



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ  
INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM GEOFÍSICA

TESE DE DOUTORADO

MODELAGEM E IMAGEAMENTO 2.5D NO DOMÍNIO DO  
TEMPO ATRAVÉS DE DIFERENÇAS FINITAS

FRANCISCO DE ASSIS SILVA NETO

BELÉM

2010

FRANCISCO DE ASSIS SILVA NETO

**MODELAGEM E IMAGEAMENTO 2.5D NO DOMÍNIO DO  
TEMPO ATRAVÉS DE DIFERENÇAS FINITAS**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Geofísica do Instituto de Geociências da Universidade Federal do Pará, para a obtenção do título de Doutor em Geofísica.

Área de Concentração: Métodos Sísmicos

Orientador: Jessé Carvalho Costa

Co-orientador: Maria Amélia Novais  
Schleicher

BELÉM

2010

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação(CIP)  
Biblioteca Geólogo Raimundo Montenegro Garcia de Montalvão

---

S586m Silva Neto, Francisco de Assis

Modelagem e imageamento 2.5D no domínio do tempo através de diferenças finitas / Francisco de Assis Silva Neto; Orientador: Jessé Carvalho Costa; Coorientador: Maria Amélia Novais Schleicher – 2010

86 f. : il.

Tese (Doutorado em Geofísica) – Programa de Pós-Graduação em Geofísica, Instituto de Geociências, Universidade Federal do Pará, Belém, 2010.

1. Geofísica aplicada. 2. Diferenças finitas. 3. Migração reversa. 4. Condições de imagem. 5. Anisotropia. I. Universidade Federal do Pará II. Costa, Jessé Carvalho, orient. III. Schleicher, Maria Amélia Novais, coorient. IV. Título.

CDD 20° ed.: 550

---

# MODELAGEM E IMAGEAMENTO 2.5D NO DOMÍNIO DO TEMPO ATRAVÉS DE DIFERENÇAS FINITAS

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Geofísica do Instituto de Geociências da Universidade Federal do Pará, para a obtenção do título de Doutor em Geofísica.

Data da aprovação: \_\_\_ / \_\_\_ / \_\_\_\_

**BANCA EXAMINADORA:**

---

Prof. Jessé Carvalho Costa  
Doutor em Geofísica  
Universidade Federal do Pará

---

Prof. Reynam da Cruz Pestana  
Doutor em Geofísica  
Universidade Federal da Bahia

---

Prof. Joerg Dietrich Wilhelm Schleicher  
Doutor em Geofísica  
Universidade Estadual de Campinas

---

Prof. Lourenildo Willliame Barbosa Leite  
Doutor em Geofísica  
Universidade Federal do Pará

---

Prof. Walter Eugênio de Medeiros  
Doutor em Geofísica.  
Universidade Federal do Rio Grande do Norte

*Ao meu querido avô Francisco de Assis, que pelos  
desígnios de Deus não pode compartilhar em vida  
mais esta grandiosa vitória.*

## AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus pelas diversas oportunidades oferecidas, mas nem sempre bem aproveitadas.

Agradeço à minha mãe Jovelina que com muito amor e renúncia, forneceu-me os meios sem os quais eu não chegaria até aqui.

Aos meus avós Francisco (*In memoriam*) e Jovani que me tiveram como filho mais novo, dedicando todo seu amor e carinho.

Agradeço à minha tia Francisca pela dedicação e por todo amor.

Agradeço à minha namorada Elita Maria, por seu amor e pela compreensão por todas as ausências.

Agradeço ao Prof. Jessé Carvalho Costa meu orientador e grande incentivador, pela confiança e principalmente pela paciência ao longo desses quase dez anos de convivência.

Agradeço a minha grande amiga Benildes Lopes, secretária do Programa de Pós-graduação em Geofísica, que sempre tornou minha vida acadêmica menos complexa, mesmo eu fazendo sempre o contrário.

Agradeço aos professores membros da banca, por suas críticas e sugestões que ajudaram a transformar um simples texto em uma tese.

Agradeço à Secretaria de Educação do Estado do Pará - SEDUC, pela minha liberação em tempo integral das minhas funções.

Agradeço ao CNPq , FAPESP , CAPES e PETROBRAS , e aos financiadores do Consórcio WIT ( Wave inversion Technology ) pelo apoio financeiro.

Agradeço a Pascal Podvin e Gilles Lambaré pelo conjunto de dados Marmousoft.

Agradeço ao NCE/UFRJ pela liberação do cluster Netuno.

Meus agradecimentos especiais a todos os amigos e amigas que cultivei ao longo desses quase dez anos de Geofísica, e que ajudaram a tonar esta jornada muito mais suave.

## RESUMO

A modelagem 2.5D consiste em simular a propagação do campo de ondas em 3D em meios com simetria de translação em uma direção. Nesta tese esta abordagem é formulada para meios elásticos e anisotrópicos com classe de simetria arbitrária e a geometria de aquisição não precisa coincidir com um plano de simetria do meio. A migração por reversão no tempo do campo de ondas é formulada e implementada através de diferenças finitas 2.5D. Para reduzir os efeitos de retro-espalhamento e melhorar a recuperação da amplitude dos eventos migrados, propomos uma nova condição de imagem para migração reversa no tempo baseada na análise assintótica da condição de imagem clássica por correlação cruzada. Experimentos numéricos indicam que a migração reversa no tempo 2.5D com a nova condição de imagem proposta, melhora a resolução da imagem em relação à migração reversa no tempo 2D e reduz acentuadamente os ruídos causados por retro-espalhamento.

Palavras-chave :

Geofísica aplicada. Diferenças finitas. Migração reversa. Condições de imagem. Anisotropia.

## ABSTRACT

This thesis discuss modeling and imaging of seismic wavefields in 2.5D using finite-differences to solve numerically the wave equation. Modeling in 2.5D is extended to anisotropic elastic media with an arbitrary class of symmetry. The sources of the wavefield are generalized to simulate of explosive, dipole and double-couple distributions. The acquisition geometry is not required to coincide with a symmetry plane. Reverse time migration in 2.5D is implemented in conjunction with a new imaging condition based on the asymptotic analysis of the classical correlation imaging condition. The new imaging condition is designed to improve the amplitudes in reverse time migration (RTM) images, and to reduce back-scattering artifacts. Numerical experiments indicate that 2.5D RTM improves the resolution of the migrated images when compared to its 2D counterpart, and that the proposed imaging condition was effective improving the amplitudes and reducing back-scattering artifacts.

Keywords:

Applied Geophysics. Finite difference. Reverse migration. Imaging condition. Anisotropy

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 2.1	A imagem superior representa o modelo de densidade. A imagem central o modelo de velocidade da onda P, e a imagem inferior o modelo de velocidade da onda S. Seção retirada do modelo de sal da SEG/EAGE. . . . .	23
Figura 2.2	Seção sísmica fonte-comum da componente vertical do campo de velocidade, obtida a partir de uma seção do modelo de sal da SEG/EAGE, mostrado na Figura 2.1. (a) Resultado da modelagem 2.5D. (b) Resultado da modelagem 2D. Os efeitos mais visíveis são decaimento mais lento das amplitudes dos eventos e maior largura do pulso sísmico na modelagem 2D. . . . .	24
Figura 2.3	Instantâneos da propagação da componente vertical do campo de velocidade após 0,5 s obtido para o modelo VTI: (a) 2.5D e em (b) 2D. A falta de simetria dos eventos em torno da fonte se decorre da polarização da fonte não estar no plano da figura. . . . .	25
Figura 2.4	Instantâneo da componente vertical da velocidade após 0,3 s obtido no meio TTI homogêneo. Os resultados são respectivamente (a) 2.5D e (b) 2D. Nota-se a compressão do pulso na frente de onda $qS$ em 2.5D em relação à ao pulso correspondente na modelagem 2D. . . . .	26
Figura 2.5	Instantâneo da componente horizontal do campo de velocidade após 0,6 s de propagação sobre o modelo TTI homogêneo, os resultados são respectivamente (a) para 2.5D e (b) para 2D. Nota-se a redução da amplitude e compressão pulso para onda $qS$ na modelagem 2.5D quando comparada com o evento correspondente na modelagem 2D. . . . .	27
Figura 2.6	Instantâneo da propagação da componente vertical da velocidade após 0,6 s, onde: (a) 2.5D, e (b) 2D. Não ocorre dispersão numérica ou instabilidade associadas às ondas Rayleigh na superfície livre do modelo. . . . .	31
Figura 2.7	Modelo anisotrópico heterogêneo. O modelo apresenta uma camada isotrópica na parte superior, na parte inferior uma camada anisotrópica contendo uma camada isotrópica em seu interior . . . . .	32

Figura 2.8	Instantâneos da componente vertical do campo de velocidade obtido após 0,3 s de propagação no modelo heterogêneo e anisotrópico da Figura 2.7, (a) 2.5D e (b) 2D. Destaca-se na modelagem 2.5D a maior perda de amplitude por espalhamento geométrico, a fase simétrica e a forte amplitude das ondas Rayleigh. . . . .	32
Figura 2.9	Sismograma da componente vertical do campo de velocidade no modelo heterogêneo anisotrópico da Figura 2.7, resultados (a) 2.5D e (b) 2D. . . . .	33
Figura 2.10	Densidade, velocidade da onda P e velocidade da onda S, para um modelo com um domo de sal. . . . .	34
Figura 2.11	Campo de tensão para o modelo com domo de sal mostrado na Figura 2.10, onde os resultados são respectivamente (a) 2.5D e (b) 3D . . . . .	35
Figura 2.12	Comparação do traço obtido pela modelagem elástica 2.5D (linha tracejada) e o correspondente traço 3D (linha contínua). Destaca-se nessa figura a coincidência entre os traços gerados através da modelagem 2.5D e 3D . . . . .	36
Figura 2.13	Instantâneos da componente vertical do campo de velocidade após 0,5 s de propagação no modelo com um semi-espaço anisotrópico. . . . .	36
Figura 2.14	Sismograma da componente vertical do campo de velocidade para o modelo com um semi-espaço anisotrópico. . . . .	37
Figura 2.15	Sismograma da diferença relativa da componente vertical da velocidade para as modelagens 2.5D e 3D. O erro percentual foi calculado relativo a máxima amplitude da modelagem 3D. . . . .	37
Figura 3.1	Representação de um refletor plano inclinado separando duas camadas homogêneas. . . . .	40
Figura 3.2	Frentes de onda para o campo incidente e o campo retropropagado e os correspondentes vetores de Poynting associados, $\mathbf{S}_s$ e $\mathbf{S}_g$ , em um ponto imagem. O ângulo $\theta$ corresponde a metade do ângulo de espalhamento. O ângulo $\alpha$ entre a soma dos vetores de Poynting e direção vertical é igual ao ângulo de mergulho de um potencial refletor no ponto imagem. . . . .	42
Figura 3.3	Geometria do primeiro exemplo numérico, mostrando a configuração de fontes e receptores, a interface inclinada entre duas camadas homogêneas e o ponto difrator em profundidade. . . . .	44
Figura 3.4	Seção tiro comum obtida após silenciamento da onda direta, correspondente ao modelo apresentado na Figura 3.3 . . . . .	45

Figura 3.5	Migração RTM de uma única seção tiro comum com diferentes condições de imagem: (a) Correlação ; (b) Correlação com compensação de iluminação; (c) Ponderação pelo ângulo de reflexão; (d) Ponderação pelo ângulo de reflexão com compensação de iluminação; (e) Correção de obliquidade; (f) Correção de obliquidade e compensação de iluminação; (g) Ponderação pelo ângulo de reflexão adicionada à correção de obliquidade; (h) Ponderação pelo ângulo de reflexão com correção de obliquidade e compensação de iluminação. . . . .	47
Figura 3.6	Migração RTM de múltiplas seções tiro comum, com diferentes condições de imagem: (a) Correlação ; (b) Correlação-cruzada com compensação de iluminação; (c) ponderação pelo ângulo de reflexão; (d) ponderação pelo ângulo de reflexão com compensação de iluminação; (e) Correção de obliquidade; (f) Correção de obliquidade com compensação de iluminação; (g) Ponderação pelo ângulo de reflexão com correção de obliquidade; (h) Ponderação pelo ângulo de reflexão com correção de obliquidade e compensação de iluminação. . . .	48
Figura 3.7	(a) Modelo de velocidade compressional Marmousi; (b) Modelo de velocidade compressional suavizado para migração RTM. . . . .	49
Figura 3.8	Resultados da RTM sobre o conjunto de dados Marmousi com diferentes condições de imagem: (a) correlação ; (b) correlação com compensação de iluminação; . . . . .	50
Figura 3.9	(a) Ponderação pelo ângulo de reflexão com compensação de iluminação;	51
Figura 3.10	(a) Correção de obliquidade com compensação de iluminação; (b) Ponderação pelo ângulo de reflexão adicionado à correção de obliquidade e compensação de iluminação. . . . .	52
Figura 4.1	(a) Modelo Marmousi; (b) Modelo Marmousoft utilizado para gerar os dados sintéticos para RTM 2D e 2.5D; (c) Modelo de refletividade usado para modelagem raio-Born. . . . .	58
Figura 4.2	Comparação entre as seções migradas com a condição de imagem correlação: (a) 2D; (b) 2.5D. A forte variação de amplitude com a profundidade na imagem 2.5D decorre da diferença no espalhamento geométrico entre a propagação de ondas em 2D e 2.5D. . . . .	61

Figura 4.3	Comparação entre as seções migradas com condição de imagem correlação com compensação de iluminação: (a) 2D; (b) 2.5D. Observa-se a melhor equalização da amplitude dos eventos com a profundidade entre as imagens. Nota-se também que variação da amplitude na migração 2.5D está melhor correlacionada com a refletividade do modelo. . . . .	62
Figura 4.4	Comparação entre as seções migradas pelas condições de imagem com ponderação pelo ângulo de reflexão e compensação de iluminação 2D (a), e ponderação pelo ângulo de reflexão 2.5D(b). Na imagem 2.5D nota-se uma redução do ruído coerente ao longo da resposta ao impulso operador de migração quando compara-se com a imagem correspondente na Figura 4.3b. . .	63
Figura 4.5	Comparação entre as seções migradas pelas condições de imagem com ponderação pelo ângulo de reflexão adicionado a correção de obliquidade com compensação de iluminação 2D (a), e a ponderação pelo ângulo de reflexão adicionado a correção de obliquidade com compensação de iluminação 2.5D (b). Nota-se a atenuação de ruído de baixa frequência, associado ao efeito de retro-espalhamento tanto da imagem 2D como na imagem 2.5D. . . . .	64
Figura 4.6	Espectro amplitude correspondente as Figuras 4.3a, RTM 2D, e 4.3b, RTM 2.5D. Observa-se um aumento da amplitude do espectro associado a imagem migrada em 2.5D no intervalo de 10 ciclos/km a 30 ciclos/km quando comparado ao espectro da imagem em 2D. . . . .	65

# SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO . . . . .	14
2	MODELAGEM POR DIFERENÇAS FINITAS EM MEIOS 2.5D ELÁSTICOS E ANISOTRÓPICOS . . . . .	16
2.1	METODOLOGIA . . . . .	16
2.1.1	Meio invariante por translação . . . . .	17
2.1.2	Modelagem 2.5D . . . . .	18
2.1.3	Amostragem do número de onda . . . . .	19
2.2	EXPERIMENTOS NUMÉRICOS . . . . .	21
2.2.1	Aspectos computacionais . . . . .	22
2.2.2	Modelo de sal SEG/EAGE isotrópico . . . . .	22
2.2.3	Meio VTI homogêneo sobre um semi-espaço . . . . .	24
2.2.4	Modelo TTI homogêneo . . . . .	26
2.2.5	Modelo anisotrópico heterogêneo . . . . .	28
2.2.6	Modelo com domo de sal . . . . .	28
2.2.7	Semi-espaço Anisotrópico . . . . .	29
3	CORREÇÃO DE OBLIQUIDADE NA MIGRAÇÃO REVERSA NO TEMPO . . . . .	38
3.1	METODOLOGIA . . . . .	39

3.1.1	Análise assintótica da condição de imagem na migração reversa no tempo . . . . .	39
3.1.2	Condição de imagem usando vetor de Poynting . . . . .	40
3.1.3	Fator de compensação da obliquidade . . . . .	42
3.1.4	Compensação de iluminação . . . . .	43
3.2	IMPLEMENTAÇÃO . . . . .	43
4	MIGRAÇÃO REVERSA NO TEMPO EM 2.5D . . . . .	53
4.1	METODOLOGIA . . . . .	54
4.2	ASPECTOS COMPUTACIONAIS . . . . .	55
4.3	EXEMPLOS NUMÉRICOS . . . . .	57
5	CONCLUSÕES . . . . .	66
	REFERÊNCIAS . . . . .	69
	APÊNDICE A – CAMADAS ABSORVENTES COM CASAMENTO PERFEITO DE IMPEDÂNCIA PML (PERFECTLY MATCHED LAYERS) . . . . .	74
	APÊNDICE B – DIFERENÇAS FINITAS 2.5D: RELAÇÃO DE DISPERSÃO E ESTABILIDADE . . . . .	77
	APÊNDICE C – ANÁLISE DE FASE ESTACIONÁRIA DA MIGRAÇÃO REVERSA NO TEMPO . . . . .	81

# 1 INTRODUÇÃO

A modelagem da propagação de campos de onda em meios acústicos e elásticos em meios 3D é computacionalmente dispendiosa, particularmente se algoritmos de elementos finitos ou diferenças finitas são aplicados na simulação. Como alternativa a esta situação, modelos 2D são utilizados para simular a propagação de ondas em levantamentos sísmicos, pressupondo-se que o meio é invariante por translação perpendicularmente à direção da linha de aquisição, o que é um conceito fraco.

A modelagem da propagação de ondas em 2D difere da modelagem 3D particularmente na representação das fontes sísmicas. Ao pressupor fontes do tipo linha, a modelagem 2D não honra o espalhamento geométrico e a fase do campo de onda em relação à modelagem 3D. Em aplicações onde a amplitude e a fase do campo de onda são importantes, por exemplo, em estudos de iluminação e no imageamento sísmico com preservação de amplitude, simular a propagação do campo de ondas em 3D é desejável.

Neste trabalho estudamos a modelagem e o imageamento de dados sísmicos por diferenças finitas em 2.5D. O pressuposto de invariância por translação para as propriedades do meio permanece, mas a simulação do campo de ondas modela fontes pontuais. O espalhamento geométrico e a fase do campo de ondas são modelados corretamente em 3D. O custo computacional da modelagem 2.5D é reduzido se comparado a modelagem 3D particularmente em relação à quantidade de memória.

A modelagem da propagação de ondas sísmicas em 2.5D é útil para simular aquisições sísmicas ao longo de linhas sísmicas orientadas arbitrariamente em relação a direção de mergulho (LINER, 1991). Esta abordagem é atraente em situações em que a modelagem 3D é prejudicada pela falta de recursos computacionais adequados, e/ou quando somente estão disponíveis informações em 2D do meio em questão. Por exemplo, em tomografia sísmica inter-poços (WILLIAMSON; PRATT, 1995).

A imageamento sísmico através da migração reversa no tempo RTM (do Inglês *Reverse Time Migration*) em 2.5D permite recuperar amplitudes proporcionais à refletividade em sub-superfície, e aumentar a resolução sísmica quando comparada à RTM em 2D. A RTM 2.5D efetua a correção do espalhamento geométrico 3D, e com condições de imagem adequadas, permite compensar a falta de iluminação uniforme e corrigir o fator de obliquidade. Esta tese apresenta uma nova condição de imagem para RTM que permite melhorar a compensação de amplitude, e reduzir os efeitos da geometria de aquisição no resultado da migração por reversão no tempo. Experimentos numéricos em dados sintéticos indicam que a RTM 2.5D

com a nova condição de imagem melhora a resolução sísmica, melhora a compensação de amplitude e reduz significativamente os efeitos de retro-espalhamento na imagem migrada.

No segundo capítulo apresentamos a modelagem 2.5D em meios elásticos e anisotrópicos, esta abordagem se justifica devido ao alto custo computacional da modelagem da propagação de ondas em meios 3D, mesmo em modelos de reduzidas dimensões. A modelagem 2.5D pode ser aplicada a qualquer classe de anisotropia. O plano em que se efetua a propagação não precisa ser um plano de simetria especular e as fontes podem ter polarizações arbitrárias.

No terceiro capítulo abordamos o método de migração reversa no tempo (RTM) pré-empilhamento. A migração RTM está baseada na propriedade da reversão temporal da equação da onda bidirecional e na condição de imagem por correlação, como proposta por Claerbout (1985). Diversas implementações da RTM usando esta condição de imagem são apresentadas (MCMECHAN, 1983; KOSLOFF; BAYSAL, 1983; BAYSAL; KOSLOFF; SHERWOOD, 1983).

A partir da análise assintótica da condição de imagem por correlação, baseada no resultado de Haney et al. (2005), propomos uma nova condição de imagem para a migração reversa no tempo que reduz o ruído causado pelo retro-espalhamento, e introduz uma correção de obliquidade como na migração do tipo Kirchhoff. Esta nova condição de imagem é implementada através de ponderações na condição de imagem por correlação dos campos de fonte e de receptores.

O peso da condição de imagem depende dos vetores de fluxo de energia (vetor de Poynting) dos campos incidente e espalhado no ponto imagem. Apresentamos experimentos numéricos que mostram a melhora das imagens da migração reversa no tempo quando a correção de obliquidade é aplicada na condição de imagem. Nossos experimentos indicam uma melhora adicional nas imagens quando a correção de obliquidade é aplicada conjuntamente com a compensação de iluminação na condição de imagem da migração RTM.

No quarto capítulo apresentamos a extensão da migração reversa no tempo para meios acústicos 2.5D. Discutimos os aspectos computacionais da implementação para gerar uma seção sísmica migrada em profundidade, correspondente a uma simulação da propagação em 3D, mas com a vantagem de utilizar recursos computacionais necessários para uma RTM 2D. Neste contexto, avaliamos diferentes opções para a paralelização do algoritmo. Finalmente, experimentos numéricos avaliam a migração RTM 2.5D com diferentes condições de imagem.

## 2 MODELAGEM POR DIFERENÇAS FINITAS EM MEIOS 2.5D ELÁSTICOS E ANISOTRÓPICOS

Neste capítulo apresentamos a modelagem 2.5D para meios elásticos com anisotropia arbitrária como alternativa viável à modelagem 3D. Modelar o campo elástico anisotrópico total em 3D envolve elevados recursos computacionais, principalmente armazenamento em memória RAM (do Inglês *Random Access Memory*); contudo, modelar o campo em 2.5D demanda os mesmo recursos computacionais da modelagem 2D e produz resultados similares aos obtidos através da modelagem 3D.

A modelagem de campos de ondas sísmicas em 3D requer recursos computacionais intensivos. Portanto, é desejável utilizar as simetrias das propriedades materiais do meio para reduzir o custo computacional. Neste capítulo investigamos a modelagem da propagação de ondas em 3D em meios que apresentam invariância por translação em uma direção das suas propriedades materiais. Dentro de um plano de simetria, isto é, se uma linha sísmica está posicionada perpendicularmente à direção de invariância, este problema é referido como modelagem 2.5D (BLEISTEIN, 1986).

Apresentamos a generalização do trabalho de Novais e Santos (2005) para meios elásticos heterogêneos e anisotrópicos com classe de simetria arbitrária. Adicionalmente, estendemos as abordagens de Randall (1991) e de Furumura e Takenaka (1996) em meios anisotrópicos para fontes e receptores com características arbitrárias que não estão contidos no mesmo plano vertical de simetria.

### 2.1 METODOLOGIA

Para modelar a propagação em meios elásticos gerais é necessário resolver as equações de onda definidas por (2.1) e (2.2), onde a primeira equação é a Segunda lei de Newton, e a segunda equação é a Lei de Hooke generalizada. Usando a notação indicial e convenção da soma, as equações podem ser representadas por (MINKOFF, 2002; MITTET, 2002) :

$$\rho(\mathbf{x}) \frac{\partial v_i(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_{ij}(\mathbf{x}, t)}{\partial x_j} + f_i(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial M_{ij}^A(\mathbf{x}, t)}{\partial x_j}, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial \sigma_{ij}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = c_{ijkl}(\mathbf{x}) \frac{\partial v_k(\mathbf{x}, t)}{\partial x_l} + \frac{\partial M_{ij}^S(\mathbf{x}, t)}{\partial t}, \quad (i, j, k, l = 1, 2, 3), \quad (2.2)$$

onde  $\rho(\mathbf{x})$  é a densidade do meio,  $v_i(\mathbf{x}, t)$  e  $f_i$  são os componentes do campo de velocidade e a de densidade de forças de volume, respectivamente. Também,  $c_{ijkl}$  define os componentes

do tensor de elasticidade do meio e  $\sigma_{ij}$  o tensor-tensão. As quantidades  $M_{ij}^S$  e  $M_{ij}^A$  são os componentes da parte simétrica e anti-simétrica do tensor densidade de momento. Estas partes representam a distribuição de fontes de injeção de volume, ou do tipo binário duplo ( $M_{ij}^S$ ) e do tipo dipolo ( $M_{ij}^A$ ).

### 2.1.1 Meio invariante por translação

Na modelagem 2.5D, consideramos que as propriedades do meio são invariantes por translação ao longo de uma direção coordenada, geralmente  $x_2$ . Neste caso, é conveniente representar o campo elástico e a distribuição de fontes no domínio de Fourier por:

$$v_i(\mathbf{x}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{v}_i(\mathbf{X}, k_2, t) \exp(ik_2x_2) dk_2 \quad (2.3)$$

e

$$\sigma_{ij}(\mathbf{x}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\sigma}_{ij}(\mathbf{X}, k_2, t) \exp(ik_2x_2) dk_2, \quad (2.4)$$

onde  $k_2$  é o número de onda associado com  $x_2$  e  $\mathbf{X} \equiv (x_1, x_3)$ . E também,  $\tilde{v}_i(\mathbf{X}, k_2, t)$  e  $\tilde{\sigma}_{ij}(\mathbf{X}, k_2, t)$  são os componentes complexos do respectivo campo no domínio do número de onda  $k_2$ . Para simplificar as equações, a partir de agora, definimos  $\tilde{v}_i \equiv \tilde{v}_i(\mathbf{X}, k_2, t)$ ,  $\tilde{\sigma}_{ij} \equiv \tilde{\sigma}_{ij}(\mathbf{X}, k_2, t)$ ,  $\tilde{f}_i \equiv \tilde{f}_i(\mathbf{X}, k_2, t)$ ,  $\tilde{M}_{ij}^A \equiv \tilde{M}_{ij}^A(\mathbf{X}, k_2, t)$ , e  $\tilde{M}_{ij}^S \equiv \tilde{M}_{ij}^S(\mathbf{X}, k_2, t)$ . Os componentes de Fourier do campo elástico, e suas distribuições de fontes obedecem, em um meio elástico arbitrariamente anisotrópico, o sistema de equações complexas, a partir das equações (2.1) e (2.2):

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{X}) \frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial t} &= \frac{\partial \tilde{\sigma}_{iJ}}{\partial X_J} + i k_2 \tilde{\sigma}_{i2} + \tilde{f}_i + \frac{\partial \tilde{M}_{iJ}^A}{\partial X_J} + i k_2 \tilde{M}_{i2}^A \\ \frac{\partial \tilde{\sigma}_{ij}}{\partial t} &= c_{ijkL}(\mathbf{X}) \frac{\partial \tilde{v}_k}{\partial X_L} + i k_2 c_{ijk2}(\mathbf{X}) \tilde{v}_k + \frac{\partial \tilde{M}_{ij}^S}{\partial t}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

em que os subscritos em letra maiúscula admitem somente os valores 1 e 3. A convenção do somatório permanece para esses índices. O sistema de equações pode ser discretizado no espaço ( $\mathbf{X}$ ), no tempo e resolvido por diferenças finitas para cada valor de  $k_2$ .

O método de diferenças finitas para meios arbitrariamente anisotrópicos pode ser implementado usando duas abordagens: pela combinação de diferenças finitas e operadores de interpolação (IGEL; MORA; RIOLLET, 1995) sobre malhas regulares (malha padrão); ou pelo uso de malhas rotacionadas com propriedades físicas intercaladas proposta por Saenger e Bohlen (2004). Para classes de simetria com eixos acústicos orientados ao longo dos eixos coordenados (ou seja simetria ortorrômbica), a melhor escolha é usar a clássica malha inter-

calada para as coordenadas cartesianas (LEVANDER, 1988), porque as equações são simples e a condição de fronteira livre de Mittet (2002) é estável. Por outro lado, para eixos de simetria rotacionados, ou classes de anisotropia mais gerais, a melhor escolha são eixos cartesianos rotacionados, conjuntamente com propriedades intercaladas, porque as condições de fronteira para o vácuo são estáveis. A seguir, mostramos aplicações de ambos os tipos de implementações. Usaremos uma aproximação de segunda ordem para as derivadas temporais e aproximações de alta ordem para as derivadas espaciais (KARRENBACH, 1995). Após resolver o sistema mencionado por diferenças finitas, as componentes do campo elástico nas posições dos receptores,  $\mathbf{x}^R$ , são calculadas por:

$$\begin{bmatrix} v_i \\ \sigma_{ij} \end{bmatrix}(\mathbf{x}^R, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \begin{bmatrix} \tilde{v}_i \\ \tilde{\sigma}_{ij} \end{bmatrix}(x_1^R, k_2, x_3^R, t) \exp(ik_2 x_2^R) dk_2.$$

Note-se que para receptores no plano de simetria ( $x_2^R = 0$ ), a integral se resume a um somatório sobre todos os valores de  $k_2$ .

