

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
CENTRO DE GEOCIÊNCIAS
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM GEOFÍSICA

**ESTUDO DE GERAÇÃO DE CAMPO UNIFORME
PARA MODELAGEM ELETROMAGNÉTICA**

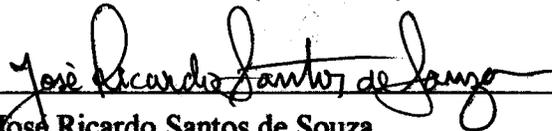
TESE APRESENTADA POR
ANTONIO MAIA DE JESUS CHAVES NETO
COMO REQUISITO PARCIAL À OBTENÇÃO DE GRAU DE
MESTRE EM CIÊNCIAS NA ÁREA DE GEOFÍSICA

Data de Aprovação : 25/10/1996

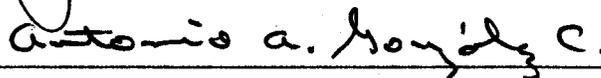
COMITÊ DE TESE:



Dr. Om Prakash Verma (Orientador)



Dr. José Ricardo Santos de Souza



Dr. Antonio Abel González Carrasquilla

BELÉM

1996

CHAVES NETO, Antonio Maia de Jesus. Estudo de geração de campo uniforme para modelagem eletromagnética. Belém, Universidade Federal do Pará. Centro de Geociências, 1996. 72p.

Tese (Mestrado em Geofísica) - Curso de Pós-Graduação em Geofísica, Centro de Geociências, UFPA, 1996.

1. CAMPO UNIFORME. 2. CAMPO MAGNÉTICO. 3. DISTÂNCIA ÓTIMA. 4. DESVIO. 5. BOBINAS. I. Título.

*A Deus, a minha Família e ao
Departamento de Geofísica
da UFPA.*

AGRADECIMENTOS

Ao meu orientador, Prof. Dr. Om Prakash Verma, pela ajuda e dedicação, e principalmente pela liberdade de investigação científica que me foi permitida.

Aos meus examinadores Profs. Drs. José Ricardo Santos de Souza e Abel Carrasquilla pelas sugestões e correções que contribuíram para melhorar esta tese.

Ao convênio UFPA/PETROBRÁS/FADESP/CNPq/FINEP, pelo suporte financeiro a este programa de pós-graduação.

Ao corpo docente do Curso de Pós-Graduação em Geofísica da Universidade Federal do Pará, ao qual devo meu aprimoramento.

Aos funcionários do Curso de Geofísica, pelo apoio e cooperação, em especial ao Ronald Vieira pela dedicação na confecção das figuras desta tese.

Ao bibliotecário Hélio Martins pela revisão do texto e das normas de editoração.

Aos amigos Altem Pontes, Edilberto Rozal, Hugo Sobrinho, Ramon Camarão, Paulo Roberto de Carvalho e Antonio Adelmo pela amizade.

A todos os amigos e colegas do mestrado e doutorado do Curso de Pós-Graduação em Geofísica.

Finalmente, agradeço ao Prof. José Maria Bassalo, a minha família, em especial à minha mãe Vitória Machado, e ao Departamento de Física que me liberou parcialmente para finalizar a tese de mestrado.

SUMÁRIO

| | p. |
|--|----|
| DEDICATÓRIA | i |
| AGRADECIMENTOS | ii |
| RESUMO | 1 |
| ABSTRACT | 2 |
| 1 - INTRODUÇÃO | 3 |
| 1.1 TRABALHOS ANTERIORES | 6 |
| 1.2 OBJETIVOS DESTE ESTUDO | 6 |
| 2 - BOBINA CIRCULAR E BOBINAS DE HELMHOLTZ | 8 |
| 2.1 BOBINA CIRCULAR | 8 |
| 2.1.1 Fundamentos Teóricos | 8 |
| 2.1.1.1 Campos Magnéticos de Uma Bobina Circular de Corrente | 8 |
| 2.1.2 Resultados Computacionais | 10 |
| 2.1.2.1 Desvios Percentuais do Campo Magnético H_z em Relação a $H_z(0,0)$ | 10 |
| 2.2 BOBINAS DE HELMHOLTZ | 14 |
| 2.2.1 Fundamentos Teóricos | 14 |
| 2.2.1.1 Cálculo do Campo Magnético Para Duas Bobinas Coaxiais de Mesmo Raio | 14 |
| 2.2.1.2 Determinação da Distância Ótima | 14 |
| 2.2.2 Resultados Computacionais | 15 |
| 2.2.2.1 Análise de Desvios Percentuais de h_z em Relação a $h_z(0,0)$ | 19 |
| 3 - SOLENÓIDE | 21 |
| 3.1 FUNDAMENTOS TEÓRICOS | 21 |
| 3.1.1 O Solenóide | 21 |
| 3.2 RESULTADOS COMPUTACIONAIS | 27 |
| 3.2.1 Determinação do Comprimento Ótimo do Solenóide | 28 |
| 3.2.2 Desvios Percentuais do Campo Magnético H_z em Relação a $H_z(0,0)$ | 31 |

| | |
|--|----|
| 4 - BOBINA QUADRADA | 34 |
| 4.1 FUNDAMENTOS TEÓRICOS | 34 |
| 4.1.1 Campo Magnético de um Fio de Corrente Retilíneo e Finito | 34 |
| 4.1.2 Campos Magnéticos de Uma Bobina Quadrada de Corrente | 35 |
| 4.2 RESULTADOS COMPUTACIONAIS | 39 |
| 4.2.1 Desvios Percentuais do Campo Magnético H_z em Relação a $H_z(0, 0, 0)$ | 39 |
| 5 - UM E DOIS PLANOS DE CORRENTE | 42 |
| 5.1 UM PLANO DE CORRENTE | 42 |
| 5.1.1 Fundamentos Teóricos | 42 |
| 5.1.1.1 Campos Magnéticos de um Plano de Corrente Discreto, Quadrado e Finito | 42 |
| 5.1.2 Resultados Computacionais | 44 |
| 5.1.2.1 Campo Magnético H_y | 44 |
| 5.1.2.2 Campo Magnético H_z | 45 |
| 5.1.2.3 Desvios Percentuais do Campo Magnético H_y em Relação a $H_y(0; 0; z)$ | 45 |
| 5.2 DOIS PLANOS DE CORRENTE | 53 |
| 5.2.1 Fundamentos Teóricos | 53 |
| 5.2.2 Resultados Computacionais | 54 |
| 5.2.2.1 Campo Magnético h_y | 54 |
| 5.2.2.2 Campo Magnético h_z | 54 |
| 5.2.2.3 Determinação da Distância Ótima | 55 |
| 5.2.2.4 Desvios Percentuais de $h_y(x, y, z)$ em Relação a $h_y(0, 0, 0)$ | 60 |
| 6 - CONCLUSÕES, PARTE EXPERIMENTAL E SUGESTÕES | 63 |
| REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS | 68 |
| APÊNDICE A - Dedução da equação (2.4) | 71 |
| APÊNDICE B - Dedução da equação (2.5) | 72 |

RESUMO

Para estudar os problemas de prospecção geofísica eletromagnética através de modelagem analógica, as condições em escala natural são representadas, no laboratório, em escala reduzida de acordo com a teoria da similitude. Portanto, para investigar os problemas de técnicas VLF, AFMAG e MT, frequentemente é necessário criar campo uniforme no arranjo experimental. Vários sistemas físicos para geração de campos uniformes são analisados teoricamente nesta tese. Os sistemas estudados aqui são a bobina circular, bobina de Helmholtz, solenóide, um plano de corrente e dois planos paralelos de correntes. As equações analíticas foram obtidas para campo magnético num ponto do espaço e subsequentemente as condições de campo uniforme. Nos casos em que as condições para o campo uniforme não puderam ser obtidas analiticamente, a porcentagem de desvio do campo em relação a um ponto pré-selecionado foi calculada. Contudo, os mapas de campo magnético, assim como o mapa de porcentagem de desvio, estão presentes para todos os sistemas estudados aqui. Também, foram calculados as áreas e os volumes espaciais de vários desvios de porcentagem do campo uniforme. Um estudo comparativo desses sistemas mostra que o solenóide é a maneira mais eficiente para criar um campo uniforme, seguido pelo sistema de bobinas de Helmholtz. Porém, o campo criado em um solenóide está em um espaço fechado onde é difícil colocar modelos e substituí-los para executar experimentos. Portanto, recomenda-se o uso de bobinas de Helmholtz para criar um campo uniforme. Este último sistema fornece campo uniforme com espaço aberto suficiente, o que facilita o experimento.

ABSTRACT

In order to study the electromagnetic prospecting problems in geophysics through analog modelling, the full scale conditions are represented in the laboratory at a reduced scale according to the theory of similitude. Therefore, to investigate the problems of VLF, AFMAG and MT techniques, its necessary to create a uniform field in the experimental set up. Various physical systems for generating the uniform fields were analysed theoretically in this thesis. The systems studied here are a circular coil, a Helmholtz coil system, a solenoid, a rectangular coil, a plane of currents and a two parallel planes of currents. Analytical relations were obtained for the magnetic fields at a point in space and subsequently the conditions for a uniform field. In cases where the conditions for the uniform field could not be obtained analytically, the percentage deviation of the field with reference to a pre-selected point was computed. The magnetic field maps as well as the percentage deviation maps were presented for all the systems studied here. Also, volume of the space available for various percentage deviation of the uniform field have been calculated. A comparative study of these systems shows that the solenoid is the most efficient way to create a uniform field followed by a Helmholtz coil system. Nevertheless, the field created within a solenoid is a closed space where it is difficult to place models in order to carry out the experiments. Therefore, it is recommended to use a Helmholtz coil system to create a uniform field, because it provides sufficient open space of a uniform field that facilitates the experiments.

1 - INTRODUÇÃO

A geração de campo uniforme primário e variável no tempo, ou seja, ondas planas eletromagnéticas, com frequência controlável, é importante nas modelagens geofísicas como, por exemplo, dos métodos MT, AFMAG e VLF. Nestes métodos, as respostas dos modelos colocados no campo uniforme são estudadas para simular diferentes situações geológicas, e a não uniformidade do campo primário interagindo com o modelo alvo é uma fonte de erros por falta de aproximação das condições realísticas. Existe também a dificuldade em conciliar as dimensões da antena geradora do campo primário com as dimensões do laboratório. Em todos os métodos citados anteriormente, os campos primários são polarizados no plano horizontal com modo transversal elétrico e as modelagens são desenvolvidas com base na *teoria da similitude*. Inicialmente, apresenta-se uma breve explanação dos métodos geofísicos acima citados, os quais necessitam de um campo primário uniforme. Em seguida serão apresentados alguns sistemas físicos os quais tem a finalidade de gerar um campo uniforme em modelagem geofísica eletromagnética para estes métodos e outros.

O método MT (*MagnetoTelluric*) (PARASNIS,1972) é aplicado em investigações em profundidade. Neste método, a fonte de campo uniforme é um imenso plano de corrente elétrica variando no tempo, a qual flue na ionosfera paralela à superfície da Terra. A variação temporal do plano de corrente fornece componentes harmônicos de campo, cujos períodos são na faixa de 0,01 segundo a centenas de segundos, e as dimensões lineares do sistema podem ser grandes, atingindo várias centenas de quilômetros. Para construir um modelo físico desse sistema (GRANT & WEST, 1965), pode-se usar coordenadas retangulares com a origem na superfície, e a coordenada z direcionada para baixo. Supõe-se que a subsuperfície é formada por um número de camadas homogêneas, as quais possuem diferentes condutividades elétricas. O plano de corrente da ionosfera é considerado infinito em extensão e está a uma dada altura sobre a superfície da Terra.

No método AFMAG (*Audio Frequency MAGnetic*), o campo uniforme primário empregado está na faixa de frequências de audio. Este campo provém de complicadas interações entre o plasma emitido pelo Sol, o campo magnético terrestre e as descargas elétricas durante os relâmpagos. O espaço entre a ionosfera e a superfície da Terra atua de maneira similar a um guia de onda para estes campos, obtendo como resultado uma componente vertical muito pequena comparada com a componente horizontal deste campo magnético. A amplitude e

direção da onda tendem a serem randômicas, ou quasi-randômicas. Na vizinhança de corpos altamente condutivos, as anomalias medidas na forma de inclinação do eixo maior da elipse de polarização, apresentam um ponto de inflexão acima do condutor e estão limitados, nos flancos dos corpos, por um máximo e um mínimo, definindo a presença de materiais condutores.

No método VLF (*Very Low Frequency*), faz-se uso de estações de rádio para servir de fonte de campo uniforme primário, estas estações estão situadas em diversos países, também são usadas comunicações militares, em frequências na faixa de 15 a 25 KHz. Em VLF existem dois modos de propagação da onda: modo *H* e modo *E*. Explana-se apenas o modo *H*, devido ao fato deste necessitar apenas do campo magnético uniforme, o qual varia harmonicamente no tempo para este tipo de prospecção geofísica. No modo *H*, devido ao fato da antena transmissora ser vertical (SKITEK & MARSHALL, 1982), as linhas de campo magnético são círculos no plano horizontal. É interessante citar que para distâncias muito grandes do transmissor, o campo primário transmitido pode ser considerado uniforme.

Os tipos de anomalias eletromagnéticas obtidas através dos métodos supracitados (i.e., MT, VLF, AFMAG), para diferentes modelos geológicos podem ser estudados por métodos analíticos, modelagem numérica e modelagem analógica na escala reduzida. Cada metodologia tem suas vantagens e limitações. As modelagens analógicas são amplamente empregadas nos estudos geofísicos eletromagnéticos devido a sua versatilidade e baixo custo.

Na modelagem analógica as situações de prospecção eletromagnética são simuladas em escala reduzida no laboratório. As condições de simulações são determinadas pela *teoria de similitude* (GRANT & WEST, 1965). Nas simulações em laboratório das técnicas AFMAG e VLF é necessário a geração de campo magnético uniforme na direção horizontal, enquanto o método MT é gerado na direção vertical.

A seguir, uma rápida análise de várias maneiras de criação desse campo uniforme será feita através do uso de bobinas circular e quadrada, bobinas de Helmholtz (CONEY, 1977), solenóide, um e dois planos de corrente (DOSSO, 1966a), o arranjo de quatro fios (EDWARDS, 1980), e também, por uma antena vertical distante (KRAUS, 1978).

As bobinas circular e retangular geram um volume considerável de campo uniforme em sua região central, sendo que a bobina circular possui um volume de campo uniforme maior do que da bobina retangular. Porém, a bobina quadrada é mais prática e mais fácil de construir do que a bobina circular.

O par de bobinas conhecido como *bobinas de Helmholtz* é bastante prático para estudos em laboratório, devido a grande facilidade de trabalho entre pares de bobinas.

No solenóide (BASTOS, 1989) a região de campo uniforme obtida é bastante eficiente. Porém, o problema é que o comprimento necessita ser muito maior que o raio do mesmo para se conseguir uma região satisfatória de campo uniforme. A realização de medidas das respostas de modelos geológicos dentro do solenóide é muito difícil experimentalmente. Portanto este sistema físico não é prático para se trabalhar em laboratório.

O plano de corrente é outra maneira de gerar campo uniforme, o qual pode ser construído a partir de fios de corrente posicionados paralelamente lado a lado e situados no mesmo plano. Este sistema também é bastante prático em termos de trabalho em laboratório, e é possível conseguir resultados ainda mais interessantes para *dois planos paralelos de correntes* paralelos e coaxiais.

O arranjo de quatro fios (EDWARDS, 1980) para gerar campo uniforme num tanque com líquido condutor, consiste de quatro fios verticais de corrente os quais interceptam a superfície do fluido em quatro pontos dos vértices de um retângulo geométrico. Os dois fios são fontes de correntes e os outros são sorvedouros das correntes que surgem. A continuidade de corrente elétrica no fluido gerada por esse sistema de quatro fios cria um campo magnético uniforme no tanque. O problema é encontrar as trajetórias das correntes elétricas fluindo dentro do líquido condutor para fazer a simulação computacional.

Finalmente, a antena distante também produz campo uniforme, porém esta é inviável no ponto de vista prático de modelagem, por produzir um campo muito fraco para potências de transmissão razoáveis.

Devido a boa praticidade em laboratório, neste trabalho foram estudados os campos gerados pelas bobinas circulares e quadradas, bobinas de Helmholtz, solenóide, um e dois planos de corrente.

Agora um breve comentário será feito sobre algumas definições importantes que foram utilizadas nesse trabalho, tais como: distância ótima, desvio percentual em relação a um valor de referência escolhido *a priori* e a teoria da similitude:

A distância ótima para a obtenção de uma função uniforme (constante, estacionária) existe onde as duas primeiras derivadas da função, em relação a sua variável se anulam. A primeira derivada nula significa que tem-se um ponto geométrico de valor máximo, mínimo ou estacionário da função. Já segunda derivada nula (com os mesmos parâmetros que asseguram que a primeira derivada é nula) garante que existe um valor uniforme. Neste trabalho a equação do campo magnético (da onda eletromagnética) de cada sistema físico foi utilizada para determinar a sua respectiva distância ótima.

O mapa de contorno do desvio percentual do campo magnético em relação a um valor de

referência, será utilizado para obter informação sobre a distribuição volumétrica do desvio do campo. Através deste pode-se determinar a região de desvio adequado para a colocação do modelo alvo. O gráfico dos volumes de desvios percentuais do campo magnético em relação ao seu valor de referência, *versus* o eixo coaxial do sistema físico, fornece a curva do volumes de desvio percentual de 1% de campo, cuja posição de máximo é considerada a distância ótima para campo uniforme.

Com as análises da distância ótima e do volume de desvio percentual de campo magnético relativo a um valor de campo magnético de referência, se determina a geometria do sistema físico mais eficaz e prática, a qual é possível para ser usada em trabalhos de laboratório.

A teoria da similitude (FRISCHKNECHT, 1988) permite simular no laboratório um sistema eletromagnético na escala natural para um de escala reduzida que obedeça as mesmas leis físicas. Conforme esta teoria o parâmetro, número de indução, deve permanecer igual em ambos os sistemas, i.e., modelo e na situação em escala natural.

1.1 TRABALHOS ANTERIORES

Na Tabela 1 foram descritos, sucintamente, os meios físicos utilizados para geração de campo uniforme, sua finalidade de modelagem e os autores que as propuseram ou realizaram.

1.2 OBJETIVOS DESTE ESTUDO

O objetivo primordial desse trabalho é estudar uma maneira apropriada de obter um campo uniforme que seja conveniente para realizar experimentos em laboratório. Este trabalho visa:

- 1 - Explicitar as relações ou equações eletromagnéticas que regem os sistemas físicos envolvidos, *e.g.*, bobina circular, bobinas de Helmholtz, solenóide, bobina quadrada, um e dois planos de corrente;

- 2 - Encontrar as condições ótimas para a geração de campo uniforme para diferentes sistemas físicos;

- 3 - Calcular computacionalmente e apresentar na forma gráfica o campo magnético (da onda eletromagnética) destes sistemas físicos envolvidos, no caso estacionário no tempo;

- 4 - Determinar a geometria e os volumes de desvios percentuais em relação a um valor de campo magnético de referência, gerados pelo sistema físico envolvido.

5 - Escolher um sistema físico que forneça, no mínimo, uma região volumétrica de $0,60m \times 0,40m \times 0,10m$, e que seja de fácil manuseio para colocação de modelos experimentais.

Tabela 1.1 - Arranjos utilizados para a geração de campo uniforme nas modelagens reduzidas.

| ARRANJOS | MODELAGEM | CIENTISTAS |
|-------------------------|-----------------------------|-------------------------------|
| Bobina de Helmholtz | VLF | (BAKER & MYERS, 1979) |
| | VLF | (CONEY, 1977) |
| | VLF | (NEVITT et al, 1985) |
| | VLF | (SPITTA, 1973) |
| | AFMAG | (VERMA, 1981) |
| Plano de corrente | Efeito EM de costa oceânica | (CHAN et al, 1983) |
| | Efeito EM de costa oceânica | (DOSSO, 1966b) |
| | Efeito EM de costa oceânica | (DOSSO et al, 1980) |
| | Efeito EM de costa oceânica | (DOSSO et al, 1985) |
| | Efeito EM de costa oceânica | (HERMANCE, 1968) |
| | Efeito EM de costa oceânica | (HU et al, 1984) |
| Arranjo 4 fios | MT | (EDWARDS, 1980) |
| Bobina pequena distante | Propagação EM na Litosfera | (BROWN & GANGI, 1963) |
| Bobina retangular | Indução EM | (PODDAR & BHATTACHARYA, 1966) |

2 - BOBINA CIRCULAR E BOBINAS DE HELMHOLTZ

2.1 BOBINA CIRCULAR

As bobinas circulares são comumente utilizadas para produzir um campo uniforme em seu centro. O rotacional do vetor potencial magnético dividido pela permeabilidade magnética relativa do meio fornecerá o campo magnético naquele ponto do espaço. Feito isto, foi calculado a região volumétrica de desvio percentual de campo magnético (da onda eletromagnética), na direção normal a bobina, em relação ao campo magnético de referência escolhido no centro da mesma.

2.1.1 Fundamentos Teóricos

2.1.1.1 Campos Magnéticos de Uma Bobina Circular de Corrente

O campo magnético de uma bobina simples no vácuo é dado pela equação:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{A}, \quad (2.1)$$

em que μ_0 é a permeabilidade magnética no vácuo e \mathbf{A} é o potencial vetor magnético. Escolhendo o sistema em coordenadas cilíndricas (ρ, ϕ, z) , cujo eixo coincide com o eixo geométrico da bobina e cuja origem coincide com o centro da bobina conforme a Figura 2.1. O vetor potencial magnético é dado por:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} d^3r_0.$$

Devido à simetria azimutal da densidade de corrente \mathbf{J} circulando no fio da bobina, resulta que \mathbf{A} terá somente componente na direção ϕ , A_ϕ . Sabendo-se que $\mathbf{J} = \mathbf{0}$ fora do volume V do fio da bobina. Portanto esta equação anterior se reduz a equação escalar:

$$A_\phi = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{J_\phi(\mathbf{r}_0) \cos(\phi_0 - \phi)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} d^3r_0,$$

cuja integral é calculada ao redor da circunferência do fio da bobina, ou seja, apenas onde a corrente elétrica I (amperes) está fluindo. A área seccional do fio da bobina é muito pequena

comparada com a área da bobina de raio a , logo esta integral reduz-se a

$$A_\phi(\rho, z) = \frac{\mu_o I a N_b}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos(\phi_o - \phi) d\phi_o}{\sqrt{\rho^2 + a^2 + z^2 - 2a\rho \cos(\phi_o - \phi)}}, \quad (2.2)$$

cuja unidade é Weber por unidade de comprimento, a , e N_e (adimensional) é o número de espiras. O campo magnético na direção ϕ é nulo devido a simetria azimutal deste sistema geométrico. Considerando $\phi = 0$ na equação (2.2) se determina o campo magnético, $\mathbf{H}(\rho, z)$. Portanto a equação (2.1) pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \frac{1}{\mu_o} \left[-\frac{\partial}{\partial z} A_\phi \mathbf{a}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\phi) \mathbf{a}_z \right], \\ &= H_\rho(\rho, z) \mathbf{a}_\rho + H_z(\rho, z) \mathbf{a}_z, \end{aligned} \quad (2.3)$$

onde $H_\rho(\rho, z)$ e $H_z(\rho, z)$ são os escalares do campo magnético nas direções ρ e z , respectivamente, cuja unidade é ampere por unidade de comprimento a . Substituindo a equação (2.2) em (2.3), logo:

$$\begin{aligned} H_z(\rho, z) &= \frac{1}{\mu_o \rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\phi), \\ &= \frac{a I N_e}{4\pi \rho} \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + a^2 + z^2 - 2a\rho \cos \phi_o}} \right] \cos \phi_o d\phi_o, \\ &= \frac{a I N_e}{2\pi} \int_0^\pi \frac{\cos \phi_o (a^2 + z^2 - a\rho \cos \phi_o) d\phi_o}{\rho (\rho^2 + a^2 + z^2 - 2a\rho \cos \phi_o)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

e, também teremos

$$\begin{aligned} H_\rho(\rho, z) &= -\frac{1}{\mu_o} \frac{\partial}{\partial z} A_\phi, \\ &= -\frac{a I N_e}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{\sqrt{\rho^2 + a^2 + z^2 - 2a\rho \cos \phi_o}} \right] \cos \phi_o d\phi_o, \\ &= \frac{I a N_e}{2\pi} \int_0^\pi \frac{z \cos \phi_o d\phi_o}{(\rho^2 + a^2 + z^2 - 2a\rho \cos \phi_o)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

As deduções das equações (2.4) e (2.5) estão nos apêndices *A* e *B*, respectivamente. É interessante citar que as integrais das equações (2.2), (2.4) e (2.5), não possuem solução analítica, possuindo apenas solução numérica.

Deste modo pode-se calcular o campo magnético em qualquer ponto do espaço, exceto exatamente no eixo z ($\rho = 0$; z) do sistema físico bobina de corrente, pois as equações (2.4) e (2.5) tenderão ao infinito, já que este é um ponto de singularidade da integral. Esta situação pode ser contornada para o campo magnético na direção z , encontrando uma equação simples

para pontos exatamente no eixo da bobina, usando a lei de Biot-Savart para uma bobina (REITZ et al, 1982):

$$\mathbf{H}_z(\rho = 0; z) = \frac{Ia^2 N_e}{2(a^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \mathbf{a}_z, \quad (2.6)$$

a qual depende apenas da posição no eixo z , dos parâmetros corrente elétrica I e do raio a .

Como a bobina é constituída de N_e espiras, portanto o campo magnético é multiplicado por este número adimensional. Por outro lado, os valores de ρ , z e dos campos magnéticos estão todos normalizados pelo raio a da bobina.

2.1.2 Resultados Computacionais

Nas Figuras 2.2 e 2.3 foi plotado o mapa de contorno de $H_z(\rho, z)$ (equação (2.4)) e $H_\rho(\rho, z)$ (equação (2.5)), respectivamente. Comparando, agora, os valores numéricos de $H_z(\rho, z)$, da Figura 2.2 com o valor numérico de $H_\rho(\rho, z)$, na Figura 2.3, tem-se numericamente que $H_z(\rho, z) \gg H_\rho(\rho, z)$, na região mais interna ($-0,15a < z < 0,15a$ e $-0,2a < \rho < 0,2a$) da bobina e $H_\rho(\rho, z)$ é nulo no centro da bobina, $(0,0)$, onde H_z é máximo no eixo (ρ, z) . Portanto, pode-se escolher o campo magnético na direção z para analisar os volumes de desvios percentuais do campo magnético $H_z(\rho, z)$ em relação a $H_z(0,0)$.

2.1.2.1 Desvios Percentuais do Campo Magnético H_z em Relação a $H_z(0,0)$

A partir da Figura 2.2 foi elaborado o mapa de contorno dos desvios percentuais de campo magnético na direção z , $H_z(\rho, z)$ em relação a $H_z(0,0)$ da bobina circular, a fim de contruir, aproximadamente, os volumes cilindricos de desvios percentuais até 3% (Figura 2.4).

Os resultados indicam, aproximadamente, comprimentos ao longo dos eixos dos cilindros de $0,24a$ para 1%; de $0,34a$ para 2% e de $0,4a$ para 3%.

Verifica-se também, aproximadamente, distâncias radiais de $0,08a$ para 1%; de $0,12a$ para 2% e de $0,15a$ para 3% nos cilindros.

Logo, obtêm-se, aproximadamente, volumes dos cilindros ($\pi \times \text{raio}^2 \times \text{comprimento}$) de $\pi(0,08a)^2 \times (0,24a) \cong 0,005a^3$ para 1%; de $\pi(0,12a)^2 \times (0,34a) \cong 0,0154a^3$ para 2% e de $\pi(0,15a)^2 \times (0,4a) \cong 0,0283a^3$ para 3%.

A Figura 2.5 que mostra o comportamento do mapa de contorno de desvio de $H_z(\rho, z)$ em relação a $H_z(0,0)$ num quadrante do plano xy , em $z = 0$, comprovando que a área da base é circular do cilindro de desvio.

