



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
CENTRO DE GEOCIÊNCIAS
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM GEOFÍSICA

TESE DE DOUTORADO

**INFORMAÇÃO A PRIORI NA INVERSÃO
DE DADOS MAGNETOTELÚRICOS**

JOSÉ GOUVÊA LUIZ

BELÉM
1999

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
CENTRO DE GEOCIÊNCIAS
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM
GEOFÍSICA

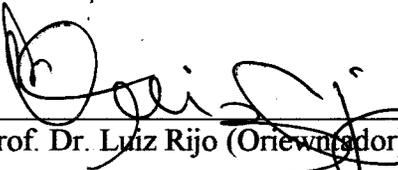
INFORMAÇÃO A PRIORI NA INVERSÃO DE DADOS MAGNETOTELÚRICOS

TESE APRESENTADA POR
JOSÉ GOUVÊA LUIZ

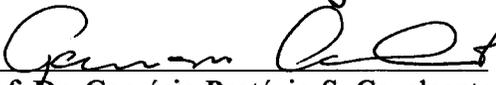
COMO REQUISITO PARCIAL À OBTENÇÃO DE GRAU DE
DOUTOR EM CIÊNCIAS NA ÁREA DE GEOFÍSICA

Data de Aprovação: 29 / 12 / 1999

COMITÊ DE TESE:



Prof. Dr. Luiz Rijo (Orientador)



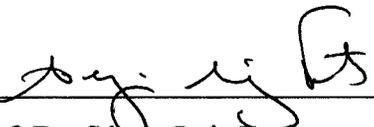
Prof. Dr. Gervásio Protázio S. Cavalcante



Prof. Dr. João Batista Corrêa da Silva



Prof. Dr. Om Prakash Verma



Prof. Dr. Sérgio Luiz Fontes

BELÉM

1999

Aos meus pais, Albano e Celeste,
sempre presentes apesar de já terem
partido.

À Hortense, à Michele, à Thásia e à
Erika pelo amor e carinho que há
muito me vêm dedicando.

AGRADECIMENTOS

Esta Tese é resultado de exaustivo trabalho e foi desenvolvida a partir de pesquisa científica, requerendo condicionamentos, que envolveram disciplina e organização, para que fosse concluída.

Para a sua realização tive a sorte de contar com o auxílio de dois pesquisadores de renome internacional: o Dr. Luiz Rijo, meu orientador, e o Dr. João Batista Corrêa da Silva, que considero meu co-orientador. Esses dois pesquisadores, além de me orientarem na pesquisa, também contribuíram no desenvolvimento dos condicionamentos de disciplina e organização e na forma geral da Tese, o que inclui a sua revisão gramatical. Aos Drs. Luiz Rijo e João Batista Corrêa da Silva dirijo meus primeiros agradecimentos.

Três outros experientes pesquisadores também tiveram a paciência de ler esta Tese e ouvir a minha defesa. Esses pesquisadores, o Dr. Om Prakash Verma, o Dr. Sérgio Luiz Fontes e o Dr. Gervásio Protásio dos Santos Cavalcante, apresentaram uma série de comentários e sugestões que contribuíram, sem dúvida, para melhorar o nível da Tese. A eles também dirijo meus agradecimentos, em particular ao Dr. Om Prakash Verma, com quem mais interagi dos três.

Agradeço ainda aos membros do Departamento de Geofísica da Universidade Federal do Pará por me concederem permissão para realizar o doutorado e, particularmente, aos professores Jacira Felipe Beltrão, José Geraldo das Virgens Alves e Lúcia Maria da Costa e Silva, que ministraram as aulas de minha responsabilidade enquanto eu trabalhava para a elaboração desta Tese.

Agradeço, também, à Sra. Rosemarie de Almeida Costa, chefe da Divisão de Documentação do Centro de Geociências da UFPA, que formatou a Tese dentro das normas de editoração de Centro de Geociências e preparou a sua ficha catalográfica.

Finalmente, agradeço aos meus pais, que se foram durante a elaboração deste trabalho, e à minha família (esposa e filhas) pelos momentos extra-Tese.

SUMÁRIO

DEDICATÓRIA	i
AGRADECIMENTOS	ii
RESUMO	1
ABSTRACT	2
1 – INTRODUÇÃO	3
2 – O MÉTODO MAGNETOTELÚRICO	7
2.1 – INTRODUÇÃO	7
2.2 – TEORIA DO MÉTODO MAGNETOTELÚRICO	9
2.2.1 – A equação da onda eletromagnética	9
2.2.2 – Propagação de uma onda eletromagnética em meio homogêneo	12
2.2.3 – Incidência de uma onda sobre a superfície de um meio homogêneo e isotrópico	14
2.2.3.1 – Incidência segundo o modo TM	15
2.2.3.2 – Incidência segundo o modo TE	20
2.2.4 – Impedância e admitância de superfície	22
2.2.5 – Resistividade a partir da impedância de superfície	23
2.2.6 – Meio acamado lateralmente homogêneo	24
2.2.7 – Meio acamado com variação lateral	27
3 – INVERSÃO EM GEOFÍSICA	29
3.1 – PROBLEMA INVERSO LINEAR	30
3.2 – PROBLEMA INVERSO NÃO LINEAR	33
3.3 – <i>JUMPING VERSUS CREEPING</i>	35
3.4 – INVERSÃO E REGULARIZAÇÃO	39
3.4.1 – Funcionais estabilizadores	41
4 – INVERSÃO DE DADOS MT COM INFORMAÇÃO A PRIORI	46
4.1 – DETERMINAÇÃO DA LARGURA E ESPESSURA DE UM CORPO CONDUTOR EM MEIO HOMOGÊNEO	51
4.2 – APLICAÇÃO DE ESTABILIZADORES REPRESENTADOS POR DERIVADAS	61
4.2.1 – Corpo prismático condutor envolvido por meio homogêneo	62
4.2.2 – Dois corpos prismáticos envolvidos por meio homogêneo	70

5 – APLICAÇÃO A DADOS REAIS	80
6 – CONCLUSÕES	89
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	92

RESUMO

Esta Tese apresenta dois estudos aplicados à inversão de dados magnetotelúricos. No primeiro deles, os parâmetros obtidos na inversão são as dimensões da malha de parametrização da subsuperfície, sendo conhecida, a priori, a resistividade de uma heterogeneidade e a do seu meio envolvente; no outro estudo, é abordado o uso de operadores de derivadas de ordem maior do que um com a finalidade de estabilizar o problema inverso.

No primeiro estudo, os resultados podem ser considerados satisfatórios somente se a informação sobre as resistividades tem erro menor do que 20%. No segundo estudo, os resultados demonstram que o uso de operadores de ordem maior do que um podem ser mais eficazes do que o uso convencional do operador de primeira derivada, pois além de estabilizarem o problema inverso, esses operadores contribuem para melhorar a resolução das heterogeneidades de resistividade da subsuperfície.

Ambos os estudos são inéditos, pois a prática de inversão de dados magnetotelúricos consiste de obter como resultado do problema inverso a resistividade dos prismas de uma malha de parametrização de dimensões fixas, usando como estabilizador o operador de primeira derivada.

Os modelos usados nos estudos são bidimensionais e representam uma subsuperfície com uma e duas heterogeneidades de forma prismática envolvidas por ambiente homogêneo. O desempenho das técnicas foi testado com dados sintéticos com e sem ruído gaussiano, bem como dados reais do perfil COPROD2.

Durante o trabalho, são, ainda, descritas as técnicas de inversão denominadas *creeping* e *jumping* e feita uma comparação e avaliação sobre elas. Mostra-se aqui que, ao contrário do que afirmam muitos pesquisadores, a inclusão de informação a priori sobre os parâmetros pode ser feita na técnica do *creeping* com a mesma facilidade com que é feita na técnica do *jumping*.

ABSTRACT

This thesis includes two studies applied to the inversion of magnetotelluric data. In the first the dimensions of the subsurface parametrizing grid are determined knowing the resistivities of the heterogeneity and of its surrounding medium; and the other deals with the use of derivative operators of order greater than one to stabilize the inversion problem.

In the first study the satisfactory results are obtained only if the resistivity errors are less than 20%; while in the second the results show that the operators of order greater than one can be more effective than conventional first derivative operators because they yield better resolution of the subsurface resistivity heterogeneity besides acting as stabilizers.

These studies are new in the inversion of magnetotelluric data since, so far, resistivity of the grid blocks have been obtained with a fix grid, using the first derivative operator as stabilizer.

In these studies, bi-dimensional models representing a subsurface with one and two prismatic heterogeneity are used. The effectiveness of the inversion techniques have been evaluated by applying them on both noisy and noise-free synthetic data, and on COPROD2 field profile.

Also, a comparative study to analyze the effectiveness of the creeping and the jumping inversion techniques is included in this thesis. This study shows that *a priori* information on the parameters can be introduced in the creeping as easily as in the jumping contrary to what is mentioned in earlier publications.

1 – INTRODUÇÃO

Os métodos eletromagnéticos de prospecção geofísica são usados para se estudar a distribuição de condutividade (ou resistividade) elétrica da subsuperfície, a partir da observação de campos eletromagnéticos gerados artificial ou naturalmente.

O problema eletromagnético inverso consiste na determinação da distribuição da condutividade na subsuperfície a partir de medidas de um ou mais parâmetros relacionados aos campos eletromagnéticos gerados.

A inversão de dados geofísicos eletromagnéticos multidimensionais não é, entretanto, um problema trivial devido principalmente à dificuldade de se calcular a resposta do modelo (uma vez que ele é computado numericamente por não apresentar solução exata), para o que necessitam-se de computadores com elevada quantidade de memória e rapidez de processamento.

O problema geofísico eletromagnético inverso não depende, entretanto, exclusivamente do cálculo da resposta do modelo e do desempenho dos computadores. Existem ainda a não unicidade e a instabilidade, principais causas da ambigüidade geofísica, que estão presentes nos problemas inversos de todos os métodos geofísicos. A não unicidade resulta da tentativa de se extrair uma quantidade maior de informação do que a contida nas medidas geofísicas, enquanto a instabilidade advém da contaminação dessas medidas por elementos estranhos ao modelo (ruído), bem como da mesma causa da não unicidade.

A redução dessas causas de ambigüidade tem sido tentada basicamente através de dois procedimentos: (a) Redução da demanda de informação, de modo a retirar-se das medidas geofísicas o que elas podem oferecer (Backus & Gilbert 1967, 1968); (b) Introdução de informação a priori sobre a distribuição da propriedade física (Tikhonov 1963 a b).

A redução da demanda de informação pode implicar subparametrização da subsuperfície, com a supressão de estruturas geológicas importantes e conseqüente perda de resolução no modelo geológico. Para melhorar a resolução, os algoritmos correntes de inversão introduzem uma sobreparametrização, através da divisão do modelo bidimensional da subsuperfície em um grande número de blocos (prismas). Este procedimento gera, entretanto, enorme instabilidade no processo de inversão, que somente pode ser controlado com a introdução de informação a priori.

O tipo de informação a priori mais empregado na estabilização dos procedimentos de inversão parece ser aquele que impõe suavidade aos parâmetros (significa, em termos práticos,

que na representação da subsuperfície por prismas, aqueles situados em posições adjacentes terão, ao final da inversão, valores muito próximos, como estimativa da propriedade física associada). Esse tipo de informação é caracterizado pela igualdade entre todos os parâmetros envolvidos na inversão e pode ser introduzido aplicando-se um operador de primeira derivada ao vetor de parâmetros (Constable et al. 1987).

A informação a priori que impõe suavidade permite estabilizar o processo de inversão, porém pode produzir uma imagem pouco focalizada da subsuperfície, em termos de distribuição da propriedade física, não conseguindo resolver contrastes elevados (que podem ocorrer, por exemplo, quando de uma intrusão geológica). A suavidade dos parâmetros pode também levar a uma não resolução da distribuição da propriedade física na subsuperfície nas situações em que há mais de uma heterogeneidade presente.

DeGroot-Hedlin & Constable (1990), por exemplo, ao inverterem dados magnetotelúricos, desenvolveram um algoritmo com modelo sobreparametrizado, em que a informação a priori introduzida para reduzir a instabilidade é a suavidade da variação espacial da resistividade elétrica dos blocos, imposta com peso muito forte. Os autores encontram então a distribuição mais suave (estrutura mínima) da propriedade física compatível com os dados, ganhando em troca a estabilidade; o ideal, entretanto, seria obter uma distribuição menos suave (ainda estável) compatível com os dados, pois com uma imposição muito forte de suavidade é possível que esteja havendo rejeição de informação contida nas próprias medidas. Este procedimento, levando a uma distribuição em que a subsuperfície é representada por uma estrutura mínima, poderá proporcionar um resultado irreal do ponto de vista geológico e físico, a menos que a suavidade proposta seja verdadeira. Por isso, toda a informação a priori introduzida para estabilizar ou reduzir a ambigüidade em um problema de inversão deve ser muito confiável, sob risco de se estar apenas resolvendo um problema computacional.

O algoritmo desenvolvido por DeGroot-Hedlin & Constable (1990), denominado de algoritmo de Occam, vem sendo usado frequentemente por diversos pesquisadores na inversão de dados magnetotelúricos, seja a subsuperfície representada por modelos unidimensionais ou por modelos bidimensionais. Uma característica especial desse algoritmo é o emprego da técnica denominada de *jumping*, que será abordada no Capítulo 3 desta tese.

Desse modo, a prática corrente na inversão de dados magnetotelúricos obtidos sobre uma subsuperfície bidimensional é considerar um modelo em que a subsuperfície é dividida em

prismas regulares (cujas dimensões são mantidas fixas) e inverter os dados para obtenção das resistividades desses prismas. O processo de inversão é normalmente estabilizado aplicando-se um operador de primeira derivada aos parâmetros (resistividades) a serem obtidos, o que proporciona suavidade à distribuição resultante da inversão.

Neste trabalho de tese, como contribuição inédita principal, serão apresentados dois estudos: o primeiro deles é a inversão de dados magnetotelúricos em que os parâmetros a serem obtidos não são as resistividades associadas aos prismas de parametrização da subsuperfície, mas as larguras e espessuras desses prismas (as resistividades devem ser conhecidas a priori). O outro estudo, ainda aplicado à inversão de dados magnetotelúricos, será uma análise sobre o desempenho de operadores de derivada de ordem maior do que um na estabilização do problema inverso. O emprego de tais operadores é justificado por eles poderem incorporar informação a respeito de distribuições de resistividade na subsuperfície, como por exemplo simetria, pontos de inflexão ou máximos e mínimos, informações essas que podem geralmente ser observadas nos dados magnetotelúricos. Nesse estudo os parâmetros a serem obtidos serão, como no modo convencional, as resistividades dos prismas.

Uma breve discussão sobre as duas técnicas mais empregadas na inversão não linear será apresentada nesta tese: a técnica em que a cada iteração um sistema de equações lineares é resolvido para pequenas perturbações nos parâmetros do modelo (incrementos) para posterior adição aos parâmetros da iteração corrente e a técnica em que a cada iteração um sistema de equações lineares é resolvido diretamente para os parâmetros do modelo. A segunda técnica, denominada *jumping*, foi desenvolvida por R. L. Parker (referenciado como manuscrito não publicado por Shaw & Orcutt (1985)) para implementação de informação a priori sobre os parâmetros, com a finalidade de estabilizar o processo de inversão. Segundo Parker (1994), a técnica que utiliza pequenos incrementos, por ele denominada *creeping*, além de apresentar convergência muito lenta por estar associada ao Método da Máxima Declividade, não permite incorporação de informação a priori sobre os parâmetros. Dependendo da função a ser minimizada, a primeira asserção pode estar correta, mas a segunda é sempre falsa porque a introdução de informação a priori pode ser sempre efetuada incorporando-se funções estabilizadoras à função a ser minimizada. Além disso, a terminologia *creeping* vem sendo aplicada indevidamente a todos os métodos que se utilizam do cálculo dos incrementos, como por exemplo em Shaw & Orcutt (1985) e em Scales et al. (1990), independente de estarem

associados ao Método da Máxima Declividade ou não, como no caso do Método de Newton. Por isso e pela aceitação da segunda asserção de Parker, acima mencionada, como verdadeira, a técnica que calcula os incrementos usando o Método de Newton, tem sido declarada incapaz de introduzir informação a priori sobre os parâmetros no funcional a ser minimizado ou que é mais simples fazê-lo com o emprego da técnica do jumping (Scales et al. 1990). Demonstra-se, no entanto, nesta tese, que a informação a priori pode ser introduzida com a mesma facilidade da técnica do jumping nos algoritmos que utilizam o Método de Newton.

Durante o estudo será apresentado e discutido o grau de confiabilidade de alguns tipos de informação a priori que podem ser retirados dos próprios dados do Método Magnetotelúrico, como, por exemplo, as assíntotas associadas aos dados de alta frequência, que podem indicar a resistividade das camadas superficiais, ou, ainda, o resultado da inversão de dados de modelos bidimensionais usando modelos unidimensionais, que pode fornecer indicações da subsuperfície acamada longe das estruturas bidimensionais.

O estudo de inversão será desenvolvido a partir de dados sintéticos, com e sem ruído, de sondagens magnetotelúricas calculadas para uma subsuperfície bidimensional. Os modelos a serem abordados incluirão um corpo anômalo de baixa resistividade encaixado em meio homogêneo e dois corpos próximos: um com resistividade elevada e o outro com resistividade baixa em relação à resistividade de fundo. Inicialmente o estudo será desenvolvido utilizando-se somente dados sintéticos, porém, na fase final do estudo, haverá uma aplicação a dados reais.

No modelo usado para inversão, a subsuperfície será parametrizada através de uma grade de prismas retangulares de dimensões variáveis, sendo os menores prismas colocadas às proximidades dos limites das heterogeneidades. As dimensões dos prismas serão variáveis para que se tenha compatibilidade com a malha de elementos finitos, usada no cálculo da resposta do modelo, que requer esse procedimento a fim de produzir resultados precisos. A cada prisma será atribuído um valor constante de resistividade, que poderá ser igual ou diferente à dos prismas adjacentes. A resposta do modelo durante o processo de inversão será calculada por meio de algoritmo desenvolvido pelo Prof. Luiz Rijo, que emprega a técnica dos elementos finitos.

Este trabalho inclui também uma sinopse do Método Magnetotelúrico, apresentada com o intuito de definir os parâmetros e dados magnetotelúricos a serem estudados.

2 – O MÉTODO MAGNETOTELÚRICO

2.1 – INTRODUÇÃO

O Método Magnetotelúrico (MT) foi proposto como método de investigação da subsuperfície por Cagniard (1953) ao apresentar as bases da interpretação de dados provenientes da comparação de campos magnéticos e elétricos naturais, para a sua aplicação prática na exploração. Em trabalho independente, Tikhonov (1950) sugeriu a possibilidade da determinação das características elétricas das camadas profundas da crosta terrestre, a partir da comparação entre campos elétricos e magnéticos naturais. Por isso, Cagniard e Tikhonov são hoje reconhecidos pela comunidade científica como os idealizadores do Método MT.

Na aplicação do método, medidas das componentes de campos elétricos e magnéticos naturais são usadas com a finalidade de inferir-se a distribuição de resistividade na subsuperfície e sua correlação aos corpos e estruturas geológicas.

Os campos elétricos e magnéticos naturais originam-se de vários fenômenos. Os campos associados com frequências superiores a 1 Hz (denominados esféricos), por exemplo, são devidos, em geral, à atividades meteorológicas, das quais, as tempestades elétricas de escala mundial são as mais importantes. Os centros principais dessas tempestades (onde ocorrem mais do que 100 tempestades por ano) estão na América do Sul (Brasil), África Central e região da Malásia, em latitudes próximas à do equador magnético. A propagação desses campos é feita na forma de guia de onda, com a sua energia refletindo entre a superfície da Terra e a ionosfera. Por seu turno, os campos de frequências inferiores a 1 Hz são relacionados principalmente a micropulsões no campo magnético terrestre, causadas por interações complexas de partículas ionizadas emitidas pelo Sol (plasma ou vento solar) com o campo magnético da Terra e a ionosfera (Kaufman & Keller 1981).

A Figura 2.1 mostra o espectro de amplitude para os campos magnéticos naturais. Na figura observa-se que a amplitude dos campos aumenta com o decréscimo da frequência, o que implica aumento de sinal nas medidas dos campos naturais à medida que a frequência diminui e aumento de ruído nas medidas dos campos artificiais empregados nos métodos eletromagnéticos de fonte controlada, comumente usados na prospecção mineral.

No Método Magnetotelúrico utilizam-se os campos associados a frequências menores do que 1 Hz, mais especificamente no intervalo entre 1 e 10^{-3} Hz. Essas frequências baixas permitem maior penetração na subsuperfície, daí o uso do método na exploração da crosta profunda da Terra.

A partir do Método MT foi desenvolvido um método similar em que são utilizados campos naturais com frequências superiores a 1 Hz (normalmente na faixa de 10 a 10^4 Hz), denominado de Método Audiomagnetotelúrico (AMT). Por empregar frequências maiores, as medidas com o Método AMT podem ser feitas com maior rapidez e a sua profundidade de investigação é menor. O Método AMT, por sua vez, deu origem ao Método Audiomagnetotelúrico de Fonte Controlada (Controlled Source AMT ou CSAMT), que utiliza-se de fontes artificiais colocadas em locais distantes das áreas de medidas. Como as frequências usadas nos métodos AMT e CSAMT são mais altas do que as usadas no método MT, os dois primeiros são empregados na exploração mais rasa da crosta.

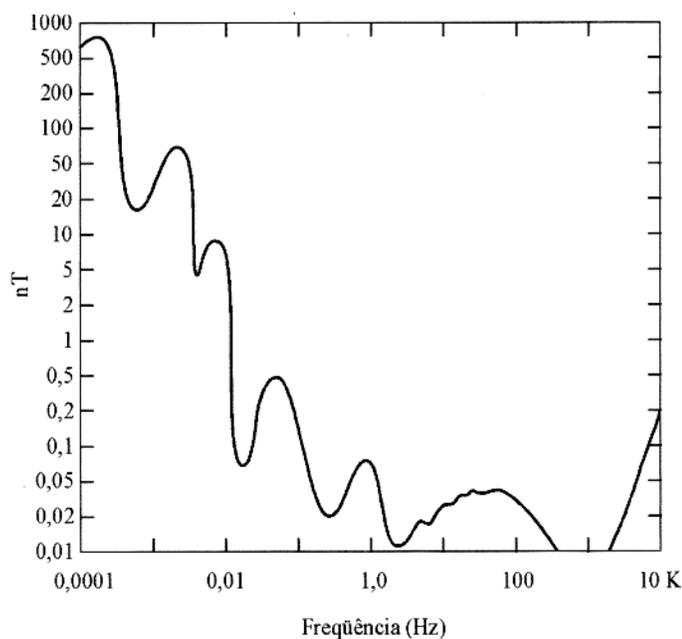


Figura 2.1 - Espectro de amplitude dos campos magnéticos naturais (adaptado de Campbell 1966).

A premissa básica na teoria do Método MT é de que a sua fonte é uma onda eletromagnética plana e uniforme, isto é, os campos elétrico e magnético são constantes nos planos perpendiculares à direção de propagação. Essa premissa, contestada no início da aplicação do método, foi demonstrada ser aceitável do ponto de vista prático para frequências superiores a 10^{-3} Hz (Madden & Nelson 1964).

2.2 – TEORIA DO MÉTODO MAGNETOTELÚRICO

Para facilitar a introdução dos parâmetros usados nas observações de campo no Método MT será, a seguir, apresentada uma síntese da sua teoria (para maiores detalhes veja Rijo 1990) iniciando-se com uma revisão de conceitos básicos do eletromagnetismo e prosseguindo com um desenvolvimento gradativo em que serão abordados desde modelos extremamente simples, como a propagação de uma onda plana em um meio homogêneo, até modelos mais complexos, como o da interação de uma onda plana com um meio representativo de modelos geológicos bidimensionais. Essa gradação na complexidade dos modelos permitirá que se introduza com mais clareza a teoria do método e os parâmetros que lhe são característicos.

2.2.1 – A equação da onda eletromagnética

As relações entre os campos elétrico e magnético, observadas em trabalhos experimentais pelos cientistas C.A. Coulomb, A.M. Ampère e M. Faraday, são sumariadas pelas equações de Maxwell

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (2.1)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad (2.2)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad (2.3)$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = q_v, \quad (2.4)$$

em que \vec{E} (V/m) e \vec{H} (A/m) são respectivamente os campos elétrico e magnético, \vec{D} (C/m²) e \vec{B} (W/m²) são as densidades de fluxo elétrico e magnético respectivamente, \vec{J} (A/m²) é a densidade de corrente elétrica de condução e q_v (C/m³) a densidade volumétrica de carga elétrica.

Em um meio onde as propriedades elétricas e magnéticas não dependem da intensidade dos campos e da sua variação temporal (meios lineares), há relações de linearidade entre \vec{D} e \vec{E} , entre \vec{B} e \vec{H} e entre \vec{J} e \vec{E} expressas por

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}, \quad (2.5)$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H}, \quad (2.6)$$

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}, \quad (2.7)$$

sendo ε , μ e σ as propriedades eletromagnéticas do meio, respectivamente denominadas de permissividade elétrica, permeabilidade magnética e condutividade elétrica. A condição de linearidade do meio é aproximadamente satisfeita quando os campos não são muito intensos e as variações temporais são muito pequenas, que é o que normalmente ocorre com os campos empregados na Geofísica.

Considerando-se uma dependência harmônica do tipo $e^{i\omega t}$ ($i = (-1)^{1/2}$, $\omega =$ frequência angular, $t =$ tempo) para os campos e as relações de linearidade para as propriedades do meio, pode-se rescrever as expressões (2.1) a (2.4) como

$$\nabla \times \vec{E} = -\hat{z} \vec{H}, \quad (2.8)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \hat{y} \vec{E}, \quad (2.9)$$

$$\nabla \cdot \vec{H} = 0, \quad (2.10)$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{q_v}{\varepsilon}, \quad (2.11)$$

sendo $\hat{z} = i\omega\mu$ denominado de impeditividade e $\hat{y} = \sigma + i\omega\varepsilon$ denominado de admitividade (Harrington 1961).

As equações de Maxwell (2.1) a (2.4) e (2.8) a (2.11) aplicam-se aos pontos em volta dos quais as propriedades eletromagnéticas variam suavemente, resultando em variações contínuas dos campos. Na superfície que separa descontinuidades abruptas nas propriedades dos meios, entretanto, é esperado algum tipo de descontinuidade também nos campos. A aplicação das equações de Maxwell na vizinhança dessa superfície leva às seguintes expressões, válidas na interface (Stratton 1941):

$$\vec{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0, \quad (2.12)$$

$$\vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = 0, \quad (2.13)$$

$$\vec{n} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0, \quad (2.14)$$

$$\vec{n} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = q_s, \quad (2.15)$$

em que os subscritos referem-se aos meios 1 e 2 separados pela superfície, \vec{n} é a normal à superfície e q_s a densidade superficial de carga elétrica.

As equações (2.12) e (2.13) demonstram que as componentes tangenciais dos campos \vec{E} e \vec{H} são contínuas através da interface de separação dos meios. A equação (2.14) evidencia que a componente normal de \vec{B} é contínua através da interface de dois meios de condutividades finitas, enquanto a equação (2.15) mostra a descontinuidade da componente normal de \vec{D} , com acúmulo de carga elétrica na superfície de separação dos meios.

As equações de Maxwell são bastante gerais de modo a poderem ser usadas nos mais diversos problemas do eletromagnetismo. No caso da Geofísica aplicada à prospecção dos materiais da subsuperfície da Terra, várias simplificações podem ser efetivadas nessas equações. Por exemplo, como a condutividade elétrica dos materiais rochosos da subsuperfície é normalmente superior a 10^{-4} S/m, a carga elétrica dissipa em um tempo menor do que 10^{-6} segundos (Ward & Hohmann 1987, p. 133), de modo que, em termos práticos, a equação (2.11) pode ser substituída por

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0. \quad (2.16)$$

Também os valores de permissividade elétrica e permeabilidade elétrica das rochas podem, na maioria dos casos, ser aproximados pelos valores da permissividade e permeabilidade do ar, respectivamente $\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12}$ F/m e $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ H/m.

