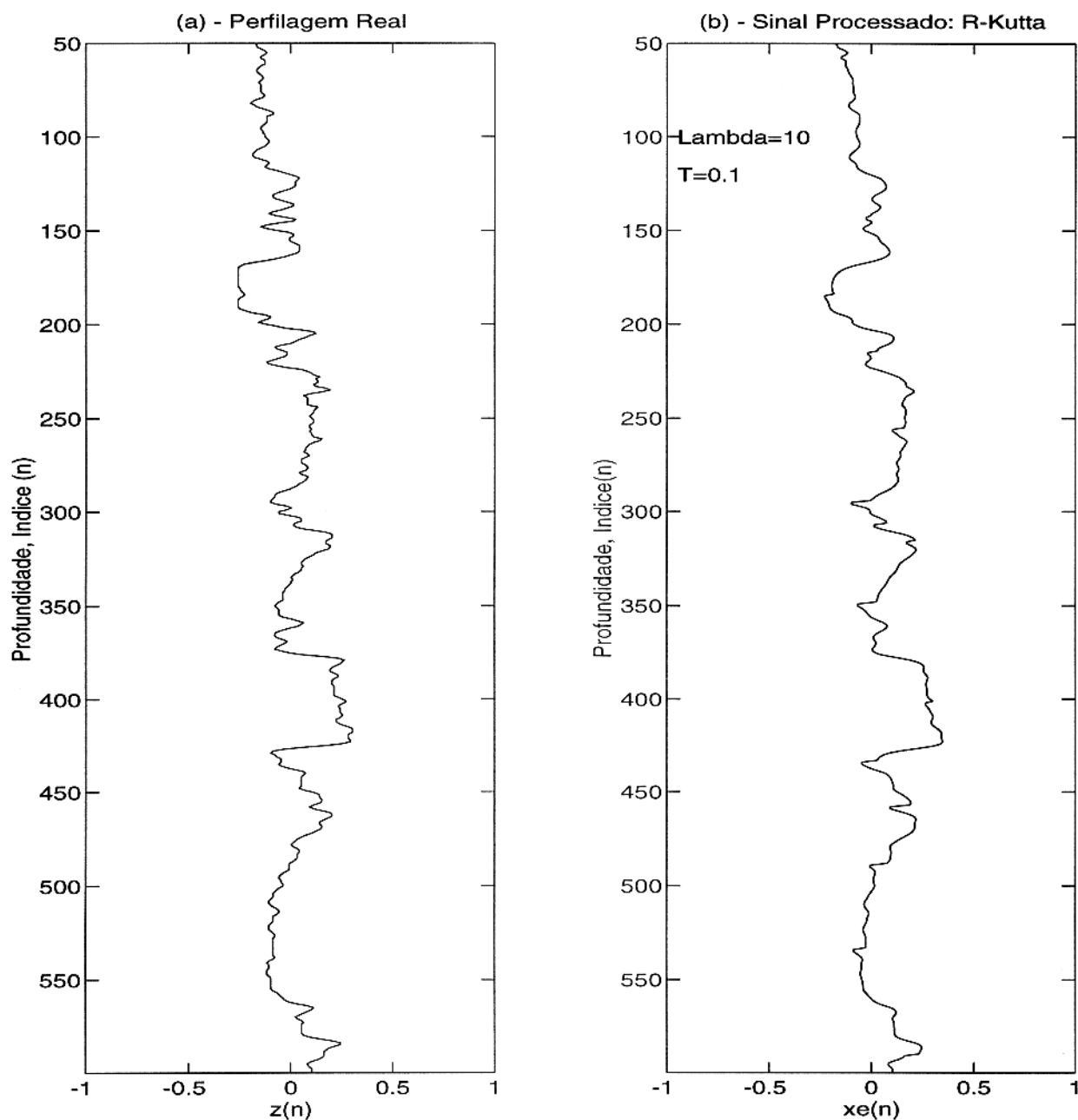


Figura 4.13 - (a) Perfilagem real, obtida em um poço do lago Maracaibo, Venezuela.

(b) Sinal processado, da perfilagem real, utilizando o método de resolução numérica Runge-Kutta, com parâmetro $\gamma = 10$ e espaçamento da amostragem $\Delta t = 0,1$.