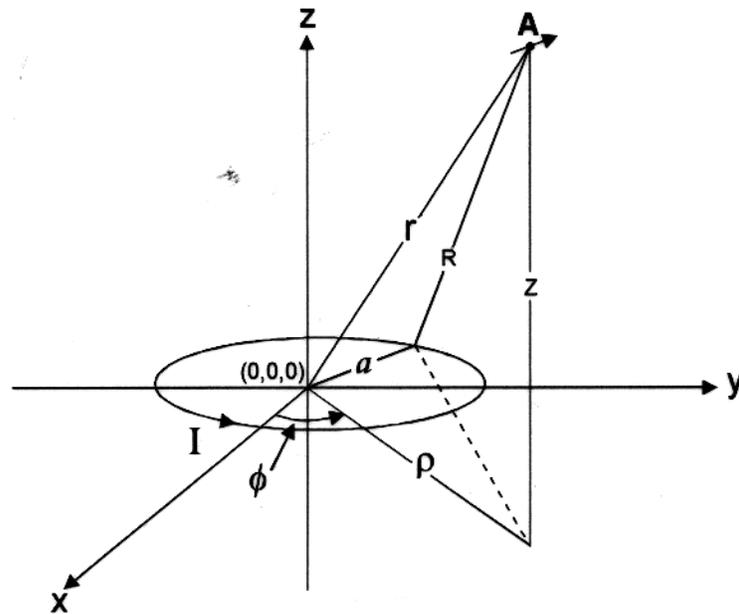


Figura 2.1 - Potencial vetor magnético de uma bobina, por onde passa uma corrente elétrica I , possuindo seu centro no centro da origem $(\rho, \phi, z) = (0, 0, 0)$ tendo o eixo na direção $0z$.

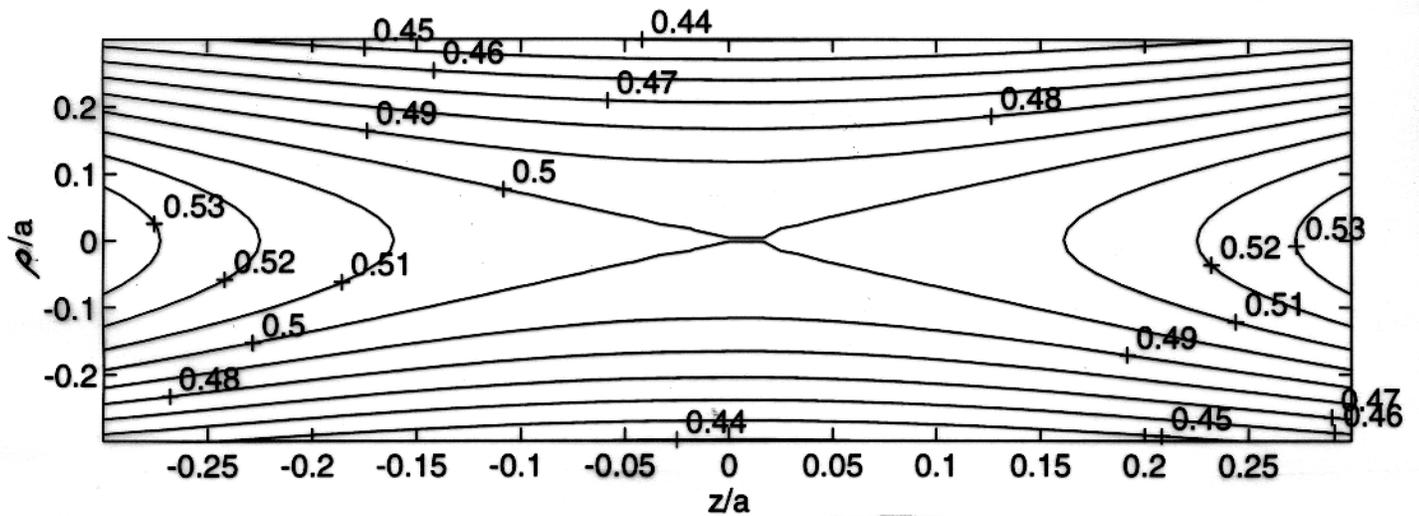


Figura 2.2 - Mapa de contorno do campo magnético H_z (ampères/a) no plano ρz , da bobina circular, $I = 1A$, $N_e = 1$.

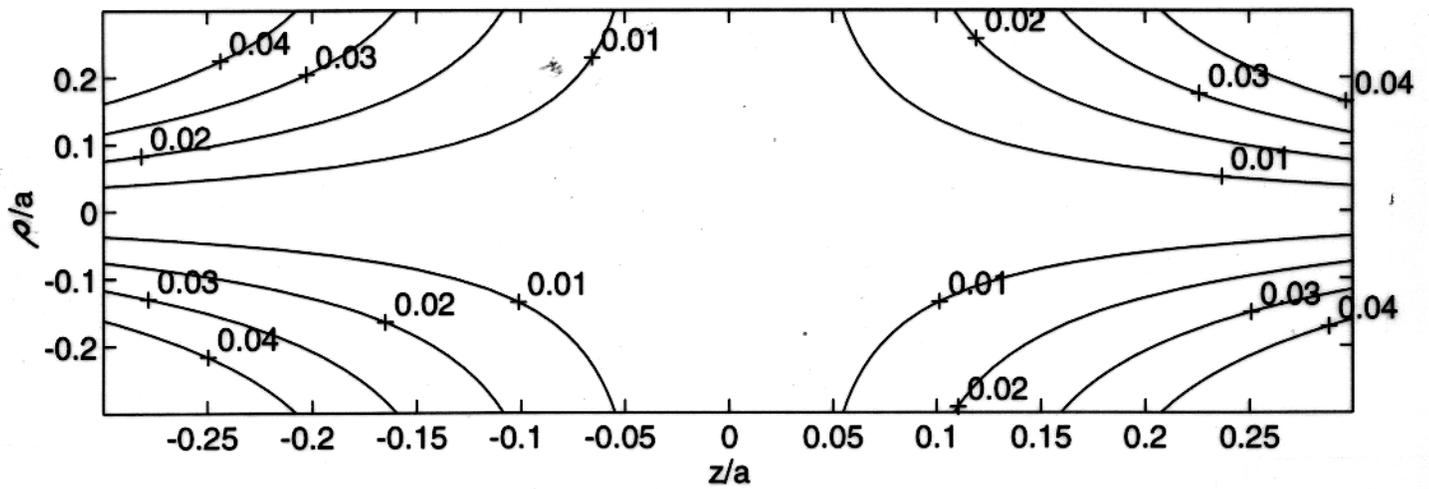


Figura 2.3 - Mapa de contorno do campo magnético H_ρ (amperes/a) no plano ρz , da bobina circular, $I = 1A$, $N_e = 1$. H_ρ é nulo na posição $(0,0)$.

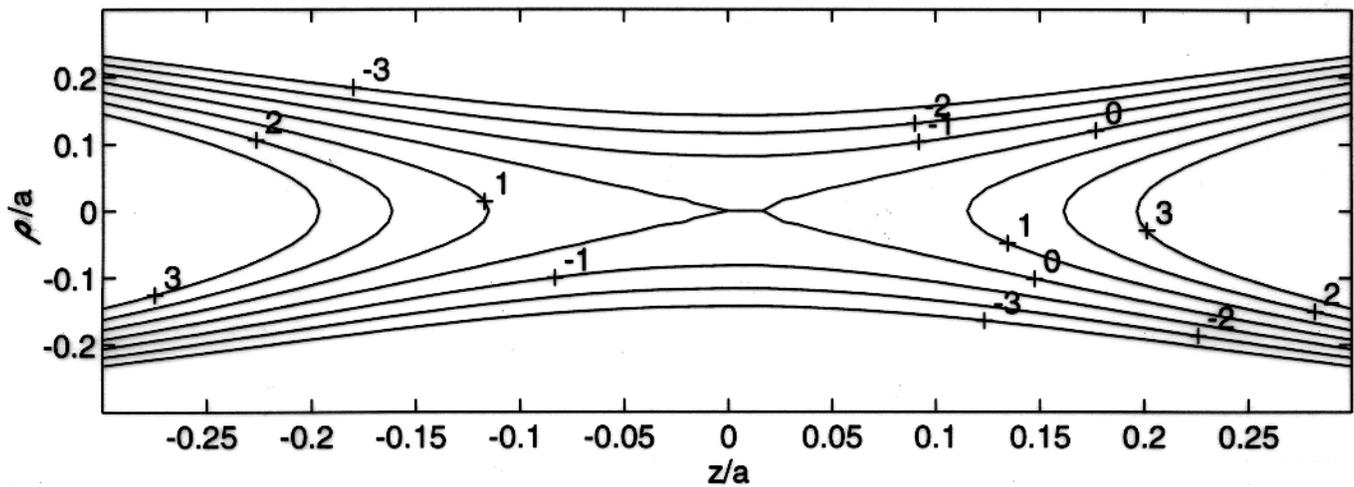


Figura 2.4 - Mapa de contorno dos desvios percentuais de campo magnético H_z em relação a $H_z(0,0)$, no plano ρz da bobina circular.

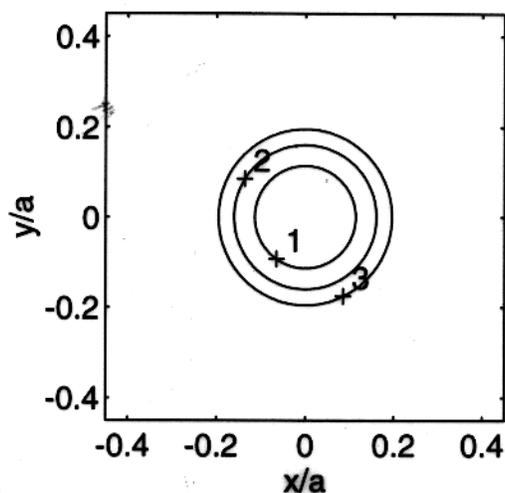


Figura 2.5 - Mapa de contorno de desvio percentual do campo magnético $H_z(\rho, 0)$ em relação ao campo magnético no centro, $H_z(0, 0)$ da bobina circular.

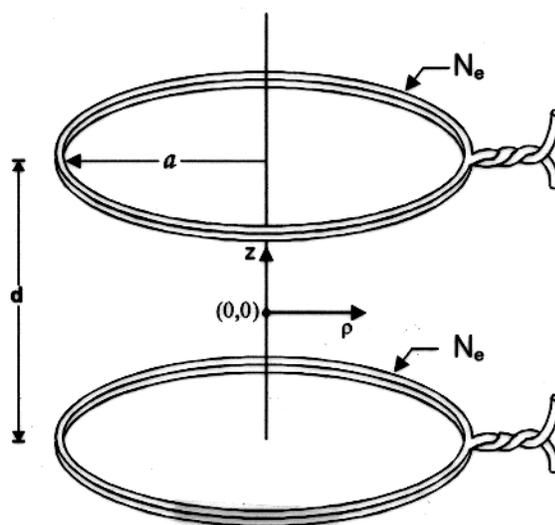


Figura 2.6 - Geometria das duas bobinas centradas axialmente, onde a é o raio, d é a distância entre as bobinas; as correntes elétricas nas duas bobinas estão em fase entre si. Este sistema tem simetria cilíndrica (no caso de $d = a$ tem-se as bobinas de Helmholtz).

2.2 BOBINAS DE HELMHOLTZ

2.2.1 Fundamentos Teóricos

2.2.1.1 Cálculo do Campo Magnético Para Duas Bobinas Coaxiais de Mesmo Raio

Agora analisando o caso de duas bobinas circulares paralelas, centradas axialmente e separadas pela distância de d , vide Figura 2.6. Usando a soma vetorial dos campos magnéticos, tem-se, portanto, a parte escalar do campo magnético resultante $h_z(\rho, z)$ na direção z , e $h_\rho(\rho, z)$ na direção ρ .

A parte escalar do campo magnético, $h_z(\rho, z)$, resultante na direção z é dada por:

$$h_z(\rho, z) = H_z(\rho, \frac{d}{2} + z) + H_z(\rho, \frac{d}{2} - z), \quad (2.7)$$

onde $H_z(\rho, \frac{d}{2} + z)$ e $H_z(\rho, \frac{d}{2} - z)$ são as contribuições de campos magnéticos na direção z das bobinas inferior e superior da Figura 2.6; as quais são dadas pela equação (2.4).

O campo magnético resultante na direção ρ , $h_\rho(\rho, z)$, é dado por

$$h_\rho(\rho, z) = H_\rho(\rho, \frac{d}{2} + z) - H_\rho(\rho, \frac{d}{2} - z), \quad (2.8)$$

onde $H_\rho(\rho, \frac{d}{2} + z)$ e $H_\rho(\rho, \frac{d}{2} - z)$ são as contribuições de campos magnéticos na direção ρ da bobina inferior e superior da Figura 2.6; as quais são dadas pela equação (2.5).

Assim, o campo magnético resultante total, $\mathbf{h}(\rho, z)$, é dado por:

$$\mathbf{h}(\rho, z) = h_\rho(\rho, z)\mathbf{a}_\rho + h_z(\rho, z)\mathbf{a}_z. \quad (2.9)$$

Como as bobinas são constituídas por N_e espiras em cada bobina, então o campo magnético é multiplicado por este número adimensional. Os valores de ρ , z e dos campos magnéticos estão normalizados pelo raio a da bobina.

2.2.1.2 Determinação da Distância Ótima

Pela equação (2.4) calcula-se $h_z(\rho, z)$ de uma bobina para qualquer ponto no espaço, com exceção para $\rho = 0$ exatamente, pois $h_z(\rho, z)$ tende ao infinito. Portanto usa-se a equação (2.6) para obter o campo no eixo ($\rho = 0; z$), para o sistema físico da Figura 2.6:

$$h_z(\rho = 0; z) = H_z(\rho = 0; \frac{d}{2} + z) + H_z(\rho = 0; \frac{d}{2} - z).$$

Usando a equação (2.6) nesta equação acima (Figura 2.9), pode-se reescrever como

$$h_z(\rho = 0; z) = \frac{N_e I a^2}{2} \left[\frac{1}{\left(\left(\frac{d}{2} + z\right)^2 + a^2\right)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{\left(\left(\frac{d}{2} - z\right)^2 + a^2\right)^{\frac{3}{2}}} \right],$$

onde as partes do campo resultante $H_z(\rho = 0; \frac{d}{2} + z)$, e $H_z(\rho = 0; \frac{d}{2} - z)$, são as contribuições do campo no eixo das bobinas inferior e superior da Figura 2.6, respectivamente. A derivada primeira de $h_z(\rho = 0; z)$ em relação a z , fornece:

$$\frac{dh_z(\rho=0; z)}{dz} = \frac{3N_e I a^2}{2} \left[-\frac{\left(\frac{d}{2} + z\right)}{\left(\left(\frac{d}{2} + z\right)^2 + a^2\right)^{\frac{5}{2}}} + \frac{\left(\frac{d}{2} - z\right)}{\left(\left(\frac{d}{2} - z\right)^2 + a^2\right)^{\frac{5}{2}}} \right],$$

a qual se anula no ponto $z = z_o = 0$. Encontra-se, agora, a segunda derivada de $h_z(\rho = 0; z)$ em relação a z é:

$$\frac{d^2 h_z(\rho=0; z)}{dz^2} = -\frac{3N_e I a^2}{2} \left[\frac{1}{\left(\left(\frac{d}{2} + z\right)^2 + a^2\right)^{\frac{7}{2}}} - 5 \frac{\left(\frac{d}{2} + z\right)^2}{\left(\left(\frac{d}{2} + z\right)^2 + a^2\right)^{\frac{7}{2}}} + \frac{1}{\left(\left(\frac{d}{2} - z\right)^2 + a^2\right)^{\frac{7}{2}}} - 5 \frac{\left(\frac{d}{2} - z\right)^2}{\left(\left(\frac{d}{2} - z\right)^2 + a^2\right)^{\frac{7}{2}}} \right],$$

e substituindo no ponto escolhido $z = z_o = 0$, se verifica que esta função se anula em $d = -a$ ou $d = a$. Portanto, a *escolha apropriada* de d é:

$$d = a,$$

ou seja, a separação das bobinas será igual ao raio das bobinas. Esta distância de separação entre as bobinas encontrada é a distância ótima para encontrar campo uniforme entre as duas bobinas deste sistema físico, ela define a geometria das *bobinas de Helmholtz*, ou seja, elas são duas bobinas de mesmo raio, centradas coaxialmente e separadas entre si da distância igual ao raio delas.

O fato da primeira e a segunda derivadas de $h_z(\rho = 0; z)$ em relação a z , serem nulas na posição $z = 0$ é importante, pois assegura que nesta posição o campo magnético é estacionário (constante, uniforme).

2.2.2 Resultados Computacionais

Nas Figuras 2.7 e 2.8 estão plotados os mapas de contorno de $h_z(\rho, z)$ e $h_\rho(\rho, z)$ respectivamente, em miliamperes/ a no caso das bobinas de Helmholtz ($d = a$). Comparando, agora, o valor numérico de $h_z(\rho, z)$, na Figura 2.7, com o valor numérico de $h_\rho(\rho, z)$, na Figura 2.8. Tem-se numericamente que $h_z(\rho, z) \gg h_\rho(\rho, z)$, na região mais interna ($-0,25a < z < 0,25a$ e $-0,25a < \rho < 0,25a$) da bobina de Helmholtz. E, também, devido ao fato de h_z ser máximo no ponto $(0, 0)$, e h_ρ ser nulo nesta posição do eixo ($\rho = 0; z$), então escolhe-se h_z para encontrar a distância ótima e analisar os desvios percentuais de h_z em relação a $h_z(0, 0)$.

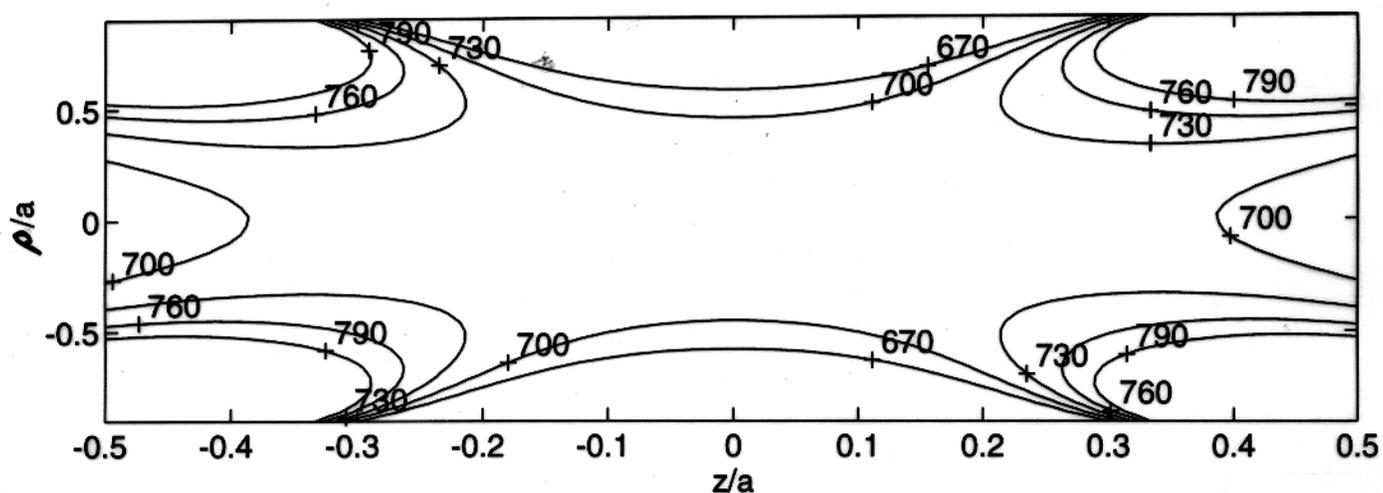


Figura 2.7 - Campo magnético h_z (miliampères/ a) no caso da bobina de Helmholtz ($d = a$), $I = 1A$, $N_e = 1$.

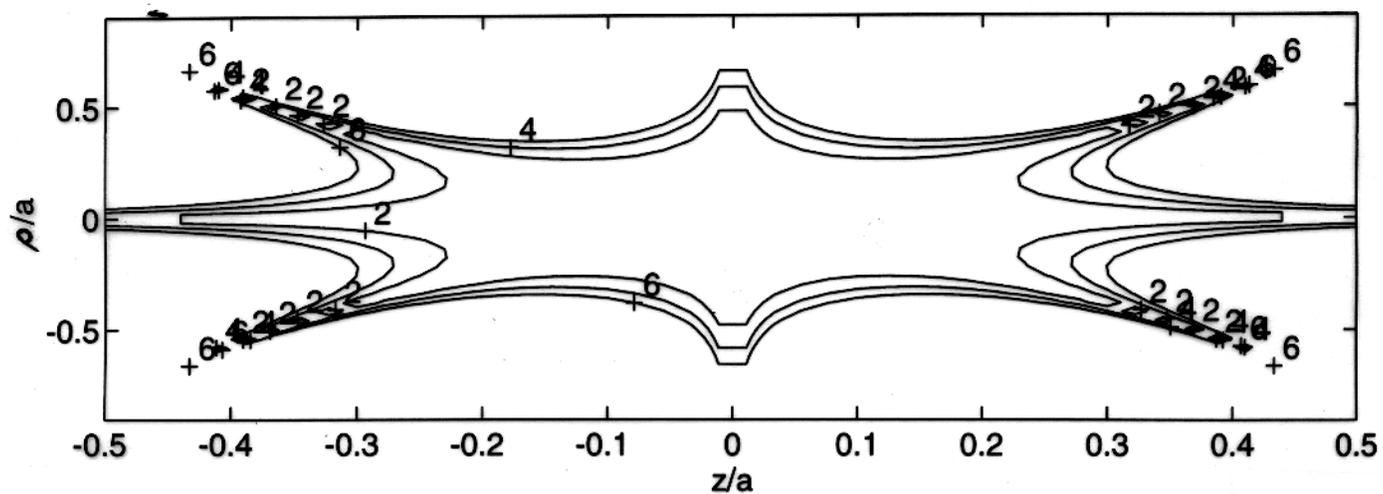


Figura 2.8 - Campo magnético h_ρ (miliampères/ a) no caso da bobina de Helmholtz ($d = a$), $I = 1A$, $N_e = 1$.

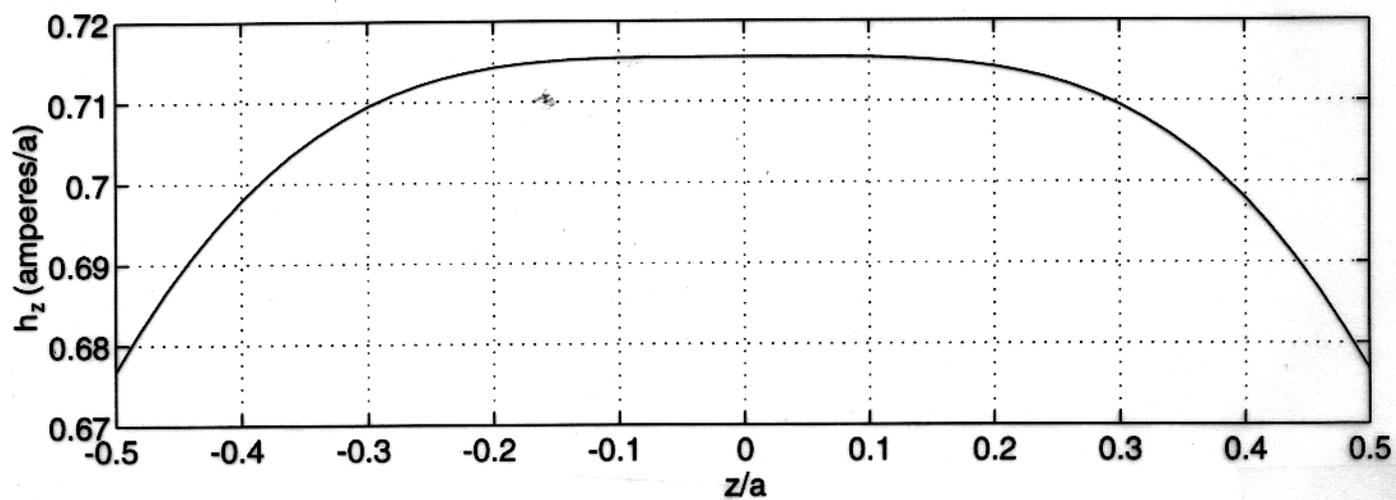


Figura 2.9 - Campo magnético $h_z(0; z)$ no eixo z das bobinas, $I = 1A$, $N_e = 1$.

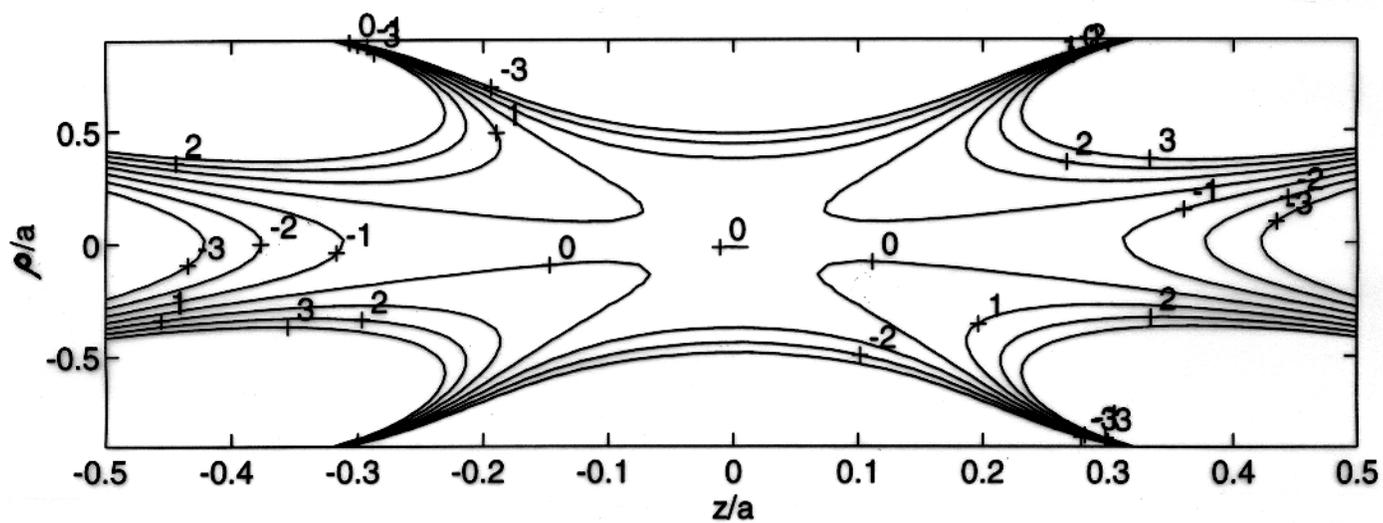


Figura 2.10 - Mapa de contorno do desvio percentual do campo magnético h_z em relação ao campo magnético $h_z(0,0)$.

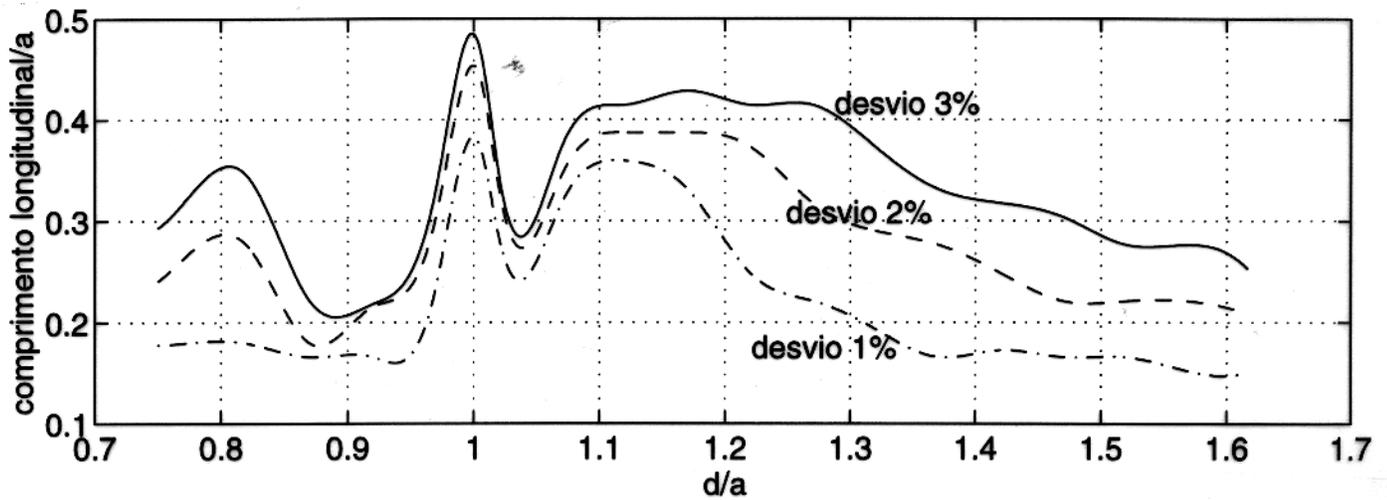


Figura 2.11 - Gráfico dos comprimentos longitudinais do cilindro de desvios percentuais de campo magnético, h_z , em relação a $h_z(0,0)$, variando com a distância entre as bobinas, d . Considerando-se a constante.