O uso de (2.16) e das equações de Maxwell (2.8) a (2.10) permitem estabelecer as equações da onda para \vec{E} e \vec{H}

$$\nabla^2 \vec{E} + \kappa^2 \vec{E} = 0, \quad (2.17)$$

$$\nabla^2 \vec{H} + \kappa^2 \vec{H} = 0, \quad (2.18)$$

em que $\kappa = \sqrt{-\hat{z}\hat{y}}$ é o número de onda para o meio no qual a onda se propaga. Substituindo-se os valores de \hat{z} e \hat{y} nessa expressão, obtém-se

$$\kappa = [-i\omega\mu(\sigma + i\omega\epsilon)]^{1/2}. \quad (2.19)$$

No ar, σ pode ser tomado igual a zero, de modo que κ pode ser aproximado por

$$\kappa_{ar} \approx \omega (\mu_0 \epsilon_0)^{1/2}. \quad (2.20)$$

No caso da Terra, a permissividade elétrica é aproximadamente igual à do ar e a condutividade elétrica normalmente maior do que 10^4 S/m, de modo que a condutividade elétrica é muito maior do que o produto da frequência angular pela permissividade elétrica ($\sigma \gg \omega \epsilon_0$), para as frequências empregadas no Método Magnetotelúrico. Nesse caso, a expressão (2.19), do número de onda, pode ser simplificada para

$$\kappa_{Terra} \approx (-i\omega\mu_0\sigma)^{1/2} = \left(\frac{\omega\mu_0\sigma}{2}\right)^{1/2} (1-i). \quad (2.21)$$

O fator elevado à potência 1/2, localizado à direita do sinal de igualdade em (2.21), é o inverso da profundidade pelicular (δ), comumente denominada *skin depth* na literatura, de modo que a expressão pode ser rescrita como

$$\kappa_{Terra} \approx \frac{1-i}{\delta}. \quad (2.22)$$

2.2.2 – Propagação de uma onda eletromagnética plana em meio homogêneo

Uma onda eletromagnética plana com campo elétrico \vec{E}_x vibrando na direção X, campo magnético \vec{H}_y , vibrando na direção Y e propagando-se em um meio homogêneo segundo a direção Z (Figura 2.2) obedece a equação da onda (2.17) para o campo elétrico. Como somente a componente x do campo elétrico está presente, a equação pode ser escrita na forma escalar

$$\nabla^2 E_x + \kappa^2 E_x = 0. \quad (2.23)$$

Considerando-se que E_x varia somente na direção de propagação Z, (2.23) pode ser simplificada para a equação de Helmholtz de uma dimensão

$$\frac{d^2 E_x}{dz^2} + \kappa^2 E_x = 0, \quad (2.24)$$

cuja solução geral é

$$E_x = E_0^+ e^{-i\kappa z} + E_0^- e^{i\kappa z}. \quad (2.25)$$

E_0^+ e E_0^- são constantes que permitem estabelecer as soluções particulares que satisfazem as condições de contorno relacionadas à propagação dos campos. Para uma onda propagando-se no sentido positivo de z, por exemplo, E_0^- deve ser igual a zero, pois, fisicamente, a amplitude do campo não pode aumentar na sua direção de propagação. De modo análogo, E_0^+ deve ser igual a

zero se a onda propaga-se no sentido negativo de z . Assim, para uma onda propagando-se no sentido positivo de z , tem-se

$$E_x = E_0^+ e^{-ikz}, \quad (2.26)$$

enquanto, para uma onda propagando-se no sentido negativo de z ,

$$E_x = E_0^- e^{ikz}. \quad (2.27)$$

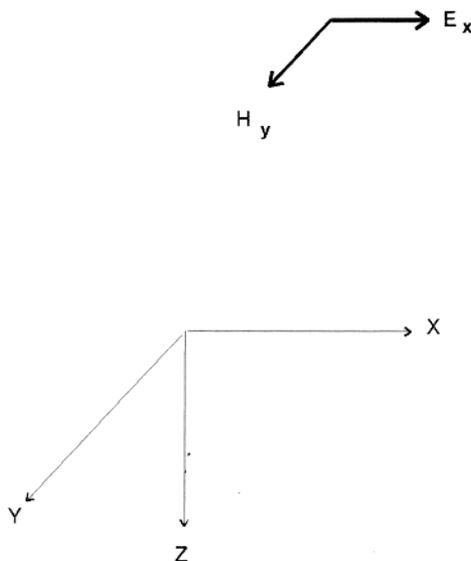


Figura 2.2 – Onda plana propagando-se verticalmente em meio homogêneo.

Substituindo (2.22) na expressão (2.26) tem-se a representação do modelo da propagação de uma onda no sentido positivo de z , na subsuperfície homogênea da Terra

$$E_x = E_0^+ e^{-\frac{z}{\delta}} e^{-i\frac{z}{\delta}}, \quad (2.28)$$

em que a exponencial real controla a atenuação da onda e a exponencial imaginária determina a sua variação de fase. Por exemplo, a uma profundidade igual a δ a onda será atenuada de $1/e$ (37 %) e sua fase terá uma variação de 1 radiano.

O campo magnético pode ser determinado a partir da equação de Maxwell (2.8). Como somente a componente y do campo está presente e sendo ela constante ao longo de Y , tem-se

$$H_y = -\frac{1}{z} \frac{\partial E_x}{\partial z}. \quad (2.29)$$

Substituindo o valor de E_x obtido em (2.26), tem-se

$$H_y = \frac{i\kappa}{\hat{z}} E_0^+ e^{-i\kappa z}. \quad (2.30)$$

A razão entre a componente x do campo elétrico e a componente y do campo magnético tem a dimensão da impedância elétrica. Por isso, define-se a impedância intrínseca de um meio (η) tomando-se a razão entre as expressões (2.26) e (2.30); Assim,

$$\eta = \frac{E_x}{H_y} = -i \frac{\hat{z}}{\kappa}, \quad (2.31)$$

que, com a aproximação de κ definida em (2.21), pode ser escrita, para o modelo da Terra homogênea, como

$$\eta = (i\omega\mu\rho)^{1/2}, \quad (2.32)$$

sendo ρ a resistividade elétrica do meio, definida como $1/\sigma$.

2.2.3 – Incidência de uma onda sobre a superfície de um meio homogêneo e isotrópico

Uma onda eletromagnética plana incidindo sobre a superfície de separação de dois meios de diferentes propriedades elétricas e magnéticas pode ter os campos elétrico e magnético decompostos nas suas componentes cartesianas x, y e z, formando um total de 6 componentes (3 do campo elétrico e 3 do campo magnético). Com a escolha de potenciais vetoriais apropriados é possível, entretanto, decompor os campos de maneira que, para um desses potenciais, a componente z do campo magnético seja nula, enquanto, para outro, a componente z do campo elétrico anula-se (Harrington 1961, p.131). A situação em que a componente z do campo magnético é nula recebe a denominação de modo TM ou modo de campo magnético transversal à direção Z. No caso em que a componente z do campo elétrico é a componente nula, a denominação passa a ser modo TE ou modo de campo elétrico transversal à direção Z.

Os campos incidentes originais podem ser expressos pela soma dos campos dos modos TM e TE (Harrington 1961, p. 130). A decomposição dos campos segundo os modos TM e TE simplifica, portanto, a solução dos problemas de propagação, uma vez que um menor número de componentes precisa ser manipulado.

No modo TM, o campo magnético tem somente componente H_y na direção Y, enquanto o campo elétrico apresenta somente as componentes nas direções X e Z (Figura 2.3a). No modo TE estão presentes somente as componentes E_y , H_x e H_z (Figura 2.3b).

As equações de Maxwell (2.8) e (2.9), para o modo TM, reduzem-se a

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\hat{z}H_y, \quad (2.33)$$

$$-\frac{\partial H_y}{\partial z} = \hat{y}E_x, \quad (2.34)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} = \hat{y}E_z, \quad (2.35)$$

enquanto para o modo TE elas tomam a forma

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = \hat{y}E_y, \quad (2.36)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial z} = \hat{z}H_x, \quad (2.37)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\hat{z}H_z. \quad (2.38)$$

2.2.3.1 – Incidência segundo o modo TM

No modo TM o campo magnético é orientado na direção Y, enquanto o campo elétrico e o vetor propagação ($\vec{\kappa}$) encontram-se no plano XZ (Figura 2.3a).

Ao incidir sobre a superfície de separação de dois meios caracterizados por propriedades eletromagnéticas diferentes, uma onda eletromagnética plana tem parte de sua energia refletida para o meio de incidência e parte transmitida para o outro meio (Figura 2.4).

Explicitando E_x e E_z respectivamente nas equações (2.34) e (2.35) e substituindo o resultado na equação (2.33), leva à equação de Helmholtz para duas dimensões

$$\frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2} + \kappa^2 H_y = 0, \quad (2.39)$$

cuja solução geral é (Wait 1981, p. 8):

$$H_y = (Ae^{-uz} + Be^{uz})e^{-i\lambda x}. \quad (2.40)$$

Sendo A e B constantes a ser determinadas pelas condições de contorno e

$$u = (\lambda^2 - \kappa^2)^{1/2}, \quad (2.41)$$

denominada de constante de propagação da onda para um determinado meio.

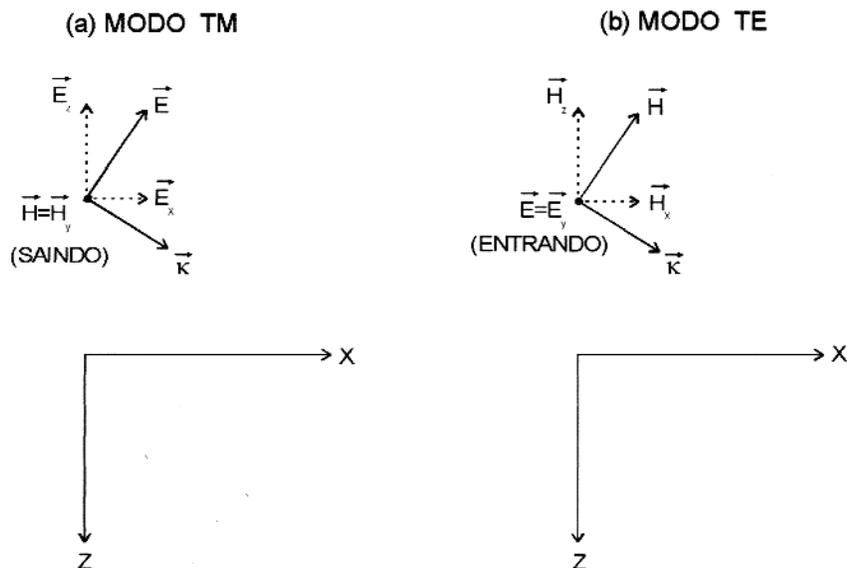


Figura 2.3 – Geometria para os modos TM e TE. Os termos entrando e saindo referem-se ao plano do papel.

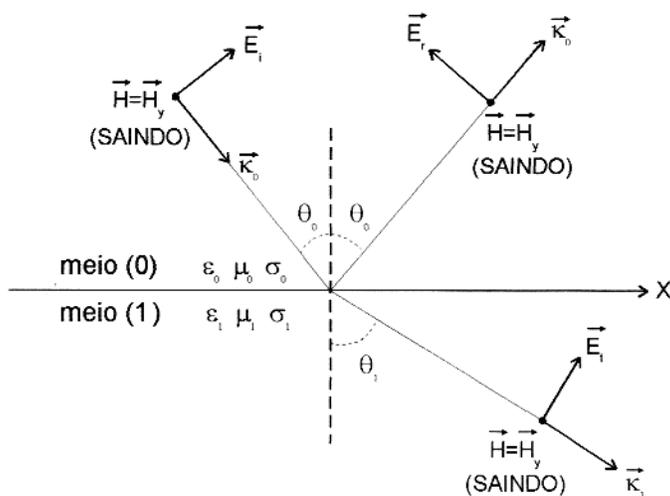


Figura 2.4 – Incidência segundo o modo TM. O termo saindo refere-se ao plano do papel.

Aplicando-se a solução geral, (2.40), ao meio (0) da Figura 2.4 obtém-se

$$H_y^{(0)} = (H_0^+ e^{-u_0 z} + H_0^- e^{u_0 z}) e^{-i\lambda x}, \quad (2.42)$$

em que $u_0 = (\lambda^2 - \kappa_0^2)^{1/2}$. A primeira parcela em (2.42) representa o campo incidente e a segunda, o campo refletido. Ainda para o meio (0), as equações (2.34) e (2.35) permitem que se escreva

$$E_x^{(0)} = \frac{u_0}{\hat{y}_0} (H_0^+ e^{-u_0 z} - H_0^- e^{u_0 z}) e^{-i\lambda x}, \quad (2.43)$$

$$E_z^{(0)} = \frac{-i\lambda}{\hat{y}_0} (H_0^+ e^{-u_0 z} + H_0^- e^{u_0 z}) e^{-i\lambda x}. \quad (2.44)$$

A aplicação da solução geral ao meio (1) permite que se determine a parte do campo TM que é transmitida. Assim tem-se:

$$H_y^{(1)} = H_1 e^{-u_1 z} e^{-i\lambda x}, \quad (2.45)$$

com $u_1 = (\lambda^2 - \kappa_1^2)^{1/2}$. A equação (2.45) contém somente a parcela correspondente à propagação no sentido de z positivo, não havendo onda refletida porque o meio (1) não é limitado na sua parte inferior.

Do mesmo modo que para o meio (0), as equações (2.34) e (2.35) permitem que se escreva para o meio (1)

$$E_x^{(1)} = \frac{u_1}{\hat{y}_1} H_1 e^{-u_1 z} e^{-i\lambda x}, \quad (2.46)$$

$$E_z^{(1)} = \frac{-i\lambda}{\hat{y}_1} H_1 e^{-u_1 z} e^{-i\lambda x}. \quad (2.47)$$

Pelas condições de contorno mostradas nas expressões (2.12) e (2.13), a componente horizontal dos campos elétrico e magnético deve ser contínua na superfície de separação dos meios, isto é, na coordenada $z=0$. Desse modo, $H_y^{(0)}|_{z=0} = H_y^{(1)}|_{z=0}$ e $E_x^{(0)}|_{z=0} = E_x^{(1)}|_{z=0}$, assim

$$H_0^+ + H_0^- = H_1 \quad (2.48)$$

e

$$\frac{u_0}{\hat{y}_0} (H_0^+ - H_0^-) = \frac{u_1}{\hat{y}_1} H_1. \quad (2.49)$$

Explicitando H_0^- e H_1 em termos de H_0^+ obtém-se:

$$H_0^- = H_0^+ \left(\frac{\frac{u_0}{\hat{y}_0} - \frac{u_1}{\hat{y}_1}}{\frac{u_0}{\hat{y}_0} + \frac{u_1}{\hat{y}_1}} \right), \quad (2.50)$$

$$H_1 = H_0^+ \left(1 + \frac{\frac{u_0}{\hat{y}_0} - \frac{u_1}{\hat{y}_1}}{\frac{u_0}{\hat{y}_0} + \frac{u_1}{\hat{y}_1}} \right). \quad (2.51)$$

De acordo com a equação (2.31), a razão entre as partes incidentes de E_x e H_y (ou entre as suas partes refletidas) define a impedância intrínseca do meio (0)

$$\eta_0 = \frac{\frac{u_0}{\hat{y}_0} H_0^+ e^{-u_0 z} e^{-i\lambda x}}{H_0^+ e^{-u_0 z} e^{-i\lambda x}} = \frac{u_0}{\hat{y}_0}. \quad (2.52)$$

Do mesmo modo, a impedância intrínseca do meio (1) é definida pela razão entre as partes transmitidas de E_x e H_y .

$$\eta_1 = \frac{u_1}{\hat{y}_1}. \quad (2.53)$$

Substituindo (2.52) e (2.53) em (2.50) e (2.51) obtém-se:

$$H_0^- = H_0^+ \left(\frac{\eta_0 - \eta_1}{\eta_0 + \eta_1} \right), \quad (2.54)$$

$$H_1 = H_0^+ \left(1 + \frac{\eta_0 - \eta_1}{\eta_0 + \eta_1} \right) \quad (2.55)$$

ou

$$H_0^- = H_0 R_{TM}, \quad (2.56)$$

$$H_1 = H_0 (1 + R_{TM}), \quad (2.57)$$

em que $H_0 = H_0^+$ é a amplitude do campo incidente na posição $z = 0$ e

$$R_{TM} = \left(\frac{\eta_0 - \eta_1}{\eta_0 + \eta_1} \right) \quad (2.58)$$

é o coeficiente de reflexão da onda para o modo TM.

A constante de propagação (u), definida na equação (2.41), necessita uma explanação mais detalhada. Para isso, considere-se uma onda plana propagando-se em um meio (0) segundo uma

direção dada pelo vetor $\vec{\kappa}_0$, em que os campos elétrico e magnético podem ser localizados pelo vetor posição \vec{r} . Sem perda de generalidade, considere-se o modo TM e uma incidência com ângulo θ_0 . Neste caso tem-se (Rijo 1990):

$$H_y = H_0 e^{-i\vec{\kappa}_0 \cdot \vec{r}}. \quad (2.59)$$

No sistema cartesiano,

$$\vec{\kappa}_0 = \kappa_0 (\text{sen } \theta_0 \vec{i} + \text{cos } \theta_0 \vec{k}) \quad (2.60)$$

e

$$\vec{r} = x \vec{i} + z \vec{k}, \quad (2.61)$$

de maneira que

$$H_y = H_0 e^{-i\kappa_0 (x \text{sen } \theta_0 + z \text{cos } \theta_0)}. \quad (2.62)$$

O campo incidente, representado pela primeira parcela da equação (2.42), é

$$H_y^{inc} = H_0^+ e^{-i(\lambda x + u_0 z)}. \quad (2.63)$$

Comparando-se, então, as equações (2.62) e (2.63) obtém-se:

$$\lambda = \kappa_0 \text{sen } \theta_0. \quad (2.64)$$

e

$$u_0 = i\kappa_0 \text{cos } \theta_0, \quad (2.65)$$

em que $\kappa_0 \text{sen } \theta_0$ pode ser tomado como a constante de propagação na direção X e $\kappa_0 \text{cos } \theta_0$ como a constante de propagação na direção Z.

No meio (1) λ tem a forma

$$\lambda = \kappa_1 \text{sen } \theta_1, \quad (2.66)$$

de maneira que, igualando (2.64) e (2.66) obtém-se

$$\text{sen } \theta_1 = \frac{\kappa_0}{\kappa_1} \text{sen } \theta_0. \quad (2.67)$$

Presumindo-se que o meio (0) representa o ar e o meio (1) a Terra, as equações (2.20) e (2.21) permitem que se conclua que $|\kappa_0| \ll |\kappa_1|$ (uma relação resultante de $\sigma \gg \omega \epsilon_0$), e, portanto, $|\kappa_0/\kappa_1| \approx 0$, de maneira que se pode tomar $\theta_1 \approx 0^\circ$. Com isso, uma onda plana incidindo sobre a superfície da Terra deve propagar-se no seu interior seguindo uma direção praticamente vertical, independente do seu ângulo de incidência, θ_0 .

2.2.3.2 – Incidência segundo o modo TE

No modo TE o campo elétrico orienta-se com a direção Y e tanto o vetor propagação como o campo magnético encontram-se no plano XZ (Figura 2.5). Nesse modo, a energia da onda é refletida e transmitida ao atingir a superfície de separação dos meios, conforme a ilustração da Figura 2.5.

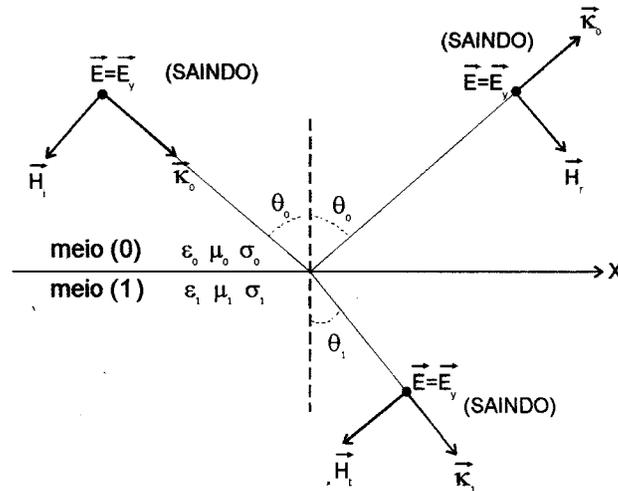


Figura 2.5 – Incidência segundo o modo TE. O termo saindo refere-se ao plano do papel.

Usando procedimento similar ao aplicado para o modo TM, isto é, explicitando H_x e H_z nas equações (2.37) e (2.38) e posteriormente substituindo na equação (2.36), obtém-se a equação de Helmholtz para o modo TE

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} + \kappa^2 E_y = 0, \quad (2.68)$$

cuja solução para o meio (0) é

$$E_y^{(0)} = (E_0^+ e^{-u_0 z} + E_0^- e^{u_0 z}). \quad (2.69)$$

Note-se que em (2.69) o termo $e^{-i\lambda x}$, presente na solução geral descrita pela equação (2.40), foi abandonado. Esse procedimento foi adotado porque, conforme apresentado na análise da equação (2.67), a onda eletromagnética do Método MT propaga-se verticalmente na subsuperfície terrestre. Por esse motivo, o desenvolvimento das equações, a partir deste ponto, não terá o termo $e^{-i\lambda x}$.

As componentes X e Z do campo magnético, calculadas a partir de (2.37) e (2.38), são:

$$H_x^{(0)} = -\frac{u_0}{\hat{z}_0} (E_0^+ e^{-u_0 z} - E_0^- e^{u_0 z}) \quad (2.70)$$

e

$$H_z^{(0)} = \frac{i\lambda}{\hat{z}_0} (E_0^+ e^{-u_0 z} + E_0^- e^{u_0 z}). \quad (2.71)$$

Continuando com a metodologia aplicada no estabelecimento das equações do modo TM, obtém-se para o meio (1):

$$E_y^{(1)} = E_1 e^{-u_1 z}, \quad (2.72)$$

$$H_x^{(1)} = -\frac{u_1}{\hat{z}_1} E_1 e^{-u_1 z}, \quad (2.73)$$

$$H_z^{(1)} = \frac{i\lambda}{\hat{z}_1} E_1 e^{-u_1 z}. \quad (2.74)$$

A aplicação da condição de continuidade das componentes tangenciais E_y e H_x na superfície de separação (em que $z = 0$), leva a:

$$E_0^+ + E_0^- = E_1, \quad (2.75)$$

$$\frac{u_0}{\hat{z}_0} (E_0^+ - E_0^-) = \frac{u_1}{\hat{z}_1} E_1 \quad (2.76)$$

e

$$E_0^- = E_0^+ \left(\frac{\frac{u_0}{\hat{z}_0} - \frac{u_1}{\hat{z}_1}}{\frac{u_0}{\hat{z}_0} + \frac{u_1}{\hat{z}_1}} \right), \quad (2.77)$$

$$E_1 = E_0^+ \left(1 + \frac{\frac{u_0}{\hat{z}_0} - \frac{u_1}{\hat{z}_1}}{\frac{u_0}{\hat{z}_0} + \frac{u_1}{\hat{z}_1}} \right). \quad (2.78)$$

No meio (0), tomando-se o negativo da razão entre as partes incidentes de H_x e E_y , tem-se

$$N_0 = \frac{u_0}{\hat{z}_0}, \quad (2.79)$$

que é denominada admitância intrínseca do meio (0). Da mesma maneira, para o meio (1), o valor negativo da razão entre as partes transmitidas de H_x e E_y define a admitância intrínseca do meio (1).

$$N_1 = \frac{u_1}{\hat{z}_1}. \quad (2.80)$$

A substituição de (2.79) e (2.80) em (2.77) e (2.78) produz

$$E_0^- = E_0 R_{TE} \quad (2.81)$$

e

$$E_1 = E_0 (1 + R_{TE}), \quad (2.82)$$

sendo $E_0 = E_0^+$ a amplitude do campo incidente na posição $z = 0$ e

$$R_{TE} = \frac{N_0 - N_1}{N_0 + N_1} \quad (2.83)$$

o coeficiente de reflexão da onda para o modo TE.

2.2.4 – Impedância e admitância de superfície

Considerando-se os meios (0) e (1) abordados anteriormente, define-se impedância de superfície (Z) para o modo TM como a razão entre as componentes E_x e H_y na interface de separação dos meios. Assim, relacionando-se as expressões (2.45) e (2.46) em $z = 0$ obtém-se

$$Z = \left. \frac{E_x}{H_y} \right|_{z=0} = \frac{u_1}{\hat{y}_1} = \eta_1. \quad (2.84)$$

A equação (2.84) demonstra que a impedância de superfície é igual à impedância intrínseca do semi-espaco homogêneo e isotrópico para onde a onda é transmitida. Se o meio (0) representar o ar e o meio (1) representar uma subsuperfície terrestre homogênea e isotrópica de resistividade igual a ρ , a substituição em (2.84) da expressão (2.32) da impedância intrínseca de um meio produz a impedância de superfície

$$Z = (i\omega\mu_0\rho)^{1/2} = (\omega\mu_0\rho)^{1/2} e^{i\frac{\pi}{4}}, \quad (2.85)$$

onde a exponencial indica que os campos elétrico e magnético estarão defasados de 45° .

De maneira análoga, define-se admitância de superfície (Y) para o modo TE como o negativo da razão entre as componentes H_x e E_y na interface $z = 0$. Assim, relacionando-se (2.72) e (2.73) em $z = 0$ leva a

$$Y = -\left. \frac{H_x}{E_y} \right|_{z=0} = \frac{u_1}{\hat{z}_1} = N_1, \quad (2.86)$$

que mostra que a admitância de superfície é igual à admitância intrínseca do semi-espço homogêneo e isotrópico para onde a onda é transmitida.

2.2.5 – Resistividade a partir da impedância de superfície

A resistividade do meio localizado abaixo da superfície de incidência da onda plana, que vem sendo denominado de meio (1) e sendo associado a uma subsuperfície terrestre homogênea e isotrópica, pode ser estimada através da manipulação da equação (2.85). Assim, elevando-se ao quadrado ambos os lados equação (2.85) tem-se

$$Z^2 = i\omega\mu_0\rho, \quad (2.87)$$

cujo módulo é

$$|Z^2| = \frac{|E_x|^2}{|H_y|^2} \Big|_{z=0} = \omega\mu_0\rho. \quad (2.88)$$

Explicitando-se o valor da resistividade em (2.88) obtém-se

$$\rho = \frac{1}{\omega\mu_0} \frac{|E_x|^2}{|H_y|^2} \Big|_{z=0}. \quad (2.89)$$

A equação (2.89) é fundamental no Método Magnetotelúrico, pois permite a estimativa da resistividade da subsuperfície terrestre a partir da medida dos campos elétrico e magnético.

Nos experimentos para medidas com o Método MT, o campo magnético é medido por meio da detecção do fluxo magnético através de 3 bobinas orientadas ortogonalmente, isto é, pela observação do vetor $\vec{B} = \mu_0\vec{H}$ em cada uma das bobinas. O campo elétrico, por sua vez, é medido pela observação da diferença de potencial em 2 pares de eletrodos enterrados no solo segundo direções ortogonais. O campo elétrico é obtido dividindo-se a diferença de potencial pela distância que separa cada par de eletrodos.

Na prática, o campo elétrico E_x é amostrado na unidade mV/km e o campo magnético H_y , substituído por B_y/μ_0 , na unidade nT (10^{-9} Tesla). O uso dessas unidades e as substituições: $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$, $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$ em (2.89) produz

$$\rho = 0,2T \frac{|E_x|^2}{|B_y|^2} \Omega \cdot m. \quad (2.90)$$

Para o modelo apresentado até aqui (subsuperfície homogênea e isotrópica), um único valor de ρ deve ser obtido, independente da orientação dos detectores de E e H no plano horizontal (mantida a sua ortogonalidade) e das frequências (períodos) de amostragem. Também a diferença de fase (ϕ) entre E_x e H_y mantém-se constante e igual a 45° , conforme explicitado na equação (2.85). Por outro lado, se, mantida a independência em relação à orientação de E e H, forem obtidos diferentes valores de ρ e ϕ para diferentes frequências de amostragem, então a subsuperfície não pode mais ser considerada homogênea. Neste caso, o modelo de um meio acamado, lateralmente homogêneo e isotrópico deve ser usado e os valores de ρ e ϕ obtidos a cada frequência passam a ser denominados de resistividade aparente (ρ_a) e fase aparente (ϕ_a). Esses valores são uma representação da resistividade e da fase, para uma determinada frequência de amostragem, que o meio teria se fosse homogêneo. Este modelo, muito mais realista do que o da subsuperfície homogênea e isotrópica, será abordado na próxima seção.

2.2.6 – Meio acamado lateralmente homogêneo

Este modelo, representado na Figura 2.6, é comumente referido em Geofísica como modelo unidimensional (1D). Neste caso, as equações de Maxwell são aplicadas a cada camada, permitindo que se calculem as impedâncias de superfície a partir das condições de contorno em cada interface de separação das camadas. Com isso, pode ser estabelecida uma relação recursiva que se inicia com a impedância intrínseca do semi-espaco que serve de embasamento para o meio acamado.

Para a aplicação da metodologia recursiva, considere-se a solução geral no modo TM em uma camada genérica j

$$H_y^{(j)} = \left(H_j^+ e^{-u_j z} + H_j^- e^{u_j z} \right), \quad (2.91)$$

$$E_x^{(j)} = \eta_j (H_j^+ e^{-u_j z} - H_j^- e^{u_j z}). \quad (2.92)$$

Aplicando-se essas expressões para a interface superior (profundidade $z = p_{j-1}$) tem-se

$$H_y' = (H_j^+ e^{-u_j p_{j-1}} + H_j^- e^{u_j p_{j-1}}), \quad (2.93)$$

$$E_x' = (H_j^+ e^{-u_j p_{j-1}} - H_j^- e^{u_j p_{j-1}}), \quad (2.94)$$

enquanto que para a interface inferior (profundidade $z = p_{j-1} + h_j$) os campos são

$$H_y = (H_j^+ e^{-u_j p_{j-1}} e^{-u_j h_j} + H_j^- e^{u_j p_{j-1}} e^{u_j h_j}) \quad (2.95)$$

$$E_x = (H_j^+ e^{-u_j p_{j-1}} e^{-u_j h_j} - H_j^- e^{u_j p_{j-1}} e^{u_j h_j}). \quad (2.96)$$

Somando e subtraindo entre si as expressões (2.95) e (2.96) e substituindo nas expressões (2.93) e (2.94), obtém-se

$$H_y' = H_y \cosh(u_j h_j) + \frac{E_x}{\eta_j} \sinh(u_j h_j), \quad (2.97)$$

$$E_x' = \eta_j H_y \sinh(u_j h_j) + E_x \cosh(u_j h_j). \quad (2.98)$$

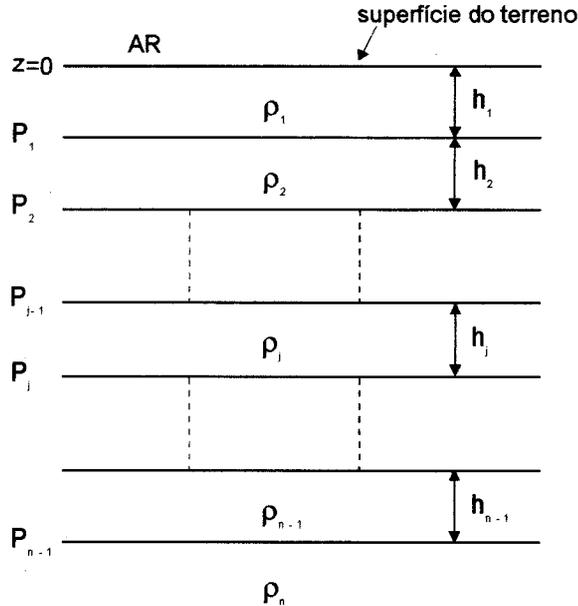


Figura 2.6 – Meio acamado lateralmente homogêneo.

