UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
NÚCLEO PEDAGÓGICO DE APOIO AO DESENVOLVIMENTO CIENTÍFICO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICAS – MESTRADO – PPGECM

Reginaldo da Silva

ANÁLISE DE UM PROCESSO DE ESTUDO DE SEMELHANÇA

Belém
2007

Reginaldo da Silva

ANÁLISE DE UM PROCESSO DE ESTUDO DE SEMELHANÇA

Dissertação apresentada à banca examinadora do Programa de Pós-Graduação do Núcleo Pedagógico de Apoio ao Desenvolvimento Científico (NPADC), da Universidade Federal do Pará, como um dos requisitos para a obtenção do titulo de Mestre em Educação em Ciências Matemáticas, sob a orientação do Prof. Dr. Renato Borges Guerra.

Belém
2007

ANÁLISE DE UM PROCESSO DE ESTUDO DE SEMELHANÇA

Por

REGINALDO DA SILVA

Dissertação de Mestrado aprovada para obtenção do título de Mestre em Educação em Ciências e Matemáticas, pela banca examinadora formada por:

____

Presidente: Prof. Dr. Renato Borges Guerra, UFPA

____

Membro: Prof. Dr. Luis Carlos Pais, UFMS

____

Membro: Prof. Dr. Francisco Hermes da Silva, UFPA

____

Membro: Prof. Dr. Tadeu Oliver Gonçalves, UFPA

Defesa: Belém (PA), 11 de maio de 2007

Ao meu pai, que o destino privou-me de tê-lo ao meu lado quando ainda bebê, e que um dia antes de ter sido chamado por Deus de forma súbita, num ato de premonição, revelou que a maior dor que o acompanharia depois da morte seria de não poder contribuir para a formação dos seus filhos, mas se o senhor não pode estar em vida, com certeza sempre esteve em espírito ao meu lado, conduzindo meus passos e me amparando nos momentos difíceis desta longa caminhada que me trouxe até a conclusão do mestrado. Obrigado pai por nunca ter me abandonado.

AGRADECIMENTO

A Deus, que na sua infinita misericórdia sempre esteve presente em todos os momentos da minha vida e concedeu-me o privilégio de ser mestre.

A minha mãe que nunca mediu esforços para estar sempre ao meu lado dando o melhor de si para a minha educação.

A minha esposa Lia Mara e filha Sofia Vitória por acreditarem e incentivarem na conquista do meu ideal.

Ao programa pelo acolhimento e oportunidade que me permitiu ver a educação com outros olhos.

Ao professor Doutor Renato Borges Guerra por ter confiado em mim e aceitado ser meu orientador.

Ao professor Doutor Tadeu Oliver Gonçalves pelas contribuições que muito somaram na minha formação.

Ao professor Doutor Francisco Hermes da Silva pelas contribuições que ajudaram a nortear o trabalho.

A professora Doutora Izabel Lucena pelas contribuições em momentos cruciais dessa caminhada.

Ao amigo Mauro Sérgio Alamar de Souza pelo apoio dispensado a mim em momentos difíceis da minha vida de estudante.

Aos amigos conquistados no curso, especial: Ercio Oliveira, José Messildo Nunes, Maria Augusta Rapouso e Roberto Carlos Andrade, os quais sempre estiveram presentes, tanto nos bons momentos como nos momentos difíceis elogiando e tecendo críticas pertinentes, as quais contribuíram de maneira efetiva na construção deste trabalho.

RESUMO

Trata de uma investigação de um processo de estudo de semelhança de figuras realizado por uma comunidade de estudo, em uma turma do ensino médio de uma escola da rede pública estadual da periferia de Belém, buscando responder se as atividades desenvolvidas pelos alunos em sala de aula caracterizam uma atividade matemática a luz da teoria da transposição didática de Yves Chevallard. Isso é realizado por meio de atividades colaborativas, em que busca identificar os movimentos dos saberes matemáticos evocados pelos alunos na construção do conceito de semelhança. A pesquisa é de natureza qualitativa, numa abordagem etnográfica adaptada à educação, segundo Lüdke e André. As análises mostram que as atividades realizadas promovem um fazer matemático e, portanto, uma atividade matemática, por meio dos saberes evocados e as articulações estabelecidas na construção de modelos para a compreensão pelos alunos do conceito de semelhança. São destacadas as dificuldades como elementos importantes na identificação de saberes e articulações destes, bem como a comunidade de estudo colaborativo como facilitador do processo de estudo.

Palavras-chave: Transposição Didática, Atividade Matemática, Semelhança

ABSTRACT

This is about an investigation of a study procedure between similar images made by a research community, in a high school class from the public state branch in the outskirts of the city of Belém, seeking to answer if the activities developed by students in classroom characterize a mathematical activity in view of the didactic transposition theory by Yves Chevallard. This is accomplished through collaborative activities that try to identify the flow of mathematical knowledge evoked by students while building a concept of similarity. The research is of a qualitative nature with an ethnographic approach, adapted to education according to Lüdke and André. Analysis show that accomplished activities promote a mathematical action, therefore mathematical activity through the knowledge raised and the links established upon construction of comprehensive models of the concept of similarity by students. Difficulties are outlined as important elements identifying knowledge and their links, such as the research community collaboration eases the studying process.

Keywords: Didactic Implementation, Business Mathematics, Similarity

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE SIGLAS

NPADC	Núcleo Pedagógico de Apoio ao Desenvolvimento Científico
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
Seduc	Secretaria de Estado de Educação
SOME	Sistema de Organização Modular de Ensino
UFPA	Universidade Federal do Pará

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Como docente de Matemática, muitos questionamentos com relação ao ensino de vários assuntos desta disciplina têm nos causado inquietações, em especial no ensino da geometria, pois, em alguns casos, este assunto chega a ser omitido do planejamento anual. A ausência da geometria nos níveis fundamental e médio pode interferir no desenvolvimento das estruturas mentais dos alunos, pois acreditamos que sem estudar a geometria, as pessoas podem apresentar dificuldades para desenvolver um pensar geométrico ou um raciocínio visual necessários para a resolução e interpretação de situações vividas no cotidiano.

Nossas experiências como docentes nos levam a entender que o estudo da geometria melhora a interpretação do mundo que nos cerca, facilita o entendimento das idéias e contribui para ampliar a visão do contexto matemático.

O fato de não se trabalhar a geometria em nenhum desses níveis, leva os discentes a concluírem a educação básica com lacunas de conhecimentos importantes. Há casos em que determinados alunos não conseguem definir com clareza certos elementos da geometria, como por exemplo: o que é um triângulo equilátero? O que é um losango?

Por acreditarmos que o estudo da geometria contribui para o desenvolvimento das estruturas mentais dos alunos, possibilitando melhor compreensão do mundo, é que nos propomos a **analisar como os alunos fazem Matemática ao construírem o conceito de semelhança.** A opção pelo estudo do conceito de semelhança nesta dissertação, se dá, também, pelo fato de nos proporcionar a relação com atividades cotidianas, uma vez que não é comum encontrarmos nos livros/textos o tratamento destas questões.

Ao buscarmos o fazer matemático dos alunos, temos o objetivo de levá-los a construírem modelos matemáticos que possam ser usados a partir de situações que ocorrem no seu contexto sócio-cultural, assumindo desta forma a condição de protagonista na construção do conhecimento, a responsabilidade pelos erros e acertos matemáticos, negando a condição passiva de mero receptor do conhecimento produzido no contexto escolar.

Para alcançar estas metas usamos a Teoria da Didática da Matemática de Yves Chevallard, no que diz respeito a fazer e a estudar Matemática e a responsabilidade dos alunos na construção do conhecimento.

Com o objetivo de alcançar essas metas, construímos com os alunos da turma, em que ocorreu a intervenção metodológica, uma didática a partir de uma comunidade em que se desenvolveu o processo de estudo.

A intervenção ocorreu em uma escola da rede pública numa turma de terceiro ano do ensino médio, que foi dividida em grupos de cinco alunos. As atividades desenvolvidas foram elaboradas levando em consideração o contexto sócio-cultural dos alunos. Para a organização das atividades usamos a teoria da Aprendizagem Significativa de David Ausubel como norteadora metodológica, onde buscamos sempre preparar as atividades partindo dos conceitos mais inclusivos para os menos inclusivos. Algumas atividades foram preparadas com o objetivo de funcionarem como organizador prévio para o processo de estudo.

Esta dissertação está estruturada em seis capítulos. No primeiro capítulo tratamos do estudo geometria euclidiana. O segundo capítulo é dedicado à fundamentação teórica adotada para a análise dos dados. No terceiro capítulo apresentamos a metodologia utilizada na pesquisa. No quarto capítulo apresentamos uma construção do conceito de semelhança no contexto acadêmico, ao qual propomos uma transposição didática para o ensino médio. No quinto capítulo estão contidas as análises dos dados e no sexto as considerações finais.

CAPITULO I

1 A GEOMETRIA EUCLIDIANA NA FORMAÇÃO DO ALUNO

1.1 A GEOMETRIA E O COTIDIANO

Ao longo da carreira como docente, temos observado que o modelo educacional desenvolvido em certas instituições de ensino nos níveis fundamental e médio, não tem cumprido com os papéis primordiais, como: formar cidadãos críticos, emancipados e preparados para o mercado de trabalho. Ao contrário, nos moldes que o processo de ensino/aprendizagem é trabalhado nessas unidades de ensino, em alguns casos, contribui para que os alunos fiquem à margem da sociedade colaborando para o aumento da desigualdade social.

No nosso ponto de vista, faz-se necessário que os professores da rede pública procurem saber as atividades desenvolvidas fora da escola por seus alunos, para que, na medida do possível, possam relacionar os saberes escolares com os saberes que os mesmos possuem.

Ao considerar como relevante o contexto sócio-cultural dos alunos, é que encontramos a importância de determinados objetos matemáticos, como o estudo de semelhança, e dessa forma, buscarmos nas experiências dos alunos, saberes que possibilitem a compreensão dos mesmos, no estudo desse objeto matemático.

Se os professores trabalharem as disciplinas aproximando-as aos contextos sócio-culturais dos alunos, a formação dos mesmos será significativa e os saberes escolares terão repercussões dentro da realidade em que vivem, e os conhecimentos adquiridos nos anos de educação básica serão fecundos, ao serem aplicados no dia-a-dia, como por exemplo, ao associar as relações geométricas com o espaço utilizado pelo homem, o que certamente contribuirá para a continuação dos estudos em outros níveis.

Levado pelo intuito de transformação no processo de ensino aprendizagem e ciente da importância da geometria na formação do aluno e apoiado na experiência profissional que possuímos dentro e fora da docência, é que nos propomos a analisar como os alunos fazem Matemática na construção do conceito de semelhança.

No que se refere à formação dos alunos, temos consciência que muitos são os assuntos de Matemática que podem contribuir de forma efetiva no processo de transformação social, e por isso de extrema importância para os alunos da rede pública. Contudo, nessa dissertação trataremos apenas de geometria euclidiana, mais especificamente do conceito de semelhança. Essa escolha não se dá por uma questão puramente subjetiva, mas em decorrência do abandono que este assunto vem sofrendo nas escolas do sistema público, e sua estreita relação com fazeres não escolares muito próximos das atividades sócio-culturais dos alunos.

1.2 O ABANDONO DA GEOMETRIA

O abandono da geometria por nós vivenciado, enquanto aluno do ensino básico, é agora por nós (re)descoberto como estudantes do mestrado, por meio de vários pesquisadores, como um problema do ensino de Matemática no Brasil. Através de pesquisas bibliográficas, constatamos que a Geometria no ensino brasileiro vem, ao longo de décadas, desaparecendo das salas de aula. Pesquisadores como Perez (1991) e Pavanelo (1993), confirmam que a Geometria está ausente ou quase ausente da sala de aula. Estas pesquisas nos revelam que, de fato, este problema já existe há mais de uma década e meia; entretanto, este problema ainda é latente em muitas escolas da rede pública, como, por exemplo, as que trabalhamos.

Embora os PCN (BRASIL, 1998) destaquem a importância de se resgatar o trabalho com geometria no ensino fundamental, certos professores têm dificuldades em usar estratégias metodológicas para o ensino da geometria. Talvez isso se dê pelo fato de grande parte dos professores que atuam em sala de aula, terem tido uma formação de base com carência de conhecimentos geométricos. Por outro lado, os cursos de formação inicial de professores – tanto os cursos de magistério como os de licenciatura – continuam não dando ênfase em discutir com seus alunos uma proposta capaz de dar a importância que a geometria merece. Neste enfoque da formação, Perrenoud (2002) ressalta que:

> Quando levam em conta a realidade dos inícios, alguns formadores sofrem bastante, porque seu projeto inicial não consiste em preparar bons iniciantes, mas em tratar temas importantes que eles dominem muito bem. Ao ajudar os estudantes-estagiários, *tal como eles são,* a construir competências que possam ser utilizadas na sala de aula, certos formadores são invadidos por uma profunda tensão entre o que lhes interessa e o que seria útil e necessário aos alunos. [...] é importante construir paralelamente saberes didáticos e transversais bastante ricos e profundos para *equipar* o olhar e a reflexão sobre a realidade (PERRENOUD, 2002, p. 17, grifos do autor).

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998) ressaltam a importância da geometria no quarto ciclo (7ª e 8ª séries) e a relevância da construção de situações-problemas que favoreçam o raciocínio dedutivo e a introdução da demonstração, apresentando verificações empíricas, como podemos perceber na assertiva abaixo:

> Os problemas de geometria vão fazer com que o aluno tenha seus primeiros contatos com a necessidade e as exigências estabelecidas por um raciocínio dedutivo. Isso não significa fazer um estudo absolutamente formal e axiomático da geometria. [...] Embora os conteúdos geométricos propiciem um campo fértil para a exploração dos raciocínios dedutivos, o desenvolvimento dessa capacidade não deve restringir-se apenas a esse conteúdo (BRASIL, 1998, p. 86).