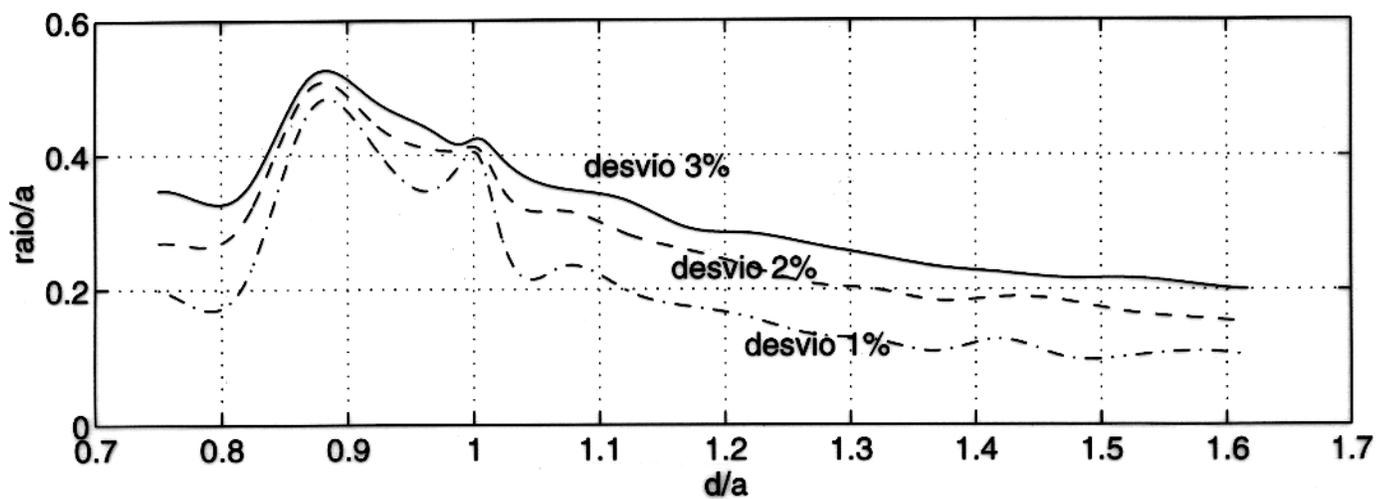


Figura 2.12 - Gráfico dos raios dos cilindros de desvios percentuais de campo magnético, h_z , em relação a $h_z(0,0)$, variando com a distância entre as bobinas d . Considerando-se a constante.

2.2.2.1 Análise de Desvios Percentuais de h_z em Relação a $h_z(0,0)$

A Figura 2.10 ilustra o mapa de contorno de desvio percentual de campo h_z em relação ao campo no centro deste sistema físico. Desta figura obtêm-se volumes com desvios de $\pi \times (0,4a)^2 \times 0,38a \cong 0,191a^3$ para 1%; $\pi \times (0,42a)^2 \times 0,45a \cong 0,249a^3$ para 2% e $\pi \times (0,43a)^2 \times 0,48a \cong 0,278a^3$ para 3%.

A fim de calcular, aproximadamente, ábacos de comprimentos longitudinais, raios e volumes das figuras de cilindros de desvios percentuais de h_z em relação a $h_z(0,0)$ para desvios de até 3% *versus* a distância entre as bobinas, d , têm-se os gráficos das Figuras 2.11, 2.12 e 2.13. Em todas estas figuras, considera-se o raio a constante.

A Figura 2.11 ilustra, aproximadamente, os comprimentos dos cilindros de desvios percentuais de h_z em relação a $h_z(0,0)$ para diferentes distâncias, d , entre as bobinas. Observe-se que depois de $d = 1,2a$ as alturas dos cilindros diminuem com o aumento de d .

A Figura 2.12 mostra, aproximadamente, os raios dos cilindros de desvios percentuais de h_z em relação a $h_z(0,0)$ para diferentes distâncias entre as bobinas. Note-se que para valores de d maiores do que $d = 0,85a$, os raios dos cilindros diminuem.

A Figura 2.13 apresenta, aproximadamente, os volumes dos cilindros de desvios percentuais de h_z em relação a $h_z(0,0)$ para diferentes distâncias entre as bobinas; observe-se que temos o máximo de volume de desvio percentual de 1% coincidindo aproximadamente com a distância ótima deste sistema físico. Por causa disto, o acoplamento da bobina de Helmholtz é o mais eficiente para termos o máximo de volume do cilindro com desvio de 1%, do que os outros arranjos de bobinas de raios iguais e coaxiais com d diferentes de a .

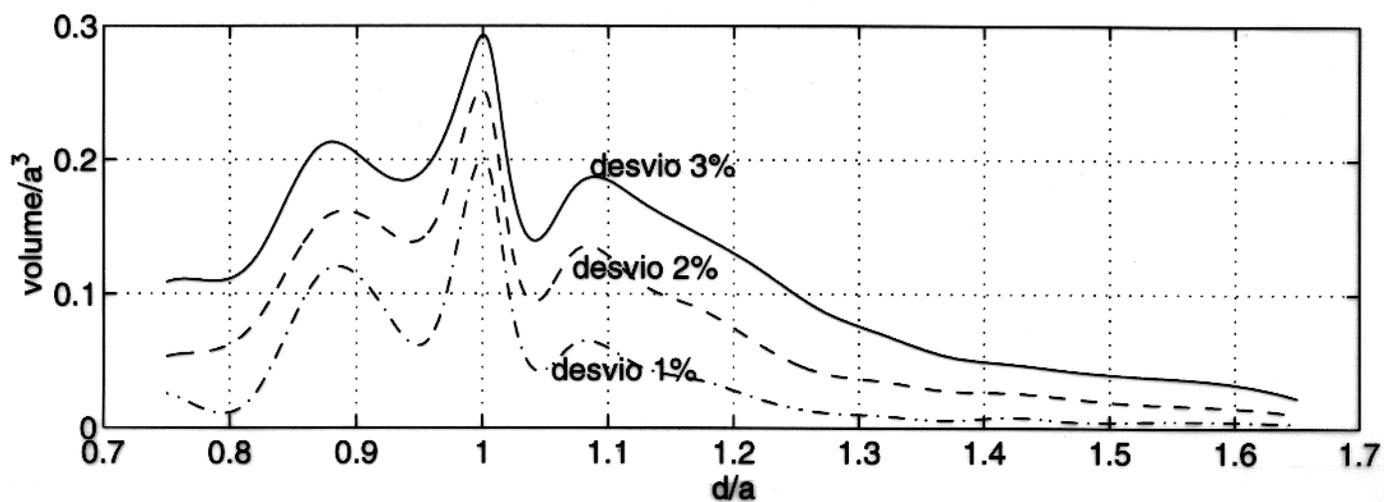


Figura 2.13 - Volumes com desvios percentuais de campo magnético, h_z , em relação a $h_z(0,0)$, variando com a distância entre as bobinas d , considerando-se a constante. Observe que para o valor máximo de desvio de 1% temos $d = a$, que é a distância ótima para encontrar campo uniforme neste sistema físico.

3 - SOLENÓIDE

3.1 FUNDAMENTOS TEÓRICOS

3.1.1 O Solenóide

O solenóide é um fio percorrido por uma corrente elétrica, enrolado de uma forma helicoidal, com uma distância curta entre as espiras (passo). A Figura 3.1 mostra um solenóide, com as espiras bem abertas, sugerindo uma tendência para o cancelamento de campo magnético na direção radial entre os fios. O campo se soma na direção paralela ao eixo longitudinal do solenóide no interior e se dispersa no exterior do mesmo. As direções da corrente são representadas pelos símbolos \odot e \otimes , indicando a saída e entrada de corrente no plano do papel, respectivamente. A medida que o comprimento seja muito maior do que o raio e o passo, então tem-se que o solenóide será praticamente uma casca cilíndrica de corrente, e o campo magnético no exterior é muito mais fraco do que o campo magnético no interior do solenóide. Neste caso diz-se que o solenóide tornou-se ideal.

Aplicando, agora, a Lei de Ampere para o percurso $abcd$ do solenóide considerado ideal, que aparece na Figura 3.2. Escreve-se $\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}$ como uma soma de quatro integrais, cada uma delas correspondendo a um dos quatro segmentos retilíneos do percurso:

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_a^b \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} + \int_b^c \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} + \int_c^d \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} + \int_d^a \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l},$$

em que a segunda e a quarta integrais são nulas porque em todos os pontos destes trajetos os vetores \mathbf{H} e $d\mathbf{l}$ são perpendiculares, o que faz com que o produto escalar $\mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}$ seja nulo, tendo-se, por conseguinte, a anulação da integral. Escolhendo r como um caminho coincidente com o \mathbf{H} do solenóide e usando a lei de Ampere, a primeira e a terceira integrais fornecem:

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = H_{int}r + H_{ext}r,$$

onde temos que H_{int} e H_{ext} são os campos magnéticos escalares na direção z , no interior e no exterior do solenóide, respectivamente. As linhas dos campos magnéticos estão formando um tubo de fluxo magnético Φ_B . As seções retas do tubo de fluxo magnético são S_{int} e S_{ext} , no interior e no exterior do mesmo, respectivamente. Portanto, como o fluxo magnético se conserva, então:

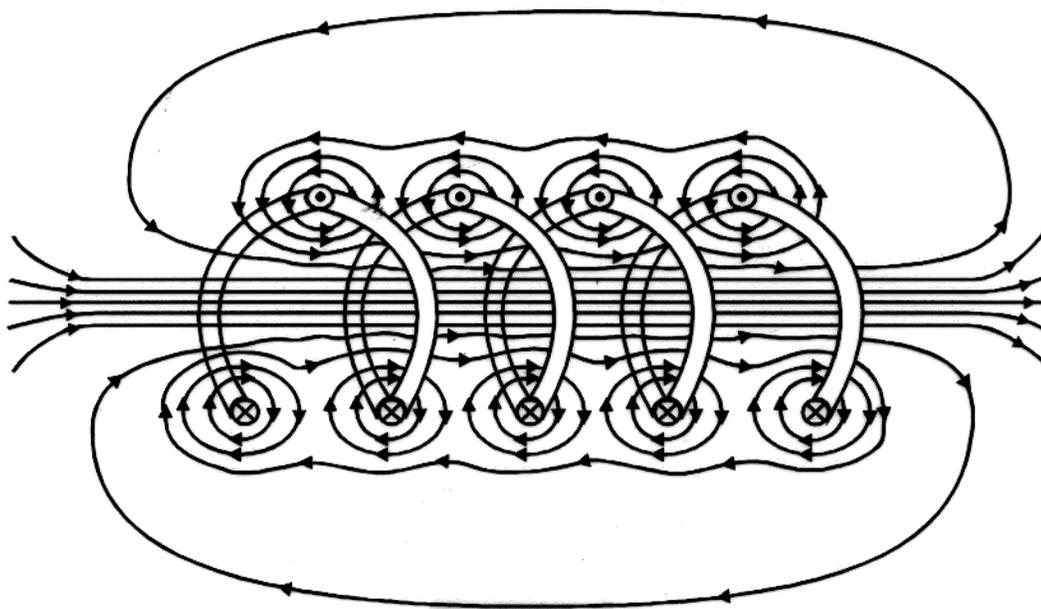


Figura 3.1 - Um solenóide com as espiras bem afastadas, mostrando a geometria e as linhas de campo magnético por ele geradas. A extremidade da direita, por onde emergem as linhas de campo magnético se comportam como o pólo norte de uma agulha imantada. A extremidade da esquerda se comporta como o pólo sul. Observe que o campo magnético na direção radial entre duas espiras consecutivas tende a se anular pela soma vetorial.

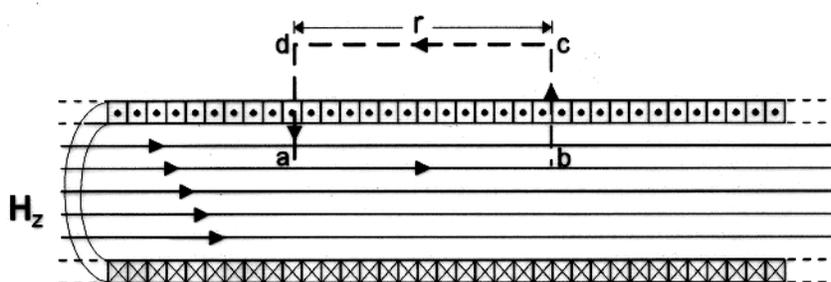


Figura 3.2 - Uma seção de um solenóide ideal, feito de espiras quadradas adjacentes, equivalentes a uma distribuição contínua de correntes na superfície de um cilindro de correntes de comprimento infinito.

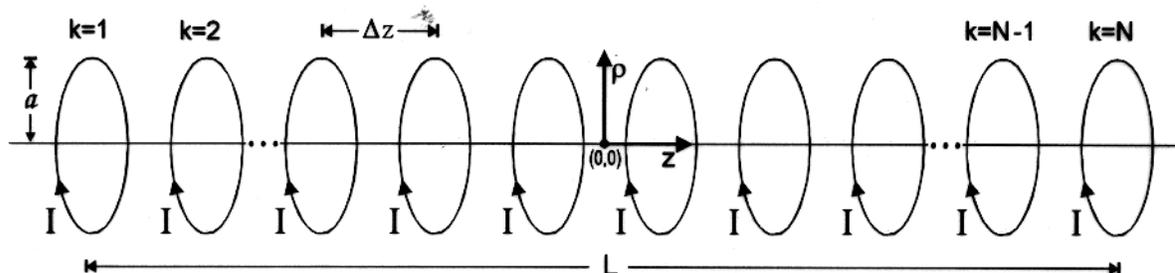


Figura 3.3 - Geometria do modelo computacional do solenoide para a determinação de campo magnético, onde L é o comprimento total, a é o raio e Δz é o passo, ou seja, a distância entre cada bobina do solenoide.

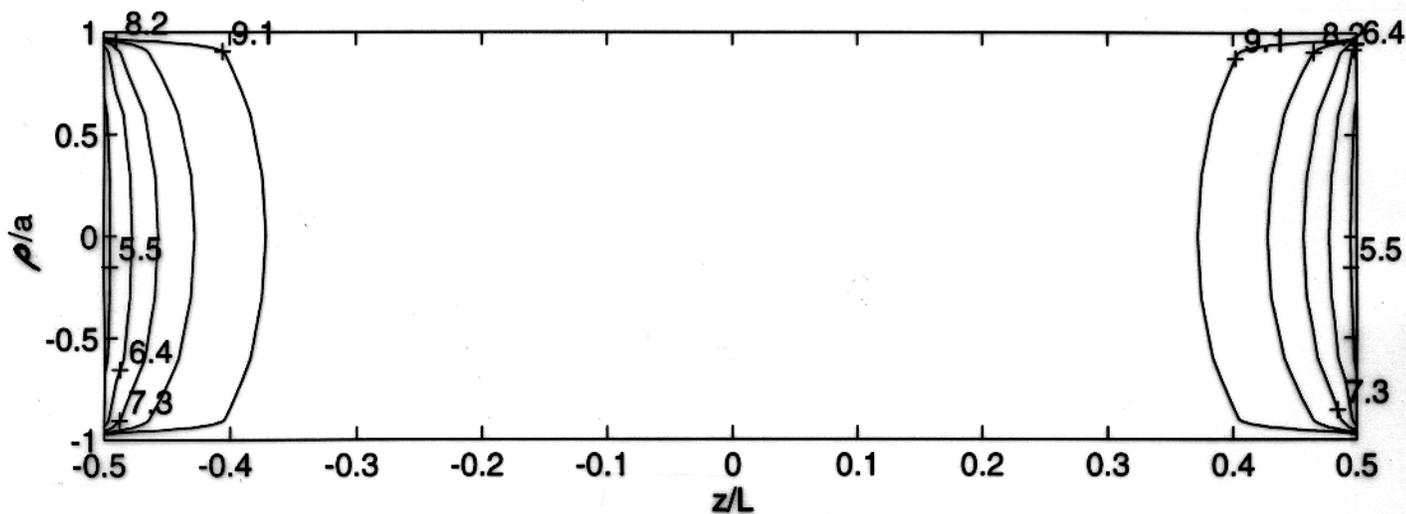


Figura 3.4 - Mapa de contorno do campo magnético na direção z , $H_z(\rho, z)$ (ampères por a) no plano ρz , $\Delta z = 0, 1a$, $L = 11a$, $I = 1A$ e $N_e = 1$.

$$\Phi_{B_{ext}} = \Phi_{B_{int}},$$

ou,

$$\mu_0 H_{ext} S_{ext} = \mu_0 H_{int} S_{int},$$

o que fornece

$$H_{ext} = H_{int} \frac{S_{int}}{S_{ext}}. \quad (3.1)$$

É evidente que por um efeito de difusão do campo magnético na parte externa do solenóide, tem-se que S_{ext} é muito maior que S_{int} , portanto H_{ext} é muito menor que H_{int} , o qual pode ser desprezado nos cálculos.

A corrente elétrica total i_T que passa na área limitada pelo percurso de integração não é igual a corrente elétrica I que percorre cada bobina do solenóide, pois esta área é atravessada por nr espiras, onde n é o número de espiras por unidade de comprimento r . Desta forma,

$$i_T = I(nr).$$

A lei de Ampere, então, pode ser escrita trocando-se o índice int por z , e desprezando H_{ext} , teremos:

$$H_z r = I nr,$$

ou,

$$H_z = In, \quad (3.2)$$

cuja unidade é ampere por unidade de comprimento r .

Ainda que a equação (3.2) tenha sido deduzida para um solenóide ideal, ela satisfaz aproximadamente na região central e interna de um solenóide real. Ela mostra que H_z é o mesmo em todos os pontos de uma seção reta do solenóide ideal, não dependendo do comprimento e do diâmetro, ou seja, da geometria do solenóide.

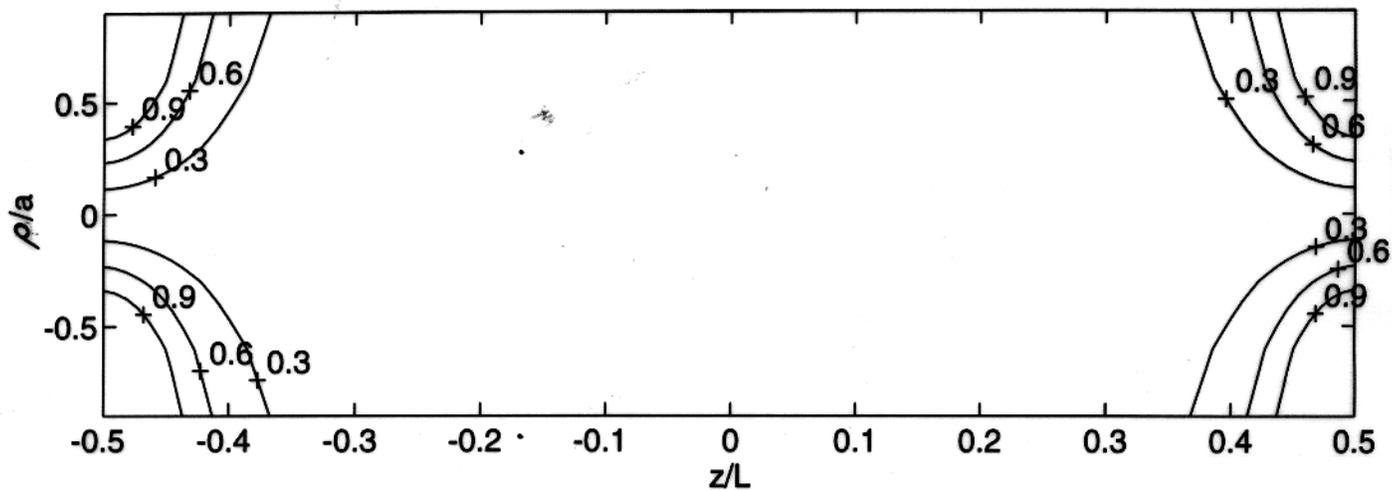


Figura 3.5 - Mapa de contorno do campo magnético na direção ρ , $H_\rho(\rho, z)$ (amperes por a), $\Delta z = 0, 1a$, $L = 11a$, $I = 1A$ e $N_e = 1$. Tem-se que H_ρ é nulo no centro $(0, 0)$.

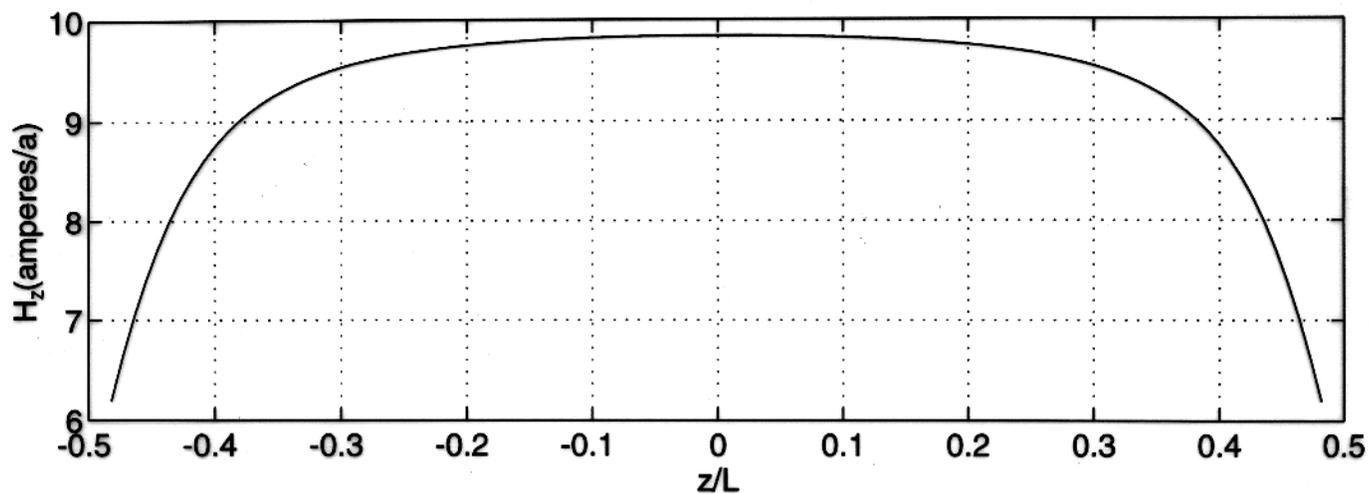


Figura 3.6 - Campo magnético na direção z no eixo do solenóide, $H_z(\rho = 0, z)$, $L = 11a$, $\Delta z = 0, 1a$, $I = 1A$ e $N_e = 1$.

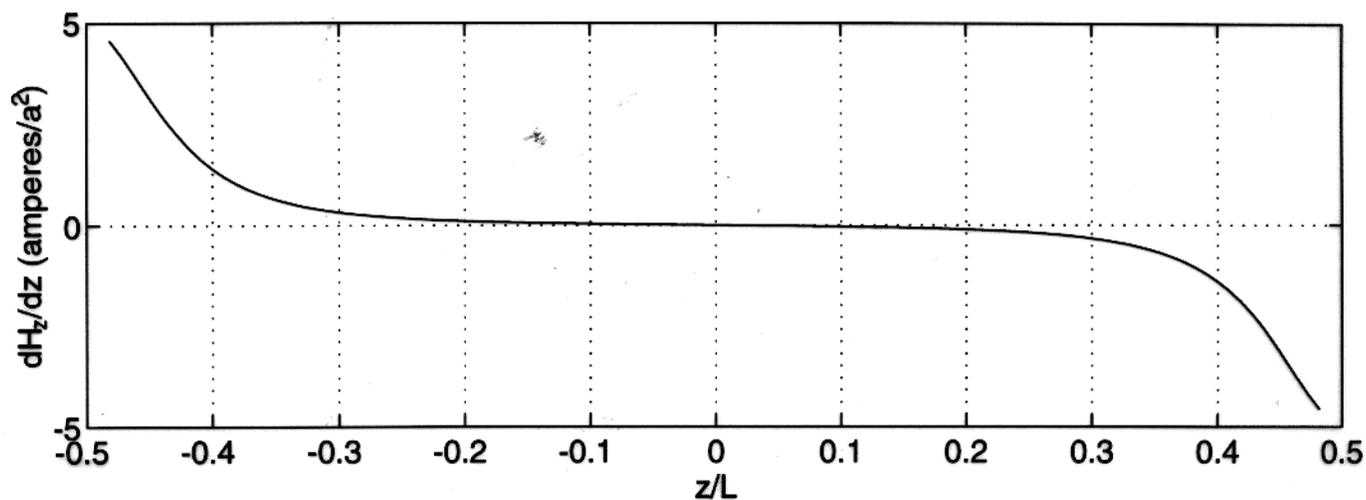


Figura 3.7 - Primeira derivada do campo magnético na direção do eixo central do solenóide H_z em relação a z , com $L = 11a$, $\Delta z = 0,1a$, $I = 1A$ e $N_e = 1$. Considerando-se a constante. Nota-se que esta função é nula em $z = z_o = 0$.

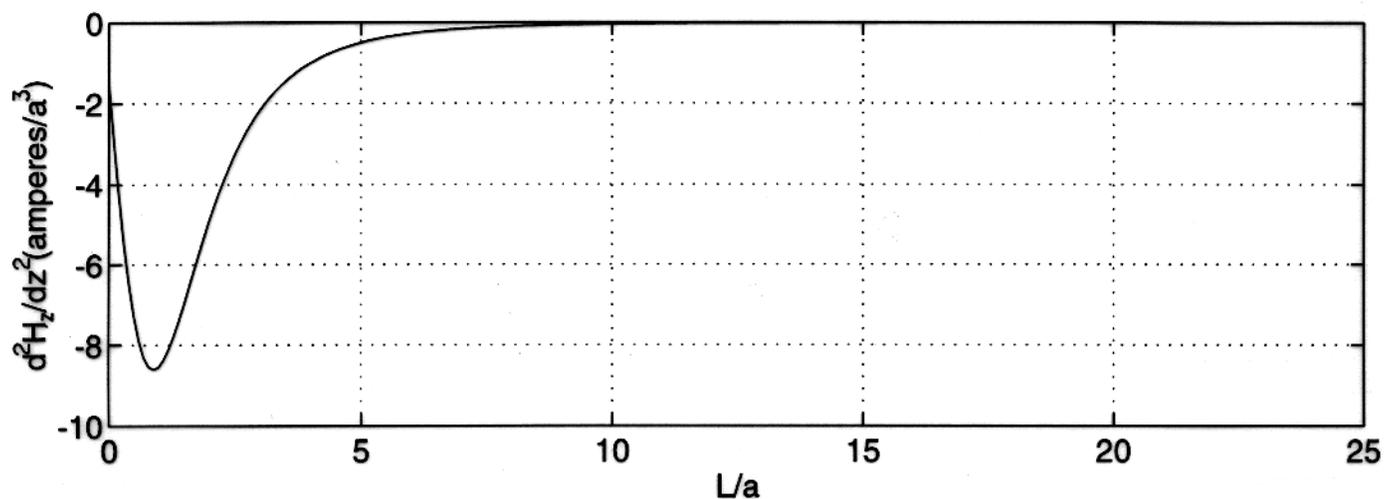


Figura 3.8 - Segunda derivada do campo magnético no eixo do solenóide, H_z em relação a z em $z = z_o = 0$, versus o comprimento, L , do solenóide, $\Delta z = 0,1a$; $I = 1A$ e $N_e = 1$. Considerando-se o raio, a , do solenóide constante.

