



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ**

**CENTRO DE GEOCIÊNCIAS**

**CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM GEOFÍSICA**

**TESE DE MESTRADO**

**ANÁLISE TEÓRICA DO PROBLEMA DE WEAVER DA FALHA INFINITA, MODO TE  
MAGNETOTELÚRICO**

**RAIMUNDO NONATO MENEZES GUIMARÃES**



**anp**  
Agência  
Nacional do  
Petróleo



**BELÉM**

**2002**

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ  
CENTRO DE GEOCIÊNCIAS  
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM GEOFÍSICA

**ANÁLISE TEÓRICA DO PROBLEMA DE WEAVER DA FALHA INFINITA, MODO TE  
MAGNETOTELÚRICO**

TESE APRESENTADA POR

**RAIMUNDO NONATO MENEZES GUIMARÃES**

COMO REQUISITO PARCIAL À OBTENÇÃO DE GRAU DE MESTRE EM  
CIÊNCIAS NA ÁREA DE GEOFÍSICA

**Data da aprovação: 14/02/2003**

**Nota: 95 % (EXCELENTE)**

COMITÊ DE TESE:

---

Prof. Dr. Luiz Rijo (Orientador)

---

Prof. Dr. Abel González Carrasquilla

---

Prof. Dr. João dos Santos Protázio

**BELÉM**

**2002**

**T**  
G963a

---

GUIMARÃES, Raimundo Nonato Menezes.

**Análise teórica do problema de Weaver da falha infinita, modo TE magnetotelúrico.** / Raimundo Nonato Menezes Guimarães; orientador, Luiz Rijo. Belém: [s.n.], 2002.

109p.

Dissertação (Mestrado em Geofísica) – Universidade Federal do Pará. Centro de Geociências, Curso de Pós-Graduação em Geofísica, 2002.

1.GEOFÍSICA 2.FALHA INFINITA DE WEAVER  
3.SOLUÇÃO ANALÍTICA 4.MÉTODOS ELÉTRICOS  
5.MÉTODOS ELETROMAGNÉTICOS. I.RIJO, Luiz,  
orient. II.Título.

CDD: 550

---

*Aos meus pais já falecidos, Raimundo Lopes Guimarães e Maria José Menezes Guimarães, à minha esposa Darcy Praia Anselmo Guimarães e aos nossos filhos Thiago Anselmo Guimarães e Thaís Anselmo Guimarães.*

## AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço a Deus por tudo que me proporcionou.

À minha esposa Darcy e aos nossos filhos Thiago e Thaís, pelo apoio e incentivo incansáveis.

Aos meus pais e irmãos pela minha existência e manutenção em continuar existindo em boa parte de minha vida.

Ao Professor Om Prakash Verma, pelo apoio no começo do curso.

Ao meu orientador, Professor Luiz Rijo, por ter me acolhido como seu orientando.

Aos colegas João Augusto Pereira Neto, Michael Heimer e Marcos Welby pelas ajudas a mim dispensadas.

A Benildes Lopes, secretária do Curso de Pós-Graduação em Geofísica da Universidade Federal do Pará, pelo apoio recebido durante todo o meu curso.

Aos colegas professores do curso de Matemática do Campus de Marabá que me proporcionaram a oportunidade de participar deste curso.

Aos órgãos fomentadores ANP e CNPq pelo apoio dispensado ao Laboratório de Processamento Eletromagnético do Departamento de Geofísica da UFPA – PROEM.

A todos aqueles que, direta ou indiretamente, ajudaram-me durante o presente curso e realização deste trabalho.

### DESIDERATA

*“Siga placidamente por entre o ruído e a pressa. E lembre-se da paz que pode haver no silêncio. Esteja em boas relações com todas as pessoas, sempre que possível, porém, sem abdicar de sua personalidade. Fale a verdade clara e serenamente e ouça os demais, mesmo os tolos e ignorantes, eles também têm sua história. Evite as pessoas agressivas e gritantes, estas são um peso para o espírito. Se você se comparar com os outros tornar-se-á presunçoso ou deprimido, pois sempre existirão pessoas melhores ou piores que você. Vibre com suas realizações e também com seus planos. Tenha interesse na sua profissão, não importa quão humilde, ela é patrimônio concreto em meio às mudanças que o tempo traz. Seja cauteloso em seus negócios, pois o mundo está cheio de malícia, mas que isso não o cegue para a virtude que existe. Muitos lutam por um ideal elevado e por toda parte o mundo está cheio de heroísmo. Seja você mesmo, principalmente, não seja fingido em matéria de afeição: nem seja cínico em relação ao amor, pois mesmo em face de toda aridez e todo desencanto ele é eterno como a vida. Acumule com bondade o passar do tempo despindo-se com serenidade as coisas da juventude. Acumule fortaleza de espírito para defender-se das infelicidades súbitas, mas não se desgaste com frutos da imaginação. Muitos temores nascem do cansaço e da solidão, e além de uma disciplina integral seja gentil com você mesmo. Portanto, esteja em paz com Deus. E qualquer que seja seu trabalho ou aspiração mantenha-se em paz com sua própria alma, em meio ao tumulto da vida. Com toda falsidade, tédio e sonhos despedaçados, ainda assim o mundo é belo, seja cuidadoso e procure ser feliz.”*

*Manuscrito encontrado em Baltimore, em 1692.*

*Cópia datilografada encontrada, por mim, no Campus de Belém da UFPA durante minha graduação na década de 80.*

## SUMÁRIO

<b>DEDICATÓRIA</b> .....	i
<b>AGRADECIMENTOS</b> .....	ii
<b>EPÍGRAFE</b> .....	iii
<b>RESUMO</b> .....	01
<b>ABSTRACT</b> .....	02
<b>1 - INTRODUÇÃO</b> .....	03
1.1 UM POUCO DE HISTÓRIA DO PROBLEMA .....	03
1.2 MOTIVAÇÃO .....	04
1.3 OBJETIVOS .....	08
1.4 ORGANIZAÇÃO DA TESE .....	12
<b>2 - O PROBLEMA DA FALHA VERTICAL INFINITA</b> .....	13
2.1 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA .....	13
2.2 ANÁLISE MATEMÁTICA .....	14
<b>2.2.1 Condições de Contorno</b> .....	15
2.2.1.1 Primeira Condição de Contorno .....	15
2.2.1.2 Segunda Condição de Contorno .....	21
2.2.1.3 Terceira Condição de Contorno .....	22
2.2.1.4 Quarta Condição de Contorno .....	24
2.2.1.5 Quinta Condição de Contorno .....	25
2.2.1.6 Sexta Condição de Contorno .....	28
2.2.1.7 Sétima Condição de Contorno .....	29
2.2.1.8 Oitava Condição de Contorno .....	30
2.3 AJUSTES DAS CONCLUSÕES DAS CONDIÇÕES DE CONTORNO .....	31
<b>2.3.1 As Novas Soluções</b> .....	31
<b>2.3.2 As Novas Conclusões</b> .....	32
2.3.2.1 Primeira Condição de Contorno .....	32
2.3.2.2 Segunda Condição de Contorno .....	33

2.3.2.3 Terceira Condição de Contorno .....	33
2.3.2.4 Quarta Condição de Contorno .....	33
2.3.2.5 Quinta Condição de Contorno .....	34
2.3.2.6 Sexta Condição de Contorno .....	34
2.3.2.7 Sétima Condição de Contorno .....	34
2.3.2.8 Oitava Condição de Contorno .....	34
2.4 A SOLUÇÃO DO PROBLEMA .....	35
<b>2.4.1 Condição Quase-estática .....</b>	<b>35</b>
2.4.1.1 Cálculo do Valor de P .....	36
2.4.1.2 Cálculo das Funções Kernels .....	36
2.4.1.3 As Novas Soluções sob a Condição quase-estática .....	38
2.4.1.4 Campos Elétricos Medidos na Superfície .....	39
2.4.1.5 Normalização dos Campos elétricos .....	40
<b>3 - CONCLUSÃO .....</b>	<b>46</b>
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....</b>	<b>47</b>
<b>ANEXOS .....</b>	<b>49</b>
<b>ANEXO A - PROVAS DE QUE AS SOLUÇÕES PROPOSTAS POR SAMPAIO SÃO SOLUÇÕES DA EQUAÇÃO DE HELMHOLTZ .....</b>	<b>50</b>
<b>ANEXO B - PROVAS DE QUE OS TERMOS ADICIONADOS ÀS SOLUÇÕES PROPOSTAS POR SAMPAIO SÃO SOLUÇÕES DA EQUAÇÃO DE HELMHOLTZ .....</b>	<b>60</b>
<b>ANEXO C - ANÁLISE DE FOURIER .....</b>	<b>67</b>
<b>ANEXO D - TEOREMAS DE PARIDADES .....</b>	<b>74</b>
<b>ANEXO E - RESOLUÇÃO DAS INTEGRAIS <math>I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6, I_7, I_8, I_9, I_{10}, I_{11}</math> E <math>I_{12}</math> DO TEXTO .....</b>	<b>80</b>
<b>ANEXO F - ESTUDOS DE <math>k_0, k_1, k_2, v_0, v_1</math> E <math>v_2</math> .....</b>	<b>91</b>
<b>ANEXO G - N-ÉSIMAS RAÍZES DE UM NÚMERO COMPLEXO .....</b>	<b>108</b>



## RESUMO

É apresentada uma solução totalmente analítica do modelo da falha infinita para o modo TE magnetotelúrico, levando em conta a presença do ar, utilizando como base o trabalho de Sampaio apresentado em 1985, que apresenta uma solução parcialmente analítica e parcialmente numérica – solução híbrida. Naquela solução foram aplicadas oito condições de contorno, sendo que em quatro delas foram encontradas inconsistências matemáticas que foram dirimidas com alterações adequadas nas soluções propostas por Sampaio. Tais alterações propiciaram a chegar-se à solução totalmente analítica aqui apresentada. A solução obtida foi comparada com a solução de Weaver, com a de Sampaio e com o resultado do método numérico dos elementos finitos para contrastes de resistividade iguais a 2, 10 e 50. A comparação da solução analítica, para o campo elétrico normalizado, com a solução de elementos finitos mostra que a solução analítica proporcionou resultados mais próximos, em comparação aos fornecidos por Weaver e por Sampaio. Este é um problema muito difícil, aberto para uma solução analítica definitiva. A solução apresentada aqui é, nesta direção, um grande passo.

## **ABSTRACT**

In this work it is shown an analytic solution for the Magnetotelluric TE mode infinite fault, taking in consideration the presence of the air. The solution following the hybrid solution, partially analytic and partially numeric, proposed in 1985 by Sampaio. In his solution he applied eight boundary conditions. We found that four of them are mathematically inconsistent and had to be modified. The modification of them took us to the analytic solution discussed here. This solution is compared with those obtained by Weaver and by Sampaio and with finite element method, using resistivity contrast equal to 2, 10 and 50 between the two sides of the fault. As a result, the analytic solution obtained here for the normalized electric field shows a better fit with the finite element solution than those proposed by either Weaver or Sampaio. This is a very difficult problem and it is still open to a definitive analytic solution. The one shown here is just one big step toward this goal.

# 1- INTRODUÇÃO

## 1.1 UM POUCO DE HISTÓRIA DO PROBLEMA

Segundo Heins (1962), a investigação do problema de espalhamento de uma onda eletromagnética plana por uma interface condutora remonta ao fim do século XIX. Somerfeld (1896) lançou as bases para a solução do problema da difração de uma onda eletromagnética plana por um semiplano perfeitamente condutor.

O problema de modelos magnetotelúricos bidimensionais apresenta duas variedades. Polarização magnética (TM), na qual o campo magnético é horizontal e paralelo ao eixo da estrutura e polarização elétrica (TE), na qual o campo elétrico é horizontal e paralelo ao eixo da estrutura (Rijo, 1992).

Para problemas magnetotelúricos envolvendo espalhamento de ondas eletromagnéticas por modelos bidimensionais existem soluções numéricas e soluções analíticas. Entre as soluções numéricas estão o método das equações integrais (Hohmann, 1971), o método das diferenças finitas (Jones, 1972) e o método dos elementos finitos (Rijo, 1977). Entre as soluções analíticas estão as de d'Erceville & Kunetz (1962), para o caso de polarização magnética (TM) e a de Weaver (1963), para o caso de polarização elétrica (TE). Ambas empregam as integrais de Fourier e assumem a condição quase-estática na solução de espalhamento de uma onda eletromagnética plana por dois quartos-de-espaço condutores. A condição quase-estática, aplicada ao problema do modelo da falha no caso de polarização magnética, implica em um valor constante para o campo magnético no plano horizontal, que separa o semi-espaço não-condutor dos dois quartos-de-espaço condutores. O mesmo não ocorre com o campo elétrico no caso de polarização elétrica. Por causa disto, d'Erceville & Kunetz (1962) determinaram a solução exata do problema dentro da condição quase-estática, enquanto Weaver (1963) optou pela invariabilidade da componente horizontal do campo magnético na superfície, determinando uma solução aproximada para o problema.

Sampaio (1978) propôs uma modificação da solução de Weaver (1963), mantendo a mesma condição de contorno para a componente horizontal do campo magnético no cálculo do campo elétrico, mas adicionando uma correção para o campo magnético através de expressões e condições de contorno independentes.

Sampaio (1985) propôs um trabalho que investiga o espalhamento de uma onda eletromagnética por uma falha vertical infinita no caso de polarização elétrica (TE), analisando o comportamento do campo elétrico nas três regiões do espaço e empregando as condições de contorno exatas em todas as fronteiras. Tal formulação, constitui uma extensão dos trabalhos de Weaver (1963) e de Sampaio (1978), cuja solução emprega, como alternativa às condições de contorno de Leontovich, a sugestão de Mann (1970).

Heimer (2001) resolveu o mesmo problema proposto por Sampaio (1985) usando o método dos elementos finitos. Chegou a um resultado cujo gráfico ficou próximo do alcançado por Weaver (1963), porém com precisão considerada mais próxima da realidade física que as obtidas por Weaver (1963) e por Sampaio (1985).

## 1.2 MOTIVAÇÃO

A partir dos resultados obtidos por Sampaio (1985), Heimer (2001) reproduziu todos os gráficos com os recursos computacionais disponíveis, que naquela época eram inexistentes, a partir da série final de Neumann de 2 a 16 termos, enquanto a de Sampaio (1985) apresentava apenas até 3 termos. A deformação do gráfico final apresentado por Sampaio (1985), que o atribuiu a fenômenos eletromagnéticos, Heimer (2001) a partir de seus gráficos, mostra que se acentua quando se acrescenta o número de termos da série final do trabalho de Sampaio (1985), incorrendo em descontinuidade. Tal situação sinalizou para a possibilidade de que o resultado obtido por Sampaio (1985), na verdade, divergia, devendo ser analisado matematicamente, de modo criterioso, para tirar qualquer tipo de dúvida a esse respeito. Conforme as Figuras de 1 a 6, retiradas de Heimer (2001), observa-se claramente que com o aumento do número de termos aumenta a solução de Sampaio (1985) diverge. A solução numérica por elementos finitos é representada por círculos (usando o algoritmo do campo total) e por linha pontilhada (usando o algoritmo do campo secundário).

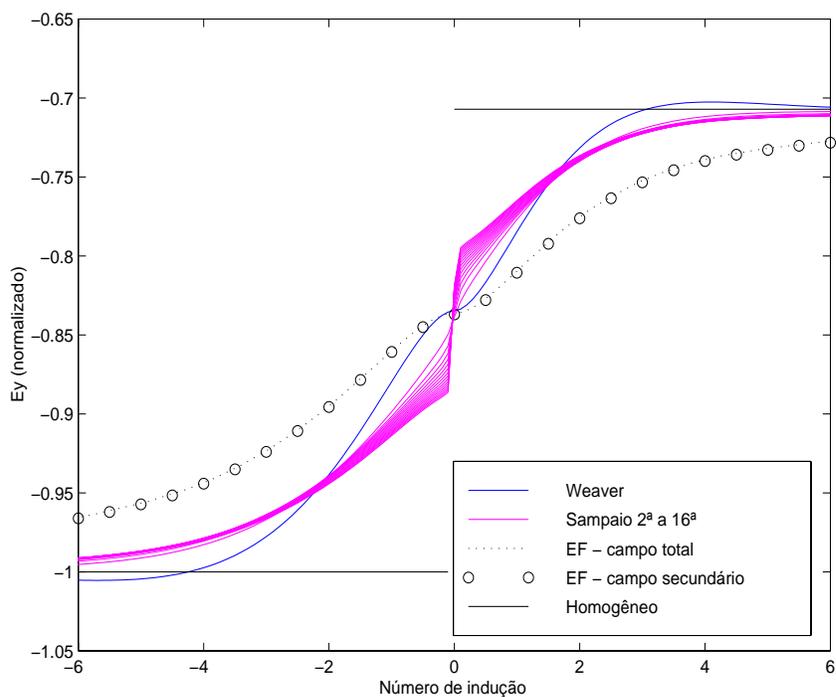


Figura 1: Parte real do campo elétrico normalizado no modo TE para  $R=2$ .  
Iterações 2 a 16 da solução de Sampaio.

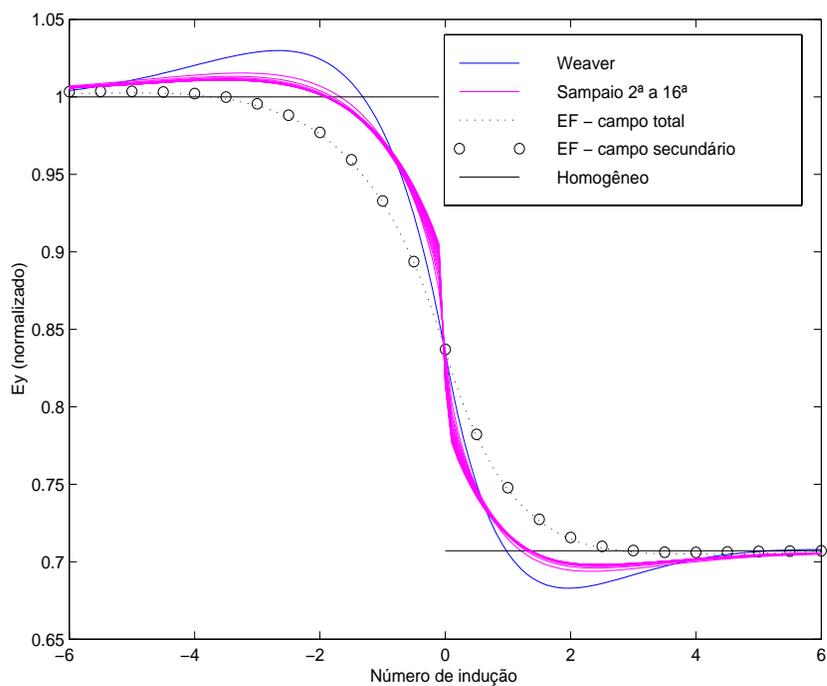


Figura 2: Parte imaginária do campo elétrico normalizado no modo TE para  $R=2$ .  
Iterações 2 a 16 da solução de Sampaio.

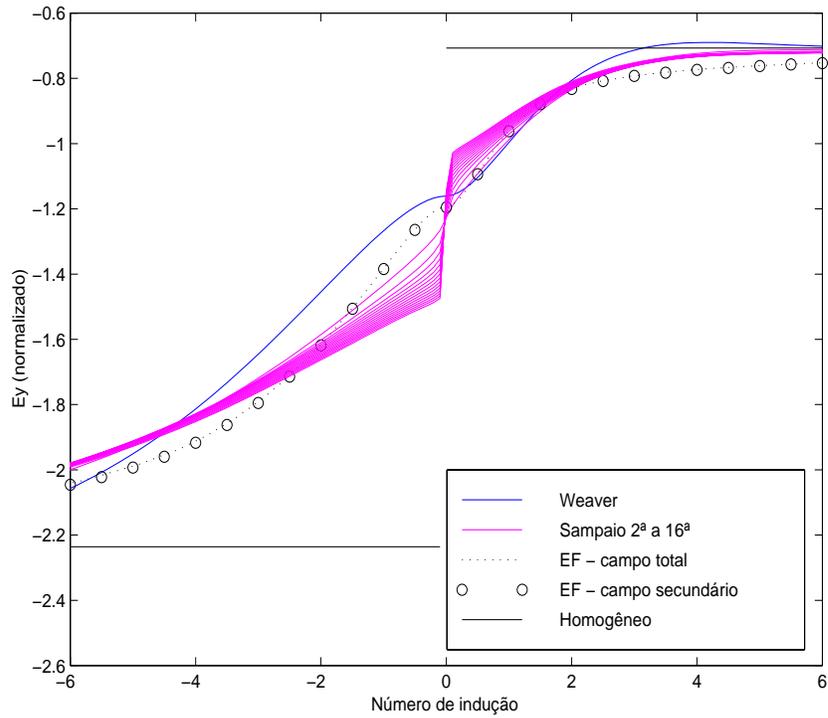


Figura 3: Parte real do campo elétrico normalizado no modo TE para  $R=10$ .  
Iterações 2 a 16 da solução de Sampaio.

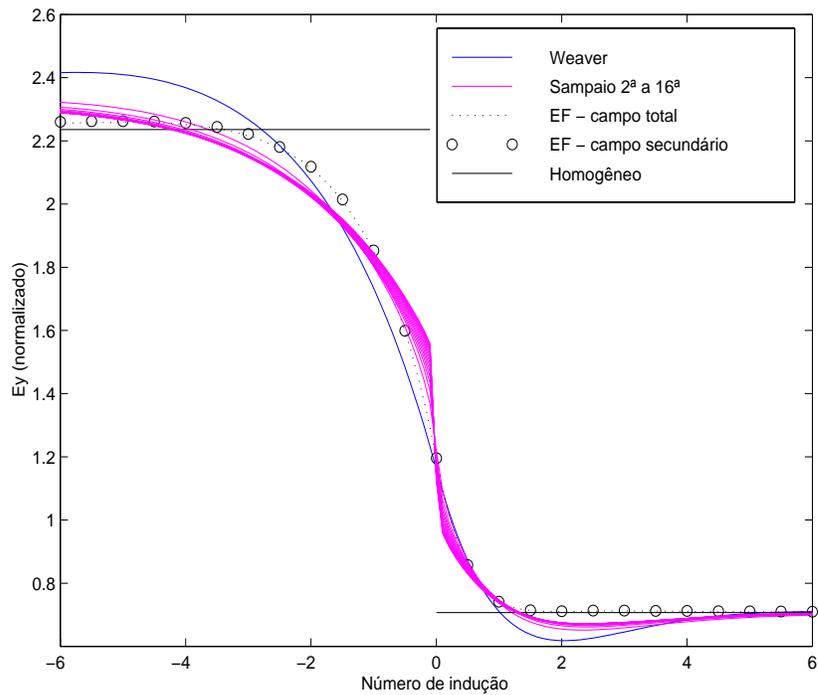


Figura 4: Parte imaginária do campo elétrico normalizado no modo TE para  $R=10$ .  
Iterações 2 a 16 da solução de Sampaio.

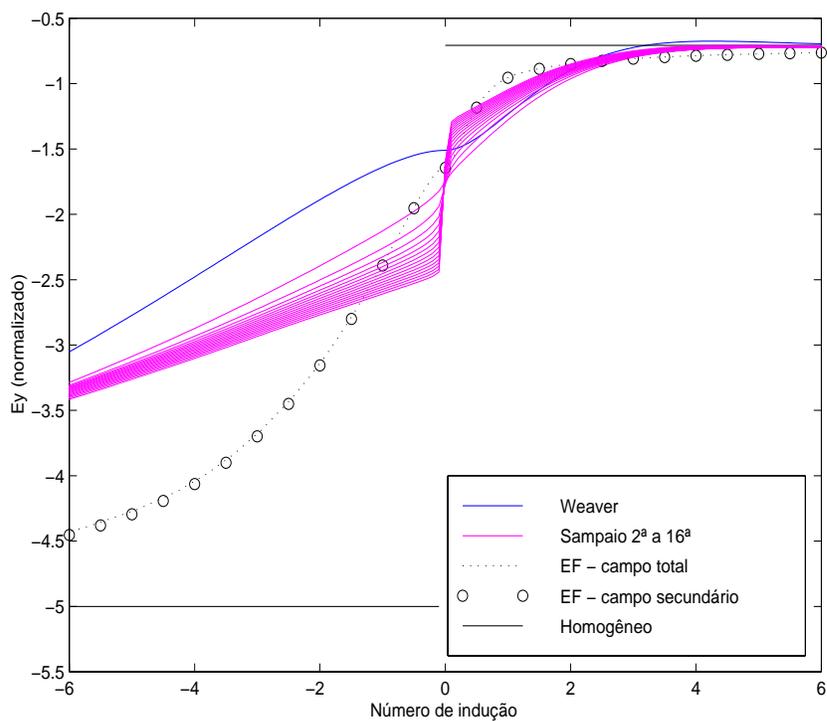


Figura 5: Parte real do campo elétrico normalizado no modo TE para R=50.  
Iterações 2 a 16 da solução de Sampaio.

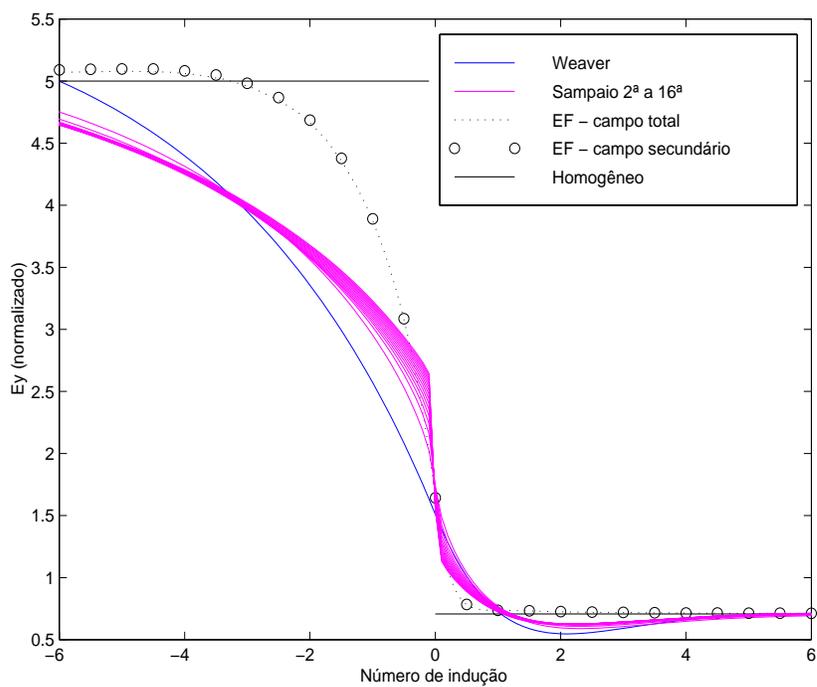


Figura 6: Parte imaginária do campo elétrico normalizado no modo TE para R=50.  
Iterações 2 a 16 da solução de Sampaio.