Em que pesem as orientações dos PCN, parece não encontrar eco nos fazeres diários docentes de algumas escolas, pois nossa vivência como docente nos proporcionou, antes, também, (re)descobrir o abandono da geometria. E foi assim que constatamos, em observações feitas por nós em vários municípios do estado do Pará, de março de 1995 a junho de 2003, que muitos alunos chegam ao ensino médio quase sem nenhum conhecimento de geometria. O conceito intuitivo que o aluno tem de geometria no dia-a-dia e que pode ser desenvolvido sem fórmulas, apenas usando a percepção e a observação, também, em muitos casos, não é desenvolvido no ensino fundamental. Outros alunos estudaram algum conteúdo de geometria, mas de maneira mecânica, uma vez que os professores fazem exclusivamente uso de fórmulas para calcular, por exemplo, áreas ou algumas situações encontradas nos livros didáticos. Determinados textos escolares elementares ignoram as relações da geometria com o mundo físico; quando há essas relações, algumas não são precisas, o que pode levar os alunos a construírem uma visão espacial precária, manifestada pelos mesmos na dificuldade de observar objetos concretos e reconhecê-los, posteriormente, representados no plano.

Esta ausência da geometria na educação básica vai de encontro ao que é preconizado por Fainguelernt (1995, p. 46) sobre o estudo da geometria, onde ela afirma que “três aspectos devem ser abordados no ensino: o aspecto topológico, o aspecto projetivo e o aspecto euclidiano”, pois trabalhar esses aspectos possibilita conhecer e explorar o espaço com o qual temos contato, podendo, assim, nos proporcionar, além de identificar as formas geométricas, um mergulho num mundo de intuição, abstração, formalismo e dedução.

O estudo da geometria promove o desenvolvimento das estruturas mentais, facilitando a passagem do estágio das operações concretas para o das operações abstratas. E mais, segundo Durval apud Machado (2003, p. 127), a geometria envolve três formas de processo cognitivo que preenchem específicas funções epistemológicas, a saber:

> - **Visualização**: exploração heurística de uma situação complexa, se por uma simples observação ou por uma verificação subjetiva;
> - **Construção**: processo por instrumento de configurações que podem ser trabalhadas como um modelo, no qual ações e resultados observados são ligados aos objetos matemáticos representados;
> - **Raciocínio**: processo do discurso para a prova e a explicação.

Essas formas cognitivas citadas acima são indispensáveis no fazer matemático, uma vez que para resolver uma situação que necessita de conhecimentos matemáticos, é necessário fazer uma análise a respeito de qual objeto matemático pode ser relacionado com a situação, para então fazer uso de determinado modelo matemático ou estabelecer um processo de estudo com a finalidade de encontrar um modelo que possa ser utilizado para se chegar à solução desejada, e em seguida interpretar a situação a partir da resposta.

1.3 NOSSA PRÁTICA DOCENTE NO ENSINO DA GEOMETRIA EUCLIDIANA

Depois de quatro anos atuando como docente em Belém, pedimos transferência para o Sistema de Organização Modular de Ensino (SOME)[1]. Foi, então, que pudemos ratificar a importância do contexto sócio-cultural dos alunos no processo de ensino/aprendizagem, isto porque a cada sessenta e cinco dias tínhamos que trocar de município e conseqüentemente de alunos. Este rodízio que ocorria com as equipes, nos levou a observar que não era motivador para o processo de ensino/aprendizagem, trabalhar com os alunos de maneira a considerá-los iguais, como se todos tivessem a mesma cultura.

Essa mudança de município exigia habilidade pedagógica dos professores, pois às vezes, a equipe saía de uma localidade onde a base de

[1] Modalidade de ensino rotativo desenvolvida nos municípios do estado do Pará.

subsistência era a extração e beneficiamento de madeira, para outra de subsistência agrícola. É lógico que os anseios de alunos com realidades tão diferentes não podiam ser os mesmos, e, observando essas heterogeneidades, e imbuído da idéia de levar um conhecimento que tivesse relação com o modo de vida de cada comunidade, é que começamos a traçar os primeiros passos para montar um projeto que apontasse para a temática de contextualizar a geometria a partir da realidade de cada localidade, sem frustrar as aspirações de acesso dos alunos ao mundo globalizado, possibilitando a continuação de sua formação em outros níveis. Naquele momento, por não termos formação para pesquisa e também por falta de um orientador com mais experiência que a nossa em Matemática e em pesquisa, não nos demos conta da problemática que estávamos abarcando.

Entretanto, motivado pela situação por nós vivenciada, ora como estudante e ora como docente, com relação ao ensino de geometria, que demos andamento ao projeto, o qual passou a ser construído em cima das experiências vividas em cada município. Passamos a observar as experiências dos alunos e questionar de que forma a geometria estava relacionada com o cotidiano dos mesmos.

Isso exigia uma observação por vários ângulos, pois muitas eram as interfaces envolvidas, mas de certa forma nos sentíamos à vontade para trabalhar as questões sociais que podem interferir no rendimento escolar do aluno.

Sempre que chegávamos a um município, nos preocupávamos em fazer um levantamento a respeito das atividades desenvolvidas pelos alunos. Quando trabalhávamos geometria, procurávamos mostrar a sua relevância nas diferentes atividades humanas, procurando fazer relação do conhecimento escolar com os saberes que eles possuíam, de modo a (re)significar esses saberes. Essa busca pelos saberes dos alunos para relacionar com o conhecimento escolar, hoje melhor podemos entender a partir das leituras feitas a respeito da *Teoria da Aprendizagem Significativa* de Ausubel, pois, sem nos dar conta, e por falta de conhecimento, o que buscávamos eram os organizadores prévios, contidos na experiência dos alunos, para que pudéssemos, em determinados momentos do processo de ensino/aprendizagem, evocá-los como subsunçores para ancorar novos conceitos da geometria que estavam sendo trabalhados.

Segundo Moreira e Massini (2002), um dos fatores que leva a aprendizagem a ser significativa é a liberdade que o aluno tem de só aprender o que lhe interessa; todavia, cabe ao professor seduzir o aluno para que ele se sinta motivado a adquirir novos conhecimentos. Agindo dessa forma, assumíamos que os saberes escolares teriam significado no dia-a-dia de cada aluno, fossem aplicando-os na serraria, na fabricação de móveis, na agricultura ou em seu cotidiano de um modo geral.

Porém, essas aulas de geometria que nós tanto dávamos relevância, acabavam se restringindo às aplicações de fórmulas e exercícios, que eram preparados com antecedência, reservando para nós a transposição dos obstáculos e o caminho produtivo da descoberta, apresentando uma solução bonita e eficiente para os alunos, sem deixar para os mesmos o legítimo ato de pensar, subtraindo deles a chance de desenvolver seus saberes através da descoberta e da construção.

Hoje, percebemos que esse tipo de aula que ministrávamos, refletia o professor no qual havíamos nos formado, uma vez que, torna-se complexo para um professor: desenvolver com seus alunos processos de aprendizagem que não teve oportunidade de desenvolver em si mesmo (ainda que cognitivamente); promover a aprendizagem de conteúdos que não domina; a construção de significados que não possui; como também a autonomia que não teve oportunidade de construir durante sua formação.

Essa postura profissional desenvolvida por nós, atualmente, é melhor compreendida quando recorremos à teoria de Chevallard, principalmente no que diz respeito a estudar uma obra matemática, e o que significa fazer Matemática, uma vez que a didática desenvolvida por nós não dava oportunidade aos alunos de estudar a obra matemática em questão, já que as atividades eram preparadas de tal forma que, se os alunos decorassem a fórmula e soubessem usar os valores do problema na mesma, na maioria dos casos, chegariam à solução; porém, qualquer obstáculo que surgia, nós resolvíamos no quadro. Com essa maneira de conduzir o processo, não dávamos chance aos alunos de desenvolverem o ato de estudar a obra matemática, ou seja, de participarem da construção do conhecimento que estava sendo construído, ficando, os mesmos, sempre na condição de receptores do conhecimento.

Em contrapartida, hoje, a partir de leituras feitas por nós a respeito da didática da Matemática, acreditamos que, para o aluno fazer Matemática, temos que – no processo de aprendizagem – elevá-lo à condição de protagonista no estudo das obras matemáticas, onde o aluno possa criar modelos que o leve a observar as regularidades neste fazer construído por ele, de tal forma que este aluno seja capaz de aplicar o modelo em situações diferentes em seu cotidiano.

Assumimos que a falta de conhecimento da Didática da Matemática, por não termos formação com ênfase na educação matemática e também por não limitarmos o objeto matemático por falta de experiência com pesquisa, muito contribuiu para que o projeto não se concretizasse.

Porém, mesmo não tendo concluído o projeto, havia ocorrido uma sensível mudança na nossa prática como docente, pois o fato de nos preocuparmos com o que ensinar para os alunos nos levou a perceber que cada pessoa necessita de um tempo diferente para aprender, como, também, relacionar os conhecimentos matemáticos com o contexto sócio-cultural dos alunos, nos mostrou ser uma estratégia motivadora no processo de aprendizagem matemática. Sendo assim buscar os saberes que os aprendizes já possuem pode ser um grande facilitador no processo de ensino/aprendizagem.

Assim, buscávamos trabalhar a geometria aproveitando os saberes que os alunos possuíam e tentando significá-los dentro da realidade dos mesmos, no entanto sempre procurando fazer com que eles decorassem as fórmulas, acreditando que poderiam utilizá-las na prática. Contudo, só o fato de decorar as fórmulas sem significá-las não garante o seu uso.

Com o passar do tempo, na tentativa de melhorar o processo de ensino/aprendizagem, decidimos adotar como recurso pedagógico a construção de materiais, pois adotamos como hipótese válida que esta estratégia pedagógica poderia contribuir para o processo de aprendizagem não só da geometria, pois segundo Lorenzato (1995), os professores que procuram um agente para facilitar o desenvolvimento cognitivo dos alunos no processo de ensino/aprendizagem encontrarão na geometria o que necessitam, ou seja, prestigiando o processo de construção, a geometria valoriza o descobrir, o conjecturar e o experimentar, a partir da observação e da manipulação de materiais.

Assim, a construção de materiais parece constituir excelente estratégia para o estudo de geometria. Considerando a construção e manipulação de sólidos como um recurso eficaz para se ter uma visão do espaço tridimensional, das formas geométricas que estão ao nosso redor, construídas pelo homem ou pela natureza, estas devem preceder o estudo formal da geometria, podendo serem usadas como "organizadores prévios" visando uma aprendizagem da geometria. Segundo Moreira e Massini (2002), os organizadores prévios são materiais que devem ser apresentados aos alunos antes do assunto que vai ser trabalhado em sala, cuja finalidade é trabalhar a estrutura cognitiva do aprendiz para facilitar a aprendizagem.

Era na construção dos materiais que os alunos identificavam certos elementos, principalmente nos sólidos, muitos dos quais são difíceis de serem observados quando estão desenhados no plano. A relação entre os elementos e as figuras surgia naturalmente no processo da construção.

Depois de certo tempo, apesar do empenho dedicado ao projeto, sentíamos necessidade de aprofundar a busca de referenciais teóricos que subsidiassem o nosso trabalho, pois a sensação era de que nós estávamos chegando ao nosso limite. O fato de estar sempre trabalhando nos interiores, não nos dava oportunidade de participar de cursos de formação continuada que pudessem ajudar. Este período de inquietação coincide com o nosso desligamento do SOME.

Consideramos que atitudes constantes dessa natureza, como as relatadas acima, na prática docente e sobre a prática docente, é que podem levar um professor a se tornar reflexivo.

Segundo Perrenoud (2002), todo indivíduo reflete na ação e sobre a ação, porém, este ato não o torna um profissional reflexivo. Não devemos confundir uma postura reflexiva de um profissional com uma reflexão episódica, que é comum a todos nós, sobre algo que fazemos. Para se atingir uma verdadeira prática reflexiva, é necessário que se tenha uma postura, uma identidade, um hábitus.

1.4 CONHECIMENTOS GEOMÉTRICOS QUE CHEGAM COM A PÓS-GRADUAÇÃO

É no início de 2005, ao ingressarmos no programa de Pós-Graduação, Mestrado em Educação em Ciências e Matemáticas do Núcleo Pedagógico de Apoio ao Desenvolvimento Científico (NPADC/UFPA), que passamos a ter contato com a disciplina Tópicos da Matemática, relação entre Álgebra, Aritmética e Geometria e é onde encontramos os fundamentos matemáticos que procurávamos para colocar em prática um projeto de pesquisa dentro do contexto da Geometria Euclidiana, o qual possa analisar como os alunos fazem Matemática ao construírem o conceito de semelhança. É a partir das aulas desenvolvidas nesta disciplina que percebemos a importância de se ter uma visão profunda da Geometria para que se possa ensinar além da aplicação direta de fórmulas, como é o caso do estudo de figuras semelhantes, em que os livros/textos do ensino básico, em geral, relacionam apenas polígonos com a mesma forma, ângulos correspondentes iguais e lados homólogos proporcionais, não dando relevância à semelhança entre as figuras não poligonais.

Também não é comum encontrarmos livros didáticos que tratem da relação entre áreas de figuras semelhantes ou que dêem relevância à relação entre volumes de sólidos semelhantes. O fato de não se dar ênfase a essas relações pode levar os alunos a não se darem conta de seu significado na resolução de problemas práticos freqüentemente encontrados no dia-a-dia. Esta relação que existe entre áreas e volumes de figuras semelhantes é que permite o cálculo da área ou do volume no tamanho real de qualquer figura plana ou espacial – que esteja na planta de um projeto ou em uma maquete – conhecida a área ou o volume da figura e a escala utilizada no projeto.

É nos debates a respeito do cálculo de área de uma figura qualquer que percebemos a importância do fracionamento de uma figura em outras figuras de áreas conhecidas. Esta estratégia propicia ao aprendiz a não memorização de fórmulas, sendo necessário apenas que o aluno saiba a área, por exemplo, do quadrado unitário, que esse conhecimento poderá ser usado para encontrar a área do retângulo e, a partir daí, de um paralelogramo, do triângulo e do trapézio. Assim, o cálculo da área de uma figura qualquer pode ser realizado fracionando a figura em quadrados, retângulos e triângulos, por exemplo.

É nesta disciplina que passamos a perceber o quanto somos fruto de uma formação linear, como no cálculo de volume em que sempre trabalhamos primeiro as áreas para depois trabalharmos o volume, fazendo uso das fórmulas tradicionais. Todavia, quando nos deparamos com um sólido irregular, por exemplo, o cavalo do jogo de xadrez, e precisamos calcular seu volume, as fórmulas tradicionais não podem ser aplicadas. Então, a seqüência “calcular a área para depois calcular o volume” neste caso, não tem utilidade, porém, uma medida simples como fazer a imersão da pedra de xadrez em um recipiente que contenha liquido, e observar o volume de líquido deslocado – que será o volume do objeto – pode resolver o problema. Ficou claro para nós o quanto é importante ter uma visão que vá além das letras e números que se apresentam na questão, como também a importância do desenvolvimento histórico e epistemológico do conhecimento matemático para que, com esses conhecimentos, possamos construir estratégias de ensino que atendam às necessidades dos saberes dos alunos.