### 2.1.2 Modelagem 2.5D

Para fontes de injeção de volume, densidade de forças volumétricas e densidade de tensores de momento polarizados no plano  $x_1$ - $x_3$ , este sistema de equações pode ser reduzido a um sistema de equações de valores reais. Esta redução não é possível para meios anisotrópicos em geral e distribuições de fontes arbitrariamente polarizadas. Como uma consequência da simetria do meio e das fontes em relação ao plano  $x_2 = 0$ , as componentes  $v_2$ ,  $\sigma_{12}$  e  $\sigma_{23}$  são funções ímpares de  $x_2$ . Desse modo, suas transformadas de Fourier são puramente imaginárias. Todas as outras componentes do campo são funções pares de  $x_2$  e possuem transformadas de Fourier reais. Definindo as quantidades reais:

$$\begin{aligned} \tilde{u}_2(x_1, k_2, x_3) &\equiv i\tilde{v}_2(x_1, k_2, x_3); \\ \tilde{\tau}_{12}(x_1, k_2, x_3) &\equiv i\tilde{\sigma}_{12}(x_1, k_2, x_3); \\ \tilde{\tau}_{23}(x_1, k_2, x_3) &\equiv i\tilde{\sigma}_{23}(x_1, k_2, x_3). \end{aligned} \tag{2.6}$$

O sistema de equações reais para a modelagem 2.5D em meios monoclinicos com um plano vertical de simetria especular é definido por:

$$\frac{\partial \tilde{v}_1}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial \tilde{\sigma}_{11}}{\partial x_1} + k_2 \tilde{\tau}_{12} + \frac{\partial \tilde{\sigma}_{13}}{\partial x_3} \right] + \frac{1}{\rho} \tilde{f}_1 + \frac{\partial \tilde{M}_{1J}}{\partial x_J},$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial t} &= \frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial \tilde{\tau}_{12}}{\partial x_1} - k_2 \tilde{\sigma}_{22} + \frac{\partial \tilde{\tau}_{23}}{\partial x_3} \right], \\
\frac{\partial \tilde{v}_3}{\partial t} &= \frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial \tilde{\sigma}_{13}}{\partial x_1} + k_2 \tilde{\tau}_{23} + \frac{\partial \tilde{\sigma}_{33}}{\partial x_3} \right] + \frac{1}{\rho} \tilde{f}_3 + \frac{\partial \tilde{M}_{3J}^A}{\partial x_J}, \\
\frac{\partial \tilde{\sigma}_{11}}{\partial t} &= C_{11} \frac{\partial \tilde{v}_1}{\partial x_1} + C_{12} k_2 \tilde{u}_2 + C_{13} \frac{\partial \tilde{v}_3}{\partial x_3} + C_{15} \left( \frac{\partial \tilde{v}_1}{\partial x_3} + \frac{\partial \tilde{v}_3}{\partial x_1} \right) + \tilde{M}_{11}^S \\
\frac{\partial \tilde{\sigma}_{22}}{\partial t} &= C_{12} \frac{\partial \tilde{v}_1}{\partial x_1} + C_{22} k_2 \tilde{u}_2 + C_{23} \frac{\partial \tilde{v}_3}{\partial x_3} + C_{25} \left( \frac{\partial \tilde{v}_1}{\partial x_3} + \frac{\partial \tilde{v}_3}{\partial x_1} \right) + \tilde{M}_{22}^S \\
\frac{\partial \tilde{\sigma}_{33}}{\partial t} &= C_{13} \frac{\partial \tilde{v}_1}{\partial x_1} + C_{23} k_2 \tilde{u}_2 + C_{33} \frac{\partial \tilde{v}_3}{\partial x_3} + C_{35} \left( \frac{\partial \tilde{v}_1}{\partial x_3} + \frac{\partial \tilde{v}_3}{\partial x_1} \right) + \tilde{M}_{33}^S \\
\frac{\partial \tilde{\tau}_{23}}{\partial t} &= C_{44} \left( \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial x_3} - k_2 \tilde{v}_3 \right) + C_{46} \left( \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial x_1} - k_2 \tilde{v}_1 \right) \\
\frac{\partial \tilde{\sigma}_{13}}{\partial t} &= C_{15} \frac{\partial \tilde{v}_1}{\partial x_1} + C_{25} k_2 \tilde{u}_2 + C_{35} \frac{\partial \tilde{v}_3}{\partial x_3} + C_{55} \left( \frac{\partial \tilde{v}_1}{\partial x_3} + \frac{\partial \tilde{v}_3}{\partial x_1} \right) + \tilde{M}_{13}^S \\
\frac{\partial \tilde{\tau}_{12}}{\partial t} &= C_{46} \left( \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial x_3} - k_2 \tilde{v}_3 \right) + C_{66} \left( \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial x_1} - k_2 \tilde{v}_1 \right), \tag{2.7}
\end{aligned}$$

Na qual usamos a notação de Voigt, ou seja,  $C_{ij}$  representa  $c_{ijkl}$ , e os coeficientes são reduzidos de  $11 \rightarrow 1$ ,  $22 \rightarrow 2$ ,  $33 \rightarrow 3$ ,  $23 \equiv 32 \rightarrow 4$ ,  $13 \equiv 31, \rightarrow 5$ ,  $21 \equiv 12 \rightarrow 6$ .

Em nossa implementação, a condição de fronteira livre é usada no topo do modelo (MITTET, 2002), e fronteiras absorventes do tipo PML (CHEW; LIU, 1996) são impostas nas bordas laterais e na borda inferior. As equações PML são apresentadas no Apêndice A. A modelagem por diferenças finitas para os campos de velocidade e tensor de tensão em malhas intercaladas assegura maior acurácia e estabilidade à modelagem elástica (LEVANDER, 1988). Nesta abordagem os operadores de diferenças atuam somente nos campos de onda dispensando qualquer tratamento especial nas regiões de descontinuidades nas propriedades físicas.

### 2.1.3 Amostragem do número de onda

A modelagem por diferenças finitas em 2.5D em meios elásticos e anisotrópicos apresenta as mesmas restrições que a modelagem 2.5D em meios acústicos em relação a condição de estabilidade e redução da dispersão numérica. Esta característica permite aplicar diretamente os resultados obtidos por Costa et al. (2005) para determinar o intervalo de amostragem no tempo e no espaço e determinar um limite máximo para o número de onda  $k_2$ . Seguindo a abordagem de Novais e Santos (2005), o número de onda máximo é escolhido exigindo que a condição de estabilidade do esquema de diferenças em 2.5D seja a mesma que a do esquema

de diferenças finitas em 3D de mesma ordem. Esta escolha assegura a equivalência entre os esquemas de diferenças 2.5D e 3D.

Na modelagem acústica, Costa et al. (2005) determinaram a condição para que esquemas de diferenças finitas 2.5D e 3D, de ordem arbitrária, sejam equivalentes. A condição de estabilidade para um esquema de diferenças em 2.5D é

$$\Delta t \leq \frac{1}{\sqrt{d_0^{(2)} + k_{2\max}^2 \Delta x^2 / 4}} \frac{\Delta x}{V_P}. \quad (2.8)$$

A condição de estabilidade para o esquema de diferenças em 3D, de mesma ordem, é

$$\Delta t \leq \sqrt{\frac{2}{3d_0^{(2)}}} \frac{\Delta x}{V_P}, \quad (2.9)$$

onde  $\Delta t$  é intervalo de tempo,  $\Delta x$  é o espaçamento da malha, e  $V_P$  é a velocidade máxima da onda P do modelo. A quantidade  $d_0$  é dada por:

$$d_0^{(2)} = \sum_{j=-N+1}^{N+1} d_j^{(1)} d_j^{(1)}, \quad (2.10)$$

onde  $d_j^{(1)}$  são os coeficientes do operador de diferenças finitas para primeira derivada (KARRENBACH, 1995) e  $N$  é a ordem do erro da aproximação desses operadores. O Apêndice B apresenta a dedução destas relações de estabilidade para um esquema de diferenças de segunda ordem.

Exigindo-se a equivalência entre estes dois esquemas, ou seja, a igualdade dos limites para  $\Delta t$  nas equações (2.8) e (2.9), obtém-se o valor máximo do número de onda  $k_{2\max}$ :

$$k_{2\max} \leq \frac{\sqrt{2d_0^{(2)}}}{\Delta x}. \quad (2.11)$$

Este valor é sempre menor que o número de onda de Nyquist  $k_{2N} = \pi/\Delta x$ .

A amostragem do número de onda foi escolhida tal que  $\Delta k_2 = 2\pi/\Delta x \min(N_1, N_3)$ , onde  $N_1$  e  $N_3$  são os números de pontos da malha nas direções  $x_1$  e  $x_3$ . Quando o tempo de propagação é muito grande, valores menores para  $\Delta k_2$  podem ser necessários para evitar artefatos associados à periodicidade da transformada de Fourier (COSTA et al., 2005).

Finalmente, o intervalo de amostragem no espaço é escolhido de modo a reduzir a dispersão numérica, ou seja, a dependência da velocidade de fase com o módulo do número de onda. A dispersão numérica avaliada em meios elásticos isotrópicos é a mesma para o

caso acústico (COSTA et al., 2005). Para reduzir este efeito na modelagem é necessário que:

$$\Delta x = \frac{1}{\alpha} \frac{V_{\min}}{f_{\max}}, \quad (2.12)$$

onde  $V_{\min}$  é a velocidade mínima de propagação do modelo e  $f_{\max}$  é a frequência máxima do pulso;  $\alpha$  a taxa de amostragem para o menor comprimento de onda considerado na modelagem ( $\alpha \equiv \lambda_{\min}/\Delta x$ ). O valor da taxa de amostragem depende da ordem do operador de diferenças finitas. Para operadores de baixa ordem, devemos escolher no mínimo  $\alpha = 10$ , enquanto, que para esquemas de ordem superior a 12,  $\alpha = 3$  é suficiente. Nesta tese utilizamos operadores de alta ordem e taxa de amostragem igual a 5. Esta menor taxa de amostragem para os esquemas de alta ordem reduz a demanda de memória na modelagem. As condições apresentadas acima, para  $\Delta t$ ,  $\Delta k_2$ ,  $k_{2\max}$  e  $\Delta x$ , asseguram a estabilidade numérica para modelagem 2.5D e reduzem a dispersão e anisotropia numérica para aquelas existentes no esquema de diferenças finitas em 3D equivalente.

## 2.2 EXPERIMENTOS NUMÉRICOS

Implementamos o método de diferenças finitas para sistemas de equações reais e complexas (2.5) e (2.7) para modelagem elástica 2.5D, executável em modo serial em um PC, ou em paralelo em um *cluster* de PC's. Nosso esquema de diferenças finitas, para o caso clássico de malhas em coordenadas cartesianas e propriedades físicas intercaladas (LEVANDER, 1988), é de segunda ordem no tempo e ordem arbitrária no espaço, sendo que utilizamos um operador de ordem 6. Para o esquema com coordenadas cartesianas rotacionadas e propriedades físicas intercaladas (SAENGER; BOHLEN, 2004) usamos um esquema de segunda ordem no tempo e no espaço. A implementação paralela é eficiente e reduz o tempo de processamento inversamente ao número de processos utilizados. Os sistemas de equações (2.5) e (2.7) são resolvidos independentemente para cada número de onda em cada nó diferente de processamento. Após obtida a solução para cada número de onda o resultado é comunicado para o nó central de processamento que efetua a síntese de Fourier. Em todos os nossos exemplos numéricos, modelamos fontes pontuais usando uma distribuição gaussiana ao redor do ponto de aplicação da fonte na forma:

$$\begin{bmatrix} f_i \\ M_{ij} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_0(t) e_i \\ M_0(t) d_{ij} \end{bmatrix} \frac{f_0(t)}{(2\pi h^2)^{3/2}} \exp\left(\frac{-\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_s\|^2}{2h^2}\right),$$

na qual  $f_0(t)$  é o pulso-fonte,  $g$  e  $e_i$  são a fonte impulsiva e o vetor unitário de polarização para a densidade de forças de volume, respectivamente; o tensor de densidade de momento é especificado através do pulso-fonte  $M_0(t)$  e do tensor  $d_{ij}$ , o qual depende do tipo de fonte.

Para fontes explosivas,  $d_{ij} = \delta_{ij}$ , e para fontes tipo binário duplo,  $d_{ij} = n_i \nu_j + n_j \nu_i$ , na qual o vetor unitário  $n_i$  é normal ao plano de fratura. Já o vetor unitário  $\nu_i$ , perpendicular à  $n_i$ , indica a direção do deslocamento no plano de fratura. (AKI; RICHARDS, 1980; MINKOFF, 2002).

### 2.2.1 Aspectos computacionais

A principal vantagem em modelar a propagação de ondas através de diferenças finitas 2.5D, em relação à 3D, está na demanda de memória RAM, que é a mesma do caso 2D, e deste modo é reduzida por um fator de  $n_y$  em relação à 3D. Sendo assim, é possível modelar a propagação sobre malhas mais densas com modelos mais detalhados, o que nem sempre é possível em 3D. Tendo em vista o fato da modelagem 2.5D consistir de uma sequência de modelagens 2D, ela é considerada massivamente paralela, e pode ser utilizada com grande eficiência em *clusters* de PC's, de tal modo que o tempo gasto na comunicação entre os processos é irrelevante em comparação ao tempo da modelagem.

Os resultados numéricos obtidos nas subseções a seguir foram produzidos no *cluster* Netuno pertencente ao NCE/UFRJ formado por 257 nós de processamento, no qual cada nó possui 2 processadores Intel Xeon quad-core de 2.0 GHz de frequência, 16 GB de memória RAM. Os nós são interconectados por uma rede GigaBit de 1000 Mbps de taxa de transferência máxima.

Foram utilizados em todos os testes 10 nós de processamento nos quais foram executados 4 processos simultâneos em cada nó, totalizando 40 processos, sendo que em cada processo são calculados os campos correspondentes a cada número de onda  $k_2$ . A quantidade de números de onda é calculada de tal modo que seja um múltiplo inteiro do número de processos, fazendo com que o esforço computacional seja o mesmo em todos os nós de processamento.

### 2.2.2 Modelo de sal SEG/EAGE isotrópico

Para validar o código de diferenças finitas, comparamos primeiramente os resultados da modelagem 2D e 2.5D, para um meio elástico e isotrópico, sobre uma seção retirada do modelo de sal SEG/EAGE que é apresentada na Figura 2.1. A densidade e a velocidade da onda S foram calculadas usando as recomendações de House, Larsen e Bednar (2000). A modelagem elástica 3D do campo completo demanda intensivos recursos computacionais, e ainda constitui um desafio mesmo para os computadores atuais.

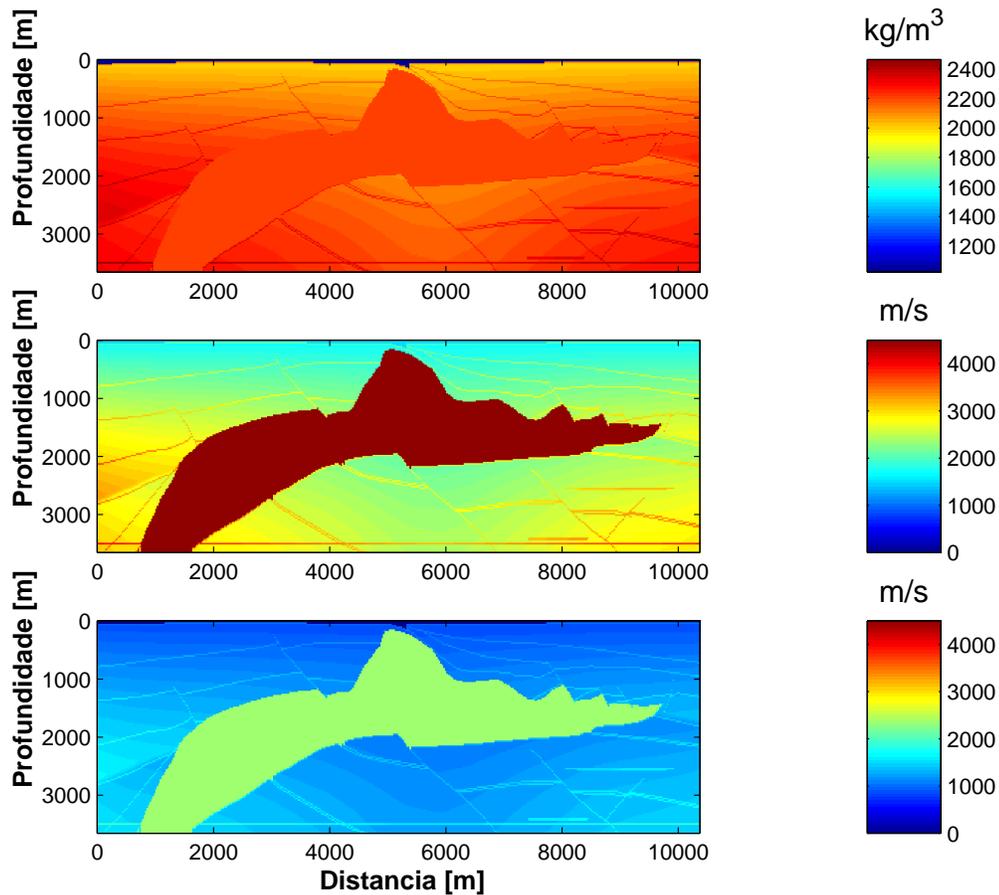


Figura 2.1: A imagem superior representa o modelo de densidade. A imagem central o modelo de velocidade da onda P, e a imagem inferior o modelo de velocidade da onda S. Seção retirada do modelo de sal da SEG/EAGE.

A seção utilizada para modelagem 2.5D foi discretizada em uma malha regular quadrada de 10 m de espaçamento com 365 nós na direção vertical e 1001 nós na direção horizontal. Simulamos 1.5 s de propagação para uma fonte explosiva nas coordenadas  $x = 6000$  m e 10 m de profundidade, 300 receptores foram posicionados simetricamente ao redor da fonte e igualmente espaçados de 20 m e com 150 m de afastamento-mínimo. O pulso-fonte utilizado foi Blackman-Harris, de fase nula, com frequência dominante de 10 Hz. Fronteiras absorventes do tipo PML foram colocadas nas bordas laterais e na borda inferior do modelo, todas elas com 21 pontos de largura. A Figura 2.2 apresenta os resultados da modelagem 2D e 2.5D usando a malha padrão com propriedades intercaladas. As diferenças na amplitude, conteúdo de frequência e fase em relação à modelagem 2D são evidentes. Os efeitos mais visíveis são o decaimento mais lento das amplitudes dos eventos, e a forma assimétrica do pulso sísmico na modelagem 2D.

Para a modelagem 2D foram necessários 230 MB de memória RAM, com tempo de

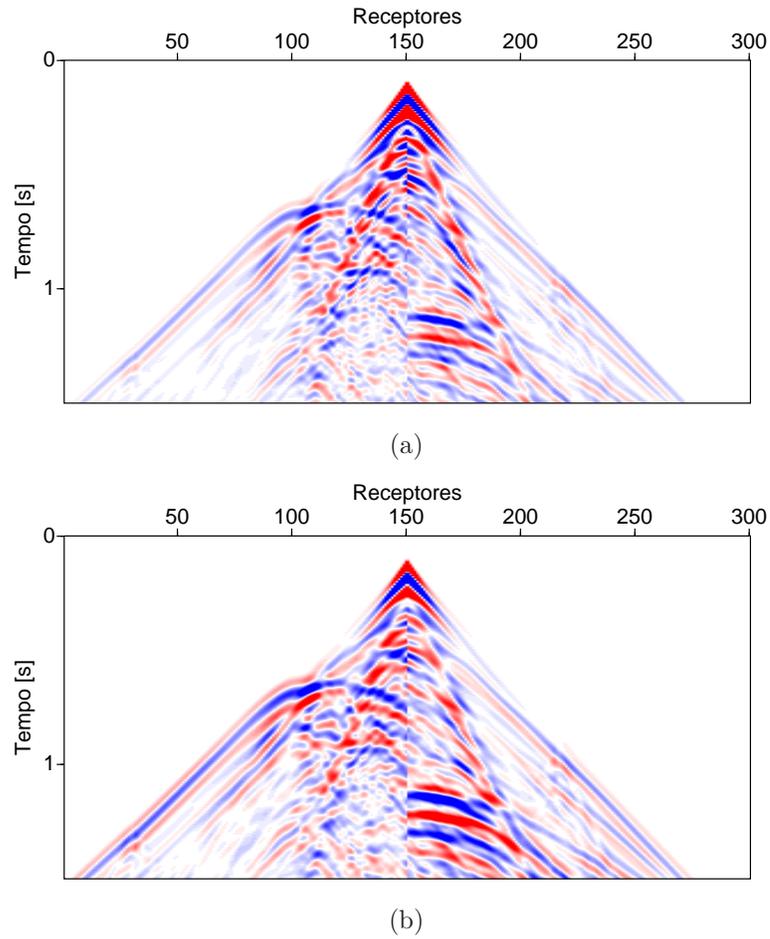


Figura 2.2: Seção sísmica fonte-comum da componente vertical do campo de velocidade, obtida a partir de uma seção do modelo de sal da SEG/EAGE, mostrado na Figura 2.1. (a) Resultado da modelagem 2.5D. (b) Resultado da modelagem 2D. Os efeitos mais visíveis são decaimento mais lento das amplitudes dos eventos e maior largura do pulso sísmico na modelagem 2D.

execução da ordem de 12 min em cada nó de processamento. Para a modelagem 2.5D foram necessários cerca de 900 MB de memória por nó. Foram calculados 140 números de onda, totalizando cerca de 3 h de processamento no cluster Netuno.

### 2.2.3 Meio VTI homogêneo sobre um semi-espço

Avaliamos a modelagem anisotrópica 2.5D em um modelo VTI homogêneo sobre um semi-espço com superfície livre. Os parâmetros elásticos do modelo são:  $\rho = 1000,0 \text{ kg/m}^3$ ,  $C_{11} = 16,0 \text{ GPa}$ ,  $C_{13} = 6,0 \text{ GPa}$ ,  $C_{33} = 9,0 \text{ GPa}$ ,  $C_{55} = 3,24 \text{ GPa}$ ,  $C_{66} = 4,0 \text{ GPa}$ . O modelo foi amostrado sobre uma malha regular de 10 m de espaçamento entre os nós, com 301 pontos na vertical e 701 pontos na horizontal. A fonte está localizada a 10 m de profundidade, e polarizada com azimute de 45 graus e 55 graus com o eixo vertical. Foi

utilizado um pulso fonte do tipo Blackman-Harris com frequência dominante de 10 Hz. As bordas do tipo PML sobre os lados e no fundo do modelo possuem 21 pontos de largura. A condição de fronteira livre foi implementada de acordo com Mittet (2002). A Figura 2.3 apresenta os instantâneos da modelagem 2.5D e 2D usando a malha padrão, após 0.5 s de propagação mostrando diferenças de fase e amplitude. Apesar do modelo utilizado ser verticalmente isotrópico, nota-se que a Figura 2.3a e Figura 2.3b não são simétricas no plano vertical devido a polarização da fonte não coincidir com um plano de simetria da anisotropia,

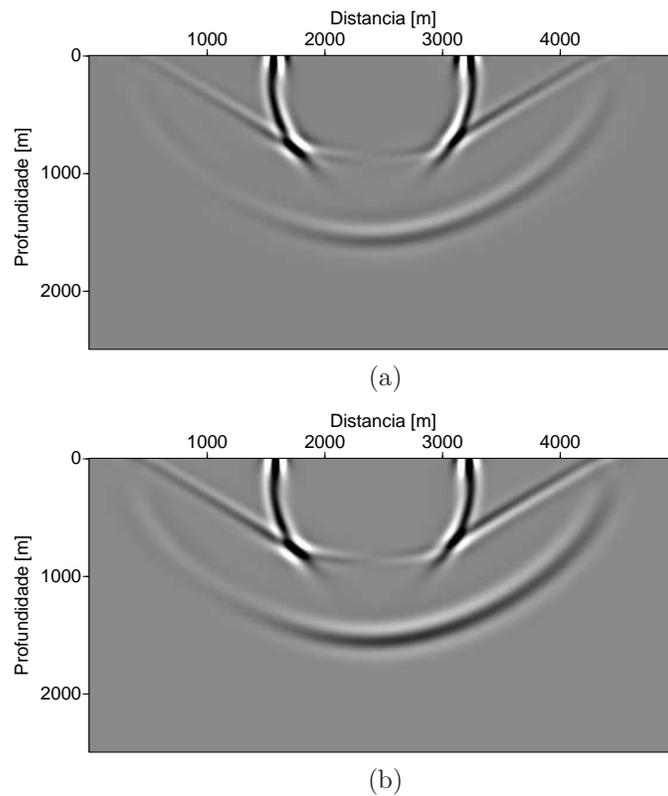


Figura 2.3: Instantâneos da propagação da componente vertical do campo de velocidade após 0,5 s obtido para o modelo VTI: (a) 2.5D e em (b) 2D. A falta de simetria dos eventos em torno da fonte se decorre da polarização da fonte não estar no plano da figura.

Para a modelagem 2D são necessários 230 MB de memória RAM, com tempo de execução da ordem de 4 min em um nó de processamento. Para a modelagem 2.5D foram necessários cerca de 900 MB de memória por nó. Foram calculados 120 números de onda, requerendo cerca de 12 min de processamento.

## 2.2.4 Modelo TTI homogêneo

Avaliamos a modelagem 2.5D em um modelo anisotrópico do tipo TTI com ângulo de 45 graus de inclinação. O modelo foi amostrado sobre uma malha regular de 301 nós na vertical e 701 nós na horizontal, igualmente espaçados por 10 m. Os parâmetros elásticos são:  $\rho = 2200,0 \text{ kg/m}^3$ ,  $C_{11} = 35,2 \text{ GPa}$ ,  $C_{13} = 8,8 \text{ GPa}$ ,  $C_{33} = 19,8 \text{ GPa}$ ,  $C_{55} = 7,128 \text{ GPa}$ , e  $C_{66} = 8,8 \text{ GPa}$ . Utilizamos uma fonte de injeção de volume de amplitude unitária com um pulso-fonte do tipo Blackman-Harris e localizada a 1240 m de profundidade. As Figuras 2.4 e 2.5 mostram a propagação das componentes vertical e horizontal da velocidade nos instantes 0,3 s e 0,6 s respectivamente, modelada por diferenças finitas 2.5D e 2D, utilizando coordenadas cartesianas rotacionadas e propriedades físicas intercaladas. Nota-se nessas figuras a compressão da frente de onda  $qS$  em 2.5D em comparação à obtida na modelagem 2D.

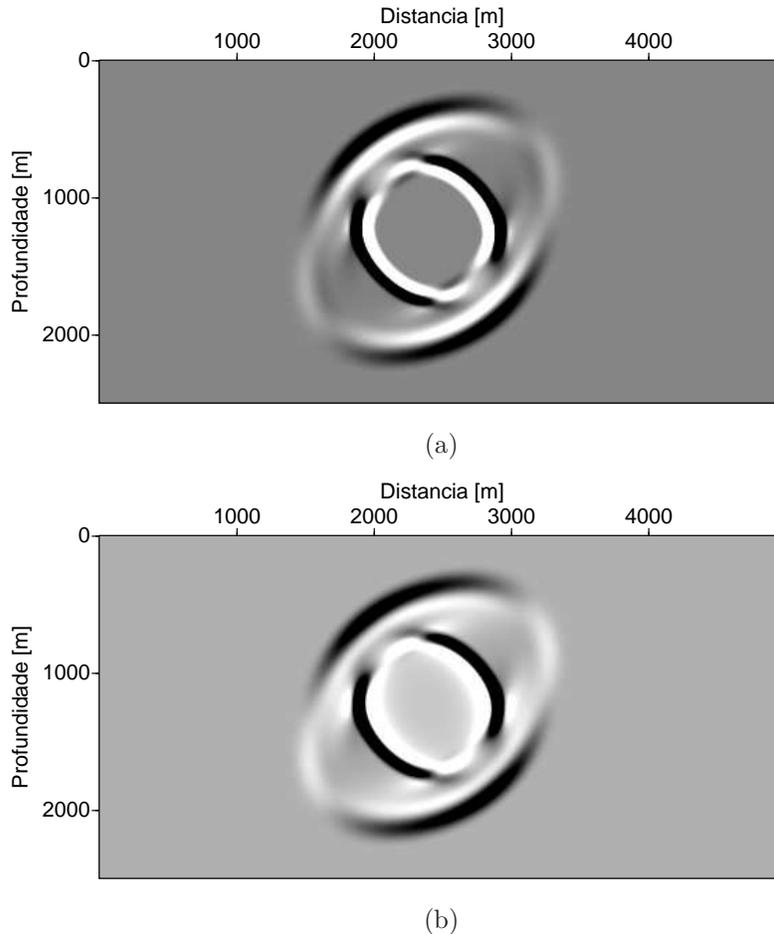


Figura 2.4: Instantâneo da componente vertical da velocidade após 0,3 s obtido no meio TTI homogêneo. Os resultados são respectivamente (a) 2.5D e (b) 2D. Nota-se a compressão do pulso na frente de onda  $qS$  em 2.5D em relação à ao pulso correspondente na modelagem 2D.

