

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ  
CENTRO DE GEOCIÊNCIAS  
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM GEOFÍSICA

ESPALHAMENTO ELÁSTICO EM  
MEIOS ANISOTRÓPICOS ESTRATIFICADOS

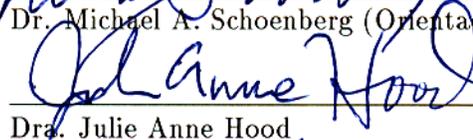
TESE APRESENTADA POR  
JOÃO DOS SANTOS PROTÁZIO

COMO REQUISITO PARCIAL À OBTENÇÃO DE GRAU DE  
DOUTOR EM CIÊNCIAS NA ÁREA DE GEOFÍSICA

Data de Aprovação : 09/06/1994

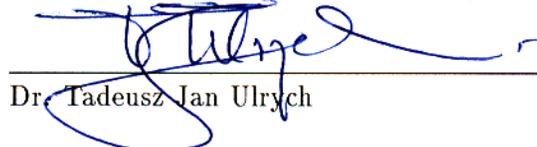
COMITÊ DE TESE:

  
Dr. Michael A. Schoenberg (Orientador)

  
Dra. Julie Anne Hood

  
Dr. Ivan de Araújo Simões Filho

  
Dr. Marco Antonio Barsotelli Botelho

  
Dr. Tadeusz Jan Ulrych

BELÉM

1994

**PROTÁZIO, João dos Santos. Espalhamento elástico em meios anisotrópicos estratificados.** Belém, Universidade Federal do Pará. Centro de Geociências, 1994. 108p.

**Tese (Doutorado em Geofísica) - Curso de Pós-Graduação em Geofísica, Centro de Geociências, UFPA, 1994.**

**1. ANISOTROPIA. 2. EQUAÇÕES DE ZOEPPRITZ. 3. MATRIZ DE IMPEDÂNCIA. 4. MEIO QUASI-EQUIVALENTE. 5. PULSO ANALÍTICO. 6. PROPAGAÇÃO DE PULSO. 7. SISMOGRAMA DE ONDA PLANA. 8. HODOGRAMA. I. Título.**

Aos meus filhos Marcelo e  
Alessandro, meus pais Ana e  
Raimundo e irmãos, pelo incentivo e  
paciência em aturar minhas  
ausências e, muitas vezes, minhas  
rabugices. À tia Pureza pela força e  
confiança na conclusão deste  
trabalho.

## AGRADECIMENTOS

Ao meu orientador Mike Schoenberg, pela paciente e profissional orientação, além, é claro, da amizade e grande coração, capaz de entender um aluno tão complicado.

Ao amigo Jessé, pela estupenda amizade, coisa de irmão mesmo, que além da competente colaboração e valiosas discussões, me ajudou a tornar claras muitas etapas deste trabalho. Não só isto, mas, também, pelas lições de vida que me valeram muito, em momentos de grandes conflitos e dúvidas. Valeu, grande amigo e irmão.

Ao Prof. Carlos Alberto Dias, pelo incentivo e pela minha introdução nos árduos e instigantes caminhos da Geofísica. Também, pelas duras cobranças, importantes para a conclusão desta tese.

Ao Prof. João Batista Correa da Silva e à Profa. Sônia Guerreiro, pelo apoio institucional e pelas cobranças de prazos, fundamentais à apresentação deste trabalho.

Ao convênio UFPA/PETROBRÁS/FADESP/CAPES/FINEP/CNPq, pela infra-estrutura necessária à conclusão desta tese.

Aos colegas funcionários de apoio computacional, pela ajuda e pacificação, nos meus momentos de guerra declarada ao computador.

Aos colegas funcionários do Projeto e do Curso de Geofísica, pelo apoio e eficiente desempenho profissional.

Ao corpo docente do Curso de Pós-Graduação em Geofísica da UFPA, pela minha formação e pelos valiosos ensinamentos quanto a se fazer ciência em plena Amazônia.

Aos membros das bancas de qualificação e de defesa de tese: Drs. João Batista Correa da Silva, Vlatislav Cervený, Klaus Schiel, Luís Rijo, Ivan Simões, Marco Botelho, Julie Hood e Ulrich, pelas sugestões e gentileza em participar das mesmas.

Aos meus colegas do Departamento de Matemática e também do CCEN, pelo incentivo e pela minha liberação, fatores fundamentais na conclusão deste trabalho. Especialmente, a quem me acalmou e me ajudou a superar, mais feliz, esta dura etapa de minha vida.

Aos meus colegas de curso, pelo estímulo, colaboração e, muitas vezes, pela solidariedade naqueles momentos em que as dificuldades pareciam não deixar outra opção, senão desistir.

# SUMÁRIO

	p.
DEDICATÓRIA . . . . .	i
AGRADECIMENTOS . . . . .	ii
RESUMO . . . . .	1
ABSTRACT . . . . .	2
1 - INTRODUÇÃO . . . . .	3
2 - AS EQUAÇÕES DE ZOEPPRITZ RACIONALIZADAS E GENERALIZADAS PARA A ANISOTROPIA . . . . .	5
2.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS . . . . .	5
2.2 ONDAS PLANAS EM MEIOS ISOTRÓPICOS . . . . .	6
2.3 ONDAS PLANAS EM MEIOS ANISOTRÓPICOS . . . . .	12
2.4 ONDAS TRIDIMENSIONAIS EM MEIOS ANISOTRÓPICOS . . . . .	15
2.5 A PROPAGAÇÃO EM CAMADAS VIA MATRIZES DE IMPEDÂNCIA . . . . .	18
2.6 CONSIDERAÇÕES FINAIS . . . . .	22
3 - A OBTENÇÃO DE MEIOS QUASI-EQUIVALENTES . . . . .	25
3.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS . . . . .	25
3.2 PARÂMETROS DE SCHOENBERG E AS CURVAS DE VAGAROSIDADE . . . . .	26
3.3 MEIOS REFLETORES ISOTRÓPICOS QUASI-EQUIVALENTES . . . . .	28
3.4 EXPERIMENTOS NUMÉRICOS E ANÁLISE DOS RESULTADOS . . . . .	29
3.5 CONSIDERAÇÕES FINAIS . . . . .	30
4 - O ESTUDO DA PROPAGAÇÃO DE PULSOS ATRAVÉS DE ESTRATIFICAÇÕES ANISOTRÓPICAS . . . . .	39
4.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS . . . . .	39
4.2 ESPALHAMENTO DE ONDAS ATRAVÉS DE INTERFACES PLANAS . . . . .	41
4.2.1 O Campo de Onda Incidente . . . . .	42
4.2.2 O Campo de Onda Transmitido . . . . .	43

4.2.3	O Campo de Onda Refletido . . . . .	45
4.3	O SINAL ANALÍTICO DOS PULSOS ESPALHADOS . . . . .	46
4.3.1	A Obtenção Heurística do Pulso Analítico . . . . .	46
4.3.2	O Pulso Analítico do Pulso Transmitido . . . . .	48
4.3.3	O Pulso Analítico de uma Fonte Impulsiva . . . . .	50
4.3.4	O Pulso Analítico do Pulso Refletido . . . . .	50
4.4	O ESPALHAMENTO DE PULSOS ATRAVÉS DE ESTRATIFICAÇÕES ANISOTRÓPICAS . . . . .	52
4.4.1	A Reflexão e a Transmissão através de Estratificações Anisotrópicas . . . . .	53
4.4.2	O Caso de uma Simples Camada . . . . .	55
4.4.3	A Reflexão e a Transmissão de Pulsos através de Estratificações Anisotrópicas . . . . .	57
4.4.4	A Propagação de Pulsos através de Estratificações Finas em Limite Quasi-estático . . . . .	58
4.5	CONSIDERAÇÕES FINAIS . . . . .	61
<b>5</b>	<b>- EXEMPLOS NUMÉRICOS . . . . .</b>	<b>63</b>
5.1	CONSIDERAÇÕES INICIAIS . . . . .	63
5.2	DESCRIÇÃO DOS MODELOS ESTUDADOS . . . . .	65
5.3	O EFEITO DE FRATURAMENTO NAS AMPLITUDES DAS ONDAS ESPALHADAS . . . . .	66
5.4	O EFEITO DE FRATURAMENTO NA DEFORMAÇÃO DOS PULSOS ESPALHADOS . . . . .	68
5.5	O EFEITO DA ANISOTROPIA NOS PADRÕES DE POLARIZAÇÃO . . . . .	71
5.6	CONSIDERAÇÕES FINAIS . . . . .	71
<b>6</b>	<b>- CONCLUSÕES . . . . .</b>	<b>104</b>
	<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS . . . . .</b>	<b>106</b>

## RESUMO

A análise de AVO constitui-se, atualmente, numa importante ferramenta para a extração de informações litológicas a partir de dados sísmicos, através do uso dos contrastes de impedância acústica nas interfaces que separam diferentes litologias. A hipótese usual de isotropia deixa de valer, em muitos casos, após o advento de arranjos de grande afastamento e geofones com multi-componentes, que têm a potencialidade de revelar a presença de anisotropia em sub-superfície. Para a interpretação destes dados, a análise de AVO deve incluir anisotropia. Este trabalho apresenta uma teoria de AVO e resultados numéricos para um meio anisotrópico estratificado.

Esta tese contém três contribuições. Inicialmente, é apresentada uma nova abordagem para o estudo da reflexão-transmissão através de interface plana que separam dois meios anisotrópicos com pelo menos um plano horizontal de simetria especular. As equações de Zoeppritz são generalizadas para incluir anisotropia, através da introdução das chamadas matrizes de impedância, o que simplifica bastante o formalismo anterior. Posteriormente, é descrito o estudo da reflexão de ondas P através de interface entre um meio isotrópico e outro transversalmente isotrópico (*TI*). É mostrado que a reflexão de ondas P, neste tipo de experimento, não fornece informações sobre a presença de anisotropia do semi-espaço *TI*, pelo menos em incidência pré-crítica. Finalmente, é discutido o comportamento da reflexão e transmissão de pulsos, em incidência pós-crítica, através de meios anisotrópicos estratificados. Observa-se que o comportamento pós-crítico dos pulsos espalhados carregam valiosas informações sobre a anisotropia dos meios atravessados por eles.

## ABSTRACT

AVO analysis is an important tool for extracting lithological information from seismic data using the contrast in acoustic impedance at the lithological boundaries. The isotropic assumption behind this analysis does not hold in many cases. The advent of large offset surveys and multi-component data has revealed the presence of subsurface anisotropy. To interpret such data, the AVO analysis must include anisotropy. This work presents an AVO theory and numerical results for an anisotropic layered medium.

This thesis contains three contributions. First, a new approach to the study of reflection-transmission at a plane interface between anisotropic media with a horizontal mirror plane is presented. The Zoeppritz equations are generalized to include anisotropy by the introduction of impedance matrices which greatly simplifies the previous formalisms. Second, the study of the P-wave reflection at an interface between an isotropic and a transversally isotropic medium is described and it is shown that the reflected P-wave does not have information about the underlying anisotropic subspace for pre-critical incidence. Finally, the behaviour of post-critical reflected and transmitted pulses through a stack of anisotropic layers is discussed. The post-critical pulses are shown to carry valuable information on the anisotropy of the structure through which the waves propagate.

# 1 - INTRODUÇÃO

A análise de amplitude versus afastamento (AVO) é uma das mais importantes ferramentas de extração de informações litológicas da subsuperfície da Terra, a partir da variação das amplitudes com relação ao afastamento em dados de reflexão sísmica. Sua habilidade de prognosticar contrastes litológicos e conteúdo de fluidos, o tornaram bastante atrativo e fonte de crescentes investigações (KOEFOED, 1955; GREGORY, 1976; OSTRANDER, 1984). Com a introdução de novas técnicas de aquisição de dados tais como medidas de Perfil Sísmico Vertical (PSV) com afastamento, levantamentos de dados com grande afastamento, além do desenvolvimento de geofones multi-componentes passou-se, então, a verificar a presença de anisotropia em subsuperfície. Com isto, um bom entendimento dos fatores que afetam as respostas na análise de AVO em meios anisotrópicos passou a ser essencial (NEIDELL, 1986; THOMSEN, 1986; WRIGHT, 1987; BANIK, 1987; KIN et al., 1993). Por outro lado, cresceu também o interesse na análise de amplitudes versus azimute (AVA), para aqueles meios com variação azimutal. Micro-estruturas mais regulares da subsuperfície, como finas estratificações (POSTMA, 1955; BACKUS, 1962) ou micro-fraturas (HUDSON, 1981; SCHOENBERG & DOUMA, 1988), em escala de heterogeneidade muito menor que o comprimento de ondas, comportam-se efetivamente como meios anisotrópicos. Portanto, o estudo do comportamento das amplitudes de ondas transmitidas e refletidas através de meios anisotrópicos, tornou-se bastante promissor, principalmente pela sua potencialidade de descrição desses aspectos micro-estruturais, importante na caracterização de reservatórios.

A proposta básica deste trabalho foi investigar alguns efeitos locais da presença da anisotropia sobre as amplitudes e os estados de polarizações das ondas espalhadas, através de estratificações de camadas fraturadas. Foi levado em conta apenas a propagação de ondas planas, uma vez que a fonte é suposta bastante afastada da região de interesse. Três contribuições importantes foram obtidas no seu desenvolvimento : a) a obtenção racional e modular de uma metodologia que calcula os coeficientes de reflexão e transmissão, através de interfaces horizontais que separam meios anisotrópicos, com pelo menos um plano horizontal de simetria especular (meios monoclinicos com seu plano de simetria horizontal são os exemplos mais gerais, com este tipo de simetria); b) a determinação de meios quasi-equivalentes em experimentos de reflexão de ondas P, envolvendo meios *TI* ou mesmo ortorrômbicos, em propagações nos seus planos verticais de simetria. Isto significa a obtenção de meios isotrópicos que se comportam sísmicamente como meios anisotrópicos à reflexão de ondas P, dentro

dos limites de precisão das medidas e c) análise da deformação de pulsos espalhados através de multi-camadas anisotrópicas horizontais, principalmente em propagação pós-crítica. Os pulsos espalhados foram apresentados através de representações integrais, obtidas com o uso do importante conceito de pulso analítico.

Esta tese é constituída de quatro capítulos. No capítulo 2 foi apresentado o método de obtenção dos coeficientes de reflexão e transmissão das ondas espalhadas, através de interfaces, via um formalismo que corresponde a uma extensão, ao caso anisotrópico, das conhecidas equações de Zoeppritz (ZOEPPRITZ, 1919). Foram obtidas soluções exatas para os casos de dimensões dois e três, extendidas posteriormente ao caso mais geral de estratificações. No capítulo 3, foram obtidos os meios quasi-equivalentes em incidência pré-crítica, através de um critério de mínimos quadrados sobre os coeficientes de reflexão da onda P. Foram analisados, também, os efeitos dos parâmetros elásticos dos meios envolvidos na precisão destes ajustes. No capítulo 4, foram apresentadas as representações integrais para os pulsos espalhados através de interfaces, especificamente em propagação pós-crítica. Elas contituem generalizações, para o caso anisotrópico, de expressões já estudadas por EWING et al. (1957), no caso isotrópico. Os fatores que afetam a forma dos pulsos espalhados foram muito bem caracterizados a partir destas representações. O seu uso em propagação através de estratificações mais gerais foi estabelecido. Particularmente, foi estudado o caso mais simples de apenas uma camada. Finalmente, no capítulo 5, foram estudados alguns exemplos numéricos, no sentido de marcar as possíveis diferenças entre os comportamentos das amplitudes e dos estados de polarização nos casos isotrópico e anisotrópico. Foi usado como padrão, um meio transversalmente isotrópico, que foi convenientemente fraturado através de modelo descrito em HOOD (1990). Os efeitos sobre as amplitudes foram mostrados através de mapas de amplitudes, as deformações dos pulsos através de sismogramas de ondas planas e os efeitos sobre os estados de polarizações através de mapas de elipticidade e de hodogramas. Os resultados mostraram significativos efeitos da presença de fraturas, principalmente nas direções sub-normais às direções do fraturamento.

## 2 - AS EQUAÇÕES DE ZOEPPRITZ RACIONALIZADAS E GENERALIZADAS PARA A ANISOTROPIA

### 2.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

A identificação de litologias a partir da natureza da reflexão de ondas sísmicas em interfaces que separam meios elásticos em subsuperfície tem sido, há muito tempo, objeto de estudos dos geofísicos aplicados. Isto constitui o problema da análise de AVO (amplitude versus afastamento). Hoje, com o advento de levantamentos de superfície de grande afastamento, medidas em Perfil Sísmico Vertical (PSV) e tomografia poço a poço, o problema tem se tornado mais complexo. Particularmente, experimentos com grande abertura angular têm mostrado sistematicamente os efeitos da anisotropia. Ainda mais significativamente, os arranjos multicomponentes tornam possível a avaliação da refletividade em uma interface como função do azimute, o problema da análise de AVA (amplitude versus azimute), quando os meios envolvidos já não são mais azimutalmente isotrópicos. Com isto, torna-se necessária uma formulação consistente que unifique o problema direto de calcular os coeficientes de reflexão e transmissão em interfaces entre dois semi-espacos elásticos quando um ou ambos são anisotrópicos. Uma tal formulação que determina uma solução explícita para o problema da reflexão e transmissão de ondas planas - uma generalização matricial dos coeficientes de reflexão e transmissão no caso escalar - para um amplo conjunto de meios anisotrópicos, é aqui obtida. A solução se apresenta em termos de submatrizes da matriz dos coeficientes das equações de Zoeppritz (ZOEPPRITZ, 1919) - que nada mais são que equações que expressam a continuidade do deslocamento e das trações através da interface - estendidas para anisotropia. A formulação é válida apenas para aqueles meios que apresentam um plano horizontal de simetria especular, pelo menos. Em termos de anisotropia, isto equivale a exigir que o meio seja pelo menos monoclinico, com um plano de simetria paralelo ao plano refletor.

O caso bidimensional ocorre quando os deslocamentos estão contidos nos planos de propagação (ondas  $qP$  e  $qSV$ ) e estes tipos de ondas são desacoplados da onda  $SH$  que têm seu deslocamento perpendicular ao plano de propagação. Uma discussão detalhada da refletividade da onda  $SH$  em meio anisotrópico é apresentada por SCHOENBERG & COSTA (1991).

Segundo DELLINGER (1992) (informação verbal), um plano desta natureza é chamado plano de cisalhamento puro e não precisa, necessariamente, ser um plano de simetria do meio anisotrópico. Um meio para o qual o plano  $x_1 - x_2$  é um plano de simetria especular enquanto o plano  $x_1 - x_3$  é um plano de cisalhamento puro é quase, mas não exatamente, um meio ortorrômbico; ele pode ter um valor de  $c_{26}$  não nulo, em notação condensada padrão para a matriz dos parâmetros elásticos. Todavia, como isto não afeta a discussão da refletividade e da transmissividade anisotrópica em dimensão dois, será assumido, neste caso, que tanto o plano vertical de propagação quanto o plano horizontal serão planos de simetria especular para ambos os meios, implicando, com isto, que eles devem ser pelo menos ortorrômbicos.

O caso isotrópico-isotrópico será considerado primeiramente. Neste caso, as equações de Zoeppritz são expressas em termos das chamadas matrizes de impedância  $2 \times 2$  para cada meio e os coeficientes de reflexão e transmissão são expressos explicitamente em termos destas matrizes. Então, para o caso anisotrópico-anisotrópico, a solução para os coeficientes de reflexão e transmissão se reduz à avaliação de duas matrizes de impedância para cada meio envolvido. Estas matrizes de impedância dependem somente da densidade, dos módulos elásticos e da componente horizontal comum do vetor de vazarosidade (lei de Snell) de todas as ondas planas no problema. Elas permitem calcular os autovalores e os autovetores das equações de Christoffel que governam a propagação de ondas planas no meio.

O caso mais interessante, em dimensão três, ocorre quando o plano de propagação não é um plano especular de simetria e, neste caso, os campos de velocidade e as direções dos raios associadas com as ondas planas não precisam estar, necessariamente, contidas no plano de propagação, ou seja, naquele plano definido pela componente horizontal da vazarosidade ao longo da interface e a normal do referido plano. Neste caso, as matrizes de impedância são duas submatrizes  $3 \times 3$  da matriz de coeficientes de Zoeppritz  $6 \times 6$ , generalizada para meios anisotrópicos em dimensão três mas sua solução é expressa explicitamente da mesma forma.

As vantagens desta formulação são: a) heurística, onde se pode ver o significado de cada termo na solução e como e porque quase todos os casos anisotrópicos têm soluções comuns e b) facilita a codificação computacional para os cálculos dos coeficientes de reflexão e transmissão e das matrizes de propagação em programas que calculam o campo de ondas completo em meios estratificados ou em programas de traçamento de raios dinâmico.

## 2.2 ONDAS PLANAS EM MEIOS ISOTRÓPICOS

Sejam dois semi-espacos isotrópicos separados pelo plano horizontal  $x_1 - x_2$ , com o eixo  $x_3$  tomado positivo para baixo e com propagação de ondas no plano vertical  $x_1 - x_3$ , associado

com o plano do movimento. Para ondas harmônicas com frequência radial  $\omega$  e componente horizontal do vetor de vazarosidade  $s_1$ , em que todas as ondas que interagem na interface contêm o fator de fase  $\exp i\omega(s_1x_1 - t)$ , que será suprimido daqui por diante, mas que deve sempre ser levado em conta, as ondas possíveis são as ondas refletidas e transmitidas compressionais, denotadas por P e as ondas refletidas e transmitidas cisalhantes (com movimento no plano vertical), denotadas por S. O sentido positivo de cada autovetor unitário, denotado por  $e$ , associado com a onda plana é escolhido (AKI & RICHARD, 1980) de tal forma que suas componentes horizontais tenham o mesmo sinal da componente horizontal  $s_1$  do vetor de vazarosidade, conforme Figura (2.1).

Seja agora o meio incidente superior isotrópico, ocupando o semi-espaço  $x_3 < 0$ , com densidade  $\rho$ , velocidade compressional  $\alpha$  e velocidade cisalhante  $\beta$ . Todo plano em um meio isotrópico é um plano especular de simetria  $e$ , portanto, este meio tem simetria horizontal. O campo de velocidade no semi-espaço incidente devido às ondas planas harmônicas P e S, incidentes e refletidas em  $x_3 < 0$ , pode ser escrito como

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_3 \end{bmatrix} &= i_P \begin{bmatrix} \alpha s_1 \\ \alpha s_{3P} \end{bmatrix} \exp i\omega s_{3P} x_3 + r_P \begin{bmatrix} \alpha s_1 \\ -\alpha s_{3P} \end{bmatrix} \exp -i\omega s_{3P} x_3 \\ &+ i_S \begin{bmatrix} \beta s_{3S} \\ -\beta s_1 \end{bmatrix} \exp i\omega s_{3S} x_3 + r_S \begin{bmatrix} \beta s_{3S} \\ \beta s_1 \end{bmatrix} \exp -i\omega s_{3S} x_3, \end{aligned} \quad (2.1)$$

onde

$$s_{3P} = \sqrt{\alpha^{-2} - s_1^2} \quad e \quad s_{3S} = \sqrt{\beta^{-2} - s_1^2}.$$

Os vetores associados a cada uma destas ondas são unitários e obedecem a convenção de sinal anteriormente mencionada, assumindo-se  $s_1$  positivo. Os coeficientes  $i_P$  e  $i_S$  são as amplitudes das ondas compressionais e cisalhantes incidentes, respectivamente. Elas são as duas únicas ondas planas incidentes possíveis, para cada frequência particular  $\omega$  e cada componente horizontal  $s_1$  do vetor de vazarosidade. Naturalmente, quando uma delas é nula significa que existe somente uma simples onda incidente, P ou S. Os coeficientes  $r_P$  e  $r_S$  são as amplitudes das ondas compressional e cisalhante, respectivamente.

A partir do movimento assumido, a tração pode ser calculada segundo a relação constitutiva para meios isotrópicos, que por sua vez pode ser colocada na forma da equação de onda para estes mesmos meios. As velocidades serão usadas em lugar dos deslocamentos para eliminar a dependência da frequência nas derivadas. As componentes do tensor de tração em cada plano constante  $x_3$  são dadas por  $\sigma_{33} \equiv \sigma_3$  e  $\sigma_{13} \equiv \sigma_5$ . A notação condensada é aqui usada, mesmo para o caso isotrópico, para facilitar sua generalização para a anisotropia. A

relação tensão-deformação em meios isotrópicos, aplicada ao campo de velocidade nos dá

$$\begin{bmatrix} \sigma_3 \\ \sigma_5 \end{bmatrix} = i_P \begin{bmatrix} -\rho\alpha\Gamma \\ -2\rho\alpha\beta^2 s_1 s_{3P} \end{bmatrix} \exp \omega s_{3P} x_3 + r_P \begin{bmatrix} -\rho\alpha\Gamma \\ 2\rho\alpha\beta^2 s_1 s_{3P} \end{bmatrix} \exp -\omega s_{3P} x_3 \\ + i_S \begin{bmatrix} 2\rho\beta^3 s_1 s_{3S} \\ -\rho\beta\Gamma \end{bmatrix} \exp \omega s_{3S} x_3 + r_S \begin{bmatrix} 2\rho\beta^3 s_1 s_{3S} \\ \rho\beta\Gamma \end{bmatrix} \exp -\omega s_{3S} x_3, \quad (2.2)$$

onde  $\Gamma = 1 - 2\beta^2 s_1^2$ .

As equações (2.1) e (2.2) podem ser reordenadas, produzindo a seguinte forma matricial para as componentes de velocidade e tração, no meio incidente:

$$\mathbf{b}_X(x_3) \equiv \begin{bmatrix} v_1 \\ \sigma_3 \end{bmatrix}_{x_3} = \mathbf{X}[\Lambda(x_3)\mathbf{i} + \Lambda^{-1}(x_3)\mathbf{r}] \quad (2.3)$$

$$\mathbf{b}_Y(x_3) \equiv \begin{bmatrix} \sigma_5 \\ v_3 \end{bmatrix}_{x_3} = \mathbf{Y}[\Lambda(x_3)\mathbf{i} - \Lambda^{-1}(x_3)\mathbf{r}],$$

onde

$$\mathbf{i} = \begin{bmatrix} i_P \\ i_S \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r} = \begin{bmatrix} r_P \\ r_S \end{bmatrix}, \quad \Lambda(x_3) = \begin{bmatrix} \exp \omega s_{3P} x_3 & 0 \\ 0 & \exp \omega s_{3S} x_3 \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

e

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \alpha s_1 & \beta s_{3S} \\ -\rho\alpha\Gamma & 2\rho\beta^3 s_1 s_{3S} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} -2\rho\alpha\beta^2 s_1 s_{3P} & -\rho\beta\Gamma \\ \alpha s_{3P} & -\beta s_1 \end{bmatrix}. \quad (2.5)$$

As matrizes  $\mathbf{X}$  e  $\mathbf{Y}$  são as matrizes de impedância de um meio elástico isotrópico e dependem somente de  $\rho$ ,  $\alpha$  e  $\beta$  e da componente horizontal da vagarosidade  $s_1$ . As linhas das matrizes de impedância são ou adimensionais (aquelas que correspondem às componentes de velocidade) ou tem dimensão de impedância (aquelas que correspondem às componentes de tração). Os determinantes das matrizes de impedância são

$$|\mathbf{X}| = \rho\alpha\beta s_{3S} \quad \text{e} \quad |\mathbf{Y}| = \rho\alpha\beta s_{3P},$$

que possuem necessariamente a dimensão de impedância.

Seja agora o meio isotrópico através do qual a onda é transmitida, ocupando o semi-espaço  $x_3 > 0$  e com densidade  $\rho'$ , velocidade compressional  $\alpha'$  e velocidade cisalhante  $\beta'$ . Todas as quantidades referentes a este meio serão dotadas de apóstrofo daqui por diante. Será assumido que no meio inferior não se propagam ondas ascendentes que incidam na interface

$x_3 = 0$  mas somente ondas transmitidas descendentes. Então, as velocidades e as trações podem ser escritas, por analogia às equações (2.3) e (2.4) com  $i$  trocado por  $t$  e  $r$  tomado identicamente nulo, como

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_{X'}(x_3) &\equiv \begin{bmatrix} v_1 \\ \sigma_3' \end{bmatrix}_{x_3} = \mathbf{X}'\Lambda'(x_3)\mathbf{t} \\ \mathbf{b}_{Y'}(x_3) &\equiv \begin{bmatrix} \sigma_5 \\ v_3 \end{bmatrix}_{x_3} = \mathbf{Y}'\Lambda'(x_3)\mathbf{t} , \end{aligned} \quad (2.6)$$

onde

$$\mathbf{t} = \begin{bmatrix} t_P \\ t_S \end{bmatrix} , \quad (2.7)$$

$t_P$  e  $t_S$  sendo as amplitudes das ondas compressional e cisalhante respectivamente. As matrizes  $\mathbf{X}'$  e  $\mathbf{Y}'$  são análogas às descritas em (2.5) mas com os parâmetros do meio de transmissão dotados de apóstrofos, conforme já referenciado anteriormente.

Na interface  $x_3 = 0$ , as componentes do campo de velocidades e do campo de trações são contínuas (interfaces não deslizantes) e  $\Lambda = \Lambda' = \mathbf{I}$ , a matriz identidade. As equações de Zoeppritz tomam, então, a forma matricial

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(\mathbf{i} + \mathbf{r}) &= \mathbf{X}'\mathbf{t} \\ \mathbf{Y}(\mathbf{i} - \mathbf{r}) &= \mathbf{Y}'\mathbf{t} . \end{aligned} \quad (2.8)$$

Assumindo inicialmente que  $\mathbf{X}$  e  $\mathbf{Y}$  são inversíveis (a ocorrência de singularidade se dá em um vetor de vagariedade horizontal para o qual pelo menos uma das ondas refletidas tem velocidade de grupo horizontal), (2.8) pode ser escrita na forma

$$\begin{aligned} (\mathbf{i} + \mathbf{r}) &= \mathbf{X}^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{t} \\ (\mathbf{i} - \mathbf{r}) &= \mathbf{Y}^{-1}\mathbf{Y}'\mathbf{t} . \end{aligned} \quad (2.9)$$

A soma e subtração das expressões acima, dá

$$\begin{aligned} 2\mathbf{i} &= (\mathbf{X}^{-1}\mathbf{X}' + \mathbf{Y}^{-1}\mathbf{Y}')\mathbf{t} \\ 2\mathbf{r} &= (\mathbf{X}^{-1}\mathbf{X}' - \mathbf{Y}^{-1}\mathbf{Y}')\mathbf{t} , \end{aligned} \quad (2.10)$$

que podem ser resolvidas, supondo-se a inversibilidade de  $(\mathbf{X}^{-1}\mathbf{X}' + \mathbf{Y}^{-1}\mathbf{Y}')$  (a ocorrência de singularidade, neste caso, se dá em um vetor de vagarosidade onde uma onda de superfície, de Stoneley, por exemplo, existe). Os valores para  $r$  e  $t$  são dados por

$$t \equiv \mathbf{T}i = 2(\mathbf{X}^{-1}\mathbf{X}' + \mathbf{Y}^{-1}\mathbf{Y}')^{-1}i \quad (2.11)$$

$$r \equiv \mathbf{R}i = (\mathbf{X}^{-1}\mathbf{X}' - \mathbf{Y}^{-1}\mathbf{Y}')(\mathbf{X}^{-1}\mathbf{X}' + \mathbf{Y}^{-1}\mathbf{Y}')^{-1}i .$$

$\mathbf{R}$  e  $\mathbf{T}$  são as matrizes de reflexão e transmissão, respectivamente, e são as soluções explícitas das equações de Zoeppritz generalizadas para todo  $s_1$  e  $s_2$ , quando  $\mathbf{X}$ ,  $\mathbf{Y}$  e  $(\mathbf{X}^{-1}\mathbf{X}' + \mathbf{Y}^{-1}\mathbf{Y}')$  não são singulares.

Através de manipulações usuais de matrizes, soluções para  $\mathbf{R}$  e  $\mathbf{T}$  podem ser obtidas em outros casos de inversibilidade ou não das matrizes de impedância  $\mathbf{X}$ ,  $\mathbf{Y}$ ,  $\mathbf{X}'$  e  $\mathbf{Y}'$  e que vão abaixo discriminadas:

- caso em que  $\mathbf{Y}$  é não inversível mas com  $\mathbf{X}$ ,  $\mathbf{Y}'$  e  $(\mathbf{X}^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}'^{-1}\mathbf{Y} + \mathbf{I})$  inversíveis:

$$\mathbf{T} = 2\mathbf{Y}'^{-1}\mathbf{Y}(\mathbf{X}^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}'^{-1}\mathbf{Y} + \mathbf{I})^{-1} \quad (2.12)$$

$$\mathbf{R} = (\mathbf{X}^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}'^{-1}\mathbf{Y} + \mathbf{I})^{-1}(\mathbf{X}^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}'^{-1}\mathbf{Y} - \mathbf{I}) .$$

- caso em que  $\mathbf{X}$  & não inversível mas com  $\mathbf{X}'$ ,  $\mathbf{Y}$  e  $(\mathbf{I} + \mathbf{Y}^{-1}\mathbf{Y}'\mathbf{X}'^{-1}\mathbf{X})$  inversíveis:

$$\mathbf{T} = 2\mathbf{X}'^{-1}\mathbf{X}(\mathbf{I} + \mathbf{Y}^{-1}\mathbf{Y}'\mathbf{X}'^{-1}\mathbf{X})^{-1} \quad (2.13)$$

$$\mathbf{R} = (\mathbf{I} + \mathbf{Y}^{-1}\mathbf{Y}'\mathbf{X}'^{-1}\mathbf{X})^{-1}(\mathbf{I} - \mathbf{Y}^{-1}\mathbf{Y}'\mathbf{X}'^{-1}\mathbf{X}) .$$

- caso em que  $\mathbf{X}$  e  $\mathbf{Y}$  são não inversíveis mas com  $\mathbf{X}'$ ,  $\mathbf{Y}'$  e  $(\mathbf{Y}'^{-1}\mathbf{Y} + \mathbf{X}'^{-1}\mathbf{X})$  inversíveis (a singularidade aqui corresponde à ondas rasantes no meio de transmissão):

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= 2\mathbf{X}'^{-1}\mathbf{X}(\mathbf{Y}'^{-1}\mathbf{Y} + \mathbf{X}'^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{Y}'^{-1}\mathbf{Y} \\ &= 2\mathbf{Y}'^{-1}\mathbf{Y}(\mathbf{Y}'^{-1}\mathbf{Y} + \mathbf{X}'^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'^{-1}\mathbf{X} \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$\mathbf{R} = (\mathbf{Y}'^{-1}\mathbf{Y} + \mathbf{X}'^{-1}\mathbf{X})^{-1}(\mathbf{Y}'^{-1}\mathbf{Y} - \mathbf{X}'^{-1}\mathbf{X}),$$

- caso em que  $\mathbf{X}$  e  $\mathbf{X}'$  são não inversíveis mas com  $\mathbf{Y}$  e  $(\mathbf{X}' + \mathbf{X}\mathbf{Y}^{-1}\mathbf{Y}')$  inversíveis:

$$\mathbf{T} = 2(\mathbf{X}' + \mathbf{X}\mathbf{Y}^{-1}\mathbf{Y}')^{-1} \quad (2.15)$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{I} - 2\mathbf{Y}^{-1}\mathbf{Y}'(\mathbf{X}' + \mathbf{X}\mathbf{Y}^{-1}\mathbf{Y}')^{-1}\mathbf{X} .$$

- caso em que  $\mathbf{X}$  e  $\mathbf{X}'$  são não inversíveis mas com  $\mathbf{Y}'$  e  $(\mathbf{X} + \mathbf{X}'\mathbf{Y}'^{-1}\mathbf{Y})$  inversíveis:

$$\mathbf{T} = 2\mathbf{Y}'^{-1}\mathbf{Y}(\mathbf{X} + \mathbf{X}'\mathbf{Y}'^{-1}\mathbf{Y})^{-1}\mathbf{X} \quad (2.16)$$

$$\mathbf{R} = (\mathbf{X} + \mathbf{X}'\mathbf{Y}'^{-1}\mathbf{Y})^{-1}(\mathbf{X}'\mathbf{Y}'^{-1}\mathbf{Y} - \mathbf{X}) .$$

- caso em que  $\mathbf{Y}$  e  $\mathbf{Y}'$  são não inversíveis mas com  $\mathbf{X}$  e  $(\mathbf{Y}' + \mathbf{Y}\mathbf{X}^{-1}\mathbf{X}')$  inversíveis:

$$\mathbf{T} = 2(\mathbf{Y}' + \mathbf{Y}\mathbf{X}^{-1}\mathbf{X}')^{-1}\mathbf{Y} \quad (2.17)$$

$$\mathbf{R} = 2\mathbf{X}^{-1}\mathbf{X}'(\mathbf{Y}' + \mathbf{Y}\mathbf{X}^{-1}\mathbf{X}')^{-1}\mathbf{Y} - \mathbf{I} .$$

- caso em que  $\mathbf{Y}$  e  $\mathbf{Y}'$  são não inversíveis mas com  $\mathbf{X}'$  e  $(\mathbf{Y} + \mathbf{Y}'\mathbf{X}'^{-1}\mathbf{X})$  inversíveis:

$$\mathbf{T} = 2\mathbf{X}'^{-1}\mathbf{X}(\mathbf{Y} + \mathbf{Y}'\mathbf{X}'^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{Y} \quad (2.18)$$

$$\mathbf{R} = (\mathbf{Y} + \mathbf{Y}'\mathbf{X}'^{-1}\mathbf{X})^{-1}(\mathbf{Y}'\mathbf{X}'^{-1}\mathbf{X} - \mathbf{Y}) .$$

Estes são todos os possíveis casos de solução para as matrizes de reflexão  $\mathbf{R}$  e de transmissão  $\mathbf{T}$ .

A ocorrência de valores imaginários para a componente vertical  $s_3$  implica que a onda correspondente é não-homogênea ou evanescente. Sua amplitude decai exponencialmente na direção  $x_3$  positivo e  $s_{3P} = i\sqrt{s_1^2 - \alpha^{-2}}$  para a onda compressional P e/ou  $s_{3S} = i\sqrt{s_1^2 - \beta^{-2}}$  para a onda cisalhante S. O mesmo acontece para o meio através do qual ocorre a transmissão das ondas, onde o decaimento acontece na direção  $x_3$  negativo. Os autovetores complexos simplesmente significam que as duas componentes estão fora de fase no caso de uma onda evanescente. Uma convenção conveniente para a escolha do sinal dos autovetores pode ser estabelecida como segue: computa-se os autovetores em termos dos valores reais de  $s_3$  em regime pré-crítico e se aplica a formulação para o caso pós-crítico, usando os valores complexos de  $s_3$  no mesmo cálculo. Isto acarreta, para o caso de uma onda P evanescente, uma primeira componente do autovetor real positiva e segunda componente, imaginário puro com coeficiente positivo; para o caso de uma onda S evanescente, a primeira componente deve ser um imaginário puro com coeficiente positivo e a segunda, real negativo.

Especificamente, as componentes de  $\mathbf{R}$  e  $\mathbf{T}$  como calculadas por alguma das soluções anteriormente descritas podem ser explicitadas como

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} R_{PP} & R_{PS} \\ R_{SP} & R_{SS} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} T_{PP} & T_{PS} \\ T_{SP} & T_{SS} \end{bmatrix}, \quad (2.19)$$

onde o primeiro subscrito denota o tipo de onda refletida ou transmitida e o segundo, o tipo de onda incidente.

Observa-se que uma onda homogênea incidente em um ângulo crítico para o meio incidente, ao contrário do caso evanescente, só pode ocorrer quando  $s_1 = 1/\alpha$ , isto é, quando uma onda cisalhante é incidente em uma vagarosidade horizontal, crítica com relação à onda compressional P. Neste caso especial,  $s_{3P} = 0$ ,  $\mathbf{Y}$  é singular e a solução (assumindo  $\alpha \neq \alpha'$  para que  $\mathbf{Y}'$  não seja singular) é dada por (2.12). Neste caso,  $Y_{11} = Y_{21} = 0$  e  $\mathbf{R}$  e  $\mathbf{T}$  podem ser escritas na forma

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} -1 & R_{PS} \\ 0 & R_{SS} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & T_{PS} \\ 0 & T_{SS} \end{bmatrix}. \quad (2.20)$$

No caso da incidência rasante ser de uma onda P, ela deve ser cancelada totalmente pela reflexão rasante da onda P, dando um efeito nulo e as ondas refletidas e transmitidas são devidas somente à onda S incidente, na vagarosidade horizontal crítica da onda P.

Portanto, fica mostrado que a refletividade e a transmissividade podem ser calculadas através do formalismo das submatrizes das equações de Zoeppritz. Entretanto, a potencialidade deste formalismo está na sua extensão para meios anisotrópicos, onde o problema se reduz a calcular as correspondentes matrizes  $\mathbf{X}$  e  $\mathbf{Y}$  para cada meio anisotrópico.

### 2.3 ONDAS PLANAS EM MEIOS ANISOTRÓPICOS

Para propagação de ondas no caso bidimensional, onde o movimento no plano de propagação é desacoplado do movimento normal ao plano vertical, este plano deve ser, pelo menos, um plano de simetria especular e, como foi mencionado anteriormente, o plano horizontal também deve ser um tal plano de simetria especular. Se um meio tem tais planos de simetria, então, ele deve ser pelo menos ortorrômbico. Seja a propagação tomada no plano vertical  $x_1 - x_3$  em um meio ortorrômbico, girado de tal forma que seus planos naturais de coordenada, os planos de simetria especular, sejam paralelos aos planos de coordenadas. Um meio tetragonal ou cúbico alinhado ao longo dos planos coordenados, um meio hexagonal com seu eixo de simetria ao longo de um de seus três eixos de coordenadas ou um meio isotrópico são casos especiais de um meio ortorrômbico alinhado e, portanto, são automaticamente incluídos na discussão desta seção.