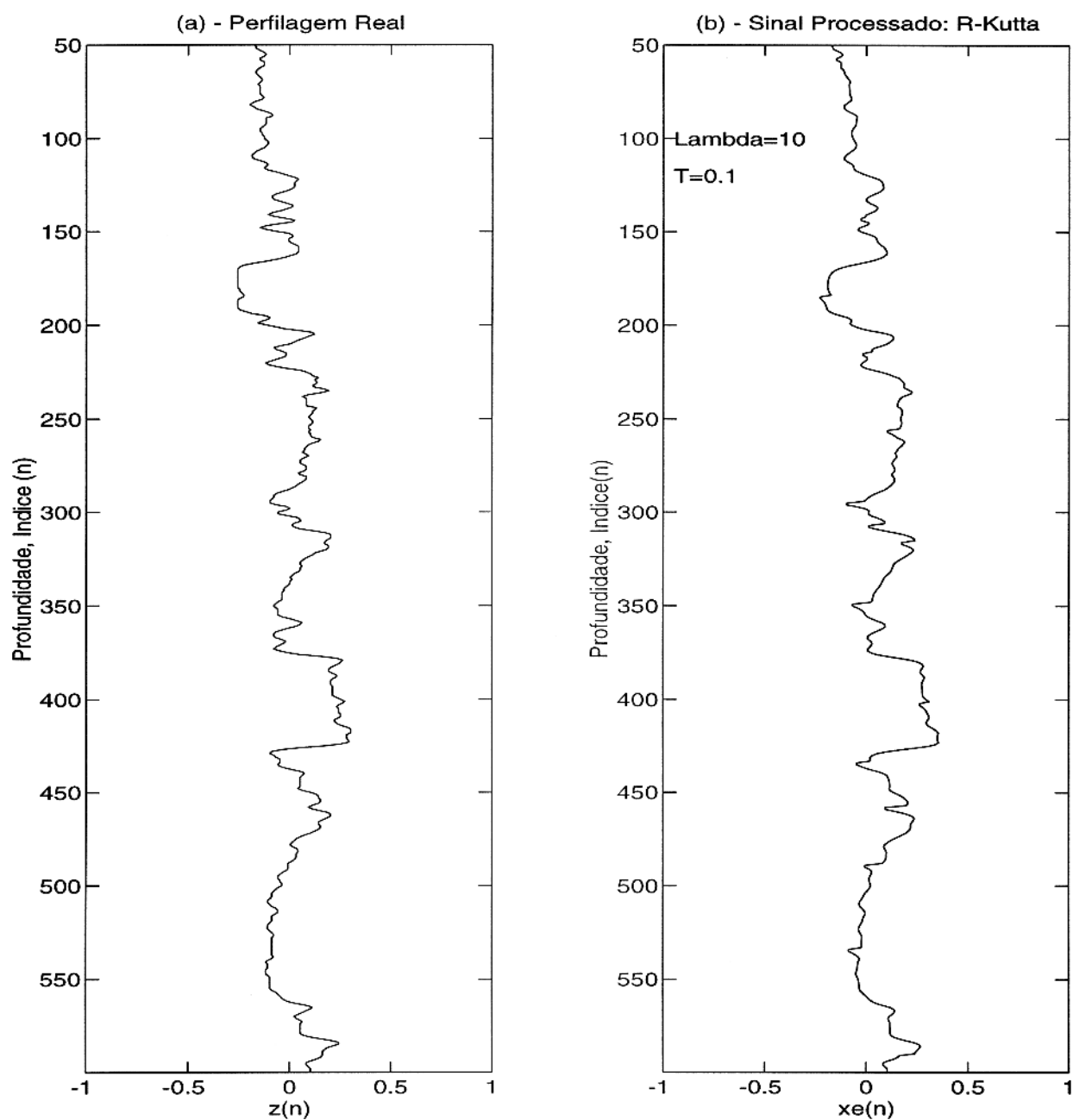


Figura 4.14 - (a) Perfilagem real, obtida em um poço do lago Maracaibo, Venezuela.

(b) Sinal processado, da perfilagem real, utilizando o método de resolução numérica Runge-Kutta, com parâmetro $\gamma = 20$ e espaçamento da amostragem $\Delta t = 0,1$.