1.5 OBJETIVOS

Levando em consideração as experiências vivenciadas no ensino de geometria e as fundamentações teóricas estudadas no curso de pós-graduação, propomos fazer uma pesquisa como professor colaborador num processo de estudo que promova a construção de conhecimentos geométricos motivados pelo contexto sócio-cultural dos alunos. Para isso, nos restringiremos ao estudo de semelhança onde pretendemos analisar o fazer matemático dos alunos no processo de estudo de semelhança com o objetivo de responder a perguntas como: Quais são as praxeologias implementadas pelos alunos no processo de estudo? Quais saberes matemáticos são articulados no processo de estudo? A formação de uma comunidade de estudo é um facilitador no processo de estudo?

CAPÍTULO II
2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

No presente capítulo abordaremos a fundamentação teórica adotada por nós, que dará suporte para tratarmos do objeto de pesquisa desta dissertação, que é analisar como os alunos fazem Matemática ao construírem o conceito de semelhança. Para a análise deste objeto de pesquisa, adotamos a teoria da Didática da Matemática, baseado na visão de Yves Chevallard, da qual elegemos os conceitos: *fazer Matemática* e *estudar Matemática*, por julgarmos compatível com nosso objeto de estudo, para que, com esses conceitos, possamos fazer a análise dos dados obtidos na intervenção metodológica.

Também, neste capítulo, trataremos da teoria da Aprendizagem Significativa de David Ausubel, a qual usamos como norteadora metodológica na elaboração das atividades, as quais foram organizadas partindo sempre do conceito mais inclusivo de semelhança para o menos inclusivo; além do uso dos organizadores prévios.

2.1 YVES CHEVALLARD E A TRANSPOSIÇÃO DIDÁTICA

Yves Chevallard é um pesquisador com atuação na área do ensino da Matemática que trata, entre outros assuntos, sobre a Didática da Matemática. No contexto da Didática da Matemática, destacamos a sua teoria da transposição didática, onde o conhecimento, neste processo, passa, necessariamente, por dois momentos de adaptação: um que ocorre do saber científico para o saber a ensinar, e outro do saber a ensinar para o saber ensinado.

A adaptação feita a certos tipos de conhecimentos na tentativa de ensiná-los é algo comum na esfera educacional, tanto nos livros/textos, como no meio dos que estão inseridos no processo de ensino/aprendizagem.

Chevallard usa o conceito de transposição didática para formular uma teoria que lhe subsidia a analisar questões relevantes da Didática da Matemática. A transposição didática para Chevallard é uma ferramenta competente para avaliar a transformação do saber científico ou sábio para aquele que consta nos currículos e livros/textos, como também deste último naquele que, de fato, é ensinado nas salas de aula. Através da transposição didática Chevallard avalia as transformações do saber sábio em um objeto de ensino.

De modo geral, um conhecimento, ao ser transposto de um contexto para outro, é passível de sofrer modificações, mesmo que, ao ser ensinado, conserve os conceitos originais da sua conjuntura de pesquisa; entretanto, incorpora outros significados inerentes do contexto escolar no qual está sendo aplicado. Chevallard chama a atenção para esse processo de transposição que, de certa forma, transforma o saber científico no saber ensinado, pois o cuidado que se deve ter é para que o saber ensinado não se transforme em mera simplificação do objeto de ensino em sala de aula, com o único objetivo de facilitar a compreensão dos alunos. Deve-se estar atento, pois se trata de novos conhecimentos que devem responder a questões específicas dentro do contexto sócio-cultural dos alunos sem perder de vista o contexto científico.

Para Chevallard, as simplificações que ocorrem no ato da transposição didática devem se dar em decorrência da necessidade de não se aprofundar determinados conceitos, como também na linguagem empregada em certas situações. Alguns motivos que levam a essa simplificação: a reduzida carga horária das disciplinas, os objetivos pretendidos pelo curso e pela instituição de ensino, a falta dos saberes prévios dos alunos etc. Nesse contexto, a opção por certas adequações é inevitável.

Daí a importância de analisar, através da transposição didática, o desenvolvimento do saber que realmente é trabalhado em sala de aula, pois esta análise permite uma fundamentação teórica para o desenvolvimento de uma prática pedagógica reflexiva. Chevallard entende tal procedimento como uma necessidade que o professor deve possuir, gerando, assim, uma observação epistemológica permanente na e sobre a ação docente.

Para Chevallard (2001), um dos pontos basilares da didática são as relações existentes entre o saber científico e o saber ensinado; estas relações ocorrem dentro do contexto escolar – sistema didático – o qual se encontra contido em um conjunto que envolve fatores externos à sala de aula – sistema de ensino – que podemos considerá-lo como sendo o sistema educacional, o qual interfere no sistema didático. O sistema de ensino, por sua vez, está contido em um conjunto mais extenso e complexo, que é a sociedade. Segundo Chevallard, a ponte entre a sociedade e o sistema de ensino, se dá pela noosfera.

Para Chevallard a noosfera é formada por cientistas, profissionais da educação, políticos, pais de alunos, autores de livros textos, e outros segmentos da sociedade, onde cada um desses grupos interfere no delineamento dos saberes que vão ser utilizados na sala de aula, segundo seus interesses. As personagens que cooperam para o processo de transformação dos saberes surgem na noosfera. Estas aparecem como intermediárias entre dois pontos: as necessidades e os anseios inerentes da sociedade e o funcionamento do sistema escolar que atenda a esses anseios.

O sistema didático, no contexto histórico do processo de ensino/aprendizagem, sempre foi construído em cima de dois pilares: de um lado o professor e de outro o aluno. Sendo este sistema formado unicamente por seres humanos, então uma análise sociológica seria suficiente para entender o processo. Assim sendo, qualquer insucesso no processo de ensino/aprendizagem seria reflexo dessa relação. Entretanto, Chevallard a partir de 1982 propõe um sistema didático em que há necessidade de ser inserido um terceiro elemento fundamental no processo de ensino/aprendizagem, que é o conhecimento, formando, assim, outro modelo de sistema didático, criando duas novas relações: professor-saber e saber-aluno. Nesse novo sistema didático proposto por Chevallard, o saber passa a assumir um papel determinante na relação existente anteriormente, possibilitando, assim, uma melhor análise teórica. Deste modo, de acordo com Chevallard, neste sistema didático a epistemologia se torna um grande instrumento de análise (Figura 1).

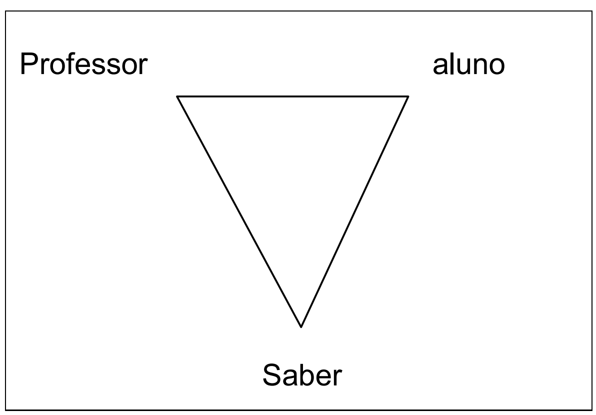


Figura 1: Relação professor/saber/aluno
Fonte: D’Amore (2005)

É evidente que, tanto no sistema didático pensado pela pedagogia tradicional, como no sistema didático proposto por Chevallard, o professor vive envolvido com certas relações delicadas. Uma delas é fazer a transposição didática do saber sábio, que é criado no contexto da comunidade científica, para o saber ensinado que será aplicado no contexto da comunidade estudantil. Na realidade, fazer essa transposição é mais complexo do que parece, pois, parte do saber científico, passando pelo saber a ser ensinado até chegar ao saber ensinado, e essa transposição do saber sábio – do seu local de criação – para a sala de aula, implica em relações em que o professor não é detentor de todas as decisões que dizem respeito às adaptações. Para D'Amore (2005, p. 101) "o coletivo, a instituição é quem objetiva e define em sua especificidade o saber escolar, os seus métodos, a sua racionalidade".

2.2 DIDÁTICA DA MATEMÁTICA

A Didática da Matemática é a ciência que estuda os processos didáticos, os processos de estudo de obras matemáticas, tendo como campo de atuação não só a sala de aula, mas também os processos didáticos que ocorrem fora dela; um dos objetivos principais é analisar para interpretar os processos didáticos e os fenômenos que surgem a partir desses, tanto no contexto escolar como fora. Para Chevallard (2001), um sistema didático é formado todas as vezes, por exemplo, que um grupo de pessoas se vê, frente a uma situação matemática em que a resposta não seja imediata, e, por algum motivo, decidem tomar certas medidas para resolvê-las; porém, para isso, precisam estudar este objeto matemático. Dessa forma, os membros do grupo passam a ser estudantes do problema em questão, sem que sejam necessariamente alunos de uma classe, mas que se deparam com situações matemáticas que precisam de respostas para serem utilizadas no cotidiano, como, por exemplo, um professor que estuda situações matemáticas no contexto das atividades docentes. É refletindo a respeito das análises de Chevallard que acreditamos que esta teoria é compatível com o nosso objeto de pesquisa, que é analisar como os alunos fazem Matemática ao construírem o conceito de semelhança.

A afirmativa abaixo, confirma nossas reflexões:

> Um grupo de estudantes que busca em uma obra matemática respostas para certas questões, pode pedir ajuda para um coordenador de estudo: é assim que se organiza um *sistema didático*, formado em primeira instância pelas questões matemáticas (ou pela obra matemática que responde a essas questões), os estudantes e o coordenador de estudo. Se o grupo estuda por conta

> própria, forma–se um *sistema autodidático* (CHEVALLARD, 2001, p. 196, grifo do autor).

Esta ciência que analisa os processos didáticos que ocorrem externos à sala de aula, como, por exemplo, um pequeno grupo que já concluiu a educação básica e agora estuda de forma independente da escola, uma obra matemática se preparando para fazer um concurso, como também com os processos didáticos que surgem em uma sala de aula, numa aula de Matemática. Considera que, mesmo para os alunos que freqüentam a sala de aula, existe um processo didático fora dela, ou seja, os alunos para acompanharem de fato as aulas, têm que estudar individualmente ou em grupo, com ajuda dos pais, de amigos etc. Dessa forma, o saber ensinado gera uma série de processos didáticos que, para Chevallard (2001), funcionam como “subprocessos” do processo de ensino/aprendizagem que se estabeleceu na sala de aula. Entretanto, esses processos que ocorrem em torno do saber ensinado precisam contribuir para o desenvolvimento do processo didático que ocorre em sala de aula.

Uma análise capaz de levar a entender o fenômeno, estudar uma obra matemática, precisa ir além do processo de ensino/aprendizagem que ocorre em sala de aula, pois a não consideração desses processos didáticos externos, contribui de maneira efetiva para não entender, de fato, o fenômeno que ocorre em uma aula. Neste sentido, Chevallard afirma que:

> O didático se identifica, assim, com tudo aquilo que está relacionado com o *estudo e com a ajuda para o estudo* da Matemática, identificando-se, então, os *fenômenos didáticos* com os fenômenos que surgem de qualquer processo de estudo da Matemática, independentemente de que tal processo esteja voltado para a utilização da Matemática, para aprendê-la, ensiná-la ou para a criação de uma nova Matemática. A didática da Matemática é definida, portanto, como a *ciência do estudo da Matemática* (CHEVALLARD, 2001, p. 46, grifo do autor).

Convém ressaltar que para a Didática da Matemática só é relevante à análise dos processos didáticos, logo, há necessidade de se identificar o que não é didático, por exemplo, uma pessoa que tem domínio das quatro operações e trabalha em uma feira livre e, no decorrer do dia, recebe dinheiro e, conseqüentemente, passa troco, está realizando uma atividade matemática a partir de um conhecimento que ela possui, porém trata-se de uma atividade não-didática, pois não está ocorrendo o estudo. O mesmo pode ocorrer, se esta pessoa repetir esse modelo matemático com regularidade em situações distintas, inclusive em sala de aula, estará fazendo Matemática e ainda assim, este momento será não-didático, já que um processo didático se estabelece todas as vezes que pessoas são levadas a estudarem determinados objetos matemáticos ou toda vez que pessoas ajudam outras a estudarem esses objetos matemáticos, que não é o caso do exemplo acima.

Quando fazemos alusão ao termo estudo, não estamos mencionando exclusivamente aquele ato comum em vários alunos, que é estudar determinada disciplina para fazer a prova do bimestre. Para a Didática da Matemática a expressão estudo possui um sentido mais amplo, como, por exemplo, um professor de Matemática que estuda Lingüística, com objetivo de compreender melhor determinados conceitos dessa ciência ou um aluno do ensino médio que, por algum motivo, decidiu estudar Astronomia. Nesse processo de aprendizagem, Chevallard (2001) considera o ensino apenas com um dos meios para que haja o estudo. Entretanto, no contexto escolar é comum confundir o estudo com o ensino, e mais acaba-se considerando que o aluno que estuda é aquele que vai regularmente à escola assistir a aula que o professor ministra. Visto dessa forma, desconsidera-se que a aprendizagem – que é o fim desejado pelo estudo – pode ser alcançada, mesmo que não haja ensino, ou seja, fora das paredes da sala de aula. Isso nos leva a entender que para a Didática da Matemática, o processo de ensino/aprendizagem é um dos elementos que compõe o processo de estudo.

Acreditamos que somente a partir de um melhor entendimento do processo didático estabelecido dentro e fora da sala de aula, é que podem ser tomadas atitudes palpáveis que contribuam, de fato, para aprimorar o estudo da Matemática.

2.3 ESTUDAR MATEMÁTICA

Por termos consciência que a Matemática não existe com o único fim de ser ensinada ou aprendida dentro das salas de aula, mas é capaz de ser utilizada para resolver problemas diversos que, com freqüência, podem ser encontrados no cotidiano, e que necessitam de pessoas com conhecimentos suficientes para solucioná-los, é que consideramos imprescindível o estudo desta disciplina, não somente nos limites da escola, como também fora dela.