Um meio ortorrômbico, em notação condensada, tem uma matriz 6x6 de parâmetros

elásticos, na forma

$$\mathbf{c} \equiv \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

A relação constitutiva aplicada à velocidade plana  $\mathbf{v} = [v_1(x_1, x_3), v_3(x_1, x_3)]^t$ , onde o índice superscrito  $t$  corresponde à operação de transposição de matriz, nos leva às equações do movimento para as componentes da velocidade das partículas  $v_1$  e  $v_3$  e que são dadas por

$$c_{11}v_{1,11} + c_{55}v_{1,33} + (c_{13} + c_{55})v_{3,13} = \rho\ddot{v}_1 \quad (2.22)$$

$$(c_{13} + c_{55})v_{1,13} + c_{55}v_{3,11} + c_{33}v_{3,33} = \rho\ddot{v}_3 ,$$

onde

$$v_{j,ik} \equiv \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_i \partial x_k} \quad \text{e} \quad \ddot{v}_j \equiv \frac{\partial^2 v_j}{\partial t^2} .$$

Este movimento depende apenas de quatro dos nove parâmetros elásticos, no caso  $c_{11}$ ,  $c_{13}$ ,  $c_{33}$  e  $c_{55}$ . Substituindo a onda harmônica plana, de amplitude unitária

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_1 \\ n_3 \end{bmatrix} \exp i\omega(s_1 x_1 + s_3 x_3 - t) , \quad (2.23)$$

em (2.22), são obtidas as equações de Christoffel em termos das componentes dos vetores de vagarosidade  $s_1$  e  $s_3$  e dos autovetores correspondentes  $n_1$  e  $n_3$

$$\begin{bmatrix} c_{11}s_1^2 + c_{55}s_3^2 - \rho & (c_{13} + c_{55})s_1 s_3 \\ (c_{13} + c_{55})s_1 s_3 & c_{55}s_1^2 + c_{33}s_3^2 - \rho \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} . \quad (2.24)$$

Para cada  $s_1$ , a anulação do determinante acima que nos dá a existência de solução não trivial para as equações de Christoffel, nos leva à uma equação biquadrada em  $s_3$ , dada por

$$c_{33}c_{55}(s_3^2)^2 + \{[c_{55}(c_{11} + c_{33}) + E^2]s_1^2 - \rho(c_{33} + c_{55})\}s_3^2 + (c_{11}s_1^2 - \rho)(c_{55}s_1^2 - \rho) = 0, \quad (2.25)$$

onde  $E^2$ , o parâmetro chave que determina o desvio da curva de vagarosidade da onda qP de uma elipse e da curva de vagarosidade da onda qS de um círculo (HELBIG & SCHOENBERG, 1987), é dado por

$$E^2 = (c_{11} - c_{55})(c_{33} - c_{55}) - (c_{13} + c_{55})^2. \quad (2.26)$$

A equação biquadrada tem duas soluções  $s_{3P}^2$  e  $s_{3S}^2$ , e para valores reais de  $s_3^2$ , seja  $s_{3P}^2 < s_{3S}^2$ . As quatro raízes são denotadas por  $+s_{3P}$ ,  $-s_{3P}$ ,  $+s_{3S}$  e  $-s_{3S}$  onde  $+$  denota a onda descendente e  $-$ , a onda ascendente. Uma onda descendente é caracterizada por um vetor velocidade de grupo que aponta para baixo ou a raiz tem sua parte imaginária positiva, se não é real. Observa-se que  $s_{3P}^2$  e  $s_{3S}^2$ , em algumas circunstâncias especiais, podem não ser reais e, neste caso, a diferença entre as duas raízes descendentes tem o sinal da parte real. Será especificada, então, como raiz da onda qP, aquela com parte real negativa e como raiz da onda qS, aquela com parte real positiva. Cada raiz está associada aos autovetores unitários  $n_P^+$ ,  $n_P^-$ ,  $n_S^+$  e  $n_S^-$ , respectivamente, com as primeiras componentes de todos os autovetores tomados positivos para  $s_1 > 0$ , o que implica que as segundas componentes correspondentes às ondas descendentes e ascendentes são de sinais opostos. Similarmente às equações (2.1) e (2.2), as componentes dos campos de velocidade e de tração no meio incidente são dados por

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_3 \end{bmatrix} &= i_P \begin{bmatrix} n_{1P} \\ n_{3P} \end{bmatrix} \exp \omega s_{3P} x_3 + r_P \begin{bmatrix} n_{1P} \\ -n_{3P} \end{bmatrix} \exp -\omega s_{3P} x_3 \\ &+ i_S \begin{bmatrix} n_{1S} \\ n_{3S} \end{bmatrix} \exp \omega s_{3S} x_3 + r_S \begin{bmatrix} n_{1S} \\ -n_{3S} \end{bmatrix} \exp -\omega s_{3S} x_3, \end{aligned} \quad (2.27)$$

e

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \sigma_3 \\ \sigma_5 \end{bmatrix} &= i_P \begin{bmatrix} -(c_{13}s_1 n_{1P} + c_{33}s_3 P n_{3P}) \\ -c_{55}(s_1 n_{3P} + s_3 P n_{1P}) \end{bmatrix} \exp \omega s_{3P} x_3 \\ &+ r_P \begin{bmatrix} -(c_{13}s_1 n_{1P} + c_{33}s_3 P n_{3P}) \\ c_{55}(s_1 n_{3P} + s_3 P n_{1P}) \end{bmatrix} \exp -\omega s_{3P} x_3 \\ &+ i_S \begin{bmatrix} -(c_{13}s_1 n_{1S} + c_{33}s_3 S n_{3S}) \\ -c_{55}(s_1 n_{3S} + s_3 S n_{1S}) \end{bmatrix} \exp \omega s_{3S} x_3 \\ &+ r_S \begin{bmatrix} -(c_{13}s_1 n_{1S} + c_{33}s_3 S n_{3S}) \\ c_{55}(s_1 n_{3S} + s_3 S n_{1S}) \end{bmatrix} \exp -\omega s_{3S} x_3, \end{aligned} \quad (2.28)$$

com  $n_{1P}$  e  $n_{1S}$  tomados positivos; o campo de velocidades no meio de transmissão,  $x_3 > 0$ , consiste somente de ondas que se propagam para baixo, com coeficientes  $t_P$  e  $t_S$  em vez de  $i_P$  e  $i_S$ , respectivamente e, como no caso isotópico, ele pode ser escrito exatamente como no meio incidente, com apóstrofes nos parâmetros  $s'_{3P}$ ,  $s'_{3S}$ ,  $n'_P$  e  $n'_S$  e com  $n'_{1P}$  e  $n'_{1S}$  positivos. Então, as condições de interface são quatro condições de continuidade, que quando reescritas como a continuidade dos dois vetores  $b_X$  e  $b_Y$  mostrados em (2.3), nos dão as equações de Zoeppritz, como descritas em (2.8), generalizadas para meios anisotrópicos, onde

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} n_{1P} & n_{1S} \\ -(c_{13}s_1 n_{1P} + c_{33}s_3 P n_{3P}) & -(c_{13}s_1 n_{1S} + c_{33}s_3 S n_{3S}) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} -c_{55}(s_1 n_{3P} + s_{3P} n_{1P}) & -c_{55}(s_1 n_{3S} + s_{3S} n_{1S}) \\ n_{3P} & n_{3S} \end{bmatrix}. \quad (2.29)$$

$\mathbf{X}'$  e  $\mathbf{Y}'$  são as mesmas, exceto que com os parâmetros dotados de apóstrofos. As matrizes  $\mathbf{X}$  e  $\mathbf{Y}$  dependem somente da densidade  $\rho$  e dos quatro parâmetros elásticos  $c_{11}$ ,  $c_{13}$ ,  $c_{33}$  e  $c_{11}$  e da componente horizontal  $s_1$ , do vetor de vagarosidade. As dimensões dos vários termos são as mesmas do caso isotrópico. Os determinantes das matrizes de impedância são dados por

$$|\mathbf{X}| = c_{33} \begin{vmatrix} n_{1P} & n_{1S} \\ -s_{3P} n_{3P} & -s_{3S} n_{3S} \end{vmatrix} \quad (2.30)$$

$$|\mathbf{Y}| = c_{55} \begin{vmatrix} -s_{3P} n_{1P} & -s_{3S} n_{1S} \\ n_{3P} & n_{3S} \end{vmatrix}.$$

As soluções para (2.8) no caso isotrópico se aplicam exatamente ao caso anisotrópico, com  $\mathbf{X}$  e  $\mathbf{Y}$  sendo dados por (2.29).

## 2.4 ONDAS TRIDIMENSIONAIS EM MEIOS ANISOTRÓPICOS

No caso geral, em dimensão três, existem três soluções ascendentes e três soluções descendentes para  $s_3$ , fixados os valores das componentes horizontais  $s_1$  e  $s_2$ . Portanto, as matrizes de refletividade, de transmissividade e de impedância são  $3 \times 3$ . Neste caso, o plano de simetria especular deve ser horizontal, ou seja, o meio deve ser pelo menos monoclinico. Em notação condensada, a matriz dos parâmetros elásticos tem a forma

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & c_{16} \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & c_{26} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & 0 & 0 & c_{36} \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & c_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{45} & c_{55} & 0 \\ c_{16} & c_{26} & c_{36} & 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix}. \quad (2.31)$$

Observe que o caso de um meio ortorrômbico cujos planos verticais de simetria estão em um ângulo azimutal não nulo (ainda com um plano horizontal de simetria) está incluído nesta discussão; os 13 parâmetros elásticos de (2.31) são obtidos a partir dos 9 parâmetros de (2.21) através de rotações convenientes. A substituição de uma onda harmônica plana, com amplitude unitária, agora com a velocidade e a vagarosidade não contidas em um plano

particular e definida por

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} \exp i\omega(s_1x_1 + s_2x_2 + s_3x_3 - t) , \quad (2.32)$$

nas equações do movimento para um meio monoclinico, dá as três equações de Christoffel em termos dos vetores de vagarosidade e seus autovetores associados e cuja forma é

$$[\Gamma(\mathbf{s}) - \rho\mathbf{I}]\mathbf{n} = 0 , \quad (2.33)$$

onde  $\Gamma(\mathbf{s})$  é dado por

$$\begin{bmatrix} c_{11}s_1^2 + c_{66}s_2^2 + c_{55}s_3^2 + 2c_{16}s_1s_2 & c_{16}s_1^2 + c_{26}s_2^2 + c_{45}s_3^2 + A_{12}s_1s_2 & A_{13}s_1s_3 + A_{45}s_2s_3 \\ c_{16}s_1^2 + c_{26}s_2^2 + c_{45}s_3^2 + A_{12}s_1s_2 & c_{66}s_1^2 + c_{22}s_2^2 + c_{44}s_3^2 + 2c_{26}s_1s_2 & A_{45}s_1s_3 + A_{23}s_2s_3 \\ A_{13}s_1s_3 + A_{45}s_2s_3 & A_{45}s_1s_3 + A_{23}s_2s_3 & c_{55}s_1^2 + c_{44}s_2^2 + c_{33}s_3^2 + 2c_{45}s_1s_2 \end{bmatrix} ,$$

onde

$$A_{23} \equiv c_{44} + c_{23}, \quad A_{13} \equiv c_{13} + c_{55}, \quad A_{12} \equiv c_{12} + c_{66} \text{ e } A_{45} \equiv c_{45} + c_{36} .$$

Dados  $s_1$  e  $s_2$ , a anulação do determinante que garante a existência de soluções não triviais para as equações de Christoffel, dá origem à uma equação bicúbica com 6 soluções denotadas por  $\pm\sqrt{s_{3P}^2}$ ,  $\pm\sqrt{s_{3S}^2}$ ,  $\pm\sqrt{s_{3T}^2}$ , com os autovetores  $\mathbf{n}_P^\pm$ ,  $\mathbf{n}_S^\pm$ ,  $\mathbf{n}_T^\pm$ , respectivamente. Aqui, o subscrito T denota a terceira onda e, como uma convenção, especificamente, para valores reais  $s_{3P}^2$ ,  $s_{3S}^2$  e  $s_{3T}^2$ ,

$$s_{3P}^2 < s_{3S}^2 < s_{3T}^2 . \quad (2.34)$$

Para meios anisotrópicos suaves, P será denotado por quasi-P ou qP; S, por quasi-S ou qS e T, por quasi-T ou qT.

Agora, em dimensão três, encontrados os autovalores ascendentes e descendentes e seus respectivos autovetores associados, as componentes da velocidade (correspondente às equações (2.27)) no meio incidente são

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} &= i_P \begin{bmatrix} n_{1P} \\ n_{2P} \\ n_{3P} \end{bmatrix} \exp i\omega s_{3P} x_3 + r_P \begin{bmatrix} n_{1P} \\ n_{2P} \\ -n_{3P} \end{bmatrix} \exp -i\omega s_{3P} x_3 \\ &+ i_S \begin{bmatrix} n_{1S} \\ n_{2S} \\ n_{3S} \end{bmatrix} \exp i\omega s_{3S} x_3 + r_S \begin{bmatrix} n_{1S} \\ n_{2S} \\ -n_{3S} \end{bmatrix} \exp -i\omega s_{3S} x_3 \\ &+ i_T \begin{bmatrix} n_{1T} \\ n_{2T} \\ n_{3T} \end{bmatrix} \exp i\omega s_{3T} x_3 + r_T \begin{bmatrix} n_{1T} \\ n_{2T} \\ -n_{3T} \end{bmatrix} \exp -i\omega s_{3T} x_3 , \end{aligned} \quad (2.35)$$

e as componentes das trações em uma superfície constante  $x_3$  (correspondente à equação (2.28)) são obtidas à partir da relação constitutiva para meios monoclinicos, cuja matriz de parâmetros elásticos é dada por (2.31). A convenção de sinais para a escolha do sentido dos autovetores pode ser generalizada, mesmo para o caso em que as componentes horizontais da vagarosidade e o autovetor não estejam contidos no plano  $x_1 - x_3$ , da seguinte forma: o sentido positivo do autovetor é escolhido tal que  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{s}_H > 0$ , onde  $\mathbf{s}_H \equiv s_1 \mathbf{n}_1 + s_2 \mathbf{n}_2$  é a componente horizontal do vetor de vagarosidade  $\mathbf{s}$ .

O campo de velocidade no meio de transmissão  $x_3 > 0$  consiste somente de ondas descendentes, com coeficientes  $t_P, t_S, t_T$  no lugar de  $i_P, i_S, i_T$ , respectivamente, e, como acima, pode ser escrito exatamente como no meio incidente mas com os parâmetros  $s'_{3P}, s'_{3S}, s'_{3T}$ ,  $n'_P, n'_S$  e  $n'_T$ , dotados de apóstrofos. Portanto, as condições de continuidade na interface  $x_3 = 0$  das três componentes de velocidade e das três componentes da tração podem ser escritas como a continuidade, através da interface  $x_3 = 0$ , dos dois vetores

$$\mathbf{b}_X \equiv \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \sigma_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_Y \equiv \begin{bmatrix} \sigma_5 \\ \sigma_4 \\ v_3 \end{bmatrix}, \quad (2.36)$$

o que nos dá as equações de Zoeppritz descritas em (2.8), generalizadas para dimensão três, onde

$$\mathbf{i} = \begin{bmatrix} i_P \\ i_S \\ i_T \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r} = \begin{bmatrix} r_P \\ r_S \\ r_T \end{bmatrix}, \quad \mathbf{t} = \begin{bmatrix} t_P \\ t_S \\ t_T \end{bmatrix}, \quad (2.37)$$

e

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} n_{1P} & n_{1S} & n_{1T} \\ n_{2P} & n_{2S} & n_{2T} \\ -(c_{13}n_{1P} + c_{36}n_{2P})s_1 & -(c_{13}n_{1S} + c_{36}n_{2S})s_1 & -(c_{13}n_{1T} + c_{36}n_{2T})s_1 \\ -(c_{23}n_{2P} + c_{36}n_{1P})s_2 & -(c_{23}n_{2S} + c_{36}n_{1S})s_2 & -(c_{23}n_{2T} + c_{36}n_{1T})s_2 \\ -c_{33}n_{3P}s_{3P} & -c_{33}n_{3S}s_{3S} & -c_{33}n_{3T}s_{3T} \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} -(c_{55}s_1 + c_{45}s_2)n_{3P} & -(c_{55}s_1 + c_{45}s_2)n_{3S} & -(c_{55}s_1 + c_{45}s_2)n_{3T} \\ -(c_{55}e_{P1} + c_{45}n_{2P})s_{3P} & -(c_{55}n_{1S} + c_{45}n_{2S})s_{3S} & -(c_{55}n_{1T} + c_{45}n_{2T})s_{3T} \\ \\ -(c_{45}s_1 + c_{44}s_2)n_{3P} & -(c_{45}s_1 + c_{44}s_2)n_{3S} & -(c_{45}s_1 + c_{44}s_2)n_{3T} \\ -(c_{45}n_{1P} + c_{44}n_{2P})s_{3P} & -(c_{45}n_{1S} + c_{44}n_{2S})s_{3S} & -(c_{45}n_{1T} + c_{44}n_{2T})s_{3T} \\ \\ n_{3P} & n_{3S} & n_{3T} \end{bmatrix} .$$

$\mathbf{X}'$  e  $\mathbf{Y}'$  são como acima, exceto que com seus parâmetros dotados de apóstrofes. As matrizes  $\mathbf{X}$  e  $\mathbf{Y}$  dependem da densidade  $\rho$ , de todas seus parâmetros elásticos não nulos e das componentes horizontais de seu vetor de vagarosidade  $s_1$  e  $s_2$ , como pode ser visto nas equações de Christoffel. Entretanto, se  $s_2$  for nulo, por exemplo, as matrizes de impedância não mais dependerão de  $c_{22}$ ,  $c_{12}$  ou  $c_{26}$ . Como nos casos anteriores, enquanto os termos nas linhas correspondentes às velocidades são adimensionais, os termos nas linhas correspondentes às trações têm as dimensões da impedância. Os determinantes das matrizes de impedância são dados por

$$|\mathbf{X}| = c_{33} \begin{vmatrix} n_{1P} & n_{1S} & n_{1T} \\ n_{2P} & n_{2S} & n_{2T} \\ -s_{3P}n_{3P} & -s_{3S}n_{3S} & -s_{3T}n_{3T} \end{vmatrix} \quad (2.39)$$

$$|\mathbf{Y}| = (c_{44}c_{55} - c_{45}^2) \begin{vmatrix} s_{3P}n_{1P} & s_{3S}n_{1S} & s_{3T}n_{1T} \\ s_{3P}n_{2P} & s_{3S}n_{2S} & s_{3T}n_{2T} \\ n_{3P} & n_{3S} & n_{3T} \end{vmatrix} .$$

Observa-se que em dimensão três,  $|\mathbf{Y}|$  tem a dimensão de impedância. Os coeficientes,  $c_{33}$  de  $|\mathbf{X}|$  e  $c_{44}c_{55} - c_{45}^2$  de  $|\mathbf{Y}|$  são invariantes com relação à rotação do sistema de coordenada em torno do eixo  $x_3$ . A discussão da solução para (2.8), no caso isotrópico, se aplica também para o caso monoclinico, quando  $\mathbf{X}$  e  $\mathbf{Y}$  são dadas por (2.38). Neste caso inversões de matrizes  $3 \times 3$  são, agora, exigidas.

## 2.5 A PROPAGAÇÃO EM CAMADAS VIA MATRIZES DE IMPEDÂNCIA

A matriz de propagação para uma camada anisotrópica com um plano horizontal de simetria especular pode ser determinada em termos das matrizes de impedância dos meio. Seja uma camada anisotrópica, em geral, em dimensão três, ocupando a região  $x_{3t} < x_3 < x_{3b}$ . Para cada par de componentes horizontais  $s_1$  e  $s_2$  do vetor de vagarosidade  $\mathbf{s}$ , sejam  $\mathbf{X}$  e  $\mathbf{Y}$  as matrizes de impedância associadas à esta camada.

Sejam, também,  $\mathbf{d}$  e  $\mathbf{u}$  as amplitudes complexas das ondas descendentes (que se propagam na direção  $x_3$  positivo) e das ondas ascendentes (que se propagam na direção  $x_3$  negativo) com cada termo da fase vertical calculado em  $x_3 = 0$ , conforme a Figura (2.2). Para um meio com um plano horizontal de simetria especular, as componentes da velocidade e da tração podem ser escritas em termos de  $\mathbf{d}$  e  $\mathbf{u}$  na forma matricial como segue:

$$\mathbf{b}_X(x_3) \equiv \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \sigma_3 \end{bmatrix}_{x_3} = \mathbf{X}[\Lambda(x_3)\mathbf{d} + \Lambda^{-1}(x_3)\mathbf{u}] \quad (2.40)$$

$$\mathbf{b}_Y(x_3) \equiv \begin{bmatrix} \sigma_5 \\ \sigma_4 \\ v_3 \end{bmatrix}_{x_3} = \mathbf{Y}[\Lambda(x_3)\mathbf{d} - \Lambda^{-1}(x_3)\mathbf{u}] ,$$

onde

$$\Lambda(x_3) = \begin{bmatrix} \exp i\omega s_{3P}x_3 & 0 & 0 \\ 0 & \exp i\omega s_{3S}x_3 & 0 \\ 0 & 0 & \exp i\omega s_{3T}x_3 \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

e  $s_{3P}$ ,  $s_{3S}$  e  $s_{3T}$  são as três componentes verticais da vagarosidade para as ondas descendentes. Em vista da simetria horizontal, as componentes verticais para as ondas ascendentes são exatamente as suas simétricas. Aqui, uma onda P é uma onda primária, uma onda S, uma onda secundária e uma onda T, uma onda terciária, por conta do fato de que em meio anisotrópico, a polarização de cada onda se comporta bastante diferente daquelas das ondas compressional e cisalhante em meio isotrópico. Naturalmente, no caso de dimensão dois, ou seja, em um plano vertical de simetria do meio, não haverá a terceira onda e todas as matrizes de (2.40) serão matrizes 2x2. As duas equações em (2.40) podem ser combinadas, produzindo, então

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{b}_X \\ \mathbf{b}_Y \end{bmatrix}_{x_3} &= \begin{bmatrix} \mathbf{X}\Lambda & \mathbf{X}\Lambda^{-1} \\ \mathbf{Y}\Lambda & -\mathbf{Y}\Lambda^{-1} \end{bmatrix}_{x_3} \begin{bmatrix} \mathbf{d} \\ \mathbf{u} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} & -\mathbf{Y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & -\Lambda^{-1} \end{bmatrix}_{x_3} \begin{bmatrix} \mathbf{d} \\ \mathbf{u} \end{bmatrix} \\ &\equiv \mathbf{U}(x_3) \begin{bmatrix} \mathbf{d} \\ \mathbf{u} \end{bmatrix} . \end{aligned} \quad (2.42)$$

O vetor composto de  $\mathbf{d}$  e  $\mathbf{u}$  pode ser escrito em termos do vetor composto de  $\mathbf{b}_X$  e  $\mathbf{b}_Y$  em

$x_3 = x_{3t}$ , o topo da camada, como

$$\begin{bmatrix} \mathbf{d} \\ \mathbf{u} \end{bmatrix} = \mathbf{U}^{-1}(x_{3t}) \begin{bmatrix} \mathbf{b}_X \\ \mathbf{b}_Y \end{bmatrix}_{x_{3t}} \quad (2.43)$$

e a substituição de (2.43) em (2.42) para  $x_3 = x_{3b}$ , o fundo da camada, dá

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{b}_X \\ \mathbf{b}_Y \end{bmatrix}_{x_{3b}} &= \mathbf{U}(x_{3b})\mathbf{U}^{-1}(x_{3t}) \begin{bmatrix} \mathbf{b}_X \\ \mathbf{b}_Y \end{bmatrix}_{x_{3t}} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} & -\mathbf{Y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{\Lambda}(x_{3b} - x_{3t}) & 0 \\ 0 & \mathbf{\Lambda}^{-1}(x_{3b} - x_{3t}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}^{-1} & \mathbf{Y}^{-1} \\ \mathbf{X}^{-1} & -\mathbf{Y}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{b}_X \\ \mathbf{b}_Y \end{bmatrix}_{x_{3t}} \\ &\equiv \mathbf{Q}(x_{3b} - x_{3t}) \begin{bmatrix} \mathbf{b}_X \\ \mathbf{b}_Y \end{bmatrix}_{x_{3t}} \end{aligned} \quad (2.44)$$

$\mathbf{Q}$  é a matriz de propagação da camada, relacionando a velocidade e a tração do fundo da camada com a velocidade e a tração do seu topo.

Fazendo  $h = x_{3b} - x_{3t}$ , a espessura da camada, e lembrando que

$$[\mathbf{\Lambda}(h) + \mathbf{\Lambda}^{-1}(h)] / 2 = \begin{bmatrix} \cos(\omega s_{3P}h) & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\omega s_{3S}h) & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\omega s_{3T}h) \end{bmatrix} \equiv \mathbf{Cos}(h) \quad (2.45)$$

$$[\mathbf{\Lambda}(h) - \mathbf{\Lambda}^{-1}(h)] / 2 = \imath \begin{bmatrix} \sin(\omega s_{3P}h) & 0 & 0 \\ 0 & \sin(\omega s_{3S}h) & 0 \\ 0 & 0 & \sin(\omega s_{3T}h) \end{bmatrix} \equiv \imath \mathbf{Sin}(h) ,$$

onde  $\mathbf{Cos}(h)$  e  $\mathbf{Sin}(h)$  correspondem ao cosseno e seno matricial de  $\mathbf{\Lambda}(h)$ , respectivamente, obtém-se uma forma simples de escrever e de programar a matriz de propagação de cada camada,

$$\mathbf{Q}(h) = \begin{bmatrix} \mathbf{X}\mathbf{Cos}(h)\mathbf{X}^{-1} & \imath\mathbf{X}\mathbf{Sin}(h)\mathbf{Y}^{-1} \\ \imath\mathbf{Y}\mathbf{Sin}(h)\mathbf{X}^{-1} & \mathbf{Y}\mathbf{Cos}(h)\mathbf{Y}^{-1} \end{bmatrix} \quad (2.46)$$

A matriz  $\mathbf{Q}(h)$  é solução do sistema linear de equações diferenciais na velocidade e na tração, que governa a propagação de ondas harmônicas no meio e que tem a forma

$$\frac{\partial}{\partial x_3} \begin{bmatrix} \mathbf{b}_X \\ \mathbf{b}_Y \end{bmatrix} = \imath\omega \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{X}\mathbf{S}\mathbf{Y}^{-1} \\ \mathbf{Y}\mathbf{S}\mathbf{X}^{-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{b}_X \\ \mathbf{b}_Y \end{bmatrix} \quad (2.47)$$

A sua solução formal é dada por

$$\mathbf{Q}(h) = \exp \omega h \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{XSY}^{-1} \\ \mathbf{YSX}^{-1} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (2.48)$$

onde  $\mathbf{S}$  é a matriz

$$\mathbf{S} \equiv \begin{bmatrix} s_{3P} & 0 & 0 \\ 0 & s_{3S} & 0 \\ 0 & 0 & s_{3T} \end{bmatrix}. \quad (2.49)$$

Esta solução pode ser expressa através de expansão em série de potências, resultando, portanto, na matriz (2.46).

Para o caso de camada fina, isto é, se a propagação é tal que  $\omega h s_3 \ll 1$  para todas as ondas no problema,

$$\mathbf{Q}(h) \approx \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \omega h \mathbf{XSY}^{-1} \\ \omega h \mathbf{YSX}^{-1} & \mathbf{I} \end{bmatrix}. \quad (2.50)$$

A matriz  $\mathbf{Q}(h)$  acima corresponde à aproximação de primeira ordem em  $\omega$ , da solução formal (2.48). O cálculo das soluções independentes (a partir das equações do movimento e das relações constitutivas) produz  $\mathbf{XSY}^{-1}$  e  $\mathbf{YSX}^{-1}$ , que são dadas por

$$\mathbf{XSY}^{-1} = \begin{bmatrix} -1/c_{55} & -s_1 \\ -s_1 & -\rho \end{bmatrix} \quad (2.51)$$

$$\mathbf{YSX}^{-1} = \begin{bmatrix} -\rho + (c_{11} - c_{13}^2/c_{33})s_1^2 & -s_1 c_{13}/c_{33} \\ -s_1 c_{13}/c_{33} & -1/c_{33} \end{bmatrix},$$

para o caso de dimensão dois e

$$\mathbf{XSY}^{-1} = \begin{bmatrix} -c_{44}/(c_{44}c_{55} - c_{45}^2) & -c_{45}/(c_{44}c_{55} - c_{45}^2) & -s_1 \\ -c_{45}/(c_{44}c_{55} - c_{45}^2) & -c_{55}/(c_{44}c_{55} - c_{45}^2) & -s_2 \\ -s_1 & -s_2 & -\rho \end{bmatrix} \quad (2.52)$$

$$\mathbf{YSX}^{-1} = \begin{bmatrix} -\rho + d_{11}s_1^2 + 2d_{16}s_1s_2 + d_{66}s_2^2 & d_{16}s_1^2 + (d_{12} + d_{66})s_1s_2 + d_{26}s_2^2 & -(s_1c_{13} + s_2c_{36})/c_{33} \\ d_{16}s_1^2 + (d_{12} + d_{66})s_1s_2 + d_{26}s_2^2 & -\rho + d_{66}s_1^2 + 2d_{26}s_1s_2 + d_{22}s_2^2 & -(s_1c_{36} + s_2c_{23})/c_{33} \\ -(s_1c_{13} + s_2c_{36})/c_{33} & -(s_1c_{36} + s_2c_{23})/c_{33} & -1/c_{33} \end{bmatrix},$$

onde  $d_{ij} \equiv c_{ij} - c_{i3}c_{3j}/c_{33}$ ,  $i, j = 1, 2$  ou  $6$ , para o caso de dimensão três.

Para todos os casos de simetria horizontal,  $\mathbf{XSY}^{-1}$  e  $\mathbf{YSY}^{-1}$  são matrizes simétricas. Sua forma nos dá as matrizes de propagação aproximadas sem a necessidade de se avaliar as componentes da matriz  $\mathbf{S}$  ou seus autovetores associados.

Além do mais, se a estratificação é formada de  $N$  camadas finas com espessura  $h_i$  cada uma, numerada de 1 a  $N$  a partir do topo e com espessura total  $H = \sum_{i=1}^N h_i$ , a matriz de propagação para este conjunto de  $N$  camadas, para cada  $\omega$ , é dada por

$$Q(H) \approx \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \omega H \langle \mathbf{XSY}^{-1} \rangle \\ \omega H \langle \mathbf{YSX}^{-1} \rangle & \mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad (2.53)$$

onde  $\langle \cdot \rangle$  denota a média ponderada pelas espessuras de cada camada.

## 2.6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho pretende ser um guia através do labirinto da refletividade em meios anisotrópicos. Uma formulação geral e eficiente para a reflexão e transmissão de ondas planas em interfaces que separam meios elásticos é obtida para meios anisotrópicos, seguindo-se de cálculos diretos da refletividade e da transmissividade em duas e dimensão três. Em todos os casos, as fórmulas das matrizes de reflexão e transmissão são idênticas àquelas dadas em (2.11) ou nas suas formas alternativas. Assim sendo, todos os problemas da refletividade anisotrópica quando o meio tem pelo menos um plano horizontal de simetria especular, têm a mesma solução explícita em termos das matrizes de impedância, que podem ser usadas, também, de maneira conveniente, na obtenção das matrizes de propagação de camadas em meios anisotrópicos. Observa-se que em uma interface flúido-sólido anisotrópico, os coeficientes de reflexão e transmissão podem ser calculados simplesmente fazendo as matrizes de impedância do meio flúido serem aquelas para um meio isotrópico e fazendo a velocidade cisalhante se aproximar de zero. Analogamente, os coeficientes de reflexão em uma superfície livre de um meio anisotrópico pode ser calculado fazendo as matrizes de impedância do meio de transmissão serem aquelas de um meio isotrópico, fazendo  $\rho'$  ir a zero e/ou  $\alpha'$ ,  $\beta'$  também irem a zero.

Isto não significa, entretanto, que tudo sobre o problema direto da refletividade e da transmissividade estejam aqui explicados ou que a obtenção dos coeficientes de reflexão e transmissão não tenham ainda sido computados anteriormente (ROKHLIN et al., 1989). Entretanto, existem ainda muitos aspectos do problema não muito claros, especialmente no caso de dimensão três. Eles incluem: a) o efeito nas ou próximo das raízes múltiplas da equação de vagariedade, isto é, aquelas que anulam o determinante da matriz  $\Gamma - \rho\mathbf{I}$  em (2.33), para  $s_3^2$ ; b) como tratar precisamente as regiões de triplicação, particularmente quando estas regiões estão naquelas de reflexão ou transmissão crítica e c) como caracterizar inteiramente as possíveis regiões de comportamento pós-crítico em dimensão três. A potencialidade do formalismo é que o comportamento completo da reflexão em um meio anisotrópico está embutido

nas suas duas matrizes de impedância tomadas como função das componentes horizontais do vetor de vagarosidade. Certamente, ele ajudará na tremenda tarefa de se determinar as informações contidas nos dados de amplitude versus afastamento (AVO) e azimute (AVA) e na extração destas informações.

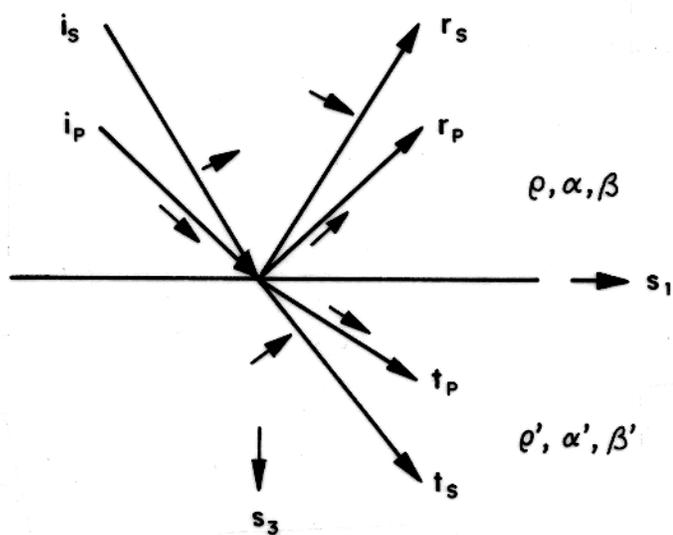


Figura 2.1 - Vetores de vaguesidade das ondas produzindo o campo total de onda em cada componente horizontal  $s_1$  em uma interface plana. Os vetores unitários de polarização são identificados pelas setas menores; as letras com subscritos P ou S são as amplitudes das ondas.

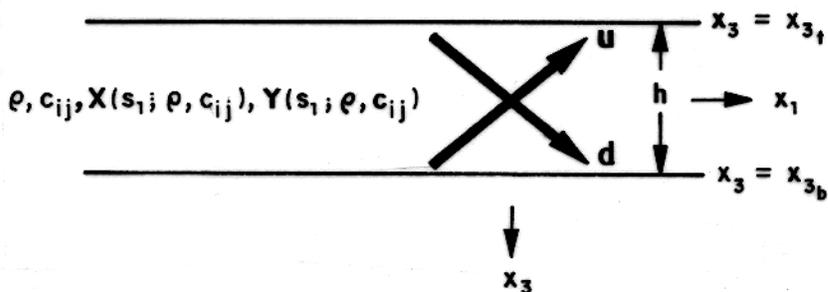


Figura 2.2 - Diagrama esquemático das ondas descendentes, com setas maiores  $d$  e das ondas ascendentes, com setas maiores  $u$ , em uma camada de espessura  $h$ .

### 3 - A OBTENÇÃO DE MEIOS QUASI-EQUIVALENTES

#### 3.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Neste capítulo, é apresentado um estudo do comportamento da amplitude da reflexão de uma onda P, incidente em um meio isotrópico, que se sobrepõe a um meio anisotrópico, com propagação em seu plano de simetria. É desenvolvida uma análise para a obtenção de meios quasi-equivalentes para este tipo de experimento. Isto significa que o meio anisotrópico pode ser substituído por outro meio isotrópico, sem mudanças significativas nas amplitudes das ondas P refletidas, dentro da precisão das medidas, pelo menos em propagação pré-crítica. A obtenção exata de tais meios para o caso da reflexão de ondas SH, considerando-se meios anisotrópicos mais gerais onde este tipo de propagação é possível, foi feita por SCHOENBERG & COSTA (1991). Uma extensão para o caso acoplado qP-qSV foi desenvolvido por PROTÁZIO & SCHOENBERG (1991) considerando-se meios no máximo ortorrômbicos e com propagação em seu plano de simetria. Meios quasi-equivalentes foram obtidos através de ajustes sobre os coeficientes de reflexão da onda P, via um critério de mínimos quadrados. É observado, nos casos estudados, um ajuste praticamente exato dentro dos limites de precisão das medidas, mesmo considerando-se grandes aberturas angulares e meios com forte anisotropia. Do ponto de vista cinemático, estudos anteriores mostram a existência de tais meios equivalentes. A insensibilidade de certos atributos como tempo de trânsito e NMO, por exemplo, à presença de anisotropia, considerando-se experimentos de pequena abertura angular, foi analisada por BANIK (1987).

No presente estudo é, então, investigada a precisão dos ajustes que determinam os meios quasi-equivalentes, dentro dos limites dos meios ortorrômbicos geologicamente plausíveis, em seus planos de simetria. É ressaltada a importância do parâmetro elástico  $c_{13}$  na análise destes resultados. Este parâmetro tem grande influência no grau de anelipticidade da curva de vagariedade da onda qP e sua combinação com outros parâmetros determina a convexidade ou não da curva de vagariedade da onda qSV bem como o comportamento das polarizações das ondas. Se  $c_{13} + c_{55} < 0$ , por exemplo, ocorre o que se chama de polarização anômala (HELBIG & SCHOENBERG, 1987).

Na primeira seção, as curvas de vagariedade das ondas qP e qSV são apresentadas em termos dos parâmetros  $C$ ,  $\epsilon_A$ ,  $\epsilon_P$  e  $\gamma$ , descritos em SCHOENBERG (1993). A seguir, são

feitas interpretações geométricas sobre estas curvas em termos destes parâmetros, no sentido de caracterizar a sua convexidade. Na segunda seção, é, então, formalizado o problema de mínimos quadrados para a obtenção dos chamados meios quasi-equivalentes. Primeiro, é estudado o efeito da variação do parâmetro  $\epsilon_A$  nos ajustes obtidos. Segundo, o comportamento da velocidade equivalente é também analisado bem como o efeito da variação do meio incidente superior. Finalmente, na terceira seção, resultados numéricos são, então apresentados. Observa-se que, mesmo para meios com forte anisotropia, os meios quasi-equivalentes obtidos ajustam os coeficientes de reflexão muito bem. É verificada a ocorrência de um meio anisotrópico com ajuste praticamente perfeito, que, em geral, se mostra bastante distinto de um meio elíptico.

### 3.2 PARÂMETROS DE SCHOENBERG E AS CURVAS DE VAGAROSIDADE

Nesta seção, as chamadas curvas de vagarosidade são apresentadas e, então, reparametrizadas pelos chamados parâmetros de Schoenberg. Interpretações geométricas destes parâmetros são discutidos no sentido de melhor se entender o comportamento da propagação de ondas em meios ortorrômbicos através de seus planos de simetria. Para a obtenção destas curvas, é considerada uma onda com polarização unitária  $(\sin \phi, \cos \phi)^t$ , sendo  $\phi$ , a direção de polarização e  $^t$ , a operação de transposição de um vetor. Tomando  $\theta$  como o ângulo de fase, que especifica a direção do vetor de vagarosidade  $(s_1, s_3)^t$ , suas componentes são obtidas por:

$$\begin{aligned} s_1(\theta) &= \frac{\sin \theta}{v(\theta)} \\ s_3(\theta) &= \frac{\cos \theta}{v(\theta)}, \end{aligned} \quad (3.1)$$

sendo  $v(\theta)$  a velocidade de fase da onda considerada.

A substituição de (3.1) em (2.24), nos leva ao sistema

$$\begin{bmatrix} c_{11} \sin^2 \theta + c_{55} \cos^2 \theta - \rho v^2(\theta) & (c_{13} + c_{55}) \sin \theta \cos \theta \\ (c_{13} + c_{55}) \sin \theta \cos \theta & c_{55} \sin^2 \theta + c_{33} \cos^2 \theta - \rho v^2(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin \phi \\ \cos \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.2)$$

A equação (3.2) apresenta duas soluções  $v_{qP}(\theta)$  e  $v_{qSV}(\theta)$ , com  $v_{qP} \leq v_{qSV}(\theta)$ , onde  $v_{qP}(\theta)$  corresponde à chamada velocidade de fase da onda qP e  $v_{qSV}(\theta)$ , à velocidade de fase da onda qSV. As curvas de vagarosidade correspondentes a cada tipo de onda são definidas, em coordenadas polares, por:

$$s_{qP}(\theta) = \frac{1}{v_{qP}(\theta)}$$

$$s_{qSV}(\theta) = \frac{1}{v_{qSV}(\theta)} \quad (3.3)$$

Estas equações descrevem todo o comportamento da propagação das ondas qP e qSV. Para melhor entender o comportamento destas curvas, SCHOENBERG (1993) definiu alguns parâmetros anisotrópicos que permitem simplificar as expressões em (3.3) e dar uma melhor interpretação física e geométrica à propagação das ondas qP e qSV. Estes parâmetros são definidos por:

$$\begin{aligned} C &\equiv \frac{(c_{11} + c_{33})}{2} \\ \gamma &\equiv \frac{c_{55}}{C} \\ \epsilon_P &\equiv \frac{(c_{11} - c_{33})}{2C} \\ \epsilon_A &\equiv \frac{E^2}{(c_{11} - c_{55})(c_{33} - c_{55})} \end{aligned} \quad (3.4)$$

onde  $E^2$  é o parâmetro anisotrópico definido em (2.26). O parâmetro  $C$  tem a mesma dimensão dos parâmetros elásticos, enquanto os outros parâmetros são adimensionais.

As seguintes limitações físicas são obtidas para os parâmetros  $\epsilon_P$  e  $\epsilon_A$ :

$$|\epsilon_P| < 1 \quad \text{e} \quad -2\gamma \frac{1 + \sqrt{1 - \epsilon_P^2}}{(1 - \gamma)^2 - \epsilon_P^2} < \epsilon_A < 1. \quad (3.5)$$

Em termos destes novos parâmetros, as velocidades  $v_{qP}$  e  $v_{qSV}$  são então determinadas por:

$$\begin{aligned} v_{qP}^2(\theta) &= \frac{C}{2} \left\{ (1 + \gamma - \epsilon_P \cos 2\theta) + \sqrt{(1 - \gamma - \epsilon_P \cos 2\theta)^2 - [\epsilon_P^2 - (1 - \gamma)^2] \epsilon_A \sin^2 2\theta} \right\} \\ v_{qSV}^2(\theta) &= \frac{C}{2} \left\{ (1 + \gamma - \epsilon_P \cos 2\theta) - \sqrt{(1 - \gamma - \epsilon_P \cos 2\theta)^2 - [\epsilon_P^2 - (1 - \gamma)^2] \epsilon_A \sin^2 2\theta} \right\}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Como se observa em (3.6), o parâmetro  $C$  é apenas um fator de escala, não interferindo na forma das curvas de vagarosidade. O parâmetro  $\epsilon_A$  é o único a carregar a dependência do parâmetro  $c_{13}$ . Nos eixos  $s_1$  e  $s_3$  ( $\theta = 90^\circ$  e  $\theta = 0^\circ$ , respectivamente) as velocidades  $v_{qP}$  e  $v_{qSV}$  independem de  $\epsilon_A$ , devendo sua interpretação ser feita nas direções fora destes eixos. Nestas direções, verifica-se de (3.6), que para  $\epsilon_A = 0$ , a curva de vagarosidade da onda qSV é um círculo, enquanto que a da onda qP é uma elipse. Tais meios são conhecidos como elípticos. Observe que neste caso, o parâmetro  $\epsilon_P$  controla a elipticidade da curva de vagarosidade da

onda qP. Para  $\epsilon_A > 0$ , (3.6) nos diz que  $v_{qP}(\theta)$  diminui em relação ao seu valor em  $\epsilon_A = 0$ , enquanto  $v_{qSV}(\theta)$  aumenta. Para  $\epsilon_A < 0$ , ocorre exatamente o contrário. Este tipo de efeito nos leva a concluir que  $\epsilon_A$  controla não apenas a anelipticidade da onda qP, mas também a convexidade da onda qSV. Para um meio TI equivalente a finas estratificações isotrópicas em limite quasi-estático, o parâmetro  $\epsilon_A$  é positivo (SCHOENBERG, 1993), enquanto para um meio TI equivalente a modelo isotrópico com fraturas paralelas, o sinal de  $\epsilon_A$  é o mesmo de  $Z_T - Z_N$ , onde  $Z_T$  é a compliância tangencial e  $Z_N$ , a compliância normal (SCHOENBERG & MUIR, 1989). A Figura 3.1 nos mostra o comportamento das curvas de vazarosidade das ondas qP e qSV. Em vista da simetria destas curvas, sua apresentação foi feita apenas no primeiro quadrante. Foram fixados os parâmetros  $C = 15 \times 10^{10} N/m^2$ ,  $\epsilon_P = 0,3$  e  $\gamma = 0,25$ . As curvas em linhas contínuas correspondem a  $\epsilon_A = 0$ , as em linhas pontilhadas a  $\epsilon_A = -0,5$  e as em linhas tracejadas a  $\epsilon_A = 0,5$ .

### 3.3 MEIOS REFLETORES ISOTRÓPICOS QUASI-EQUIVALENTES

A obtenção de meios isotrópicos que substituam meios anisotrópicos sem alterar as amplitudes da reflexão foi resolvida de forma exata por SCHOENBERG & COSTA (1991) para o caso da reflexão de ondas SH em meios monoclinicos em seu plano de simetria. Isto mostra que experimentos envolvendo a reflexão de ondas SH são insensíveis à presença de alguns tipos de anisotropia, como por exemplo, o caso monoclinico.

A extensão deste problema para o caso acoplado qP-qSV foi investigada numericamente por PROTÁZIO & SCHOENBERG (1991). Para isto, foram considerados dois meios separados por uma interface horizontal, um isotrópico denominado  $M_{ISO}$  com densidade  $\rho$  e velocidades  $\alpha$  e  $\beta$  e outro, anisotrópico, denominado  $M_{ANI}$ , com densidade  $\bar{\rho}$  e parâmetros elásticos  $c_{11}$ ,  $c_{13}$ ,  $c_{33}$  e  $c_{55}$ . Supondo uma onda P incidindo no meio  $M_{ISO}$  e  $R_{pp}$  o seu coeficiente de reflexão, o problema é obter outro meio isotrópico, que denotaremos por  $M_{EQ}$ , com densidade  $\rho_{eq}$  e velocidades  $\alpha_{eq}$  e  $\beta_{eq}$  de tal maneira que substituindo  $M_{ANI}$  por  $M_{EQ}$ , o novo coeficiente de reflexão  $R_{pp_{eq}}$  seja o mesmo que  $R_{pp}$ , para incidência pré-crítica. Admitindo-se a igualdade dos dois coeficientes na incidência normal e também dos dois primeiros ângulos críticos, foram obtidas soluções explícitas para  $\rho_{eq}$  e  $\alpha_{eq}$ , independentes do meio incidente  $M_{ISO}$ . Estas soluções são dadas por:

$$\begin{aligned} \alpha_{eq} &= \sqrt{\frac{c_{11}}{\bar{\rho}}} \\ \rho_{eq} &= \bar{\rho} \sqrt{\frac{c_{33}}{c_{11}}} \end{aligned} \quad (3.7)$$

A solução para  $\beta_{eq}$  não foi obtida de forma exata mas através do problema de minimização. Ele corresponde à velocidade  $\beta$  que minimiza o funcional

$$\int_0^{\theta_c} |R_{pp}(\theta) - R_{pp_{eq}}(\theta, \beta)|^2 d\theta, \quad (3.8)$$

onde  $\theta_c$  é o primeiro ângulo crítico relacionado à reflexão da onda P. Uma ilustração do problema é a apresentada na Figura 3.2.

Para  $M_{ISO}$  e  $M_{ANI}$  fixos, foi obtido um meio  $M_{EQ}$ , chamado quasi-equivalente, que ajusta muito bem os coeficientes de reflexão, mesmo considerando-se experimentos com amplos ângulos de incidência ou meios com forte anisotropia.