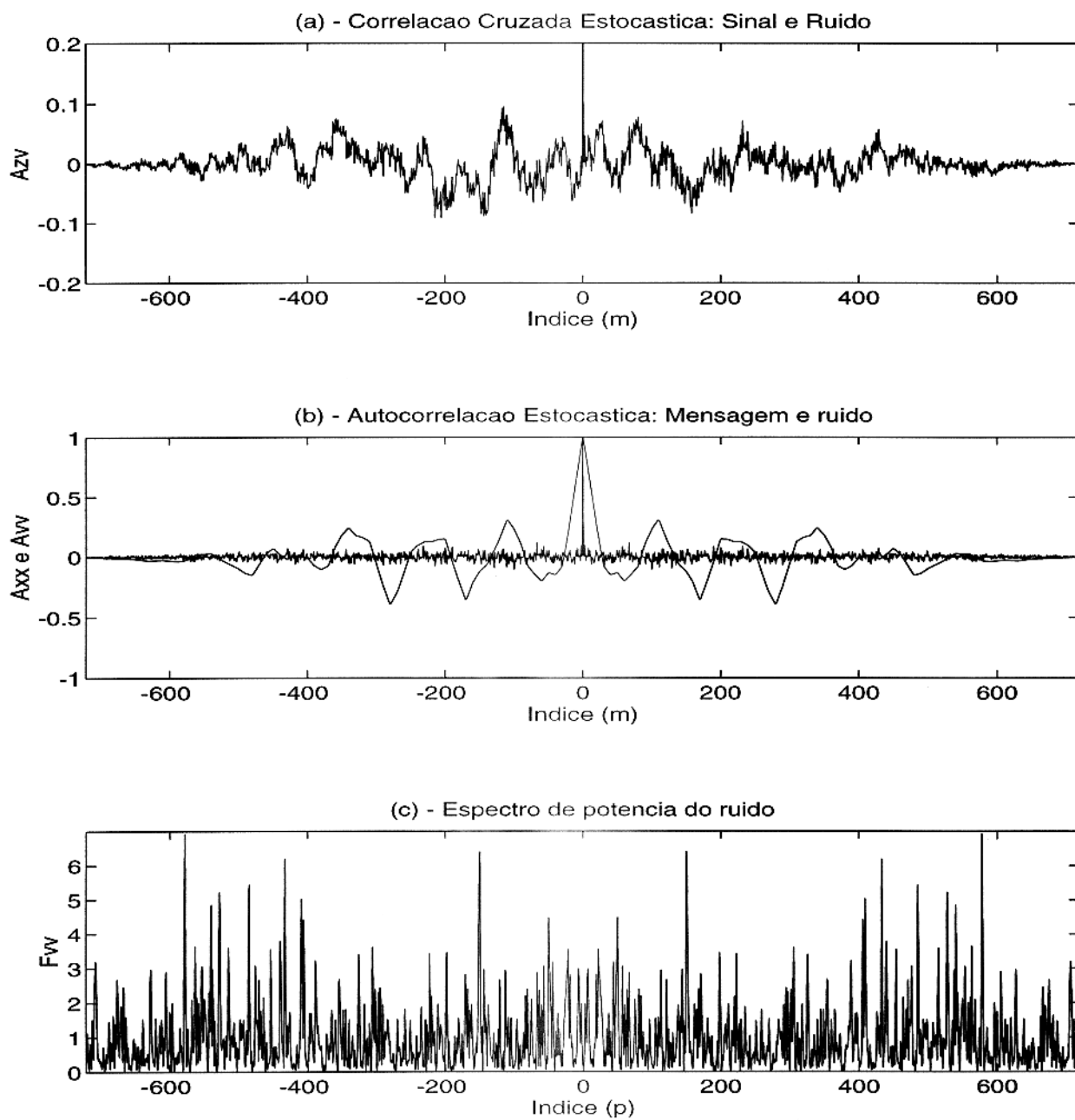


Figura 4.15 - (a) Correlação cruzada estocástica entre o sinal $z(t)$ e o ruído $v(t)$.

(b) Autocorrelação estocástica da mensagem $x(t)$ e do ruído $v(t)$.

(c) Espectro de potência do ruído.