A razão entre os campos fornece a impedância de superfície na interface superior $j-1$, em função da impedância de superfície da interface inferior

$$Z_{j-1} = \frac{E'_x}{H'_y} = \eta_j \frac{Z_j + \eta_j \tanh(u_j h_j)}{\eta_j + Z_j \tanh(u_j h_j)} \quad (2.99)$$

De acordo com (2.84), a impedância de superfície para $z = n-1$ (topo do semi-espaço que define o embasamento) é igual à impedância intrínseca do semi-espaço ($Z_{n-1} = \eta_n$). Desse modo, iniciando-se com a impedância Z_{n-1} , é possível calcular iterativamente a impedância à profundidade $z = 0$ (superfície do terreno), local das medidas magnetotélúricas, e, a partir da equação (2.89), obter a resistividade aparente

$$\rho_a = \frac{1}{\omega \mu_0} |Z|_{z=0}^2 \quad (2.100)$$

Cabe chamar a atenção, contudo, que nos trabalhos de campo a impedância é efetivamente obtida a partir das medidas das componentes do campo elétrico e magnético.

A obtenção de valores de ρ_a a partir da equação (2.100), em determinada posição, para diferentes frequências proporciona uma visualização da heterogeneidade mostrada na Figura 2.6. Nessa situação, os valores de ρ_a obtidos nas frequências mais altas estão relacionados a profundidades peliculares menores (ver equação (2.21)) e, por isso, recebem a influência das resistividades das camadas menos profundas; por outro lado, à medida que a frequência decresce, os valores de ρ_a passam a ser influenciados pelas camadas mais profundas. O procedimento de amostrar ρ_a e ϕ_a em um determinado ponto da superfície do terreno para diversas frequências é denominado de sondagem magnetotélúrica, enquanto a representação gráfica desses valores produz o que se denomina de curva de sondagem MT.

Sobre o meio unidimensional representado na Figura 2.6 as curvas de sondagens MT devem ser idênticas, qualquer que seja a orientação dos detetores de E e H (mantida a sua ortogonalidade). A não observância desse critério indica que o meio apresenta variação lateral na resistividade, além da variação vertical (embora o fenômeno da anisotropia também possa causar a não observância do critério de igualdade entre as curvas das sondagens, neste trabalho ele não será considerado; os meios aqui serão sempre isotrópicos).

A obtenção de resistividades e fases aparentes dependentes da orientação dos detetores de E e H significa que para cada orientação haverá uma impedância e uma resistividade associada. Essas impedâncias, bem como a definição das resistividades aparentes serão tratadas a seguir, na abordagem do modelo mais adequado para representar uma subsuperfície com variação lateral.

2.2.7 – Meio acamado com variação lateral

Neste modelo, referido como modelo bidimensional (2D), as propriedades elétricas do meio variam segundo uma das direções horizontais e na direção vertical.

Quando a subsuperfície pode ser representada pelo modelo acamado da Figura 2.6 (modelo unidimensional) ou pelo modelo do meio homogêneo, as variações no campo magnético em uma determinada direção produzem um campo elétrico em direção perpendicular, com características que dependem da impedância do meio (por exemplo, $E_x = Z H_y$). Em uma subsuperfície com variação lateral, no caso mais geral, o campo elétrico pode receber contribuições, tanto de variações magnéticas paralelas, como de variações perpendiculares a sua direção, isto é

$$E_x = Z_{xx} H_x + Z_{xy} H_y, \quad (2.101)$$

$$E_y = Z_{yx} H_x + Z_{yy} H_y. \quad (2.102)$$

Sem perda de generalidade aqui serão consideradas as variações de resistividade nas direções xz, não havendo variações na direção y.

Para a resolução deste problema, os campos também são separados nos modos TM e TE e, em analogia com o observado nos modelos 1D anteriormente tratados, estarão presentes no modo TM as componentes H_y , E_x , E_z , enquanto que no modo TE aparecem as componentes E_y , H_x , H_z .

Para o caso do modelo aqui considerado (variações de resistividade segundo xz), o modo TM é referido como *modo de E perpendicular* (por possuir a componente E_x perpendicular à direção em que não há variações de resistividade) e o modo TE referido como *modo de E paralelo* (possui E_y , paralelo à direção sem variações). Neste caso, para o modo TE

$$-Z_{yx} = Z_{TE} = -\frac{E_y}{H_x} \quad (2.103)$$

e

$$Z_{yy} = 0, \quad (2.104)$$

enquanto que para o modo TM

$$Z_{xy} = Z_{TM} = \frac{E_x}{H_y} \quad (2.105)$$

e

$$Z_{xx} = 0. \quad (2.106)$$

As duas impedâncias levam às resistividades aparentes

$$\rho_a^{(TE)} = \frac{1}{\omega\mu_0} |Z_{TE}|^2, \quad (2.107)$$

$$\rho_a^{(TM)} = \frac{1}{\omega\mu_0} |Z_{TM}|^2. \quad (2.108)$$

Para calcular esses valores de resistividade aparente é necessário medir as componentes dos campos elétricos e magnéticos em ambas as direções x e y. Essas direções, entretanto, podem ou não coincidir com as direções perpendicular e paralela ao *strike* da estrutura bidimensional. Caso não coincidam, um operador de rotação deve ser aplicado para que haja coincidência entre elas.

As soluções das equações de Maxwell para este modelo são, quase sempre, obtidas por meio de métodos numéricos. Neste trabalho foi usado algoritmo dos elementos finitos atualizado pelo prof. Luiz Rijo a partir de algoritmo por ele desenvolvido (Rijo 1977). Na aplicação do método dos elementos finitos, o modelo compreende a região que engloba a interface Terra-ar, sendo as porções acima e abaixo dessa interface discretizadas na forma de elementos triangulares ou retangulares, em cujos vértices os campos são numericamente calculados.

No modo TM o campo magnético secundário (produzido pela variação lateral de resistividade) na interface Terra-ar é constante (independe da variação de resistividade), o que determina que a porção acima da interface (ar) não necessita ser discretizada. Somente o modo TE precisa ter discretizada a porção do modelo que contém o ar (Hohmann 1987, p.324).

No estudo desenvolvido ao longo desta tese serão usados, quase sempre, modelos bidimensionais em que um ou dois corpos prismáticos são envolvidos por um meio homogêneo. Estes modelos são casos particulares do modelo apresentado nesta seção, em que o meio acamado é substituído pelo meio homogêneo, permanecendo a variação lateral de resistividade representada pelos corpos prismáticos. O algoritmo usado para os cálculos da resistividade aparente, entretanto, é o mesmo do meio acamado, com atribuição de um mesmo valor de resistividade a todas as camadas.

3 – INVERSÃO EM GEOFÍSICA

O problema de inversão em Geofísica consiste da determinação dos parâmetros (propriedade física e geometria) de um modelo a partir de um conjunto de medidas.

Na busca da solução do problema inverso, o procedimento mais usual requer como primeiro passo o estabelecimento do modelo representativo da subsuperfície, que normalmente é uma função matemática relacionando os parâmetros do modelo e as coordenadas dos pontos de amostragem aos valores medidos. Quando essa função é linear com respeito aos parâmetros, o problema inverso é classificado como linear; uma função não linear com respeito aos parâmetros produz um problema dito não linear. Embora os problemas associados ao Método MT não sejam lineares, neste capítulo serão abordados algoritmos de inversão para problemas inversos lineares e não lineares. Os lineares, por serem mais simples, servirão de base para os não lineares. O desenvolvimento mostrará inicialmente a solução do problema de inversão na forma do algoritmo prático que normalmente é apresentado quando se deseja introduzir os fundamentos do processo de inversão. Esse procedimento será seguido até a seção 3.3. Na seção 3.4 será abordada uma generalização da solução do problema inverso e serão feitas comparações com o desenvolvimento apresentado nas seções anteriores.

Em uma das seções deste capítulo, descreve-se a técnica que procura a solução do problema inverso através dos incrementos dos parâmetros e a técnica do *jumping* (solução direta para os parâmetros). Uma análise dessas técnicas demonstra que elas são equivalentes em alguns casos e que, em geral, a técnica dos incrementos é mais robusta no sentido de sempre garantir convergência para um resultado satisfatório do problema inverso, ao contrário da técnica do *jumping*, que pode divergir.

Também neste capítulo, aborda-se a inclusão de informação a priori sobre os parâmetros no algoritmo de inversão, como forma de resolver o problema da instabilidade matemática e que faça sentido físico. Demonstra-se, ainda, que, ao contrário do que é divulgado na literatura, a inclusão de informação a priori é tão simples na técnica dos incrementos, quanto na do *jumping*.

No desenvolvimento apresentado a seguir, o vetor Y_{obs} representa um conjunto de medidas tomadas em pontos de amostragem distintos e o vetor P contém os parâmetros representativos do modelo da subsuperfície terrestre associado ao conjunto de medidas.

3.1 – PROBLEMA INVERSO LINEAR

Supondo-se que a função que relaciona o modelo às medidas é linear nos parâmetros, a sua aplicação em cada ponto de amostragem leva a um sistema de equações em que existem tantas equações quantas forem as medidas e tantas incógnitas quantos forem os parâmetros. Normalmente, em Geofísica, o número de medidas (equações) é maior do que o número de parâmetros (incógnitas), produzindo um sistema sobredeterminado.

Do ponto de vista matemático, é mais simples representar o sistema de equações na forma matricial. Assim, no caso de haver N observações e M parâmetros, tem-se

$$\begin{bmatrix} f_1(\bar{P}) \\ f_2(\bar{P}) \\ \vdots \\ f_N(\bar{P}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & \cdots & G_{1M} \\ G_{21} & G_{22} & \cdots & G_{2M} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ G_{N1} & G_{N2} & \cdots & G_{NM} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_M \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

ou

$$\bar{f}(\bar{P}) = \bar{G} \cdot \bar{P}, \quad (3.2)$$

em que $\bar{f}(\bar{P})$ é o vetor contendo as avaliações, nos pontos de observação, da função f que relaciona os parâmetros do modelo às medidas e G_{ij} ($i=1, \dots, N$ e $j=1, \dots, M$) são os coeficientes que

multiplicam os parâmetros nas equações, definidos por $G_{ij} = \left. \frac{\partial f}{\partial P_j} \right|_{x=x_i}$.

Na busca da solução do problema de inversão procura-se minimizar a diferença entre os valores medidos e os calculados por meio da função, com o vínculo de que o modelo representado pelos parâmetros \bar{P} , a serem estimados, esteja próximo de um modelo padrão representado por \bar{P}_{ref} . Esse vínculo, proposto por Tikhonov & Arsenin (1977), torna o problema matematicamente bem posto, permitindo que uma solução estável seja alcançada. Tomando a norma 2 para medir a distância entre os vetores contendo os valores medidos e os observados e entre \bar{P} e \bar{P}_{ref} , o problema é apresentado como

$$\text{min imizar } \left\| \bar{P} - \bar{P}_{ref} \right\|^2, \quad (3.3)$$

$$\text{sujeito a } \left\| \bar{Y}_{obs} - \bar{f}(\bar{P}) \right\|^2 = \delta,$$

em que δ é o desvio esperado para as realizações do ruído que contaminam as observações. Com a aplicação do método dos multiplicadores de Lagrange e desprezando o ruído, constrói-se o funcional

$$U = \left\| \bar{P} - \bar{P}_{ref} \right\|^2 + \nu \left\| \bar{Y}_{obs} - \bar{f}(\bar{P}) \right\|^2, \quad (3.4)$$

em que ν é o multiplicador de Lagrange. Na prática, é muito difícil conhecer-se \bar{P}_{ref} e lhe tem sido atribuído o valor zero. Isso significa que, dentro de um conjunto de soluções que satisfaçam ao problema geofísico, será escolhida aquela que está mais próxima da origem de um espaço gerado pelos parâmetros. Embora essa solução, em muitos casos, não seja a verdadeira do ponto de vista geológico, ela vem sendo buscada por não se ter nenhuma informação adicional que permita rejeitá-la. Assim, considerando-se $\bar{P}_{ref} = \bar{0}$, (3.4) toma a forma

$$U = \left\| \bar{P} \right\|^2 + \nu \left\| \bar{Y}_{obs} - \bar{f}(\bar{P}) \right\|^2. \quad (3.5)$$

Substituindo-se $\bar{f}(\bar{P})$ dado na equação (3.2) e desenvolvendo obtém-se

$$U = \nu \left(\bar{Y}_{obs} - \bar{G}\bar{P} \right)^T \left(\bar{Y}_{obs} - \bar{G}\bar{P} \right) + \bar{P}^T \bar{P}. \quad (3.6)$$

Derivando U com respeito a \bar{P} e igualando ao vetor nulo para obter o mínimo do funcional tem-se

$$-\nu \bar{G}^T \left(\bar{Y}_{obs} - \bar{G}\bar{P} \right) + \bar{P} = \bar{0}. \quad (3.7)$$

Multiplicando-se por $\mu = 1/\nu$ e resolvendo para \bar{P} tem-se

$$\bar{P} = \left(\bar{G}^T \bar{G} + \mu \bar{I} \right)^{-1} \bar{G}^T \bar{Y}_{obs} \quad (3.8)$$

que é o estimador do *ridge regression* para \bar{P} .

Uma solução mais real (mais próxima da geologia da subsuperfície) do problema inverso pode ser obtida se for introduzida informação adicional sobre os parâmetros do modelo. Essa informação pode ser de caráter relativo ou absoluto. Na informação relativa, tem-se, por exemplo, de quanto um parâmetro é maior do que outro ou se alguns parâmetros podem assumir valores idênticos. Na informação absoluta, valores esperados ou medidos fisicamente são introduzidos.

Quando da introdução de informação a priori, o problema de inversão pode ser formulado da seguinte maneira:

$$\text{minimizar } \left\| \overline{\overline{BP}} - \overline{\gamma} \right\|^2, \quad (3.9)$$

$$\text{sujeito a } \left\| \overline{Y}_{obs} - \overline{f}(\overline{P}) \right\|^2 = \delta,$$

em que $\overline{\overline{B}}$ e $\overline{\gamma}$ contêm a informação a priori e δ , como antes, é o erro esperado para as realizações do ruído. A partir dessa formulação e abandonando o ruído constrói-se o funcional

$$U = \left\| \overline{\overline{BP}} - \overline{\gamma} \right\|^2 + \nu \left\| \overline{Y}_{obs} - \overline{f}(\overline{P}) \right\|^2, \quad (3.10)$$

sendo ν o multiplicador de Lagrange. Substituindo $\overline{f}(\overline{P})$ e desenvolvendo obtém-se

$$U = \left(\overline{\overline{BP}} - \overline{\gamma} \right)^T \left(\overline{\overline{BP}} - \overline{\gamma} \right) + \nu \left(\overline{Y}_{obs} - \overline{GP} \right)^T \left(\overline{Y}_{obs} - \overline{GP} \right). \quad (3.11)$$

Derivando-se U com respeito a P e igualando ao vetor nulo para obtenção do mínimo chega-se a

$$-\nu \overline{\overline{G}}^T \left(\overline{Y}_{obs} - \overline{GP} \right) + \overline{\overline{B}}^T \left(\overline{\overline{BP}} - \overline{\gamma} \right) = \overline{0}, \quad (3.12)$$

cuja solução é

$$\overline{P} = \left(\overline{\overline{G}}^T \overline{\overline{G}} + \mu \overline{\overline{B}}^T \overline{\overline{B}} \right)^{-1} \left(\overline{\overline{G}}^T \overline{Y}_{obs} + \mu \overline{\overline{B}}^T \overline{\gamma} \right), \quad (3.13)$$

em que $\mu = 1/\nu$.

Para introdução de informação relativa deve-se tomar $\overline{\gamma} = \overline{0}$ e construir $\overline{\overline{B}} = \overline{\overline{R}}$ conforme exemplificado abaixo (Medeiros e Silva 1996), sem perda de generalidade, para o caso em que o parâmetro P₁ é igual ao parâmetro P₂ e o parâmetro P₄ igual a 3 vezes o parâmetro P₅:

$$\overline{\overline{R}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{M \times M}. \quad (3.14)$$

Neste caso, a expressão (3.13) toma a forma

$$\bar{P} = \left(\bar{G}^T \bar{G} + \mu \bar{R}^T \bar{R} \right)^{-1} \bar{G}^T \bar{Y}_{obs} . \quad (3.15)$$

Se o objetivo é introduzir informação absoluta, então $\bar{\gamma} \neq \bar{0}$ e $\bar{B} = \bar{A}$ devem ser construídos conforme exemplificado abaixo (Medeiros e Silva 1996), para o caso em que o parâmetro P_1 é igual a 100, o parâmetro P_2 igual a 300 e o parâmetro P_5 igual a 500:

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{M \times M} \quad \bar{\gamma} = \begin{bmatrix} 100 \\ 300 \\ 0 \\ 0 \\ 500 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} , \quad (3.16)$$

passando a expressão (3.13) a ter a forma

$$\bar{P} = \left(\bar{G}^T \bar{G} + \mu \bar{A}^T \bar{A} \right)^{-1} \left(\bar{G}^T \bar{Y}_{obs} + \mu \bar{A}^T \bar{\gamma} \right) . \quad (3.17)$$

Quando ambos os tipos de informação, relativa e absoluta, necessitam ser introduzidos, a expressão (3.13) passa a ser escrita

$$\bar{P} = \left(\bar{G}^T \bar{G} + \mu_r \bar{R}^T \bar{R} + \mu_a \bar{A}^T \bar{A} \right)^{-1} \left(\bar{G}^T \bar{Y}_{obs} + \mu_a \bar{A}^T \bar{\gamma} \right) . \quad (3.18)$$

3.2 – PROBLEMA INVERSO NÃO LINEAR

Quando a função que relaciona os parâmetros às medidas é não linear com respeito aos parâmetros, um dos procedimentos empregados na solução do problema é o de linearizar a função nas vizinhanças de um modelo inicial, através do seu desenvolvimento em série de Taylor. O desenvolvimento de uma função em série de Taylor nas vizinhanças de um modelo inicial \bar{P}_0 produz

$$f(\bar{P}) = f(\bar{P}_0) + \left. \frac{\partial f}{\partial P} \right|_{\bar{P}=\bar{P}_0} (\bar{P} - \bar{P}_0) + \dots \quad (\text{termos de ordem } \geq 2), \quad (3.19)$$

ou, desprezando os termos de ordem igual ou superior a 2,

$$\bar{f}(\bar{P}) = \bar{f}(\bar{P}_0) + \bar{J}_0 \bar{\Delta P}, \quad (3.20)$$

em que

$$J_0 = \left. \frac{\partial f(\bar{P})}{\partial \bar{P}} \right|_{\bar{P}=\bar{P}_0},$$

$$\bar{\Delta P} = \bar{P} - \bar{P}_0.$$

$f(\bar{P}_0)$ é o resultado do cálculo da resposta do modelo para os parâmetros \bar{P}_0 , enquanto \bar{J}_0 contém as derivadas parciais da função que representa o modelo em relação ao vetor de parâmetros \bar{P} , avaliadas em \bar{P}_0 , e é denominada matriz de sensibilidade.

Substituindo-se em (3.5) os parâmetros \bar{P} do problema linear por $\bar{\Delta P}$, pode-se escrever o funcional.

$$U = \|\bar{\Delta P}\|^2 + \nu \|\bar{Y}_{obs} - \bar{f}(\bar{P})\|^2. \quad (3.21)$$

Este funcional é similar ao apresentado em (3.4), com $\bar{P}_{ref} = \bar{P}_0$ (o parâmetro de referência, que proporciona estabilidade à solução do problema, sendo representado pelo modelo inicial).

Substituindo (3.20) em (3.21) e desenvolvendo obtém-se

$$U = \bar{\Delta P}^T \bar{\Delta P} + \nu \left(\bar{Y}_{obs} - \bar{f}(\bar{P}_0) - \bar{J}_0 \bar{\Delta P} \right)^T \left(\bar{Y}_{obs} - \bar{f}(\bar{P}_0) - \bar{J}_0 \bar{\Delta P} \right). \quad (3.22)$$

Derivando-se com respeito a \bar{P} e igualando ao vetor nulo leva a

$$-\nu \bar{J}_0^T \left(\bar{Y}_{obs} - \bar{f}(\bar{P}_0) - \bar{J}_0 \bar{\Delta P} \right) + \bar{\Delta P} = \bar{0}, \quad (3.23)$$

onde, multiplicando-se por $\mu = 1/\nu$ e explicitando $\bar{\Delta P}$, tem-se

$$\bar{\Delta P} = \left(\bar{J}_0^T \bar{J}_0 + \mu \bar{I} \right)^{-1} \bar{J}_0^T \left(\bar{Y}_{obs} - \bar{f}(\bar{P}_0) \right). \quad (3.24)$$

O valor de $\bar{\Delta P}$, obtido em (3.24), deve ser adicionado ao valor de \bar{P}_0 e o resultado usado no lugar de \bar{P}_0 para novo cálculo da resposta do modelo e dos valores de \bar{J} , a fim de que se obtenha um novo valor de $\bar{\Delta P}$. Este procedimento de aproximações sucessivas segue iterativamente até que os valores de \bar{P} , obtidos em duas iterações consecutivas, sejam aproximadamente iguais.

A estimativa de \bar{P} , a partir da determinação iterativa dos pequenos incrementos $\Delta\bar{P}$, é a técnica convencional de inversão não linear e tomou, indevidamente, a denominação de técnica do *creeping* (Shaw & Orcutt 1985, Scales et al. 1990). Originalmente, a denominação *creeping* foi empregada por R. L. Parker (referenciado por Shaw & Orcutt 1985 como manuscrito não publicado) para caracterizar a convergência muito lenta que é obtida quando os incrementos são calculados com o Método da Máxima Declividade. De acordo com Parker, além da convergência lenta, o método por ele denominado *creeping* não permite incorporação de informação a priori sobre os parâmetros. Por isso, esse autor desenvolveu um outro método, que recebeu a denominação *jumping*, a fim de que pudesse ser incorporada informação a priori sobre os parâmetros, como forma de estabilizar o problema inverso. Nessa segunda técnica, um sistema linear de equações é resolvido diretamente para os parâmetros do modelo a cada iteração.

Na técnica do *jumping* o funcional a ser minimizado é

$$U = \|\bar{P}\|^2 + \nu \|\bar{Y}_{obs} - \bar{f}(\bar{P})\|^2, \quad (3.25)$$

que difere do funcional descrito por (3.21) na primeira parcela da soma à direita do sinal de igualdade.

Desenvolvendo-se (3.25) como anteriormente obtém-se

$$\bar{P}_j = \left(\begin{matrix} \bar{J}_0^T \bar{J}_0 + \mu \bar{I} \end{matrix} \right)^{-1} \bar{J}_0^T \left(\bar{Y}_{obs} + \bar{J}_0 \bar{P}_0 - \bar{f}(\bar{P}_0) \right), \quad (3.26)$$

que permite a estimativa dos parâmetros de um modelo usando a técnica do *jumping* (o índice j em \bar{P} representa *jumping*) também por aproximações sucessivas.

3.3 – JUMPING VERSUS CREEPING

A técnica *jumping* tem sido defendida principalmente com os argumentos de que (a) sua convergência para o modelo final é mais rápida do que a técnica do *creeping* (devido os parâmetros e não seus incrementos serem atualizados a cada iteração, sendo essa atualização feita através de “passos” mais largos); (b) informação a priori ou limites nos valores é mais fácil de introduzir diretamente nos parâmetros do que nos seus incrementos (Scales et al. 1990).

Vamos proceder alguns desenvolvimentos a fim de se compararem as duas técnicas. Primeiramente, tomando-se $\bar{P}_c = \bar{P}_0 + \Delta\bar{P}$, que representa a atualização dos parâmetros com a técnica dos incrementos (*creeping*) e notando-se que $\bar{J}_0^T (\bar{Y}_{obs} - \bar{f}(\bar{P}_0))$ em (3.24) é o gradiente do desajuste dos dados, $\|\bar{Y}_{obs} - \bar{f}(\bar{P}_0)\|^2$, pode-se escrever \bar{P}_c da seguinte forma:

$$\bar{P}_c = \bar{P}_0 + \left(\bar{J}_0^T \bar{J}_0 + \mu \bar{I} \right)^{-1} \nabla_P \left\| \bar{Y}_{obs} - \bar{f}(\bar{P}) \right\|^2 \Big|_{\bar{P}=\bar{P}_0}, \quad (3.27)$$

que significa que a aproximação inicial \bar{P}_0 será atualizada por uma quantidade que será adicionada na direção do gradiente da função que mede o desajuste dos dados.

Por outro lado, ao se desdobrar a equação (3.26) da técnica do *jumping* obtém-se

$$\bar{P}_j = \left(\bar{J}_0^T \bar{J}_0 + \mu \bar{I} \right)^{-1} \bar{J}_0^T \bar{P}_0 + \left(\bar{J}_0^T \bar{J}_0 + \mu \bar{I} \right)^{-1} \bar{J}_0^T (\bar{Y}_{obs} - \bar{f}(\bar{P}_0)) \quad (3.28)$$

ou

$$\bar{P}_j = \left(\bar{J}_0^T \bar{J}_0 + \mu \bar{I} \right)^{-1} \bar{J}_0^T \bar{P}_0 + \left(\bar{J}_0^T \bar{J}_0 + \mu \bar{I} \right)^{-1} \nabla_P \left\| \bar{Y}_{obs} - \bar{f}(\bar{P}) \right\|^2 \Big|_{\bar{P}=\bar{P}_0}. \quad (3.29)$$

Em (3.29), quando o multiplicador de Lagrange, μ , é muito pequeno, a primeira parcela à direita da igualdade tende a \bar{P}_0 e (3.29) iguala-se a (3.27), o que significa que as estimativas dos parâmetros pelos dois métodos devem ser similares. Por outro lado, à medida que μ cresce, a atualização de \bar{P} passa a ser feita na direção do gradiente da função objetiva, porém não na aproximação inicial, já que a primeira parcela não mais tende a \bar{P}_0 . Com a atualização não sendo feita na aproximação inicial, é possível que haja divergência com o uso da técnica do *jumping*. Em casos extremos, com μ muito grande, a atualização passa a ser feita próxima da origem do espaço dos parâmetros, pois a primeira parcela aproxima-se de zero. Isso é muito bem demonstrado por Silva et al. (1999) e contradiz diversos autores (Shaw & Orcutt 1985, Constable et al. 1987, Scales et al. 1990, Parker 1994), que recomendam o uso do maior multiplicador de Lagrange possível.

Desse modo, as duas técnicas fornecem o mesmo resultado se μ é muito pequeno, mas podem fornecer resultados diferentes quando μ é grande. Dependendo do valor de μ é possível até que a técnica do *jumping* não consiga levar a uma resultado satisfatório.

O argumento de que o desempenho da técnica do *jumping* é superior ao da técnica dos incrementos (*creeping*) por convergir mais rápido é pertinente desde que se exerça um controle sobre o multiplicador de Lagrange, μ , mantendo-o dentro de valores pequenos pela razão explicada acima. Testes realizados nesta pesquisa demonstram isso. Por exemplo, analisando um modelo com 84 parâmetros foi possível atingir a convergência com 3 a 7 iterações usando a técnica do *jumping* e com 10 iterações na técnica dos incrementos. Como o tempo gasto em cada iteração foi aproximadamente o mesmo para ambas as técnicas, a técnica do *jumping* foi mais rápida por convergir com menos iterações. Nesses testes verificou-se entretanto que, com a técnica do *jumping*, se o processo de inversão não for interrompido quando se está próximo da solução verdadeira (que durante os testes era previamente conhecida), o resultado diverge. Com a técnica dos incrementos, por outro lado, os testes mostraram que sempre há convergência e que os resultados mostram soluções aproximadas que oscilam em torno da solução verdadeira. Esse é um resultado importante, pois nos problemas reais a solução verdadeira é quase sempre desconhecida.

O argumento, defendido por diversos pesquisadores, que trata da facilidade de introdução de informação a priori com a técnica do *jumping*, por ser feita diretamente nos parâmetros e não nos incrementos, pode aqui ser contestada. Para a técnica dos incrementos (*creeping*), também não há dificuldade alguma para introduzir-se informação a priori, conforme será demonstrado a seguir.

A introdução de informação a priori foi anteriormente apresentada nas equações (3.13), (3.15) e (3.17) para o caso de inversão linear. Para o problema não linear e a técnica do *jumping*, o seguinte problema deve ser resolvido:

$$\text{minimizar} \quad \left\| \overline{\overline{BP}} - \overline{\gamma} \right\|^2 \quad (3.30)$$

$$\text{sujeito a} \quad \left\| \overline{Y}_{obs} - \overline{f}(\overline{P}) \right\|^2 = \overline{\delta},$$

em que a notação aqui é a mesma que foi empregada para o problema linear. Substituindo-se $\overline{f}(\overline{P})$ pelo valor dado na expressão (3.20), explicitando $\overline{\Delta P} = \overline{P} - \overline{P}_0$ e desenvolvendo-se como antes, tem-se

$$\bar{P}_J = \left(\begin{matrix} \bar{J}_0 & \bar{J}_0 \\ \mu \bar{B} & \bar{B} \end{matrix} \right)^{-1} \left[\begin{matrix} \bar{J}_0 \\ \bar{J}_0 \end{matrix} \left(\bar{Y}_{obs} + \bar{J}_0 \bar{P}_0 - \bar{f}(\bar{P}_0) + \mu \bar{B} \bar{\gamma} \right) \right]. \quad (3.31)$$

Para a técnica dos incrementos (*creeping*) é necessário elaborar somente um pouco mais.