Foi obtida também solução para o problema de achar a velocidade  $\beta$  que minimiza o funcional

$$\int_0^{\theta_c} |R_{pp}(\theta) - R_{pp_{eq}}(\theta, \beta)| d\theta, \quad (3.9)$$

mas o resultado pouco diferiu do anterior, não sendo, portanto, aqui considerado.

Neste trabalho são investigadas algumas propriedades destes meios quasi-equivalentes. Primeiramente, é estudado o efeito da variação do parâmetro  $\epsilon_A$  e, portanto, de  $c_{13}$ , na qualidade dos ajustes encontrados na obtenção destes meios. Para isto, são fixados os parâmetros  $C$ ,  $\gamma$  e  $\epsilon_P$  geologicamente significativos e variando o parâmetro  $\epsilon_A$ . O comportamento do desvio padrão do ajuste e da velocidade  $\beta_{eq}$  dos meios quasi-equivalentes são, então, analisados. Posteriormente, é feita também uma análise do efeito da variação do meio incidente  $M_{ISO}$ . Para isto, é fixado um meio anisotrópico  $M_{ANI}$  e vários meios quasi-equivalentes  $M_{EQ}$  são obtidos, tomando-se diferentes meios incidentes  $M_{ISO}$ .

### 3.4 EXPERIMENTOS NUMÉRICOS E ANÁLISE DOS RESULTADOS

Inicialmente, é apresentado um exemplo bastante significativo que mostra a obtenção do meio isotrópico quasi-equivalente. O meio  $M_{ISO}$  foi escolhido tomando-se  $\rho = 1g/cm^3$ ,  $\alpha = 1,7321km/s$  e  $\beta = 1km/s$ . O meio  $M_{ANI}$  foi escolhido tomando-se  $\bar{\rho} = 1g/cm^3$ ,  $c_{11} = 9,6 \times 10^{10}N/m^2$ ,  $c_{13} = 3,5846 \times 10^{10}N/m^2$ ,  $c_{33} = 6,4 \times 10^{10}N/m^2$  e  $c_{55} = 1,6 \times 10^{10}N/m^2$ . Em termos dos parâmetros de Schoenberg, temos  $C = 8 \times 10^{10}N/m^2$ ,  $\gamma = 0,2$ ,  $\epsilon_P = 0,2$  e  $\epsilon_A = 0,3$ , que determinam uma forte anisotropia. O meio  $M_{EQ}$  obtido é definido por  $\rho_{eq} = 0,8165g/cm^3$ ,  $\alpha_{eq} = 3,0984km/s$  e  $\beta_{eq} = 1,5234km/s$ . O desvio padrão deste experimento é 0,0019. A Figura 3.3 mostra as curvas de vagarosidade dos meios  $M_{ISO}$  e  $M_{ANI}$  correspondente a este experimento enquanto que na Figura 3.4, são apresentados os gráficos

da parte real dos coeficientes  $R_{pp}$  e  $R_{ppeq}$ . Observa-se um ajuste praticamente perfeito entre os dois coeficientes, mesmo para grandes aberturas, incluídas, aí, incidências pós crítica.

Posteriormente, no estudo do efeito dos diversos parâmetros de Schoenberg na precisão dos ajustes que determinam os meios quasi-equivalentes, o parâmetro  $C = 15 \times 10^{10} N/m^2$  foi escolhido por representar um valor geologicamente razoável. Para o parâmetro  $\gamma$ , escolhemos os valores 0,25 e 0,35 enquanto para o parâmetro  $\epsilon_P$ , escolhemos os valores 0,2 e 0,3, todos geologicamente razoáveis. A variação de  $\epsilon_A$  foi tomada no intervalo de validade física definida em (3.5). A Figura 3.5 mostra, em função do parâmetro  $\epsilon_A$ , o desvio padrão dos ajustes obtidos para os diversos casos. Observa-se, em todos os casos, mesmo para meios com forte anisotropia, a ocorrência de ajustes muito bons e, mais importante ainda, a ocorrência de um meio onde o ajuste é ótimo. Observa-se, também, que o maior desvio do ajuste ocorre exatamente para  $\epsilon_A = 1$ , que corresponde exatamente ao meio em que as duas curvas de vagariedade se interceptam. Na Figura 3.6, a dependência de  $\beta_{eq}$  com relação a  $\epsilon_A$  é mostrada, para os casos acima descritos. Observa-se um comportamento praticamente linear da referida velocidade em quase todos os valores de  $\epsilon_A$ .

Finalmente, para analisar o efeito do meio isotrópico incidente  $M_{ISO}$ , foi fixado um meio  $M_{ANI}$ , no caso  $C = 15 \times 10^{10} N/m^2$ ,  $\gamma = 0,25$ ,  $\epsilon_P = 0,3$ . Foi então estudado o comportamento dos ajustes para para os valores  $\chi = 0,5; 0,4; 0,3333; 0,2857; 0,25$  e  $0,222$  com

$$\chi = \frac{\beta^2}{\alpha^2} \quad (3.10)$$

e  $\alpha$  e  $\beta$ , as velocidades do meio isotrópico incidente. A Figura 3.7 mostra o gráfico do desvio padrão para os vários meios incidentes. Observa-se que exatamente no meio de mínimo desvio, o desvio padrão praticamente independe dos valores de  $\chi$ . Com relação à velocidade  $\beta_{eq}$ , é verificada a sua absoluta independência com relação à variação do meio incidente  $M_{ISO}$ .

### 3.5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Foram obtidos meios isotrópicos que se comportam de forma quasi-equivalente a meios TI ou ortorrômbicos, em propagação nos seus planos de simetria, com relação à reflexão de ondas P, via um critério de mínimos quadrados, sobre os seus coeficientes de reflexão. Observa-se, a partir destes resultados, que: a) mesmo para incidência com amplas aberturas angulares e para meios com forte anisotropia, os ajustes se mostraram muito bons, dentro dos limites de precisão das medidas; b) foi verificada, também, a ocorrência de meios onde estes ajustes se mostram ótimos. Estes meios, no caso de maior anelipticidade da onda P, apresentam-se bastante diferentes dos meios elípticos e c) foi constatada uma total independência do meio

isotrópico incidente, com relação à determinação da velocidade de cisalhamento do meio quasi-equivalente.

Estes resultados permitem as seguintes conclusões: a) apenas com a amplitude da reflexão de ondas P, não é possível o diagnóstico da presença de anisotropia no meio, pelo menos nos casos considerados neste estudo e b) ressalta, ainda, a importância essencial das ondas S para este tipo de diagnóstico. As polarizações transversais destas ondas e o importante fenômeno da birrefringência, tornam-nas fontes de interessantes investigações, no sentido de um melhor entendimento do espalhamento de ondas através de meios anisotrópicos.

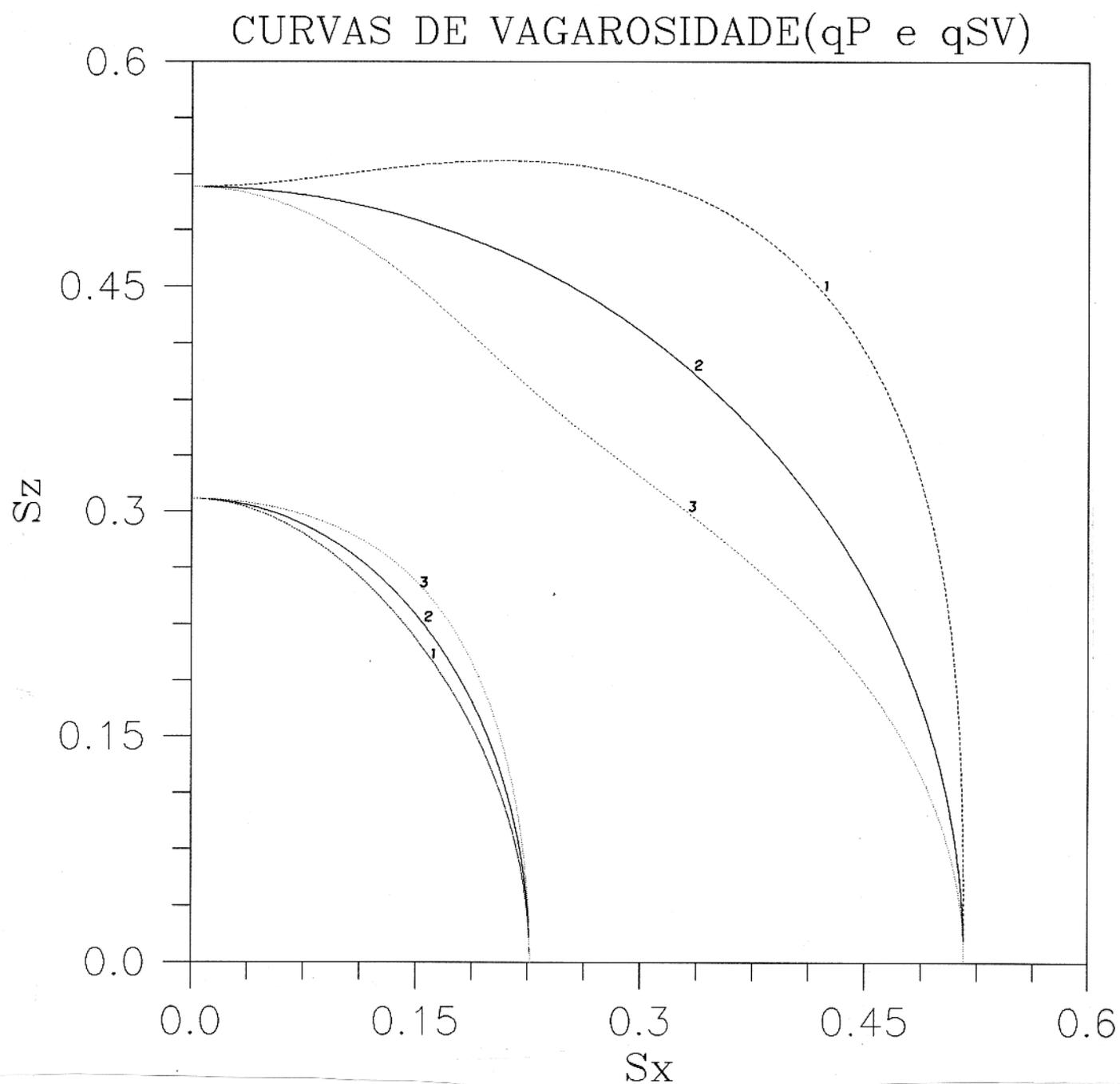
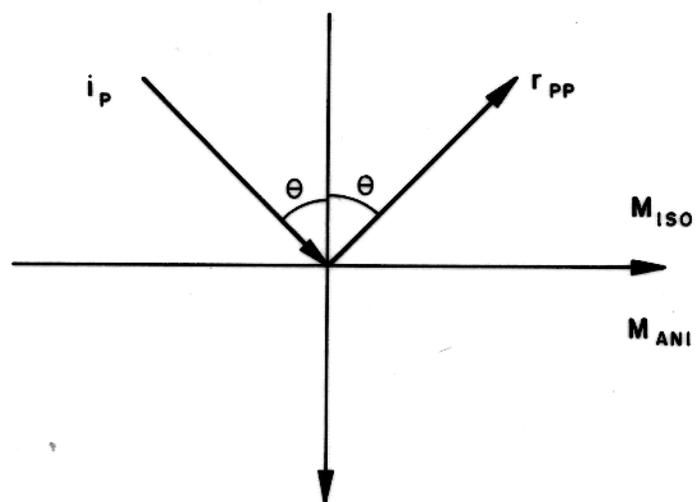
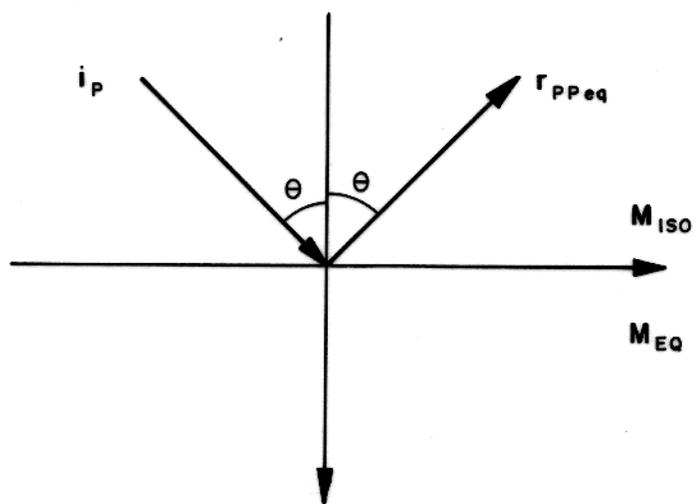


Figura 3.1 - Curvas de vagarosidade para um meio TI com  $C = 15 \times 10^{10} N/m^2$ ,  $\epsilon_P = 0,3$ ,  $\gamma = 0,25$  e  $\epsilon_A = -0,5$  (curva 1),  $\epsilon_A = 0$  (curva 2) e  $\epsilon_A = 0,5$  (curva 3).



(a)



(b)

Figura 3.2 - Ilustração do problema da obtenção de meio quasi-equivalente para o caso acoplado qP e qSV. A figura (a) ilustra a obtenção do coeficiente  $r_{PP}$ ; a figura (b), a do coeficiente  $r_{PPEq}$ .

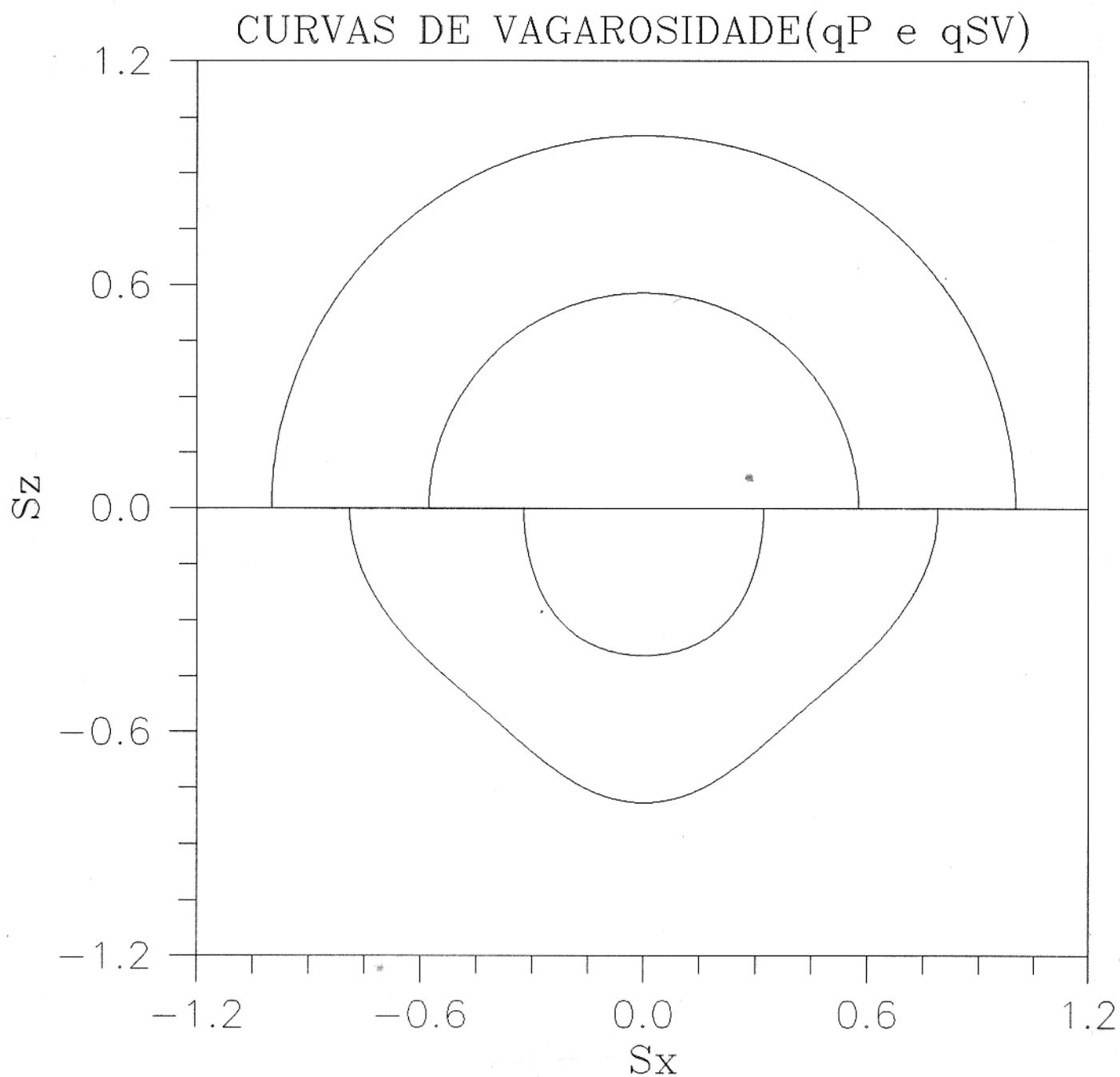


Figura 3.3 - As curvas de vagarosidade do meio isotrópico  $M_{ISO}$  ( $\rho = 1g/cm^3$ ,  $\alpha = 1,7321km/s$  e  $\beta = 1km/s$  que se sobrepõe ao meio  $TI$  ( $\rho = 1g/cm^3$ ,  $c_{11} = 9,6 \times 10^{10} N/m^2$ ,  $c_{13} = 3,5846 \times 10^{10} N/m^2$ ,  $c_{33} = 6,4 \times 10^{10} N/m^2$  e  $c_{55} = 1,6 \times 10^{10} N/m^2$ ). Observe o alto grau de anisotropia do meio  $TI$ .

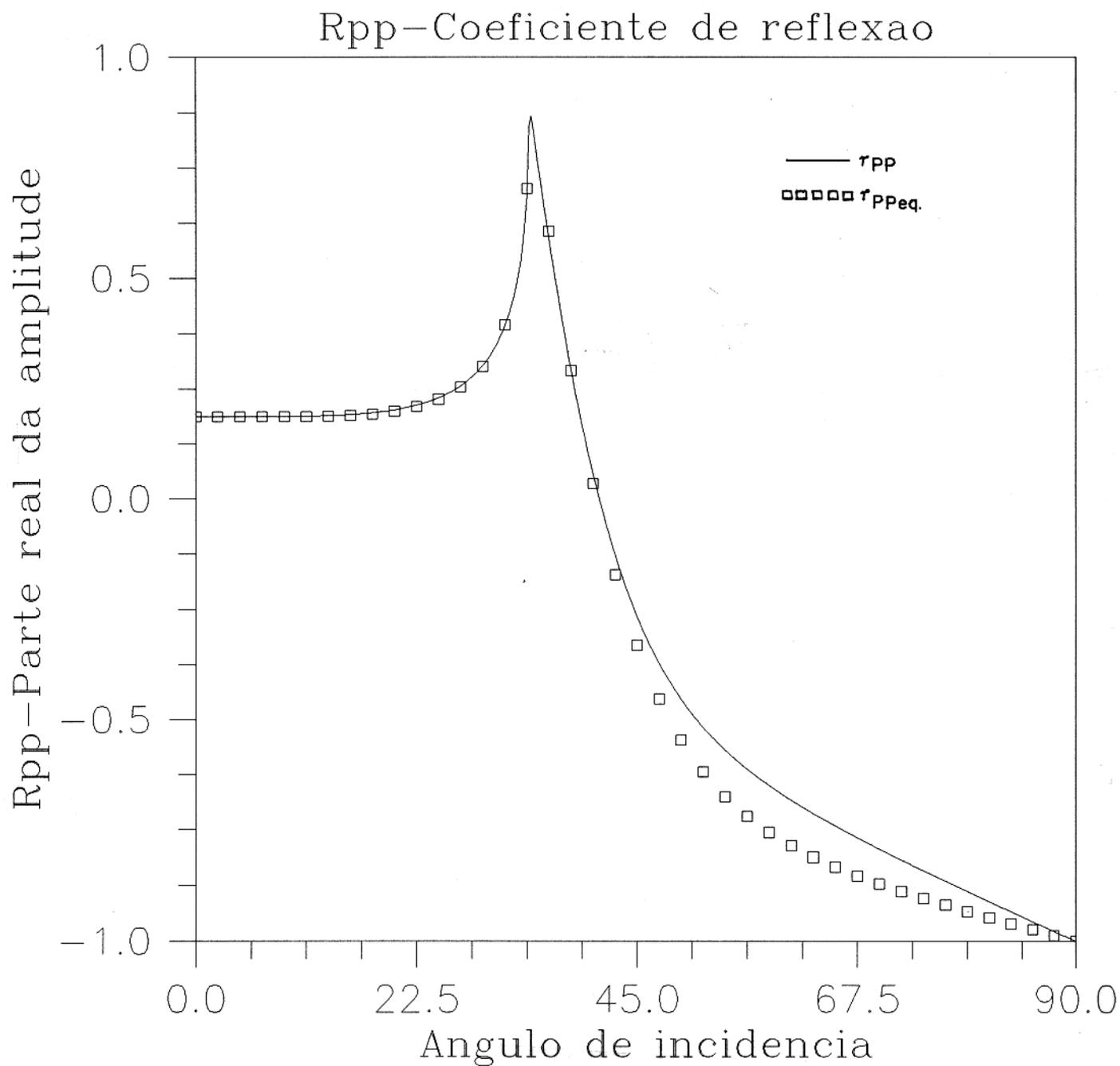


Figura 3.4 - As partes reais dos coeficientes  $r_{pp}$  e  $r_{ppeq}$ . Observa-se um perfeito ajuste entre os dois coeficientes mesmo para incidência pós-crítica.

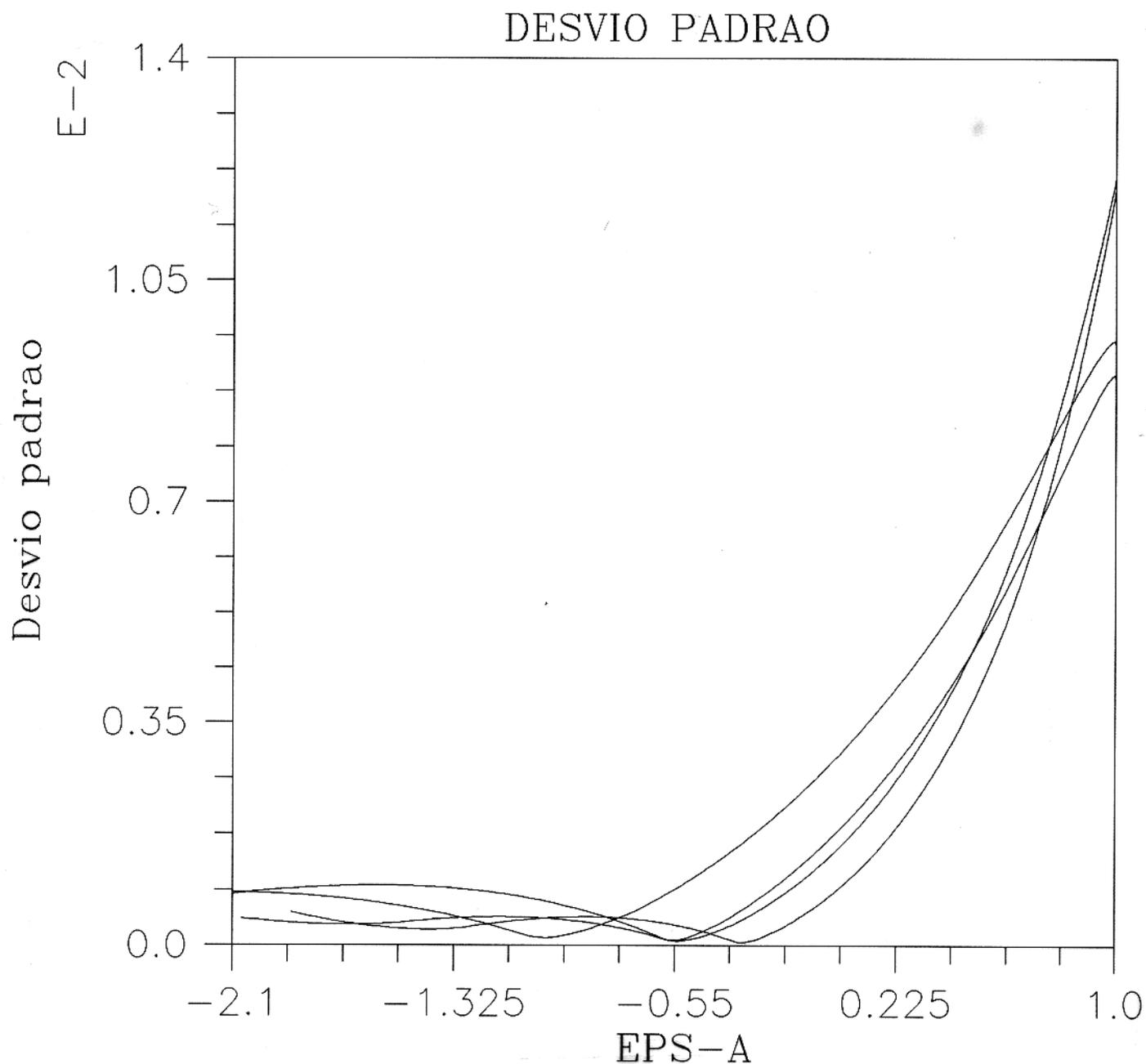


Figura 3.5 - O desvio padrão dos ajustes obtidos na determinação de meios quasi-equivalentes, em termos do parâmetro anisotrópico  $\epsilon_A$ . São considerados os meios *TI* com  $C = 15 \times 10^{10} N/m^2$ ,  $\epsilon_P = 0,2 ; 0,3$  e  $\gamma = 0,25 ; 0,35$ . Os meios obtidos se ajustam muito bem e se observa a ocorrência de um meio com ajuste ótimo.

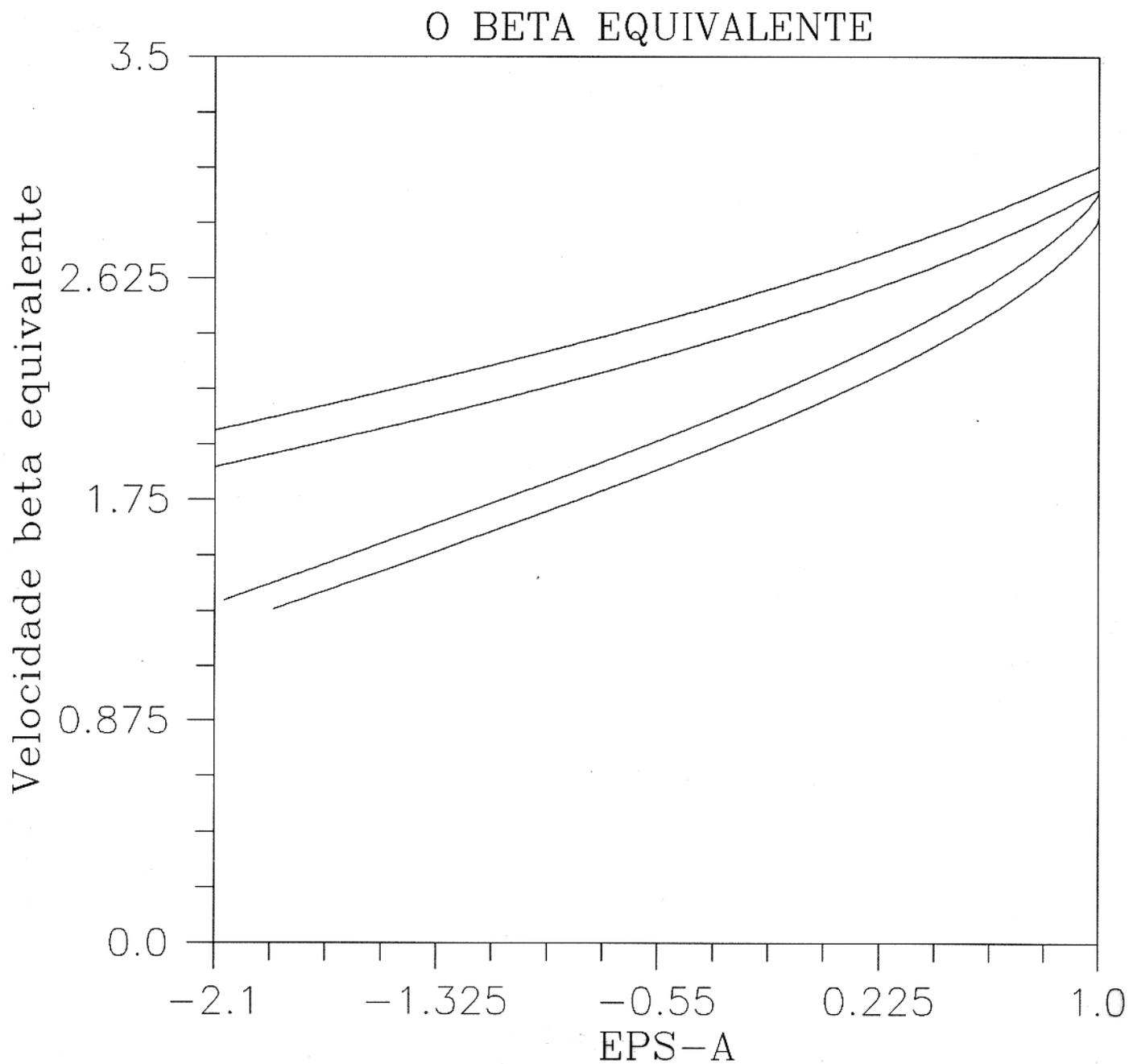


Figura 3.6 - O comportamento da velocidade  $\beta_{eq}$  em termos do parâmetro anisotrópico  $\epsilon_A$  para os mesmos meios considerados na figura 5. Observa-se um comportamento praticamente linear de tais velocidades.

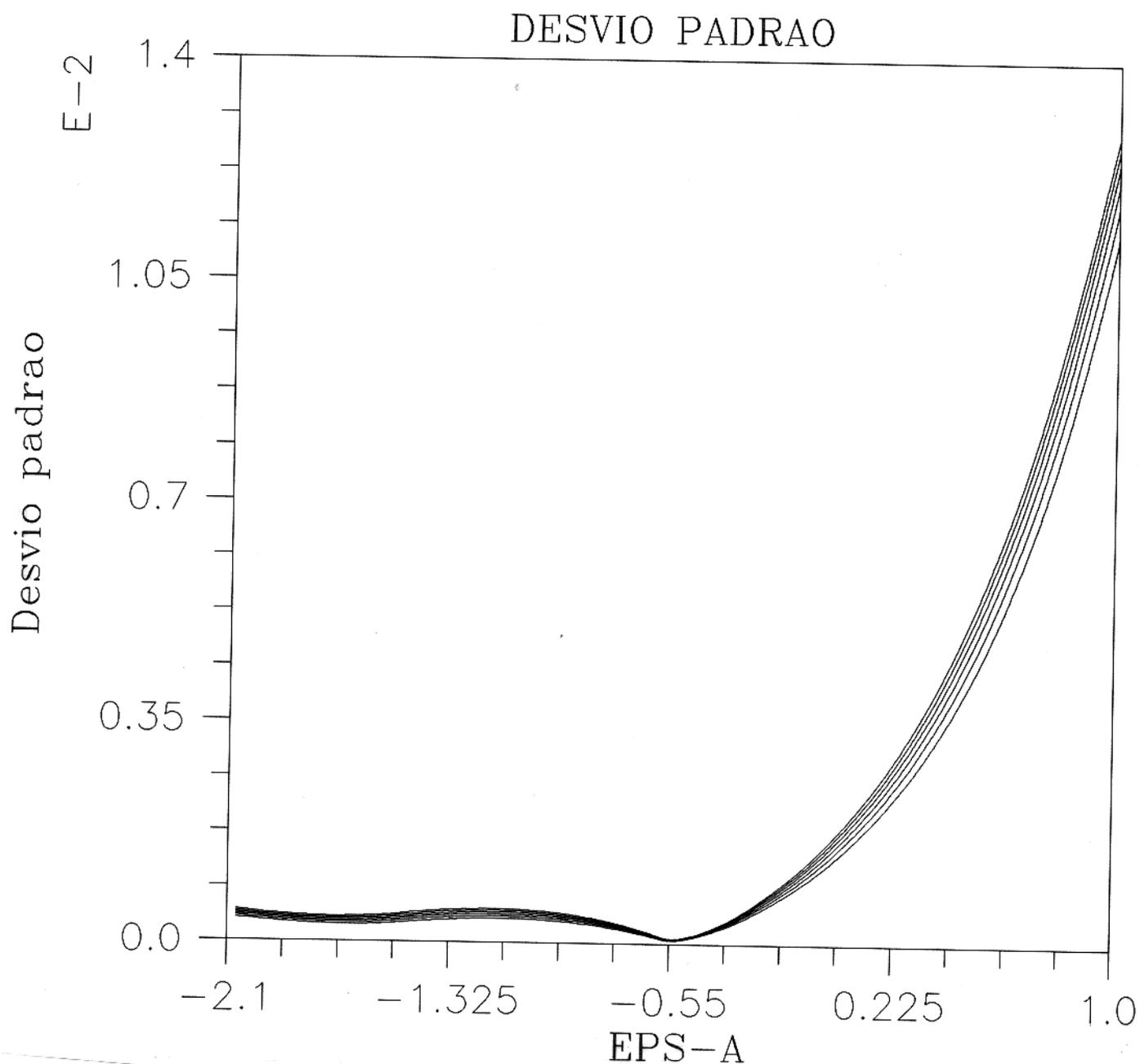


Figura 3.7 - O desvio padrão dos ajustes obtidos na obtenção de meios quasi-equivalentes em termos do parâmetro  $\chi \equiv \beta^2/\alpha^2 = 0,5; 0,4; 0,3333; 0,2857; 0,25; 0,2222$ , onde  $\alpha$  e  $\beta$  são as velocidades do meio isotrópico incidente. Observa-se um ajuste muito bom e a independência quase que total dos meios onde o ajuste é ótimo. Neste caso foi considerado o meio *TI* definido por  $C = 15 \times 10^{10} \text{N/m}^2$ ,  $\epsilon_p = 0,3$  e  $\gamma = 0,25$ .

## 4 - O ESTUDO DA PROPAGAÇÃO DE PULSOS ATRAVÉS DE ESTRATIFICAÇÕES ANISOTRÓPICAS

### 4.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Neste capítulo é estudada a propagação de pulsos através de estratificações horizontais de camadas anisotrópicas que possuam pelo menos um plano horizontal de simetria (monoclínicos, pelo menos), para que a teoria desenvolvida no capítulo 2 possa ser aplicada. É feita uma extensão, para o caso anisotrópico, do trabalho desenvolvido por EWING et al. (1957), que estudaram o espalhamento de pulsos através de estratificações isotrópicas. Métodos numéricos eficientes, aplicados ao estudo da propagação de ondas elásticas planas através de meios estratificados, se encontram amplamente discutidos na literatura. São conhecidos, o método recursivo de KENNETT (1983) aplicado ao caso de camadas isotrópicas, a sua extensão para meios estratificados anisotrópicos mais gerais, efetuada por MANDAL & MITCHELL (1986) e FRYER & FRASER (1987), além das adaptações para experimentos em PSV, efetuadas por MALLICK & FRASER (1988). Todos se englobam nos conhecidos métodos de refletividade e sintetizam todo o processo de espalhamento do experimento nos chamados sismogramas completos sem, entretanto, um estudo mais específico do comportamento de cada onda espalhada.

No estudo geral de propagação de ondas, pode-se considerar qualquer tipo de onda incidente com vagarosidade real e calcular os campos de ondas refletido e transmitido (que deve ser detectado no arranjo de receptores). Fixada uma componente horizontal, a componente vertical da vagarosidade de uma onda P incidente, por exemplo, será menor que das ondas cisalhantes S e T. Portanto, as componentes verticais de todas as ondas espalhadas serão reais. Entretanto, uma onda cisalhante S ou T pode incidir com uma componente horizontal de vagarosidade suficientemente grande, de tal maneira que, mesmo apresentando componente vertical real, a correspondente componente vertical associada à onda P, caso exista, assumirá um valor complexo. O ramo analítico desta componente deve ser escolhido de tal modo a obedecer a condição de radiação. Este tipo de comportamento caracteriza a propagação pós-crítica e é típico em experimentos de grande afastamento, provocando o aparecimento de eventos não geométricos que apresentam efeitos bastante significativos, principalmente nas amplitudes e nas polarizações das ondas espalhadas. Neste caso, os pulsos incidentes através destes meios, quando refletidos e transmitidos, sofrem severas deformações, sejam nas suas

amplitudes e fases como nos seus estados de polarização. Eles carregam, certamente, muitas informações sobre a estrutura anisotrópica do meio por eles atravessados. O estudo das amplitudes e do estado de polarização das ondas espalhadas se apresenta como um fator de grande potencialidade na caracterização da anisotropia presente na subsuperfície. A análise destes efeitos e que informações se pode tirar dos mesmos acerca da presença de anisotropia na região de interesse, constitui o objetivo central deste trabalho. A potencialidade de sua aplicação em modelos de regiões fraturadas que respondem elasticamente como meios efetivamente anisotrópicos, determina a importância deste estudo, principalmente quando utilizados na caracterização de reservatórios.

Na primeira seção, são analisadas as formas dos campos de ondas incidente, refletido e transmitido em propagação através de semi-espacos anisotrópicos separados por interface plana. Os campos refletido e transmitido são apresentados como transformadas inversas de Fourier do campo incidente  $i$  multiplicado pelas matrizes de polarização ( $N_-$  ou  $N'_+$ ), pelas matrizes de espalhamento ( $R$  e  $T$ ) através da interface e pela matriz  $A$ , que carrega informações sobre a profundidade da observação ( $x_3$ ) e da componente vertical da vagarosidade, parâmetro que determina a homogeneidade ou não da propagação das ondas. Os atributos acima influenciam fortemente a forma dos campos espalhados. Na segunda seção, é introduzido, de forma heurística, o conceito fundamental de sinal analítico associado a um pulso real. Este conceito é, então, utilizado no estudo do comportamento dos pulsos refletido e transmitido, ainda através de interfaces que separam dois meios anisotrópicos, considerando-se, especificamente, a propagação pós-crítica. São obtidas expressões fechadas para os campos espalhados e analisados os seus efeitos de maneira mais detalhada. No caso da assinatura do pulso incidente corresponder a um delta de Dirac, o pulso transmitido é calculado de forma exata. Na terceira seção, é feito o estudo do espalhamento das ondas através de estratificações anisotrópicas mais gerais. As matrizes de reflexão e de transmissão associadas a estas estratificações, são obtidas através do produto de matrizes que controlam o espalhamento das ondas em cada interface e das matrizes de propagação das ondas espalhadas através de cada camada. O caso de apenas uma camada é analisado detalhadamente e expressões explícitas para as reflexões e transmissões são obtidas em termos do conhecido operador de reverberação. A partir dos coeficientes associados à estratificação, são obtidos os pulsos espalhados na sua forma mais geral. Os efeitos de vários atributos associados à estratificação, como espessura de cada camada, inversibilidade ou não das matrizes associadas ao espalhamento em cada interface são, então, analisados. Finalmente, é analisado o espalhamento de pulsos através de meios finamente estratificados em limite quase estático, ou seja, em propagação com grande comprimento de onda. O meio efetivamente anisotrópico, associado à este tipo de estratificação é obtido e expressões analíticas para os coeficientes dos pulsos espalhados

são calculados.

## 4.2 ESPALHAMENTO DE ONDAS ATRAVÉS DE INTERFACES PLANAS

Sejam dois meios elásticos anisotrópicos com um plano horizontal de simetria especular (por exemplo, monoclinicos com eixo horizontal de simetria), separados por uma interface horizontal plana  $x_3 = 0$ , com o eixo  $x_3$  orientado positivamente para baixo. O meio superior tem densidade  $\rho$  e parâmetros elásticos (em notação condensada)  $c_{ij}$ , que são as componentes da matriz de rigidez  $\mathbf{C}$ . O meio inferior tem densidade  $\rho'$  e parâmetros elásticos (em notação condensada)  $c'_{ij}$ , que são as componentes da matriz de rigidez  $\mathbf{C}'$ . A forma de tais matrizes de rigidez para meios com a simetria acima requerida é dada em (2.31). O campo de velocidade na forma de uma onda harmônica plana e unitária, com frequência  $\omega$  e vagarosidade  $\mathbf{s} = [s_1, s_2, s_3]^t$ , onde o índice superscrito  $t$  denota a transposição de vetores, é definido em (2.32). Finalmente as equações de Christoffel que determinam as componentes verticais da vagarosidade  $s_{3Q}$  e as componentes do vetor unitário de polarização  $n_{iQ}$ , onde o índice subscrito  $Q$  representa o tipo de onda de interesse, ou seja, P, S ou T, a partir das componentes horizontais  $s_1$  e  $s_2$  da vagarosidade, são dadas por (2.33).

Para uma onda plana cuja vagarosidade tem todas as suas componentes reais, o vetor de polarização é também real. Por outro lado, a lei de Snell estabelece, em sua essência, que todas as ondas envolvidas no espalhamento em uma interface horizontal têm a mesma componente horizontal  $\mathbf{s}_H \equiv s_1 \mathbf{e}_1 + s_2 \mathbf{e}_2$ , ou seja, têm os mesmos valores para  $s_1$  e  $s_2$ . Seja agora uma onda  $Q$  com vagarosidade real, incidente no semi-plano superior (não dotado de apóstrofo). O espalhamento pré-crítico acontece quando todas as ondas refletidas e transmitidas têm as componentes verticais de vagarosidade reais. O espalhamento pós-crítico acontece quando pelo menos uma das ondas refletidas e transmitidas tem as componentes verticais de vagarosidade com valores complexos, ou seja, é uma onda plana não homogênea em que os planos de amplitude constante não coincide com os planos de fase constante. Se pelo menos uma das ondas refletidas é não homogênea, então uma das matrizes de impedância  $\mathbf{X}$  e  $\mathbf{Y}$  do semi-espço superior (definidas no capítulo 2), ou mesmo ambas, são complexas. O mesmo acontece para o caso das matrizes de impedância  $\mathbf{X}'$  e  $\mathbf{Y}'$  do semi-espço inferior, quando pelo menos uma das ondas transmitidas é não homogênea. Desde que as matrizes dos coeficientes de transmissão  $\mathbf{T}$  e de reflexão  $\mathbf{R}$  dependem de  $\mathbf{X}$ ,  $\mathbf{Y}$ ,  $\mathbf{X}'$  e  $\mathbf{Y}'$ , de acordo com (2.11) ou expressões equivalentes, ondas pré-críticas possuem amplitudes reais.

#### 4.2.1 O Campo de Onda Incidente

Para uma dada frequência  $\omega$  e componente horizontal de vagarosidade  $s_H$  podem existir, em geral, três ondas incidentes P, S e T (aqui, propagação descendente significa que a terceira componente do vetor velocidade de grupo é positiva) com amplitudes  $F_P(\omega)$ ,  $F_S(\omega)$  e  $F_T(\omega)$ , respectivamente. O vetor das amplitudes das ondas incidentes é representado por

$$\mathbf{i} = \begin{bmatrix} F_P(\omega) \\ F_S(\omega) \\ F_T(\omega) \end{bmatrix} .$$

Para cada onda incidente Q são associados, a componente vertical  $s_{3Q}$  da vagarosidade e o vetor unitário de polarização  $\mathbf{n}_Q^+$ . A matriz de polarização é, então, definida como

$$\mathbf{N}^+ \equiv \left[ \mathbf{n}_P^+ \mid \mathbf{n}_S^+ \mid \mathbf{n}_T^+ \right] = \begin{bmatrix} n_{1P} & n_{1S} & n_{1T} \\ n_{2P} & n_{2S} & n_{2T} \\ n_{3P} & n_{3S} & n_{3T} \end{bmatrix} . \quad (4.1)$$

Juntamente com  $\Lambda(x_3; \omega)$ , conforme (2.41), o campo incidente pode ser representado compactamente como

$$\mathbf{N}^+ \Lambda(x_3; \omega) \mathbf{i} \exp -i\omega\tau , \quad (4.2)$$

onde  $\tau = t - s_H \cdot \mathbf{x}$  .

Todas as componentes verticais do vetor de vagarosidade que aparecem em  $\Lambda(x_3; \omega)$  serão assumidas reais; se não, o valor de  $F_Q(\omega)$  em  $\mathbf{i}$ , correspondente a um valor não real de  $s_{3Q}$ , será assumido zero para todas as frequências. Neste caso, desde que as componentes verticais são reais, as matrizes de polarização são reais e independente da frequência e, portanto,  $\mathbf{N}^+$  pode ser tomada fora da integral. O campo de onda incidente pode ser expresso, no domínio do tempo, como

$$\begin{aligned} & \frac{\mathbf{N}^+}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Lambda(x_3; \omega) \mathbf{i} \exp -i\omega\tau d\omega \\ &= \frac{\mathbf{N}^+}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} F_P(\omega) \exp i\omega s_{3P} x_3 \\ F_S(\omega) \exp i\omega s_{3S} x_3 \\ F_T(\omega) \exp i\omega s_{3T} x_3 \end{bmatrix} \exp -i\omega\tau d\omega \\ &= \mathbf{N}^+ \begin{bmatrix} f_P(\tau - s_{3P} x_3) \\ f_S(\tau - s_{3S} x_3) \\ f_T(\tau - s_{3T} x_3) \end{bmatrix} , \end{aligned} \quad (4.3)$$

onde  $f_Q(t)$  é a transformada inversa de Fourier de  $F_Q(\omega)$ .