### 1.3 OBJETIVOS

O primeiro objetivo deste trabalho consiste analisar matematicamente, de modo criterioso, o trabalho apresentado por Sampaio (1985), em busca de uma razão matemática que explique porque a sua solução diverge. A análise se desenvolve a partir da equação matemática obtida com a aplicação da primeira condição de contorno no espaço livre, que apresenta incompatibilidades quanto à paridade de funções, isto é, equação em que a função do primeiro membro tem paridade diferente da paridade da do segundo. Isto ocorre nas condições de contorno de números 1, 3, 5 e 7, exposto mais adiante no texto.

Uma vez detectada a inconsistência matemática o segundo objetivo consiste em reformular as soluções propostas por Sampaio (1985), de tal sorte que as paridades das funções sejam compatíveis, que foi alcançado com a adição de termos devidamente calculados.

O terceiro e último objetivo foi o estabelecimento de uma solução totalmente analítica a partir das novas soluções propostas neste trabalho, que foi alcançada e cujos gráficos estão nas Figuras de 7 a 12 em que são comparadas as soluções por elemento finito (linha pontilhada) e a solução proposta neste trabalho (linha cheia).

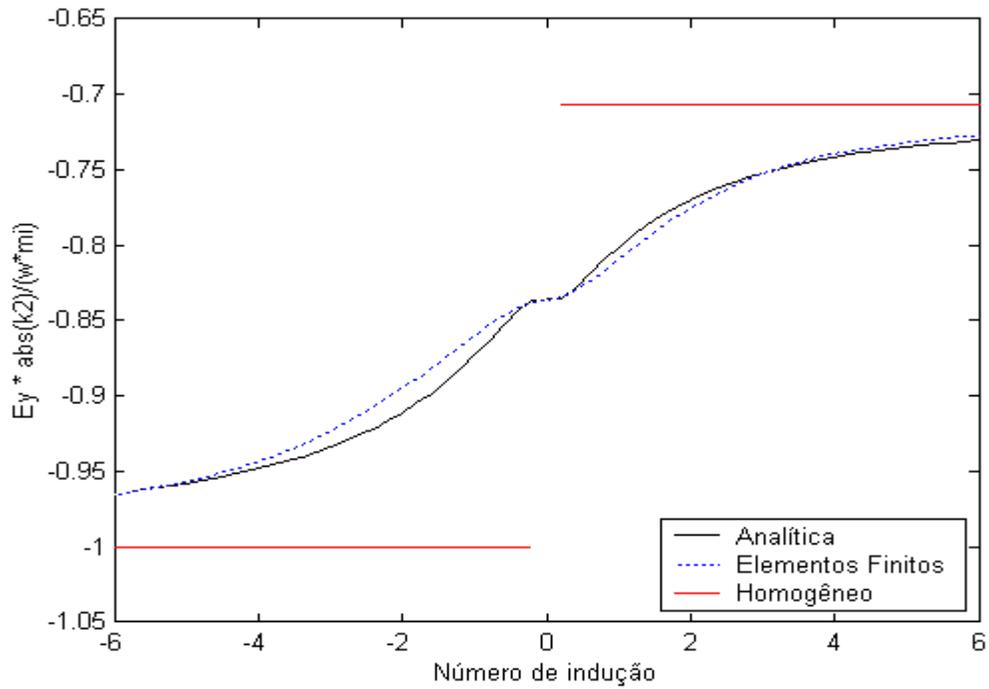


Figura 7: Parte real do campo elétrico normalizado no modo TE para  $R=2$ .

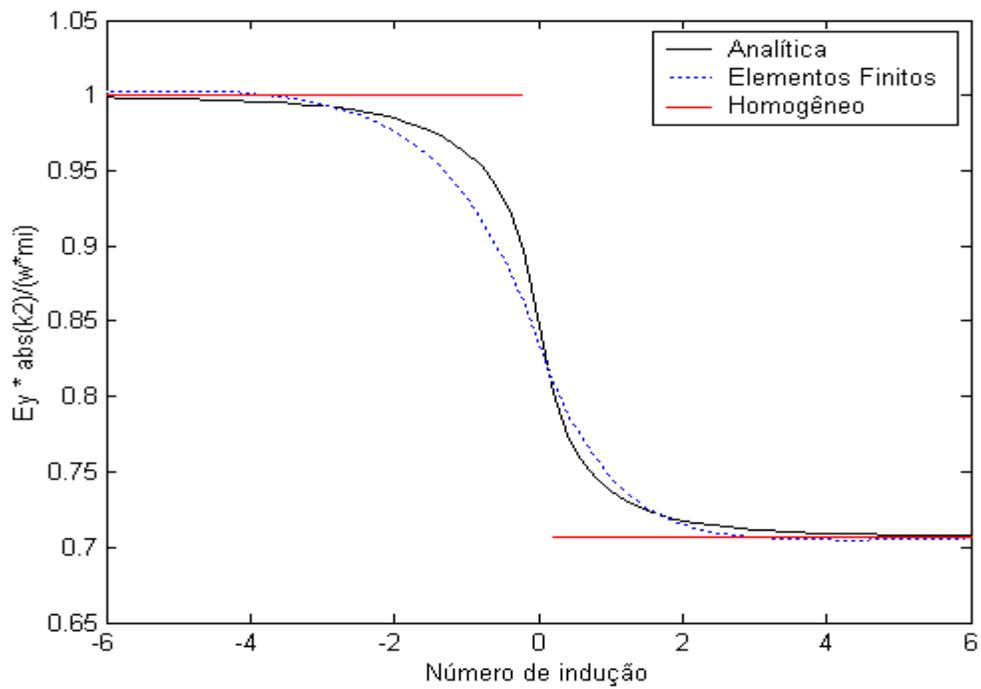


Figura 8: Parte imaginária do campo elétrico normalizado no modo TE para  $R=2$ .

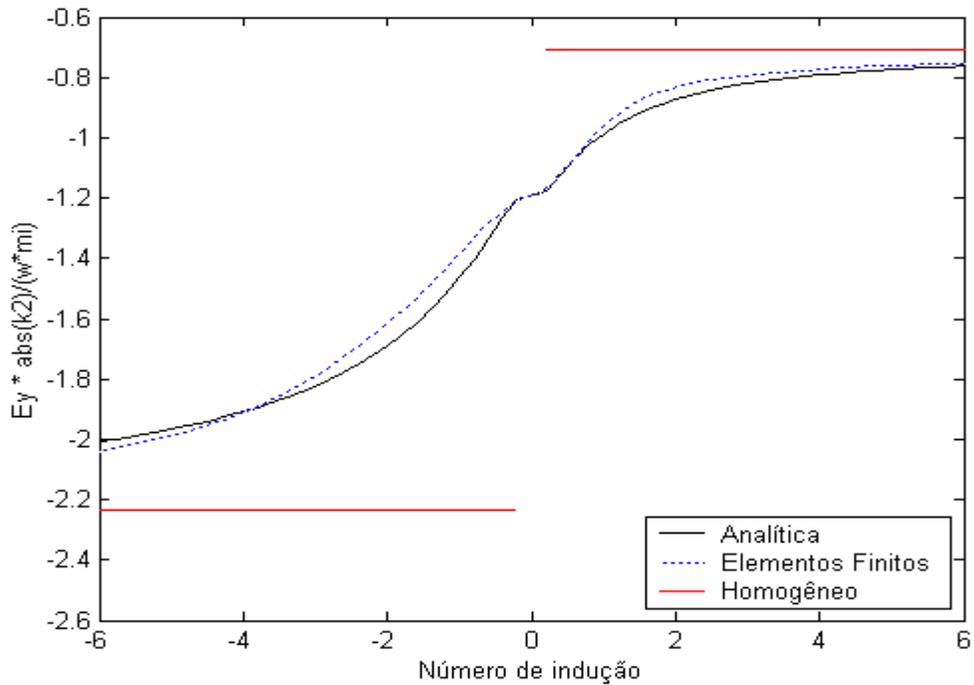


Figura 9: Parte real do campo elétrico normalizado no modo TE para R=10.

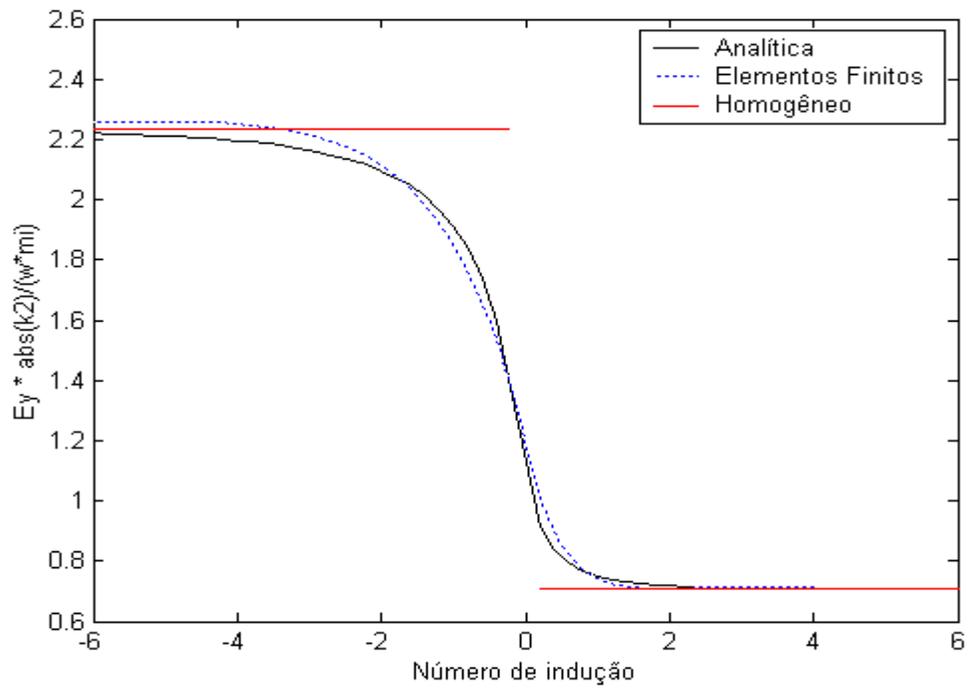


Figura 10: Parte imaginária do campo elétrico normalizado no modo TE para R=10.

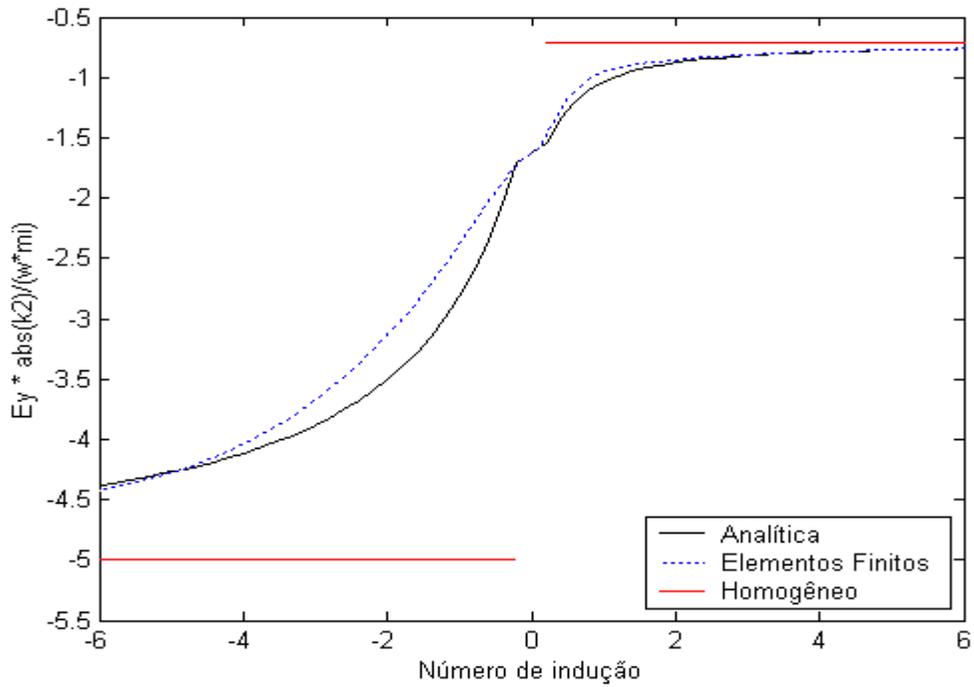


Figura 11: Parte real do campo elétrico normalizado no modo TE para  $R=50$ .

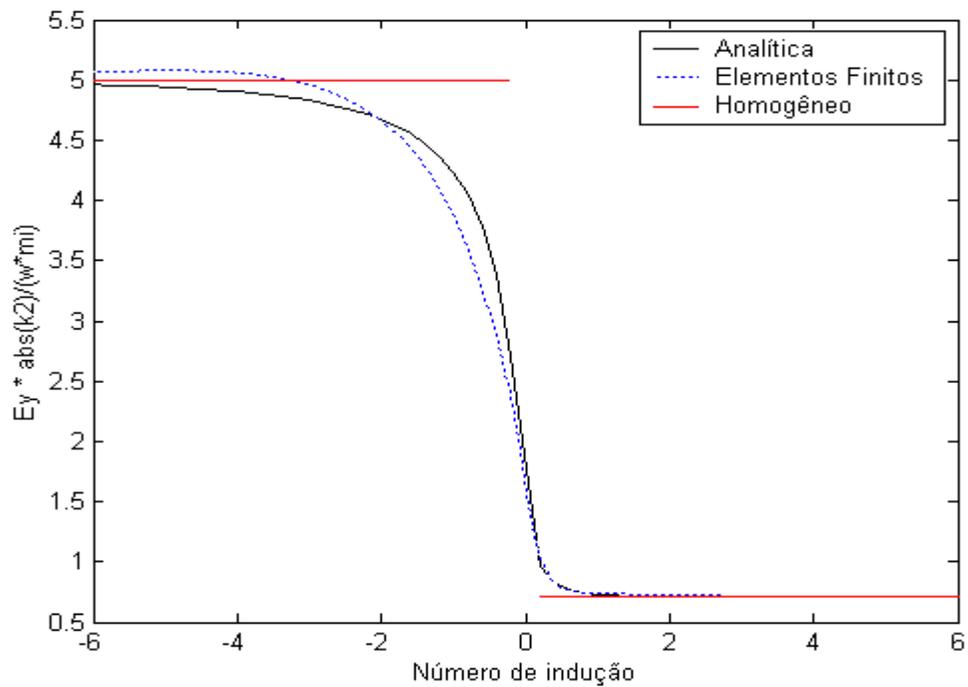


Figura 12: Parte imaginária do campo elétrico normalizado no modo TE para  $R=50$ .

## 1.4 ORGANIZAÇÃO DA TESE

Este trabalho de tese apresenta, no primeiro capítulo, uma introdução que trata de uma forma geral o trabalho realizado. O segundo capítulo apresenta o corpo do trabalho, onde são apresentadas as análises para a obtenção do resultado final. O terceiro capítulo contém as conclusões e recomendações. Em seguida são fornecidas as referências bibliográficas utilizadas. A tese é finalizada com sete anexos que esclarecem os detalhes matemáticos usados no texto.

## 2 - O PROBLEMA DA FALHA VERTICAL INFINITA

### 2.1 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

A metodologia a seguir foi proposta pelo Professor Dr. Edson Emanuel Starteri Sampaio da UFBA (1985), para a resolução do problema de espalhamento de uma onda eletromagnética plana de polarização elétrica, ou modo TE, incidente sobre uma *falha infinita vertical*, conforme é mostrado na Figura 13.

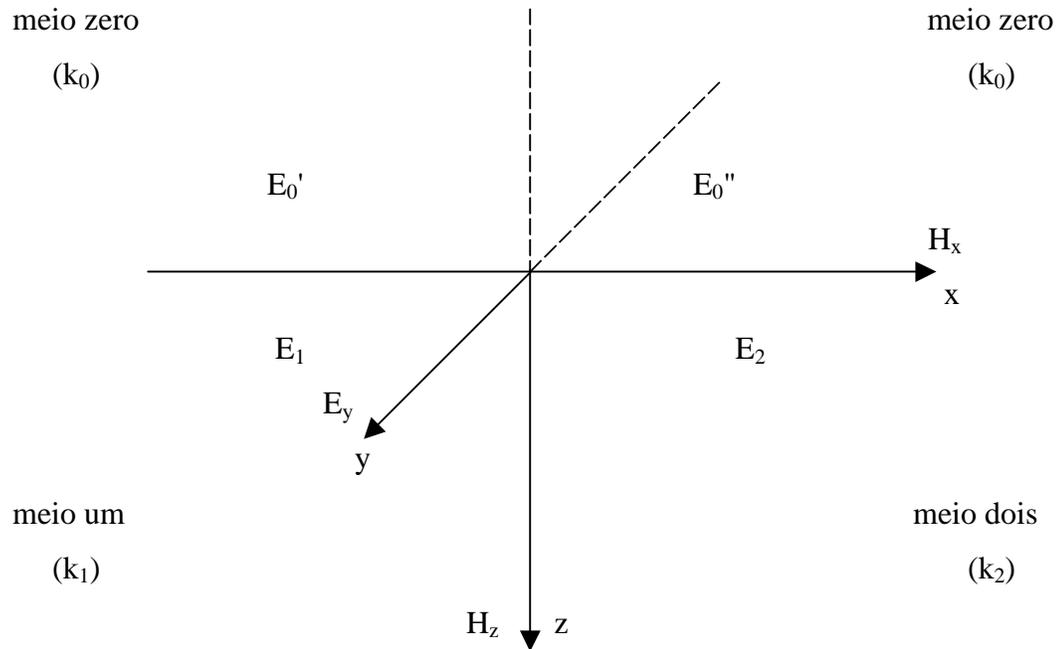


Figura 13: Modelo da falha infinita modo TE

A mencionada metodologia consiste em solucionar a *equação de onda de Helmholtz*, em duas dimensões:

$$\frac{\partial^2 E_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_i}{\partial z^2} + k_i^2 E_i = 0, \text{ onde: } \begin{cases} i = 0, 1, 2 \\ \text{Re}[k_i] > 0 \end{cases}; \quad (1)$$

sujeita às condições de contorno apropriadas.

Em (1) trabalha-se com:

$$k_i^2 = j\omega\mu_0\sigma_i, \quad (2)$$

$$j = \sqrt{-1}, \text{ é a unidade complexa.} \quad (3)$$

$$\omega = 2\pi f, \text{ é a frequência angular e } f \text{ é a frequência da onda,} \quad (4)$$

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}, \text{ é a permeabilidade magnética do vácuo,} \quad (5)$$

$$\sigma_i = \frac{1}{\rho_i}, \quad \begin{cases} \sigma_i \text{ é a condutividade elétrica do meio } i, \\ \rho_i \text{ é a resistividade elétrica do meio } i. \end{cases} \quad (6)$$

## 2.2 ANÁLISE MATEMÁTICA

A equação (1) é uma *equação diferencial parcial linear homogênea elíptica de 2ª ordem, pois obedece à forma:*

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + Fu = 0, \quad (7)$$

onde de (1) e de (7), obtém-se:

$$B^2 - 4AC < 0, \quad (8)$$

pois  $B = 0$ ,  $A = 1$  e  $C = 1$ , classificando-a como *elíptica*. A linearidade de (1) permite o uso do *Princípio da Superposição*, (Spiegel, 1976).

Sampaio (1985) propôs as seguintes soluções, uma para cada região considerada do espaço:

$$E_0' = P e^{jk_0 z} + R_0' e^{-jk_0 z} + \int_0^{+\infty} f_0'(s) \cos(sz) e^{-u_0 x} ds + \int_0^{+\infty} g_0'(t) \cos(tx) e^{v_0 z} dt, \quad z < 0 \text{ e } x < 0. \quad (9)$$

$$E_0'' = P e^{jk_0 z} + R_0'' e^{-jk_0 z} + \int_0^{+\infty} f_0''(s) \cos(sz) e^{-u_0 x} ds + \int_0^{+\infty} g_0''(t) \cos(tx) e^{v_0 z} dt, \quad z < 0 \text{ e } x > 0. \quad (10)$$

$$E_1 = T_1 e^{jk_1 z} + \int_0^{+\infty} f_1(s) \cos(sz) e^{u_1 x} ds + \int_0^{+\infty} g_1(t) \cos(tx) e^{-v_1 z} dt, \quad z > 0 \text{ e } x < 0. \quad (11)$$

$$E_2 = T_2 e^{jk_2 z} + \int_0^{+\infty} f_2(s) \cos(sz) e^{-u_2 x} ds + \int_0^{+\infty} g_2(t) \cos(tx) e^{-v_2 z} dt, \quad z > 0 \text{ e } x > 0. \quad (12)$$

Nestas equações,  $P$  é a amplitude de  $E_y$  incidente no meio zero,  $R_0'$  e  $R_0''$  são os coeficientes de reflexão,  $T_1$  é a intensidade do campo elétrico no meio um,  $T_2$  é a intensidade do campo elétrico no meio dois,  $f_0'(s)$ ,  $f_0''(s)$ ,  $f_1(s)$ ,  $f_2(s)$ ,  $g_0'(s)$ ,  $g_0''(s)$ ,  $g_1(s)$  e  $g_2(t)$  são as funções “kernels” a serem determinadas,  $s$  e  $t$  são variáveis de integração. Além do mais:

$$u_i = \sqrt{s^2 - k_i^2} \quad \text{ou} \quad u_i^2 = s^2 - k_i^2, \quad (13)$$

$$v_i = \sqrt{t^2 - k_i^2} \quad \text{ou} \quad v_i^2 = t^2 - k_i^2, \quad (14)$$

$$\text{Re}[u_i] > 0, \quad (15)$$

$$\text{Re}[v_i] > 0. \quad (16)$$

A prova de que (9), (10), (11) e (12) são soluções da equação (1), é apresentada nos itens 1, 2, 3 e 4 do ANEXO A, respectivamente.

## 2.2.1 Condições de contorno

As condições de contorno aplicadas são as *continuidades do campo elétrico* e de sua *derivada normal* em cada interface de separação, bem como a *convergência do campo no infinito*, isto é, o campo secundário desvanece quando a abscissa tende para  $\pm\infty$  restando apenas o campo homogêneo, conforme detalhado a seguir, (Sampaio, 1985).

### 2.2.1.1 Primeira condição de contorno

$$E_0' = E_0'', \quad (17)$$

em  $x = 0$  e  $z < 0$ .

De (9) e (10) em (17), obtém-se:

$$\begin{aligned} P e^{jk_0z} + R_0' e^{-jk_0z} + \int_0^{+\infty} f_0'(s) \cos(sz) e^{u_0x} ds + \int_0^{+\infty} g_0'(t) \cos(tx) e^{v_0z} dt = P e^{jk_0z} + R_0'' e^{-jk_0z} + \\ + \int_0^{+\infty} f_0''(s) \cos(sz) e^{-u_0x} ds + \int_0^{+\infty} g_0''(t) \cos(tx) e^{v_0z} dt. \end{aligned} \quad (18)$$

Fazendo  $x = 0$  em (18), simplificando e fatorando, obtém-se:

$$\int_0^{+\infty} [f_0''(s) - f_0'(s)] \cos(sz) ds = (R_0' - R_0'') e^{-jk_0z} + \int_0^{+\infty} [g_0'(t) - g_0''(t)] e^{v_0z} dt. \quad (19)$$

De (15) e (31a) do ANEXO C e de (19) acima, obtém-se:

$$\mathfrak{S}_C \{f_0''(s) - f_0'(s)\} = F_C(z) = \int_0^{+\infty} [f_0''(s) - f_0'(s)] \cos(sz) ds, \quad (20)$$

onde  $\mathfrak{S}_C$  é a *transformada direta do co-seno de Fourier da função*  $[f_0''(s) - f_0'(s)]$ . De (17) do ANEXO C, pode-se afirmar que  $F_C(z)$  é uma função *par* na variável  $z$  (Pinkus & Zafrany, 1977), e dos *teoremas 2 e 3* do ANEXO D as funções do membro direito de (19) acima são *nem par, nem ímpar* na variável  $z$ .

Como as funções do membro direito de (19) não satisfazem o *teorema 1* do ANEXO D, pode-se afirmar que a paridade de  $F_C(z)$  não é satisfeita, gerando uma *contradição matemática*.

Há três alternativas para solucionar tal impedimento:

- 1) Procurar outra ferramenta matemática que seja adequada;
- 2) Modificar as funções  $E_0'$  e  $E_0''$  de tal sorte que, ao se considerar a primeira condição de contorno,  $E_0' = E_0''$ , a função total no membro direito de (19) seja par na variável  $z$  como  $F_C(z)$ ; ou

- 3) Modificar as funções  $E_0'$  e  $E_0''$ , através da introdução de termos, de tal sorte que ao se aplicar a condição de contorno,  $E_0' = E_0''$ , obtenha-se a *transformada direta de Fourier* da função  $[f_0'(s) - f_0''(s)]$ ,  $F(z)$ .

No presente momento, opta-se pela terceira alternativa. Devido à escolha, precisa-se fazer as seguintes considerações a respeito da transformada de Fourier, conforme o ANEXO C.

A *transformada direta de Fourier* da função  $f(s) = [f_0''(s) - f_0'(s)]$  é dada por:

$$\mathfrak{F}\{f(s)\} = F(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(s)e^{-jzs} ds. \quad (21)$$

Como:

$$e^{-jzs} = \cos(zs) - j \sin(zs). \quad (22)$$

Então de (22) em (21), obtém-se:

$$\mathfrak{F}\{f(s)\} = F(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(s)\cos(zs)ds - j \int_{-\infty}^{+\infty} f(s)\sin(zs)ds. \quad (23)$$

sendo

$$F_C(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(s)\cos(zs)ds \quad (24)$$

a *transformada direta do co-seno de Fourier* da função  $f(s)$  e

$$F_S(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(s)\sin(zs)ds \quad (25)$$

a *transformada direta do seno de Fourier* da função  $f(s)$ .

De (24) e (25) em (23), obtém-se:

$$\mathfrak{F}\{f(s)\} = F(z) = F_C(z) - j F_S(z). \quad (26)$$

A transformada inversa de Fourier da função  $F(z)$  é dada por:

$$\mathfrak{F}^{-1}\{F(z)\} = f(s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(z) e^{jzs} dz. \quad (27)$$

Como

$$e^{jzs} = \cos(zs) + j \sin(zs). \quad (28)$$

De (28) em (27), obtém-se:

$$\mathfrak{F}^{-1}\{F(z)\} = f(s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(z) \cos(zs) dz + j \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(z) \sin(zs) dz. \quad (29)$$

sendo

$$\mathfrak{F}^{-1}_C\{F(z)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(z) \cos(zs) dz \quad (30)$$

a transformada inversa do co-seno de Fourier da função  $F(z)$  e

$$\mathfrak{F}^{-1}_S\{F(z)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(z) \sin(zs) dz \quad (31)$$

a transformada inversa do seno de Fourier da função  $F(z)$ .