A aplicação da matriz \bar{B} sobre os incrementos $\bar{\Delta P}$ produz

$$\bar{B} \bar{\Delta P} = \bar{B} \bar{P} - \bar{B} \bar{P}_0, \quad (3.32)$$

que mostra a aplicação de \bar{B} sobre os parâmetros \bar{P} e sobre a aproximação inicial \bar{P}_0 . Como, de acordo com a equação (3.9), $\bar{B} \bar{P} = \bar{\gamma}$ tem-se

$$\bar{B} \bar{\Delta P} = \bar{\gamma} - \bar{B} \bar{P}_0 \quad (3.33)$$

ou

$$\bar{B} \bar{\Delta P} - \bar{\gamma} + \bar{B} \bar{P}_0 = 0. \quad (3.34)$$

Pode-se agora formular o seguinte problema

$$\text{minimizar } \left\| \bar{B} \bar{\Delta P} - \bar{\gamma} + \bar{B} \bar{P}_0 \right\|^2 \quad (3.35)$$

$$\text{sujeito a } \left\| \bar{Y}_{obs} - \bar{f}(\bar{P}) \right\|^2 = \bar{\delta},$$

em que $\bar{f}(\bar{P})$ é dada na equação (3.20). Resolvendo-se como antes obtém-se

$$\bar{\Delta P} = \left(\begin{matrix} \bar{J}_0 & \bar{J}_0 \\ \mu \bar{B} & \bar{B} \end{matrix} \right)^{-1} \left\{ \begin{matrix} \bar{J}_0 \\ \bar{J}_0 \end{matrix} \left[\bar{Y}_{obs} - \bar{f}(\bar{P}_0) \right] + \mu \bar{B} \left(\bar{\gamma} - \bar{B} \bar{P}_0 \right) \right\}. \quad (3.36)$$

Conforme mostrado antes, no caso de informação relativa $\bar{\gamma} = \bar{0}$ e $\bar{B} = \bar{R}$ (ver equação (3.14)); assim, (3.36) transforma-se em

$$\bar{\Delta P} = \left(\begin{matrix} \bar{J}_0 & \bar{J}_0 \\ \mu \bar{R} & \bar{R} \end{matrix} \right)^{-1} \left\{ \begin{matrix} \bar{J}_0 \\ \bar{J}_0 \end{matrix} \left[\bar{Y}_{obs} - \bar{f}(\bar{P}_0) \right] - \mu \bar{R} \bar{R} \bar{P}_0 \right\}. \quad (3.37)$$

Para informação absoluta $\bar{\gamma} \neq 0$ e $\bar{B} = \bar{A}$ (ver equação (3.16)) e a equação (3.36) toma a forma

$$\bar{\Delta P} = \left(\begin{matrix} \bar{J}_0 & \bar{J}_0 \\ \mu \bar{A} & \bar{A} \end{matrix} \right)^{-1} \left\{ \begin{matrix} \bar{J}_0 \\ \bar{J}_0 \end{matrix} \left[\bar{Y}_{obs} - \bar{f}(\bar{P}_0) \right] + \mu \bar{A} \left(\bar{\gamma} - \bar{A} \bar{P}_0 \right) \right\}. \quad (3.38)$$

3.4 – INVERSÃO E REGULARIZAÇÃO

Em Geofísica, os dados normalmente contêm ruído e não são continuamente amostrados; além disso, a amostragem é geralmente truncada nos seus extremos. O resultado disso tudo é que o problema geofísico inverso representa um problema mal posto, o que significa que ele pode não ter solução ou existirem inúmeras soluções (não unicidade) ou, ainda, que hajam soluções instáveis (pequenas variações nas observações produzindo grandes variações nas soluções), sem nenhum significado físico e/ou geológico.

Na tentativa de transformar um problema mal posto em bem posto, as seguintes metodologias têm sido aplicadas: planejamento de experimento, redução da demanda de informação e introdução de informação a priori.

Na aplicação do planejamento de experimento procura-se estabelecer as condições sob as quais cada observação deve ser tomada a fim de que os parâmetros de um modelo pré-estabelecido sejam estimados com razoável precisão. O resultado de um planejamento de experimento pode indicar, por exemplo, o intervalo, o tempo e o tamanho da amostragem a fim de que se obtenham boas estimativas dos parâmetros do modelo que representa a fonte dos dados amostrados. Os procedimentos usados no planejamento de experimento geralmente utilizam-se do produto da transposta da matriz de sensibilidade pela matriz de sensibilidade. Alguns desses procedimentos são a maximização do seu determinante (equivalente à maximização do produto dos seus autovalores), a maximização do seu menor autovalor e a maximização do seu traço (Box & Lucas 1959, Box & Draper 1971, Glenn & Ward 1976, Beck & Arnold 1977).

Embora o planejamento de experimento possa melhorar a condição do problema mal posto, ele é pouco usado de modo preciso na Geofísica. Sua aplicação na solução dos problemas de Geofísica tem sido quase sempre de modo empírico, a partir de regras práticas ou pela observação de ábacos pré-calculados. Por exemplo, toma-se como distância entre os eletrodos de corrente um valor aproximadamente igual a 3 a 10 vezes a profundidade de exploração desejada em uma sondagem elétrica vertical ou associa-se a profundidade pelicular (*skin depth*) à profundidade de exploração em sondagens eletromagnéticas. O uso de modelagem é outro exemplo de planejamento de experimento, esse porém mais criterioso do que o empirismo das regras práticas. A rigor, a primeira etapa de um projeto de Geofísica Aplicada deve ser o

planejamento de experimento, porém nem sempre isso é possível por razões econômicas, de modo que apenas as regras práticas são usadas.

A redução da demanda de informação, de modo a retirar-se das medidas geofísicas o que elas podem oferecer (Backus & Gilbert 1967, 1968), embora importante na transformação de um problema mal posto em bem posto, pode implicar uma subparametrização da subsuperfície e gerar a supressão de estruturas geológicas importantes. Um exemplo clássico, retirado da aplicação dos métodos elétricos, é a determinação da condutância elétrica (produto da condutividade pela espessura) e não a condutividade e a espessura individualmente. Para que seja minimizada a perda de resolução no modelo geológico, entretanto, no lugar da subparametrização, os algoritmos correntes de inversão introduzem uma sobreparametrização através da divisão do modelo da subsuperfície em um grande número de blocos (prismas), procurando encontrar a propriedade física de cada bloco (Guillen & Menichetti 1984, DeGroot-Hedlin & Constable 1990, Barbosa 1991). Este procedimento, que é o oposto da redução da demanda de informação, gera, entretanto, enorme instabilidade no processo de inversão, que somente pode ser controlado com a introdução de informação a priori.

De acordo com Tikhonov & Arsenin (1977), no trato de problemas mal postos, não deve ser procurada a solução exata do problema. Deve, sim, ser procurada uma solução aproximada de um conjunto equivalente de problemas bem postos. A solução aproximada somente pode ser encontrada, entretanto, se for usada informação suplementar (a priori) sobre a solução. A informação a priori pode ser de 2 tipos (Tikhonov & Arsenin 1977): quantitativa e qualitativa. O uso de informação quantitativa leva ao conceito de quasisolução e aos métodos da seleção, da quasisolução, da substituição da equação original e da quasiinversão. Informação do tipo qualitativo, por outro lado, leva ao método da regularização.

Os métodos relacionados à informação de caráter quantitativo são muito usados nos problemas de inversão. No método da seleção, por exemplo, a solução é obtida calculando a resposta de vários modelos e escolhendo aquele que produz a resposta mais próxima dos valores medidos. Esse é o procedimento conhecido como inversão por tentativa e erro (Rokityansky 1982, Tarantola 1987). Já no método da substituição da equação original um parâmetro é adicionado à diagonal da matriz resultante do produto da transposta da matriz de sensibilidade pela matriz de sensibilidade.

Nos métodos que se utilizam da informação de natureza quantitativa é necessário que o conjunto de modelos possíveis tenha sempre um correspondente no conjunto de dados (propriedade da compacidade), para que o problema possa ser resolvido. Com o método da regularização, que utiliza informação qualitativa, isso não é necessário, o que torna esse último mais poderoso.

No método da regularização a solução aproximada z_α de um problema do tipo

$$Az = u_\delta \quad (3.39)$$

é procurada usando um operador de regularização, $R(u_\delta, \alpha)$, aplicado em u_δ , sendo α , o parâmetro de regularização, uma função de u_δ e δ . Aqui, u_δ representa um conjunto de medidas discretas, contaminadas com ruído, que se desviam de u_T , o conjunto de valores contínuos, exatos, por uma quantidade menor ou igual a δ , desvio esse medido segundo uma norma específica (a norma 2, por exemplo). Com a aplicação do operador de regularização, somente os modelos, z_δ , que têm correspondência ao conjunto de dados são selecionados como possíveis soluções, garantindo estabilidade e a solução do problema.

De acordo com Tikhonov & Arsenin (1977), os operadores de regularização podem ser construídos através da minimização de um funcional, denominado funcional suavizante, estabelecido a partir da resolução do seguinte problema: minimizar um funcional estabilizador, $\Omega(z)$, contendo informações qualitativas sobre a solução desejada, sujeito a que os dados sejam reproduzidos com um erro mínimo, medido segundo uma norma específica. Usando-se o método dos multiplicadores de Lagrange e a norma 2 constrói-se o funcional suavizante

$$M_\alpha(z, u_\delta) = \|Az - u_\delta\|^2 + \alpha \Omega(z). \quad (3.40)$$

A solução z_α , que minimiza o funcional suavizante M_α , é uma solução aproximada de (3.39).

3.4.1 – Funcionais estabilizadores

Um dos funcionais estabilizadores apresentados por Tikhonov & Arsenin (1977) é

$$\Omega(z) = \|z - z_1\|^2, \quad (3.41)$$

em que z_1 é um conjunto contendo um modelo conhecido a priori (z_1 é equivalente a \bar{P}_{ref} da equação (3.3)). Neste caso, a solução do problema mostrado em (3.39) deve ficar próxima do modelo conhecido.

Outros funcionais estabilizadores apresentados por Tikhonov & Arsenin têm a forma

$$\Omega(z) = \int \sum_{r=0}^p q_r \left(\frac{d^r z}{dx^r} \right)^2 dx. \quad (3.42)$$

Quando q_r são constantes não negativas para $r = 0, 1 \dots p-1$ e positivas para $r = p$, eles são chamados de estabilizadores de ordem p com coeficientes constantes ou estabilizadores de Tikhonov.

Tomando-se em (3.42) $p = 0$ e $q_0 = 1$ obtém-se

$$\Omega(z) = R_0 = z^2 = z^T z = \|z\|^2, \quad (3.43)$$

que é um caso particular do estabilizador mostrado em (3.41), quando $z_1 = 0$ (confrontar com equação (3.5)). Aqui a solução do problema é aquela que fica mais próxima da origem no espaço construído com as possíveis soluções.

Para $p = 1$, $q_0 = 0$ e $q_1 = 1$ em (3.42) tem-se

$$\Omega(z) = R_1 = \int \left(\frac{dz}{dx} \right)^2 dx, \quad (3.44)$$

que na forma discreta pode ser representado por (Constable et al. 1987)

$$R_1 = \sum_{i=1}^{N-1} (z_{i+1} - z_i)^2 = \|\partial z\|^2, \quad (3.45)$$

sendo N o número de parâmetros do modelo e ∂ o operador matricial de dimensão $N \times N$ da primeira derivada. De modo análogo, pode-se obter estabilizadores que correspondem a derivadas de ordem superior, todos eles introduzindo a informação a priori de suavização nos parâmetros dos modelos. Assim, para $p = n$ e usando valores adequados para q em (3.42), obtém-se

$$R_n = \|\partial^n z\|^2, \quad (3.46)$$

em que ∂^n é o operador matricial da derivada de ordem n , dada por

$$\partial^n = \underbrace{\partial \cdot \partial \cdot \partial \dots \partial}_n. \quad (3.47)$$

Os elementos desse operador matricial podem ser determinados por meio do seguinte desenvolvimento: supondo que n seja a ordem da derivada e que $\mathfrak{G}(i,j)$ seja um elemento genérico da matriz ∂^n , com i e j variando desde 1 até o número de parâmetros, então

$$i \leq n \Rightarrow \mathfrak{G}(i,j) = 0$$

$$i > n \begin{cases} j = (i-n), i \Rightarrow \mathfrak{G}(i,j) = (-1)^w \binom{n}{n+j-i} \\ (i-n) > j > i \Rightarrow \mathfrak{G}(i,j) = 0 \end{cases} \quad (3.48)$$

sendo $w = n+1+j-i$ e $\binom{n}{n+j-i}$ coeficientes binomiais.

Como neste trabalho de tese os operadores de derivadas de várias ordens são os principais estabilizadores empregados, vamos ilustrar com a construção dos operadores de primeira e de terceira derivadas. Considere-se que o número de parâmetros a serem estimados em um problema de inversão seja 6. Usando-se as relações mostradas em (3.48) obtém-se para o operador de primeira derivada

$$R_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.49)$$

e para o operador da terceira derivada

$$R_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.50)$$

Para o caso de problemas de inversão que envolvem modelos de uma superfície bidimensional, como neste trabalho de tese, os operadores de derivadas devem ser aplicados aos parâmetros obedecendo a sua distribuição espacial nas direções horizontal e vertical. Assim, deve

ser construído um operador para ser aplicado segundo a distribuição horizontal dos parâmetros e outro para ser aplicado segundo a distribuição vertical. Por exemplo, para a distribuição de parâmetros mostrada na Figura 3.1, um operador aplicado na direção horizontal atua seqüencialmente nos parâmetros 1 a 4, 5 a 8 e 9 a 12, enquanto um operador aplicado na direção vertical atua seqüencialmente nos parâmetros 1, 5 e 9, nos parâmetros 2, 6 e 10, nos parâmetros 3, 7 e 11 e nos parâmetros 4, 8 e 12.

P1	P2	P3	P4
P5	P6	P7	P8
P9	P10	P11	P12

Figura 3.1 – Disposição dos parâmetros em um modelo bidimensional

Ainda para a distribuição mostrada na Figura 3.1, um operador da segunda derivada atuando segundo a distribuição horizontal dos parâmetros deve ter a seguinte forma

$$R_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad (3.51)$$

enquanto um operador da primeira derivada atuando na direção vertical

$$R_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.52)$$

Na prática, ao se definirem as matrizes R não é necessário que elas contenham as linhas preenchidas com zeros mostradas em (3.51) e (3.52), pois essas linhas não têm efeito algum na resolução do problema. O que será realmente usado será o produto $\overline{R}^T \overline{R}$, conforme mostrado nas equações (3.15) e (3.37).

4 – INVERSÃO DE DADOS MT COM INFORMAÇÃO A PRIORI

O estudo de inversão aqui apresentado será desenvolvido a partir de dados sintéticos de sondagens magnetotelúricas calculadas para uma subsuperfície bidimensional. Serão estudados o modelo de um corpo anômalo de baixa resistividade encaixado em meio acamado e o modelo de dois corpos próximos: um com resistividade maior e o outro com resistividade menor do que a resistividade do meio envolvente.

No modelo usado para inversão, a subsuperfície será parametrizada através de uma grade de prismas retangulares de dimensões variáveis, para que se tenha compatibilidade com a malha de elementos finitos, usada no cálculo do modelo direto. A cada prisma será atribuído um valor constante de resistividade, que poderá ser igual ou diferente àquela dos prismas adjacentes.

O cálculo do modelo direto durante o processo de inversão será realizado por meio de algoritmo desenvolvido pelo Prof. Luiz Rijo, que emprega a técnica dos elementos finitos (Rijo 1977). A malha dos elementos finitos usada na modelagem direta pode coincidir ou não com a grade de prismas retangulares do modelo usado na inversão. Quando não há coincidência, um prisma da grade de inversão pode conter diversos prismas da malha de elementos finitos.

Neste trabalho será usada informação a priori dos tipos absoluta e relativa. Na introdução de informação absoluta os prismas, representantes da subsuperfície, receberão esse tipo de informação e serão excluídos do processo de inversão. Entretanto, para que essa metodologia produza resultados satisfatórios é necessário que esse tipo de informação seja muito confiável.

A confiabilidade de uma informação pode ser qualitativamente estimada a partir da maneira como ela foi obtida. Por exemplo, medidas realizadas em poços geralmente proporcionam informação de elevada confiabilidade. Também o comportamento assintótico da resistividade aparente nas curvas de sondagens MT pode fornecer informação com elevado grau de confiabilidade e pode ser usado para excluir da inversão os prismas correlacionados com a primeira camada (assíntota para elevadas frequências) e com a última camada ou embasamento (assíntota para frequências baixas). Os valores assintóticos relacionadas às camadas intermediárias, entretanto, não poderão ser usadas como informação muito confiável de modo a ser excluídos da inversão. Nesse caso, esses valores podem ser atribuídos aos parâmetros usando-se o

procedimento descrito nas expressões (3.17) e (3.38) e os prismas associados participam do processo de inversão.

Um exemplo do uso de sondagens MT para obtenção de informação a priori confiável é demonstrado com o auxílio da Figura 4.1, onde estão representadas curvas de sondagens MT obtidas sobre 3 modelos unidimensionais. O modelo 1 é constituído por duas camadas com resistividades e espessuras de 100 ohm.m e 120 m e 10 ohm.m e 1000 m, repousando sobre semi-espaço homogêneo (embasamento) com resistividade 1000 ohm.m; O modelo 2 tem duas camadas de resistividades e espessuras de 50 ohm.m e 80 m e 5 ohm.m e 800 m que repousam sobre semi-espaço homogêneo de 500 ohm.m; O modelo 3 tem duas camadas de resistividades e espessuras de 100 ohm.m e 120 m e 2 Ohm.m e 1000 m, que repousam sobre um semi-espaço homogêneo com 1000 ohm.m.

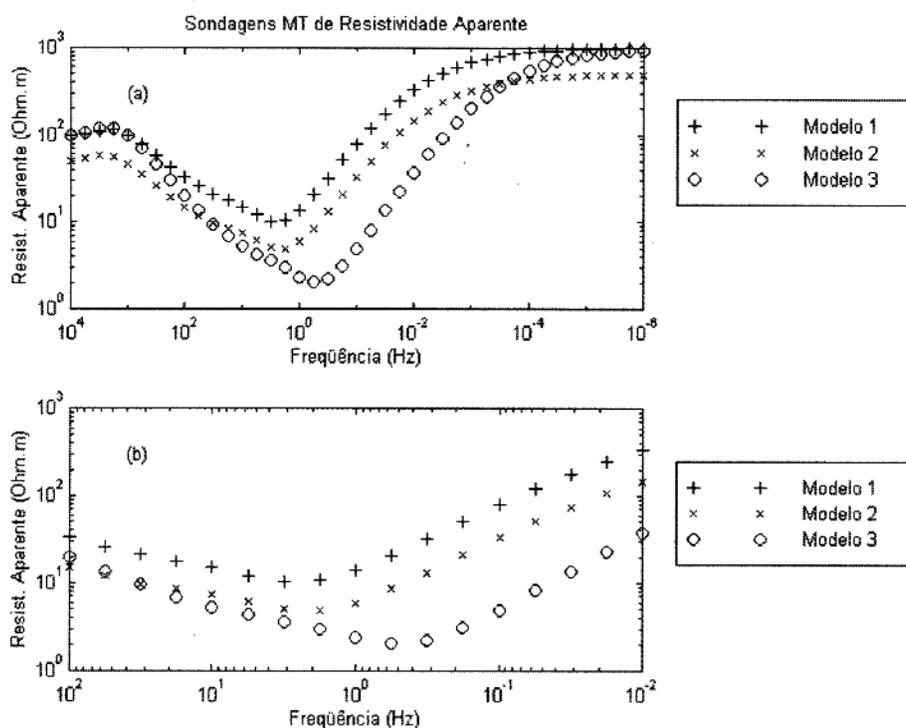


Figura 4.1 – Sondagens MT mostrando o comportamento assintótico dos valores de resistividade aparente (a) e não assintóticos (b) para os mesmos modelos. Os modelos estão descritos no texto.

Na Figura 4.1a as sondagens magnetotélúricas mostram os valores assintóticos que correspondem às resistividades da primeira camada e do semi-espço que serve de embasamento. Esses valores podem ser tomados como sendo de elevada confiabilidade. Por outro lado, na Figura 4.1b as medidas não alcançaram os valores assintóticos para essas mesmas camadas, não havendo confiabilidade suficiente para definirem-se os seus valores de resistividade.

Um outro modo de adquirir informação confiável pode vir da inversão de dados MT obtidos sobre uma subsuperfície bidimensional, usando um modelo que presume uma subsuperfície unidimensional (acamada). Para ilustrar esse procedimento, considere-se que 19 sondagens MT foram obtidas sobre uma Terra bidimensional, caracterizada por uma estrutura condutora encaixada em um meio acamado (Figura 4.2a). Invertendo individualmente cada uma das sondagens usando algoritmo em que o modelo é presumido ser unidimensional resulta na distribuição de resistividade mostrada na Figura 4.2b. Observa-se nessa figura que o resultado das sondagens 1, 2, 3, 17, 18 e 19 é idêntico, sugerindo uma subsuperfície unidimensional na posição dessas sondagens, longe da estrutura condutora bidimensional localizada no centro da área. Isso ocorreu porque a estrutura condutora encontra-se muito afastada daquelas sondagens e pouco contribuiu para os valores nelas medidos. Invertendo-se, a seguir, os mesmos dados, com auxílio de algoritmo que pressuponha uma subsuperfície bidimensional, é possível admitir-se como verdadeira a distribuição de resistividade dada pela inversão 1D e eliminar da inversão 2D os parâmetros correspondentes a essa parte da subsuperfície, mantendo somente os parâmetros correspondentes ao restante da subsuperfície (posição entre as sondagens 3 e 17). Caso o grau de confiabilidade do resultado da inversão 1D não seja muito alto, os parâmetros correspondentes às posições abaixo das 6 sondagens referidas devem também ser incluídos na inversão 2D, usando-se o resultado da inversão 1D como vínculo absoluto desses parâmetros (nesse caso, um peso não muito forte deve ser atribuído aos valores absolutos, de modo que eles possam flutuar até alcançarem valores mais adequados).

A informação a priori relativa a ser incorporada aos parâmetros será de diversos tipos, variando desde a suavidade geral, que pressupõe igualdade entre todos os parâmetros (representada pelo operador da primeira derivada), até informação que procura ressaltar características dos corpos anômalos a serem identificados como, por exemplo, a curvatura (ressaltada pelo operador da segunda derivada) ou a simetria (ressaltada pelo operador da terceira

derivada). Operadores de derivadas de ordem superior a três também serão empregados com a finalidade de verificar a sua efetividade na identificação de múltiplos corpos anômalos.

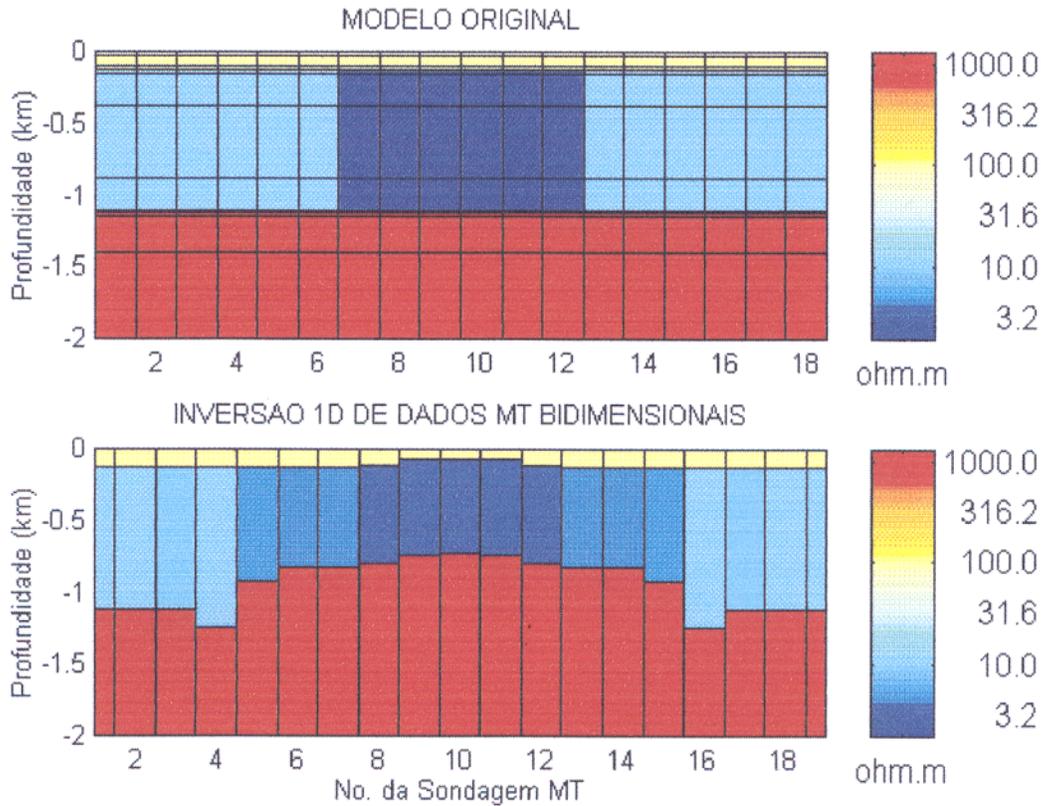


Figura 4.2 – Resultado da inversão de dados referentes a modelo bidimensional, realizada com algoritmo que utiliza modelo unidimensional.

A introdução de informação a priori relativa será feita usando a expressão (3.36), com \bar{R} sendo definido de acordo com as expressões (3.45) a (3.47), que representam casos particulares dos funcionais estabilizadores definidos por Tikhonov & Arsenin (1977).

Conforme descrito na seção 3.4.1, os operadores de derivadas devem ser aplicados aos parâmetros de acordo com a sua distribuição horizontal e vertical; isto é, deve ser aplicado um operador para a distribuição na horizontal e outro para a distribuição na vertical. Com isso a expressão (3.37) transforma-se em

$$\bar{\Delta P} = \left[\bar{J}_0^T \bar{J}_0 + \mu \left(\bar{R}_h^T \bar{R}_h + \bar{R}_v^T \bar{R}_v \right) \right]^{-1} \left\{ \bar{J}_0^T \left[\bar{Y}_{obs} - \bar{f}(\bar{P}_0) \right] - \mu \left(\bar{R}_h^T \bar{R}_h + \bar{R}_v^T \bar{R}_v \right) \bar{P}_0 \right\}, \quad (4.1)$$

em que os índices h e v colocados em R representam horizontal e vertical.

Com base na análise desenvolvida na seção 3.3, o procedimento de inversão será realizado com a técnica dos incrementos, pois essa técnica, conforme demonstrado, é mais segura no sentido de sempre levar a um resultado aceitável, apesar de ser um pouco mais lenta, do ponto de vista computacional, do que a técnica do *jumping*.

O processamento da inversão será feito com o algoritmo de Marquardt descrito em Bevington (1969), procurando-se minimizar a norma 2, por ter esse algoritmo, devido à sua eficiência, tornado-se um procedimento padrão na resolução de problemas não lineares de inversão, em que a norma 2 é minimizada.

Em resumo, o algoritmo de Marquardt combina a eficiência que o algoritmo da pesquisa do gradiente ou da máxima declividade (*steepest descent*) apresenta longe de um mínimo da função objetivo, com a eficiência apresentada pelo algoritmo do Hessiano ou da curvatura da função objetivo (método de Newton), quando o mínimo encontra-se próximo da aproximação \bar{P}_0 da solução (Bevington 1969).

Com o algoritmo de Marquardt o valor atual dos parâmetros em cada iteração é atualizado pelo incremento

$$\Delta \bar{P} = \left[\bar{J}_0^T \bar{J}_0 + \mu \left(\bar{R}_h^T \bar{R}_h + \bar{R}_v^T \bar{R}_v \right) + \lambda \bar{I} \right]^{-1} \left\{ \bar{J}_0^T \left[\bar{Y}_{obs} - \bar{f}(\bar{P}_0) \right] - \mu \left(\bar{R}_h^T \bar{R}_h + \bar{R}_v^T \bar{R}_v \right) \bar{P}_0 \right\}, \quad (4.2)$$

em que λ é o parâmetro de Marquardt, cujo valor permite alternar entre o algoritmo da pesquisa do gradiente (valores muito grandes de λ) e o algoritmo do Hessiano (valores muito pequenos de λ). Na expressão (4.2), o primeiro termo do produto (sem $\lambda \bar{I}$) é uma aproximação do Hessiano da função objetivo, enquanto o segundo termo é o gradiente da função objetivo. Desse modo, com o algoritmo de Marquardt o parâmetro inicial, a cada iteração, é atualizado por um valor controlado pela matriz de curvatura (Hessiano) que é aplicado na direção do gradiente da função objetivo, o que possibilita convergência em direção a um mínimo.

O estudo de inversão de dados MT com informação a priori sobre os parâmetros desenvolvido nesta tese será apresentado a seguir com a abordagem dos seguintes problemas:

- (a) Determinar a largura e a espessura de um corpo condutor colocado em um meio homogêneo resistivo, a partir da estimativa das dimensões dos blocos prismáticos representativos do modelo da subsuperfície. Neste problema são conhecidas as resistividades do corpo e do meio,

procurando-se estimar o tamanho das células dos elementos finitos, usando-se como funcional estabilizador o operador da primeira derivada.

- (b) Determinar a localização de um e de dois corpos envolvidos por meio homogêneo. No caso de dois corpos, um deles mais resistivo e o outro menos resistivo que o meio que os envolve. Neste problema os parâmetros a estimar são as resistividades das células dos elementos. O estudo será desenvolvido usando os funcionais estabilizadores representados pelas derivadas de ordens 1 a 5, os quais serão analisados para se estabelecer qual deles permite melhor resolução do problema.

4.1 – DETERMINAÇÃO DA LARGURA E ESPESSURA DE UM CORPO CONDUTOR EM MEIO HOMOGENEO

No procedimento usual de inversão para modelos bidimensionais pressupõe-se para a subsuperfície uma malha constituída por blocos prismáticos de dimensões fixas e procura-se estimar a propriedade física, mantida constante em cada bloco. Aqui será abordada uma nova metodologia: a propriedade física resistividade em cada bloco é pressuposta conhecida, procurando-se estimar as dimensões (em x e z) da partição da malha de blocos que representa a subsuperfície. Desse modo, ao se resolverem os parâmetros da inversão, a geometria de um corpo condutor (largura e espessura) envolvido por meio homogêneo poderá ser recuperada. Isso torna-se possível pois, como a resistividade foi fixada, a ambigüidade fundamental da Geofísica (produto da propriedade física pelo volume) foi eliminada; assim, o volume (relacionado às dimensões dos blocos) pode ser estimado com relativa precisão.

O estudo demonstra que os melhores resultados são alcançados quando a informação a priori sobre a propriedade física é de elevada confiabilidade e os dados não contêm ruído, embora a existência de ruído nos dados e erros no valor da propriedade física possam ser admitidos, sem perda substancial na qualidade dos resultados.

Os dados de resistividade e fase aparentes usados neste problema de inversão foram gerados para o modelo de uma subsuperfície homogênea de resistividade igual a 100 ohm.m, onde encontra-se encaixado um corpo condutor (10 ohm.m) de largura igual a 500 m, espessura (ou altura) de 1000 m e cujo topo encontra-se à profundidade de 125 m da superfície. A Figura 4.3

mostra a geometria do modelo, evidenciando o corpo condutor e os blocos prismáticos usados para representar a subsuperfície, tanto para a geração dos dados pela técnica dos elementos finitos, como para os cálculos realizados no processo de inversão.