#### 4.2.2 O Campo de Onda Transmitido

De acordo com o capítulo 2, os valores de  $s'_{3Q}$  satisfazem uma equação bicúbica. A partir das componentes verticais apropriadas da vazarosidade correspondentes às três ondas descendentes, pode-se calcular os correspondentes vetores de polarização  $n'_P$ ,  $n'_S$  e  $n'_T$ , que podem ser arranjados em uma matriz chamada de **matriz de polarização da transmissão** e definida por

$$N'^+ = \left[ \begin{array}{c|c|c} n'_P & n'_S & n'_T \end{array} \right] = \begin{bmatrix} n'_{1P} & n'_{1S} & n'_{1T} \\ n'_{2P} & n'_{2S} & n'_{2T} \\ n'_{3P} & n'_{3S} & n'_{3T} \end{bmatrix} . \quad (4.4)$$

Com as componentes verticais  $s'_{3Q}$  e as componentes  $n'_{iQ}$  da matriz  $N'^+$ , a matriz  $\mathbf{T}$  dos coeficientes de transmissão, em geral  $3 \times 3$ , pode, então, ser calculada e representada por

$$\mathbf{T} = 2(\mathbf{X}^{-1}\mathbf{X}' + \mathbf{Y}^{-1}\mathbf{Y}')^{-1} \quad (4.5)$$

ou por expressões similares, segundo o capítulo 2.

Cada uma das componentes de  $\mathbf{T}$ , digamos  $T_{KQ}$ , é a amplitude da onda transmitida  $K$  associada à uma onda incidente  $Q$ , de amplitude unitária. No caso pré-crítico,  $\mathbf{T}$  é real e independente da frequência.

Existem três possibilidades para os valores das componentes  $s'_{3Q}$ :

1.  $s'_{3Q}$  **real e positiva** : então  $s'_{3Q}$  é real e seu sinal deve ser escolhido de forma que a onda correspondente seja descendente, isto é, que sua velocidade de grupo tenha a terceira componente positiva. Usualmente, mas não necessariamente, isto corresponderá a escolher  $s'_{3Q}$  com sinal positivo. Esta é a única possibilidade para a ocorrência de eventos pré-críticos.
2.  $s'_{3Q}$  **real e negativa** : então  $s'_{3Q}$  é imaginário puro e seu sinal é escolhido de forma que a onda correspondente se atenuie na direção crescente dos valores positivos de  $x_3$ . Isto implica que a componente vertical deve ter a forma

$$s'_{3Q} = i \operatorname{sgn}(\omega) \sqrt{-s'^2_{3Q}},$$

onde  $\operatorname{sgn}$  denota o sinal do argumento. Neste caso, a componente vertical depende da frequência e, em particular,  $s'_{3Q}$  é uma função Hermitiana de  $\omega$ , ou seja,  $s'_{3Q}(-\omega) = \overline{s'_{3Q}(\omega)}$ , onde a barra denota a conjugação complexa.

3.  $s'_{3Q}$  complexas e conjugadas : Associando estas raízes às ondas K e Q, as componentes verticais  $s'_{3K}$  e  $s'_{3Q}$  devem ser escolhidas de forma que as ondas correspondentes se atenuem na direção crescente dos valores positivos de  $x_3$ . Isto significa que elas devem possuir parte imaginária positiva se a frequência é positiva e parte imaginária negativa se a frequência é negativa. Existem quatro ondas associadas ao par de raízes complexas da equação bicúbica. Supondo a chegada de K anterior à de Q (no mesmo sentido que P chega antes de S), será convenionado que

$$\begin{aligned} s'_{3K} &= -\sqrt{\frac{|s'_{3}|^2 + \Re(s'_{3})}{2}} + i \operatorname{sgn}(\omega) \sqrt{\frac{|s'_{3}|^2 - \Re(s'_{3})}{2}} \\ s'_{3Q} &= +\sqrt{\frac{|s'_{3}|^2 + \Re(s'_{3})}{2}} + i \operatorname{sgn}(\omega) \sqrt{\frac{|s'_{3}|^2 - \Re(s'_{3})}{2}} \end{aligned} \quad (4.6)$$

onde  $\Re$  denota a parte real de um número complexo. Aqui novamente,  $s'_{3K}$  e  $s'_{3Q}$  são funções Hermitianas de  $\omega$ . Observa-se que devido à já referida simetria horizontal dos meios anisotrópicos envolvidos, toda onda atenuada ascendente, deve ter como componente vertical, não o complexo conjugado da componente vertical da correspondente onda descendente, mas o seu valor simétrico. Em todos os casos

$$\Lambda'_{up} = \Lambda'^{-1}_{down} .$$

Além do mais, a partir das equações de Christoffel, fica claro que, segundo a convenção adotada para a escolha de sinal dos vetores unitários de polarização, se a onda descendente Q tem vetor de polarização

$$\mathbf{n}'_{Q+} = \begin{bmatrix} n_{1Q} \\ n_{2Q} \\ n_{3Q} \end{bmatrix} , \quad (4.7)$$

então a onda ascendente Q terá vetor de polarização

$$\mathbf{n}'_{Q-} = \begin{bmatrix} n_{1Q} \\ n_{2Q} \\ -n_{3Q} \end{bmatrix} . \quad (4.8)$$

Na incidência pós-crítica, a componente vertical e o vetor de polarização podem ou não depender da frequência  $\omega$ . No caso da não dependência, a matriz de polarização da transmissão  $\mathbf{N}'^+$ , independe da frequência e pode ser colocado fora da integral que determina o campo transmitido, no domínio do tempo. Entretanto, este não é o caso geral. A partir das equações de Christoffel,  $s'_{3Q}$  é uma função Hermitiana de  $\omega$ ,

implicando com isto que  $N'_Q$  é Hermitiana, que todos os elementos de  $X'$  e  $Y'$  são Hermitianos e que, portanto, as matrizes dos coeficientes de reflexão e transmissão  $R$  e  $T$ , respectivamente, são também Hermitianas.

Para uma dada frequência  $\omega$ , o campo transmitido pode ser escrito compactamente como

$$N'^+ \Lambda'(x_3; \omega) T i \exp -i\omega\tau . \quad (4.9)$$

Logo, no domínio do tempo, o campo transmitido pode ser expresso por

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} N'^+ \Lambda'(x_3; \omega) T i \exp -i\omega\tau d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} N'^+ \begin{bmatrix} (T_{PP}F_P + T_{PS}F_S + T_{PT}F_T) \exp i\omega s'_{3P}x_3 \\ (T_{SP}F_P + T_{SS}F_S + T_{ST}F_T) \exp i\omega s'_{3S}x_3 \\ (T_{TP}F_P + T_{TS}F_S + T_{TT}F_T) \exp i\omega s'_{3T}x_3 \end{bmatrix} \exp -i\omega\tau d\omega . \quad (4.10)$$

#### 4.2.3 O Campo de Onda Refletido

Análogo ao caso do campo de onda transmitido, a matriz de dos coeficientes de reflexão  $R$ , em geral de ordem  $3 \times 3$  é dada por

$$R = (X^{-1}X' - Y^{-1}Y')(X^{-1}X' + Y^{-1}Y')^{-1} , \quad (4.11)$$

ou por expressões similares, segundo o capítulo 2.

Cada componente  $R_{KQ}$  de  $R$  é a amplitude da onda refletida  $K$  associada à uma onda incidente  $Q$ , de amplitude unitária. Um valor para a componente vertical, desde que a onda refletida é simplesmente a imagem espelhada da correspondente onda descendente, é dado exatamente pelo simétrico da componente vertical correspondente à onda incidente, seja ela real, imaginário puro ou complexo, conforme discutido anteriormente. Quando estas raízes produzem atenuação na direção  $x_3$ , isto significa que a parte imaginária da componente vertical é negativa para  $\omega$  positivo e positiva para  $\omega$  negativo, exatamente o oposto do caso das ondas não homogêneas descendentes já anteriormente discutido.

Entretanto, não serão consideradas ondas incidentes não homogêneas e para uma componente horizontal da vagarosidade onde uma onda incidente possa ser não homogênea, a amplitude desta onda será tomada como zero em todas as frequências. Mas ondas refletidas não homogêneas irão existir, como no caso de uma onda incidente  $P$  com

módulo da componente horizontal da vagarosidade maior que o inverso da velocidade onda P.

Para uma dada frequência  $\omega$ , o campo refletido pode ser escrito compactamente como

$$\mathbf{N}^{-1} \Lambda^{-1}(x_3; \omega) \mathbf{R} \mathbf{i} \exp -i\omega\tau . \quad (4.12)$$

Então, no domínio do tempo, o campo refletido, na sua forma mais geral, pode ser expresso como

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{N}^{-1} \Lambda^{-1}(x_3; \omega) \mathbf{R} \mathbf{i} \exp -i\omega\tau d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{N}^{-1} \begin{bmatrix} (R_{PP}F_P + R_{PS}F_S + R_{PT}F_T) \exp -i\omega s_{3P}x_3 \\ (R_{SP}F_P + R_{SS}F_S + R_{ST}F_T) \exp -i\omega s_{3S}x_3 \\ (R_{TP}F_P + R_{TS}F_S + R_{TT}F_T) \exp -i\omega s_{3T}x_3 \end{bmatrix} \exp -i\omega\tau d\omega . \end{aligned} \quad (4.13)$$

### 4.3 O SINAL ANALÍTICO DOS PULSOS ESPALHADOS

No estudo da propagação de pulsos através de meios anisotrópicos é, entretanto, muito útil a utilização do chamado sinal analítico associado ao pulso da onda espalhada. Este conceito é bastante usado na sismica aplicada, principalmente como discriminador de contraste litológico. Neste trabalho, este conceito será aplicado na obtenção dos pulsos espalhados, considerando-se, especificamente, a incidência pós-crítica.

#### 4.3.1 A Obtenção Heurística do Pulso Analítico

Seja, então,  $f(\tau)$  uma função real e  $F(\omega)$  a sua transformada de Fourier, que será suposta uma função Hermitiana da frequência  $\omega$ , ou seja,  $F(-\omega) = \overline{F(\omega)}$ , para todo  $\omega$  real. Temos

$$\begin{aligned} f(\tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \exp -i\omega\tau d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[ \int_{-\infty}^0 F(\omega) \exp -i\omega\tau d\omega + \int_0^{\infty} F(\omega) \exp -i\omega\tau d\omega \right] . \end{aligned} \quad (4.14)$$

Aplicando a mudança de variável  $\omega \leftrightarrow -\omega$  à primeira integral em (12), obtemos

$$\begin{aligned} f(\tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} [F(\omega) \exp -i\omega\tau + F(-\omega) \exp i\omega\tau] d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} [F(\omega) \exp -i\omega\tau + \overline{F(\omega)} \exp -i\omega\tau] d\omega \\ &= \frac{1}{\pi} \Re \left( \int_0^{\infty} F(\omega) \exp -i\omega\tau d\omega \right) , \end{aligned} \quad (4.15)$$

usando-se o fato de  $F(\omega)$  ser uma função Hermitiana da frequência  $\omega$ .

O **signal analítico** associado à função pulso  $f(\tau)$  é, então, definido como sendo a função

$$f^{(A)}(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} F(\omega) \exp -i\omega\tau \, d\omega . \quad (4.16)$$

Observa-se da definição, que  $f(\tau) = \Re(f^{(A)}(\tau))$ . Agora, o que dizer da componente imaginária  $\Im(f^{(A)}(\tau))$  do signal analítico, onde  $\Im$  representa a parte imaginária de uma quantidade complexa? Para isto, observemos que, da própria definição de signal analítico,

$$\begin{aligned} & \Im\left[\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} F(\omega) \exp -i\omega\tau \, d\omega\right] \\ &= -i\left(\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} F(\omega) \exp -i\omega\tau \, d\omega - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \exp -i\omega\tau \, d\omega\right) \\ &= \frac{-i}{2\pi} \left( \int_0^{\infty} F(\omega) \exp i\omega\tau \, d\omega - \int_{-\infty}^0 F(\omega) \exp -i\omega\tau \, d\omega \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} i \operatorname{sgn}(\omega) F(\omega) \exp -i\omega\tau \, d\omega . \end{aligned} \quad (4.17)$$

A transformada de Fourier da função  $\tau \mapsto f * g(\tau)$  - onde  $*$  representa a operação de convolução e  $g(\tau) = \frac{1}{\tau}$  - é dada por  $\omega \mapsto \frac{i}{2\pi} \operatorname{sgn}(\omega) F(\omega)$ . Isto nos leva a concluir que

$$\begin{aligned} & \Im\left[\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} F(\omega) \exp -i\omega\tau \, d\omega\right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\tau')}{\tau' - \tau} \, d\tau' \equiv f_{Hi}(\tau) , \end{aligned} \quad (4.18)$$

onde  $f_{Hi}(\tau)$  é a transformada de Hilbert do pulso  $f(\tau)$ . Assim sendo, o signal analítico tem a forma

$$f^{(A)}(\tau) = f(\tau) + i f_{Hi}(\tau) . \quad (4.19)$$

Mais explicitamente, as componentes real e imaginária de  $f^{(A)}(\tau)$  são dadas por

$$f(\tau) = \Re(f^{(A)}(\tau)) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [\Re(F(\omega)) \cos \omega\tau - \Im(F(\omega)) \sin \omega\tau] \, d\omega \quad (4.20)$$

e

$$f_{Hi}(\tau) = \Im(f^{(A)}(\tau)) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [\Re(F(\omega)) \sin \omega\tau + \Im(F(\omega)) \cos \omega\tau] \, d\omega . \quad (4.21)$$

### 4.3.2 O Pulso Analítico do Pulso Transmitido

Para a obtenção do sinal analítico do pulso transmitido, iremos considerar em nosso estudo, apenas o caso pós-crítico, já que no caso pré-crítico, todo o processo de espalhamento das ondas será real. Como  $x_3 > 0$ , a componente vertical da vagarosidade é dada por

$$s'_{3Q} = \Re s'_{3Q} + i \operatorname{sgn}(\omega) |\Im s'_{3Q}| . \quad (4.22)$$

Consequentemente, a partir das equações de Christoffel dadas em (2.33), pode-se verificar que cada componente  $n'_{iK}^+$  da matriz de polarização  $\mathbf{N}'^+$  apresenta a forma

$$n'_{iK}^+(\omega) = a_{iK} + i \operatorname{sgn}(\omega) b_{iK} . \quad (4.23)$$

Logo, as matrizes  $\mathbf{X}$  e  $\mathbf{Y}$  definidas em (2.38) também apresentam formas análogas. Partindo das equações de Zoeppritz definidas em (2.8), conclue-se, portanto, que as componentes da matriz de transmissão  $\mathbf{T}$  apresentam, também, a forma

$$T_{KQ}(\omega) = A_{KQ} + i \operatorname{sgn}(\omega) B_{KQ} . \quad (4.24)$$

De (4.23) e (4.24), pode-se concluir que as amplitudes de  $n'_{iK}^+(\omega)$  e  $T_{KQ}(\omega)$  não dependem de  $\omega$  e que suas fases dependem linearmente de  $\operatorname{sgn}(\omega)$ . Portanto, estas componentes podem ser escritas na forma

$$n'_{iK}^+(\omega) = |n'_{iK}^+| \exp i \operatorname{sgn}(\omega) \psi'_{iK} \quad (4.25)$$

e

$$T_{KQ}(\omega) = |T_{KQ}| \exp i \operatorname{sgn}(\omega) \Phi'_{KQ} , \quad (4.26)$$

onde  $\psi'_{iK}$  e  $\Phi'_{KQ}$  correspondem às fases das componentes das matrizes de polarização e transmissão, respectivamente.

Em (4.10), uma componente típica do integrando é dado por

$$n'_{iK}^+(\omega) T_{KQ}(\omega) F_Q(\omega) \exp i \omega s'_{3Q} x_3 \exp -i \omega \tau , \quad (4.27)$$

onde o somatório é feito sobre os índices repetidos, no nosso caso,  $K$  e  $Q$ . Portanto, cada componente do pulso transmitido tem a forma

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} n'_{iK}^+(\omega) T_{KQ}(\omega) F_Q(\omega) \exp i \omega s'_{3Q} x_3 \exp -i \omega \tau \, d\omega . \quad (4.28)$$

Agora, substituindo os valores de  $n'_{iK}^+(\omega)$  e  $T_{KQ}(\omega)$ , de (4.25) e (4.26) em (4.28), ela pode ser escrita como

$$\frac{|n'_{iK}^+| |T_{KQ}|}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp -|\omega| |\Im s'_{3Q}| x_3 F_Q(\omega) \exp i \operatorname{sgn}(\omega) (\psi'_{iK} + \Phi'_{KQ}) \exp i \omega \Re s'_{3Q} x_3 \exp -i \omega \tau \, d\omega ,$$

e que também pode ser reescrita na forma

$$\frac{|n'_{iK}| |TKQ|}{\pi} \int_0^{\infty} \exp -\omega |\Im s'_{3Q}| x_3 \Re \{ F_Q(\omega) \exp i(\psi'_{iK} + \Phi'_{KQ}) \exp i\omega \Re s'_{3Q} x_3 \exp -i\omega\tau \} d\omega ,$$

ou

$$\Re \left\{ \frac{|n'_{iK}| |TKQ|}{\pi} \int_0^{\infty} \exp -\omega |\Im s'_{3Q}| x_3 F_Q(\omega) \exp i(\psi'_{iK} + \Phi'_{KQ}) \exp i\omega \Re s'_{3Q} x_3 \exp -i\omega\tau d\omega \right\} ,$$

O termo entre chaves na expressão acima corresponde exatamente ao sinal analítico das componentes do pulso transmitido. Colocando-se o termo  $\exp i(\psi'_{iK} + \Phi'_{KQ})$  fora da integral acima por não depender de  $\omega$ , o sinal analítico fica sendo, então

$$\frac{n'_{iK} T_{KQ}}{\pi} \int_0^{\infty} \exp -\omega |\Im s'_{3Q}| x_3 \Re \{ F_Q(\omega) \exp i\omega \Re s'_{3Q} x_3 \exp -i\omega\tau \} d\omega , \quad (4.29)$$

Desta forma, o sinal analítico transmitido através de uma interface, na sua forma mais geral pode ser escrito como

$$\frac{n'^+ \mathbf{T}}{\pi} \int_0^{\infty} \Lambda'_{\Im}(x_3; \omega) \Lambda'_{\Re}(x_3; \omega) i \exp -i\omega\tau d\omega , \quad (4.30)$$

onde

$$\Lambda'_{\Re}(x_3; \omega) = \begin{bmatrix} \exp i\omega \Re s'_{3P} x_3 & 0 & 0 \\ 0 & \exp i\omega \Re s'_{3S} x_3 & \\ 0 & 0 & \exp i\omega \Re s'_{3T} x_3 \end{bmatrix}$$

e

$$\Lambda'_{\Im}(x_3; \omega) = \begin{bmatrix} \exp -\omega |\Im s'_{3P}| x_3 & 0 & 0 \\ 0 & \exp -\omega |\Im s'_{3S}| x_3 & \\ 0 & 0 & \exp -\omega |\Im s'_{3T}| x_3 \end{bmatrix} . \quad (4.31)$$

Observa-se claramente, na referida expressão, todos os termos que determinam a deformação do pulso transmitido, tais como as amplitudes e as fases das polarizações e dos coeficientes de transmissão ( $n'^+$  e  $\mathbf{T}$ ) e o termo de decaimento com a profundidade ( $\Lambda'_{\Im}(x_3; \omega)$ ).

Desenvolvendo-se (4.28), obtemos uma outra representação para cada componente do pulso transmitido e que é dada por

$$|n'_{iK}| |TKQ| \{ \cos(\psi'_{iK} + \Phi'_{KQ}) WT1(x_3) - \sin(\psi'_{iK} + \Phi'_{KQ}) WT2(x_3) \} , \quad (4.32)$$

onde

$$WT1(x_3) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \exp -\omega |\Im s'_{3Q}| x_3 [\Re F_Q(\omega) \cos \omega(\tau - \Re s'_{3Q}) + \Im F_Q(\omega) \sin \omega(\tau - \Re s'_{3Q})] d\omega$$

e

$$WT2(x_3) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \exp -\omega |\Im s'_{3Q}| x_3 [\Re F_Q(\omega) \Im F_Q(\omega) \cos \omega(\tau - \Re s'_{3Q}) - \sin \omega(\tau - \Re s'_{3Q})] d\omega .$$

Na interface entre os dois meios, ou seja, em  $x_3 = 0$ , tem-se que

$$WT1(0) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [\Re F_Q(\omega) \cos \omega\tau + \Im F_Q(\omega) \sin \omega\tau] d\omega \equiv f_Q(\tau) \quad (4.33)$$

e

$$WT2(0) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [\Im F_Q(\omega) \cos \omega\tau - \Re F_Q(\omega) \sin \omega\tau] d\omega \equiv f_{QH_i}(\tau) , \quad (4.34)$$

conforme (4.20) e (4.21).

Portanto, neste caso, cada componente do pulso transmitido será dado por

$$|n'_{iK}| |T_{KQ}| \{ \cos(\psi'_{iK} + \Phi'_{KQ}) f_Q(\tau) - \sin(\psi'_{iK} + \Phi'_{KQ}) f_{QH_i}(\tau) \} . \quad (4.35)$$

#### 4.3.3 O Pulso Analítico de uma Fonte Impulsiva

Nesta seção, será estudado o comportamento do pulso transmitido, no caso do pulso incidente ser um delta de Dirac. Vamos supor, portanto, que uma componente típica do pulso incidente seja dada por  $f_Q(t) = \delta_Q(t)$ . Neste caso, a transformada de Fourier será dada por  $F_Q(\omega) \equiv 1$ . Daí, cada componente do pulso transmitido terá a forma

$$\begin{aligned} & \frac{|n'_{iK}| |T_{KQ}|}{\pi} \Re \{ \exp i(\psi'_{iK} + \Phi'_{KQ}) \int_0^{\infty} \exp -\omega (|\Im s'_{3Q}| x_3 - i\tau) d\omega \} \\ &= \frac{|n'_{iK}| |T_{KQ}|}{\pi (|\Im s'_{3Q}|^2 x_3^2 + \tau^2)} \{ \cos(\psi'_{iK} + \Phi'_{KQ}) |\Im s'_{3Q}| x_3 - \sin(\psi'_{iK} + \Phi'_{KQ}) \tau \} . \end{aligned} \quad (4.36)$$

#### 4.3.4 O Pulso Analítico do Pulso Refletido

No caso da obtenção do sinal analítico para o pulso refletido, considerando que  $x_3 < 0$ , a componente vertical da vagarosidade é dado por

$$s_{3Q} = \Re s_{3Q} - i \operatorname{sgn}(\omega) |\Im s_{3Q}| . \quad (4.37)$$

Usando raciocínio inteiramente análogo ao caso do pulso transmitido, pode-se verificar que as amplitudes das componentes  $n_{iK}^-(\omega)$  e  $R_{KQ}(\omega)$  das matrizes de polarização  $n^-$  e de reflexão  $\mathbf{R}$

respectivamente, são independentes da frequência  $\omega$  e que suas fases dependem linearmente de  $\text{sgn}(\omega)$ . Desta forma, elas podem ser escritas como

$$n_{iK}^-(\omega) = |n_{iK}^-| \exp i \text{sgn}(\omega) \psi_{iK} \quad (4.38)$$

e

$$R_{KQ}(\omega) = |R_{KQ}| \exp i \text{sgn}(\omega) \Phi_{KQ} , \quad (4.39)$$

onde  $\psi_{iK}$  e  $\Phi_{KQ}$  correspondem às fases das componentes das matrizes de polarização e reflexão, respectivamente.

Em (4.13), uma componente típica do integrando é dado por

$$n_{iK}^-(\omega) R_{KQ}(\omega) F_Q(\omega) \exp -i\omega s_{3Q} x_3 \exp -i\omega \tau , \quad (4.40)$$

onde o somatório é feito sobre os índices repetidos, no nosso caso, K e Q. Portanto, cada componente do pulso refletido tem a forma

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} n_{iK}^-(\omega) R_{KQ}(\omega) F_Q(\omega) \exp -i\omega s_{3Q} x_3 \exp -i\omega \tau d\omega . \quad (4.41)$$

Através de manipulações inteiramente análogas ao caso do pulso transmitido, o sinal analítico do pulso refletido, na sua forma mais geral, é escrito como

$$\frac{n^- R}{\pi} \int_0^{\infty} \Lambda_{\Im}^{-1}(x_3; \omega) \Lambda_{\Re}^{-1}(x_3; \omega) i \exp -i\omega \tau d\omega . \quad (4.42)$$

Como no caso do pulso transmitido, uma outra representação para cada componente do pulso refletido é dada por

$$|n_{iK}^-| |R_{KQ}| \{ \cos(\psi_{iK} + \Phi_{KQ}) WR1(x_3) - \sin(\psi_{iK} + \Phi_{KQ}) WR2(x_3) \} , \quad (4.43)$$

onde

$$WR1(x_3) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \exp \omega |\Im s_{3Q}| x_3 [ \Re F_Q(\omega) \cos \omega(\tau + \Re s_{3Q}) + \Im F_Q(\omega) \sin \omega(\tau + \Re s_{3Q}) ] d\omega$$

e

$$WR2(x_3) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \exp \omega |\Im s_{3Q}| x_3 [ \Im F_Q(\omega) \cos \omega(\tau + \Re s_{3Q}) - \Re F_Q(\omega) \sin \omega(\tau + \Re s_{3Q}) ] d\omega$$

Na interface entre os dois meios, ou seja, em  $x_3 = 0$ , tem-se que

$$WR1(0) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [ \Re F_Q(\omega) \cos \omega \tau - \Im F_Q(\omega) \sin \omega \tau ] d\omega \equiv f_Q(\tau) \quad (4.44)$$

e

$$WR2(0) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [\Re F_Q(\omega) \sin \omega \tau + \Im F_Q(\omega) \cos \omega \tau] d\omega \equiv f_{Q_{H_i}}(\tau) , \quad (4.45)$$

conforme (4.20) e (4.21).

Portanto, neste caso, cada componente do pulso refletido será dado por

$$|n_{iK}^-| |R_{KQ}| \{ \cos(\psi_{iK} + \Phi_{KQ}) f_Q(\tau_R) - \sin(\psi_{iK} + \Phi_{KQ}) f_{Q_{H_i}}(\tau_R) \} . \quad (4.46)$$

#### 4.4 O ESPALHAMENTO DE PULSOS ATRAVÉS DE ESTRATIFICAÇÕES ANISOTRÓPICAS

No estudo anteriormente desenvolvido foi levado em conta apenas o espalhamento de pulsos através de dois meios anisotrópicos, separados por uma interface horizontal. Entretanto, muitos ambientes geológicos, como bacias sedimentares, por exemplo, apresentam estruturas estratificadas, cada uma das camadas podendo ser isotrópica ou anisotrópica. Conforme o capítulo 2, o estudo do espalhamento de ondas através de uma tal camada pode ser determinado, exatamente, a partir do conhecimento da chamada matriz de propagação da referida camada. Considerando, como sempre, apenas meio anisotrópico com a simetria já anteriormente definida, ou seja, com um plano horizontal de simetria especular, cada uma destas matrizes pode ser escrita em termos das conhecidas matrizes de impedância  $\mathbf{X}$  e  $\mathbf{Y}$ , associadas à cada camada e em cada componente horizontal da vagarosidade  $s_1$  e  $s_2$ . Supondo-se que uma tal camada ocupe uma região definida por  $x_{3t} < x_3 < x_{3b}$  e que as componentes de velocidade e de tração  $\mathbf{b}_X$  e  $\mathbf{b}_Y$  sejam definidas conforme (2.40), as informações da velocidade e da tração da interface superior da camada está relacionada com as da interface inferior através de

$$\begin{bmatrix} \mathbf{b}_X \\ \mathbf{b}_Y \end{bmatrix}_{x_{3b}} = \mathbf{Q}(h) \begin{bmatrix} \mathbf{b}_X \\ \mathbf{b}_Y \end{bmatrix}_{x_{3t}} , \quad (4.47)$$

onde  $h = x_{3b} - x_{3t}$  e

$$\mathbf{Q}(h) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} & -\mathbf{Y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Lambda(h; \omega) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Lambda^{-1}(h; \omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}^{-1} & \mathbf{Y}^{-1} \\ \mathbf{X}^{-1} & -\mathbf{Y}^{-1} \end{bmatrix} , \quad (4.48)$$

conforme (2.44), ou

$$\mathbf{Q}(h) = \begin{bmatrix} \mathbf{X} \text{Cos}(h; \omega) \mathbf{X}^{-1} & i \mathbf{X} \text{Sin}(h; \omega) \mathbf{Y}^{-1} \\ i \mathbf{Y} \text{Sin}(h; \omega) \mathbf{X}^{-1} & \mathbf{Y} \text{Cos}(h; \omega) \mathbf{Y}^{-1} \end{bmatrix} , \quad (4.49)$$

conforme (2.46), sendo  $\text{Cos}(h; \omega)$  e  $\text{Sin}(h; \omega)$  como definidos em (2.45).

#### 4.4.1 A Reflexão e a Transmissão através de Estratificações Anisotrópicas

Considerando-se, agora, uma estratificação com  $N$  camadas, limitada por um semi-espaço superior e por um semi-espaço inferior, a matriz de propagação relacionando a interface superior com a interface inferior, é dada pelo produto das matrizes de propagação de cada camada. Assim,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{b}_X \\ \mathbf{b}_Y \end{bmatrix}_{x_{3inf}} &= \prod_{k=N}^1 \mathbf{Q}_k(h_k) \begin{bmatrix} \mathbf{b}_X \\ \mathbf{b}_Y \end{bmatrix}_{x_{3sup}} \\ &\equiv \mathbf{Q} \begin{bmatrix} \mathbf{b}_X \\ \mathbf{b}_Y \end{bmatrix}_{x_{3sup}}, \end{aligned} \quad (4.50)$$

onde  $\mathbf{Q}_k$  e  $h_k$  correspondem à matriz de propagação e à espessura da  $k$ -ésima camada, respectivamente.

De acordo com (2.42), podemos escrever

$$\begin{bmatrix} \mathbf{b}_X \\ \mathbf{b}_Y \end{bmatrix}_{x_{3N}} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{N+1} & \mathbf{X}_{N+1} \\ \mathbf{Y}_{N+1} & -\mathbf{Y}_{N+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (4.51)$$

onde  $\mathbf{t}$  é o vetor de transmissão das ondas no  $(N+1)$ ésimo meio e porque, na interface  $x_{3N}$ , a matriz  $\mathbf{\Lambda}_{N+1}$  é a matriz identidade.

Analogamente, no caso da interface  $x_{30}$ , temos

$$\begin{bmatrix} \mathbf{b}_X \\ \mathbf{b}_Y \end{bmatrix}_{x_{30}} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_0 & \mathbf{X}_0 \\ \mathbf{Y}_0 & -\mathbf{Y}_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{r} \end{bmatrix}, \quad (4.52)$$

onde  $\mathbf{r}$  é o vetor de reflexão das ondas no meio 0 e  $\mathbf{i}$  o vetor de incidência definido por

$$\mathbf{i} = \begin{bmatrix} i_P \\ i_S \\ i_T \end{bmatrix}.$$

Substituindo (4.51) e (4.52) em (4.50) obtemos

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X}_{N+1} & \mathbf{X}_{N+1} \\ \mathbf{Y}_{N+1} & -\mathbf{Y}_{N+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \mathbf{Q} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_0 & \mathbf{X}_0 \\ \mathbf{Y}_0 & -\mathbf{Y}_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{r} \end{bmatrix}. \quad (4.53)$$

Como

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X}_{N+1} & \mathbf{X}_{N+1} \\ \mathbf{Y}_{N+1} & -\mathbf{Y}_{N+1} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{N+1}^{-1} & \mathbf{Y}_{N+1}^{-1} \\ \mathbf{X}_{N+1}^{-1} & -\mathbf{Y}_{N+1}^{-1} \end{bmatrix}, \quad (4.54)$$

segue-se que

$$\begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{N+1}^{-1} & \mathbf{Y}_{N+1}^{-1} \\ \mathbf{X}_{N+1}^{-1} & -\mathbf{Y}_{N+1}^{-1} \end{bmatrix} \mathbf{Q} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_0 & \mathbf{X}_0 \\ \mathbf{Y}_0 & -\mathbf{Y}_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{r} \end{bmatrix}. \quad (4.55)$$

Lembrando que o propagador  $\mathbf{Q}$  pode também ser escrito como

$$\mathbf{Q} = \frac{1}{2^N} \prod_{k=N}^1 \begin{bmatrix} \mathbf{X}_k & \mathbf{X}_k \\ \mathbf{Y}_k & -\mathbf{Y}_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Lambda_k(h_k; \omega) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Lambda_k^{-1}(h_k; \omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_k^{-1} & \mathbf{Y}_k^{-1} \\ \mathbf{X}_k^{-1} & -\mathbf{Y}_k^{-1} \end{bmatrix}, \quad (4.56)$$

a sua substituição em (4.55) dá

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} &= \mathbf{E}_{N+1,N} \mathbf{P}_N \mathbf{E}_{N,N-1} \dots \mathbf{E}_{2,1} \mathbf{P}_1 \mathbf{E}_{1,0} \begin{bmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{r} \end{bmatrix} \\ &\equiv \mathbf{E}_d \begin{bmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{r} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (4.57)$$

onde cada  $\mathbf{E}_{k,k-1}$ ,  $k = 1, \dots, N+1$  corresponde à uma matriz que controla o espalhamento na interface que separa as camadas  $k$  e  $k-1$  e que é definida por

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{k,k-1} &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_k^{-1} & \mathbf{Y}_k^{-1} \\ \mathbf{X}_k^{-1} & -\mathbf{Y}_k^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{k-1} & \mathbf{X}_{k-1} \\ \mathbf{Y}_{k-1} & -\mathbf{Y}_{k-1} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_k^{-1} \mathbf{X}_{k-1} + \mathbf{Y}_k^{-1} \mathbf{Y}_{k-1} & \mathbf{X}_k^{-1} \mathbf{X}_{k-1} - \mathbf{Y}_k^{-1} \mathbf{Y}_{k-1} \\ \mathbf{X}_k^{-1} \mathbf{X}_{k-1} - \mathbf{Y}_k^{-1} \mathbf{Y}_{k-1} & \mathbf{X}_k^{-1} \mathbf{X}_{k-1} + \mathbf{Y}_k^{-1} \mathbf{Y}_{k-1} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.58)$$

e cada  $\mathbf{P}_k$ ,  $k = 1, \dots, N$  corresponde à matriz de propagação das ondas espalhadas, ascendentes e descendentes, através da  $k$ -ésimo camada e que é definida por

$$\mathbf{P}_k = \begin{bmatrix} \Lambda_k(h_k; \omega) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Lambda_k^{-1}(h_k; \omega) \end{bmatrix}. \quad (4.59)$$

A matriz  $\mathbf{E}_d$  será denominada **matriz descendente de espalhamento** associada à estratificação. Ela determina o espalhamento das ondas na interface inferior a partir do seu espalhamento na interface superior. É bom lembrar que para a sua obtenção, é considerada, naturalmente, a inversibilidade de cada uma das matrizes  $\mathbf{X}_k$  e  $\mathbf{Y}_k$ , correspondentes à  $k$ -ésima camada. Como é conhecido, a não inversibilidade destas matrizes está associada à ocorrência de incidências críticas de propagação das ondas.

A partir de (4.57), obtemos então

$$\begin{bmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{r} \end{bmatrix} = \mathbf{E}_{1,0}^{-1} \mathbf{P}_1^{-1} \mathbf{E}_{2,1}^{-1} \dots \mathbf{E}_{N,N-1}^{-1} \mathbf{P}_N^{-1} \mathbf{E}_{N+1,N}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

(4.60)

$$\equiv \mathbf{E}_d^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} .$$

Como

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{k,k-1}^{-1} &= 2 \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{k-1} & \mathbf{X}_{k-1} \\ \mathbf{Y}_{k-1} & -\mathbf{Y}_{k-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_k^{-1} & \mathbf{Y}_k^{-1} \\ \mathbf{X}_k^{-1} & -\mathbf{Y}_k^{-1} \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{k-1}^{-1} & \mathbf{Y}_{k-1}^{-1} \\ \mathbf{X}_{k-1}^{-1} & -\mathbf{Y}_{k-1}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_k & \mathbf{X}_k \\ \mathbf{Y}_k & -\mathbf{Y}_k \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{k-1}^{-1} \mathbf{X}_k + \mathbf{Y}_{k-1}^{-1} \mathbf{Y}_k & \mathbf{X}_{k-1}^{-1} \mathbf{X}_k - \mathbf{Y}_{k-1}^{-1} \mathbf{Y}_k \\ \mathbf{X}_{k-1}^{-1} \mathbf{X}_k - \mathbf{Y}_{k-1}^{-1} \mathbf{Y}_k & \mathbf{X}_{k-1}^{-1} \mathbf{X}_k + \mathbf{Y}_{k-1}^{-1} \mathbf{Y}_k \end{bmatrix} = \mathbf{E}_{k-1,k} , \end{aligned} \quad (4.61)$$

obtemos que

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{r} \end{bmatrix} &= \mathbf{E}_{0,1} \mathbf{P}_1^{-1} \mathbf{E}_{1,2} \dots \mathbf{E}_{N-1,N} \mathbf{P}_N^{-1} \mathbf{E}_{N,N+1} \begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{E}_u \begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{E}_{u11} & \mathbf{E}_{u12} \\ \mathbf{E}_{u21} & \mathbf{E}_{u22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} , \end{aligned} \quad (4.62)$$

onde  $\mathbf{E}_u = \mathbf{E}_d^{-1}$  corresponde à matriz ascendente de espalhamento associada à estratificação. Ela determina o espalhamento das ondas na interface superior a partir do seu espalhamento na interface inferior. A partir desta matriz, as soluções para os coeficientes  $\mathbf{r}$  e  $\mathbf{t}$  são obtidos e dados por

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \mathbf{E}_{u21} \mathbf{E}_{u11}^{-1} \mathbf{i} \\ \mathbf{t} &= \mathbf{E}_{u11}^{-1} \mathbf{i} . \end{aligned} \quad (4.63)$$

#### 4.4.2 O Caso de uma Simples Camada

O caso de uma camada, por ser mais simples, permite uma melhor interpretação dos vários tipos de propagação, principalmente das chamadas ondas não geométricas como ondas de superfície e ondas guiadas, por exemplo. Neste caso, a matriz ascendente de espalhamento fica sendo  $\mathbf{E}_u = \mathbf{E}_{0,1} \mathbf{P}_1^{-1} \mathbf{E}_{1,2}$  e, portanto,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{u11} &= \frac{1}{4} [(\mathbf{A}_{01} + \mathbf{B}_{01}) \Lambda_1^{-1} (\mathbf{A}_{12} + \mathbf{B}_{12}) + (\mathbf{A}_{01} - \mathbf{B}_{01}) \Lambda_1 (\mathbf{A}_{12} - \mathbf{B}_{12})] \\ &= \frac{1}{4} [(\mathbf{A}_{01} + \mathbf{B}_{01}) \Lambda_1^{-1} (\mathbf{I} + \mathbf{\Pi}) (\mathbf{A}_{12} + \mathbf{B}_{12})] \end{aligned} \quad (4.64)$$

e

$$\mathbf{E}_{u21} = \frac{1}{4}[(\mathbf{A}_{01} - \mathbf{B}_{01})\Lambda_1^{-1}(\mathbf{A}_{12} + \mathbf{B}_{12}) + (\mathbf{A}_{01} + \mathbf{B}_{01})\Lambda_1(\mathbf{A}_{12} - \mathbf{B}_{12})] , \quad (4.65)$$

com

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{01} &= \mathbf{X}_0^{-1}\mathbf{X}_1 \\ \mathbf{B}_{01} &= \mathbf{Y}_0^{-1}\mathbf{Y}_1 \\ \mathbf{A}_{12} &= \mathbf{X}_1^{-1}\mathbf{X}_2 \\ \mathbf{B}_{12} &= \mathbf{Y}_1^{-1}\mathbf{Y}_2 , \end{aligned}$$

I, a matriz identidade e

$$\begin{aligned} \mathbf{\Pi} &= -\Lambda_1(\mathbf{A}_{01}^{-1} - \mathbf{B}_{01}^{-1})(\mathbf{A}_{01}^{-1} + \mathbf{B}_{01}^{-1})^{-1}\Lambda_1(\mathbf{A}_{12} - \mathbf{B}_{12})(\mathbf{A}_{12} + \mathbf{B}_{12})^{-1} \\ &= -\Lambda_1(\mathbf{A}_{10} - \mathbf{B}_{10})(\mathbf{A}_{10} + \mathbf{B}_{10})^{-1}\Lambda_1(\mathbf{A}_{12} - \mathbf{B}_{12})(\mathbf{A}_{12} + \mathbf{B}_{12})^{-1} , \end{aligned} \quad (4.66)$$

onde  $\mathbf{A}_{01}^{-1} = \mathbf{X}_1^{-1}\mathbf{X}_0 = \mathbf{A}_{10}$  e  $\mathbf{B}_{01}^{-1} = \mathbf{Y}_1^{-1}\mathbf{Y}_0 = \mathbf{B}_{10}$ .

Assim sendo, o coeficiente de transmissão é dado por

$$\mathbf{t} = \mathbf{E}_{u11}^{-1}\mathbf{i} = [2(\mathbf{A}_{12} + \mathbf{B}_{12})^{-1}](\mathbf{I} - \mathbf{\Pi})^{-1}\Lambda_1[2(\mathbf{A}_{01} + \mathbf{B}_{01})^{-1}]\mathbf{i} . \quad (4.67)$$

De (2.11), observamos que

- $\mathbf{T}_{01} = 2(\mathbf{A}_{01} + \mathbf{B}_{01})^{-1}$  corresponde exatamente à amplitude da onda transmitida através da interface que separa os meios 0 e 1, no meio 1.
- $\mathbf{T}_{12} = 2(\mathbf{A}_{12} + \mathbf{B}_{12})^{-1}$  corresponde exatamente à amplitude da onda transmitida através da interface que separa os meios 1 e 2, no meio 2.
- $\mathbf{R}_{10} = (\mathbf{A}_{10} - \mathbf{B}_{10})(\mathbf{A}_{10} + \mathbf{B}_{10})^{-1}$  corresponde exatamente à amplitude da onda refletida através da interface que separa os meios 1 e 0, no meio 1.
- $\mathbf{R}_{12} = (\mathbf{A}_{12} - \mathbf{B}_{12})(\mathbf{A}_{12} + \mathbf{B}_{12})^{-1}$  corresponde exatamente à amplitude da onda transmitida através da interface que separa os meios 1 e 2, no meio 1.

Logo, o coeficiente de transmissão pode ser escrito como

$$\begin{aligned} \mathbf{t} &= \mathbf{T}_{12}(\mathbf{I} - \Lambda_1\mathbf{R}_{10}\Lambda_1\mathbf{R}_{12})^{-1}\Lambda_1\mathbf{T}_{01}\mathbf{i} \\ &= \mathbf{T}_{12}(\mathbf{I} - \mathbf{\Pi})^{-1}\Lambda_1\mathbf{T}_{01}\mathbf{i} . \end{aligned} \quad (4.68)$$

A expressão acima traduz todo o processo de propagação da onda transmitida através da camada e o operador

$$(\mathbf{I} - \mathbf{\Pi})^{-1} = \mathbf{I} + \mathbf{\Pi} + \mathbf{\Pi}^2 + \mathbf{\Pi}^3 + \dots \quad (4.69)$$

constitui o chamado **operador de reverberação** e cada uma de suas parcelas é responsável pela descrição de cada múltipla envolvida na propagação através da camada.

Com a substituição de (4.64) e (4.65) em (4.63), mais o uso da identidade

$$(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \mathbf{I} + \mathbf{A}(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \quad , \quad (4.70)$$

o coeficiente de reflexão pode ser escrito como

$$\mathbf{r} = \{\mathbf{R}_{01} + \frac{1}{2}[(\mathbf{A}_{01} - \mathbf{B}_{01})\mathbf{R}_{10} + (\mathbf{A}_{01} + \mathbf{B}_{01})]\mathbf{\Lambda}_1\mathbf{R}_{12}(\mathbf{I} - \mathbf{\Pi})^{-1}\mathbf{T}_{01}\}\mathbf{i} \quad . \quad (4.71)$$

Com o uso sistemático e cuidadoso de (4.65), o coeficiente  $\mathbf{r}$  pode ser, então, calculado como

$$\mathbf{r} = [\mathbf{R}_{01} + \mathbf{T}_{10}\mathbf{\Lambda}_1\mathbf{R}_{12}(\mathbf{I} - \mathbf{\Pi})^{-1}\mathbf{\Lambda}_1\mathbf{T}_{01}]\mathbf{i} \quad . \quad (4.72)$$

Como no caso da onda transmitida, a equação acima descreve toda a história da reflexão das ondas através das camadas. Observa-se nos dois casos, que a obtenção dos referidos coeficientes só dependem do cálculo dos coeficientes de reflexão e transmissão em cada interface e do operador de propagação em cada camada.