Portanto, não é admissível tratarmos do processo do estudo da Matemática somente no âmbito de sala de aula. Esta atitude tira da disciplina o status social que ela possui, uma vez que a Matemática que existe na escola resulta do fato dela estar presente na sociedade. Portanto, é relevante a utilização de uma didática que promova um processo de estudo, capaz de levar os alunos a estudarem Matemática, para que possam utilizá-la na solução e interpretação de situações que necessitem de conhecimentos matemáticos, suas e de outras pessoas, que permeiam seu nicho social. Por exemplo, um aluno do nível básico que, através do estudo da geometria, conseguiu aprender a calcular o volume do paralelepípedo retângulo e também sabe fazer a relação de litros com metros cúbicos, e, em um determinado momento, é procurado por um pedreiro do seu convívio para solucionar um problema, a saber: este (o pedreiro) precisa construir uma piscina com capacidade de 56.000 litros de água, porém, precisa encontrar o comprimento, já que a profundidade solicitada pelo dono da obra é de 1,4m e a largura máxima que vai ser usada pelo pedreiro, por questão de espaço no terreno, é de 3,2m.

O aluno, para resolver o problema, pode transformar 56.000 litros em $56m^3$ e usar a fórmula $v = a . b . c$, substituindo os valores tem $56 = a . 1{,}4 . 3{,}2$, e fazendo as operações encontrará a medida do comprimento da piscina que é 12,5m, pois é o resultado que interessa para o pedreiro, já que ele não quer saber como se chega a esta solução. Problemas dessa natureza podem ser solucionados com conhecimentos construídos através do estudo – que, neste caso, o pedreiro não tenha necessariamente que dominar – mas, certamente, as pessoas que possuem esses e outros conhecimentos adquiridos através do estudo de obras matemáticas, poderão estabelecer uma importante interação social dentro do seu contexto sócio-cultural. Para Chevallard (2001), nesta interação social, o pedreiro fez com que o aluno, ao resolver o problema da piscina, desempenhasse o papel de matemático, mesmo não sendo professor ou pesquisador. Contudo, foi necessário que o pedreiro, mesmo sem saber resolver o problema, o identificasse como um problema de Matemática, mostrando que tem um conhecimento básico da disciplina, daí a importância da Matemática no dia-a-dia dos seres humanos.

Neste caso, o aluno, ao resolver o problema para o pedreiro, não estabeleceu um processo didático – estudo – pois o pedreiro só estava preocupado em saber qual o comprimento que deveria usar na piscina para atender a exigência do dono da obra. Entretanto, se o pedreiro estivesse interessado em saber qual a relação existente entre litros e metros cúbicos, como os saberes matemáticos envolvidos nessa situação se relacionam e como ele poderia tratar matematicamente este problema, para que, talvez, em outra situação similar pudesse usar o conhecimento adquirido para solucionar problemas dessa natureza, a interpretação do aluno não seria a mesma.

Sendo assim, a conjuntura seria outra, uma vez que para o pedreiro não é suficiente apenas a resposta do problema. Deste modo, para o pedreiro aprender de fato a utilizar estes conhecimentos em seu cotidiano é necessário que se forme um processo didático, onde o aluno ocupará o lugar de coordenador do estudo realizado pelo pedreiro. Podemos dizer então que o ensino está sendo um meio para levar o pedreiro a estudar para alcançar a aprendizagem. Esta reflexão é corroborada com as palavras de Chevallard quando diz:

> [...]. Falaremos de *processos didáticos* toda vez que alguém se veja levado a estudar algo – no nosso caso será Matemática – sozinho ou com a ajuda de outra(s) pessoa(s). A *aprendizagem* é o efeito buscado pelo estudo. O *ensino é um meio para o estudo*, mas não é o único (CHEVALLARD, 2001, p. 58, grifo do autor).

Faz-se necessário ressaltar, que, no exemplo acima, a pessoa que resolveu o problema era um aluno, entretanto, o estudo do objeto matemático ocorreu fora do contexto de sala de aula, pois sempre que alguém tiver um problema matemático ou se sentir motivado a ajudar outras pessoas a solucionar questões relacionadas com a Matemática, poderá recorrer ao processo didático – estudo – realizando, assim, o estudo da Matemática, para uma posterior prática de fazer Matemática.

2.4 FAZER MATEMÁTICA

A abordagem de atividades matemáticas que estejam o mais próximo possível do contexto sócio-cultural dos alunos funciona como um agente motivador para a formação de uma comunidade de estudo, na qual as tarefas matemáticas são desenvolvidas de forma cooperativa, sendo a elaboração destas uma sub-tarefa que compete ao “topos”[2] do coordenador do estudo (professor), e as praxeologias ostensivas e não ostensivas - construção de modelos matemáticos para serem utilizados na resolução da problemática - cabe ao “topos” do aluno. Dessa forma os integrantes dos grupos compartilharam do esforço na construção do conhecimento e das descobertas. Para Chevallard (2001), a formação de um problema matemático e a de uma comunidade de estudo acontecem concomitantemente, pois são os dois lados de um procedimento que é a constituição de um processo didático. Todo indivíduo necessita de um tempo próprio para aprender, por isso, o processo de estudo que ocorre em uma comunidade de estudo é pertinente, pois o mesmo prioriza o coletivo e o ensino acontece seguindo um caráter comunitário de estudo. Logo, não é privilegiada a individualização do conhecimento, pois, à medida que os membros dos grupos se apropriam dos conhecimentos, têm a responsabilidade de socializá-los com os demais membros do grupo e com os outros grupos.

Isso é corroborado com a fala de Chevallard (2001, p. 198) quando diz.

> Parece, então, que, ao se falar de individualização do ensino, os fatos fundamentais que regem todo processo de aprendizagem são ignorados. Em primeiro lugar, embora a aprendizagem possa ser considerada como uma conquista individual, esquecem que é o resultado de um processo coletivo: o processo de estudo que se desenvolve *no interior de uma comunidade*, seja ela uma turma ou um grupo de pesquisadores. Em segundo lugar, o processo de estudo somente pode ser realizado se a aprendizagem for algo bem-compartilhado dentro do grupo: para que o indivíduo aprenda, *é necessário que o grupo aprenda*. Desse ponto de vista, a aprendizagem também é, necessariamente, um fato coletivo. Daí surge o paradoxo do qual falávamos: por que querer individualizar um meio de estudo–ensino quando o estudo é um processo coletivo, cujo objetivo – a aprendizagem – tem aspecto fundamentalmente comunitário? (grifos do autor).

O tratamento individualizado do conhecimento reforça uma prática pedagógica muito comum, que é adequar o ensino às particularidades de cada aluno, enquanto aprendiz singular. Os profissionais que assim procedem, acreditam que são as diferenças entre os alunos - tais como capacidade, motivação, interesse, atitude, formação anterior e outros - que definem o sucesso ou o insucesso do processo didático, de onde se infere que, para esses educadores que trabalham nessa linha, o ideal seria que a organização levasse à individualização absoluta do

[2] Lugar ocupado pelo professor e pelo aluno no processo ensino-aprendizagem.

ensino. Contrapondo-se a essa visão, tem-se a análise da Teoria Antropológica do Didático das condições reais da aprendizagem, que se baseia mais na organização do ensino com características coletivas dos aprendizes, do que na individualidade de cada ser.

É possível reconhecer este ponto de vista nas palavras de Chevallard (2001, p. 196):

> A organização do ensino deve basear-se mais naquilo que os estudantes têm em comum do que naquilo que é particular a cada um deles. De um ponto de vista antropológico, o estudo, e com ele a aprendizagem, são atividades que unem os indivíduos.

Não é plausível para o processo didático tentar adaptar as estratégias pedagógicas às características particulares de cada aprendiz. O processo deve levar em conta os conhecimentos/saberes que são comuns aos alunos, dessa forma incentivando a formação de grupos que se lancem a estudar problemas matemáticos, que estão contidos nas obras matemáticas que formam o currículo obrigatório, o qual é fruto de acordo social.

Um dos objetivos de montar uma comunidade de estudo com os alunos, é levá-los a estudar as obras matemáticas que são trabalhadas na intervenção metodológica, tendo como conseqüência a aprendizagem, para que, a partir de então, os alunos sejam capazes de fazer Matemática dentro e fora da sala de aula.

Ao abordarmos o conceito de fazer Matemática, o faremos segundo a teoria de Chevallard (2001), o qual destaca três aspectos relevantes que caracterizam o fazer matemático: primeiro, quando alguém utiliza conhecimentos matemáticos que já possui para resolver problemas que surgem no seu cotidiano, que podem ser seus ou de outras pessoas; segundo, quando alguém se vê frente a um problema que, para ser resolvido, necessita de conhecimentos matemáticos que já existem; porém, esta pessoa ainda não se apropriou desses conhecimentos; logo, precisa aprendê-los para solucionar o problema. Nesse segundo caso, podemos considerar também o ato de ensinar Matemática. Por exemplo, uma pessoa que possui conhecimentos matemáticos e auxilia outras a procurar e empregar os conhecimentos matemáticos necessários para criar um modelo matemático que seja eficaz para a resolução do problema; terceiro, este caso consiste em criar uma Matemática nova – atividade peculiar de pesquisadores de Matemática.

Um dos fatores que leva a esta nova criação é que em diversas áreas do conhecimento (Física, Química, Biologia etc.) surgem novas situações que necessitam de conhecimentos matemáticos que ainda não existem; logo, precisam ser criados novos modelos matemáticos ou novas utilizações dos modelos antigos.

Nesta dissertação nos limitamos ao tratamento apenas do primeiro e do segundo caso, por serem compatíveis com o objeto de pesquisa, que foi: descrever as praxeologias implementadas pelos alunos, no processo de estudo do conceito de semelhança entre figuras planas, entre áreas de retângulos semelhantes e entre volumes de paralelepípedos retângulos semelhantes, a partir dos saberes prévios dos alunos, os quais serviram como ancoradouro dos novos saberes matemáticos construídos por eles no decorrer da intervenção metodológica.

Quando imaginamos alguém fazendo Matemática, não podemos limitar este fazer somente ao âmbito de sala de aula. Devemos considerar que este fazer pode perfeitamente ocorrer em outros contextos, haja vista não podermos negar a presença da Matemática em nossa sociedade, como por exemplo, na construção civil, na marcenaria, no comércio, na agricultura, na construção das embarcações, inclusive a dos ribeirinhos de nossa região e outros. Esta presença marcante da Matemática em nosso meio é um dos motivos que nos levou a optar por esse objeto de pesquisa, por considerarmos importante que todo cidadão deva ter conhecimento matemático suficiente para resolver situações matemáticas cotidianas, ou pelo menos identificar que o problema necessita de um tratamento matemático para ser resolvido, dessa forma minimizando o problema de analfabetismo matemático latente em nossa sociedade. Chevallard, ao tratar do conceito de fazer Matemática afirma que.

> O fato de que se ensine Matemática na escola responde a uma necessidade ao mesmo tempo individual e social: cada um de nós deve saber um pouco de Matemática para poder resolver, ou quando muito reconhecer, os problemas com os quais se depara na convivência com os demais. Todos juntos haveremos de manter o combustível matemático que faz a sociedade funcionar e devemos ser capazes de recorrer aos matemáticos quando for necessário (CHEVALLARD, 2001, p. 45).

Reduzir o fazer matemático somente à sala de aula leva a sociedade a não valorizar a Matemática produzida na escola, caso só exista dentro dos muros da escola apenas para ser ensinada e aprendida, não há porque levá-la a sério, já que esses conhecimentos não serão utilizados fora desse contexto. Este pensamento equivocado do fazer matemático – somente no contexto de sala de aula – tem sérias conseqüências no processo de ensino/aprendizagem, pois, em muitos casos, julgamos ser um dos motivos que levam os alunos a não se responsabilizarem pelas respostas dadas, deixando a cargo do professor toda a responsabilidade pela aprendizagem Matemática, reflexo em alguns casos, de uma Matemática trabalhada em sala com pouca ou nenhuma relação com o contexto sócio-cultural dos alunos.

Fazer Matemática no sentido que nos propomos a abordar nesta dissertação, consiste em articular saberes matemáticos de forma integrada para a construção de modelos que também se articulem com outros modelos, para resolver uma problemática a partir do estudo de determinado objeto matemático. Esses modelos matemáticos podem ser utilizados com regularidade em situações distintas encontradas no cotidiano, e promovem a interpretação dos resultados obtidos. A regularidade do uso dos modelos demonstra um fazer matemático, uma atividade matemática.

Por exemplo, um aluno que foi orientado por um professor ou que toma a iniciativa de estudar determinada obra matemática, e a partir da articulação dos saberes matemáticos envolvidos, se apropria do modelo do cálculo de área de uma figura plana regular usando o fracionamento dessa figura em quadrados unitários. Se, em uma outra situação, este aluno conseguir calcular a área de uma figura irregular qualquer usando o modelo adquirido na situação anterior, ou seja, fracionando a nova figura em quadrados unitários, este aluno estará fazendo Matemática, pois, através do modelo usado, percebe-se regularidade no uso deste modelo.

Como outro exemplo, podemos citar um aluno que teve a oportunidade de estudar determinada obra matemática a “semelhança entre retângulos” e constrói o modelo matemático do conceito de semelhança pela forma, pela proporcionalidade entre os lados homólogos e pela congruência entre os ângulos correspondentes da figura. Se este aluno consegue, usando este modelo, construir figuras semelhantes quaisquer a partir desses conceitos, demonstrando uma regularidade do uso do modelo, ele estará fazendo Matemática. Esta nossa interpretação de fazer Matemática é apoiada nas palavras de Chevallard, quando diz.

> Um aspecto essencial da atividade matemática consiste em construir um modelo (matemático) da realidade que queremos estudar, trabalhar com tal modelo e interpretar os resultados obtidos neste trabalho, para responder as questões inicialmente apresentadas (CHEVALLARD, 2001, p. 50).

Desta forma, partindo do conceito de fazer Matemática descrito na teoria de Chevallard, consideramos que os alunos da turma em que ocorreu a intervenção fizeram Matemática, a partir do momento em que construíram modelos matemáticos e fizeram uso dos mesmos em situações diferentes para resolver outros problemas e interpretarem os resultados obtidos.

