



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ  
INSTITUTO DE TECNOLOGIA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA**

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**

**PREDIÇÃO DE CAMPO ELÉTRICO PARA TV DIGITAL USANDO FUNÇÕES DE  
GREEN DIÁDICAS**

**DIEGO KASUO NAKATA DA SILVA**

**DM:14/2014**

**UFPA/ITEC/PPGEE  
Campus Universitário do Guamá  
Belém - Pará - Brasil  
Julho de 2014**

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ**  
**INSTITUTO DE TECNOLOGIA**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA**

**DIEGO KASUO NAKATA DA SILVA**

**PREDIÇÃO DE CAMPO ELÉTRICO PARA TV DIGITAL USANDO FUNÇÕES DE  
GREEN DIÁDICAS**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal do Pará como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.

Orientador: Prof. Dr. Gervásio Protásio dos Santos Cavalcante.

Área de concentração: Telecomunicações.

**UFPA/ITEC/PPGEE**  
**Campus Universitário do Guamá**  
**Belém - Pará - Brasil**  
**Julho de 2014**

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ**  
**INSTITUTO DE TECNOLOGIA**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA**

**PREDIÇÃO DE CAMPO ELÉTRICO PARA TV DIGITAL USANDO**  
**FUNÇÕES DE GREEN DIÁDICAS**

**AUTOR:** DIEGO KASUO NAKATA DA SILVA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO SUBMETIDA À AVALIAÇÃO DA BANCA EXAMINADORA APROVADA PELO COLEGIADO DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ E JULGADA ADEQUADA PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM ENGENHARIA ELÉTRICA COM ÊNFASE EM TELECOMUNICAÇÕES.

**APROVADA EM** \_\_\_\_ / \_\_\_\_ / \_\_\_\_

---

Professor Dr. Gervásio Protásio dos Santos Cavalcante

**ORIENTADOR**

---

Professor Dra. Jasmine Priscyla Leite de Araujo

**MEMBRO**

---

Professor Dra. Josiane do Couto Rodrigues

**MEMBRO EXTERNO**

**Visto:**

---

Professor Dr. Evaldo Gonçalves Pelaes

**COORDENADOR DO PPGE /ITEC/UFPA**

## **DEDICATÓRIA**

**Dedico a Deus, aos meus pais, familiares e amigos.**

## AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus supremo criador dos céus, terra e universo. Ele sempre esteve presente em toda minha vida e Lhe sou grato por todas as bênçãos e glórias recebidas. “Aquele que habita no esconderijo do Altíssimo, à sombra do Todo-Poderoso descansará. Direi do Senhor: Ele é meu refúgio e a minha fortaleza, o meu Deus, em quem confio” (Sl 91:1-2).

Agradeço a meus pais, Samuel e Kasué, pelo sustento, estudos, carinho, amor e confiança ao longo da minha vida. Graças a eles pude chegar até esta etapa da vida, tendo um caráter íntegro e cristão. Faço meus agradecimentos também aos meus avôs paternos, José Terto da Silva (em memória) e Terezinha Lima da Silva (em memória), e aos meus avôs maternos, Sumito Nakata (em memória) e Tsurué Nakata. Sou grato a todos os meus tios e tias, e a minha tia Sandra (em memória) que de certa forma me apoiaram.

A minha irmã, Vanessa. Aos meus primos e primas.

Ao Prof. Dr. Gervásio Protásio dos Santos Cavalcante, pela transmissão de conhecimentos, pela oportunidade de se fazer um mestrado ao seu lado, pela atenção, pela confiança e compreensão que sempre prestou durante a realização desta dissertação.

Não posso deixar de prestar meus agradecimentos a todos os doutores, mestres e pesquisadores do LCT (Laboratório de Computação e Telecomunicações). À professora Jasmine pela atenção, dedicação, paciência e aos conselhos dados durante o mestrado. Ao Bruno Lyra e ao Hélio que me ajudaram muito nas dúvidas de programação e propagação de ondas, que foram muitas durante todo o desenrolar do curso. À Cristiane que ensinou a elaboração e escritas de trabalhos.

Faço meus agradecimentos a todos aos meus amigos e amigas que tive durante toda a minha vida; de certa forma eles pavimentaram a estrada que caminhei na vida. Agradeço ao meu amigo Carlos Rossi, José Borges, André Miranda e João Maciel que sempre foram meus companheiros e “irmãos”. Faço meus agradecimentos também a Isabel (Bebel) que me ajudou a chegar até esta etapa da minha vida. “Algumas amizades não duram nada, mas um verdadeiro amigo é mais chegado que um irmão” (Pv 18:24).

Ao pastor John Moon, Nixon e Roberto e a todos da igreja Batista Luz do evangelho que oraram e torceram por mim.

E por ultimo a todos os integrantes do Laboratório de Computação e Telecomunicações que me ajudaram de tal forma que nem saberei como agradecer em todas as fases do mestrado, um agradecimento especial aos amigos: Allan dos Santos Braga, Bruno Lyra Castro, Igor Ruiz Gomes, Regina Nascimento, João Victor Carmona, Miércio Alcântara, Ramz Luiz Fraiha Lopes, Nelson Mateus, Hélio Renato Oeiras, Walter Martins, Yuri, Deyvison Penha, Charllene Guerreiro e ao André.

Agradeço também ao Allan pelo apoio e as ajudas prestadas ao longo dessa caminhada. Assim como ao Wanderley que me ajudou bastante no estudo e aprendizagem das funções de Green diádicas.

Ao instituto Nacional de Ciência e Tecnologia de Comunicação Sem Fio (INCT-CSF) pelo suporte prestado.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo apoio financeiro no formato de bolsa.

À Universidade Federal do Pará, pela oportunidade dada a mim para a realização desta dissertação.

*“O vento esculpe as nuvens, o tempo esculpe a alma dos homens. O vento, porém, dissipa as nuvens, enquanto o tempo jamais dissipará a alma. Sua essência permanece a mesma, intacta. É ela que define quem somos. E quando a chama da vida deixa de brilhar e o corpo tomba, é essa essência que ascende aos céus, unindo-se a Deus por toda a eternidade.”*

**(Marcelo Gleiser)**

*“Porque a loucura de Deus é mais sábia que os homens; e a fraqueza de Deus é mais forte que os homens.”*

**(I Cor 1:25)**

## Sumário

RESUMO.....	1
ABSTRACT .....	2
Lista de Figuras .....	3
Lista de Tabelas.....	5
CAPÍTULO 1 – INTRODUÇÃO .....	6
1.2. Motivação .....	7
1.3. Objetivos.....	8
1.4. Organização da Dissertação.....	8
CAPÍTULO 2 – FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA.....	10
2.1 – Introdução.....	10
2.2 – Definição de Díadica .....	10
2.3 – Produto Escalar Entre Funções Diádicas.....	10
2.4 – Díadica Transposta .....	11
2.5 – Díadica Unitária.....	11
2.6 – Produto Vetorial .....	11
2.7 – Divergente e Rotacional .....	12
2.8 – Classificações das Funções De Green .....	12
2.9 – Classificações das Funções De Green Diádicas .....	15
2.10 – Simetria.....	16
2.11 – Considerações Finais .....	16
CAPÍTULO 3 – FUNÇÕES DE GREEN DIÁDICAS PARA A FORMULAÇÃO DE CAMPO ELÉTRICO.....	17
3.1- Introdução.....	17
3.2- Expansão das Funções de Green Diádicas em Autofunções.....	19
3.3-Ondas Cilíndricas .....	21
3.4 – Considerações Finais .....	22
CAPÍTULO 4 – FORMULAÇÃO DO PROBLEMA.....	23
4.1 – FUNÇÃO DE GREEN DIÁDICA PARA O ESPAÇO LIVRE.....	23
4.2 – Função de Green Diádica Para Meios de N-Camadas.....	24
4.3 – Função de Green Diádica Para Um Meio de 2-Camadas .....	24
4.4 – Função de Green Diádica Para Um Meio de 3-Camadas .....	25
4.4 – Condições de Contorno Para Um Meio de N-Camadas .....	26
4.5 – Considerações Finais .....	27
CAPÍTULO 5 – CÁLCULO DO CAMPO ELÉTRICO PARA UM MEIO DE 2 CAMADAS .....	28
5.1 – Cálculo dos Coeficientes .....	29

5.2 – Cálculo do Campo Para Um Dipolo Vertical .....	32
5.3 – Cálculo do Campo Para Um Dipolo Horizontal .....	36
5.4 – Considerações Finais .....	40
CAPÍTULO 6 – CÁLCULO DO CAMPO ELÉTRICO PARA UM MEIO DE 3 CAMADAS .....	42
6.1 – Primeira Situação: Transmissor e Receptor no meio 1.....	42
6.1.2 – Cálculo dos coeficientes .....	43
6.1.4 – Cálculo do Campo para um dipolo vertical .....	49
6.2 – Segunda Situação: Transmissor no meio 1 e Receptor meio 2.....	51
6.2.1 –Campo Elétrico para um Dipolo Horizontal.....	52
6.3 - Considerações Finais.....	54
CAPÍTULO 7 – RESULTADOS .....	55
7.1 – Considerações Preliminares.....	55
7.2 – Resultados para um Meio de Duas Camadas.....	57
7.3 – Resultados para um Meio de Três Camadas Situação I.....	61
7.4 – Resultados para um Meio de Três Camadas Situação II .....	61
7.5 - A utilização das funções de Green diádicas como modelo de predição de campo elétrico na faixa de frequência UHF em diferentes condições climáticas .....	63
7.6 – Considerações Finais .....	66
CAPÍTULO 8 – CONCLUSÕES .....	67
REFERÊNCIAS BIBLIOGRAFICAS .....	68

## RESUMO

Este trabalho oferece um método para a predição da intensidade de campo elétrico para TV Digital utilizando a Função de Green diádica. A Diádica é uma ferramenta matemática eficiente que tem simplicidade simbólica e robustez permitindo, assim, que algumas características do meio (como permissividade, condutividade e permeabilidade, por exemplo) sejam consideradas na elaboração do modelo de campo elétrico, bem como levar em conta a anisotropia do meio. Na maior parte dos trabalhos correlatos, que utilizam as funções de Green diádicas, estão relacionados na faixa de VHF. Este trabalho irá apresentar desde os conceitos básicos das diádicas, desenvolvendo-a para o cálculo de um modelo que permita prever o campo elétrico para a faixa de UHF, na qual os sistemas de TV Digital se encontram. Uma explanação teórica e um desenvolvimento matemático serão feitos de forma que um entendimento claro e objetivo sejam alcançados no estudo das funções de Green diádicas, numa parte da teoria do eletromagnetismo. Testes foram realizados para confirmar a aplicabilidade da formulação sugerida, fazendo simulações que realizem uma comparação entre os dados medidos, de duas emissoras de TV situadas na cidade de Belém, e o modelo de Okumura-Hata modificado, mostrando resultados satisfatórios, tanto para frequências na faixa de VHF e UHF.

**Palavras-Chaves:** Campo elétrico; TV Digital; Função de Green Diádica; Ferramenta Matemática Eficiente.

## ABSTRACT

This work provides a method for the prediction of electric field intensity to Digital TV using the Dyadic Green's function. The Dyadic is a powerful mathematical tool which has symbolic simplicity and robustness, thus enabling some characteristics of the medium (such as permittivity, conductivity and permeability, for example) are considered in developing the electric field model, as well as take into account the anisotropy of the medium. In most related works using the dyadic Green's functions are related in the VHF band. This work will present from basic concepts of dyadic, developing it for the calculation of a model which can predict the electric field to the UHF band, in which systems are Digital TV. A theoretical explanation and mathematical development will be made such that a clear understanding and objective are achieved in the study of dyadic Green's functions, in a part of the theory of electromagnetism. Tests were performed to confirm the applicability of the suggested formulation, making simulations that perform a comparison between measured data, from two TV stations located in the city of Belém, and the Okumura-Hata model modified, showing satisfactory results for both frequencies in VHF and UHF.

**Key Words:** Electric field; Digital TV; Dyadic Green's function; Efficient Mathematical tool.

## Lista de Figuras

Figura 2.1 - Linha de transmissão excitada por uma fonte de corrente distribuída. ...	13
Figura 2.2 - Classificação das funções de Green de acordo com as condições de fronteira.....	15
Figura 3.1 - Configuração geométrica de uma estrutura de N-camadas. ....	17
Figura 5.1 - Plano Terra. ....	28
Figura 5.2 - Dipolo elétrico vertical num meio de duas camadas.....	33
Figura 5.3 - Dipolo elétrico horizontal num meio de duas camadas.....	36
Figura 6.1 - Meio de Três Camadas. ....	42
Figura 6.2 - Dipolo elétrico horizontal num meio de três camadas. ....	46
Figura 6.3 - Meio com três camadas, sendo o transmissor situado na camada 1 e o receptor na camada 2. ....	51
Figura 7.1 - Campo elétrico usando Função de Green diádicas versus Okumura-Hata para: (a) frequência de 50 MHz e (b) frequência de 900 MHz. ....	58
Figura 7.2 - Campo elétrico usando Função de Green diádicas versus Okumura-Hata para uma frequência de 900 MHz, considerando várias alturas para antena transmissora. ....	58
Figura 7.3 - Campo elétrico usando Função de Green diádicas versus Okumura-Hata para uma frequência de 2 GHz. ....	59
Figura 7.4 - Campo elétrico usando Função de Green diádicas versus dados medidos para: (a) Emissora A com $\sigma = 10 \text{ mS/m}$ (b) Emissora A com $\sigma = 90 \text{ mS/m}$ (c) Emissora B com $\sigma = 10 \text{ mS/m}$ e (d) Emissora B com $\sigma = 90 \text{ mS/m}$ .....	60
Figura 7.5 - Campo elétrico para um meio de três camadas situação I usando Função de Green diádicas versus dados medidos para: (a) Emissora A e (b) Emissora B.....	61
Figura 7.6 - Campo elétrico para um meio de três camadas situação II usando Função de Green diádicas versus dados medidos para: (a) Emissora A e (b) Emissora B.....	62
Figura 7.7 - Campo elétrico para um meio de três camadas situação II usando Função de Green diádicas versus Okumura-Hata para: (a) frequência de 50MHz e (b) frequência de 900MHz.....	62
Figura 7.8 - Mapa esquemático de Belém - Radial (linhas vermelhas); transmissores (amarelo); água doce (região azul). ....	64

Figura 7.9 - Comparação entre os dados medidos e FGD para as duas estações do ano (solo úmido e solo seco) para Tx1. ....	65
Figura 7.10 - Comparação entre os dados medidos e FGD para as duas estações do ano (solo úmido e solo seco) para Tx2. ....	65

## Lista de Tabelas

Tabela I - Parâmetros usados para o meio de duas camadas. ....	55
Tabela II - Parâmetros usados para o meio de três camadas. ....	56
Tabela III - Parâmetros usados das emissoras A e B. ....	57
Tabela IV – Erro RMS para diferentes alturas de Tx. ....	59
Tabela V – Dados Climatológicos sobre Belém. ....	64
Tabela VI – Comparação de Erros e Diferença Média nos Dados. ....	66

## CAPÍTULO 1 – INTRODUÇÃO

Os sistemas de transmissão do sinal de TV digital estão se tornando cada vez mais importantes no Brasil e no mundo. Percebe-se que as características dos meios de propagação, os tipos de vegetação e as condições climáticas restringem o alcance dessas ondas nos mais diversos ambientes. O conhecimento detalhado do mecanismo de propagação do sinal digital de TV é essencial para projetar um serviço de ótima qualidade.

O desempenho adequado de um sistema de comunicação sem fio está ligado à predição de cobertura de campo elétrico/potência em uma determinada área. Os modelos de propagação aparecem como uma ferramenta importante no cálculo das variáveis que descrevem o processo. Modelos de propagação têm sido estudados e desenvolvido ao longo de aproximadamente 70 anos [1], estes podem ser classificados em empíricos, determinísticos, estocásticos ou uma combinação dos mesmos. O seu uso e eficiência estão relacionados ao tipo de percurso, obstruções, enlaces e a precisão exigida.

Uma análise mais ampla e rigorosa para calcular o campo elétrico pode ser realizada através da utilização de funções de Green diádicas (FGD). Estas funções foram introduzidas por Hansen [2]. Posteriormente, elas foram utilizadas para analisar a propagação em condutores de ondas, cavidades ressonantes e propagação em meios semi-infinitos ou em camadas [3] - [5]. O uso de FGD na análise de propagação de ondas eletromagnéticas, em meios semi-infinitos ou dispostos em camadas foi feito por Tai [6], assim como um trabalho semelhante foi feito por Cavalcante [7].

Para investigar a atenuação das ondas de rádio devido ao ambiente florestal, alguns modelos consideram uma vegetação semi-infinita estendida sobre um solo semi-infinito [8]-[13] e outros consideram uma camada de vegetação entre um espaço livre semi-infinito e um solo semi-infinito [14]-[16]. Esses modelos apresentam uma relativa simplicidade matemática. Posteriormente surgiram modelos considerando uma geometria de quatro camadas (espaço livre, copa, tronco e solo) para uma floresta típica [17]-[21]. Nesta geometria, a primeira região (camada 1) é o espaço livre. A segunda região (camada 2) representa a copa das árvores, enquanto a terceira região (camada 3) modela o tronco das árvores. A última região (camada 4) é a terra plana (solo) semi-infinita. Este modelo foi proposto em 1983 por Cavalcante e outros [17], analisado por Lian [18] e por Li e Jiao [19], ambos em 1986, e usado por Seker e Schneider [20] em 1987 e por Seker [21] em 1989. Este modelo foi usado para analisar a propagação de ondas de rádio em floresta e para vegetações

como espalhadores em frequências muito altas (VHF) e frequências ultra-altas (UHF) por Li [22], em 1990.

O uso das funções de Green diádicas na análise da propagação de ondas eletromagnéticas em meios semi-infinitos ou dispostos em camadas foi feita por muitos autores, conforme foi dito anteriormente, e atualmente existem alguns estudos [23] [24], que mostram a sua aplicabilidade para propagação do sinal eletromagnético em baixas frequências, principalmente para uso em serviços de propagação de rádio na faixa de 30 MHz a 200 MHz de frequência. Em trabalhos recentes a FGD tem sido utilizada para calcular: impedância de um semi-plano; campo eletromagnético em camadas finas; expressões analíticas para as FGD eletromagnéticas em substâncias como o grafeno e em antenas impressas [25] - [28].

Tai [6] estabeleceu a expansão das Funções de Green diádicas em autofunções para meios isotrópicos. Ao aplicar este método é possível estabelecer uma formulação para calcular um modelo de meios anisotrópicos não homogêneos de uma maneira menos complexa. Alguns estudos têm sido feitos para modelar um meio de quatro camadas considerando a anisotropia do meio [24] e [29].

O uso das diádicas é justificado pelo fato de ela ser uma ferramenta que permite a incorporação de algumas propriedades do meio em questão; características como a permissividade e condutividade, por exemplo. Com esta ferramenta, é possível calcular o campo elétrico de meios anisotrópicos não homogêneos de uma forma mais simples. Funções diádicas têm se mostrado uma ferramenta poderosa para o cálculo de um campo eletromagnético.

## 1.2. Motivação

É notório que os sistemas de transmissão do sinal digital de TV estão se tornando importantes no Brasil, desde sua implantação em 2006. A preocupação com a qualidade desse serviço cresceu de tal forma que as emissoras de TV estão investindo cada vez mais na qualidade da transmissão do sinal. Com o advento da TV Digital, a mesma teve sua inserção em tecnologias móveis bastante conhecidas nessa atual era tecnológica, a exemplo os *smartphones* e *tablets*. Poucos trabalhos na literatura estão analisando modelos para a predição de campo elétrico para essa faixa de frequência. A formulação aplicada neste trabalho tem como objetivo mostrar a eficácia do uso das funções de Green diádicas para calcular o campo

elétrico produzido por um sistema (por exemplo, TV digital), que opera na faixa de frequência de 470 MHz a 900 MHz. Com as funções de Green diádicas será possível construir modelos que considerem diversas camadas de um meio (camadas essas que podem ser o ar, as construções/prédios/casas de uma cidade; ou então copa e troncos de uma floresta, além do solo da região), permitindo uma maior precisão das características de um meio a ser considerado ou estudado. Como os atuais sistemas de comunicação utilizados, tais como TV digital, telefonia celular e outros sistemas estão operando em frequências mais altas, é necessário o uso de uma ferramenta matemática, tal como as funções de Green diádicas, que permite levar em conta a anisotropia e outras características do meio para uma melhor compreensão de como planejar e implementar esses sistemas.

### **1.3. Objetivos**

O objetivo dessa dissertação é a formulação de campo elétrico para sistemas de comunicação na faixa de VHF e UHF usando as funções de Green diádicas. Será feita uma formulação para a predição de campo elétrico para meios de duas e três camadas, mostrando de maneira detalhada a obtenção dos mesmos. Realizar-se-á o cálculo, para cada caso, do campo considerando o dipolo vertical e horizontal como fontes de correntes. Dessa maneira, consegue-se uma formulação que abrange os sistemas de comunicações nas faixas de frequências citadas anteriormente.

Para a análise dos resultados serão feitas simulações que mostram a comparação do uso das funções de Green diádicas com dados medidos de duas emissoras de TV digital de Belém, com o modelo de Okumura-Hata modificado presente na Rec. ITU-R P.529-3 [30] e uso para a predição de campo considerando as condições climáticas do meio. Tais fatores mostrarão a sua aplicabilidade na faixa de frequência de VHF e UHF.

### **1.4. Organização da Dissertação**

Esta dissertação está dividida em 8 capítulos, cuja organização é mostrada a seguir:

\* No capítulo 1 foi feita uma introdução da dissertação.

\* No capítulo 2 são abordados os conceitos essenciais sobre as funções de Green diádicas.

\* No capítulo 3 são descritos a utilização das funções de Green diádicas para a formulação de campo elétrico.

\* No capítulo 4 é feita a formulação do problema a ser tratado.

\*No capítulo 5 são mostrados os cálculos para a predição do campo elétrico para um meio de duas Camadas.

\* No capítulo 6 são mostrados os cálculos para a predição do campo elétrico para um meio de três Camadas.

\* No capítulo 7 são mostrados os resultados obtidos para a predição do campo elétrico através de simulações feitas.

\* No capítulo 8 são apresentados as conclusões obtidas a partir dos resultados das simulações

## CAPÍTULO 2 – FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

### 2.1 – Introdução

Neste capítulo será feita a notação, a definição de uma função diádica de Green, algumas de suas definições e sua composição a partir de três funções vetoriais. Os fundamentos que serão aqui apresentados podem ser encontrados em [6].

### 2.2 – Definição de Diádica

A palavra díade (do inglês *dyad*) denota um grupo de dois ou um par de quantidades. Em seu uso formal, uma díade ou uma função diádica, representada por  $\bar{\bar{D}} = \bar{A}\bar{B}$ , é formada por duas funções vetoriais. Desta forma, a diádica  $\bar{\bar{D}}$  pode ser definida por

$$\bar{\bar{D}} = \bar{A}\bar{B} \quad (2.1)$$

Denomina-se  $\bar{A}$  de elemento anterior e  $\bar{B}$  de elemento posterior. A função diádica  $\bar{\bar{D}}$  por si só não tem qualquer interpretação física, como uma função vetorial. Entretanto quando ela atua em outra função vetorial o resultado se torna significativo, conforme veremos posteriormente.

### 2.3 – Produto Escalar Entre Funções Diádicas

Existem dois tipos de produto escalar entre uma função diádica e uma função vetorial  $\bar{C}$ . O *produto escalar anterior* é definido por

$$\bar{C} \cdot \bar{\bar{D}} = (\bar{C} \cdot \bar{A})\bar{B} = \bar{B}(\bar{C} \cdot \bar{A}) = \bar{B}(\bar{A} \cdot \bar{C}) \quad (2.2)$$

e o *produto escalar posterior* definido por

$$\bar{\bar{D}} \cdot \bar{C} = \bar{A}(\bar{B} \cdot \bar{C}) = (\bar{B} \cdot \bar{C})\bar{A} = (\bar{C} \cdot \bar{B})\bar{A} \quad (2.3)$$

A definição de um produto escalar entre uma função diádica implica que o resultado é um vetor. É essa propriedade que faz da função diádica uma grandeza bastante útil na teoria de campo vetorial.