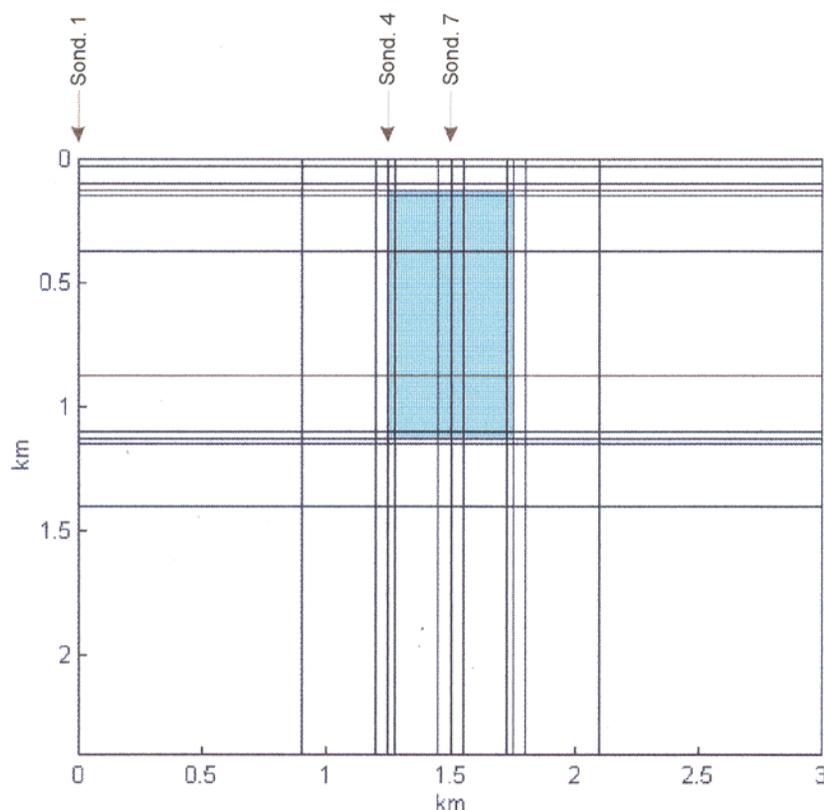


Figura 4.3 – Modelo usado para gerar os dados usados na resolução do problema da determinação da largura e extensão em profundidade de um corpo condutor em meio resistivo. O modelo está dividido em células, cujas dimensões serão determinadas no processo de inversão.

Os dados de resistividade e fase aparentes foram gerados na forma de 13 sondagens MT localizadas na interface ar-Terra (superfície), em posições que coincidem com os vértices dos blocos prismáticos. Durante o processo de inversão, o cálculo das sondagens foi feito para essas mesmas posições, embora a dimensão horizontal dos blocos tenha variado. As frequências usadas nas sondagens variaram entre 100 e 0,01 Hz, com 4 frequências por década logarítmica, totalizando 19 frequências. Valores de resistividade aparente das sondagens 1, 4 e 7, cuja localização é mostrada na Figura 4.3, estão representados na Figura 4.4. Os dados de resistividade aparente gerados para as frequências 100, 10, 1, 0,1 e 0,01 Hz aparecem na Figura 4.5 representados na posição das sondagens, mostrando a distribuição horizontal da resistividade.

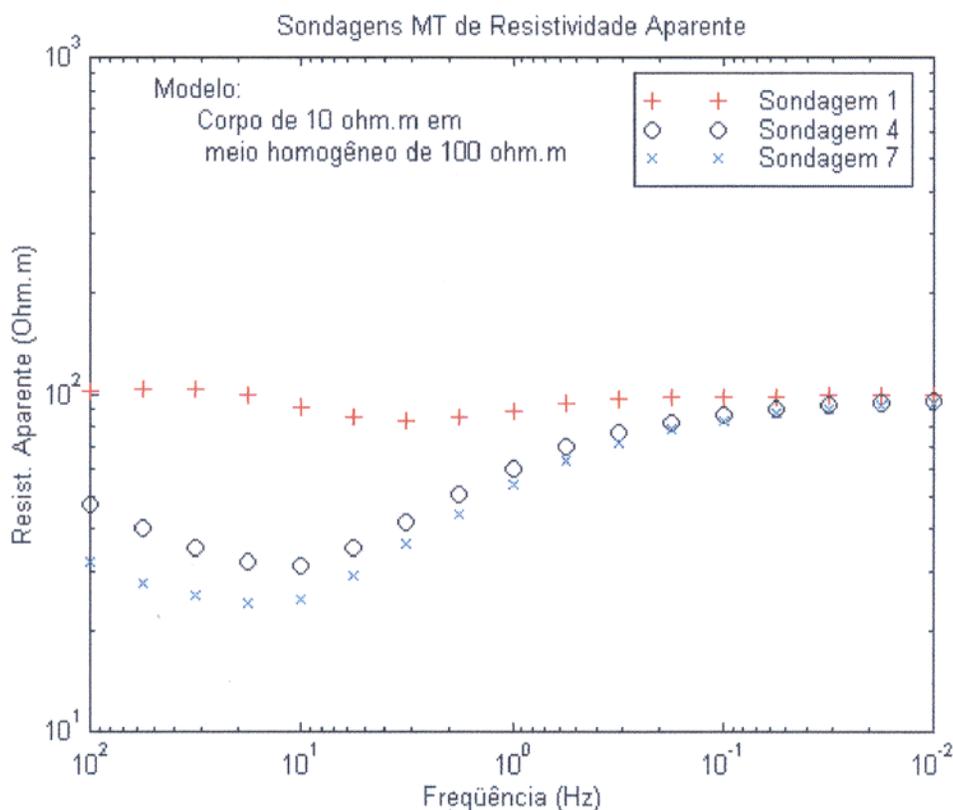


Figura 4.4 – Valores de resistividade aparente das sondagens 1, 4 e 7 calculados para o modelo da Figura 4.3.

A representação dos dados de resistividade aparente mostrada nas Figuras 4.4 e 4.5 pode auxiliar no estabelecimento do modelo inicial a ser usado na inversão. É evidente nas figuras a existência de uma zona condutora com largura um pouco menor do que 1 km envolvida por meio homogêneo de possivelmente 100 ohm.m. Informações adicionais sobre o modelo devem ser conseguidos de modo independente através de outros métodos geofísicos ou da Geologia, como por exemplo as informações sobre a resistividade do corpo condutor e a profundidade do seu topo.

Durante os diversos procedimentos de inversão desenvolvidos, foi sempre usado o mesmo modelo inicial representado por um corpo de 10 ohm.m, com largura de 700 m, altura de 650 m e topo a 75 m da superfície. O meio envolvente foi sempre tomado com a resistividade de 100 ohm.m.

A primeira tentativa de inversão foi feita com dados sem ruído e sem atribuição de vínculos (informação a priori) aos parâmetros. Nessa tentativa não foi possível obter nenhum resultado,

pois não houve convergência no processo de inversão. Isso ocorreu devido à instabilidade inerente ao problema inverso.

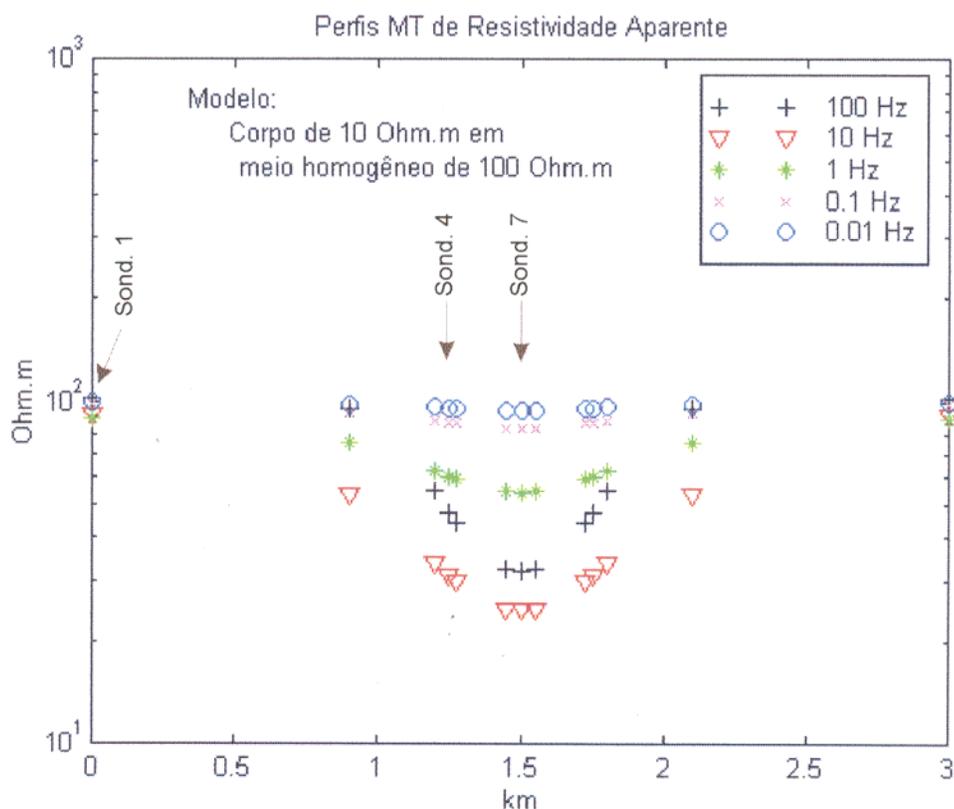


Figura 4.5 – Valores de resistividade aparente em 5 frequências calculados para 13 sondagens usando o modelo da Figura 4.3. Os valores de resistividade aparente estão representados nas posições das sondagens.

Na segunda tentativa de inversão, ainda com dados sem ruído, foi usado como estabilizador o vínculo de igualdade entre os parâmetros, representado pelo operador da primeira derivada. Para isso foi construído um operador para atuar nas dimensões horizontais dos blocos prismáticos e outro para atuar nas dimensões verticais, obedecendo ao que foi apresentado na seção 3.4.1. O resultado alcançado foi excelente conforme pode ser observado na Figura 4.6, onde estão representados o modelo original, o modelo inicial usado na inversão e o modelo resultante da inversão, após 10 iterações. A Tabela 4.1 mostra um resumo dos resultados obtidos.

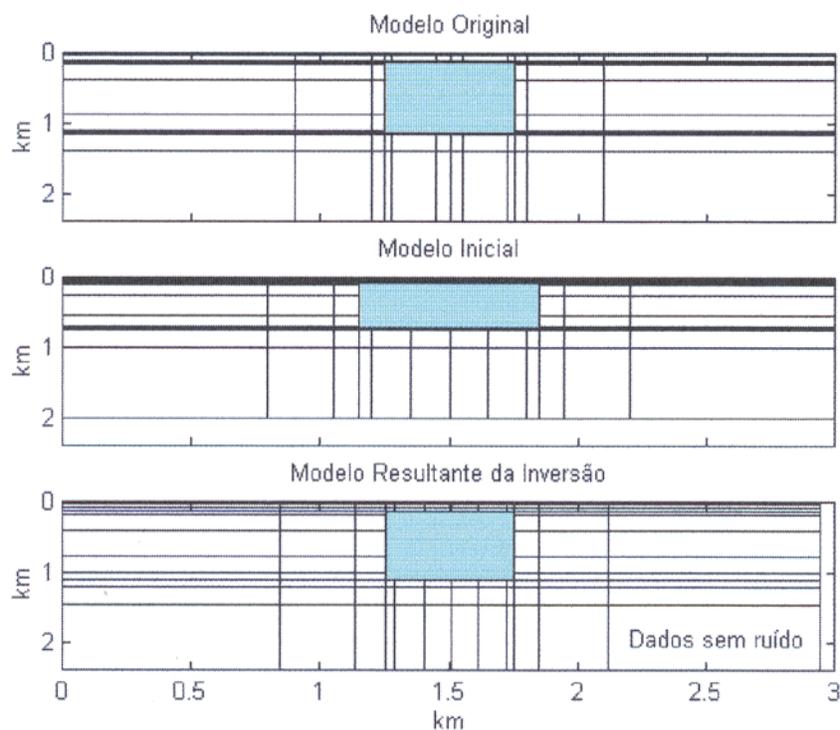


Figura 4.6 – Inversão de dados sem ruído, que permitiu recuperar o corpo anômalo a partir das dimensões das células.

Tabela 4.1 – Resumo da inversão de dados sem ruído.

	Dimensões Originais (m)	Modelo Inicial (m)	Resultado da Inversão (m)	Varição nas Dimensões (%)
Largura	500	700	500,49	0,098
Altura	1000	650	988,56	1,144
Topo	125	75	122,29	-2,168

Na terceira tentativa de inversão, foram invertidos dados contaminados por ruído gaussiano aditivo com 5% de desvio padrão e usado o vínculo de igualdade entre os parâmetros para estabilizar o processo. Nessa tentativa não foi possível obter um resultado fisicamente satisfatório, embora tenha havido convergência no processo de inversão. O resultado foi considerado não satisfatório porque uma das células apresentou valor negativo para a sua largura. Para contornar o problema foi aplicada uma transformação nos parâmetros, de modo que eles não

pudessem assumir valores negativos durante o processo de inversão, isto é, foi introduzido um vínculo de positividade. Esse vínculo poderia ter sido implementado através da logaritmização simples dos parâmetros conforme proposto por Rijo et al. (1977); optou-se entretanto pela logaritmização mais elaborada sugerida por Barbosa (1998). Assim, antes da inversão cada parâmetro P_j foi transformado para P_j^* através de

$$P_j^* = -\ln\left(\frac{P_{\max} - P_j}{P_j - P_{\min}}\right),$$

em que P_{\max} e P_{\min} representam respectivamente os valores máximo e mínimo que os parâmetros podem alcançar. Após a última iteração do processo de inversão foi aplicada uma transformação inversa em P_j^* para recuperar os parâmetros P_j por meio de

$$P_j = \frac{P_{\max} - P_{\min}}{1 + e^{-P_j^*}} + P_{\min}$$

Observa-se aqui que a transformação acima, além de garantir o vínculo de positividade para os parâmetros, permite vincular um outro tipo de informação a priori que é a dos seus limites superior e inferior. Na transformação aqui usada, foi tomado um único valor máximo e um único mínimo para todos os parâmetros, embora as expressões acima permitam que usem-se limites individuais para cada parâmetro.

Com a introdução do vínculo adicional de positividade, o resultado da inversão tornou-se satisfatório, conforme pode ser observado na Figura 4.7. A largura e a extensão em profundidade do corpo condutor foram recuperados com boa aproximação, porém a profundidade do topo foi mal resolvida. A Tabela 4.2 mostra um resumo dos resultados obtidos.

Tabela 4.2 – Resumo do resultado da inversão de dados com 5% de ruído gaussiano.

	Dimensões Originais (m)	Modelo Inicial (m)	Resultado da Inversão (m)	Varição nas Dimensões (%)
Largura	500	700	487,66	-2,47
Altura	1000	650	1092,33	9,23
Topo	125	75	60,16	-51,87

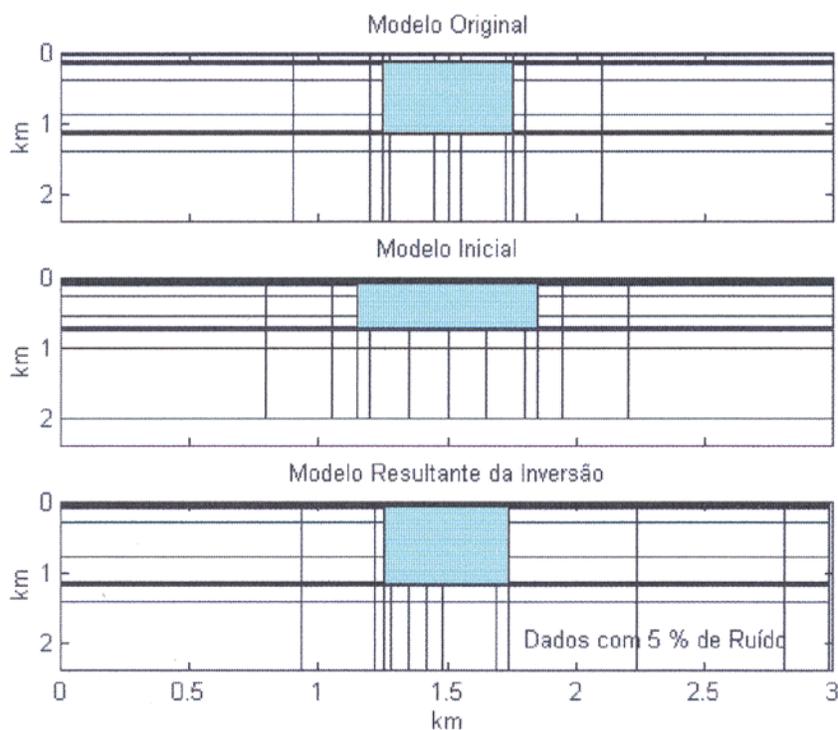


Figura 4.7 – Inversão de dados com 5% de ruído gaussiano.

Para avaliar se os erros na estimativa dos parâmetros estão ligados à imprecisão no cálculo do modelo direto através da técnica dos elementos finitos, a malha resultante da inversão dos dados contaminados por 5 % de ruído gaussiano foi refinada (seus elementos foram reduzidos na dimensão horizontal) e realizado um novo cálculo do modelo direto. Esse resultado foi comparado com o modelo direto obtido com a malha resultante da inversão. A maior discrepância entre os valores de resistividade aparente calculados para a malha resultante da inversão e a mesma malha refinada foram inferiores a 10 % e ocorreram para a frequência de 100 Hz. A comparação é apresentada na Figura 4.8 para os valores de resistividade aparente das sondagens magnetotelúricas S11 a S16.

Adicionalmente, foram invertidos dados contaminados com 3% e 10% de ruído gaussiano. Os resultados alcançados podem ser considerados satisfatórios, com a largura e a extensão em profundidade do corpo sendo recuperados com boa aproximação e o seu topo mal resolvido (Figura 4.9 e Tabela 4.3).

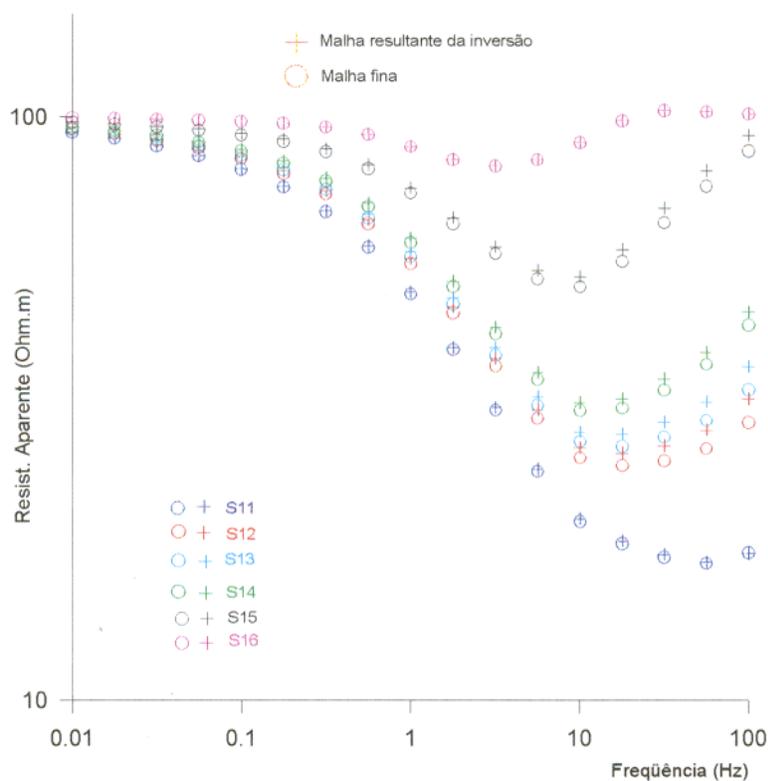


Figura 4.8 – Comparação entre o modelo direto calculado para a malha de elementos finitos resultante da inversão e para uma malha mais fina.

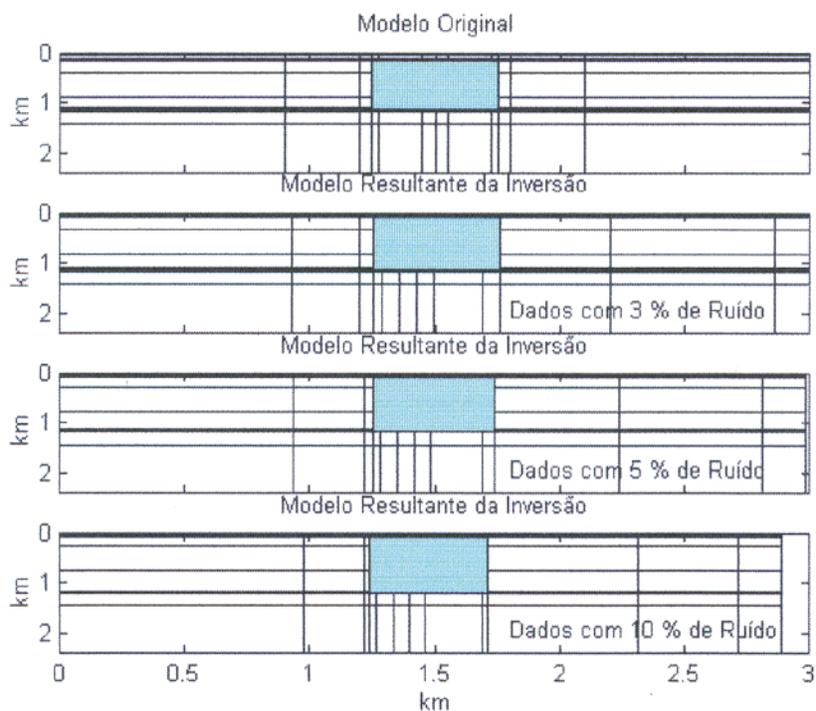


Figura 4.9 – Inversão de dados contaminados por 3%, 5% e 10% de ruído gaussiano. O modelo inicial foi idêntico ao mostrado na Figura 4.7.

Tabela 4.3 – Resultados da inversão de dados contaminados com ruídos de 3%, 5% e 10%.

	Dim. Orig. (m)	Result. (ruído de 3%)		Result. (ruído de 5%)		Result. (ruído de 10%)	
		Metros	Var.(%)	Metros	Var.(%)	Metros	Var.(%)
Largura	500	508,47	1,69	487,66	-2,47	470,73	-5,85
Altura	1000	1078,57	7,86	1092,33	9,23	1123,09	12,31
Topo	125	60,12	-51,90	60,16	-51,87	60,28	-51,78

A seguir testou-se o uso de informação a priori errada sobre os valores das resistividades do corpo e do meio. Os dados MT usados na inversão foram contaminados com ruído gaussiano de 5 %. Os resultados alcançados estão representados nas Figuras 4.10 e 4.11, que mostram os erros induzidos na geometria do corpo causados pelo uso de informação a priori errada nos valores de resistividade do corpo (Figura 4.10) e do meio (Figura 4.11). Esses resultados demonstram que se a informação a priori sobre as resistividades não for de elevada confiabilidade, as estimativas para as dimensões das células podem levar a uma resolução pobre da geometria do corpo. A Figura 4.10, por exemplo, mostra que a resolução da largura e da altura do corpo podem ser consideradas aceitáveis somente se o erro no valor da resistividade do corpo é inferior a ± 20 %.

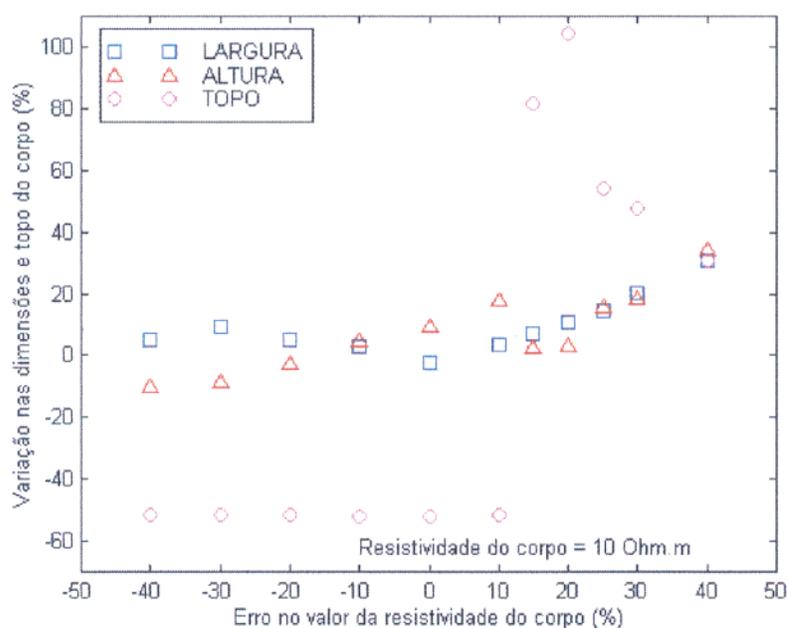


Figura 4.10 – Resultados da inversão com o uso de resistividade errada para o corpo prismático anômalo. A resistividade do meio envolvente foi presumida corretamente.

A representação mostrada na Figura 4.11, por outro lado, indica que os erros na resistividade do meio influenciam mais a estimativa da altura do corpo do que da sua largura. Os valores da largura podem ser considerados aceitáveis se o erro na resistividade do meio varia entre -15 % e 20 %, enquanto a altura do corpo geralmente é mal estimada, mesmo com erros pequenos na resistividade do meio. A resistividade do meio envolvente é, entretanto, um parâmetro que pode ser facilmente obtido. Na Figura 4.4, por exemplo, a curva da sondagem 1 sugere um meio de resistividade 100 ohm.m, assim como os valores de resistividade aparente para as baixas frequências das sondagens 4 e 7. Também na Figura 4.5 observa-se que os valores de resistividade aparente tendem para a resistividade do meio nas posições longe da anomalia de condutividade.

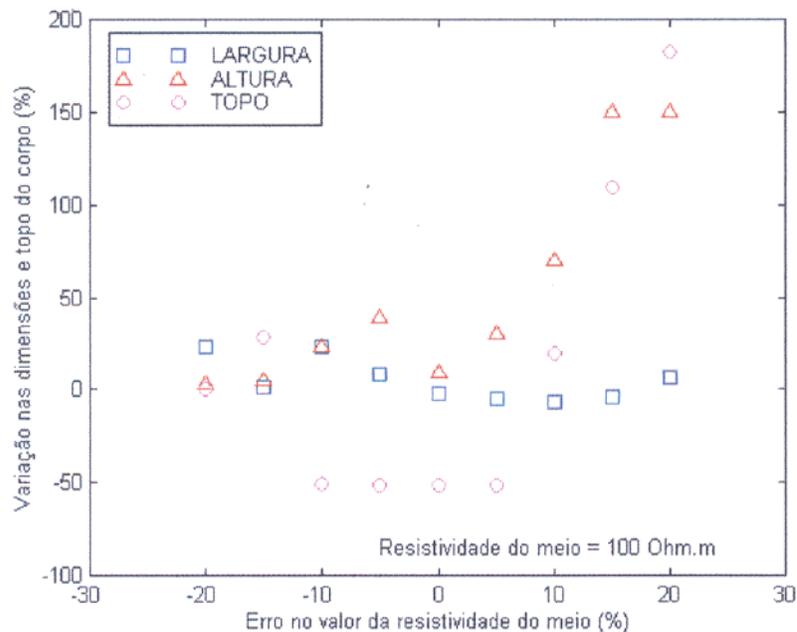


Figura 4.11 – Resultados da inversão com o uso de resistividade errada para o meio que envolve o corpo prismático. A resistividade do corpo prismático foi presumida corretamente.

As Figuras 4.10 e 4.11 mostram que o topo do corpo será sempre mal estimado, mesmo que os erros nas resistividades do corpo e do meio permaneçam pequenos.

Os resultados apresentados acima mostraram que a contaminação dos dados com ruído não permitiu que a profundidade do topo do corpo fosse bem estimada. Eles indicaram também que o uso de informação a priori errada sobre as resistividades do corpo e do meio leva a uma má

estimativa do topo de corpo. Existe grande possibilidade, entretanto, que a má estimativa do topo do corpo tenha ocorrido por não haver informação suficiente nos dados. Isso pode ser comprovado observando-se as Figuras 4.4 e 4.5 que mostram que para a frequência mais alta (100 Hz) ainda não há informação sobre a resistividade do meio homogêneo. Por outro lado, se isso ocorrer na prática, é possível obter-se um valor aceitável para a profundidade do topo usando-se informações obtidas em perfurações ou através de sondagens elétricas verticais (SEV) com o Método da Eletroresistividade, de modo que a sua pobre estimativa através da técnica aqui apresentada não se torna um fator significativo.

4.2 – APLICAÇÃO DE ESTABILIZADORES REPRESENTADOS POR DERIVADAS

Neste estudo, os funcionais estabilizadores representados pelos operadores de derivadas descritos na expressão (3.47) serão aplicados na inversão de dados de sondagens MT gerados para dois modelos bidimensionais da subsuperfície: o modelo de um corpo prismático mais condutor do que o meio que o envolve e o modelo em que dois corpos prismáticos são envolvidos por um meio homogêneo, sendo um dos corpos mais condutor e o outro menos condutor do que o meio.

Os dados sintéticos de resistividade aparente e fase das sondagens MT, usados neste estudo de inversão, foram gerados com a técnica dos elementos finitos. Para a aplicação da técnica, os modelos da subsuperfície foram subdivididos em células prismáticas de tamanho variável, sendo atribuído um valor constante de resistividade a cada uma das células (Figuras 4.3 e 4.22). Durante o procedimento de inversão, a mesma técnica foi usada para o cálculo do modelo direto. As sondagens MT sintéticas foram geradas na interface ar-Terra (superfície do terreno), em posições que coincidem com os vértices das células dos elementos finitos. No processo de inversão, as sondagens foram calculadas nas mesmas posições das sondagens sintéticas.

Os operadores de derivadas usados como estabilizadores no processo de inversão foram construídos de acordo com a expressão (3.47). No estudo foram usados operadores de derivadas de ordem 1 a 5.

Os operadores foram aplicados às resistividades das células, que são os parâmetros a serem estimados na inversão, obedecendo a sua distribuição espacial nas direções horizontal e vertical.

Foi construído um operador para a direção horizontal e outro para a direção vertical, obedecendo o que foi descrito na seção 3.4.1.