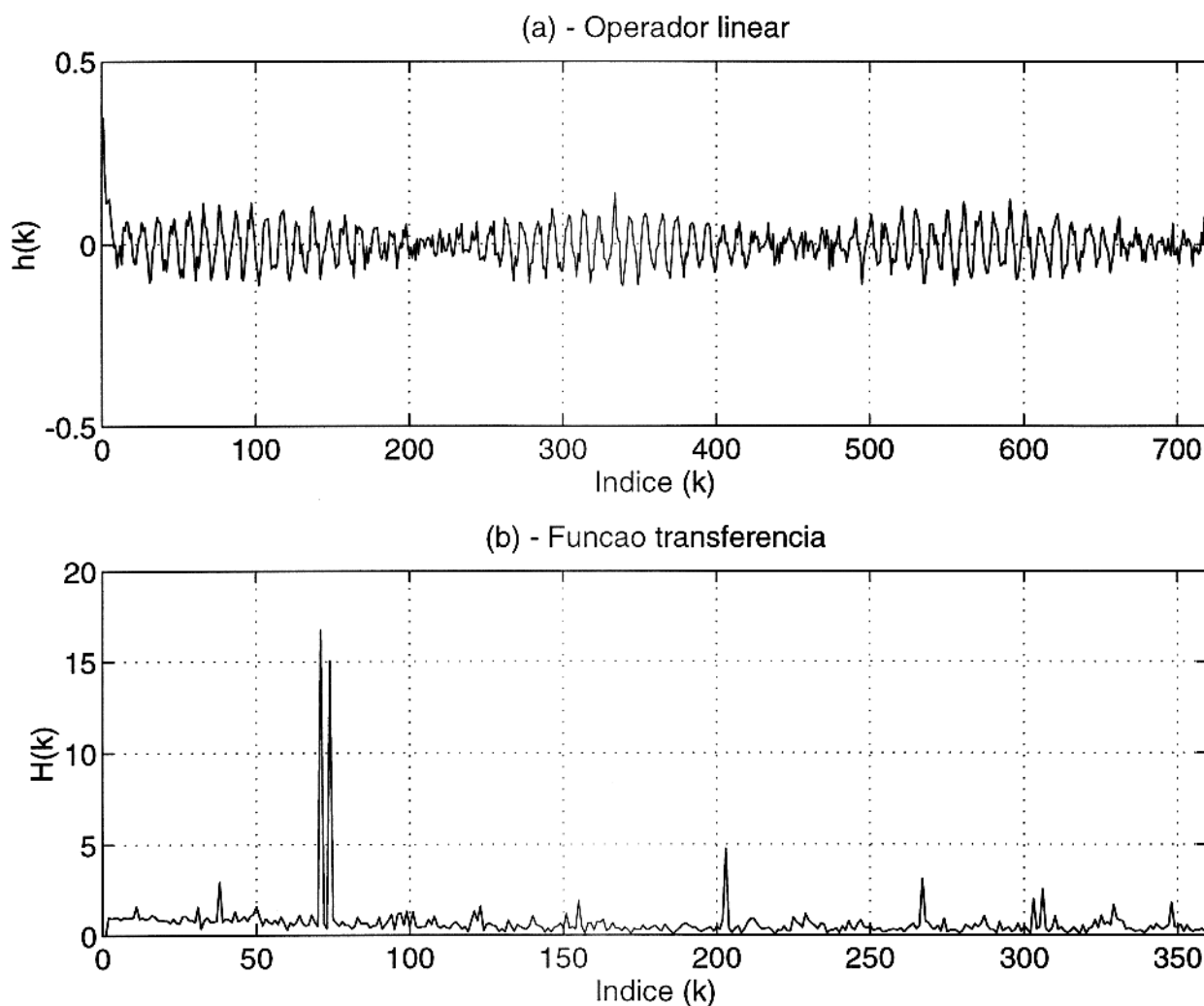


Figura 4.16 - (a) Operador linear do filtro $h(t)$. Observamos que é uma forma especial para o operador matemático.

(b) Função transferencia do operador linear do filtro, até a frequência de Nyquist. Observamos o comportamento quase passa-tudo, com corte na baixa e amplificações seletivas. Estas duas respostas uma média para todo o perfil, uma vez que cada evento tem seu próprio operador

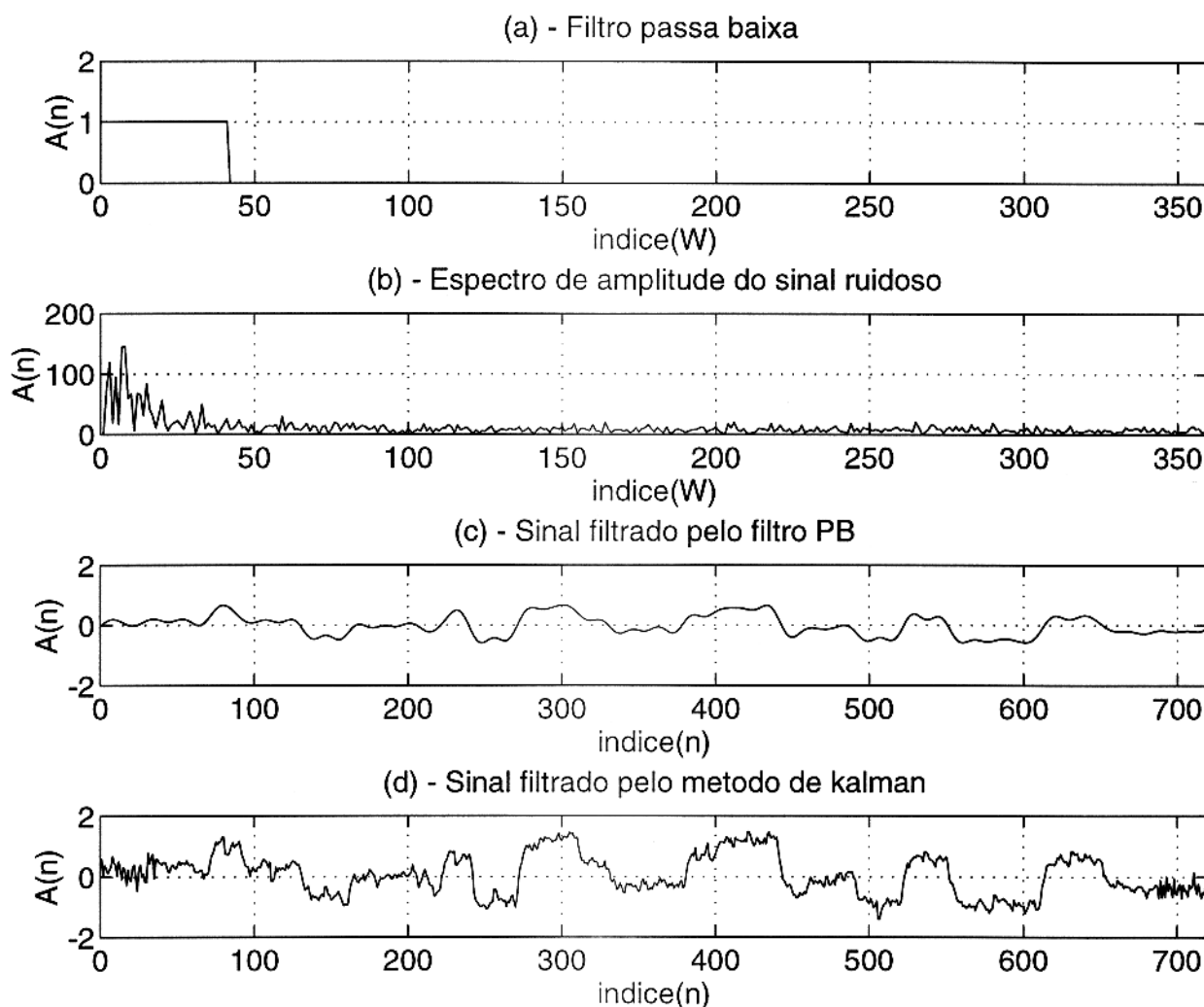


Figura 4.17 –(a) Filtro passa-baixa (PB).