Ao optarmos pela Didática da Matemática para conduzir a organização matemática da pesquisa, tivemos a oportunidade de transferir para o aluno a responsabilidade matemática que lhe cabe no processo de aprendizagem no contexto escolar. Ao longo de nossa carreira como docente, temos percebido que o trabalho matemático desenvolvido pelos alunos, principalmente na educação básica não tem sido levado a sério por muitos professores, os quais, geralmente, adotam outras teorias de aprendizagem para o exercício da prática docente. Daí inferirmos que as instituições didáticas desses professores não têm se importado com a produção matemática dos alunos, o que, de certa forma, em alguns casos, acreditamos que possa servir de incentivo para os alunos cometerem certos erros matemáticos e não os assumirem, se colocando em uma condição de coadjuvante e não de protagonista na construção do conhecimento dentro do processo de ensino/aprendizagem.

São pertinentes as palavras de Chevallard na assertiva abaixo:

> No *discurso psicopedagógico* que domina nossa cultura escolar, considera-se a *aprendizagem escolar* como objetivo último da ação educativa. A análise está centrada no que o professor deve fazer para favorecer a aprendizagem dos alunos, uma aprendizagem que se traduza em aquisições significativas e em interesse pela matéria. Em compensação, nunca se considera necessário uma análise detalhada do processo de estudo do aluno, isto é, do trabalho matemático que ele realiza, considerado como um objeto em si mesmo.
>
> Coerente com a *opacidade do trabalho matemático do aluno* que esse ponto de vista implica, sua atividade de estudo sempre é concebida de forma bastante uniforme e relativamente independente das matérias a serem estudadas. A tendência é considerar o ensino como um instrumento para potencializar o *desenvolvimento das estruturas cognitivas* dos alunos, e nesse sentido, o estudo que estes devem realizar (entendido como um meio auxiliar no ensino)

> não depende muito da matéria específica estudada (CHEVALLARD, 2001, p. 80, grifos do autor).

Entendemos que a Didática da Matemática não se opõe às teorias de aprendizagem cognitiva, no entanto, não as considera suficientes para compreender o processo de ensino/aprendizagem. Consideramos que o professor, ao trabalhar um objeto matemático em sala de aula, deve se preocupar em considerar não somente como se dá a aprendizagem na mente do aprendiz, como também é necessário que ele faça uma análise do estudo do aluno a respeito do objeto matemático que está sendo trabalhado, já que para a Didática da Matemática, o processo ensino/aprendizagem é visto segundo um ponto de vista sistêmico e não como o estudo separado de cada um de seus elementos, ficando, dessa forma, professor e aluno no contexto escolar ligados pelo saber, surgindo, assim, um sistema didático formado por três elementos: professor, aluno e saber.

No entanto, os elementos teóricos da Aprendizagem Significativa em muito estão relacionados com os aspectos que caracterizam o fazer matemático, no que diz respeito à observação das regularidades; das articulações entre os saberes existentes e os que serão adquiridos para a construção de um novo saber. Neste sentido optamos por considerarmos a Aprendizagem Significativa como norteadora metodológica das atividades (tarefas) que foram trabalhadas com os alunos.

2.5 APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA DE DAVID AUSUBEL

Esta teoria tem origem no universo de significados do indivíduo. Ausubel, que é um teórico cognitivista, considera em seu trabalho, que à medida que o ser se situa no meio, estabelece significados, isto é, atribui significados à realidade do seu contexto sócio-cultural. A teoria da aprendizagem de Ausubel propõe que os conhecimentos prévios dos alunos sejam valorizados, para que possam servir de ponte para relacionar outros significados, culminando, assim, na formação da estrutura mental. Logo, para Ausubel é relevante preocupar-se com o processo de compreensão, transformação, armazenamento e uso de informações envolvidas na cognição, como também procurar encontrar regularidades nesse processo – como, por exemplo, assimilar a regularidade no uso de modelos matemáticos que caracterizem o fazer matemático – é dar ênfase particularmente aos processos mentais.

A teoria ausubeliana enfatiza primordialmente a aprendizagem cognitiva, a qual resulta do armazenamento organizado de informações na mente do ser que aprende. Essas informações na Teoria Antropológico do Didático são praxeologias. A esse complexo de organização Ausubel chama de estrutura cognitiva. Assim, sua teoria se sustenta na premissa de que existe uma estrutura na qual essa organização e integração se processam que é chamada de ‘’estrutura cognitiva’’, entendida como o conteúdo total de idéias do indivíduo.

Para Moreira e Massini (2002, p. 7), ‘‘a idéia central da teoria de Ausubel é a de que o fator mais importante influenciando a aprendizagem é aquilo que o aprendiz já sabe”. Logo, é pertinente o uso desta teoria como norteadora metodológica de atividades, pois o professor de Matemática pode fazer uso dos saberes prévios dos alunos, levando-os assim a fazerem Matemática através da regularidade do uso dos modelos, uma vez que, para Chevallard, a primeira característica do fazer matemático se dá quando alguém utiliza conhecimentos matemáticos que já possui para resolver problemas que surgem no cotidiano.

No entanto, cabe ao professor identificar esses conhecimentos/saberes e ensinar a partir daí, pois, de acordo com a teoria de Ausubel, se esses conceitos inclusivos pré-existentes estiverem organizados de maneira adequada e disponíveis na estrutura cognitiva do aprendiz, funcionarão como ancoradouro para novos conceitos que podem ser apreendidos e retidos na mente do indivíduo.

Ausubel considera que a aprendizagem é significativa quando ocorre um processo pelo qual um novo conceito faz relação a um conhecimento/saber que o indivíduo já possui, e que apresenta certa relevância na estrutura de conhecimento do aprendiz. A esta estrutura específica existente no cognitivo do ser humano onde vai ancorar a nova informação Ausubel chama de subsunçor.

Ausubel considera que o cérebro humano tem uma competência para armazenar informações, de forma extremamente organizada, que culmina em uma hierarquia conceitual, aonde elementos mais específicos de conceitos são ligados a conceitos mais gerais inclusivos. A esta estrutura hierárquica de conceitos que servem de subsunçores, cuja função é ancorar as novas informações é que Ausubel chama de estrutura cognitiva.

2.6 CONCEITOS MAIS INCLUSIVOS PARA OS MENOS INCLUSIVOS

Segundo a teoria ausubeliana a aprendizagem torna-se fácil à medida que os conceitos mais inclusivos e mais gerais de determinado conteúdo são inseridos em primeiro lugar, e no decorrer do processo eles vão sendo progressivamente individualizados, de acordo com as suas particularidades. Ausubel acredita que o aprendiz tem mais facilidade para interpretar e entender as diferenciações entre os conceitos quando se parte do todo para as partes; por outro lado, apresenta mais dificuldades para entender o todo a partir de suas partes.

Nesse sentido, destacamos a relação existente desse conceito com a segunda característica do fazer matemático considerado por Chevallard, pois para este teórico, quando alguém se vê frente a um problema que, para ser resolvido, necessita de conhecimentos matemáticos que já existem; porém, esta pessoa ainda não construiu esses conhecimentos; logo, precisa aprendê-los para solucionar o problema. Ou seja, há necessidade dos novos saberes serem ancorados pelos saberes já existentes na estrutura cognitiva, estabelecendo assim uma regularidade na relação entre os saberes – novos e os já existentes – que estão sendo articulados no processo de estudo.

A disposição do conteúdo de um determinado assunto se processa no cognitivo do aprendiz em uma estrutura hierárquica, onde os conceitos mais gerais se localizam no cume da estrutura, para, depois, atingirem níveis mais específicos, menos inclusivos e mais diferenciados (Figura 2).

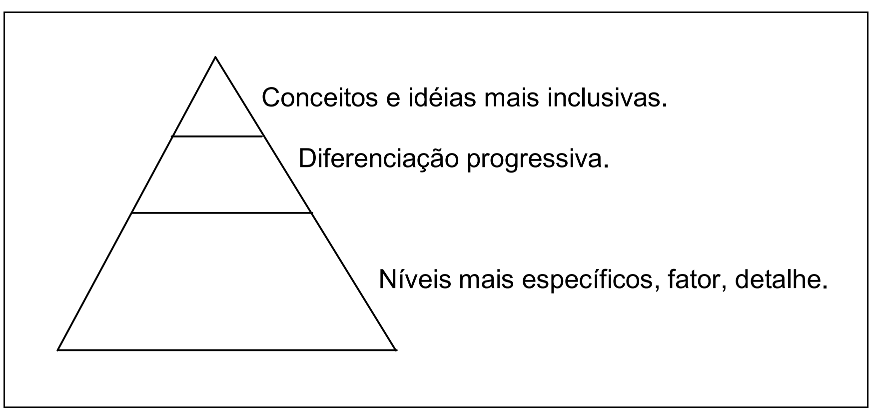


Figura 2: Estrutura hierárquica cognitiva
Fonte: Elaborado pelo autor (2007)

O confronto das idéias já existentes com o conhecimento novo se dá na base da estrutura, as quais entram em contato com os novos conceitos e interagem. Segundo a teoria cognitivista, o que determina se um critério é mais específico que um outro é o psicológico e não a lógica; a relação de aprendizagem é idiossincrática (cada um aprende do seu jeito).

2.7 ORGANIZADORES PRÉVIOS

Segundo a teoria ausubeliana os organizadores prévios são usados com o objetivo de servirem de âncora para o novo conteúdo, promovendo, dessa forma, o desenvolvimento de conceitos subsunçores que propiciem a aprendizagem seguinte.

Usar os organizadores prévios é utilizar intencionalmente uma tática para provocar a estrutura cognitiva, com o objetivo de levar o aluno a relembrar possíveis conceitos na área que será trabalhada, a fim de usá-lo como ancoradouro do novo conhecimento, tornando, assim, a aprendizagem significativa.

Os organizadores prévios são abordagens introdutórias que buscam estabelecer relações entre o que o aluno possivelmente sabe e o que ele precisa saber, com o objetivo de levar a aprendizagem a ter significado para o aprendiz. Ausubel considera o organizador prévio como um agente facilitador no processo de aprendizagem, tendo como função, nesse processo, a preparação do ambiente para que o aluno possa desenvolver as atividades propostas.

Caso o assunto a ser trabalhado seja de uma área onde os alunos não possuam nenhum conhecimento, o organizador prévio será uma explanação a respeito do conteúdo, na tentativa de criar conceitos subsunçores relevantes capazes de ancorar novos conceitos que serão trabalhados. Caso os alunos possuam certa familiaridade com o conteúdo a ser trabalhado, o organizador prévio terá o objetivo de buscar relações que possam existir entre o que o aluno já sabe e o que está sendo proposto, como também fazer a diferenciação entre os conceitos existentes na estrutura cognitiva do aluno e os novos conceitos que serão aprendidos.

CAPÍTULOIII

3 DESCREVENDO O TIPO DE PESQUISA

Descreveremos, nesse capítulo, o método e os procedimentos metodológicos utilizados nesta pesquisa, sendo que o método que utilizamos foi o da etnografia em educação, desenvolvido através dos passos que conduziram o trabalho de coleta de dados da pesquisa.

3.1 MÉTODO ETNOGRÁFICO

A etimologia da palavra "etnografia" vem das expressões grega "etnos" - povo e "grápho" - descrever. Logo, uma pesquisa etnográfica se propõe a descrever sobre um povo, e, sobretudo, a respeito da cultura que o identifica como grupo social. Este método é, por excelência, utilizado pelos antropólogos para fazerem coleta de dados, e baseia-se no contato inter-subjetivo entre o antropólogo e seu objeto de estudo, seja ele uma tribo indígena, ribeirinhos de uma determinada localidade, moradores de um bairro ou qualquer outro grupo social sobre o qual a pesquisa se realiza.

Bronislaw Malinowski, em seu estudo *Os argonautas do Pacífico ocidental* (1978), marcou a história da Antropologia moderna ao propor uma nova forma de etnografia, envolvendo detalhada e atenta observação participante quando de sua pesquisa realizada com os nativos no arquipélago da nova Guiné Melanésia, aos quais dedicou sua atenção e lá viveu muitos meses entre os nativos, observando-os em todos os aspectos, conversando com eles na própria língua local sem a intervenção de intérprete, estando desta forma, envolvido diretamente no contexto da pesquisa, influenciando e sendo influenciado por ela.

Na introdução ao clássico *Os argonautas do Pacífico ocidental*, Bronislaw Malinowski sistematiza seu método etnográfico, descrito como método de pesquisa de campo, descrevendo a maneira como obteve a aproximação com os nativos, abordando a respeito da importância do afastamento dos europeus existentes no arquipélago, sobre a importância de entender a língua nativa – para evitar a exacerbada dependência dos informantes bilíngües – dominar as teorias existentes sobre a vida social e não abrir mão do distanciamento para poder realizar a tarefa de reconstrução-tradução da experiência na observação direta do convívio com os nativos nas mesmas condições de vida. Seguindo o caminho de Bronislaw

Malinowski vieram outras etnografias clássicas, principalmente a partir da Antropologia interpretativa ou pós-moderna, onde passa-se a discutir o papel político, literário e ideológico da Antropologia e de sua escrita, em esforços verdadeiramente metalingüísticos e intertextuais.

O objetivo principal da etnografia é identificar a passagem do indivíduo nos micro coletivos mutáveis – pequenas comunidades, que abrigam nos seus comportamentos sociológicos os conceitos maiores de etnia, região, povo e, por fim, nação. Logo, não seria compatível falarmos de etnografia sem nos atermos, ainda que com um breve comentário, a respeito da cultura de um povo que a identifica como grupo social. Contudo, não ousaremos definir o que é cultura.

Geralmente, o trabalho do antropólogo parte da observação direta do comportamento de indivíduos frente a outros indivíduos e em relação ao meio. Os seres humanos se comunicam uns com os outros, têm certos hábitos, ocupam determinados espaços em detrimento de outros, estabelecem trocas e se envolvem em conflitos por diversas razões. O trabalho de observação prolongada dos antropólogos, desses e de outros comportamentos leva-os a identificar certas regularidades que ocorrem entre os indivíduos.

Mesmo as estruturas biológicas dos homens sendo iguais em qualquer parte do globo terrestre, essas regularidades podem se modificar de um grupo social para outro. Essas variações são bem evidentes, tais como o tipo de alimentação consumida, o tipo de moradia, práticas sexuais, rituais religiosos e vários outros. Levando em conta a ordem pragmática, os grupos identificam de forma diferenciada o utilitário e o concretizam de acordo com suas concepções de mundo.