#### 4.4.3 A Reflexão e a Transmissão de Pulsos através de Estratificações Anisotrópicas

A obtenção dos pulsos refletidos e transmitidos através de camadas anisotrópicas é muito mais complexa que o caso de apenas uma interface, uma vez que a dependência das matrizes de reflexão e de transmissão com relação à frequência é, agora, bem mais intrincada. Esta complicação reflete, naturalmente, a complexidade do espalhamento das ondas através das várias camadas não permitindo assim a decomposição dos coeficientes destas matrizes em expressões análogas à (4.32) ou (4.43). Entretanto, é possível uma representação formal para estes pulsos, semelhante à já estudada no caso de apenas uma interface. Para isto, sejam os vetores de reflexão e transmissão representados por

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \mathbf{R}(\omega)\mathbf{i} \\ \mathbf{t} &= \mathbf{T}(\omega)\mathbf{i}, \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(\omega) &= \mathbf{E}_{u21}\mathbf{E}_{u11}^{-1} \\ \mathbf{T}(\omega) &= \mathbf{E}_{u11}^{-1} \end{aligned}$$

são as matrizes de reflexão e transmissão associadas à estratificação. Tomando  $x_3 > x_{3N}$  e considerando a componente vertical  $s'_{3Q}$  da vagarosidade correspondente ao  $(N + 1)$ -ésimo meio, uma componente típica do pulso transmitido neste meio tem a forma

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} n'_{iK}{}^+(\omega) T_{KQ}(\omega) F_Q(\omega) \exp \omega(\mathbf{s}_H \cdot \mathbf{x} + s'_{3Q}x_3 - t) d\omega, \quad (4.73)$$

analogamente ao caso de uma interface e definida em (4.10). Entretanto, apenas a matriz de polarização  $\mathbf{n}'^+$  apresenta-se na forma de (4.23), o que não é o caso da matriz de transmissão  $\mathbf{T}$ . Todavia, através de manipulações inteiramente análogas ao caso de uma interface, o sinal analítico transmitido através de uma estratificação, pode ser escrito como

$$\frac{\mathbf{n}'^+}{\pi} \int_0^{\infty} \mathbf{T}(\omega) \Lambda'_{N+1\Im}(x_3; \omega) \Lambda'_{N+1\Re}(x_3; \omega) \begin{bmatrix} F_P(\omega) \\ F_S(\omega) \\ F_T(\omega) \end{bmatrix} \exp \omega(\mathbf{s}_H \cdot \mathbf{x} - t) d\omega, \quad (4.74)$$

onde  $\Lambda'_{N+1\Re}(x_3; \omega)$  e  $\Lambda'_{N+1\Im}(x_3; \omega)$  são como definidos em (4.31).

Tomando  $x_3 < x_{30}$  e  $s_{3Q}$  como a componente vertical da vagarosidade correspondente ao meio 0, o meio de incidência, o pulso refletido, através de argumentos inteiramente análogos ao caso transmitido, pode ser escrito como

$$\frac{\mathbf{n}^-}{\pi} \int_0^{\infty} \mathbf{R}(\omega) \Lambda_{0\Im}^{-1}(x_3; \omega) \Lambda_{0\Re}^{-1}(x_3; \omega) \begin{bmatrix} F_P(\omega) \\ F_S(\omega) \\ F_T(\omega) \end{bmatrix} \exp \omega(\mathbf{s}_H \cdot \mathbf{x} - t) d\omega. \quad (4.75)$$

Nota-se que todos os fatores que determinam a deformação dos pulsos refletidos e transmitidos através de uma interface também deformam tais pulsos através de uma estratificação. Como cada componente das matrizes de reflexão e transmissão contém fatores do tipo  $\Lambda_k(h_k; \omega)$  que dependem exponencialmente de  $s_{3kQ}$  - a componente vertical da vagarosidade da  $k$ -ésima camada - e de  $h_k$  - a espessura da  $k$ -ésima camada - é claro que em situações pós-críticas as amplitudes dos coeficientes terão decaimento exponencial dependente de tais espessuras. Por outro lado,  $\mathbf{R}$  e  $\mathbf{T}$  dependem fundamentalmente da inversibilidade de matrizes do tipo  $\mathbf{X}_k^{-1} \mathbf{X}_{k+1} + \mathbf{Y}_k^{-1} \mathbf{Y}_{k+1}$  ou  $\mathbf{X}_{k+1}^{-1} \mathbf{X}_k + \mathbf{Y}_{k+1}^{-1} \mathbf{Y}_k$  ou mesmo de matrizes similares, conforme teoria do capítulo 2. Logo, no caso da não inversibilidade de alguma destas matrizes, eventos não-geométricos mais complexos podem ocorrer no espalhamento de ondas através de uma estratificação. Dentre tais eventos podemos citar o aparecimento dos modos normais e 'leaky mode', além, é claro, das usuais ondas de superfície, tipo Stoneley, por exemplo.

#### 4.4.4 A Propagação de Pulsos através de Estratificações Finas em Limite Quasi-estático

No estudo da propagação de pulsos através de camadas finas em limite quase estático, será considerada, exatamente como descrito no capítulo 2, a condição  $\omega h s_3 \ll 1$ , onde  $h$  é

a espessura da camada. Neste caso, a matriz de propagação desta camada fica como

$$\mathbf{Q}(h) \approx \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \omega h \mathbf{XSY}^{-1} \\ \omega h \mathbf{YSX}^{-1} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (4.76)$$

que corresponde exatamente à aproximação de primeira ordem da matriz  $\mathbf{Q}(h)$  conforme definida em (2.46) em relação à frequência  $\omega$ . As matrizes  $\mathbf{XSY}^{-1}$  e  $\mathbf{YSX}^{-1}$  são definidas conforme (2.51) e (2.52), para os casos de dimensões dois e três, respectivamente.

Para uma estratificação com  $N$  camadas, que é o caso que será aqui abordado, a matriz de propagação representativa deste pacote de camadas é dada por

$$\mathbf{Q}(H) \approx \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \omega H \langle \mathbf{XSY}^{-1} \rangle \\ \omega H \langle \mathbf{YSX}^{-1} \rangle & \mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad (4.77)$$

onde  $H = \sum_{i=1}^N h_i$  é a espessura total da estratificação e  $\langle . \rangle$  denota a média ponderada pelas espessuras de cada camada, conforme (2.53).

A questão básica, portanto, fica sendo a determinação do meio anisotrópico efetivo que corresponda, dentro das hipóteses de propagação quasi-estática, à este pacote de meios estratificados. Determinado este meio, a tarefa de obtenção do espalhamento de pulsos através destas camadas segue exatamente o caso de apenas uma camada, já anteriormente estudado.

Para isto, sejam  $\mathbf{X}_{eq}$ ,  $\mathbf{Y}_{eq}$  as matrizes de impedância do meio efetivo e  $\mathbf{S}_{eq}$  como em (2.49). Exigindo-se que

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{XSY}^{-1} \rangle &= \mathbf{X}_{eq} \mathbf{S}_{eq} \mathbf{Y}_{eq}^{-1} \\ \langle \mathbf{YSX}^{-1} \rangle &= \mathbf{Y}_{eq} \mathbf{S}_{eq} \mathbf{X}_{eq}^{-1} \end{aligned}$$

e comparando-se cada uma de suas componentes, obtemos as identidades

$$\begin{aligned} \rho_{eq} &= \langle \rho \rangle \\ c_{eq55} &= \langle 1/c_{55} \rangle^{-1} \\ \rho_{eq} - (c_{eq11} - c_{eq13}^2/c_{eq33})s_1^2 &= \langle \rho \rangle - (\langle c_{11} \rangle - \langle c_{13}^2/c_{33} \rangle)s_1^2 \\ c_{eq13}/c_{eq33}s_1 &= \langle c_{13}/c_{33} \rangle s_1 \\ c_{eq33} &= \langle 1/c_{33} \rangle^{-1} \end{aligned} \quad (4.78)$$

para o caso de dimensão dois e

$$\begin{aligned} \rho_{eq} &= \langle \rho \rangle \\ e_{eq44} &= \langle e_{44} \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e_{eq45} &= \langle e_{45} \rangle \\
e_{eq55} &= \langle e_{55} \rangle \\
\rho_{eq} - d_{eq11}s_1^2 - 2d_{eq16}s_1s_2 - d_{eq66}s_2^2 &= \langle \rho \rangle - \langle d_{11} \rangle s_1^2 - 2 \langle d_{16} \rangle s_1s_2 - \langle d_{66} \rangle s_2^2 \\
d_{eq16}s_1^2 + (d_{eq12} + d_{eq66})s_1s_2 + d_{eq26}s_2^2 &= \langle d_{16} \rangle s_1^2 + (\langle d_{12} \rangle + \langle d_{66} \rangle) s_1s_2 + \langle d_{26} \rangle s_2^2 \\
f_{eq13}s_1 + f_{eq36}s_2 &= \langle f_{13} \rangle s_1 + \langle f_{36} \rangle s_2 \\
\rho_{eq} - d_{eq66}s_1^2 - 2d_{eq26}s_1s_2 - d_{eq22}s_2^2 &= \langle \rho \rangle - \langle d_{66} \rangle s_1^2 - 2 \langle d_{26} \rangle s_1s_2 - \langle d_{22} \rangle s_2^2 \\
f_{eq36}s_1 + f_{eq23}s_2 &= \langle f_{36} \rangle s_1 + \langle f_{23} \rangle s_2 \\
c_{eq33} &= \langle 1/c_{33} \rangle^{-1}
\end{aligned} \tag{4.79}$$

para o caso de dimensão três, onde  $e_{ij} = c_{ij}/(c_{44}c_{55} - c_{45}^2)$ ,  $i, j = 4$  ou  $5$ ;  $d_{ij} = c_{ij} + c_{i3}c_{j3}/c_{33}$ ,  $i, j = 1, 2$  ou  $6$  e  $f_{i3} = c_{i3}/c_{33}$ ,  $i = 1, 2$  ou  $6$ . Aqui, o subscrito  $eq$  indica os parâmetros relacionados com o meio efetivo.

Como o resultado vale para quaisquer valores de  $s_1$  e  $s_2$ , a identificação correspondente nos dois lados das equações definidas em (4.78) e (4.79) determina o meio anisotrópico efetivo resultante e que é definido por

$$\begin{aligned}
\rho_{eq} &= \langle \rho \rangle \\
c_{eq11} &= \langle c_{11} \rangle + \langle c_{13}/c_{33} \rangle^2 \langle 1/c_{33} \rangle^{-1} - \langle c_{13}^2/c_{33} \rangle \\
c_{eq13} &= \langle c_{13}/c_{33} \rangle \langle 1/c_{33} \rangle^{-1} \\
c_{eq33} &= \langle 1/c_{33} \rangle^{-1} \\
c_{eq55} &= \langle 1/c_{55} \rangle^{-1},
\end{aligned} \tag{4.80}$$

para o caso de dimensão dois e

$$\begin{aligned}
\rho_{eq} &= \langle \rho \rangle \\
c_{eqi3} &= \langle f_{i3} \rangle \langle 1/c_{33} \rangle^{-1} = \langle c_{i3}/c_{33} \rangle \langle 1/c_{33} \rangle^{-1}, \quad i = 1, 2, 3 \text{ ou } 6 \\
c_{eqij} &= \langle e_{ij} \rangle [\langle e_{44} \rangle \langle e_{55} \rangle - \langle e_{45} \rangle^2]^{-1}, \quad i = 4 \text{ ou } 5 \\
c_{eqij} &= \langle c_{ij} \rangle + \langle c_{i3}c_{j3}/c_{33} \rangle - \langle c_{i3}/c_{33} \rangle \langle c_{j3}/c_{33} \rangle \langle 1/c_{33} \rangle^{-1}, \\
i &= 1, 2, \text{ ou } 6
\end{aligned} \tag{4.81}$$

para o caso de dimensão três.

Assim sendo, os coeficientes de reflexão e de transmissão para este caso ficam sendo

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}_{eq} &= \mathbf{R}_{0eq} + \mathbf{T}_{eq0} \mathbf{\Lambda}_{eq} \mathbf{R}_{eq2} (\mathbf{I} - \mathbf{\Lambda}_{eq} \mathbf{R}_{eq0} \mathbf{\Lambda}_{eq} \mathbf{R}_{eq2})^{-1} \mathbf{\Lambda}_{eq} \mathbf{T}_{0eq} \\
\mathbf{T}_{eq} &= \mathbf{T}_{eq2} (\mathbf{I} - \mathbf{\Lambda}_{eq} \mathbf{R}_{eq0} \mathbf{\Lambda}_{eq} \mathbf{R}_{eq2})^{-1} \mathbf{\Lambda}_{eq} \mathbf{T}_{0eq},
\end{aligned} \tag{4.82}$$

onde novamente o subscrito  $eq$ , aqui utilizado, se refere ao meio efetivo e 0 e 2 aos semi-espacos superior e inferior, respectivamente.

#### 4.5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Foi apresentado um estudo analítico para a obtenção do espalhamento de pulsos através de meios anisotrópicos estratificados e com interfaces planas e horizontais, em regime de propagação pós-crítica. O grau de simetria exigido para os meios anisotrópicos, componentes da estratificação, foi o de que eles possuam pelo menos um plano horizontal de simetria especular. Os meios mais gerais que apresentam este padrão de anisotropia são os monoclinicos, com seu plano de simetria horizontal. Do ponto de vista aplicado, estes meios são bastante razoáveis, uma vez que eles englobam meios TI e meios ortorrômbicos, usados como modelos para estratificações finas em limite quasi-estático e para regiões com fraturas verticais, respectivamente.

A partir da teoria desenvolvida no capítulo 2 e do importante conceito de pulso analítico associado a um pulso real, representações integrais foram obtidas para os pulsos refletidos e transmitidos, seja para o caso de apenas dois meios separados por interface plana horizontal seja para estratificações horizontais mais gerais. O aspecto básico que permitiu a obtenção de tais soluções foi o fato de que, em incidência pós-crítica, as componentes verticais da vagarosidade  $e$ , conseqüentemente, os vetores de polarização, as matrizes de impedância e as matrizes de espalhamento apresentam dependência da frequência  $\omega$ , na forma  $a + i\text{sgn}(\omega)b$ , com  $a$  e  $b$  parâmetros reais. Com a condição de radiação, tais componentes, vetores e matrizes passam a ser, então, funções hermitianas de  $\omega$  e suas amplitudes não dependem da frequência, enquanto suas fases dependem linearmente de  $\text{sgn}(\omega)$ . Isto permite, portanto, a obtenção do pulso analítico associado a cada pulso espalhado e, conseqüentemente, do próprio pulso espalhado. Estas expressões mostram, claramente, os fatores que determinam a deformação de cada pulso espalhado, através das camadas. Dentre eles, pode-se destacar as amplitudes e as fases dos coeficientes de espalhamento e das polarizações, o decaimento exponencial da amplitude com a profundidade e a forma inicial do pulso. Estas deformações se manifestam através de mudanças nas formas do pulso espalhado, na sua mudança de fase e no comportamento elíptico de suas polarizações. O caso mais simples de apenas uma camada, foi estudado mais detalhadamente e os coeficientes de reflexão e transmissão associados a esta camada, foram obtidos em termos do conhecido operador de reverberação. Foi mostrado, além disso, que o cálculo destes coeficientes dependem, essencialmente, das reflexões e das transmissões individuais em cada interface como também da matriz de propagação associada à camada em questão. A ocorrência dos chamados modos normais ou de ondas de superfície

foram explicadas, então, pela não inversibilidade das matrizes que definem a reflexão ou a transmissão, através de cada interfaces. Estas conclusões podem ser extendidas para o caso de estratificações mais gerais.

Foi feita uma aplicação do caso de uma camada, ao caso de estratificações formadas por camadas finas, em limite quasi-estático, ou seja, em propagação de ondas com grande comprimento de onda. Mostrou-se que tais meios se comportam efetivamente como uma camada monoclinica. As matrizes dos coeficientes das ondas espalhadas foram obtidas analiticamente, em termos do operador de reverberação, considerando-se, neste caso, a camada efetiva.

## 5 - EXEMPLOS NUMÉRICOS

### 5.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Neste capítulo são apresentados alguns experimentos numéricos, aplicados no estudo do espalhamento de ondas através de interfaces horizontais que separam meios anisotrópicos com plano horizontal de simetria especular. São introduzidos exemplos que evidenciam a ocorrência de alguns efeitos com grande potencialidade de diagnóstico da presença de anisotropia a partir do comportamento das amplitudes das ondas refletidas (importantes na análise de AVO e AVA) e das ondas transmitidas (importantes no estudo de PSV), em comparação com os efeitos resultantes da utilização de experimentos com modelos isotrópicos. Além disso, são apresentados sismogramas de ondas planas que mostram o efeito da incidência, do azimute e dos parâmetros elásticos dos meios, na deformação dos pulsos das ondas espalhadas. São mostrados, também, alguns padrões de polarização destas ondas, enfatizando, principalmente, a incidência pós-crítica, uma vez que neste tipo de incidência as ondas são, em geral, elipticamente polarizadas.

Este tipo de abordagem já foi estabelecido por outros autores. FRYER & FRAZER (1987) desenvolveram trabalho onde sismogramas sintéticos de ondas planas são apresentados, considerando-se o caso de meios anisotrópicos com plano horizontal de simetria especular. Para este caso, a obtenção das auto-soluções, usadas no cálculo dos sismogramas sintéticos, é feita de forma analítica. Uma discussão da variação azimutal e do ângulo de incidência é, então, apresentada. CRAMPIN (1985), visando analisar o importante efeito da birrefringência para a caracterização de padrões de fraturamento do meio, estudou o espalhamento de ondas qS através de uma camada anisotrópica. Os resultados foram apresentados através de sismogramas de ondas planas e de diagramas de polarização ou hodogramas, considerando-se tanto a variação azimutal quanto a do ângulo de incidência. Foi evidenciada a grande sensibilidade dos padrões de polarização às variações dos parâmetros do modelo. KERNER et al. (1989), estudando as velocidades de fase e de grupo pelo método das características e sismogramas sintéticos, através de esquemas de diferenças finitas combinados com séries finitas de Hankel, encontrou marcantes diferenças no comportamento da propagação de ondas ao considerar modelos isotrópicos e transversalmente isotrópicos. Foi evidenciado a ocorrência dos chamados pontos de triplicação na propagação das ondas qS através de meios TI. Mesmo no caso de fraca anisotropia, a ocorrência destes pontos produzem significativos efeitos sobre

as amplitudes das ondas qS. A aplicação destes resultados a dados reais mostraram que as diferentes curvas de afastamento para as ondas qSV e qSH, indicam presença de anisotropia no meio estudado.

A aplicação deste tipo de método a dados reais tem crescido bastante nestes últimos anos, principalmente, no caso da propagação de ondas cisalhantes por causa do fenômeno da birrefringência destas ondas. Atualmente, a birrefringência constitui um promissor atributo com grande potencialidade de diagnóstico da presença de anisotropia. Relevantes estudos têm sido realizados para um melhor entendimento deste fenômeno e, conseqüentemente, sua utilização prática. O conhecimento dos planos de polarização destas ondas e da diferença dos seus tempos de chegada, pode fornecer importantes informações sobre os padrões de fraturamento e da extensão do meio anisotrópico por elas atravessado (CRAMPIN et al., 1989). A sua potencialidade de aplicabilidade na caracterização de reservatórios tem propiciado, portanto, um crescente interesse na sismica de exploração.

Através de técnica conhecida e que torna possível acompanhar as mudanças das polarizações e determinar as birrefringências das ondas cisalhantes através das sucessivas camadas, WINTERSTEIN & MEADOWS (1991a e 1991b) estudaram o efeito da variação azimutal da polarização das ondas S com a profundidade, em dados de PSV, obtidos em campos de petróleo. Estimativas de parâmetros físicos de reservatórios fraturados a partir da birrefringência destas ondas, foram, também, estudadas por BRODOV et al. (1991) e por CLIET et al. (1991). KIM et al. (1993), através da análise de amplitude aplicada a modelos com dados reais, mostrou que, na reflexão da onda qP, através de dois meios TI separados por interface horizontal, as variações dos parâmetros elásticos entre os dois meios produzem efeitos significativos sobre as amplitudes das ondas refletidas.

No estudo dos efeitos da presença de anisotropia sobre a amplitude das ondas espalhadas e do estado de polarização destas ondas, foram considerados, primeiramente, dois meios isotrópicos separados por uma interface horizontal plana. Posteriormente, o meio inferior foi substituído por um meio efetivamente anisotrópico, obtido através de um modelo fraturado, desenvolvido por HOOD (1990). Estudos comparativos destes efeitos foram, então, analisados. Já para a análise da deformação dos pulsos espalhados, foram considerados, então, primeiramente uma camada isotrópica, intercalado por dois semi-espacos isotrópicos e, posteriormente, esta camada substituída por outra, fraturada, segundo o modelo de Hood. Na primeira seção, é analisado o efeito da variação do ângulo de incidência, do azimute e dos padrões de fraturamento nas amplitudes das ondas espalhadas. Os resultados são apresentados na forma de mapas de amplitudes, no sentido de enfatizar a variação das amplitudes nos vários casos. Na segunda seção, é analisado o efeito da presença de anisotropia e de

camada na deformação dos pulsos espalhados. Os resultados são apresentados através de sismogramas de ondas planas. Na terceira seção, é apresentada uma análise das polarizações das ondas espalhados, visando estudar seus comportamentos, principalmente em incidência pós-crítica, onde as ondas são elipticamente polarizadas. Os resultados são apresentados através de hodogramas e de mapas de elipticidade.

## 5.2 DESCRIÇÃO DOS MODELOS ESTUDADOS

O objetivo básico deste capítulo, além do estudo da variação das amplitudes e das polarizações com relação aos ângulos de incidência e azimutal, principalmente para o caso da incidência pós-crítica, foi o de comparar o comportamento destes atributos com relação à variação do grau de anisotropia dos meios envolvidos. Para estes experimentos, foi, então, considerado um modelo de dois semi-espacos, separados por uma interface horizontal plana, sendo o semi-espaco incidente, um meio isotrópico com densidade  $\rho = 2,13 \text{ g/cm}^3$  e velocidades  $\alpha = 2,02 \text{ km/s}$  e  $\beta = 1,23 \text{ km/s}$ , correspondente a um arenito, segundo KIM et al. (1993). Para o semi-espaco inferior, foi tomado um meio transversalmente isotrópico(TI), correspondente a um calcáreo argiloso hipotético com densidade  $\rho = 2,44 \text{ g/cm}^3$  e parâmetros elásticos  $c_{11} = 33,8154 \times 10^9 \text{ N/m}^2$ ,  $c_{13} = 14,2983 \times 10^9 \text{ N/m}^2$ ,  $c_{33} = 26,6683 \times 10^9 \text{ N/m}^2$ ,  $c_{44} = 8,0734 \times 10^9 \text{ N/m}^2$  e  $c_{66} = 10,5923 \times 10^9 \text{ N/m}^2$ , segundo THOMSEN (1986). Para a simulação do meio fraturado, foi usado o modelo de Hood. Este meio efetivo, em limite de propagação quase estática, modela uma matriz TI, dotada de grandes fraturas verticais com planos de fraturas perpendiculares à direção  $x_1$ . A sua densidade é a mesma da matriz TI, enquanto seus parâmetros elásticos são definidos por

$$\begin{aligned}
 c_{11} &= c_{11b}(1 - \delta_N) , & c_{12} &= c_{12b}(1 - \delta_N) , \\
 c_{13} &= c_{13b}(1 - \delta_N) , & c_{22} &= c_{11b}\left(1 - \frac{\delta_N c_{12b}^2}{c_{11b}^2}\right) , \\
 c_{23} &= c_{13b}\left(1 - \frac{\delta_N c_{12b}}{c_{11b}}\right) , & c_{33} &= c_{33b}\left(1 - \frac{\delta_N c_{13b}^2}{c_{11b} c_{33b}}\right) , \\
 c_{44} &= c_{44b} , & c_{55} &= c_{44b}(1 - \delta_3) , \\
 c_{66} &= c_{66b}(1 - \delta_2) ,
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

onde os  $c_{ijb}$  correspondem aos parâmetros elásticos da matriz TI e os parâmetros de fratura  $\delta_N$ ,  $\delta_2$  e  $\delta_3$  correspondem a frações do excesso de compliância nas direções normal e paralela aos planos de fratura, respectivamente, e satisfazem os vínculos físicos

$$0 \leq \delta_N , \delta_3 , \delta_2 < 1. \tag{5.2}$$

No modelo de Hood, apenas oito parâmetros elásticos são necessários para a caracterização do meio fraturado, uma vez que é verificada a relação

$$c_{22} = \frac{c_{23}}{c_{13}}(c_{11} + c_{12}) - c_{12} .$$

A Figura 5.1 (a) ilustra um meio TI efetivamente equivalente a uma estratificação de finas camadas isotrópicas em regime quasi-estático e a Figura 5.2 (b), um meio TI fraturado com planos de fraturas perpendiculares à direção  $x_1$ .

### 5.3 O EFEITO DE FRATURAMENTO NAS AMPLITUDES DAS ONDAS ESPALHADAS

Nesta seção foi estudado o efeito da presença de fraturas nas amplitudes das ondas espalhadas, considerando-se apenas a incidência de uma onda longitudinal P, mas levando-se em conta tanto as ondas refletida  $r_{PP}$  e transmitida  $t_{PP}$ , quanto as convertidas  $r_{SP}$ ,  $r_{TP}$ ,  $t_{SP}$  e  $t_{TP}$ . O meio incidente é o descrito anteriormente. Como o estudo foi para comparar principalmente as diferenças do comportamento das amplitudes em experimentos com e sem fraturamento, escolheu-se, inicialmente, para semi-espço inferior, um meio isotrópico com suas velocidades longitudinais e cisalhantes dadas pelas correspondentes velocidades verticais do meio TI, definido anteriormente. Suas velocidades são dadas por  $\alpha = \sqrt{c_{33b}/\rho}$  e  $\beta = \sqrt{c_{55b}/\rho}$  e sua densidade, a mesma da matriz. Numericamente, seus valores são dados por  $\rho = 2,44 \text{ g/cm}^3$ ,  $\alpha = 3,306 \text{ km/s}$  e  $\beta = 1,819 \text{ km/s}$ . Posteriormente, o meio TI foi fraturado, tomando-se como parâmetros de fratura  $\delta_N = 0,4$ ,  $\delta_2 = 0,5$  e  $\delta_3 = 0,5$ . Nos dois experimentos, não foi utilizada a propagação de pulsos, mas apenas a propagação de uma onda plana com frequência de  $50 \text{ Hz}$ . A Figura 5.2 (a) descreve a estrutura geral do espalhamento das ondas usada nestes experimentos numéricos.

As amplitudes das ondas espalhadas foram calculadas em termos dos ângulos de incidência e azimutal, e os resultados apresentados em diagramas de amplitudes, só que traçados em termos das componentes horizontais do vetor de vazarosidade,  $s_1$  e  $s_2$ , para marcar, principalmente, o efeito da variação azimutal no comportamento das amplitudes.

Com relação ao experimento isotrópico - isotrópico, observa-se, como era esperado, a total independência azimutal da variação das amplitudes das ondas espalhadas. Outro fato relevante que se observa nos resultados obtidos, é a não conversão de ondas P em ondas SH, típica em meios isotrópicos. Isto se reflete no fato das amplitudes de  $r_{TP}$  e  $t_{TP}$  serem todas nulas. As Figuras 5.3 (a), 5.3 (b), 5.4 (a) e 5.4 (b) descrevem o comportamento das amplitudes de  $r_{PP}$ ,  $t_{PP}$ ,  $r_{SP}$  e  $t_{SP}$ , respectivamente.

Quanto ao experimento isotrópico - ortorrômico, são observados significativos aspectos que caracterizam a dependência azimutal da variação das amplitudes das ondas espalhadas, principalmente nas direções sub-normais e sub-paralelas aos planos de fraturas. Com relação à reflexão  $r_{pp}$ , observa-se poucas diferenças nas amplitudes ao longo de direções próximas de  $s_2$ , que correspondem exatamente às direções sub-paralelas aos planos de fraturas. Nas direções próximas de  $s_1$ , que correspondem às direções sub-normais aos planos de fraturas, estas diferenças são bem mais pronunciadas, o que leva a sugerir, portanto, uma maior sensibilidade da reflexão de ondas P ao longo de direções sub-normais aos planos de fraturas. Comportamento análogo se manifesta, também, com relação à transmissão  $t_{pp}$ , se bem que com mais ênfase do que no caso da reflexão. As Figuras 5.5 (a) e 5.5 (b) descrevem o comportamento das amplitudes de  $r_{pp}$  e  $t_{pp}$ , neste caso.

Quanto à reflexão da convertida  $r_{sp}$ , observam-se efeitos bem mais significativos que no caso  $r_{pp}$ , tanto nas direções sub-paralelas quanto nas sub-normais aos planos de fraturas, o mesmo acontecendo no caso da transmissão  $t_{sp}$ , onde severas alterações nas direções sub-paralelas aos planos de fraturas são verificadas. Ao longo das direções sub-normais, estas alterações são ainda bem mais evidentes do que no caso  $t_{pp}$ . Isto sugere concluir uma maior sensibilidade da onda S à presença de anisotropia do que da onda P. As Figuras 5.6 (a) e 5.6 (b) descrevem o comportamento das amplitudes de  $r_{sp}$  e  $t_{sp}$ , neste caso.

Quanto à reflexão da convertida  $r_{TP}$ , verifica-se uma insensibilidade total das amplitudes da onda refletida nas direções sub-paralelas e sub-normais aos planos de fraturas. Fora destas direções, são verificados significativos efeitos, principalmente após ângulos críticos. Em relação à transmissão  $t_{TP}$ , novamente acontece uma insensibilidade da amplitude em direções sub-paralelas aos planos de fraturas, só que para pequenos azimutes. Para amplos ângulos azimutais, verifica-se significativas mudanças nestas amplitudes, com ênfase nas direções sub-normais aos planos de fraturas. O comportamento das amplitudes de  $r_{TP}$  e  $t_{TP}$  ressalta uma diferença básica entre o comportamento do espalhamento de ondas em meios isotrópicos e em meios com anisotropia. É a ocorrência de conversão de ondas P em outros tipos de ondas no caso anisotrópico, coisa que não ocorre no caso isotrópico, pelo menos com relação à conversão P - SH. As Figuras 5.7 (a) e 5.7 (b) descrevem o comportamento das amplitudes de  $r_{TP}$  e  $t_{TP}$ , neste caso.

#### 5.4 O EFEITO DE FRATURAMENTO NA DEFORMAÇÃO DOS PULSOS ESPALHADOS

Nesta seção, foi estudado o efeito da presença de anisotropia na deformação dos pulsos espalhados através de um simples modelo de três camadas, que consiste de uma camada, intercalada por dois semi-espacos isotrópicos. Um esquema da estrutura geral do espalhamento das ondas, para este estudo, é mostrado na Figura 5.2 (b).

Novamente, aqui, o semi-espaço incidente foi tomado como o mesmo descrito na primeira seção. Este mesmo meio foi também usado como o semi-espaço inferior. Para a camada, nos dois experimentos, foi tomado, primeiramente, o meio isotrópico inferior descrito na seção anterior e, posteriormente, o mesmo meio fraturado anteriormente. As Figuras 5.8 (a) e 5.8 (b) descrevem, numericamente, os modelos utilizados nos dois experimentos, respectivamente. Em ambos os casos, a espessura da camada foi de  $0,5km$ . As medidas das reflexões e transmissões foram feitas ao longo do eixo vertical, à uma distância de  $0,5km$  acima do topo da camada, para as reflexões e  $0,2km$  abaixo da base da camada, para as transmissões.

Sismogramas de ondas planas foram, então, calculados. Para a construção destas figuras, as respostas das estruturas foram computadas no domínio  $(s_1, s_2, \omega)$ , onde  $s_1$  e  $s_2$  são as componentes horizontais do vetor de vazarosidade  $\mathbf{s}$  e  $\omega$ , a frequência, segundo a teoria desenvolvida no capítulo 2. Para cada par de componentes  $s_1$  e  $s_2$ , os pulsos espalhados foram, então, sintetizados para o domínio  $(s_1, s_2, t)$ , onde  $t$  é o tempo, através da teoria do pulso analítico, desenvolvido no capítulo 4. Em vista da independência azimutal do caso isotrópico-isotrópico-isotrópico, os sismogramas associados às componentes dos campos de ondas espalhadas foram calculados no plano  $s_1 - s_3$ , ou seja, no azimute  $\phi = 0^\circ$ . Para o caso isotrópico-ortorrômbico-isotrópico, os sismogramas foram calculados nos azimutes  $\phi = 15^\circ$  e  $75^\circ$ , visando marcar o seu comportamento em direções sub-paralelas e sub-normais aos planos de fraturas. Os ângulos de incidência  $\theta$  foram calculados no intervalo  $[0^\circ, 90^\circ]$ . A apresentação dos sismogramas, entretanto, foi feita no domínio  $(t, s)$ , com  $s = \sqrt{s_1^2 + s_2^2}$ , onde  $s_1 = \sin \theta \cos \phi / \alpha$  e  $s_2 = \sin \theta \sin \phi / \alpha$ , sendo  $\alpha$  a velocidade longitudinal do meio incidente e projetada no plano sagital de incidência. A assinatura no tempo  $t$  do pulso incidente é dada pela função  $f(t) = \sin(\omega_c t)$ , onde  $\omega_c$  corresponde à frequência do pulso, que nos dois experimentos, foi tomada como  $25Hz$ .

Observa-se, inicialmente e em todos os sismogramas, uma inversão na escala do tempo. Isto se deve ao fato, de que no caso da propagação de ondas planas, quanto maior o ângulo de incidência, mais o plano da frente de onda se aproxima da vertical. Isto faz com que os tempos de chegada das ondas espalhadas diminuam, à medida que aumenta a incidência.

Isto fica melhor entendido se pensarmos na reflexão normal da onda P. O tempo que a frente de onda horizontal gasta para passar pelo ponto de medida, ir até o topo da camada, refletir e voltar novamente ao ponto de medida, é dado por  $t = 2s_3h$ , onde  $s_3$  é a componente vertical do vetor de vagarosidade e  $h$ , a altura do ponto de medida com relação ao topo da camada. Ora, aumentando-se o ângulo de incidência, a componente vertical  $s_3$  diminui e, conseqüentemente, o tempo de chegada. Isto explica, portanto, a inversão no tempo.

Quanto ao experimento com a camada isotrópica, observa-se, inicialmente, que a segunda componente dos campos de ondas espalhados é nula. Isto significa que tanto as reflexões quanto as transmissões dos campos espalhados acontecem no plano de incidência, fato típico em espalhamentos em meios isotrópicos. Novamente se verifica, também, a não conversão P-SH.

Com relação à reflexão  $r_{pp}$ , observa-se, nas primeira e terceira componentes uma primeira chegada, a de maior energia, que corresponde exatamente à reflexão no topo da camada. Verifica-se, que a partir de um certo valor de  $s$ , ocorre um crescimento na amplitude do pulso refletido. Este valor está associado exatamente ao ângulo crítico da propagação. A segunda chegada, que se estende até o valor crítico de  $s$  e que possui energia mais baixa, marca a primeira reflexão na base da camada. Observa-se também o registro de algumas múltiplas refletidas. Verifica-se, ainda, a ocorrência de um outro evento pós-crítico bem significativo, e que corresponde à conversão, para a onda P, da onda S refletida na base da camada. Outra observação interessante é a proeminência das amplitudes da componente vertical com relação às amplitudes da componente horizontal. Quanto à transmissão  $t_{pp}$ , observa-se, novamente, que a primeira chegada, que se estende até o valor crítico de  $s$ , corresponde à primeira transmissão na base da camada. São observadas, também, e com energia mais fraca, algumas múltiplas transmitidas. Novamente, há a ocorrência de eventos pós-críticos já notados no caso da reflexão e que são explicados de forma análoga. Há, novamente, a proeminência das amplitudes da componente vertical comparadas com as de outras componentes. As Figuras 5.9 e 5.10 descrevem os comportamentos de  $r_{pp}$  e  $t_{pp}$  neste caso.

Quanto à reflexão da convertida  $r_{sp}$ , observam-se poucas diferenças nas conversões no topo e na base da camada com relação ao caso anterior. Entretanto, quanto às múltiplas, elas se apresentam com energias bem mais significativas que no caso da reflexão  $r_{pp}$ . Neste caso, ao contrário do caso anterior, as amplitudes da componente horizontal é mais proeminente que as da componente vertical. Com relação à transmissão da convertida  $t_{sp}$ , nota-se um registro bastante forte nas amplitudes transmitidas, seja no topo quanto na base da camada. As múltiplas novamente apresentam significativas energias. As componentes vertical e horizontal apresentam comportamento análogo ao da reflexão. As Figuras 5.11 e 5.12 descrevem os

comportamentos de  $r_{SP}$  e  $t_{SP}$  neste caso.

Quanto ao experimento com a camada fraturada, são verificadas significativas alterações no comportamento dos pulsos espalhados. Verificam-se mudanças nos ângulos críticos em todos os eventos estudados. Com relação à reflexão  $r_{PP}$ , os padrões dos sismogramas pouco diferem daqueles do caso anterior, nos dois azimutes estudados, justificando a pouca sensibilidade destes coeficientes à presença de anisotropia, conforme revelado na análise dos mapas de amplitude e no estudo do capítulo 3. As Figuras 5.13 e 5.14 descrevem os comportamentos de  $r_{PP}$  nos azimutes  $\phi = 15^\circ$  e  $75^\circ$ , respectivamente, neste caso. Comportamento análogo verifica-se no caso da transmissão  $t_{PP}$ . Entretanto, no azimute  $\phi = 15^\circ$ , a segunda componente do campo de ondas transmitido apresenta significativa energia, o que não acontece no azimute  $\phi = 75^\circ$ . Este comportamento mostra que a onda P é transmitida fora do plano de incidência e que o efeito da presença de fratura no meio não afeta a sua transmissão em direções sub-paralelas aos planos de fraturas. As Figuras 5.15 e 5.16 descrevem os comportamentos de  $t_{PP}$  nos azimutes  $\phi = 15^\circ$  e  $75^\circ$ , respectivamente, neste caso.

Quanto à reflexão da convertida  $r_{SP}$ , observam-se poucas diferenças nas conversões no topo e na base da camada. Entretanto, quanto às múltiplas, elas são mais enfatizadas no caso anisotrópico que no caso isotrópico, no azimute  $\phi = 15^\circ$ , marcando, portanto, um maior efeito da anisotropia em direções sub-normais aos planos de fraturas. As Figuras 5.17 e 5.18 descrevem os comportamentos de  $r_{SP}$  nos azimutes  $\phi = 15^\circ$  e  $75^\circ$ , respectivamente, neste caso. Com relação à transmissão da convertida  $t_{SP}$ , novamente os padrões dos sismogramas pouco diferem no azimute  $\phi = 75^\circ$ , se comparados com o caso isotrópico, e apresentam energia mais pronunciada que no azimute  $\phi = 15^\circ$ . Novamente, como no caso da reflexão, o efeito da anisotropia é mais sensível em direções sub-normais aos planos de fraturas. As Figuras 5.19 e 5.20 descrevem os comportamentos de  $t_{SP}$  nos azimutes  $\phi = 15^\circ$  e  $75^\circ$ , respectivamente, neste caso.

Entretanto, é com relação ao caso da convertida TP que o efeito da anisotropia do meio fica definitivamente caracterizado. Enquanto no caso isotrópico a conversão P-SH não acontece, no caso anisotrópico ela aparece bastante evidente. Isto, por si só, já marca uma profunda diferença no comportamento das ondas em meios isotrópico e anisotrópico. Na reflexão  $r_{TP}$ , observa-se que as amplitudes do campo convertido no azimute  $\phi = 75^\circ$  são mais fortes que no azimute  $\phi = 15^\circ$ , contrário ao caso da conversão anterior. Este comportamento está relacionado ao fato de que as polarizações destas convertidas são quasi-normais ao plano sagital, logo quasi-normais aos planos de fraturas. Registra-se, ainda, relevantes magnitudes nas amplitudes das múltiplas, nos dois azimutes. As Figuras 5.21 e 5.22 descrevem os comportamentos de  $r_{TP}$  nos azimutes  $\phi = 15^\circ$  e  $75^\circ$ , respectivamente, neste caso. Quanto à

transmissão da convertida  $t_{TP}$ , um comportamento análogo ao caso da reflexão é verificado. Entretanto, no azimute  $\phi = 75^\circ$ , verifica-se duas chegadas com forte energia, seguida à primeira chegada, e que correspondem às transmissões das convertidas SP e TP. As Figuras 5.23 e 5.24 descrevem os comportamentos de  $t_{TP}$  nos azimutes  $\phi = 15^\circ$  e  $75^\circ$ , respectivamente, neste caso.

## 5.5 O EFEITO DA ANISOTROPIA NOS PADRÕES DE POLARIZAÇÃO

Nesta seção, foi estudado o efeito da presença de fraturamento nos padrões de polarização das ondas espalhadas. Para isto, foi considerada a mesma estrutura do caso da análise das amplitudes. Primeiramente, foram contruídos os hodogramas das ondas espalhadas. Para efeito de sua apresentação, todas as polarizações foram normalizadas pelo sinal de maior energia.

Com relação às reflexões e suas respectivas convertidas, as direções das polarizações acompanham as direções das fases, uma vez que as medidas são feitas no semi-espço incidente, que, no caso, é isotrópico. As polarizações são lineares mas percebe-se alterações nas suas energias, principalmente a partir dos ângulos críticos. Os mapas de elipticidade confirmam a linearidade destas polarizações. Os hodogramas e os mapas não são mostrados, neste caso. Quanto às ondas transmitidas, observa-se, nos dois experimentos, a ocorrência de polarizações elípticas, no caso de incidência pós-crítica. As Figuras 5.25 e 5.26 descrevem as polarizações de  $t_{PP}$  no azimute  $\phi = 15^\circ$ , para os experimentos isotrópico-isotrópico e isotrópico-ortorrômbico, respectivamente, enquanto as Figuras 5.27 e 5.28 descrevem-nas no azimute  $\phi = 75^\circ$ .

Os mapas de elipticidade mostram que o efeito do padrão de fraturamento, nas direções sub-normais aos planos de fraturas, são bastante acentuados. As convertidas apresentam polarizações lineares, já que emergem ainda com ângulos pré-críticos. As figuras 5.29 e 5.30 descrevem os comportamentos das elipticidades de  $t_{SP}$ , para os experimentos isotrópico-isotrópico e isotrópico-ortorrômbico, respectivamente.

## 5.6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste capítulo, foi apresentado um estudo da propagação de ondas através de meios anisotrópicos estratificados, com o objetivo de marcar possíveis diferenças entre o comportamento destas propagações, nos casos isotrópico e anisotrópico, como, também, analisar a dependência deste comportamento com relação aos ângulos de incidência e azimutal. Os

resultados obtidos no capítulo 2, que permitem o cálculo dos coeficientes de reflexão e transmissão através de interfaces horizontais que separam meios anisotrópicos e no capítulo 4, que calculam os pulsos espalhados através destas interfaces, a partir do importante conceito de traço analítico, foi aqui aplicada. Foram analisados, essencialmente, o comportamento das amplitudes das ondas espalhadas, a deformação dos pulsos espalhados e, também, os padrões de polarização destas ondas, principalmente considerando-se as incidências pos-críticas. Neste estudo, foram considerados, inicialmente, modelos de dois semi-espacos separados por interfaces planas, para o estudo das variações das amplitudes e dos padrões de polarizações. Para efeito de comparação, estudou-se estas variações tomando-se, primeiramente, dois meios isotrópicos e, posteriormente, um meio isotrópico, superposto a um meio ortorrômbico fraturado segundo modelo de Hood. A seguir, para o estudo das deformações dos pulsos espalhados, foi considerada uma estrutura de dois semi-espacos isotrópicos, intercalando uma camada, que, também, para efeito de comparação, foi tomada, inicialmente, isotrópica, e, posteriormente, fraturada.

A análise das amplitudes foi mostrada através de mapas de amplitudes, no sentido de relacionar as suas variações com as direções de fraturamento do meio. Na análise dos padrões de polarização, os resultados foram mostrados através de hodogramas, que marcam, essencialmente, as direções de polarização das ondas, no caso da incidência pré-crítica e dos planos de polarização das ondas, no caso da incidência pós-crítica. Mapas de elipticidade foram, também, utilizados no sentido de caracterizar um maior ou menor achatamento das elipses de polarização. Já na análise dos pulsos, sismogramas de ondas planas foram contruídos, no sentido de analisar o efeito das fraturas e da presença de camada nas formas dos pulsos espalhados. Foi considerado neste estudo, apenas a incidência P. Para a reflexão, foram tomadas a onda refletida P e as convertidas S e T, bem como as correspondentes transmitidas.