(b) Espectro de amplitude do sinal de entrada.

(c) Sinal de entrada filtrado pelo (PB).

(d) Sinal de entrada filtrado pelo método de Kalman. O sinal de origem corresponde a Figura (4.106). Observamos, respostas distintas entre as saídas (c) e (d), e achamos que (d) conserva melhor as propriedades desejadas.

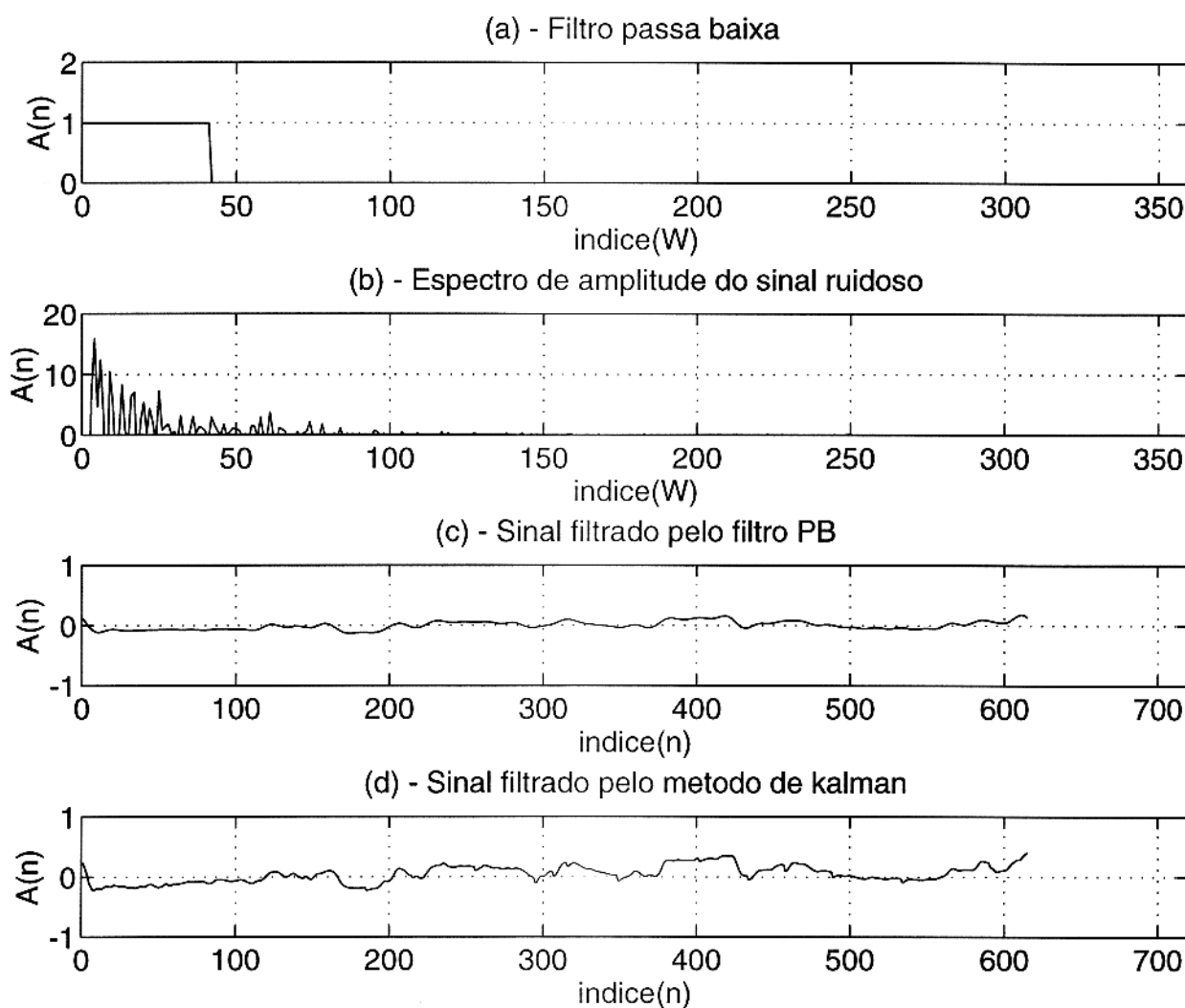


Figura 4.18 – (a) Filtro passa-baixa (PB).

- (b) Espectro de amplitude do sinal de entrada, sendo que é um dado real com pouco ruído.
- (c) Sinal filtrado pelo PB.
- (d) Sinal filtrado pelo filtro de kalman.