Foram necessários cerca de 180 MB de memória RAM por processo, cerca de 720 MB

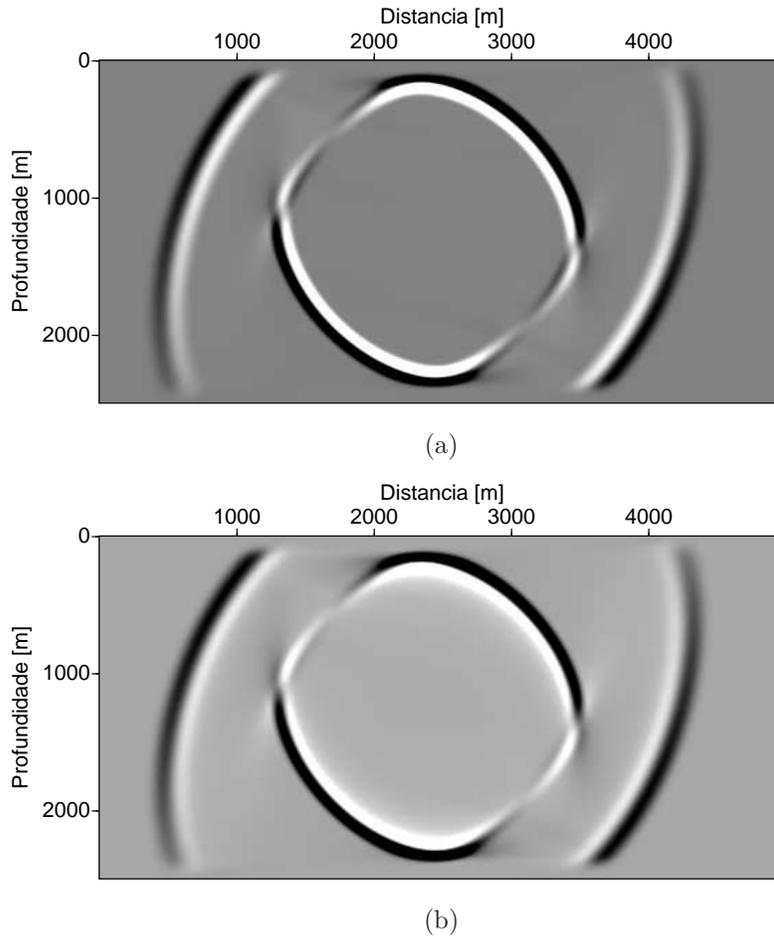


Figura 2.5: Instantâneo da componente horizontal do campo de velocidade após 0,6 s de propagação sobre o modelo TTI homogêneo, os resultados são respectivamente (a) para 2.5D e (b) para 2D. Nota-se a redução da amplitude e compressão pulso para onda  $qS$  na modelagem 2.5D quando comparada com o evento correspondente na modelagem 2D.

de memória por nó, e foram calculados 120 números de onda. Para a modelagem 2D são necessários 230 MB de memória com tempo de execução da ordem de 4 min em um nó de processamento. Para a modelagem 2.5D foram necessários cerca de 900 MB de memória por nó. Foram calculados 120 números de onda, totalizando cerca de 12 min de processamento.

Para demonstrar os efeitos de uma superfície livre em uma malha rotacionada, e com propriedades intercaladas, modelamos o campo de ondas a partir de uma fonte explosiva com pulso-fonte tipo Blackman-Harris, em uma profundidade de 10 m, e em um modelo com os mesmos parâmetros elásticos. A superfície livre foi simulada usando 4 pontos da malha com uma densidade de  $\rho = 10^{-6} \text{ kg/m}^3$  atribuída ao vácuo. Para assegurar a propagação das ondas de Rayleigh livres de dispersão numérica, a taxa de amostragem espacial foi de 30 pontos por comprimento de onda, esta escolha está de acordo com os experimentos numéricos de Bohlen e Saenger (2006). A Figura 2.6 compara os instantâneos da componente vertical

do campo de velocidade das modelagens 2D e 2.5D após 0,6 s de propagação. As figuras mostram que não houve dispersão numérica ou instabilidades associadas à propagação das ondas Rayleigh na superfície livre do modelo.

### 2.2.5 Modelo anisotrópico heterogêneo

O modelo apresentado na Figura 2.7 é constituído de uma camada isotrópica sobre uma camada anisotrópica, que inclui em seu interior uma camada isotrópica com uma fratura. O modelo foi amostrado em uma malha regular de 301 nós na direção vertical e 701 na direção horizontal igualmente espaçados de 10 m. A camada do topo tem densidade  $\rho = 1800 \text{ kg/m}^3$ , velocidade  $V_P = 2500 \text{ m/s}$ , e  $V_S = 1500 \text{ m/s}$ . A camada anisotrópica é transversalmente isotrópica com um eixo vertical de simetria, e tem densidade  $\rho = 2200,0 \text{ kg/m}^3$ ,  $C_{11} = 35,200 \text{ GPa}$ ,  $C_{13} = 8,8 \text{ GPa}$ ,  $C_{33} = 19,8 \text{ GPa}$ ,  $C_{55} = 7,128 \text{ GPa}$  e  $C_{66} = 8,8 \text{ GPa}$ . A camada isotrópica interna tem densidade  $\rho = 2400 \text{ kg/m}^3$ , velocidade  $V_P = 4000 \text{ m/s}$  e  $V_S = 2000 \text{ m/s}$ . Foi utilizada uma fonte de injeção de volume de frequência dominante de 10 Hz e frequência máxima de 20 Hz, com um pulso Blackman-Harris.

A Figura 2.8 compara os instantâneos 2.5D e 2D da componente vertical do campo de velocidade após 0,5 s calculado usando-se a malha intercalada padrão. A Figura 2.9a e Figura 2.9b comparam as respectivas seções sísmicas registradas em 240 receptores igualmente espaçados, posicionados na superfície do modelo. Estas figuras, particularmente a frente de onda qP, indicam maior perda de amplitude por espalhamento geométrico da modelagem 2.5D; a fase do campo de onda na modelagem 2.5D é simétrica diferentemente da fase do campo de ondas em 2D. Também se observa a menor amplitude e largura do campo de onda para as ondas de Rayleigh na modelagem 2.5D. Estas diferenças indicam que a modelagem 2.5D simula a propagação do campo de onda em 3D.

### 2.2.6 Modelo com domo de sal

Para confirmar a qualidade da modelagem elástica 2.5D, comparamos seus resultados com os obtidos pela modelagem elástica em meios 3D. Na modelagem anisotrópica 3D usamos um modelo elástico e isotrópico representando as características aproximadas de um domo de sal como mostrado na Figura 2.10. O modelo 2D utilizado é constituído por uma malha regular com 10 m de espaçamento entre os nós, 201 na horizontal e 501 nós na vertical. Simulamos 1,3 s de propagação devido a uma fonte explosiva posicionada no ponto  $x = 2400 \text{ m}$  em uma profundidade de 10 m em relação à superfície, com 120 receptores posicionados simetricamente ao redor da fonte, igualmente espaçados por uma distância de 20 m e 150 m

de afastamento mínimo. Para a simulação elástica 3D, o modelo 2D foi replicado 151 vezes ao longo da direção transversal  $x_2$ , e a linha que contém a fonte e os receptores foi posicionada na seção central do modelo. Camadas absorventes do tipo PML com 21 pontos de largura, foram colocadas nas bordas laterais e inferior do modelo.

Para realizar a modelagem 2.5D foram calculados os campos resultante para 80 números de onda. Foram necessários 120 MB para computar cada número de onda, totalizando 480 MB de demanda por nó, o total necessário para modelar o campo 2.5D foi da ordem de 30 min. A modelagem 3D foi efetuada sobre um nó de processamento, em que foram necessários 2.6 GB de memória, o tempo total de execução foi da ordem de 8 h.

A Figura 2.11 apresenta os resultados das modelagens elásticas 2.5D e 3D usando malhas regulares intercaladas. A semelhança entre estes sismogramas indica a equivalência entre modelagem elástica 2.5D e a modelagem 3D. Entretanto, há diferenças entre estes dois resultados, particularmente acima de 0.8 s na esquerda do sismograma. Nesta região eventos de baixa amplitude que aparecem na modelagem 2.5D estão mais atenuados na modelagem 3D. Atribuímos esta diferença a efeitos de borda produzidos na modelagem 3D, causados pela menor extensão do modelo na direção  $x_2$  na malha 3D e reflexões nas camadas PML ao longo desta direção.

Para avaliar a qualidade e a precisão da modelagem 2.5D, a Figura 2.12 compara dois traços para um afastamento de 150 m a esquerda da fonte obtidos através da modelagem elástica 2.5D (linha tracejada) e da modelagem elástica 3D (linha contínua). Observa-se que os traços são praticamente coincidentes reiterando a equivalência entre a modelagem por diferenças finitas em 2.5D e a modelagem por diferenças finitas em 3D.

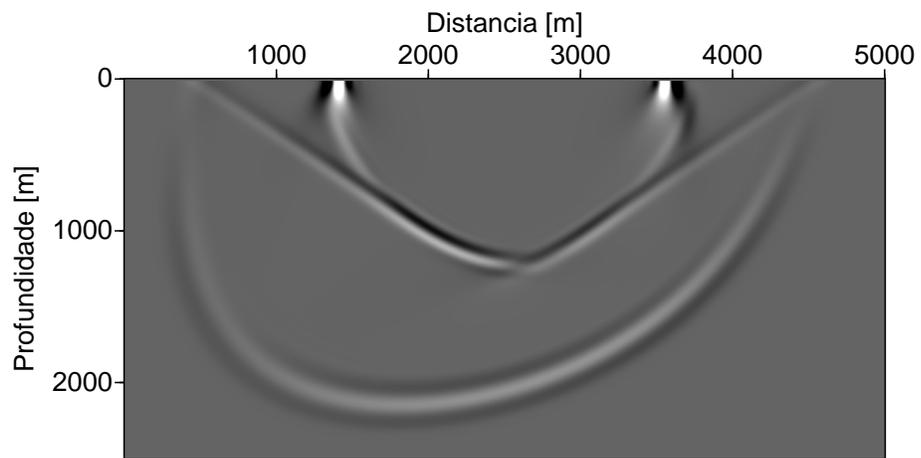
### 2.2.7 Semi-espaco Anisotrópico

Este modelo consiste de uma interface horizontal em 1750 m de profundidade separando uma camada anisotrópica na parte superior e uma isotrópica na inferior, com densidades de  $\rho = 1000,0 \text{ kg/m}^3$ , e parâmetros elásticos de  $C_{11} = 29,36 \text{ GPa}$ ,  $C_{12} = 12,57 \text{ GPa}$ ,  $C_{13} = 12,61 \text{ GPa}$ ,  $C_{15} = -3,89 \text{ GPa}$ ,  $C_{22} = 34,0 \text{ GPa}$ ,  $C_{23} = 11,03 \text{ GPa}$ ,  $C_{25} = -91,93 \text{ GPa}$ ,  $C_{33} = 22,54 \text{ GPa}$ ,  $C_{35} = -51,59 \text{ GPa}$ ,  $C_{44} = 6,31 \text{ GPa}$ ,  $C_{46} = -1,95 \text{ GPa}$ ,  $C_{55} = 7,41 \text{ GPa}$  e  $C_{66} = 9,59 \text{ GPa}$ . E mais,  $C_{14} = C_{16} = C_{24} = C_{26} = C_{34} = C_{36} = C_{45} = C_{56} = 0,0 \text{ GPa}$ . A camada inferior possui densidade  $\rho = 1000,0 \text{ kg/m}^3$ , e parâmetros elásticos  $\lambda = 12,57 \text{ GPa}$  e  $\mu = 6,31 \text{ GPa}$ ; ou seja, a velocidade da onda P é  $V_P = 5020 \text{ m/s}$  e a velocidade da onda S é  $V_S = 2510 \text{ m/s}$ .

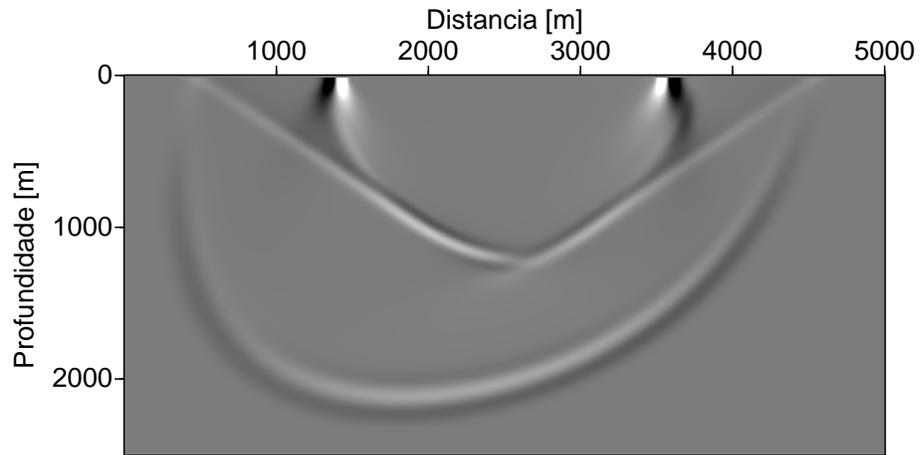
A fonte unidirecional foi posicionada nas coordenadas  $x = 1300 \text{ m}$ ,  $y = 750 \text{ m}$  e

$z = 650$  m. O pulso utilizado foi Blackman-Harris com frequência dominante de 10Hz e máxima de 20 Hz. Os 341 receptores estão posicionados a cada 5 m entre  $x = 0$  m e  $x = 1700$  m ao longo do eixo- $x$ , em  $y = 750$  m e  $z = 425$  m. As dimensões da malha utilizada foram  $n_x = 501, n_z = 501$ , e  $n_y = 301$  nós com espaçamento de 5,0 m em todas as direções.

A Figura 2.13 apresenta os instantâneos 2.5D e 3D da componente vertical do campo de velocidade, obtidos em malhas regulares intercaladas. A Figura 2.14 compara as respectivas seções sísmicas gravadas em 301 receptores igualmente espaçados. Em ambas as figuras, observamos uma boa concordância entre o campo 3D e sua aproximação 2.5D. Isto é confirmado na Figura 2.15, a qual mostra que a diferença entre as duas seções é inferior a 2.5% relativamente a amplitude máxima registrada.



(a)



(b)

Figura 2.6: Instantâneo da propagação da componente vertical da velocidade após 0,6 s, onde: (a) 2.5D, e (b) 2D. Não ocorre dispersão numérica ou instabilidade associadas às ondas Rayleigh na superfície livre do modelo.

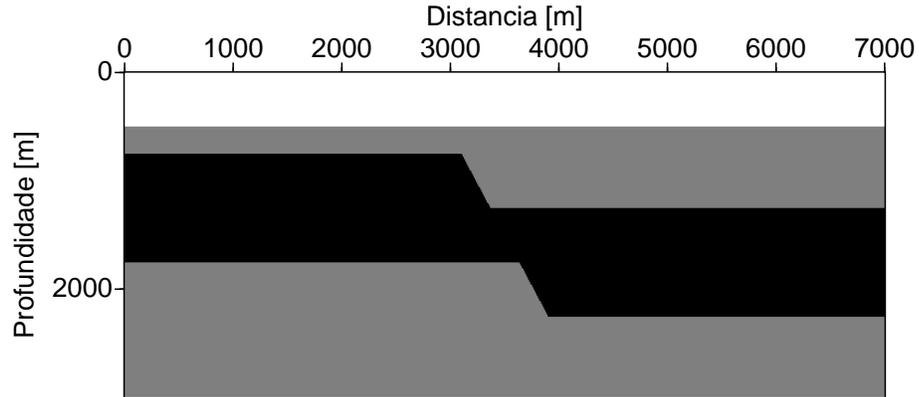
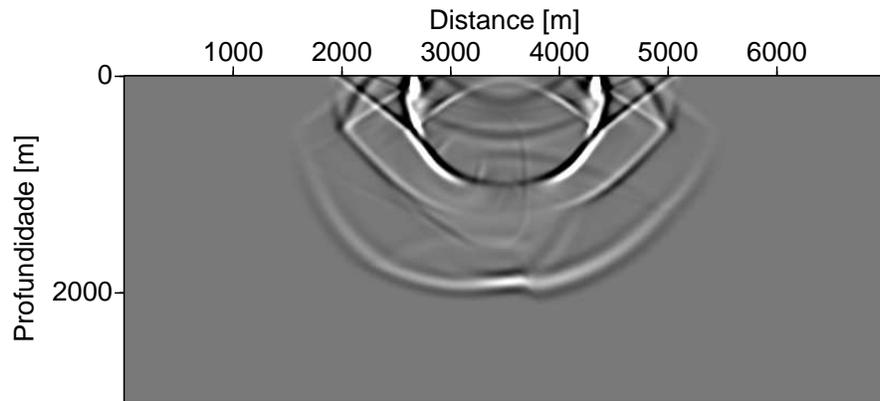
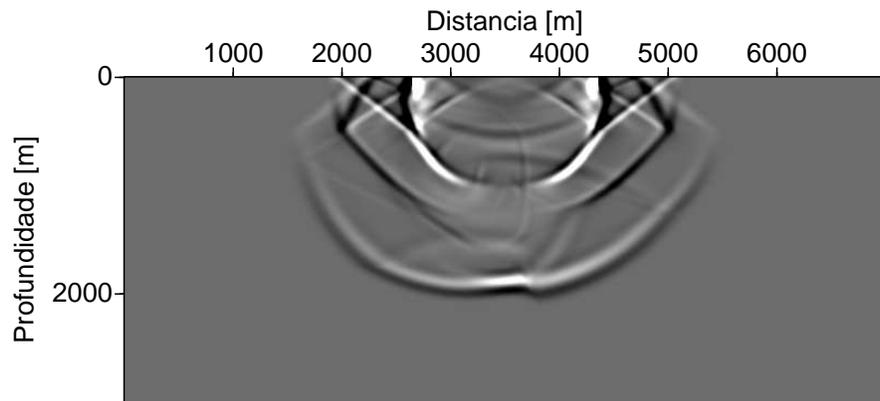


Figura 2.7: Modelo anisotrópico heterogêneo. O modelo apresenta uma camada isotrópica na parte superior, na parte inferior uma camada anisotrópica contendo uma camada isotrópica em seu interior



(a)



(b)

Figura 2.8: Instantâneos da componente vertical do campo de velocidade obtido após 0,3 s de propagação no modelo heterogêneo e anisotrópico da Figura 2.7, (a) 2.5D e (b) 2D. Destaca-se na modelagem 2.5D a maior perda de amplitude por espalhamento geométrico, a fase simétrica e a forte amplitude das ondas Rayleigh.

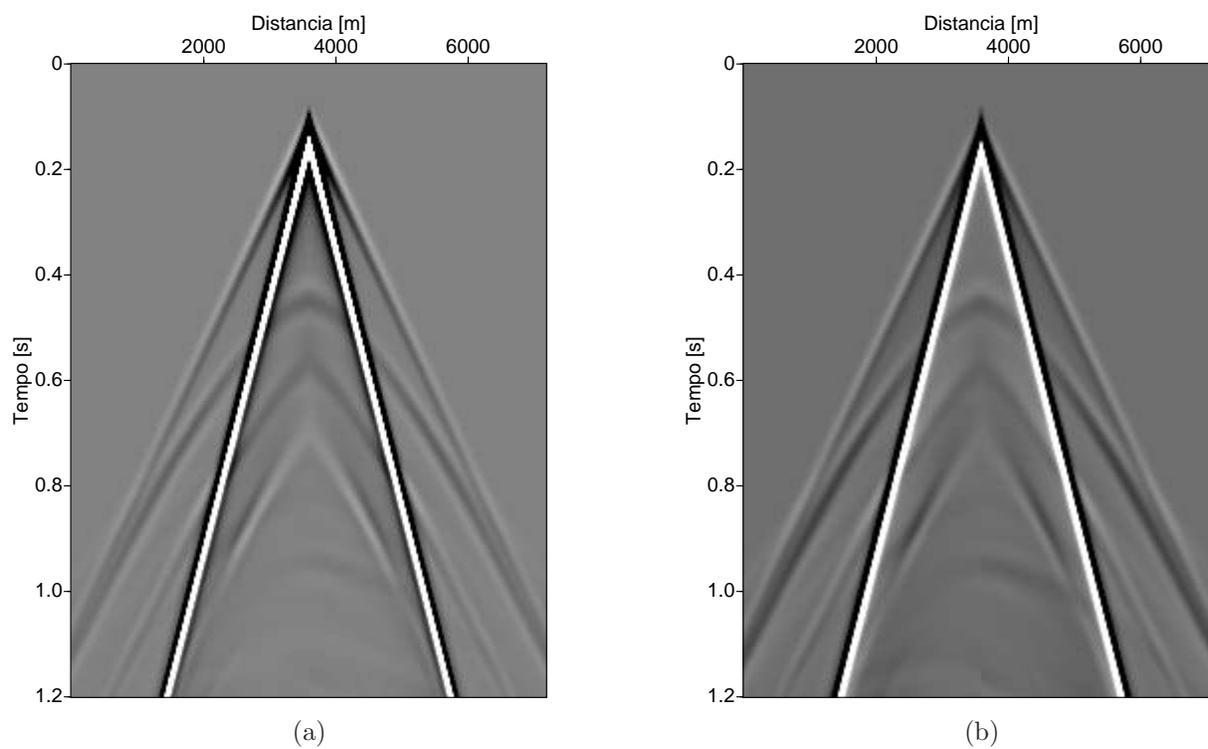


Figura 2.9: Sismograma da componente vertical do campo de velocidade no modelo heterogêneo anisotrópico da Figura 2.7, resultados (a) 2.5D e (b) 2D.

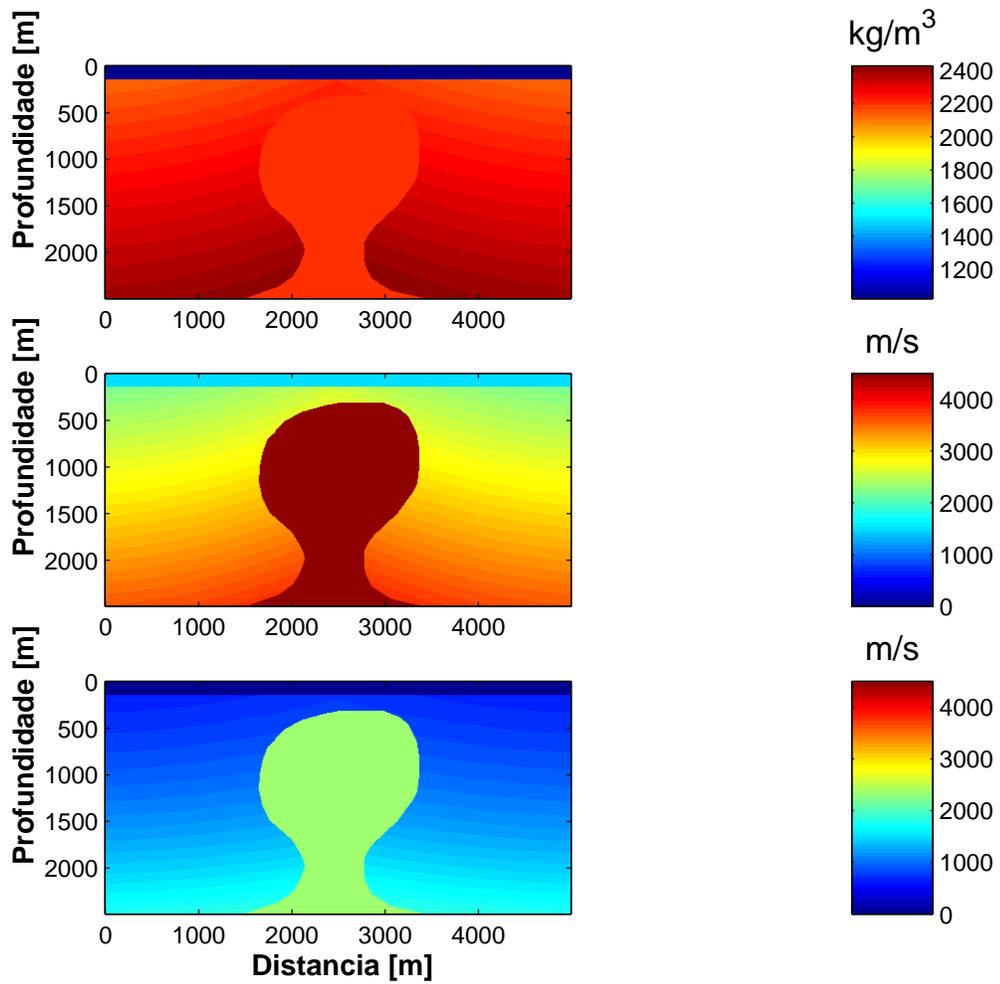
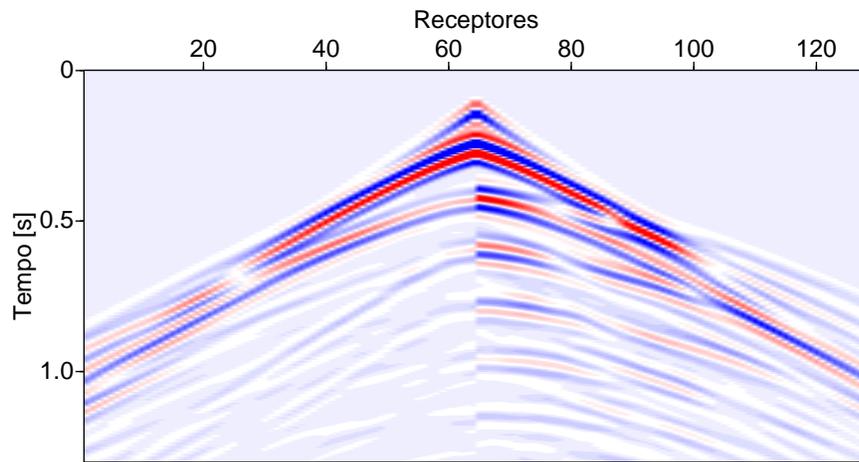
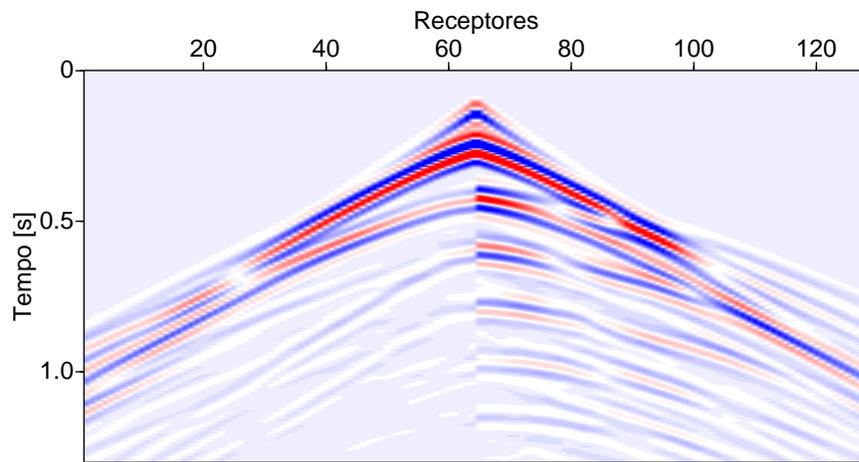


Figura 2.10: Densidade, velocidade da onda P e velocidade da onda S, para um modelo com um domo de sal.