Essas diferenças de costumes observadas entre os grupos é o que podemos chamar de ‘’cultura’’, já que ocorre de maneira arbitrária e convencional, constituindo os núcleos de identificação dos grupos sociais e concomitantemente diferenciando uns dos outros. Assim, cultura diz respeito a tudo aquilo que caracteriza a existência social de um povo ou nação, ou então de grupos no interior de uma sociedade. Portanto, quando um indivíduo se identifica como membro de um grupo social dá a entender, basicamente, que ele compartilha de um modo característico de comportar-se frente a outros indivíduos de outros grupos e à natureza.

Pelo fato da etnografia ser um método que está ligado diretamente à questão cultural, é que acreditamos que este método seja pertinente para usarmos em nossa pesquisa, a qual tem como objeto de estudo: descrever como os alunos fazem Matemática na construção do conceito de semelhança entre figuras planas, entre áreas de retângulos semelhantes e entre volumes de paralelepípedos retângulos semelhantes, já que a escola aonde ocorreu a intervenção metodológica fica localizada em um bairro da periferia de Belém, no qual nós e os alunos residimos, o que nos torna membros de um grupo social, certamente identificados por determinados traços culturais. E mais, estivemos em contato direto por cerca de um ano e meio com os alunos da turma em que ocorreu a intervenção, pois fomos professor dos mesmos em 2005, no segundo ano do ensino médio, e, durante todo o primeiro semestre de 2006, no terceiro ano do ensino médio.

Entretanto, o método que utilizamos para a coleta de dados foi a etnografia adaptada à educação e não a etnografia em seu sentido estrito, pois sua importância como método de observação tem sido localizada também no âmbito de realidades micro, ou seja, escolas, bairros, unidades de saúde, entre outras, pois, é nesse nível mais imediato do encontro de diferenças que se percebem as incongruências de código de comunicação não só verbal e escrita, quanto de outra natureza, por exemplo, comportamentais, corporais, valores, estilo de viver e modos de entender o que espera a escola perante os anseios de sua comunidade.

De que forma o método etnográfico pode contribuir para melhor compreender essas micro-realidades, como, por exemplo, a escola? A etnografia, com a sua forma de descrever intensamente sociedades a partir de experiência empírica direta – trabalho de campo – pode ser eficaz como método de pesquisa para os profissionais da área da educação, pois o contato direto com os alunos de uma escola pode possibilitar o reconhecimento dos discentes como portadores de uma outra cultura tão importante como qualquer outra, podendo, assim, surgir um diálogo baseado no respeito mútuo entre os participantes dessa micro realidade – alunos e profissionais dessa área que atuam na unidade escolar – contribuindo para melhor interpretação dos problemas que ocorrem no processo de ensino/aprendizagem.

A etnografia toma a observação direta como técnica básica de coleta de dados, mas não se resume a ela, como também o fato de uma pesquisa ser qualitativa não a caracteriza como etnográfica e nem a observação participante, sua única técnica de observação. Certamente, o meio empírico estudado é que apontará de diversas formas e as técnicas que melhor se adaptam para o estudo do objeto de pesquisa.

3.2 CARACTERIZANDO A PESQUISA

A pesquisa que utilizamos nesta dissertação possui atributos que a caracterizam como de natureza qualitativa, onde foi realizado um estudo do tipo etnográfico adaptado à educação. Dizemos qualitativa baseados nos conceitos de Bogdan e Biklen (1982) apud Lüdke e André (1986, p. 11), onde, para eles, a pesquisa qualitativa deve possuir cinco características, a saber:

> A pesquisa qualitativa em educação tem o ambiente natural como sua fonte direta de dados e o pesquisador como seu principal instrumento. Os dados coletados são predominantemente descritivos. A preocupação com o processo é muito maior do que com o produto. O ''significado'' que as pessoas dão às coisas e à sua vida são focos de atenção especial pelo pesquisador. A análise dos dados tende a seguir um processo indutivo (grifos do autor).

É fundamentado nos critérios citados acima que caracterizamos esta pesquisa como sendo de natureza qualitativa, uma vez que a mesma ocorreu em uma sala de aula, numa escola onde somos professores desde o ano de 2003, e mais, estivemos em contato direto com os alunos da turma – em que ocorreu a intervenção – desde 2005, e, a partir do inicio do ano letivo de 2006, este contato estendeu-se para o ambiente de pesquisa e para o objeto de estudo. Também não envolvemos manipulações de variáveis nem tratamento experimental por estar caracterizado como o estudo de um fenômeno em seu acontecer natural. Não dividimos o todo em unidades menores passíveis de mensuração para serem estudadas separadamente; pelo contrário, procuramos ter uma visão multifacetada do fenômeno, ou seja, procuramos levar em conta todos os elementos da situação e suas interações e influências mútuas.

Os dados desta pesquisa foram coletados por material de áudio, atividades entregues pelos grupos e por anotações feitas por nós no decorrer da intervenção.

Nesta pesquisa tivemos a preocupação de dar relevância ao maior número de acontecimentos possíveis referentes à situação estudada. Nas análises constam trechos de atividades realizadas pelos grupos e transcrição de diálogo estabelecido com os alunos. No processo de intervenção, não estivemos, em nenhum momento, preocupados com a quantidade de conhecimento que os membros dos grupos iriam adquirir. Nossa atenção estava centrada em observações direcionadas para o objeto de pesquisa, desta forma dando mais ênfase ao processo de como os alunos fazem Matemática do que ao produto final.

As atividades elaboradas para a intervenção tiveram, entre outras características, a de estarem o mais próximo possível do contexto sócio-cultural dos alunos, pois, nosso objetivo era usar esta relação – atividade x cotidiano – como um elemento motivador na construção do fazer matemático. Assim, nossas análises estiveram focadas em descrever como os alunos fazem Matemática para construir o conceito de semelhança, e esta observação se deu no transcurso da intervenção metodológica, pois não tínhamos, *a priori*, hipóteses nem questões especificas que nos levassem a outras análises. É analisando a conjuntura em que se deu todo o processo de pesquisa, que acreditamos na possibilidade da mesma se caracterizar como de natureza qualitativa.

A pesquisa realizada nesta dissertação é de natureza qualitativa, do tipo etnográfica, adaptada à educação, não simplesmente por termos utilizado uma observação participante, mas, por estarmos preocupados em descrever um conjunto de significados – como os alunos fazem Matemática – de um determinado grupo social. Wolcott (1975) apud Lüdke e André (1986, p. 14) ”chama a atenção para o fato de que o uso da etnografia em educação deve envolver uma preocupação em pensar o ensino e a aprendizagem dentro de um contexto cultural amplo’’. Sustentados por este pensamento é que somos levados a acreditar que a natureza do nosso objeto de pesquisa é que determinou o método etnográfico que utilizamos nesta pesquisa, uma vez que, dentre os objetivos que permeavam nosso objeto de pesquisa, tínhamos o anseio de levar os alunos a estudar o objeto matemático em questão, a fim de que os mesmos pudessem se apropriar de modelos matemáticos que os levassem a utilizá-los com certa regularidade em seu dia-a-dia, haja vista que as atividades foram elaboradas buscando fazer sempre a relação do conhecimento escolar com os saberes dos alunos, estando, assim, o trabalho inserido no contexto sócio-cultural dos mesmos, o que, pelo fato de serem membros de uma comunidade carente, quando constroem suas casas, certamente, necessitam de conhecimentos matemáticos, como, por exemplo, cálculo de área e de volume.

Wolcott (1975) apud Lüdke e André (1986, p. 14) cita alguns critérios que devem estar presentes em uma pesquisa do tipo etnográfica direcionada para o contexto educacional, a saber:

> O problema é redescoberto no campo. O pesquisador deve realizar a maior parte do trabalho de campo pessoalmente. O trabalho de campo deve durar pelo menos um ano escolar. O pesquisador deve ter tido uma experiência com outros povos de outras culturas. A abordagem etnográfica combina vários métodos de coleta. O relatório etnográfico apresenta uma grande quantidade de dados primários (grifos do autor).

Na pesquisa que realizamos estivemos sempre focados em tirar os alunos da condição de meros receptores de conhecimento. Para tanto foi necessário que os mesmos aceitassem o desafio de estudar a obra matemática em questão, estabelecendo-se, assim, as relações professor-saber e saber-aluno. O fato dos alunos estarem estudando para construírem seu conhecimento não nos permitia optarmos por definições rígidas, mas sim por mergulharmos junto com os mesmos em busca e na tentativa de rever e aprimorar o nosso objeto de pesquisa.

Todo o trabalho de campo utilizado na pesquisa foi realizado por nós – sob a orientação do nosso orientador – uma vez que na maior parte do tempo empregado na pesquisa estivemos na condição de professores da turma, na qual ocorreu a intervenção. O fato de a intervenção ter ocorrido em uma escola da nossa comunidade, nos dá arcabouço suficiente para entendermos as regras e os costumes que fazem parte da cultura do grupo estudado. Entretanto, nossa experiência com outros grupos sociais fora da nossa micro realidade é, de certa forma, ampla, já que por cerca de nove anos estivemos em contato com diversas cidades, municípios e vilas do estado do Pará, sempre como docente, o que nos proporcionou contato com várias formas de culturas. Essa experiência com outros grupos nos possibilitou entender melhor a importância que o grupo social pesquisado atribui às experiências do seu nicho social.

A pesquisa realizada teve como método de coleta a observação direta, já que toda coleta foi realizada por nós sem nenhuma intermediação, como também utilizamos entrevistas com os membros dos grupos no momento da intervenção, as quais constam nas análises em forma de relato. Além dos relatos descritos das situações estudadas constam, também, as praxeologias produzidas pelos grupos, como, por exemplo, cálculos realizados na construção do conhecimento, onde é possível observar as ações dos grupos.

Além das características citadas acima que a pesquisa apresentou, procuramos, ao mesmo tempo, manter uma observação participante, na qual buscamos ter um grau de interação com a situação estudada, onde, em determinados momentos, nos víamos afetando a pesquisa e sendo por ela afetados; as entrevistas que ocorreram tiveram o objetivo de aprofundar as questões e esclarecer os problemas que surgiram no decorrer da intervenção; enquanto pesquisadores nos colocam como instrumento principal na coleta e na análise de dados; no desenvolvimento das atividades demos ênfase ao processo, ou seja, no que estava ocorrendo na sala e não ao produto ou aos resultados finais; nesta pesquisa ocorreu um trabalho de campo, onde estivemos, durante todo o período, em dias determinados da semana, em contato direto com os alunos. Segundo André (2005, p. 28):

> Em que medida um trabalho pode ser caracterizado como do tipo etnográfico em educação? Em primeiro lugar quando ele faz uso das técnicas que tradicionalmente são associadas à etnografia. Ou seja, a observação participante, a entrevista intensiva e a análise dos documentos.

Este método foi aplicado no decorrer da pesquisa, à medida que os procedimentos metodológicos iam acontecendo.

3.3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Neste item serão descritos os procedimentos metodológicos realizados no trabalho de pesquisa.

3.3.1 Planejamento

O primeiro momento desta pesquisa é marcado por nossas reflexões com base em nossas experiências como docentes, reflexões estas referentes ao abandono que o ensino da geometria euclidiana tem sofrido em nosso sistema educacional, nos níveis fundamental e médio. Foi a partir deste momento junto com nosso orientador, que concatenamos as idéias e definirmos e limitarmos o objeto matemático a ser trabalhado na intervenção metodológica, como também o objeto de pesquisa, que é: descrever como os alunos fazem Matemática na construção do conceito de semelhança entre figuras planas, entre áreas de retângulos semelhantes e entre volumes de paralelepípedos retângulos semelhantes, o qual foi descrito à luz da Didática da Matemática, segundo a visão de Yves Chevallard. Esta limitação no objeto, tanto matemático como o de pesquisa, se deu em virtude do tempo que, provavelmente, teríamos para realizarmos a pesquisa.

Vencida esta etapa, passamos a fazer um levantamento teórico de pesquisadores como Lorenzato, Perez, Pavanelo e outros que discutem sobre o ensino/aprendizagem da geometria no Brasil, e quais caminhos eles propõem para minimizar o descaso deste assunto na educação básica. No passo seguinte, optamos por usar a teoria da Aprendizagem Significativa, de David Ausubel, como norteadora metodológica na elaboração das atividades, e a teoria da Didática da Matemática na visão de Ives Chevallard, da qual elegemos alguns conceitos por haver compatibilidade com o nosso objeto de pesquisa, os quais foram imprescindíveis para as análises dos dados coletados por nós no decorrer da intervenção.

Feita a opção pela teoria que daria fundamentação à pesquisa, passamos a pensar na elaboração das atividades que seriam utilizadas na intervenção metodológica com a turma, sendo que o desenvolvimento das mesmas ocorreria sob nossa orientação e acompanhamento, onde o objetivo era dar ênfase ao estudo e não ao processo de ensino/aprendizagem do objeto matemático em questão, já que não tínhamos o objetivo de reduzir a atividade matemática em ensinar e aprender uma Matemática previamente construída, pois segundo Chevallard (2001), essa redução leva o ensino e a aprendizagem a se tornarem um fim em si mesmo, quando poderiam ser usados como um mecanismo para responder a determinadas questões.

Outro procedimento que tomamos foi o de procurarmos a direção da unidade escolar onde ocorreu a intervenção. Nesta reunião solicitamos a autorização da mesma para utilizarmos uma de nossas turmas do terceiro ano do ensino médio, a fim de darmos continuidade ao nosso trabalho de pesquisa. Neste encontro demos ciência à direção da escola de quais seriam os possíveis passos no momento da intervenção. Também destacamos a importância da questão cultural existente entre nós e os alunos, motivo pelo qual estávamos solicitando a turma.

Tendo conseguido a autorização para a realização da intervenção, passamos às atividades.

No que se refere às atividades, tivemos a preocupação de elaborá-las, de modo que estivessem o mais próximo possível do contexto sócio-cultural da maioria dos alunos, pois tínhamos o objetivo de usar os saberes que os mesmos possuíam para relacioná-los com o conhecimento escolar. E mais: as atividades foram organizadas de forma a estarem relacionadas umas com as outras, de maneira que, à medida que os alunos passassem de uma atividade para a outra, os conceitos envolvidos pudessem ser ampliados.