3.2 RESULTADOS COMPUTACIONAIS

Analisando o modelo computacional das bobinas do solenóide conforme a geometria da Figura 3.3, a qual está em coordenadas cilíndricas, tem-se que o campo magnético resultante total \mathbf{H} , em qualquer ponto (ρ, z) no espaço, é a soma vetorial das contribuições dos campos magnéticos de todas as espiras do solenóide neste ponto. O campo magnético na direção ϕ é nulo por causa da simetria azimutal deste sistema físico. Portanto, o campo magnético total é dado por:

$$\mathbf{H}(\rho, z) = H_z(\rho, z)\mathbf{a}_z + H_\rho(\rho, z)\mathbf{a}_\rho, \quad (3.3)$$

em que os campos magnéticos resultantes do solenóide na direção z , $H_z(\rho, z)$, e na direção ρ , $H_\rho(\rho, z)$, são as somatórias de cada campo magnético fornecido por cada bobina, com índice k , e estão fundamentadas, respectivamente, nas equações (2.4) e (2.5) de uma bobina:

$$H_z(\rho, z) = \frac{IaN_e}{2\pi} \sum_{k=1}^N \int_0^\pi \frac{\cos\phi_o(a^2 + (z - z_k + \frac{L}{2})^2 - a\rho \cos\phi_o)d\phi_o}{\rho(\rho^2 + a^2 + (z - z_k + \frac{L}{2})^2 - 2a\rho \cos\phi_o)^{\frac{3}{2}}}. \quad (3.4)$$

e,

$$H_\rho(\rho, z) = \frac{IaN_e}{2\pi} \sum_{k=1}^N \int_0^\pi \frac{(z - z_k + \frac{L}{2})\cos\phi_o d\phi_o}{(\rho^2 + a^2 + (z - z_k + \frac{L}{2})^2 - 2a\rho \cos\phi_o)^{\frac{3}{2}}}, \quad (3.5)$$

onde $k = 1, 2, 3, \dots, N - 1, N$; z_k é a posição sequencial, no eixo z , da bobina k do solenóide, N_e é o número de espiras contido em uma bobina circular e N é o número total de bobinas contidas no solenóide. Estas equações possuem intervalo de discretização do eixo z igual ao passo Δz . Escolhê-se o passo particular $\Delta z = 0,1a$ por considerar que o mesmo seja muito menor do que o raio a , mas podem-se usar seguramente passos menores do que este.

A Figura 3.4 mostra o mapa de contorno do campo magnético escalar $H_z(\rho, z)$ (ampères por a) no plano ρz . Observe-se a simetria no eixo ($\rho = 0; z$).

A Figura 3.5 mostra o mapa de contorno do campo magnético escalar $H_\rho(\rho, z)$ (ampères por a), no plano ρz . Esta figura é assimétrica em relação a ($\rho = 0; z$). Observa-se, comparando o campo magnético da Figura 3.4, que o campo magnético $H_\rho(\rho, z)$ é muito menor do que $H_z(\rho, z)$ na região volumétrica mais interna ($-0,2L < z < 0,2L$; $-0,8a < \rho < 0,8a$) do solenóide. Portanto, pode-se desprezar $H_\rho(\rho, z)$ nesta região. Concluindo assim, que H_ρ é nulo no centro do solenóide, $(0, 0)$, enquanto H_z não é. Portanto escolhe-se H_z para analisar o comprimento ótimo do solenóide, para gerar campo uniforme, e a geometria dos desvios de H_z em relação a $H_z(0, 0)$, porque é simétrico em relação ao eixo ($\rho = 0; z$).

3.2.1 Determinação do Comprimento Ótimo do Solenóide

Para encontrar $H_z(\rho = 0; z)$ do solenóide, utiliza-se a equação (2.6) para cada espira do solenóide, pois a equação (3.4) tem uma singularidade em $\rho = 0$. Logo, a equação de H_z no eixo ($\rho = 0; z$) será:

$$H_z(\rho = 0; z) = \frac{Ia^2 N_e}{2} \sum_{k=1}^N \frac{1}{((z - z_k + \frac{L}{2})^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad (3.6)$$

onde $k (= 1, 2, 3, \dots, N - 1, N)$ é o índice correspondente a cada bobina do solenóide (Figura 3.3).

A Figura 3.6 é o gráfico ilustrativo da equação (3.6). A discretização da somatória é o passo Δz . A equação da primeira derivada de $H_z(\rho = 0; z)$ em relação a z , no eixo do solenóide é:

$$\frac{dH_z}{dz}(\rho = 0; z) = -\frac{N_e I a^2}{2} \sum_{k=1}^N \frac{3(z - z_k + \frac{L}{2})}{((z - z_k + \frac{L}{2})^2 + a^2)^{\frac{5}{2}}}. \quad (3.7)$$

A Figura 3.7 apresenta a primeira derivada de $H_z(\rho = 0, z)$ em relação a z , *versus* z . Observe que esta função é igual a zero na metade do comprimento do solenóide, ou seja, na posição ($0; z = z_0 = 0$).

A segunda derivada de H_z , em relação a z , no eixo do solenóide é :

$$\frac{d^2 H_z}{dz^2}(\rho = 0; z) = -\frac{3N_e I a^2}{2} \sum_{k=1}^N \left[\frac{1}{((z - z_k + \frac{L}{2})^2 + a^2)^{\frac{5}{2}}} - \frac{5(z - z_k + \frac{L}{2})^2}{((z - z_k + \frac{L}{2})^2 + a^2)^{\frac{7}{2}}} \right]. \quad (3.8)$$

A Figura 3.8 ilustra a segunda derivada de $H_z(\rho = 0; z)$ em relação a z , na posição $z = z_0 = 0$ (escolhida na primeira derivada de $H_z(\rho = 0; z)$ em relação a z) *versus* o comprimento L do solenóide. Verifica-se que a esta função tende a se anular assintoticamente para $L \geq 11a$, portanto o comprimento ótimo para encontrar campo uniforme tende assintoticamente para valores de comprimento $L \geq 11a$; tendendo para a geometria do solenóide ideal, para o caso particular de $\Delta z = 0, 1a$.

É interessante citar que a curva de H_z no centro $(0, 0)$ do solenóide *versus* comprimentos L do solenóide (Figura 3.9) mostra que o campo magnético $H_z(0, 0)$ tende assintoticamente para um valor constante, para valores de $L \geq 11a$, concordando com a equação (3.2) do solenóide ideal (neste caso temos $I = 1$ ampere por passo Δz e $N_e = 1$, logo, fazendo $r = \Delta z = 0, 1a$, tem-se então $n = \frac{1 \text{ espira}}{\Delta z} = \frac{1 \text{ espira}}{0,1a} = 10$ espiras por unidade de comprimento a , obtendo como resultado $H_z = nI = 10 \times 1 = 10$ amperes por a).

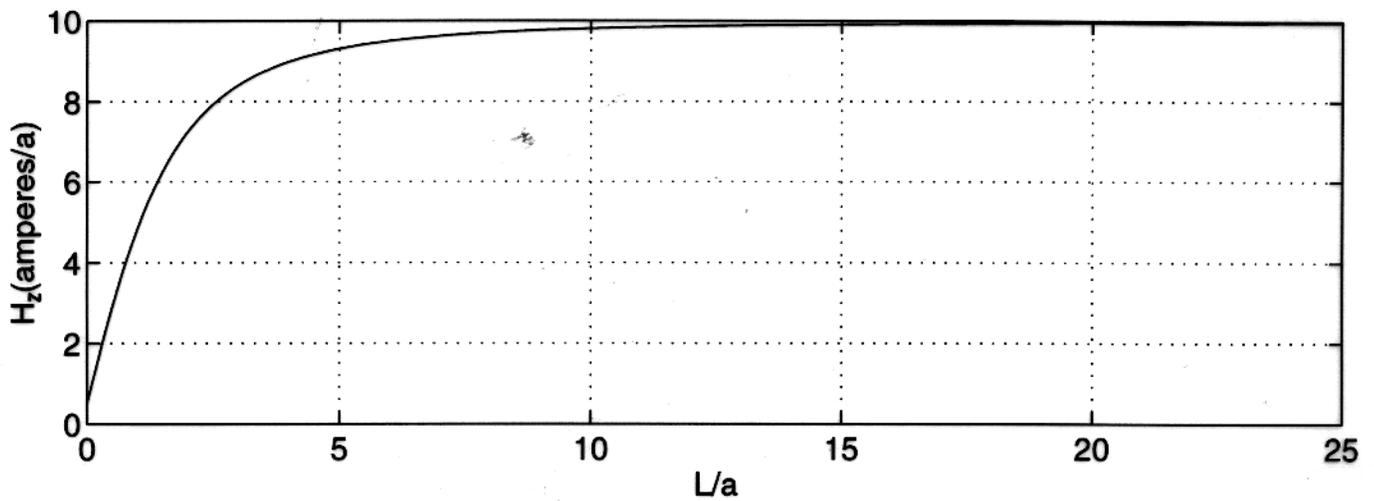


Figura 3.9 - Campo magnético $H_z(0,0)$ versus o comprimento, L , do solenóide com $\Delta z = 0,1a$, $I = 1A$ e $N_e = 1$. Considera-se o raio a do solenóide constante. Observe que a partir de $L \geq 11a$, H_z tende assintoticamente ao valor obtido pela equação do solenóide ideal (equação (3.2)).

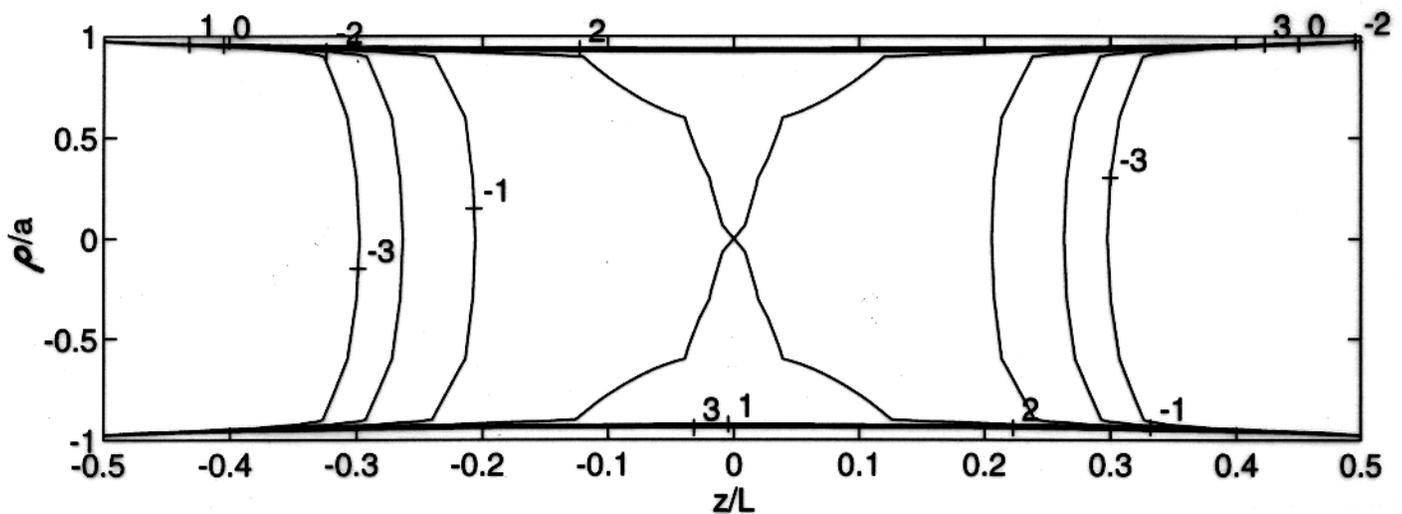


Figura 3.10 - Mapa de contorno de desvios percentuais de H_z em relação a $H_z(0,0)$, onde $L = 11a$, $\Delta z = 0,1a$ (este passo foi escolhido para melhor entendimento de $H_z(\rho, z)$).

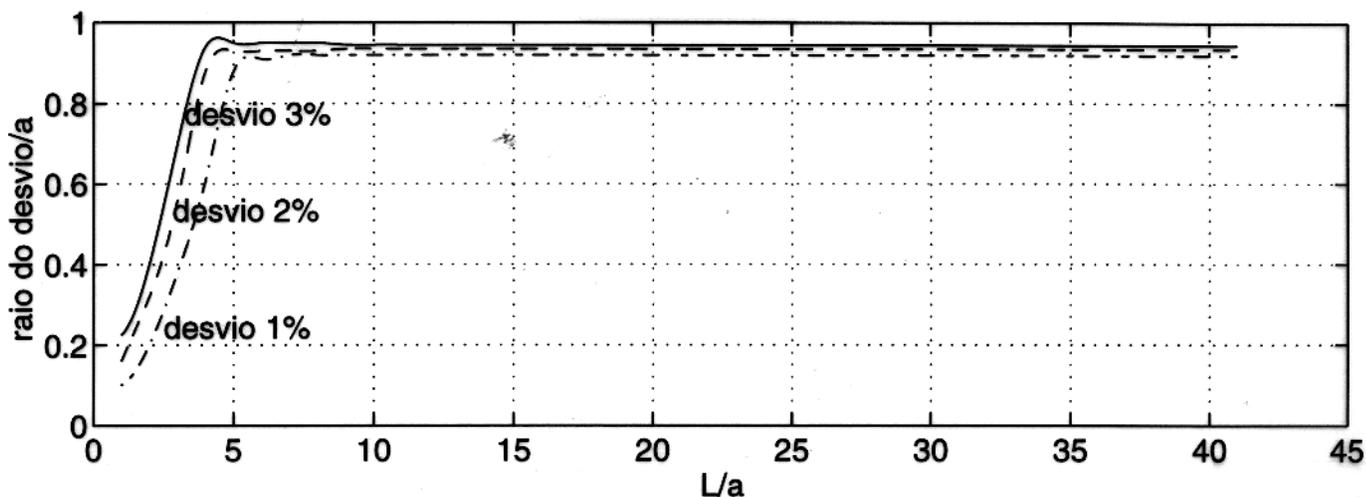


Figura 3.11 - Raios dos cilindros de desvios percentuais do campo magnético H_z em relação a $H_z(0,0)$ versus o comprimento, L , do solenóide. Considera-se o raio a do solenóide constante, $\Delta z = 0, 1a$.

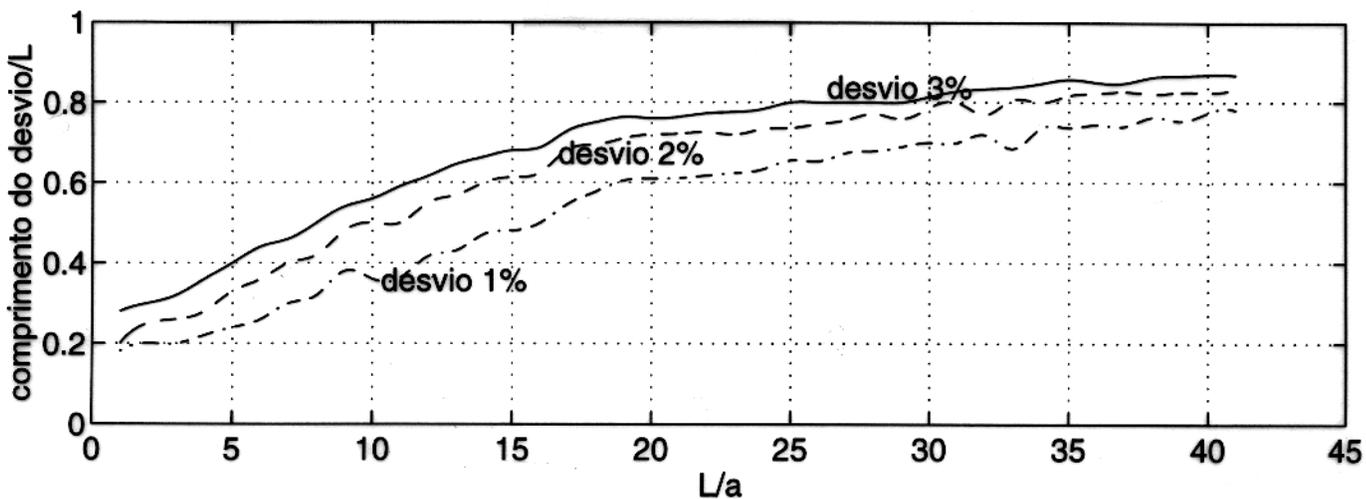


Figura 3.12 - Comprimento longitudinal dos cilindros de desvio percentual do campo magnético H_z em relação a $H_z(0,0)$ versus o comprimento, L , do solenóide. Considera-se o raio a do solenóide constante, $\Delta z = 0, 1a$.

3.2.2 Desvios Percentuais do Campo Magnético H_z em Relação a $H_z(0,0)$

A Figura 3.10 mostra o mapa de contorno de desvio percentual de H_z em relação a $H_z(0,0)$ para desvios percentuais até 3%, para $L = 11a$, e passo $\Delta z = 0,1a$. Observe que se apresenta, aproximadamente, um cilindro de revolução com raio e comprimento longitudinal das regiões de desvio de campo magnético. Obtêm-se raios de cilindros de, aproximadamente, $0,9a$ para desvios de 1%, $0,92a$ para 2% e $0,94a$ para 3%. Também, obtêm-se, aproximadamente, comprimentos longitudinais de cilindros de desvios, conseguindo $0,38L = 0,38 \times (11a) = 4,18a$ para desvio de 1%; $0,5L = 0,5 \times (11a) = 5,5a$ para 2% e $0,58L = 0,58 \times (11a) = 6,38a$ para 3% de desvio.

Portanto, pode-se obter volumes aproximados ($\pi \times \text{raio}^2 \times \text{comprimento}$) de desvios de: $\pi(0,9a)^2 4,18a = 10,63a^3$ para desvios de 1%; $\pi(0,92a)^2 5,5a = 14,62a^3$ para desvio de 2% e $\pi(0,94a)^2 6,38a = 17,71a^3$ para desvio de 3%.

Neste ponto, é necessário analisar estas grandezas (raios, comprimentos longitudinais e volumes de desvios percentuais de H_z em relação a $H_z(0,0)$) *versus* os comprimentos L de solenóide, considerando o raio do solenóide, a , constante, passo $\Delta z = 0,1a$ com a finalidade de construir ábacos.

Fazendo o gráfico dos raios dos cilindros de desvio percentual de H_z em relação a $H_z(0,0)$ *versus* o comprimento L do solenóide, conforme Figura 3.11, observa-se que os raios dos desvios aumenta entre 0 e $0,4a$ e a partir de $L = 5a$ tem-se um valor constante do raio de aproximadamente $0,91a$ para 1%; $0,93a$ para 2% e $0,94a$ para 3% de desvios, nunca ultrapassando o raio a do solenóide. Isto ocorre devido a soma vetorial de campo magnético próximo as paredes (Figura 3.1).

O gráfico dos comprimentos longitudinais dos cilindros de desvio percentual de H_z em relação a $H_z(0,0)$ *versus* o comprimento L do solenóide aparece na Figura 3.12. Os comprimentos longitudinais de desvios aumentam na proporção direta do comprimento, L , do solenóide.

Encontrando os volumes de desvio percentual de H_z em relação a $h_z(0,0)$ *versus* os comprimentos, L , do solenóide para o raio a constante, monta-se o gráfico da Figura 3.13. Observe-se que existe uma relação quase linear entre o volume de desvio percentual de H_z em relação a $H_z(0,0)$ e o comprimento do solenóide a partir de $L \geq 2,5L$ para 1%, $L \geq 3L$ para 2% e $L \geq 4L$ para 3%. Note que o volume é desprezível para valores do comprimento, L , entre 0 e $3a$, isto ocorre porque os raios de desvios são muito pequenos entre 0 e $3a$, conforme a Figura 3.11. Esta relação quase linear acontece devido ao raio de desvio tornar-se constante e o comprimento do cilindro de desvio ter uma relação quase linear com L (Figuras 3.11 e

3.12).

O gráfico de volume total do solenóide é apresentado na Figura 3.14, $V_{total}(= \pi L a^2)$, *versus* o volume de desvio, V_{desvio} . Observe, nesta figura, uma relação quase linear entre o V_{desvio} e V_{total} :

$$\tan\theta = \frac{V_{desvio}}{V_{total}}, \quad (3.9)$$

com θ sendo o ângulo formado entre a função de desvio (Figura 3.14) e a abscissa a partir de V_{total} maior de $11a^3$, em que o V_{desvio} torna-se comprável com V_{total} . Observa-se que θ aumenta com o aumento de desvio, pois as medidas de campo magnético se aproximam da parede do solenóide. Da equação (3.9) obtêm-se $V_{desvio} = 71,8\%V_{total}$ para 1%, $V_{desvio} = 77,27\%V_{total}$ para 2% e $V_{desvio} = 81,82\%V_{total}$ para 3%.

Com o conhecimento do comprimento ótimo ($L \geq 11a$ para $\Delta z = 0,1a$) e das Figuras 3.11, 3.12, 3.13 e 3.14 se têm informações suficientes para construir um solenóide.

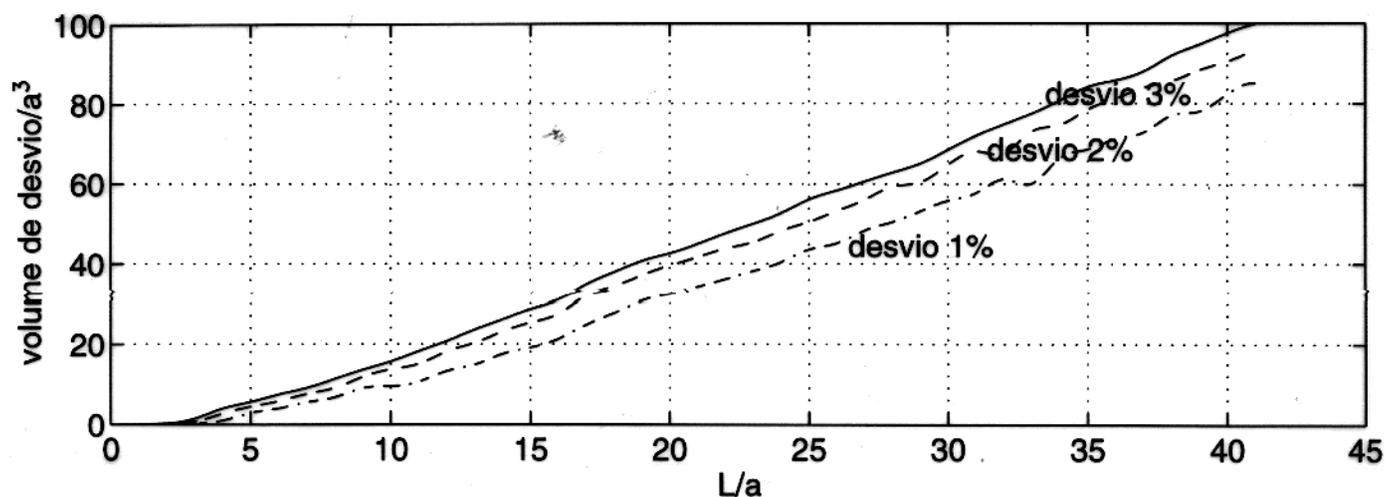


Figura 3.13 - Volume de desvio percentual do campo magnético H_z em relação a $H_z(0,0)$ versus o comprimento, L , do solenóide. Considerando o raio a do solenóide constante, $\Delta z = 0,1a$.

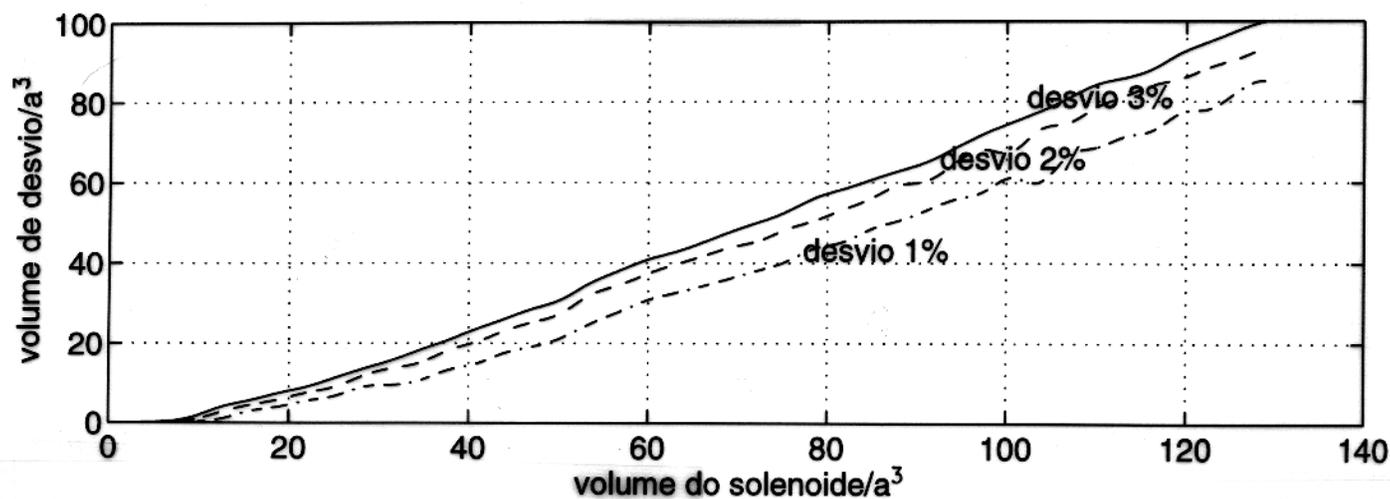


Figura 3.14 - Volume de desvio do campo magnético H_z em relação a $H_z(0,0)$ versus o volume total do solenóide (πLa^2). Considerando o raio a do solenóide constante, $\Delta z = 0,1a$. Esta figura apresenta uma relação quase linear entre o volume de desvio e o volume total do solenóide.

4 - BOBINA QUADRADA

4.1 FUNDAMENTOS TEÓRICOS

Este capítulo aplica a lei de Biot-Savart para fazer um estudo do campo magnético de um fio condutor, finito e retilíneo (Figura 4.1), pelo qual passa uma corrente elétrica. Este conhecimento adquirido é utilizado para construir o modelo de uma bobina quadrada de corrente de lado L da Figura 4.2, produzindo campo magnético total resultante que é a soma vetorial de todos os campos magnéticos produzidos por cada fio de corrente, de cada lado desta bobina quadrada.

4.1.1 Campo Magnético de um Fio de Corrente Retilíneo e Finito

Considerando uma corrente elétrica I em um fio de corrente condutor fino, retilíneo e de comprimento finito L , ao longo do eixo z em coordenadas cilíndricas, conforme a Figura 4.1. Escolhe-se, sem perda de generalidade, um ponto sobre o plano $z = a$. Para determinar o campo magnético a uma distância radial $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, usando a lei de Biot-Savart. Deste modo:

$$\begin{aligned} d\mathbf{H} &= \frac{I \mathbf{a}_z \times (r\mathbf{a}_r - (z-a)\mathbf{a}_z)}{4\pi (r^2 + (z-a)^2)^{\frac{3}{2}}} dz \\ &= \frac{Ir}{4\pi (r^2 + (z-a)^2)^{\frac{3}{2}}} \mathbf{a}_\phi dz, \end{aligned} \quad (4.1)$$

onde aplica-se as seguintes propriedades de produtos vetoriais: $\mathbf{a}_z \times \mathbf{a}_r = \mathbf{a}_\phi$, e também $\mathbf{a}_z \times \mathbf{a}_z = 0$. Nesta equação, a variável de integração é z . Considera-se que o campo magnético na direção z é nulo devido a simetria de campo magnético no eixo z , ou seja, o produto vetorial, da equação de Biot-Savart fornece somente campo magnético na direção ϕ , H_ϕ .