(a)



(b)

Figura 2.11: Campo de tensão para o modelo com domo de sal mostrado na Figura 2.10, onde os resultados são respectivamente (a) 2.5D e (b) 3D

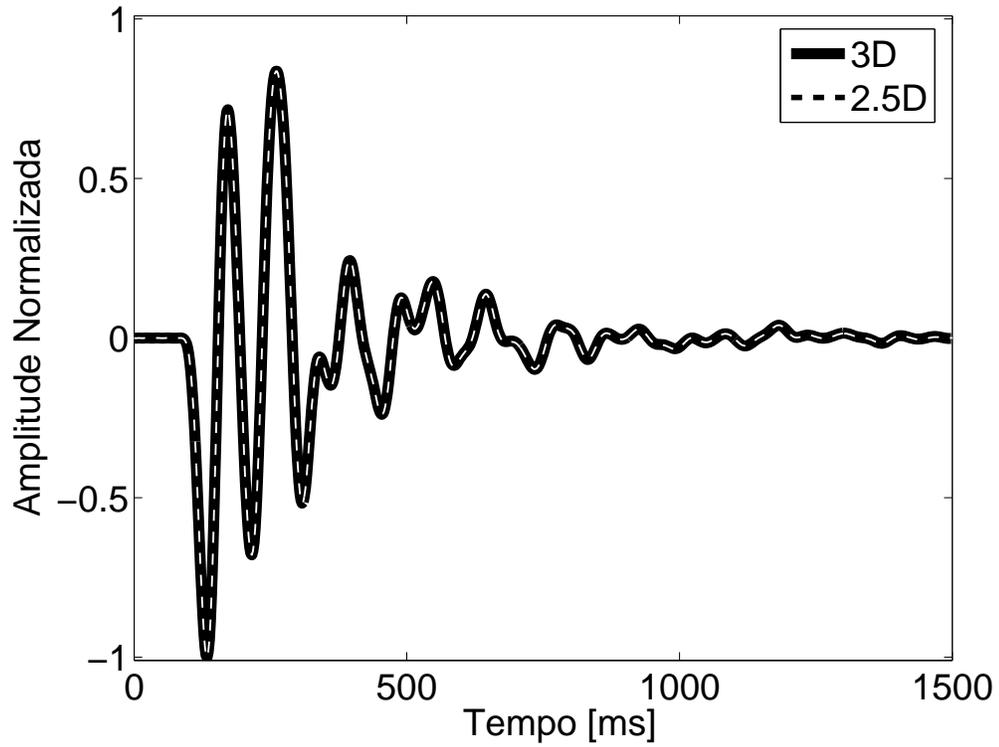


Figura 2.12: Comparação do traço obtido pela modelagem elástica 2.5D (linha tracejada) e o correspondente traço 3D (linha contínua). Destaca-se nessa figura a coincidência entre os traços gerados através da modelagem 2.5D e 3D

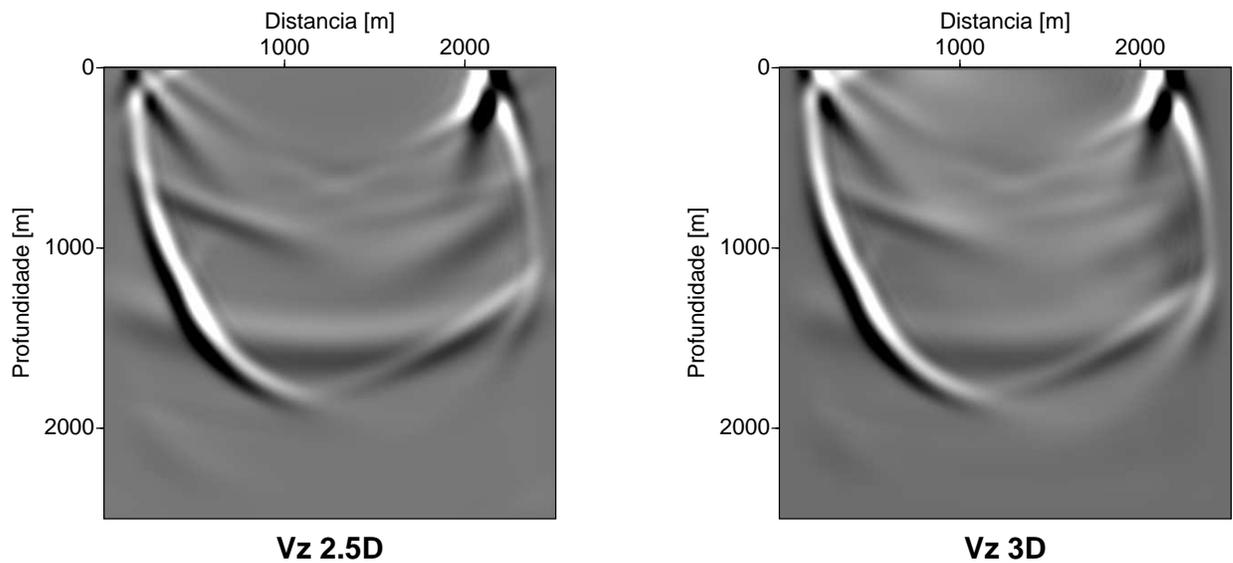


Figura 2.13: Instantâneos da componente vertical do campo de velocidade após 0,5 s de propagação no modelo com um semi-espaco anisotrópico.

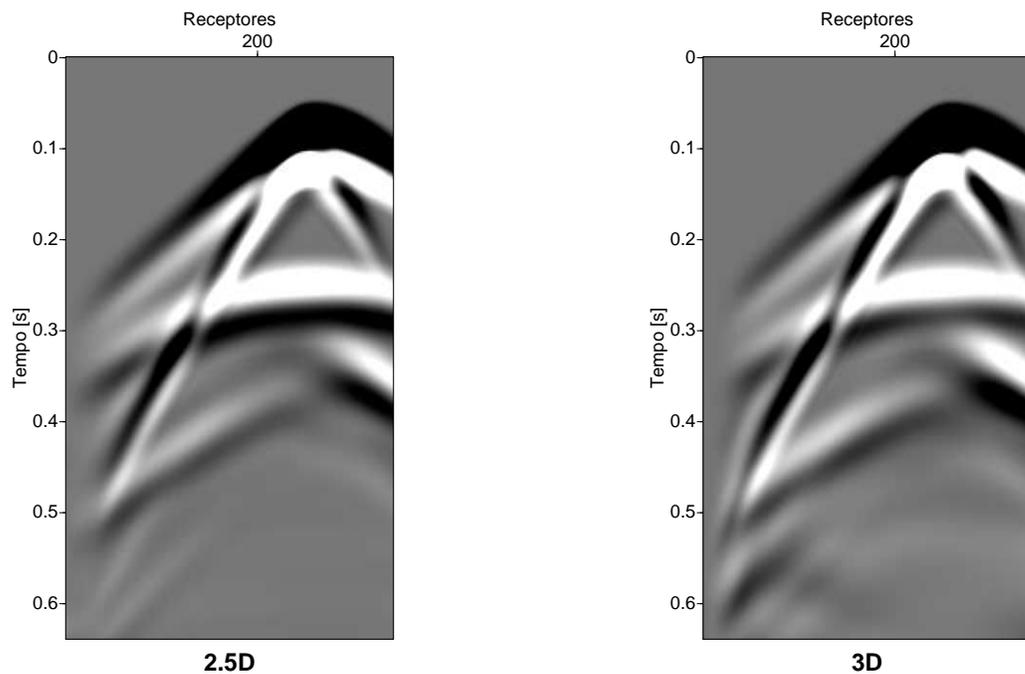


Figura 2.14: Sismograma da componente vertical do campo de velocidade para o modelo com um semi-espaço anisotrópico.

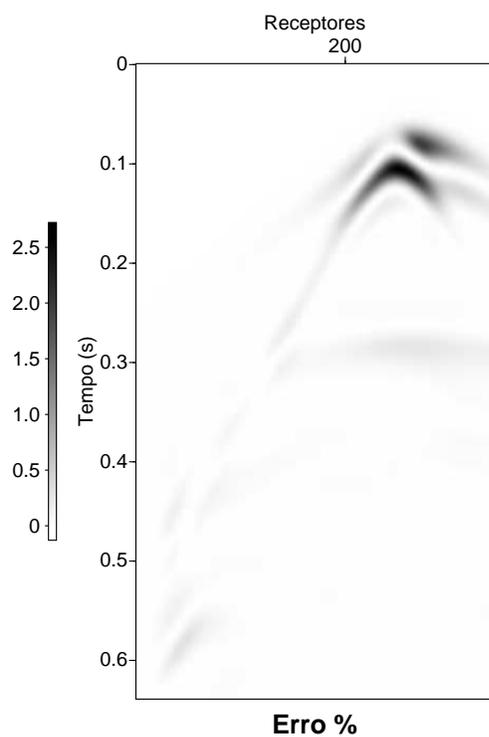


Figura 2.15: Sismograma da diferença relativa da componente vertical da velocidade para as modelagens 2.5D e 3D. O erro percentual foi calculado relativo a máxima amplitude da modelagem 3D.

### 3 CORREÇÃO DE OBLIQUIDADE NA MIGRAÇÃO REVERSA NO TEMPO

Neste capítulo apresentamos novas condições de imagem para a correção da iluminação e da obliquidade dos eventos nas seções migradas por RTM baseadas na informação do vetor de Poynting, motivado na análise de fase estacionária da condição de imagem padrão apresentada por Claerbout (1985).

A migração reversa no tempo (RTM) está baseada na propriedade de reversibilidade temporal da equação da onda acústica e na condição de imagem dada pela correlação cruzada entre o campo de onda incidente e o campo de onda reverso no tempo (CLAERBOUT, 1985). Várias implementações de RTM utilizando esta condição de imagem estão relatadas na literatura (BAYSAL; KOSLOFF; SHERWOOD, 1983; KOSLOFF; BAYSAL, 1983; MCMECHAN, 1983). A RTM não apresenta limitações em relação ao grau de heterogeneidade do modelo de velocidade e é capaz de migrar eventos associados a ondas do tipo *diving waves*, que não podem ser focalizadas diretamente através da migração por continuação para baixo do campo de ondas. Entretanto, a RTM apresenta suas dificuldades. As duas maiores são as anomalias nas imagens migradas causadas por retroespalhamento e a amplitude dos eventos migrados que não são proporcionais a refletividade (BIONDI, 2006). Para reduzir as anomalias causadas por retroespalhamento, várias abordagens têm sido propostas. Guitton, Kaelin e Biondi (2007) utilizaram um método de quadrados mínimos para atenuação, Fletcher et al. (2005) introduziram uma nova equação de onda para atenuar eventos retroespalhados e Yoon e Marfurt (2006) introduzem a condição de imagem utilizando o vetor de Poynting.

Várias abordagens para melhorar a preservação de amplitudes em RTM estão baseadas na compensação de amplitude com diferentes estratégias de estabilização (VALENCIANO; BIONDI, 2003; KAELIN; GUITTON, 2006). Mais recentemente, Chattopadhyay e McMechan (2008) compararam explicitamente as condições de imagem mais comumente utilizadas na prática para esclarecer quais são mais eficazes para compensação de amplitude. Este autores concluem que condições de imagem que utilizam a razão entre o campo retropropagado e o campo incidente apresentam melhor resolução, mesmo que não representem com acurácia a refletividade do modelo. Para "entender" as amplitudes na RTM, Haney et al. (2005) efetuou a análise assintótica da condição de imagem por correlação cruzada. A análise pressupõe um único refletor plano em um meio homogêneo, cobertura completa e abertura infinita em 3D. Estes autores demonstraram que as amplitudes na RTM são afetadas por um fator de obliquidade que depende do mergulho do refletor.

Baseados no resultado de Haney et al. (2005), propomos uma nova condição de imagem para preservar a amplitude na RTM. A idéia é corrigir o fator de obliquidade assintoticamente introduzindo um fator de peso na condição de imagem normalizada pelo campo de onda incidente. Apresentamos experimentos numéricos que mostram a melhoria na qualidade das imagens migradas usando RTM. Também observamos melhoria nas amplitudes quando a correção do fator de obliquidade é combinada com a compensação de iluminação.

### 3.1 METODOLOGIA

Iniciamos nossa discussão revisando a análise assintótica da condição de imagem por correlação (HANEY et al., 2005). Baseado nesse resultado propomos uma condição de imagem para a RTM a qual melhora a amplitude das imagens corrigindo o espalhamento geométrico e as distorções provocadas pela inclinação do refletor.

#### 3.1.1 Análise assintótica da condição de imagem na migração reversa no tempo

A condição de imagem padrão para migração reversa no tempo de seções tiro-comum apresentada por Claerbout (1985) é dada por:

$$I(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{x}_s} \sum_{\mathbf{x}_g} \int_0^{t_{max}} p_s(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_s) p_g(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_g) dt, \quad (3.1)$$

produz uma seção migrada  $I(\mathbf{x})$ , com deslocamento zero no tempo e no espaço, entre dois campos de ondas em que  $p_s(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_s)$  representa o campo propagado no sentido direto do tempo a partir da fonte,  $\mathbf{x}_s$ , para o ponto imagem  $\mathbf{x}$ ,  $p_g(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_g)$  representa o campo que é propagado no sentido reverso do tempo a partir dos receptores,  $\mathbf{x}_g$ , para o ponto imagem, e  $t_{max}$  é o tempo de aquisição.

A análise assintótica da condição de imagem (3.1) foi apresentada por Haney et al. (2005). No trabalho em questão foi considerado um refletor plano com ângulo de mergulho  $\alpha$  ao longo da direção do eixo  $x$  ( Figura 3.1 ), um meio homogêneo em que a velocidade da onda P é  $c_P$ , com cobertura ilimitada de fontes e receptores. Usamos o método da fase estacionária e calculamos a aproximação para altas frequências para a equação (3.1). Cujo resultado é:

$$I(\mathbf{x}) \approx \pi C^3 c_P^3 \frac{R(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0)}{\cos^3 \alpha} \frac{\text{sgn}(\zeta)}{\|\zeta\|} w'' \left( \frac{2 \cos \alpha}{c_P} \zeta \right) \otimes w'' \left( \frac{2 \cos \alpha}{c_P} \zeta \right), \quad (3.2)$$

onde  $\zeta = z - z_R$ ,  $z_R$  sendo a profundidade do refletor na posição horizontal  $(x, y)$  do ponto

imagem  $\mathbf{x} = (x, y, z)$ . Além disso,  $R(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_s)$  é coeficiente de reflexão para incidência normal associado ao par fonte-receptor no ponto de coincidência  $\mathbf{x}_s = \mathbf{x}_g = \mathbf{x}_0 = (x + z_R \tan \alpha, y, 0)$ ,  $C$  é uma constante e  $w(t)$  é o pulso fonte. O símbolo  $\otimes$  representa a operação de correlação e aspas duplas correspondem a derivada segunda com respeito ao argumento.

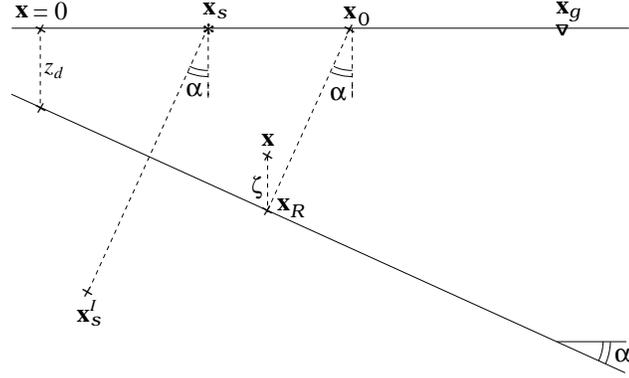


Figura 3.1: Representação de um refletor plano inclinado separando duas camadas homogêneas.

A expressão (3.2) difere do resultado de Haney et al. (2005) apenas pela presença do fator de estiramento do pulso,  $2 \cos \alpha / c_P$ , nos argumentos de ambos os pulsos fonte. Como destacado anteriormente por Haney et al. (2005), para este exemplo, notamos que: (a) o espalhamento geométrico é corrigido sempre, mesmo sem nenhum termo de compensação de amplitude na condição de imagem; (b) o pulso é anti-simétrico em relação a posição do refletor; (c) a amplitude do pulso decai com a distância do refletor; (d) o fator de obliquidade  $1 / \cos^3 \alpha$  amplifica a amplitude da imagem com o mergulho do refletor, como na migração Kirchhoff. Na próxima seção propomos uma condição de imagem que pode compensar essa distorção na amplitude.

Embora a análise para obter a equação (3.2) tenha sido feita para um meio homogêneo, consideramos que a correção de obliquidade resultante pode ser aplicada em um meio heterogêneo, desde que, ele seja localmente suave nas proximidades do refletor. A razão é que os campos já foram propagados para esta região quando a condição de imagem é aplicada.

### 3.1.2 Condição de imagem usando vetor de Poynting

A condição de imagem usando o vetor de Poynting proposta por Yoon e Marfurt (2006), sem a compensação de iluminação, é definida pela expressão:

$$I(\mathbf{x}) = \int_{\mathbf{x}_s} \int_{\mathbf{x}_g} \int_0^{t_{max}} W(\mathbf{S}_s, \mathbf{S}_g) p_s(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_s) p_g(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_g) dt d\mathbf{x}_s d\mathbf{x}_g ; \quad (3.3)$$

sendo adicionado um peso  $W(\mathbf{S}_s, \mathbf{S}_g)$  com relação à operação (3.1) e nesta expressão o vetor de Poynting  $\mathbf{S}$  representa o fluxo de energia acústica dado por:

$$\mathbf{S} = p\mathbf{v} , \quad (3.4)$$

onde  $p$  representa o campo de pressão e  $\mathbf{v}$  é o campo de velocidade vetorial. Os índices  $s$  e  $g$  indicam o fluxo de energia associado ao campo da fonte e ao campo dos receptores. A função peso  $W(\mathbf{S}_s, \mathbf{S}_g)$  foi proposta para filtrar eventos associados ao ângulo de espalhamento  $\gamma$ . Yoon e Marfurt (2006) propuseram que

$$\cos \gamma = \frac{\mathbf{S}_s \cdot \mathbf{S}_g}{\|\mathbf{S}_s\| \|\mathbf{S}_g\|} \quad (3.5)$$

Para ajustar um ângulo máximo de espalhamento para os eventos utilizados na formação da imagem, o peso  $W(\mathbf{S}_s, \mathbf{S}_g)$  é calculado por:

$$W(\mathbf{S}_s, \mathbf{S}_g) = \begin{cases} 1, & \text{se } \gamma < \gamma_{\max}, \\ 0, & \text{para outros valores.} \end{cases} \quad (3.6)$$

A desvantagem desse peso é a dependência da escolha do ângulo máximo  $\gamma_{\max}$ , para o qual não há nenhum critério físico óbvio disponível. Propomos usar a informação do vetor de Poynting para construir uma função peso suave, baseada nos potenciais ângulos de reflexão  $\theta = \gamma/2$ , indicado na Figura 3.2, em vez do ângulo de espalhamento  $\gamma$ . Este peso é dado por

$$W(\mathbf{S}_s, \mathbf{S}_g) = \cos^n \theta; \quad (3.7)$$

onde o expoente  $n$  pode ser escolhido livremente. Nossos testes numéricos indicam que  $n \geq 3$  tem melhores resultados na redução dos efeitos do retroespalhamento. O ângulo de bissecção,  $\theta = \gamma/2$  pode ser detectado a partir da informação do vetor de Poynting por

$$\cos^2 \theta = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\mathbf{S}_s \cdot \mathbf{S}_g}{\|\mathbf{S}_s\| \|\mathbf{S}_g\|} \right) \quad (3.8)$$

A ponderação (3.7) evita a introdução do ângulo máximo não físico  $\gamma_{\max}$ , bem como reduz os efeitos de borda no corte abrupto das extremidades do operador.

Desse modo, a ponderação pelo ângulo de reflexão, definida por  $\cos^3 \theta$ , segue próxima a outro modo simples de remover artefatos de migração, a aplicação do filtro Laplaciano na imagem migrada por empilhamento (YOUNG; ZHOU, 2001). Zhang e Sun (2008) mostraram que aplicando um filtro Laplaciano à imagem empilhada, em conjunto com um filtro  $1/\omega^2$  aplicado ao dado de entrada e o reescalonamento do dado de saída pelo produto com o quadrado da velocidade de migração, é equivalente a aplicar um peso  $\cos^2 \theta$  às famílias de

ângulos, desse modo relembrando o peso  $\cos^3 \theta$ .

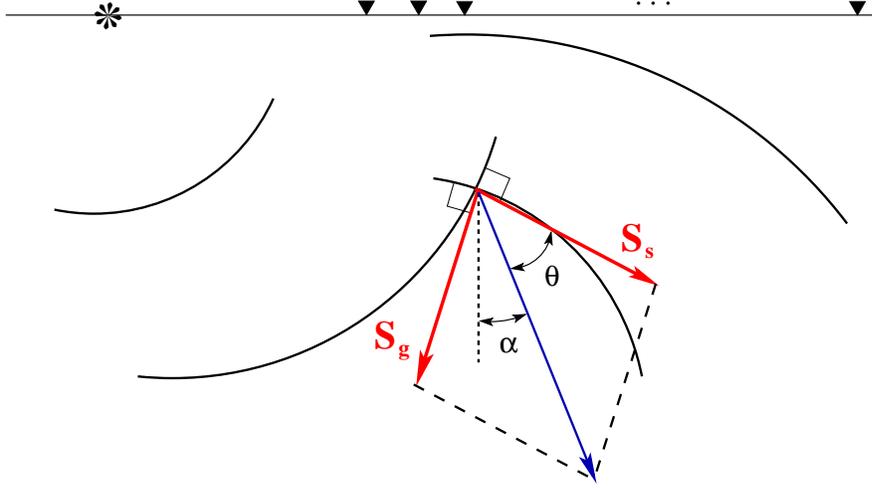


Figura 3.2: Frentes de onda para o campo incidente e o campo retropropagado e os correspondentes vetores de Poynting associados,  $\mathbf{S}_s$  e  $\mathbf{S}_g$ , em um ponto imagem. O ângulo  $\theta$  corresponde a metade do ângulo de espalhamento. O ângulo  $\alpha$  entre a soma dos vetores de Poynting e direção vertical é igual ao ângulo de mergulho de um potencial refletor no ponto imagem.

### 3.1.3 Fator de compensação da obliquidade

Propomos utilizar a informação do vetor de Poynting para compensar o fator de obliquidade associado à inclinação do refletor em relação a direção horizontal, na equação (3.2). O ângulo  $\alpha$ , indicado na Figura 3.2, entre a direção do vetor de Poynting resultante da soma dos vetores de Poynting da fonte e receptor, e a direção vertical podem ser calculados a partir de

$$\cos \alpha = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \left( \frac{\mathbf{S}_s}{\|\mathbf{S}_s\|} + \frac{\mathbf{S}_g}{\|\mathbf{S}_g\|} \right) / \left\| \left( \frac{\mathbf{S}_s}{\|\mathbf{S}_s\|} + \frac{\mathbf{S}_g}{\|\mathbf{S}_g\|} \right) \right\|. \quad (3.9)$$

isto fornece o mergulho do refletor para um evento de reflexão. Assim, nós podemos colocar diretamente o peso na equação (3.3) como

$$W(\mathbf{S}_s, \mathbf{S}_g) = \cos^3 \alpha. \quad (3.10)$$

Aplicando a mesma análise de fase estacionária descrita acima para o modelo formado por uma interface mergulhante, que separa dois meios homogêneos, chegamos no resultado apresentado na equação (3.2) sem o fator de obliquidade. Para o caso 2D, a compensação da obliquidade é obtida com  $W(\mathbf{S}_s, \mathbf{S}_g) = \cos^{5/2} \alpha$ . Note que a função-peso (3.10) pode ser combinada com os pesos do vetor de Poynting (3.6) ou (3.7) para simultaneamente corrigir

a amplitude e reduzir o retro espalhamento

### 3.1.4 Compensação de iluminação

Na implementação por diferença finitas da migração reversa no tempo 2.5D, discutida a seguir, o campo de ondas é registrado apenas ao longo de uma linha. Portanto não é possível representar a situação de receptores uniformemente distribuídos em todo um plano de aquisição como se pressupõe na dedução da equação (3.2). Em consequência a correção do espalhamento geométrico não é efetuada. Particularmente, não há como compensar pelo espalhamento geométrico fora da linha em que é efetuado o levantamento (BLEISTEIN; COHEN; JR., 2001). Adicionalmente, a análise acima não leva em consideração outros aspectos que afetam a amplitude quando aplicada a RTM em modelos de velocidade complexos, como a falta de cobertura de fontes e receptores e a baixa iluminação dos alvos.

Para compensar a amplitude dos eventos migrados dos efeitos devido ao espalhamento geométrico e das limitações devido a geometria de aquisição dos dados efetua-se a compensação de iluminação. Este procedimento consiste em normalizar a condição de imagem correlação pela energia da fonte no ponto imagem (BIONDI, 2006). Contudo, sabe-se que isto intensifica artefatos de migração. Combinamos aqui o fator de obliquidade e a compensação de iluminação na condição de imagem:

$$I(\mathbf{x}) = \frac{\int_{\mathbf{x}_g} \int_0^{t_{max}} W(\mathbf{S}_s, \mathbf{S}_g) p_s(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_s) p_g(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_g) dt d\mathbf{x}_g}{\int_0^{t_{max}} p_s(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_s) p_s(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_s) dt} d\mathbf{x}_s . \quad (3.11)$$

Esta condição de imagem é avaliada na próxima seção através de experimentos numéricos, e são estudados os efeitos de diferentes funções-peso sobre os artefatos de migração.

## 3.2 IMPLEMENTAÇÃO

Avaliamos a condição de imagem com compensação de obliquidade sobre dois conjuntos de dados sintéticos. No primeiro experimento, a RTM foi aplicada usando a condição de imagem correlação, e as condições de imagem resultantes de sua associação: com a ponderação pelo ângulo de reflexão, com a correção de obliquidade, e com a ponderação pelo ângulo de reflexão adicionado à correção de obliquidade, todas sem e com compensação de iluminação. No segundo experimento foram aplicadas as condições de imagem que demonstraram os melhores resultados no primeiro experimento, tomando como referência a correlação aplicada no segundo conjunto de dados.

Primeiramente, a migração reversa foi aplicada sobre o modelo apresentado na Figura 3.3 e foram testadas várias condições de imagem para posterior comparação. Este modelo consiste de um ponto difrator criado por uma perturbação de densidade abaixo de uma interface plana mergulhante (com forte ângulo de inclinação com a direção horizontal) separando os dois semi-espacos, cuja a velocidade da onda  $p$  é 2500 m/s e 4000 m/s acima e abaixo do refletor, respectivamente. Foi utilizado um código de diferenças finitas acústico para gerar dados sintéticos do campo de pressão para 76 tiros entre as posições 1500 m e 3000 m espaçados por uma distância regular de 20 m. Cada seção de tiro comum possui 71 receptores, com o primeiro a uma distância de 100 m, e o último a uma distância de 1500 m e espaçamento de 20 m entre os receptores. As posições do primeiro e do último desses tiros, são indicadas na Figura 3.3, junto com seus respectivos receptores (linhas tracejadas e tracejadas com pontos). O tiro central desses 76 tiros é mostrado na Figura 3.4, onde a onda direta da fonte-receptor foi silenciada.

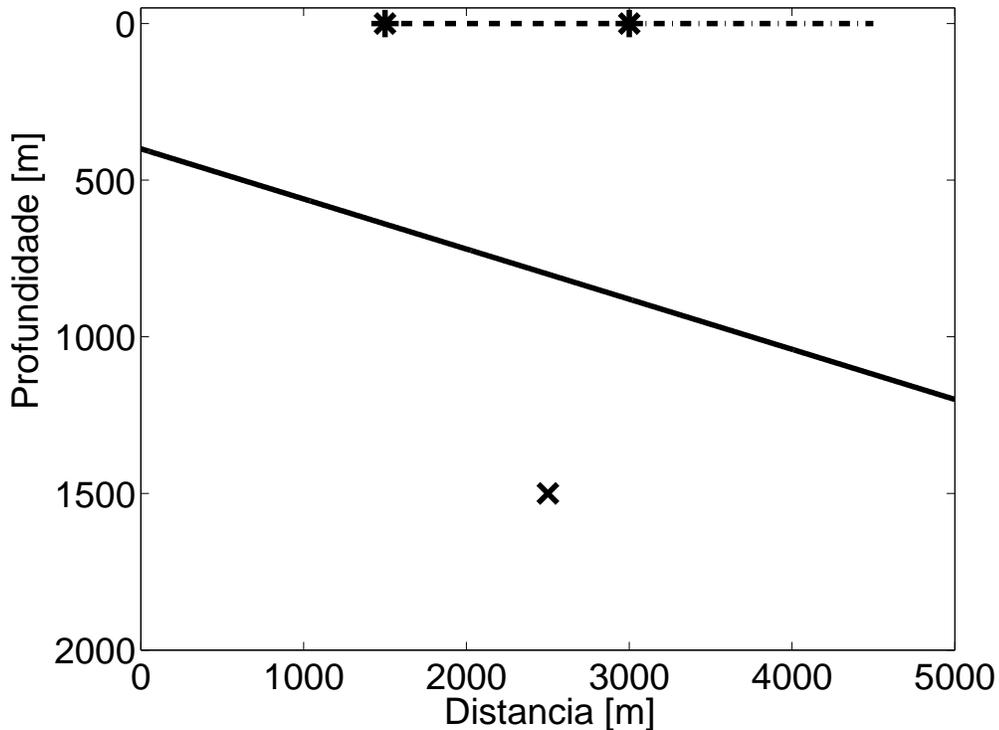


Figura 3.3: Geometria do primeiro exemplo numérico, mostrando a configuração de fontes e receptores, a interface inclinada entre duas camadas homogêneas e o ponto difrator em profundidade.

A Figura 3.5 mostra o resultado da RTM do tiro na Figura 3.4 usando diferentes condições de imagem. A velocidade de migração foi obtida a partir da velocidade original após uma passagem de um filtro de suavização para evitar artefatos causados pelo *stair-casing*, efeito de degrau causado pela má representação numérica do refletor mergulhante na computação do esquema de diferenças finitas (SYMES; TERYTYEV; VDOVINA, 2008).