Como mencionado antes, o procedimento de inversão foi realizado com auxílio do algoritmo de Marquardt, aplicado aqui de modo diferente do convencional conforme se descreve a seguir.

No algoritmo de Marquardt, a cada iteração há uma atualização dos parâmetros em uma direção que torna menor a função objetivo e que depende da aproximação do Hessiano (curvatura) da função objetivo. A aproximação do Hessiano, é calculada através da matriz de sensibilidade, também atualizada a cada iteração. Durante o processo, o cálculo da matriz de sensibilidade é responsável pela maior parte do tempo de computação consumido em uma iteração (neste problema particular, são gastos em cada iteração cerca de 5 minutos para o modelo de um corpo e 16 minutos para o modelo de dois corpos numa estação de trabalho IBM RS/6000-370 e são processadas entre 30 e 50 iterações). Para economizar tempo de computação optou-se, então, por atualizar a matriz de sensibilidade somente a cada cinco iterações, exceto nas três últimas iterações, em que a atualização foi feita em cada uma delas. Esse procedimento foi adotado após a realização de exaustivos testes que demonstraram que o resultado obtido é similar, quer a atualização da matriz de sensibilidade seja feita a cada 5 iterações ou a cada iteração; isso ocorre provavelmente porque quando a função objetivo encontra-se estabilizada, o mínimo é bem definido, não importando a trajetória tomada para chegar a ele. O ganho em tempo de computação que se obteve com esse procedimento foi imenso, baixando de 5 minutos para menos de 10 segundos no caso de um corpo e de 16 minutos para menos de 30 segundos para o modelo de dois corpos.

Nas próximas subseções serão apresentados os resultados alcançados na aplicação dos estabilizadores representados pelos operadores de derivadas para os modelos de um corpo condutor envolvido por meio homogêneo e de dois corpos envolvidos por meio homogêneo, sendo um deles mais condutor e o outro menos condutor do que o meio.

4.2.1 – Corpo prismático condutor envolvido por meio homogêneo

O modelo bidimensional da subsuperfície, usado para gerar os dados de resistividade aparente e fase das sondagens MT, consistiu de um corpo prismático de 500 m de largura, 1000 m

de espessura (altura) e topo a 125 m da interface ar-Terra. Ao corpo prismático foi atribuída a resistividade de 10 ohm.m, enquanto que o meio homogêneo envolvente foi tomado com a resistividade de 100 ohm.m. Este é o mesmo modelo usado na seção 4.1, o qual está representado na Figura 4.3. As mesmas sondagens (em termos de posicionamentos e frequências) daquela seção foram usadas neste estudo.

A representação dos dados mostrada nos perfis da Figura 4.5 indicam uma distribuição simétrica na direção horizontal para a resistividade, que em primeira aproximação pode ser representada por uma função com pelo menos dois zeros. Como distribuições simétricas são geometricamente associadas a derivadas de ordem par, um operador de derivada de ordem 2 ou 4 tem grandes chances de ressaltar esse tipo de distribuição presente no modelo. A representatividade da resistividade do modelo por uma função com dois zeros, por outro lado, sugere o operador da segunda derivada para ressaltar a distribuição da resistividade no modelo. Os operadores de ordem 2 e 4 são portanto os mais recomendados para serem aplicados como estabilizadores, visando a sua provável capacidade de melhor delinear o corpo. O resultado encontrado deve ser comparado com o resultado obtido com a aplicação convencional do operador da primeira derivada. Testes com outros operadores também serão realizados. Os resultados são mostrados nas Figuras 4.12 a 4.20 para dados sintéticos sem ruído e na Figura 4.21 para dados contaminados com ruído gaussiano aditivo com 5 % de desvio padrão.

Deve-se ressaltar que durante o estudo, o *meio homogêneo de resistividade 100 ohm.m* foi sempre usado como *modelo inicial* para inversão.

Na Figura 4.12 é mostrado o resultado alcançado com a aplicação da primeira derivada, tanto na direção horizontal quanto na vertical, bem como o resultado da aplicação da segunda derivada na horizontal e a primeira derivada na vertical. A aplicação da primeira derivada em ambas as direções, que é o procedimento comumente empregado na solução dos problemas de inversão, introduz um vínculo de suavidade global nos parâmetros a serem estimados. Esse tipo de vínculo, embora permita estabilização na solução do problema inverso, produz como resultado geral pequena resolução das variações fortes e abruptas nas propriedades físicas da subsuperfície, como no caso do modelo aqui estudado. A aplicação da segunda derivada mostrada na figura, propicia, por outro lado, um ligeiro realce na delimitação do corpo anômalo do modelo. O realce

torna-se maior com a aplicação da terceira derivada na horizontal (Figura 4.13) e maior ainda com a quarta derivada (Figura 4.14).

As Figuras 4.15 e 4.16 mostram os resultados alcançados com o uso da segunda derivada na vertical e as derivadas de ordem 1 a 4 no horizontal. A combinação dessas derivadas também produz resultados satisfatórios na delineação do corpo anômalo, principalmente com as combinações segunda derivada horizontal-segunda derivada vertical (Figura 4.15) e terceira derivada horizontal-segunda derivada vertical (Figura 4.16).

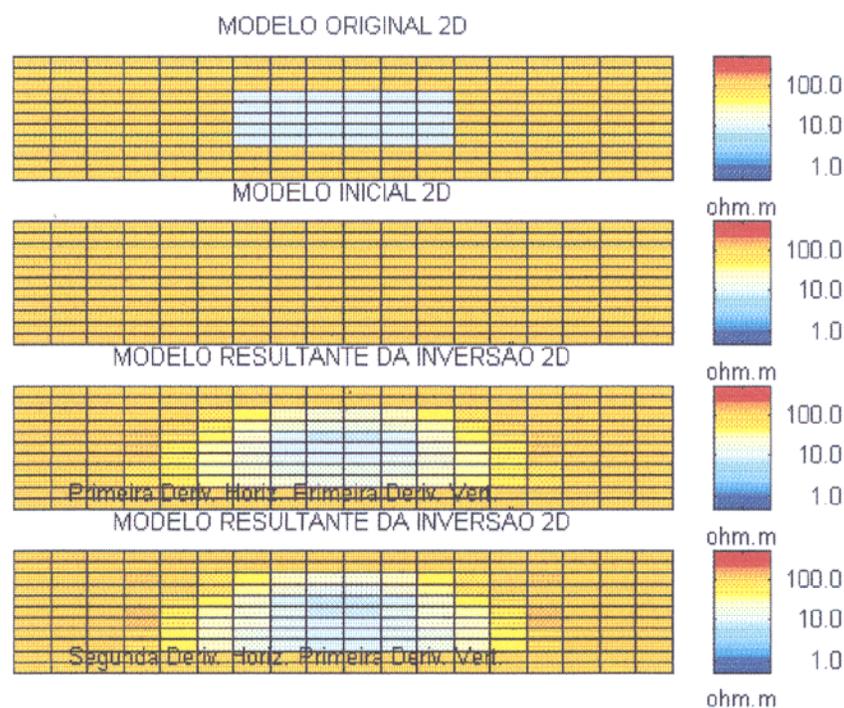


Figura 4.12 – Resultado da aplicação da primeira derivada em ambas as direções e da combinação segunda derivada horizontal-primeira derivada vertical.

Nas Figuras 4.17 e 4.18 são mostradas as combinações da terceira derivada na vertical com as derivadas de ordem 1 a 4 na horizontal, enquanto nas Figuras 4.19 e 4.20 são mostradas as combinações da quarta derivada na vertical com as derivadas de ordem 1 a 4 na horizontal. Para essas combinações, os resultados não são considerados satisfatórios, exibindo delineamento do corpo inferior à produzida pelo uso da primeira derivada nas duas direções.

O uso dos operadores da segunda e terceira derivadas na horizontal combinadas com a primeira e segunda derivadas na vertical mostraram resultados que podem ser considerados

melhores do que os obtidos com o uso convencional do operador da primeira derivada nas duas direções. Isso deve-se, provavelmente, como mencionado antes, à distribuição simétrica da resistividade no modelo e/ou a sua representatividade por função com pelo menos dois zeros.

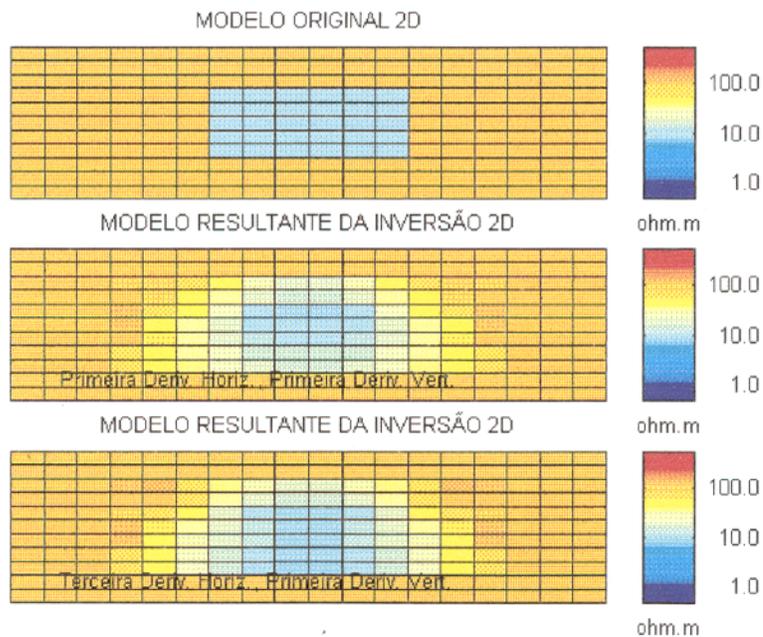


Figura 4.13 – Resultado da aplicação da primeira derivada em ambas as direções e da combinação terceira derivada horizontal-primeira derivada vertical. O modelo inicial é o mesmo da Figura 4.12.

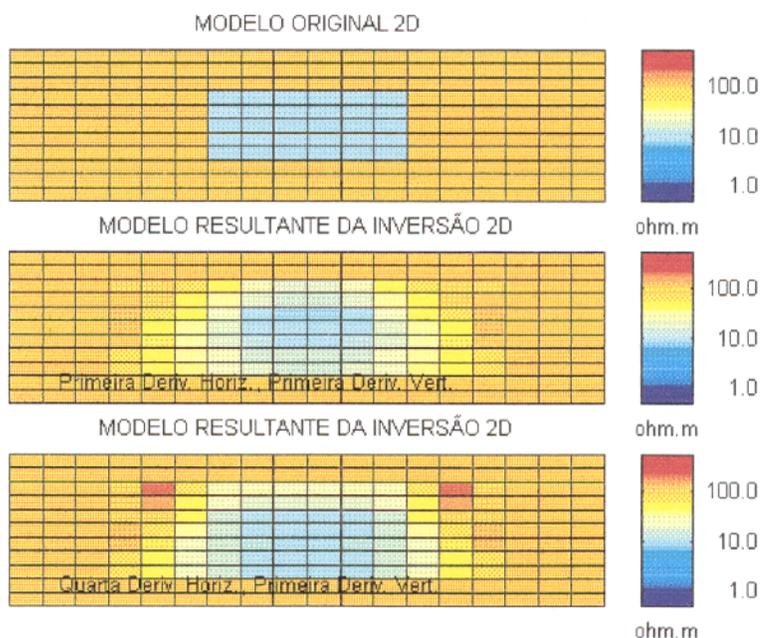


Figura 4.14 – Resultado da aplicação da primeira derivada em ambas as direções e da combinação quarta derivada horizontal-primeira derivada vertical. O modelo inicial é o mesmo da Figura 4.12.

O operador da quarta derivada quando aplicado na horizontal em combinação com o da primeira derivada na vertical (Figura 4.14) também mostrou resultado satisfatório e superior ao do operador convencional da primeira derivada em ambas as direções. A aplicação do operador da quarta derivada mostra entretanto sinais de alguma instabilidade, representada pelos blocos vermelhos evidenciados na Figura 4.14.

A Figura 4.21 mostra os resultados alcançados após a adição de 5 % de ruído gaussiano aos dados. Na figura estão representados os resultados obtidos com as seguintes combinações: Primeira derivada em ambas as direções (parte superior da figura); Terceira derivada na horizontal e segunda derivada na vertical (parte mediana); Quarta derivada na horizontal e primeira derivada na vertical (parte inferior). O resultado referente à primeira derivada em ambas as direções aparece na figura por ser a combinação de referência, já que essa é a combinação normalmente usada nos trabalhos de inversão. Os resultados das outras combinações são mostrados, pois elas mostraram ótimos resultados na inversão de dados sem ruído. A figura sugere como melhor resultado o obtido com a combinação da quarta derivada na horizontal com a primeira derivada na vertical, uma vez que mostra a melhor delineação do corpo condutor.

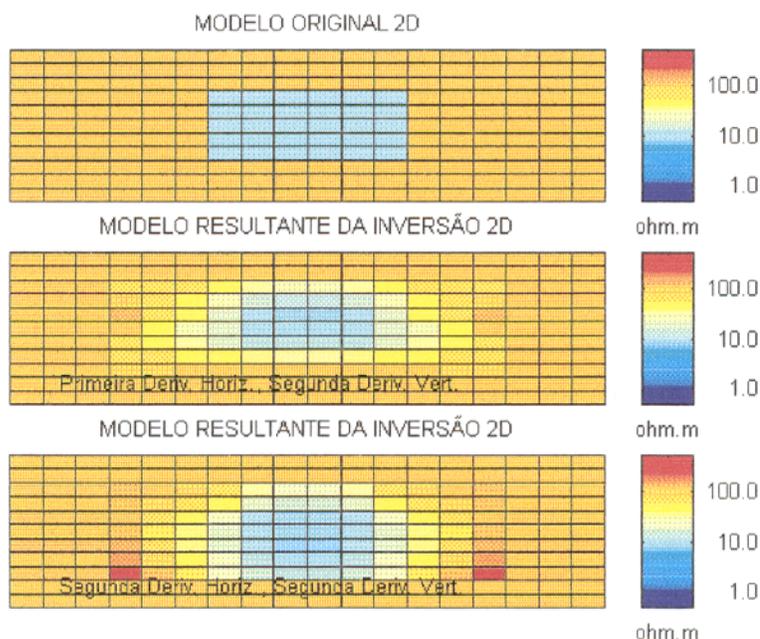


Figura 4.15 – Resultado da aplicação das combinações da primeira derivada horizontal com a segunda vertical e da segunda derivada em ambas as direções. O modelo inicial é o mesmo da Figura 4.12.

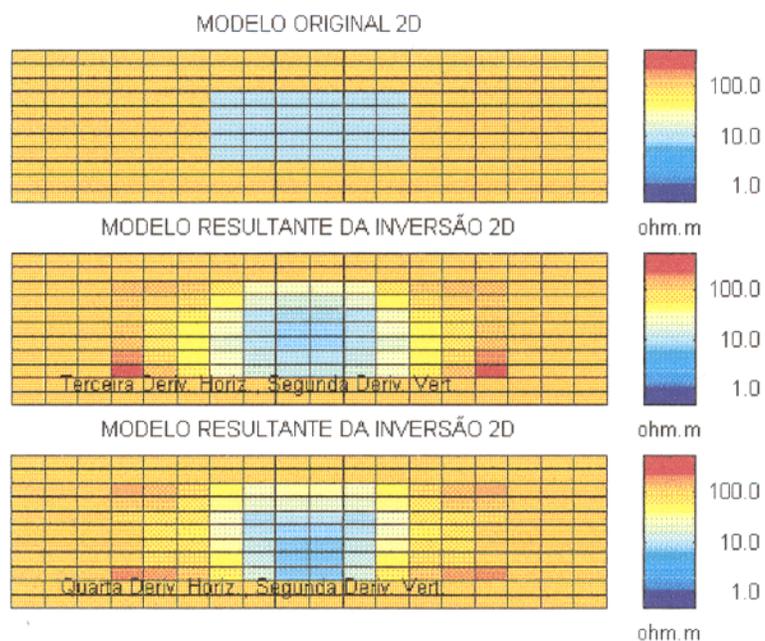


Figura 4.16 – Resultado da aplicação das combinações da terceira derivada horizontal com a segunda derivada vertical e da quarta derivada horizontal com a segunda derivada vertical. O modelo inicial é o mesmo da Figura 4.12.

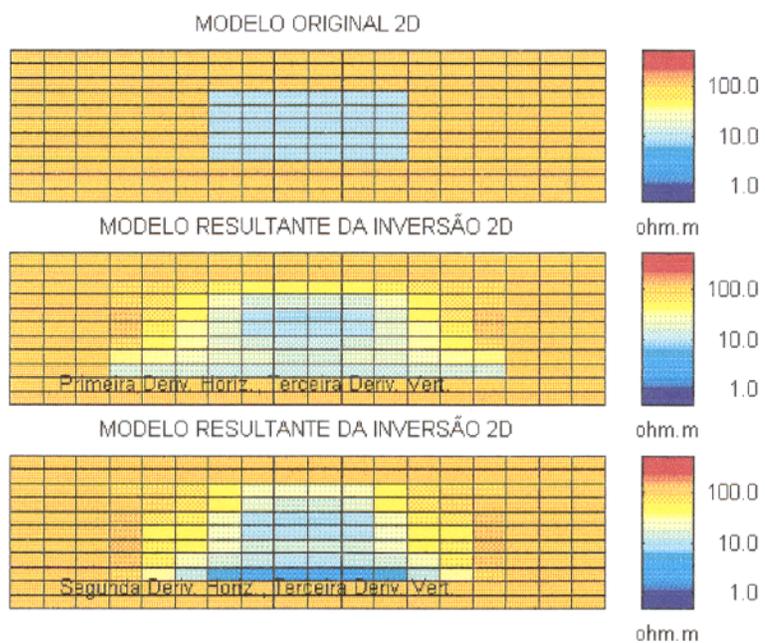


Figura 4.17 – Resultado da aplicação das combinações da primeira derivada horizontal com a terceira derivada vertical e da segunda derivada horizontal com a terceira derivada vertical. O modelo inicial é o mesmo da Figura 4.12.

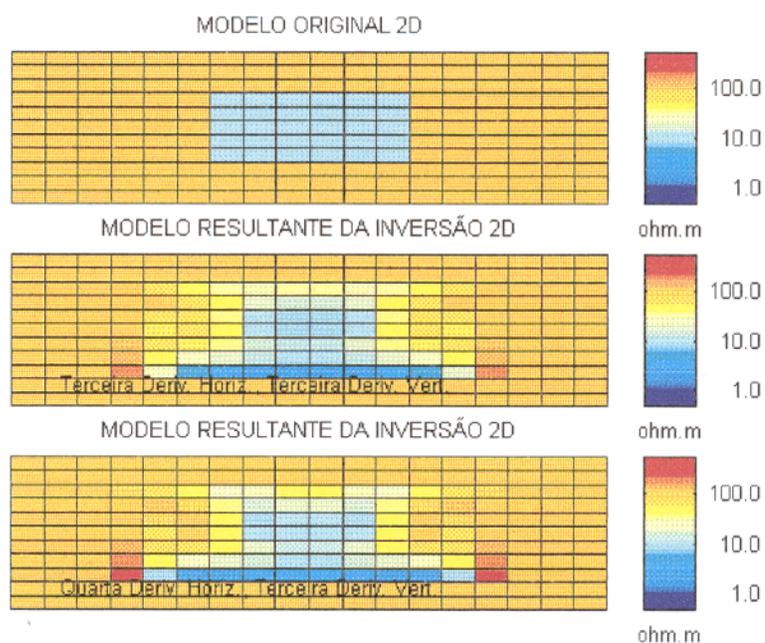


Figura 4.18 – Resultado da aplicação das combinações da terceira derivada horizontal com a terceira vertical e da quarta derivada horizontal com a terceira vertical. O modelo inicial é o mesmo da Figura 4.12.

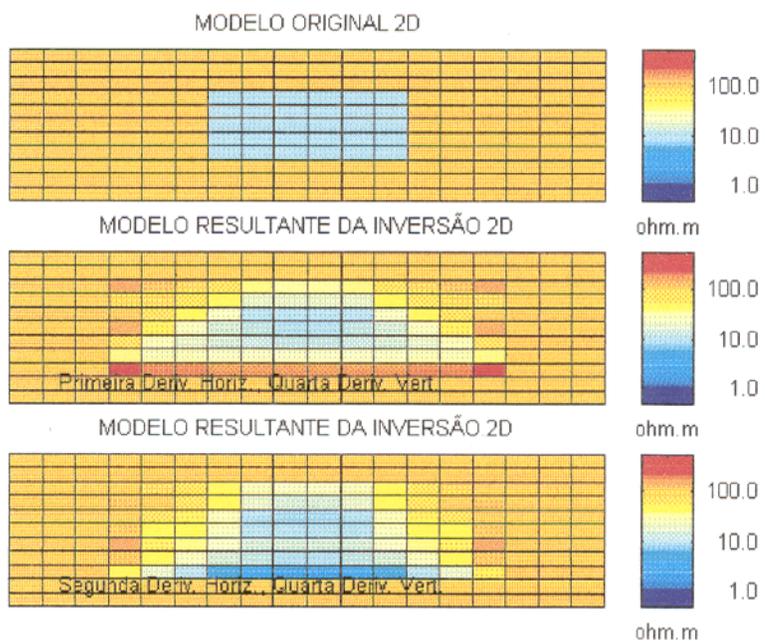


Figura 4.19 – Resultado da aplicação das combinações da primeira derivada horizontal com a quarta vertical e da segunda derivada horizontal com a quarta vertical. O modelo inicial é o mesmo da Figura 4.12.

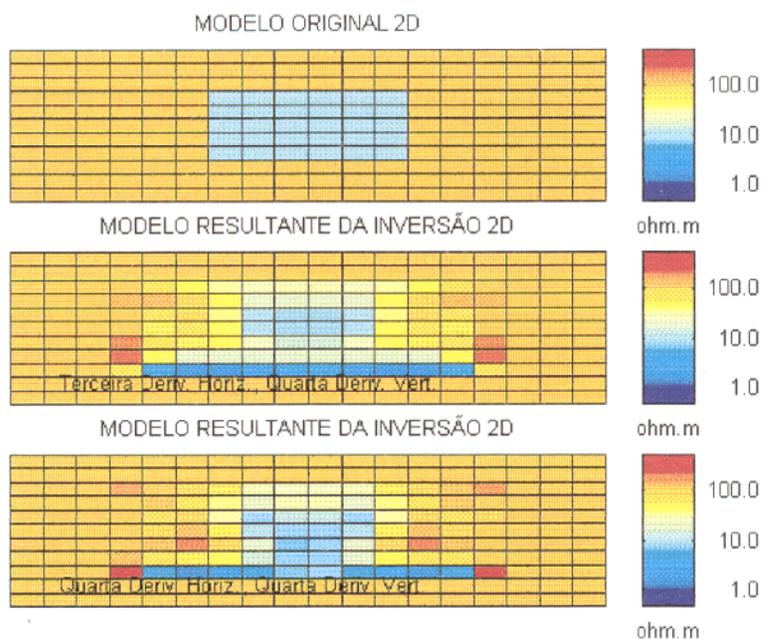


Figura 4.20 – Resultado da aplicação das combinações da terceira e quarta derivadas na horizontal com a quarta derivada na vertical. O modelo inicial é o mesmo da Figura 4.12.

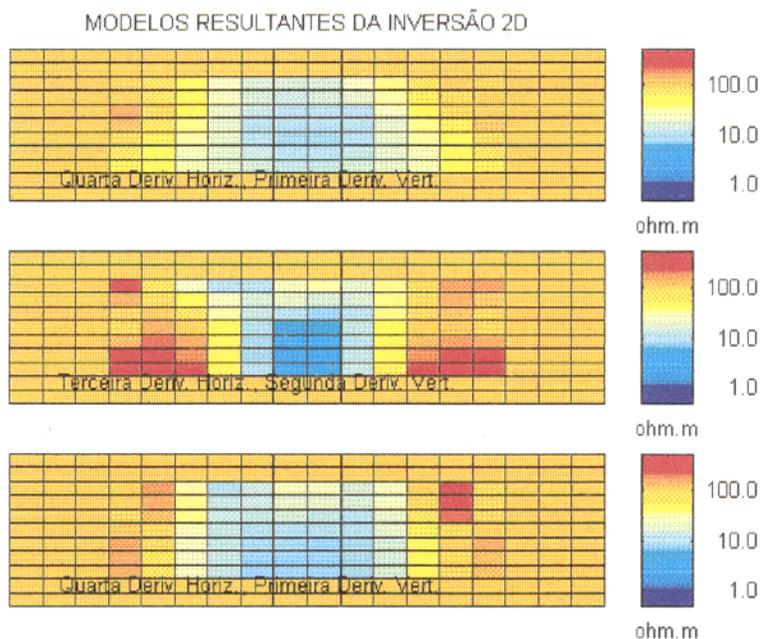


Figura 4.21 – Resultado da aplicação de três combinações de operadores de estabilização na inversão de dados com 5 % de ruído gaussiano. O modelo inicial é o mesmo da Figura 4.12.

A combinação de derivadas de ordem maior do que um nas duas direções provoca alguma instabilidade no processo de inversão, conforme pode ser observado pelo aparecimento de blocos vermelhos nas Figura 4.15 (segunda derivada horizontal nas duas direções), Figura 4.16 (terceira e quarta derivadas na horizontal combinadas com segunda na vertical), Figuras 4.18 (terceira e quarta derivadas na horizontal combinadas com a terceira na vertical), Figura 4.20 (Terceira e quarta derivadas combinadas com a quarta na vertical). Na figura 4.21, que mostra os resultados para dados com ruído, a combinação da terceira derivada na horizontal com a segunda na vertical provoca instabilidade muito maior.

Esses resultados demonstram, que apesar de haver ganho no delineamento da heterogeneidade, com uso de operadores de derivadas de ordem superior a um, há um limite para a ordem da derivada sob pena de se tornar instável a resolução do problema inverso

4.2.2 – Dois corpos prismáticos envolvidos por meio homogêneo

Neste problema será estudada a inversão de dados de sondagens MT obtidas sobre o modelo bidimensional representado por dois corpos prismáticos envolvidos por um meio homogêneo. Um dos corpos prismáticos foi tomado como mais resistivo e o outro como menos resistivo do que o meio envolvente.

Os corpos têm a mesma dimensão: 500 m de largura e 1000 m de altura. Seus topos estão enterrados a 125 m da interface ar-Terra (superfície do terreno). A resistividade de um dos corpos é 10 ohm.m, enquanto a do outro 1000 ohm.m. Ao meio foi atribuída a resistividade de 100 ohm.m. O modelo da subsuperfície usado para gerar os dados está representado na Figura 4.22, onde estão também representadas as células requeridas pela técnica dos elementos finitos.

A Figura 4.23 mostra a resistividade aparente calculada para 5 das 19 frequências usadas no cálculo das sondagens MT para o modelo. Os valores de resistividade aparente, representados na posição das sondagens, evidencia a distribuição lateral da resistividade no modelo, mostrando dois corpos em meio homogêneo, sendo um mais condutor (à esquerda) e o outro mais resistivo do que o meio. O perfis mostrados na figura indicam que a distribuição de resistividade no modelo pode ser representada por uma função com pelo menos quatro zeros, o que sugere que a aplicação do operador da quarta derivada pode fornecer bom resultado na delineação dos corpos. A figura mostra também que há uma distribuição assimétrica da resistividade (um alto e um baixo

anômalo); essa distribuição sugere que o operador da terceira derivada pode contribuir para uma boa delimitação dos corpos, por ser um operador de ordem ímpar.

Deve ser ressaltado que, em geral, corpos mais resistivos do que o meio não são bem delineados, principalmente quando somente dados do modo TE são invertidos (deGroot-Hedlin & Constable 1990; Uchida 1993 a).

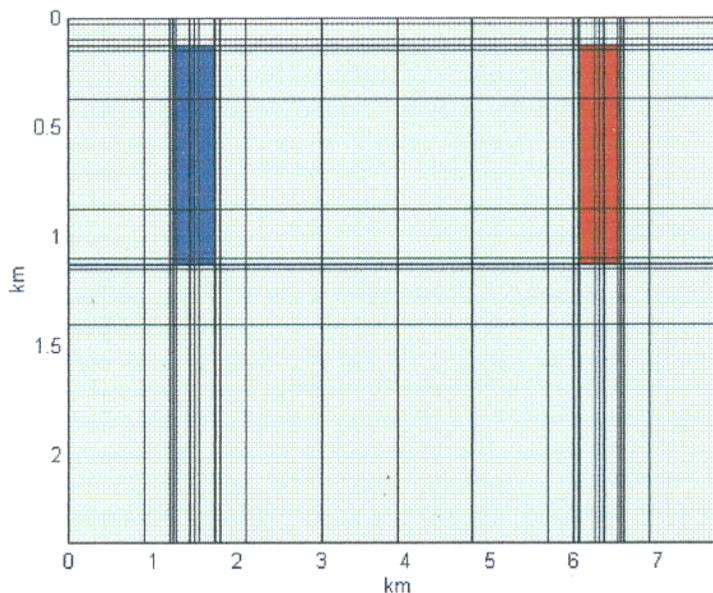


Figura 4.22 – Representação da subsuperfície pela malha de elementos finitos usada para gerar as sondagens MT e calcular o modelo direto no processo de inversão. Cor azul =10 ohm.m, cor vermelha=1000 ohm.m e cor verde=100 ohm.m.

A seguir serão apresentados os resultados da inversão com aplicação do operador da quarta derivada e de operadores de derivadas de outras ordens. Inicialmente serão apresentados resultados da inversão de dados sem ruído (Figuras 4.24 a 4.27) e, posteriormente, de dados com 3 % de ruído gaussiano adicionado (Figuras 4.28 a 4.33). Nas figuras, a subsuperfície será representada por prismas de mesma dimensão, embora no procedimento de inversão esses prismas tenham dimensões diferentes, como é mostrado na Figura 4.22; essa representação foi adotada para melhor visualização dos resultados. Novamente, durante o estudo, *o meio homogêneo de 100 ohm.m* foi sempre usado como *modelo inicial* para a inversão.

Na Figura 4.24 é mostrado o resultado do uso da primeira derivada tanto na horizontal quanto na vertical. Como a aplicação da primeira derivada em ambas as direções é o procedimento normal para estabilizar o processo de inversão, esse resultado servirá de referência para que se

julgue o desempenho da aplicação das outras derivadas. Na figura é possível observar que o corpo mais condutor é ligeiramente melhor resolvido do que o corpo mais resistivo, o que está de acordo com o encontrado por deGroot-Hedlin & Constable (1990).