Como \mathbf{a}_ϕ não varia com z , pode ser retirado do integrando antes da integração, logo

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_\phi &= \frac{Ira_\phi}{4\pi} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{dz}{(r^2 + (z-a)^2)^{\frac{3}{2}}}, \\ &= \frac{Ira_\phi}{4\pi r^2} \left[\frac{z-a}{\sqrt{r^2 + (z-a)^2}} \right]_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}, \end{aligned}$$

$$= \frac{I}{4\pi r} \left[\frac{L/2 - a}{\sqrt{(L/2 - a)^2 + r^2}} + \frac{L/2 + a}{\sqrt{(L/2 + a)^2 + r^2}} \right] \mathbf{a}_\phi, \quad (4.2)$$

ou, fazendo a seguinte mudança de variável $a = b - \frac{L}{2}$, portanto

$$\mathbf{H}_\phi = \frac{I}{4\pi r} \left[\frac{L - b}{\sqrt{(L - b)^2 + r^2}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + r^2}} \right] \mathbf{a}_\phi. \quad (4.3)$$

Reescrevendo-se a equação acima em coordenadas cartesianas, logo

$$\mathbf{H}_\phi = \frac{I}{4\pi \sqrt{x^2 + y^2}} \left[\frac{L - b}{\sqrt{(L - b)^2 + x^2 + y^2}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + x^2 + y^2}} \right] \mathbf{a}_\phi. \quad (4.4)$$

É interessante citar que se considerando um ponto a uma distância, r , do fio condutor, o qual está no centro do fio ($a = 0, b = \frac{L}{2}$), e que a razão $\frac{r}{L}$ tenda a zero, ou seja, o fio de corrente de comprimento infinito, obtem-se portanto o resultado: $\mathbf{H}_\phi = \frac{I}{2\pi r} \mathbf{a}_\phi$, conhecido vastamente em livros de eletromagnetismo clássico.

A Figura 4.2 mostra que o campo magnético na direção ϕ , H_ϕ , diminui com o inverso da distância radial r .

Na Figura 4.3, a parte escalar do campo magnético na direção ϕ , H_ϕ , é quase constante no *plateau* entre, aproximadamente, $0,4L < z < 0,6L$, e varia muito quando fora desta região, ou seja, nas extremidades do fio, o campo magnético, H_ϕ , diminui, mas não chega a se anular.

4.1.2 Campos Magnéticos de Uma Bobina Quadrada de Corrente

O modelo da Figura 4.4 possui a contribuição de campo magnético dos quatro fios de corrente da bobina quadrada, os quais produzem o campo magnético total $\mathbf{H}(x, y, z)$ dado por:

$$\mathbf{H}(x, y, z) = H_x(x, y, z) \mathbf{a}_x + H_y(x, y, z) \mathbf{a}_y + H_z(x, y, z) \mathbf{a}_z. \quad (4.5)$$

Utilizando-se H_1, H_2, H_3 e H_4 , os quais são as contribuições de campo magnético dos fios 1, 2, 3 e 4, respectivamente, e obedecem os mesmos princípios físicos da equação (4.4), de onde foram adaptadas para a geometria da Figura 4.4, e são dados por:

$$H_1 = \frac{I/4\pi}{\sqrt{(\frac{L}{2} - y)^2 + z^2}} \left[\frac{\frac{L}{2} + x}{\sqrt{(\frac{L}{2} + x)^2 + (\frac{L}{2} - y)^2 + z^2}} + \frac{\frac{L}{2} - x}{\sqrt{(\frac{L}{2} - x)^2 + (\frac{L}{2} - y)^2 + z^2}} \right] \quad (4.6)$$

$$H_2 = \frac{I/4\pi}{\sqrt{(\frac{L}{2} + x)^2 + z^2}} \left[\frac{\frac{L}{2} + y}{\sqrt{(\frac{L}{2} + y)^2 + (\frac{L}{2} + x)^2 + z^2}} + \frac{\frac{L}{2} - y}{\sqrt{(\frac{L}{2} + x)^2 + (\frac{L}{2} - y)^2 + z^2}} \right] \quad (4.7)$$

$$H_3 = \frac{I/4\pi}{\sqrt{(\frac{L}{2} + y)^2 + z^2}} \left[\frac{\frac{L}{2} + x}{\sqrt{(\frac{L}{2} + x)^2 + (\frac{L}{2} + y)^2 + z^2}} + \frac{\frac{L}{2} - x}{\sqrt{(\frac{L}{2} - x)^2 + (\frac{L}{2} + y)^2 + z^2}} \right] \quad (4.8)$$

$$H_4 = \frac{I/4\pi}{\sqrt{(\frac{L}{2} - x)^2 + z^2}} \left[\frac{\frac{L}{2} + y}{\sqrt{(\frac{L}{2} + y)^2 + (\frac{L}{2} - x)^2 + z^2}} + \frac{\frac{L}{2} - y}{\sqrt{(\frac{L}{2} - x)^2 + (\frac{L}{2} - y)^2 + z^2}} \right] \quad (4.9)$$

Para conseguir o campo magnético do fio de corrente número 1, dado pela equação (4.6), troca-se x e b da equação (4.4), por z e x , respectivamente. Já para campo magnético do fio de corrente número 4, dado pela equação (4.9), troca-se y e b da equação (4.4) por z e y , respectivamente. Porém os campos magnéticos dos fios de corrente 2 e 3, dados pela equações (4.7) e (4.8), respectivamente, são os fios transladados de L , no eixo x da equação (4.6), e no eixo y da equação (4.9), respectivamente.

O escalar do campo magnético na direção x , $H_x(x, y, z)$, é a projeção dos campos magnéticos dos fios 2 e 4 no eixo x , dada por:

$$\begin{aligned} H_x(x, y, z) &= H_2 \text{sen}\theta_2 - H_4 \text{sen}\theta_4 \\ &= H_2 \frac{z}{\sqrt{z^2 + (\frac{L}{2} + x)^2}} - H_4 \frac{z}{\sqrt{z^2 + (\frac{L}{2} - x)^2}}, \end{aligned} \quad (4.10)$$

e o escalar do campo magnético na direção y , $H_y(x, y, z)$, é a projeção dos campos magnéticos dos fios 1 e 3 no eixo y , dada por

$$\begin{aligned} H_y(x, y, z) &= H_3 \text{sen}\theta_3 - H_1 \text{sen}\theta_1 \\ &= H_3 \frac{z}{\sqrt{z^2 + (\frac{L}{2} + y)^2}} - H_1 \frac{z}{\sqrt{z^2 + (\frac{L}{2} - y)^2}}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Finalmente, o escalar do campo magnético na direção z , $H_z(x, y, z)$, é a projeção dos campos magnéticos dos quatro fios no eixo z , dada por

$$\begin{aligned} H_z(x, y, z) &= H_1 \cos\theta_1 + H_2 \cos\theta_2 + H_3 \cos\theta_3 + H_4 \cos\theta_4 \\ &= H_1 \frac{\frac{L}{2} - y}{\sqrt{z^2 + (\frac{L}{2} - y)^2}} + H_2 \frac{\frac{L}{2} + x}{\sqrt{z^2 + (\frac{L}{2} + x)^2}} + H_3 \frac{\frac{L}{2} + y}{\sqrt{z^2 + (\frac{L}{2} + y)^2}} + \\ &+ H_4 \frac{\frac{L}{2} - x}{\sqrt{z^2 + (\frac{L}{2} - x)^2}}, \end{aligned} \quad (4.12)$$

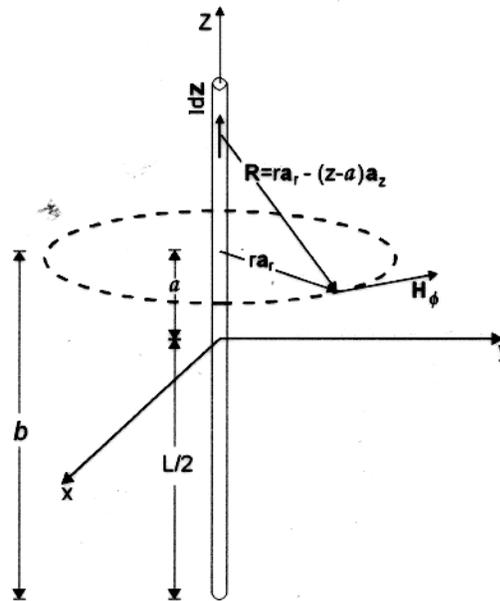


Figura 4.1 - Geometria em coordenadas cilíndricas para determinar o campo magnético de um fio condutor retilíneo e finito, pelo qual passa uma corrente elétrica I .

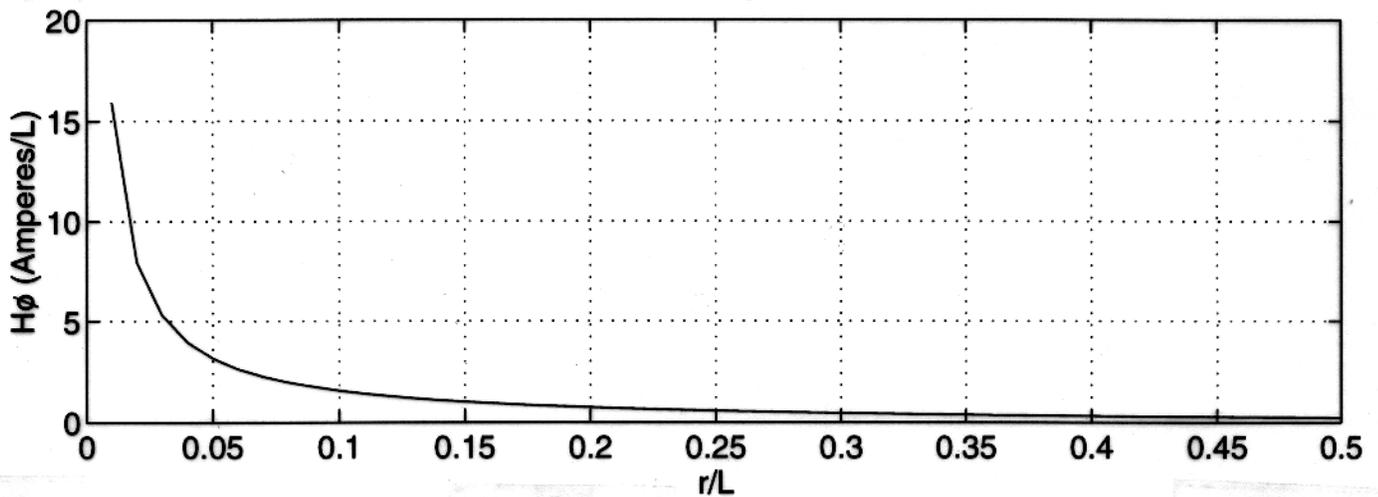


Figura 4.2 - Campo magnético H_ϕ , de um fio de corrente de comprimento L , versus a distância radial r , medido no centro do fio de corrente ($b = \frac{L}{2}$), $I = 1A$. Observe-se que campo magnético H_ϕ decai com o inverso da distância radial r .

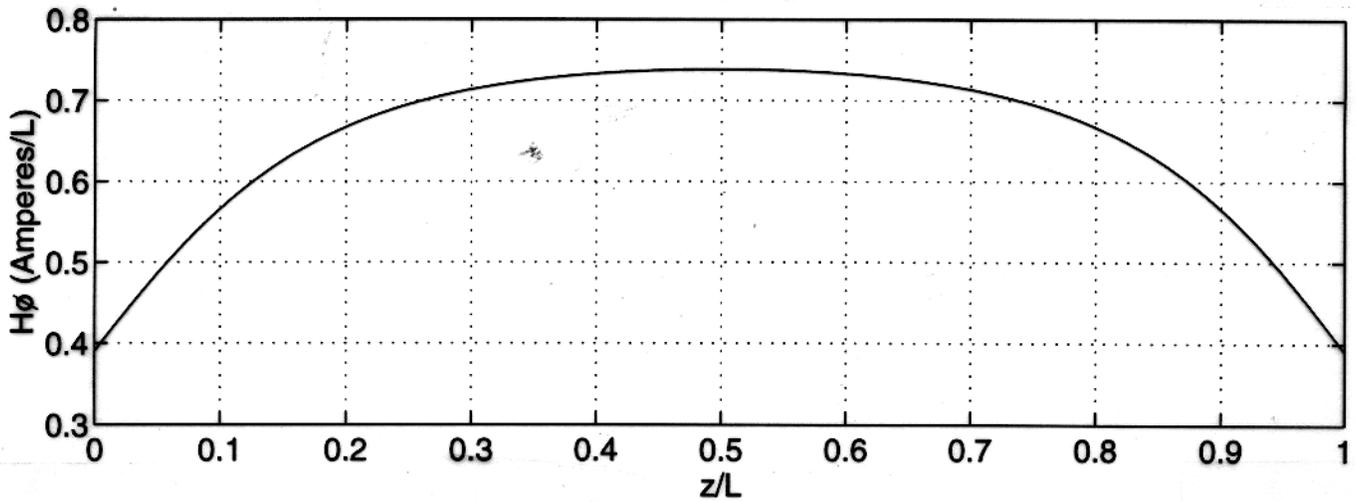


Figura 4.3 - Variação de H_ϕ de um fio de corrente de comprimento L com a coordenada z , mantendo r constante e igual a $0,2L$, $I = 1A$. Observe-se que o campo magnético H_ϕ diminui nas extremidades do fio de corrente, mas não chega ao valor nulo.

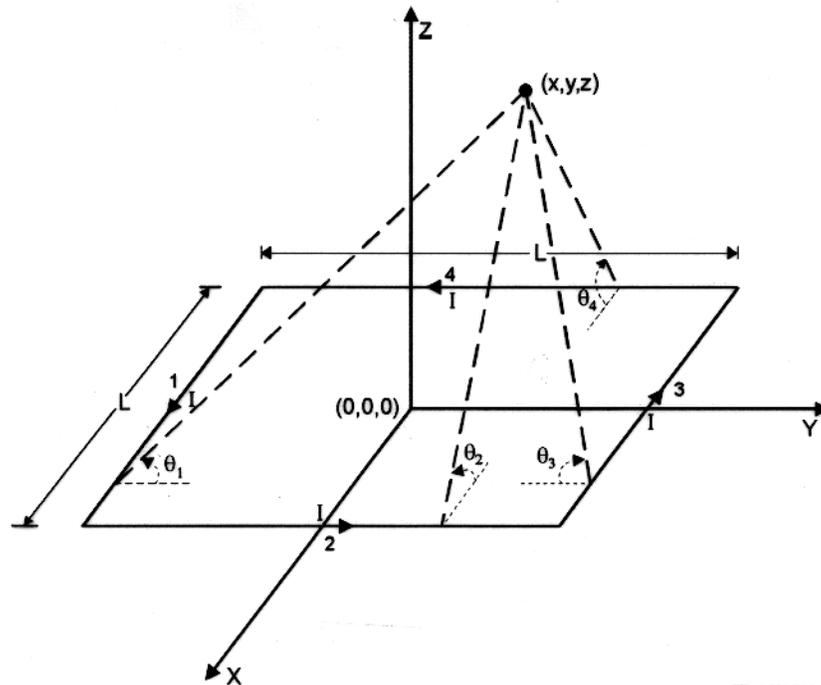


Figura 4.4 - Modelo esquemático, em coordenadas cartesianas, de uma bobina de corrente, quadrada de lado L , formada por 4 fios por onde passa uma corrente elétrica I . Onde θ_1 , θ_2 , θ_3 e θ_4 são os ângulos entre o vetor radial dos fios laterais e o plano horizontal. N_e é o número de espiras.

É interessante citar que as coordenadas (x, y, z) são normalizadas pelo lado L da bobina quadrada.

4.2 RESULTADOS COMPUTACIONAIS

Comparando as Figuras 4.5 e 4.6 obtém-se que H_z é muito maior do que H_x e H_y na região mais central da bobina $(-0,15L < x < 0,15L; -0,15L < y < 0,15L; -0,08L < z < 0,08L)$. Portanto H_x e H_y são desprezados nesta região e será calculado os desvios percentuais de H_z em relação a $H_z(0,0,0)$ no centro da bobina quadrada, o qual é simétrico em relação ao ponto de referência $(0,0,0)$, ao contrário de H_x e H_y .

4.2.1 Desvios Percentuais do Campo Magnético H_z em Relação a $H_z(0,0,0)$

Considerando que a Figura 4.7 forneça o comprimento longitudinal dos cilindros de desvios de $2 \times 0,031L = 0,062L$ para 1%; $2 \times 0,055L = 0,11L$ para 2% e $2 \times 0,077L = 0,154L$ para 3% de desvio percentual de H_z em relação a $H_z(0,0,0)$. Esta figura, também fornece raios de cilindros de desvios de $0,05L$ para 1%; $0,07L$ para 2% e $0,1L$ para 3% de desvio. Portanto foram obtidos os volumes de desvios percentuais de H_z em relação a $H_z(0,0,0)$, de aproximadamente $(\pi \text{raio}^2 \times \text{comprimento})$ de $\pi(0,05L)^2 \times (0,062L) = 4,869 \times 10^{-4}L^3$ para 1%; para $\pi(0,07L)^2 \times (0,11L) = 0,0017L^3$ para 2% e $\pi(0,1L)^2 \times (0,154L) = 0,0048L^3$ para 3% de desvio percentual de H_z em relação a $H_z(0,0,0)$.

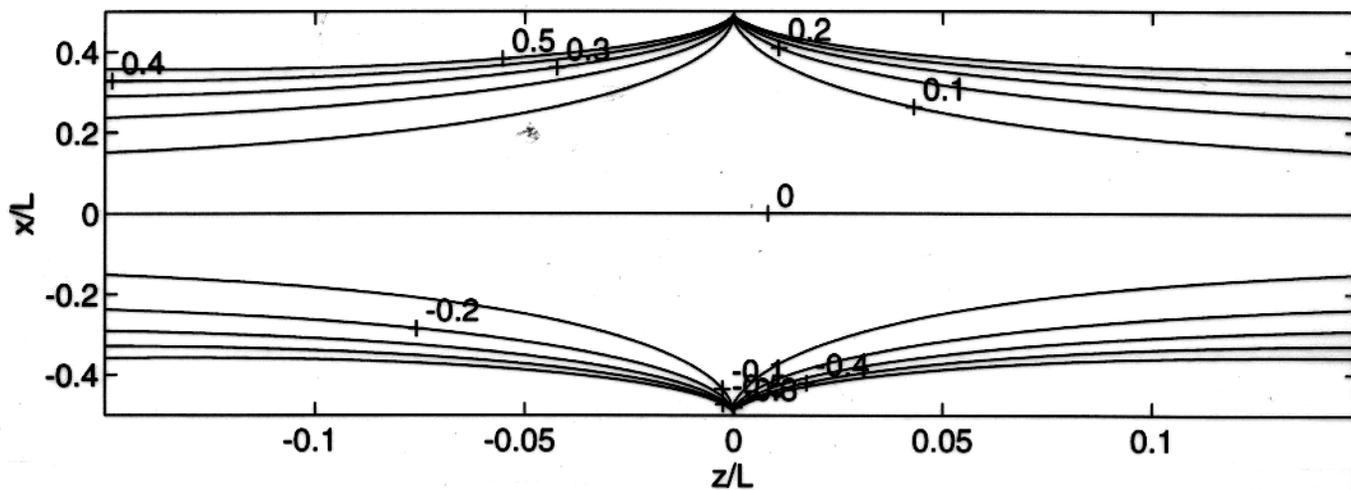


Figura 4.5 - Mapa de contorno do campo magnético H_x (amperes por L) no plano xz , em $y = 0$, o qual é idêntico ao mapa de contorno de H_y no plano yz em $x = 0$, com $N_e = 1$ e $I = 1A$.

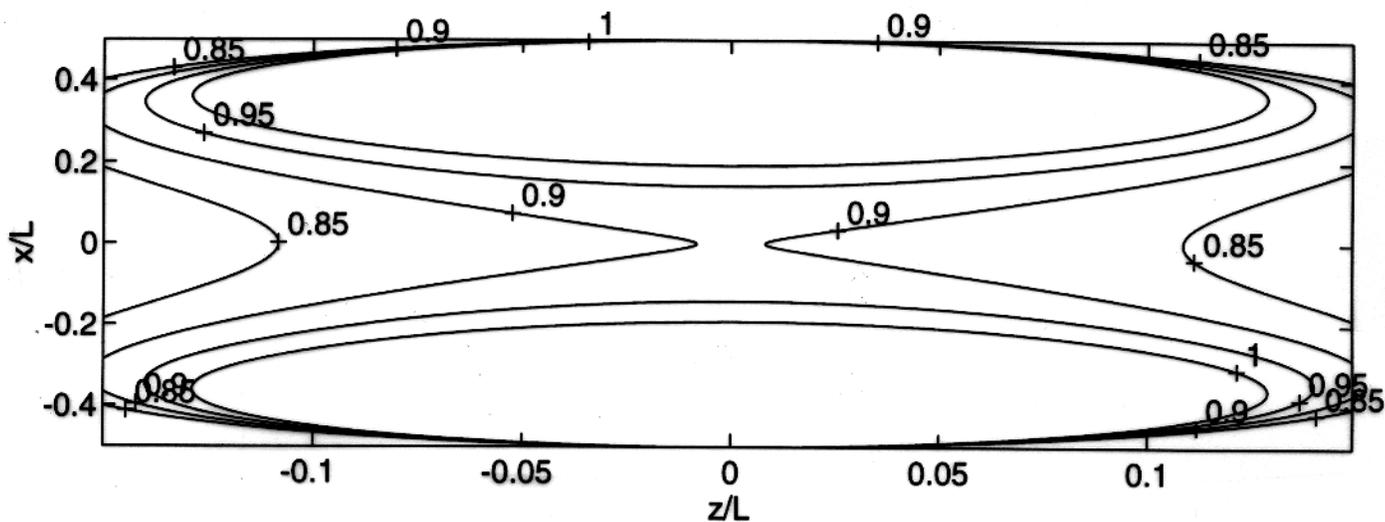


Figura 4.6 - Mapa de contorno do campo magnético H_z (amperes por L) no plano xz , em $y = 0$, $N_e = 1$ e $I = 1A$.

5 - UM E DOIS PLANOS DE CORRENTE

5.1 UM PLANO DE CORRENTE

O plano de corrente é uma das maneiras de gerar campo uniforme empregada, particularmente, nas modelagens reduzidas para simular MT em estudos de efeitos de crostas oceânicas (DOSSO, 1966b).

Para calcular um campo produzido por um plano de corrente foi utilizado o estudo do campo magnético em um fio condutor, finito e retilíneo (Figura 4.1), para construir o modelo de um plano de corrente (Figura 5.1). Para encontrar a distância ótima para encontrar campo uniforme, serão calculadas as variações do campo no espaço e as regiões de desvios percentuais de campo magnético em relação ao campo magnético num ponto qualquer, por exemplo $(0; 0; 0,05L)$, com L sendo o lado do plano de corrente.

5.1.1 Fundamentos Teóricos

5.1.1.1 Campos Magnéticos de um Plano de Corrente Discreto, Quadrado e Finito

A fim de construir o esquema geométrico da Figura 5.1, troca-se o eixo x pelo eixo z da Figura 4.1, ou seja o fio de corrente se estende, agora, no eixo x , e as medidas do campo magnético no ponto (x, y, z) são feitas a uma distância radial $r = \sqrt{y^2 + z^2}$. Mudando a variável b da equação (4.4) por x , se obtém portanto o campo magnético na direção ϕ :

$$H_{\phi} = \frac{I/4\pi}{\sqrt{(\frac{L}{2} - y)^2 + z^2}} \left[\frac{\frac{L}{2} + x}{\sqrt{(\frac{L}{2} + x)^2 + (\frac{L}{2} - y)^2 + z^2}} + \frac{\frac{L}{2} - x}{\sqrt{(\frac{L}{2} - x)^2 + (\frac{L}{2} - y)^2 + z^2}} \right]. \quad (5.1)$$

Depois, coloca-se cada fio estendido no eixo x , distante paralelamente do fio vizinho mais próximo de passo Δy . Os fios ficam limitados a distância $L (= (N - 1)\Delta y)$ do primeiro ao último fio no plano xy . Todas as N linhas de corrente estão posicionadas no mesmo plano xy . Cada linha possui uma corrente elétrica de mesma intensidade, I , direção e sentido dos demais (Figura 5.2). A contribuição do campo magnético, $\mathbf{H}_{\phi k}$, produzido por um fio de corrente na posição k é dado na forma:

$$\mathbf{H}_{\phi k} = (H_y)_k \mathbf{a}_y + (H_z)_k \mathbf{a}_z,$$

$$= H_{\phi k} \text{sen} \theta_k \mathbf{a}_y + H_{\phi k} \text{cos} \theta_k \mathbf{a}_z, \quad (5.2)$$

em que $\text{sen} \theta_k = z / \sqrt{(y - y_k)^2 + z^2}$, e $\text{cos} \theta_k = (y - y_k) / \sqrt{(y - y_k)^2 + z^2}$, com θ_k sendo o ângulo formado entre o plano horizontal e o vetor posição, r_k , distante da linha k . Nestas equações, y é a posição no eixo y do campo magnético a ser medido, e y_k é a coordenada do eixo y da linha k , a qual está contribuindo para a geração do campo magnético $H_{\phi k}$. Assim, o campo magnético gerado pelo fio de corrente k (equação (5.1)) é dado por:

$$H_{\phi k} = \frac{I/4\pi}{\sqrt{(y - y_k)^2 + z^2}} \left[\frac{\frac{L}{2} + x}{\sqrt{(\frac{L}{2} + x)^2 + (y - y_k)^2 + z^2}} + \frac{\frac{L}{2} - x}{\sqrt{(\frac{L}{2} - x)^2 + (y - y_k)^2 + z^2}} \right]. \quad (5.3)$$

O campo magnético total do plano de corrente (Figura 5.2) é resultante da soma vetorial de todos os campos magnéticos produzidos pelos fios de corrente. Logo o campo magnético total, \mathbf{H} , resultante neste ponto (x, y, z) é:

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \sum_{k=1}^N \mathbf{H}_{\phi k}, \\ &= \sum_{k=1}^N (H_y)_k \mathbf{a}_y + \sum_{k=1}^N (H_z)_k \mathbf{a}_z, \\ &= \left[\sum_{k=1}^N (H_y)_k \right] \mathbf{a}_y + \left[\sum_{k=1}^N (H_z)_k \right] \mathbf{a}_z, \\ &= \left[\sum_{k=1}^N H_{\phi k} \text{sen} \theta_k \right] \mathbf{a}_y + \left[\sum_{k=1}^N H_{\phi k} \text{cos} \theta_k \right] \mathbf{a}_z, \\ &= H_y \mathbf{a}_y + H_z \mathbf{a}_z, \end{aligned} \quad (5.4)$$

onde $H_y = H_y(x, y, z)$ é o campo magnético escalar do plano de corrente na direção y , e $H_z = H_z(x, y, z)$ é o campo magnético escalar na direção z . Logo, H_y é dado por:

$$\begin{aligned} H_y &= \sum_{k=1}^N H_{\phi k} \text{sen} \theta_k \\ &= \frac{I}{4\pi} \sum_{k=1}^N \frac{z}{(y - y_k)^2 + z^2} \left[\frac{\frac{L}{2} + x}{\sqrt{(\frac{L}{2} + x)^2 + (y - y_k)^2 + z^2}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\frac{L}{2} - x}{\sqrt{(\frac{L}{2} - x)^2 + (y - y_k)^2 + z^2}} \right], \end{aligned} \quad (5.5)$$

e o campo magnético escalar na direção z , H_z , é dado por:

$$H_z = \sum_{k=1}^N H_{\phi k} \text{cos} \theta_k$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{I}{4\pi} \sum_{k=1}^N \frac{y - y_k}{(y - y_k)^2 + z^2} \left[\frac{\frac{L}{2} + x}{\sqrt{(\frac{L}{2} + x)^2 + (y - y_k)^2 + z^2}} + \right. \\
&\left. + \frac{\frac{L}{2} - x}{\sqrt{(\frac{L}{2} - x)^2 + (y - y_k)^2 + z^2}} \right]. \quad (5.6)
\end{aligned}$$

Nas equações (5.5) e (5.6) temos $k = 1, 2, 3, \dots, N - 1, N$, em que N é o número total de linhas de corrente. As somatórias indicam que o campo magnético resulta das contribuições dos campos magnéticos produzidos por todos os fios de corrente para o ponto (x, y, z) . O campo magnético na direção x é nulo, devido a simetria no eixo x deste sistema, ou seja, o produto vetorial da lei de Biot-Savart fornece o campo magnético resultante nulo na direção x para cada fio de corrente do plano.

É interessante citar que o modelo do plano de corrente da Figura (5.1) se comporta de uma forma contínua quando Δy tende a ser muito pequeno, comparado a L . As coordenadas x , y e z são normalizadas com o comprimento lateral, L , do plano de corrente quadrado.