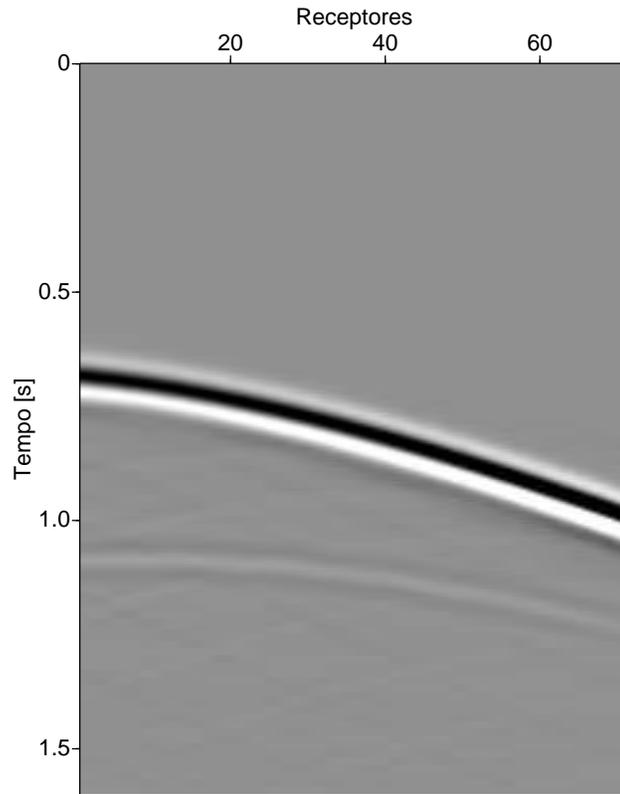


Figura 3.4: Seção tiro comum obtida após silenciamento da onda direta, correspondente ao modelo apresentado na Figura 3.3

Este procedimento regulariza a estimativa do vetor de Poynting. As Figuras 3.5a e 3.5b mostram os resultados da RTM usando a condição de imagem correlação e a correlação com compensação de iluminação. As Figuras 3.5c e 3.5d mostram o resultado da ponderação pelo ângulo de reflexão, as Figuras 3.5e e 3.5f mostram o resultado da correção de obliquidade, e as Figuras 3.5g e 3.5h o resultado da ponderação pelo ângulo de reflexão adicionado à correção de obliquidade, todas sem e com compensação de iluminação, respectivamente. Destacamos o forte artefato próximo a fonte na Figura 3.5a e a fraca amplitude no difrator. A Figura 3.5b mostra o difrator com forte amplitude e a redução dos artefatos próximo a fonte. Embora a compensação de iluminação intensifique os artefatos ao lado do receptores. A condição de imagem com ponderação pelo ângulo de reflexão (Figuras 3.5c e 3.5d) apresentam menos artefatos quando comparados às condições de imagem anteriores, ambos sem e com compensação de iluminação. Nota-se que a difração é sempre amplificada sem a compensação de iluminação. A correção de obliquidade (Figuras 3.5e e 3.5f) mostra algum retroespalhamento, mas apresenta redução nos eventos espúrios fora da região iluminada e em partes dos 'sorrisos' da migração. Trabalhando em conjunto a ponderação pelo ângulo de espalhamento adicionado à correção de obliquidade (Figuras 3.5g e h) conseguem reduzir

com mais eficácia os artefatos de migração.

Para melhor apreciação da qualidade das diferentes condições de imagem, a Figura 3.6 mostra os resultados após o empilhamento de todas as seções tiro comum. A redução dos artefatos de retroespalhamento pela combinação da ponderação pelo ângulo de reflexão adicionado à correção de obliquidade (Figuras 3.6g e h) é claramente visível.

O segundo exemplo numérico apresenta os resultados da RTM para o conjunto de dados Marmousi (VERSTEEG; GRAU, 1990). Esse conjunto de dados possui 240 tiros, cada seção tiro comum possui 96 receptores, e 200 m de afastamento-mínimo; o espaçamento entre tiros e entre receptores é de 25 m. O modelo de velocidade original do Marmousi é mostrado na Figure 3.7a. Uma versão suavizada deste modelo (Figura 3.7b) foi usada na RTM de modo a reduzir os artefatos de *stair-casing* na computação do método de diferenças finitas.

O dado Marmousi foi migrado após o silenciamento da onda direta, e sem qualquer tipo de pré-processamento. Nenhum tipo de atenuação de múltiplas em particular foi usado. As imagens RTM utilizando a condição de imagem correlação com e sem compensação de iluminação são apresentados na Figura 3.8. Os artefatos escuros na parte superior-direita e os pontos brancos na parte inferior-direita destas figuras são causados por retroespalhamento. Uma imagem muito mais clara é obtida com a condição de imagem com ponderação pelo ângulo de reflexão (Figura 3.9a). Restam apenas uns poucos artefatos, estes aparecem na imagem obtida usando a correção de obliquidade, embora não elimine completamente o retroespalhamento (Figura 3.10a). A imagem produzida com a combinação da ponderação pelo ângulo de reflexão, adicionado à correção de obliquidade (Figura 3.10b), apresenta muito menos artefatos do que as outras condições de imagem anteriormente apresentadas. Essa condição de imagem também recupera as amplitudes nas regiões mais profundas como ao redor da região do reservatório. Ainda são necessários estudos para combinar a compensação de obliquidade com compensação de imagem estabilizada (VALENCIANO; BIONDI, 2003; SCHLEICHER; COSTA; NOVAIS, 2008). Contudo, nossos experimentos numéricos indicam que a compensação de obliquidade pode melhorar as imagens produzidas por RTM para os dados testados e com grande potencial de aplicação em dados reais.

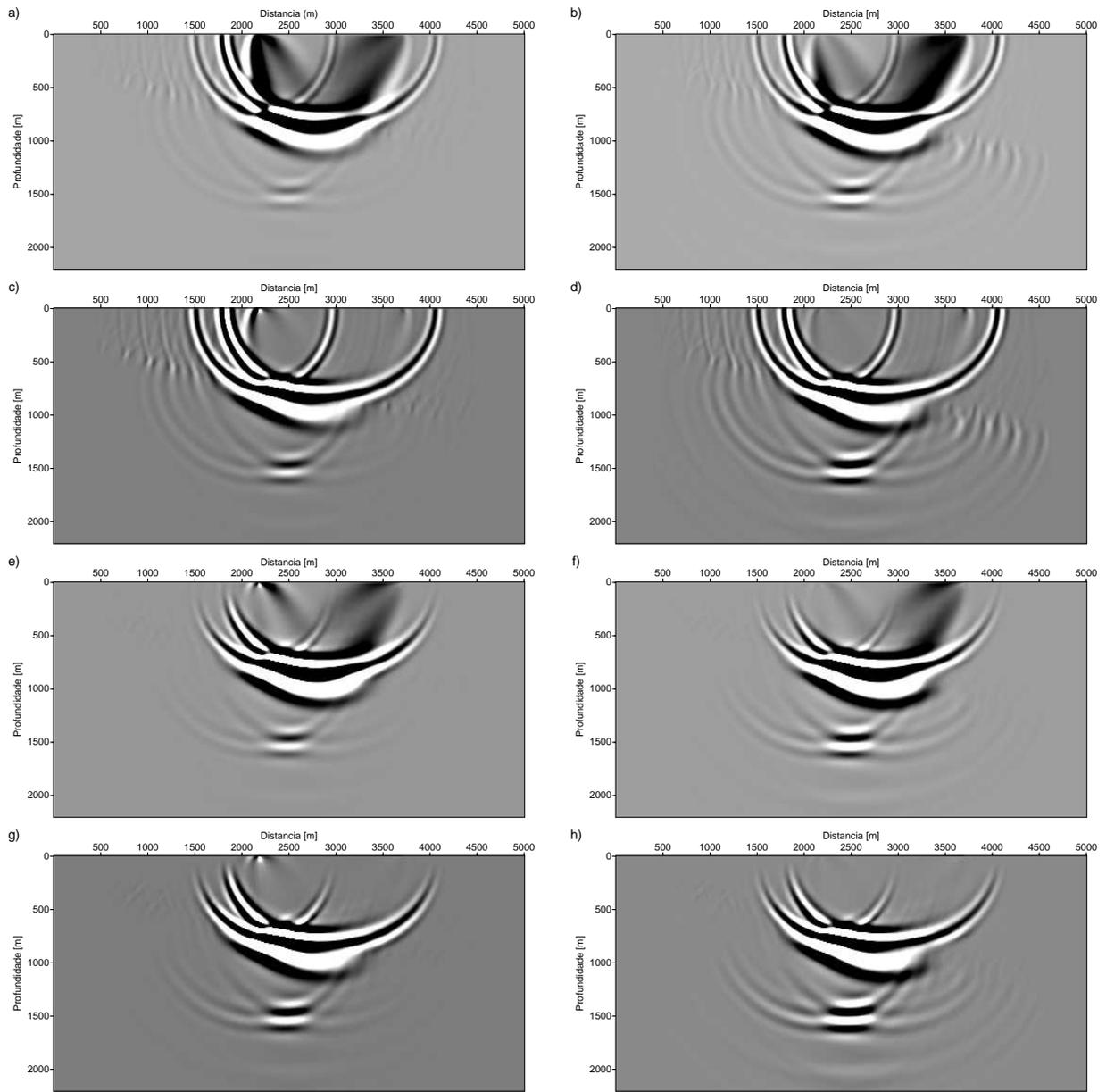


Figura 3.5: Migração RTM de uma única seção tiro comum com diferentes condições de imagem: (a) Correlação ; (b) Correlação com compensação de iluminação; (c) Ponderação pelo ângulo de reflexão; (d) Ponderação pelo ângulo de reflexão com compensação de iluminação; (e) Correção de obliquidade; (f) Correção de obliquidade e compensação de iluminação; (g) Ponderação pelo ângulo de reflexão adicionada à correção de obliquidade; (h) Ponderação pelo ângulo de reflexão com correção de obliquidade e compensação de iluminação.

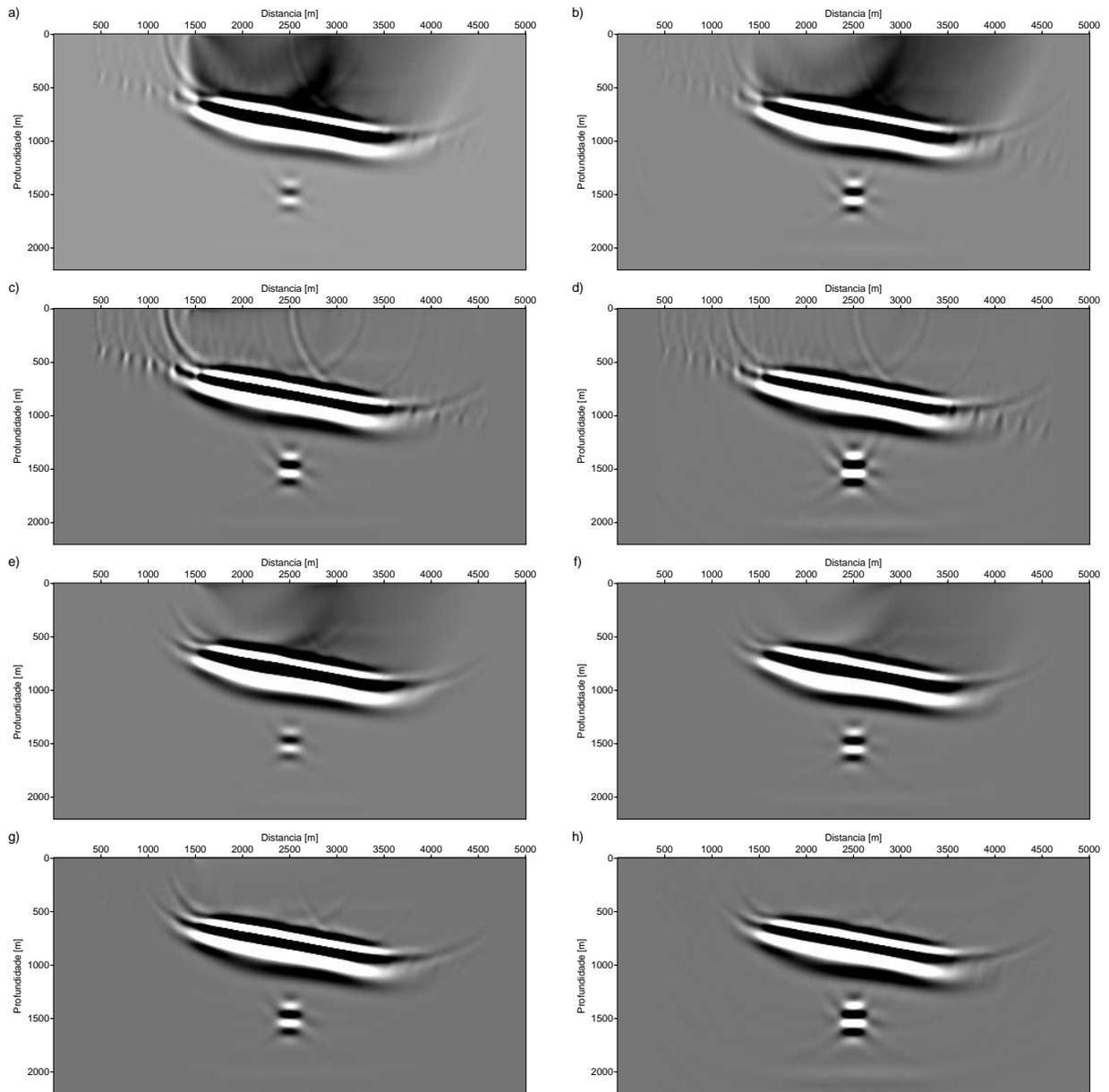
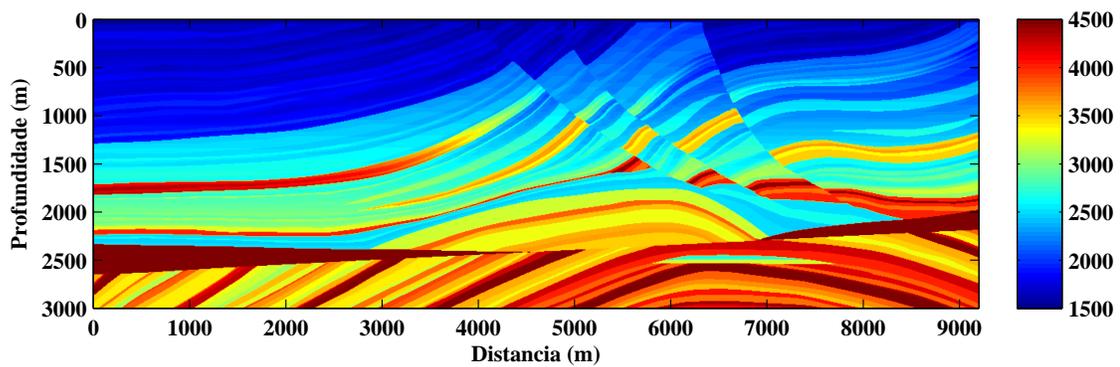
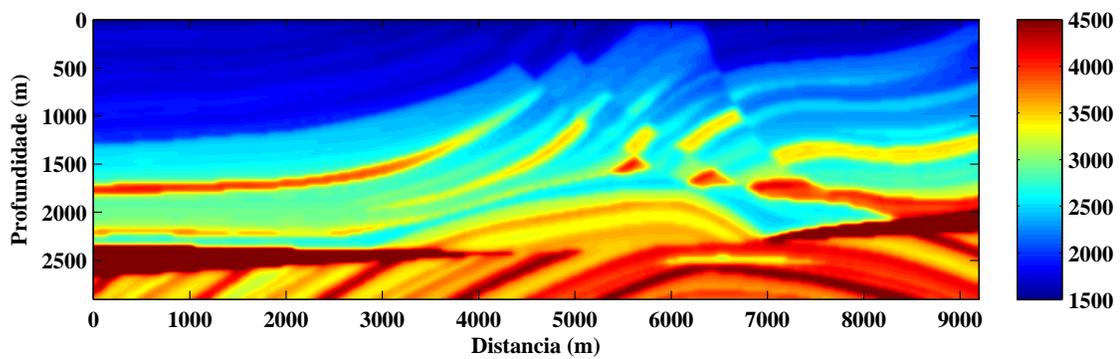


Figura 3.6: Migração RTM de múltiplas seções tiro comum, com diferentes condições de imagem: (a) Correlação ; (b) Correlação-cruzada com compensação de iluminação; (c) ponderação pelo ângulo de reflexão; (d) ponderação pelo ângulo de reflexão com compensação de iluminação; (e) Correção de obliquidade; (f) Correção de obliquidade com compensação de iluminação; (g) Ponderação pelo ângulo de reflexão com correção de obliquidade; (h) Ponderação pelo ângulo de reflexão com correção de obliquidade e compensação de iluminação.

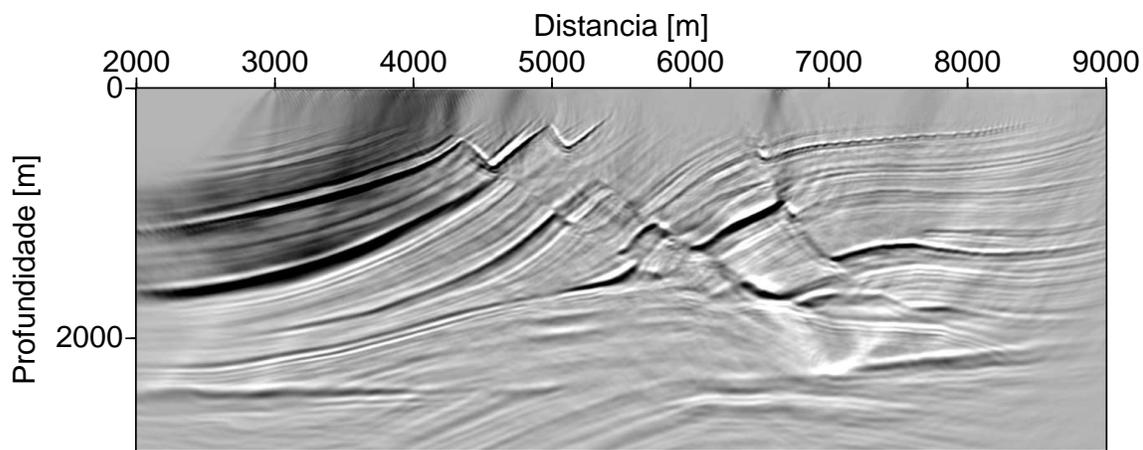


(a)

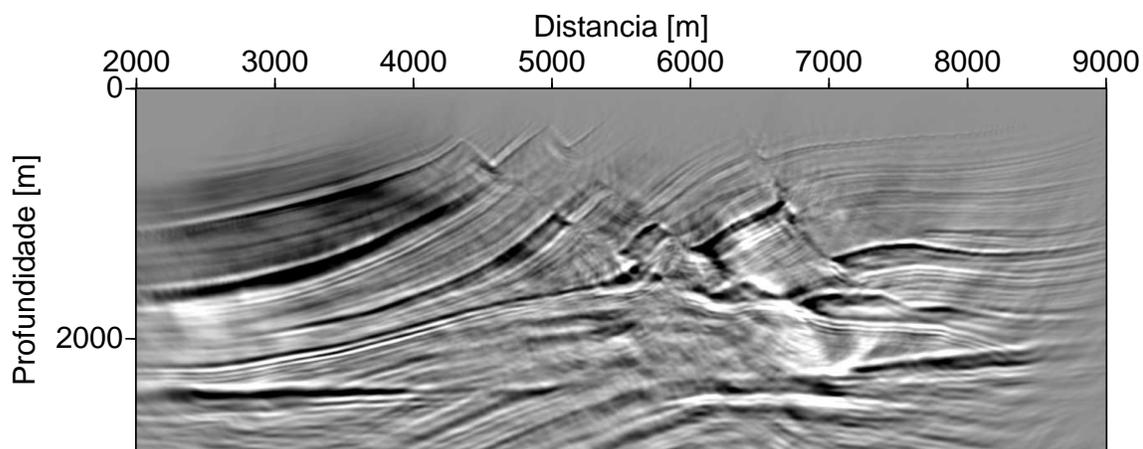


(b)

Figura 3.7: (a) Modelo de velocidade compressional Marmousi; (b) Modelo de velocidade compressional suavizado para migração RTM.

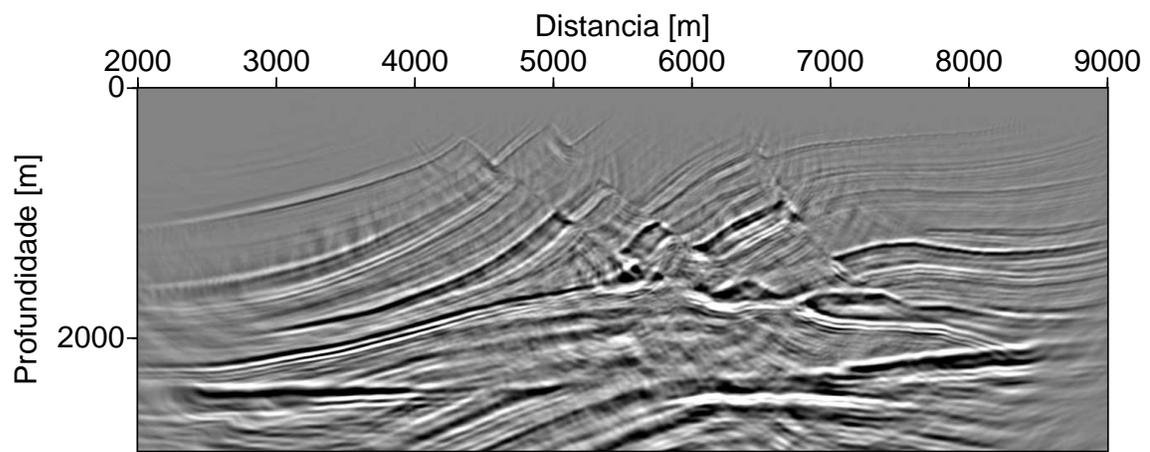


(a)



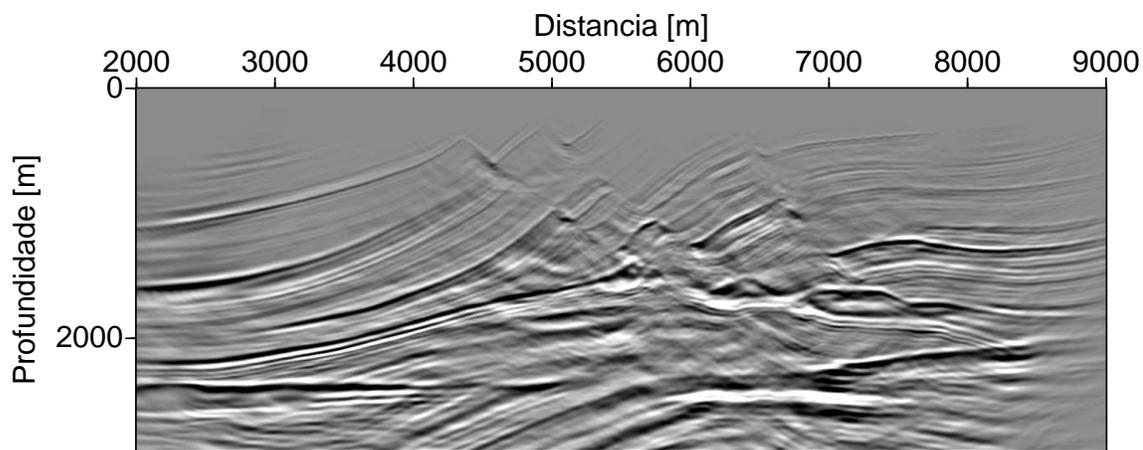
(b)

Figura 3.8: Resultados da RTM sobre o conjunto de dados Marmousi com diferentes condições de imagem: (a) correlação ; (b) correlação com compensação de iluminação;

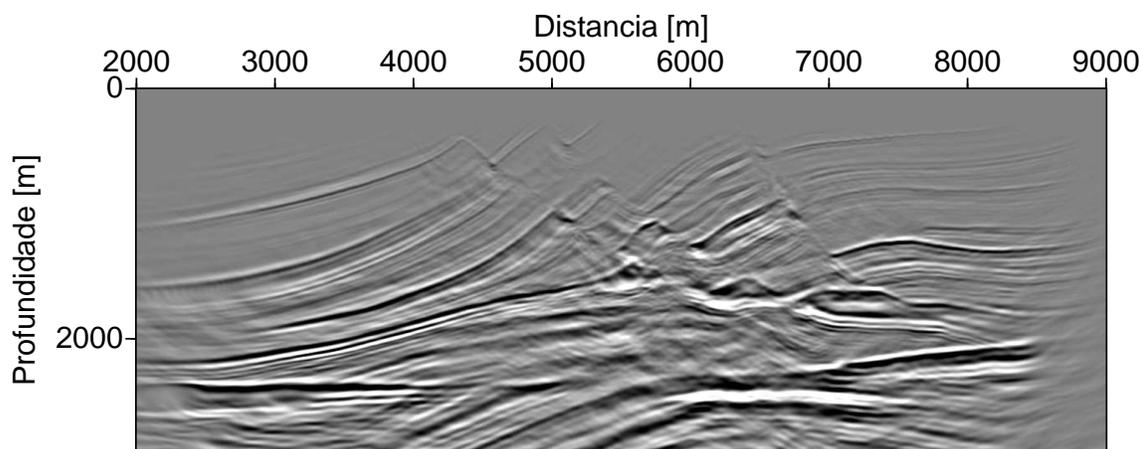


(a)

Figura 3.9: (a) Ponderação pelo ângulo de reflexão com compensação de iluminação;



(a)



(b)

Figura 3.10: (a) Correção de obliquidade com compensação de iluminação; (b) Ponderação pelo ângulo de reflexão adicionado à correção de obliquidade e compensação de iluminação.

## 4 MIGRAÇÃO REVERSA NO TEMPO EM 2.5D

Neste capítulo apresentamos a extensão da migração reversa no tempo para 2.5D em meios acústicos. Na RTM 2.5D os campos de onda da fonte e o campo de onda registrado nos receptores é propagado através de modelagem 2.5D. Aplicamos o algoritmo de modelagem acústica 2.5D por diferenças finitas proposto por Costa et al. (2005). A RTM 2.5D simula a propagação dos campo de onda da fonte e dos receptores em 3D. Consequentemente, o espalhamento geométrico e a fase do pulso sísmico são modelados corretamente. Esta abordagem torna possível recuperar amplitudes proporcionais a refletividade da subsuperfície quando se utiliza condições de imagem que compensem a iluminação não uniforme e o fator de obliquidade. Experimentos numéricos utilizando os dados sintéticos modelados em 2.5D demonstram uma melhor recuperação de amplitude e aumento do conteúdo de frequência da RTM 2.5D quando comparada com a RTM 2D.

A demanda computacional da migração reversa no tempo em 3D é alta comparada a migração por continuação para baixo do campo de onda (BIONDI, 2006). Entretanto, a redução do custo da computação paralela e o aumento da eficiência de arranjos de armazenamento tornam possível implementar a migração RTM para o imageamento de dados reais. As dificuldades em focalizar eventos com forte mergulho e estruturas complexas em modelos de velocidade com forte variação lateral, por exemplo, abaixo de domos de sal, aumentou a demanda por métodos de migração que simulem acuradamente a propagação nestes ambientes. A migração reversa no tempo é o melhor método conhecido para enfrentar este desafio.

Entretanto, há um problema com a recuperação de amplitude na RTM para o caso de dados sísmicos adquiridos ao longo de uma única linha. Nesta situação, a aplicação da RTM é feita utilizando extrapolação do campo de onda em 2D. Esta abordagem prejudica a extração de amplitude proporcionais ao coeficiente de reflexão pois os efeitos na amplitude causados pelo espalhamento geométrico em 3D são simulados incorretamente pela RTM 2D. Uma solução para este problema é estender o modelo para três dimensões pressupondo que o modelo de velocidades é invariante por translação e simular a propagação usando algoritmos em 3D. Em muitas situações esta abordagem é inaceitável, devido ao seu alto custo computacional, particularmente em relação ao armazenamento dos campos de onda. Uma solução menos dispendiosa é utilizar algoritmos de modelagem em 2.5D.

Neste capítulo implementamos a migração reversa no tempo em 2.5D aplicando as novas condições de imagem discutidas no Capítulo 3. Esta abordagem para o imageamento de dados de levantamentos 2D melhora a resolução das imagens migradas e a compensação de amplitude. O aumento da resolução sísmica decorre da modelagem para propagação do

campo de ondas em 3D conforme discutido no Capítulo 2 (COSTA et al., 2009). A melhor compensação de amplitude decorre das novas condições de imagem propostas nesta tese.

#### 4.1 METODOLOGIA

A RTM em 2.5D requer que se simule a propagação do campo de ondas em 3D. O campo acústico em 3D é obtido resolvendo o sistema de equações apresentado em (4.1). Utilizando a notação indicial e a convenção de somatório, o sistema de equações que governa a propagação do campo de ondas acústico pode ser escrito na forma:

$$\begin{aligned}\rho(\mathbf{x})\frac{\partial v_j(\mathbf{x}, t)}{\partial t} &= -\frac{\partial p(\mathbf{x}, t)}{\partial x_j} + f_j(\mathbf{x}, t); \\ \frac{\partial p(\mathbf{x}, t)}{\partial t} &= -\rho(\mathbf{x})c^2(\mathbf{x})\frac{\partial v_j(\mathbf{x}, t)}{\partial x_j} + \frac{\partial q(\mathbf{x}, t)}{\partial t}; \quad (j = 1, 2, 3); \end{aligned} \quad (4.1)$$

onde  $\rho$  é densidade do meio,  $c$  é a velocidade de propagação,  $v_j$  e  $f_j$  representam as componentes do campo de velocidade e da densidade de forças de volume;  $p$  representa o campo de pressão e  $\frac{\partial q}{\partial t}$  é a taxa de injeção de volume.