## 2.4 – Diádica Transposta

As últimas duas identidades (2.2) e (2.3) sugerem a definição da transposta de  $\bar{D}$ , sendo aqui denotada por  $\bar{\bar{D}}$ , cuja definição é

$$\bar{\bar{D}} = \bar{B}\bar{A} \quad (2.4)$$

de forma que

$$\bar{D} \cdot \bar{C} = \bar{C} \cdot \bar{\bar{D}} \quad (2.5)$$

## 2.5 – Diádica Unitária

Uma única díade, denominada de *fator idem* ou a *diádica unitária*, é definida como

$$\bar{I} = \hat{x}\hat{x} + \hat{y}\hat{y} + \hat{z}\hat{z} \quad (2.6)$$

O aspecto característico da diádica unitária é manifestado pelas seguintes identidades

$$\bar{A} \cdot \bar{I} = \bar{I} \cdot \bar{A} = \bar{A} \quad (2.7)$$

## 2.6 – Produto Vetorial

Da mesma maneira existente no produto escalar, há dois produtos vetoriais entre uma função diádica e uma função vetorial. O *produto vetorial anterior* é dado por

$$\bar{D} \times \bar{C} = \bar{A}(\bar{B} \times \bar{C}) \quad (2.8)$$

e o *produto vetorial posterior* através de

$$\bar{C} \times \bar{D} = (\bar{C} \times \bar{A})\bar{B} \quad (2.9)$$

Esses produtos são funções diádicas por definição. Decompondo  $\bar{A}$  e  $\bar{B}$  na forma de componentes do sistema de coordenada retangular, (2.1) pode ser escrito da seguinte forma

$$\bar{D} = \begin{pmatrix} A_x B_x \hat{x}\hat{x} + A_x B_y \hat{x}\hat{y} + A_x B_z \hat{x}\hat{z} \\ + A_y B_x \hat{y}\hat{x} + A_y B_y \hat{y}\hat{y} + A_y B_z \hat{y}\hat{z} \\ + A_z B_x \hat{z}\hat{x} + A_z B_y \hat{z}\hat{y} + A_z B_z \hat{z}\hat{z} \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

Desta forma, uma função diádica em geral, tem nove componentes distintos. Uma forma alternativa de escrever  $\bar{D}$  é condensar os nove elementos anteriores em três funções vetoriais, de maneira que

$$\bar{D} = \bar{D}^{(x)}\hat{x} + \bar{D}^{(y)}\hat{y} + \bar{D}^{(z)}\hat{z} \quad (2.11)$$

onde

$$\begin{cases} \bar{D}^{(x)} = A_x B_x \hat{x} + A_y B_x \hat{y} + A_z B_x \hat{z} = B_x \bar{A} \\ \bar{D}^{(y)} = A_x B_y \hat{x} + A_y B_y \hat{y} + A_z B_y \hat{z} = B_y \bar{A} \\ \bar{D}^{(z)} = A_x B_z \hat{x} + A_y B_z \hat{y} + A_z B_z \hat{z} = B_z \bar{A} \end{cases} \quad (2.12)$$

sendo evidente que  $\bar{D} \cdot \hat{x} = \bar{D}^{(x)}$ ,  $\bar{D} \cdot \hat{y} = \bar{D}^{(y)}$  e  $\bar{D} \cdot \hat{z} = \bar{D}^{(z)}$ .

Tendo-se em vista (2.11), uma função diádica pode ser considerada como uma função composta que tem a capacidade de armazenar três funções vetoriais. E esta é precisamente a razão pela qual ela foi introduzida em teorias de campo sempre que houver três funções vetoriais distintas a serem apresentadas ou analisadas.

## 2.7 – Divergente e Rotacional

A função de Green diádica pode ser manipulada nas operações de divergência e rotacional. Deste modo, o divergente de uma função de Green diádica é definido através de

$$\nabla \cdot \bar{D} = [\nabla \cdot \bar{D}^{(x)}] \hat{x} + [\nabla \cdot \bar{D}^{(y)}] \hat{y} + [\nabla \cdot \bar{D}^{(z)}] \hat{z} \quad (2.13)$$

e o rotacional de  $\bar{D}$  produz outra função diádica definida por

$$\nabla \times \bar{D} = [\nabla \times \bar{D}^{(x)}] \hat{x} + [\nabla \times \bar{D}^{(y)}] \hat{y} + [\nabla \times \bar{D}^{(z)}] \hat{z} \quad (2.14)$$

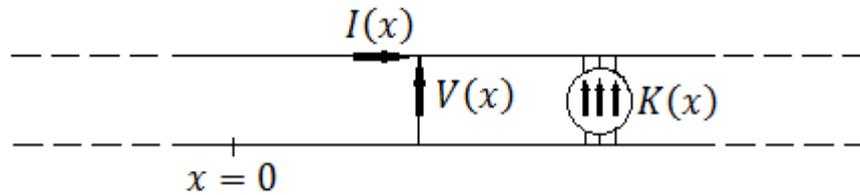
A introdução apresentada acima cobre todas as operações essenciais que se fará necessário no que diz respeito à álgebra de funções diádicas.

## 2.8 – Classificações das Funções de Green

Para o melhor entendimento da classificação das funções de Green, considere-se uma linha de transmissão excitada por uma fonte de corrente distribuída,  $K(x)$ , traçada na Figura 2.1. A linha pode ser finita ou infinita e ela pode ser limitada por uma impedância ou por outra linha. Para uma fonte oscilante harmonicamente, a tensão e a corrente na linha satisfazem o seguinte par de equações:

$$\frac{dV(x)}{dx} = j\omega LI(x) \quad (2.15)$$

$$\frac{dI(x)}{dx} = j\omega CV(x) + K(x) \quad (2.16)$$



**Figura 2.1** - Linha de transmissão excitada por uma fonte de corrente distribuída.

em que  $L$  e  $C$  denotam, respectivamente, a indutância distribuída e a capacitância da linha;  $j$  é o número imaginário e  $w$  a frequência angular da fonte. O problema é achar  $V(x)$  e  $I(x)$  para certas terminações da linha. Por causa de (2.15), é suficiente para se encontrar  $V(x)$ . Substituindo-se  $I(x)$  em (2.15) e (2.16), resulta

$$\frac{d^2V(x)}{dx^2} + k^2V(x) = jwLK(x) \quad (2.17)$$

onde  $k = w\sqrt{LC}$  denota a constante de propagação da linha. A equação (2.17) tem sido designada como equação de onda escalar unidimensional não homogênea. O método das funções de Green tem sido desenvolvido para resolver este tipo de equação de uma forma elegante. O método tem uma analogia na teoria de circuitos, segundo o qual a resposta de uma rede para qualquer função de entrada, pode ser determinada por uma integração baseada na resposta de impulso da rede. A função de Green para um problema espacial segue a mesma regra da função de resposta do impulso num problema no domínio do tempo. Por definição, a função de Green pertencente a uma equação escalar de onda unidimensional, denotada por  $g(x/x')$ , é solução da seguinte equação

$$\frac{d^2g(x/x')}{dx^2} + k^2g(x/x') = -\delta(x - x') \quad (2.18)$$

em que  $\delta(x - x')$  representa a função delta. A interpretação física de (2.18) é que se

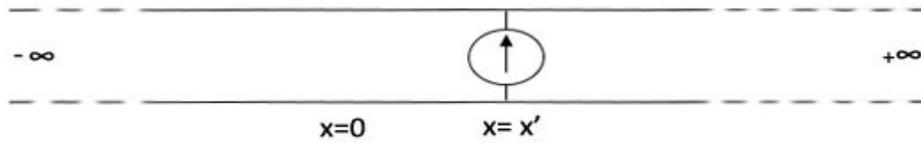
$$K(x) = \frac{j}{wL} \delta(x - x') \quad (2.19)$$

então

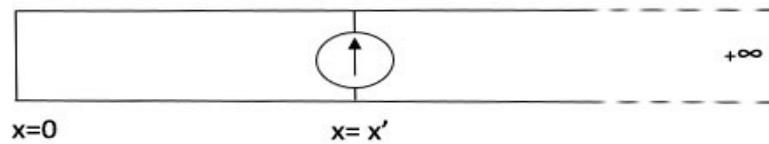
$$\int_{x'-\varepsilon}^{x'+\varepsilon} K(x)dx = \frac{j}{wL} \quad (2.20)$$

e (2.17) reduz a (2.18). A equação (2.19) e (2.20) significam que a linha é excitada por uma fonte de corrente localizada de amplitude  $j/wL$  colocada em  $x = x'$ . Conhece-se do teorema de equações diferenciais que a solução de  $g(x/x')$  satisfazendo (2.18) não é completamente determinada, a menos que se especifiquem as duas condições de contorno que a função deve satisfazer nas extremidades do domínio espacial no qual a função é definida. As condições de contorno que devem ser satisfeitas por  $g(x/x')$  são as mesmas que aquelas ditadas pela função original que se pretendem determinar, ou seja,  $V(x)$  no presente caso.

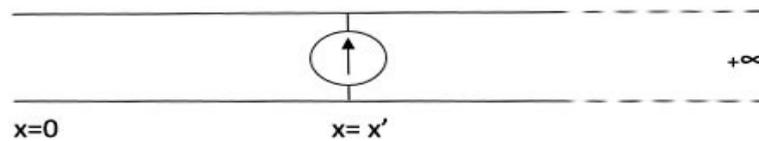
Por tal razão as funções de Green são classificadas de acordo com as condições de contorno que elas devem obedecer. Algumas delas típicas (para linha de transmissão) estão ilustradas na Figura 2.2. Para distinguir os vários tipos de funções que satisfazem as diferentes condições de contorno, usa-se o subscrito para identificá-los. Em geral, o subscrito 0 designa o domínio infinito no qual a condição de radiação prevalece. O subscrito 1 significa que uma das condições de contorno satisfaz a condição de Dirichlet enquanto que as outras satisfazem a condição de radiação. Quando umas das condições de contorno satisfaz a condição de Neumann, usa-se o subscrito 2. O subscrito 3 é reservado para o tipo misto. Essa mesma nomenclatura será usada para a classificação das funções de Green diádicas. No caso (d), visto na Figura 2.2, um sobrescrito torna-se necessário porque se tem dois conjuntos de tensão e corrente de linha  $(V_1, I_1)$  e  $(V_2, I_2)$  nos problemas, e as funções de Green têm também diferentes formas algébricas nas duas regiões.



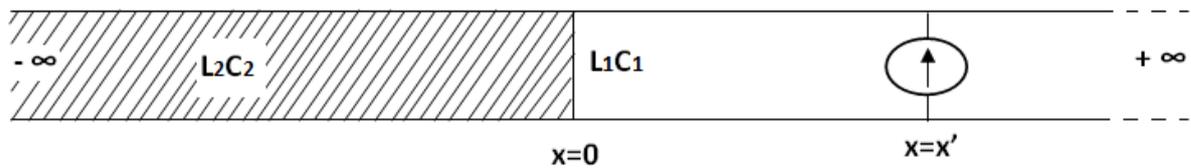
- (a) Linha infinita,  $\frac{dg_0}{dx} = ik_0 g_0$  em  $x = +\infty$ ,  $\frac{dg_0}{dx} = -ik_0 g_0$  em  $x = -\infty$ .



- (b) Linha curto-circuitada em um lado,  $g_1 = 0$  em  $x = 0$ ,  $\frac{dg_1}{dx} = ik_1 g_1$  em  $x = +\infty$ .



- (c) Linha circuito aberto em um lado,  $\frac{dg_2}{dx} = 0$  em  $x = 0$ ,  $\frac{dg_2}{dx} = ik_2 g_2$  em  $x = +\infty$ .



- (d) Duas linhas se juntando em  $x = 0$ ,  $\frac{1}{L_2} \frac{dg_3^{(2)}}{dx} = \frac{1}{L_1} \frac{dg_3^{(1)}}{dx}$ ,  $g_3^{(2)} = g_3^{(1)}$  em  $x = 0$ ;  $\frac{dg_3^{(2)}}{dx} = -ik_2 g_3^{(2)}$  em  $x = -\infty$ ;  $\frac{dg_3^{(1)}}{dx} = -ik_1 g_3^{(1)}$  em  $x = +\infty$ .

**Figura 2.2** - Classificação das funções de Green de acordo com as condições de fronteira.

## 2.9 – Classificações das Funções de Green Diádicas

As funções de Green diádicas são classificadas de acordo com as condições de contorno a serem satisfeitas nas interfaces dos meios, conforme visto no tópico anterior. Elas são classificadas em:

- Função de Green diádica no espaço livre: denotado por  $g_0(x/x')$ .

- *Função de primeira espécie*: são aquelas que satisfazem as condições de contorno de Dirichlet e são denotadas por  $g_1(x/x')$ .

- *Função de segunda espécie*: são aquelas que satisfazem as condições de contorno de Neumann e são denotadas por  $g_2(x/x')$ .

- *Função de terceira espécie*: são aquelas que satisfazem as condições de contorno mistas e são denotadas por  $g_3(x/x')$ .

## 2.10 – Simetria

No caso particular das funções de Green diádicas que serão consideradas neste trabalho, cuja notação será  $\bar{\bar{G}}(\bar{R}/\bar{R}')$ , no qual os vetores posições  $\bar{R}$  e  $\bar{R}'$  estão associados à posição do ponto de observação e da fonte respectivamente, convém adicionar a propriedade de simetria, que estabelece

$$\bar{\bar{G}}(\bar{R}'/\bar{R}) = \bar{\bar{G}}(\bar{R}/\bar{R}') \quad (2.21)$$

e

$$\tilde{\nabla}' \times \bar{\bar{G}}(\bar{R}'/\bar{R}) = \nabla \times (\bar{R}/\bar{R}') \quad (2.22)$$

onde  $\nabla'$  está associado às coordenadas espaciais em linha ou como será convencionado posteriormente às coordenadas da fonte. Podendo a função  $\bar{\bar{G}}$  ser:  $\bar{\bar{G}}_0$ ,  $\bar{\bar{G}}_1$ ,  $\bar{\bar{G}}_2$  ou  $\bar{\bar{G}}_3$ .

## 2.11 – Considerações Finais

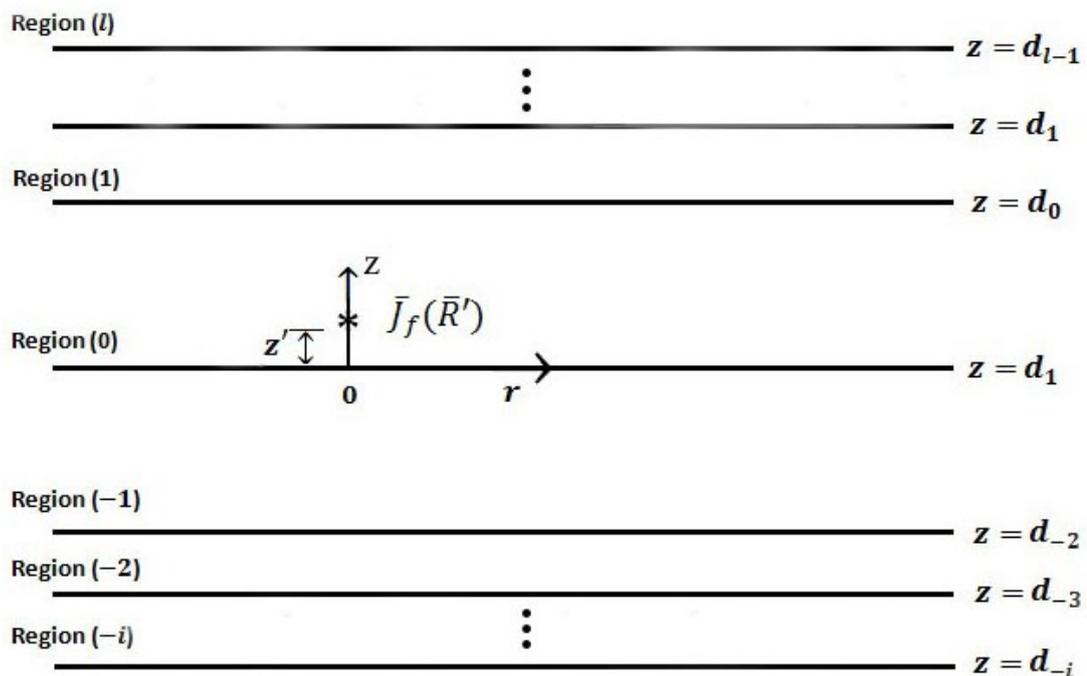
Com essas fundamentações teóricas aqui apresentadas, será possível agora, fazer a expansão em autofunções das funções de Green diádicas para serem utilizadas na formulação de campos eletromagnéticos. Tal fato será explorado no capítulo posterior, no qual um desenvolvimento matemático será feito e será considerado o sistema de coordenadas cilíndricas para um desenvolvimento simples do modelo de campo elétrico.

## CAPÍTULO 3 – FUNÇÕES DE GREEN DIÁDICAS PARA A FORMULAÇÃO DE CAMPO ELÉTRICO

### 3.1- Introdução

A utilização das funções de Green diádicas para a formulação de campo elétrico permite que a solução de alguns problemas eletromagnéticos seja realizada de forma mais compacta. Mesmo que muitos problemas possam ser resolvidos sem o uso de funções diádicas de Green, a simplicidade simbólica oferecida por elas faz com que seu uso seja atraente. A seguir é realizada uma explanação para a determinação de campos eletromagnéticos empregando estas funções. Tal explicação teórica poder ser vista em [31].

Considerando uma estrutura de N-camadas, mostrada na Figura 3.1, com fonte de corrente localizada na posição  $(0,0,z')$  de um sistema de coordenada cilíndricas na região (0). As regiões I e i estão localizadas acima e abaixo da região (0), respectivamente.



**Figura 3.1** - Configuração geométrica de uma estrutura de N-camadas.

Por conveniência, as constantes de onda utilizadas nas formulações a seguir serão dadas por

$$k = \omega \sqrt{\mu_0 \varepsilon \left(1 + j \frac{\sigma}{\omega \varepsilon}\right)} \quad (3.1)$$

no qual

$\omega$  é a frequência angular

$\mu_0$  é a permeabilidade magnética

$\varepsilon$  é a permissividade relativa do meio

$\sigma$  é a condutividade do meio

A fonte de corrente e todos os campos eletromagnéticos associados são considerados possuidores de uma variação com o tempo da forma  $e^{-j\omega t}$ , a qual ficará subentendida neste trabalho.

A equação de onda para o campo elétrico, em uma determinada região ou camada  $p$ , com fonte localizada em  $f$  ( $p, f = -i, \dots, -1, 0, 1, \dots, l$ ), é dada por

$$\nabla \times \nabla \times \bar{E}_p - k_p^2 \bar{E}_p = j\omega \mu_f \bar{J}_f \delta_p^f \quad (3.2)$$

onde

$\bar{E}_p$  é o campo elétrico na camada  $p$

$k_p$  é a constante de onda na camada  $p$

$\mu_f$  é permeabilidade magnética do meio onde se encontra a fonte

$\bar{J}_f$  é a densidade de corrente elétrica da fonte

$\delta_p^f$  é o delta de Kronecker ( $\delta_p^f = 1$  se  $f = p$  e  $\delta_p^f = 0$  se  $f \neq p$ )

As funções de Green diádicas dos tipos elétricas e magnética, em um ponto de observação  $\bar{R}$ , na camada  $p$ , devidas a uma fonte localizada em  $\bar{R}'$ , na camada  $f$ , são expressas como  $\bar{G}_e^{(p f)}(\bar{R}/\bar{R}')$  e  $\bar{G}_m^{(p f)}(\bar{R}/\bar{R}')$ , respectivamente, e estão relacionadas através das equações

$$\nabla \times \bar{G}_e^{(p f)} = \bar{G}_m^{(p f)} \quad (3.3)$$

$$\nabla \times \bar{G}_m^{(p f)} = \bar{I} \delta(\bar{R}/\bar{R}') + k^2 \bar{G}_e^{(p f)} \quad (3.4)$$

Eliminando-se  $\bar{G}_e^{(p f)}$  ou  $\bar{G}_m^{(p f)}$  em (3.3) ou (3.4) obtêm-se as equações de ondas

$$\nabla \times \nabla \times \bar{G}_e^{(p f)}(\bar{R}/\bar{R}') - k^2 \bar{G}_e^{(p f)}(\bar{R}/\bar{R}') = \bar{I} \delta(\bar{R}/\bar{R}') \quad (3.5)$$

$$\nabla \times \nabla \times \bar{G}_m^{(p f)}(\bar{R}/\bar{R}') - k^2 \bar{G}_m^{(p f)}(\bar{R}/\bar{R}') = \nabla \times [\bar{I} \delta(\bar{R}/\bar{R}')] \quad (3.6)$$

As funções de Green diádicas são classificadas de acordo com as condições de contorno a serem satisfeitas nas interfaces dos meios, conforme comentado no capítulo anterior. As

funções de primeira espécie satisfazem as condições de contorno de Dirichlet

$$\hat{n} \times \bar{G}_e^{(p f)} = 0 \quad (3.7)$$

$$\hat{n} \times \bar{G}_m^{(p f)} = 0 \quad (3.8)$$

As funções de segunda espécie satisfazem as condições de contorno de Neumann

$$\hat{n} \times \nabla \times \bar{G}_e^{(p f)} = 0 \quad (3.9)$$

$$\hat{n} \times \nabla \times \bar{G}_m^{(p f)} = 0 \quad (3.10)$$

As funções de terceira espécie satisfazem condições de contorno mistas dadas por

$$\hat{n} \times \bar{G}_e^{(p f)}(\bar{R}/\bar{R}') = \hat{n} \times \bar{G}_e^{(p+1 f)}(\bar{R}/\bar{R}') \quad (3.11)$$

$$\hat{n} \times \bar{G}_m^{(p f)}(\bar{R}/\bar{R}') = \hat{n} \times \bar{G}_m^{(p+1 f)}(\bar{R}/\bar{R}') \quad (3.12)$$

onde  $\hat{n}$  é um vetor normal a superfície nas equações de (3.7) a (3.12).

Além destas condições de contorno, as funções elétricas ou magnéticas para as funções de Green diádicas devem satisfazer a condição de radiação de Sommerfeld no infinito, dada a seguir

$$\lim_{R \rightarrow \infty} R[\nabla \times \bar{G} - jk\bar{R} \times \bar{G}] = 0 \quad (3.13)$$

Usando-se o teorema vetorial de Green e algumas operações, pode ser mostrado (ver [6]) que os campos eletromagnéticos são expressos por

$$\bar{E}_p(\bar{R}) = j\omega\mu_f \iiint \bar{G}_e^{(p f)}(\bar{R}/\bar{R}') \cdot \bar{J}_f(\bar{R}') dv' \quad (3.14)$$

$$\bar{H}_p(\bar{R}) = j\omega\mu_f \iiint \bar{G}_m^{(p f)}(\bar{R}/\bar{R}') \cdot \bar{J}_f(\bar{R}') dv' \quad (3.15)$$

onde  $v'$  é o volume das fontes sobre o qual a integração é realizada.

As funções de Green diádicas para o problema de N-camadas serão apresentadas em suas formas gerais no Capítulo seguinte.

### 3.2- Expansão das Funções de Green Diádicas em Autofunções

As equações (3.14) e (3.15) mostram que os campos eletromagnéticos, devidos a uma fonte de corrente arbitrária, ficam determinados a partir do conhecimento da função de Green diádica associada. Por conseguinte, é necessário que se conheçam soluções das equações diferenciais para as funções de Green dadas por (3.5) e (3.6).

Consideram-se as funções vetorial e escalar  $\bar{F}$  e  $\psi$ , respectivamente, como sendo soluções de

$$\nabla^2 \bar{F} + k^2 \bar{F} = 0 \quad (3.16a)$$

$$\nabla^2 \psi + k^2 \psi = 0 \quad (3.16b)$$

Três funções vetoriais de onda independentes podem ser construídas para solução da equação (3.16a), usando como função geradora a função característica  $\psi$ , solução de (3.16b).

Estas funções são

$$\bar{L} = \nabla \psi \quad (3.17a)$$

$$\bar{M} = \nabla \times (\bar{a} \psi) \quad (3.17b)$$

$$\bar{N} = \frac{1}{k} \nabla \times \nabla \times (\bar{a} \psi) \quad (3.17c)$$

onde  $k$  é a constante de propagação introduzida na construção de  $\bar{N}$  para dar simetria com  $\bar{M}$  e  $\bar{a}$  é um vetor arbitrário, mas constante.

Tendo em vista as propriedades de ortogonalidades das funções vetoriais,  $\bar{L}$ ,  $\bar{M}$  e  $\bar{N}$ , uma combinação linear dessas funções, com coeficientes a determinar, é usada como solução de (3.5) ou (3.6).