A partir dos resultados obtidos, pode-se constatar uma grande influência do fraturamento do meio nas amplitudes espalhadas. Estas variações são muito mais evidentes nas direções sub-normais ao plano de fratura do que nas direções sub-paralelas. Verifica-se estes efeitos com muito mais ênfase, nas reflexões das ondas convertidas como, também, nas ondas transmitidas. Estes efeitos são percebidos com relação á reflexão  $r_{pp}$ , mas de forma mais branda. Isto reforça o fato de que a reflexão de ondas P fornece muito pouca informação sobre anisotropia. Com relação às deformações dos pulsos, verificou-se um desempenho muito bom, marcando muito bem a ocorrência dos principais eventos da propagação como as reflexões e transmissões no topo e na base da camada. Efeitos de conversões foram também muito bem estabelecidos, assim como foram registrados, na maioria dos casos, as múltiplas dos diversos eventos analisados. Foram verificadas marcantes diferenças nas feições dos pulsos espalhados, ao considerarmos os experimentos isotrópico-isotrópico e isotrópico-ortorrômbico. Estas

diferenças foram muito bem relacionadas com as direções do fraturamento. Com relação aos padrões de polarização, foi constatada significativa influência dos ângulos de incidência e azimutal. Mesmo nas incidências pré-críticas, os hodogramas mostraram sensíveis efeitos, principalmente nas direções do fraturamento. Na propagação pós-crítica, foi constatada a ocorrência da polarização elíptica, apenas no caso da transmissão  $t_{pp}$ . Verifica-se, neste caso, sensíveis efeitos do fraturamento no estados de polarização, dentre eles, mudanças nas suas direções e nas suas elipticidades. Como no traçamento dos hodogramas, por questões gráficas, as elipses aparecem normalizadas e mapas de elipticidade foram apresentados. Constatou-se significativos efeitos nas direções sub-normais aos planos de fratura.

Os resultados numéricos apresentados mostraram que: a) as amplitudes e os padrões de polarização, mesmo considerando-se apenas incidência de ondas P, são significativamente afetados pela presença de anisotropia do meio e sugerem serem estes atributos dotados de grande potencialidade de diagnóstico de sua ocorrência, principalmente, em experimentos com variação azimutal e amplos ângulos de afastamento; (b) as formas dos pulsos espalhadas são também bastante influenciadas pela presença de anisotropia e podem fornecer relevantes informações acerca de sua ocorrência.

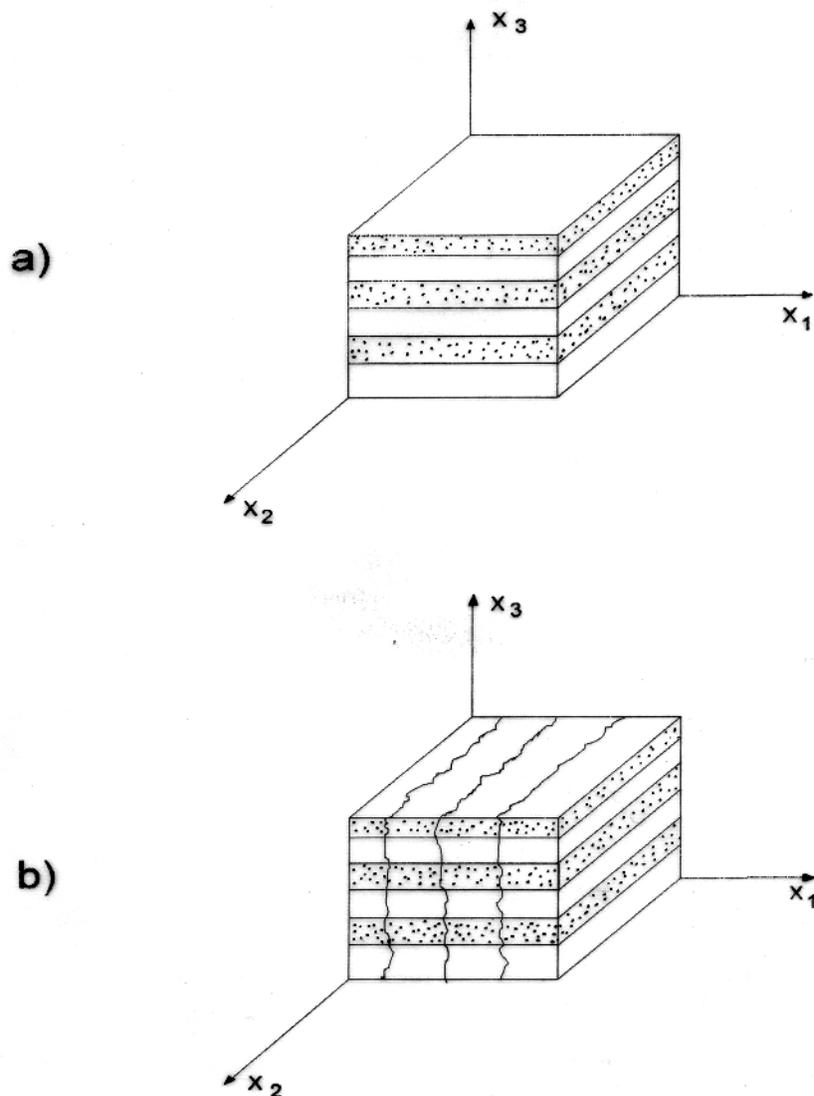
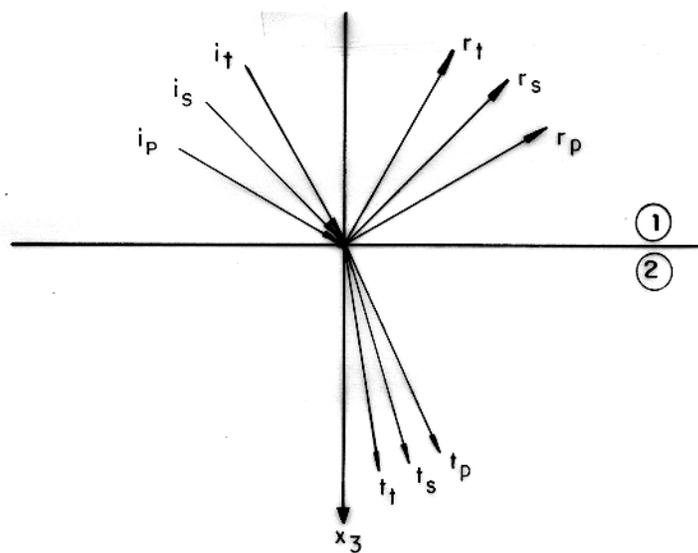
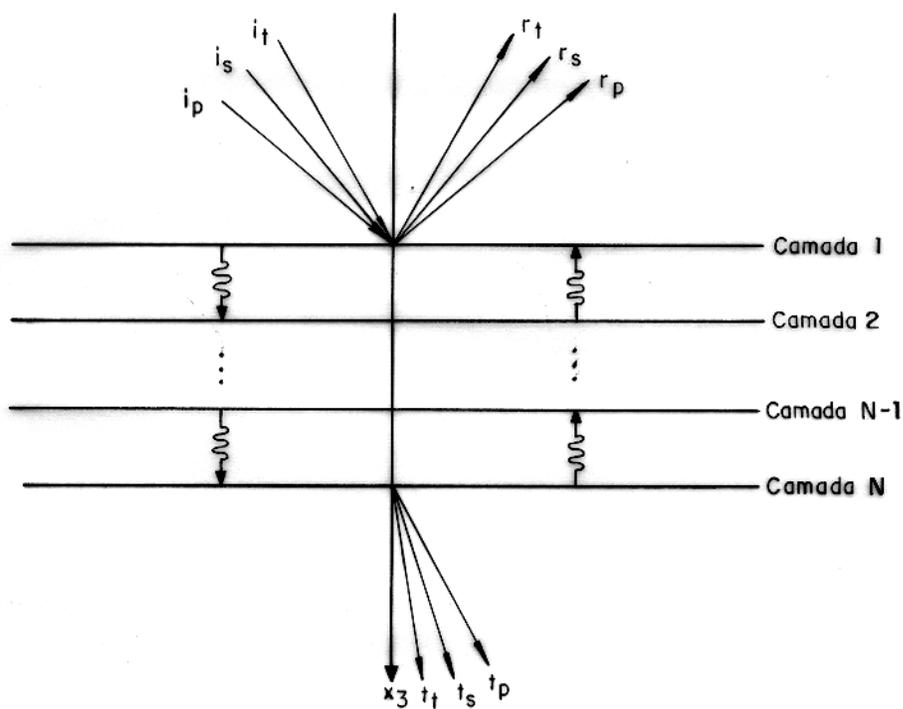


Figura 5.1 - (a) Modelo efetivo TI, equivalente a uma estratificação de finas camadas isotrópicas, em regime quasi-estático.  
(b) Modelo ortorrômbico obtido de uma matriz TI com planos de fraturas normais à direção  $x_1$  (HOOD, 1990).



(a)

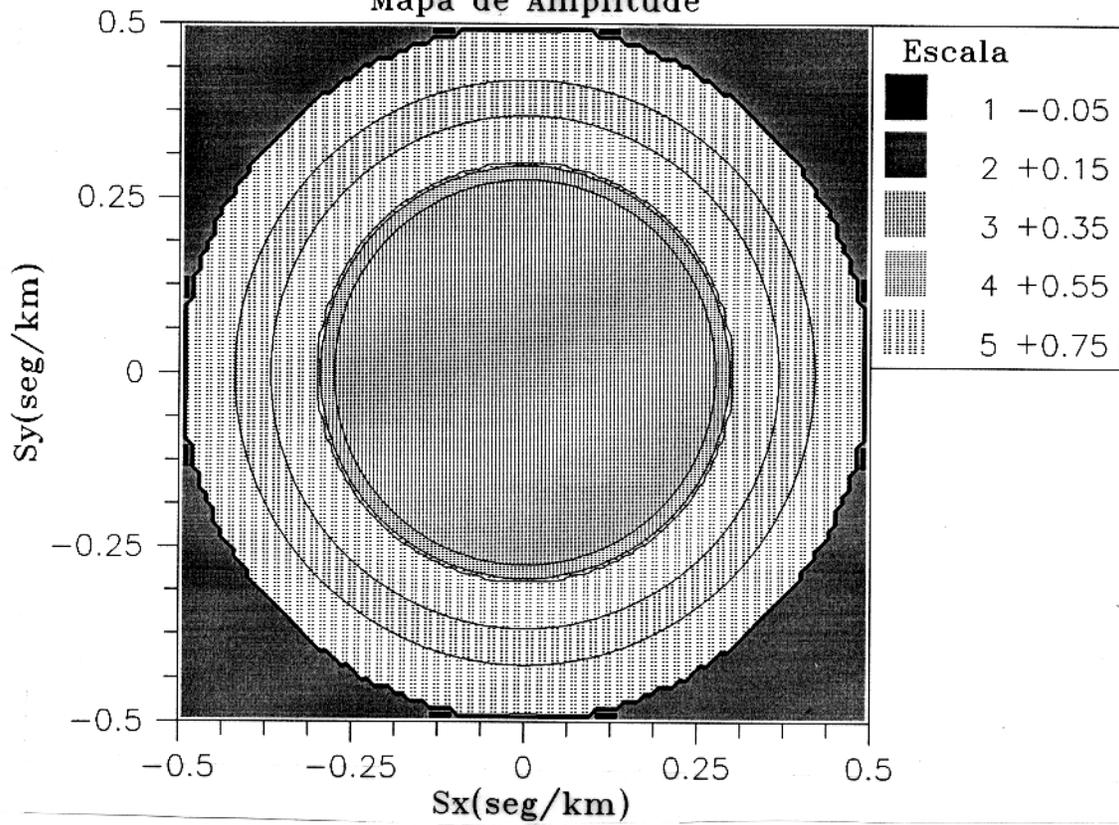


(b)

Figura 5.2 - (a) Estrutura esquemática de espalhamento de ondas, utilizada na análise de amplitudes e dos padrões de polarização.

(b) Estrutura esquemática de espalhamento de ondas, utilizada na análise de deformações de pulsos espalhados.

Mapa de Amplitude



Mapa de Amplitude

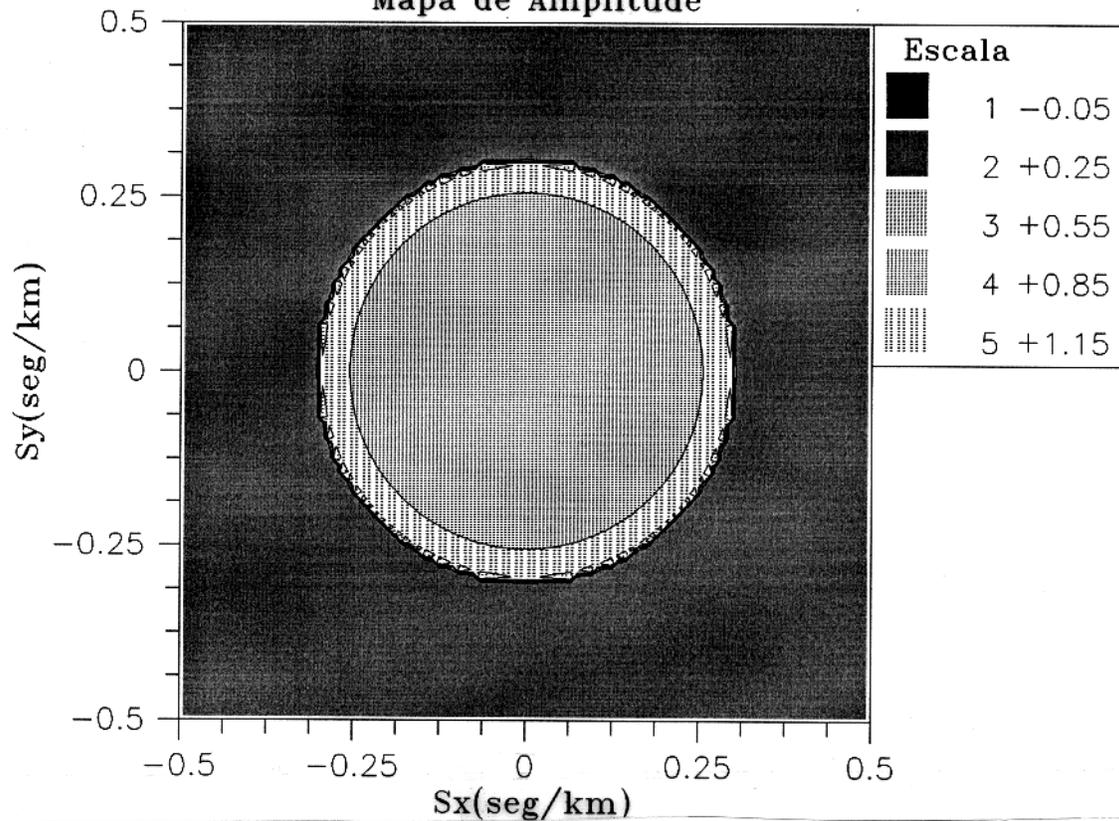
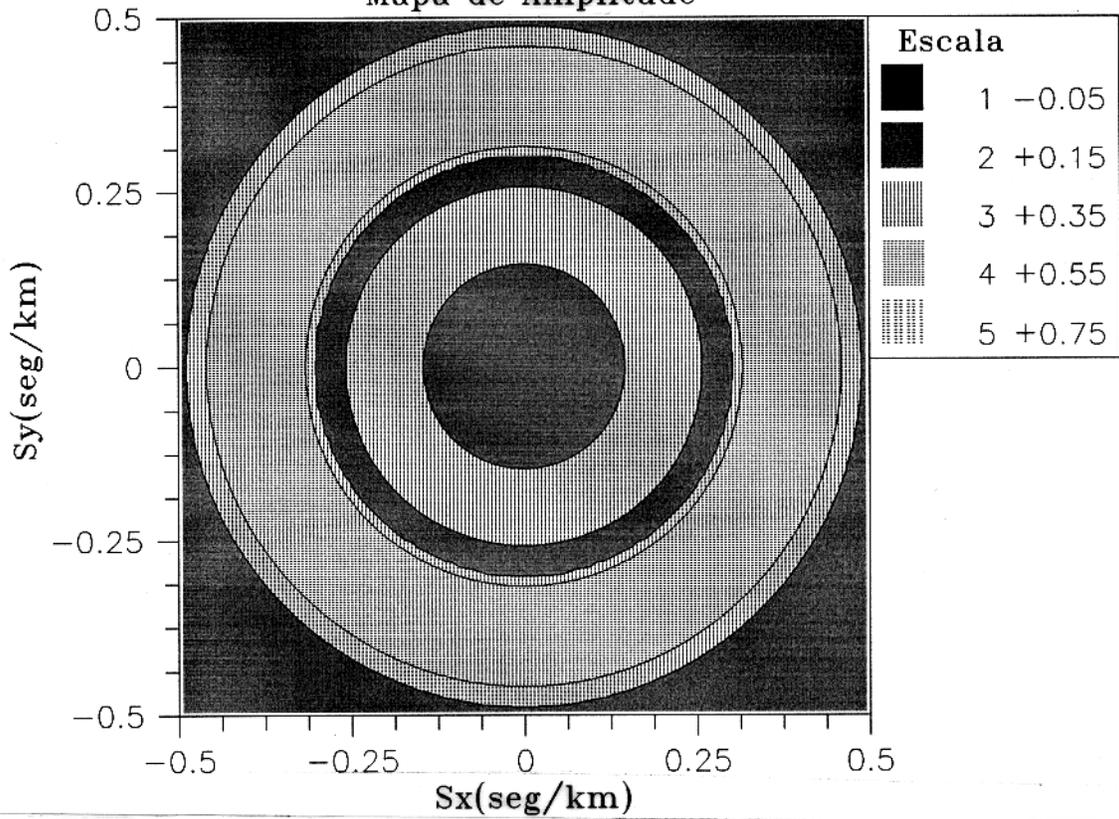


Figura 5.3 - (a) Mapa de amplitudes da onda refletida  $r_{pp}$ , calculado no experimento isotrópico-isotrópico.  
(b) Mapa de amplitudes da onda transmitida  $t_{pp}$ , calculado no experimento isotrópico-isotrópico.

### Mapa de Amplitude



77

### Mapa de Amplitude

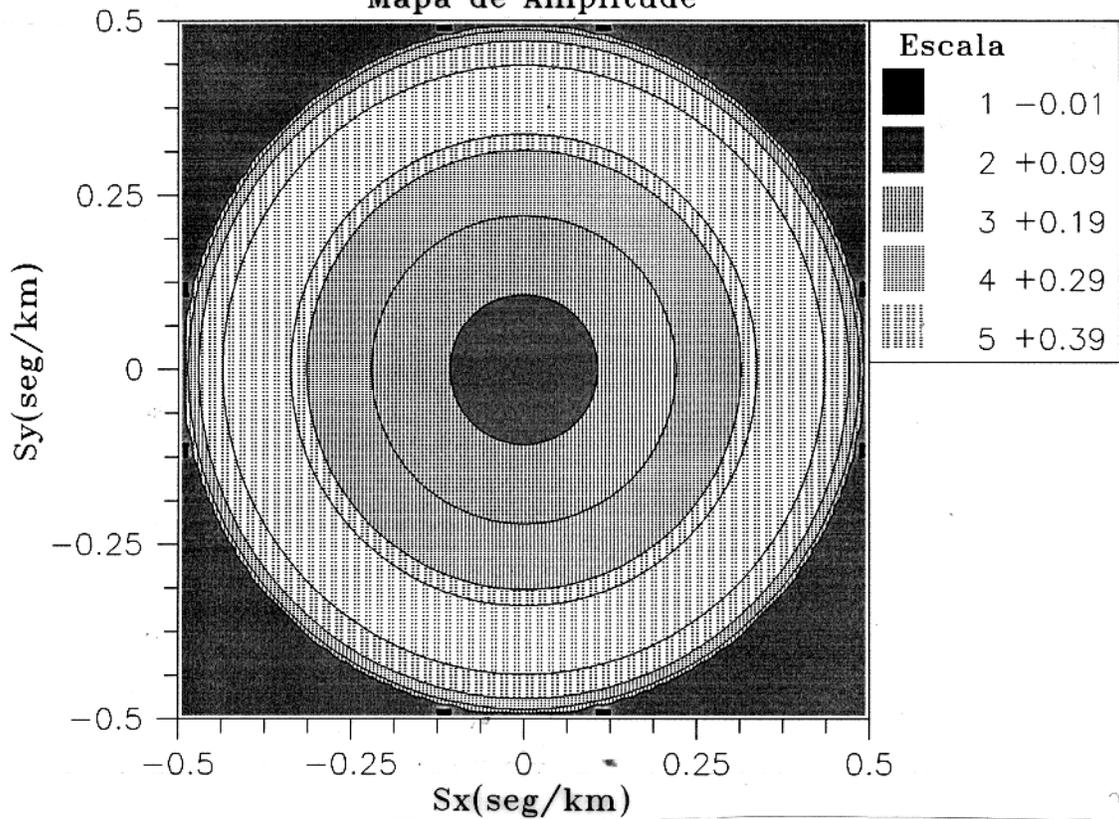
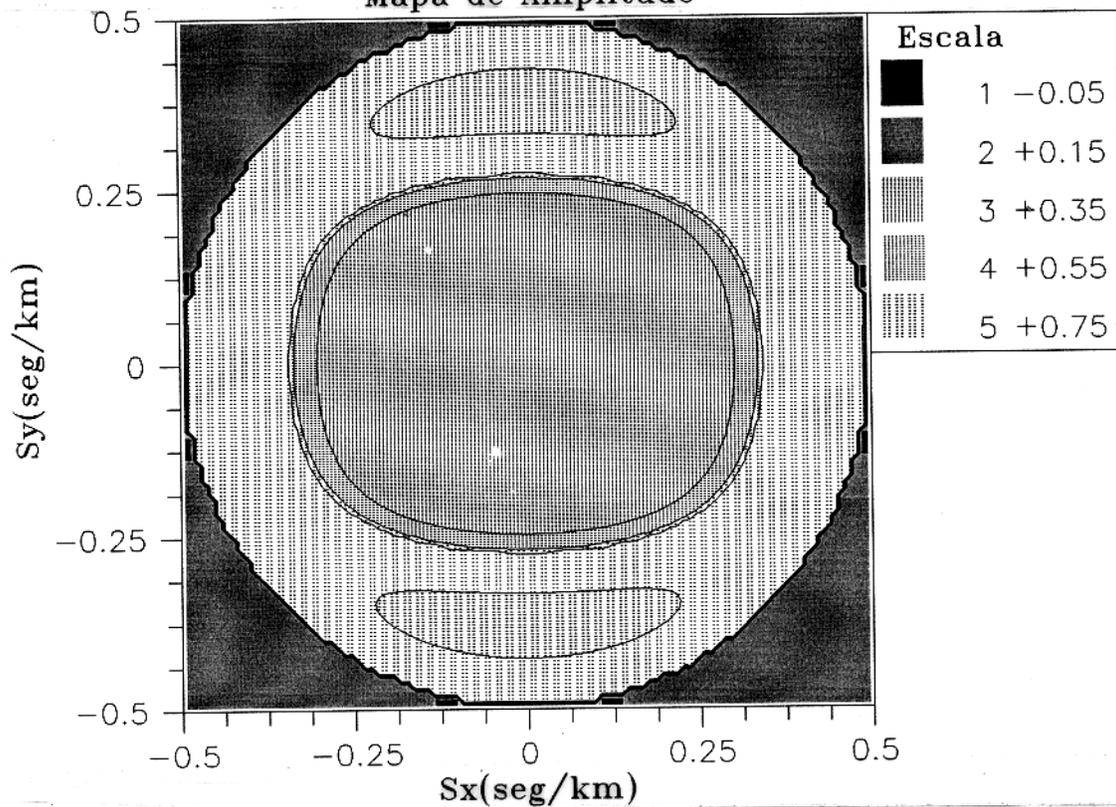


Figura 5.4 - (a) Mapa de amplitudes da onda convertida  $r_{SP}$ , calculado no experimento isotrópico-isotrópico.  
 (b) Mapa de amplitudes da onda convertida  $t_{SP}$ , calculado no experimento isotrópico-isotrópico.

Mapa de Amplitude



Mapa de Amplitude

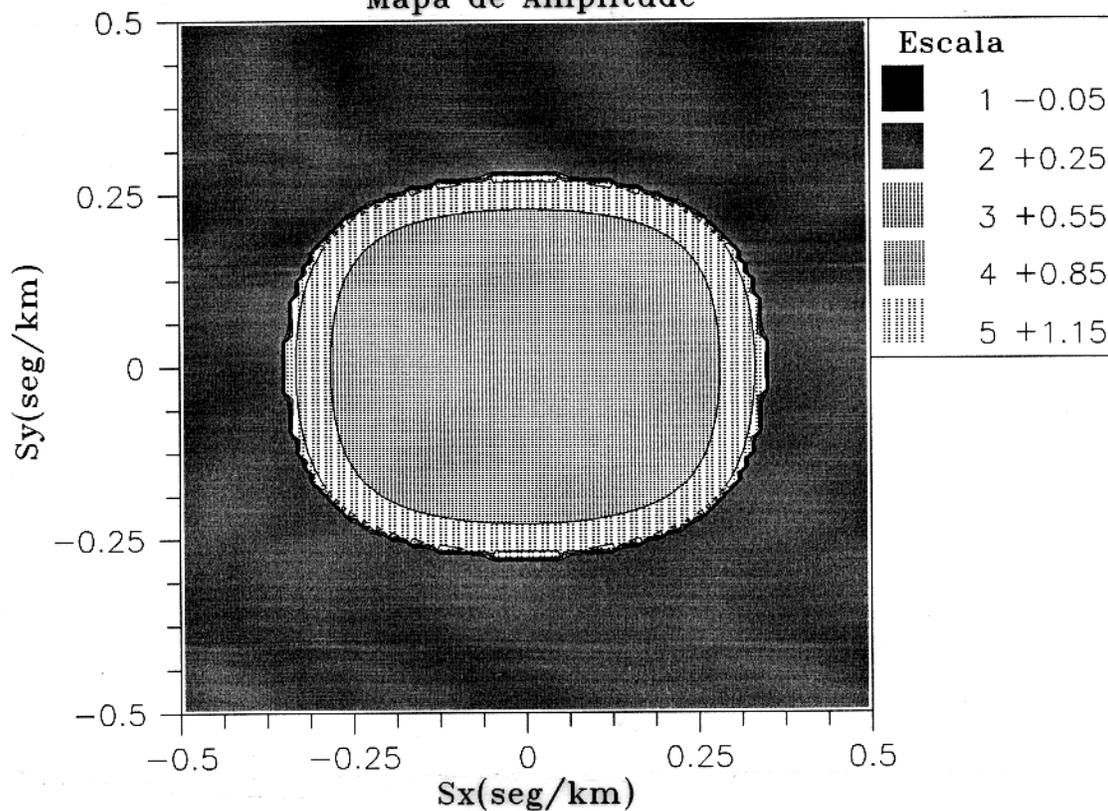
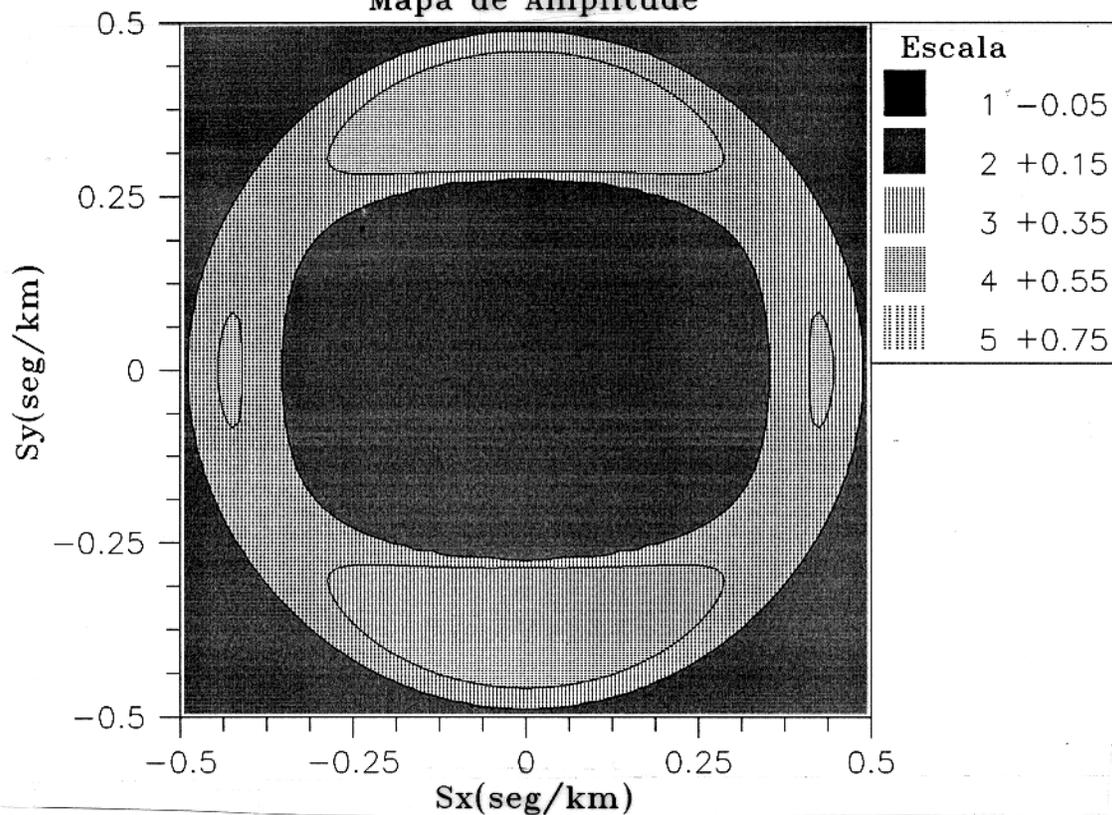


Figura 5.5 - (a) Mapa de amplitudes da onda refletida  $r_{pp}$ , calculado no experimento isotrópico-ortorrômico.  
 (a) Mapa de amplitudes da onda transmitida  $t_{pp}$ , calculado no experimento isotrópico-ortorrômico.

Mapa de Amplitude



Mapa de Amplitude

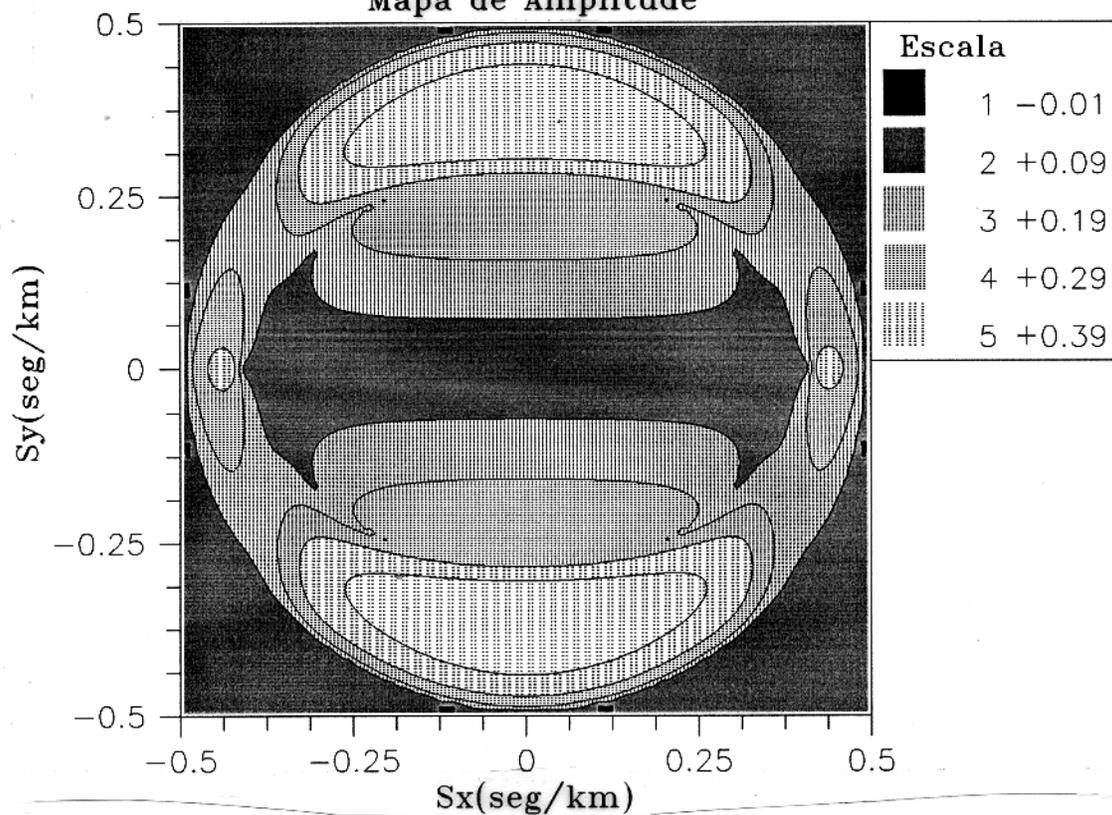
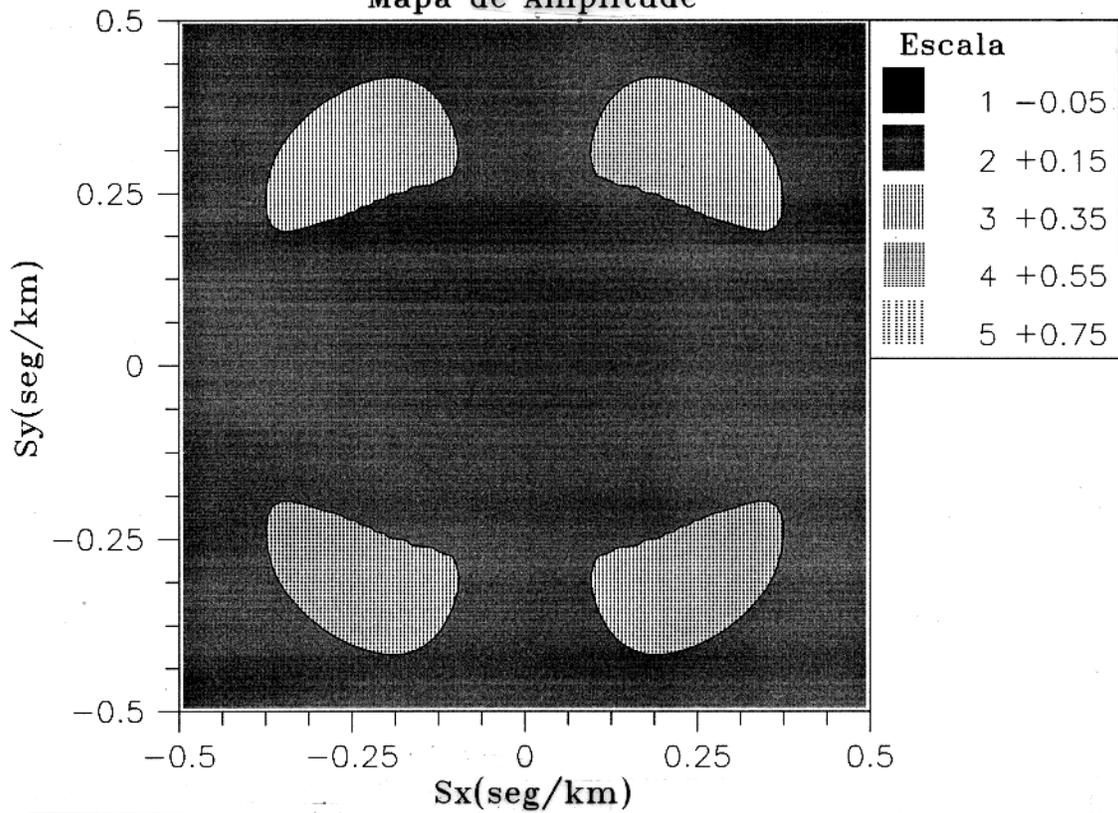


Figura 5.6 - (a) Mapa de amplitudes da onda convertida  $r_{SP}$ , calculado no experimento isotrópico-ortorrômbico.

(a) Mapa de amplitudes da onda convertida  $t_{SP}$ , calculado no experimento isotrópico-ortorrômbico.

Mapa de Amplitude



Mapa de Amplitude

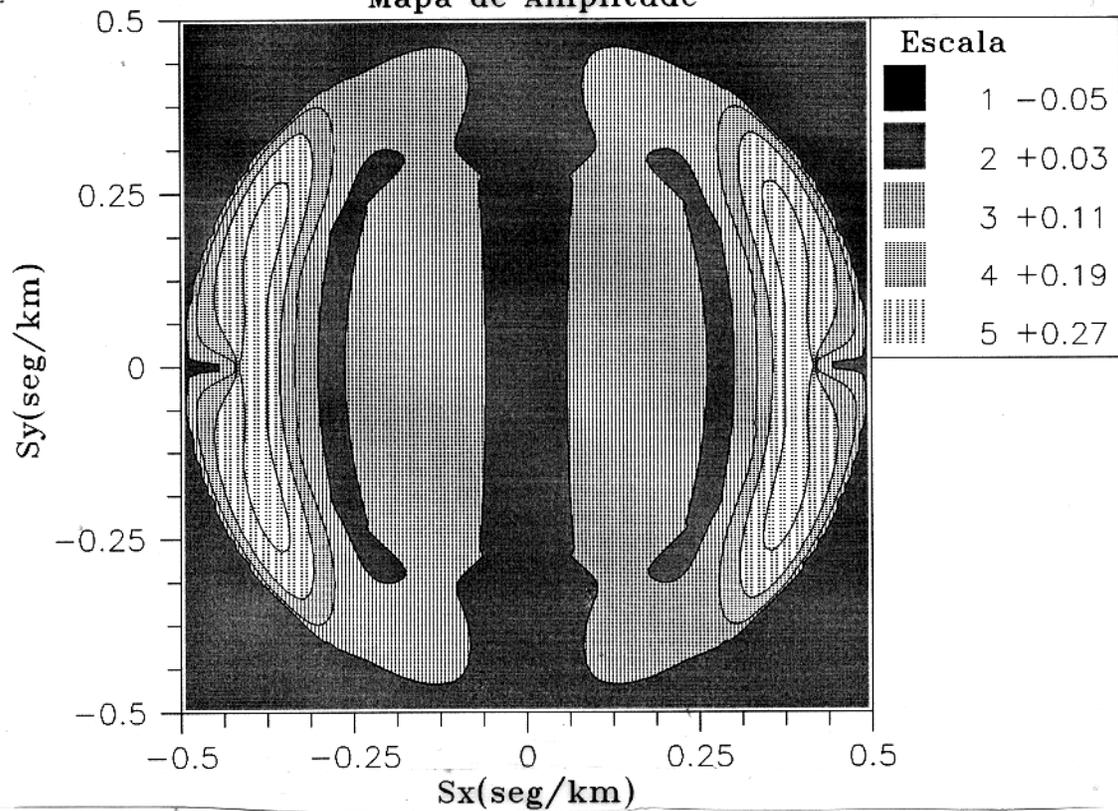


Figura 5.7 - (a) Mapa de amplitudes da onda convertida  $r_{TP}$ , calculado no experimento isotrópico-ortorrômbico.

(a) Mapa de amplitudes da onda convertida  $t_{TP}$ , calculado no experimento isotrópico-ortorrômbico.

a)	$\rho = 2,13 \text{ g/cm}^3$	$\alpha = 2,02 \text{ km/s}$	$\beta = 1,23 \text{ km/s}$																																				
<hr/>																																							
	$\rho = 2,44 \text{ g/cm}^3$	$\alpha = 3,31 \text{ km/s}$	$\beta = 1,82 \text{ km/s}$																																				
<hr/>																																							
	$\rho = 2,13 \text{ g/cm}^3$	$\alpha = 2,02 \text{ km/s}$	$\beta = 1,23 \text{ km/s}$																																				
<hr/>																																							
b)	$\rho = 2,13 \text{ g/cm}^3$	$\alpha = 2,02 \text{ km/s}$	$\beta = 1,23 \text{ km/s}$																																				
<hr/>																																							
	$\rho = 2,44 \text{ g/cm}^3$	$C =$	<table style="border: 1px solid black; width: 100%; text-align: center;"> <tr><td>33,81</td><td>12,63</td><td>14,30</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>12,63</td><td>26,67</td><td>14,30</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>14,30</td><td>14,30</td><td>26,67</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>8,07</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>8,07</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>10,59</td></tr> </table>	33,81	12,63	14,30	0	0	0	12,63	26,67	14,30	0	0	0	14,30	14,30	26,67	0	0	0	0	0	0	8,07	0	0	0	0	0	0	8,07	0	0	0	0	0	0	10,59
33,81	12,63	14,30	0	0	0																																		
12,63	26,67	14,30	0	0	0																																		
14,30	14,30	26,67	0	0	0																																		
0	0	0	8,07	0	0																																		
0	0	0	0	8,07	0																																		
0	0	0	0	0	10,59																																		
<hr/>																																							
	$\rho = 2,13 \text{ g/cm}^3$	$\alpha = 2,02 \text{ km/s}$	$\beta = 1,23 \text{ km/s}$																																				

Figura 5.8 - (a) Modelo numérico de camada isotrópica, intercalada por dois meios também isotrópicos.

(b) Modelo numérico de camada fraturada, intercalada por dois meios isotrópicos. Os parâmetros de fraturas são dados por  $\delta_N = 0,4$  e  $\delta_2 = \delta_3 = 0,5$ .

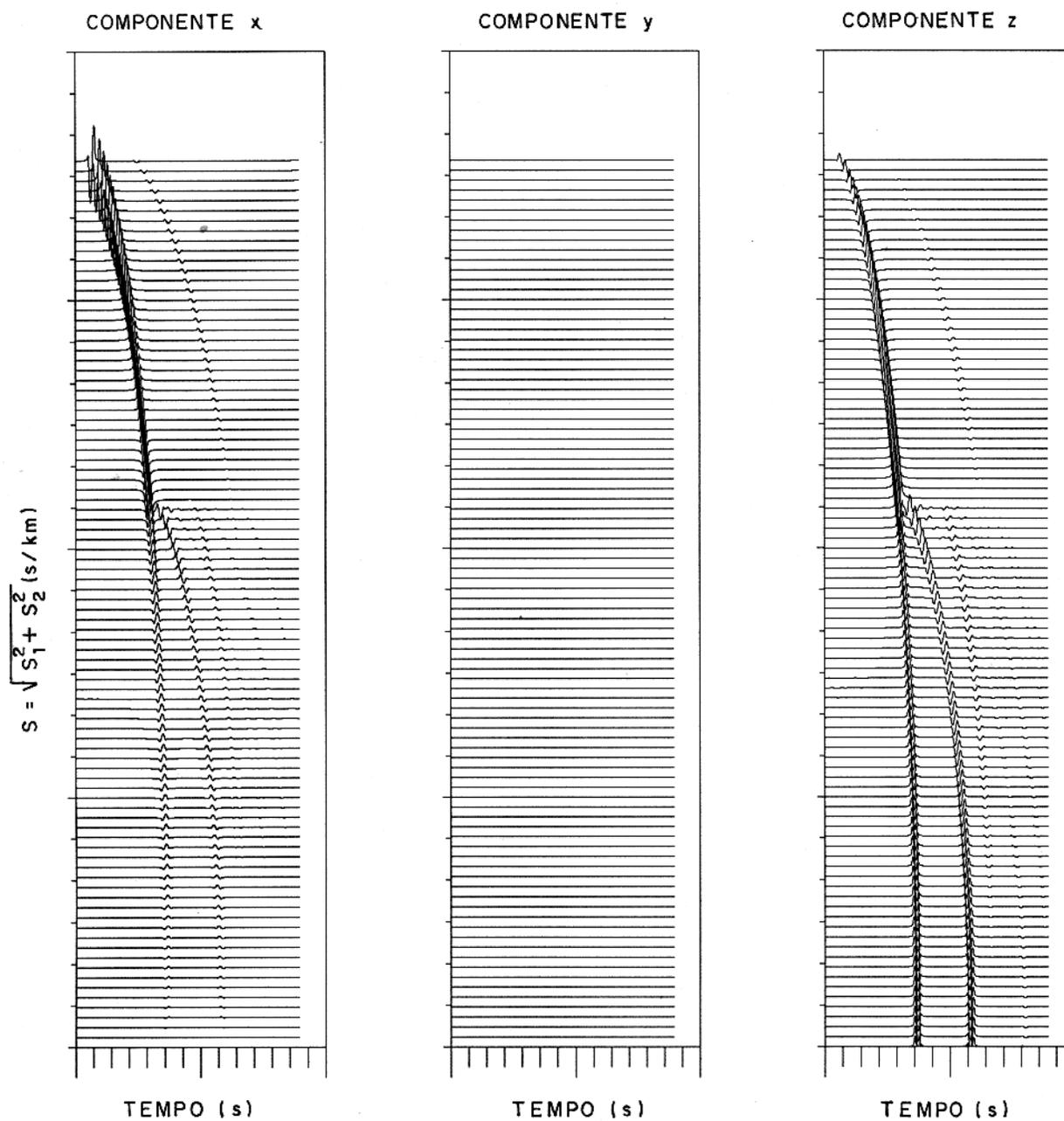


Figura 5.9 - Sismograma de ondas planas para a refletida  $r_{pp}$ , considerando-se o experimento isotrópico-isotrópico, no azimute  $\phi = 0^\circ$ .