Neste sentido, procuramos organizar os assuntos que seriam abordados nas atividades, de forma a se adequarem a um determinado período do ano letivo, a fim de não prejudicar o andamento dos outros conteúdos a serem trabalhados com a turma no decorrer do ano. Esta fase foi marcada de preocupação no que se refere aos assuntos e às atividades, pois, dentre os objetivos a serem alcançados havia o de tentar não nos distanciarmos do contexto cultural dos alunos; porém, para que, de fato, esse objetivo fosse alcançado, as atividades trabalhadas na intervenção deveriam ter um enfoque que valorizasse os saberes de determinados grupos sociais.

Para esta intervenção fizemos uma delimitação ao objeto matemático, sendo trabalhada a semelhança das seguintes figuras: quadrados, retângulos, cubos e paralelepípedos retângulos. Entretanto, no decorrer das atividades foi abordada a semelhança entre outras figuras, cujo objetivo foi o de propiciar aos alunos um ambiente de aprendizagem capaz de expandir os conceitos ora trabalhados. Todavia, demos maior ênfase às figuras citadas acima, pelo fato de considerá-las relevantes no contexto de determinadas profissões e no contexto sócio-cultural da maioria dos sujeitos da pesquisa.

Vencidas estas fases, passamos a fazer um planejamento no que se refere a qual encaminhamento daríamos aos passos a serem seguidos na intervenção, cuja finalidade era de alcançar o objetivo desejado, embora considerássemos o desfecho final uma incógnita a ser interpretada. Neste sentido, a primeira medida foi fazermos a opção por formar grupos de cinco alunos, sendo que, preferencialmente, os grupos permaneceriam com as mesmas formações até o final das atividades; porém, caso ocorressem algumas evasões, os alunos poderiam formar novos grupos.

De acordo com a carga horária do curso seriam trabalhadas quatro horas-aulas semanais, sendo duas aulas por dia, distribuídas nos dias da semana, preferencialmente depois do segundo horário, pelo fato da maioria dos alunos do período noturno trabalharem e, por conta disso, geralmente só chegam às aulas por volta das 19h30min.

Foram elaboradas oito atividades para serem executadas nas aulas no decorrer da intervenção, sendo cada atividade desenvolvida em média de seis horas-aulas, porém, tínhamos a nosso dispor para a intervenção sessenta horas-aulas, caso houvesse algum imprevisto, pois a pesquisa, no que tange às atividades, estava programada para terminar no primeiro semestre.

O planejamento prévio desenhado por nós, não tinha, por finalidade, traçar de maneira inflexível, os rumos a serem seguidos na pesquisa. Pelo contrário, no decorrer do processo sempre admitimos a possibilidade da ocorrência de alguns percalços que poderiam, de certa forma, causar algumas mudanças no desenrolar do trabalho, uma vez que o processo ensino/aprendizagem está longe de ser estático.

3.3.2 Descrevendo o ambiente onde ocorreu a intervenção

A intervenção foi desenvolvida em uma escola estadual de ensino fundamental e médio, localizada no estado do Pará, em um bairro na periferia do município de Belém, com uma turma de terceiro ano do ensino médio do período noturno, com um total de 50 alunos matriculados. Esta escola foi fundada no ano de 2002 para atender a uma demanda escolar - em média de 1800 alunos, nos três turnos, nos níveis fundamental e médio - de moradores do bairro que ficaram fora de sala de aula, uma vez que as escolas existentes na comunidade não possuíam mais espaço para acolher todos os estudantes do bairro. Esta escola funcionou durante os quatro primeiros anos em um prédio de dois andares e mais o térreo alugado pela Secretaria de Educação do Estado (Seduc). Neste espaço foram adaptadas treze salas de aula – onde, antes, sempre funcionou como loja. A partir de 2006, esta unidade passou a funcionar em uma escola construída pela Seduc – fruto da conquista de incansáveis reivindicações da comunidade – a qual foi erguida para substituir o prédio que fora alugado pela secretaria de educação. O novo espaço físico possui dois andares e mais o térreo, comportando, em sua infra-estrutura, uma quadra poli-esportiva, uma sala de direção, uma sala de vice-direção, uma sala de coordenação pedagógica, uma sala de secretaria, uma sala de professores, uma copa-cozinha, uma biblioteca, uma sala de informática, um laboratório multidisciplinar e dezesseis salas de aula. A escola está acolhendo no ano de 2007 dois mil quatrocentos e trinta e seis alunos matriculados nos três turnos, atendendo aos níveis fundamental e médio, nas modalidades EJA fundamental e EJA médio. Todos os professores e corpo técnico que atuam nesta unidade escolar são graduados, alguns especialistas e dois mestres. Em decorrência do quadro docente estar completo a escola encontra-se, atualmente, com o processo de regularização tramitando na Seduc, de onde aguarda parecer.

3.3.3 A intervenção

O início do ano letivo da referida escola foi programado para o dia 06 de março de 2006. como o prédio escolar estava em construção, iniciamos as aulas com atraso. No primeiro dia de aula fizemos uma abordagem a respeito dos conteúdos que possivelmente seriam trabalhados no decorrer do ano letivo.

Deixamos claro que, por uma questão de conveniência, o primeiro assunto a ser trabalhado seria geometria euclidiana, onde usamos como organizador prévio do assunto, uma exposição a respeito da importância da geometria euclidiana no contexto escolar, desde as séries iniciais da educação básica, relacionando a geometria “escolar” com os problemas vivenciados no trabalho de determinadas profissões, com situações vividas nas casas na hora de construir ou reformar, chamando a atenção dos alunos para que observem as formas geométricas existentes em nosso meio, criadas pela natureza e pelo homem, e que estão em nosso cotidiano.

Como, por exemplo: nas paredes, no piso e teto da sala de aula, nas formas desenhadas no piso da quadra poliesportiva da referida escola, nos utensílios utilizados na cozinha e outros. Esta explanação teve como objetivo chamar a atenção dos alunos para a importância da geometria no dia-a-dia e como ela está presente no meio em que vivemos.

Fizemos um contrato didático com os alunos, no qual foi exposto que estávamos fazendo um curso de mestrado e precisávamos de uma turma de terceiro ano do ensino médio para ser sujeito de uma pesquisa, onde ocorreria uma intervenção que seria desenvolvida dentro do assunto de geometria a ser trabalhado com a turma.

Também foram descritos os possíveis rumos que as aulas teriam, como, por exemplo, formação de grupos com cinco alunos cada, sendo que, se possível, os grupos permaneceriam com a mesma formação até o fim da intervenção; as aulas ocorreriam na sala de aula e no laboratório da escola; à medida que fosse relevante para condução da aula no que se refere à aprendizagem, haveria construção de materiais; para efeito de avaliação relativa ao semestre letivo, enquanto durasse a intervenção seria levado em consideração o interesse e a participação de cada grupo na execução das tarefas propostas no decorrer das aulas, não havendo, neste período, avaliação bimestral e sim contínua.

Por considerarmos que semelhança nortearia todo o trabalho matemático, usamos, como organizador prévio para as atividades, e, também, como primeira atividade o questionamento a respeito do que os alunos entendiam por coisas ou objetos semelhantes. Esta pergunta marca o início da intervenção no que diz respeito ao tratamento matemático dado à pesquisa.

Ao elaborarmos as atividades tivemos a preocupação de manter certo grau de relação entre as mesmas, uma vez que o conceito de mais inclusivo para o menos inclusivo, nortearia a seqüência das tarefas. Assim, para o desenvolvimento da segunda atividade seria necessário utilizar conhecimentos pré-existentes na estrutura cognitiva dos alunos, que possivelmente teriam sido adquiridos na primeira. A terceira atividade usaria os conhecimentos da primeira e da segunda questão e, assim, sucessivamente, buscando promover a aprendizagem significativa.

A primeira atividade foi um questionamento a respeito do que os alunos entendiam por coisas ou objetos semelhantes. Para esta atividade convidamos os mesmos a fazerem uma pesquisa sobre o tema em questão, pois nosso objetivo era que surgissem respostas que a comunidade de estudo pudesse tomar como hipóteses para começar a construir o conceito de semelhança, e, dentre elas, esperávamos que algumas envolvessem escala como um dos argumentos para definir semelhança de figuras num contexto matemático.

A segunda atividade foi construída a partir da primeira, pois tínhamos como objetivo o uso de escala surgido na primeira atividade e que se mostrou adequado para desenvolver a segunda atividade que consistia em medir os extremos do Brasil de norte a sul e de leste a oeste, que se encontravam em mapas com escalas diferentes: 1cm para 700km; 1cm para 250km; 1cm para 480km; 1cm para 260km e 1cm para 360km.

A terceira atividade foi planejada de tal modo que, para o desenvolvimento da mesma, seria imprescindível usar os conhecimentos adquiridos pelos alunos nas atividades anteriores. Para esta etapa foi fornecida a planta do projeto de uma casa para cada grupo, a qual se encontrava em uma escala de 1cm para 100cm (1cm: 100cm). Os grupos deveriam encontrar as dimensões de cada compartimento no tamanho real. Esta atividade foi elaborada com o objetivo de chamar a atenção dos alunos para o fato de que só pela invariância da forma não podemos garantir a semelhança entre retângulos, pois para esta situação é necessário e suficiente a proporcionalidade entre os segmentos correspondentes, uma vez que entre retângulos a invariância da forma e os ângulos correspondentes estão garantidos. Outro objetivo foi o de levar os alunos a construírem a noção de espaço.

Para a quarta atividade foi fornecida aos grupos outra planta do projeto de uma casa, porém, neste caso, os alunos deveriam encontrar a escala na qual o projeto se encontrava para, então, identificar as medidas de cada compartimento no tamanho real, sendo que a única informação fornecida aos alunos era uma medida do tamanho real de um compartimento da casa. A elaboração desta atividade teve por objetivo: reforçar a definição de quadrados e retângulos semelhantes; discutir, novamente, neste contexto, para dar oportunidade aos alunos que não tivessem apreendido de forma clara os conceitos trabalhados na questão anterior.

Para a quinta atividade solicitamos que cada grupo fizesse o desenho do projeto de uma casa, em uma escala escolhida pelo grupo. Feito o desenho, os grupos deveriam calcular quantos metros quadrados de lajota seriam necessários para o piso da sala, da cozinha, de cada quarto, as paredes da cozinha até a altura de dois metros. Para o desenvolvimento desta atividade, os grupos teriam que encontrar a relação existente entre as áreas correspondentes no projeto e no tamanho real. Esta atividade foi elaborada tendo como suporte a noção de espaço que os alunos provavelmente teriam construído. Esta atividade tinha como objetivo o cálculo de área, como também a identificação da relação existente entre as áreas semelhantes.

A sexta atividade continha o projeto da caixa d’água de um prédio, cujo comprimento no tamanho real é 20m. Os alunos teriam que, a partir do desenho, encontrar a razão de semelhança entre as dimensões da caixa, identificar o volume da caixa no projeto e no tamanho real e qual a relação existente entre os dois volumes. O objetivo era a realização do cálculo de volume de paralelepípedos retângulos, e a identificação da relação existente entre volumes de sólidos semelhantes.

Com base nos conceitos possivelmente adquiridos nas atividades anteriores, a sétima atividade foi elaborada com o objetivo de reforçar os conceitos: de semelhança entre figuras planas e entre sólidos, pela forma e pela proporcionalidade; de áreas semelhantes e volumes semelhantes; como também a relação que existe entre as áreas das figuras semelhantes e entre os volumes semelhantes. Nesta atividade foram fornecidas as dimensões da maquete de uma piscina (comprimento, largura e profundidade) e a capacidade em litros da mesma. Os grupos deveriam encontrar as dimensões da piscina no tamanho real, identificar a relação existente entre os dois volumes, determinar quantos metros quadrados de azulejo seriam necessários para revestir internamente a piscina e identificar qual a relação existente entre as áreas semelhantes correspondentes da maquete e da piscina no tamanho real.

Todas as atividades foram elaboradas de forma a estarem contidas no contexto sócio-cultural da maioria dos alunos. Contudo, consideramos a oitava atividade, talvez, a que mais se aproxime da realidade dos sujeitos desta pesquisa. O objetivo desta atividade era mostrar de forma clara a utilidade da Matemática no dia-a-dia. Para esta atividade foi simulada a seguinte situação: você está construindo sua casa, o dinheiro que você tem disponível dá para comprar 2,5m^3 de areia, que deve ser carregada para o seu quintal em uma lata, cujas dimensões são 20cm de comprimento, 20cm de largura e 50cm de altura. Qual será o tamanho das dimensões de uma caixa de madeira a ser construída em seu quintal de tal forma que não fique espaço vazio, nem fique areia fora da caixa; quantas latas de areia devem ser carregadas para transportar toda a areia e a que conclusão pode-se chegar a respeito da lata e da caixa de madeira.

3.3.4 As mudanças

Como prevíamos ainda na fase do planejamento, algumas mudanças ocorreram. Já no primeiro momento, quando as atividades iam entrar em execução, as aulas, em número de quatro, que seriam usadas para a intervenção, duas a duas em dias distintos sofreram modificações. As quatro aulas foram lotadas somente na sexta feira, nos quatro primeiros horários.

Esta mudança no horário nos levou a reformular a transposição didática do conceito de semelhança - no que diz respeito à simplificação – do saber a ser ensinado para o saber ensinado.

Este deslocamento do horário das aulas, de certa forma, fez com que a pesquisa levasse mais tempo do que o previsto, pois alguns fatores contribuíram para este quadro: no mês de abril só foi possível desenvolver o trabalho em uma sexta-feira, já que na primeira sexta feira a escola decidiu parar por problemas internos e nas duas sextas feiras subseqüentes foram feriados nacionais; outro fator que influenciou na dilatação do tempo aproximadamente previsto foi o fato de que as aulas deveriam terminar por volta de 22h, mas todas as sextas-feiras que estivemos em sala desenvolvendo o trabalho fomos orientados pela administração da escola para encerrar a aula no máximo até as 21h30min, sob a alegação de que os funcionários precisavam limpar a sala antes de serem liberados.