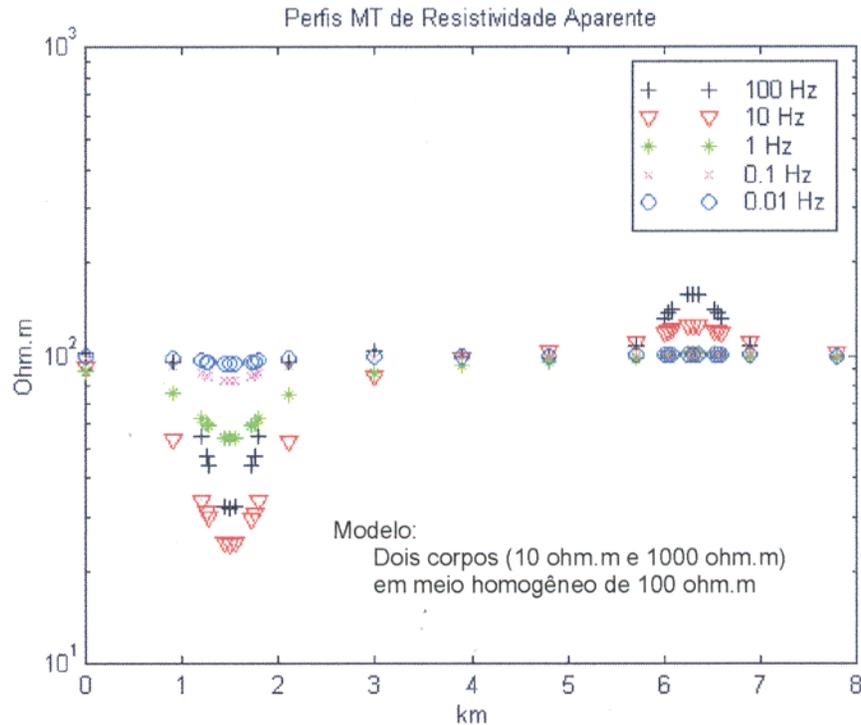


Figura 4.23 – Valores de resistividade aparente em 5 frequências calculados para 27 sondagens usando o modelo da Figura 4.22. Os valores de resistividade aparente estão representados nas posições das sondagens.

A aplicação da segunda derivada na horizontal e da primeira derivada na vertical melhora sensivelmente a delimitação do corpo mais resistivo e um pouco a do corpo mais condutor, conforme pode ser observado na Figura 4.25.

A combinação da terceira derivada na horizontal com a primeira na vertical (Figura 4.26) produz um resultado similar ao da combinação anterior para o corpo mais resistivo.

Com a aplicação da quarta derivada na horizontal e a primeira derivada na vertical (Figura 4.27) o corpo resistivo continua com excelente delimitação (similar à da aplicação das derivadas de ordem 2 e 3), porém o corpo condutor é pior delimitado.

Na Figura 4.28 é mostrado o resultado da inversão de dados contaminados por 3 % de ruído gaussiano e o uso da primeira derivada nas duas direções. O resultado alcançado é similar ao

obtido com os dados sem ruído mostrado na Figura 4.24: há uma melhor delineação do corpo não condutor.

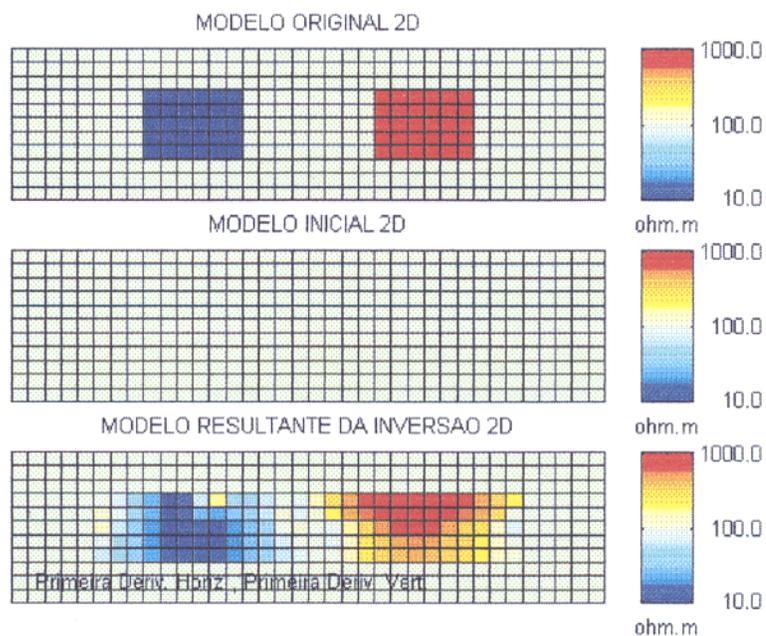


Figura 4.24 – Resultado da aplicação da primeira derivada em ambas as direções na inversão de dados sem ruído.

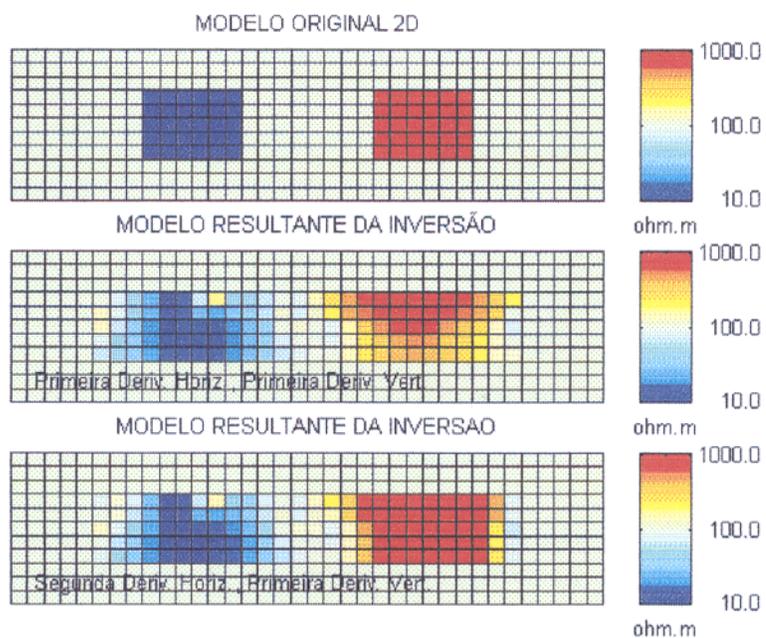


Figura 4.25 – Resultado da combinação da segunda derivada horizontal com a primeira vertical. O resultado da aplicação da primeira derivada em ambas direções é mostrada para comparação.

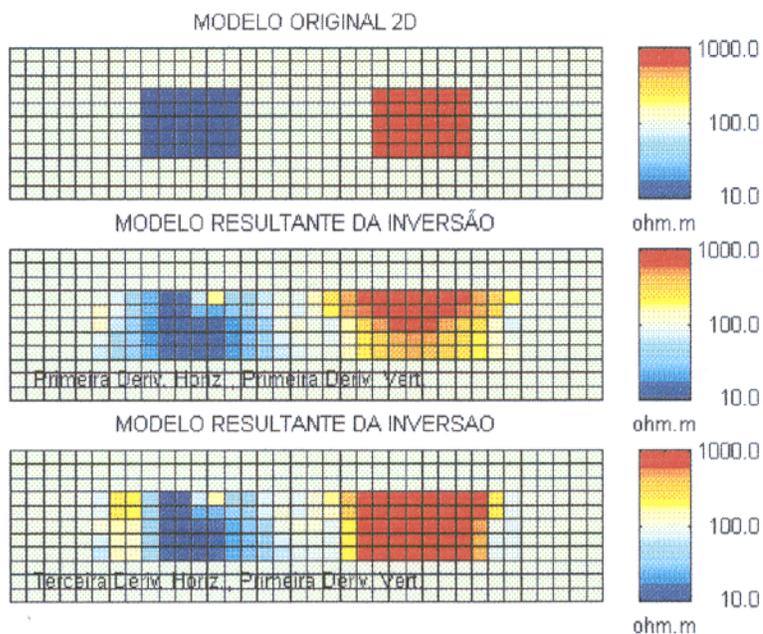


Figura 4.26 – Resultado da combinação da terceira derivada horizontal com a primeira vertical. O resultado da aplicação da primeira derivada em ambas direções é mostrada para comparação.

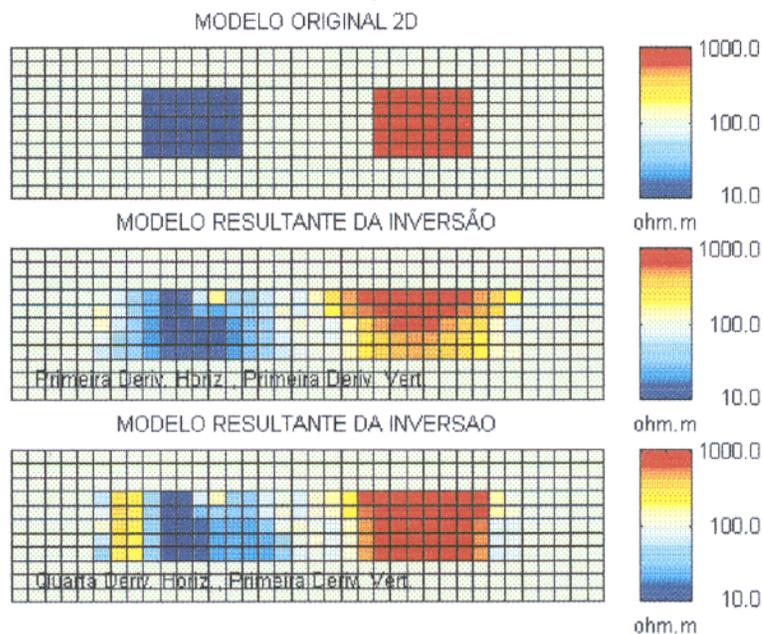


Figura 4.27 – Resultado da combinação da quarta derivada horizontal com a primeira vertical. O resultado da aplicação da primeira derivada em ambas direções é mostrada para comparação.

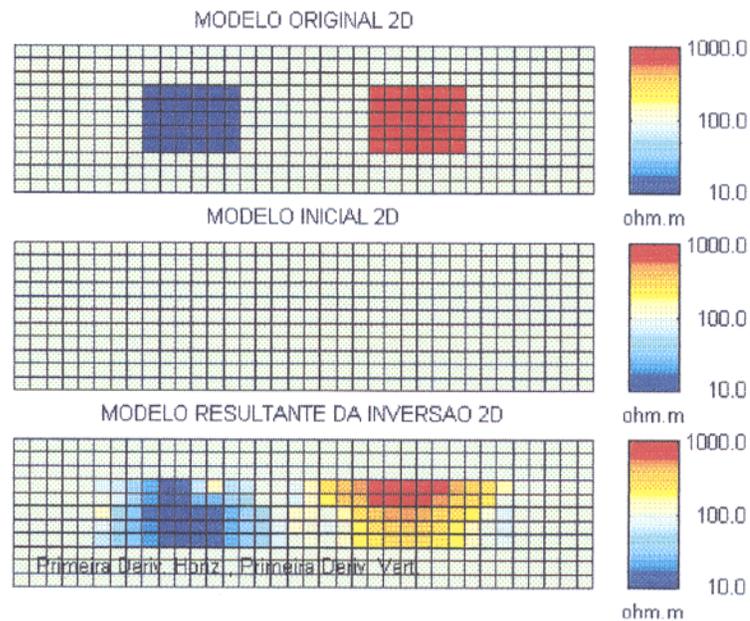


Figura 4.28 – Resultado da aplicação da primeira derivada em ambas as direções na inversão de dados com 3 % de ruído gaussiano.

Com a aplicação da segunda derivada na horizontal e a primeira na vertical, melhora a delimitação de ambos os corpos em relação ao que foi obtido na combinação anterior com a primeira derivada nas duas direções, conforme demonstra a Figura 4.29.

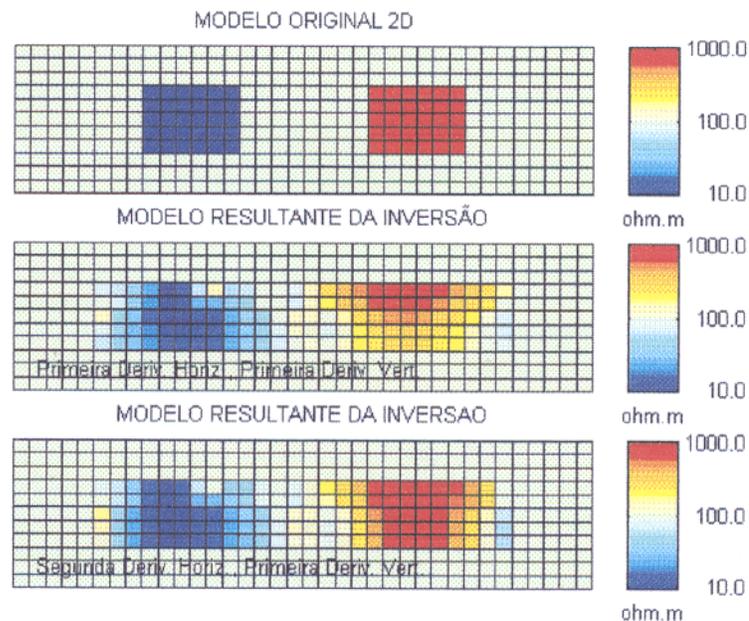


Figura 4.29 – Resultado da combinação da segunda derivada horizontal com a primeira vertical em dados com 3 % de ruído gaussiano. O resultado da aplicação da primeira derivada em ambas direções é mostrado para comparação.

A aplicação da terceira derivada na horizontal combinada com a primeira derivada na vertical (Figura 4.30) melhora a delimitação do corpo mais resistivo, mas deteriora ligeiramente a do corpo mais condutor em relação aos resultados anteriores.

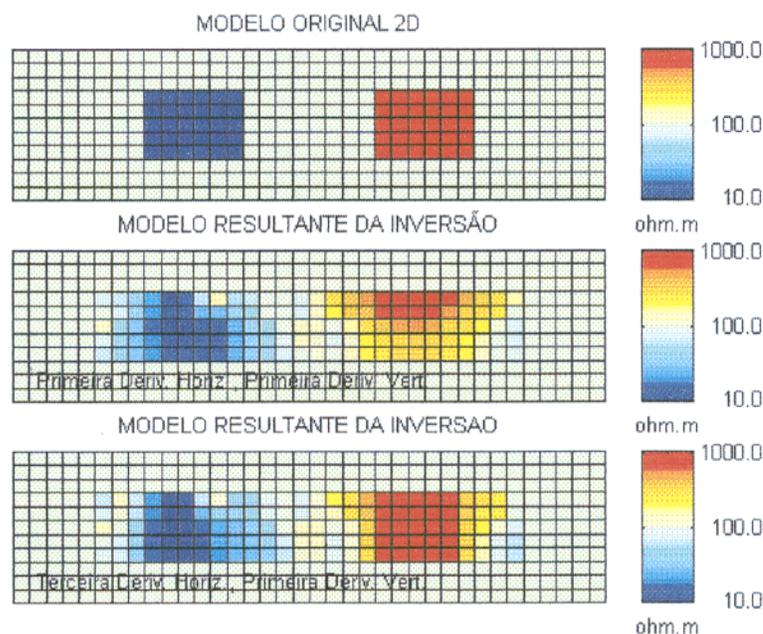


Figura 4.30 – Resultado da combinação da terceira derivada horizontal com a primeira vertical em dados com 3 % de ruído gaussiano. O resultado da aplicação da primeira derivada em ambas direções é mostrado para comparação.

As Figuras 4.31 e 4.32 mostram os resultados da aplicação respectivamente das derivadas de ordem quatro e cinco na horizontal, combinadas com a primeira derivada na vertical. Para essas combinações, o corpo mais resistivo é muito bem delineado, porém o corpo condutor apresenta-se menos delineado.

A aplicação da segunda derivada em ambas as direções também foi testada (Figura 4.33). O resultado demonstra que o corpo menos condutor é fracamente delineado, enquanto o corpo mais condutor apresenta-se menos delineado em relação ao resultado obtido com a combinação segunda derivada horizontal-primeira derivada vertical

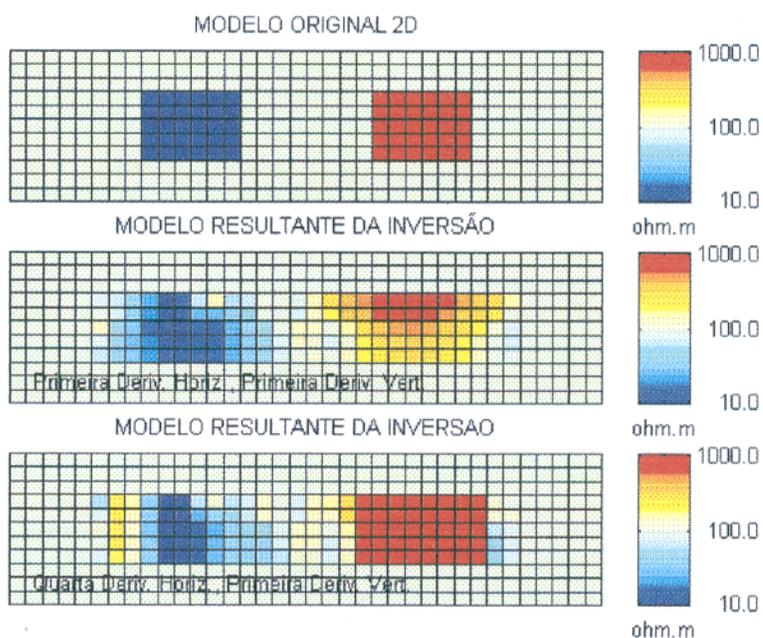


Figura 4.31 – Resultado da combinação da quarta derivada horizontal com a primeira vertical em dados com 3 % de ruído gaussiano. O resultado da aplicação da primeira derivada em ambas direções é mostrado para comparação.

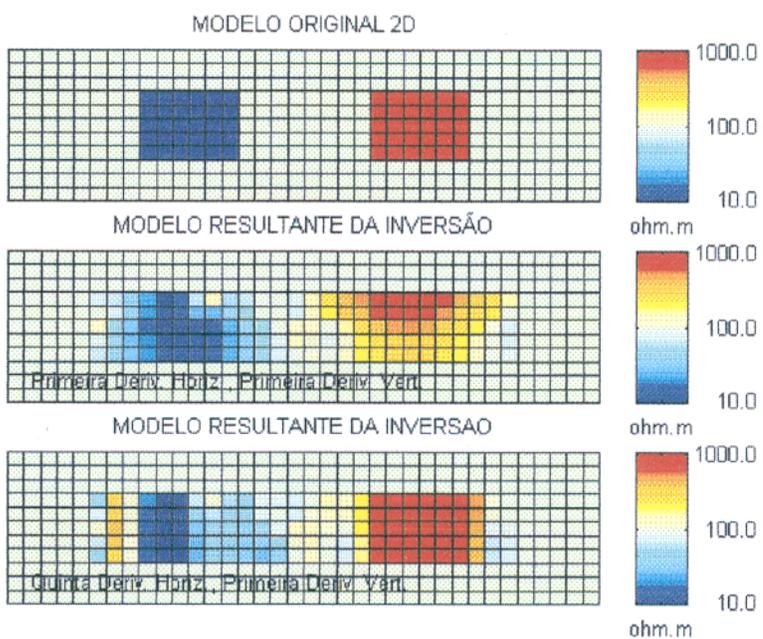


Figura 4.32 – Resultado da combinação da quinta derivada horizontal com a primeira vertical em dados com 3 % de ruído gaussiano. O resultado da aplicação da primeira derivada em ambas direções é mostrado para comparação.

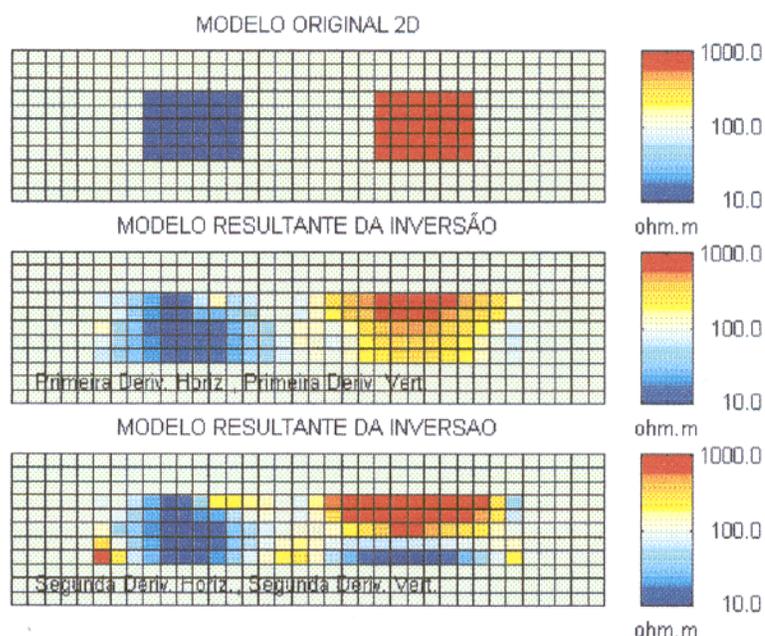


Figura 4.33 – Resultado da combinação da segunda derivada horizontal com a segunda vertical em dados com 3 % de ruído gaussiano. O resultado da aplicação da primeira derivada em ambas direções é mostrado para comparação.

Os resultados alcançados na solução deste problema mostram que os operadores de derivadas de ordem superior a um proporcionam ótima delimitação do corpo mais resistivo, o que não tem sido conseguido nos trabalhos de inversão com o operador convencional da primeira derivada. Uma tentativa de explicação para esse resultado é que a presença de um corpo mais condutor às proximidades de um corpo mais resistivo possa influenciar de algum modo a resposta obtida com os operadores de maior ordem, para isso foi realizado um teste usando-se dois corpos 10 vezes mais resistivos do que o meio envolvente de resistividade 100 ohm.m, aplicando-se a combinação da terceira derivada na horizontal com a primeira na vertical. Os dados foram contaminados com ruído gaussiano aditivo com 5 % de desvio padrão. O resultado, representado na Figura 4.34, mostra que ambos os corpos não são bem delineados; há, entretanto, uma melhor delimitação do corpo localizado à direita.

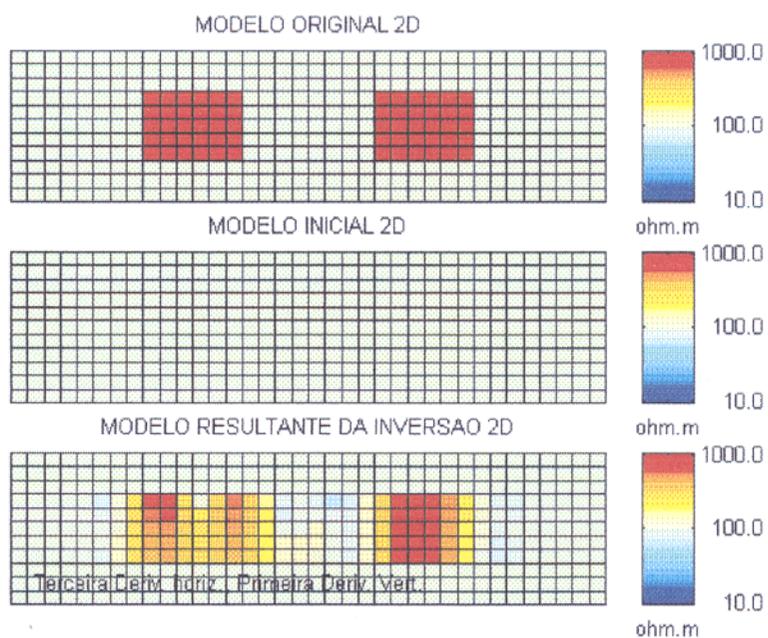


Figura 4.34 – Resultado da combinação da terceira derivada na horizontal com a primeira na vertical. Os dados estão contaminados com 3 % de ruído gaussiano.

5 – APLICAÇÃO A DADOS REAIS

As técnicas apresentadas no presente estudo foram aplicadas a dados do perfil de sondagens MT denominado COPROD2 (Jones 1993), que cruza uma estrutura geoeétrica bidimensional denominada de anomalia North American Central Plains (NACP).

O perfil COPROD2 consiste de dados MT coletados em 35 estações aproximadamente alinhadas segundo a direção oeste-leste, cobrindo cerca de 400 km no sul das províncias de Saskatchewan e Manitoba no Canadá, logo acima da fronteira com os estados de Montana e North Dakota nos Estados Unidos (Figura 5.1). O perfil corta a bacia paleozóica de Williston, sob a qual encontra-se uma das mais longas anomalias de condutividade elétrica da crosta, a anomalia NACP.

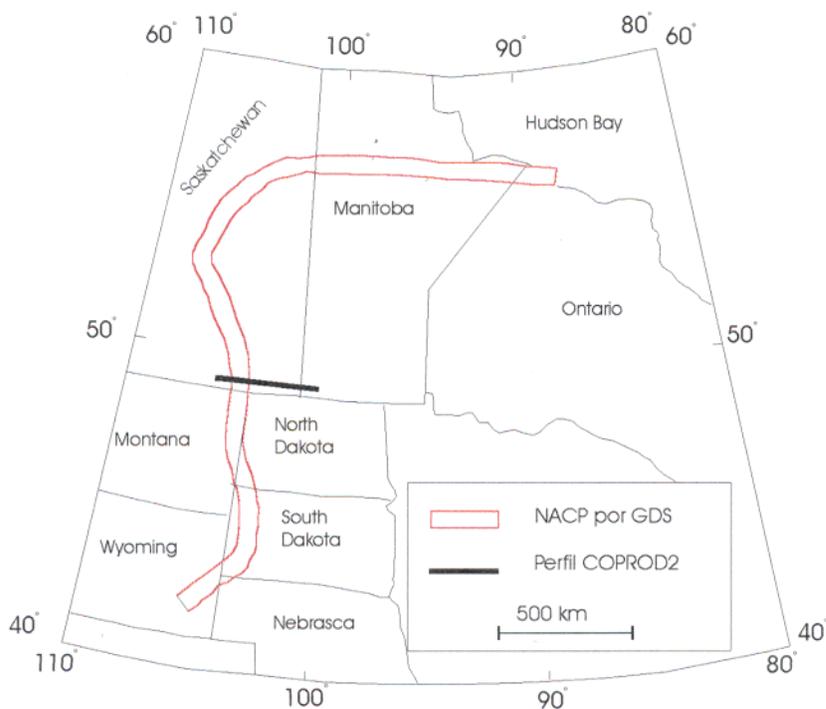


Figura 5.1 – Mapa de localização do perfil COPROD2 e da anomalia NACP. Adaptado de Toumerie & Gilbert (1995).

Os dados do perfil encontram-se no endereço www.cg.emr.ca/mtnet/data/coprod2.html e sua descrição detalhada pode ser encontrada em Jones (1993).

Na aplicação aqui apresentada foram utilizados dados de resistividade e fase medidos para o modo TE de 15 das 35 sondagens (estações PC5009 a PC5014, estações PCSE04 a PCSE01 e estações PCS001 a PCS004, ordenadas de leste para oeste). O espaçamento entre essas estações varia de 4200 m a 19000 m. Os dados utilizados correspondem a 12 períodos compreendidos entre 0,1667 e 341,3 segundos (frequências entre 6,0 e 0,003 Hz).

A malha de elementos finitos, usada no cálculo do modelo direto, foi construída de modo que cada sondagem MT ficasse posicionada no vértice dos elementos. Como a distância entre as sondagens não é constante, também a largura dos elementos foi tomada variável. Para evitar problemas de borda, foram adicionados alguns elementos nas extremidade da malha.

De acordo com Jones (1993), a resistividade dos sedimentos da bacia de Williston, abaixo dos quais encontra-se a anomalia NACP, pode ser tomada como 3 ohm.m, enquanto a espessura média da bacia é de cerca de 2,5 km (Jones 1988). Esses valores foram usados como informação a priori para definir uma camada condutora na parte superficial do modelo a ser usado na inversão. Sua resistividade e sua espessura foram consideradas como informação a priori de elevada confiabilidade, de modo que essa camada não foi incluída entre os parâmetros do modelo a serem estimados no processo de inversão, embora tenha participado do modelo.

O modelo inicial durante o procedimento de inversão consistiu da camada condutora superficial, acima referida, colocada sobre um meio homogêneo de resistividade 100 ohm.m (Figura 5.2).

Os dados do perfil COPROD2 (modo TE) foram invertidos usando-se as combinações da primeira derivada na vertical com as derivadas de ordem um a quatro na horizontal (Figuras 5.3 a 5.6).

Os resultados obtidos com as quatro combinações das derivadas mostram uma zona muito condutora (resistividade menor do que 3 ohm.m):

- (a) Entre as estações 02 e 14 e profundidade maior do que 35 km para a combinação da primeira derivada em ambas as direções (Figura 5.3);
- (b) Entre as estações 01 e E4 e profundidade a partir de 25 km para a combinação da segunda derivada horizontal com a primeira derivada na vertical (Figura 5.4);
- (c) Entre as estações 03 e E3 e profundidade a partir de 25 km para a combinação terceira derivada horizontal-primeira derivada vertical (Figura 5.5); e

- (d) Entre as estações 02 e E1 e entre E3 e 14 e profundidades maiores que 35 km para a combinação da quarta derivada horizontal com a primeira vertical (Figura 5.6).