De (30) e (31) em (29), obtém-se:

$$\mathfrak{S}^{-1}\{F(z)\} = f(s) = \mathfrak{S}^{-1}_c\{F(z)\} + j \mathfrak{S}^{-1}_s\{F(z)\}. \quad (32)$$

Como se deseja obter a função  $f(s) = [f_0''(s) - f_0'(s)]$  a partir do primeiro membro de (19), que é a *transformada direta do co-seno de Fourier da função  $f(s)$* ,  $\mathfrak{S}_c\{f(s)\}$ . Constata-se que para  $\mathfrak{S}_c\{f(s)\}$  ser a *transformada direta de Fourier*  $\mathfrak{S}\{f(s)\}$ ,  $f(s)$  deveria ser par, obrigatoriamente. Isto é, de (23) e (26), obtém-se:

$$\mathfrak{S}\{f(s)\} = F(z) = \mathfrak{S}_c\{f(s)\} = F_c(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(s) \cos(zs) ds. \quad (33)$$

Desde que a função  $f(s)$  seja par na variável  $s$  e do *teorema 1* do ANEXO D, levando em consideração as restrições lá existentes, as funções  $f_0'(s)$  e  $f_0''(s)$  podem ser *nem par, nem ímpar* na variável  $s$ . Pelo *teorema 4* do ANEXO D as funções  $f_0'(s)$  e  $f_0''(s)$  podem ser ambas pares na variável  $s$ . Pelo *teorema 5* do ANEXO D as funções  $f_0'(s)$  e  $f_0''(s)$  não podem ser ambas ímpares. E pelo *teorema 6* do ANEXO D as funções  $f_0'(s)$  e  $f_0''(s)$  não podem ter paridades distintas.

Devido à contradição matemática mostrada em (19), precisa-se alterar a solução  $E_0'$  em (9) com a adição do termo

$$e = -j \int_0^{+\infty} f_0'(s) \sin(sz) e^{-u_0 x} ds, \quad (34)$$

e a solução  $E_0''$  com a adição do termo

$$e_0 = -j \int_0^{+\infty} f_0''(s) \sin(sz) e^{-u_0 x} ds, \quad (35)$$

para tornar viável a obtenção da *transformada direta de Fourier* da função  $[f_0'(s) - f_0''(s)]$  no primeiro membro de (19), tentando resolver tal problema com a utilização da ferramenta matemática transformada de Fourier, satisfazendo o item 3 das alternativas propostas na

página 3 deste texto, onde as funções  $f_0'(s)$  e  $f_0''(s)$  são livres quanto à paridade. As provas de que (34) e (35) são soluções de (1) estão nos itens 1 e 2 do ANEXO B, respectivamente.

As novas equações de  $E_0'$  e  $E_0''$ , são então:

$$E_0' = P e^{jk_0z} + R_0' e^{-jk_0z} + \int_0^{+\infty} f_0'(s) \cos(sz) e^{u_0x} ds - j \int_0^{+\infty} f_0'(s) \sin(sz) e^{u_0x} ds + \int_0^{+\infty} g_0'(t) \cos(tx) e^{v_0z} dt, \quad z < 0 \text{ e } x < 0. \quad (36)$$

$$E_0'' = P e^{jk_0z} + R_0'' e^{-jk_0z} + \int_0^{+\infty} f_0''(s) \cos(sz) e^{-u_0x} ds - j \int_0^{+\infty} f_0''(s) \sin(sz) e^{-u_0x} ds + \int_0^{+\infty} g_0''(t) \cos(tx) e^{v_0z} dt, \quad z < 0 \text{ e } x > 0. \quad (37)$$

Aplicando a primeira condição de contorno,  $E_0' = E_0''$ , em  $x = 0$ , obtém-se:

$$\int_0^{+\infty} [f_0''(s) - f_0'(s)] e^{-jsz} ds = (R_0' - R_0'') e^{-jk_0z} + \int_0^{+\infty} [g_0'(t) - g_0''(t)] e^{v_0z} dt, \quad (38)$$

onde

$$\int_0^{+\infty} [f_0''(s) - f_0'(s)] e^{-jsz} ds = \mathfrak{F} \{ [f_0''(s) - f_0'(s)] \} = F(z) \quad (38.1)$$

é a transformada direta de Fourier da função  $[f_0''(s) - f_0'(s)]$ . Como  $F(z)$  é nem par, nem ímpar em  $z$ , em (38), e as funções de  $z$  que estão nas duas parcelas do segundo membro de (38) são funções nem par, nem ímpar em  $z$ , logo o impedimento existente em (19) passa a inexistir a partir de (38).

Aplicando a transformada inversa de Fourier em (38), obtém-se:

$$f_0''(s) - f_0'(s) = \frac{1}{2\pi} (R_0' - R_0'') \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-jk_0z} e^{jsz} dz + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \int_0^{+\infty} [g_0'(t) - g_0''(t)] e^{v_0z} dt \right] e^{jsz} dz, \quad (39)$$

ou por imposição física do problema por estar-se no meio zero, onde  $z \leq 0$ , obtém-se:

$$f_0''(s) - f_0'(s) = \frac{2}{\pi} (R_0' - R_0'') \underbrace{\int_{-\infty}^0 e^{-j(k_0 - s)z} dz}_{I_1} + \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \underbrace{\left[ \int_{-\infty}^0 [g_0'(t) - g_0''(t)] e^{v_0 z} e^{jsz} dz \right]}_{I_2} dt. \quad (40)$$

A resolução da integral  $I_1$  de (40) está no item 1 do ANEXO E, cujo resultado está em (9) do referido item. A resolução da integral  $I_2$  de (40) está no item 2 do ANEXO E, cujo resultado está em (15) do citado item. Substituindo tais resultados em (40), obtém-se:

$$f_0''(s) - f_0'(s) = j \frac{2(R_0' - R_0'')}{\pi(k_0 - s)} + \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{v_0 [g_0'(t) - g_0''(t)]}{s^2 + v_0^2} dt - j \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{s [g_0'(t) - g_0''(t)]}{s^2 + v_0^2} dt, \quad (41)$$

que também se pode escrever assim:

$$f_0''(s) - f_0'(s) = \frac{2}{\pi} \left\{ \int_0^{+\infty} \frac{v_0 [g_0'(t) - g_0''(t)]}{s^2 + v_0^2} dt + j \left[ \frac{(R_0' - R_0'')}{(k_0 - s)} - \int_0^{+\infty} \frac{s [g_0'(t) - g_0''(t)]}{s^2 + v_0^2} dt \right] \right\}, \quad (42)$$

que é a conclusão obtida aplicando-se a *primeira condição de contorno*.

### 2.2.1.2 Segunda condição de contorno

$$\frac{\partial E_0'}{\partial x} = \frac{\partial E_0''}{\partial x}, \quad (43)$$

em  $x = 0$  e  $z < 0$ .

Derivando  $E_0'$  em (36) parcialmente em relação a  $x$  e fazendo  $x=0$  obtém-se:

$$\frac{\partial E_0'}{\partial x} = \int_0^{+\infty} u_0 f_0'(s) e^{-jsz} ds - \int_0^{+\infty} t g_0'(t) \sin(tx) e^{u_0 z} dt \quad (44)$$

Derivando  $E_0''$  em (37) parcialmente em relação a  $x$  e fazendo  $x=0$  obtém-se:

$$\frac{\partial E_0''}{\partial x} = - \int_0^{+\infty} u_0 f_0''(s) e^{-jsz} ds - \int_0^{+\infty} t g_0''(t) \sin(tx) e^{u_0 z} dt \quad (45)$$

Aplicando a segunda condição de contorno,  $\frac{\partial E_0'}{\partial x} = \frac{\partial E_0''}{\partial x}$ , em  $x = 0$ , obtém-se:

$$f_0'(s) = -f_0''(s), \quad (46)$$

que é a conclusão obtida aplicando-se a *segunda condição de contorno*.

### 2.2.1.3 Terceira condição de contorno

$$E_1 = E_2, \quad (47)$$

em  $x = 0$  e  $z > 0$ .

De (11) e (12) em (47), obtém-se:

$$\begin{aligned} T_1 e^{jk_1 z} + \int_0^{+\infty} f_1(s) \cos(sz) e^{u_1 x} ds + \int_0^{+\infty} g_1(t) \cos(tx) e^{-v_1 z} dt = T_2 e^{jk_2 z} + \int_0^{+\infty} f_2(s) \cos(sz) e^{-u_2 x} ds + \\ + \int_0^{+\infty} g_2(t) \cos(tx) e^{-v_2 z} dt. \end{aligned} \quad (48)$$

Fazendo  $x = 0$  em (48), simplificando e fatorando, obtém-se:

$$\int_0^{+\infty} [f_2(s) - f_1(s)] \cos(sz) ds = T_1 e^{jk_1 z} - T_2 e^{jk_2 z} + \int_0^{+\infty} [g_1(t) e^{-v_1 z} - g_2(t) e^{v_2 z}] dt. \quad (49)$$

Como a função, em  $z$ , presente no membro esquerdo de (49) é *par*, conforme (11) do ANEXO C, e cada função, em  $z$ , presente em cada parcela no membro direito de (49), é

nem par, nem ímpar, conforme o teorema 7, teorema 8 e teorema 9 do ANEXO D, respectivamente. Isto incide na mesma contradição matemática observada anteriormente em (19).

Devido à contradição matemática mostrada em (49), precisa-se alterar a solução  $E_1$  em (11) com a adição do termo  $e_1$  em (50), ver item 3 do ANEXO B,

$$e_1 = -j \int_0^{+\infty} f_1(s) \sin(sz) e^{u_1 x} ds, \quad (50)$$

e a solução  $E_2$  em (12) com a adição do termo, ver item 4 do ANEXO B,

$$e_2 = -j \int_0^{+\infty} f_2(s) \sin(sz) e^{-u_2 x} ds, \quad (51)$$

para tornar viável a obtenção da *transformada direta de Fourier* da função  $[f_2(s) - f_1(s)]$  no primeiro membro de (49), tentando resolver tal problema com a utilização da ferramenta matemática transformada de Fourier, satisfazendo o item 3 das alternativas propostas na página 3 deste texto, onde as funções  $f_1(s)$  e  $f_2(s)$  são livres quanto à paridade.

As novas equações de  $E_1$  e  $E_2$ , são:

$$E_1 = T_1 e^{jk_1 z} + \int_0^{+\infty} f_1(s) \cos(sz) e^{u_1 x} ds - j \int_0^{+\infty} f_1(s) \sin(sz) e^{u_1 x} ds + \int_0^{+\infty} g_1(t) \cos(tx) e^{-v_1 z} dt, \quad z > 0 \text{ e} \\ x < 0. \quad (52)$$

$$E_2 = T_2 e^{jk_2 z} + \int_0^{+\infty} f_2(s) \cos(sz) e^{-u_2 x} ds - j \int_0^{+\infty} f_2(s) \sin(sz) e^{-u_2 x} ds + \int_0^{+\infty} g_2(t) \cos(tx) e^{-v_2 z} dt, \quad z > 0 \text{ e} \\ x > 0. \quad (53)$$

Aplicando a terceira condição de contorno,  $E_1 = E_2$ , em  $x = 0$ , obtém-se:

$$\int_0^{+\infty} [f_2(s) - f_1(s)] e^{-jsz} ds = T_1 e^{jk_1 z} - T_2 e^{jk_2 z} + \int_0^{+\infty} [g_1(t) e^{-v_1 z} - g_2(t) e^{-v_2 z}] dt, \quad (54)$$

onde

$$\int_0^{+\infty} [f_2(s) - f_1(s)] e^{-jsz} ds = \mathfrak{F}\{[f_2(s) - f_1(s)]\} = F(z)$$

é a transformada direta de Fourier da função  $[f_2(s) - f_1(s)]$ . Como  $F(z)$  é *nem par, nem ímpar* em  $z$  em (54) e as funções de  $z$  que estão nas duas parcelas do segundo membro de (54) são *funções nem par, nem ímpar* em  $z$ , logo o impedimento existente em (49) passa a inexistir a partir de (54).

Aplicando a transformada inversa de Fourier em (54), obtém-se:

$$\begin{aligned} f_2(s) - f_1(s) &= \frac{2T_1}{\pi} \underbrace{\int_0^{+\infty} e^{jk_1z} e^{jsz} dz}_{I_3} - \frac{2T_2}{\pi} \underbrace{\int_0^{+\infty} e^{jk_2z} e^{jsz} dz}_{I_4} + \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \left[ \underbrace{\int_0^{+\infty} g_1(t) e^{-v_1z} e^{jsz} dz}_{I_5} \right] dt - \\ &- \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \left[ \underbrace{\int_0^{+\infty} g_2(t) e^{-v_2z} e^{jsz} dz}_{I_6} \right] dt. \end{aligned} \quad (55)$$

A resolução da integral  $I_3$  de (55) está no item 3 do ANEXO E cujo resultado está em (24) do referido item. A resolução da integral  $I_4$  de (55) está no item 4 do ANEXO E, cujo resultado está em (33) do referido item. A resolução da integral  $I_5$  de (55) está no item 5, do ANEXO E, cujo resultado está em (39) do citado item. A resolução da integral  $I_6$  de (55) está no item 6 do ANEXO E, cujo resultado está em (45) do citado item.

Substituindo tais resultados em (55), obtém-se:

$$f_2(s) - f_1(s) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \left[ \frac{v_1 g_1(t)}{s^2 + v_1^2} - \frac{v_2 g_2(t)}{s^2 + v_2^2} \right] dt + j \frac{2}{\pi} \left[ \frac{T_1}{s + k_1} - \frac{T_2}{s + k_2} \right] + j \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} s \left[ \frac{g_1(t)}{s^2 + v_1^2} - \frac{g_2(t)}{s^2 + v_2^2} \right] dt, \quad (56)$$

que é a conclusão obtida aplicando-se a *terceira condição de contorno*.

#### 2.2.1.4 Quarta condição de contorno

$$\frac{\partial E_1}{\partial x} = \frac{\partial E_2}{\partial x}, \quad (57)$$

em  $x = 0$  e  $z > 0$ .

Reescrevendo (52), obtém-se:

$$E_1 = T_1 e^{jk_1 z} + \int_0^{+\infty} f_1(s) \cos(sz) e^{u_1 x} ds - j \int_0^{+\infty} f_1(s) \sin(sz) e^{u_1 x} ds + \int_0^{+\infty} g_1(t) \cos(tx) e^{-v_1 z} dt, \quad (58)$$

Reescrevendo (53), obtém-se:

$$E_2 = T_2 e^{jk_2 z} + \int_0^{+\infty} f_2(s) \cos(sz) e^{-u_2 x} ds - j \int_0^{+\infty} f_2(s) \sin(sz) e^{-u_2 x} ds + \int_0^{+\infty} g_2(t) \cos(tx) e^{-v_2 z} dt, \quad (59)$$

Derivando  $E_1$  em (58) parcialmente em relação a  $x$ , obtém-se:

$$\frac{\partial E_1}{\partial x} = \int_0^{+\infty} u_1 f_1(s) e^{(u_1 x - jsz)} ds - \int_0^{+\infty} t g_1(t) \sin(tx) e^{-v_1 z} dt \quad (60)$$

Derivando  $E_2$  em (59) parcialmente em relação a  $x$ , obtém-se:

$$\frac{\partial E_2}{\partial x} = - \int_0^{+\infty} u_2 f_2(s) e^{-(u_2 x - jsz)} ds - \int_0^{+\infty} t g_2(t) \sin(tx) e^{-v_2 z} dt \quad (61)$$

Aplicando a quarta condição de contorno,  $\frac{\partial E_1}{\partial x} = \frac{\partial E_2}{\partial x}$ , em  $x = 0$ , obtém-se:

$$u_1 f_1(s) = -u_2 f_2(s) \quad (62)$$

que é a conclusão obtida aplicando-se a *quarta condição de contorno*.

### 2.2.1.5 Quinta condição de contorno

$$E_0' = E_1, \quad (63)$$

em  $z = 0$  e  $x < 0$ .

Aplicando a quinta condição de contorno a partir de (36) e (52),  $E_0' = E_1$  em  $z = 0$ , obtém-se:

$$\begin{aligned} P e^{jk_0 z} + R_0' e^{-jk_0 z} + \int_0^{+\infty} f_0'(s) \cos(sz) e^{u_0 x} ds - j \int_0^{+\infty} f_0'(s) \sin(sz) e^{u_0 x} ds + \int_0^{+\infty} g_0'(t) \cos(tx) e^{v_0 z} dt = \\ T_1 e^{jk_1 z} + \int_0^{+\infty} f_1(s) \cos(sz) e^{u_1 x} ds - j \int_0^{+\infty} f_1(s) \sin(sz) e^{u_1 x} ds + \int_0^{+\infty} g_1(t) \cos(tx) e^{-v_1 z} dt, \end{aligned}$$

ou

$$\int_0^{+\infty} [g_1(t) - g_0'(t)] \cos(tx) dt = P + R_0' - T_1 + \int_0^{+\infty} [f_0'(s) e^{u_0 x} - f_1(s) e^{u_1 x}] ds. \quad (64)$$

Como a função em  $x$  presente no membro esquerdo de (64) é *par*, conforme (17) do ANEXO C, e as funções em  $x$  presentes na quarta parcela no membro direito de (64) são *nem par, nem ímpar*, conforme o *teorema 10* do ANEXO D. Incide-se na mesma contradição matemática observada anteriormente em (19).

Devido à contradição matemática mostrada em (64), precisa-se alterar a solução  $E_0'$  em (36) com a adição do termo, ver item 9 do ANEXO B,

$$f = -j \int_0^{+\infty} g_0'(t) \sin(tx) e^{v_0 z} dt, \quad (65)$$

e a solução  $E_1$  em (52) com a adição do termo, ver item 6 do ANEXO B,

$$f_1 = -j \int_0^{+\infty} g_1(t) \sin(tx) e^{-v_1 z} dt, \quad (66)$$

para tornar viável a obtenção da *transformada direta de Fourier* da função  $[g_1(t) - g_0'(t)]$  no primeiro membro de (64), tentando resolver tal problema com a utilização da ferramenta matemática transformada de Fourier, satisfazendo o item 3 das alternativas propostas na página 3 deste texto, onde as funções  $g_0'(t)$  e  $g_1(t)$  são livres quanto à paridade.

As novas equações de  $E_0'$  e  $E_1$ , são:

$$\begin{aligned} E_0' = & P e^{jk_0 z} + R_0' e^{-jk_0 z} + \int_0^{+\infty} f_0'(s) \cos(sz) e^{u_0 x} ds - j \int_0^{+\infty} f_0'(s) \sin(sz) e^{u_0 x} ds + \\ & + \int_0^{+\infty} g_0'(t) \cos(tx) e^{v_0 z} dt - j \int_0^{+\infty} g_0'(t) \sin(tx) e^{v_0 z} dt, \quad z < 0 \text{ e } x < 0. \end{aligned} \quad (67)$$

$$\begin{aligned} E_1 = & T_1 e^{jk_1 z} + \int_0^{+\infty} f_1(s) \cos(sz) e^{u_1 x} ds - j \int_0^{+\infty} f_1(s) \sin(sz) e^{u_1 x} ds + \int_0^{+\infty} g_1(t) \cos(tx) e^{-v_1 z} dt - \\ & - j \int_0^{+\infty} g_1(t) \sin(tx) e^{-v_1 z} dt, \quad z > 0 \text{ e } x < 0. \end{aligned} \quad (68)$$

Aplicando a quinta condição de contorno,  $E_0' = E_1$ , em  $z = 0$ , obtém-se:

$$\int_0^{+\infty} [g_1(t) - g_0'(t)] e^{-jtx} dt = P + R_0' - T_1 + \int_0^{+\infty} [f_0'(s) e^{u_0 x} - f_1(s) e^{u_1 x}] ds, \quad (69)$$

onde

$$\int_0^{+\infty} [g_1(t) - g_0'(t)] e^{-jtx} dt = \mathfrak{F} \{ [g_1(t) - g_0'(t)] \} = G(x)$$

é a *transformada direta de Fourier* da função  $[g_1(t) - g_0'(t)]$ . Como  $G(x)$  é *nem par, nem ímpar* em  $x$  em (69) e as funções de  $x$  que estão na quarta parcela do segundo membro de (69) são *funções nem par, nem ímpar* em  $x$ , logo o impedimento existente em (64) passa a inexistir a partir de (69).

Aplicando a *transformada inversa de Fourier* em (69), obtém-se:

$$g_1(t) - g_0'(t) = \frac{2}{\pi} (P + R_0' - T_1) \underbrace{\int_{-\infty}^0 e^{jtx} dx}_{I_7} + \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \left[ \underbrace{\int_{-\infty}^0 f_0'(s) e^{u_0 x} e^{jtx} dx}_{I_8} - \underbrace{\int_{-\infty}^0 f_1(s) e^{u_1 x} e^{jtx} dx}_{I_9} \right] ds. \quad (69a)$$

A resolução da integral  $I_7$  em (69a) está no item 7 do ANEXO E, cujo resultado está em (47) do referido item. A resolução da integral  $I_8$  em (69a) está no item 8 do ANEXO E, cujo resultado está em (49) do referido item. A resolução da integral  $I_9$  em (69a) está no item 9 do ANEXO E, cujo resultado está em (51) do referido item. Substituindo tais resultados em (69a), obtém-se:

$$g_1(t) - g_0'(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \left[ \frac{u_0 f_0'(s)}{t^2 + u_0^2} - \frac{u_1 f_1(s)}{t^2 + u_1^2} \right] ds - j \frac{2}{\pi} \left\{ \frac{2}{t} (P + R_0' - T_1) + \int_0^{+\infty} \left[ \frac{t f_0'(s)}{t^2 + u_0^2} - \frac{t f_1(s)}{t^2 + u_1^2} \right] ds \right\}, \quad (70)$$

que é a conclusão obtida após a *quinta condição de contorno*.

### 2.2.1.6 Sexta condição de contorno

$$\frac{\partial E_0'}{\partial z} = \frac{\partial E_1}{\partial z}, \quad (71)$$

em  $z = 0$  e  $x < 0$ .

Derivando (67) e (68) parcialmente em  $z$  e fazendo  $z = 0$ , obtém-se:

$$\begin{aligned} jk_0 P - jk_0 R_0' - j \int_0^{+\infty} s f_0'(s) e^{u_0 x} ds + \int_0^{+\infty} v_0 g_0'(t) \cos(tx) dt - j \int_0^{+\infty} v_0 g_0'(t) \sin(tx) dt = jk_1 T_1 - \\ - j \int_0^{+\infty} s f_1(s) e^{u_1 x} ds - \int_0^{+\infty} v_1 g_1(t) \cos(tx) dt + j \int_0^{+\infty} v_1 g_1(t) \sin(tx) dt. \end{aligned} \quad (72)$$

De (72), obtém-se:

$$\begin{cases} k_0(P - R_0') = k_1 T_1, \\ f_0'(s)e^{u_0 x} = f_1(s)e^{u_1 x}, \\ v_0 g_0'(t) = -v_1 g_1(t), \end{cases} \quad (73)$$

que são as conclusões obtidas após a *sexta condição de contorno*.

### 2.2.1.7 Sétima condição de contorno

$$E_0'' = E_2, \quad (74)$$

em  $z = 0$  e  $x > 0$ .

De (37) e (53) em (74), fazendo  $z = 0$ , obtém-se:

$$P + R_0'' + \int_0^{+\infty} f_0''(s)e^{-u_0 x} ds + \int_0^{+\infty} g_0''(t) \cos(tx) e^{v_0 x} dt = T_2 + \int_0^{+\infty} f_2(s)e^{-u_2 x} ds + \int_0^{+\infty} g_2(t) \cos(tx) dt$$

ou

$$\int_0^{+\infty} [g_2(t) - g_0''(t)] \cos(tx) dt = P + R_0'' - T_2 + \int_0^{+\infty} [f_0''(s)e^{-u_0 x} - f_2(s)e^{-u_2 x}] ds. \quad (75)$$

Pelo mesmo motivo da contradição matemática apontada em (19) da seção 2.2.1, precisa-se alterar  $E_0''$  com a adição de:

$$f_0 = -j \int_0^{+\infty} g_0''(t) \sin(tx) e^{v_0 z} dt. \quad (76)$$

e  $E_2$  com a adição de

$$f_2 = -j \int_0^{+\infty} g_2(t) \sin(tx) e^{-v_2 z} dt. \quad (77)$$

De (76) em (37) e de (77) em (53), respectivamente, obtêm-se:

$$E_0'' = P e^{jk_0 z} + R_0'' e^{-jk_0 z} + \int_0^{+\infty} f_0''(s) \cos(sz) e^{-u_0 x} ds - j \int_0^{+\infty} f_0''(s) \sin(sz) e^{-u_0 x} ds + \int_0^{+\infty} g_0''(t) \cos(tx) e^{v_0 z} dt - j \int_0^{+\infty} g_0''(t) \sin(tx) e^{v_0 z} dt, \quad z < 0 \text{ e } x > 0. \quad (78)$$

$$E_2 = T_2 e^{jk_2 z} + \int_0^{+\infty} f_2(s) \cos(sz) e^{-u_2 x} ds - j \int_0^{+\infty} f_2(s) \sin(sz) e^{-u_2 x} ds + \int_0^{+\infty} g_2(t) \cos(tx) e^{-v_2 z} dt - j \int_0^{+\infty} g_2(t) \sin(tx) e^{-v_2 z} dt, \quad z > 0 \text{ e } x > 0. \quad (79)$$

De (78) e (79) em (74), para  $z = 0$ , obtêm-se:

$$\int_0^{+\infty} [g_2(t) - g_0''(t)] e^{-jtx} dt = P + R_0'' - T_2 + \int_0^{+\infty} [f_0''(s) e^{-u_0 x} - f_2(s) e^{-u_2 x}] ds. \quad (80)$$

Aplicando a *transformada inversa de Fourier* em (80), obtêm-se:

$$g_2(t) - g_0''(t) = \frac{2}{\pi} \underbrace{\int_0^{+\infty} (P + R_0'' - T_2) e^{jtx} dx}_{I_{10}} + \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \left[ \underbrace{\int_0^{+\infty} f_0''(s) e^{-u_0 x} e^{jtx} dx}_{I_{11}} - \underbrace{\int_0^{+\infty} f_2(s) e^{-u_2 x} e^{jtx} dx}_{I_{12}} \right] ds. \quad (81)$$

A resolução da integral  $I_{10}$  em (81) está no item 10 do ANEXO E, cujo resultado está em (53) do referido item. A resolução da integral  $I_{11}$  em (81) está no item 11 do ANEXO E, cujo resultado está em (55) do referido item. A resolução da integral  $I_{12}$  em (81) está no item 12 do ANEXO E, cujo resultado está em (57) do referido item. Substituindo tais resultados em (82), obtêm-se:

$$g_2(t) - g_0''(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \left[ \frac{u_0 f_0''(s)}{t^2 + u_0^2} - \frac{u_2 f_2(s)}{t^2 + u_2^2} \right] ds - j \frac{2}{\pi} \left\{ \frac{2}{t} (P + R_0'' - T_2) - \int_0^{+\infty} \left[ \frac{t f_0''(s)}{t^2 + u_0^2} - \frac{t f_2(s)}{t^2 + u_2^2} \right] ds \right\} \quad (82)$$

que é a conclusão obtida após a *sétima condição de contorno*.

### 2.2.1.8 Oitava condição de contorno

$$\frac{\partial E_0''}{\partial z} = \frac{\partial E_2}{\partial z}, \quad (83)$$

em  $z = 0$  e  $x > 0$ .