O método de Ohm-Rayleigh sugere expandir  $\bar{I} \delta(\bar{R}/\bar{R}')$ , em termos das autofunções de uma equação homogênea do mesmo tipo que (3.5) ou (3.6). As autofunções, neste caso, são as funções vetoriais  $\bar{L}$ ,  $\bar{M}$  e  $\bar{N}$ , soluções de (3.16a). Uma vez conhecida a expansão em autofunções da função delta diádica, a representação da função de Green diádica será encontrada.

Segundo Morse e Feshbach [32] a expansão da função delta diádica é dada por

$$\bar{I} \delta(\bar{R} - \bar{R}') = \bar{D}_I(\bar{R} - \bar{R}') + \bar{D}_S(\bar{R} - \bar{R}') \quad (3.18)$$

onde

$$\bar{D}_I(\bar{R} - \bar{R}') = \sum_m \frac{\bar{L}_m(\bar{R}) \bar{L}_m^*(\bar{R}')}{A_m} \quad (3.19)$$

$$\bar{D}_S(\bar{R} - \bar{R}') = \sum_m \left[ \frac{\bar{M}_m(\bar{R}) \bar{M}_m^*(\bar{R}')}{A'_m} + \frac{\bar{N}_m(\bar{R}) \bar{N}_m^*(\bar{R}')}{A''_m} \right] \quad (3.20)$$

e  $A'_m$  e  $A''_m$  são as constantes de normalização. A soma acima pode ser um conjunto discreto ou contínuo de “m”.  $\bar{D}_I(\bar{R} - \bar{R}')$  representa a componente irrotacional e  $\bar{D}_S(\bar{R} - \bar{R}')$  a componente solenoidal da função delta diádica. Pela teoria espectral, a função de Green diádica será

$$\bar{G}(\bar{R}/\bar{R}') = \frac{-\bar{D}_I(\bar{R} - \bar{R}')}{k^2} + \left[ \frac{\bar{M}_m(\bar{R}) \bar{M}_m^*(\bar{R}')}{A'_m} + \frac{\bar{N}_m(\bar{R}) \bar{N}_m^*(\bar{R}')}{A''_m} \right] \frac{1}{k_m^2 - k^2} \quad (3.21)$$

que é solução de (3.5) ou (3.6), sujeitas às condições de contorno e de radiação.

### 3.3-Ondas Cilíndricas

Dada a simetria dos problemas propostos no Capítulo 4, as funções de onda vetorial cilíndricas podem ser usadas na expansão em autofunções, das funções de Green diádicas dadas por (3.21).

A função característica  $\psi$ , solução de (3.16b), pode ser colocada na forma [33]

$$\psi = f(r, \phi) e^{\pm jhz} \quad (3.22)$$

onde  $f(r, \phi)$  é uma solução de

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + (k^2 - h^2) f = 0 \quad (3.23)$$

que por separação de variáveis, obtém-se

$$f = f_1(r) f_2(\phi) \quad (3.24)$$

onde  $f_1(r)$  e  $f_2(\phi)$  são soluções das equações

$$r \frac{d}{dr} \left( r \frac{df_1}{dr} \right) + [(k^2 - h^2)r^2 - q^2] f_1 = 0 \quad (3.25a)$$

$$\frac{d^2 f_2}{d\phi^2} + q^2 f_2 = 0 \quad (3.25b)$$

Os parâmetros  $q$  e  $h$  são as constantes de separação. Uma solução de (3.25a) será da forma

$$f_1 = Z_q \left( \sqrt{k^2 - h^2} r \right) \quad (3.26)$$

chamada função de Bessel ou função circular cilíndrica de ordem  $q$  e argumento  $(\sqrt{k^2 - h^2} r)$ .

Uma solução de (3.25b) é da forma

$$f_2 = e^{jn\phi} \quad (3.27)$$

Portanto  $\psi$  pode ser construída a partir de ondas elementares, da forma

$$\psi_n = e^{jn\phi} Z_q \left( \sqrt{k^2 - h^2} r \right) e^{\pm jhz} \quad (3.28)$$

a constante de propagação  $h$ , em geral, é complexa, o que leva os campos a não serem necessariamente periódicos em  $z$ .

A equação (3.28) pode ser construída em termos de funções de Bessel de primeira espécie, denominadas  $\psi_n^{(1)}$ , formadas por  $J_n$ , e as  $\psi_n^{(2)}$  ou  $\psi_n^{(3)}$  formadas por  $N_n$  ou  $H_n^{(1)}$ , respectivamente. Devido a certas desvantagens no uso de funções angulares complexas do tipo  $e^{jn\phi}$ , o tratamento será feito usando-se funções reais do tipo  $\cos n\phi$  e  $\sin n\phi$ , denominadas par ( $e$ ) e ímpar ( $o$ ), do inglês *even* e *odd*, respectivamente.

Assim,

$$\psi_{\phi n \lambda}^{(1)} = (\cos n \phi) J_n(\lambda r) e^{jhz} \quad (3.29)$$

$$\psi_{\phi n \lambda}^{(2)} = (\sin n \phi) N_n(\lambda r) e^{jhz} \quad (3.30)$$

$$\psi_{\phi n \lambda}^{(3)} = (\cos n \phi) H_n^{(1)}(\lambda r) e^{jhz} \quad (3.31)$$

onde  $\lambda = \sqrt{k^2 - h^2}$ .

Lembrando que:

$$\bar{L} = \nabla \psi, \bar{M} = \nabla \times (\bar{a} \psi) \text{ e } \bar{N} = \frac{1}{k} \nabla \times \bar{M}$$

tem-se

$$\bar{L}_{\phi n \lambda}(h) = \left[ \frac{\partial}{\partial r} J_n(\lambda r) (\cos n \phi) \hat{r} \pm \frac{n}{r} J_n(\lambda r) (\cos n \phi) \hat{\phi} + jh J_n(\lambda r) (\cos n \phi) \hat{z} \right] e^{jhz} \quad (3.32)$$

$$\bar{M}_{\phi n \lambda}(h) = \left[ \pm \frac{n}{r} J_n(\lambda r) (\sin n \phi) \hat{r} - \frac{\partial}{\partial r} J_n(\lambda r) (\sin n \phi) \hat{\phi} \right] e^{jhz} \quad (3.33)$$

$$\begin{aligned} \bar{N}_{\phi n \lambda}(h) = \frac{1}{k} \left[ jh \frac{\partial}{\partial r} J_n(\lambda r) (\cos n \phi) \hat{r} \pm jh \frac{n}{r} J_n(\lambda r) (\sin n \phi) \hat{\phi} \right. \\ \left. + \lambda^2 J_n(\lambda r) (\cos n \phi) \hat{z} \right] e^{jhz} \end{aligned} \quad (3.34)$$

que, levadas em (3.21), formam as funções de Green diádicas, que serão consideradas no próximo capítulo, nas várias estruturas analisadas, objetivando-se a determinação dos campos eletromagnéticos.

### 3.4 – Considerações Finais

Feito esse desenvolvimento da expansão em autofunções das funções de Green diádicas, pode-se usar as equações (3.14) e (3.15) para o cálculo do campo eletromagnético. A seguir, será feita uma formulação do problema tratado neste trabalho, no qual será feita o desenvolvimento das FGD para o cálculo do campo elétrico de TV digital, considerando um meio de duas e três camadas; sendo que a predição do campo para esses meios serão realizados nos dois capítulos 5 e 6 procedentes.

## CAPÍTULO 4 – FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

### 4.1 – FUNÇÃO DE GREEN DIÁDICA PARA O ESPAÇO LIVRE

A função de Green diádica para o espaço livre, do tipo elétrica,  $\bar{G}_{e0}(\bar{R}/\bar{R}')$ , satisfazendo (3.5) e as condições de radiação de Sommerfeld, será usada para construir as funções de Green diádicas para o problema de múltiplas camadas dielétricas. Usando-se o método da superposição do espalhamento, a função de Green diádica do tipo elétrica,  $\bar{G}_e^{(p f)}(\bar{R}/\bar{R}')$ , em uma dada camada “ $p$ ”, com fonte de corrente localizada na camada “ $f$ ”, pode ser encontrada através da seguinte equação:

$$\bar{G}_e^{(p f)}(\bar{R}/\bar{R}') = \bar{G}_{e0}(\bar{R}/\bar{R}')\delta_p^f + \bar{G}_e^{(p f)S}(\bar{R}/\bar{R}') \quad (4.1)$$

onde,  $\bar{G}_e^{(p f)S}(\bar{R}/\bar{R}')$  é a função de Green diádica espalhada e  $\delta_p^f$  é o delta de Kronecker.

A diádica  $\bar{G}_{e0}(\bar{R}/\bar{R}')$  pode ser expressa na forma de expansão em autofunções apenas em duas variáveis e em forma fechada na terceira variável [34].

Neste caso,  $\bar{G}_{e0}(\bar{R}/\bar{R}')$  é dada por

$$\bar{G}_{e0}(\bar{R}/\bar{R}') = -\frac{\hat{z}\hat{z}\delta(\bar{R} - \bar{R}')}{k_0^2} + \frac{j}{4\pi} \int_0^\infty \frac{d\lambda}{h\lambda} \sum_{n=0}^\infty (2 - \delta_0) \quad (4.2)$$

$$\begin{cases} \bar{M}_{\rho n\lambda}(h)\bar{M}'_{\rho n\lambda}(-h) + \bar{N}_{\rho n\lambda}(h)\bar{N}'_{\rho n\lambda}(-h) \}, & z \geq z' \\ \bar{M}_{\rho n\lambda}(-h)\bar{M}'_{\rho n\lambda}(h) + \bar{N}_{\rho n\lambda}(-h)\bar{N}'_{\rho n\lambda}(h) \}, & z \leq z' \end{cases}$$

onde  $\delta_0$  é o delta de Kronecker ( $\delta_0 = 1$  para  $n = 0$  e  $\delta_0 = 0$  para  $n \neq 0$ ) e as funções  $\bar{M}$  e  $\bar{N}$  são dadas por (3.33) e (3.34). O primo nas funções  $\bar{M}'$  e  $\bar{N}'$  é usado para indicar que elas são expressas em termos das coordenadas  $(r', \phi', z')$  e  $h = \sqrt{k^2 - \lambda^2}$ .

O principal interesse deste trabalho é desenvolver uma formulação para a predição de campos elétricos para TV digital fora da região da fonte, deste modo  $\bar{G}_{e0}(\bar{R}/\bar{R}')$  será dada somente pelo segundo termo do lado direito da equação (4.2).

## 4.2 – Função de Green Diádica para Meios de N-Camadas

As funções de Green diádicas para uma geometria de N-camadas, conforme mostrado na Figura 3.1, é dado em [31]. Assim, as funções de Green diádicas espalhadas são dadas, em sua forma compacta, por

$$\begin{aligned} \bar{G}_e^{(p f)S}(\bar{R}/\bar{R}') = & \frac{j}{4\pi} \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda h_f} \sum_{n=0}^\infty (2 - \delta_0) \{ (1 - \delta_p^i) \bar{M}(h_p) [(1 - \delta_f^l) a \bar{M}'(-h_f) \\ & + (1 - \delta_f^i) b \bar{M}'(h_f)] \\ & + (1 - \delta_p^i) \bar{N}(h_p) [(1 - \delta_f^l) c \bar{N}'(-h_f) + (1 - \delta_f^i) d \bar{N}'(h_f)] \\ & + (1 - \delta_p^l) \bar{M}(-h_p) [(1 - \delta_f^l) e \bar{M}'(-h_f) + (1 - \delta_f^i) f \bar{M}'(h_f)] \\ & + (1 - \delta_p^l) \bar{N}(-h_p) [(1 - \delta_f^l) g \bar{N}'(-h_f) + (1 - \delta_f^i) u \bar{N}'(h_f)] \} \end{aligned} \quad (4.3)$$

onde os coeficientes **a, b, c, d, e, f, g** e **u** podem ser obtidos através das condições de contorno dadas por (3.9) a (3.12) com  $h_f = \sqrt{k_f^2 - \lambda^2}$  e  $h_p = \sqrt{k_p^2 - \lambda^2}$ . Por simplicidade os subscritos das funções  $\bar{M}_{\epsilon_{n\lambda}}(h)$  e  $\bar{N}_{\epsilon_{n\lambda}}(h)$  foram omitidos.

## 4.3 – Função de Green Diádica para Um Meio de 2-Camadas

Para tal situação, é considerado um meio com duas camadas, na qual uma camada dielétrica é colocada sobre a superfície de uma terra plana. Para esse caso a fonte de corrente está localizada na camada dielétrica (meio 1), conforme mostrado na Figura 4.1.

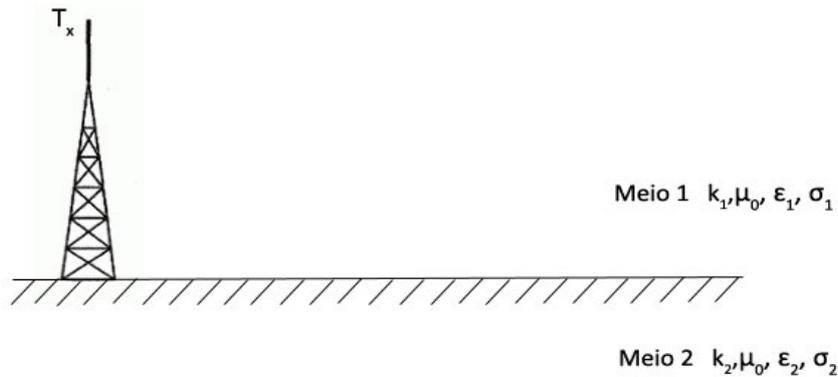


Figura 4.1 - Meio com duas camadas.

As funções de Green diádicas, usando-se (4.1), podem ser expressas através de

$$\bar{G}_e^{(11)} = \bar{G}_{e0} + \bar{G}_e^{(11)S} \quad \text{para } z \geq 0 \quad (4.4)$$

$$\bar{G}_e^{(21)} = \bar{G}_e^{(21)S} \quad \text{para } z \leq 0 \quad (4.5)$$

onde, por conveniência, a dependência funcional  $(\bar{R}/\bar{R}')$  foi omitida.

Na construção das equações (4.4) e (4.5), são utilizados como elementos anteriores as autofunções  $\bar{M}(\pm h_p)$  e  $\bar{N}(\pm h_p)$ , nesta situação  $p=1,2$ , de maneira a satisfazerem a condição de radiação para  $z \rightarrow \pm\infty$ , vista em (3.13). Para elementos posteriores, são usadas as autofunções  $\bar{M}'(\pm h_p)$  e  $\bar{N}'(\pm h_p)$ , de modo que as condições de contorno nas interfaces dos meios sejam satisfeitas.

Considerando (4.3) com  $l = 1$ ,  $i = 2$  e  $f = 1$ , as funções de Green diádicas espalhadas para um meio de duas camadas serão

$$\bar{G}_e^{(11)S} = \frac{j}{4\pi} \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda h_f} \sum_{n=0}^\infty (2 - \delta_0) \{ \bar{M}(h_1) [a \bar{M}'(h_1)] + \bar{N}(h_1) [b \bar{N}'(h_1)] \} \quad (4.6)$$

$$\bar{G}_e^{(21)S} = \frac{j}{4\pi} \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda h_f} \sum_{n=0}^\infty (2 - \delta_0) \{ \bar{M}(-h_2) [c \bar{M}'(h_1)] + \bar{N}(-h_2) [d \bar{N}'(h_1)] \} \quad (4.7)$$

onde  $h_1 = \sqrt{k_1^2 - \lambda^2}$ ,  $h_2 = \sqrt{k_2^2 - \lambda^2}$  e os coeficientes  $a, b, c$  e  $d$  são obtidos através das condições de contorno.

#### 4.4 – Função de Green Diádica para Um Meio de 3-Camadas

Para essa situação, é considerado um meio com três camadas, com a fonte de corrente localizada na camada 1 ( $f = 1$ ), sendo o campo elétrico calculado para a camada 1 e 2 ( $p = 1$  e  $p = 2$ , respectivamente), conforme mostrado na Figura 4.2.

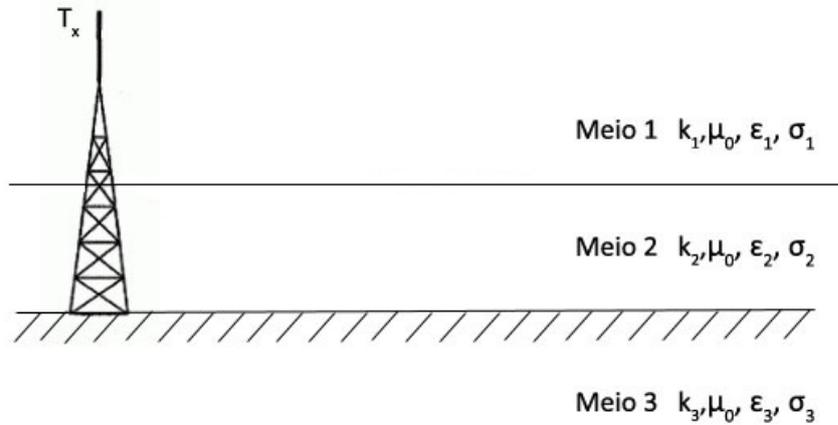
As funções de Green diádicas, usando-se (4.1), para o cálculo do campo elétrico na camada 1 e 2 ( $p = 1$  e  $p = 2$ ) podem ser expressas através de

$$\bar{G}_e^{(11)} = \bar{G}_{e0} + \bar{G}_e^{(11)S} \quad \text{para } z \geq H \quad (4.8)$$

$$\bar{G}_e^{(21)} = \bar{G}_e^{(21)S} \quad \text{para } 0 \leq z \leq H \quad (4.9)$$

$$\bar{G}_e^{(31)} = \bar{G}_e^{(31)S} \quad \text{para } z \leq 0 \quad (4.10)$$

onde mais uma vez, por conveniência, a dependência funcional  $(\bar{R}/\bar{R}')$  foi omitida.



**Figura 4.2** - Meio com três camadas.

De maneira semelhante ao caso anterior (ver tópico 4.3), considerando (4.3) com  $l = 1$ ,  $i = 3$  e  $f = 1$ , as funções de Green diádicas espalhadas para um meio de três camadas serão

$$\bar{\bar{G}}_e^{(11)S} = \frac{j}{4\pi} \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda h_f} \sum_{n=0}^\infty (2 - \delta_0) \{ \bar{M}(h_1) [a \bar{M}'(h_1)] + \bar{N}(h_1) [b \bar{N}'(h_1)] \} \quad (4.11)$$

$$\begin{aligned} \bar{\bar{G}}_e^{(21)S} = \frac{j}{4\pi} \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda h_f} \sum_{n=0}^\infty (2 - \delta_0) \{ \bar{M}(h_2) [c \bar{M}'(h_1)] + \bar{N}(h_2) [d \bar{N}'(h_1)] \\ + \bar{M}(-h_2) [e \bar{M}'(h_1)] + \bar{N}(-h_2) [g \bar{N}'(h_1)] \} \end{aligned} \quad (4.12)$$

$$\bar{\bar{G}}_e^{(31)S} = \frac{j}{4\pi} \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda h_f} \sum_{n=0}^\infty (2 - \delta_0) \{ \bar{M}(-h_3) [q \bar{M}'(h_1)] + \bar{N}(-h_3) [r \bar{N}'(h_1)] \} \quad (4.13)$$

onde  $h_1 = \sqrt{k_1^2 - \lambda^2}$ ,  $h_2 = \sqrt{k_2^2 - \lambda^2}$ ,  $h_3 = \sqrt{k_3^2 - \lambda^2}$  e os coeficientes  $a, b, c, d, e, g, q$  e  $r$  são obtidos através das condições de contorno.

#### 4.4 – Condições de Contorno para Um Meio de N-Camadas

As condições de contorno para um meio de N-camadas podem ser resumidas por

$$\hat{z} \times \bar{\bar{G}}_e^{(p f)} = \hat{z} \times \bar{\bar{G}}_e^{(p+1 f)} \quad (4.14a)$$

$$\hat{z} \times \nabla \times \bar{\bar{G}}_e^{(p f)} = \hat{z} \times \nabla \times \bar{\bar{G}}_e^{(p+1 f)} \quad (4.14b)$$

onde  $p$  é uma camada qualquer e a camada onde se encontra a fonte de corrente.

## 4.5 – Considerações Finais

Feito esse desenvolvimentos das funções de Green diádicas para o problema proposto, tais funções serão utilizadas para o cálculo do campo elétrico de TV digital. No capítulo 5 a seguir, será feita a explicação e o desenvolvimento do cálculo do campo elétrico produzido por um dipolo elétrico para um meio de duas camadas, sendo um meio considerado o ar e o outro o solo.

## CAPÍTULO 5 – CÁLCULO DO CAMPO ELÉTRICO PARA UM MEIO DE 2 CAMADAS

Conforme visto no Capítulo 3, os campos elétricos e magnéticos devido a uma fonte de corrente ficam determinados a partir das funções de Green diádicas, usando-se as equações (3.14) e (3.15).

Quando o espaço é particionado em dois meios um dos quais é o ar, e o outro, um dielétrico com perdas, homogêneo e isotrópico, tem-se um meio de 2 camadas, conforme mostrado na Figura 5.1 abaixo:

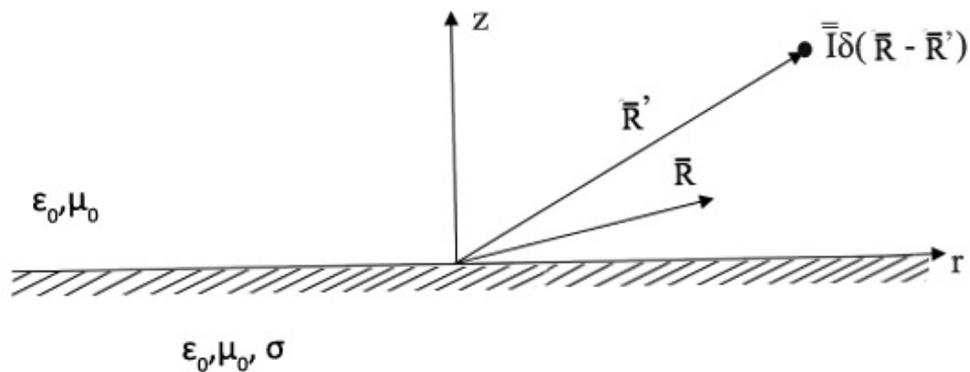


Figura 5.1 - Plano Terra.

Considerando-se um meio 1, neste caso o ar, e um meio 2, neste caso o solo, as constantes de onda nos dois meios, dada através de (3.1) são

$$k_1 = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} \quad (5.1)$$

$$k_2 = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon (1 + j \frac{\sigma}{\omega \epsilon})} \quad (5.2)$$

no qual a permeabilidade magnética a ser utilizada é a mesma do espaço livre nos dois meios.

A densidade de corrente de um dipolo elétrico na camada 1 pode ser expressa como

$$\vec{J}(\vec{R}') = \vec{p} \delta(x - x') \delta(y - y') \delta(z - z') \quad (5.3)$$

onde  $\vec{p}$  é o momento do dipolo elétrico e  $x, y, z$  são as coordenadas retangulares.

Pelo fato do objetivo ser o cálculo do campo elétrico de transmissão de TV digital, a função de Green diádica a ser utilizada será, para esse caso, a equação (4.4), que substituindo (4.2) e (4.6) em (4.4) resulta

$$\begin{aligned} \bar{G}_e^{(11)}(\bar{R}/\bar{R}') = \frac{j}{4\pi} \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda h_1} \sum_{n=0}^\infty (2 - \delta_0) \{ [\bar{M}_{\varepsilon n \lambda}(-h_1) + a\bar{M}_{\varepsilon n \lambda}(h_1)] \bar{M}'_{\varepsilon n \lambda}(h_1) \\ + [\bar{N}_{\varepsilon n \lambda}(-h_1) + b\bar{N}_{\varepsilon n \lambda}(h_1)] \bar{N}'_{\varepsilon n \lambda}(h_1) \} \end{aligned} \quad (5.4)$$

## 5.1 – Cálculo dos Coeficientes

Para calcular os coeficientes  $a, b, c, d$  que aparecem nas equações (5.4) e (4.7), usa-se as condições de contornos (3.7) e (3.9).

### I) Primeira Condição de contorno

A partir da condição de contorno (3.7), será feito o desenvolvimento do cálculo passo-a-passo para a determinação dos coeficientes.