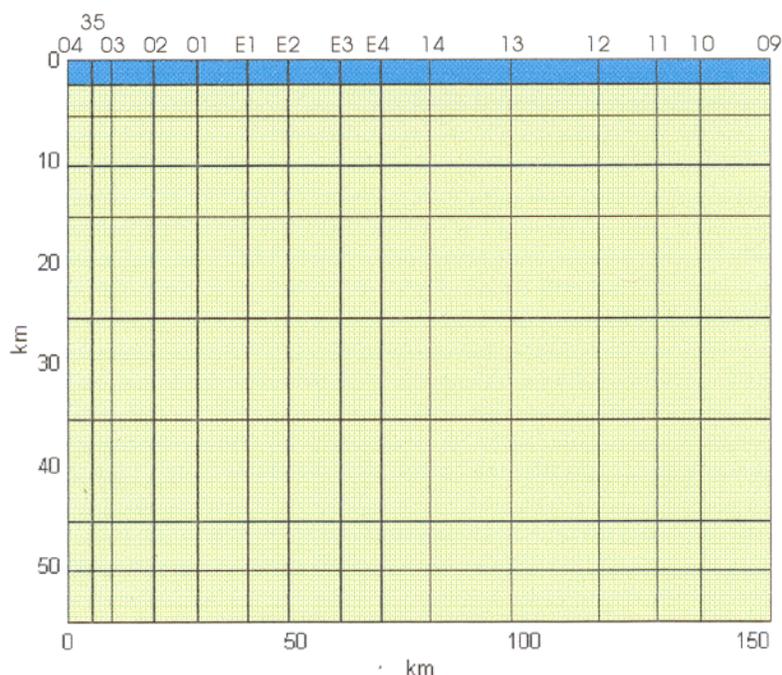


Figura 5.2 – Modelo inicial e malha de elementos finitos usados na inversão do perfil COPROD2. A cor azul representa as camadas sedimentares de resistividade 3 ohm.m, enquanto os elementos amarelos têm resistividade 100 ohm.m. A numeração na parte superior refere-se à identificação das sondagens MT apresentada por Jones (1993).

No limite oeste da zona de elevada condutividade identificada desenvolve-se uma zona de elevada resistividade (maior do que 10000 ohm.m) nos resultados obtidos com as combinações da terceira e quarta derivadas (Figuras 5.5 e 5.6). Corpos de elevada resistividade não são normalmente bem resolvidos com o uso da combinação da primeira derivada em ambas as direções, conforme foi mostrado na Figura 4.22 e em deGroot-Hedlin & Constable (1990). Esses corpos passam no entanto a ser realçados com o uso da quarta derivada conforme mostrado na Figura 4.25.

Para efeito de comparação apresenta-se na Figura 5.7 os modelos de interpretação do perfil COPROD2 obtidos por vários autores (os modelos foram compilados de Jones 1993). A figura mostra que há uma semelhança muito grande entre os modelos referenciados como degroot-1, rasmunsen e uchida e o modelo obtido nesta tese.

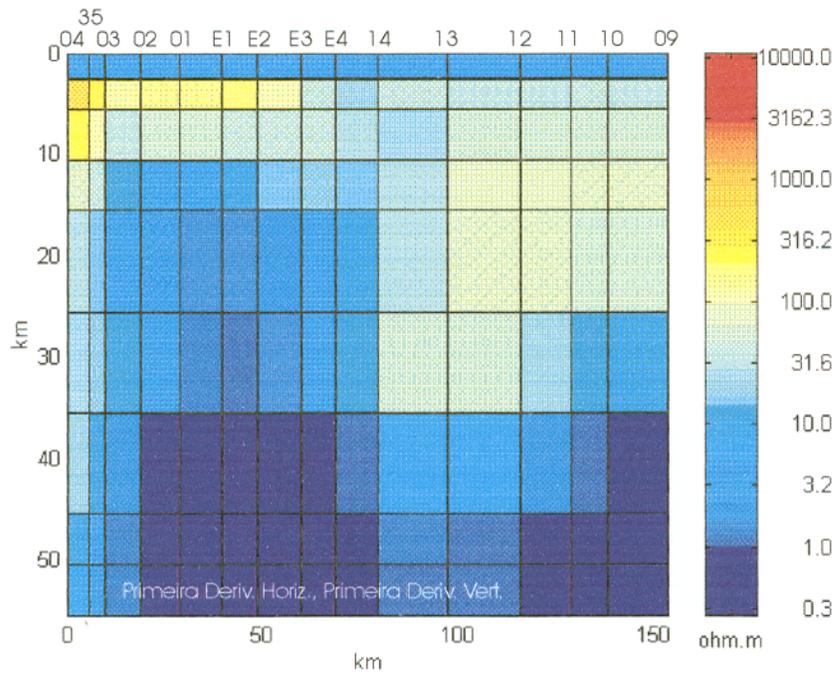


Figura 5.3 – Resultado da inversão do perfil COPROD2 com aplicação da primeira derivada em ambas as direções.

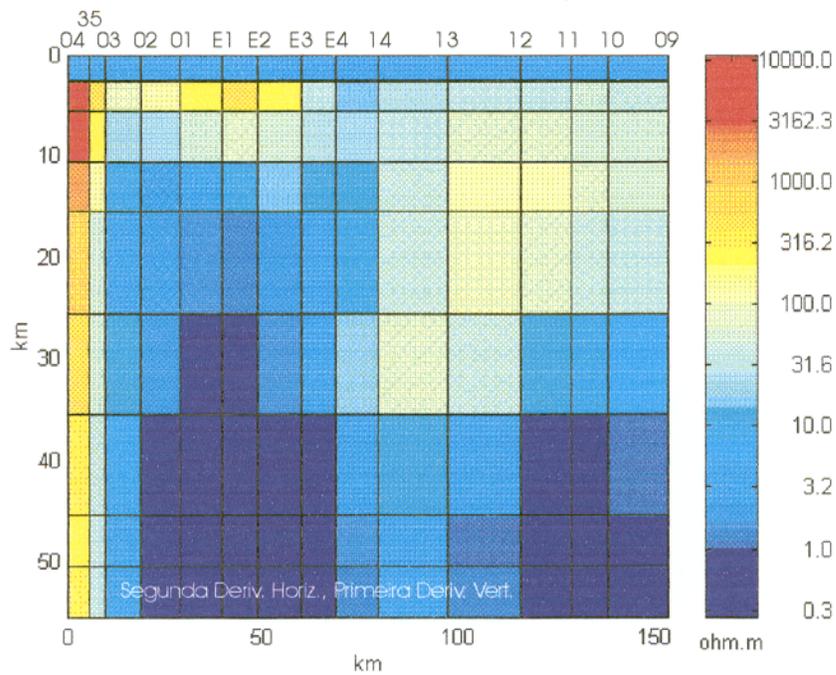


Figura 5.4 – Resultado da inversão do perfil COPROD2 com aplicação da segunda derivada na horizontal e primeira derivada na vertical.

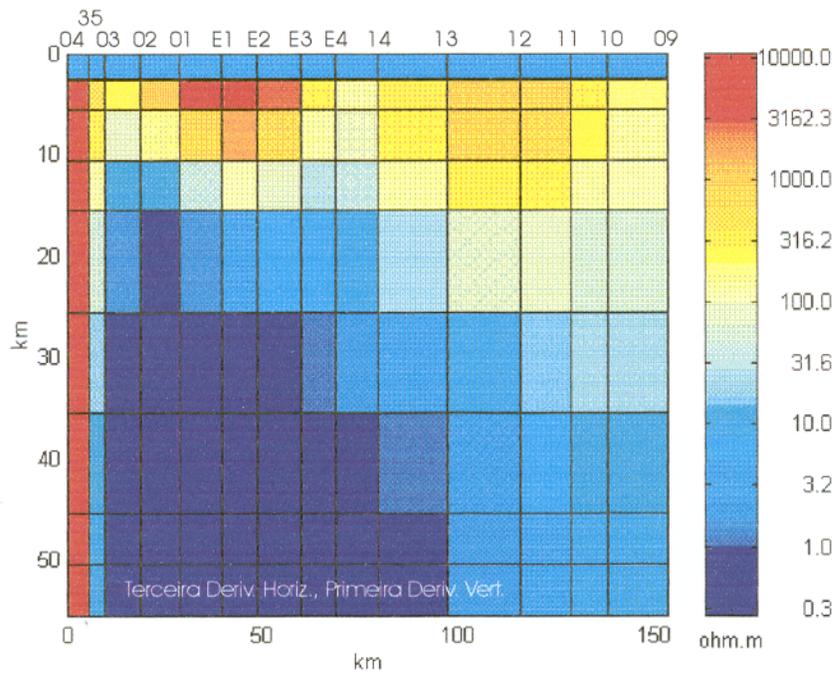


Figura 5.5 – Resultado da inversão do perfil COPROD2 com aplicação da terceira derivada na horizontal e primeira derivada na vertical.

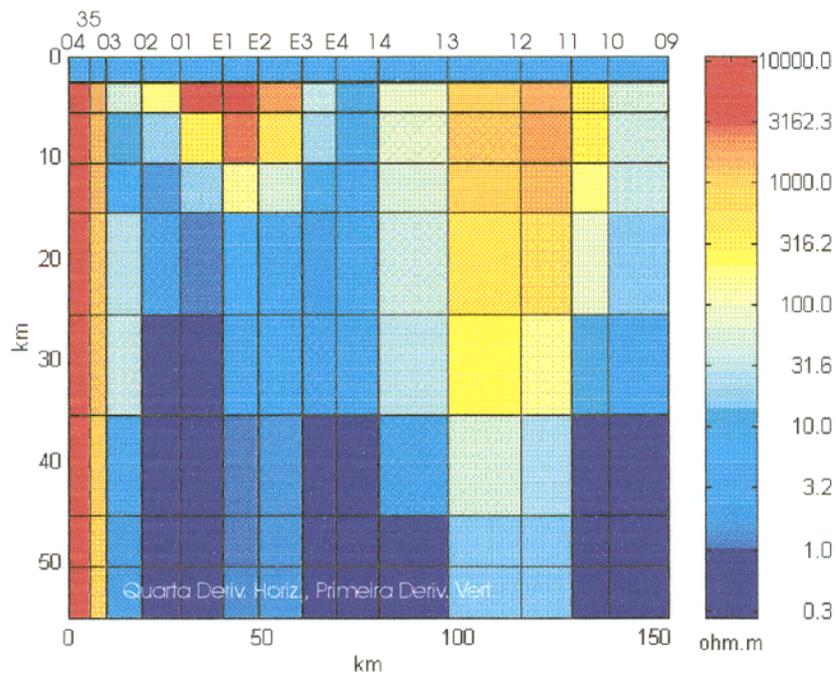


Figura 5.6 – Resultado da inversão do perfil COPROD2 com aplicação da quarta derivada na horizontal e primeira derivada na vertical.

Figura 5.7 – Modelos obtidos por vários pesquisadores na interpretação do perfil COPROD2. Os modelos mostrados nesta figura estendem-se desde a estação 07 na extremidade esquerda até a estação 08, na outra extremidade, enquanto o modelo obtido nesta tese estende-se da estação 04 (à esquerda) até a estação 09 (à direita). A denominação que aparece em cada modelo refere-se ao pesquisador que o obteve. Os modelos foram compilados da Figura 7 do artigo de Jones (1993).

Figura 5.7 (continuação)

Para melhor comparação com os resultados obtidos neste trabalho de tese, é mostrada na Figura 5.8 parte do modelo resultante da inversão do perfil COPROD2 obtido por Uchida (1993 b). O modelo aqui representado foi compilado da Figura 7 de Jones (1993). Esse modelo foi escolhido para comparação por ter sido considerado por Jones (1993) como o mais representativo dentre diversos modelos obtidos por outros pesquisadores que trabalharam na inversão dos dados do perfil COPROD2. A comparação entre os modelos obtidos neste trabalho e o modelo de Uchida deve entretanto ser feita com reservas, pois Uchida (1993 b) inverteu dados dos modos TE e TM, enquanto neste trabalho somente o modo TE foi usado. Além disso, o número de frequências e o número de sondagens MT não são os mesmos. Uchida (1993 b) usou apenas 6 frequências (entre 1,5 e 0,0015 Hz) e todas as 35 sondagens do perfil, enquanto aqui foram usadas 12 frequências e 15 das sondagens centrais do perfil.

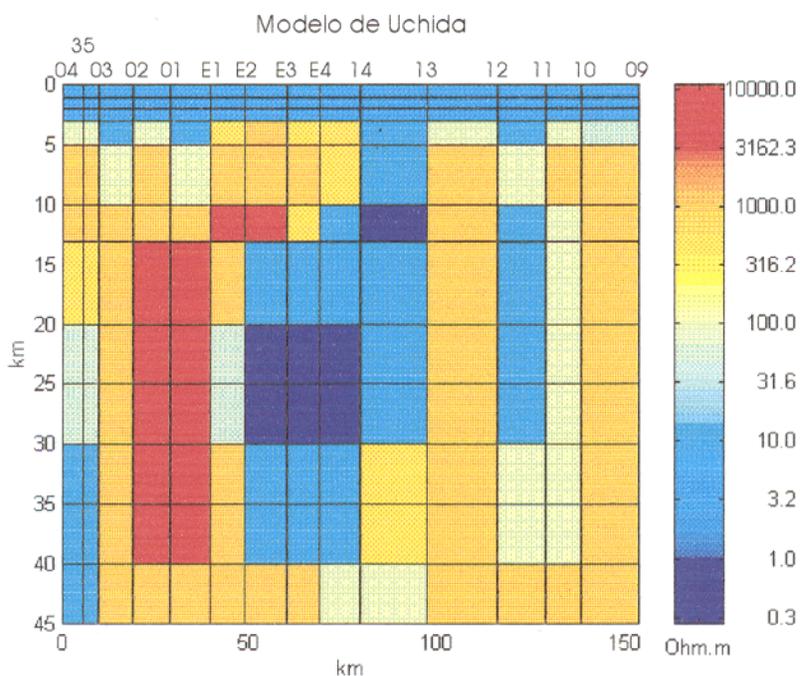


Figura 5.8 – Parte do modelo obtido por Uchida (1993 b) na inversão do perfil COPROD2.

O modelo de Uchida (1993 b) mostra a zona de elevada condutividade (resistividade menor do que 3 ohm.m) entre as estações E2 e E4 e entre as profundidades de 20 e 30 km. Essa zona é menos larga do que as zonas condutoras evidenciadas nas Figura 5.5 e 5.6 e encontra-se

menos profunda. O modelo mostra, ainda, uma zona de elevada resistividade a oeste do limite da zona de elevada condutividade como as mostradas nas Figuras 5.5 e 5.6. Em primeira aproximação, pode-se considerar, portanto, uma boa semelhança entre o modelo de Uchida (1993 b) e o obtido nesta tese com o uso do funcional estabilizador formado pelas combinações da terceira e da quarta derivadas na horizontal com a primeira derivada na vertical, apesar de ter-se usado apenas dados do modo TE na inversão.

O modelo de Uchida (1993 b) foi também usado na inversão de dados do modo TE do perfil COPROD2 para obtenção das dimensões dos elementos da malha de elementos finitos, para testar o uso da técnica descrita na seção 4.1 desta tese. A Figura 5.9 mostra o resultado alcançado. Na figura observa-se que a zona de elevada condutividade desloca-se para a esquerda localizando-se entre a posição das estações 01 e E2 e tem sua profundidade e extensão em profundidade aumentada, aproximando-se das geometria alcançadas nas Figura 5.5 e 5.6, quando foram usadas as combinações das derivadas de ordens três e quatro.

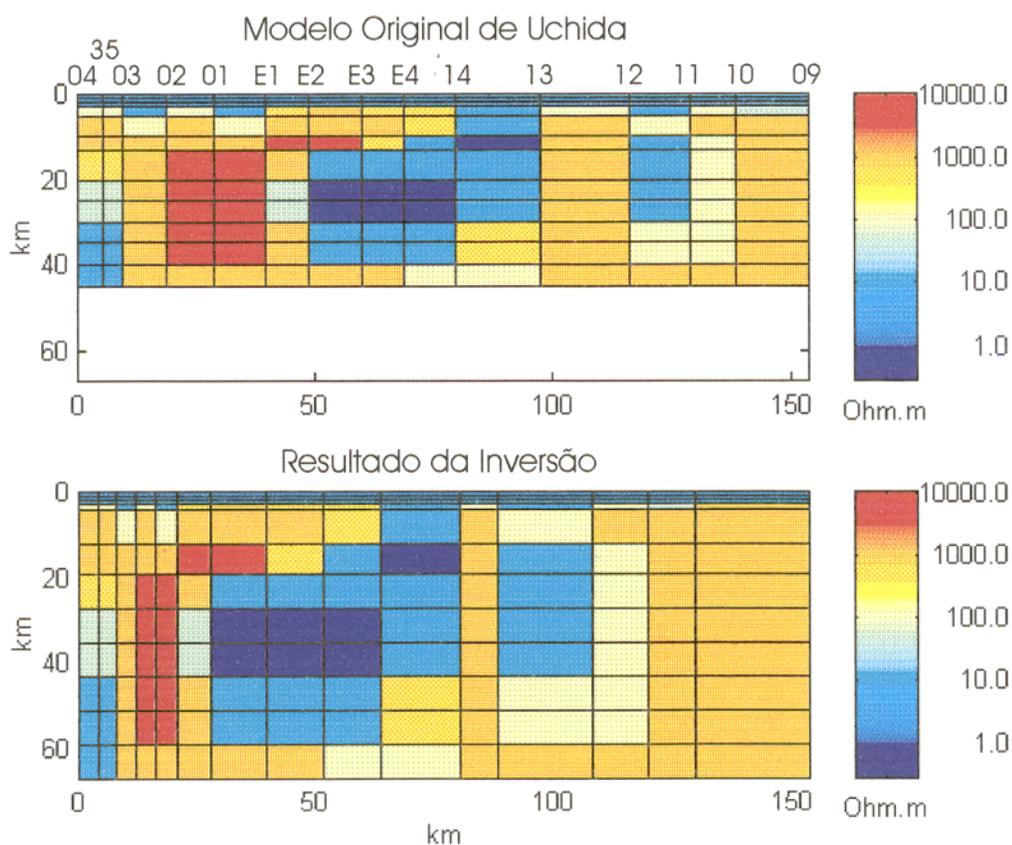


Figura 5.9 – Resultado da inversão para obtenção das dimensões dos elementos finitos, usando como informação a priori os valores de resistividade obtidos por Uchida (1993 b).

6 – CONCLUSÕES

Durante este trabalho foram abordados tópicos sobre a inversão de dados geofísicos e uma descrição de métodos e de funcionais estabilizantes que permitem obter soluções estáveis no processo de inversão. Em particular, foram estudados os funcionais estabilizadores de Tikhonov representados por derivadas, aplicados aos parâmetros na forma de informação a priori. Esses funcionais foram usados na inversão de dados de sondagens magnetotelúricas para resolver os seguintes problemas:

- (a) Determinação das dimensões dos elementos da malha de elementos finitos, com a finalidade de delimitar um corpo prismático bom condutor envolvido por meio homogêneo, sendo conhecida a priori a resistividade do corpo e do meio. Esse tipo de problema é inédito, pois convencionalmente o que se procura na solução da inversão é a resistividade e não a geometria dos elementos.
- (b) Localização de um e dois corpos prismáticos envolvidos por meio homogêneo. Para o caso de dois corpos, um deles é mais condutivo e o outro menos condutivo do que o meio.

A princípio optou-se por desenvolver o trabalho usando a técnica do *jumping*, que a literatura indica ser tanto mais rápida, como permitir a introdução de informação a priori de modo fácil. Essas duas características da técnica do *jumping* resolveriam os problemas do elevado tempo gasto na inversão de dados eletromagnéticos bidimensionais e da incorporação de informação sobre os parâmetros. O trabalho foi entretanto realizado com a técnica dos incrementos pois, durante o seu desenvolvimento, verificou-se que essa técnica, apesar de mais lenta, é mais segura já que sempre leva à convergência, ao contrário da técnica do *jumping* que exige um controle maior durante o processo de inversão, sob pena de não convergir. Para usar-se a técnica dos incrementos, foram desenvolvidas expressões que permitem a inclusão de informação a priori sobre os parâmetros e mostrado que, ao contrário do que afirmam diversos pesquisadores, essa inclusão pode ser feita de modo tão simples quanto na técnica do *jumping*.

No problema (a), acima referido, que envolve a determinação das dimensões da malha de elementos finitos, foi usada informação a priori de elevada confiabilidade com respeito aos valores de resistividade do corpo e do meio. O funcional estabilizador utilizado foi o da primeira derivada aplicado tanto na direção horizontal, quanto na vertical. Os resultados obtidos foram

considerados satisfatórios na definição das dimensões do corpo, porém insatisfatórios na definição do seu topo, provavelmente por que os dados, associados à frequência mais alta usada, não continham informação sobre esse parâmetro. Ainda na resolução deste problema foi feito um estudo para conhecer-se a influência do uso de informação a priori errada sobre os valores de resistividade do corpo e do meio. Esse estudo mostrou que as estimativas das dimensões do corpo podem ser consideradas aceitáveis se os erros nos valores de resistividade do corpo e do meio forem inferiores a 20 %.

No estudo da localização de um corpo condutor envolvido por meio homogêneo foram aplicados os estabilizadores de Tikhonov representados pelas derivadas de ordem um a quatro. Os resultados alcançados mostraram que:

- (a) O uso das combinações das derivadas de ordem dois a quatro aplicados na direção horizontal com a primeira derivada aplicada na vertical produz melhores resultados na delineação do corpo do que a aplicação da primeira derivada em ambas as direções. A combinação da quarta derivada na horizontal com a primeira derivada na vertical foi a que produziu a melhor resposta na delineação do corpo.
- (b) A combinação da segunda derivada na vertical com as derivadas de ordem um a quatro na horizontal também produzem resultados melhores do que a aplicação da primeira derivada em ambas as direções. Neste caso, a combinação da terceira derivada horizontal com a segunda na vertical produziu o melhor resultado.
- (c) Para as combinações da terceira derivada na vertical com as derivadas de ordem um a quatro na horizontal e para as combinações da quarta derivada na vertical com as derivadas de ordem um a quatro na horizontal, os resultados não foram considerados satisfatórios, produzindo delineação inferior à obtida com a aplicação da primeira derivada em ambas as direções.

No estudo para a localização de dois corpos envolvidos por meio homogêneo foram aplicados os estabilizadores representados pela derivadas de ordem um a cinco. Os resultados mostraram que:

- (a) Para dados sem ruído, os melhores resultados foram obtidos com a aplicação das combinações da segunda e da terceira derivadas na horizontal com a primeira derivada na vertical, tanto na delineação do corpo mais condutor, como do corpo mais resistivo. A aplicação dessas combinações melhora muito a delineação do

corpo mais resistivo, que é pouco resolvido com a aplicação convencional da primeira derivada em ambas as direções.

- (b) Em dados com 3 % de ruído gaussiano o melhor resultado na delineação dos dois corpos foi obtido com a combinação segunda derivada horizontal-primeira derivada vertical.
- (c) Em dados com e sem ruído o uso das derivadas de ordem superior a dois na horizontal melhorou muito a delineação do corpo mais resistivo. A delineação melhora com o aumento da ordem da derivada.

De um modo geral, os resultados obtidos neste trabalho indicam que a delineação dos corpos melhora com o aumento da ordem da derivada aplicada como estabilizador.

Não é do nosso conhecimento o uso de operadores de derivadas de ordem superior a um para estabilização do problema inverso em Métodos Eletromagnéticos. O operador da segunda derivada tem sido mencionado (Constable et al. 1987; deGroot-Hedlin & Constable 1990) mas não aplicado, enquanto os operadores de ordem superior a dois não são sequer citados. Nesta tese observou-se que o uso dos operadores de derivada de ordem superior a um produz melhores resultados do que o uso convencional do operador da primeira derivada, porque além de contribuir para estabilizar o processo de inversão, ajudam na delineação das heterogeneidades da subsuperfície.

As técnicas aqui estudadas foram aplicadas em parte dos dados do perfil COPROD2. Os resultados obtidos, quando comparados com o modelo de interpretação proposto por Uchida (1993 b), sugerem que a aplicação das combinações da terceira e quarta derivadas na horizontal com a primeira derivada na vertical deve produzir um modelo adequado para explicar os dados completos do perfil COPROD2.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BACKUS, G.E. & GILBERT, F. 1967. Numerical application of a formalism for geophysical inverse problems. *Geophys. J.R. Astr. Soc.*, **13**: 247-276.
- BACKUS, G.E. & GUILBERT, F. 1968. The resolving power of gross Earth data. *Geophys. J.R. Astr. Soc.*, **16**: 169-205.
- BARBOSA, V.C.F. 1991. Reconstituição gravimétrica compacta. Belém. Universidade Federal do Pará. Centro de Geociências. 97p. (Tese de Mestrado).
- BARBOSA, V.C.F. 1998. Mapeamento do relevo do embasamento de bacias sedimentares através da inversão gravimétrica vinculada. Belém. Universidade Federal do Pará. Centro de Geociências. 98p. (Tese de Doutorado).
- BECK, J.V. & ARNOLD, K.J. 1977. Parameter estimation in engineering and science. New York, John Wiley. 501p.
- BEVINGTON, P.R. 1969. Data reduction and error analysis for the Physical Sciences. New York, McGraw-Hill. 336p.
- BOX, G.E.P. & LUCAS, H.L. 1959. Design of experiments in non linear situations. *Biometrika*, **46**: 77-90.
- BOX, M.J. & DRAPER, N.R. 1971. Factorial designs, the $|X'X|$ criterion, and some related matters. *Technometrics*, **13**: 731-742.
- CAGNIARD, L. 1953. Basic theory of the magnetotelluric method of geophysical prospecting. *Geophysics*, **18**: 605-635.
- CAMPBELL, W.H. 1966. A review of the equatorial studies of rapid fluctuations in the earth's magnetic field. *Annales de Géophysique*, **22**: 492-501.
- CONSTABLE, S.C.; PARKER, R.L.; CONSTABLE, C.G. 1987. Occam's inversion: a practical algorithm for generating smooth models from electromagnetic sounding data. *Geophysics*, **52**: 289-300.
- DeGROOT-HEDLIN, C. & CONSTABLE, S. 1990. Occam's inversion to generate smooth, two-dimensional models from magnetotelluric data. *Geophysics*, **55**: 1613-1624.
- GLENN, W.E. & WARD, S.H. 1976. Statistical evaluation of electrical sounding methods. Part I: Experiment Design. *Geophysics*, **41**: 1207-1221.

- GUILLEN, A. & MENICHETTI, V. 1984. Gravity and magnetic inversion with minimization of a specific functional. *Geophysics*, **49**: 1354-1360.
- HARRINGTON, R.F. 1961. Time-harmonic electromagnetic fields. New York, McGraw-Hill. 480p.
- HOHMANN, G.W. 1987. Numerical modeling for electromagnetic methods of Geophysics. In: NABIGHIAN, M.N. (ed) *Electromagnetic methods in applied Geophysics – Theory*. Tulsa, SEG. p. 313-363.
- JONES, A.G. 1988. Static shift of magnetotelluric data and its removal in a sedimentary basin environment. *Geophysics*, **53**: 967-978.
- JONES, A.G. 1993. The COPROD2 dataset: Tectonic setting, recorded MT data, and comparison of models. *Journal of Geomagnetism and Geoelectricity*, **45**: 933-955.
- KAUFMAN, A.A. & KELLER, G.V. 1981. *The Magnetotelluric sounding method*. Amsterdam, Elsevier. 595p.
- MADDEN, T. & NELSON, P. 1964. A defense of Cagniard's magnetotelluric method. Geophysics Laboratory, Massachusetts Institute of Technology. Project NR-371-401, 41p. (Report to Office of Naval Research).
- MEDEIROS, W.E. & SILVA, J.B.C. 1996. Geophysical inversion using approximate equality constraints. *Geophysics*, **61**: 1678-1688.
- PARKER, R.L. 1994. *Geophysical inverse theory*. Princeton, Princeton University Press. 386p.
- RIJO, L. 1977. Modeling of electric and electromagnetic data. Salt Lake City. University of Utah. 241p (Ph.D. Thesis).
- RIJO, L.; PELTON, W.H.; FEITOSA, E.C.; WARD, S.H. 1977. Interpretation of apparent resistivity data from Apodi Valley, Rio Grande do Norte, Brazil. *Geophysics*, **12**: 811-822.
- RIJO, L. 1990. Teoria dos métodos elétricos e eletromagnéticos - Notas de aula. Departamento de Geofísica, Universidade Federal do Pará.
- ROKITYANSKY, I.I. 1982. *Geoelectromagnetic investigation of the earth's crust and mantle*. New York, Springer-Verlag. 381p.
- SCALES, J.A.; DOCHERTY, P.; GERSZTENKORN, A. 1990. Regularisation of nonlinear inverse problems: imaging the near-surface weathering layer. *Inverse Problems*, **6**: 115-131.

- SHAW, P.R. & ORCUTT, J.A. 1985. Waveform inversion of seismic refraction data and applications to young Pacific crust. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, **82**: 375-414.
- SILVA, J.B.C.; MEDEIROS, W.E.; BARBOSA, V.C.F. 1999. Pitfalls in nonlinear inversion. Artigo submetido ao *Pure and Applied Geophysics*, sem previsão de publicação.
- STRATTON, J.A. 1941. *Electromagnetic theory*. New York, McGraw-Hill. 615p.
- TARANTOLA, A. 1987. *Inverse problem theory*. Amsterdam, Elsevier. 613p.
- TIKHONOV, A.N. 1950. On determining electrical characteristics of the deep layers of the earth's crust. *Doklady*, **73**: 295-297.
- TIKHONOV, A.N. 1963 a. The solution of ill-posed problems. *Doklady Akad. Nauk., SSSR*, **151**: 501-504.
- TIKHONOV, A.N. 1963 b. Regularization of ill-posed problems. *Doklady Akad. Nauk., SSSR*, **153**: 49-52.
- TIKHONOV, A.N. & ARSENIN, V.Y. 1977. *Solutions of ill-posed problems*. New York: John Wiley, 258 p.
- TOURNERIE, B. & GILBERT, D. 1995. Inversion of the COPROD2 magnetotelluric data using a difusive-to-propagative mapping (DPM). *Geophysical Research Letters*, **22**: 2187-2190.
- UCHIDA, T. 1993 a. Smooth 2-D inversion for magnetotelluric data based on statistical criterion ABIC. *Journal of Geomagnetism and Geoelectricity*, **45**: 841-858.
- UCHIDA, T. 1993 b. Inversion of COPROD2 magnetotelluric data by use of ABIC minimization method. *Journal of Geomagnetism and Geoelectricity*, **45**: 1063-1071.
- WAIT, J.R. 1981. *Wave propagation theory*. New York: Pergamon, 348 p.
- WARD, S.H. & HOHMANN, G.W. 1987. *Electromagnetic theory for geophysical applications*. In: NABIGHIAN, M.N. (ed.) *Electromagnetic methods in applied geophysics-theory*. Tulsa: Society of Exploration Geophysicists, **1**: 131-311.