Derivando (78) e (79) parcialmente em  $z$ , fazendo  $z = 0$ , e usando (82), obtém-se:

$$\begin{aligned} jk_0 P - jk_0 R_0'' - j \int_0^{+\infty} s f_0''(s) e^{-u_0 x} ds + \int_0^{+\infty} v_0 g_0''(t) \cos(tx) dt - j \int_0^{+\infty} v_0 g_0''(t) \sin(tx) dt = jk_2 T_2 - \\ - j \int_0^{+\infty} s f_2(s) e^{-u_2 x} ds - \int_0^{+\infty} v_2 g_2(t) \cos(tx) dt + j \int_0^{+\infty} v_2 g_2(t) \sin(tx) dt. \end{aligned} \quad (84)$$

De (84), obtém-se:

$$\begin{cases} k_0(P - R_0'') = k_2 T_2, & (85a) \\ f_0''(s) e^{-u_0 x} = f_2(s) e^{-u_2 x}, & (85b) \\ v_0 g_0''(t) = -v_2 g_2(t), & (85c) \end{cases}$$

que são as conclusões obtidas após a *oitava condição de contorno*.

## 2.3 AJUSTES DAS CONCLUSÕES DAS CONDIÇÕES DE CONTORNO

### 2.3.1 As novas soluções

Após a aplicação das oito condições de contorno na seção 2.2.1, foram obtidas as seguintes soluções para  $E_0'$ ,  $E_0''$ ,  $E_1$  e  $E_2$ , respectivamente.

De (67), obtém-se:

$$\begin{aligned}
E_0' &= P e^{jk_0z} + R_0' e^{-jk_0z} + \int_0^{+\infty} f_0'(s) \cos(sz) e^{u_0x} ds - j \int_0^{+\infty} f_0'(s) \sin(sz) e^{u_0x} ds + \\
&+ \int_0^{+\infty} g_0'(t) \cos(tx) e^{v_0z} dt - j \int_0^{+\infty} g_0'(t) \sin(tx) e^{v_0z} dt, \quad z < 0 \text{ e } x < 0.
\end{aligned} \tag{86}$$

De (78), obtém-se:

$$\begin{aligned}
E_0'' &= P e^{jk_0z} + R_0'' e^{-jk_0z} + \int_0^{+\infty} f_0''(s) \cos(sz) e^{-u_0x} ds - j \int_0^{+\infty} f_0''(s) \sin(sz) e^{-u_0x} ds + \\
&+ \int_0^{+\infty} g_0''(t) \cos(tx) e^{v_0z} dt - j \int_0^{+\infty} g_0''(t) \sin(tx) e^{v_0z} dt, \quad z < 0 \text{ e } x > 0.
\end{aligned} \tag{87}$$

De (68), obtém-se:

$$\begin{aligned}
E_1 &= T_1 e^{jk_1z} + \int_0^{+\infty} f_1(s) \cos(sz) e^{u_1x} ds - j \int_0^{+\infty} f_1(s) \sin(sz) e^{u_1x} ds + \int_0^{+\infty} g_1(t) \cos(tx) e^{-v_1z} dt - \\
&- j \int_0^{+\infty} g_1(t) \sin(tx) e^{-v_1z} dt, \quad z > 0 \text{ e } x < 0.
\end{aligned} \tag{88}$$

De (79), obtém-se:

$$\begin{aligned}
E_2 &= T_2 e^{jk_2z} + \int_0^{+\infty} f_2(s) \cos(sz) e^{-u_2x} ds - j \int_0^{+\infty} f_2(s) \sin(sz) e^{-u_2x} ds + \\
&+ \int_0^{+\infty} g_2(t) \cos(tx) e^{-v_2z} dt - j \int_0^{+\infty} g_2(t) \sin(tx) e^{-v_2z} dt, \quad z > 0 \text{ e } x > 0.
\end{aligned} \tag{89}$$

### 2.3.2 As novas conclusões

Como se pode observar, existem alterações em todas as soluções acima em comparação às propostas por Sampaio (1985). Logo, as conclusões, aqui obtidas, também têm alterações.

### 2.3.2.1 Primeira condição de contorno

Após reaplicar a primeira condição de contorno, foi obtida a seguinte conclusão:

$$f_0''(s) - f_0'(s) = \frac{2}{\pi} \left\{ \int_0^{+\infty} \frac{v_0 [g_0'(t) - g_0''(t)]}{s^2 + v_0^2} dt + j \left[ \frac{(R_0' - R_0'')}{(k_0 - s)} - \int_0^{+\infty} \frac{s [g_0'(t) - g_0''(t)]}{s^2 + v_0^2} dt \right] \right\}, \quad (90)$$

que é a mesma obtida em (42).

### 2.3.2.2 Segunda condição de contorno

Após reaplicar a segunda condição de contorno, foram obtidas as seguintes conclusões:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{a) } f_0'(s) = -f_0''(s), \\ \text{b) } g_0'(t) = g_0''(t), \end{array} \right. \quad (91a)$$

$$(91b)$$

onde (91a) é a mesma de (46) e a (91b) foi obtida após a re-aplicação da segunda condição de contorno a partir de (86) e (87).

### 2.3.2.3 Terceira condição de contorno

Após reaplicar a terceira condição de contorno, foi obtida a seguinte conclusão:

$$f_2(s) - f_1(s) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \left[ \frac{v_1 g_1(t)}{s^2 + v_1^2} - \frac{v_2 g_2(t)}{s^2 + v_2^2} \right] dt + j \frac{2}{\pi} \left[ \frac{T_1}{s + k_1} - \frac{T_2}{s + k_2} \right] + j \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} s \left[ \frac{g_1(t)}{s^2 + v_1^2} - \frac{g_2(t)}{s^2 + v_2^2} \right] dt, \quad (92)$$

que é a mesma obtida em (56).

### 2.3.2.4 Quarta condição de contorno

Após reaplicar a quarta condição de contorno, foram obtidas as seguintes conclusões:

$$\begin{cases} \text{a) } u_1 f_1(s) = -u_2 f_2(s), & (93a) \\ \text{b) } g_1(t) e^{-v_1 z} = g_2(t) e^{-v_2 z}, & (93b) \end{cases}$$

onde (93a) é a mesma de (63) e a (93b) foi obtida após a reaplicação da quarta condição de contorno a partir de (88) e (89).

### 2.3.2.5 Quinta condição de contorno

Após reaplicar a quinta condição de contorno, foi obtida a seguinte conclusão:

$$g_1(t) - g_0'(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \left[ \frac{u_0 f_0'(s)}{t^2 + u_0^2} - \frac{u_1 f_1(s)}{t^2 + u_1^2} \right] ds - j \frac{2}{\pi} \left\{ \frac{2}{t} (P + R_0 - T_1) + \int_0^{+\infty} \left[ \frac{t f_0'(s)}{t^2 + u_0^2} - \frac{t f_1(s)}{t^2 + u_1^2} \right] ds \right\}, \quad (94)$$

que é a mesma obtida em (70).

### 2.3.2.6 Sexta condição de contorno

Após reaplicar a sexta condição de contorno, foram obtidas as seguintes conclusões:

$$\begin{cases} \text{a) } k_0 (P - R_0) = k_1 T_1, & (95a) \\ \text{b) } f_0'(s) e^{u_0 x} = f_1(s) e^{u_1 x}, & (95b) \\ \text{c) } v_0 g_0'(t) = -v_1 g_1(t), & (95c) \end{cases}$$

que são as mesmas obtidas em (73).

### 2.3.2.7 Sétima condição de contorno

Após reaplicar a sétima condição de contorno, foi obtida a seguinte conclusão:

$$g_2(t) - g_0''(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \left[ \frac{u_0 f_0''(s)}{t^2 + u_0^2} - \frac{u_2 f_2(s)}{t^2 + u_2^2} \right] ds - j \frac{2}{\pi} \left\{ \frac{2}{t} (P + R_0 - T_2) - \int_0^{+\infty} \left[ \frac{t f_0''(s)}{t^2 + u_0^2} - \frac{t f_2(s)}{t^2 + u_2^2} \right] ds \right\}, \quad (96)$$

que é a mesma obtida em (82).

### 2.3.2.8 Oitava condição de contorno

Após reaplicar a oitava condição de contorno, foram obtidas as seguintes conclusões:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{a) } k_0(P - R_0') = k_2 T_2, \\ \text{b) } f_0''(s)e^{u_0 x} = f_2(s)e^{u_2 x}, \\ \text{c) } v_0 g_0''(t) = -v_2 g_2(t), \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (97a) \\ (97b) \\ (97c) \end{array}$$

que são as mesmas obtidas em (85).

## 2.4 A SOLUÇÃO DO PROBLEMA

A solução do problema ficará completa logo que for resolvido o sistema constituído das quatro equações integrais (90), (92), (94) e (96), e das quatro equações algébricas (91), (93), (95) e (97), contendo oito incógnitas.

### 2.4.1 Condição quase-estática

Neste ponto será introduzida a condição quase-estática,  $|k_1| \gg |k_0|$ ,  $|k_2| \gg |k_0|$ . Nessa circunstância, o campo magnético horizontal assume, aproximadamente, um valor  $H$  em  $z = 0$ ,  $|x| \rightarrow \infty$ , e, como consequência

$$R_0' = \frac{\omega \mu_0}{2k_0} H, \quad (98)$$

$$R_0'' = \frac{\omega \mu_0}{2k_0} H, \quad (99)$$

$$T_1 = -\frac{\omega \mu_0}{k_1} H, \quad (100)$$

$$T_2 = -\frac{\omega\mu_0}{k_2} H, \quad (101)$$

conforme Sampaio (1985).

#### 2.4.1.1 Cálculo do valor de P

De (95a), obtém-se:

$$P = R_0' + \frac{k_1 T_1}{k_0}. \quad (102)$$

De (98) e (100) em (102), obtém-se:

$$P = -\frac{\omega\mu_0 H}{2k_0} \quad (103)$$

De (98), (99) e de (102), conclui-se que:

$$P = -R_0' = -R_0'' = -\frac{\omega\mu_0 H}{2k_0}. \quad (104)$$

O mesmo resultado pode ser obtido a partir de (97a), (99) e (101).

#### 2.4.1.2 Cálculo das funções “kernels” das integrais

De (91a) e (91b) em (90), obtém-se:

$$f_0''(s) = j \frac{(R_0' - R_0'')}{\pi(k_0 - s)}. \quad (105)$$

De (98) e (99) em (105), obtém-se:

$$f_0''(s) = 0 \quad (106)$$

De (91a) e (106), obtém-se:

$$f_0'(s) = 0. \quad (107)$$

De (107) em (95b), obtém-se:

$$f_1(s) = 0. \quad (108)$$

De (106) em (97b), obtém-se:

$$f_2(s) = 0. \quad (109)$$

De (98), (100), (103), (107) e (108) em (94), obtém-se:

$$g_1(t) - g_0'(t) = -j \frac{4\omega\mu_0 H}{\pi t k_1}. \quad (110)$$

De (98), (101), (103), (106) e (109) em (96), obtém-se:

$$g_2(t) - g_0''(t) = -j \frac{4\omega\mu_0 H}{\pi t k_2}. \quad (111)$$

De (95c), obtém-se:

$$g_0'(t) = -\frac{v_1}{v_0} g_1(t).. \quad (112)$$

De (112) em (110), obtém-se:

$$g_1(t) = -j \frac{4v_0 \omega \mu_0 H}{\pi t k_1 (v_0 + v_1)}. \quad (113)$$

De (113) em (112), obtém-se:

$$g_0'(t) = j \frac{4v_1 \omega \mu_0 H}{\pi t k_1 (v_0 + v_1)}. \quad (114)$$

De (97c), obtém-se:

$$g_0''(t) = -\frac{v_2}{v_0} g_2(t). \quad (115)$$

De (115) em (111), obtém-se:

$$g_2(t) = -j \frac{4v_0 \omega \mu_0 H}{\pi t k_2 (v_0 + v_2)}. \quad (116)$$

De (116) em (115), obtém-se:

$$g_0''(t) = j \frac{4v_2 \omega \mu_0 H}{\pi t k_2 (v_0 + v_2)}. \quad (117)$$

### 2.4.1.3 As novas soluções sob as condições quase-estáticas

De (98), (103), (107) e (114) em (86), obtém-se:

$$E_0' = -\frac{\omega \mu_0 H}{2k_0} e^{jk_0 z} + \frac{\omega \mu_0 H}{2k_0} e^{-jk_0 z} + \frac{4\omega \mu_0 H}{\pi k_1} \int_0^{+\infty} \frac{v_1}{(v_0 + v_1)t} \sin(tx) e^{v_0 z} dt +$$

$$+ j \frac{4\omega\mu_0 H}{\pi k_1} \int_0^{+\infty} \frac{v_1}{(v_0 + v_1)t} \cos(tx) e^{v_0 z} dt, z < 0 \text{ e } x < 0. \quad (118)$$

De (99), (103), (106) e (117) em (87), obtém-se:

$$\begin{aligned} E_0'' &= - \frac{\omega\mu_0 H}{2k_0} e^{jk_0 z} + \frac{\omega\mu_0 H}{2k_0} e^{-jk_0 z} + \frac{4\omega\mu_0 H}{\pi k_2} \int_0^{+\infty} \frac{v_2}{(v_0 + v_2)t} \sin(tx) e^{v_0 z} dt + \\ &+ j \frac{4\omega\mu_0 H}{\pi k_2} \int_0^{+\infty} \frac{v_2}{(v_0 + v_2)t} \cos(tx) e^{v_0 z} dt, z < 0 \text{ e } x > 0. \end{aligned} \quad (119)$$

De (100), (108), e (113) em (88), obtém-se:

$$\begin{aligned} E_1 &= - \frac{\omega\mu_0 H}{k_1} e^{jk_1 z} - \frac{4\omega\mu_0 H}{\pi k_1} \int_0^{+\infty} \frac{v_0}{(v_0 + v_1)t} \sin(tx) e^{-v_1 z} dt - \\ &- j \frac{4\omega\mu_0 H}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{v_0}{k_1(v_0 + v_1)t} \cos(tx) e^{v_0 z} dt, z > 0 \text{ e } x < 0. \end{aligned} \quad (120)$$

De (101), (109) e (116) em (89), obtém-se:

$$\begin{aligned} E_2 &= - \frac{\omega\mu_0 H}{k_2} e^{jk_2 z} - \frac{4\omega\mu_0 H}{\pi k_2} \int_0^{+\infty} \frac{v_0}{(v_0 + v_2)t} \sin(tx) e^{-v_2 z} dt - \\ &- j \frac{4\omega\mu_0 H}{\pi k_2} \int_0^{+\infty} \frac{v_0}{(v_0 + v_2)t} \cos(tx) e^{-v_2 z} dt, z > 0 \text{ e } x > 0. \end{aligned} \quad (121)$$

#### 2.4.1.4 Campos elétricos medidos na superfície

Quando se considera  $z = 0$  em (118), (119), (120) e (121), obtêm-se as medidas de  $E_0'$ ,  $E_0''$ ,  $E_1$  e  $E_2$ , respectivamente, na superfície. Como resultado têm-se:

$$E_0' = \frac{4\omega\mu_0 H}{\pi k_1} \int_0^{+\infty} \frac{v_1}{(v_0 + v_1)t} \sin(tx) dt + j \frac{4\omega\mu_0 H}{\pi k_1} \int_0^{+\infty} \frac{v_1}{(v_0 + v_1)t} \cos(tx) dt, z < 0 \text{ e } x < 0. \quad (122)$$

$$E_0'' = \frac{4\omega\mu_0 H}{\pi k_2} \int_0^{+\infty} \frac{v_2}{(v_0 + v_2)t} \sin(tx) dt + j \frac{4\omega\mu_0 H}{\pi k_2} \int_0^{+\infty} \frac{v_2}{(v_0 + v_2)t} \cos(tx) dt, \quad z < 0 \text{ e } x > 0. \quad (123)$$

$$E_1 = -\frac{\omega\mu_0 H}{k_1} - \frac{4\omega\mu_0 H}{\pi k_1} \int_0^{+\infty} \frac{v_0}{(v_0 + v_1)t} \sin(tx) dt - j \frac{4\omega\mu_0 H}{\pi k_1} \int_0^{+\infty} \frac{v_0}{(v_0 + v_1)t} \cos(tx) dt, \quad z > 0 \text{ e } x < 0. \quad (124)$$

$$E_2 = -\frac{\omega\mu_0 H}{k_2} - \frac{4\omega\mu_0 H}{\pi k_2} \int_0^{+\infty} \frac{v_0}{(v_0 + v_2)t} \sin(tx) dt - j \frac{4\omega\mu_0 H}{\pi k_2} \int_0^{+\infty} \frac{v_0}{(v_0 + v_2)t} \cos(tx) dt, \quad z > 0 \text{ e } x > 0. \quad (125)$$

Tais campos podem ser representados da seguinte forma:

$$E_0' = j \frac{4\omega\mu_0 H}{\pi k_1} \int_0^{+\infty} \frac{v_1 e^{-jtx}}{(v_0 + v_1)t} dt, \quad z < 0 \text{ e } x < 0. \quad (126)$$

$$E_0'' = j \frac{4\omega\mu_0 H}{\pi k_2} \int_0^{+\infty} \frac{v_2 e^{-jtx}}{(v_0 + v_2)t} dt, \quad z < 0 \text{ e } x > 0. \quad (127)$$

$$E_1 = -\frac{\omega\mu_0 H}{k_1} - j \frac{4\omega\mu_0 H}{\pi k_1} \int_0^{+\infty} \frac{v_0 e^{-jtx}}{(v_0 + v_1)t} dt, \quad z > 0 \text{ e } x < 0. \quad (128)$$

$$E_2 = -\frac{\omega\mu_0 H}{k_2} - \frac{4\omega\mu_0 H}{\pi k_2} \int_0^{+\infty} \frac{v_0 e^{-jtx}}{(v_0 + v_2)t} dt, \quad z > 0 \text{ e } x > 0. \quad (129)$$

Adotando  $v_0 = \sqrt{t^2 - j\omega\mu_0\sigma_0}$ ,  $v_1 = \sqrt{t^2 - j\omega\mu_0\sigma_1}$  e  $v_2 = \sqrt{t^2 - j\omega\mu_0\sigma_2}$ , com  $\sigma_0 = 0$ , em (128) e (129), obtêm-se:

$$E_1 = -\frac{\omega\mu_0 H}{k_1} - j \frac{4\omega\mu_0 H}{\pi k_1} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-jtx}}{t + \sqrt{t^2 - j\omega\mu_0\sigma_1}} dt, \quad z > 0 \text{ e } x < 0, \quad (130)$$

$$E_2 = -\frac{\omega\mu_0 H}{k_2} - j \frac{4\omega\mu_0 H}{\pi k_2} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-jtx}}{t + \sqrt{t^2 - j\omega\mu_0\sigma_2}} dt, \quad z > 0 \text{ e } x > 0, \quad (131)$$

pois são os campos que interessam ser abordados no presente momento, devido estarem nas regiões que contêm a falha.

### 2.4.1.5 Normalização dos campos elétricos

Os campos elétricos serão normalizados para que sejam, posteriormente, implementados, computacionalmente, para a obtenção de suas representações gráficas. A normalização será a mesma usada por Sampaio em seu trabalho de 1985, pelo número de indução  $\theta_2$ , que consistirá em:

$$E_{y \text{ NORM}}^{(1)} = E_{y \text{ N}}^{(1)} = E_y^{(1)} \frac{|k_2|}{\omega\mu_0 H} = E_y^{(1)} \frac{\sqrt{\omega\mu_0\sigma_2}}{\omega\mu_0 H} = E_1 \frac{\sqrt{\omega\mu_0\sigma_2}}{\omega\mu_0 H}, \quad (132)$$

$$E_{y \text{ NORM}}^{(2)} = E_{y \text{ N}}^{(2)} = E_y^{(2)} \frac{|k_2|}{\omega\mu_0 H} = E_y^{(2)} \frac{\sqrt{\omega\mu_0\sigma_2}}{\omega\mu_0 H} = E_2 \frac{\sqrt{\omega\mu_0\sigma_2}}{\omega\mu_0 H}. \quad (133)$$

Adotando o número de indução

$$\theta_2 = \sqrt{\omega\mu_0\sigma_2} x, \quad (134)$$

e o contraste de resistividade

$$R = \sigma_2/\sigma_1. \quad (135)$$

Substituindo (130), (134) e (135) em (132); e (131), (134) e (135) em (133), respectivamente, obtêm-se:

$$E_{y \text{ N}}^{(1)}(\theta_2) = -\sqrt{-jR} - j \frac{4\sqrt{-jR}}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-jt\theta_2}}{t + \sqrt{t^2 - j\frac{1}{R}}} dt, \quad (136)$$

$$E_{y \text{ N}}^{(2)}(\theta_2) = -\sqrt{-j} - \frac{4\sqrt{-j}}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-jt\theta_2}}{t + \sqrt{t^2 - j}} dt. \quad (137)$$

Após a implementação computacional de (136) e (137), observou-se possibilidade de se conseguir as curvas apresentadas nas Figuras de 14 a 19 com a introdução dos parâmetros da Tabela 1, que foram obtidos tendo por referência as curvas do método dos elementos finitos numa vizinhança da falha. Em termos gerais, pode-se ter por referência para os cálculos de tais parâmetros o resultado fornecido por Weaver (1963) na vizinhança da falha, que consideramos próxima da realidade física do problema. Os campos normalizados com tais parâmetros são:

$$E_{y_N}^{(1)}(\theta_2) = -\sqrt{-jR} + j \frac{A\sqrt{-jR}}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-jt\theta_2/C}}{t^2 + \sqrt{t^2 - j\frac{1}{R}}} dt, \theta_2 < 0. \quad (138)$$

$$E_{y_N}^{(2)}(\theta_2) = -\sqrt{-j} + \frac{B\sqrt{-j}}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{e^{jt\theta_2/C}}{t^2 + \sqrt{t^2 - j}} dt, \theta_2 > 0. \quad (139)$$

Tabela 1: Parâmetros dos campos em (139) e (140)

<b>R</b>	<b>A</b>	<b>B</b>	<b>C</b>	<b>Re(E<sub>y<sub>N</sub></sub>)</b>	<b>Im(E<sub>y<sub>N</sub></sub>)</b>
2	0,43	-0,56	-10/13	Sim	Não
10	0,87	-2,10	-0,5	Sim	Não
50	0,94	-3,30	-0,25	Sim	Não
2	-0,24	0,38	-10/13	Não	Sim
10	-0,70	1,00	-0,5	Não	Sim
50	-0,75	1,90	-0,25	Não	Sim

As figuras a seguir, apresentam os gráficos comparativos dos resultados de Weaver, por elementos finitos e os resultados finais obtidos neste trabalho.

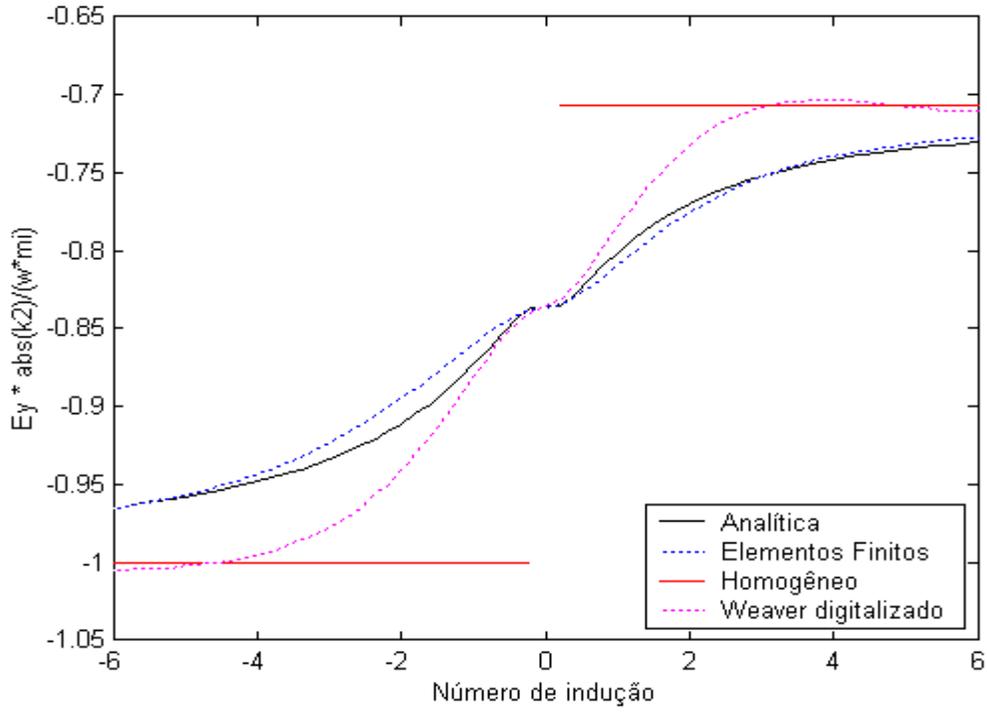


Figura 14: Parte real do campo elétrico normalizado no modo TE para  $R=2$ .

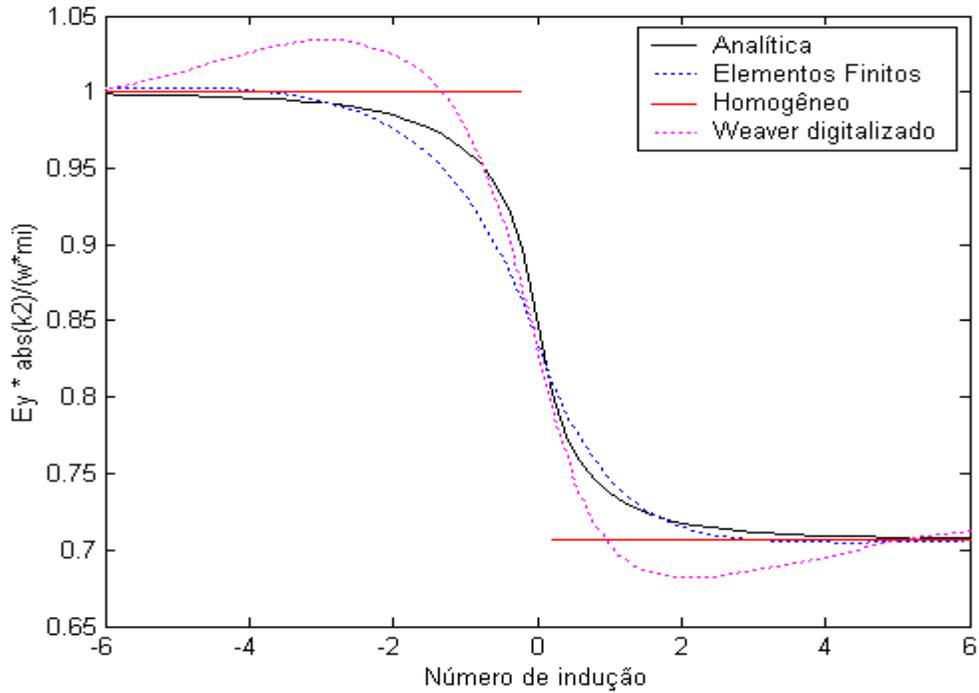


Figura 15: Parte imaginária do campo elétrico normalizado no modo TE para  $R=2$ .