5 – CONCLUSÃO

Processos não estacionários e estocásticos são as características básicas dos dados geofísicos para aplicação deste método. Os dados de campos dinâmicos (sísmicos e eletromagnéticos) e de campos potenciais (gravimétricos e magnéticos) são exemplos de dados geofísicos com estas características.

As generalizações do problema quanto a estacionariedade e da janela dos dados não satisfazem a integral de convolução. Por isto ela é reescrita na forma de média móvel segundo a teoria de Wiener-Kolmogorov. A integral de Wiener-Kolmogorov é difícil de ser resolvida nesta forma, entretanto, Kalman converte esta equação integral em equações diferenciais ordinárias lineares e não lineares, baseado na representação do sistema por variáveis de estado e modelos de processos aleatórios, com a entrada do sistema linear acrescido com ruído branco.

Neste procedimento o que se ganha na resolução do processo não estacionário se perde na operação prática, uma vez que é necessário definir cada intervalo das janelas sequenciais de aplicação do filtro.

O filtro sobre dados sintéticos responde como o desejado permitindo aumentar a resolução dos dados pela demarcação de saltos na informação. Na Figura 4.17-(c) temos o sinal entrada (sinal ruidoso) filtrado pelo PB, sendo que este foi desenhado a partir do espectro de amplitude do sinal de entrada. Comparando a saída do PB, com a saída do filtro da Kalman podemos observar a perda na amplitude no caso do PB e a conservação da amplitude para o caso do filtro de Kalman. É também demonstrado pelas figuras que ele se

comporta como um filtro passa baixa seletivo (PBS). O ruído aditivo tem propriedades fracas dentro da janela do PB, e fortes no seu exterior de corte. Um ruído com propriedades ao contrário; isto é, resposta forte dentro da janela e fraca na faixa de corte, não pode satisfazer a resposta desejada. Enquanto isto, o filtro de Kalman continua útil, ver Figuras (4.17 – (a), 4.17- (b), 4.18 – (a) e 4.18 – (b)).

Sobre dados reais, o filtro tem a possibilidade de ser estruturado de forma dinâmica, através de uma varredura sobre os sinais processados com um conjunto variável de parâmetros de controle expostos na tela do monitor, e com o interprete fazendo a sua avaliação sistemática.

Um próximo passo a ser desejado é o desenvolvimento do método de Kalman-Wiener-Kolmogorov para torná-lo disponível, simultaneamente, na filtragem suavização e na deconvolução não tradicional de dados geofísicos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BARROSO, L. C.; CAMPOS, F. F.; CARVALHO, M. L. B; MAIA, L. M. 1987. *Cálculo Numérico*. São Paulo – SP, Editora Harbra,.
- BARTHE, R. G. 1976. *The Elements of Real Analysis*. New York.
- BAYLESS, J. W. & BRIGHAM, E. O. 1970. Application of the Kalman Filter to Continuous Signal Restoration. *Geophysics*, 35(1): 2-23.
- BOOTON, R. C., 1952. *An optimization theory for time-varying linear systems with nonstationary statistical inputs*, 40; 977-981.
- CRUMP, N. 1974. A Kalman Filter Approach to the Deconvolution of Seismic Signals. *Geophysics*, 39(1): 1-13.
- DAVIS, M. C. 1963. *Factoring the spectral matrix:IEEE Trans. on Automatic Control*, AC-8; 196-225.
- GABEL, R. A. & ROBERTS, R. A. 1980. *Signals and Linear Systems*. New York, John Wiley and Sons.
- GELB, A.; KASPER, J. F.; NASH, R. A.; PRICE, C. F; SUTHERLAND, A. A. 1974. *Applied Optimal Estimation*. Cambridge. The M. I. T. Press.
- KALMAN, R. E., 1960. A new Approach to Linear Filtering and Prediction Problems. *Trans. ASME, Series D, Journal of Basic Engineering*, 82; 35-45.
- KALMAN, R. E., & BUCY, R. E., 1961. New Results in Linear Filtering and Prediction Theory. *Trans. ASME, Series D, Journal of Basic Engineering*, 83; 95-107.
- KUO, B. C. 1992. *Digital Control Systems*. Orlando, Saunders College.
- LEWIS, F. L. 1986. *Optimal Estimation*. New York, John Wiley & Sons.

- MENDEL, J. M., 1983. *Optimal Seismic Deconvolution*. New York, Academic Pres.
- OGATA, K. 1990. *Modfern Control Engineering*. Engewood Cliffs, New Jersey, Prentice-Hall
- OGATA, K. 1995. *Discrete-Time Control Systems*. Engewood Cliffs, New Jersey, Prentice-Hall.
- PAPOULIS, A. 1965. *Probability, Randon Variables, and Stochastic Processes*. New York. MacGraw-Hill.
- PISKUNOV, N. 1977. *Cálculo Diferencial e Integral*. Moscou. Editorial MIR.
- SILVA, M. T. & ROBINSON, E. A. 1979. *Deconvolution of Geophysical Time Series in the Exploration for Oil and Natural Gas*. Amsterdam, Holanda, Elsevier Scientific.
- WIENER, N. 1949. *Extrapolation, Interpolation and Smoothing of Stationary Time Series*. New York, John Wiley and Sons.