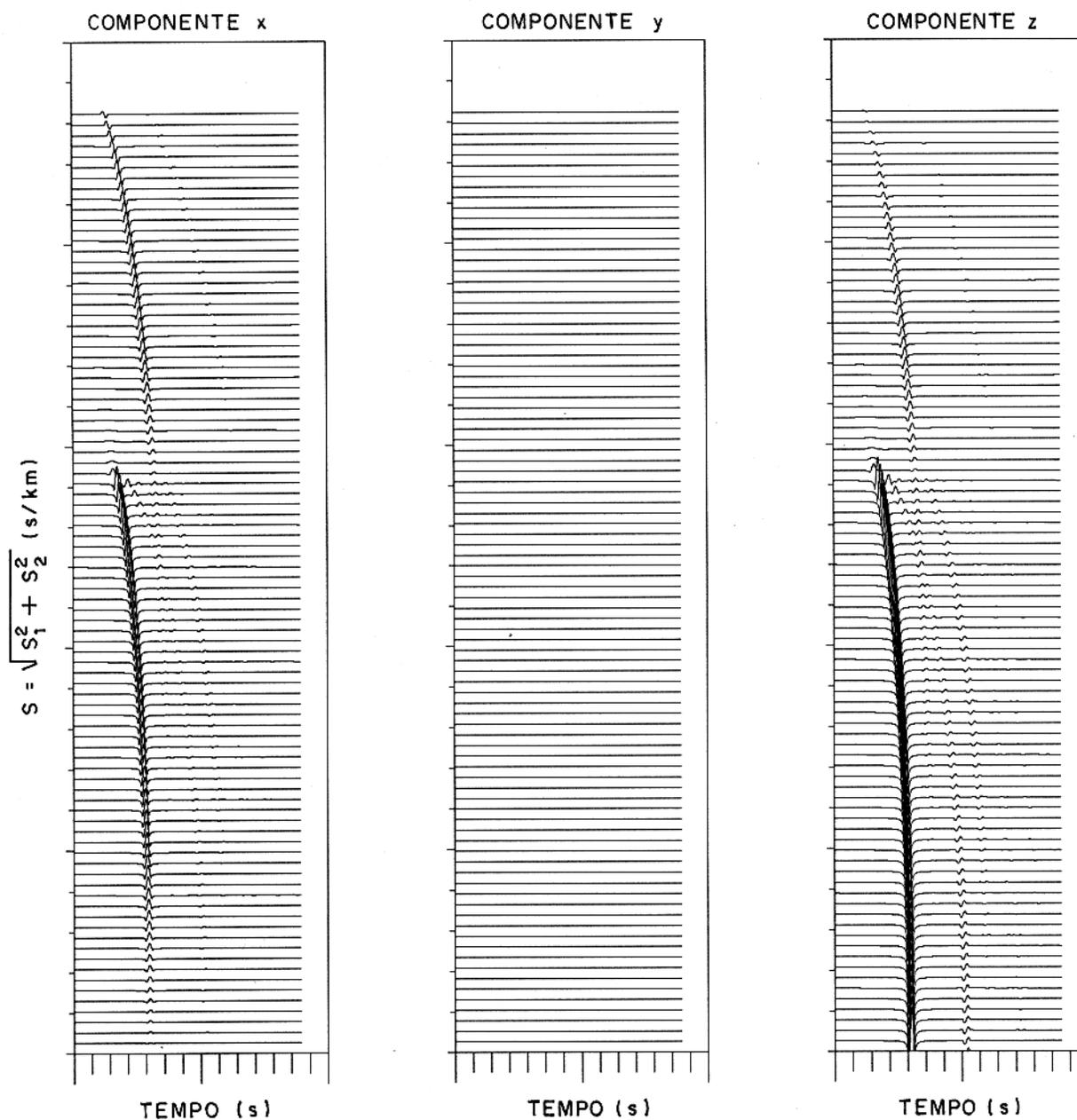


Figura 5.10 - Sismograma de ondas planas para a transmitida  $t_{pp}$ , considerando-se o experimento isotrópico-isotrópico, no azimute  $\phi = 0^\circ$ .

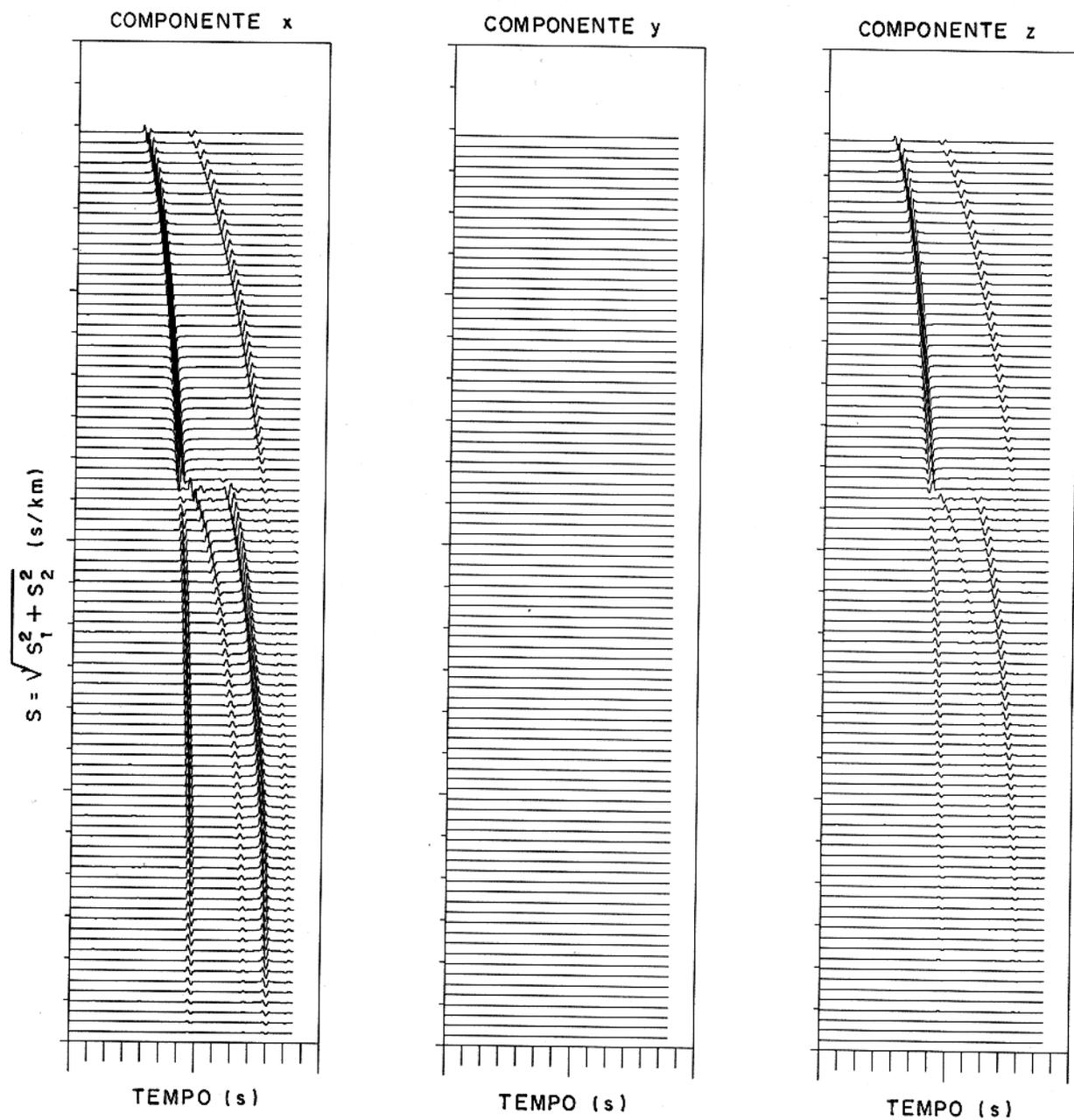


Figura 5.11 - Sismograma de ondas planas para a convertida  $r_{SP}$ , considerando-se o experimento isotrópico-isotrópico, no azimute  $\phi = 0^\circ$ .

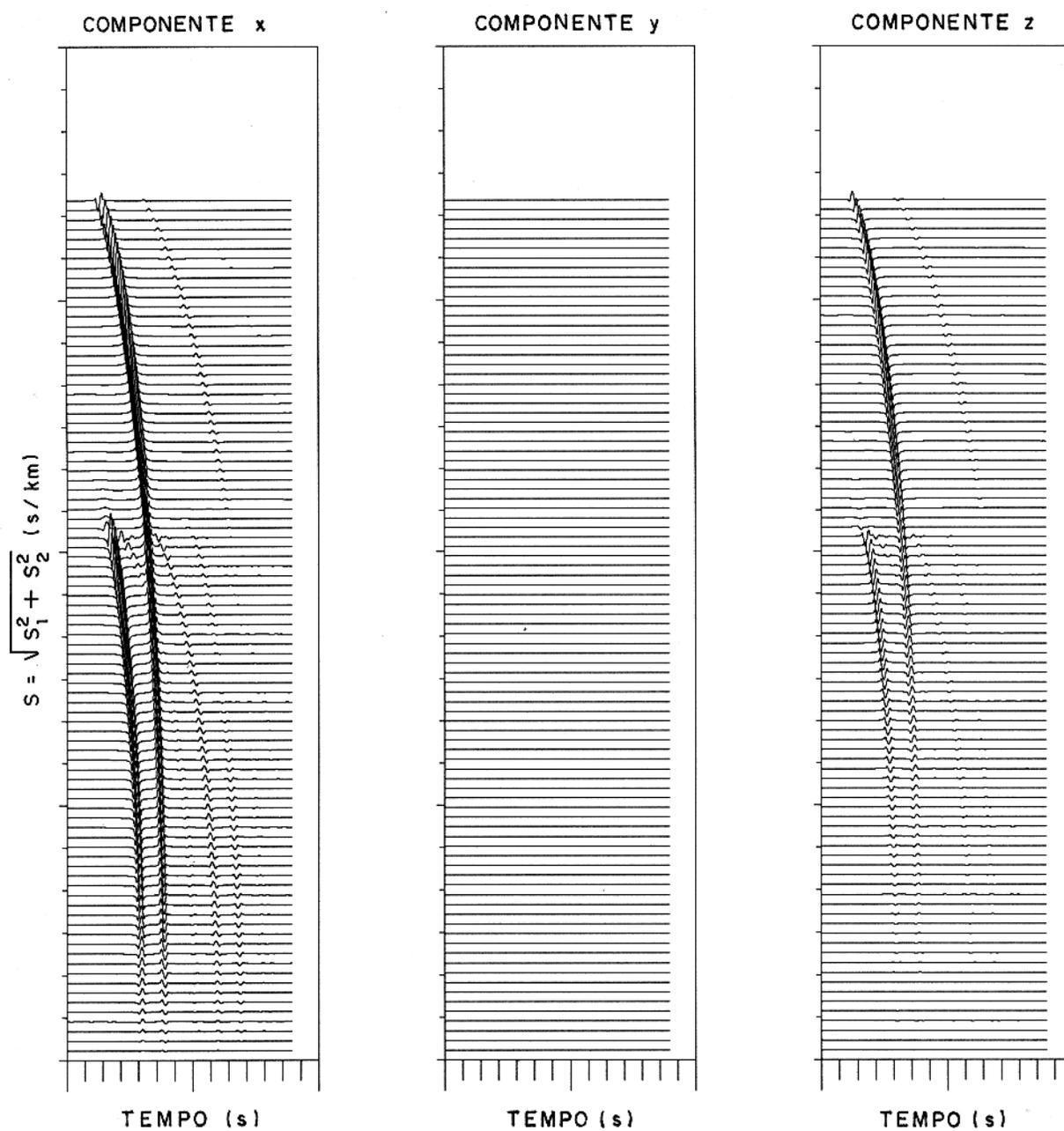


Figura 5.12 - Sismograma de ondas planas para a convertida  $t_{SP}$ , considerando-se o experimento isotrópico-isotrópico, no azimute  $\phi = 0^\circ$ .

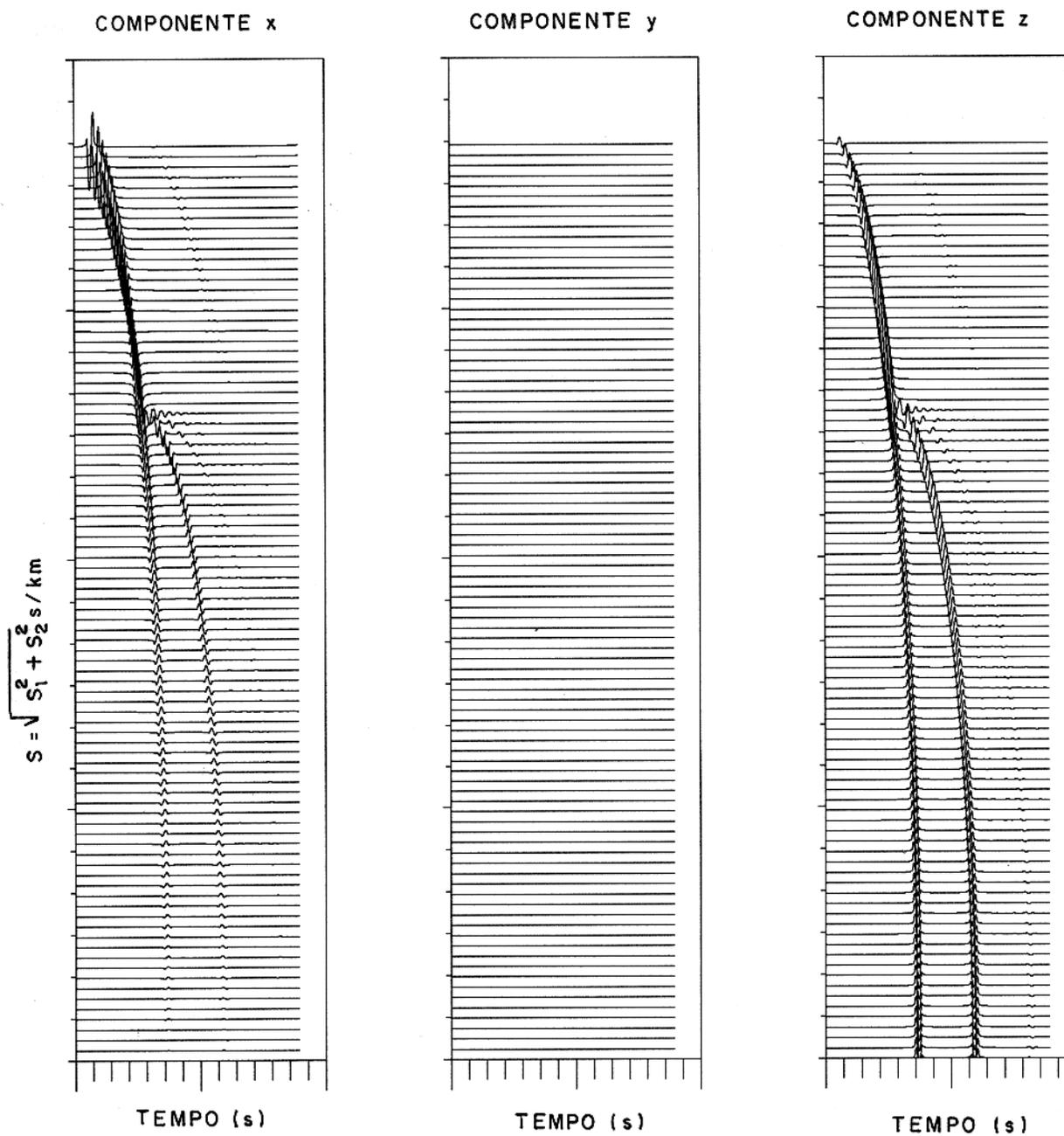


Figura 5.13 - Sismograma de ondas planas para a reflexão  $r_{pp}$ , considerando-se o experimento isotrópico-ortorrômbico, no azimute  $\phi = 15^\circ$ .

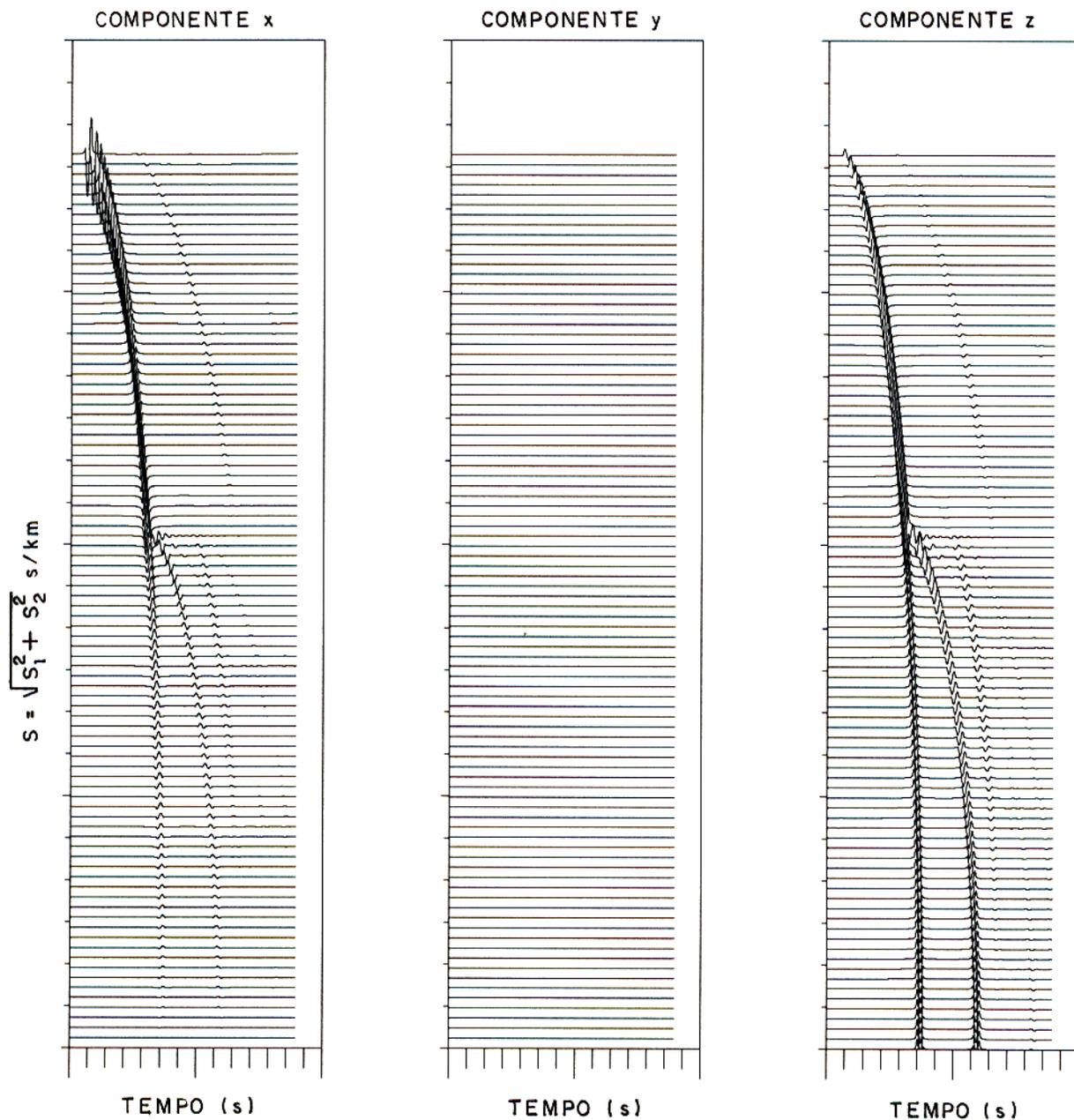


Figura 5.14 - Sismograma de ondas planas para a reflexão  $r_{pp}$ , considerando-se o experimento isotrópico-ortorrômbico, no azimute  $\phi = 75^\circ$ .

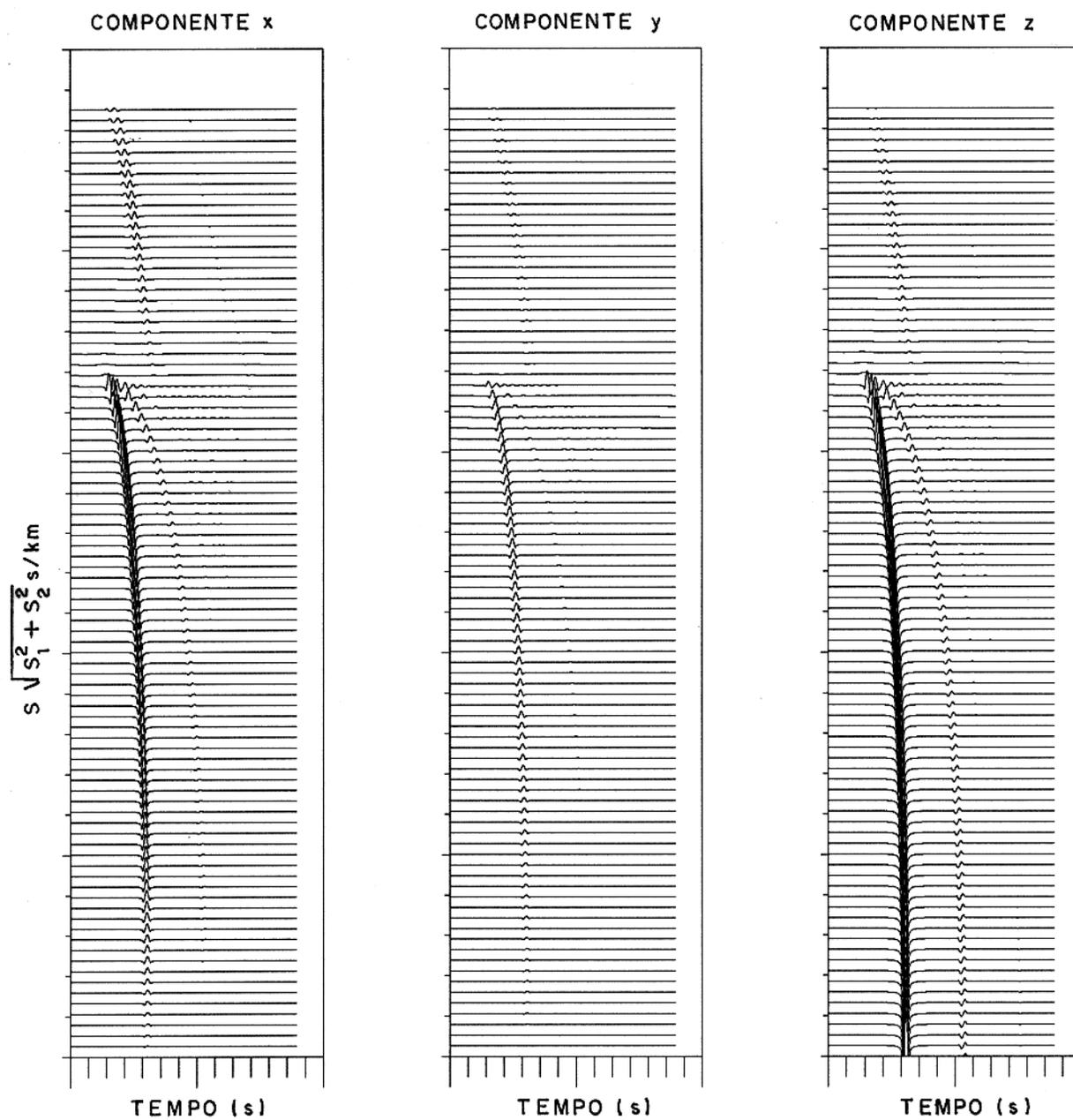


Figura 5.15 - Sismograma de ondas planas para a transmissão  $t_{pp}$ , considerando-se o experimento isotrópico-ortorrômbico, no azimute  $\phi = 15^\circ$ .

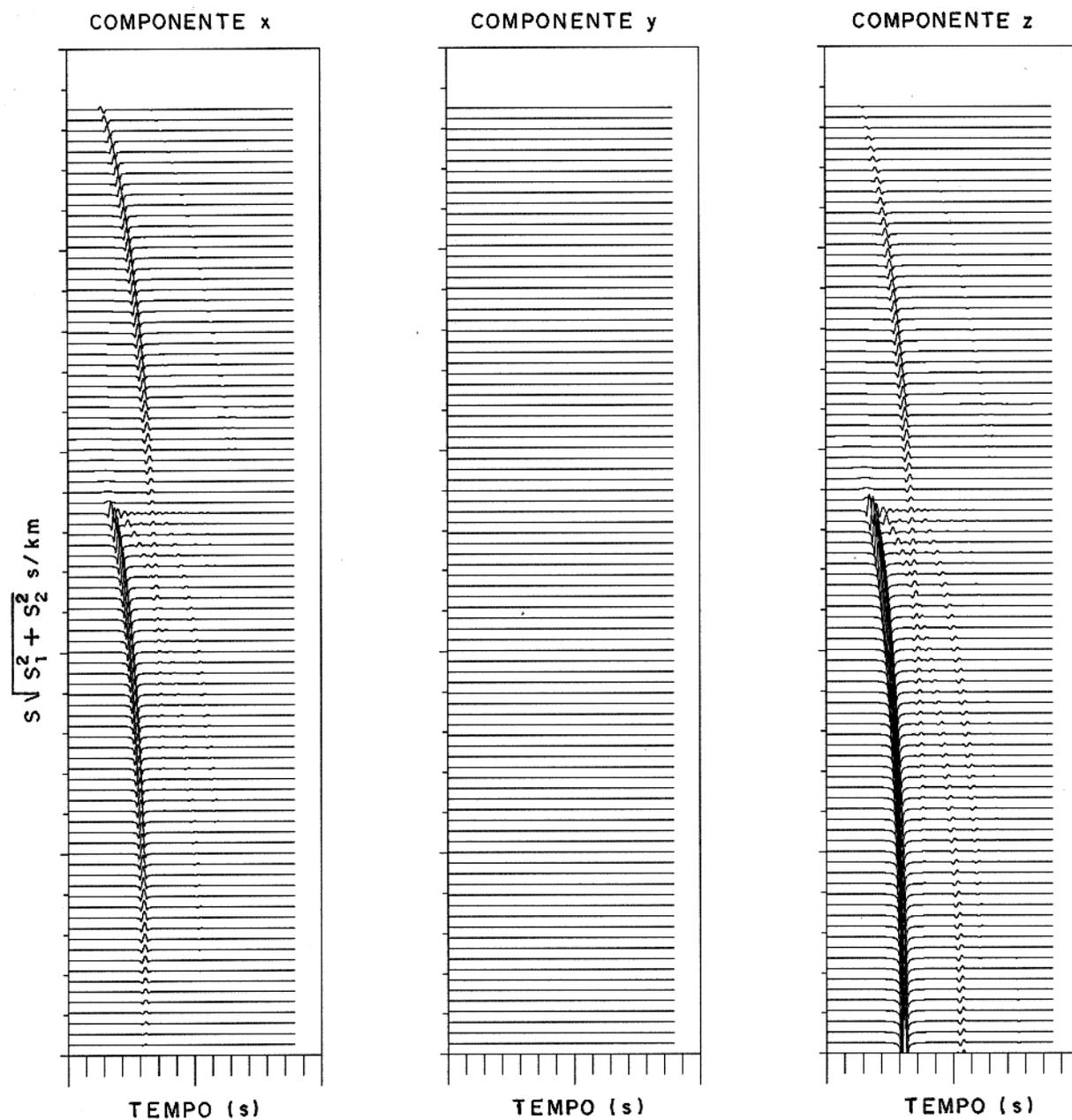


Figura 5.16 - Sismograma de ondas planas para a transmissão  $t_{pp}$ , considerando-se o experimento isotrópico-ortorrômbico, no azimute  $\phi = 75^\circ$ .

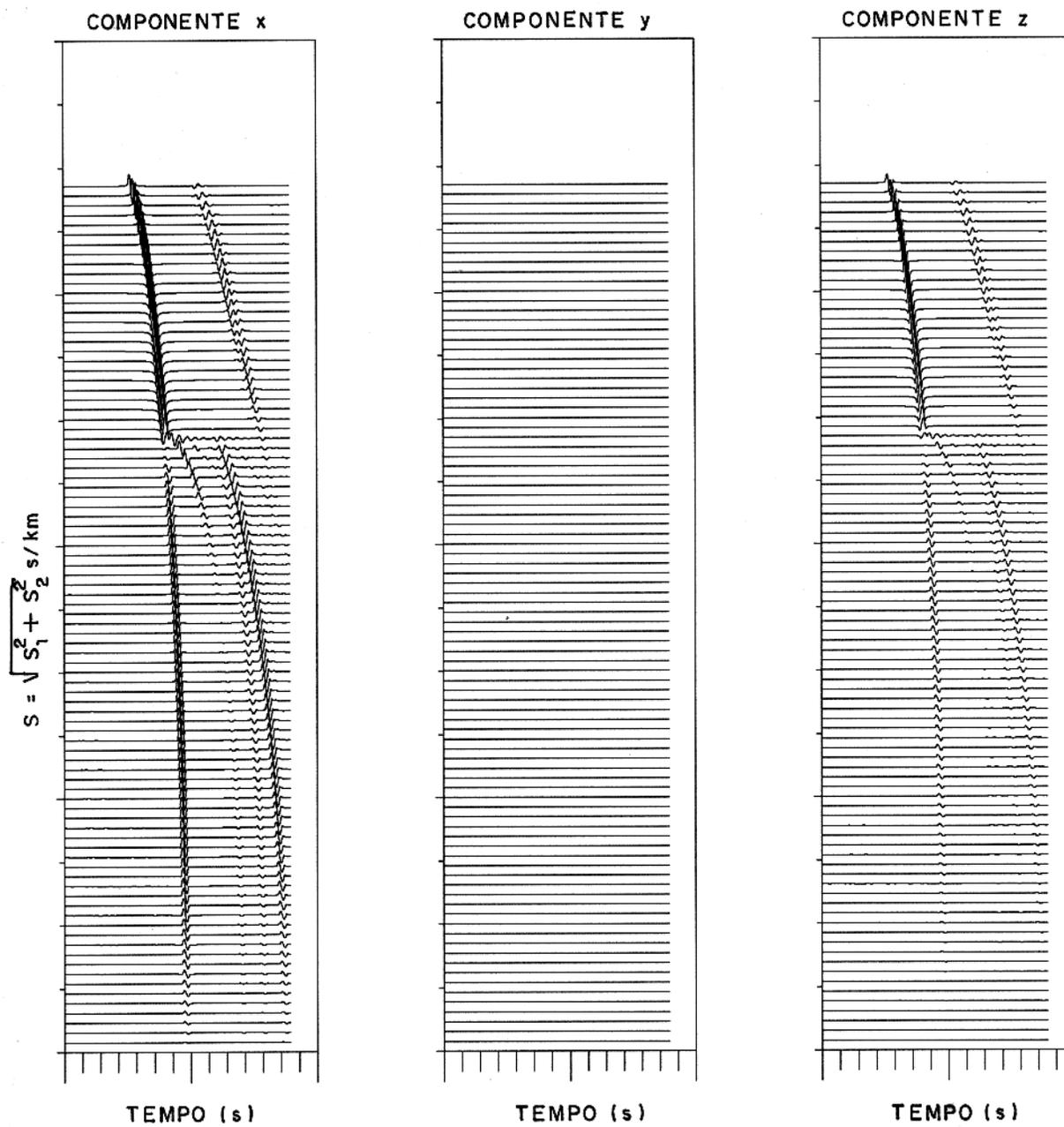


Figura 5.17 - Sismograma de ondas planas para a convertida  $r_{SP}$ , considerando-se o experimento isotrópico-ortorrômbico, no azimute  $\phi = 15^\circ$ .

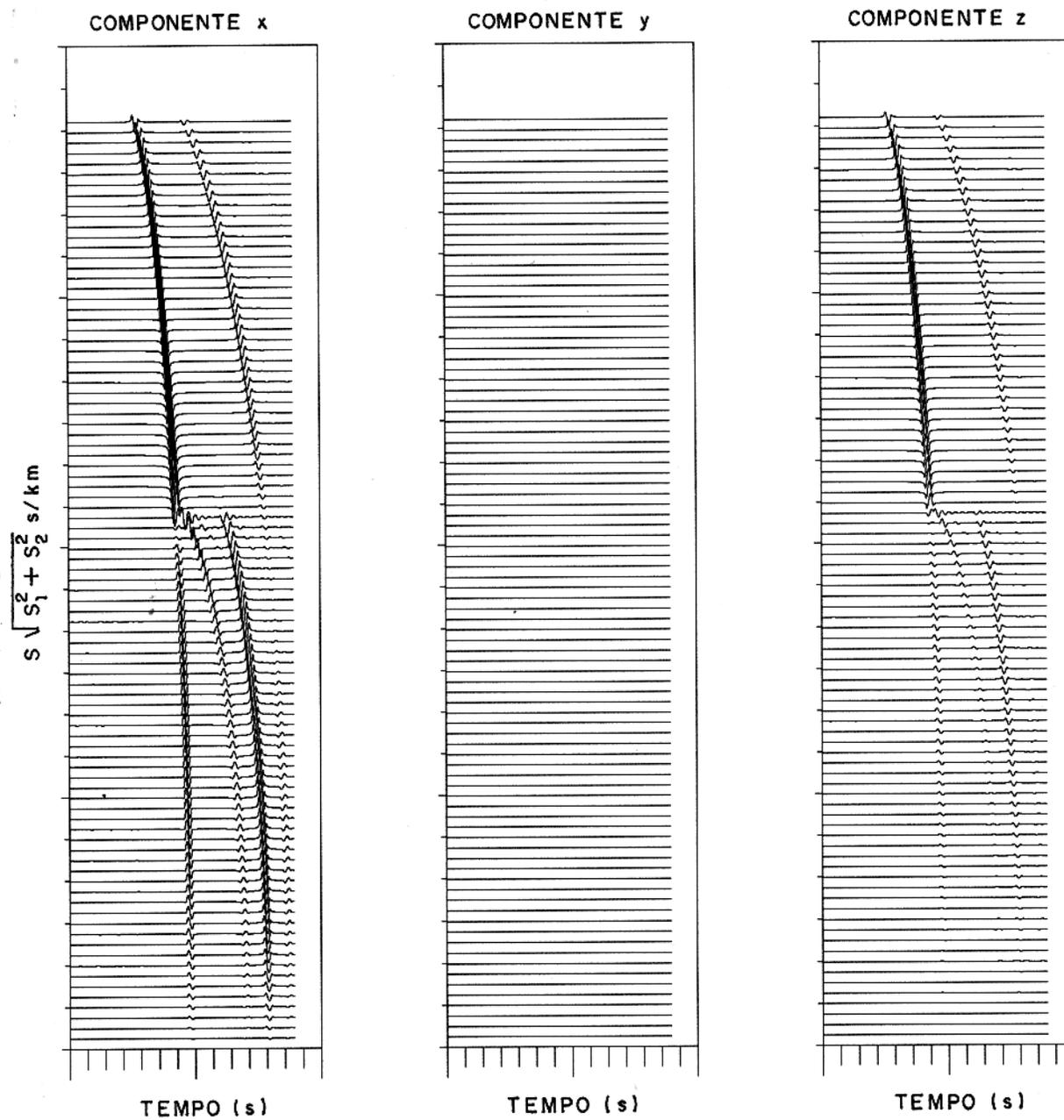


Figura 5.18 - Sismograma de ondas planas para a convertida  $r_{SP}$ , considerando-se o experimento isotrópico-ortorrômbico, no azimute  $\phi = 75^\circ$ .

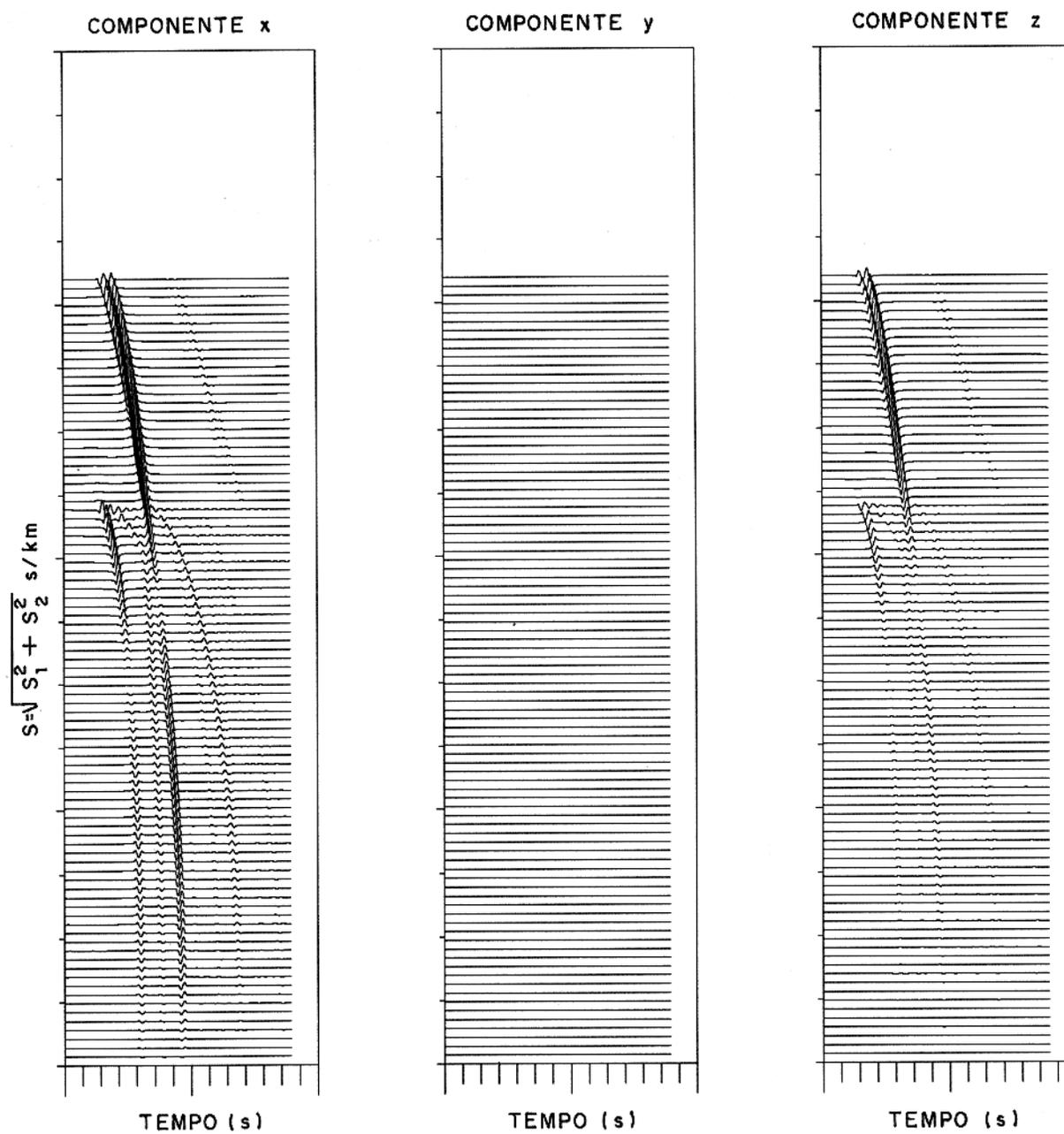


Figura 5.19 - Sismograma de ondas planas para a convertida  $t_{SP}$ , considerando-se o experimento isotrópico-ortorrômbico, no azimute  $\phi = 15^\circ$ .

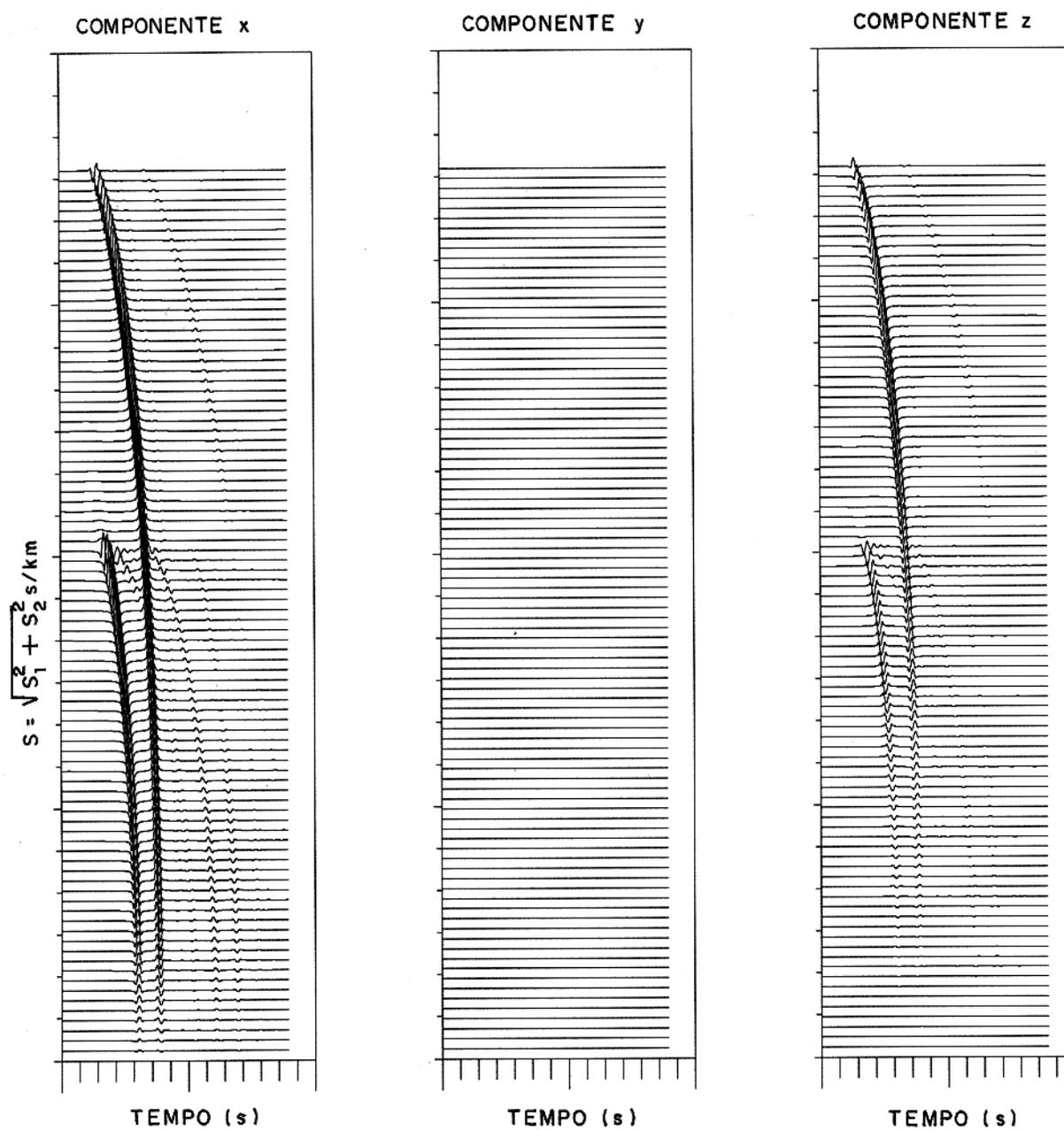


Figura 5.20 - Sismograma de ondas planas para a convertida  $t_{SP}$ , considerando-se o experimento isotrópico-ortorrômbico, no azimute  $\phi = 75^\circ$ .