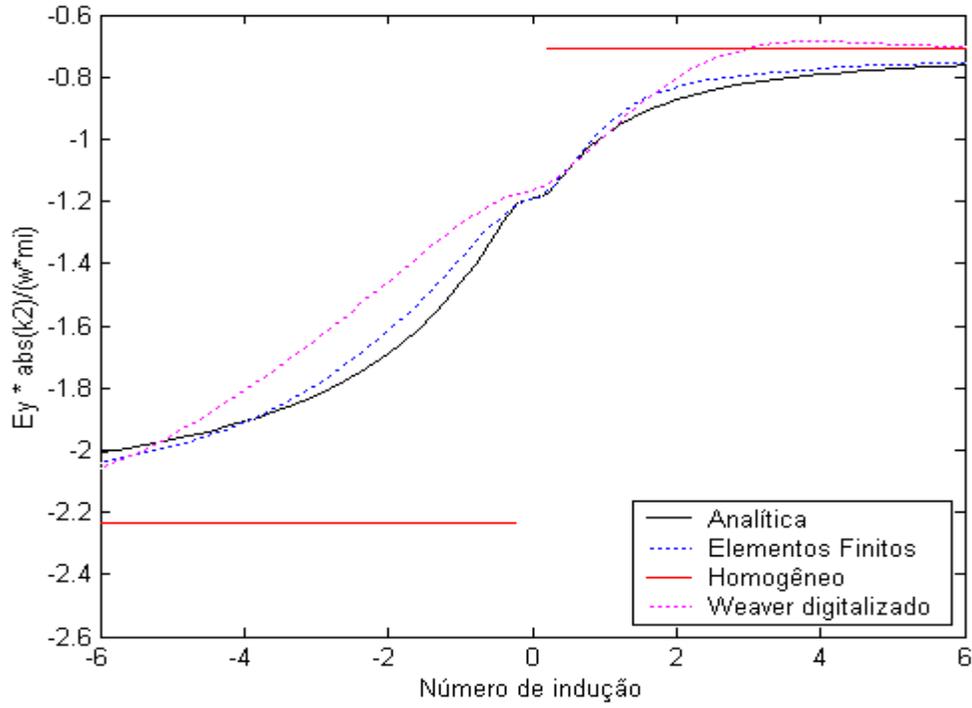


Figura 16: Parte real do campo elétrico normalizado no modo TE para  $R=10$ .

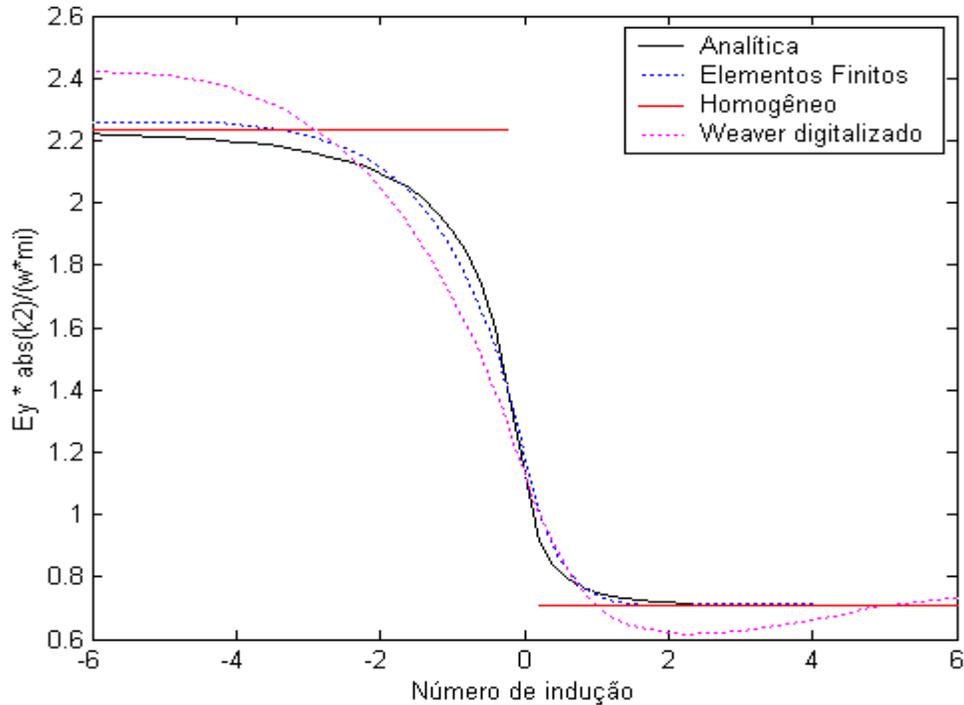


Figura 17: Parte imaginária do campo elétrico normalizado no modo TE para  $R=10$ .

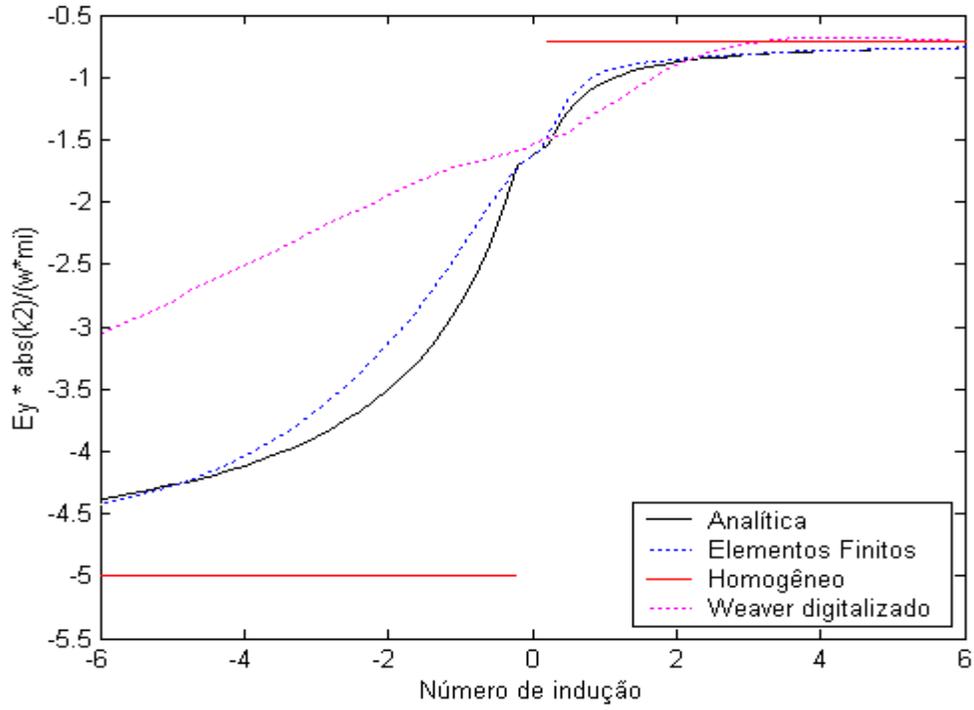


Figura 18: Parte real do campo elétrico normalizado no modo TE para R=50.

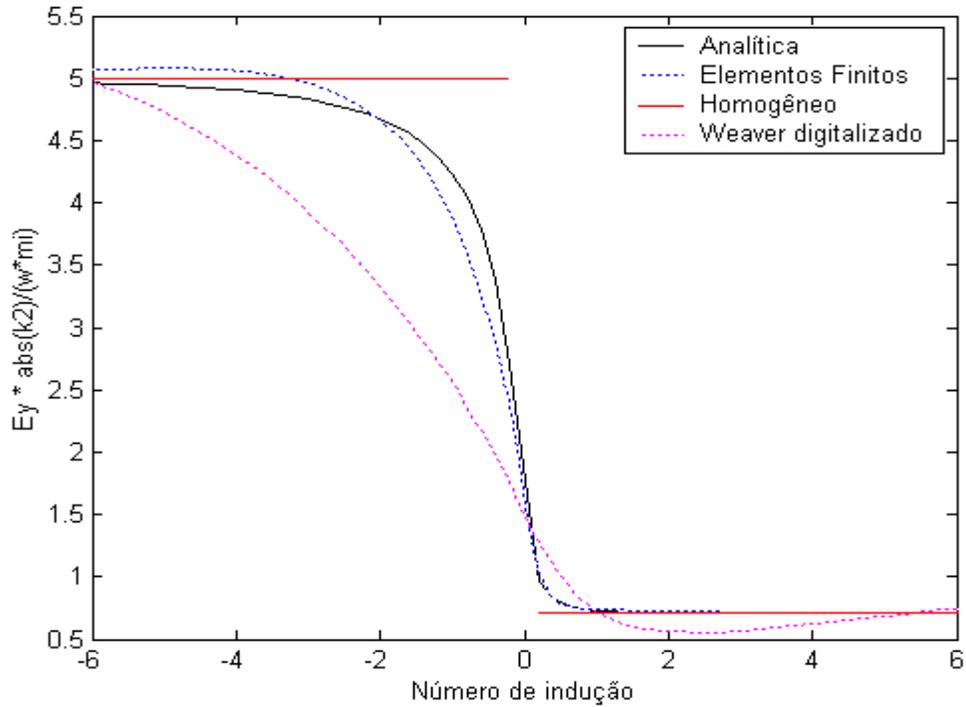


Figura 19: Parte imaginária do campo elétrico normalizado no modo TE para R=50.

### 3 - CONCLUSÃO

É apresentada uma solução analítica do modelo da falha infinita para o modo TE magnetotelúrico utilizando como base o trabalho de Sampaio (1985). A comparação da solução analítica para o campo elétrico normalizado apresentada nas equações (138) e (139), com a solução de elementos finitos, fornece a expectativa positiva de se conseguir resolver este problema totalmente de maneira analítica, considerando que o resultado por elementos finitos esteja razoavelmente próximo da realidade física. A solução híbrida apresentada por Sampaio leva a crer que com o aumento das iterações da série de Neumann a solução deve ser mais próxima da realidade física, entretanto isto não ocorre, conforme mostrado por Hiemer (2001).

Uma questão importante levantada no presente trabalho, referente à paridade da função transformada de Fourier, possibilita a obtenção de uma solução totalmente analítica, levando-se em consideração o efeito do ar, fato até então não conseguido por meios analíticos para o modo TE da falha infinita.

Os gráficos da solução final deste trabalho apresentam a flexibilidade de suas partes, no meio um e no meio dois, a partir dos parâmetros introduzidos. Isto possibilita a obtenção de uma função analítica para uma curva gerada de maneira totalmente numérica indicando que se está no caminho para se obter uma solução final, que forneça tal proximidade daquilo que se considera confiável, isto é, elementos finitos, sem a necessidade de se introduzir parâmetros.

Outra questão importante a considerar é o fato de que as funções “kernels” presentes tanto na formulação inicial proposta por Sampaio (1985) quanto à formulada neste trabalho, após as observações feitas nas considerações sobre o trabalho de Sampaio (1985), são de uma importância fundamental no efeito da solução final obtida e isto pode ser observado na estrutura da solução obtida por Weaver. O fato de Sampaio (1985) ter escolhido para obter as funções “kernels” diferentes de zero  $f_0'(s)$ ,  $f_0''(s)$ ,  $f_1(s)$  e  $f_2(s)$ , numericamente pela série de Neumann, foi justamente para garantir a proximidade do formato da solução de Weaver (1963) que era seu referencial. Observa-se através do desenvolvimento teórico do presente trabalho que as funções “kernels”, diferentes de zero, obtidas foram  $g_0'(t)$ ,  $g_0''(t)$ ,  $g_1(t)$  e  $g_2(t)$ , que conduziram à solução final deste trabalho da forma que foi apresentada, sendo que as funções “kernels”  $f_0'(s)$ ,  $f_0''(s)$ ,  $f_1(s)$  e  $f_2(s)$  foram obtidas todas iguais a zero, isto talvez tenha contribuído decididamente para a necessidade da introdução dos parâmetros mostrados na Tabela 1.

Como pode ser notado, foram introduzidos parâmetros na solução analítica final para se ter uma proximidade da curva gerada pelo método dos elementos finitos. Mostrando a necessidade de se obter uma solução analítica que dispense a presença de tais parâmetros, sendo que, aconselhamos a realização de trabalhos futuros neste sentido.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- D'ERCEVILLE, I. & KUNETZ, G. 1962. The effect of a fault on the Earth's natural electromagnetic field. *Geophysics*, **27**(5): 651-665.
- HEINS, A. E. 1962. Function-theoretic aspects of diffraction theory. In: LANGER, R. E. (Ed.). *Electromagnetic Waves*. Madison, the University of Wisconsin Press, 394 p. p. 99-108.
- HIEMER, M. 2001. *Ensaio sobre a contribuição do ar nos resultados da modelagem do modo transverso-elétrico do método magnetotelúrico*. Belém, Universidade Federal do Pará, Departamento de Geofísica, 47 p. (Dissertação de Mestrado).
- HOHMANN, G. 1971. Electromagnetic scattering by conductors in the Earth near a source of current. *Geophysics*, **36**(1): 101-131.
- JONES, F. W. 1972. The electromagnetic perturbation fields of conductivity anomalies within the Earth. *Geophys., J. R. Astr. Soc.*, **30**(2): 211-228.
- MANN, J. 1970. A perturbation technique for solving boundary value problems arising in the electrodynamics of conducting bodies. *App. Sci. Res.*, **22**: 113-126.
- PINKUS, A. & ZAFRANY, S. 1977. *Fourier series and integral transforms*. Cambridge, Cambridge University Press.
- RIJO, L. 1977. *Modeling of electric and electromagnetic data*. Utah, University of Utah, Department of Geology and Geophysics, 242 p. (Doctorate in Geophysics).
- RIJO, L. 1992. *Teoria dos métodos elétricos e eletromagnéticos I e II*. Belém. (Notas de aula).

- SAMPAIO, E. E. S. 1978. *Perfilagem eletromagnética de falhas e diques verticais empregando campos de onda plana*, UFBA/ PPPG, 140 p. (Tese de Doutorado).
- SAMPAIO, E. E. S. 1985. *Espalhamento de uma onda eletromagnética plana por dois quartos-de-espaço condutores*. UFBA, 35 p. (Trabalho de professor titular).
- SOMERFELD, A. 1896. Mathematische Theorie der Diffraction. *Mathematische Annalen* 47: 317-374.
- SPIEGEL, M. R. 1976. *Análise de Fourier*. São Paulo, McGraw-Hill do Brasil.
- WEAVER, J. 1963. The Electromagnetic field within a discontinuous conductor with reference to geomagnetic micropulsations near a coast line. *Canadian Journal of Physics*. **41**(3): 484-495.

## ANEXOS

**ANEXO A - PROVAS DE QUE AS SOLUÇÕES PROPOSTAS POR SAMPAIO SÃO SOLUÇÕES DA EQUAÇÃO DE HELMHOLTZ**

**ANEXO B - PROVAS DE QUE OS TERMOS ADICIONADOS ÀS SOLUÇÕES PROPOSTAS POR SAMPAIO SÃO SOLUÇÕES DA EQUAÇÃO DE HELMHOLTZ**

**ANEXO C - ANÁLISE DE FOURIER**

**ANEXO D - TEOREMAS DE PARIDADES**

**ANEXO E - RESOLUÇÃO DAS INTEGRAIS  $I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6, I_7, I_8, I_9, I_{10}, I_{11}$  E  $I_{12}$  DO TEXTO**

**ANEXO F - ESTUDOS DE  $k_0, k_1, k_2, v_0, v_1$  E  $v_2$**

**ANEXO G - N-ÉSIMAS RAÍZES DE UM NÚMERO COMPLEXO**

## ANEXO A – PROVAS DE QUE AS SOLUÇÕES PROPOSTAS POR SAMPAIO SÃO SOLUÇÕES DA EQUAÇÃO DE HELMHOLTZ

Reescrevendo as equações (9), (1), (11) e (12), respectivamente, como:

$$E_0' = a + b + c + d, \quad z < 0 \quad \text{e} \quad x < 0. \quad (\text{A.1})$$

$$E_0'' = a_0 + b_0 + c_0 + d_0, \quad z < 0 \quad \text{e} \quad x > 0. \quad (\text{A.2})$$

$$E_1 = a_1 + b_1 + c_1, \quad z > 0 \quad \text{e} \quad x < 0. \quad (\text{A.3})$$

$$E_2 = a_2 + b_2 + c_2, \quad z > 0 \quad \text{e} \quad x > 0. \quad (\text{A.4})$$

### 1- PROVA DE QUE $E_0'$ É SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO (1)

Fazendo  $E_i = a$  e  $i = 0$  em (1), obtém-se:

$$\frac{\partial^2 a}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a}{\partial z^2} + k_0^2 a = 0. \quad (\text{A.5})$$

De (9) e (A.1), obtém-se:

$$a = P e^{jk_0 z},$$

onde:

$$\frac{\partial^2 a}{\partial x^2} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 a}{\partial z^2} = -k_0^2 a. \quad (\text{A.6})$$

De (A.6) em (A.5), obtém-se:

$$0 = 0.$$

Logo,  $a = P e^{jk_0 z}$  é solução de (1).

Fazendo  $E_i = b$  e  $i = 0$  em (1), obtém-se:

$$\frac{\partial^2 b}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 b}{\partial z^2} + k_0^2 b = 0. \quad (\text{A.7})$$

De (9) e (A.1), obtém-se:

$$b = R_0' e^{-jk_0 z},$$

onde:

$$\frac{\partial^2 b}{\partial x^2} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 b}{\partial z^2} = -k_0^2 b. \quad (\text{A.8})$$

De (A.8) em (A.7), obtém-se:

$$0 = 0.$$

Logo,  $b = R_0' e^{-jk_0 z}$  é solução de (1).

Fazendo  $E_i = c$  e  $i = 0$  em (1), obtém-se:

$$\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} + k_0^2 c = 0. \quad (\text{A.9})$$

De (9) e (A.1), obtém-se:

$$c = \int_0^{+\infty} f_0'(s) \cos(sz) e^{u_0 x} ds,$$

onde:

$$\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} = \int_0^{+\infty} u_0^2 f_0'(s) \cos(sz) e^{u_0 x} ds \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} = - \int_0^{+\infty} s^2 f_0'(s) \cos(sz) e^{u_0 x} ds. \quad (\text{A.10})$$

De (A.10) em (A.9), obtém-se:

$$\int_0^{+\infty} (s^2 - u_0^2) f_0'(s) \cos(sz) e^{u_0 x} ds + k_0^2 c = 0. \quad (\text{A.11})$$

Fazendo  $i = 0$  em (13), obtém-se:

$$u_0^2 - s^2 = -k_0^2. \quad (\text{A.12})$$

De (A.12) em (A.11), obtém-se:

$$0 = 0.$$

Logo,  $c = \int_0^{+\infty} f_0'(s) \cos(sz) e^{u_0 x} ds$  é solução de (1).

Fazendo  $E_i = d$  e  $i = 0$  em (1), obtém-se:

$$\frac{\partial^2 d}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 d}{\partial z^2} + k_0^2 d = 0. \quad (\text{A.13})$$

De (9) e (A.1), obtém-se:

$$d = \int_0^{+\infty} g_0'(t) \cos(tx) e^{v_0 z} dt,$$

onde:

$$\frac{\partial^2 d}{\partial x^2} = - \int_0^{+\infty} t^2 g_0'(t) \cos(tx) e^{v_0 z} dt \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 d}{\partial z^2} = \int_0^{+\infty} v_0^2 g_0'(t) \cos(tx) e^{v_0 z} dt. \quad (\text{A.14})$$

De (A.14) em (A.13), obtém-se:

$$\int_0^{+\infty} (v_0^2 - t^2) g_0'(t) \cos(tx) e^{v_0 z} dt + k_0^2 d = 0. \quad (\text{A.15})$$

Fazendo  $i = 0$  em (14), obtém-se:

$$v_0^2 - t^2 = -k_0^2. \quad (\text{A.16})$$

De (A.16) em (A.15), obtém-se:

$$0 = 0.$$

Logo,  $d = \int_0^{+\infty} g_0'(t) \cos(tx) e^{v_0 z} dt$  é solução de (1).

Pelo fato de (1) admitir o *princípio da superposição* e de  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e  $d$  serem soluções de (1), então  $E_0'$ , em (9), é solução de (1).

## 2- PROVA DE QUE $E_0''$ É SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO (1)

Fazendo  $E_i = a_0$  e  $i = 0$  em (1), obtém-se:

$$\frac{\partial^2 a_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_0}{\partial z^2} + k_0^2 a_0 = 0. \quad (\text{A.17})$$

De (10) e (A.2), obtém-se:

$$a_0 = P e^{jk_0 z},$$

como  $a_0 = a = P e^{jk_0 z}$ ,  $a_0$  também é solução de (1), conforme mostrado para  $E_0'$  anterior.

Fazendo  $E_i = b_0$  e  $i = 0$  em (1), obtém-se:

$$\frac{\partial^2 b_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 b_0}{\partial z^2} + k_0^2 b_0 = 0. \quad (\text{A.18})$$

De (10) e (A.2), obtém-se:

$$b_0 = R_0'' e^{-jk_0 z},$$

onde:

$$\frac{\partial^2 b_0}{\partial x^2} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 b_0}{\partial z^2} = -k_0^2 b_0. \quad (\text{A.19})$$

De (A.19) em (A.18), obtém-se:

$$0 = 0.$$

Logo,  $b_0 = R_0'' e^{-jk_0 z}$  é solução de (1).

Fazendo  $E_i = c_0$  e  $i = 0$  em (1), obtém-se:

$$\frac{\partial^2 c_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c_0}{\partial z^2} + k_0^2 c_0 = 0. \quad (\text{A.20})$$

De (10) do e (A.2), obtém-se:

$$c_0 = \int_0^{+\infty} f_0''(s) \cos(sz) e^{-u_0 x} ds,$$

onde:

$$\frac{\partial^2 c_0}{\partial x^2} = \int_0^{+\infty} u_0^2 f_0''(s) \cos(sz) e^{-u_0 x} ds \quad e \quad \frac{\partial^2 c_0}{\partial z^2} = - \int_0^{+\infty} s^2 f_0''(s) \cos(sz) e^{-u_0 x} ds. \quad (\text{A.21})$$

De (A.21) em (A.20), obtém-se:

$$\int_0^{+\infty} (u_0^2 - s^2) f_0''(s) \cos(sz) e^{-u_0 x} ds + k_0^2 c_0 = 0. \quad (\text{A.22})$$

Fazendo  $i = 0$  em (13), obtém-se:

$$u_0^2 - s^2 = -k_0^2. \quad (\text{A.23})$$

De (A.23) em (A.22), obtém-se:

$$0 = 0.$$

Logo,  $c_0 = \int_0^{+\infty} f_0''(s) \cos(sz) e^{-u_0 x} ds$  é solução de (1).

Fazendo  $E_i = d_0$  e  $i = 0$  em (1), obtém-se:

$$\frac{\partial^2 d_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 d_0}{\partial z^2} + k_0^2 d_0 = 0. \quad (\text{A.24})$$

De (10) e (A.2), obtém-se:

$$d_0 = \int_0^{+\infty} g_0''(t) \cos(tx) e^{v_0 z} dt,$$

onde:

$$\frac{\partial^2 d_0}{\partial x^2} = - \int_0^{+\infty} t^2 g_0''(t) \cos(tx) e^{v_0 z} dt \quad e \quad \frac{\partial^2 d_0}{\partial z^2} = \int_0^{+\infty} v_0^2 g_0''(t) \cos(tx) e^{v_0 z} dt. \quad (\text{A.25})$$

De (A.25) em (A.24), obtém-se:

$$\int_0^{+\infty} (v_0^2 - t^2) g_0''(t) \cos(tx) e^{v_0 z} dt + k_0^2 d_0 = 0. \quad (\text{A.26})$$

Fazendo  $i = 0$  em (14), obtém-se:

$$v_0^2 - t^2 = -k_0^2. \quad (\text{A.27})$$

De (A.27) em (A.26), obtém-se:

$$0 = 0.$$

Logo,  $d_0 = \int_0^{+\infty} g_0''(t) \cos(tx) e^{v_0 z} dt$  é solução de (1).

Pelo fato de (1) admitir o *princípio da superposição* e de  $a_0$ ,  $b_0$ ,  $c_0$  e  $d_0$  serem soluções de (1), então  $E_0''$ , em (10), é solução de (1).

### 3- PROVA DE QUE $E_1$ É SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO (1)

Fazendo  $E_i = a_i$  e  $i = 1$  em (1), obtém-se:

$$\frac{\partial^2 a_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_1}{\partial z^2} + k_1^2 a_1 = 0. \quad (\text{A.28})$$

De (11) e (A.3), obtém-se:

$$a_1 = T_1 e^{jk_1 z},$$

onde:

$$\frac{\partial^2 a_1}{\partial x^2} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 a_1}{\partial z^2} = -k_1^2 a_1. \quad (\text{A.29})$$

De (A.29) em (A.28), obtém-se:

$$0 = 0.$$

Logo,  $a_1 = T_1 e^{jk_1 z}$  é solução de (1).

Fazendo  $E_i = b_1$  e  $i = 1$  em (1), obtém-se:

$$\frac{\partial^2 b_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 b_1}{\partial z^2} + k_1^2 b_1 = 0. \quad (\text{a.30})$$

De (11) e (A.3), obtém-se:

$$b_1 = \int_0^{+\infty} f_1(s) \cos(sz) e^{u_1 x} ds,$$

onde:

$$\frac{\partial^2 b_1}{\partial x^2} = \int_0^{+\infty} u_1^2 f_1(s) \cos(sz) e^{u_1 x} ds \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 b_1}{\partial z^2} = - \int_0^{+\infty} s^2 f_1(s) \cos(sz) e^{u_1 x} ds \quad (\text{A.31})$$

De (A.31) em (A.30), obtém-se:

$$\int_0^{+\infty} (u_1^2 - s^2) f_1(s) \cos(sz) e^{u_1 x} ds + k_1^2 b_1 = 0. \quad (\text{A.32})$$

Fazendo  $i = 1$  em (13), obtém-se:

$$u_1^2 - s^2 = -k_1^2. \quad (\text{A.33})$$

De (A.33) em (A.32), obtém-se:

$$0 = 0.$$

Logo,  $b_1 = \int_0^{+\infty} f_1(s) \cos(sz) e^{u_1 x} ds$  é solução de (1).

Fazendo  $E_i = c_1$  e  $i = 1$  em (1), obtém-se:

$$\frac{\partial^2 c_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c_1}{\partial z^2} + k_1^2 c_1 = 0. \quad (\text{A.34})$$

De (11) e (A.3), obtém-se:

$$c_1 = \int_0^{+\infty} g_1(t) \cos(tx) e^{-v_1 z} dt$$

onde:

$$\frac{\partial^2 c_1}{\partial x^2} = - \int_0^{+\infty} t^2 g_1(t) \cos(tx) e^{-v_1 z} dt \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 c_1}{\partial z^2} = \int_0^{+\infty} v_1^2 g_1(t) \cos(tx) e^{-v_1 z} dt. \quad (\text{A.35})$$

De (A.35) em (A.34), obtém-se:

$$\int_0^{+\infty} (v_1^2 - t^2) g_1(t) \cos(tx) e^{-v_1 z} dt + k_1^2 c_1 = 0. \quad (\text{A.36})$$

Fazendo  $i = 1$  em (14), obtém-se:

$$v_1^2 - t^2 = -k_1^2. \quad (\text{A.37})$$

De (A.37) em (A.36), obtém-se:

$$0 = 0.$$

Logo,  $c_1 = \int_0^{+\infty} g_1(t) \cos(tx) e^{-v_1 z} dt$  é solução de (1).