Aplicando-se (5.4) e (4.7) em (3.7) na interface de separação dos dois meios (ou seja, em  $z = 0$ ), tem-se

$$\begin{aligned} \hat{z} \times \bar{G}_e^{(11)} = \hat{z} \times \bar{G}_e^{(21)S} \\ \hat{z} \times \left\{ \frac{j}{4\pi} \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda h_1} \sum_{n=0}^\infty (2 - \delta_0) \{ [\bar{M}_{\varepsilon n \lambda}(-h_1) + a\bar{M}_{\varepsilon n \lambda}(h_1)] \bar{M}'_{\varepsilon n \lambda}(h_1) \right. \\ \left. + [\bar{N}_{\varepsilon n \lambda}(-h_1) + b\bar{N}_{\varepsilon n \lambda}(h_1)] \bar{N}'_{\varepsilon n \lambda}(h_1) \} \right\} \\ = \hat{z} \times \left\{ \frac{j}{4\pi} \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda h_1} \sum_{n=0}^\infty (2 - \delta_0) \{ \bar{M}_{\varepsilon n \lambda}(-h_2) [c\bar{M}'_{\varepsilon n \lambda}(h_1)] + \right. \\ \left. + \bar{N}_{\varepsilon n \lambda}(-h_2) [d\bar{N}'_{\varepsilon n \lambda}(h_1)] \} \right\} \end{aligned} \quad (5.5)$$

A partir de (5.5), obtém-se as igualdades

$$\begin{aligned} \text{i) } \quad \bar{M}_{\varepsilon n \lambda}(h_1) [\bar{M}'_{\varepsilon n \lambda}(-h_1) + a\bar{M}'_{\varepsilon n \lambda}(h_1)] = c\bar{M}_{\varepsilon n \lambda}(-h_2) \bar{M}'_{\varepsilon n \lambda}(h_1) \\ \text{Em } z = 0 \quad \begin{cases} \bar{M}_{\varepsilon n \lambda}(h_1) = \bar{M}_{\varepsilon n \lambda}(-h_1) = \bar{M}_{\varepsilon n \lambda}(-h_2) \\ \bar{M}'_{\varepsilon n \lambda}(-h_1) = \bar{M}'_{\varepsilon n \lambda}(h_1) = \bar{M}'_{\varepsilon n \lambda}(-h_2) \end{cases} \\ \text{Logo: } 1 + a = c \end{aligned} \quad (5.6)$$

$$\begin{aligned} \text{ii) } \quad \bar{N}_{\varepsilon n \lambda}(h_1) [\bar{N}'_{\varepsilon n \lambda}(-h_1) + b\bar{N}'_{\varepsilon n \lambda}(h_1)] = d\bar{N}_{\varepsilon n \lambda}(-h_2) \bar{N}'_{\varepsilon n \lambda}(h_1) \\ \text{Em } z = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{cases}
\bar{N}_{\rho n \lambda}(h_1) = \frac{1}{k_1} \left[ j h_1 \frac{\partial J_n(\lambda r)}{\partial r} (\cos n \phi) \hat{r} \pm \frac{j h_1 n}{r} J_n(\lambda r) (\cos n \phi) \hat{\phi} + \lambda^2 J_n(\lambda r) (\cos n \phi) \hat{z} \right] e^0 \\
\bar{N}'_{\rho n \lambda}(-h_1) = \frac{-1}{k_1} \left[ j h_1 \frac{\partial J_n(\lambda r')}{\partial r'} (\cos n \phi) \hat{r} \pm \frac{j h_1 n}{r'} J_n(\lambda r') (\cos n \phi) \hat{\phi} + \lambda^2 J_n(\lambda r') (\cos n \phi) \hat{z} \right] e^0 \\
\bar{N}'_{\rho n \lambda}(h_1) = \frac{-1}{k_1} \left[ j h_1 \frac{\partial J_n(\lambda r')}{\partial r'} (\cos n \phi) \hat{r} \pm \frac{j h_1 n}{r'} J_n(\lambda r') (\cos n \phi) \hat{\phi} + \lambda^2 J_n(\lambda r') (\cos n \phi) \hat{z} \right] e^0 \\
\bar{N}_{\rho n \lambda}(-h_2) = \frac{-1}{k_2} \left[ j h_2 \frac{\partial J_n(\lambda r)}{\partial r} (\cos n \phi) \hat{r} \pm \frac{j h_2 n}{r} J_n(\lambda r) (\cos n \phi) \hat{\phi} + \lambda^2 J_n(\lambda r) (\cos n \phi) \hat{z} \right] e^0
\end{cases}$$

Assim:  $\frac{h_1}{k_1} \left( -\frac{h_1}{k_1} + b \frac{h_1}{k_1} \right) = d \left( -\frac{h_2}{k_2} \right) \left( \frac{h_1}{k_1} \right)$

Logo:  $\frac{h_1}{k_1} (1 - b) = \frac{h_2}{k_2} d$  (5.7)

## II) Segunda Condição de contorno

A partir da condição de contorno (3.9), será feito o desenvolvimento do cálculo passo-a-passo para a determinação dos coeficientes.

Aplicando-se (5.4) e (4.7) em (3.9) na interface de separação dos dois meios (ou seja, em  $z = 0$ ), tem-se

$$\begin{aligned}
\hat{z} \times \nabla \times \bar{G}_e^{(11)} &= \hat{z} \times \nabla \times \bar{G}_e^{(21)S} \\
\hat{z} \times \nabla \times \left\{ \frac{j}{4\pi} \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda h_1} \sum_{n=0}^\infty (2 - \delta_0) \{ [\bar{M}_{\rho n \lambda}(-h_1) + a \bar{M}_{\rho n \lambda}(h_1)] \bar{M}'_{\rho n \lambda}(h_1) \right. \\
&\quad \left. + [\bar{N}_{\rho n \lambda}(-h_1) + b \bar{N}_{\rho n \lambda}(h_1)] \bar{N}'_{\rho n \lambda}(h_1) \} \right\} \\
&= \hat{z} \times \nabla \times \left\{ \frac{j}{4\pi} \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda h_1} \sum_{n=0}^\infty (2 - \delta_0) \{ \bar{M}_{\rho n \lambda}(-h_2) [c \bar{M}'_{\rho n \lambda}(h_1)] + \right. \\
&\quad \left. + \bar{N}_{\rho n \lambda}(-h_2) [d \bar{N}'_{\rho n \lambda}(h_1)] \} \right\} \\
\hat{z} \times \left\{ \frac{j}{4\pi} \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda h_1} \sum_{n=0}^\infty (2 - \delta_0) \{ [\nabla \times \bar{M}_{\rho n \lambda}(-h_1) + a \nabla \times \bar{M}_{\rho n \lambda}(h_1)] \bar{M}'_{\rho n \lambda}(h_1) \right. \\
&\quad \left. + [\nabla \times \bar{N}_{\rho n \lambda}(-h_1) + b \nabla \times \bar{N}_{\rho n \lambda}(h_1)] \bar{N}'_{\rho n \lambda}(h_1) \} \right\} \\
&= \hat{z} \times \left\{ \frac{j}{4\pi} \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda h_1} \sum_{n=0}^\infty (2 - \delta_0) \{ \nabla \times \bar{M}_{\rho n \lambda}(-h_2) [c \bar{M}'_{\rho n \lambda}(h_1)] + \right. \\
&\quad \left. + \nabla \times \bar{N}_{\rho n \lambda}(-h_2) [d \bar{N}'_{\rho n \lambda}(h_1)] \} \right\}
\end{aligned} \tag{5.8}$$

Em [Tai], usando a simetria do conjunto de funções de onda vetorial denotado por  $\bar{M}_{\delta n \lambda}$  e  $\bar{N}_{\delta n \lambda}$ , que são soluções da equação de onda vetorial homogênea, tem-se as seguintes igualdades:

$$\bar{N}_{\delta n \lambda}(h) = \frac{1}{k_\lambda} \nabla \times \bar{M}_{\delta n \lambda}(h) \text{ e } \bar{M}_{\delta n \lambda}(h) = \frac{1}{k_\lambda} \nabla \times \bar{N}_{\delta n \lambda}(h) \quad (5.9)$$

Usando-se (5.9) em (5.8), obtém-se:

$$\begin{aligned} \hat{z} \times \left\{ \frac{j}{4\pi} \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda h_1} \sum_{n=0}^\infty (2 - \delta_0) \{ [k_1 \bar{N}_{\delta n \lambda}(-h_1) + a k_1 \bar{N}_{\delta n \lambda}(h_1)] \bar{M}'_{\delta n \lambda}(h_1) \right. \\ \left. + [k_1 \bar{M}_{\delta n \lambda}(-h_1) + b k_1 \bar{M}_{\delta n \lambda}(h_1)] \bar{N}'_{\delta n \lambda}(h_1) \right\} \\ = \hat{z} \times \left\{ \frac{j}{4\pi} \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda h_1} \sum_{n=0}^\infty (2 - \delta_0) \{ k_2 \bar{N}_{\delta n \lambda}(-h_2) c \bar{M}'_{\delta n \lambda}(h_1) + \right. \\ \left. + d k_2 \bar{M}_{\delta n \lambda}(-h_2) \bar{N}'_{\delta n \lambda}(h_1) \right\} \end{aligned} \quad (5.10)$$

A partir de (5.10), obtém-se as igualdades:

$$\text{iii) } k_1 \bar{M}_{\delta n \lambda}(-h_1) + b k_1 \bar{M}_{\delta n \lambda}(h_1) = d k_2 \bar{M}_{\delta n \lambda}(-h_2)$$

$$\text{Em } z = 0 \{ \bar{M}_{\delta n \lambda}(-h_1) = \bar{M}_{\delta n \lambda}(h_1) = \bar{M}_{\delta n \lambda}(-h_2) \}$$

$$\text{Então: } k_1(1 + b) = d k_2 \quad (5.11)$$

$$\text{iv) } k_1 \bar{N}_{\delta n \lambda}(-h_1) + a k_1 \bar{N}_{\delta n \lambda}(h_1) = c k_2 \bar{N}_{\delta n \lambda}(-h_2)$$

$$\text{Em } z = 0$$

$$\left\{ \begin{aligned} \bar{N}_{\delta n \lambda}(-h_1) &= \frac{-1}{k_1} \left[ j h_1 \frac{\partial J_n(\lambda r)}{\partial r} (\cos n \phi) \hat{r} \pm \frac{j h_1 n}{r} J_n(\lambda r) (\cos n \phi) \hat{\phi} + \lambda^2 J_n(\lambda r) (\cos n \phi) \hat{z} \right] e^0 \\ \bar{N}_{\delta n \lambda}(h_1) &= \frac{1}{k_1} \left[ j h_1 \frac{\partial J_n(\lambda r)}{\partial r} (\sin n \phi) \hat{r} \pm \frac{j h_1 n}{r} J_n(\lambda r) (\sin n \phi) \hat{\phi} + \lambda^2 J_n(\lambda r) (\sin n \phi) \hat{z} \right] e^0 \\ \bar{N}_{\delta n \lambda}(-h_2) &= \frac{-1}{k_2} \left[ j h_2 \frac{\partial J_n(\lambda r)}{\partial r} (\cos n \phi) \hat{r} \pm \frac{j h_2 n}{r} J_n(\lambda r) (\cos n \phi) \hat{\phi} + \lambda^2 J_n(\lambda r) (\cos n \phi) \hat{z} \right] e^0 \end{aligned} \right.$$

$$\text{Assim: } k_1 \left( -\frac{h_1}{k_1} + a \frac{h_1}{k_1} \right) = c k_2 \left( -\frac{h_2}{k_2} \right)$$

$$\text{Logo: } h_1(1 - a) = h_2 d \quad (5.12)$$

Resolvendo-se o sistema formado pelas equações (5.6), (5.7), (5.11) e (5.12), conforme mostrado a seguir:

$$\begin{cases} 1 + a = c \\ \frac{h_1}{k_1}(1 - b) = \frac{h_2}{k_2}d \\ k_1(1 + b) = dk_2 \\ h_1(1 - a) = h_2d \end{cases}$$

verifica-se que os valores das constantes são

$$a = \frac{h_1 - h_2}{h_1 + h_2} \quad (5.13)$$

$$b = \frac{k_2^2 h_1 - k_1^2 h_2}{k_2^2 h_1 + k_1^2 h_2} \quad (5.14)$$

$$c = \frac{2h_1}{h_1 + h_2} \quad (5.15)$$

$$d = \frac{2k_1 k_2 h_1}{k_2^2 h_1 + k_1^2 h_2} \quad (5.16)$$

lembrando que

$$h_1 = \sqrt{k_1^2 - \lambda^2} \quad (5.17)$$

$$h_2 = \sqrt{k_2^2 - \lambda^2} \quad (5.18)$$

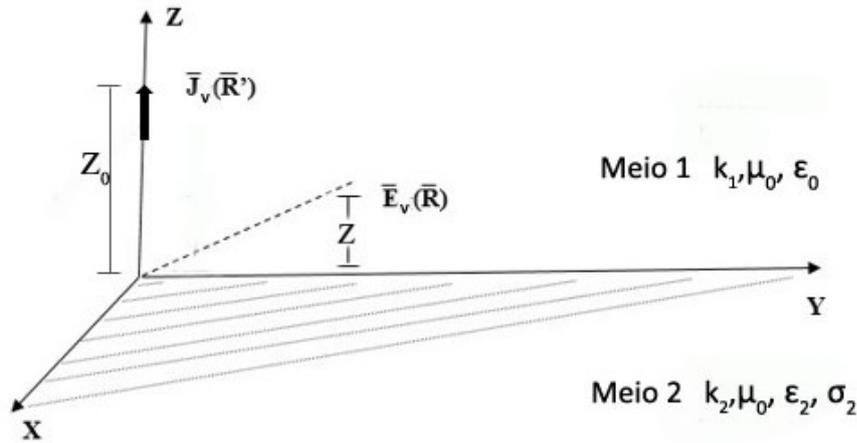
Nos itens a seguir, será feita a formulação do campo elétrico para um dipolo elétrico (fonte de corrente) vertical e horizontal. Com isso, será possível prever o campo elétrico de uma TV digital, na qual utiliza o dipolo horizontal na sua transmissão. O cálculo para o dipolo vertical se faz necessário pelo fato de ter uma formulação completa para a propagação de ondas eletromagnéticas em meios distintos.

## 5.2 – Cálculo do Campo Elétrico para Um Dipolo Vertical

Na estrutura apresentada na Figura 5.2 a fonte de corrente será considerada como um dipolo elétrico vertical. Neste caso, a densidade de corrente será:

$$\vec{J}_v(\vec{R}') = \vec{p}\delta(x - 0)\delta(y - 0)\delta(z - z_0)\hat{z} \quad (5.19)$$

onde  $z_0$  corresponde a localização da fonte de corrente na coordenada  $z$ .



**Figura 5.2** - Dipolo elétrico vertical num meio de duas camadas.

Com o uso de um dipolo vertical localizado em  $(0, 0, z_0)$ , de acordo com (3.14), tem-se que o campo elétrico produzido por esse dipolo será

$$\bar{E}_v(\bar{R}) = j\omega\mu_0\bar{G}_e^{(11)}(\bar{R}/\bar{R}') \cdot \hat{z} \quad (5.20)$$

Fazendo-se uso de  $\bar{G}_e^{(11)}$  definido em (5.4) e usando (3.33) e (3.34), verifica-se que no ponto  $\bar{R}' = (0, 0, z_0)$

$$\bar{M}'_{e_{n\lambda}}(h_1) \cdot \hat{z} = \bar{M}'_{e_{n\lambda}}(-h_1) \cdot \hat{z} = \bar{M}'_{e_{n\lambda}}(h_1) \cdot \hat{z} = 0 \quad (5.21)$$

e

$$\bar{N}'_{e_{n\lambda}}(h_1) \cdot \hat{z} = \frac{e^{jh_1z_0}}{k_1} [\lambda^2 J_n(\lambda, 0) \cos(n, 0)] \quad (5.22)$$

como  $\text{sen}(0) = 0$ ,  $\text{cos}(0) = 1$ ,  $J_1(0) = J_2(0) = \dots = J_n(0) = 0$  e  $J_0(0) = 1$ , constata-se que (5.22) torna-se

$$\bar{N}'_{e_{n\lambda}}(h_1) \cdot \hat{z} = \frac{e^{jh_1z_0}}{k_1} [\lambda^2] \quad (5.23)$$

Assim, fazendo-se uso de (5.4), aplicando-se (5.21) e (5.23) em (5.20), obtém-se que o campo elétrico devido a um dipolo elétrico vertical é

$$\bar{E}_v(\bar{R}) = j\omega\mu_0\bar{p} \frac{j}{4\pi} \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda h_1} \sum_{n=0}^\infty (2 - \delta_0) \left\{ [\bar{N}_{e_{0\lambda}}(-h_1) + b\bar{N}_{e_{0\lambda}}(h_1)] \frac{e^{jh_1z_0}}{k_1} \lambda^2 \right\}$$

como só existe  $n = 0$  e  $\delta_0 = 1$ , então

$$\bar{E}_v(\bar{R}) = -\frac{\omega\mu_0\bar{p}}{4\pi} \int_0^\infty \frac{\lambda e^{jh_1z_0}}{h_1 k_1} [\bar{N}_{e_{0\lambda}}(-h_1) + b\bar{N}_{e_{0\lambda}}(h_1)] d\lambda \quad (5.24)$$

lembrando-se que  $b = \frac{k_2^2 h_1 - k_1^2 h_2}{k_2^2 h_1 + k_1^2 h_2}$  e  $\bar{N}_{e_{0\lambda}}(-h_1), \bar{N}_{e_{0\lambda}}(h_1)$  dependem das coordenadas cilíndricas  $(\hat{r}, \hat{\phi}, \hat{z})$ .

Usando-se a expressão para  $\bar{N}_{e_{n\lambda}}$ , dada por (3.34), e utilizando-se o coeficiente  $\mathbf{b}$  que aparece em (5.14), as componentes  $\hat{r}$  e  $\hat{z}$  podem ser extraídas de (5.24). Desta maneira, obtém-se:

$$\begin{aligned} \bar{E}_v(\bar{R}) = & -\frac{\omega\mu_0\bar{p}}{4\pi} \int_0^\infty \frac{\lambda e^{jh_1 z_0}}{h_1 k_1} \left\{ \frac{1}{k_1} \left[ j(-h_1) \frac{\partial J_0(\lambda r)}{\partial r} \hat{r} + \lambda^2 J_0(\lambda r) \hat{z} \right] e^{-jh_1 z} \right. \\ & \left. + \frac{b}{k_1} \left[ jh_1 \frac{\partial J_0(\lambda r)}{\partial r} \hat{r} + \lambda^2 J_0(\lambda r) \hat{z} \right] e^{jh_1 z} \right\} d\lambda \end{aligned} \quad (5.25)$$

Uma aproximação convencional para calcular campos distantes é através do método do ponto de sela (ver Apêndice B de [31]). Para este propósito, convém introduzir-se a seguinte transformação

$$\lambda = k_1 \operatorname{sen} v \quad (5.26)$$

a qual mapeia o percurso de integração ao longo do eixo real no plano  $\lambda$  em um percurso  $P_0$  no plano complexo  $v = v' + jv''$ . Por esta transformação obtém-se

$$h_i = k_1 \sqrt{n_i^2 - \operatorname{sen}^2 v} \quad (5.27)$$

onde

$$n_i = \frac{k_i}{k_1}, \quad i = 1 \text{ e } 2 \quad (5.28)$$

Aplicando-se (5.27) e (5.28) em (5.26), implica-se que

$$d\lambda = h_1 dv \quad (5.29)$$

Usando-se (5.26) e (5.29) em (5.25), obtém-se

$$\begin{aligned} \bar{E}_v(\bar{R}) = & \bar{c} \int_0^\infty \operatorname{sen} v \left[ -jh_1 \frac{\partial J_0(\lambda r)}{\partial r} e^{jh_1(z_0-z)} + \frac{jh_1 b}{k_1} \frac{\partial J_0(\lambda r)}{\partial r} e^{jh_1(z_0+z)} \right] \hat{r} \\ & + \operatorname{sen} v \left[ \frac{\lambda^2}{k_1} J_0(\lambda r) e^{jh_1(z_0-z)} + \frac{\lambda^2 b}{k_1} J_0(\lambda r) e^{jh_1(z_0+z)} \right] \hat{z} dv \end{aligned} \quad (5.30)$$

onde

$$\bar{c} = -\frac{\omega\mu_0\bar{p}}{4\pi} \quad (5.31)$$

Por conveniência,  $\lambda$  será substituído posteriormente por (5.26) em (5.30) e nas demais equações.

**Para  $\hat{r}$  :**

$$\bar{E}_v(\bar{R}) = \bar{c} \cos\phi \int_0^{\infty} \text{sen } v \left[ -jh_1 \frac{\partial J_0(\lambda r)}{\partial r} e^{jh_1(z_0-z)} + \frac{jh_1 b}{k_1} \frac{\partial J_0(\lambda r)}{\partial r} e^{jh_1(z_0+z)} \right] \hat{r} dv \quad (5.32)$$

Utilizando-se algumas propriedades da função de Bessel, tais como:

$$J'_n(x) = \frac{1}{2} [J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)] \text{ e } J'_0(x) = -J_1(x)$$

Assim:

$$\frac{\partial J_0(\lambda r)}{\partial r} = -\lambda J_1(\lambda r) \quad (5.33)$$

A função de Bessel  $J_0(\lambda r)$  será transformada em uma função de Hankel, a fim de mudar os limites de integração de zero a infinito para limites mais convenientes de menos infinito a mais infinito, além de que a função de Hankel pode expressa para grandes distâncias. Com isso, usa-se a seguinte transformação

$$J_1(\lambda r) = H_1^{(1)}(\lambda r) \cong \sqrt{\frac{2}{\pi\lambda r}} e^{j\lambda r} e^{-j\frac{3\pi}{4}} \quad (5.34)$$

Com isso, usando-se (5.34) em (5.32) e fazendo-se a substituição de  $\lambda$  por (5.26), obtém-se que o campo elétrico para um dipolo vertical na coordenada  $\hat{r}$ , sendo aqui denominado por  $\bar{E}_v^r(\bar{R})$ , será

$$\begin{aligned} \bar{E}_v^r(\bar{R}) = j\bar{c} \cos\phi e^{-j\frac{3\pi}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} h_1 \text{sen}^2 v [e^{jh_1(z_0-z)} \\ - b e^{jh_1(z_0+z)}] \sqrt{\frac{2}{\pi k_1 r \text{sen } v}} e^{jk_1 r \text{sen } v} dv \end{aligned} \quad (5.35)$$

**Para  $\hat{z}$  :**

$$\bar{E}_v(\bar{R}) = \bar{c} \cos\phi \int_0^{\infty} \text{sen } v \frac{\lambda^2}{k_1} J_0(\lambda r) [e^{jh_1(z_0-z)} + b e^{jh_1(z_0+z)}] dv \quad (5.36)$$

Fazendo-se as mesmas considerações que foram feitas anteriormente, verifica-se que o campo elétrico para um dipolo vertical na coordenada  $\hat{z}$ , sendo aqui denominado por  $\bar{E}_v^z(\bar{R})$ , é dado por

$$\begin{aligned} \bar{E}_v^z(\bar{R}) = & \bar{c} \cos\phi e^{-j\frac{\pi}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} k_1 \text{sen}^3 v [e^{jh_1(z_0-z)} \\ & + b e^{jh_1(z_0+z)}] \sqrt{\frac{2}{\pi k_1 r \text{sen } v}} e^{jk_1 r \text{sen } v} dv \end{aligned} \quad (5.37)$$

### 5.3 – Cálculo do Campo Elétrico para Um Dipolo Horizontal

Essa situação corresponde a um transmissor numa altura ( $z_0$ ) maior que a altura do receptor. Nesse caso, o procedimento a ser realizado é o mesmo feito para o caso do dipolo vertical.

Na estrutura apresentada na Figura 5.3 a fonte de corrente será considerada como um dipolo elétrico horizontal orientado na direção do eixo  $\hat{x}$ . Neste caso, a densidade de corrente será:

$$\bar{J}_H(\bar{R}') = \bar{p} \delta(x - 0) \delta(y - 0) \delta(z - z_0) \hat{x} \quad (5.38)$$

onde  $z_0$  corresponde a localização da fonte de corrente na coordenada  $z$ .

Com o uso de um dipolo vertical localizado em  $(0, 0, z_0)$ , de acordo com (3.17), tem-se que o campo elétrico produzido por esse dipolo será

$$\bar{E}_H(\bar{R}) = j\omega\mu_0 \bar{G}_e^{(11)}(\bar{R}/\bar{R}') \cdot \hat{x} \quad (5.39)$$

onde  $\hat{x}$  em coordenadas cilíndricas será dado por  $\hat{x} = \cos\phi \hat{r} - \text{sen}\phi \hat{\phi}$ .