Para a modelagem 2.5D, consideramos que as propriedades do meio são invariantes ao longo da direção  $x_2$ . Neste caso, é conveniente representar o campo acústico e a distribuição de fontes a partir domínio de Fourier por

$$v_J(\mathbf{x}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{v}_J(\mathbf{X}, k_2, t) \exp(ik_2x_2) dk_2, \quad (4.2)$$

e

$$p(\mathbf{x}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{p}(\mathbf{X}, k_2, t) \exp(ik_2x_2) dk_2, \quad (4.3)$$

onde  $k_2$  é o número de onda associado com  $x_2$  e  $\mathbf{X} \equiv (x_1, x_3)$ . Além disso,  $\tilde{v}_J(\mathbf{X}, k_2, t)$  e  $\tilde{p}(\mathbf{X}, k_2, t)$  são os valores das componentes complexas do respectivo campo no domínio do número de onda  $k_2$ . Para evitar a introdução de novos símbolos, a partir de agora definimos  $\tilde{v}_J \equiv \tilde{v}_J(\mathbf{X}, k_2, t)$ ,  $\tilde{p} \equiv \tilde{p}(\mathbf{X}, k_2, t)$ ,  $\tilde{f}_J \equiv \tilde{f}_J(\mathbf{X}, k_2, t)$ , e  $\frac{\partial \tilde{q}}{\partial t} \equiv \frac{\partial \tilde{q}}{\partial t}(\mathbf{X}, k_2, t)$ . Os componentes de Fourier do campo acústico, e suas distribuições de fontes obedecem o sistema de equações complexas

$$\begin{aligned}\rho(\mathbf{X})\frac{\partial \tilde{v}_J}{\partial t} &= -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial X_J} + \tilde{f}_J \\ \rho(\mathbf{X})\frac{\partial \tilde{v}_2}{\partial t} &= -ik_2\tilde{p} \\ \frac{\partial \tilde{p}}{\partial t} &= -\rho(\mathbf{X})c^2(\mathbf{X})\left(\frac{\partial \tilde{v}_J}{\partial X_J} + ik_2\tilde{v}_2\right) + \frac{\partial \tilde{q}}{\partial t} \end{aligned} \quad (4.4)$$

o subscrito  $J$  assume os valores 1 e 3. Como estamos interessados no caso de ondas no plano  $x_1, x_3$  a fonte dipolar não possui componentes  $\tilde{f}_2$ . Neste caso a componente  $\tilde{v}_2(\mathbf{x}, t)$  é uma função ímpar da coordenada  $x_2$  e portanto  $\tilde{v}_2(\mathbf{X}, k_2, t)$  é imaginário puro. Desse modo, definindo o campo real  $\tilde{u}_2(\mathbf{X}, k_2, t) \equiv i\tilde{v}_2(\mathbf{X}, k_2, t)$ , e obtemos o sistema a ser resolvido para as equações no domínio de Fourier:

$$\begin{aligned}\rho(\mathbf{X})\frac{\partial\tilde{v}_J}{\partial t} &= -\frac{\partial\tilde{p}}{\partial X_J} + \tilde{f}_J \\ \rho(\mathbf{X})\frac{\partial\tilde{u}_2}{\partial t} &= k_2\tilde{p} \\ \frac{\partial\tilde{p}}{\partial t} &= -\rho(\mathbf{X})c^2(\mathbf{X})\left(\frac{\partial\tilde{v}_J}{\partial X_J} + k_2\tilde{u}_2\right) + \frac{\partial\tilde{q}}{\partial t}\end{aligned}\quad (4.5)$$

A solução deste sistema é feita utilizando o algoritmo de diferenças finitas (COSTA et al., 2005). Resolvendo o sistema de equações (4.5) no plano  $x_2 = 0$ , as integrais definidas em (4.2) e (4.3) são reduzidas simplesmente a um somatório sobre todos os números de onda  $k_2$ .

A migração RTM 2.5D é semelhante a migração RTM 2D discutida no capítulo anterior. O campo de ondas produzido pela fonte é propagado progressivamente no tempo e o campo de ondas registrado pelo arranjo de geofones é retropropagado no tempo. A propagação reversa no tempo do campo de ondas dos receptores é implementada injetando-se cada traço sísmico do arranjo de tiro comum na ordem reversa a que o traço foi registrado, ou seja, da última amostra para a primeira. Após o cálculo da história dos campo de onda da fonte e dos receptores a imagem é obtida aplicando-se a condição de imagem. Para a migração RTM 2.5D implementamos quatro das condição de imagem discutidas no Capítulo 3: correlação cruzada, correlação cruzada com compensação de iluminação, condição de imagem com correção para ângulo de espalhamento e condição de imagem com correção de obliquidade.

## 4.2 ASPECTOS COMPUTACIONAIS

A migração reversa 2.5D possui a vantagem de ser facilmente implementada em *clusters* de PCs ou em máquinas multiprocessadas, por ser massivamente paralela. Há três níveis possíveis de paralelismo que podem ser explorados. O primeiro nível de paralelismo é obtido através da migração independente de cada seção de tiro comum. O segundo nível é obtido na modelagem independente dos espectros dos campos associados a cada número de onda. O terceiro nível está na simulação da propagação do campos de onda da fonte e do campo de onda dos receptores que podem ser efetuadas simultaneamente em processadores distin-

tos dentro do mesmo nó de processamento. Estas características tornam a RTM em 2.5D computacionalmente eficiente em arquiteturas paralelas.

Múltiplas etapas do algoritmo podem ser executadas independentemente, ou seja, sem a necessidade de comunicação entre processos. Esta característica permite explorar diferentes estratégias de implementação da migração RTM 2.5D em Clusters. Pelo menos três possibilidades de paralelismo que podem ser consideradas, dependendo da memória RAM disponível em cada nó e do número de nós de processamento disponíveis.

A primeira estratégia de implementação consiste na migração independente de cada seção de tiro comum. O paradigma de paralelização do tipo mestre-escravo (PACHECO, 1997) é aplicado e cada seção de tiro comum é atribuída a um processo escravo que simula, *sequencialmente*, a propagação dos campos de onda a partir da fonte e a partir dos receptores. Após a etapa de propagação dos campos aplica-se a condição de imagem e a seção migrada é enviada para o nó mestre que soma as imagens de migradas de todos os tiros.

A segunda estratégia de paralelização consiste no cálculo *simultâneo* dos campos propagados a partir da fonte e a partir dos receptores em um mesmo nó de processamento, para cada número de onda. Esta abordagem reduz para quase a metade o tempo total de migração, quando comparado com a abordagem descrita anteriormente. Contudo exige-se o dobro de memória RAM para armazenamento dos campos de onda, pois se necessita armazenar simultaneamente o campo de onda da fonte e dos receptores. Pode-se utilizar o disco rígido como mídia de armazenamento temporário, mas o tempo total de migração é penalizado pela sua baixa velocidade de I/O em comparação a memória RAM.

A terceira estratégia de paralelização consiste na implementação da propagação dos campos de onda, utilizando a estratégia discutida no Capítulo 2 para a modelagem 2.5D. A propagação para cada número de onda,  $k_2$ , é efetuada independentemente em cada nó de processamento. Após esta etapa, coleta-se os campos de onda ( $v_x$ ,  $v_y$ ,  $v_z$  e  $p$ ) correspondentes a cada número de onda no nó principal. Este nó efetua a síntese de Fourier sobre os números de onda e aplica a condição de imagem para um único tiro.

A desvantagem dessa forma de paralelismo dá-se pela comunicação intensa entre os nós após a propagação dos campos para cada número de  $k_2$ . O grande volume de dados transferidos na rede no processo de coleta e armazenamento dos campos para a aplicação posterior da condição de imagem torna esta abordagem ineficiente na arquitetura que estamos utilizando para implementar a migração RTM 2.5D.

Em nossa implementação utilizamos a primeira estratégia de paralelização. Embora a segunda estratégia seja a mais eficiente de acordo com a discussão acima, a limitação de memória RAM disponível por cada nó de processamento impossibilitou utilizarmos esta

abordagem.

### 4.3 EXEMPLOS NUMÉRICOS

Para avaliar a migração RTM 2.5D utilizamos os dados sintéticos Marmousoft (BILLETTE et al., 2003). O modelo de velocidade utilizado na modelagem está indicado na Figura 4.1a. Este modelo de velocidade foi obtido suavizando o modelo de velocidade Marmousi mostrado na Figura 4.1b. A Figura 4.1c apresenta a refletividade obtida a partir do produto da velocidade e da densidade no modelo Marmousi. Os dados sintéticos Marmousoft foram gerados utilizando modelagem raio-Born 2.5D (BILLETTE et al., 2003).

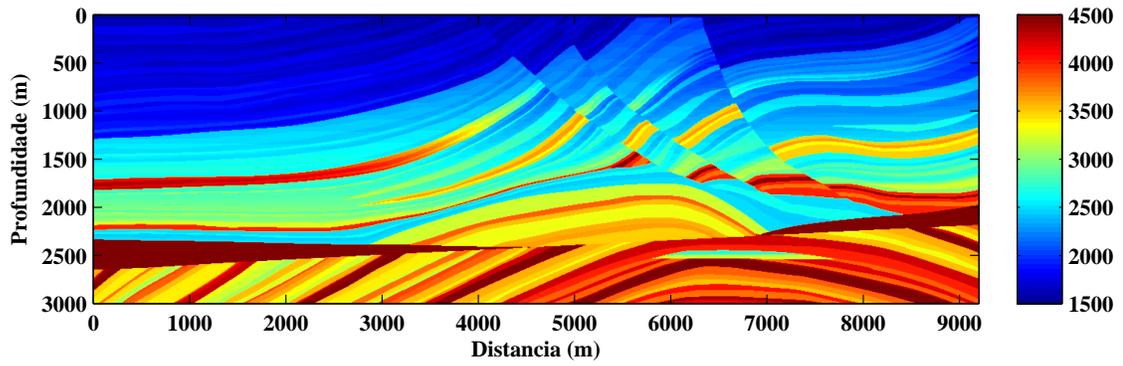
As características mais importantes deste conjunto de dados para avaliar a RTM 2.5D são: (1) a ausência de reflexões múltiplas devido a modelagem usar a aproximação de Born; (2) apresenta o espalhamento geométrico 3D devido ao traçamento de raios em 2.5D (BILLETTE et al., 2003). Essas características dispensam o pré-processamento. O levantamento contém 261 seções de tiro-comum, com 96 receptores por tiro. Fontes e receptores estão regularmente espaçados de 25 m, e o afastamento mínimo entre fonte-receptor é de 100 m. A amostragem do dado é de 4 ms e o tempo de aquisição é de 3 s.

Na aplicação da RTM 2.5D a este conjunto de dados, utilizamos o pulso fonte Blackman-Harris com frequência pico de 30 Hz. O modelo de velocidade foi amostrado em uma malha regular com 485 nós na direção vertical e 1533 na direção horizontal, com espaçamento entre os nós de 6m.

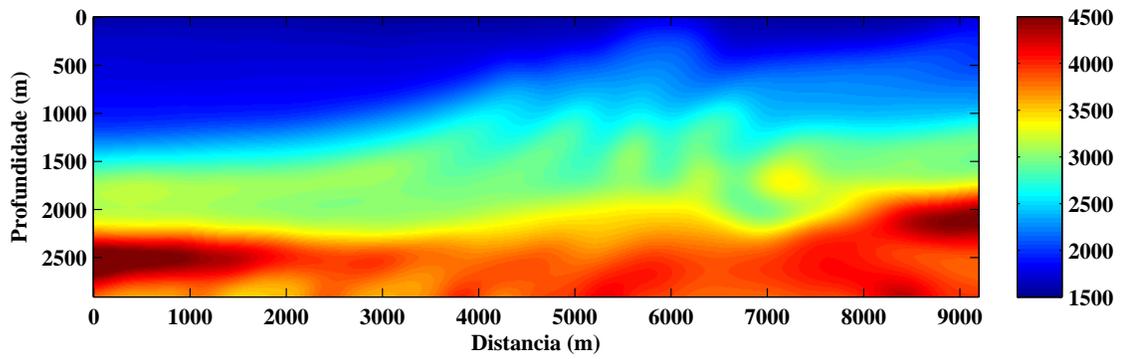
Foram alocados 131 nós de processamento, em que cada nó migrou simultaneamente duas seções, exceto o último nó que migrou apenas uma seção, totalizando 261 processos paralelos. O tempo total da migração foi de aproximadamente 10 dias.

Para reduzir o uso de memória e o tempo de modelagem, os campos foram propagados somente dentro da região definida como domínio de tiro. Este domínio contém de 100 pontos da malha a esquerda e a direita do lanço de tiro. O armazenamento da evolução dos campos de onda e propriedades físicas do modelo dentro do domínio de tiro foram utilizados 7 GB de memória RAM.

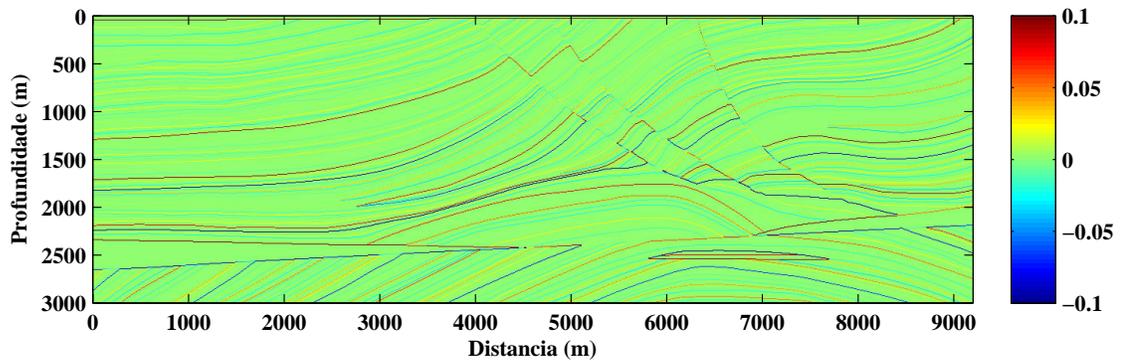
Quatro condições de imagem foram utilizadas nos experimentos numéricos: correlação cruzada, equação (3.1); correlação cruzada com compensação de iluminação, equação (3.11) função peso igual a um; ponderação pelo ângulo de reflexão com compensação de iluminação, equação (3.11) com função peso dada pela equação (3.7); finalmente, fator de obliquidade e ponderação pelo ângulo de reflexão com compensação de iluminação, equação (3.11) com função peso dada pela equação (3.10).



(a)



(b)



(c)

Figura 4.1: (a) Modelo Marmousi; (b) Modelo Marmousoft utilizado para gerar os dados sintéticos para RTM 2D e 2.5D; (c) Modelo de refletividade usado para modelagem raio-Born.

As Figuras 4.2a e 4.2b apresentam o resultado da RTM em 2D e 2.5D, respectivamente para condição de imagem de correlação cruzada, equação (3.1). Uma diferença marcante entre estas é a amplitude dos eventos, principalmente na parte inferior das imagens. Na RTM 2D, Figura 4.2a, os eventos migrados possuem pouca variação de amplitude com a profundidade toda a imagem. Na RTM 2.5D, Figura 4.2b, há um forte decaimento na amplitude dos eventos com a profundidade. Este fato decorre da diferença no espalhamento geométrico entre a propagação de ondas em 2D e 2.5D. Na migração 2D o espalhamento geométrico é menor que na propagação em 3D.

A segunda diferença entre as Figuras 4.2a e 4.2b é o conteúdo de frequência entre as duas imagens. A Figura 4.2a apresenta baixa resolução, em comparação a Figura 4.2b. Este fato se destaca comparando os eventos da parte central das duas imagens. Falhas e camadas tem os limites bem delineados devido a maior compressão do pulso sísmico na RTM 2.5D mostrada na Figura 4.2b.

A terceira diferença entre as duas imagens está na fase dos eventos migrados. O pulso na RTM 2D é anti-simétrico, Figura 4.2a, e simétrico na RTM 2.5D, Figura 4.2b. Este fato resulta da rotação de fase do pulso pela propagação dos campos em 2D. Finalmente, na RTM 2.5D os efeitos de retro-espalhamento se destacam na parte superior da imagem em relação ao resultado da a RTM 2D.

No segundo experimento numérico, aplicamos a condição de imagem com compensação de iluminação, equação (3.11), na migração 2D e 2.5D. As imagens resultantes da RTM 2D e da RTM 2.5D estão apresentadas nas Figura 4.3a e b, respectivamente. A compensação de iluminação consegue equalizar a amplitude entre as duas imagens para maior parte dos eventos. Entretanto, diferenças de amplitude podem ser observadas, particularmente na porção inferior esquerda das imagens, ao redor de 2000 m de profundidade. Na migração 2D os eventos nesta região possuem amplitudes semelhantes, Figura 4.3a. Contudo na migração 2.5D, Figura 4.3b, os eventos apresentam maior variação de amplitude, o que se assemelha à refletividade do modelo. Particularmente, a forte amplitude ao longo do refletor que simula a interface entre sedimento e a cunha de sal no modelo Marmousi, Figura 4.1a.

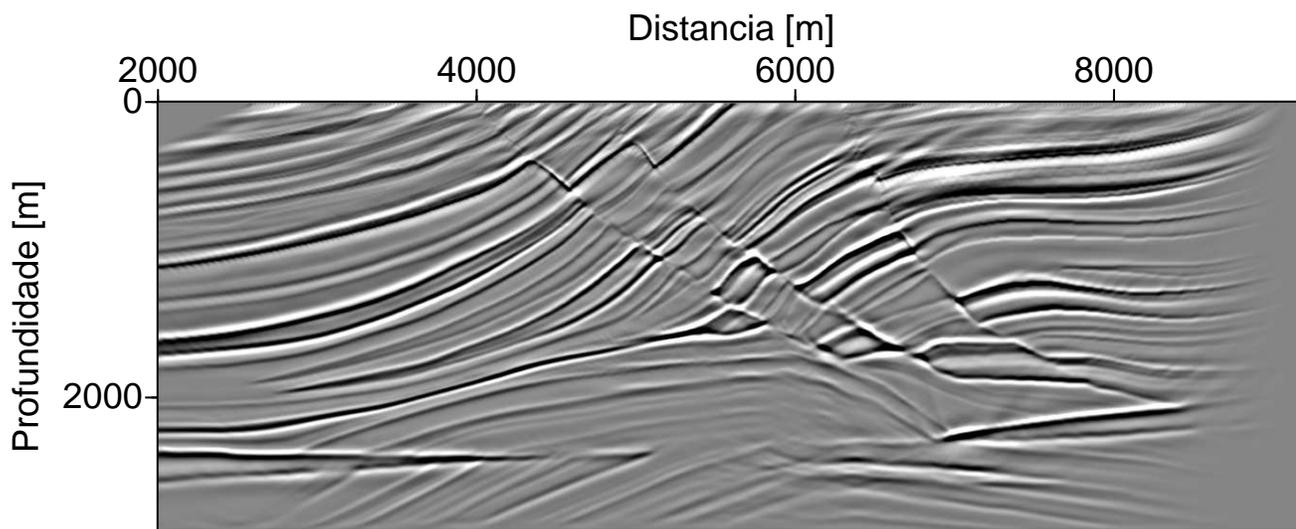
A outra diferença entre a Figura 4.3a e Figura 4.3b é nível de ruído coerente nas imagens. A RTM 2.5D apresenta maior nível ruído que a RTM 2D, particularmente na parte central da imagem entre as profundidades de 1000 m e 2000 m. O ruído coerente é causado pela resposta impulsiva do operador de migração. A maior evidência deste ruído na RTM 2.5D é causada pela menor diferença de amplitude entre os eventos associados aos refletores e o ruído associado à resposta ao impulso do operador de migração. Este fato decorre da diferença no espalhamento geométrico entre na propagação do campo de ondas em 2D e 3D.

O terceiro experimento compara os resultados da migração RTM com condição de imagem com ponderação pelo ângulo de reflexão para os casos 2D e 2.5D, equação (3.7). Os resultados para o caso 2D e 2.5D são mostrados na Figura 4.4a e Figura 4.4b, respectivamente. Comparando este resultado da migração RTM 2.5D, Figura 4.4b, com o resultado da migração com a condição de imagem de compensação de amplitude, Figura 4.3b, o maior destaque é a redução dos ruídos com forte mergulho causados pela resposta do operador de migração. Esta redução decorre diretamente da ponderação aplicada a qual atenua a resposta da migração para grandes ângulos de espalhamento.

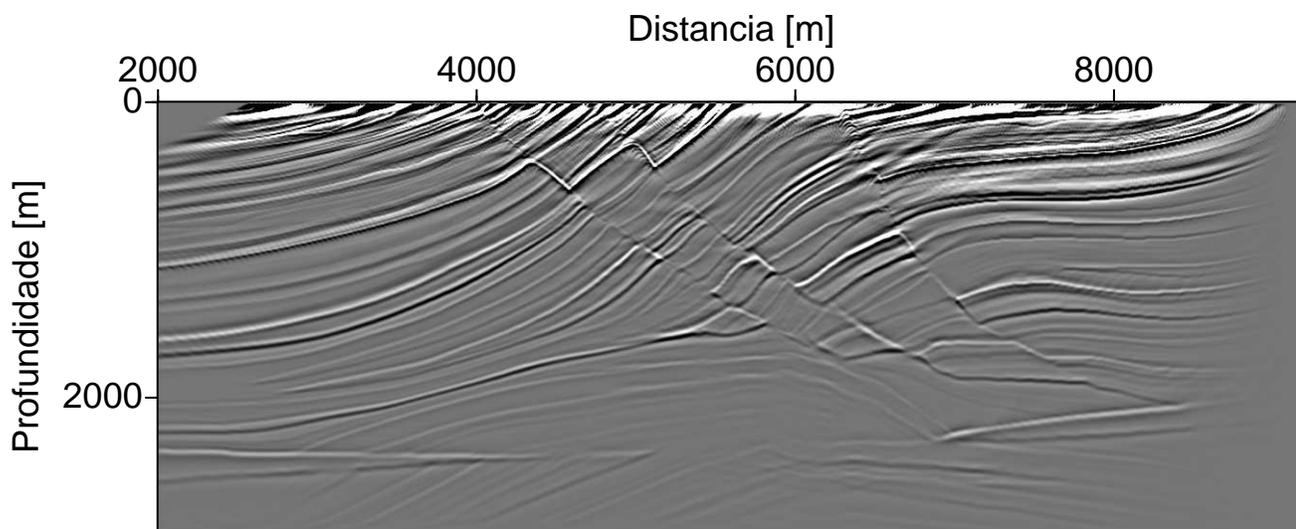
O último experimento numérico compara os resultados da migração RTM com condição de imagem correção de obliquidade e ponderação pelo ângulo de reflexão com compensação de iluminação para os casos 2D e 2.5D, equação (3.10). Os resultados para o caso 2D e 2.5D são mostrados na Figura 4.3a e Figura 4.3b, respectivamente. Quando se compara o resultado da migração RTM 2.5D, Figura 4.3b, com o resultado da migração com o resultado correspondente usando a condição de imagem com ponderação pelo ângulo de reflexão, Figura 4.4b, fica evidente a quase eliminação de ruídos causados por retro-espalhamento bem como a maior semelhança entre a imagem migrada e a seção de refletividade (Figura 4.1c).

A resolução vertical das imagens das Figuras 4.3a e 4.3b é avaliada através do espectro de amplitude em relação a profundidade. A Figura 4.3a e 4.3b apresenta o espectro de amplitude correspondente a cada uma das imagens. Observa-se que entre as coordenadas 2000 m e 5000 m a amplitude do espectro, no intervalo de 10 ciclos/km a 30 ciclos/km é maior na imagem migrada em 2.5D do que na imagem correspondente em 2D. No intervalo de 5000 m a 8000 m a diferença no espectro de amplitude das duas imagens, entre 10 ciclos/km a 30 ciclos, não é tão evidente. Este resultado justifica a argumentação anterior que a migração 2.5D melhora a resolução quando comparada a migração 2D, particularmente entre as coordenadas 2000 m e 5000 m.

Os resultados destes experimentos numéricos indicam que a migração RTM 2.5D aumenta o conteúdo de frequência da imagem e melhora a compensação de amplitude quando são utilizadas condições de imagem com compensação de iluminação. A nova condição de imagem proposta neste trabalho incluindo a ponderação pelo ângulo de reflexão e a correção de obliquidade proporciona uma melhoria adicional da qualidade das imagens produzindo uma redução acentuada nos ruídos coerentes de alta frequência causados pelo operador de migração e ruídos coerentes de baixa frequência associados ao efeito de retro-espalhamento. Estas características justificam a aplicação da RTM 2.5D quando o aumento da resolução sísmica é desejável.

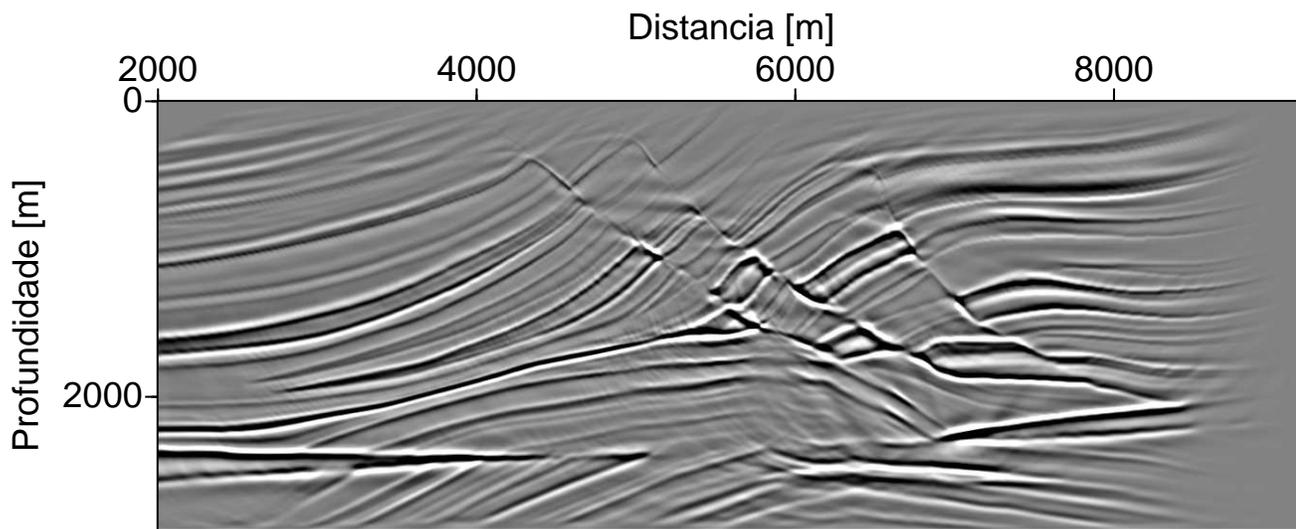


(a)

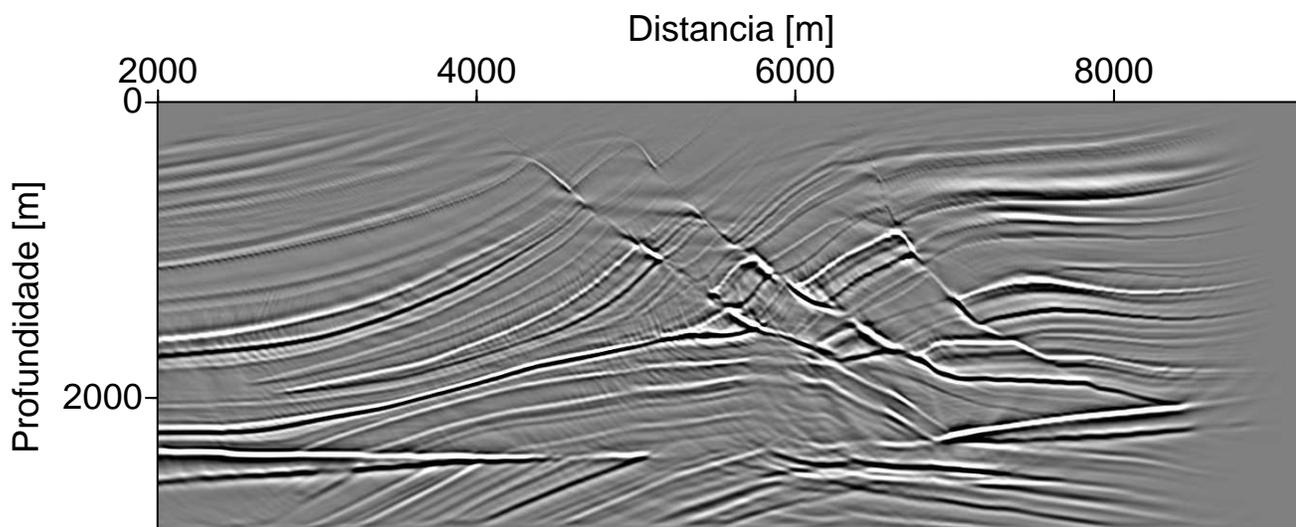


(b)

Figura 4.2: Comparação entre as seções migradas com a condição de imagem correlação: (a) 2D; (b) 2.5D. A forte variação de amplitude com a profundidade na imagem 2.5D decorre da diferença no espalhamento geométrico entre a propagação de ondas em 2D e 2.5D.