APÊNDICES

APÊNDICE A – Programa para calcular a saída do filtro de Kalman

```

clear;clf;
load step.dat
y=step(:,2)*0.3;
q=step(:,3);
z=step(:,1);
nl=length(y);
randn('seed',210292);
r=randn(size(y))*0.3;
yr=y+r;
aj=yr(1)-y(1); yr=yr-aj;
md=sum(yr)/nl;yr=yr-md;
md=sum(y)/nl;y=y-md;
ge=yr;
ss=find(q);
ns=length(ss);
s=ones(ns+2,1);
s(2:ns+1)= ss;
s(ns+2)=nl;

save yr.dat yr -ascii

t=2;
while t <= (ns+1),
ne=(s(t)-s(t-1))/2;
nd=(s(t+1)-s(t))/2;
sc=ne+nd;
j=s(t);
plot(yr(j-ne:j+nd));

x=0:0.1:(sc/10);
lamb=input('Valor de Lambda: ');
g=yr(j-ne:j+nd);
kt=sqrt(lamb)*tanh(2*lamb*x);

for i=1:sc,
h=0.1;
%R2(i)=-kt(i)*((g(i)+h*0.5*(kt(i)*yr(j-ne+i)-kt(i)*g(i)))-(yr(j-ne+i)+h*0.5));
%g(i+1)=g(i)+R2(i);

R1(i)=-kt(i)*g(i)+kt(i)*yr(j-ne+i);
R2(i)=-kt(i)*((g(i)+h*(kt(i)*yr(j-ne+i)-kt(i)*g(i)))-(yr(j-ne+i)+h));
g(i+1)=g(i)+h*0.5*(R2(i)+R1(i));

%H(i)=-kt(i)*g(i)+kt(i)*yr(j-ne+i);
%R1(i)=h*H(i);

```

```
%R2(i)=h*kt(i+1)*(-g(i)-R1(i)+yr(j-ne+i+1));
%g(i+1)=g(i)+(R1(i)+R2(i))*0.5;
end
```

```
plot([g,yr(j-ne:j+nd)])
```

```
T=input('Aceitavel = 1; Nao Aceitavel = 0 - ')

```

```
if T == 1, t=t+1; ge(j-ne:j+nd)=g; end
```

```
end
```

```
save teste2.dat ge -ascii
```

```
%x=1:721;
%subplot(1,2,2);
%plot(x,ge,'r');
%title('(b) - Sinal Processado: R-Kutta');
%text(100,-3.5,'Lambda=20');
%text(120,-3.5,'T=0.1');
%axis([50 670 -4 4]);
%xlabel('Profundidade, Indice(n)');
%ylabel('xe(n)');
%view(90,90);
```

```
%subplot(1,2,1);
%plot(x,y,'c');
%title('(a) - Perfil ideal');
%axis([50 670 -4 4]);
%xlabel('Profundidade, Indice(n)');
%ylabel('x(n)');
%view(90,90);
```

CALCULO DA COVARIANCIA E CORRELACOES

```
sa=cov(yr);
sr=cov(r);
ra=sa/sr;
ca=xcorr(y,'coeff');
car=xcorr(r,'coeff');
cc=xcorr(yr,r,'coeff');
CA=fftshift(fft(ca));
af=abs(CA);
CC=fftshift(fft(cc));
cf=abs(CC);
CAR=fftshift(fft(car));
```

```
rf=abs(CAR);
```

CALCULO DO OPERADOR LINEAR $h(t)$

```
YR=fft(yr);
GE=fft(ge);
nn=length(GE);
for i=1:nn,
if abs(YR(i)) >= 0.001,
    H(i)=GE(i)/YR(i);
else,
    H(i)=YR(i);
end
end

AH=abs(H);

YRI=ifft(H);

x=0:720;
subplot(4,1,1);
plot(x,real(YRI),'r');
%axis([0 720 -0.5 0.5]);
title('Figura 1 - Operador Linear h(t)');
ylabel('h(k)');
xlabel('Indice (k)');
grid

subplot(4,1,2);
plot(x,AH,'b');
axis([0 720 0 20]);
title('Figura 2 - Espectro de Amplitude H(k)');
ylabel('H(k)');
xlabel('Indice (k)');
grid

AYR=abs(YR);
```

CALCULO DO OPERADOR IDEAL

```
Y=fft(y);
AY=abs(Y);

HI=Y./YR;
```

```
AHI=abs(HI);
```

```
hii=ifft(HI);
```

```
subplot(4,1,4);
plot(x,real(hii));
axis([0 720 -0.5 0.5]);
title(' Figura 4 - Operador Ideal HI(t)');
ylabel('HI(t)');
xlabel('Indice (k)');
grid
```

```
subplot(4,1,3);
plot(x,AHI);
axis([0 720 0 30]);
title('Figura 3 - Espectro de amplitude Ideal AHI(k)');
ylabel('AHI(k)');
xlabel('Indice (k)');
grid
pause
imp41
```

```
subplot(4,1,1);
plot(x,AYR);
axis([0 720 0 200]);
title('figura 5 - Espectro de Amplitude da Entrada YR(k)');
ylabel('AYR(k)');
xlabel('Indice (k)');
grid
```

```
subplot(4,1,2);
plot(x,AY);
axis([0 720 0 200]);
title('figura 6 - Espectro de Amplitude da Onda Quadrada Y(k)');
ylabel('AY(k)');
xlabel('Indice (k)');
grid
```