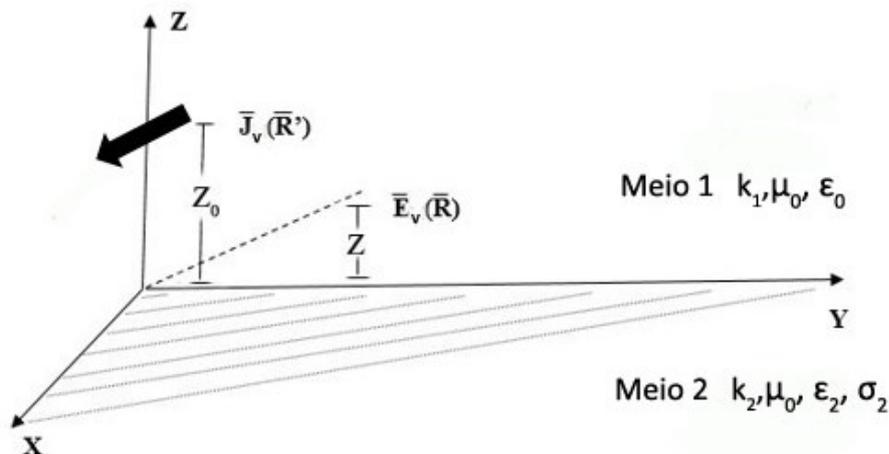


Figura 5.3 - Dipolo elétrico horizontal num meio de duas camadas.

Fazendo-se uso de  $\bar{G}_e^{(11)}$  definido em (5.4) e usando (3.33) e (3.34), verifica-se que no ponto  $\bar{R}' = (0, 0, z_0)$ , para  $\bar{M}'_{\text{en}\lambda}(h_1) \cdot \hat{x}$

$$\bar{M}'_{e_{n\lambda}}(h_1) \cdot \hat{x} = \bar{M}'_{e_{n\lambda}}(h_1) \cdot (\cos \phi \hat{r} - \text{sen } \phi \hat{\phi}) = \frac{nJ_n(\lambda r')}{r'} e^{jh_1 z_0} \quad (5.40)$$

Adotando-se  $\lambda x' = t \rightarrow x' = t/\lambda$ ; assim:

$$\frac{nJ_n(\lambda r')}{r'} = \frac{n\lambda J_n(t)}{t} \quad (5.41)$$

Aplicando-se a seguinte propriedade da função de Bessel

$$J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} J_n(x) - J_{n-1}(x) \quad (5.42)$$

tem-se

$$n = 1: J_2(0) = 2 \frac{J_1(0)}{0} - J_0(0) = 2 \frac{1}{2} - 1 = 0$$

$$n = 0, 2, \dots, \infty: J_n(0) = \text{indeterminado}$$

logo só existe o caso para  $n = 1$ . Assim, ao se aplicar (5.41) e (5.42) em (5.40), obtém-se

$$\bar{M}'_{e_{n\lambda}}(h_1) \cdot \hat{x} = \bar{M}'_{e_{n\lambda}}(h_1) \cdot (\cos \phi \hat{r} - \text{sen } \phi \hat{\phi}) = \frac{nJ_n(\lambda r')}{r'} e^{jh_1 z_0} = \frac{\lambda}{2} e^{jh_1 z_0} \quad (5.43)$$

Já para  $\bar{N}'_{e_{n\lambda}}(h_1) \cdot \hat{x}$ , verifica-se que

$$\bar{N}'_{e_{n\lambda}}(h_1) \cdot \hat{x} = \bar{N}'_{e_{n\lambda}}(h_1) \cdot (\cos \phi \hat{r} - \text{sen } \phi \hat{\phi}) = \frac{jh_1}{k_1} \frac{\partial J_n(\lambda r')}{\partial r'} e^{jh_1 z_0} \quad (5.44)$$

Usando-se (5.41) e aplicando-se a seguinte propriedade da função de Bessel

$$\frac{\partial J_n(t)}{\partial t} = J'_n(t) = \frac{1}{2} [J_{n-1}(t) - J_{n+1}(t)] \quad (5.45)$$

tem-se que

$$n = 0: J'_0(0) = -J_1(0) = 0$$

$$n = 1: J'_1(0) = \frac{1}{2} [J_0(0) - J_2(0)] = \frac{1}{2} [1 - 0] = \frac{1}{2}$$

$$n = 2: J'_2(0) = \frac{1}{2} [J_1(0) - J_3(0)] = \frac{1}{2} [0 - 0] = 0$$

$$n = 3: J'_3(0) = \frac{1}{2} [J_2(0) - J_4(0)] = \frac{1}{2} [0 - 0] = 0$$

⋮

$$n = \infty: J'_\infty(0) = 0$$

logo só existe o caso para  $n = 1$ . Assim, ao se aplicar (5.43) e (5.45) em (5.44), obtém-se

$$\bar{N}'_{e_{n\lambda}}(h_1) \cdot \hat{x} = \frac{jh_1}{k_1} \frac{\partial J_n(\lambda r')}{\partial r'} e^{jh_1 z_0} = \frac{j\lambda h_1 e^{jh_1 z_0}}{2k_1} \quad (5.46)$$

Assim, fazendo-se uso de (5.4), aplicando-se (5.21) e (5.46) em (5.39), obtém-se que o campo elétrico devido a um dipolo elétrico horizontal é

$$\begin{aligned} \bar{E}_H(\bar{R}) = j\omega\mu_0\bar{p} \frac{j}{4\pi} \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda h_1} \sum_{n=0}^\infty (2 - \delta_0) \left\{ [\bar{M}_{o_{1\lambda}}(-h_1) + a\bar{M}_{o_{1\lambda}}(h_1)] \frac{\lambda}{2} e^{jh_1 z_0} \right. \\ \left. + [\bar{N}_{e_{1\lambda}}(-h_1) + b\bar{N}_{e_{1\lambda}}(h_1)] \frac{jh_1\lambda}{2k_1} e^{jh_1 z_0} \right\} \end{aligned} \quad (5.47)$$

como só existe  $n = 1$  e  $\delta_0 = 1$ , então

$$\begin{aligned} \bar{E}_H(\bar{R}) = -\frac{\omega\mu_0\bar{p}}{4\pi} \int_0^\infty \frac{e^{jh_1 z_0}}{h_1} \left\{ [\bar{M}_{o_{1\lambda}}(-h_1) + a\bar{M}_{o_{1\lambda}}(h_1)] \right. \\ \left. + [\bar{N}_{e_{1\lambda}}(-h_1) + b\bar{N}_{e_{1\lambda}}(h_1)] \frac{jh_1}{k_1} \right\} d\lambda \end{aligned} \quad (5.48)$$

lembrando-se que  $a = \frac{h_1 - h_2}{h_1 + h_2}$ ,  $b = \frac{k_2^2 h_1 - k_1^2 h_2}{k_2^2 h_1 + k_1^2 h_2}$ .

Usando-se as expressões para  $\bar{M}_{\rho n \lambda}$ ,  $\bar{N}_{\rho n \lambda}$ , dada por (3.33) e (3.34), e utilizando-se os coeficientes ( $a$ ) e ( $b$ ) que aparecem em (5.13) e (5.14), as componentes  $\hat{r}$ ,  $\hat{\phi}$  e  $\hat{z}$  podem ser extraídas de (5.48). Desta maneira, obtém-se:

$$\begin{aligned} \bar{E}_H(\bar{R}) = -\frac{\omega\mu_0\bar{p}}{4\pi} \int_0^\infty \left\{ \left[ \frac{J_1(\lambda r)}{r h_1} \cos\phi (e^{jh_1(z_0-z)} + a e^{jh_1(z_0+z)}) \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{h_1}{k_1^2} \frac{\partial J_1(\lambda r)}{\partial r} \cos\phi (e^{jh_1(z_0-z)} + b e^{jh_1(z_0+z)}) \right] \hat{r} \right. \\ \left. + \left[ \frac{\partial J_1(\lambda r)}{\partial r} \frac{\sin\phi}{h_1} (-e^{jh_1(z_0-z)} - a e^{jh_1(z_0+z)}) \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{h_1}{r k_1^2} J_1(\lambda r) \sin\phi (-e^{jh_1(z_0-z)} + b e^{jh_1(z_0+z)}) \right] \hat{\phi} \right. \\ \left. + \left[ \frac{j}{k_1^2} \lambda^2 J_1(\lambda r) \cos\phi (e^{jh_1(z_0-z)} + b e^{jh_1(z_0+z)}) \right] \hat{z} \right\} d\lambda \end{aligned} \quad (5.49)$$

Utilizando-se o mesmo procedimento feito no cálculo para o dipolo vertical, utiliza-se as equações (5.26) a (5.29) e (5.31), encontrando assim o campo elétrico para o dipolo horizontal para as coordenadas  $\hat{r}$ ,  $\hat{\phi}$  e  $\hat{z}$ , conforme mostradas a seguir.

**Para  $\hat{r}$  :**

$$\begin{aligned} \bar{E}_v(\bar{R}) = \bar{c} \int_0^{\infty} & \left[ \frac{J_1(\lambda r)}{r h_1} \cos\phi (e^{j h_1(z_0-z)} + a e^{j h_1(z_0+z)}) \right. \\ & \left. + \frac{h_1}{k_1^2} \frac{\partial J_1(\lambda r)}{\partial r} \cos\phi (e^{j h_1(z_0-z)} + b e^{j h_1(z_0+z)}) \right] d\lambda \end{aligned} \quad (5.50)$$

Utilizando-se algumas propriedades da função de Bessel, tais como:

$$\begin{aligned} \frac{J_1(\lambda r)}{r} &= \frac{\lambda}{2} [J_0(\lambda r) + J_2(\lambda r)] \\ \frac{\partial J_1(\lambda r)}{\partial r} &= \frac{\lambda}{2} [J_0(\lambda r) - J_2(\lambda r)] \end{aligned} \quad (5.51)$$

Fazendo-se uso da expressão assintótica para as funções de Hankel, tem-se o seguinte

$$\begin{aligned} H_0^{(1)}(\lambda r) &\cong \sqrt{\frac{2}{\pi \lambda r}} e^{j \lambda r} e^{-j \frac{\pi}{4}} \\ H_2^{(1)}(\lambda r) &\cong \sqrt{\frac{2}{\pi \lambda r}} e^{j \lambda r} e^{-j \frac{5\pi}{4}} = -H_0^{(1)}(\lambda r) \end{aligned} \quad (5.52)$$

Daí

$$\begin{aligned} H_0^{(1)}(\lambda r) + H_2^{(1)}(\lambda r) &= 0 \\ H_0^{(1)}(\lambda r) - H_2^{(1)}(\lambda r) &= 2H_0^{(1)}(\lambda r) \end{aligned} \quad (5.53)$$

Considerando-se a aproximação convencional para calcular campos distantes através do método do ponto de sela e usando-se as equações (5.26) a (5.29), (5.51), (5.52) e (5.53), obtém-se que o campo elétrico para um dipolo horizontal na coordenada  $\hat{r}$ , sendo aqui denominado por  $\bar{E}_H^r(\bar{R})$ , será

$$\begin{aligned} \bar{E}_H^r(\bar{R}) = \frac{\bar{c} e^{-j \frac{\pi}{4}} \cos\phi}{2} & \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{h_1^2 \text{sen } v}{k_1} [e^{j h_1(z_0-z)} \\ & - b e^{j h_1(z_0+z)}] \sqrt{\frac{2}{\pi k_1 r \text{sen } v}} e^{j k_1 r \text{sen } v} dv \end{aligned} \quad (5.54)$$

**Para  $\hat{\phi}$ :**

$$\begin{aligned} \bar{E}_H(\bar{R}) = \bar{c} \int_0^{\infty} \frac{\partial J_1(\lambda r)}{\partial r} \frac{\text{sen} \phi}{h_1} \left[ (-e^{jh_1(z_0-z)} - ae^{jh_1(z_0+z)}) \right. \\ \left. + \frac{h_1}{rk_1^2} J_1(\lambda r) \text{sen} \phi (-e^{jh_1(z_0-z)} + be^{jh_1(z_0+z)}) \right] d\lambda \end{aligned} \quad (5.55)$$

Fazendo-se as mesmas considerações que foram feitas para a coordenada  $\hat{z}$ , verifica-se que o campo elétrico para um dipolo horizontal na coordenada  $\hat{\phi}$ , sendo aqui denominado por  $\bar{E}_H^\phi(\bar{R})$ , é dado por

$$\begin{aligned} \bar{E}_H^\phi(\bar{R}) = \frac{\bar{c} \text{sen} \phi e^{-j\frac{\pi}{4}}}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} k_1 \text{sen} v [-e^{jh_1(z_0-z)} \\ - ae^{jh_1(z_0+z)}] \sqrt{\frac{2}{\pi k_1 r \text{sen} v}} e^{jk_1 r \text{sen} v} dv \end{aligned} \quad (5.56)$$

**Para  $\hat{z}$ :**

$$\bar{E}_H(\bar{R}) = \bar{c} \int_0^{\infty} \frac{j}{k_1^2} \lambda^2 J_1(\lambda r) \cos \phi (e^{jh_1(z_0-z)} + be^{jh_1(z_0+z)}) d\lambda \quad (5.57)$$

Fazendo-se as mesmas considerações que foram feitas anteriormente, verifica-se que o campo elétrico para um dipolo horizontal na coordenada  $\hat{z}$ , sendo aqui denominado por  $\bar{E}_H^z(\bar{R})$ , é dado por

$$\begin{aligned} \bar{E}_H^z(\bar{R}) = \frac{j\bar{c} e^{-j\frac{3\pi}{4}} \cos \phi}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} h_1 \text{sen}^2 v [e^{jh_1(z_0-z)} \\ + be^{jh_1(z_0+z)}] \sqrt{\frac{2}{\pi k_1 r \text{sen} v}} e^{jk_1 r \text{sen} v} dv \end{aligned} \quad (5.58)$$

## 5.4 – Considerações Finais

Neste capítulo foi feito um desenvolvimento matemático detalhado para o cálculo do campo elétrico para um meio de duas camadas. Tal explanação permite um entendimento claro e objetivo desse campo, que pode ser explorado para outros estudos considerando um

dipolo com um direcionamento qualquer, não somente o vertical e horizontal, bastando somente fazer algumas alterações nos cálculos. A seguir, o mesmo processo feito neste capítulo, será realizado para calcular o campo elétrico de TV digital para um meio de três camadas.

## CAPÍTULO 6 – CÁLCULO DO CAMPO ELÉTRICO PARA UM MEIO DE 3 CAMADAS

Neste capítulo será feita a formulação para o cálculo do campo elétrico para um meio de três camadas, conforme visto pela Figura 6.1 (sendo a figura 4.2 aqui repetida para uma melhor visualização do problema). Os cálculos aqui serão semelhantes aos que foram feitos anteriormente para um meio de duas camadas, exceto por algumas diferenças.

No cálculo do campo elétrico para o meio de três camadas será feita a consideração de duas situações: 1ª) transmissor e receptor no meio 1 e 2ª) transmissor no meio 1 e receptor no meio 2. A formulação será feita para o dipolo horizontal e vertical para as duas situações consideradas; isso permitirá uma melhor compreensão e formulação completa de campos eletromagnéticos usando funções de Green diádicas para tal meio.

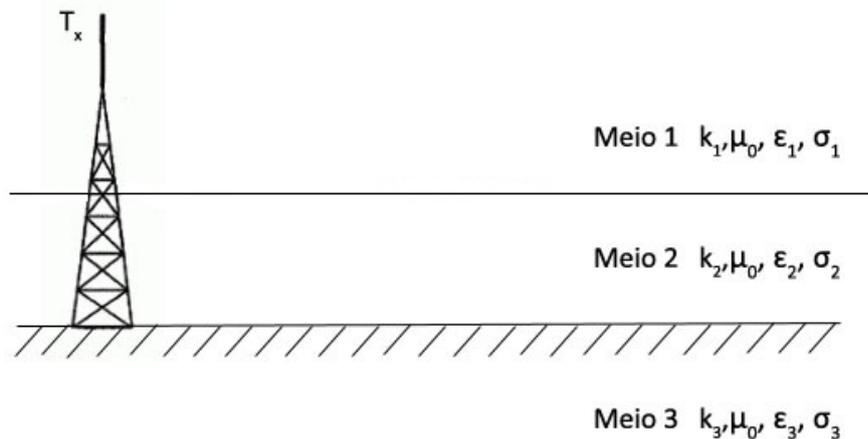


Figura 6.1 - Meio de Três Camadas.

### 6.1 – Primeira Situação: Transmissor e Receptor no meio 1

Considerando-se um meio 1, podendo ser o ar, com características de permissividade e condutividade, respectivamente dadas por  $\epsilon_1, \delta_1$ ; um meio 2, como por exemplo as edificações de uma cidade ou o tronco de árvores de uma floresta, com características dadas por  $\epsilon_2, \delta_2$  e um meio 3, neste caso o solo, com características dadas por  $\epsilon_3, \delta_3$ , as constantes de onda nos três meios, dada através de (3.1) são

$$k_1 = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} \quad (6.1)$$

$$k_2 = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_2 \left(1 + j \frac{\sigma_2}{\omega \epsilon_2}\right)} \quad (6.2)$$

$$k_3 = \omega \sqrt{\mu_0 \varepsilon_3 \left(1 + j \frac{\sigma_3}{\omega \varepsilon_3}\right)} \quad (6.3)$$

em que a permeabilidade magnética será a mesma do espaço livre nas três constantes.

A densidade de corrente de um dipolo elétrico na camada 1 ou 2 pode ser expressa como

$$\bar{J}(\bar{R}') = \bar{p} \delta(x - x') \delta(y - y') \delta(z - z') \quad (6.3)$$

onde  $\bar{p}$  é o momento do dipolo elétrico e  $x, y, z$  são as coordenadas retangulares.

Pelo fato do objetivo ser o cálculo do campo elétrico de transmissão de TV digital com transmissor e receptor no meio 1, a função de Green diádica a ser utilizada será, para essa situação, a equação (4.8), que substituindo (4.2) e (4.11) em (4.8) resulta

$$\begin{aligned} \bar{G}_{e1}^{(11)}(\bar{R}/\bar{R}') = \frac{j}{4\pi} \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda h_1} \sum_{n=0}^\infty (2 - \delta_0) \{ [\bar{M}_{\varepsilon n \lambda}(-h_1) + a \bar{M}_{\varepsilon n \lambda}(h_1)] \bar{M}'_{\varepsilon n \lambda}(h_1) \\ + [\bar{N}_{\varepsilon n \lambda}(-h_1) + b \bar{N}_{\varepsilon n \lambda}(h_1)] \bar{N}'_{\varepsilon n \lambda}(h_1) \} \end{aligned} \quad (6.4)$$

### 6.1.2 – Cálculo dos coeficientes

Para calcular os coeficientes  $a, b, c, d, e, g, q$  e  $r$  que aparecem nas equações (4.11) a (4.13), usam-se as condições de contornos (3.7) e (3.9).

Pelo fato de o desenvolvimento ser idêntico ao aplicado para o meio de duas camadas, será posto aqui somente as condições de contorno e as equações que são obtidas por tais condições.

#### I) Primeira Condição de contorno

Aplicando-se (6.4) e (4.12) em (4.14a) na interface de separação dos meios 1 e 2 (ou seja, em  $z = H$ ), tem-se

$$\hat{z} \times \bar{G}_e^{(11)} = \hat{z} \times \bar{G}_e^{(21)S} \quad (6.5)$$

A partir de (6.5), obtém-se as igualdades

$$i) \quad \bar{M}_{\varepsilon n \lambda}(-h_1) + a \bar{M}_{\varepsilon n \lambda}(h_1) = c \bar{M}_{\varepsilon n \lambda}(h_2) + e \bar{M}'_{\varepsilon n \lambda}(-h_2)$$

Que em  $z = H$ , resulta em

$$1 + a e^{j2h_1 H} = c e^{j(h_1+h_2)H} + e e^{j(h_1-h_2)H} \quad (6.6)$$

$$\text{ii) } \bar{N}_{\epsilon n \lambda}(-h_1) + b\bar{N}_{\epsilon n \lambda}(h_1) = d\bar{N}_{\epsilon n \lambda}(h_2) + g\bar{N}_{\epsilon n \lambda}(-h_2)$$

Obtendo-se

$$-\frac{1}{k_1} + \frac{be^{j2h_1H}}{k_1} = \frac{de^{j(h_1+h_2)H}}{k_2} - \frac{ge^{j(h_1-h_2)H}}{k_2} \quad (6.7)$$

## II) Segunda Condição de contorno

Aplicando-se (6.4) e (4.12) em (4.14b) na interface de separação dos meios 1 e 2 (ou seja, em  $z = H$ ), tem-se

$$\hat{z} \times \nabla \times \bar{G}_e^{(11)} = \hat{z} \times \nabla \times \bar{G}_e^{(21)S} \quad (6.8)$$

Usando a simetria do conjunto de funções de onda vetorial denotado por  $\bar{M}_{\epsilon n \lambda}$  e  $\bar{N}_{\epsilon n \lambda}$ , em (6.8), tem-se as seguintes igualdades:

$$\text{iii) } k_1\bar{N}_{\epsilon n \lambda}(-h_1) + ak_1\bar{N}_{\epsilon n \lambda}(h_1) = ck_2\bar{N}_{\epsilon n \lambda}(h_2) + ek_2\bar{N}_{\epsilon n \lambda}(-h_2)$$

Que na interface, resulta em

$$-1 + ae^{j2h_1H} = ce^{j(h_1+h_2)H} - ee^{j(h_1-h_2)H} \quad (6.9)$$

$$\text{iv) } k_1\bar{M}_{\epsilon n \lambda}(-h_1) + bk_1\bar{M}_{\epsilon n \lambda}(h_1) = dk_2\bar{M}_{\epsilon n \lambda}(h_2) + gk_2\bar{M}_{\epsilon n \lambda}(-h_2)$$

No qual em  $z = H$ , obtém-se

$$k_1 + k_1be^{j2h_1H} = k_2de^{j(h_1+h_2)H} + k_2ge^{j(h_1-h_2)H} \quad (6.10)$$

## III) Terceira Condição de contorno

Aplicando-se (4.12) e (4.13) em (4.14a) na interface de separação dos meios 2 e 3 (ou seja, em  $z = 0$ ), tem-se

$$\hat{z} \times \bar{G}_e^{(21)} = \hat{z} \times \bar{G}_e^{(31)} \quad (6.11)$$

A partir de (6.11), obtém-se as igualdades

$$\text{v) } c\bar{M}_{\epsilon n \lambda}(-h_2) + e\bar{M}_{\epsilon n \lambda}(-h_2) = q\bar{M}_{\epsilon n \lambda}(-h_3)$$

Que em  $z = 0$ , resulta

$$c + e = q \quad (6.12)$$

$$\text{vi) } d\bar{N}_{\epsilon n \lambda}(h_2) + g\bar{N}_{\epsilon n \lambda}(-h_2) = r\bar{N}_{\epsilon n \lambda}(-h_3)$$

Que na interface entre os meios 2 e 3, obtém-se

$$\frac{g}{k_2} - \frac{d}{k_2} = \frac{r}{k_3} \quad (6.13)$$

## IV) Quarta Condição de contorno

Aplicando-se (4.12) e (4.13) em (4.14b) na interface de separação dos meios 2 e 3 (ou seja, em  $z = 0$ ), tem-se

$$\hat{z} \times \nabla \times \bar{G}_e^{(21)} = \hat{z} \times \nabla \times \bar{G}_e^{(31)} \quad (6.14)$$

A partir de (6.14), obtém-se as igualdades

$$\text{vii) } ck_2 \bar{N}_{\theta n \lambda}(h_2) + ek_2 \bar{N}_{\theta n \lambda}(-h_2) = qk_3 N_{\theta n \lambda}(-h_3)$$

Que em  $z = 0$ , resulta

$$e - c = q \quad (6.15)$$

$$\text{viii) } dk_2 \bar{M}_{\theta n \lambda}(h_2) + gk_2 \bar{M}_{\theta n \lambda}(-h_2) = rk_3 \bar{M}_{\theta n \lambda}(-h_3)$$

Que na interface entre os meios 2 e 3, obtém-se

$$dk_2 + gk_2 = rk_3 \quad (6.16)$$

Obtém-se assim o sistema formado pelas equações (6.6), (6.7), (6.9), (6.10), (6.12), (6.13), (6.15) e (6.16), conforme mostrado a seguir:

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 + ae^{j2h_1 H} = ce^{j(h_1+h_2)H} + ee^{j(h_1-h_2)H} \\ -\frac{1}{k_1} + \frac{be^{j2h_1 H}}{k_1} = \frac{de^{j(h_1+h_2)H}}{k_2} - \frac{ge^{j(h_1-h_2)H}}{k_2} \\ -1 + ae^{j2h_1 H} = ce^{j(h_1+h_2)H} - ee^{j(h_1-h_2)H} \\ k_1 + k_1 be^{j2h_1 H} = k_2 de^{j(h_1+h_2)H} + k_2 ge^{j(h_1-h_2)H} \\ c + e = q \\ \frac{g}{k_2} - \frac{d}{k_2} = \frac{r}{k_3} \\ e - c = q \\ dk_2 + gk_2 = rk_3 \end{array} \right. \quad (6.17)$$

onde os valores das constantes são calculados. Para a resolução desse sistema, usou-se o *Mathematica*, que é um programa de computador, originalmente concebido por *Stephen Wolfram*, e continuamente desenvolvido pela empresa *Wolfram Research*. Os valores das constantes são aqui omitidos por conveniência.

lembrando que

$$h_1 = \sqrt{k_1^2 - \lambda^2} \quad (6.18)$$

$$h_2 = \sqrt{k_2^2 - \lambda^2} \quad (6.19)$$

$$h_3 = \sqrt{k_3^2 - \lambda^2} \quad (6.20)$$

Nos itens a seguir, será feita a formulação do campo elétrico para um dipolo elétrico (fonte de corrente) vertical e horizontal. Com isso, será possível prever o campo elétrico de uma TV digital, na qual utiliza o dipolo horizontal na sua transmissão. O cálculo para o dipolo vertical se faz necessário pelo fato de ter uma formulação completa para a propagação de ondas eletromagnéticas em meios distintos.