Pelo fato de (1) admitir o *princípio da superposição* e de  $a_1$ ,  $b_1$  e  $c_1$  serem soluções de (1), então  $E_1$ , em (11), é solução de (1).

#### 4- PROVA DE QUE $E_2$ É SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO (1)

Fazendo  $E_i = a_2$  e  $i = 2$  em (1), obtém-se:

$$\frac{\partial^2 a_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_2}{\partial z^2} + k_2^2 a_2 = 0. \quad (\text{A.38})$$

De (12) e (A.4), obtém-se:

$$a_2 = T_2 e^{jk_2 z},$$

onde:

$$\frac{\partial^2 a_2}{\partial x^2} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 a_2}{\partial z^2} = -k_2^2 a_2. \quad (\text{A.39})$$

De (A.39) em (A.38), obtém-se:

$$0 = 0.$$

Logo,  $a_2 = T_2 e^{jk_2 z}$  é solução de (1).

Fazendo  $E_i = b_2$  e  $i = 2$  em (1), obtém-se:

$$\frac{\partial^2 b_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 b_2}{\partial z^2} + k_2^2 b_2 = 0. \quad (\text{A.40})$$

De (12) e (A.4), obtém-se:

$$b_2 = \int_0^{+\infty} f_2(s) \cos(sz) e^{u_2 x} ds,$$

onde:

$$\frac{\partial^2 b_2}{\partial x^2} = \int_0^{+\infty} u_2^2 f_2(s) \cos(sz) e^{u_2 x} ds \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 b_2}{\partial z^2} = - \int_0^{+\infty} s^2 f_2(s) \cos(sz) e^{u_2 x} ds. \quad (\text{A.41})$$

De (A.41) em (A.40), obtém-se:

$$\int_0^{+\infty} (u_2^2 - s^2) f_2(s) \cos(sz) e^{u_2 x} ds + k_2^2 b_2 = 0. \quad (\text{A.42})$$

Fazendo  $i = 2$  em (13), obtém-se:

$$u_2^2 - s^2 = -k_2^2. \quad (\text{A.43})$$

De (A.43) em (A.42), obtém-se:

$$0 = 0.$$

Logo,  $b_2 = \int_0^{+\infty} f_2(s) \cos(sz) e^{u_2 x} ds$  é solução de (1).

Fazendo  $E_i = c_2$  e  $i = 2$  em (1), obtém-se:

$$\frac{\partial^2 c_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c_2}{\partial z^2} + k_2^2 c_2 = 0. \quad (\text{A.44})$$

De (12) e (A.4), obtém-se:

$$c_2 = \int_0^{+\infty} g_2(t) \cos(tx) e^{-v_2 z} dt,$$

onde:

$$\frac{\partial^2 c_2}{\partial x^2} = - \int_0^{+\infty} t^2 g_2(t) \cos(tx) e^{-v_2 z} dt \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 c_2}{\partial z^2} = \int_0^{+\infty} v_2^2 g_2(t) \cos(tx) e^{-v_2 z} dt. \quad (\text{A.45})$$

De (A.45) em (A.44), obtém-se:

$$\int_0^{+\infty} (v_2^2 - t^2) g_2(t) \cos(tx) e^{-v_2 z} dt + k_2^2 c_2 = 0. \quad (\text{A.46})$$

Fazendo  $i = 2$  em (14), obtém-se:

$$v_2^2 - t^2 = -k_2^2. \quad (\text{A.47})$$

De (A.47) em (A.46), obtém-se:

$$0 = 0.$$

Logo,  $c_2 = \int_0^{+\infty} g_2(t) \cos(tx) e^{-v_2 z} dt$  é solução de (1).

Pelo fato de (1) admitir o *princípio da superposição* e de  $a_2$ ,  $b_2$ , e  $c_2$  serem soluções de (1), então  $E_2$ , em (12), é solução de (1).

## ANEXO B – PROVAS DE QUE OS TERMOS ADICIONADOS ÀS SOLUÇÕES PROPOSTAS POR SAMPAIO SÃO SOLUÇÕES DA EQUAÇÃO DE HELMHOLTZ

### 1- PROVA DE QUE (34) É SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO (1)

Vejam os que o termo

$$e = -j \int_0^{+\infty} f_0'(s) \sin(sz) e^{u_0 x} ds, \quad (\text{B.1})$$

é solução da equação de Helmholtz.

Fazendo  $E_i = e$  e  $i = 0$ , obtém-se:

$$\frac{\partial^2 e}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 e}{\partial z^2} + k_0^2 e = 0. \quad (\text{B.2})$$

Derivando (B.1) parcialmente em relação a  $x$  duas vezes e a  $z$  duas vezes, respectivamente, obtém-se:

$$\frac{\partial^2 e}{\partial x^2} = -j \int_0^{+\infty} u_0^2 f_0'(s) \sin(sz) e^{u_0 x} ds \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 e}{\partial z^2} = j \int_0^{+\infty} s^2 f_0'(s) \sin(sz) e^{u_0 x} ds. \quad (\text{B.3})$$

De (B.3) em (B.2), obtém-se:

$$j \int_0^{+\infty} (s^2 - u_0^2) f_0'(s) \sin(sz) e^{u_0 x} ds + k_0^2 e = 0. \quad (\text{B.4})$$

Fazendo  $i = 0$  em (13), obtém-se:

$$u_0^2 - s^2 = -k_0^2. \quad (\text{B.5})$$

De (B.5) em (B.4), obtém-se:

$$0 = 0.$$

Logo,  $e = -j \int_0^{+\infty} f_0''(s) \sin(sz) e^{-u_0 x} ds$  é solução da equação de Helmholtz e pelo princípio da superposição pode ser adicionado a  $E_0'$ .

## 2- PROVA DE QUE (35) É SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO (1)

Vejamos que o termo

$$e_0 = -j \int_0^{+\infty} f_0''(s) \sin(sz) e^{-u_0 x} ds. \quad (\text{B.6})$$

é solução da equação de Helmholtz.

Fazendo  $E_i = e_0$  e  $i = 0$  em (1), obtém-se:

$$\frac{\partial^2 e_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 e_0}{\partial z^2} + k_0^2 e_0 = 0. \quad (\text{B.7})$$

Derivando (B.6) parcialmente em relação a  $x$  duas vezes e a  $z$  duas vezes, respectivamente, obtém-se:

$$\frac{\partial^2 e_0}{\partial x^2} = -j \int_0^{+\infty} u_0^2 f_0''(s) \sin(sz) e^{-u_0 x} ds \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 e_0}{\partial z^2} = j \int_0^{+\infty} s^2 f_0''(s) \sin(sz) e^{-u_0 x} ds. \quad (\text{B.8})$$

De (B.8) em (B.7), obtém-se:

$$j \int_0^{+\infty} (u_0^2 - s^2) f_0''(s) \sin(sz) e^{-u_0 x} ds + k_0^2 e_0 = 0. \quad (\text{B.9})$$

Fazendo  $i = 0$  em (13), obtém-se:

$$u_0^2 - s^2 = -k_0^2. \quad (\text{B.10})$$

De (B.10) em (B.9), obtém-se:

$$0 = 0.$$

Logo,  $e_0 = -j \int_0^{+\infty} f_0''(s) \sin(sz) e^{-u_0 x} ds$  é solução da equação de Helmholtz e pelo princípio da superposição pode ser adicionado a  $E_0$ .

### 3- PROVA DE QUE (50) É SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO (1)

Vejamos que o termo

$$e_1 = -j \int_0^{+\infty} f_1(s) \sin(sz) e^{u_1 x} ds, \quad (\text{B.11})$$

é solução da equação de Helmholtz.

Fazendo  $E_i = e_i$  e  $i = 1$  em (1), obtém-se:

$$\frac{\partial^2 e_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 e_1}{\partial z^2} + k_1^2 e_1 = 0. \quad (\text{B.12})$$

Derivando (B.11) parcialmente em relação a  $x$  duas vezes e a  $z$  duas vezes, respectivamente, obtém-se:

$$\frac{\partial^2 e_1}{\partial x^2} = -j \int_0^{+\infty} u_1^2 f_1(s) \sin(sz) e^{u_1 x} ds \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 e_1}{\partial z^2} = j \int_0^{+\infty} s^2 f_1(s) \sin(sz) e^{u_1 x} ds. \quad (\text{B.13})$$

De (B.13) em (B.12), obtém-se:

$$j \int_0^{+\infty} (u_1^2 - s^2) f_1(s) \sin(sz) e^{u_1 x} ds + k_1^2 e_1 = 0. \quad (\text{B.14})$$

Fazendo  $i = 1$  em (13), obtém-se:

$$u_1^2 - s^2 = -k_1^2. \quad (\text{B.15})$$

De (B.15) em (B.14), obtém-se:

$$0 = 0.$$

Logo,  $e_1 = -j \int_0^{+\infty} f_1(s) \sin(sz) e^{u_1 x} ds$  é solução da equação de Helmholtz e pelo princípio da superposição pode ser adicionado a  $E_1$ .

#### 4- PROVA DE QUE (51) É SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO (1)

Vejam os que o termo

$$e_2 = -j \int_0^{+\infty} f_2(s) \sin(sz) e^{-u_2 x} ds, \quad (\text{B.16})$$

é solução da equação de Helmholtz.

Fazendo  $E_i = e_2$  e  $i = 2$  em (1), obtém-se:

$$\frac{\partial^2 e_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 e_2}{\partial z^2} + k_2^2 e_2 = 0. \quad (\text{B.17})$$

Derivando (B.16) parcialmente em relação a  $x$  duas vezes e a  $z$  duas vezes, respectivamente, obtém-se:

$$\frac{\partial^2 e_2}{\partial x^2} = -j \int_0^{+\infty} u_2^2 f_2(s) \sin(sz) e^{-u_2 x} ds \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 e_2}{\partial z^2} = j \int_0^{+\infty} s^2 f_2(s) \sin(sz) e^{-u_2 x} ds. \quad (\text{B.18})$$

De (B.18) em (B.17), obtém-se:

$$j \int_0^{+\infty} (u_2^2 - s^2) f_2(s) \sin(sz) e^{-u_2 x} ds + k_2^2 e_2 = 0. \quad (\text{B.19})$$

Fazendo  $i = 2$  em (13), obtém-se:

$$u_2^2 - s^2 = -k_2^2. \quad (\text{B.20})$$

De (B.20) em (B.19), obtém-se:

$$0 = 0.$$

Logo,  $e_2 = -j \int_0^{+\infty} f_2(s) \sin(sz) e^{-u_2 x} ds$  é solução da equação de Helmholtz e pelo princípio da superposição pode ser adicionado a  $E_2$ .

## 5- PROVA DE QUE (65) É SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO (1)

Vejamos que o termo

$$f = -j \int_0^{+\infty} g_0'(t) \sin(tx) e^{v_0 z} dt, \quad (\text{B.21})$$

é solução da equação de Helmholtz.

Fazendo  $E_i = f$  e  $i = 0$  em (1), obtém-se:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + k_0^2 f = 0. \quad (\text{B.22})$$

Derivando (B.21) parcialmente em relação a  $x$  duas vezes e a  $z$  duas vezes, respectivamente, obtém-se:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = j \int_0^{+\infty} t^2 g_0'(t) \sin(tx) e^{v_0 z} dt \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = -j \int_0^{+\infty} v_0^2 g_0'(t) \sin(tx) e^{v_0 z} dt. \quad (\text{B.23})$$

De (B.23) em (B.22), obtém-se:

$$j \int_0^{+\infty} (t^2 - v_0^2) g_0'(t) \sin(tx) e^{v_0 z} dt + k_0^2 f = 0. \quad (\text{B.24})$$

Fazendo  $i = 0$  em (13), obtém-se:

$$v_0^2 - t^2 = -k_0^2. \quad (\text{B.25})$$

De (B.25) em (B.24), obtém-se:

$$0 = 0.$$

Logo,  $f = -j \int_0^{+\infty} g_0'(t) \sin(tx) e^{v_0 z} dt$  é solução da equação de Helmholtz e pelo princípio da superposição pode ser adicionado a  $E_0'$ .

## 6- PROVA DE QUE (66) É SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO (1)

Vejamos que o termo

$$f_1 = -j \int_0^{+\infty} g_1(t) \sin(tx) e^{-v_1 z} dt, \quad (\text{B.26})$$

é solução da equação de Helmholtz.

Fazendo  $E_i = f_1$  e  $i = 1$  em (1), obtém-se:

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial z^2} + k_1^2 f_1 = 0. \quad (\text{B.27})$$

Derivando (B.26) parcialmente em relação a  $x$  duas vezes e a  $z$  duas vezes, respectivamente, obtém-se:

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} = j \int_0^{+\infty} t^2 g_1(t) \sin(tx) e^{-v_1 z} dt \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 f_1}{\partial z^2} = -j \int_0^{+\infty} v_1^2 g_1(t) \sin(tx) e^{-v_1 z} dt. \quad (\text{B.28})$$

De (B.28) em (B.27), obtém-se:

$$j \int_0^{+\infty} (t^2 - v_1^2) g_1(t) \sin(tx) e^{-v_1 z} dt + k_1^2 f_1 = 0. \quad (\text{B.29})$$

Fazendo  $i = 1$  em (13), obtém-se:

$$v_1^2 - s^2 = -k_1^2. \quad (\text{B.30})$$

De (B.30) em (B.29), obtém-se:

$$0 = 0.$$

Logo,  $f_1 = -j \int_0^{+\infty} g_1(t) \sin(tx) e^{-v_1 z} dt$  é solução da equação de Helmholtz e pelo princípio da superposição pode ser adicionado a  $E_1$ .

## ANEXO C – ANÁLISE DE FOURIER

### 1- INTEGRAIS DE FOURIER

A teoria das integrais de Fourier produz as seguintes informações:

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \{A(\alpha)\cos(\alpha x) + B(\alpha)\sin(\alpha x)\}d\alpha. \quad (C.1)$$

Onde:

$$A(\alpha) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos(\alpha x) dx, \quad (C.2)$$

$$B(\alpha) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin(\alpha x) dx.$$

Outras formas de se escrever  $A(\alpha)$  e  $B(\alpha)$  são as que seguem:

$$A(\alpha) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \cos(\alpha u) du, \quad (C.3)$$

$$B(\alpha) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \sin(\alpha u) du.$$

De (C.3) em (C.1), obtém-se:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{\alpha=0}^{+\infty} \int_{u=-\infty}^{+\infty} f(u) \cos[\alpha(x-u)] du d\alpha, \quad (C.4)$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{-j[\alpha(x-u)]} du d\alpha, \quad (C.5)$$

ou

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\alpha x} d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{-j\alpha u} du . \quad (\text{C.6})$$

## 2- TRANSFORMADAS DE FOURIER

De (C.6), substituindo u por x, tem-se que:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\alpha x} d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-j\alpha x} dx , \quad (\text{C.7})$$

com o membro direito sendo o desenvolvimento de  $f(x)$  em *integrais de Fourier*. Onde:

$$\mathfrak{S}\{f(x)\} = F(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-j\alpha x} dx , \quad (\text{C.8})$$

é a *transformada direta de Fourier* da função  $f(x)$ .

$$\mathfrak{S}^{-1}\{F(\alpha)\} = f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\alpha) e^{j\alpha x} d\alpha , \quad (\text{C.9})$$

é a *transformada inversa de Fourier* da função  $F(\alpha)$ .

Da *teoria das funções complexas*, tem-se que:

$$e^{-j\alpha x} = \cos(\alpha x) - j \sin(\alpha x). \quad (\text{C.10})$$

De (C.10) em (C.7), obtém-se:

$$\mathfrak{S}\{f(x)\} = F(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos(\alpha x) dx - j \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin(\alpha x) dx . \quad (\text{C.11})$$

De (C.11), tem-se que:

$$\mathfrak{S}_C\{f(x)\} = F_C(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos(\alpha x) dx = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[ \int_{-T}^{+T} f(x) \cos(\alpha x) dx \right], \quad (\text{C.12})$$

é a transformada direta do co-seno de Fourier da função  $f(x)$ .

De (C.11), tem-se que:

$$\mathfrak{S}_S\{f(x)\} = F_S(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin(\alpha x) dx = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[ \int_{-T}^{+T} f(x) \sin(\alpha x) dx \right], \quad (\text{C.13})$$

é a transformada direta do seno de Fourier da função  $f(x)$ .

De (C.12) e (C.13) em (C.11), obtém-se:

$$\mathfrak{S}\{f(x)\} = F(\alpha) = F_C(\alpha) - j F_S(\alpha). \quad (\text{C.14})$$

Se  $f(x) = f(-x)$ , isto é, quando  $f$  é uma função par,

$$\mathfrak{S}\{f(x)\} = F(\alpha) = F_C(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos(\alpha x) dx. \quad (\text{C.15})$$

Obtém-se (C.15) a partir de (C.11), pois o integrando da parte imaginária de (C.11) é *ímpar* na variável  $x$  para  $f$  par na mesma variável, sendo tal integral *nula*.

Se  $f(x) = -f(-x)$ , isto é, quando  $f$  é uma função ímpar,

$$\mathfrak{S}\{f(x)\} = F(\alpha) = -j F_S(\alpha) = -j \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin(\alpha x) dx. \quad (\text{C.16})$$

Obtém-se (C.16) a partir de (C.11), pois o integrando da parte real de (C.11) é *ímpar* na variável  $x$  para  $f$  ímpar na mesma variável, sendo tal integral *nula*.

De (C.12), obtém-se:

$$\mathfrak{S}_C\{f(x)\} = F_C(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos(\alpha x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos(-\alpha x) dx = F_C(-\alpha).$$

Pode-se concluir que

$$F_C(\alpha) = F_C(-\alpha). \quad (\text{C.17})$$

Logo,  $F_C(\alpha)$  é uma *função par na variável  $\alpha$* , quando o limite em (C.12) existe e é finito.

De (C.12), obtém-se:

$$\mathfrak{S}_S\{f(x)\} = F_S(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin(\alpha x) dx = - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin(-\alpha x) dx = -F_S(-\alpha).$$

Pode-se concluir que

$$F_S(\alpha) = -F_S(-\alpha). \quad (\text{C.18})$$

Logo,  $F_S(\alpha)$  é uma *função ímpar na variável  $\alpha$* , quando o limite em (C.13) acima existe e é finito.

Em (C.12), para  $f$  *par* na variável  $x$  o integrando é *par* na mesma variável e pode-se reescrevê-lo assim:

$$F_C(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos(\alpha x) dx = 2 \int_{-\infty}^0 f(x) \cos(\alpha x) dx = 2 \int_0^{+\infty} f(x) \cos(\alpha x) dx. \quad (\text{C.19})$$

Em (C.13), para  $f$  *ímpar* na variável  $x$  o integrando é *par* na mesma variável e pode-se reescrevê-lo assim:

$$F_S(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin(\alpha x)dx = 2 \int_{-\infty}^0 f(x)\sin(\alpha x)dx = 2 \int_0^{+\infty} f(x)\sin(\alpha x)dx . \quad (C.20)$$

Da teoria das funções complexas, tem-se que:

$$e^{j\alpha x} = \cos(\alpha x) + j \sin(\alpha x). \quad (C.21)$$

De (C.21) em (C.9), obtém-se:

$$\mathfrak{S}^{-1}\{F(\alpha)\} = f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\alpha) \cos(\alpha x) d\alpha + j \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\alpha) \sin(\alpha x) d\alpha \quad (C.22)$$

De (C.22), tem-se que:

$$\mathfrak{S}^{-1}_c\{F(\alpha)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\alpha) \cos(\alpha x) d\alpha, \quad (C.23)$$

é a transformada inversa do co-seno de Fourier da função  $F(\alpha)$ .

De (C.22), tem-se que:

$$\mathfrak{S}^{-1}_s\{F(\alpha)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\alpha) \sin(\alpha x) d\alpha, \quad (C.24)$$

é a transformada inversa do seno de Fourier da função  $F(\alpha)$ .

De (C.23) e (C.24) em (C.22), obtém-se:

$$\mathfrak{S}^{-1}\{F(\alpha)\} = f(x) = \mathfrak{S}^{-1}_c\{F(\alpha)\} + j \mathfrak{S}^{-1}_s\{F(\alpha)\}. \quad (C.25)$$

Se  $F(\alpha)$  é par, isto é, se  $F(\alpha) = F_C(\alpha)$ , de (C.23), obtém-se:

$$\mathfrak{S}^{-1}\{F(\alpha)\} = f(x) = \mathfrak{S}^{-1}_c\{F_C(\alpha)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F_C(\alpha) \cos(\alpha x) d\alpha. \quad (C.26)$$

Onde a parte imaginária de (C.22) é *nula*, devido ao seu integrando ser *ímpar na variável  $\alpha$* .

Se  $F(\alpha)$  é *ímpar*, isto é, se  $F(\alpha) = F_S(\alpha)$ , de (C.24), obtém-se:

$$\mathfrak{S}^{-1}\{F(\alpha)\} = f(x) = j \mathfrak{S}^{-1}_s\{F_S(\alpha)\} = j \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F_S(\alpha) \sin(\alpha x) d\alpha, \quad (C.27)$$

Onde a parte real de (C.16) é *nula*, devido ao seu integrando ser *ímpar na variável  $\alpha$* .

Devido ao integrando de (C.20) ser *par na variável  $\alpha$* , pode-se reescrevê-lo assim:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F_C(\alpha) \cos(\alpha x) d\alpha = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^0 F_C(\alpha) \cos(\alpha x) d\alpha = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} F_C(\alpha) \cos(\alpha x) d\alpha. \quad (C.28)$$

Devido ao integrando de (C.27) ser *par na variável  $\alpha$* , pode-se reescrevê-lo assim:

$$f(x) = j \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F_S(\alpha) \sin(\alpha x) d\alpha = j \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^0 F_S(\alpha) \sin(\alpha x) d\alpha = j \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} F_S(\alpha) \sin(\alpha x) d\alpha. \quad (C.29)$$

De (C.19) e (C.28), pode-se escrever:

$$\text{a) } F_C(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos(\alpha x) dx = 2 \int_{-\infty}^0 f(x) \cos(\alpha x) dx = 2 \int_0^{+\infty} f(x) \cos(\alpha x) dx; \quad (C.30)$$

$$\text{b) } f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F_C(\alpha) \cos(\alpha x) d\alpha = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^0 F_C(\alpha) \cos(\alpha x) d\alpha = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} F_C(\alpha) \cos(\alpha x) d\alpha.$$

Pode-se escrever (C.30), também assim:

$$\text{a) } F_C(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos(\alpha x) dx = \int_{-\infty}^0 f(x) \cos(\alpha x) dx = \int_0^{+\infty} f(x) \cos(\alpha x) dx ;$$

(C.31)

$$\text{b) } f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F_C(\alpha) \cos(\alpha x) d\alpha = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^0 F_C(\alpha) \cos(\alpha x) d\alpha = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} F_C(\alpha) \cos(\alpha x) d\alpha .$$

De (C.20) e (C.29), pode-se escrever:

$$\text{a) } F_S(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin(\alpha x) dx = 2 \int_{-\infty}^0 f(x) \sin(\alpha x) dx = 2 \int_0^{+\infty} f(x) \sin(\alpha x) dx .$$

(C.32)

$$\text{b) } f(x) = j \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F_S(\alpha) \sin(\alpha x) d\alpha = j \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^0 F_S(\alpha) \sin(\alpha x) d\alpha = j \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} F_S(\alpha) \sin(\alpha x) d\alpha .$$

Pode-se escrever (C.32), também assim:

$$\text{a) } F_S(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin(\alpha x) dx = \int_{-\infty}^0 f(x) \sin(\alpha x) dx = \int_0^{+\infty} f(x) \sin(\alpha x) dx .$$

(C.33)

$$\text{b) } f(x) = j \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F_S(\alpha) \sin(\alpha x) d\alpha = j \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^0 F_S(\alpha) \sin(\alpha x) d\alpha = j \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} F_S(\alpha) \sin(\alpha x) d\alpha .$$

## ANEXO D – TEOREMAS DE PARIDADES

**TEOREMA 1:** A soma de duas funções nem par, nem ímpar só será par se, simultaneamente, cada uma for igual à outra com o argumento trocado pelo seu oposto.

Dem.:

f é uma função nem par, nem ímpar em x, isto é:

$$f(x) \neq f(-x) \quad (\text{D.1})$$

e 
$$f(x) \neq -f(-x) \quad (\text{D.2})$$

g é uma função nem par, nem ímpar em x, isto é:

$$g(x) \neq g(-x) \quad (\text{D.3})$$

e 
$$g(x) \neq -g(-x) \quad (\text{D.4})$$

Sendo

$$h(x) = f(x) + g(x) \quad (\text{D.5})$$

então,

$$h(-x) = f(-x) + g(-x) \quad (\text{D.6})$$

Pode-se afirmar que h será par,  $h(x) = h(-x)$ , apenas se:

$$f(-x) = g(x) \quad (\text{D.7})$$

e 
$$g(-x) = f(x) \quad (\text{D.8})$$

Pois a outra alternativa para garantir a função h ser par,

$$f(x) = f(-x) \quad (\text{D.9})$$

e 
$$g(x) = g(-x) \quad (\text{D.10})$$

é impossibilitada por (D.1) e (D.3).

**TEOREMA 2:** A função  $f(z) = (R_0' - R_0'')e^{-jk_0z}$  é nem par, nem ímpar.

Dem.:

Como

$$f(z) = (R_0' - R_0'')e^{-jk_0z},$$

pode-se afirmar que:

$$f(-z) = (R_0' - R_0'') e^{jk_0 z},$$

e que:

$$-f(-z) = -(R_0' - R_0'') e^{jk_0 z}.$$

Como  $f(z) \neq f(-z)$ , então  $f$  não é *par*. Como  $f(z) \neq -f(-z)$ , então  $f$  não é *ímpar*. Logo,  $f$  é *nem par, nem ímpar*.

**TEOREMA 3:** A função  $f(z) = \int_0^{+\infty} [g_0'(t) - g_0''(t)] e^{v_0 z} dt$  é *nem par, nem ímpar*.

Dem.:

Como

$$f(z) = \int_0^{+\infty} [g_0'(t) - g_0''(t)] e^{v_0 z} dt,$$

pode-se afirmar que:

$$f(-z) = \int_0^{+\infty} [g_0'(t) - g_0''(t)] e^{-v_0 z} dt,$$

e que:

$$-f(-z) = -\int_0^{+\infty} [g_0'(t) - g_0''(t)] e^{-v_0 z} dt.$$

Como  $f(z) \neq f(-z)$ , então  $f$  não é *par*. Como  $f(z) \neq -f(-z)$ , então  $f$  não é *ímpar*. Logo,  $f$  é *nem par, nem ímpar*.

**TEOREMA 4:** A soma de duas funções pares resulta uma função par.

Dem.:

Sejam  $f$  e  $g$  duas funções pares, isto é:

$$f(x) = f(-x) \tag{D.11}$$

e 
$$g(x) = g(-x) \tag{D.12}$$

com  $h$  sendo definida por:

$$h(x) = f(x) + g(x) \tag{D.13}$$

De (D.13), pode-se calcular:

$$h(-x) = f(-x) + g(-x) \quad (\text{D.14})$$

De (D.11) e (D.12) em (D.14), obtém-se:

$$h(-x) = f(x) + g(x) \quad (\text{D.15})$$

De (D.13) e (D.15), pode-se concluir que  $h(x) = h(-x)$ . Logo,  $h$  é uma função par.