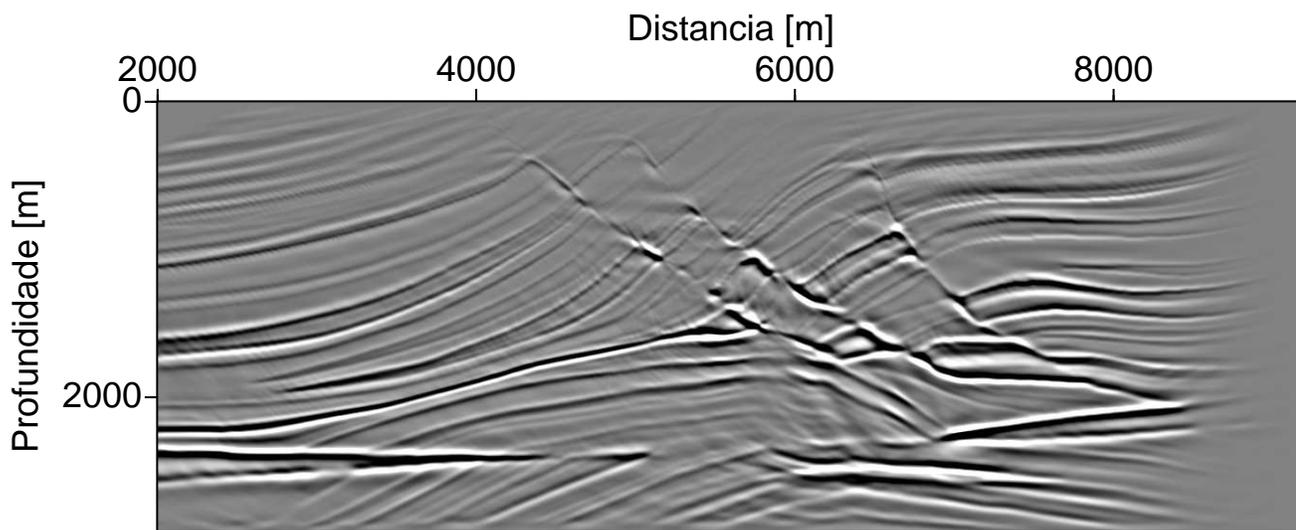


(a)

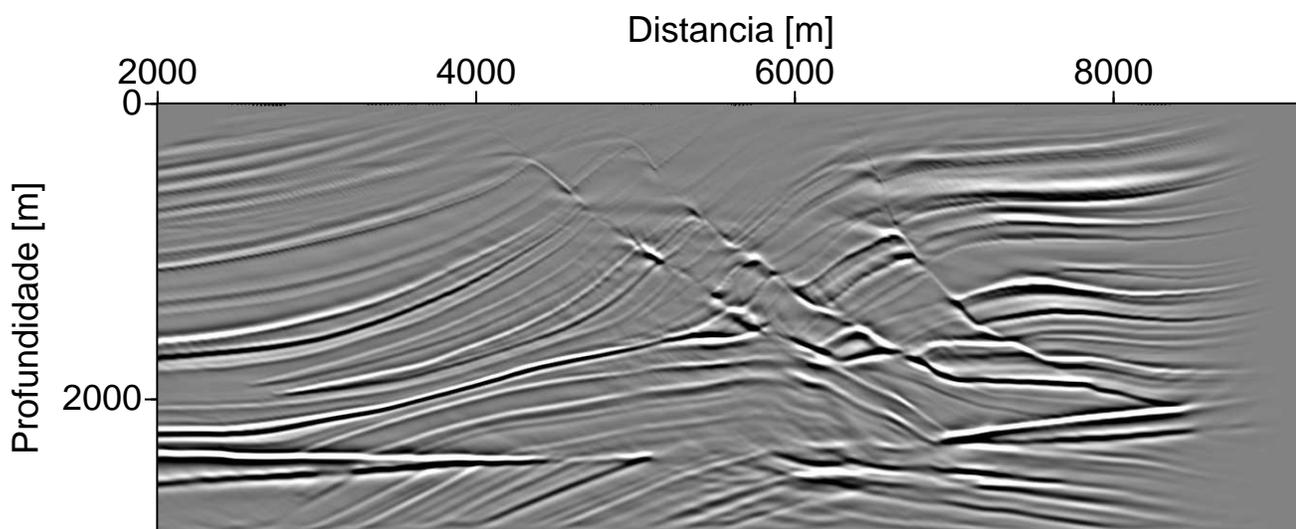


(b)

Figura 4.3: Comparação entre as seções migradas com condição de imagem correlação com compensação de iluminação: (a) 2D; (b) 2.5D. Observa-se a melhor equalização da amplitude dos eventos com a profundidade entre as imagens. Nota-se também que variação da amplitude na migração 2.5D está melhor correlacionada com a refletividade do modelo.

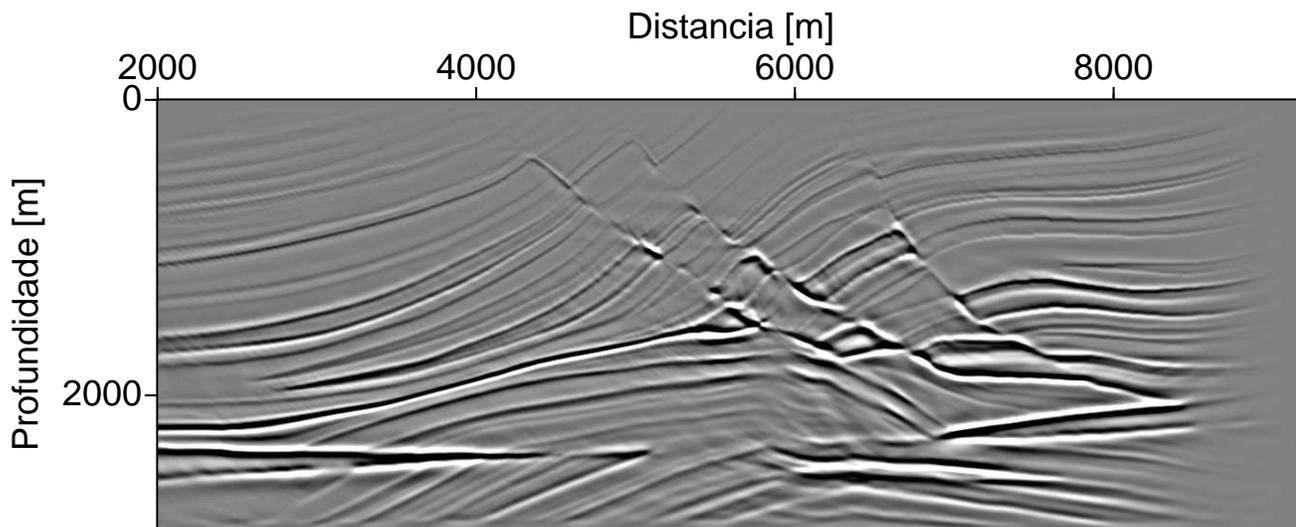


(a)

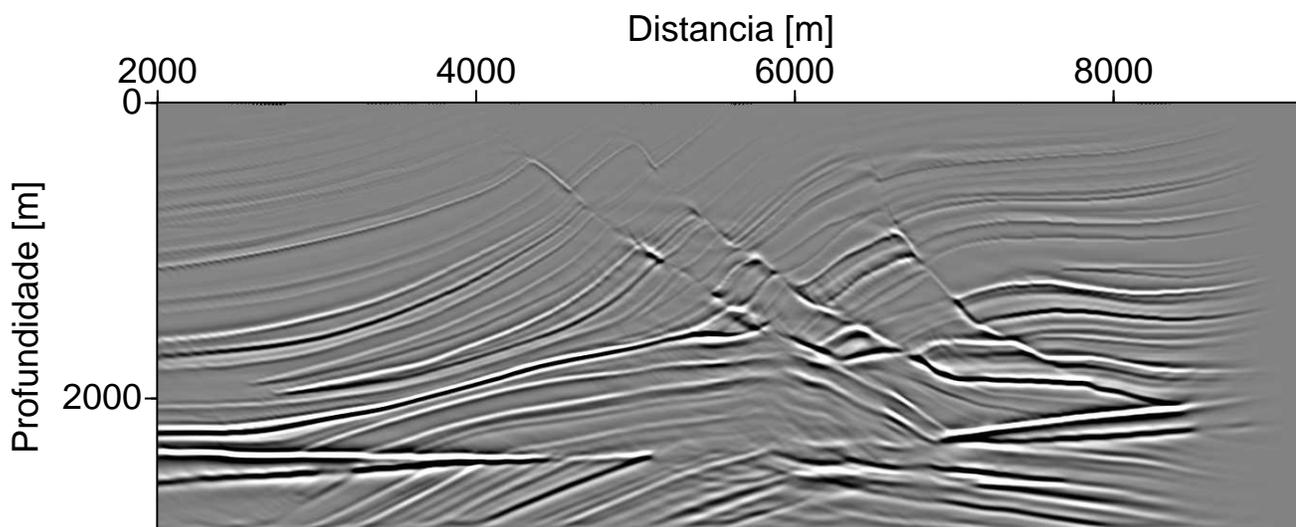


(b)

Figura 4.4: Comparação entre as seções migradas pelas condições de imagem com ponderação pelo ângulo de reflexão e compensação de iluminação 2D (a), e ponderação pelo ângulo de reflexão 2.5D(b). Na imagem 2.5D nota-se uma redução do ruído coerente ao longo da resposta ao impulso operador de migração quando compara-se com a imagem correspondente na Figura 4.3b.

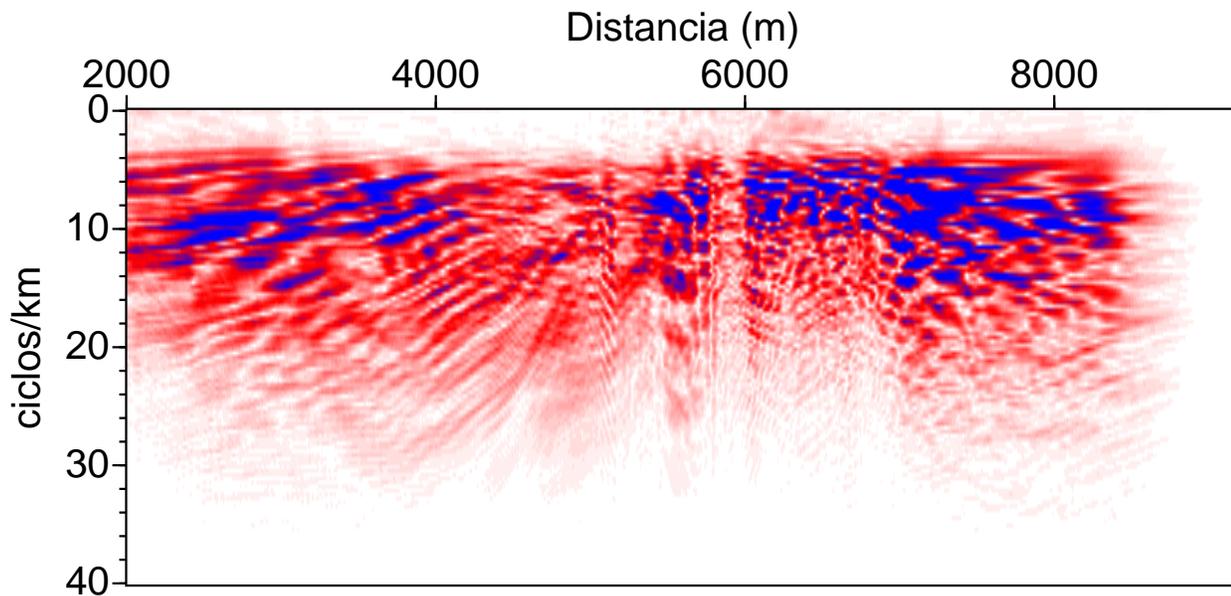


(a)

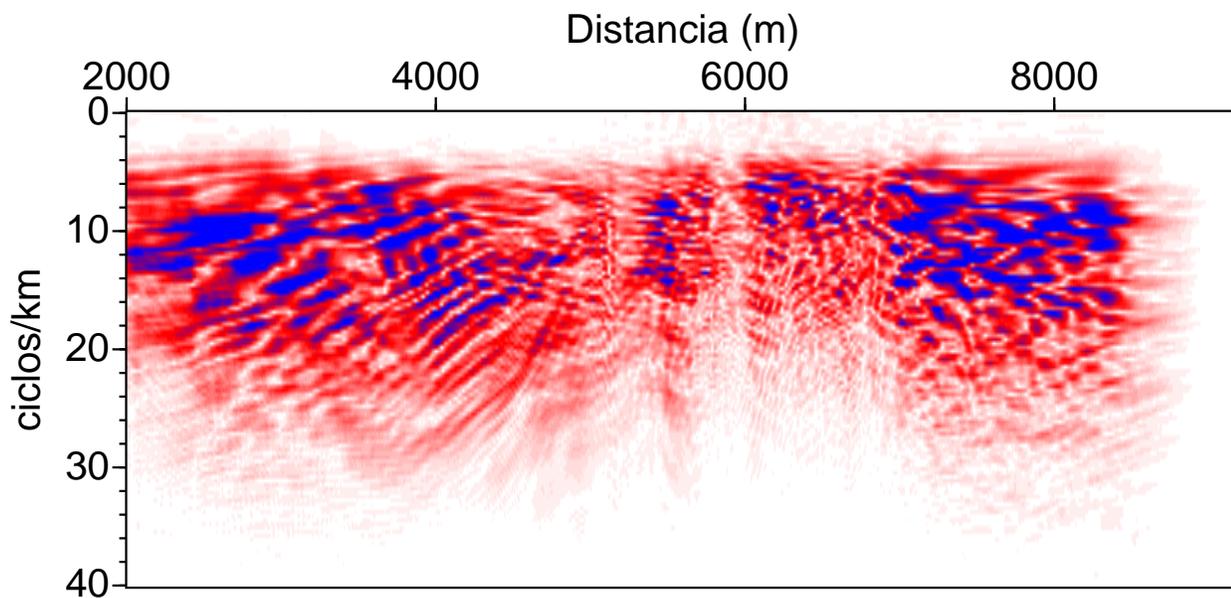


(b)

Figura 4.5: Comparação entre as seções migradas pelas condições de imagem com ponderação pelo ângulo de reflexão adicionado a correção de obliquidade com compensação de iluminação 2D (a), e a ponderação pelo ângulo de reflexão adicionado a correção de obliquidade com compensação de iluminação 2.5D (b). Nota-se a atenuação de ruído de baixa frequência, associado ao efeito de retro-espalhamento tanto da imagem 2D como na imagem 2.5D.



(a)



(b)

Figura 4.6: Espectro amplitude correspondente as Figuras 4.3a, RTM 2D, e 4.3b, RTM 2.5D. Observa-se um aumento da amplitude do espectro associado a imagem migrada em 2.5D no intervalo de 10 ciclos/km a 30 ciclos/km quando comparado ao espectro da imagem em 2D.

## 5 CONCLUSÕES

Neste trabalho investigamos a modelagem e imageamento em 2.5D utilizando o método de diferenças finitas. Inicialmente, apresentamos a formulação e a implementação da modelagem elástica em 2.5D para anisotropia arbitrária. Mostramos através de exemplos numéricos a equivalência entre os resultados da modelagem 2.5D e a modelagem 3D correspondente. A seguir discutimos novas condições de imagem para a migração RTM que reduzem os efeitos de retro-espalhamento, corrigem o efeito da obliquidade e melhoram a compensação de amplitude na migração RTM. Finalmente, apresentamos a formulação e implementação da migração RTM em 2.5D em meios acústicos.

A modelagem 2.5D demanda recursos de memória computacional da ordem da modelagem 2D. Desse modo, pode-se simular a propagação do campo de ondas em 3D sobre uma malha 2D. Devido ao baixo custo de armazenamento da abordagem 2.5D, é possível utilizar malhas mais refinadas do que em uma simulação 3D. Adicionalmente, a modelagem 2.5D é um problema massivamente paralelo. A implementação em clusters de computadores é extremamente eficiente, uma vez que o custo da comunicação entre processos é insignificante quando comparado ao tempo de processamento em cada nó.

Este trabalho apresenta duas contribuições para o imageamento sísmico através da migração reversa no tempo. Novas condições de imagem e a extensão da migração RTM para 2.5D.

As condições de imagem propostas reduzem artefatos associados ao retro-espalhamento e corrigem distorções na amplitude dos eventos migrados causadas pela inclinação dos refletores. A primeira condição de imagem é uma correção a condição de imagem utilizando o vetor Poynting. A segunda condição, que introduz a correção de obliquidade, é consistente com a análise assintótica da condição de imagem por correlação. Mostramos, através de exemplos numéricos, que a combinação destas duas condições de imagem propostas melhora o resultado da migração RTM 2D. Particularmente, se combinadas com compensação de iluminação.

A extensão da migração reversa no tempo para 2.5D consistiu em utilizar a modelagem acústica 2.5D para simular o campo de onda incidente e para retropropagar o campo de onda registrado nos receptores. Nossos experimentos numéricos indicam que a migração RTM 2.5D melhora a qualidade da imagem migrada, quando comparada a migração 2D. Este resultado se deve a maior conteúdo de frequência do pulso migrado e ao tratamento correto do espalhamento geométrico 3D durante a propagação dos campos. Adicionalmente,

a utilização da nova condição de imagem para redução do retro-espalhamento e correção da obliquidade combinada a compensação de iluminação produziu uma imagem com maior resolução, reduziu os efeitos da falta de iluminação uniforme melhorando a compensação de amplitude da migração RTM 2.5D.



## REFERÊNCIAS

- AKI, K.; RICHARDS, P. G. *Quantitative Seismology – Vol. 1: Theory and Methods*. New York: W.H. Freeman, 1980.
- ANGUS, D. A.; THOMSON, C. J. Numerical analysis of a narrow-angle, one-way, elastic-wave equation and extension to curvilinear coordinates. *Geophysics*, v. 71, n. 5, p. T137–T146, 2006.
- BAYSAL, E.; KOSLOFF, D.; SHERWOOD, W. Reverse time migration. *Geophysics*, v. 48, n. 11, p. 1514–1524, 1983.
- BÉCACHE, E.; FAUQUEUX, S.; JOLY, P. Stability of perfectly matched layers, group velocities and anisotropic waves. *Journal of Computational Physics*, v. 188, p. 399–433, 2003.
- BILLETTE, F. et al. Practical aspects and applications of 2d stereotomography. *Geophysics*, v. 68, n. 3, p. 1008–1021, May-June 2003.
- BIONDI, B. *3D seismic imaging*. [S.l.]: Society of Exploration Geophysicists, 2006.
- BLEISTEIN, N. Two-and-one-half dimensional in-plane wave propagation. *Geophysical Prospecting*, v. 34, p. 686–703, 1986.
- BLEISTEIN, N.; COHEN, J. K.; JR., J. W. S. *Mathematics of multidimensional seismic imaging, migration, and inversion*. New York: Springer, 2001. (Interdisciplinary Applied Mathematics).
- BLEISTEIN, N.; HANDELSMAN, R. A. *Asymptotic expansions of integrals*. [S.l.]: Dover, 1975.
- BOHLEN, T.; SAENGER, E. Accuracy of heterogeneous staggered-grid finite-difference modeling of Rayleigh waves. *Geophysics*, v. 71, n. 4, p. T109–T115, 2006.
- BRACEWELL, R. *The Fourier Transforms and Its Applications*. [S.l.]: McGraw-Hill Science, 1999.
- ČERVENÝ, V. *Seismic ray theory*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2001.
- CHATTOPADHYAY, S.; MCMECHAN, G. A. Imaging conditions for prestack reverse-time migration. *geo*, v. 73, n. 3, p. S81–S89, 2008.

- CHEW, W. C.; LIU, H. Q. Perfectly matched layers for elastodynamics: a new absorbing boundary condition. *J. Computational. Acoust.*, v. 4, n. 4, p. 341–359, 1996.
- CLAERBOUT, J. *Imaging the earth's interior*. [S.l.]: Blackwell Scientific Publications, 1985.
- COSTA, J. et al. 2.5D acoustic finite-difference modeling in variable density media. *Journal of Seismic Exploration*, v. 13, p. 323–335, 2005.
- COSTA, J. C. et al. Obliquity-correction imaging condition for reverse time migration. *Geophysics*, v. 74, n. 3, p. S57–S66, 2009.
- FLETCHER, R. F. et al. Suppressing artifacts in prestack reverse time migration. In: *SEG International Annual Meeting, Expanded Abstracts*. [S.l.: s.n.], 2005. p. 2049–2051.
- FURUMURA, T.; TAKENAKA, H. 2.5-D modelling of elastic waves using the pseudospectral method. *Geophys. J. Int.*, v. 124, p. 820–832, 1996.
- GUITTON, A.; KAELIN, B.; BIONDI, B. Least-squares attenuation of reverse-time-migration artifacts. *Geophysics*, v. 72, n. 1, p. S19–S23, 2007.
- HANEY, M. M. et al. Insight into the output of reverse-time migration: What do amplitudes mean? In: *SEG International Annual Meeting, Expanded Abstracts*. [S.l.: s.n.], 2005. p. 1950–1953.
- HOUSE, L.; LARSEN, S.; BEDNAR, J. B. 3D elastic numerical modeling of a complex salt structure. In: *Expanded Abstracts*. [S.l.]: SEG, 2000. v. 19, p. 965–968.
- IGEL, H.; MORA, P.; RIOLLET, B. Anisotropic wave propagation through finite-difference grids. *Geophysics*, v. 60, p. 1203–1216, 1995.
- ISERLES, A. *A first course in the numerical analysis of differential equations*. [S.l.]: Cambridge University Press, 1996.
- KAELIN, B.; GUITTON, A. Imaging condition for reverse time migration. In: *SEG International Annual Meeting, Expanded Abstracts*. [S.l.: s.n.], 2006. p. 2594–2597.
- KARRENBACH, M. *Elastic tensor wave fields*. Tese (Doutorado) — Stanford University, 1995. URL: <http://sepwww.stanford.edu/public/docs/sep83/>.
- KOSLOFF, D.; BAYSAL, E. Migration with the full wave equation. *Geophysics*, v. 48, n. 6, p. 677–687, 1983.
- LEVANDER, A. R. Fourth-order finite-difference P-SV seismograms. *Geophysics*, v. 53, n. 11, p. 1425–1436, 1988.

- LINER, C. L. Theory of a 2.5-D acoustic wave equation for constant density media. *Geophysics*, v. 56, n. 12, p. 2114–2117, 1991.
- MCMECHAN, G. A. Migration by extrapolation of time-dependent boundary values. *Geophysical Prospecting*, v. 31, n. 3, p. 413–420, 1983.
- MINKOFF, S. E. Spatial parallelism of a 3D finite difference velocity-stress elastic wave propagation code. *SIAM J. Sci. Comput.*, v. 24, n. 1, p. 1–19, 2002.
- MITTET, R. Free-surface boundary conditions for staggered-grid modeling schemes. *Geophysics*, v. 67, n. 5, p. 1616–1623, 2002.
- NOVAIS, A.; SANTOS, L. 2.5D finite-difference solution of the acoustic wave equation. *Geophysical Prospecting*, v. 53, p. 523–531, 2005.
- PACHECO, P. S. *Parallel programming with MPI*. [S.l.]: Morgan Kaufmann Publishers, Inc., 1997.
- RANDALL, C. J. Multipole acoustic waveforms in nonaxisymmetric boreholes and formations. *J. Acoust. Soc. Am.*, v. 90, n. 3, p. 1620–1631, 1991.
- SAENGER, E.; BOHLEN, T. Finite-difference modeling of viscoelastic and anisotropic wave propagation using the rotated staggered grid. *Geophysics*, v. 69, p. 583–591, 2004.
- SCHLEICHER, J.; COSTA, J. C.; NOVAIS, A. A comparison of imaging conditions for wave-equation shot-profile migration. *geo*, v. 73, n. 6, p. S219–S227, 2008.
- SYMES, W. W.; TEREITYEV, I. S.; VDOVINA, T. W. Gridding requirements for accurate finite difference simulation. *SEG, Expanded Abstracts*, v. 27, n. 1, p. 2077–2081, 2008. ISSN 1.
- VALENCIANO, A.; BIONDI, B. 2-D deconvolution imaging condition for shot-profile migration. In: *SEG International Annual Meeting, Expanded Abstracts*. [S.l.: s.n.], 2003. p. 2431–2433.
- VERSTEEG, R.; GRAU, G. Practical aspects of seismic data inversion, the marmousi experience. *52nd EAEG Meeting. Eur. Assoc. Expl. Geophys., Proceedings of 1990 EAEG Workshop*, p. 1–194, 1990.
- WILLIAMSON, P. R.; PRATT, R. G. A critical review of acoustic wave modeling procedures in 2.5 dimensions. *Geophysics*, v. 60, n. 2, p. 591–595, 1995.
- YOON, K.; MARFURT, K. Reverse-time migration using the Poynting vector. *Exploration Geophysics*, v. 37, p. 102–107, 2006.

YOUN, O. K.; ZHOU, H. Depth imaging with multiples. *Geophysics*, SEG, v. 66, n. 1, p. 246–255, 2001. Disponível em: <<http://link.aip.org/link/?GPY/66/246/1>>.

ZHANG, Y.; SUN, J. Practical issues of reverse time migration - true-amplitude gathers, noise removal and harmonic-source encoding. In: *EAGE International Annual Meeting, Expanded Abstracts*. [S.l.: s.n.], 2008. p. F047.

## APÊNDICES

## APÊNDICE A – CAMADAS ABSORVENTES COM CASAMENTO PERFEITO DE IMPEDÂNCIA PML (PERFECTLY MATCHED LAYERS)

Utilizamos as camadas PML nas bordas laterais e na borda inferior do modelo para atenuar as reflexões espúrias provenientes dessas regiões associadas ao truncamento do modelo, e desse modo simulamos a propagação de ondas *ad infinitum*. Consideramos que cada componente do campo de velocidade seja decomposta nas camadas PML por

$$v_i = v_i^{(1)} + v_i^{(2)} + v_i^{(3)},$$

e de modo semelhante o campo de tensão, é decomposto por

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(1)} + \sigma_{ij}^{(2)} + \sigma_{ij}^{(3)},$$

onde os sobrescritos indicam os eixos coordenados. Usando coordenadas *stretch* (CHEW; LIU, 1996), obtemos o seguinte sistema de equações para meios anisotrópicos gerais:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_1^1}{\partial t} + \gamma_1(x_1)v_1^1 &= \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} \right), \\ \frac{\partial v_1^2}{\partial t} &= \frac{1}{\rho} ik_2 \sigma_{12}, \\ \frac{\partial v_1^3}{\partial t} + \gamma_3(x_3)v_1^3 &= \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} \right), \\ \frac{\partial v_2^1}{\partial t} + \gamma_1(x_1)v_2^1 &= \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} \right), \\ \frac{\partial v_2^2}{\partial t} &= \frac{1}{\rho} ik_2 \sigma_{22}, \\ \frac{\partial v_2^3}{\partial t} + \gamma_3(x_3)v_2^3 &= \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} \right), \\ \frac{\partial v_3^1}{\partial t} + \gamma_1(x_1)v_3^1 &= \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} \right), \\ \frac{\partial v_3^2}{\partial t} &= \frac{1}{\rho} ik_2 \sigma_{23}, \\ \frac{\partial v_3^3}{\partial t} + \gamma_3(x_3)v_3^3 &= \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} \right), \\ \frac{\partial \sigma_{11}^1}{\partial t} + \gamma_1(x_1)\sigma_{11}^1 &= C_{11} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + C_{16} \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + C_{15} \frac{\partial v_3}{\partial x_1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_{11}^2}{\partial t} &= ik_2 (C_{16}v_1 + C_{12}v_2 + C_{14}v_3), \\
\frac{\partial \sigma_{11}^3}{\partial t} + \gamma_3(x_3)\sigma_{11}^3 &= C_{15}\frac{\partial v_1}{\partial x_3} + C_{14}\frac{\partial v_2}{\partial x_3} + C_{13}\frac{\partial v_3}{\partial x_3}, \\
\frac{\partial \sigma_{22}^1}{\partial t} + \gamma_1(x_1)\sigma_{22}^1 &= C_{12}\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + C_{16}\frac{\partial v_2}{\partial x_1} + C_{25}\frac{\partial v_3}{\partial x_1}, \\
\frac{\partial \sigma_{22}^2}{\partial t} &= ik_2 (C_{26}v_1 + C_{22}v_2 + C_{24}v_3) \\
\frac{\partial \sigma_{22}^3}{\partial t} + \gamma_3(x_3)\sigma_{22}^3 &= C_{25}\frac{\partial v_1}{\partial x_3} + C_{24}\frac{\partial v_2}{\partial x_3} + C_{23}\frac{\partial v_3}{\partial x_3}, \\
\frac{\partial \sigma_{33}^1}{\partial t} + \gamma_1(x_1)\sigma_{33}^1 &= C_{13}\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + C_{36}\frac{\partial v_2}{\partial x_1} + C_{35}\frac{\partial v_3}{\partial x_1}, \\
\frac{\partial \sigma_{33}^2}{\partial t} &= ik_2 (C_{36}v_1 + C_{23}v_2 + C_{34}v_3), \\
\frac{\partial \sigma_{33}^3}{\partial t} + \gamma_3(x_3) &= C_{35}\frac{\partial v_1}{\partial x_3} + C_{34}\frac{\partial v_2}{\partial x_3} + C_{33}\frac{\partial v_3}{\partial x_3}, \\
\\
\frac{\partial \sigma_{23}^1}{\partial t} + \gamma_1(x_1)\sigma_{23}^1 &= C_{14}\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + C_{46}\frac{\partial v_2}{\partial x_1} + C_{45}\frac{\partial v_3}{\partial x_1}, \\
\frac{\partial \sigma_{23}^2}{\partial t} &= ik_2 (C_{46}v_1 + C_{24}v_2 + C_{44}v_3), \\
\frac{\partial \tau_{23}^3}{\partial t} + \gamma_3(x_3)\tau_{23}^3 &= C_{45}\frac{\partial v_1}{\partial x_3} + C_{44}\frac{\partial v_2}{\partial x_3} + C_{34}\frac{\partial v_3}{\partial x_3}, \\
\frac{\partial \sigma_{13}^1}{\partial t} + \gamma_1(x_1)\sigma_{13}^1 &= C_{15}\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + C_{56}\frac{\partial v_2}{\partial x_1} + C_{55}\frac{\partial v_3}{\partial x_1}, \\
\frac{\partial \sigma_{13}^2}{\partial t} &= ik_2 (C_{56}v_1 + C_{25}v_2 + C_{45}v_3), \\
\frac{\partial \sigma_{13}^3}{\partial t} + \gamma_3(x_3)\sigma_{13}^3 &= C_{55}\frac{\partial v_1}{\partial x_3} + C_{45}\frac{\partial v_2}{\partial x_3} + C_{35}\frac{\partial v_3}{\partial x_3}, \\
\frac{\partial \sigma_{12}^1}{\partial t} + \gamma_1(x_1)\sigma_{12}^1 &= C_{16}\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + C_{66}\frac{\partial v_2}{\partial x_1} + C_{56}\frac{\partial v_3}{\partial x_1}, \\
\frac{\partial \sigma_{12}^2}{\partial t} &= ik_2 (C_{66}v_1 + C_{26}v_2 + C_{46}v_3), \\
\frac{\partial \sigma_{12}^3}{\partial t} + \gamma_3(x_3)\sigma_{12}^3 &= C_{56}\frac{\partial v_1}{\partial x_3} + C_{46}\frac{\partial v_2}{\partial x_3} + C_{36}\frac{\partial v_3}{\partial x_3}.
\end{aligned}$$

A atenuação do campo nas fronteiras absorventes é controlada pelos fatores  $\gamma_1$  e  $\gamma_3$ . Por exemplo no fundo do modelo  $\gamma_1$  é zero e:

$$\gamma_3(x_3) = \begin{cases} \frac{(x_3 - x_3^0)^2}{L^2}, & \text{se } x_3 > x_3^0 \\ 0, & \text{para outros valores.} \end{cases}$$

Aqui ,  $x_3^0$  é a posição em que a PML começa e  $L$  é sua largura, do mesmo modo para as fronteiras laterais apenas  $\gamma_1$  é diferente de zero. O correspondente método de diferenças finitas para as camadas PML é obtido usando os operadores de diferenças finitas descritos no Apêndice B

Segundo Bécache, Fauqueux e Joly (2003), as condições PML podem criar instabilidades em certas situações. Uma das condições necessárias para evitar essas instabilidades é que as componentes das velocidades de fase e de grupo na direção da absorção devem ter os mesmos sinais. Com relação a isso é importante observar que em 2.5D as condições PML sofrem das mesmas restrições gerais que o caso 3D, apesar de no caso 2.5D elas serem aplicadas apenas nas direções  $x_1$  and  $x_3$ .