### 6.1.3 – Cálculo do Campo para um Dipolo Horizontal

Na estrutura apresentada na Figura 6.2 a fonte de corrente será considerada como um dipolo elétrico horizontal orientado na direção  $\hat{x}$  (ou em coordenadas cilíndricas  $\hat{r}$ ) com momento de corrente  $\vec{p}$ . Neste caso, a densidade de corrente será:

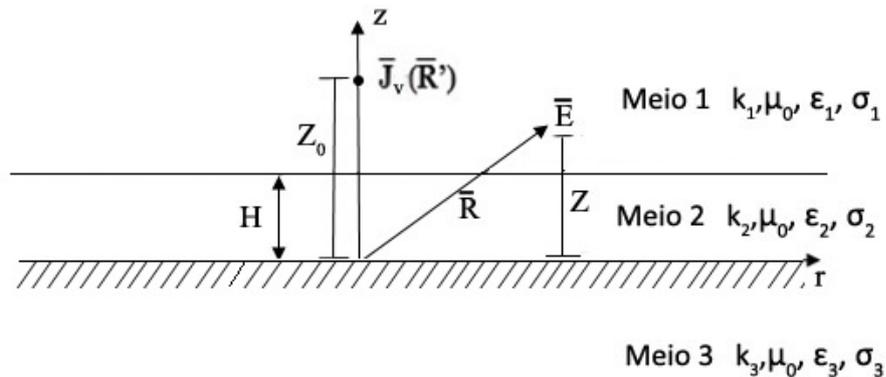
$$\vec{J}_H(\vec{R}') = \vec{p}\delta(x - 0)\delta(y - 0)\delta(z - z_0)\hat{x} \quad (6.21)$$

onde  $z_0$  corresponde a localização da fonte de corrente na coordenada  $z$ .

Com o uso de um dipolo horizontal localizado em  $(0, 0, z_0)$ , de acordo com (3.17), tem-se que o campo elétrico produzido por esse dipolo será

$$\vec{E}_H(\vec{R}) = j\omega\mu_0\vec{G}_e^{(11)}(\vec{R}/\vec{R}') \cdot \hat{x} \quad (6.22)$$

onde  $\hat{x}$  em coordenadas cilíndricas será dado por  $\hat{x} = \cos\phi\hat{r} - \text{sen}\phi\hat{\phi}$ .



**Figura 6.2** - Dipolo elétrico horizontal num meio de três camadas.

Fazendo-se uso de  $\vec{G}_e^{(11)}$  definido em (6.4) e usando (3.33) e (3.34), verifica-se que no ponto  $\vec{R}' = (0, 0, z_0)$ , para  $\vec{M}'_{\phi n \lambda}(h_1) \cdot \hat{x}$

$$\vec{M}'_{\phi n \lambda}(h_1) \cdot \hat{x} = \vec{M}'_{\phi n \lambda}(h_1) \cdot (\cos\phi\hat{r} - \text{sen}\phi\hat{\phi}) = \frac{nJ_n(\lambda r')}{r'} e^{jh_1 z_0} = \frac{\lambda}{2} e^{jh_1 z_0} \quad (6.23)$$

Verifica-se que a equação (6.23) acima é obtida da mesma maneira que foi adotada para o caso do dipolo horizontal de duas camadas.

Já para  $\bar{N}'_{e_{n\lambda}}(h_1) \cdot \hat{x}$ , verifica-se que

$$\bar{N}'_{e_{n\lambda}}(h_1) \cdot \hat{x} = \frac{j h_1}{k_1} \frac{\partial J_n(\lambda r')}{\partial r'} e^{j h_1 z_0} = \frac{j \lambda h_1 e^{j h_1 z_0}}{2 k_1} \quad (6.24)$$

pelo mesmo motivo que já feito outrora.

Assim, fazendo-se uso de (6.4), aplicando-se (6.23) e (6.24) em (6.22), obtém-se que o campo elétrico devido a um dipolo elétrico horizontal é

$$\begin{aligned} \bar{E}_H(\bar{R}) = j \omega \mu_0 \bar{p} \frac{j}{4\pi} \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda h_1} \sum_{n=0}^\infty (2 - \delta_0) \left\{ [\bar{M}_{o_{1\lambda}}(-h_1) + a \bar{M}_{o_{1\lambda}}(h_1)] \frac{\lambda}{2} e^{j h_1 z_0} \right. \\ \left. + [\bar{N}_{e_{1\lambda}}(-h_1) + b \bar{N}_{e_{1\lambda}}(h_1)] \frac{j h_1 \lambda}{2 k_1} e^{j h_1 z_0} \right\} \end{aligned} \quad (6.25)$$

como só existe  $n = 1$  e  $\delta_0 = 1$ , então

$$\begin{aligned} \bar{E}_H(\bar{R}) = - \frac{\omega \mu_0 \bar{p}}{4\pi} \int_0^\infty \frac{e^{j h_1 z_0}}{h_1} \left\{ [\bar{M}_{o_{1\lambda}}(-h_1) + a \bar{M}_{o_{1\lambda}}(h_1)] \right. \\ \left. + [\bar{N}_{e_{1\lambda}}(-h_1) + b \bar{N}_{e_{1\lambda}}(h_1)] \frac{j h_1}{k_1} \right\} d\lambda \end{aligned} \quad (6.26)$$

Usando-se as expressões para  $\bar{M}_{o_{n\lambda}}, \bar{N}_{e_{n\lambda}}$ , dada por (3.33) e (3.34), e utilizando-se os coeficientes  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$  que aparecem da resolução (6.17), as componentes  $\hat{r}, \hat{\phi}$  e  $\hat{z}$  podem ser extraídas de (6.26). Desta maneira, obtém-se:

$$\begin{aligned} \bar{E}_H(\bar{R}) = - \frac{\omega \mu_0 \bar{p}}{4\pi} \int_0^\infty \left\{ \left[ \frac{J_1(\lambda r)}{r h_1} \cos \phi (e^{j h_1 (z_0 - z)} + a e^{j h_1 (z_0 + z)}) \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{h_1}{k_1^2} \frac{\partial J_1(\lambda r)}{\partial r} \cos \phi (e^{j h_1 (z_0 - z)} + b e^{j h_1 (z_0 + z)}) \right] \hat{r} \right. \\ \left. + \left[ \frac{\partial J_1(\lambda r)}{\partial r} \frac{\sin \phi}{h_1} (-e^{j h_1 (z_0 - z)} - a e^{j h_1 (z_0 + z)}) \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{h_1}{r k_1^2} J_1(\lambda r) \sin \phi (-e^{j h_1 (z_0 - z)} + b e^{j h_1 (z_0 + z)}) \right] \hat{\phi} \right. \\ \left. + \left[ \frac{j}{k_1^2} \lambda^2 J_1(\lambda r) \cos \phi (e^{j h_1 (z_0 - z)} + b e^{j h_1 (z_0 + z)}) \right] \hat{z} \right\} d\lambda \end{aligned} \quad (6.27)$$

Utilizando-se o mesmo procedimento feito no cálculo para o dipolo vertical, utiliza-se as equações (5.26) a (5.29) e (5.31), encontrando assim o campo elétrico para o dipolo horizontal para as coordenadas  $\hat{r}, \hat{\phi}$  e  $\hat{z}$ , conforme mostradas a seguir.

**Para  $\hat{r}$  :**

$$\begin{aligned} \bar{E}_v(\bar{R}) = \bar{c} \int_0^{\infty} & \left[ \frac{J_1(\lambda r)}{r h_1} \cos\phi (e^{j h_1(z_0-z)} + a e^{j h_1(z_0+z)}) \right. \\ & \left. + \frac{h_1}{k_1^2} \frac{\partial J_1(\lambda r)}{\partial r} \cos\phi (e^{j h_1(z_0-z)} + b e^{j h_1(z_0+z)}) \right] d\lambda \end{aligned} \quad (6.28)$$

Utilizando-se algumas propriedades da função de Bessel, da expressão assintótica para as funções de Hankel e considerando-se a aproximação convencional para calcular campos distantes através do método do ponto de sela, obtém-se que o campo elétrico para um dipolo horizontal na coordenada  $\hat{r}$ , sendo aqui denominado por  $\bar{E}_H^r(\bar{R})$ , será

$$\begin{aligned} \bar{E}_H^r(\bar{R}) = \frac{\bar{c} e^{-j\frac{\pi}{4}} \cos\phi}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} & \frac{h_1^2 \text{sen } v}{k_1} [e^{j h_1(z_0-z)} \\ & + b e^{j h_1(z_0+z)}] \sqrt{\frac{2}{\pi k_1 r \text{sen } v}} e^{j k_1 r \text{sen } v} dv \end{aligned} \quad (6.29)$$

**Para  $\hat{\phi}$  :**

$$\begin{aligned} \bar{E}_H(\bar{R}) = \bar{c} \int_0^{\infty} & \frac{\partial J_1(\lambda r)}{\partial r} \frac{\text{sen}\phi}{h_1} \left[ (e^{j h_1(z_0-z)} + a e^{j h_1(z_0+z)}) \right. \\ & \left. + \frac{h_1}{r k_1^2} J_1(\lambda r) \text{sen}\phi (e^{j h_1(z_0-z)} + b e^{j h_1(z_0+z)}) \right] d\lambda \end{aligned} \quad (6.30)$$

Fazendo-se as mesmas considerações que foram feitas para a coordenada  $\hat{z}$ , verifica-se que o campo elétrico para um dipolo horizontal na coordenada  $\hat{\phi}$ , sendo aqui denominado por  $\bar{E}_H^\phi(\bar{R})$ , é dado por

$$\begin{aligned} \bar{E}_H^\phi(\bar{R}) = \frac{\bar{c} \text{sen } \phi e^{-j\frac{\pi}{4}}}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} & k_1 \text{sen } v [e^{j h_1(z_0-z)} \\ & + a e^{j h_1(z_0+z)}] \sqrt{\frac{2}{\pi k_1 r \text{sen } v}} e^{j k_1 r \text{sen } v} dv \end{aligned} \quad (6.31)$$

**Para  $\hat{z}$  :**

$$\bar{E}_H(\bar{R}) = \bar{c} \int_0^{\infty} \frac{j}{k_1^2} \lambda^2 J_1(\lambda r) \cos \phi (e^{jh_1(z_0-z)} + be^{jh_1(z_0+z)}) d\lambda \quad (6.32)$$

Fazendo-se as mesmas considerações que foram feitas anteriormente, verifica-se que o campo elétrico para um dipolo horizontal na coordenada  $\hat{z}$ , sendo aqui denominado por  $\bar{E}_H^z(\bar{R})$ , é dado por

$$\begin{aligned} \bar{E}_H^z(\bar{R}) = & \frac{j\bar{c} e^{-j\frac{3\pi}{4}} \cos \phi}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} h_1 \text{sen}^2 v [e^{jh_1(z_0-z)} \\ & + be^{jh_1(z_0+z)}] \sqrt{\frac{2}{\pi k_1 r \text{sen } v}} e^{jk_1 r \text{sen } v} dv \end{aligned} \quad (6.33)$$

Os resultados mostrados anteriormente são bastante similares ao valor encontrado para o campo elétrico de um dipolo horizontal para duas camadas, a diferença encontra-se nos valores dos coeficientes  $a$  e  $b$  (cujos valores são diferentes para a situação de duas e três camadas). Tal resultado é razoável, visto que a adição de mais uma camada ao meio considerado modifica os valores dos coeficientes, que passam a ser dependentes dos fatores dos três meios.

#### 6.1.4 – Cálculo do Campo para um dipolo vertical

O mesmo procedimento adotado para o dipolo horizontal e nos demais casos anteriores, será usado para este caso.

A fonte de corrente será considerada um dipolo elétrico vertical, a estrutura apresentada na Figura 6.2 pode ser considerada para melhor visualização do problema (com a utilização de um dipolo vertical). Neste caso, a densidade de corrente será:

$$\bar{J}_v(\bar{R}') = \bar{p} \delta(x - 0) \delta(y - 0) \delta(z - z_0) \hat{z} \quad (6.34)$$

onde  $z_0$  corresponde a localização da fonte de corrente na coordenada  $z$ .

Com o uso de um dipolo vertical localizado em  $(0, 0, z_0)$ , de acordo com (3.14), tem-se que o campo elétrico produzido por esse dipolo será

$$\bar{E}_v(\bar{R}) = j\omega\mu_0 \bar{G}_e^{(11)}(\bar{R}/\bar{R}') \cdot \hat{z} \quad (6.35)$$

Fazendo-se uso de  $\bar{G}_e^{(11)}$  definido em (5.4) e usando (3.33) e (3.34), verifica-se que no ponto  $\bar{R}' = (0, 0, z_0)$

$$\bar{M}'_{e_{n\lambda}}(h_1) \cdot \hat{z} = \bar{M}'_{e_{n\lambda}}(-h_1) \cdot \hat{z} = \bar{M}'_{e_{n\lambda}}(h_1) \cdot \hat{z} = 0 \quad (6.36)$$

e

$$\bar{N}'_{e_{n\lambda}}(h_1) \cdot \hat{z} = \frac{e^{jh_1 z_0}}{k_1} [\lambda^2] \quad (6.37)$$

pois  $\text{sen}(0) = 0$ ,  $\text{cos}(0) = 1$ ,  $J_1(0) = J_2(0) = \dots = J_n(0) = 0$  e  $J_0(0) = 1$ .

Assim, fazendo-se uso de (6.35), aplicando-se (6.36) e (6.37), obtém-se que o campo elétrico devido a um dipolo elétrico vertical é

$$\bar{E}_v(\bar{R}) = -\frac{\omega\mu_0\bar{p}}{4\pi} \int_0^\infty \frac{\lambda e^{jh_1 z_0}}{h_1 k_1} [\bar{N}_{e_{0\lambda}}(-h_1) + b\bar{N}_{e_{0\lambda}}(h_1)] d\lambda \quad (6.38)$$

Usando-se a expressão para  $\bar{N}_{e_{0\lambda}}$ , dada por (3.34), e utilizando-se o coeficiente  $b$  que se obtém de (6.17), as componentes  $\hat{r}$  e  $\hat{z}$  podem ser extraídas de (6.38). Desta maneira, obtém-se:

$$\begin{aligned} \bar{E}_v(\bar{R}) = & -\frac{\omega\mu_0\bar{p}}{4\pi} \int_0^\infty \frac{\lambda e^{jh_1 z_0}}{h_1 k_1} \left\{ \frac{1}{k_1} \left[ j(-h_1) \frac{\partial J_0(\lambda r)}{\partial r} \hat{r} + \lambda^2 J_0(\lambda r) \hat{z} \right] e^{-jh_1 z} \right. \\ & \left. + \frac{b}{k_1} \left[ jh_1 \frac{\partial J_0(\lambda r)}{\partial r} \hat{r} + \lambda^2 J_0(\lambda r) \hat{z} \right] e^{jh_1 z} \right\} d\lambda \end{aligned} \quad (6.39)$$

Utilizando as equações (5.26) a (5.30), obtém-se

$$\begin{aligned} \bar{E}_v(\bar{R}) = & \bar{c} \int_0^\infty \text{sen } v \left[ -jh_1 \frac{\partial J_0(\lambda r)}{\partial r} e^{jh_1(z_0-z)} + \frac{jh_1 b}{k_1} \frac{\partial J_0(\lambda r)}{\partial r} e^{jh_1(z_0+z)} \right] \hat{r} \\ & + \text{sen } v \left[ \frac{\lambda^2}{k_1} J_0(\lambda r) e^{jh_1(z_0-z)} + \frac{\lambda^2 b}{k_1} J_0(\lambda r) e^{jh_1(z_0+z)} \right] \hat{z} dv \end{aligned} \quad (6.40)$$

onde  $c$ , é dado por (5.31).

**Para  $\hat{r}$ :**

$$\bar{E}_v(\bar{R}) = \bar{c} \cos\phi \int_0^\infty \text{sen } v \left[ -jh_1 \frac{\partial J_0(\lambda r)}{\partial r} e^{jh_1(z_0-z)} + \frac{jh_1 b}{k_1} \frac{\partial J_0(\lambda r)}{\partial r} e^{jh_1(z_0+z)} \right] \hat{r} dv \quad (6.41)$$

Utilizando-se a mesma metodologia utilizada para o caso de duas camadas, verifica-se que o campo elétrico para um dipolo vertical na coordenada  $\hat{r}$ , sendo aqui denominado por  $\bar{E}_v^r(\bar{R})$ , será

$$\begin{aligned} \bar{E}_v^r(\bar{R}) = j\bar{c} \cos\phi e^{-j\frac{3\pi}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} h_2 \text{sen}^2 v [e^{jh_2(z_0-z)} \\ - b e^{jh_2(z_0+z)}] \sqrt{\frac{2}{\pi k_1 r \text{sen } v}} e^{jk_1 r \text{sen } v} dv \end{aligned} \quad (6.42)$$

**Para  $\hat{z}$ :**

$$\bar{E}_v(\bar{R}) = \bar{c} \cos\phi \int_0^{\infty} \text{sen } v \frac{\lambda^2}{k_1} J_0(\lambda r) [e^{jh_1(z_0-z)} + b e^{jh_1(z_0+z)}] dv \quad (6.43)$$

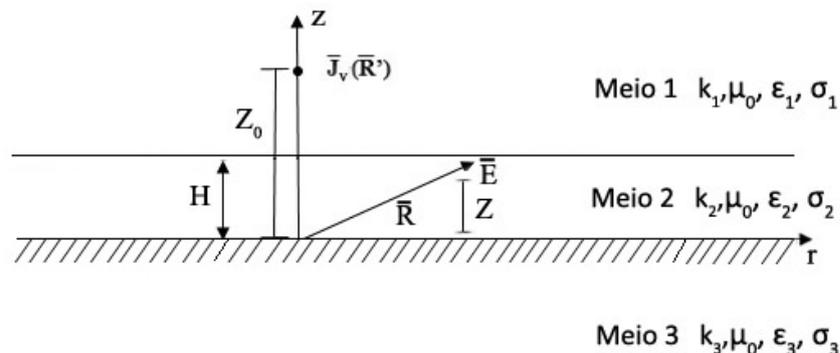
Fazendo-se as mesmas considerações que foram feitas anteriormente, verifica-se que o campo elétrico para um dipolo vertical na coordenada  $\hat{z}$ , sendo aqui denominado por  $\bar{E}_v^z(\bar{R})$ , é dado por

$$\begin{aligned} \bar{E}_v^z(\bar{R}) = \bar{c} \cos\phi e^{-j\frac{\pi}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} k_1 \text{sen}^3 v [e^{jh_1(z_0-z)} \\ + b e^{jh_1(z_0+z)}] \sqrt{\frac{2}{\pi k_1 r \text{sen } v}} e^{jk_1 r \text{sen } v} dv \end{aligned} \quad (6.44)$$

O mesmo comentário feito anteriormente para a predição de campo elétrico para as três coordenadas do dipolo horizontal continua válido nessa situação.

## 6.2 – Segunda Situação: Transmissor no meio 1 e Receptor meio 2

Essa situação é bastante similar a primeira situação explanada no tópico anterior, excetuando-se o fato de o receptor está localizado no meio 2, conforme mostra a Figura 6.3 a seguir.



**Figura 6.3** - Meio com três camadas, sendo o transmissor situado na camada 1 e o receptor na camada 2.

Devido a formulação a ser aplicada nesse tópico se assemelhar a feita para a primeira situação, os cálculos para a predição dos campos elétricos para o dipolo elétricos horizontal e vertical, serão omitidos, sendo explicitados somente seus respectivos valores finais.

Vale ressaltar que os coeficientes  $\mathbf{c}$ ,  $\mathbf{d}$ ,  $\mathbf{e}$ ,  $\mathbf{g}$ ,  $\mathbf{q}$  e  $\mathbf{r}$  que surgirão nas equações posteriores, podem ser obtidos a partir de (6.17), pois as condições de contorno neste caso serão as mesmas do caso antecedente.

### 6.2.1 –Campo Elétrico para um Dipolo Horizontal

O campo elétrico devido a um dipolo elétrico horizontal é

$$\begin{aligned} \bar{E}_H(\bar{R}) = & -\frac{\omega\mu_0\bar{p}}{4\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{jh_1z_0}}{h_1} \left\{ [c\bar{M}_{o_{1\lambda}}(h_2) + e\bar{M}_{o_{1\lambda}}(-h_2)] \right. \\ & \left. + [d\bar{N}_{e_{1\lambda}}(h_2) + g\bar{N}_{e_{1\lambda}}(-h_2)] \frac{jh_1}{k_1} \right\} d\lambda \end{aligned} \quad (6.45)$$

as componentes  $\hat{r}$ ,  $\hat{\phi}$  e  $\hat{z}$  podem ser extraídas de (6.45). Desta maneira, obtém-se:

**Para  $\hat{r}$ :**

$$\begin{aligned} \bar{E}_H^r(\bar{R}) = & \frac{\bar{c} e^{-j\frac{\pi}{4}} \cos\phi}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{h_2 \text{sen } v}{k_1} [-d e^{jh_1h_2(z_0+z)} \\ & + g e^{jh_1h_2(z_0-z)}] \sqrt{\frac{2}{\pi k_1 r \text{sen } v}} e^{jk_1 r \text{sen } v} dv \end{aligned} \quad (6.29)$$

**Para  $\hat{\phi}$ :**

$$\begin{aligned} \bar{E}_H^\phi(\bar{R}) = & \frac{\bar{c} e^{-j\frac{\pi}{4}} \text{sen}\phi}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} k_1 \text{sen } v [-c e^{jh_1h_2(z_0+z)} \\ & - e e^{jh_1h_2(z_0-z)}] \sqrt{\frac{2}{\pi k_1 r \text{sen } v}} e^{jk_1 r \text{sen } v} dv \end{aligned} \quad (6.30)$$

**Para  $\hat{z}$  :**

$$\begin{aligned} \bar{E}_H^z(\bar{R}) = & \frac{j\bar{c} e^{-j\frac{3\pi}{4}} \cos \phi}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} h_1 \text{sen}^2 v \left[ d e^{jh_1 h_2 (z_0+z)} \right. \\ & \left. + g e^{jh_1 h_2 (z_0-z)} \right] \sqrt{\frac{2}{\pi k_1 r \text{sen } v}} e^{jk_1 r \text{sen } v} dv \end{aligned} \quad (6.33)$$

#### 6.2.4 – Cálculo do Campo para um dipolo vertical

**Para  $\hat{r}$  :**

$$\begin{aligned} \bar{E}_v(\bar{R}) = & \bar{c} \cos \phi \int_0^{\infty} \text{sen } v \left[ -jgh_2 \frac{\partial J_0(\lambda r)}{\partial r} e^{jh_2 (z_0-z)} \right. \\ & \left. + \frac{jh_2 d}{k_1} \frac{\partial J_0(\lambda r)}{\partial r} e^{jh_2 (z_0+z)} \right] \hat{r} dv \end{aligned} \quad (6.41)$$

Utilizando-se a mesma metodologia utilizada para o caso de duas camadas, verifica-se que o campo elétrico para um dipolo vertical na coordenada  $\hat{r}$ , sendo aqui denominado por  $\bar{E}_v^r(\bar{R})$ , será

$$\begin{aligned} \bar{E}_v^r(\bar{R}) = & j\bar{c} \cos \phi e^{-j\frac{3\pi}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} h_2 \text{sen}^2 v \left[ g e^{jh_2 (z_0-z)} \right. \\ & \left. - d e^{jh_2 (z_0+z)} \right] \sqrt{\frac{2}{\pi k_1 r \text{sen } v}} e^{jk_1 r \text{sen } v} dv \end{aligned} \quad (6.42)$$

**Para  $\hat{z}$  :**

$$\bar{E}_v(\bar{R}) = \bar{c} \cos \phi \int_0^{\infty} \text{sen } v \frac{\lambda^2}{k_1} J_0(\lambda r) \left[ g e^{jh_2 (z_0-z)} + d e^{jh_2 (z_0+z)} \right] dv \quad (6.43)$$

Fazendo-se as mesmas considerações que foram feitas anteriormente, verifica-se que o campo elétrico para um dipolo vertical na coordenada  $\hat{z}$ , sendo aqui denominado por  $\bar{E}_v^z(\bar{R})$ , é dado por

$$\begin{aligned} \bar{E}_v^z(\bar{R}) = \bar{c} \cos\phi e^{-j\frac{\pi}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} k_1 \text{sen}^3 v [g e^{jh_2(z_0-z)} \\ + d e^{jh_2(z_0+z)}] \sqrt{\frac{2}{\pi k_1 r \text{sen } v}} e^{jk_1 r \text{sen } v} dv \end{aligned} \quad (6.44)$$

### 6.3 - Considerações Finais

Neste capítulo, assim como foi feito no capítulo 5, foi realizado um desenvolvimento matemático detalhado para o cálculo do campo elétrico para um meio de três camadas, considerando duas situações. Tal explanação permite também considerar um dipolo com um direcionamento qualquer, não somente o vertical e horizontal, bastando somente fazer algumas alterações nos cálculos.