**TEOREMA 5:** A soma de duas funções ímpares resulta uma função ímpar.

Dem.:

Sejam  $f$  e  $g$  duas funções ímpares, isto é:

$$f(x) = -f(-x) \quad (\text{D.16})$$

e 
$$g(x) = -g(-x) \quad (\text{D.17})$$

com  $h$  sendo definida por:

$$h(x) = f(x) + g(x) \quad (\text{D.18})$$

De (D.18), pode-se calcular:

$$-h(-x) = -f(-x) + [-g(-x)] \quad (\text{D.19})$$

De (D.16) e (D.17) em (D.19), obtém-se:

$$-h(-x) = f(x) + g(x) \quad (\text{D.20})$$

De (D.18) e (D.20), pode-se concluir que  $h(x) = -h(-x)$ . Logo,  $h$  é uma função ímpar.

**TEOREMA 6:** A soma de uma função ímpar com uma par resulta uma função nem par, nem ímpar.

Dem.:

Sejam  $f$  uma função ímpar e  $g$  uma função par, isto é:

$$f(x) = -f(-x) \quad (\text{D.21})$$

e 
$$g(x) = g(-x) \quad (\text{D.22})$$

com  $h$  sendo definida por:

$$h(x) = f(x) + g(x) \quad (\text{D.23})$$

De (D.23), pode-se calcular:

$$h(-x) = f(-x) + g(-x) \quad (\text{D.24})$$

De (D.21) e (D.22) em (D.24), obtém-se:

$$h(-x) = -f(x) + g(x). \quad (\text{D.25})$$

Como  $h(x) \neq h(-x)$ ,  $h$  não é uma função par.

De (D.23), pode-se calcular:

$$-h(-x) = -f(-x) - g(-x) \quad (\text{D.26})$$

De (D.21) e (D.22) em (D.26), obtém-se:

$$-h(-x) = f(x) - g(x). \quad (\text{D.27})$$

Como  $h(x) \neq -h(-x)$ ,  $h$  não é uma função ímpar. Logo,  $h$  é uma função nem par, nem ímpar.

**TEOREMA 7:** A função  $f(z) = T_1 e^{jk_1 z}$  é nem par, nem ímpar.

Dem.:

Como

$$f(z) = T_1 e^{jk_1 z},$$

pode-se afirmar que:

$$f(-z) = T_1 e^{-jk_1 z},$$

e que:

$$-f(-z) = -T_1 e^{-jk_1 z}.$$

Como  $f(z) \neq f(-z)$ , então  $f$  não é *par*. Como  $f(z) \neq -f(-z)$ , então  $f$  não é *ímpar*. Logo,  $f$  é *nem par, nem ímpar*.

**TEOREMA 8:** A função  $f(z) = T_2 e^{jk_2 z}$  é nem par, nem ímpar.

Dem.:

Como

$$f(z) = T_2 e^{jk_2 z},$$

pode-se afirmar que:

$$f(-z) = T_2 e^{-jk_2 z},$$

e que:

$$-f(-z) = -T_2 e^{-jk_2 z}.$$

Como  $f(z) \neq f(-z)$ , então  $f$  não é *par*. Como  $f(z) \neq -f(-z)$ , então  $f$  não é *ímpar*. Logo,  $f$  é *nem par, nem ímpar*.

**TEOREMA 9:** A função  $f(z) = \int_0^{+\infty} [g_1(t)e^{-v_1 z} - g_2(t)e^{v_2 z}] dt$  é *nem par, nem ímpar*.

Dem.:

Como

$$f(z) = \int_0^{+\infty} [g_1(t)e^{-v_1 z} - g_2(t)e^{v_2 z}] dt,$$

pode-se afirmar que:

$$f(-z) = \int_0^{+\infty} [g_1(t)e^{v_1 z} - g_2(t)e^{-v_2 z}] dt,$$

e que:

$$-f(-z) = -\int_0^{+\infty} [g_1(t)e^{v_1 z} - g_2(t)e^{-v_2 z}] dt.$$

Como  $f(z) \neq f(-z)$ , então  $f$  não é *par*. Como  $f(z) \neq -f(-z)$ , então  $f$  não é *ímpar*. Logo,  $f$  é *nem par, nem ímpar*.

**TEOREMA 10:** A função  $f(x) = \int_0^{+\infty} [f_0'(s)e^{u_0 x} - f_1(s)e^{u_1 x}] ds$  é *nem par, nem ímpar*.

Dem.:

Como

$$f(x) = \int_0^{+\infty} [f_0'(s)e^{u_0 x} - f_1(s)e^{u_1 x}] ds,$$

pode-se afirmar que:

$$f(-x) = \int_0^{+\infty} [f_0'(s)e^{-u_0 x} - f_1(s)e^{-u_1 x}] ds,$$

e que:

$$-f(-x) = -\int_0^{+\infty} [f_0'(s)e^{-u_0x} - f_1(s)e^{-u_1x}] ds.$$

Como  $f(x) \neq f(-x)$ , então  $f$  não é *par*. Como  $f(x) \neq -f(-x)$ , então  $f$  não é *ímpar*. Logo,  $f$  é *nem par, nem ímpar*.

## ANEXO E – RESOLUÇÃO DAS INTEGRAIS I<sub>1</sub>, I<sub>2</sub>, I<sub>3</sub>, I<sub>4</sub>, I<sub>5</sub>, I<sub>6</sub>, I<sub>7</sub>, I<sub>8</sub>, I<sub>9</sub>, I<sub>10</sub>, I<sub>11</sub> E I<sub>12</sub>

### 1- RESOLUÇÃO DA INTEGRAL I<sub>1</sub> DE (40)

Aplicando a *regra de integração da exponencial de base neperiana*, obtém-se:

$$I_1 = \int_{-\infty}^0 e^{-j(k_0-s)z} dz = -\frac{1}{j(k_0-s)} \left[ e^{-j(k_0-s)z} \right]_{z=-\infty}^0 = \frac{j}{(k_0-s)} \left[ e^{-j(k_0-s)z} \right]_{z=-\infty}^0,$$

$$I_1 = \frac{j}{(k_0-s)} \left[ e^{-jk_0z} e^{jsz} \right]_{z=-\infty}^0 = \frac{j}{(k_0-s)} \left[ \left( e^{-jk_0z} e^{jsz} \right)_{z=0} - \left( e^{-jk_0z} e^{jsz} \right)_{z=-\infty} \right]. \quad (\text{E.1})$$

Onde:

$$\left( e^{-jk_0z} e^{jsz} \right)_{z=-\infty} = \lim_{z \rightarrow -\infty} \left[ e^{-jk_0z} e^{jsz} \right] = \lim_{z \rightarrow -\infty} \left[ e^{jsz} \right] \lim_{z \rightarrow -\infty} \left[ e^{-jk_0z} \right], \quad (\text{E.2})$$

$$\left( e^{-jk_0z} e^{jsz} \right)_{z=0} = \lim_{z \rightarrow 0} \left[ e^{-jk_0z} e^{jsz} \right] = \lim_{z \rightarrow 0} \left[ e^{-jk_0z} \right] \lim_{z \rightarrow 0} \left[ e^{jsz} \right]. \quad (\text{E.3})$$

De (F.11), obtém-se:

$$e^{-jk_0z} = e^{Az} \left[ \cos(Az) - j \sin(Az) \right]. \quad (\text{E.4})$$

Quando  $z$  tende para *menos infinito*:

$$\lim_{z \rightarrow -\infty} \left[ e^{-jk_0z} e^{jsz} \right] = \lim_{z \rightarrow -\infty} \left\{ e^{Az} \left[ \cos(Az) - j \sin(Az) \right] \right\} \lim_{z \rightarrow -\infty} \left[ \cos(sz) + j \sin(sz) \right] = 0, \quad (\text{E.5})$$

e quando  $z$  tende para *zero*:

$$\lim_{z \rightarrow 0} [e^{-jk_0 z} e^{jsz}] = \lim_{z \rightarrow 0} \left\{ e^{Az} [\cos(Az) - j \sin(Az)] \right\} \lim_{z \rightarrow 0} [\cos(sz) + j \sin(sz)] = 1, \quad (\text{E.6})$$

pois  $\sin(Az)$ ,  $\cos(Az)$ ,  $\sin(sz)$  e  $\cos(sz)$  são *funções limitadas*,  $A = \frac{\sqrt{2\omega\mu_0\sigma_0}}{2} > 0$ , isto é,

$$\text{Re}[k_0] > 0.$$

De (E.5) e (E.2), obtém-se:

$$\left( e^{-jk_0 z} e^{jsz} \right)_{z=-\infty} = 0, \quad (\text{E.7})$$

e de (E.6) e (E.3), obtém-se:

$$\left( e^{-jk_0 z} e^{jsz} \right)_{z \rightarrow 0} = 1. \quad (\text{E.8})$$

De (E.7) e (E.8) em (E.1), obtém-se:

$$I_1 = \int_{-\infty}^0 e^{-j(k_0-s)z} dz = j \frac{1}{(k_0-s)}. \quad (\text{E.9})$$

## 2- RESOLUÇÃO DA INTEGRAL $I_2$ DE (40)

$$F(z) = \int_0^{+\infty} g(t) e^{v_0 z} dt, \text{ onde: } \begin{cases} v_0 = \sqrt{t^2 - k_0^2} \Rightarrow v_0^2 = t^2 - k_0^2. \\ g(t) = g_0'(t) - g_0''(t). \end{cases} \quad (\text{E.10})$$

Aplicando a *transformada inversa de Fourier* em (E.10), obtém-se:

$$T = \mathfrak{F}^{-1}\{F(z)\} = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^0 \left[ \int_0^{+\infty} g(t) e^{v_0 z} dt \right] e^{jsz} dz,$$

ou

$$T = \mathfrak{Z}^{-1}\{F(z)\} = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \left[ \int_{-\infty}^0 g(t) e^{v_0 z} e^{jsz} dz \right] dt, \quad (\text{E.11})$$

onde:

$$I_2 = \int_{-\infty}^0 g(t) e^{v_0 z} e^{jsz} dz = g(t) \int_{-\infty}^0 e^{v_0 z} e^{jsz} dz. \quad (\text{E.12})$$

De (E.12), obtém-se:

$$I_2 = g(t) \int_{-\infty}^0 e^{v_0 z} e^{jsz} dz = g(t) \int_{-\infty}^0 e^{(v_0 + js)z} dz = \frac{g(t)}{(v_0 + js)} \left[ e^{(v_0 + js)z} \right]_{z=-\infty}^0, \quad (\text{E.13})$$

$$I_2 = \frac{g(t)}{(v_0 + js)} \left[ e^{v_0 z} e^{jsz} \right]_{z=-\infty}^0 = \frac{g(t)}{(v_0 + js)} \left\{ e^{v_0 z} [\cos(sz) + j \sin(sz)] \right\}_{z=-\infty}^0,$$

$$I_2 = \frac{g(t)}{(v_0 + js)}. \quad (\text{E.14})$$

Considerando que  $\text{Re}\{v_0\} > 0$ , ver (F.45). Pois  $v_0$  é da forma:

$$v_0 = a + j b \Rightarrow e^{v_0 z} = e^{az} e^{j bz} \Rightarrow e^{v_0 z} = e^{az} [\cos(bz) + j \sin(bz)] = \begin{cases} 1, & \text{para } z = 0 \\ 0, & \text{para } z \rightarrow -\infty \end{cases},$$

onde  $\text{Re}\{v_0\} > 0$ .

De (E.14), obtém-se:

$$I_2 = \frac{v_0 g(t)}{s^2 + v_0^2} - j \frac{sg(t)}{s^2 + v_0^2}. \quad (\text{E.15})$$

### 3- RESOLUÇÃO DA INTEGRAL I<sub>3</sub> DE (55)

Aplicando a *regra de integração da exponencial de base neperiana*, obtém-se:

$$I_3 = \int_0^{+\infty} e^{j(k_1+s)z} dz = \frac{1}{j(k_1+s)} \left[ e^{j(k_1+s)z} \right]_{z=0}^{+\infty} = -\frac{j}{(k_1+s)} \left[ e^{j(k_1+s)z} \right]_{z=0}^{+\infty},$$

que resulta em

$$I_3 = -\frac{j}{(k_1+s)} \left[ e^{jk_1z} e^{jsz} \right]_{z=0}^{+\infty} = -\frac{j}{(k_1+s)} \left[ \left( e^{jk_1z} e^{jsz} \right)_{z=+\infty} - \left( e^{jk_1z} e^{jsz} \right)_{z=0} \right]. \quad (E.16)$$

Onde:

$$\left( e^{jk_1z} e^{jsz} \right)_{z=+\infty} = \lim_{z \rightarrow +\infty} \left[ e^{jk_1z} e^{jsz} \right] = \lim_{z \rightarrow +\infty} \left[ e^{jk_1z} \right] \lim_{z \rightarrow +\infty} \left[ e^{jsz} \right] \quad (E.17)$$

$$\left( e^{jk_1z} e^{jsz} \right)_{z=0} = \lim_{z \rightarrow 0} \left[ e^{-jk_1z} e^{jsz} \right] = \lim_{z \rightarrow 0} \left[ e^{-jk_1z} \right] \lim_{z \rightarrow 0} \left[ e^{jsz} \right] \quad (E.18)$$

De (F.23), obtém-se:

$$e^{jk_1z} = e^{-Bz} [\cos(Bz) + j \sin(Bz)]. \quad (E.19)$$

Quando  $z$  tende para *mais infinito*:

$$\lim_{z \rightarrow +\infty} \left[ e^{jk_1z} e^{jsz} \right] = \lim_{z \rightarrow +\infty} \left\{ e^{-Bz} [\cos(Bz) + j \sin(Bz)] \right\} \lim_{z \rightarrow +\infty} [\cos(sz) + j \sin(sz)] = 0, \quad (E.20)$$

e quando  $z$  tende para *zero*:

$$\lim_{z \rightarrow 0} \left[ e^{jk_1z} e^{jsz} \right] = \lim_{z \rightarrow 0} \left\{ e^{-Bz} [\cos(Bz) + j \sin(Bz)] \right\} \lim_{z \rightarrow 0} [\cos(sz) + j \sin(sz)] = 1, \quad (E.21)$$

pois  $\sin(Az)$ ,  $\cos(Az)$ ,  $\sin(sz)$  e  $\cos(sz)$  são *funções limitadas*,  $B = \frac{\sqrt{2\omega\mu_0\sigma_1}}{2} > 0$ , isto é,

$$\operatorname{Re}[k_1] > 0.$$

De (E.20) e (E.17), obtém-se:

$$\left( e^{jk_1z} e^{jsz} \right)_{z \rightarrow +\infty} = 0, \quad (\text{E.22})$$

e de (E.21) e (E.18), obtém-se:

$$\left( e^{jk_1z} e^{jsz} \right)_{z \rightarrow 0} = 1. \quad (\text{E.23})$$

De (E.22) e (E.23) em (E.16), obtém-se:

$$I_3 = \int_0^{+\infty} e^{j(k_1+s)z} dz = j \frac{1}{(k_1 + s)}. \quad (\text{E.24})$$

#### 4- RESOLUÇÃO DA INTEGRAL $I_4$ DE (55)

Aplicando a *regra de integração da exponencial de base neperiana*, obtém-se:

$$I_4 = \int_0^{+\infty} e^{j(k_2+s)z} dz = \frac{1}{j(k_2 + s)} \left[ e^{j(k_2+s)z} \right]_{z=0}^{+\infty} = -\frac{j}{(k_2 + s)} \left[ e^{j(k_2+s)z} \right]_{z=0}^{+\infty}$$

$$I_4 = -\frac{j}{(k_2 + s)} \left[ e^{jk_2z} e^{jsz} \right]_{z=0}^{+\infty} = -\frac{j}{(k_2 + s)} \left[ \left( e^{jk_2z} e^{jsz} \right)_{z \rightarrow +\infty} - \left( e^{jk_2z} e^{jsz} \right)_{z=0} \right]. \quad (\text{E.25})$$

Onde:

$$\left( e^{jk_2z} e^{jsz} \right)_{z \rightarrow +\infty} = \lim_{z \rightarrow +\infty} \left[ e^{jk_2z} e^{jsz} \right] = \lim_{z \rightarrow +\infty} \left[ e^{jk_2z} \right] \lim_{z \rightarrow +\infty} \left[ e^{jsz} \right] \quad (\text{E.26})$$

$$\left( e^{jk_2z} e^{jsz} \right)_{z=0} = \lim_{z \rightarrow 0} \left[ e^{jk_2z} e^{jsz} \right] = \lim_{z \rightarrow 0} \left[ e^{jk_2z} \right] \lim_{z \rightarrow 0} \left[ e^{jsz} \right] \quad (\text{E.27})$$

De (F.35), obtém-se:

$$e^{jk_2z} = e^{-Cz} [\cos(Cz) + j \sin(Cz)]. \quad (\text{E.28})$$

Quando  $z$  tende para *mais infinito*:

$$\lim_{z \rightarrow +\infty} \left[ e^{jk_2z} e^{jsz} \right] = \lim_{z \rightarrow +\infty} \left\{ e^{-Cz} [\cos(Cz) + j \sin(Cz)] \right\} \lim_{z \rightarrow +\infty} [\cos(sz) + j \sin(sz)] = 0, \quad (\text{E.29})$$

e quando  $z$  tende para *zero*:

$$\lim_{z \rightarrow 0} \left[ e^{jk_2z} e^{jsz} \right] = \lim_{z \rightarrow 0} \left\{ e^{Cz} [\cos(Cz) - j \sin(Cz)] \right\} \lim_{z \rightarrow 0} [\cos(sz) + j \sin(sz)] = 1, \quad (\text{E.30})$$

pois  $\sin(Az)$ ,  $\cos(Az)$ ,  $\sin(sz)$  e  $\cos(sz)$  são *funções limitadas*,  $C = \frac{\sqrt{2\omega\mu_0\sigma_2}}{2} > 0$ , isto é,

$$\text{Re}[k_2] > 0.$$

De (E.29) e (E.26), obtém-se:

$$\left( e^{jk_2z} e^{jsz} \right)_{z=+\infty} = 0, \quad (\text{E.31})$$

e de (E.30) e (E.27), obtém-se:

$$\left( e^{jk_2z} e^{jsz} \right)_{z \rightarrow 0} = 1. \quad (\text{E.32})$$

De (E.31) e (E.32) em (E.25), obtém-se:

$$I_4 = \int_0^{+\infty} e^{j(k_2+s)z} dz = j \frac{1}{(k_2+s)}. \quad (\text{E.33})$$

### 5- RESOLUÇÃO DA INTEGRAL $I_5$ DE (55)

$$F(z) = \int_0^{+\infty} g_1(t) e^{-v_1 z} dt, \text{ onde: } \left\{ v_1 = \sqrt{t^2 - k_1^2} \Rightarrow v_1^2 = t^2 - k_1^2. \right. \quad (\text{E.34})$$

Aplicando a *transformada inversa de Fourier* em (E.34), obtém-se:

$$T = \mathfrak{S}^{-1}\{F(z)\} = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \left[ \int_0^{+\infty} g_1(t) e^{-v_1 z} dt \right] e^{jsz} dz$$

$$T = \mathfrak{S}^{-1}\{F(z)\} = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \left[ \int_0^{+\infty} g_1(t) e^{-v_1 z} e^{jsz} dz \right] dt \quad (\text{E.35})$$

$$I_5 = \int_0^{+\infty} g_1(t) e^{-v_1 z} e^{jsz} dz = g_1(t) \int_0^{+\infty} e^{-v_1 z} e^{jsz} dz \quad (\text{E.36})$$

De (E.36), obtém-se:

$$I_5 = g_1(t) \int_0^{+\infty} e^{-v_1 z} e^{jsz} dz = g_1(t) \int_0^{+\infty} e^{(-v_1 + js)z} dz = \frac{g_1(t)}{(-v_1 + js)} \left[ e^{(-v_1 + js)z} \right]_{z=0}^{+\infty} \quad (\text{E.37})$$

$$I_5 = \frac{g_1(t)}{(-v_1 + js)} \left[ e^{-v_1 z} e^{jsz} \right]_{z=0}^{+\infty} = \frac{g_1(t)}{(-v_1 + js)} \left\{ e^{-v_1 z} [\cos(sz) + j \sin(sz)] \right\}_{z=0}^{+\infty}$$

$$I_5 = \frac{g_1(t)}{(-v_1 + js)}, \quad (\text{E.38})$$

considerando que  $\text{Re}\{v_1\} > 0$ , ver (F.57). Pois  $v_1$  é da forma:

$$v_1 = m + j n \Rightarrow e^{v_1 z} = e^{mz} e^{jnz} \Rightarrow e^{v_1 z} = e^{mz} [\cos(nz) + j \sin(nz)] = \begin{cases} 1, & \text{para } z = 0 \\ 0, & \text{para } z \rightarrow -\infty \end{cases},$$

onde  $\text{Re}\{v_1\} > 0$ .

De (E.38), obtém-se:

$$I_5 = \frac{v_1 g_1(t)}{s^2 + v_1^2} + j \frac{s g_1(t)}{s^2 + v_1^2}. \quad (\text{E.39})$$

## 6- RESOLUÇÃO DA INTEGRAL $I_6$ DE (55)

$$F(z) = \int_0^{+\infty} g_2(t) e^{-v_2 z} dt, \text{ onde: } \left\{ v_2 = \sqrt{t^2 - k_2^2} \Rightarrow v_2^2 = t^2 - k_2^2. \right. \quad (\text{E.40})$$

Aplicando a *transformada inversa de Fourier* em (E.40), obtém-se:

$$T = \mathfrak{S}^{-1}\{F(z)\} = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \left[ \int_0^{+\infty} g_2(t) e^{-v_2 z} dt \right] e^{jsz} dz$$

$$T = \mathfrak{S}^{-1}\{F(z)\} = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \left[ \int_0^{+\infty} g_2(t) e^{-v_2 z} e^{jsz} dz \right] dt \quad (\text{E.41})$$

$$I_6 = \int_0^{+\infty} g_2(t) e^{-v_2 z} e^{jsz} dz = g_2(t) \int_0^{+\infty} e^{-v_2 z} e^{jsz} dz \quad (\text{E.42})$$

De (E.42), obtém-se:

$$I_6 = g_2(t) \int_0^{+\infty} e^{-v_2 z} e^{jsz} dz = g_2(t) \int_0^{+\infty} e^{(-v_2 + js)z} dz = \frac{g_2(t)}{(-v_2 + js)} \left[ e^{(-v_2 + js)z} \right]_{z=0}^{+\infty} \quad (\text{E.43})$$

$$I_6 = \frac{g_2(t)}{(-v_2 + js)} \left[ e^{-v_2 z} e^{jsz} \right]_{z=0}^{+\infty} = \frac{g_2(t)}{(-v_2 + js)} \left\{ e^{-v_2 z} [\cos(sz) + j \sin(sz)] \right\}_{z=0}^{+\infty}$$

$$I_6 = \frac{g_2(t)}{(-v_2 + js)}, \quad (\text{E.44})$$

considerando que  $\text{Re}\{v_2\} > 0$ , ver (F.69). Pois  $v_2$  é da forma:

$$v_2 = q + jr \Rightarrow e^{v_2 z} = e^{qz} e^{jrz} \Rightarrow e^{v_2 z} = e^{qz} [\cos(rz) + j \sin(rz)] = \begin{cases} 1, & \text{para } z = 0 \\ 0, & \text{para } z \rightarrow -\infty \end{cases},$$

onde  $\text{Re}\{v_2\} > 0$ .

De (E.44), obtém-se:

$$I_6 = \frac{v_2 g_2(t)}{s^2 + v_2^2} + j \frac{sg_2(t)}{s^2 + v_2^2}. \quad (\text{E.45})$$

### 7- RESOLUÇÃO DA INTEGRAL $I_7$ DE (69a)

$$I_7 = \int_{-\infty}^0 e^{jtx} dx = \int_{-\infty}^0 \cos(tx) dx + j \int_{-\infty}^0 \sin(tx) dx = \frac{1}{t} [\sin(tx) - j \cos(tx)]_{x=-\infty}^0. \quad (\text{E.46})$$

Adotando  $tx = -k\pi$  para  $x < 0$  e  $tx = k\pi$  para  $x > 0$ , onde  $k = 1, 3, 5, \dots$ , em (E.46), obtém-se:

$$I_7 = -j \frac{2}{t}. \quad (\text{E.47})$$

### 8- RESOLUÇÃO DA INTEGRAL $I_8$ DE (69a)

$$I_8 = \int_{-\infty}^0 f_0'(s) e^{u_0 x} e^{jtx} dx = f_0'(s) \int_{-\infty}^0 e^{(u_0 + jt)x} dx = \frac{1}{u_0 + jt} f_0'(s) [e^{u_0 x} e^{jtx}]_{x=-\infty}^0 = \frac{u_0 - jt}{u_0^2 + t^2} f_0'(s), \quad (\text{E.48})$$

pois  $\text{Re}[u_0] > 0$ .

De (E.48), obtém-se:

$$I_8 = \frac{u_0 f_0'(s)}{t^2 + u_0^2} - j \frac{t f_0'(s)}{t^2 + u_0^2}. \quad (\text{E.49})$$

### 9- RESOLUÇÃO DA INTEGRAL $I_9$ DE (69a)

$$I_9 = \int_{-\infty}^0 f_1(s) e^{u_1 x} e^{jtx} dx = f_1(s) \int_{-\infty}^0 e^{(u_1 + jt)x} dx = \frac{1}{u_1 + jt} f_1(s) \left[ e^{u_1 x} e^{jtx} \right]_{x=-\infty}^0 = \frac{u_1 - jt}{u_1^2 + t^2} f_1(s), \quad (\text{E.50})$$

pois  $\text{Re}[u_1] > 0$ .

De (E.50), obtém-se:

$$I_9 = \frac{u_1 f_1(s)}{t^2 + u_1^2} - j \frac{t f_1(s)}{t^2 + u_1^2}. \quad (\text{E.51})$$

### 10- RESOLUÇÃO DA INTEGRAL $I_{10}$ DE (81)

$$I_{10} = \int_{-\infty}^0 (P + R_0 - T_2) e^{jtx} dx = \frac{1}{t} (P + R_0 - T_2) \left[ \sin(tx) - j \cos(tx) \right]_{x=-\infty}^0. \quad (\text{E.52})$$

Adotando  $tx = -k\pi$  para  $x < 0$  e  $tx = k\pi$  para  $x > 0$ , onde  $k = 1, 3, 5, \dots$ , em (E.52), obtém-se:

$$I_{10} = -j \frac{2}{t} (P + R_0 - T_2). \quad (\text{E.53})$$

### 11- RESOLUÇÃO DA INTEGRAL $I_{11}$ DE (81)

$$I_{11} = \int_0^{+\infty} f_0''(s) e^{-u_0 x} e^{jtx} dx = f_0''(s) \int_0^{+\infty} e^{(-u_0 + jt)x} dx = \frac{1}{-u_0 + jt} f_0''(s) \left[ e^{-u_0 x} e^{jtx} \right]_{x=0}^{+\infty} = \frac{u_0 + jt}{u_0^2 + t^2} f_0''(s). \quad (\text{E.54})$$

pois  $\text{Re}[u_0] > 0$ .