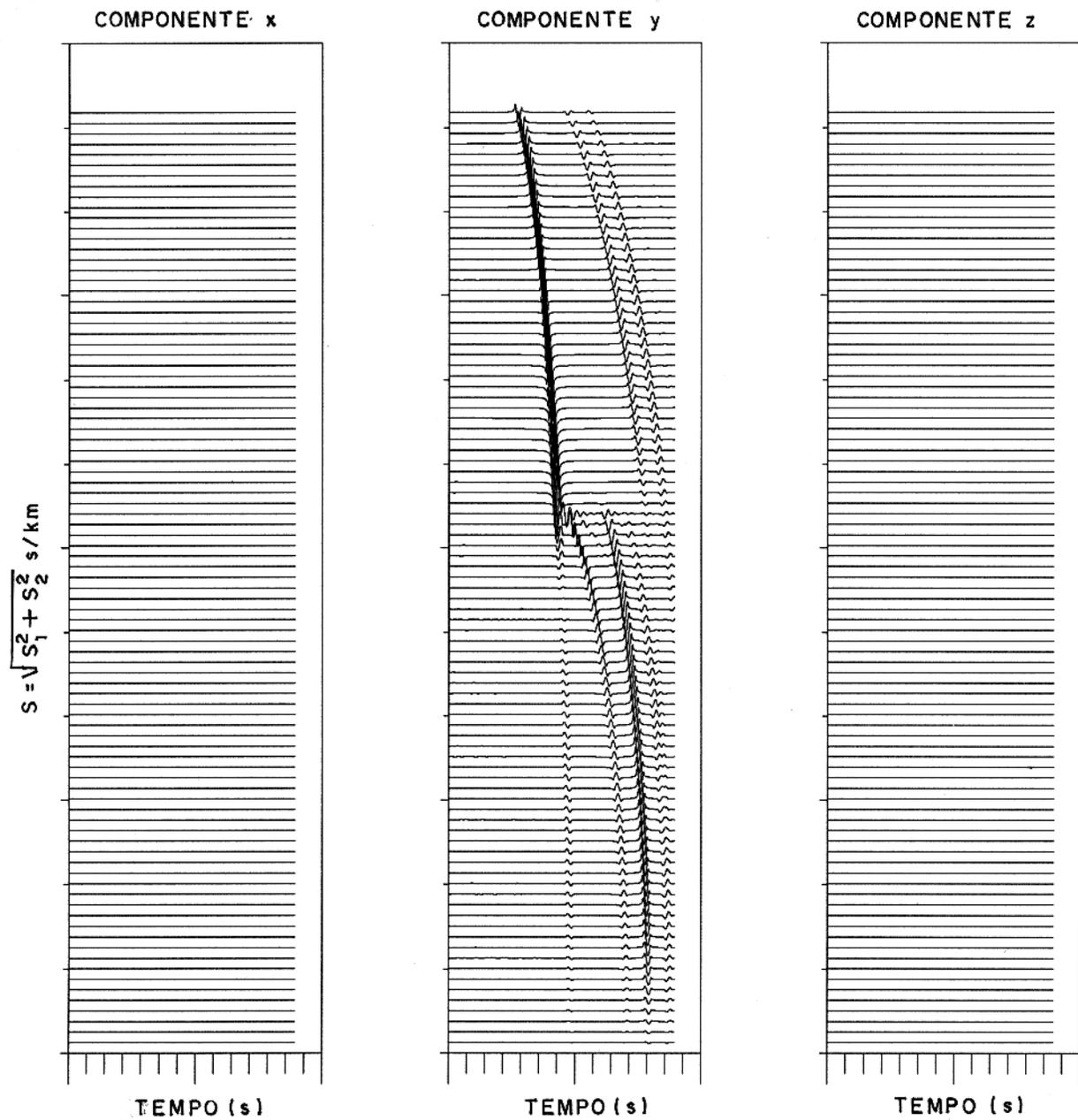


Figura 5.21 - Sismograma de ondas planas para a convertida  $r_{TP}$ , considerando-se o experimento isotrópico-ortorrômbico, no azimute  $\phi = 15^\circ$ .

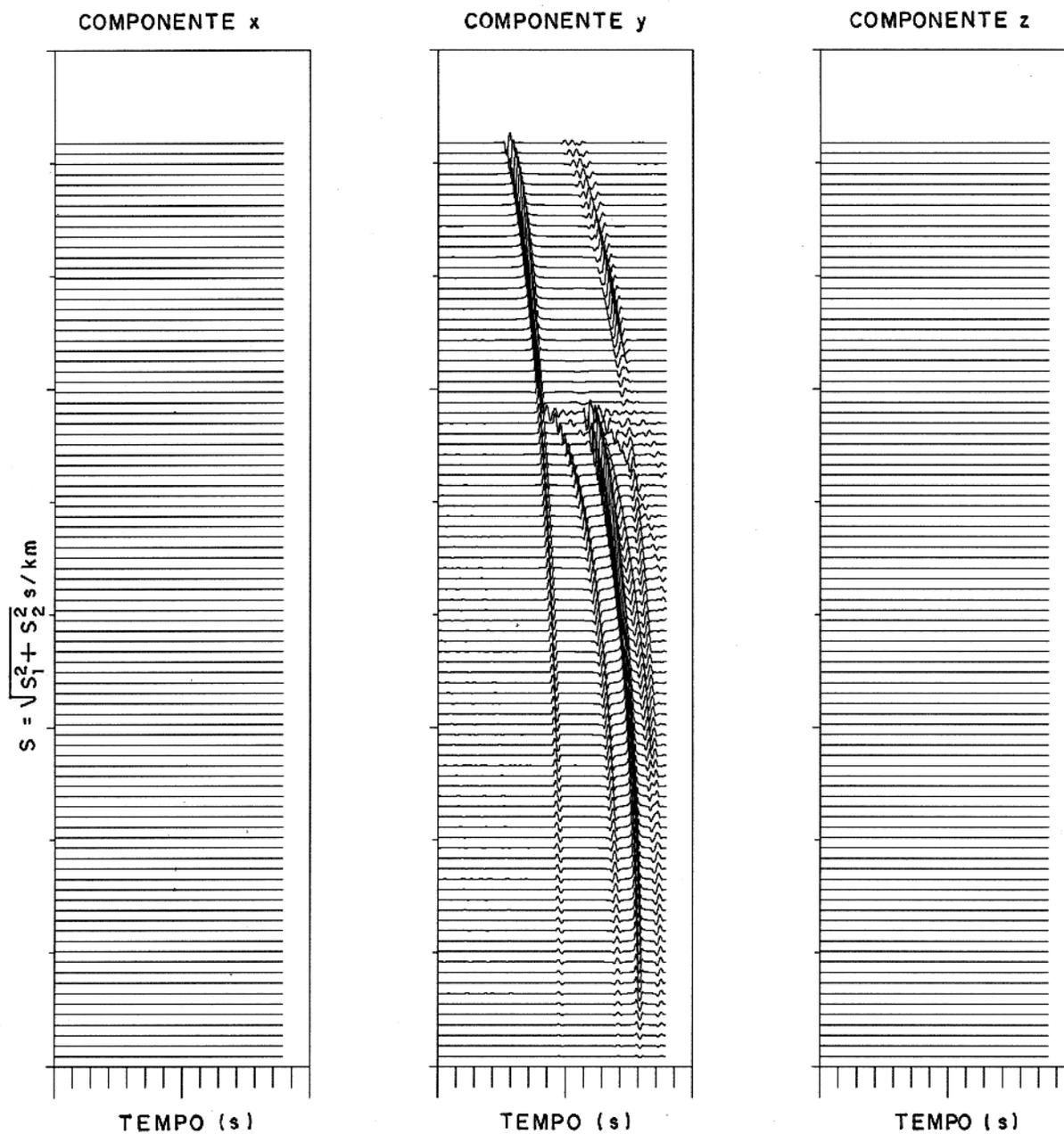


Figura 5.22 - Sismograma de ondas planas para a convertida  $r_{TP}$ , considerando-se o experimento isotrópico-ortorrômbico, no azimute  $\phi = 75^\circ$ .

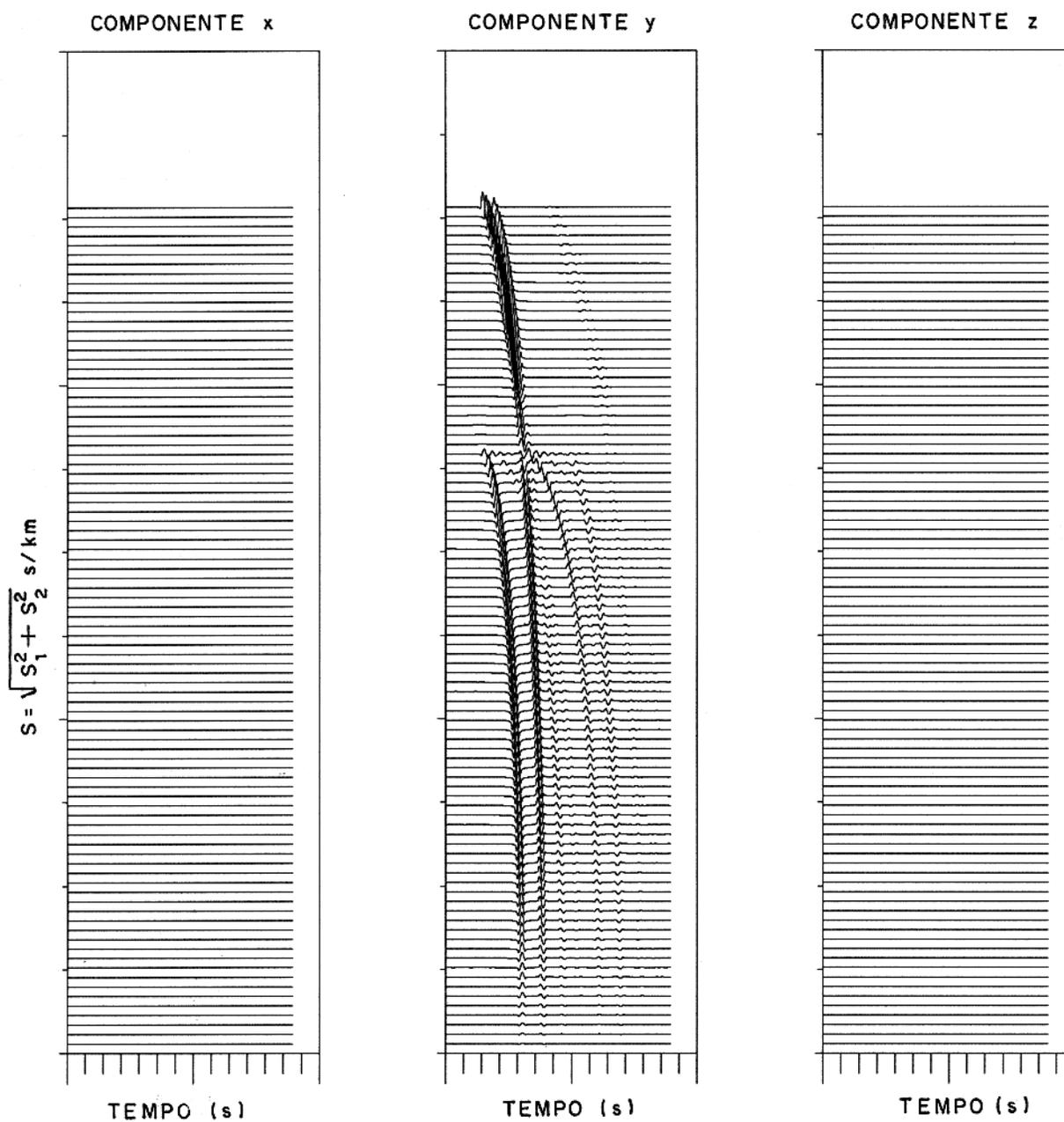


Figura 5.23 - Sismograma de ondas planas para a convertida  $t_{TP}$ , considerando-se o experimento isotrópico-ortorrômbico, no azimute  $\phi = 15^\circ$ .

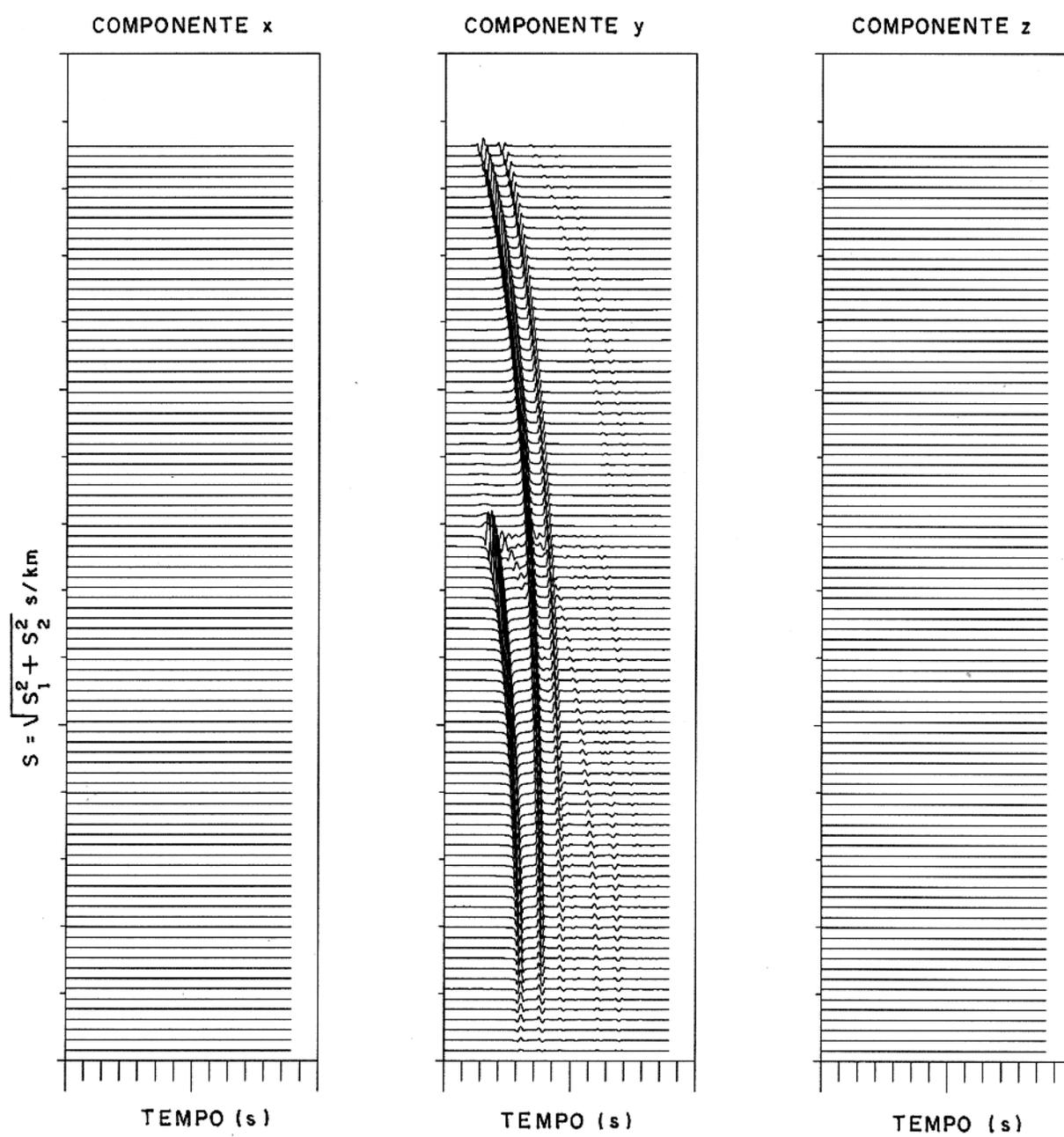


Figura 5.24 - Sismograma de ondas planas para a convertida  $t_{TP}$ , considerando-se o experimento isotrópico-ortorrômbico, no azimute  $\phi = 75^\circ$ .

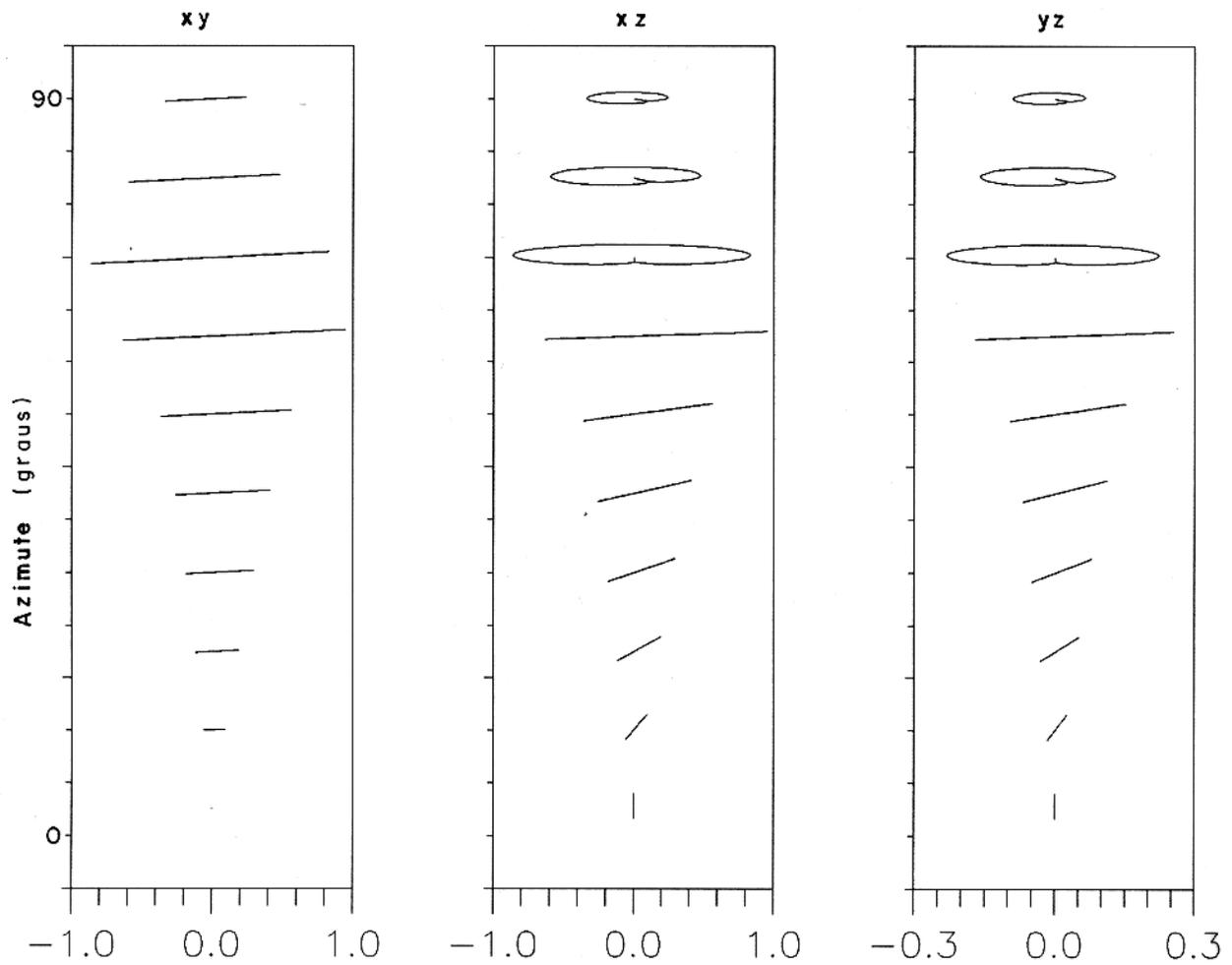


Figura 5.25 - Hodograma para a transmissão  $t_{pp}$ , considerando-se o experimento isotrópico-isotrópico, no azimute  $\phi = 15^\circ$ .

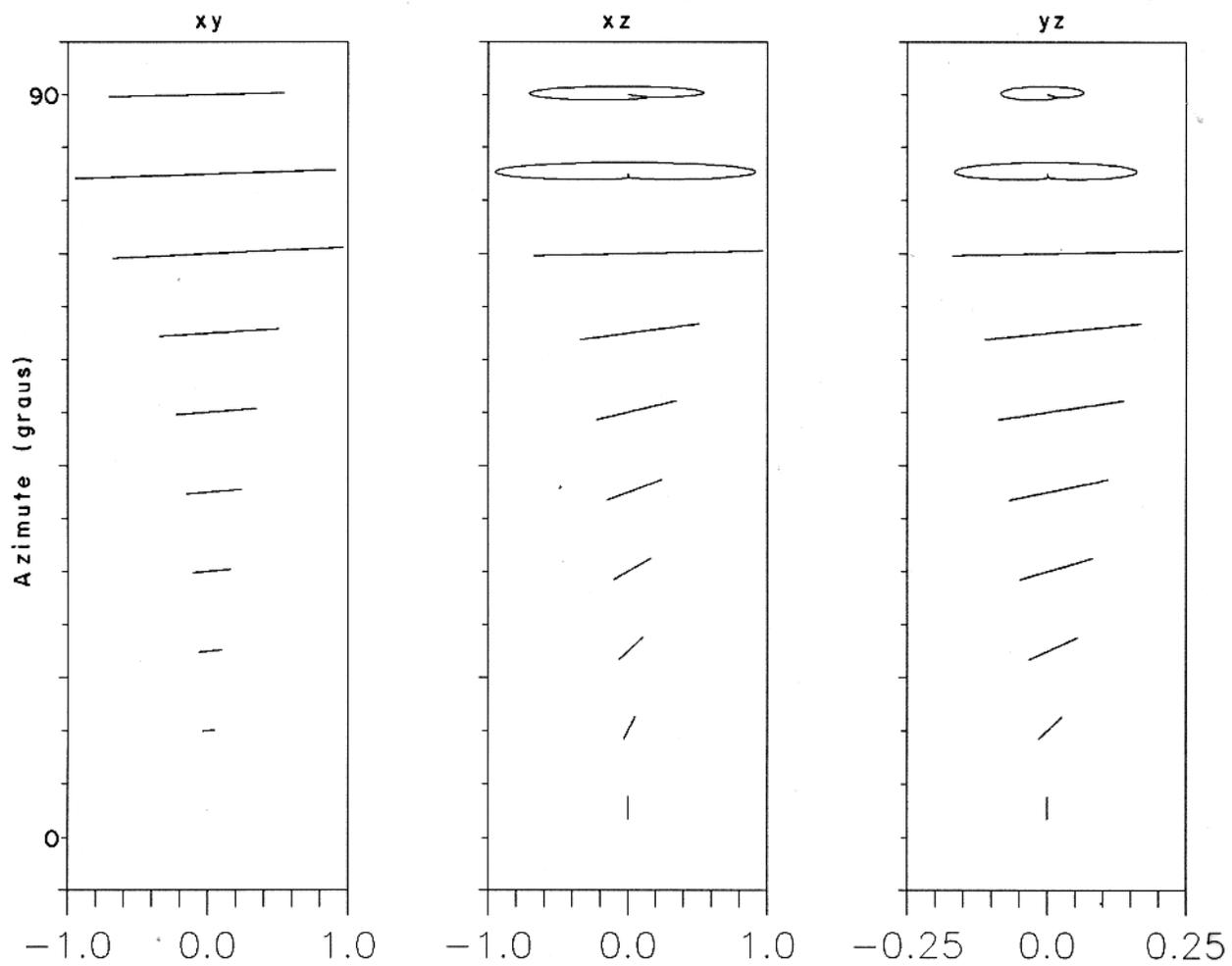


Figura 5.26 - Hodograma para a transmissão  $t_{pp}$ , considerando-se o experimento isotrópico-ortorrômbico, no azimute  $\phi = 15^\circ$ .

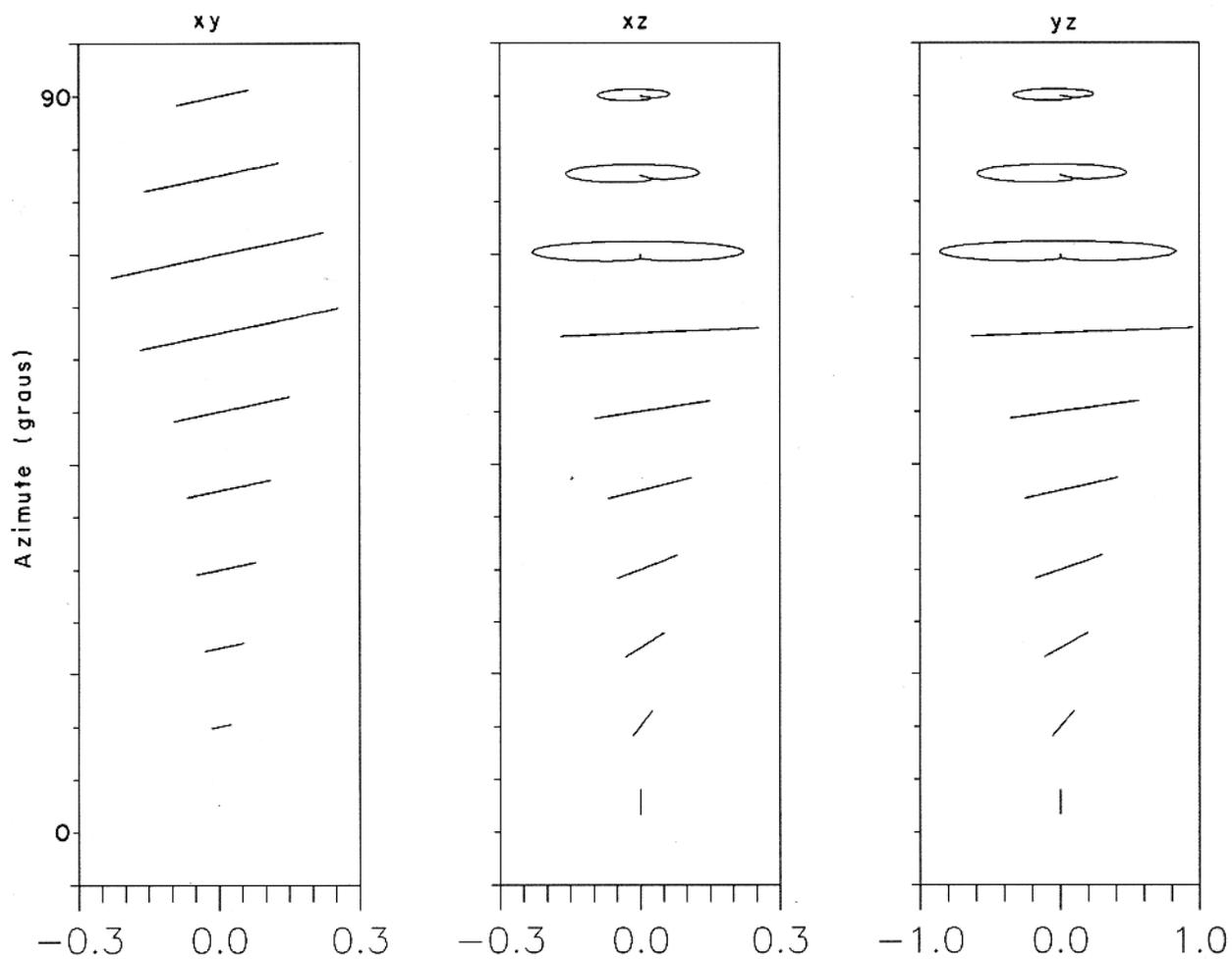
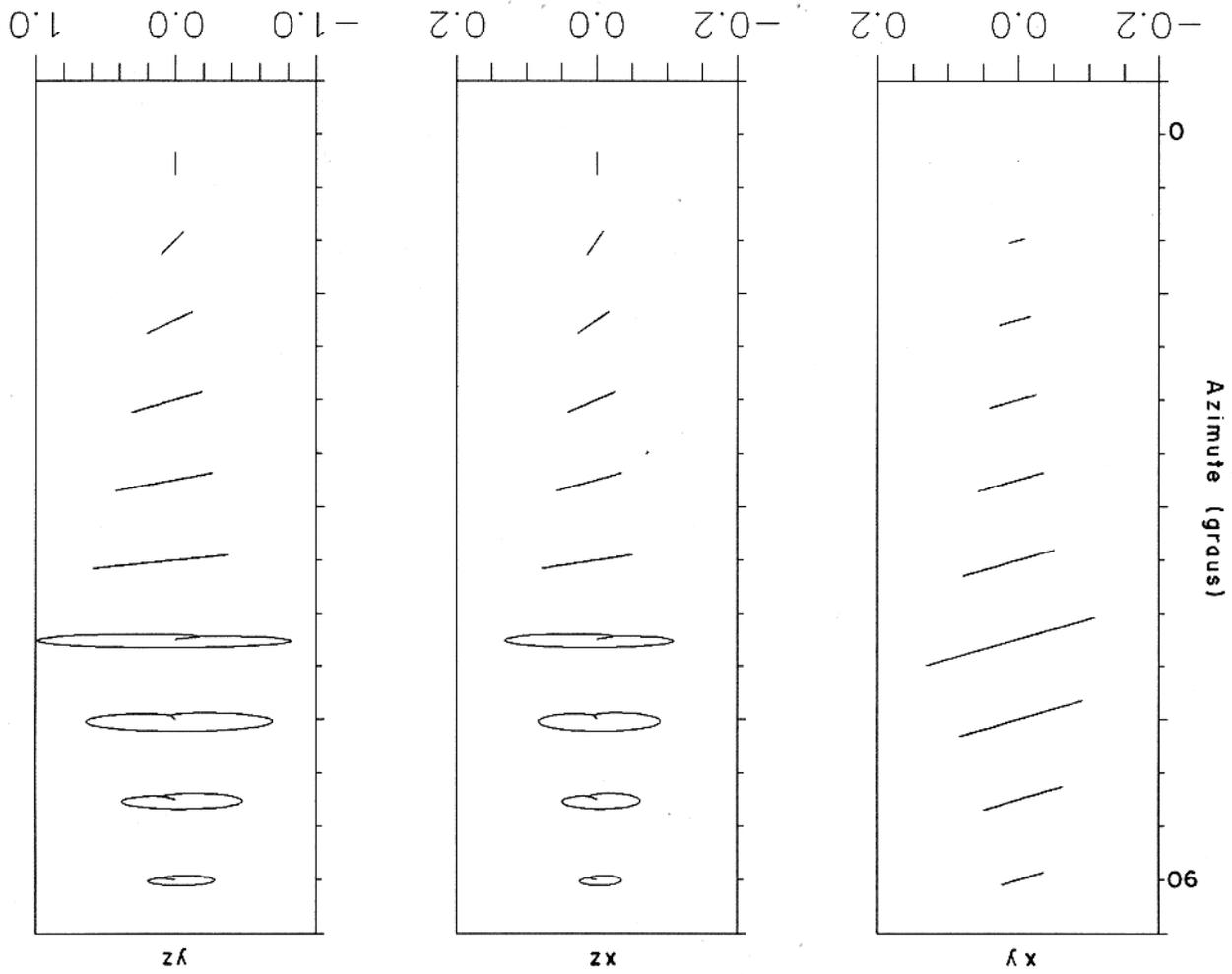


Figura 5.27 - Hodograma para a transmissão  $t_{pp}$ , considerando-se o experimento isotrópico-isotrópico, no azimute  $\phi = 75^\circ$ .

Figura 5.28 - Hodograma para a transmissão  $t_{pp}$ , considerando-se o experimento isotrópico-ortorrômbico, no azimute  $\phi = 75^\circ$ .



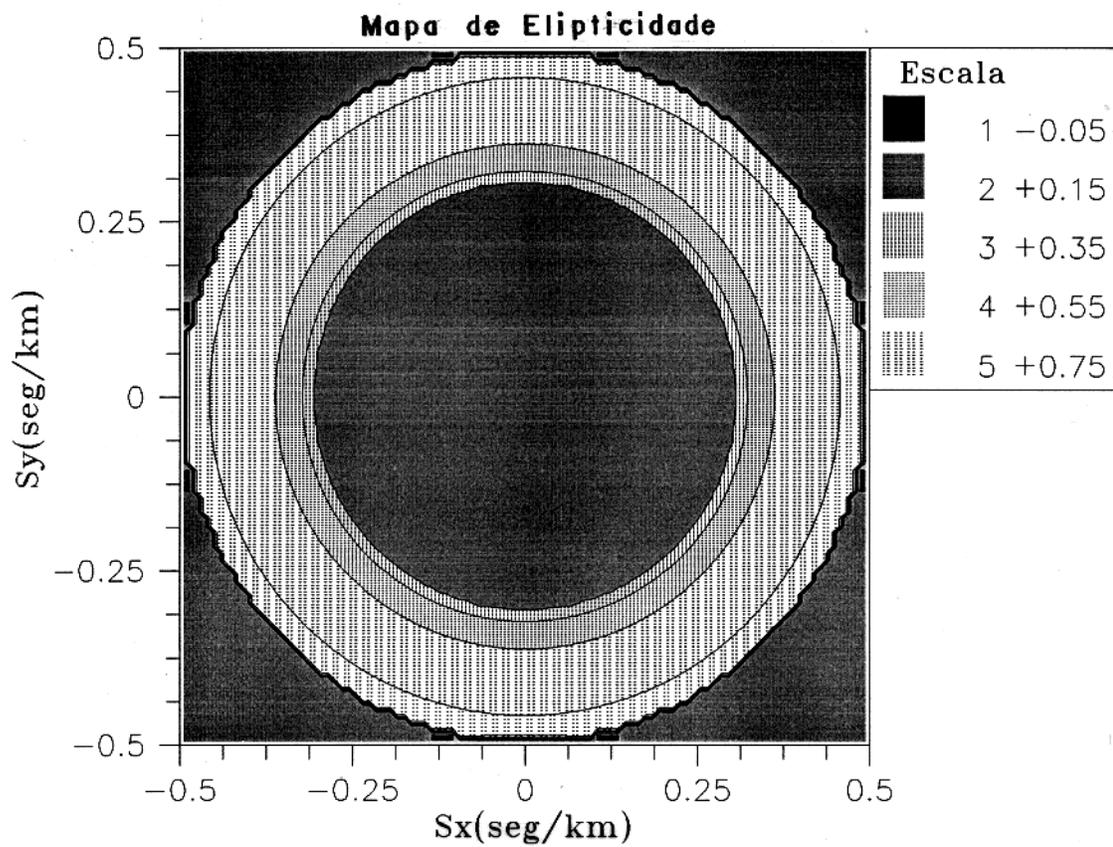


Figura 5.29 - Mapa de elipticidade para a transmissão  $t_{pp}$ , considerando-se o experimento isotrópico-isotrópico.

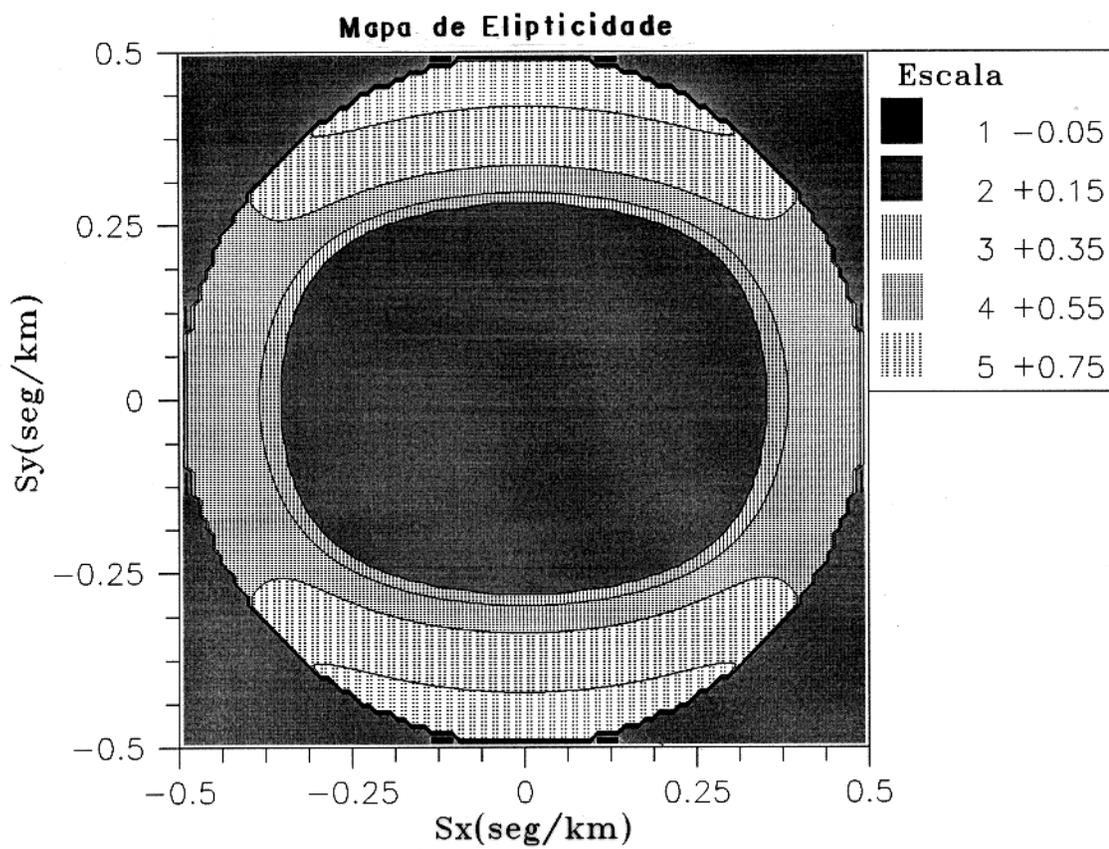


Figura 5.30 - Mapa de elipticidade para a transmissão  $t_{pp}$ , considerando-se o experimento isotrópico-ortorrômico.

## 6 - CONCLUSÕES

Ao final deste trabalho, algumas contribuições e potencialidades do mesmo podem ser vislumbradas e que são apresentadas a seguir:

a) Foi desenvolvido um método simples e sistemático para a obtenção dos coeficientes de ondas refletidas e transmitidas através de interfaces que separam meios anisotrópicos que apresentam pelo menos um plano horizontal de simetria especular. Estes coeficientes são soluções de um sistema matricial de equações, que generalizam, para a anisotropia, as conhecidas equações de Zoeppritz, que aparecem em experimentos com meios isotrópicos. Eles são expressos em termos das chamadas matrizes de impedância. Estas matrizes são determinadas a partir de cada componente horizontal do vetor de vazarosidade e dos parâmetros elásticos que definem os meios elásticos em estudo. A sua aplicação ao método da refletividade, que permite o estudo da propagação de ondas através de estratificações horizontais, foi estabelecida. Seu uso, nas análises de AVO e AVA e no estudo de traçamento dinâmico de raios, será, certamente muito útil, devido à sua simplicidade e modularidade.

b) Foi obtida a determinação de meios quasi-equivalentes com relação à reflexão de ondas P. Isto significa a obtenção de meios isotrópicos que se comportam elasticamente como meios anisotrópicos, em experimentos com reflexão de ondas P, supondo-se incidência pré-crítica. A obtenção destes meios foi alcançada, mesmo considerando-se a presença de forte anisotropia e amplos ângulos de incidência. Foi mostrada a existência de meios com ajustes ótimos. A consequência fundamental deste resultado confirma a inadequabilidade de experimentos de reflexão de ondas P, para o diagnóstico da presença de anisotropia, pelo menos para meios com finas estratificações ou mesmo, fraturado, em propagação nos seu planos verticais de simetria. Reforça, também, a importância da propagação das ondas S, como um possível fator de diagnóstico de anisotropia.

c) Foram obtidas representações integrais dos pulsos espalhados através de interfaces que separam meios anisotrópicos, a partir do conceito de pulso analítico, especificamente na propagação pós-crítica. Foram muito bem caracterizados os fatores que afetam a deformação destes pulsos e foi feita, também, sua aplicação ao estudo de espalhamentos através de estratificações mais gerais. O caso de apenas uma camada foi analisado e suas soluções representadas a partir do conhecido operador de reverberação. Foram feitas, também, aplicações destes resultados em experimentos sintéticos, no sentido de analisar o efeito da presença de

fraturamento sobre as amplitudes e as polarizações dos pulsos espalhados. Um modelo fraturado, segundo HOOD (1990), foi utilizado nestes experimentos numéricos. Os resultados foram apresentados através de mapas de amplitudes e elipticidades, sismogramas de ondas planas e hodogramas e mostraram que a presença de fraturas nos meios considerados, afeta, significativamente, as amplitudes e os estados de polarização das ondas espalhadas, principalmente, nas direções sub-normais aos planos de fraturas. A potencialidade de aplicação destes resultados na interpretação de experimentos de PSV ou em levantamentos sísmicos de grande afastamento, parece ser bastante promissora e pode resultar em importante fator de diagnóstico de anisotropia, principalmente, se utilizado para a caracterização micro-estrutural de reservatórios.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- AKI, K. & RICHARD, P. G. 1980. **Quantitative Seismology**. New York, W.H.Freeman & Co. 2 v.
- BACKUS, G. E. 1962. Long-wave anisotropy produced by horizontal layering. **J. Geophys. Res.**, 66(4): 427 - 440.
- BANIK, N.C. 1987. An effective anisotropy parameter in transversely isotropic media. **Geophysics**, 52(12): 1654 - 1664.
- BRODOV, L.U.; TIKHONOV, A.A.; CHESNOKOV, E.M.; TERTYCHNYI, V.V.; ZATSEPIN, S.V. 1991. Estimating physical parameters of cracked-porous oil reservoirs by inverting shear-wave splitting. **Geophys. J. Int.**, 107: 429 - 432.
- CLIET, Ch.; BRODOV, L.U.; TIKHONOV, A.A.; MARIN, D.; MICHON, D. 1991. Anisotropy survey for reservoir definition. **Geophys. J. Int.**, 107: 417 - 427.
- CRAMPIN, S. 1985. Evaluation of anisotropy by shear-wave splitting. **Geophysics**, 50(1): 142 - 152.
- CRAMPIN, S.; LYNN, H.B.; BOTH, D.C. 1989. Shear-Wave VSP's: A powerful new tool for fracture and reservoir description. **Journal of Petroleum Technology**, 41(3): 283-288.
- EWING, W. M.; JARDETZKY, W.; PRESS, F. 1957. **Elastic Waves in Layered Media**. New York, McGraw-Hill.
- FRYER, G.J. & FRAZER, L.N. 1987. Seismic waves in stratified anisotropic media - II. Elastodynamic eigensolutions for some anisotropic systems. **Geophys. J. R. astr. Soc.**, 91: 73 - 101.
- GREGORY, A.R. 1976. Fluid saturation effects on dynamic elastic properties of sedimentary rocks. **Geophysics**, 41: 895 - 921.
- HELBIG, K. & SCHOENBERG, M. 1987. Anomalous polarization of elastic waves in transversely isotropic media. **J. Acoust. Soc. Am.**, 81: 1235 - 1245.

- HOOD, J.A. 1990. **Fracture estimation in anisotropic media**. Hawaii, University of Hawaii. 45 p. Tese (Doctor of Philosophy in Geology and Geophysics) - Graduate division of the University of Hawaii, 1990.
- HUDSON, J.A. 1981. Wave speeds and attenuation of elastic waves in material containing cracks. **Geophys. J. R. astr. Soc.**, 64: 133 - 150.
- KENNETT, B.L.N. 1983. **Seismic Wave Propagation in Stratified media**. Cambridge, Cambridge University Press. 342 p.
- KOEFOED, O. 1955. On the effect of Poisson's ratios of rock strata on the reflection coefficients of plane wave. **Geophys. Prosp.**, 3: 381 - 387.
- KERNER, C.; DYER, B.; WHORTINGTON, M. 1989. Wave propagation in a vertical transversely isotropic medium: field experiment and model study. **Geophysical Journal**, 97: 295 - 309.
- KIM, K.Y.; WROLSTAD, K.H.; AMINZADEH, F. 1993. Effects of transverse isotropy on P-wave AVO for gas sands. **Geophysics**, 58(6): 883 - 888.
- MALLICK, S. & FRAZER, L.N. 1988. Rapid computation of multioffset vertical seismic profile synthetic seismograms for layered media. **Geophysics**, 53(4): 479 - 491.
- MANDAL, B. & MITCHEL, B.J. 1986. Complete seismogram synthesis for transversely isotropic media. **J. Geophys.**, 59: 149 - 156.
- NEIDELL, N.S. 1986. Amplitude variation with offset. **The Leading Edge**, 5(3): 47 - 51.
- OSTRANDER, W.J. 1984. Plane-wave reflection coefficients for gas sand at nonnormal angles of incidence. **Geophysics**, 49: 1637 - 1648.
- POSTMA, G.W. 1955. Wave propagation in stratified medium. **Geophysics**, 10(4): 780 - 806.
- PROTÁZIO, J. S. & SCHOENBERG, M. 1991. Reflection and transmission of elastic plane wave at the interface between anisotropic media. In: CONGRESSO INTERNACIONAL DA SOCIEDADE BRASILEIRA DE GEOFÍSICA, 2., Salvador, 1991. **Anais**. Salvador, SBGf. p. 739 - 744.
- ROKHLIN, S.I.; BOLLAND, T.K. & ADLER, L. 1986. Reflection and refraction of elastic waves on a plane interface between two generally anisotropic media. **J. Acoust. Soc. Am.**, 79: 906 - 918.

- SCHOENBERG, M. 1993. **Mild anisotropy or weak anisotropy revisited, a tutorial on effects of anellipticity in two dimensional anisotropy.** (Mimeografado).
- SCHOENBERG, M. & COSTA, J. 1991. The insensitivity of reflected SH waves to anisotropy in an underlying layered medium. **Geophys. Prosp.**, 39: 985 - 1003.
- SCHOENBERG, M. & DOUMA, J. 1988. Elastic wave propagation in media with parallel fractures and aligned cracks. **Geophys. Prosp.**, 36: 571 - 590.
- SCHOENBERG, M. & MUIR, F. 1989. A calculus for finely layered anisotropic media. **Geophysics**, 54: 581 - 589.
- THOMSEN, L. 1986. Weak elastic anisotropy. **Geophysics**, 51(10): 1954 - 1966.
- WINTERSTEIN, D.F. & MEADOWS, M.A. 1991a. Shear wave polarizations and subsurface stress directions at Lost Hills field. **Geophysics**, 56(9): 1331 - 1348.
- WINTERSTEIN, D.F. & MEADOWS, M.A. 1991b. Changes in shear-wave polarization azimuth with depth in Cymric and Railroad Gap oil fields. **Geophysics**, 56(9): 1349 - 1364.
- WRIGHT, J. 1987. The effects of transverse isotropy on reflection amplitude versus offset. **Geophysics**, 52: 564 - 567.
- ZOEPPRITZ, K. 1919. **Über Reflexion und Durchgang seismischer Wellen durch Unstetigkeitsflächen: Über Erdbebenwellen VIIB.** Berlin. 57 - 84 (Nachrichten der Königlichen Gesellschaften der Wissenschaften zu Göttingen, math-phys. K1).