5.1.2 Resultados Computacionais

5.1.2.1 Campo Magnético H_y

A Figura 5.3 apresenta o mapa de contorno de H_y (equação (5.5)) no plano xz para $y = 0$, o qual é idêntico ao mapa de contorno de H_y no plano yz para $x = 0$. Observe que o campo H_y diminui com o aumento de z . Convém notar, também que H_y muda de sinal, ou seja, de sentido para z negativo ou positivo, obedecendo a regra da mão direita na Figura 5.2.

A Figura 5.4 mostra o mapa de contorno de H_y no plano xy em $z = 0,05L$, mostrando que existe uma simetria de H_y neste plano xy . Observa-se que a curva assume valor máximo no centro do plano z , e possui valores menores nas partes não centrais do eixo x , resultante da soma vetorial dos campos gerados pelos fios. No eixo y , a soma vetorial de H_y das contribuições de cada fio é máxima na posição $y = 0$ devido a maior proximidade média da distância radial dos fios, enquanto que para valores de y diferentes da posição $y = 0$ tem o aumento da proximidade média da distância radial dos fios ocasionando a diminuição do campo magnético resultante, nas bordas do eixo y . É interessante citar que o valor do passo $\Delta y = 0,05L$ com $N = 21$ fios foi escolhido pois assegura a simetria no eixo xy . Assim, podem-se utilizar valores de $\Delta y < 0,05L$ com $N > 21$ fios.

5.1.2.2 Campo Magnético H_z

O mapa de contorno do campo H_z no plano xy , em que $z = 0,05L$, dado pela equação (5.6), constitui a Figura 5.5. Nesta figura os valores de campo magnético H_z para y menor do que 0 são positivos (Figura 5.2). Já os valores negativos de H_z ocorrem para valores de y maiores do que $y = 0$, concordando com a regra da mão direita para encontrar o sentido do campo magnético. Observa-se também que H_z é nulo em, aproximadamente, $y = 0$, para $N = 21$ fios.

O mapa de contorno do campo magnético H_z no plano yz , em que $x = 0$, constitui a Figura 5.6. Observe como esta figura concorda com a Figura 5.5, já que H_z é nulo em, aproximadamente, $y = 0$. Comparando a Figura 5.5 com a Figura 5.4 tem-se que H_y possui valores da mesma ordem de grandeza de H_z . Então, destas figuras, pode-se concluir que H_z é assimétrico em relação a $(x, 0, z)$ do plano de corrente (Figura 5.4), e tem-se também H_y simétrico e máximo no centro $(0; 0; z)$ (Figuras 5.4 e 5.5). Seguindo a metodologia anteriormente usada, será calculado ábacos de raios, comprimentos longitudinais e volumes cilíndricos das regiões de desvios de H_y em relação a referência $H_y(0; 0; z)$, para encontrar a distância ótima para desvio máximo de 1%.

5.1.2.3 Desvios Percentuais do Campo Magnético H_y em Relação a $H_y(0; 0; z)$

A Figura 5.7 ilustra o mapa de contorno dos desvios percentuais do campo magnético $H_y(x; y; 0,05L)$, no plano xy em relação ao campo $H_y(0; 0; 0,05L)$ do plano de corrente. Nas bordas do plano de corrente, a contribuição do campo magnético H_y diminui. Considerando que esta figura seja aproximadamente a área da base quadrada de um prisma de desvios: de $(2 \times 0,20)^2 L^2 = 0,16L^2$ para 1%; $(2 \times 0,26)^2 L^2 = 0,27L^2$ para 2% e $(2 \times 0,30)^2 L^2 = 0,36L^2$ para 3% de desvios. Observa-se que as figuras da área da base de desvios possuem forma aproximadamente quadrangular. Isto mostra a simetria do campo magnético no plano xy a uma dada posição $z = 0,05L$ dos planos de corrente. Por outro lado, a Figura 5.8 apresenta o desvio percentual do campo magnético, $H_y(x; 0; z)$, em relação ao campo magnético $H_y(0; 0; 0,05L)$, o qual é análoga ao desvio de H_y no plano yz para $x = 0$. Esta figura fornece a comprimento longitudinal de prismas de desvios: de $0,01L$ para 1%; $0,017L$ para 2% e $0,026L$ para 3% de desvio. Portanto, os volumes de desvios percentuais, de H_y em relação a $H_y(0; 0; 0,05L)$ de aproximadamente (área da base \times comprimento) são: $1,2 \times 10^{-3} L^3$ para 1%; $5 \times 10^{-3} L^3$ para 2% e $9,8 \times 10^{-3} L^3$ para 3%.

A Figura 5.9 apresenta as áreas aproximadas da base dos prismas de desvios percentuais de $H_y(x, y, z)$ em relação a $H_y(0; 0; z)$ no plano xy variando com o ponto de referência $(0; 0; z)$.

Observe que o valor máximo de área é próximo ao plano de corrente $(0; 0; z \rightarrow 0)$ e diminui com o aumento da distância z .

A Figura 5.10 mostra, aproximadamente, os comprimentos longitudinais dos prismas de desvios percentuais de $H_y(x, y; z)$ em relação a $H_y(0; 0; z)$ versus z . Observe que para $0,02L < z < 0,05L$ o comprimento longitudinal dos desvios aumenta quase linearmente.

A Figura 5.11 apresenta, aproximadamente, os volumes dos prismas de desvios percentuais de $H_y(x, y, z)$ em relação a $H_y(0; 0; z)$ versus z . Observa-se que no caso $\frac{z}{L} \rightarrow 0$, o volume dos desvios tende a zero. Um volume máximo de desvio de 1%, aparece na posição $(0; 0; z = 0,05L)$, onde $z = 0,05L$ será chamada de distância ótima para encontrar volume de desvio de 1% de H_y em relação a $H_y(0; 0; 0,05L)$.

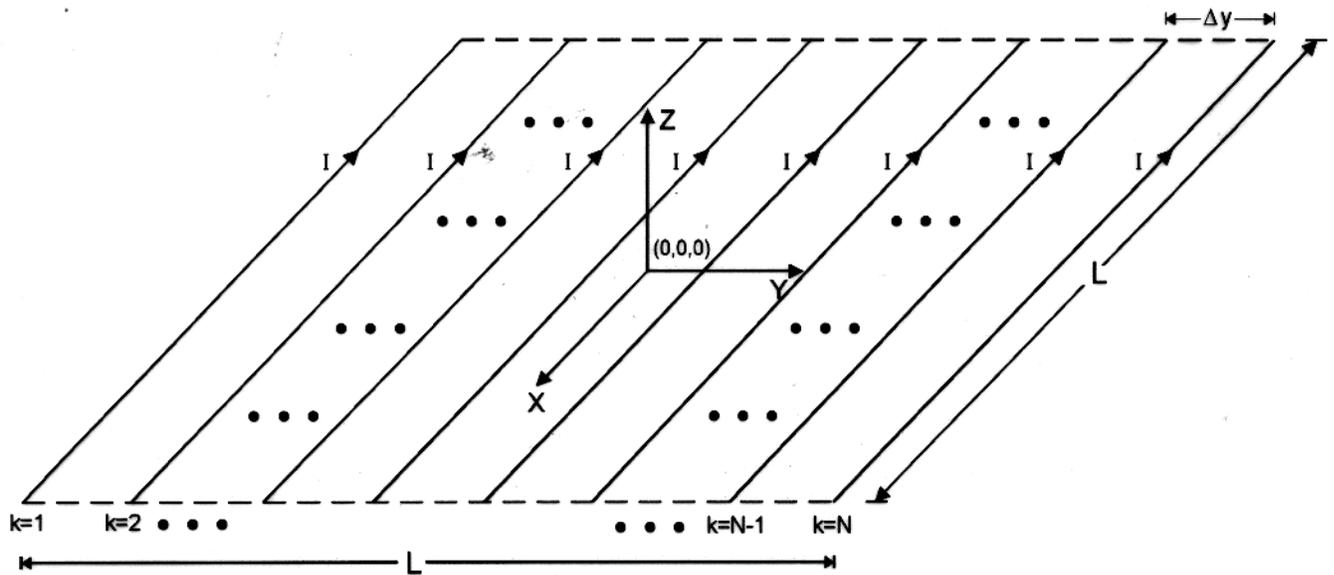


Figura 5.1 - Modelo esquemático de um plano de corrente quadrado, finito e discreto formado por N fios de corrente elétrica, I , e distância entre os fios correspondente a um passo Δy .

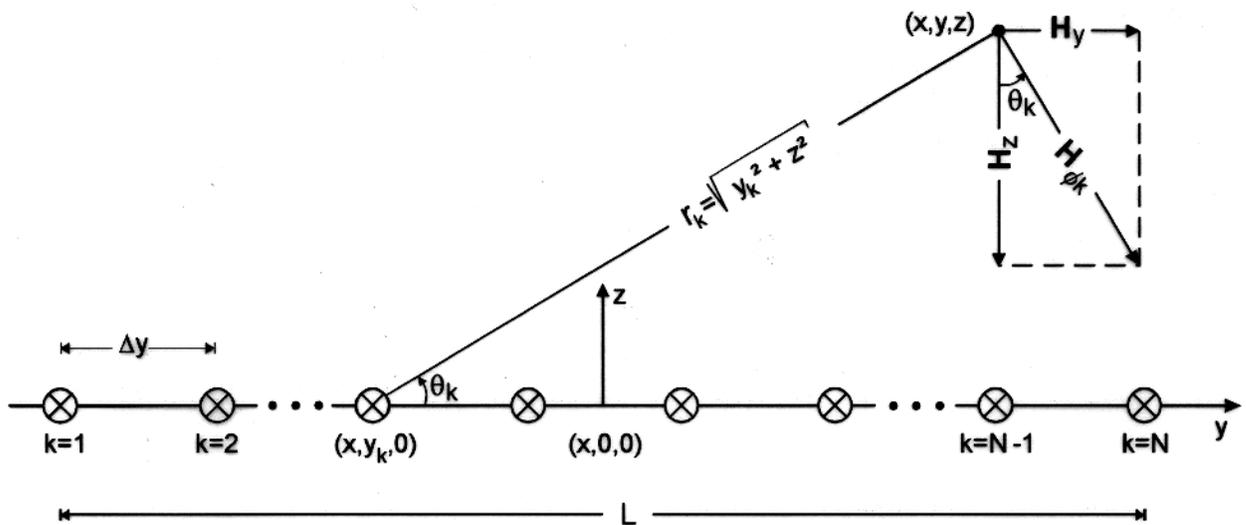


Figura 5.2 - Geometria cartesiana do campo magnético resultante nos eixos y e z , para o plano x , devido a linha de corrente na posição y_k . O símbolo \otimes indica que a corrente elétrica, I , está entrando no plano yz desta figura.

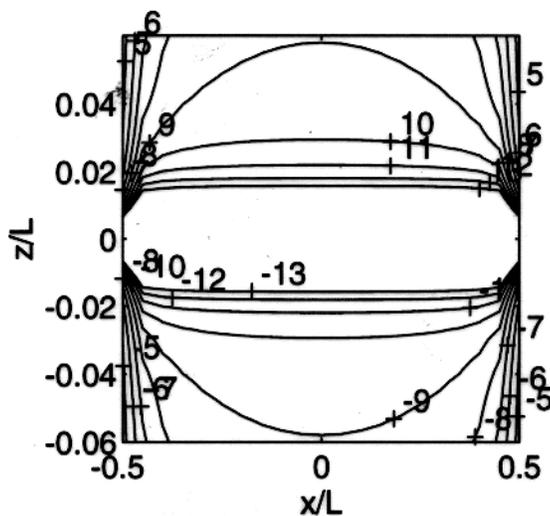


Figura 5.3 - Mostra o mapa de contorno do campo magnético, H_y (amperes/L) no plano xz em $y = 0$, o qual é semelhante ao mapa de contorno no plano yz em $x = 0$, com $N = 21$ fios e $I = 1A$.

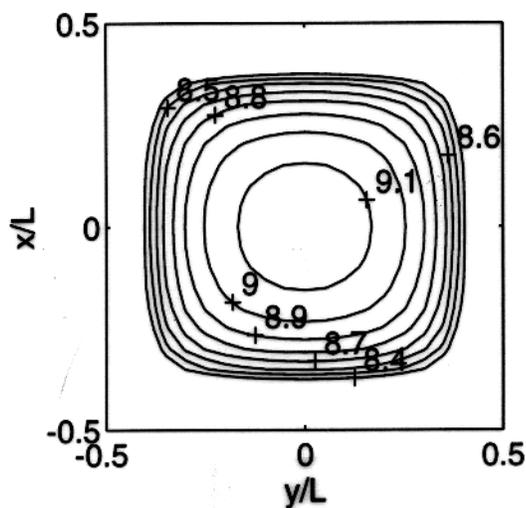


Figura 5.4 - Mapa de contorno de H_y (amperes/L) no plano xy em $z = 0,05L$, $N = 21$ fios e $I = 1A$. Observe que H_y é simétrico em relação a $(0; 0; 0,05L)$.

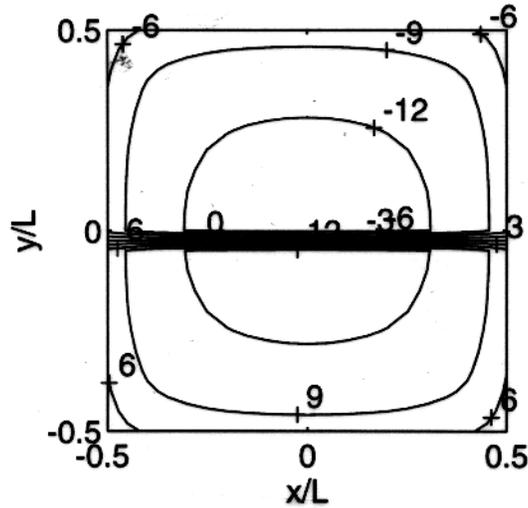


Figura 5.5 - Mapa de contorno do campo H_z (amperes/L), variando com x e y para $z = 0,05L$, $I = 1A$ e $N = 21$ fios. Observe que H_z é assimétrico em relação ao eixo y no plano xy .

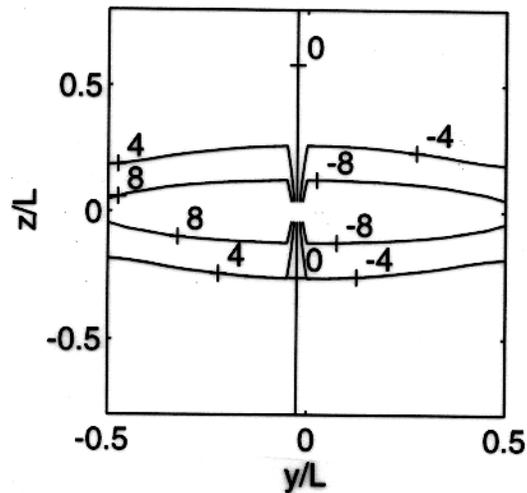


Figura 5.6 - Mapa de contorno do campo H_z (amperes/L) no plano yz em $x = 0$, $I = 1A$ e $N = 21$ fios.

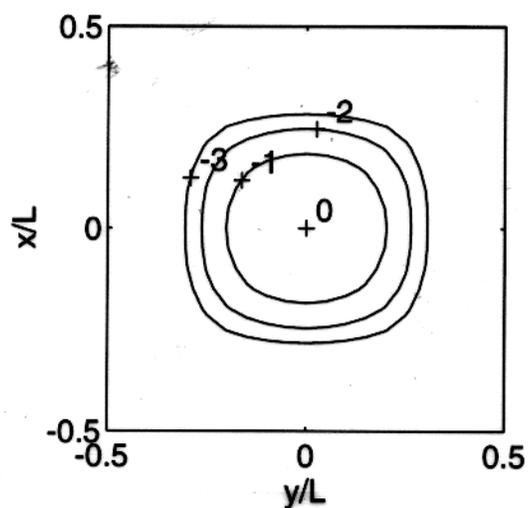


Figura 5.7 - Mapa de contorno de desvios percentuais do campo $H_y(x; y; 0, 05L)$, em relação ao campo magnético $H_y(0; 0; 0, 05L)$ no plano xy .

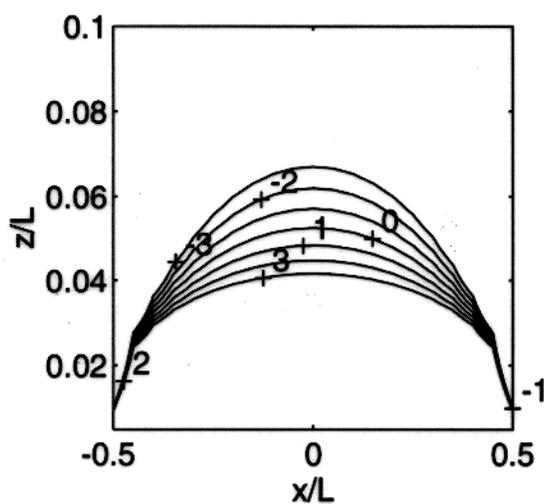


Figura 5.8 - Desvios percentuais de $H_y(x; 0; z)$ em relação ao campo magnético $H_y(0; 0; 0, 05L)$ para o plano geométrico xz .

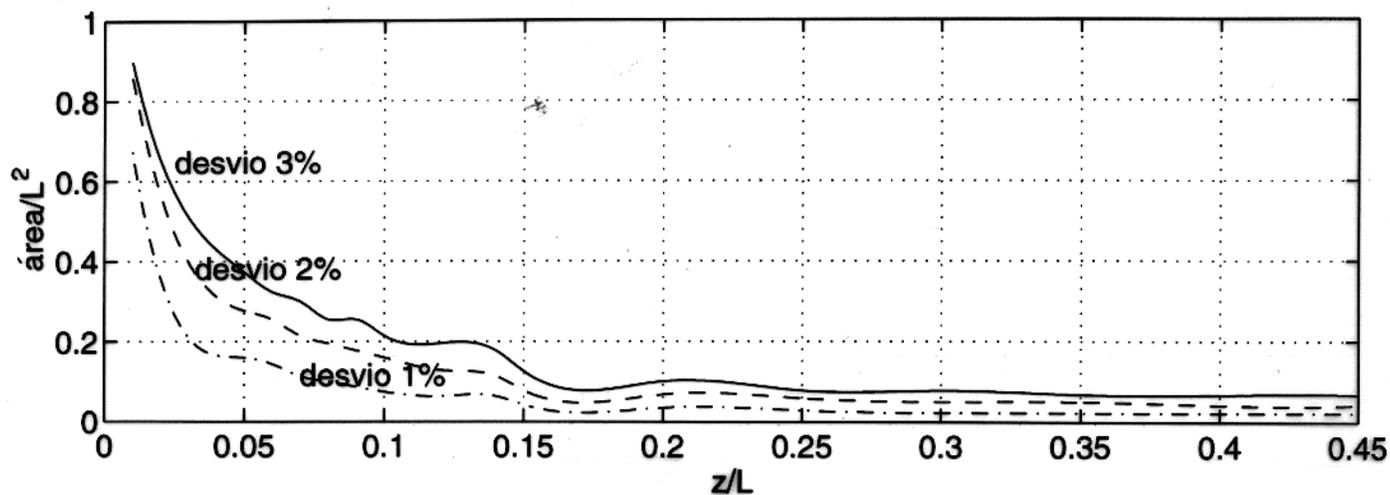


Figura 5.9 - Área da base do cilindro de desvios percentuais de H_y em relação a $H_y(0;0;z)$ versus z . Observe-se que a área da base diminui com o aumento da distância z .

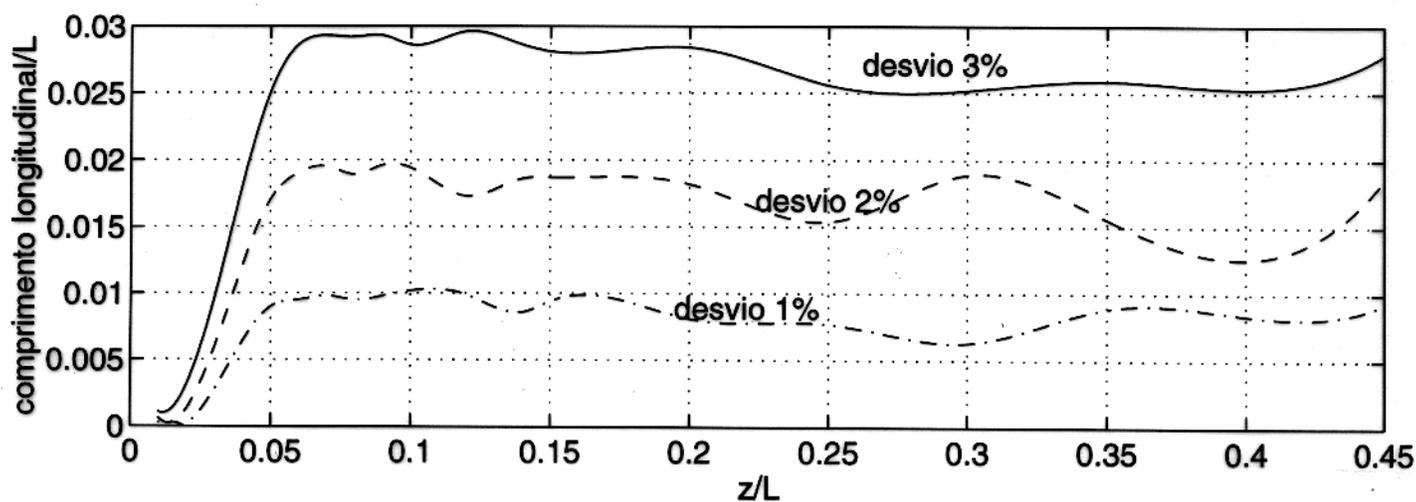


Figura 5.10 - Comprimentos longitudinais dos prismas de desvios percentuais de H_y em relação a $H_y(0;0;z)$, versus z .

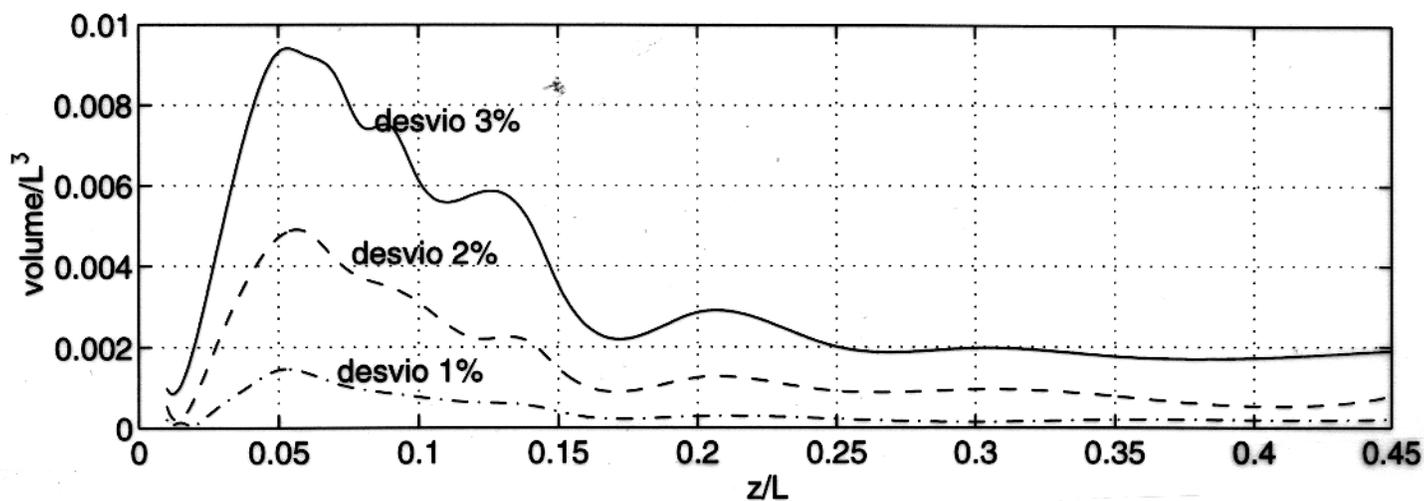


Figura 5.11 - Volume (área da base \times comprimento) dos prismas de desvios percentuais de H_y em relação a $H_y(0;0;z)$ versus z . Observa-se que em $z = 0,05L$ temos o valor máximo de desvio de 1%.

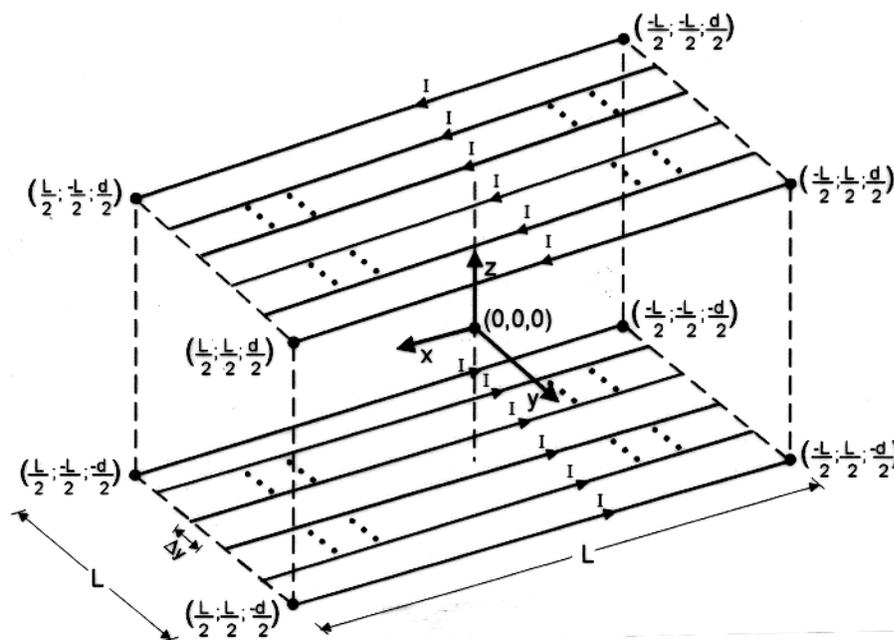


Figura 5.12 - Geometria cartesiana de dois planos de corrente, espaçados entre si a uma distância fixa d , passo Δy e formado por N fios, onde cada um fio é percorrido por uma intensidade de corrente elétrica I .

5.2 DOIS PLANOS DE CORRENTE

5.2.1 Fundamentos Teóricos

Aplicando o estudo anterior de um plano de corrente finito, quadrado e discreto da seção 5.1. Colocando, agora, dois planos de corrente centralizados axialmente a uma distância fixa, d , conforme o modelo da Figura 5.12, onde em cada fio flui uma corrente elétrica I . Ambos os planos possuem um mesmo número total de N fios de corrente e passo Δy entre cada fio. O sentido das correntes elétricas no plano de corrente inferior ($-\frac{L}{2} \leq x \leq \frac{L}{2}$; $-\frac{L}{2} \leq y \leq \frac{L}{2}$; $z = -\frac{d}{2}$) é oposto ao do plano superior ($-\frac{L}{2} \leq x \leq \frac{L}{2}$; $-\frac{L}{2} \leq y \leq \frac{L}{2}$; $z = \frac{d}{2}$), ou seja, existe uma defasagem de π radianos entre as correntes dos dois planos.