Feito os cálculos para o campo elétrico de TV digital para um meio de duas e três camadas, a seguir serão mostrados os resultados de simulações realizadas para mostrar a aplicabilidade desse modelo proposto.

## CAPÍTULO 7 – RESULTADOS

Neste capítulo serão apresentados os principais resultados obtidos para a predição de campo elétrico para TV Digital usando funções de Green diádicas. Será realizada também uma comparação com um modelo clássico e bastante utilizado na literatura, assim como uma análise com dados medidos de uma emissora A e B, ambas situadas na cidade de Belém.

Para substanciar a análise teórica desenvolvida nos capítulos anteriores, convém salientar que a componente  $\bar{E}_H^\phi(\bar{R})$  do campo, devido a um dipolo horizontal, será considerada, pois ela é a principal componente na propagação omnidirecional dos sistemas de TV digital; lembrando-se a utilização da coordenada cilíndrica nas equações obtidas.

Por fim, serão apresentados os resultados obtidos de trabalho realizado em parceria com a Profa. MsC. Cristiane Ruiz Gomes, mostrando a utilização das funções de Green diádicas como modelo de predição de campo elétrico na faixa de frequência UHF em diferentes condições climáticas.

### 7.1 – Considerações Preliminares

Devido ao método de resolução das integrais, a distância usada será dada em quilômetros, considerando extensões acima de 1km.

Os parâmetros utilizados para o meio de duas camadas são apresentados na tabela I abaixo.

**Tabela I** - Parâmetros usados para o meio de duas camadas.

Parâmetros	Valores
<i>Permissividade relativa do ar (<math>\epsilon_{1r}</math>)</i>	1,0
<i>Permissividade relativa do solo (<math>\epsilon_{2r}</math>)</i>	15
<i>Condutividade do solo (<math>\sigma_2</math>)</i>	10 e 90 mS/m

Os parâmetros utilizados para o meio de três camadas são apresentados na tabela II abaixo.

Tabela II - Parâmetros usados para o meio de três camadas

Parâmetros	Valores
<i>Permissividade relativa do ar (<math>\epsilon_{1r}</math>)</i>	1,0
<i>Permissividade relativa do meio 2 (<math>\epsilon_{2r}</math>)</i>	2,0
<i>Permissividade relativa do solo (<math>\epsilon_{3r}</math>)</i>	15
<i>Condutividade do meio 2 (<math>\sigma_2</math>)</i>	90 mS/m
<i>Condutividade do solo 2 (<math>\sigma_3</math>)</i>	10 mS/m
<i>Altura da camada 2 (H)</i>	30 m

Tais parâmetros foram obtidos de [35], sendo que para o meio de três camadas, considerou-se para o meio 2 valores intermediários de permissividade e condutividade, em relação ao ar e ao solo. A altura H utilizada é devido a um valor médio de casas e construções de uma cidade urbana.

Para determinar a aplicabilidade da fórmula para a predição de campo elétrico usando as funções de Green diádicas uma comparação do modelo foi feita com o modelo usado no Rec. ITU-R P.529-3. Conforme recomendado, as equações Okumura-Hata [30] são utilizadas como mencionado a seguir:

$$E = 69.82 - 6.16 \log f + 13.82 \log h_1 + a(h_2) - (44.9 - 6.55 \log h_1)(\log R)^b \quad (7.1)$$

onde:

$\underline{E}$ : intensidade de campo elétrico para 1 kW e.r.p.

$\underline{f}$ : frequência (MHz)

$\underline{h_1}$ : altura efetiva da antena da estação base na faixa de 30-200 m

$\underline{h_2}$ : altura da antena da estação móvel na faixa de 1-10 m

$\underline{R}$ : distância (km)

$$\underline{a(h_2)} = (1.1 \log f - 0.7)h_2 - (1.56 \log f - 0.8)$$

$$\underline{b} = 1 \text{ para } R \leq 20 \text{ km}$$

$$\underline{b} = 1 + (0.14 + 1.87 \times 10^{-4} f + 1.07 \times 10^{-3} h'_1)(\log \frac{R}{20}) \text{ para } 20 < R < 100 \text{ km}$$

no qual:

$$h'_1 = \frac{h_1}{\sqrt{1 + 7 \times 10^{-6} h_1^2}}$$

A equação (7.1) mostrada acima também é válida para frequências de até 2 GHz.

Os valores dos parâmetros dos dados medidos de uma emissora A e B situadas na cidade de Belém são mostrados na tabela III abaixo.

**Tabela III - Parâmetros usados das emissoras A e B.**

<b>Parâmetros</b>	<b>Valores</b>	<b>Valores</b>
	<b>Emissora A</b>	<b>Emissora B</b>
<i>Frequência (f)</i>	521,14 Mhz	515,14 Mhz
<i>Altura da antena transmissora</i>	114,58 m	125,30 m
<i>Potência da antena</i>	52,15 kW	61,79 kW
<i>Localização</i>	01°27'43''S/48°29'28''W	01°27'12''S/ 48°29'22''W

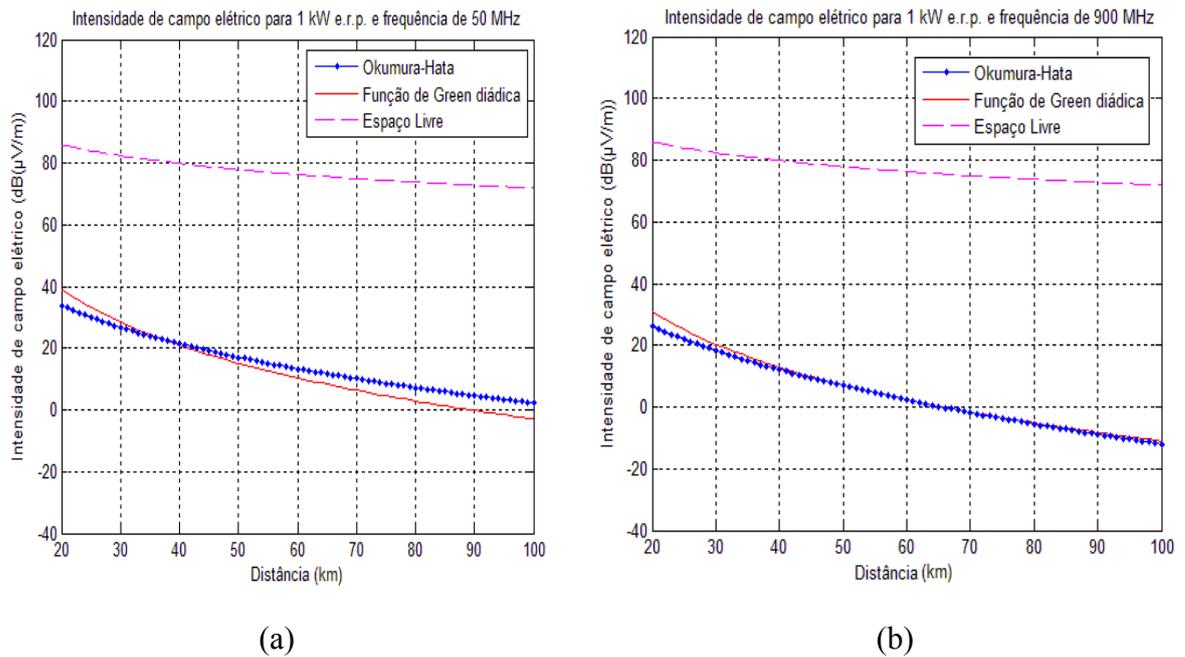
Para a obtenção dos dados da emissora A e B, foram medidos diversos pontos da intensidade do sinal (em  $dB\mu V$ ). Tais medidas tem um alcance de aproximadamente 20 km e não foi utilizado nenhum tratamento nos dados usados nos tópicos 7.2, 7.3 e 7.4.

Para uma melhor apresentação e explanação dos resultados, os tópicos seguintes considerarão os casos para duas e três camadas, respectivamente.

## **7.2 – Resultados para um Meio de Duas Camadas**

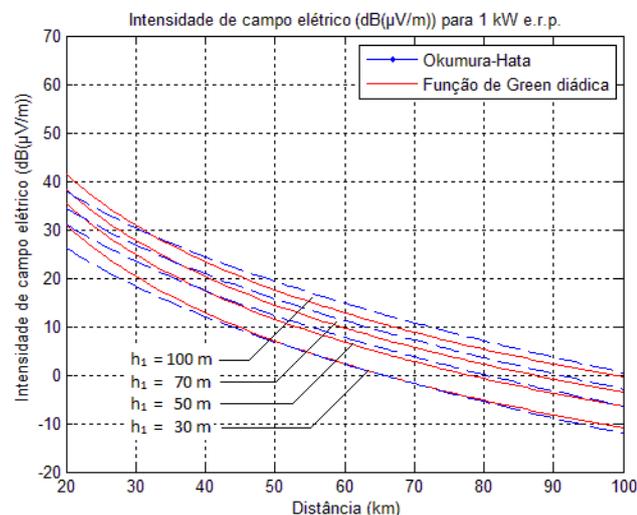
Para essa situação, um meio será considerado o ar e o outro será considerado um solo. Na Figura 7.1 (a) foi utilizada uma frequência de 50 MHz. Nesta frequência, há o serviço de Rádio amador e uma estação reservada para os militares [36]. Os gráficos têm um comportamento similar. A função diádica de Green tem um Erro RMS (*Root Mean Square – Erro Médio Quadrático*) de 3,47 dB em comparação com o modelo de Okumura-Hata. Figura 7.1 (a) também mostra o campo elétrico dado pela equação da propagação de onda no espaço livre.

A mesma avaliação foi utilizada na Figura 7.1 (b), mas com uma frequência de 900 MHz. Nesta faixa de frequências, existem serviços em Telecomunicações Móveis [36]. Os gráficos são quase idênticos, e mostram grande consistência na predição do campo elétrico. Há evidências para este fato, no valor de RMS de erro = 1,37 dB encontrado nesta situação.



**Figura 7.1** - Campo elétrico usando Função de Green diádicas versus Okumura-Hata para: (a) frequência de 50 MHz e (b) frequência de 900 MHz.

Usando diferentes alturas para a antena transmissora, foi feita uma avaliação da Função de Green diádica com o modelo de Okumura-Hata (utilizando uma frequência de 900 MHz). Na Figura 7.2 existe compatibilidade entre o modelo utilizando a FDG e o modelo de Okumura. No entanto, encontra-se uma pequena variação (entre 20 e 30 km), devido ao fato de que estas curvas particulares em Okumura-Hata foram obtidas a partir de medições feitas em áreas urbanas do Japão, no qual não se tem conhecimento das características desse meio, e também porque a função diádica de Green é um modelo para a predição um campo elétrico; além do fato do modelo de Okumura não considerar as características do meio.



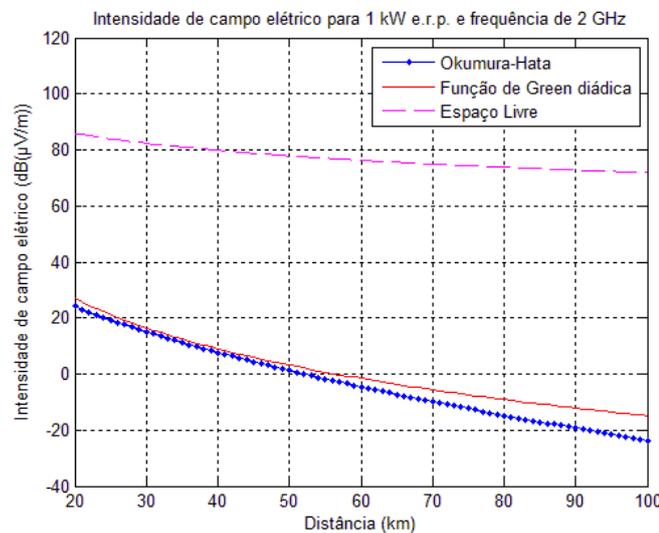
**Figura 7.2** - Campo elétrico usando Função de Green diádicas versus Okumura-Hata para uma frequência de 900 MHz, considerando várias alturas para antena transmissora.

Tabela IV mostra o Erro RMS entre o modelo usando a Função de Green diádica e o modelo usando o Rec. ITU-R P.529-3, para diferentes alturas para a antena de transmissão (Tx), conforme representado na Figura 7.2. Embora o Erro RMS pareça aumentar com a altura da antena de transmissão, este fato não ocorre; isto é devido aos fatores mencionados no parágrafo anterior (modelo de Okumura-Hata foram obtidos a partir de medições feitas no Japão e a FGD é um modelo para a predição de um campo elétrico).

**Tabela IV – Erro RMS para diferentes alturas de Tx.**

Erro RMS (dB)			
$h_1 = 30m$	$h_1 = 50m$	$h_1 = 70m$	$h_1 = 100m$
1,37	1,24	1,43	1,66

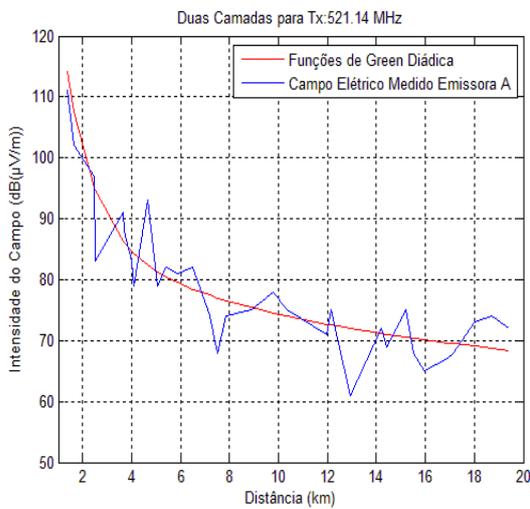
Como a equação (7.1) é válida para frequências de até 2 GHz, a seguir é mostrado um gráfico mostrando o comportamento da Função de Green diádicas e do modelo Okumura-Hata usando uma frequência de 2 GHz. Para essa faixa de frequência, pode-se perceber um comportamento aceitável da função de Green diádica para essa frequência, que apresentou um erro RMS de 4,46 dB.



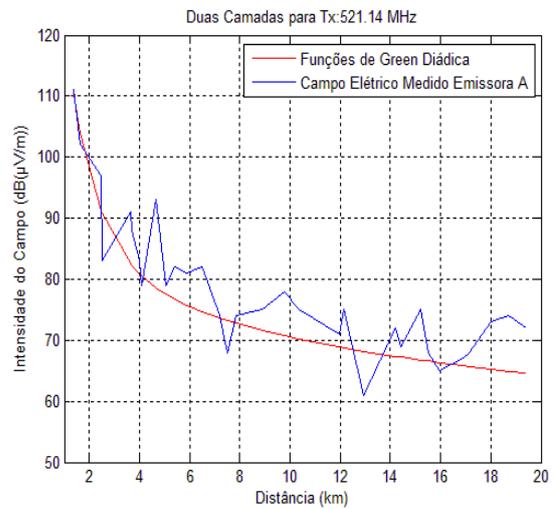
**Figura 7.3 - Campo elétrico usando Função de Green diádicas versus Okumura-Hata para uma frequência de 2 GHz.**

Fazendo-se uso dos dados medidos das emissoras A e B com as características mostradas na tabela III, usando-se uma permissividade relativa de 15 para o meio 2 (solo) e condutividades de 10 mS/m e 90 mS/m para o solo, respectivamente, obtém-se os gráficos mostrados abaixo. Nas Figuras 7.4 (a) e (b), dados da emissora A, apesar de não ser tão

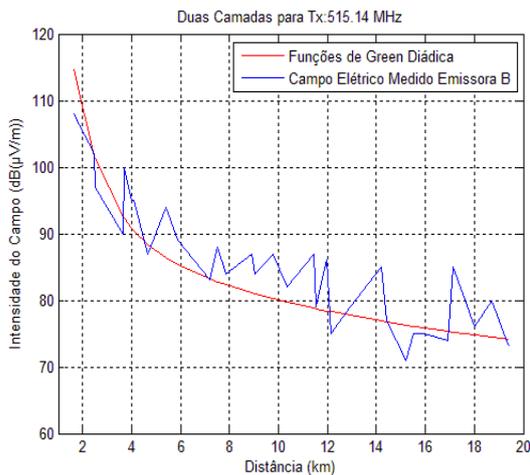
perceptível, há um erro RMS de 4,80 dB quando se tem um solo apresentando uma condutividade de 10 mS/m (a) e um erro RMS de 5,10 dB quando se usa uma condutividade de 90 mS/m (b). Já para a emissora B, Figuras 7.4 (c) e (d), um erro RMS de 4.77 dB é apresentado para uma condutividade de 10 mS/m (c) e um erro RMS de 4.60 dB para a condutividade de 90 mS/m (d). Tais fatos mostram o comportamento do modelo de predição de campo elétrico usando Função de Green diádicas, alterando-se as características do solo.



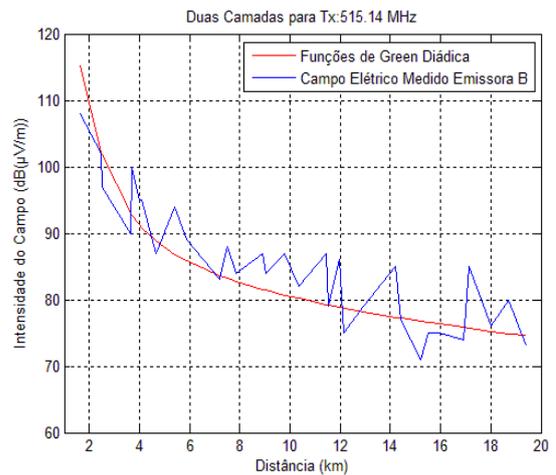
(a)



(b)



(c)

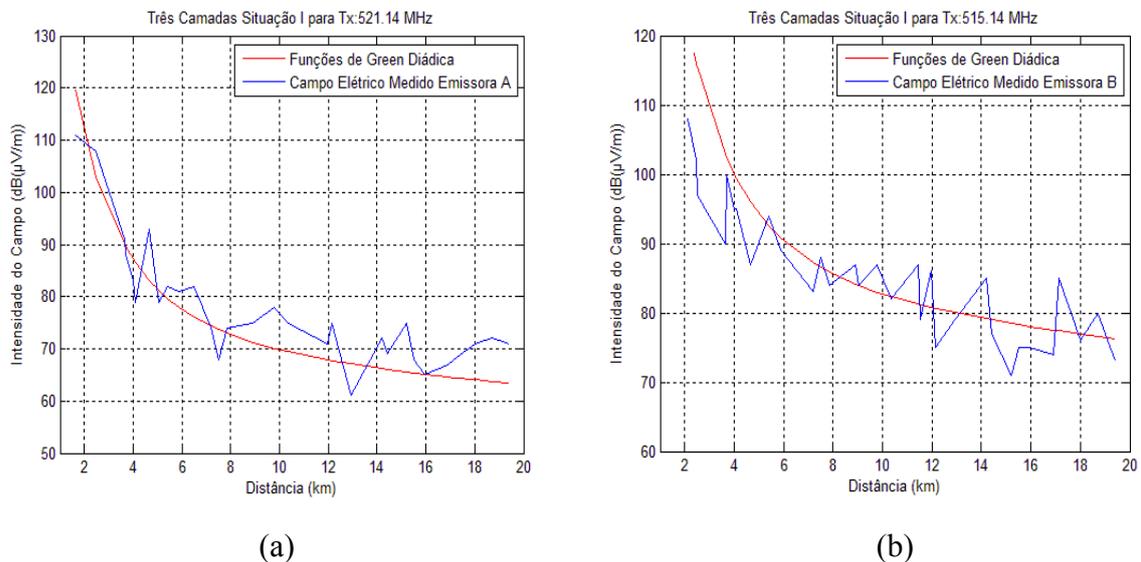


(d)

**Figura 7.4** - Campo elétrico usando Função de Green diádicas versus dados medidos para: (a) Emissora A com  $\sigma = 10 \text{ mS/m}$  (b) Emissora A com  $\sigma = 90 \text{ mS/m}$  (c) Emissora B com  $\sigma = 10 \text{ mS/m}$  e (d) Emissora B com  $\sigma = 90 \text{ mS/m}$ .

### 7.3 – Resultados para um Meio de Três Camadas Situação I

Para o caso de um meio com três camadas com o transmissor e receptor no meio 1, conforme mostrado na Figura 6.2, usou-se apenas os dados das emissoras A e B para a análise dos resultados, pois nesse caso o modelo de Okumura-Hata não é aplicável devido a antena receptora ter um alcance de 1 a 10 m. Nessa situação, usando-se os parâmetros da Tabela II e colocando um receptor numa altura de 45 m, devido à situação I (ver Figura 6.2), obtêm-se os seguintes resultados: para a emissora A houve um erro RMS de 5.47 dB e para a emissora B um erro RMS de 6.33 dB; tais situações podem ser visualizadas na figura 7.5 (a) e (b) abaixo. Tais resultados são satisfatórios, pois a altura da antena receptora usada no campo medido ser de 4 m e na simulação ser de 45 m.



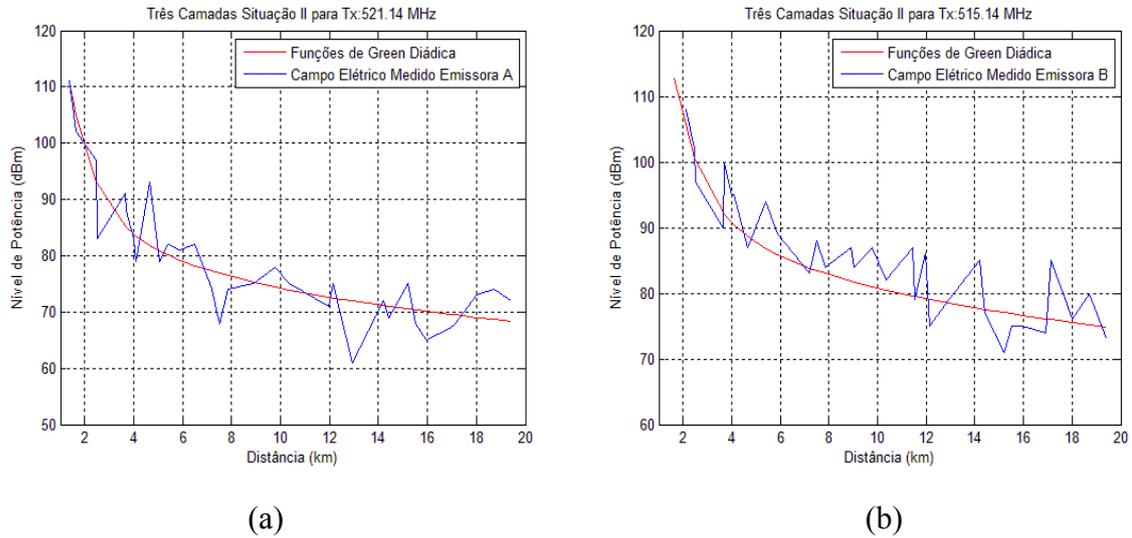
**Figura 7.5** - Campo elétrico para um meio de três camadas situação I usando Função de Green diádicas versus dados medidos para: (a) Emissora A e (b) Emissora B.