RECUPERACAO DA ONDA QUADRADA

```
hr=real(hii);
```

```
yyy=conv(hr,yr);
```

```
YYY=HI.*YR;
yyy1=ifft(YYY);
```

```
subplot(4,1,3);
plot(x,real(yyy1));
title(' figura 7 - Onda Quadrada Recuperada');
axis([0 720 -2 2]);
xlabel('Indice (n)');
ylabel('OR(n)');
grid
```

```
subplot(4,1,4);
plot(yyy);
title(' figura 8 - Onda Quadrada Recuperada');
%axis([0 720 -2 2]);
xlabel('Indice (n)');
ylabel('OR(n)');
grid
```

```
pause
```

```
%subplot(1,2,2);
%plot(x,yr,x,y,'-');
%plot(x,yr,'r')
%title('(b) - Perfilagem simulada');
%text(100,-3.5,'S/N = 5.73');
%axis([50 670 -4 4]);
%xlabel('Profundidade, Indice (n)');
%ylabel('z(n)');
%view(90,90);
```

```
%x=-720:720;
%subplot(3,1,1);
%plot(x,cc,'r');
%axis([-721 720 -0.2 0.2]);
%title('(a) - Correlacao Cruzada Estocastica: Sinal e Ruído');
%ylabel('Azv');
%xlabel('Indice (m)')
```

```
%subplot(3,1,2);
%plot(x,car,'y',x,ca,'r');
```

```
%axis([-721 720 -1 1]);
%title('(b) - Autocorrelacao Estocastica: Mensagem e ruido');
%ylabel('Axx e Avv');
%xlabel('Indice (m)');
```

```
%subplot(1,2,2);
%plot(AH);
%axis([0 720 0 15]);
%title('Funcao Transferencia H(k)');
%ylabel('H(k)');
%xlabel('Indice (k)');
%view(90,90);
```

```
%axis([0 720 0 120]);
%title('Espectro de Potencia (ACS)');
%ylabel('PHI(gg)');
%xlabel('Indice (p)');
```

```
%subplot(4,2,5);
%plot(x,cf);
%axis([0 720 0 7]);
%title('(e) ');
%ylabel('Ffr');
%xlabel('Indice (p)');
```

```
%subplot(3,1,1);
%plot(x,rf,'y');
%axis([-721 720 0 7]);
%title('(c) - Espectro de potencia do ruido');
%ylabel('Fvv');
%xlabel('Indice (p)');
```

```
%x=-360:360;
%subplot(1,2,2);
%plot(x,AH);
%axis([-361 360 0 15]);
%title('Funcao Transferencia H(k)');
%ylabel('H(k)');
%xlabel('Indice (k)');
%view(90,90);
```

imp41

APÊNDICE B – Programa para comparar o filtro de Kalman com o PB.

```

clear;clf;
load yr.dat;
load y.dat;
load amplitudeEntID.dat;
load amplionaQ.dat;
load teste2.dat;
en=amplitudeEntID;
sa=amplionaQ;
ge=teste2;
yy=y;
et=yr;

m=60;
n=721;
F=1;
x=0:1:n;

for i=1:n;
    if x(i) <= m,
        y1(i)=F;
    else,
        y1(i)=0;
    end
end

YR=fft(yr);

gh=YR.*y1';

GH=ifft(gh);

x=1:721;

subplot(4,1,1);
plot(y1)
axis([0 360 0 F+1]);
title('(a) - Filtro Passa Baixa ');
xlabel('indice(W)');
ylabel('Amp(A)');
grid

subplot(4,1,2);

```

```

plot(x,en);
axis([0 360 0 200]);
title('(b) - Espectro de Amplitude do sinal ruidoso');
xlabel('indice(W)');
ylabel('Amp(A)');
grid

```

```

%subplot(4,1,3);
%plot(sa);
%axis([0 360 0 200]);
%title(' Espectro de Amplitude da Onda Quadrada ');
%xlabel('indice(W)');
%ylabel('Amp(A)');

```

```

subplot(4,1,3);
plot(x,real(GH),x,y)
axis([0 720 -2 2]);
title('(c) - Sinal Filtrado pelo Filtro PA');
xlabel('indice(n)');
ylabel('Amp(A)');
grid

```

```

subplot(4,1,4);
plot(x,ge,x,y)
axis([0 720 -2 2]);
title('(d) - Sinal Filtrado pelo Metodo de Kalman');
xlabel('indice(n)');
ylabel('Amp(A)');
grid

```

```

print -deps cteste2

```

```

imp41

```