O campo magnético total, $\mathbf{h}(x, y, z) = h_y(x, y, z)\mathbf{a}_y + h_z(x, y, z)\mathbf{a}_z$, apresenta escalares de campos magnéticos resultantes na direção y , h_y , e na direção z , h_z . Novamente, o campo magnético na direção x é nulo por razões de simetria neste mesmo eixo. Portanto, os valores escalares das componentes do campo magnético no ponto (x, y, z) do espaço são dados por:

$$\begin{aligned}
 h_y(x, y, z) &= H_y(x, y; \frac{d}{2} + z) + H_y(x, y; \frac{d}{2} - z) , \\
 &= \frac{I}{4\pi} \sum_{k=1}^N \frac{\frac{d}{2} + z}{(y - y_k)^2 + (\frac{d}{2} + z)^2} \left[\frac{\frac{L}{2} + x}{\sqrt{(\frac{L}{2} + x)^2 + (y - y_k)^2 + (\frac{d}{2} + z)^2}} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\frac{L}{2} - x}{\sqrt{(\frac{L}{2} - x)^2 + (y - y_k)^2 + (\frac{d}{2} + z)^2}} \right] + \\
 &\quad + \frac{\frac{d}{2} - z}{(y - y_k)^2 + (\frac{d}{2} - z)^2} \left[\frac{\frac{L}{2} + x}{\sqrt{(\frac{L}{2} + x)^2 + (y - y_k)^2 + (\frac{d}{2} - z)^2}} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\frac{L}{2} - x}{\sqrt{(\frac{L}{2} - x)^2 + (y - y_k)^2 + (\frac{d}{2} - z)^2}} \right], \tag{5.7}
 \end{aligned}$$

e também,

$$\begin{aligned}
 h_z(x, y, z) &= H_z(x, y; \frac{d}{2} + z) - H_z(x, y; \frac{d}{2} - z) , \\
 &= \frac{I}{4\pi} \sum_{k=1}^N \frac{y - y_k}{(y - y_k)^2 + (\frac{d}{2} + z)^2} \left[\frac{\frac{L}{2} + x}{\sqrt{(\frac{L}{2} + x)^2 + (y - y_k)^2 + (\frac{d}{2} + z)^2}} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\frac{L}{2} - x}{\sqrt{(\frac{L}{2} - x)^2 + (y - y_k)^2 + (\frac{d}{2} + z)^2}} \right] +
 \end{aligned}$$

$$\frac{y - y_k}{(y - y_k)^2 + (\frac{d}{2} - z)^2} \left[\frac{\frac{L}{2} + x}{\sqrt{(\frac{L}{2} + x)^2 + (y - y_k)^2 + (\frac{d}{2} - z)^2}} + \frac{\frac{L}{2} - x}{\sqrt{(\frac{L}{2} - x)^2 + (y - y_k)^2 + (\frac{d}{2} - z)^2}} \right], \quad (5.8)$$

ambos expressados em ampere por unidade de comprimento L . Os sinais de soma e subtração dos campos magnéticos das equações (5.7) e (5.8) surgem devido a soma vetorial dos campos magnéticos resultantes envolvidos. Os campos magnéticos $H_y(x; y; \frac{d}{2} + z)$ e $H_z(x; y; \frac{d}{2} + z)$ das equações (5.7) e (5.8) são as equações (5.5) e (5.6) de um plano de corrente no plano $z = -\frac{d}{2}$, respectivamente, e os campos magnéticos $H_y(x; y; \frac{d}{2} - z)$ e $H_z(x; y; \frac{d}{2} - z)$ são as equações do plano de corrente no plano $z = \frac{d}{2}$.

5.2.2 Resultados Computacionais

5.2.2.1 Campo Magnético h_y

A Figura 5.13 mostra o mapa de contorno do campo magnético h_y (amperes por L) em $y = 0$, no plano xz (para $d = 0, 2L$, $N = 21$ fios e $I = 1A$). Este mapa é idêntico ao do campo magnético h_y (amperes por L) no plano yz , em $x = 0$, nas mesmas condições de Δy , N e I .

A Figura 5.14 mostra o mapa de contorno do campo h_y no plano xy , para $z = 0$, $d = 0, 2L$ e $N = 21$ fios. Observa-se que este mapa apresenta contornos quase circulares, isto significa que a contribuição do campo magnético h_y no eixo x é praticamente igual a contribuição deste campo no eixo y , ou seja, existe uma simetria de h_y em relação ao eixo $(0; 0; z)$.

5.2.2.2 Campo Magnético h_z

A Figura 5.15 nos mostra o mapa de contorno do campo magnético h_z (amperes por L) (equação (5.8)) no plano xz onde $y = 0$, $N = 21$ fios e $I = 1A$.

Comparando as Figuras 5.13 com as Figura 5.15, tem-se que h_z é muito menor do que h_y na região mais central ($-0,3L < x < 0,3L$; $-0,3L < y < 0,3L$; z), sendo nulo em $(0,0,0)$, mas da mesma ordem de grandeza de H_y na proximidade das bordas dos planos de corrente. Logo h_z pode ser desprezado nesta região mais central e ser levado em consideração fora desta região mais central em trabalhos experimentais de campo magnético, com um sistema físico de dois planos de corrente. Por esses motivos foi calculado a distância ótima e volume

de desvios de h_y em relação a $h_y(0,0,0)$, o qual é simétrico em relação a $(0,0,0)$, diferente de h_z que é assimétrico em relação a este ponto.

5.2.2.3 Determinação da Distância Ótima

A Figura 5.17 apresenta, a nível de ilustração, $h_y(0;0;z)$ versus z para $N = 21$ fios e $I = 1A$.

Para determinar a distância ótima deriva-se o campo magnético h_y (equação (5.7)) em relação a z :

$$\begin{aligned} \frac{dh_y}{dz} &= \frac{dH_y(x,y,\frac{d}{2}+z)}{dz} + \frac{dH_y(x,y,\frac{d}{2}-z)}{dz}, \\ &= \frac{I}{4\pi} \sum_{k=1}^N \frac{\frac{d}{2} + z}{(y - y_k)^2 + (\frac{d}{2} + z)^2} \left[-\frac{(\frac{L}{2} - x)^2}{((\frac{L}{2} - x)^2 + (y - y_k)^2 + (\frac{d}{2} + z)^2)^{\frac{3}{2}}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\frac{d}{2} + z}{\sqrt{(\frac{L}{2} - x)^2 + (y - y_k)^2 + (\frac{d}{2} + z)^2}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(\frac{L}{2} + x)^2}{((\frac{L}{2} + x)^2 + (y - y_k)^2 + (\frac{d}{2} + z)^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{\frac{d}{2} + z}{\sqrt{(\frac{L}{2} + x)^2 + (y - y_k)^2 + (\frac{d}{2} + z)^2}} \right] + \\ &\quad + \frac{\frac{d}{2} - z}{(y - y_k)^2 + (\frac{d}{2} - z)^2} \left[-\frac{(\frac{L}{2} - x)^2}{((\frac{L}{2} - x)^2 + (y - y_k)^2 + (\frac{d}{2} - z)^2)^{\frac{3}{2}}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\frac{d}{2} - z}{\sqrt{(\frac{L}{2} - x)^2 + (y - y_k)^2 + (\frac{d}{2} - z)^2}} + \frac{(\frac{L}{2} + x)^2}{((\frac{L}{2} + x)^2 + (y - y_k)^2 + (\frac{d}{2} - z)^2)^{\frac{3}{2}}} + \right. \\ &\quad \left. - \frac{\frac{d}{2} - z}{\sqrt{(\frac{L}{2} + x)^2 + (y - y_k)^2 + (\frac{d}{2} - z)^2}} \right], \quad (5.9) \end{aligned}$$

onde $k = 1, 2, 3, \dots, N$. Na Figura 5.18, esta função se anula no ponto $(x = 0; y = 0; z = z_o = 0)$. Agora, fazendo-se $z = z_o = 0$ (obtida na primeira derivada de H_y) na segunda derivada de h_y em relação a z (no eixo z), $(\frac{dh_y^2}{dz^2})(0;0;z = z_o = 0)$ e variando a distância entre os dois planos, d , se determina a Figura 5.19, a qual se anula em quatro pontos $z_1^i = 0,11L$, $z_1^{ii} = 0,15L$, $z_1^{iii} = 0,2L$ e $z_1^{iv} = 0,24L$. Portanto, um desses valores será a distância ótima para gerar volume máximo de desvio de 1% para o sistema físico de dois planos de corrente. Logo, analisa-se o gráfico de volumes de desvio percentuais de h_y em relação a $h_y(0,0,0)$ versus a distância entre dois planos, d , a fim de decidir a geometria que fornece o volume máximo de campo uniforme.

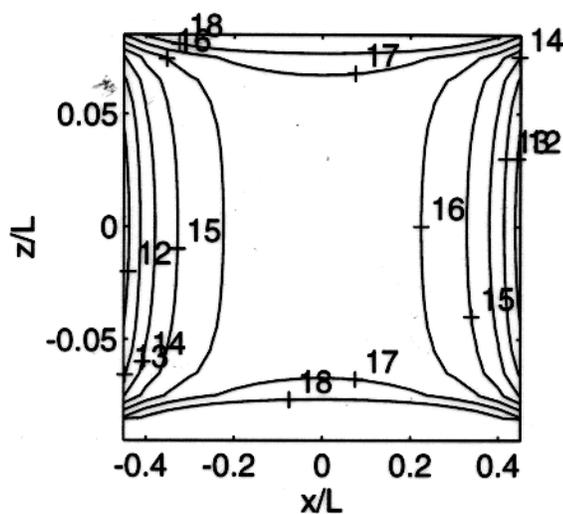


Figura 5.13 - Mapa de contorno do campo magnético h_y (amperes por L) no plano xz em $y = 0$, para $d = 0,2L$, $N = 21$ e $I = 1A$.

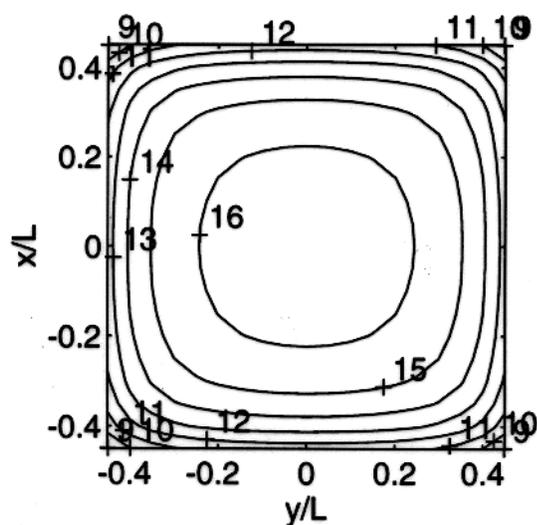


Figura 5.14 - Mapa de contorno do campo magnético h_y (amperes por L) no plano xy em $z = 0$, para $d = 0,2L$, $N = 21$ e $I = 1A$.

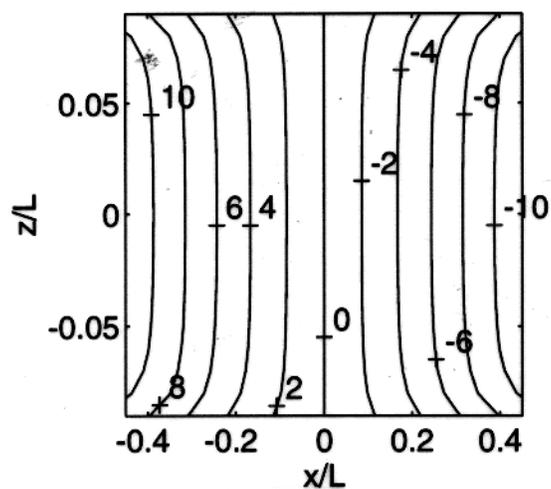


Figura 5.15 - Mapa de contorno de h_z (amperes por L) no plano xz , para $y = 0$, $N = 21$, $d = 0,2L$ e $I = 1A$.

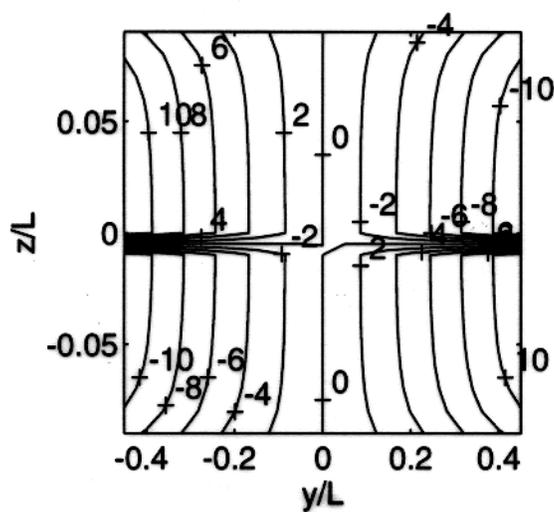


Figura 5.16 - Mapa de contorno de h_z (amperes por L) no plano yz , para $x = 0$, com $d = 0,2L$, $N = 21$ e $I = 1A$.

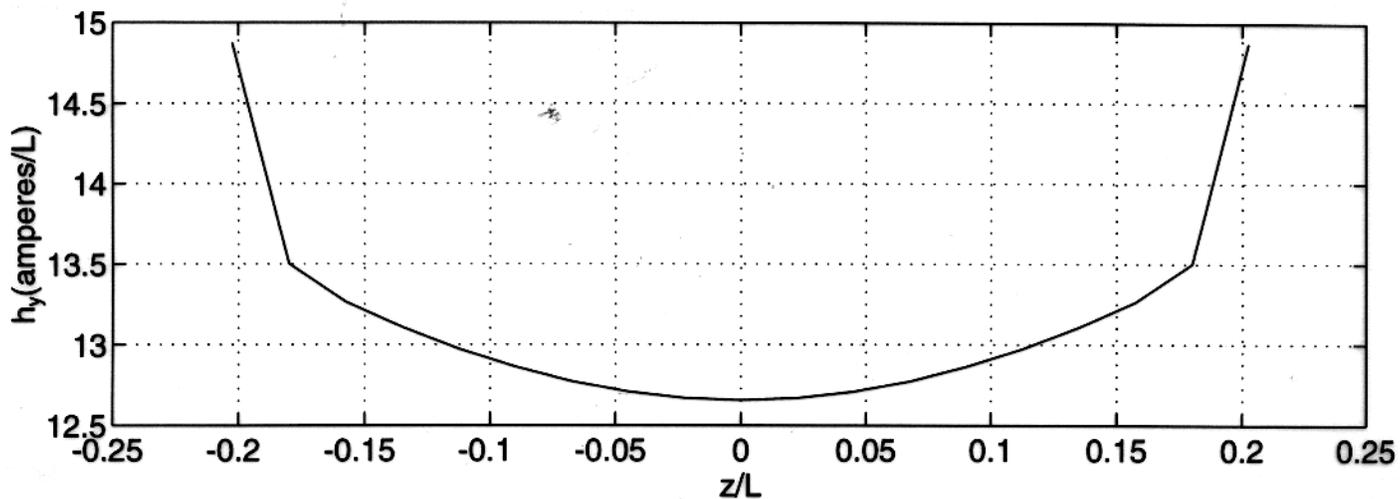


Figura 5.17 - Gráfico ilustrativo de h_y no eixo $(0, 0, z)$ versus z , para $d = 0,2L$, $N = 21$ e $I = 1A$.

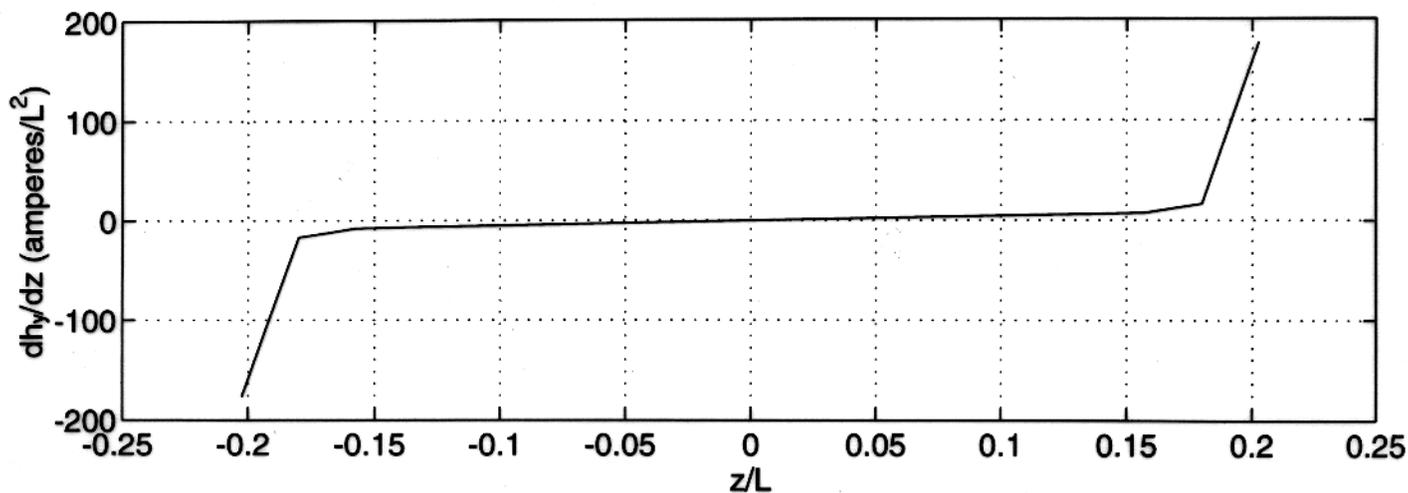


Figura 5.18 - Gráfico da primeira derivada de h_y em relação a z versus z , no eixo $(0, 0, z)$. Observe que esta função é nula no ponto $z = z_o = 0$, para $N = 21$ e $I = 1A$.

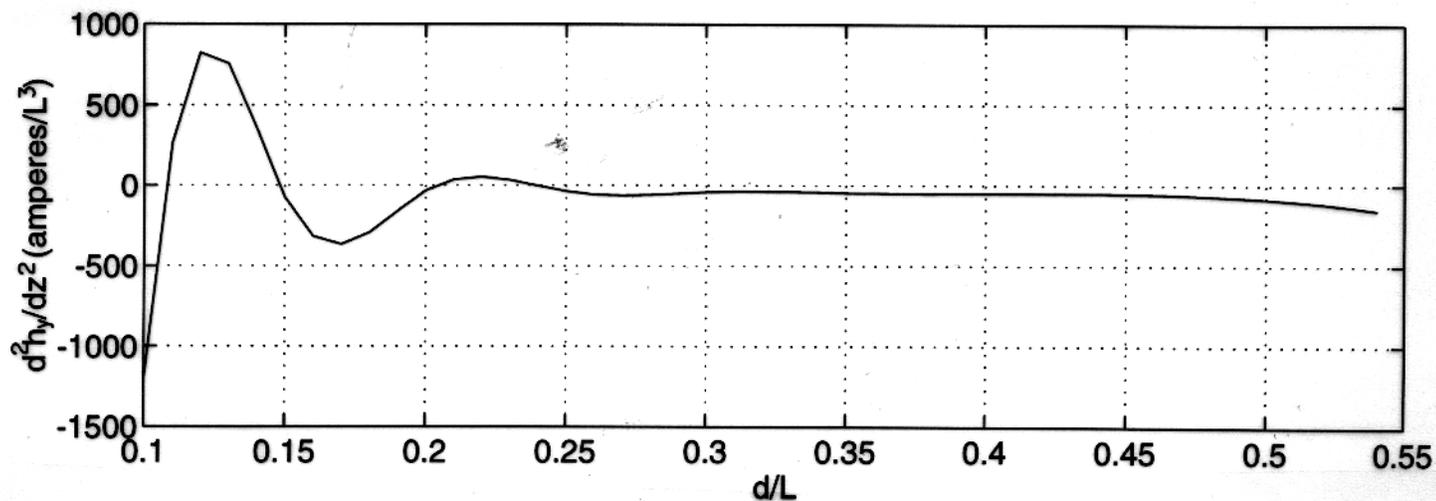


Figura 5.19 - Gráfico da segunda derivada de h_y em relação a z , em $(0,0,0)$ versus a distância entre os dois planos, d . Obtem-se a distância ótima, para geração de um campo uniforme, em um destes pontos onde esta função se anulou. Neste caso se anula em quatro pontos: $0,11L$, $0,15L$, $0,2L$ e $0,24L$, onde $N = 21$ e $I = 1A$.

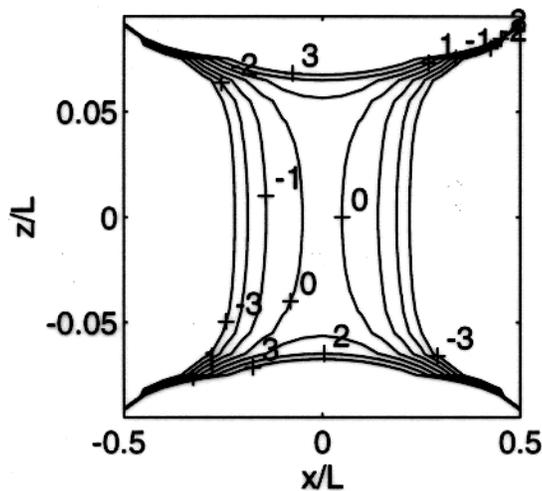


Figura 5.20 - Mapa de contorno do desvio percentual do campo magnético h_y em relação a $h_y(0,0,0)$ no plano xz em $y=0$, para $d=0,2L$ e $N=21$. Observe a simetria de h_y em torno de $(0,0,0)$.

5.2.2.4 Desvios Percentuais de $h_y(x, y, z)$ em Relação a $h_y(0, 0, 0)$

A Figura 5.20 ilustra o mapa de contorno do desvio percentual do h_y em relação a $h_y(0, 0, 0)$ no plano xz em $y = 0$, para $N = 21$ fios e $I = 1A$. Este mapa foi construído a partir da Figura 5.13. Esta figura fornece comprimentos longitudinais de cilindros de $0,11L$ para 1%; $0,135L$ para 2% e $0,14L$ para 3% de desvio.

A Figura 5.21 mostra o mapa de contorno do desvio percentual de h_y em relação a $h_y(0, 0, 0)$ versus xy no plano $z = 0$, para $d = 0,2L$. Este mapa foi construído a partir da Figura 5.14. Desta figura, foi obtido, aproximadamente, círculos, neste caso, de raios $0,14L$ para 1%; $0,19L$ para 2% e $0,23L$ para 3% de desvio.

Com base nas Figuras 5.20 e 5.21 foram obtido aproximadamente, volumes de desvios percentuais do campo h_y em relação a $h_y(0, 0, 0)$ na forma geométrica de cilindro, os quais são: $\pi \times (0,14L)^2 \times (0,11L) = 0,0068L^3$ para 1%; de $\pi \times (0,19L)^2 \times (0,13L) = 0,0153L^3$ para 2% e de $\pi \times (0,23L)^2 \times (0,14L) = 0,0233L^3$ para 3%, no caso de $N = 21$ fios e $d = 0,2L$.

Agora, utilizando o mesmo método para calcular os raios, comprimento longitudinal e volumes aproximados de cilindros de desvios percentuais de h_y em relação a $h_y(0, 0, 0)$ (aplicado nas Figuras 5.20 e 5.21) versus a distância entre os dois planos, d , para $N = 21$ fios. Calcula-se, primeiramente, os raios dos cilindros dos desvios percentuais de h_y em relação a $h_y(0, 0, 0)$ para vários valores de distâncias entre os dois planos, d , encontrando a Figura 5.22. A região de raio máximo para o desvio mínimo é quando $d \rightarrow 0$. Observa-se que os raios diminuem com o inverso da distância entre os dois planos de corrente.

Calculando os comprimentos longitudinais dos cilindros dos desvios percentuais de h_y em relação a um valor de campo magnético de referência $h_y(0, 0, 0)$ versus a distância entre os dois planos, d , encontramos a Figura 5.23. Nota-se que as comprimentos longitudinais dos cilindros de desvios aumentam quase linearmente até alcançar um máximo em $0,16L$ para 1%, $0,22L$ para 2% e $0,25L$ para 3% e depois diminuem com o aumento de d .

Calculando os volumes dos desvios percentuais de h_y em relação a $h_y(0, 0, 0)$ versus d , encontra-se os valores apresentados na Figura 5.25. A região de volume máximo de desvio de 1% de h_y em relação a $h_y(0, 0, 0)$, ocorre aproximadamente, em $d = 0,2L$, o qual é igual a um dos quatro valores da distância ótima encontrada na Figura 5.19. Portanto esta é a distância ótima para encontrar volume máximo de desvios percentuais de 1% de h_y em relação a $h_y(0, 0, 0)$, para este sistema físico de dois planos de corrente.

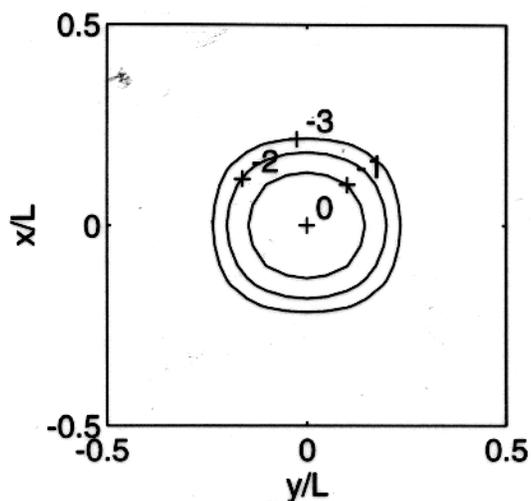


Figura 5.21 - Mapa de contorno do desvio percentual do campo magnético h_y em relação a $h_y(0,0,0)$, no plano xy , em $z=0$, para $d=0,2L$ e $N=21$.

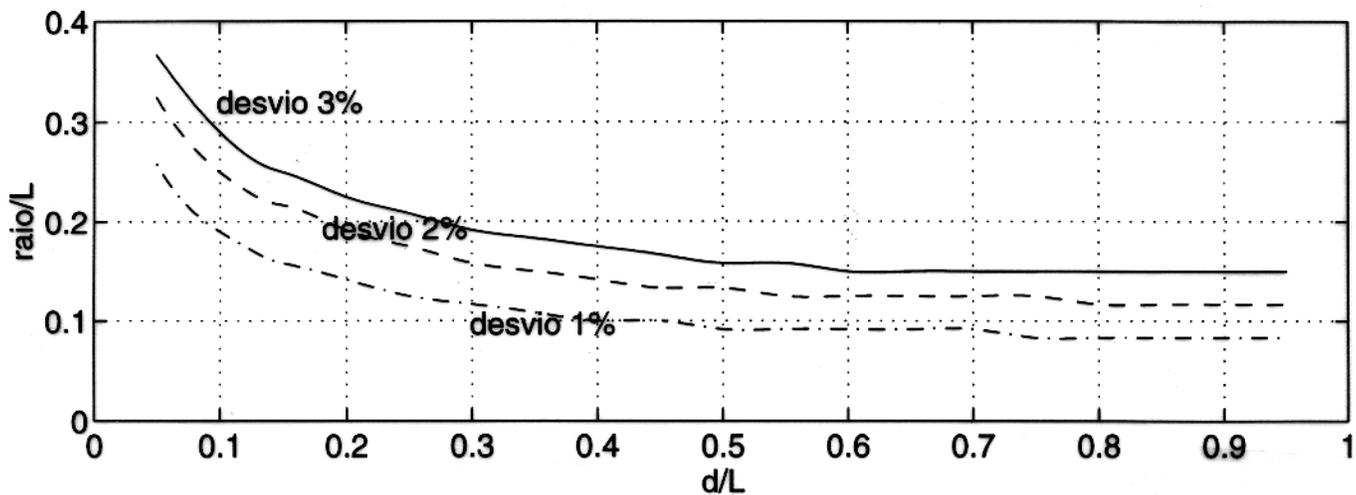


Figura 5.22 - Gráfico dos raios dos cilindros dos desvios percentuais de h_y em relação a $h_y(0,0,0)$ no plano $z=0$ versus a distância entre os dois planos, d , onde $N=21$. Considerando-se L constante.