### 7.4 – Resultados para um Meio de Três Camadas Situação II

Para o caso de um meio com três camadas (sendo o meio 1 o ar, o meio 2 as construções de uma cidade e o meio 3 o solo) com o transmissor no meio 1 e receptor no meio 2, conforme mostrado na Figura 6.3, usou-se os dados das emissoras A e B e o modelo de Okumura-Hata para a análise dos resultados.

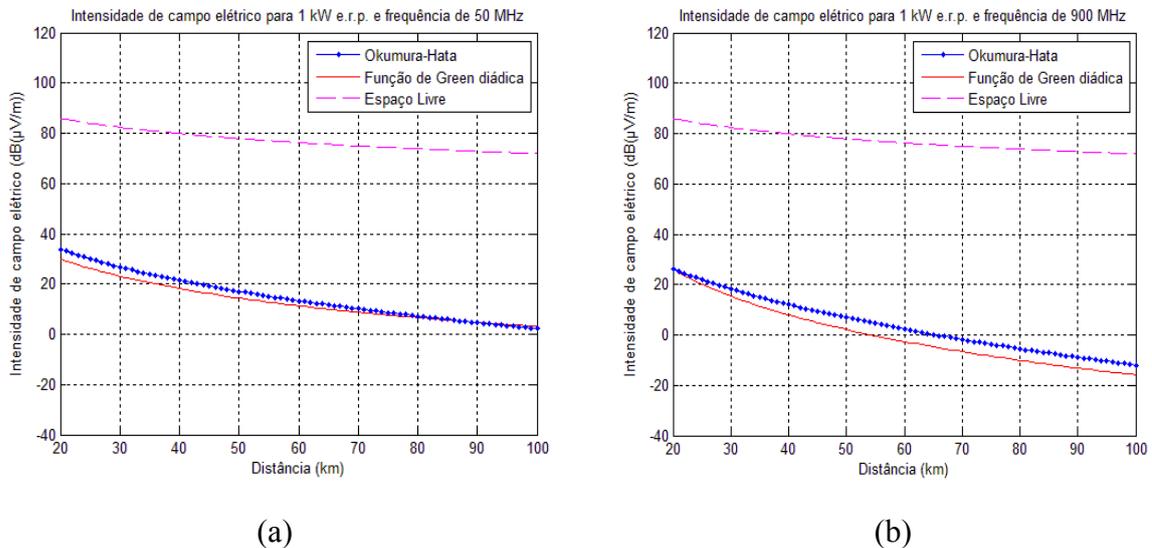
Fazendo-se uso dos parâmetros da Tabela II e colocando um receptor numa altura de 4 m, os resultados obtidos são: para a emissora A houve um erro RMS de 4.64 dB e para a

emissora B um erro RMS de 4.43 dB. Os gráficos mostrando tais situações são mostrados na figura 7.6 a seguir.



**Figura 7.6** - Campo elétrico para um meio de três camadas situação II usando Função de Green diádicas versus dados medidos para: (a) Emissora A e (b) Emissora B.

Para mostra a aplicabilidade da função de Green diádica para a predição de campo elétrico para tal situação, fez-se uso do modelo de Okumura-Hata. Analisou-se um caso para uma frequência de 50 MHz e outro para a frequência de 900 MHz. Para a frequência de 50 MHz ocorreu um erro RMS de 2,35 dB. Já para a frequência de 900 MHz o erro RMS obtido foi de 4,17 dB. Tais fatos podem ser visualizados na Figura 7.7 a seguir.



**Figura 7.7** - Campo elétrico para um meio de três camadas situação II usando Função de Green diádicas versus Okumura-Hata para: (a) frequência de 50MHz e (b) frequência de 900MHz.

Um questionamento que pode surgir depois de analisar as Figuras 7.1 e 7.7 é : “Se um meio com três camadas permite um cálculo mais preciso do campo elétrico, por que o erro RMS é maior na figura 7.7 em relação a Figura 7.1?”. Para explicar tal argumento, o modelo de Okumura-Hata foi feito com algumas medições em áreas urbanas no Japão considerando um meio de duas camadas, por isso ao se fazer uma comparação do modelo usando função de Green diádica e o de Okumura, observa-se uma maior aproximação dos dois modelos no caso de duas camadas ou invés de três camadas. Outra explicação possível é devido à falta das características precisas dos meios usado no modelo de Okumura-Hata, já que no modelo usando as funções de Green diádica é usados como parâmetros aproximados dos meios as características presente em [34].

## **7.5 - A utilização das funções de Green diádicas como modelo de predição de campo elétrico na faixa de frequência UHF em diferentes condições climáticas.**

Conforme dito anteriormente, neste tópico serão apresentados os resultados obtidos de trabalho realizado em parceria com a Profa. MsC. Cristiane Ruiz Gomes, mostrando a utilização das funções de Green diádicas como modelo de predição de campo elétrico na faixa de frequência UHF em diferentes condições climáticas.

Campanhas de medição foram realizadas na cidade de Belém-PA (1° 27' 18.62"S, 48° 30' 08.49"W), localizada na região amazônica brasileira. Dados de potência e de campo elétrico de duas estações de TV digital foram coletados. A frequência nominal do Tx1 transmissor é 521,14 MHz e de Tx2 é 515,14 MHz (ver Tabela III). As medições ocorreram em 84 pontos espalhados por 14 radiais. Os pontos selecionados estão distribuídos em uma área a uma distância mínima de 1 km e distância máxima de 43 km do Tx1. Devido à forma geométrica da cidade, algumas radiais têm mais pontos do que as outras; as radiais mais curtas têm apenas dois pontos. Nesta área, existem diferentes tipos de terrenos, tais como caminhos urbanos/suburbanos, caminhos de floresta tropical e caminhos de água doce. A Figura 7.8 mostra um mapa esquemático da cidade, estando Tx1 e Tx2 sobrepostos.

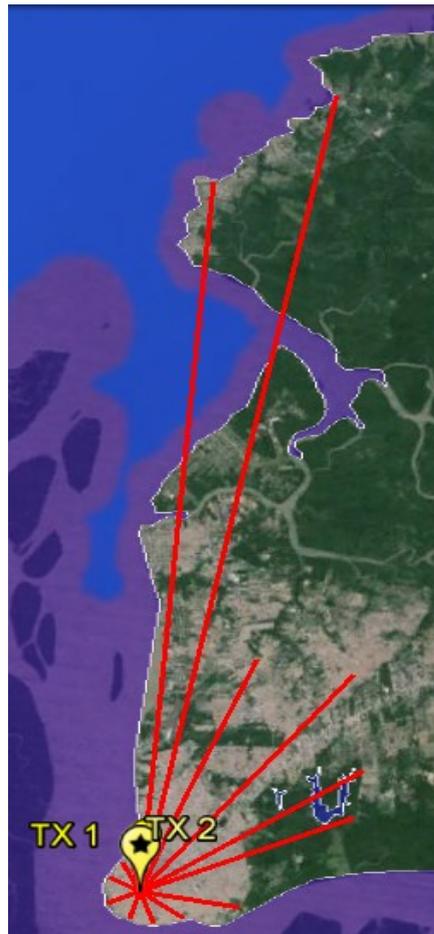
Houve duas campanhas de medição durante o ano de 2013, projetadas para adquirir dados de potência em duas estações amazônicas: a estação chuvosa e a estação seca. A primeira campanha de medição foi realizada durante os meses de março e abril, período descrito como o "Inverno Amazônico", com chuvas fortes e de longa duração. A segunda foi

em setembro durante o “Verão Amazônico”, quando havia longos períodos de seca. A Tabela V apresenta alguns dados climatológicos sobre Belém.

**Tabela V – Dados Climatológicos sobre Belém.**

Mês	Jan	Feb	Mar	Apr	May	Jun	Jul	Aug.	Sept	Oct	Nov	Dec
Precipitação (mm)	366,5	417,5	436,2	360	304,4	140,2	152,1	131,1	140,8	116,1	111,8	216,4
Horas de luz solar	136,4	98	102,3	123	186	225	254,2	257,3	228	229,4	204	179,8

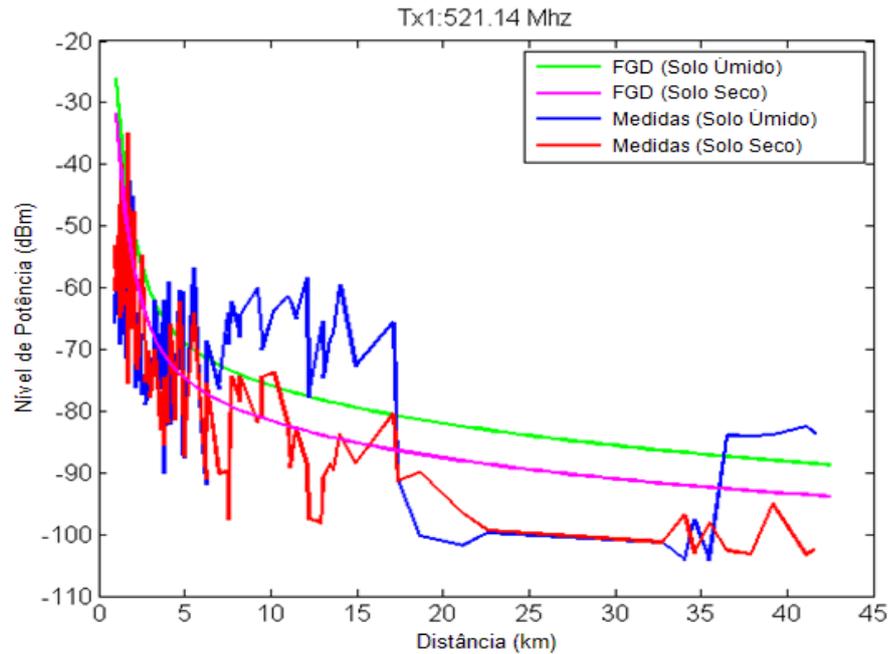
Fonte: Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (INPE).



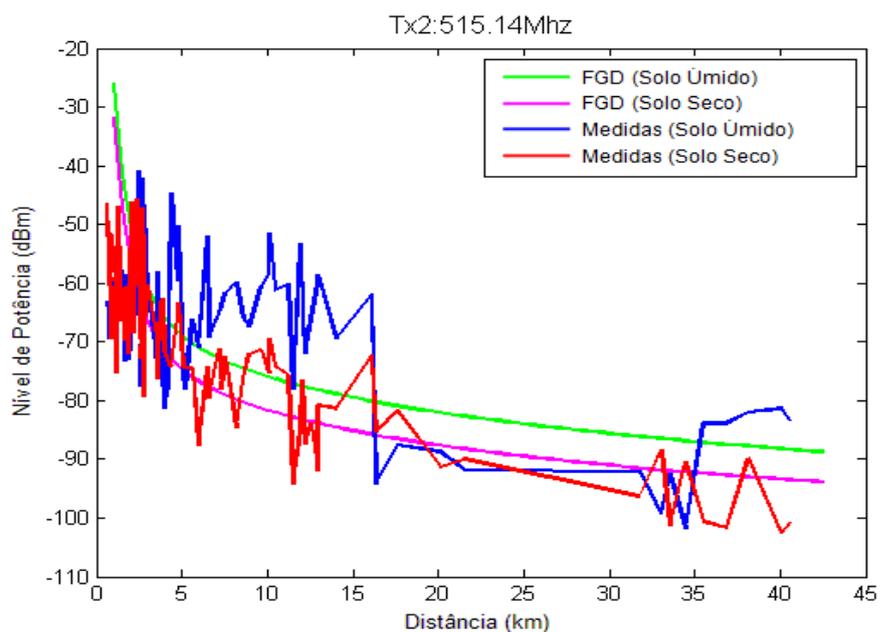
**Figura 7.8 -** Mapa esquemático de Belém - Radial (linhas vermelhas); transmissores (amarelo); água doce (região azul).

As Figuras 7.9 e 7.10 ilustram a comparação feita entre os dados medidos e a FGD das duas estações para os transmissores TX1 e TX2, respectivamente. Uma comparação de erros ou diferenças média é mostrada na Tabela VI. Os dados medidos mostram níveis mais elevados de energia em solo úmido nas duas frequências medidas. A FGD tem uma diferença média de 5-6 dB entre os dados de chão molhado e seco, menor do que o mostrado pelos dados de medição, que é de cerca de 10 dB. No entanto, o modelo proposto corresponde aos dados medidos, mostrando diferenças nos valores de potência recebida para as duas condições climáticas sob consideração.

Uma vez que existe um grande desvio padrão nos dados medidos (cerca de 13 dB), a análise dos erros RMS foi baseado nas tendências mostradas nos dados de medição. Os erros são RMS 3-7 dB, que é suficientemente pequeno para validar o bom desempenho do modelo usando a Função de Green diádica e para a faixa de UHF, bem como a previsão da potência recebida em condições climáticas diferentes.



**Figura 7.9** - Comparação entre os dados medidos e FGD para as duas estações do ano (solo úmido e solo seco) para Tx1.



**Figura 7.10** - Comparação entre os dados medidos e FGD para as duas estações do ano (solo úmido e solo seco) para Tx2.

**Tabela VI – Comparação de Erros e Diferença Média nos Dados.**

<b>Erros e Diferenças</b>	<b>Tx1</b>	<b>Tx2</b>
RMS (Solo Úmido) (dB)	4,95	6,73
RMS (Solo Seco) (dB)	7,15	3,90
Diferença Média dos dados Medidos (dB)	10,24	9,43
Diferença Média da FGD (dB)	5,51	5,59

## 7.6 – Considerações Finais

Conforme foi verificado nos tópicos anteriores, a função de Green diádica para a predição de campo elétrico mostrou-se satisfatória. Apesar de alguns erros RMS estarem por volta de 5 dB, ocorridos na comparação com os dados medidos, tais fatos se devem a: os dados medidos foram usados sem nenhum tratamento (exceto no caso de 7.6) e devido os parâmetros dos meios foram usados de maneira aproximada.

Percebeu-se também uma aproximação do modelo de Okumura-Hata e do modelo usando função de Green diádicas. Ao se fazer a comparação entre esses dois modelos, erros RMS da ordem menor de 10 dB, foram encontrados.

Com a utilização do modelo de três camadas situação I ou II, dependendo do problema a ser tratado, resultados melhores no cálculo do campo elétrico podem ser encontrados em comparação com o modelo de duas camadas. Isso se deve ao fato de se poder incluir mais características dos meios no modelo de três camadas, aumentando-se a verossimilhança de um caso a ser tratado ou estudado.

## CAPÍTULO 8 – CONCLUSÕES

Este trabalho propôs uma metodologia para a formulação matemática usando funções de Green diádicas para a predição de campo elétrico para TV digital. Esta ferramenta permite que algumas propriedades do meio em questão possam ser incorporadas. Determinou-se que as FGD permitem que cálculos possam ser feitos a partir do campo elétrico através de um sistema que está operando em frequências mais altas.

Soluções FGD foram obtidas a partir de sua expansão em autofunções para a predição de campo elétrico. Os campos eletromagnéticos foram computados em sua forma integral, dentro de condições de contorno apropriadas. As principais vantagens desta metodologia são as seguintes: i) a precisão da expansão em autofunções (garantido pela teoria espectral); ii) uma maior flexibilidade no que diz respeito às características do meio; iii) a possibilidade de incluir as fontes com uma corrente de distribuição arbitrária; iv) a sua aplicação em meios isotrópicos e / ou anisotrópicos.

Os resultados mostraram que o modelo é consistente. A avaliação do modelo encontrado em Rec. ITU-R P.529-3 (modelo de Okumura-Hata modificado) mostrou a aplicabilidade da fórmula para o campo elétrico proposto. Ao se fazer a comparação entre esses dois modelos, erros RMS da ordem menor de 5 dB, foram encontrados. Pode-se verificar ainda que o modelo proposto foi bem aceitável para uma faixa de frequência abaixo da faixa da TV digital, tal fato foi bastante explorados em trabalhos anteriores (ver Capítulo 1). Ao se usar uma faixa de frequência de TV Digital, o modelo proposto mostrou-se satisfatório.

O modelo aqui proposto permite também que uma análise possa ser conduzida da influência das condições climáticas sobre a transmissão de sinais eletromagnéticos na faixa de UHF, um fator que pode levar a um melhor planejamento de sistemas de TV digital.

As dificuldades encontradas foram no cálculo dos coeficientes que aparecem nas condições de contorno para os meios de duas e três camadas. Tal fato é devido ao seu extenso cálculo matemático a ser efetivado, além de se resolver um sistema amplo de equações que aparece.

Para trabalhos futuros, pretende-se aplicar o modelo proposto em diferentes cenários e bandas de frequência e utilizar *Redes Bayesianas* com as FGD para que se possa elaborar um método de cálculo para se obter valores precisos de parâmetros elétricos do solo ou de um meio.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] C. Phillips, D. Sicker, and D. Grunwald, "Bounding the error of path loss models," in *Proc. IEEE Symp. New Frontiers Dynam. Spectrum Access Netw. (DySPAN)*, May 2011, pp. 71–82.
- [2] W. W. Hansen, "A new Type of Expansion in radiation problems," *Phys. Review*, vol. 47, pp. 139-193, 1953.
- [3] P. Ding, C. W. Qiu, S. Zouhdi, S. P. Yeo, "Rigorous derivation and fast solution of spatial-domain Green's functions for uniaxial anisotropic multilayers using modified fast Hankel transform method," *IEEE Trans Microw Theory Techn.*, vol. 60, no. 2, pp. 205-217, Feb. 2012.
- [4] Y. P. Chen, L. Jiang, Z. G. Qian, W. C. Chew, "An augmented electric field integral equation for layered medium Green's function," *IEEE Trans Antennas Propag.*, vol. 59, no. 3, pp. 960-968, Mar. 2011.
- [5] A. Fallahi, B. Oswald, "On the computation of electromagnetic dyadic Green's function in spherically multilayered media," in *IEEE Trans Microw Theory Techn.*, vol. 59, no. 6, pp. 1433-1440, Jun. 2011.
- [6] C. T. Tai, *Dyadic Green's Functions in Electromagnetic Theory*. Scranton: Intext Educational, 1971.
- [7] G. P. S. Cavalcante, D. A. Rogers, A. J. Giarola, "Analysis of electromagnetic wave propagation in multilayered media using dyadic Green's functions," *Radio Sci.*, vol. 17, no. 3, pp. 503-508, May-Jun, 1982.
- [8] T. Tamir and L. B. Felsen, "On lateral waves in slab configurations and their relation to other wave types," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. AP-13, p. 410, 1965.
- [9] T. Tamir, "On radio-wave propagation in forest environments," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. AP-15, pp. 806-817, Nov. 1967.
- [10] J. R. Wait, "Influence of a subsurface insulating layer on ground wave propagation," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. AP-14, pp. 755-759, June 1966.
- [11] D. L. Sachs and P. J. Wyatt, "A conducting slab model for electromagnetic propagation within a jungle medium," *Radio Sci.*, vol. 3, pp. 125, 1968.
- [12] D. Dence and T. Tamir, "Radio loss of lateral waves in forest environments," *Radio Sci.*, vol. 4, p. 307, 1969.
- [13] G. N. Tsandoulas, "Excitation of a ground dielectric slab by a horizontal dipole," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. AP-17, pp. 156-161, Mar. 1969.
- [14] T. Tamir, "Radio waves propagation along mixed paths in forest environments," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. AP-25, pp. 471-477, July 1977.
- [15] G. P. S. Cavalcante and A. J. Giarola, "Optimization of radio communication in media with three layers," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. AP-31, pp. 141-145, Jan. 1983.
- [16] L. W. Li and P. N. Jiao, "Calculation of path loss in forest-communication," *J. China Inst. Commun.*, vol. 8(6), pp. 20-25, 1987.
- [17] G. P. S. Cavalcante, D. A. Rogers, and A. J. Giardola, "Radio loss in forests using a model with four layered media," *Radio Sci.*, vol. 18, pp. 691-695, 1983.
- [18] H. X. Lian, "UHF lateral wave loss in forests modeled by four-layered media," *Acta Electron. Sinica*, vol. 14, no. 5, pp. 12-20, 1986.
- [19] L. W. Li and P. N. Jiao, "Solution of the electromagnetic field in a forest model with four layered media," *Chinese J. Radio Sci.*, pp. 10-25, 1986 (and 1989 and 1990, respectively).
- [20] S. S. Seker and A. Schneider, "Stochastic model for pulsed radio transmission through stratified forests," *Proc. Inst. Elect. Eng.*, vol. 134, pt. H, pp. 361-368, 1987.

- [21] S. S. Seker, "Radio pulse transmission along mixed paths in a stratified forest," Proc. Inst. Elect. Eng., vol. 136, pt. H, pp. 13-18, 1989.
- [22] L. W. Li, "Wave propagation and communication within random inhomogeneous media," Ph.D. dissertation, Inst. Electron. Acad. Sinica, Beijing, China, with China Res. Inst. Radiowave Propagat., Xinxiang, Henan, 453003, China, Oct. 1990.
- [23] Da Han Liao and Kamal Sarabandi, "Near-Earth Wave Propagation Characteristics of Electric Dipole in Presence of Vegetation or Snow Layer", IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. 53, no. 11, November 2005.
- [24] L. Li, et al. "Wave mode and path characteristics in a four-layered anisotropic forest environment", in IEEE Trans. Antennas Propag., vol. 52, no. 9, pp. 2445-2455, Sept. 2004.
- [25] I. S Koh, Y. Lee, "Complete closed-form expression of dyadic Green's function and its far- and near-field approximations for an impedance half-plane," IEEE Trans. Antennas Propag., vol. 60, no. 8, pp.3794-3801, Aug. 2012.
- [26] A. Y. Nikitin, F. J. Garcia-Vidal, L. Martin-Moreno, "Analytical expressions for the electromagnetic dyadic Green's function in graphene and thin layers," IEEE J. Sel. Topics Quantum Electron., vol. 19, no. 3, May/June. 2013.
- [27] M. Zhou, S. B. Sørensen, E. Jørgensen, P. Meincke, O. S. Kim, O. Breinbjerg, "An accurate technique for calculation of radiation from printed reflectarrays," IEEE Antennas Wireless Propag. Lett., vol. 10, pp. 1081-1084, 2011.
- [28] M. N. M. Yasin, S. K. Khamas, "Measurements and analysis of a probe-fed circularly polarized loop antenna printed on a layered dielectric sphere," IEEE Trans. Antennas Propag., vol. 60, no. 4, pp. 2096-2100, Apr. 2012.
- [29] L. Li, et al. "Cylindrical vector eigenfunction expansion of Green dyadics for multilayered anisotropic media and its application to four-layered forest," IEEE Trans. Antennas Propag., vol. 52, no.2, pp. 466-477, Feb. 2004.
- [30] Prediction Methods for the Terrestrial Land Mobile Service in the VHF and UHF Bands. RECOMMENDATION ITU-R P.529-3.
- [31] G. P. S. Cavalcante, "Propagação de Ondas Eletromagnéticas em Meios com Múltiplas Camadas usando Funções de Green Diádicas e sua Aplicação no Modelamento de Florestas". Tese de Doutorado, Universidade Federal de Campinas, Janeiro de 1982.
- [32] P.M. Morse e H. Feshback, "Methods of Theoretical Physics", Part I, pp. 52-54, Part II, pp. 1759-1901, N.Y.: MacGraw-Hill, 1953.
- [33] J.A. Stratton, "Electromagnetic Theory", pp. 392-399, N.Y.: MacGraw-Hill, 1941.
- [34] W. A. Johnson, A. Q. Howard e D. G. Dudley, "On the irrotational component of the electric Green's dyadic", Radio Science vol. 14, pp. 961-967, 1979.
- [35] G. P. S. Cavalcante, M. A. R. Sanches, and R. A. N. Oliveira, "Mobile Radio Propagation along Mixed Paths in Forest Environment", Proceedings of IMC'99, SBMO/IEEE, 1999, pp. 320-324.
- [36] Alocação, Destino e Distribuição de Planejamento de bandas de Frequências no Brasil. Disponível em: <http://www.anatel.gov.br/>, acessado em 2014/01/03.