De (E.54), obtém-se:

$$I_{11} = \frac{u_0 f_0''(s)}{t^2 + u_0^2} + j \frac{t f_0''(s)}{t^2 + u_0^2}. \quad (\text{E.55})$$

## 12- RESOLUÇÃO DA INTEGRAL $I_{12}$ DE (81)

$$I_{12} = \int_0^{+\infty} f_2(s) e^{-u_2 x} e^{j t x} dx = f_2(s) \int_0^{+\infty} e^{(-u_2 + j t)x} dx = \frac{1}{-u_2 + j t} f_2(s) \left[ e^{-u_2 x} e^{j t x} \right]_{x=0}^{+\infty} = \frac{u_2 + j t}{u_2^2 + t^2} f_2(s), \quad (\text{E.56})$$

pois  $\text{Re}[u_0] > 0$ .

De (E.56), obtém-se:

$$I_{12} = \frac{u_2 f_2(s)}{t^2 + u_2^2} + j \frac{t f_2(s)}{t^2 + u_2^2}. \quad (\text{E.57})$$

## ANEXO F – ESTUDOS DE $k_0, k_1, k_2, v_0, v_1$ E $v_2$

### 1- ESTUDO DE $k_0$

De (2), fazendo  $i = 0$ , obtém-se:

$$k_0 = \sqrt{j\omega\mu_0\sigma_0}, \quad (\text{F.1})$$

onde  $\omega\mu_0\sigma_0 > 0$ .

Considerando que:

$$W = \sqrt{jx} = \sqrt{z} \Rightarrow z = jx \Rightarrow |z| = \sqrt{x^2} = |x|, \quad (\text{F.2})$$

e conforme o ANEXO G as raízes  $n$ -ésimas de tal número complexo  $z$  são calculadas por:

$$W_k = \sqrt[n]{|z|} \left[ \cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + j \sin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) \right], \quad k = 0, 1, 2, \dots, (n-1). \quad (\text{F.3})$$

Em (F.3), se fizermos  $n = 2$ ,  $|z| = |x|$  e considerarmos que a partir de (F.2) obtém-se  $\theta = \pi/2$ , pois  $z = jx$ , obtém-se:

$$W_k = \sqrt{|x|} \left[ \cos\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right) + j \sin\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right) \right], \quad k = 0, 1. \quad (\text{F.4})$$

Para  $k = 0$  em (F.4), obtém-se:

$$W_0 = \sqrt{|x|} \left[ \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + j \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right] = \sqrt{|x|} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + j \frac{\sqrt{2}}{2} \right). \quad (\text{F.5})$$

Para  $k = 1$  em (F.4), obtém-se:

$$W_0 = \sqrt{|x|} \left[ \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + j \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) \right] = -\sqrt{|x|} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + j \frac{\sqrt{2}}{2} \right). \quad (\text{F.6})$$

Fazendo  $x = \omega\mu_0\sigma_0$  em (F.5) e (F.6), obtém-se:

$$W_0 = k_0 = \sqrt{\omega\mu_0\sigma_0} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + j \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \quad (\text{F.7})$$

e

$$W_1 = k_0 = -\sqrt{\omega\mu_0\sigma_0} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + j \frac{\sqrt{2}}{2} \right). \quad (\text{F.8})$$

Desenvolvendo (F.7), obtém-se:

$$W_0 = k_0 = \frac{\sqrt{2\omega\mu_0\sigma_0}}{2} + j \frac{\sqrt{2\omega\mu_0\sigma_0}}{2} = A + jA, \quad (\text{F.9})$$

onde  $A = \frac{\sqrt{2\omega\mu_0\sigma_0}}{2} > 0$ , isto é,  $A \in \mathfrak{R}_+^*$ , é o *valor de  $k_0$*  que será considerado na presente análise.

Desenvolvendo (F.8), obtém-se:

$$W_1 = k_0 = -\frac{\sqrt{2\omega\mu_0\sigma_0}}{2} - j \frac{\sqrt{2\omega\mu_0\sigma_0}}{2} = -A - jA, \quad (\text{F.10})$$

onde  $A = \frac{\sqrt{2\omega\mu_0\sigma_0}}{2} > 0$ , isto é,  $A \in \mathfrak{R}_+^*$ , é o *valor de  $k_0$*  que não será utilizado na presente análise por causar divergência no processo.

De (F.9), obtém-se:

$$-jk_0z = -jAz + Az = Az - jAz.$$

Onde:

$$e^{-jk_0z} = e^{(Az-jAz)} = e^{Az}e^{-jAz}$$

$$e^{-jAz} = \cos(Az) - j\sin(Az)$$

e finalmente:

$$e^{-jk_0z} = e^{Az}[\cos(Az) - j\sin(Az)]. \quad (\text{F.11})$$

De (F.10), obtém-se:

$$-jk_0z = jAz - Az = -Az + jAz.$$

Onde:

$$e^{-jk_0z} = e^{(-Az+jAz)} = e^{-Az}e^{jAz}$$

$$e^{jAz} = \cos(Az) + j\sin(Az)$$

e finalmente:

$$e^{-jk_0z} = e^{-Az}[\cos(Az) + j\sin(Az)]. \quad (\text{F.12})$$

## 2- ESTUDO DE $k_1$

De (2), fazendo  $i = 1$ , obtém-se:

$$k_1 = \sqrt{j\omega\mu_0\sigma_1}, \quad (\text{F.13})$$

onde  $\omega\mu_0\sigma_1 > 0$ .

Considerando que:

$$W = \sqrt{jx} = \sqrt{z} \Rightarrow z = jx \Rightarrow |z| = \sqrt{x^2} = |x|, \quad (\text{F.14})$$

e conforme o ANEXO G as raízes n-ésimas de tal número complexo z são calculadas por:

$$W_k = \sqrt[n]{|z|} \left[ \cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + j \sin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) \right], \quad k = 0, 1, 2, \dots, (n-1). \quad (\text{F.15})$$

Em (F.15), se fizermos  $n = 2$ ,  $|z| = |x|$  e considerarmos que a partir de (F.14) obtém-se  $\theta = \pi/2$ , pois  $z = jx$ , obtém-se:

$$W_k = \sqrt{|x|} \left[ \cos\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right) + j \sin\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right) \right], \quad k = 0, 1. \quad (\text{F.16})$$

Para  $k = 0$  em (F.16), obtém-se:

$$W_0 = \sqrt{|x|} \left[ \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + j \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right] = \sqrt{|x|} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + j \frac{\sqrt{2}}{2} \right). \quad (\text{F.17})$$

Para  $k = 1$  em (F.16), obtém-se:

$$W_0 = \sqrt{|x|} \left[ \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + j \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) \right] = -\sqrt{|x|} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + j \frac{\sqrt{2}}{2} \right). \quad (\text{F.18})$$

Fazendo  $x = \omega\mu_0\sigma_1$  em (F.17) e (F.18), obtém-se:

$$W_0 = k_1 = \sqrt{\omega\mu_0\sigma_1} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + j \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \quad (\text{F.19})$$

e

$$W_1 = k_1 = -\sqrt{\omega\mu_0\sigma_1} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + j \frac{\sqrt{2}}{2} \right). \quad (\text{F.20})$$

Desenvolvendo (F.19), obtém-se:

$$W_0 = k_1 = \frac{\sqrt{2\omega\mu_0\sigma_1}}{2} + j \frac{\sqrt{2\omega\mu_0\sigma_1}}{2} = B + jB, \quad (\text{F.21})$$

onde  $B = \frac{\sqrt{2\omega\mu_0\sigma_1}}{2} > 0$ , isto é,  $B \in \mathfrak{R}_+^*$ , é o *valor de  $k_1$*  que não será utilizado na presente análise por causar divergência no processo.

Desenvolvendo (F.20), obtém-se:

$$W_1 = k_1 = -\frac{\sqrt{2\omega\mu_0\sigma_1}}{2} - j \frac{\sqrt{2\omega\mu_0\sigma_1}}{2} = -B - jB, \quad (\text{F.22})$$

onde  $B = \frac{\sqrt{2\omega\mu_0\sigma_1}}{2} > 0$ , isto é,  $B \in \mathfrak{R}_+^*$ , é o *valor de  $k_1$*  que será considerado na presente análise.

De (F.21), obtém-se:

$$jk_1z = jBz - Bz = -Bz + jBz.$$

Onde:

$$e^{jk_1z} = e^{(-Bz+jBz)} = e^{-Bz} e^{jBz}$$

$$e^{jBz} = \cos(Bz) + j \sin(Bz)$$

e finalmente:

$$e^{jk_1z} = e^{-Bz} [\cos(Bz) + j \sin(Bz)]. \quad (\text{F.23})$$

De (F.22), obtém-se:

$$jk_1z = -jBz + Bz = Bz - j Bz.$$

Onde:

$$e^{jk_1z} = e^{(Bz-jBz)} = e^{Bz} e^{-jBz}$$

$$e^{-jBz} = \cos(Bz) - j \sin(Bz)$$

e finalmente:

$$e^{jk_1z} = e^{Bz} [\cos(Bz) - j \sin(Bz)]. \quad (\text{F.24})$$

### 3- ESTUDO DE $k_2$

De (2), fazendo  $i = 2$ , obtém-se:

$$k_2 = \sqrt{j\omega\mu_0\sigma_2}, \quad (\text{F.25})$$

onde  $\omega\mu_0\sigma_2 > 0$ .

Considerando que:

$$W = \sqrt{jx} = \sqrt{z} \Rightarrow z = jx \Rightarrow |z| = \sqrt{x^2} = |x|, \quad (\text{F.26})$$

e conforme o ANEXO G as raízes  $n$ -ésimas de tal número complexo  $z$  são calculadas por:

$$W_k = \sqrt[n]{|z|} \left[ \cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + j \sin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) \right], \quad k = 0, 1, 2, \dots, (n-1). \quad (\text{F.27})$$

Em (F.27), se fizermos  $n = 2$ ,  $|z| = |x|$  e considerarmos que a partir de (F.26) obtém-se  $\theta = \pi/2$ , pois  $z = jx$ , obtém-se:

$$W_k = \sqrt{|x|} \left[ \cos\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right) + j \sin\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right) \right], \quad k = 0, 1. \quad (\text{F.28})$$

Para  $k = 0$  em (F.28), obtém-se:

$$W_0 = \sqrt{|x|} \left[ \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + j \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right] = \sqrt{|x|} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + j \frac{\sqrt{2}}{2} \right). \quad (\text{F.29})$$

Para  $k = 1$  em (F.28), obtém-se:

$$W_0 = \sqrt{|x|} \left[ \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + j \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) \right] = -\sqrt{|x|} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + j \frac{\sqrt{2}}{2} \right). \quad (\text{F.30})$$

Fazendo  $x = \omega\mu_0\sigma_2$  em (F.29) e (F.30), obtém-se:

$$W_0 = k_2 = \sqrt{\omega\mu_0\sigma_2} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + j \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \quad (\text{F.31})$$

e

$$W_1 = k_2 = -\sqrt{\omega\mu_0\sigma_2} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + j \frac{\sqrt{2}}{2} \right). \quad (\text{F.32})$$

Desenvolvendo (F.31), obtém-se:

$$W_0 = k_2 = \frac{\sqrt{2\omega\mu_0\sigma_2}}{2} + j \frac{\sqrt{2\omega\mu_0\sigma_2}}{2} = C + jC, \quad (\text{F.33})$$

onde  $C = \frac{\sqrt{2\omega\mu_0\sigma_2}}{2} > 0$ , isto é,  $C \in \mathfrak{R}_+^*$ , é o *valor de*  $k_2$  que não será utilizado na presente análise por causar divergência no processo.

Desenvolvendo (F.32), obtém-se:

$$W_1 = k_2 = -\frac{\sqrt{2\omega\mu_0\sigma_2}}{2} - j\frac{\sqrt{2\omega\mu_0\sigma_2}}{2} = -C - jC, \quad (\text{F.34})$$

onde  $C = \frac{\sqrt{2\omega\mu_0\sigma_2}}{2} > 0$ , isto é,  $C \in \mathfrak{R}_+^*$ , é o *valor de*  $k_2$  que será considerado na presente análise.

De (F.33), obtém-se:

$$jk_2z = jCz - Cz = -Cz + j Cz.$$

Onde:

$$e^{jk_2z} = e^{(-Cz+jCz)} = e^{-Cz} e^{jCz}$$

$$e^{jCz} = \cos(Cz) + j \sin(Cz)$$

e finalmente:

$$e^{jk_2z} = e^{-Cz} [\cos(Cz) + j \sin(Cz)]. \quad (\text{F.35})$$

De (F.34), obtém-se:

$$jk_2z = -jCz + Cz = Cz - j Cz.$$

Onde:

$$e^{jk_2z} = e^{(Cz-jCz)} = e^{Cz} e^{-jCz}$$

$$e^{-jCz} = \cos(Cz) - j \sin(Cz)$$

e finalmente:

$$e^{jk_2z} = e^{Cz} [\cos(Cz) - j \sin(Cz)]. \quad (\text{F.36})$$

#### 4- ESTUDO DE $v_0$

De (14), tem-se:

$$v_0^2 = t^2 - k_0^2 \Rightarrow v_0 = \sqrt{t^2 - j\omega\mu_0\sigma_0}. \quad (\text{F.37})$$

Considerando que:

$$W = \sqrt{x - jy} = \sqrt{z} \Rightarrow z = x - jy \Rightarrow |z| = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (\text{F.38})$$

e conforme o ANEXO G as raízes n-ésimas de tal número complexo z são calculadas por:

$$W_k = \sqrt[n]{|z|} \left[ \cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + j \sin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) \right], \quad k = 0, 1, 2, \dots, (n-1). \quad (\text{F.39})$$

Em (F.39), se fizermos  $n = 2$  e  $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ , obtém-se:

$$W_k = \sqrt[4]{x^2 + y^2} \left[ \cos\left(\frac{\theta}{2} + k\pi\right) + j \sin\left(\frac{\theta}{2} + k\pi\right) \right], \quad k = 0, 1. \quad (\text{F.40})$$

Para  $k = 0$  em (F.40), obtém-se:

$$W_0 = \sqrt[4]{x^2 + y^2} \left[ \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + j \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right]. \quad (\text{F.41})$$

Para  $k = 1$  em (F.40), obtém-se:

$$W_1 = \sqrt[4]{x^2 + y^2} \left[ \cos\left(\frac{\theta}{2} + \pi\right) + j \sin\left(\frac{\theta}{2} + \pi\right) \right]. \quad (\text{F.42})$$

Fazendo  $x = t$  e  $y = \omega\mu_0\sigma_0$  em (F.41) e (F.42), obtém-se:

$$W_0 = v_0 = \sqrt[4]{t^2 + (\omega\mu_0\sigma_0)^2} \left[ \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + j \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right], \quad (\text{F.43})$$

e

$$W_1 = v_0 = \sqrt[4]{t^2 + (\omega\mu_0\sigma_0)^2} \left[ \cos\left(\frac{\theta}{2} + \pi\right) + j \sin\left(\frac{\theta}{2} + \pi\right) \right], \quad (\text{F.44})$$

onde  $\theta = \arctan\left(\frac{\omega\mu_0\sigma_0}{t}\right)$ , para  $t \neq 0$ .

Desenvolvendo (F.43), obtém-se:

$$W_0 = v_0 = \sqrt[4]{t^2 + (\omega\mu_0\sigma_0)^2} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + j \sqrt[4]{t^2 + (\omega\mu_0\sigma_0)^2} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = a + j b, \quad (\text{F.45})$$

onde  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$  são positivos para  $0 < \theta/2 < \pi/2$ , isto é,  $0 < \theta < \pi$ , é o valor de  $v_0$  que será considerado na presente análise.

Desenvolvendo (F.44), obtém-se:

$$W_1 = v_0 = \sqrt[4]{t^2 + (\omega\mu_0\sigma_0)^2} \cos\left(\frac{\theta}{2} + \pi\right) + j \sqrt[4]{t^2 + (\omega\mu_0\sigma_0)^2} \sin\left(\frac{\theta}{2} + \pi\right) = c + j d, \quad (\text{F.46})$$

onde  $\mathbf{c}$  e  $\mathbf{d}$  são negativos para  $\pi < \theta/2 + \pi < 3\pi/2$ , isto é,  $0 < \theta/2 < \pi/2$ , é o valor de  $v_0$  que não será utilizado na presente análise por causar divergência no processo.

De (F.45), obtém-se:

$$v_0 z = az + j bz.$$

Onde:

$$e^{v_0 z} = e^{(az+jbz)} = e^{az} e^{jbz},$$

$$e^{jbz} = \cos(bz) - j \sin(bz),$$

e finalmente:

$$e^{jv_0 z} = e^{az} [\cos(bz) - j \sin(bz)]. \quad (\text{F.47})$$

De (F.46), obtém-se:

$$v_0 z = cz + j dz.$$

Onde:

$$e^{jv_0 z} = e^{(cz+jdz)} = e^{cz} e^{jdz},$$

$$e^{jdz} = \cos(dz) + j \sin(dz),$$

e finalmente:

$$e^{jv_0 z} = e^{cz} [\cos(dz) + j \sin(dz)]. \quad (\text{F.48})$$

## 5- ESTUDO DE $v_1$

De (14), tem-se:

$$v_1^2 = t^2 - k_1^2 \Rightarrow v_1 = \sqrt{t^2 - j\omega\mu_0\sigma_1}. \quad (\text{F.49})$$

Considerando que:

$$W = \sqrt{x - jy} = \sqrt{z} \Rightarrow z = x - jy \Rightarrow |z| = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (\text{F.50})$$

e conforme o ANEXO G as raízes n-ésimas de tal número complexo z são calculadas por:

$$W_k = \sqrt[n]{|z|} \left[ \cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + j \sin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) \right], \quad k = 0, 1, 2, \dots, (n-1). \quad (\text{F.51})$$

Em (F.51), se fizermos  $n = 2$  e  $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ , obtém-se:

$$W_k = \sqrt[4]{x^2 + y^2} \left[ \cos\left(\frac{\theta}{2} + k\pi\right) + j \sin\left(\frac{\theta}{2} + k\pi\right) \right], \quad k = 0, 1. \quad (\text{F.52})$$

Para  $k = 0$  em (F.52), obtém-se:

$$W_0 = \sqrt[4]{x^2 + y^2} \left[ \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + j \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right]. \quad (\text{F.53})$$

Para  $k = 1$  em (F.52), obtém-se:

$$W_1 = \sqrt[4]{x^2 + y^2} \left[ \cos\left(\frac{\theta}{2} + \pi\right) + j \sin\left(\frac{\theta}{2} + \pi\right) \right]. \quad (\text{F.54})$$

Fazendo  $x = t$  e  $y = \omega\mu_0\sigma_1$  em (F.53) e (F.54), obtém-se:

$$W_0 = v_1 = \sqrt[4]{t^2 + (\omega\mu_0\sigma_1)^2} \left[ \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + j \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right], \quad (\text{F.55})$$

e

$$W_1 = v_1 = \sqrt[4]{t^2 + (\omega\mu_0\sigma_1)^2} \left[ \cos\left(\frac{\theta}{2} + \pi\right) + j \sin\left(\frac{\theta}{2} + \pi\right) \right], \quad (\text{F.56})$$

onde

$$\theta = \arctan\left(\frac{\omega\mu_0\sigma_1}{t}\right).$$

Desenvolvendo (F.55), obtém-se:

$$W_0 = v_1 = \sqrt[4]{t^2 + (\omega\mu_0\sigma_1)^2} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + j \sqrt[4]{t^2 + (\omega\mu_0\sigma_1)^2} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = m + j n, \quad (\text{F.57})$$

onde **m** e **n** são positivos para  $0 < \theta/2 < \pi/2$ , isto é,  $0 < \theta < \pi$ , é o *valor de*  $v_1$  que será considerado na presente análise.

Desenvolvendo (F.56), obtém-se:

$$W_1 = v_1 = \sqrt[4]{t^2 + (\omega\mu_0\sigma_1)^2} \cos\left(\frac{\theta}{2} + \pi\right) + j \sqrt[4]{t^2 + (\omega\mu_0\sigma_1)^2} \sin\left(\frac{\theta}{2} + \pi\right) = o + j p, \quad (\text{F.58})$$

onde **o** e **p** são negativos para  $\pi < \theta/2 + \pi < 3\pi/2$ , isto é,  $0 < \theta/2 < \pi/2$ , é o *valor de*  $v_1$  que não será utilizado na presente análise por causar divergência no processo.

De (F.57), obtém-se:

$$v_1 z = m z + j n z.$$

Onde:

$$e^{v_1 z} = e^{(mz+jnz)} = e^{mz} e^{jnz}$$

$$e^{jnz} = \cos(nz) - j \sin(nz)$$

e finalmente:

$$e^{jv_1 z} = e^{mz} [\cos(nz) - j \sin(nz)]. \quad (\text{F.59})$$

De (F.58), obtém-se:

$$v_1 z = oz + j pz.$$

Onde:

$$e^{jv_1 z} = e^{(oz+jpz)} = e^{oz} e^{j pz}$$

$$e^{j pz} = \cos(pz) + j \sin(pz)$$

e finalmente:

$$e^{jv_1 z} = e^{oz} [\cos(pz) + j \sin(pz)]. \quad (\text{F.60})$$

## 6- ESTUDO DE $v_2$

De (14), tem-se:

$$v_2^2 = t^2 - k_2^2 \Rightarrow v_2 = \sqrt{t^2 - j\omega\mu_0\sigma_2}. \quad (\text{F.61})$$

Considerando que:

$$W = \sqrt{x - jy} = \sqrt{z} \Rightarrow z = x - jy \Rightarrow |z| = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (\text{F.62})$$

e conforme o ANEXO G as raízes n-ésimas de tal número complexo z são calculadas por:

$$W_k = \sqrt[n]{|z|} \left[ \cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + j \sin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) \right], \quad k = 0, 1, 2, \dots, (n-1). \quad (\text{F.63})$$

Em (F.63), se fizermos  $n = 2$  e  $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ , obtém-se:

$$W_k = \sqrt[4]{x^2 + y^2} \left[ \cos\left(\frac{\theta}{2} + k\pi\right) + j \sin\left(\frac{\theta}{2} + k\pi\right) \right], \quad k = 0, 1. \quad (\text{F.64})$$

Para  $k = 0$  em (F.64), obtém-se:

$$W_0 = \sqrt[4]{x^2 + y^2} \left[ \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + j \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right]. \quad (\text{F.65})$$

Para  $k = 1$  em (F.64), obtém-se:

$$W_1 = \sqrt[4]{x^2 + y^2} \left[ \cos\left(\frac{\theta}{2} + \pi\right) + j \sin\left(\frac{\theta}{2} + \pi\right) \right]. \quad (\text{F.66})$$

Fazendo  $x = t$  e  $y = \omega\mu_0\sigma_2$  em (F.65) e (F.66), obtém-se:

$$W_0 = v_2 = \sqrt[4]{t^2 + (\omega\mu_0\sigma_2)^2} \left[ \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + j \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right], \quad (\text{F.67})$$

e

$$W_1 = v_2 = \sqrt[4]{t^2 + (\omega\mu_0\sigma_2)^2} \left[ \cos\left(\frac{\theta}{2} + \pi\right) + j \sin\left(\frac{\theta}{2} + \pi\right) \right], \quad (\text{F.68})$$

onde:

$$\theta = \arctan\left(\frac{\omega\mu_0\sigma_2}{t}\right).$$

Desenvolvendo (F.67), obtém-se:

$$W_0 = v_2 = \sqrt[4]{t^2 + (\omega\mu_0\sigma_2)^2} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + j \sqrt[4]{t^2 + (\omega\mu_0\sigma_2)^2} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = q + jr, \quad (\text{F.69})$$

onde  $q$  e  $r$  são positivos para  $0 < \theta/2 < \pi/2$ , isto é,  $0 < \theta < \pi$ , é o valor de  $v_2$  que será considerado na presente análise.

Desenvolvendo (F.68), obtém-se:

$$W_1 = v_2 = \sqrt[4]{t^2 + (\omega\mu_0\sigma_2)^2} \cos\left(\frac{\theta}{2} + \pi\right) + j \sqrt[4]{t^2 + (\omega\mu_0\sigma_2)^2} \sin\left(\frac{\theta}{2} + \pi\right) = s + ju, \quad (\text{F.70})$$

onde  $s$  e  $u$  são negativos para  $\pi < \theta/2 + \pi < 3\pi/2$ , isto é,  $0 < \theta/2 < \pi/2$ , é o valor de  $v_2$  que não será utilizado na presente análise por causar divergência no processo.

De (F.69), obtém-se:

$$v_2 z = qz + jr z.$$

Onde:

$$e^{v_2 z} = e^{(qz + jr z)} = e^{qz} e^{jr z}$$

$$e^{jr z} = \cos(rz) - j \sin(rz)$$

e finalmente:

$$e^{jv_2z} = e^{qz} [\cos(rz) - j \sin(rz)]. \quad (\text{F.71})$$

De (F.70), obtém-se:

$$v_2z = sz + j uz.$$

Onde:

$$e^{jv_2z} = e^{(sz+juz)} = e^{sz} e^{juz}$$

$$e^{juz} = \cos(uz) + j \sin(uz)$$

e finalmente:

$$e^{jv_2z} = e^{sz} [\cos(uz) + j \sin(uz)]. \quad (\text{F.72})$$

## ANEXO G – N-ÉSIMAS RAÍZES DE UM NÚMERO COMPLEXO

Considere o número complexo

$$z = a + j b = \rho[\cos(\theta) + j \sin(\theta)], \quad (\text{G.1})$$

onde :

$$\rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ e } \theta = \arctg(b/a).$$

Suponha que se queira estabelecer todas as raízes do complexo  $z$  e que o número complexo

$$w = \sqrt[n]{z} = c + j d = r[\cos(\alpha) + j \sin(\alpha)], \quad (\text{G.2})$$

seja capaz de representá-las. Para tanto, precisa-se determinar  $r$  e  $\alpha$  em (G.2).

De (G.2), obtém-se:

$$z = w^n = r^n[\cos(n\alpha) + j \sin(n\alpha)] \quad (\text{G.3})$$

De (G.1) e (G.3), obtém-se:

$$r^n[\cos(n\alpha) + j \sin(n\alpha)] = \rho[\cos(\theta) + j \sin(\theta)]. \quad (\text{G.4})$$

De (G.4), pode-se afirmar que:

$$r = \sqrt[n]{\rho}, \quad (\text{G.5})$$

e

$$\alpha = \left( \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right). \quad (\text{G.6})$$

De (G.5) e (G.6) em (G.2), obtêm-se as n-ésimas raízes do número complexo z, dadas por:

$$W_k = \sqrt[n]{z} = c + j d = \sqrt[n]{|z|} \left[ \cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + j \sin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) \right], k = 0, 1, \dots, (n - 1). \quad (\text{G.7})$$