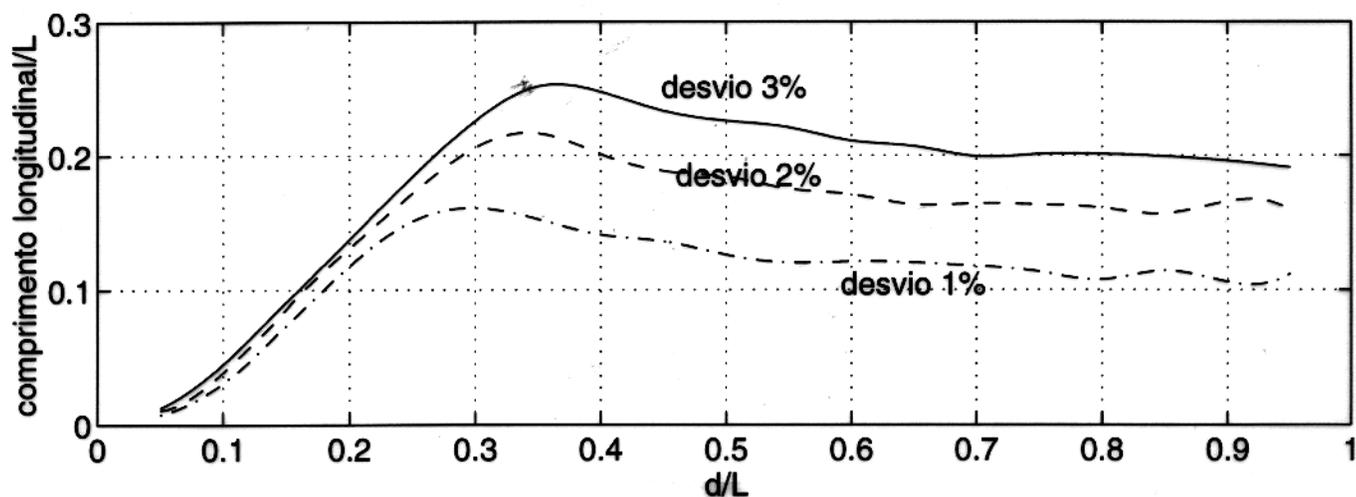


Figura 5.23 - Gráfico dos comprimentos longitudinais dos cilindros dos desvios percentuais de h_y em relação a $h_y(0,0,0)$, versus a distância entre os dois planos, d . Considerando-se L constante.

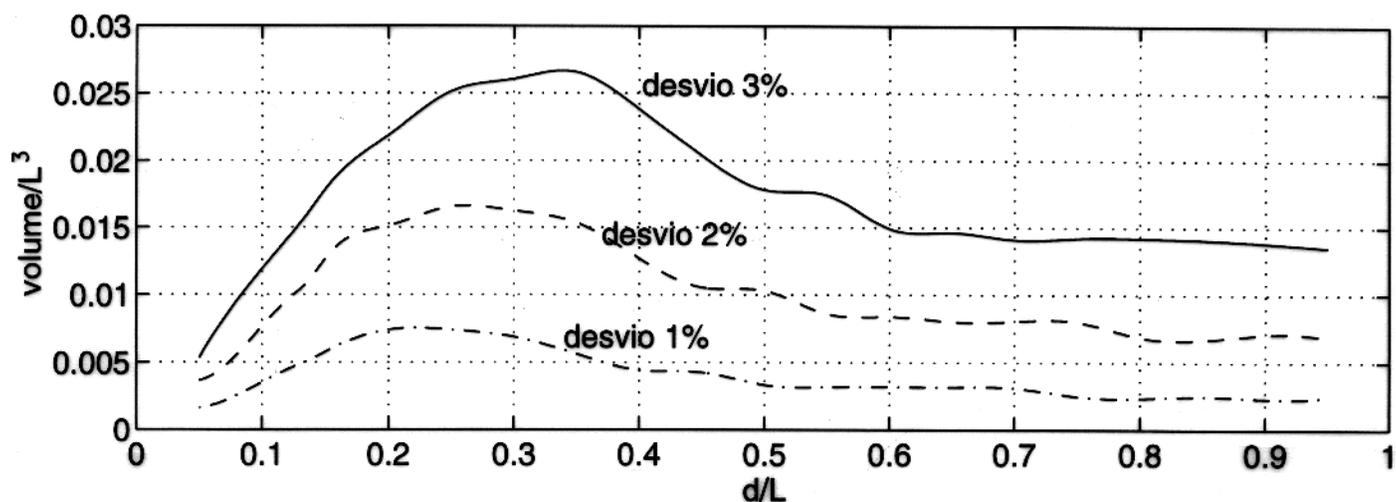


Figura 5.24 - Gráfico dos volumes de desvios percentuais de h_y em relação a $h_y(0,0,0)$ versus a distância entre os dois planos, d . O valor de desvio máximo de 1% ocorre em $d = 0,2L$, a qual é a distância ótima para obter campo uniforme, com $N = 21$ fios. Considerando L constante.

6 - CONCLUSÕES, PARTE EXPERIMENTAL E SUGESTÕES

Os resultados obtidos mostram que o solenóide possui sua distância ótima do comprimento longitudinal, para se obter campo uniforme, maior ou igual do que $11a$ para $\Delta z = 0,1a$. Da mesma forma, o campo na direção ρ pode ser desprezado na região de desvio de até 3% do campo na direção z .

Já as bobinas de Helmholtz possuem sua distância ótima para a obtenção de campo uniforme igual ao raio das bobinas. Nelas, o campo na direção de ρ pode ser desprezado na região de desvio de até 3% do campo na direção z .

O sistema físico de dois planos quadrados de corrente possui distância ótima de $0,2L$ entre os planos para obter campo uniforme na direção y . Por outro lado, o campo na direção z pode ser desprezado na região mais central deste sistema físico. É um sistema muito prático para se trabalhar experimentalmente.

No interior da bobina circular de corrente de raio a , o campo na direção ρ pode ser desprezado nas regiões de desvio absoluto de até 3% do campo na direção z . Já a bobina quadrada de corrente é o sistema físico mais fácil de construir de todos os outros sistemas vistos neste trabalho. Os volumes de desvios dos campos na direção y e x podem ser desprezados em relação ao campo na direção z nas regiões de desvio de até 3% em relação ao seu centro.

O plano quadrado de corrente de lado L , fornece a distância ótima de $0,05L$ do plano, a partir do seu centro, onde nos temos o máximo de volume de campo uniforme. O volume de campo uniforme é muito pequeno para colocação de modelos alvo no laboratório, pois necessita de um plano com comprimento lateral muito grande comparado com as dimensões do modelo alvo. Este resultado é coerente com a situação da ionosfera, a qual pode ser tratada como um plano de corrente, considerando as dimensões infinitas do lado do quadrado comparada com a distância entre a ionosfera e a superfície da Terra. Nele, o campo magnético na direção de z é da ordem do campo na direção y , tendo que ser levada em consideração nas medidas experimentais.

As Figuras 6.1, 6.2 e 6.3 apresentam quadros comparativos de áreas transversais, comprimentos longitudinais e volumes de prismas de desvios percentuais de campo em relação a um

campo de referência, de acordo com o sistema físico e com suas respectivas distâncias ótimas. Considerando que a bobina circular, as bobinas de Helmholtz e o solenóide possuem raio a ; o comprimento do solenóide é $11a$; e a bobina quadrada, um e dois planos de corrente possuem lado igual a $2a$. Os cálculos computacionais foram feitos nas distâncias ótimas para geração de campo uniforme em todos os sistemas físicos. Podendo-se, assim, comparar os parâmetros de interesse dos sistemas físicos encontrados neste trabalho.

Dentre os sistemas físicos estudados para obtenção de campo uniforme foi escolhido as bobinas de Helmholtz para fazer a parte experimental, já que oferece um volume suficiente de campo uniforme na simulação computacional, e também por ser a mais prática para colocação de modelos alvo e medidas com aparelhos em seu interior. Ao contrário, o solenóide possui difícil acesso ao seu interior. Sendo assim foi utilizado as bobinas aproximadas de Helmholtz de forma octogonal existentes no laboratório de geofísica da UFPA. Essas bobinas foram construídas pelo aluno, do mestrado em Geofísica da UFPA, Edilberto Oliveira Rozal.

A bobina octogonal aproximada de Helmholtz possui os seguintes dados técnicos: raio médio igual a 0,885 m; distância entre as bobinas igual ao raio médio; número de espiras igual a 3 em cada bobina. Foi utilizada corrente elétrica de 0,9 amperes em cada fio. Possui resistência elétrica dos fios das bobinas igual a 0,1215 ohm; auto-indutância de 122,2 μH e frequência de sintonia igual a 500 KHz.

A Figura 6.4 mostra o mapa de contorno do desvio percentual de $H_z(\rho, z)$ em relação a $H_z(0, 0)$ no plano ρz , computado para bobinas circulares de Helmholtz. A Figura 6.5, por outro lado, mostra o mapa de contorno do desvio percentual de $H_z(\rho, z)$ em relação a $H_z(0, 0)$ no plano ρz , medido experimentalmente com bobinas octogonais aproximadas de Helmholtz.

Comparando as Figuras 6.4 e 6.5, pode-se dizer que os resultados experimentais da bobina octogonal, aproximada, de Helmholtz se assemelham bastante aos resultados da simulação computacional, devido ao fato do volume de desvio percentual de campo ser muito menor do que o volume das dimensões da bobina de Helmholtz octogonal.

As fontes de diferenças da parte experimental da simulação computacional são: a) as geometrias dos sistemas físicos de bobina octogonal e circular são diferentes, logo possuem propriedades diferentes como, por exemplo, distância ótima; b) os cantos do octógono da bobina experimental; c) erros de medida de paralaxe; d) a bobina do receptor de medida experimental tem volume considerável, e e) trepidação nos medidores na obtenção dos dados experimentais.

As bobinas octogonais são uma versão razoável das bobinas de Helmholtz, as quais foram construídas em laboratório, cujo volume de desvio de 1% gerado satisfaz o volume de campo

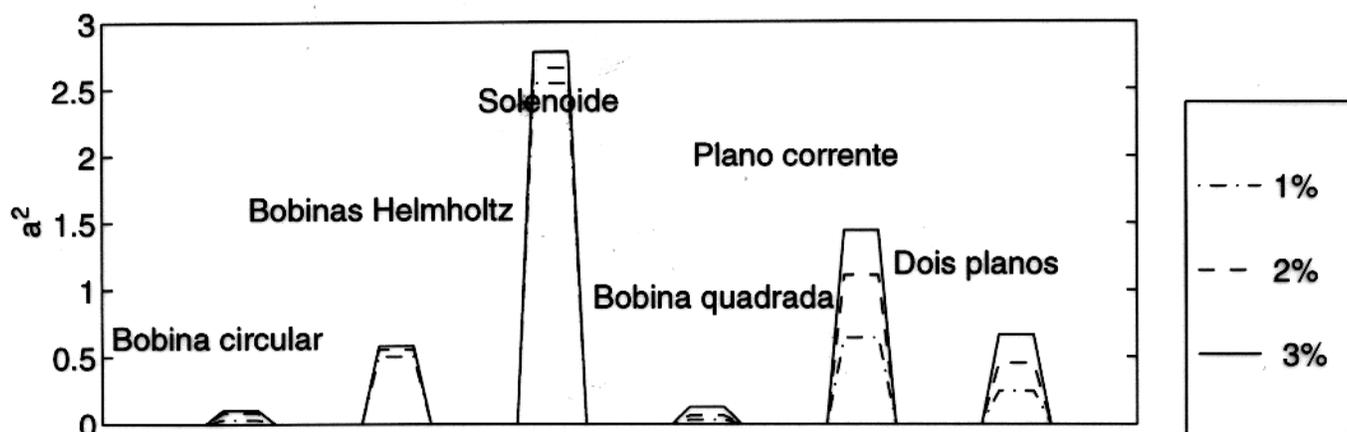


Figura 6.1 - Quadro comparativo entre as áreas transversais de prismas de desvios dos sistemas físicos deste trabalho. Observe que o solenoide possui maior área transversal de todos, seguido de um plano de corrente e, a seguir têm-se um pouco menor e aproximadamente iguais, as bobinas de Helmholtz e dois planos de corrente, e depois, finalmente, quase iguais, as bobinas circular e quadrada.

uniforme de $0,6m \times 0,4m \times 0,1m$ para $a = 0,885$ metro (Figura 6.5).

Devido ao volume de campo uniforme satisfatório, praticidade experimental de construção e facilidade de colocação de modelos alvo, na região de campo uniforme, e realizações de medidas elétricas experimentais, sugerem-se as construções de bobinas de Helmholtz, bobina quadrada e os dois planos de correntes para trabalhos de modelagem analógica em laboratório de Geofísica.

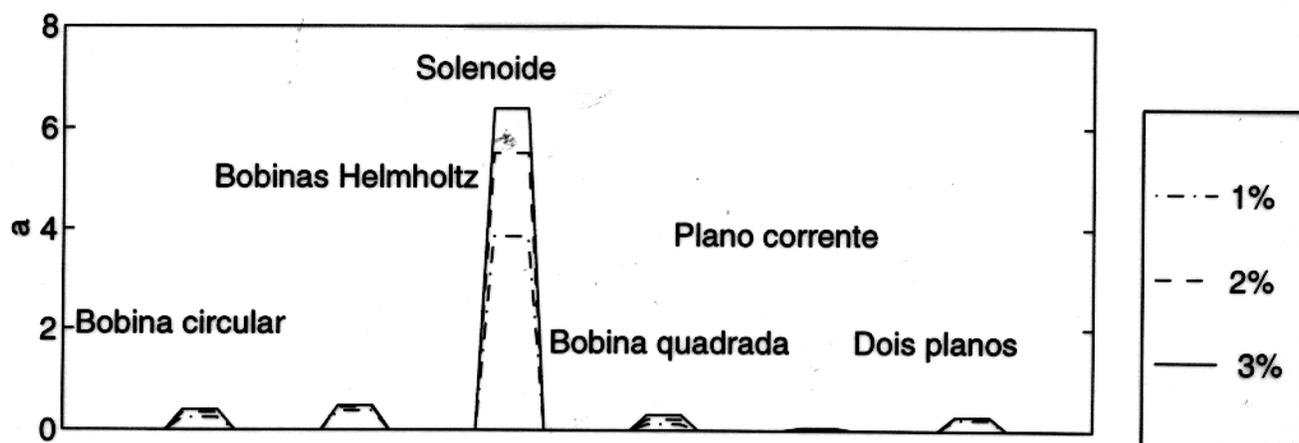


Figura 6.2 - Quadro comparativo entre os comprimentos longitudinais de prismas de desvios dos sistemas físicos deste trabalho. Nota-se que o solenóide é o maior de todos, seguido das bobinas de Helmholtz depois, aproximadamente, dois planos de corrente a bobina circular, bobina quadrada e, por último, bem pequeno, tem-se um plano de corrente.

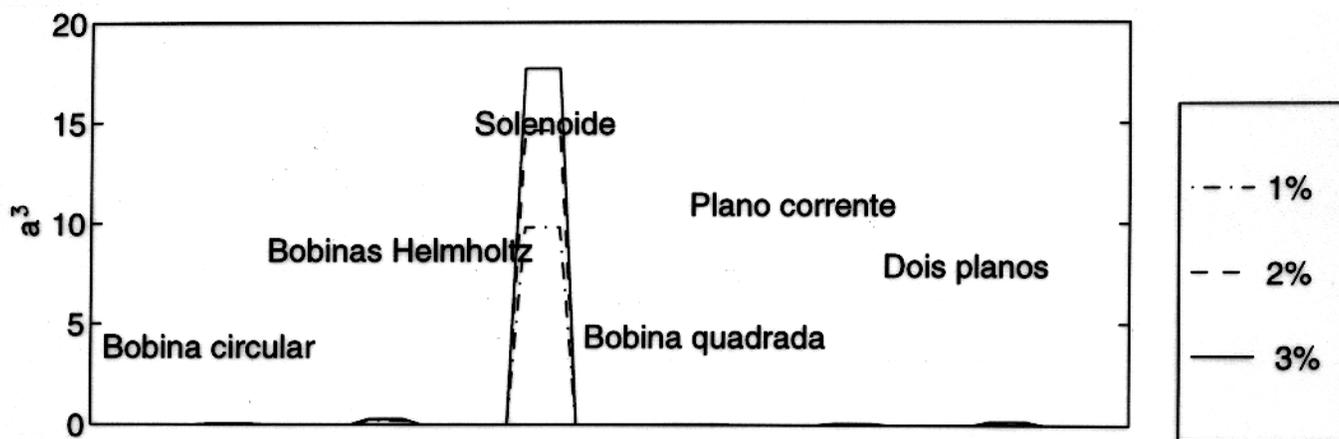


Figura 6.3 - Quadro comparativo entre os volumes de desvios dos sistemas físicos utilizados neste trabalho. Observa-se que o solenóide possui volume muito maior de todos os desvios, seguido das bobinas de Helmholtz, a seguir dois e um planos de corrente, e finalmente as bobinas circular e quadrada de corrente.

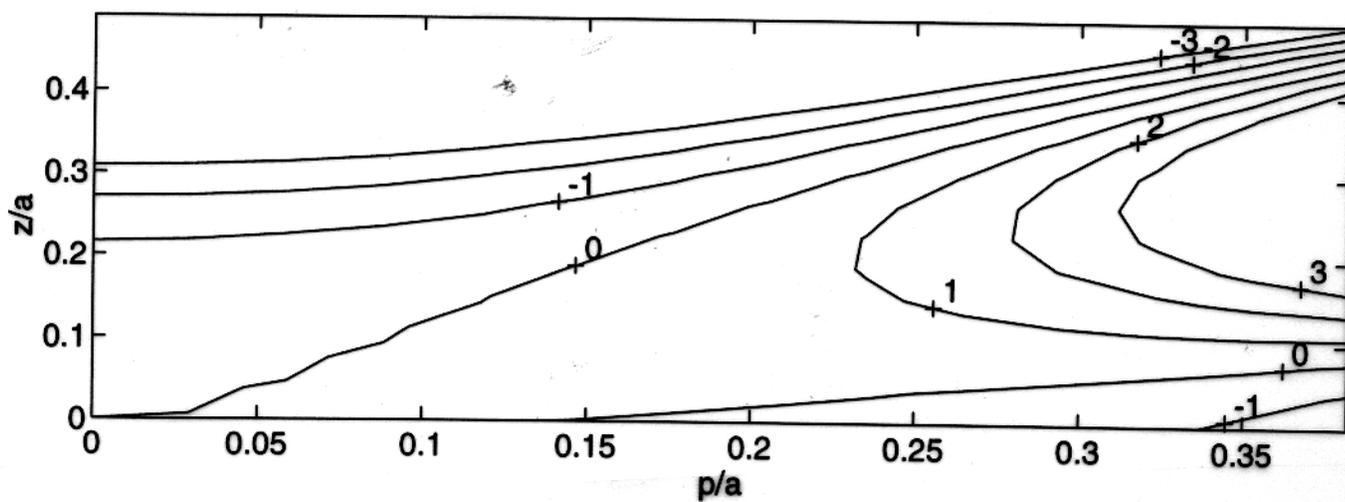


Figura 6.4 - Mapa de contorno medido com simulação computacional de desvio de H_z , raio da bobina igual a 0,885m.

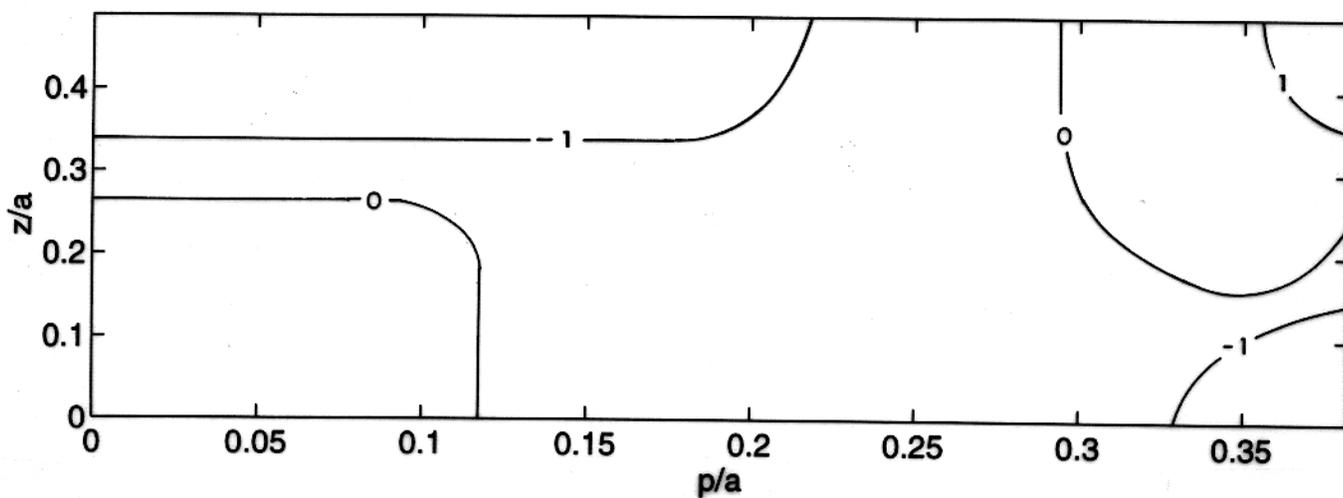


Figura 6.5 - Mapa de contorno de desvio de H_z medido experimentalmente, utilizando raio médio das bobinas igual a 0,885m.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BAKER, H.A. & MYERS, J.O. 1979. VLF-EM model studies and some simple quantitative applications to field results. **Geoexploration**, 17: 55-66.
- BASTOS, J.P.A. 1989. **Eletromagnetismo e cálculo de campos**. Florianópolis, Editora da UFSC. 452 p.
- BROWN, G. L. & GANGI, A.F. 1963. Electromagnetic modelling of lithospheric propagation: Institute for Electric and Electronic Engineers. **Transactions on Geoscience Electronics**, 1: 17-23.
- CHAN, E.; DOSSO, H.W.; LAW, L.K.; AULD, D.R.; NIENABER, W. 1983. Electromagnetic induction in the Queen Charlotte Islands region: analogue model and field station results. **Journal of Geomagnetism and Geoelectricity**, 35: 501-516.
- CONEY, D.P. 1977. Model studies of the VLF-EM Method of Geophysical Prospecting. **Geoexploration**, 15: 19-35.
- DOSSO, H.W. 1966a. A plane-wave analogue model for studying electromagnetic variations: **Canadian Journal Physics**, 44: 67-80.
- DOSSO, H.W. 1966b. Analogue model for electromagnetic variations near vertical faults and dykes. **Canadian Journal of Earth Sciences**, 3: 287-303.
- DOSSO, H.W.; NIENABER, W.; HUTTON, V.R.S. 1980. An analogue model study of electromagnetic induction in the British Isles region. **Physics of the Earth and Planetary Interiors**, 22: 68-85.
- DOSSO, H.W.; NIENABER, W.; PARKINSON, W.D. 1985. An analogue model study of electromagnetic induction in the Tasmania region. **Physics of the Earth and Planetary Interiors**, 39: 118-133.
- EDWARDS, R.N. 1980. A grounded vertical long wire source system for plane wave magnetotelluric analog modeling. **Geophysics**, 45 (10), 1523-1529.

- FRISCHKNECHT, F.C. 1988. Electromagnetic physical scale modeling. In: NABIGHIAN, Misac N., ed. **Electromagnetic methods in applied geophysics-theory**. Tulsa. Society of Exploration Geophysicists, V.1. p. 365-441. (Investigations in Geophysics, 3).
- GRANT, F.S. & WEST, G.F. 1965. **Interpretation theory in applied geophysics**. New York, Mc Graw-Hill Book. 584 p.
- HERMANCÉ, J.F. 1968. Model studies of the coast effect on geomagnetic variations. **Canadian Journal of Earth Sciences**, 5:515-522. An analogue model study of electromagnetic induction in the British Isles region. **Physics of the Earth and Planetary Interiors**, 22:68-85.
- HU, W.B.; DOSSO, H.W.; NIENABER, W. 1984. Analogue model magnetic field responses of an ocean channel, an island, and a seamount in the Hainan Island region. **Journal of Geophysics**, 55: 222-227.
- KELLER, V.G. & FRISCHKNECHT, F.C. 1966. **Electrical methods in geophysical prospecting**. Oxford, Pergamon Press. 517 p. (International Series in Electromagnetic Waves, 10).
- KRAUS, J.D. 1978. **Eletromagnetismo**. Rio de Janeiro, Guanabara. 780 p.
- NEVITT, C.E.; KANTARIS, E.; WALLER, M.D. 1985. Model studies of VLF-EM borehole prospecting system: Trans. Inst. Min. Metallurg. **Applied Earth Sciences**, 94: B-6-B-11.
- PARASNIS, D.S. 1972. **Principles of applied geophysics**. London, Chapman and Hall. 214 p.
- PODDAR, M. & BHATTACHARYA, P.K. 1966. On the response of conducting plates to an inducing dipolar field (model studies). **Geoexploration**, 4: 93-105.
- REITZ, J.R.; MILFORD, F.J.; CHRISTY, R.W. 1982. **Fundamentos da teoria eletromagnética**. Rio de Janeiro. Campus. 516 p.
- SKITEK, G.G. & MARSHALL, S.V. 1982. **Electromagnetic concepts and applications**. Englewood Cliffs. Prentice-Hall. 510 p.
- SPITTA, P. 1973. Scale model experiments using solid conductors. **Physics of the Earth and Planetary Interiors**, 7: 445-449.
- VERMA, O.P. 1981. Electromagnetic response of fold models in a uniform field. **Geophysical Prospecting**, 29: 451-461.

APÊNDICES

APÊNDICE A - Dedução da equação (2.4)

Resolvendo-se a seguinte derivada da equação (2.4):

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \left[\frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + a^2 + z^2 - 2a\rho \cos \phi_o}} \right].$$

Usando a identidade matemática:

$$\left(\frac{U}{V} \right)' = \frac{U'V - V'U}{V^2}, \quad (A.1)$$

em que U e V são funções, e U' e V' são as primeiras derivadas parciais primeiras de U e de V em relação a ρ , respectivamente. Fazendo-se portanto

$$\begin{aligned} U &= \rho, \\ U' &= 1, \\ V &= \sqrt{\rho^2 + a^2 + z^2 - 2a\rho \cos \phi_o}, \\ V' &= \frac{\rho - a \cos \phi_o}{\sqrt{\rho^2 + a^2 + z^2 - 2a\rho \cos \phi_o}}, \end{aligned} \quad (A.2)$$

substituindo a equação (A.2) na equação (A.1).

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + a^2 + z^2 - 2a\rho \cos \phi_o}} \right] &= \frac{1\sqrt{\rho^2 + a^2 + z^2 - 2a\rho \cos \phi_o} - \frac{(\rho - a \cos \phi_o)\rho}{\sqrt{\rho^2 + a^2 + z^2 - 2a\rho \cos \phi_o}}}{\rho^2 + a^2 + z^2 - 2a\rho \cos \phi_o}, \\ &= \frac{a^2 + z^2 - a\rho \cos \phi_o}{(\rho^2 + a^2 + z^2 - 2a\rho \cos \phi_o)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned} \quad (A.3)$$

Substituindo a equação (A.3) na equação (2.4), e colocando ρ para dentro da integral, logo

$$H_z(z, \rho) = \frac{\mu_o I a N_e}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \phi_o (a^2 + z^2 - a\rho \cos \phi_o) d\phi_o}{\rho (\rho^2 + a^2 + z^2 - 2a\rho \cos \phi_o)^{\frac{3}{2}}}.$$

Como o integrando é simétrico em relação a $\phi = \pi$ no intervalo de 0 a 2π ; portanto

$$H_z(z, \rho) = \frac{\mu_o I a N_e}{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{\cos \phi_o (a^2 + z^2 - a\rho \cos \phi_o) d\phi_o}{\rho (\rho^2 + a^2 + z^2 - 2a\rho \cos \phi_o)^{\frac{3}{2}}}, \quad \text{c.q.d.}$$

a qual é a equação (2.4) que tem singularidade em $\rho = 0$.

APÊNDICE B - Dedução da equação (2.5)

Fazendo-se a derivada parcial do integrando da equação (2.5)

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{\sqrt{\rho^2 + a^2 + z^2 - 2a\rho \cos \phi_0}} \right] &= \frac{2z(-\frac{1}{2})}{(\rho^2 + a^2 + z^2 - 2a\rho \cos \phi_0)^{\frac{3}{2}}}, \\ &= \frac{z}{(\rho^2 + a^2 + z^2 - 2a\rho \cos \phi_0)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned} \quad (B.1)$$

Substituindo a equação (B.1) na equação (2.5), se obtém:

$$H_\rho(z, \rho) = \frac{aIN_e}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{z \cos \phi_0 d\phi_0}{(\rho^2 + a^2 + z^2 - 2a\rho \cos \phi_0)^{\frac{3}{2}}}, \quad c.q.d.$$

mas o integrando desta equação é simétrico em relação a $\phi = \pi$ no intervalo de 0 a 2π , portanto:

$$H_\rho(z, \rho) = \frac{aIN_e}{2\pi} \int_0^\pi \frac{z \cos \phi_0 d\phi_0}{(\rho^2 + a^2 + z^2 - 2a\rho \cos \phi_0)^{\frac{3}{2}}}, \quad c.q.d.$$

a qual é a equação (2.5).