## APÊNDICE B – DIFERENÇAS FINITAS 2.5D: RELAÇÃO DE DISPERSÃO E ESTABILIDADE

### Esquema de diferenças finitas

O método de diferenças finitas 2.5D para a equação de onda em meios anisotrópicos, na formulação tensão-velocidade, sobre uma malha rotacionada e com propriedades físicas intercaladas, é representado por:

$$\begin{aligned} D_t^+ v_1 &= \frac{1}{\rho} [D_1 \sigma_1 + ik_2 I \sigma_6 + D_3 \sigma_5], \\ D_t^+ v_2 &= \frac{1}{\rho} [D_1 \sigma_6 + ik_2 I \sigma_2 + D_3 \sigma_4], \\ D_t^+ v_3 &= \frac{1}{\rho} [D_1 \sigma_5 + ik_2 I \sigma_4 + D_3 \sigma_3], \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

e

$$\begin{aligned} D_t^- \sigma_J &= \frac{1}{\rho} \{ [C_{J1} D_1 + ik_2 C_{J6} I + C_{J5} D_3] v_1 \\ &\quad + [C_{J6} D_1 + ik_2 C_{J2} I + C_{J4} D_3] v_2 \\ &\quad + [C_{J5} D_1 + ik_2 C_{J4} I + C_{J3} D_3] v_3 \} , \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

com  $J = 1, \dots, 6$  e pressupondo a convenção da soma sobre  $J$ ;  $D_t^+$  define o operador de diferenças finitas avançado e  $D_t^-$  define o operador de diferenças finitas retardado para a derivada temporal;  $D_1$  e  $D_3$  representam o operador de diferenças finitas centrado para as derivadas espaciais nas direções  $x_1$  e  $x_3$ ;  $I$  define os operadores de interpolação que precisam ser introduzidos para garantir que o operador seja centrado. Para uma malha rotacionada e intercalada tem-se os seguintes operadores

$$D_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\tilde{D}_1 + \tilde{D}_3) , \quad (\text{B.3})$$

$$D_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\tilde{D}_3 - \tilde{D}_1) , \quad (\text{B.4})$$

onde  $\tilde{D}_1$  e  $\tilde{D}_3$  definem os operadores rotacionados, tem-se por exemplo, para um esquema de segunda ordem:

$$\tilde{D}_1 \phi(x_1, x_3, t) = \frac{1}{\sqrt{2} \Delta x} \left[ \phi(x_1 + \frac{\Delta x}{2}, x_3 - \frac{\Delta x}{2}, t) - \phi(x_1 - \frac{\Delta x}{2}, x_3 + \frac{\Delta x}{2}, t) \right] , \quad (\text{B.5})$$

$$\tilde{D}_3\phi(x_1, x_3, t) = \frac{1}{\sqrt{2}\Delta x} \left[ \phi\left(x_1 + \frac{\Delta x}{2}, x_3 + \frac{\Delta x}{2}, t\right) - \phi\left(x_1 - \frac{\Delta x}{2}, x_3 - \frac{\Delta x}{2}, t\right) \right]. \quad (\text{B.6})$$

O interpolador  $I$  para um esquema de segunda ordem no espaço é:

$$I\phi(x_1, x_3, t) = \frac{1}{4} \left[ \phi\left(x_1 - \frac{\Delta x}{2}, x_3 - \frac{\Delta x}{2}, t\right) + \phi\left(x_1 + \frac{\Delta x}{2}, x_3 - \frac{\Delta x}{2}, t\right) + \phi\left(x_1 - \frac{\Delta x}{2}, x_3 + \frac{\Delta x}{2}, t\right) + \phi\left(x_1 + \frac{\Delta x}{2}, x_3 + \frac{\Delta x}{2}, t\right) \right]. \quad (\text{B.7})$$

### Análise de estabilidade

Para garantir a estabilidade de um esquema de diferenças em meios anisotrópicos, é suficiente garantir sua estabilidade em meios homogêneos e isotrópicos utilizando como referencia a maior velocidade do modelo (ANGUS; THOMSON, 2006). Para meios elásticos, isotrópicos e homogêneos a equação de onda pode ser fatorada em uma equação para onda P e outra equação para onda S. Cada uma destas pode ser representada formalmente por um operador de diferenças na forma

$$D_t^2\phi(x_1, k_2, x_3, t) = V^2(D_1^2 - k_2^2 I^2 + D_3^2)\phi(x_1, k_2, x_3, t), \quad (\text{B.8})$$

na qual  $V$  representa a velocidade de propagação para onda P ou S.

A relação de dispersão associada a estas equações é obtida através do espectro de von Neumann (ISERLES, 1996), ou seja, o aplicando o operador de diferenças a onda plana da forma:

$$A \exp [i(k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3 - \omega t)].$$

Para um esquema de segunda ordem no tempo e no espaço o espectro de cada operador de diferenças resultante é

$$D_t^2 = -\frac{4}{\Delta t^2} \sin^2 \left( \frac{\omega \Delta t}{2} \right), \quad (\text{B.9})$$

$$D_1^2 = -\frac{4}{\Delta x^2} \sin^2 \left( \frac{k_1 \Delta x}{2} \right) \cos^2 \left( \frac{k_3 \Delta x}{2} \right), \quad (\text{B.10})$$

$$D_3^2 = -\frac{4}{\Delta x^2} \sin^2 \left( \frac{k_3 \Delta x}{2} \right) \cos^2 \left( \frac{k_1 \Delta x}{2} \right), \quad (\text{B.11})$$

$$I^2 = \cos^2 \left( \frac{k_1 \Delta x}{2} \right) \cos^2 \left( \frac{k_3 \Delta x}{2} \right). \quad (\text{B.12})$$

Exigindo que a onda plana seja solução da equação (B.8) se obtém a seguinte relação

de dispersão para o esquema de diferenças em 2.5D:

$$\begin{aligned} \sin^2\left(\frac{\omega\Delta t}{2}\right) &= \frac{V^2\Delta t^2}{\Delta x^2} \left[ \sin^2\left(\frac{k_1\Delta x}{2}\right) \cos^2\left(\frac{k_3\Delta x}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{k_3\Delta x}{2}\right) \cos^2\left(\frac{k_1\Delta x}{2}\right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{k_2^2\Delta x^2}{4} \cos^2\left(\frac{k_1\Delta x}{2}\right) \cos^2\left(\frac{k_3\Delta x}{2}\right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

Para que haja uma solução estável o lado direito da equação acima deve ser menor ou igual a um. Uma condição suficiente para garantir esta desigualdade (COSTA et al., 2005) é

$$\Delta t \leq \frac{1}{\sqrt{2 + k_{2max}^2 \Delta x^2 / 4}} \frac{\Delta x}{V}. \quad (\text{B.14})$$

Para assegurar estabilidade do esquema de diferenças na modelagem da propagação de ondas P e S devemos escolher o maior valor para a velocidade de propagação que ocorre no modelo, ou seja, o máximo de  $V_P$ , que resulta no critério mais restritivo:

$$\Delta t \leq \frac{1}{\sqrt{2 + k_{2max}^2 \Delta x^2 / 4}} \frac{\Delta x}{V_P}. \quad (\text{B.15})$$

A relação de dispersão correspondente para um esquema de diferenças finitas 3D (COSTA et al., 2005) é

$$\begin{aligned} \sin^2\left(\frac{\omega\Delta t}{2}\right) &= \frac{v^2\Delta t^2}{\Delta x^2} \left[ \sin^2\left(\frac{k_1\Delta x}{2}\right) \cos^2\left(\frac{k_2\Delta x}{2}\right) \cos^2\left(\frac{k_3\Delta x}{2}\right) \right. \\ &\quad + \sin^2\left(\frac{k_3\Delta x}{2}\right) \cos^2\left(\frac{k_1\Delta x}{2}\right) \cos^2\left(\frac{k_2\Delta x}{2}\right) \\ &\quad \left. + \sin^2\left(\frac{k_2\Delta x}{2}\right) \cos^2\left(\frac{k_1\Delta x}{2}\right) \cos^2\left(\frac{k_3\Delta x}{2}\right) \right], \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

Uma condição suficiente para garantir a estabilidade desta deste esquema é:

$$\Delta t \leq \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\Delta x}{V_P}. \quad (\text{B.17})$$

Exigindo que a condição de estabilidade para o esquema de diferenças 2.5D seja equivalente condição de estabilidade para o esquema 3D segue que

$$\frac{1}{\sqrt{2 + k_{2max}^2 \Delta x^2 / 4}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Desta relação se obtém um limite superior para o número de onda  $k_2$  na modelagem 2.5D:

$$k_{2\max} = \frac{2}{\Delta x} . \quad (\text{B.18})$$

Esta condição é mais restritiva que o limite de Nyquist

$$k_{2\text{N}} = \frac{\pi}{\Delta x} . \quad (\text{B.19})$$

Para esquemas de diferenças de alta ordem a condição de estabilidade tem como forma mais geral a equação (2.11).

## APÊNDICE C – ANÁLISE DE FASE ESTACIONÁRIA DA MIGRAÇÃO REVERSA NO TEMPO

Neste apêndice, analisamos a migração reversa no tempo assintoticamente, seguindo os mesmos passos que Haney et al. (2005). Especificamente, aplicamos o método da fase estacionária (BLEISTEIN; HANDELSMAN, 1975) para a integral (3.1) para a situação de uma interface plana mergulhante em um meio homogêneo e um conjunto de seções tiro-comum com abertura de aquisição ilimitada tanto nas coordenadas da fonte quanto nas coordenadas dos receptores. Nosso resultado difere do apresentado em Haney et al. (2005) por um fator de estiramento do pulso que depende do mergulho do refletor.

### Reflexão a partir de um refletor plano mergulhante

Iniciamos considerando um refletor mergulhante. Sem perda de generalidade, consideramos o eixo- $x$  orientado no sentido do mergulho, então o ângulo de mergulho  $\alpha$  é o ângulo entre o refletor e o eixo- $x$ . Então um ponto sobre o refletor tem as coordenadas

$$\mathbf{x}_R(x, y) = x \mathbf{e}_1 + y \mathbf{e}_2 + D(x, y) \mathbf{e}_3, \quad (\text{C.1})$$

Em que  $\mathbf{e}_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) são os vetores unitários nas direções coordenadas e  $D(x, y)$  é a função que descreve a profundidade do refletor. Para nosso refletor plano inclinado,  $D(x, y) = z_d + x \tan \alpha$ , em que  $z_d$  é a profundidade vertical do refletor no ponto  $x = y = 0$  (veja a Figura 3.1)

Para descrever o campo originado na fonte  $p_s(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_s, 0)$  no ponto imagem, nós consideramos a fonte posicionada no ponto  $\mathbf{x}_s$ , como sendo uma fonte de injeção de volume descrita por  $q(\mathbf{x}, t) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s)w(t)$ . Aqui  $w(t)$  representa o pulso fonte e  $\mathbf{x}_s = (x_s, y_s, 0)$  descreve as coordenadas da fonte na superfície. Então, o campo produzido por essa fonte é dado por:

$$p_s(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_s, 0) = \frac{C}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_s|} w'' \left( t - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_s|}{c_P} \right), \quad (\text{C.2})$$

em que a aspa dupla significa a segunda derivada com relação ao tempo. Em que,  $c_P$  é a velocidade da onda e  $C$  é uma constante (ČERVENÝ, 2001). Para um meio acústico com densidade constante  $\rho$ , se tem  $C = 1/4\pi\rho$ . De modo correspondente, o campo de pressão

refletido e registrado por um geofone em  $\mathbf{x}_g = (x_g, y_g, 0)$ , pode ser expresso como:

$$p_g(\mathbf{x}_g, t; \mathbf{x}_s, 0) = \frac{CR(\mathbf{x}_g, \mathbf{x}_s)}{|\mathbf{x}_g - \mathbf{x}_s^I|} w'' \left( t - \frac{|\mathbf{x}_g - \mathbf{x}_s^I|}{c_P} \right), \quad (\text{C.3})$$

onde  $\mathbf{x}_s^I(x_s, y_s)$  representa a posição da fonte imagem associada com a superfície em  $\mathbf{x}_s = (x_s, y_s, 0)$ . Para nosso refletor mergulhante, a fonte-imagem está localizada em

$$\mathbf{x}_s^I(x_s, y_s) = \mathbf{x}_s + (2D(x_s, y_s) \cos \alpha) \mathbf{n}, \quad (\text{C.4})$$

Em que  $D(x_s, y_s) = x_s \tan \alpha$  é a profundidade verticalmente abaixo da fonte e

$$\mathbf{n} = -\sin \alpha \mathbf{e}_1 + \cos \alpha \mathbf{e}_3 \quad (\text{C.5})$$

é o vetor normal ao refletor. Portanto

$$\mathbf{x}_s^I(x_s, y_s) = (x_s \cos 2\alpha - z_d \sin 2\alpha) \mathbf{e}_1 + y_s \mathbf{e}_2 + 2(x_s \sin \alpha \cos \alpha + z_d \cos^2 \alpha) \mathbf{e}_3. \quad (\text{C.6})$$

Em uma migração reversa no tempo, o campo do receptor é retropropagado no sentido contrário do tempo, em outras palavras, uma fonte explosiva atua na posição de cada geofone, em que a injeção de volume deve ser igual a

$$w_b(t; \mathbf{x}_g) = p_g(\mathbf{x}_g, t_{max} - t; \mathbf{x}_s, 0) = \frac{CR(\mathbf{x}_g, \mathbf{x}_s)}{|\mathbf{x}_g - \mathbf{x}_s^I|} w'' \left( t_{max} - t - \frac{|\mathbf{x}_g - \mathbf{x}_s^I|}{c_P} \right). \quad (\text{C.7})$$

Neste modo, um novo campo da fonte da forma da equação (C.2) é gerado, onde o pulso-fonte  $w(t)$  é substituído por  $w_b(t)$  da equação (C.7).

Desse modo, o campo retropropagado dentro do meio é definido por

$$p_b(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_g, 0) = \frac{C^2 R(\mathbf{x}_g, \mathbf{x}_s)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_g| |\mathbf{x}_g - \mathbf{x}_s^I|} w'''' \left( t_{max} - t + \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_g|}{c_P} - \frac{|\mathbf{x}_g - \mathbf{x}_s^I|}{c_P} \right). \quad (\text{C.8})$$

## Condição de imagem

A condição de imagem (3.1) para a migração reversa no tempo é dada pela correlação com deslocamento zero no tempo e no espaço, é dada por:

$$I(\mathbf{x}) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx_s \int_{-\infty}^{+\infty} dy_s \int_{-\infty}^{+\infty} dx_g \int_{-\infty}^{+\infty} dy_g \int_0^{t_{max}} dt p_s(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_s) p_b(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_g). \quad (\text{C.9})$$

Considerando que o pulso-fonte é causal e que nenhum evento de reflexão existe após o tempo máximo  $t_{max}$ , a integral temporal pode ser estendida para o infinito:

$$I(\mathbf{x}) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx_s \int_{-\infty}^{+\infty} dy_s \int_{-\infty}^{+\infty} dx_g \int_{-\infty}^{+\infty} dy_g \int_{-\infty}^{+\infty} dt p_s(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_s) p_b(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_g) . \quad (\text{C.10})$$

Usando o Teorema de Parseval (BRACEWELL, 1999), a integral no tempo pode agora ser substituída pela correspondente integral na frequência:

$$I(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dx_s dy_s dx_g dy_g \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \tilde{p}_s(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}_s) \tilde{p}_b^*(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}_g) , \quad (\text{C.11})$$

onde o asterisco define o complexo conjugado. Calculando a transformada de Fourier do campo da fonte e do campo dos receptores

$$\tilde{p}_s(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}_s) = \frac{C}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_s|} (-i\omega)^2 W(\omega) e^{i\omega|\mathbf{x} - \mathbf{x}_s|/c_P} \quad (\text{C.12})$$

e

$$\tilde{p}_b(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}_g) = \frac{C^2 R(\mathbf{x}_g, \mathbf{x}_s)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_g| |\mathbf{x}_g - \mathbf{x}_s^I|} (i\omega)^4 W(\omega) e^{-i\omega(|\mathbf{x} - \mathbf{x}_g| - |\mathbf{x}_g - \mathbf{x}_s^I|)/c_P} \quad (\text{C.13})$$

a integral da condição da imagem pode ser expressa como

$$I(\mathbf{x}) = \frac{C^3}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega (-i\omega)^6 W^2(\omega) \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dx_s dy_s dx_g dy_g G(\mathbf{x}_g, \mathbf{x}_s) e^{i\omega\Phi(\mathbf{x}_g, \mathbf{x}_s)} \right] \quad (\text{C.14})$$

com

$$G(\mathbf{x}_g, \mathbf{x}_s) = \frac{R(\mathbf{x}_g, \mathbf{x}_s)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_g| |\mathbf{x} - \mathbf{x}_s| |\mathbf{x}_g - \mathbf{x}_s^I|} \quad (\text{C.15})$$

e

$$\Phi(\mathbf{x}_g, \mathbf{x}_s) = \left( |\mathbf{x} - \mathbf{x}_s| + |\mathbf{x} - \mathbf{x}_g| - |\mathbf{x}_g - \mathbf{x}_s^I| \right) / c_P . \quad (\text{C.16})$$

### Avaliação da fase estacionária

Conforme Haney et al. (2005), a integral quadri-dimensional entre colchetes na equação (C.14) pode ser avaliada pelo método da fase estacionária que serve para avaliar integrais oscilatórias do tipo:

$$I(\omega) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}) \exp[i\omega\Phi(\mathbf{x})] d^n \mathbf{x}. \quad (\text{C.17})$$

Assintoticamente para  $\omega$  tendendo ao infinito, segundo Bleistein e Handelsman (1975):

$$I(\omega) \approx \left(\frac{2\pi}{\omega}\right)^{n/2} \frac{G(\mathbf{x}_0)}{\sqrt{|\nabla\nabla^T\Phi(\mathbf{x}_0)|}} \exp\left[i\omega\Phi(\mathbf{x}_0) + i\frac{\pi}{4}\text{Sgn}\left(\nabla\nabla^T\Phi(\mathbf{x}_0)\right)\right], \quad (\text{C.18})$$

em que  $\mathbf{x}_0$  é um ponto isolado de fase estacionaria (supostamente único); ou seja,

$$\nabla\Phi(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0} \quad (\text{C.19})$$

e

$$|\nabla\nabla^T\Phi(\mathbf{x}_0)| \neq 0. \quad (\text{C.20})$$

Deste modo,  $\text{Sgn}(\nabla\nabla^T\Phi(\mathbf{x}_0))$  representa a assinatura da matriz; ou seja, a diferença entre o número de autovalores positivos e negativos.

### Ponto estacionário

As derivadas da função-fase (C.16) são:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x_s} = \frac{1}{c_P} \left( -\frac{x - x_s}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_s|} + \frac{x_g \cos 2\alpha - x_s - z_d \sin 2\alpha}{|\mathbf{x}_g - \mathbf{x}_s^I|} \right), \quad (\text{C.21})$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x_g} = \frac{1}{c_P} \left( -\frac{x - x_g}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_g|} - \frac{x_g - x_s \cos 2\alpha + z_d \sin 2\alpha}{|\mathbf{x}_g - \mathbf{x}_s^I|} \right), \quad (\text{C.22})$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y_s} = \frac{1}{c_P} \left( -\frac{y - y_s}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_s|} + \frac{y_g - y_s}{|\mathbf{x}_g - \mathbf{x}_s^I|} \right), \quad (\text{C.23})$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y_g} = \frac{1}{c_P} \left( -\frac{y - y_g}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_g|} - \frac{y_g - y_s}{|\mathbf{x}_g - \mathbf{x}_s^I|} \right). \quad (\text{C.24})$$

Utilizando as equações (C.23) e (C.24) na condição (C.19) segue que o ponto estacionário em ambas as integrais  $y_s$  e  $y_g$  no mesmo ponto  $y_0$  definido por:

$$y_0 \equiv y_s = y_g = y. \quad (\text{C.25})$$

As equações (C.21) e (C.22) são simétricas em  $x_s$  e  $x_g$ . Portanto, o ponto de fase estacionária em ambas as integrais  $x_s$  and  $x_g$  está também no mesmo ponto  $x_0$ , dado por

$$x_0 \equiv x_s = x_g = x + z \tan \alpha. \quad (\text{C.26})$$

Deste modo, no ponto estacionário se tem que:

$$G(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0) = \frac{R(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^2 |\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_s^I|} \quad (\text{C.27})$$

e

$$\Phi(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0) = \frac{2}{c_P} \cos \alpha (z - z_d + x \tan \alpha) . \quad (\text{C.28})$$

Nesta equação  $R(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0)$  é o coeficiente de reflexão para incidência normal do par fonte-receptor em  $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0, 0)$ .

### Matriz hessiana

A segunda derivada no ponto de fase estacionária tem as seguintes componentes não nulas:

$$\frac{\partial^2 \Phi(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0)}{\partial x_s \partial x_s} = \frac{\cos^2 \alpha}{c_P} \left( \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} - \frac{1}{|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_s^I|} \right) , \quad (\text{C.29})$$

$$\frac{\partial^2 \Phi(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0)}{\partial x_g \partial x_s} = \frac{\cos^2 \alpha}{c_P} \left( \frac{1}{|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_s^I|} \right) , \quad (\text{C.30})$$

$$\frac{\partial^2 \Phi(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0)}{\partial x_g \partial x_g} = \frac{\cos^2 \alpha}{c_P} \left( \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} - \frac{1}{|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_s^I|} \right) , \quad (\text{C.31})$$

$$\frac{\partial^2 \Phi(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0)}{\partial y_s \partial y_s} = \frac{1}{c_P} \left( \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} - \frac{1}{|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_s^I|} \right) , \quad (\text{C.32})$$

$$\frac{\partial^2 \Phi(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0)}{\partial y_g \partial y_s} = \frac{1}{c_P} \left( \frac{1}{|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_s^I|} \right) , \quad (\text{C.33})$$

$$\frac{\partial^2 \Phi(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0)}{\partial y_g \partial y_g} = \frac{1}{c_P} \left( \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} - \frac{1}{|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_s^I|} \right) . \quad (\text{C.34})$$

Portanto, o determinante da matriz hessiana é

$$\sqrt{|\nabla \nabla^T \Phi(\mathbf{x}_0)|} = \frac{2 \cos^3 \alpha}{c_P^2} \frac{|x \tan \alpha + z_d - z|}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^2 |\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_s^I|} \quad (\text{C.35})$$

A assinatura da hessiana é determinada por uma análise de seus autovalores. Devido a estrutura particular da matriz hessiana o problema se reduz a avaliação de duas matrizes  $2 \times 2$ :

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_s \partial x_s} - \lambda & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_g \partial x_s} \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_g \partial x_s} & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_g \partial x_g} - \lambda \end{vmatrix}_{\mathbf{x}_s = \mathbf{x}_g = \mathbf{x}_0} = 0 , \quad (\text{C.36})$$

e

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y_s \partial y_s} - \lambda & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y_g \partial y_s} \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y_g \partial y_s} & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y_g \partial y_g} - \lambda \end{vmatrix}_{\mathbf{x}_s = \mathbf{x}_g = \mathbf{x}_0} = 0 . \quad (\text{C.37})$$

Isto resulta nos autovalores

$$\lambda_{1,3} = \frac{1}{c_P} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} = \frac{1}{c_P} \frac{\cos \alpha}{z} \quad (\text{C.38})$$

e

$$\begin{aligned} \lambda_{2,4} &= \frac{1}{c_P} \left( \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} - \frac{2}{|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_s^I|} \right) \\ &= \frac{\cos^3 \alpha}{c_P} \frac{x \tan \alpha + z_d - z}{z + (x \tan \alpha + z_d - z) \cos^2 \alpha} . \end{aligned} \quad (\text{C.39})$$

Portanto, os autovalores  $\lambda_{1,3}$  são sempre positivos, enquanto o sinal de  $\lambda_{2,4}$  depende da posição vertical  $z$  do ponto imagem. Temos que  $\lambda_{2,4} > 0$  se  $z < x \tan \alpha + z_d$ , ou seja, se o ponto imagem está acima do refletor, e  $\lambda_{2,4} < 0$  abaixo dele. Desse modo a assinatura da Hessiana é igual a 4 para pontos acima do refletor e zero para pontos abaixo dele. Assim, o termo de fase na equação (C.18) pode ser representado por

$$e^{i\frac{\pi}{4} \text{Sgn}(\nabla \nabla^T \Phi(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0))} = \text{sgn}(z - z_d - x \tan \alpha) . \quad (\text{C.40})$$

## Imagem Final

Reunido os resultados, a imagem  $I(\mathbf{x})$  é dada por:

$$I(\mathbf{x}) \approx \pi C^3 c_P^3 \frac{R(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0)}{\cos^3 \alpha} \frac{\text{sgn}(z - x \tan \alpha - z_d)}{|z - x \tan \alpha - z_d|} \quad (\text{C.41})$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega (-i\omega)^4 W^2(\omega) e^{i2\omega(z - z_d - x \tan \alpha) \cos \alpha / c_P} . \quad (\text{C.42})$$

A integral na frequência pode ser resolvida usando o teorema da convolução e as propriedades da transformada de Fourier:

$$I(\mathbf{x}) \approx \pi C^3 c_P^3 \frac{R(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0)}{\cos^3 \alpha} \frac{\text{sgn}(z - z_R)}{|z - z_R|} w'' \left[ \frac{2 \cos \alpha}{c_P} (z - z_R) \right] \otimes w'' \left[ \frac{2 \cos \alpha}{c_P} (z - z_R) \right] , \quad (\text{C.43})$$

Em que nós determinamos que  $z_d + x \tan \alpha = z_R$  é a profundidade do refletor na posição horizontal no ponto imagem. A expressão (C.43) coincide com a correspondente apresentada por Haney et al. (2005), exceto pelo fator de estiramento do pulso,  $2 \cos \alpha / c_P$  nos argumentos de ambos os pulso-fontes.