Estes imprevistos relacionados ao fator tempo levaram à mudança de determinadas estratégias. O planejamento previa a execução de uma atividade para um tempo médio de seis horas aulas, porém, em determinadas situações os alunos tiveram que ficar por mais tempo na mesma atividade, ora pelo quadro exposto acima, ora pelas dificuldades apresentadas pelos alunos inerentes ao processo de aprendizagem que ocorre no contexto escolar.

Um outro fato que levou à mudança de estratégias está relacionado à formação dos grupos. Não foi possível manter a formação inicial em decorrência da não assiduidade de alguns alunos e também pela evasão discreta que ocorreu no semestre. Frente a esta situação nem sempre os grupos eram formados pelos mesmos alunos; contudo, não consideramos este imprevisto como um problema para o bom andamento do trabalho. No que diz respeito à construção de materiais como havia sido previsto, no decorrer das aulas julgamos desnecessário por não considerarmos relevante, naquele momento, para o enfoque que estava sendo dado, no que se referia a trabalhar semelhança de figuras planas e espaciais.

Estes problemas constatados no transcorrer da intervenção culminaram em determinadas mudanças. Apesar de termos a atenção voltada para possíveis obstáculos, não acreditávamos que pudessem ocorrer, de maneira tão acentuada, como na mudança do horário da aula. Pensamos em mudar de sujeito e fazer a opção por outra turma, em outra escola, onde também éramos professor. Contudo, preferimos manter a proposta de desenvolver o trabalho na turma com a qual já existia um pré-acordo firmado – ainda que sem compromisso – desde o ano anterior, mesmo correndo o risco de não conseguir realizar a contento os passos do planejamento, o que nos levaria a assumir a responsabilidade de tecer as análises não mais sobre os passos do planejamento, mas, sobretudo, nos rumos que a pesquisa tomaria a partir dos imprevistos ocorridos.

Das oito atividades desenvolvidas na intervenção, faremos descrição e análise apenas das seis primeiras, pois acreditamos que as análises destas são suficientes para atender aos objetivos do nosso objeto de pesquisa.

CAPITULO IV

4 A SEMELHANÇA DE FIGURAS NUMA ABORDAGEM ACADÊMICA

Neste capítulo trataremos do conceito de semelhança no contexto acadêmico, segundo a visão de Elon Lages Lima, baseada no livro “Medida e forma em geometria: comprimento, área, volume e semelhança”, que foi trabalhado na disciplina “Tópicos da Matemática: relação entre álgebra, aritmética e geometria”, no curso de mestrado, do qual faço parte. O enfoque apresentado neste livro e a abordagem feita na disciplina citada acima, no que tange à semelhança, muito contribuíram para nos dar um melhor embasamento, a fim de que pudéssemos tratar a respeito do nosso objeto de pesquisa, que é descrever como os alunos fazem Matemática na construção do conceito de semelhança entre figuras planas, entre áreas de retângulos semelhantes e entre volumes de paralelepípedos retângulos semelhantes.

A noção de semelhança corresponde à idéia natural de mudança de escala, isto é, ampliação ou redução de uma figura modificando seu tamanho sem alterar as proporções entre os segmentos da figura.

No estudo da Geometria, o conceito de semelhança, sobretudo de triângulos, ocupa um lugar bem destacado. Os livros-textos, em geral, definem triângulos semelhantes, como os que têm ângulos correspondentes iguais e lados homólogos proporcionais. Esta definição se estende literalmente para polígonos.

Todavia, duas figuras podem ser semelhantes, mesmo não sendo polígonos. Por exemplo, dois círculos: uma bola de futebol e outra de bilhar; duas fotos: uma ampliada e outra reduzida da mesma imagem. Para esses casos, e, em muitos outros, não podemos aplicar a definição de semelhança que é usada para polígonos, pois não há ângulos correspondentes nem lados homólogos proporcionais para compararmos.

A geometria que é estudada hoje nas escolas, decorre de um livro chamado ‘’Elementos’’, escrito há cerca de 300 anos a. C. por Euclides, ficando esta obra conhecida como os Elementos de Euclides. Muitos livros-textos que tratam de geometria são modelados nesta obra, nela pela primeira vez, se organizou de forma sistematizada, o que já se havia produzido de Geometria, completando-a em vários aspectos.

Os Elementos de Euclides são organizados em treze livros, sendo o sexto livro dedicado à noção de semelhança, onde se tem a seguinte definição: ‘’Figuras retilíneas semelhantes são aquelas cujos ângulos são iguais, e os lados que compreendem ângulos iguais, são proporcionais’’. No livro nove onde começa a ser estudada a geometria no espaço, encontra-se a definição: ‘’chamam-se figuras sólidas semelhantes às figuras limitadas por um número igual de figuras planas semelhantes’’.

4.1 DEFINIÇÃO DE SEMELHANÇA

Sejam F e F’ figuras do plano ou do espaço, e **r** um número real positivo.

Dizemos que F e F’ são semelhantes, com razão de semelhança **r**, se existe uma correspondência biunívoca $w : F \rightarrow F'$, entre os pontos de F e os pontos de F’ , com a seguinte propriedade:

Se X, Y são pontos quaisquer de F e $X' = w(X)$, $Y' = w(Y)$, são seus correspondentes em F’, então, $\overline{X'Y'} = r \cdot \overline{XY}$.

A correspondência biunívoca $w : F \rightarrow F'$, com esta propriedade de multiplicar as distâncias pelo fator constante r, chama-se uma semelhança de razão r entre F e F’. Se $X' = w(X)$, diz-se que os pontos X e X’ são homólogos.

Evidentemente, toda figura é semelhante a si própria, pois a função identidade $w : F \rightarrow F'$ é uma semelhança de razão 1.

Uma semelhança de razão 1 chama-se uma isometria. Portanto, uma isometria $w : F \rightarrow F'$ é uma correspondência biunívoca tal que, para quaisquer pontos X, Y em F, a distância de $X' = w(X)$ a $Y' = w(Y)$ é igual à distância de X a Y. Quando existe uma isometria entre as figuras F e F’, diz-se que estas são congruentes (Figura 3).

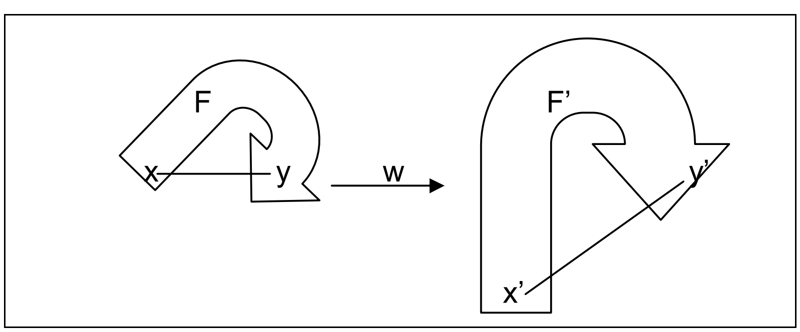


Figura 3: Semelhança de figuras
Fonte: Adaptado de Lima (1991)

Podemos dizer também que, se F é semelhante F’, então F’ é semelhante a F, pois, dada uma semelhança w : F $\rightarrow$ F’ de razão r, a função inversa w^{-1} : F’ $\rightarrow$ F é uma semelhança de razão 1/r.

Tem-se, ainda, a transitividade entre figuras semelhantes: se F é semelhante a F’ e F’ é semelhante a F’’, então, podemos afirmar que F é semelhante a F’’. Com efeito, se w : F $\rightarrow$ F’ e w’ : F’ $\rightarrow$ F’’ são semelhantes de razão r e r’ respectivamente, então, a função composta $w \circ w'$: F $\rightarrow$ F’’ é uma semelhança de razão r . r’.

Usando as propriedades citadas acima mostraremos a semelhança entre dois segmentos de reta: $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$. Se $\overline{CD} = r.\ \overline{AB}$, podemos definir uma semelhança w : $\overline{AB} \rightarrow \overline{CD}$, de razão r, fazendo corresponder, a cada ponto X do segmento $\overline{AB}$, o ponto X’ de $\overline{CD}$, tal que $\overline{CX'} = r.\ \overline{AX}$ (Figura 4).

Tomemos os pontos X, Y em $\overline{AB}$, de maneira que X esteja entre A e Y. Então, pela definição de w, tem-se que X’ está entre C e Y’.

$\overline{X'Y'} = \overline{CY'} - \overline{CX'} = r\ .\ \overline{AY} - r\ .\ \overline{AX} \Rightarrow r\ (\ \overline{AY} - \overline{AX}\ ) = r\ .\ \overline{XY}$ logo $\overline{X'Y'} = r\ .\ \overline{XY}$.

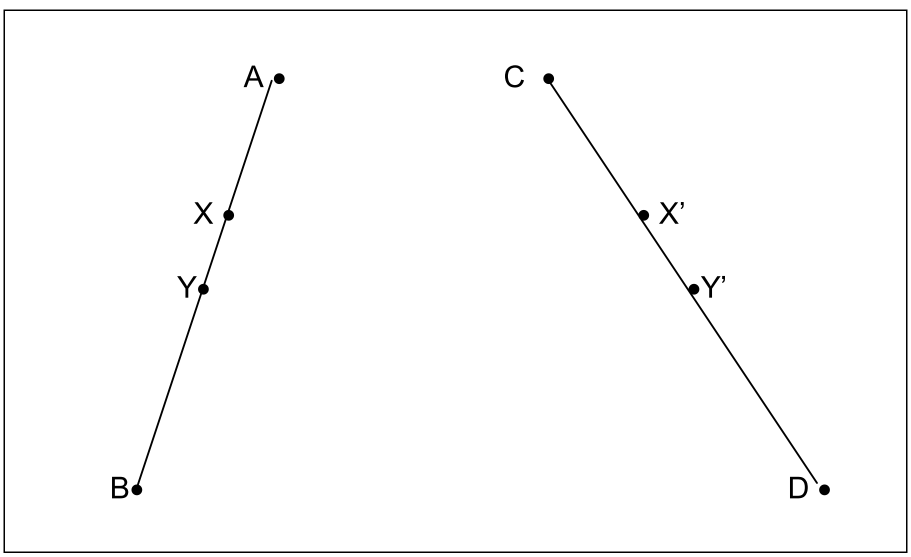


Figura 4: Semelhança entre segmentos
Fonte: Adaptado de Lima (1991)

A seguir verificaremos algumas propriedades das semelhanças.

Lema: “toda semelhança transforma pontos colineares em pontos colineares”.

Demonstração: Seja w : F $\rightarrow$ F' uma semelhança de razão r. Dados três pontos A, B e C contidos em F, tal que C pertence a $\overline{AB}$, mostraremos que C' = w (C) pertence a $\overline{A'B'}$, onde A' = w (A) e B' = w (B). Temos que, $\overline{AC}$ + $\overline{CB}$ = $\overline{AB}$, logo $\overline{A'C'}$ + $\overline{C'B'}$ = r . $\overline{AC}$ + $\overline{CB}$ = r ($\overline{AC}$ + $\overline{CB}$) = r . $\overline{AB}$ = $\overline{A'B'}$, dessa forma concluímos que C' pertence a $\overline{A'B'}$.

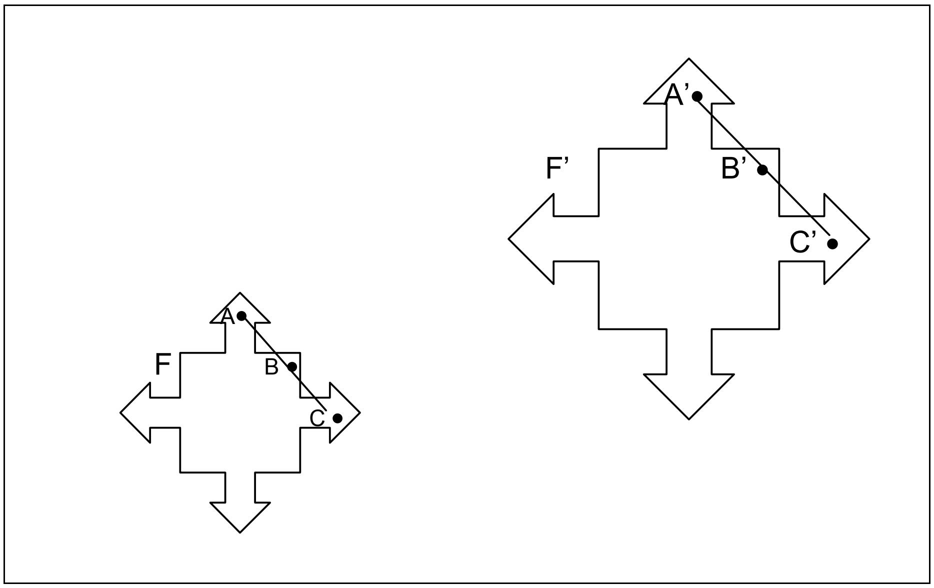


Figura 5: Semelhança de pontos lineares
Fonte: Adaptado de Lima (1991)

4.2 TEOREMA 1

Uma semelhança w : F $\rightarrow$ F' , de razão r, transforma:

1. Todo segmento de reta contido em F num segmento de reta contido em F'.

Demonstração: Dado o segmento de reta $\overline{AB}$ contido em F, sejam A' = w (A) e B' = w (B). Para todo C contido em $\overline{AB}$, seu homólogo C' = w (C) pertence a $\overline{A'B'}$, como foi demonstrado no lema anterior. Reciprocamente, dado qualquer ponto C' em $\overline{A'B'}$, temos C' = w (C), onde C = w^{-1} (C'). Como w^{-1} é uma semelhança, segue-se do lema que C pertence a $\overline{AB}$. Logo, a semelhança w estabelece uma correspondência biunívoca entre os pontos dos segmentos de reta $\overline{AB}$ e $\overline{A'B'}$.

2. Um círculo de raio a contido em F num circulo de raio r . a contido em F'.

Demonstração: Um círculo de centro O e raio a, contido em F, é a reunião dos segmentos de reta $\overline{OX}$, tais que $\overline{OX}$ = a. Sua imagem por w é a reunião dos segmentos de reta $\overline{O'X'}$, com O' = w (O), tais que $\overline{O'X'}$ = r . a; portanto é o círculo de centro O e raio r.a .

3. Pontos interiores a F em pontos interiores a F'.

Demonstração: Um ponto X diz-se interior à figura F quando é centro de algum círculo inteiramente contido em F. Seu homólogo X' = w (X) é, pelo que vimos acima, o centro de um círculo de raio r.a, contido em F'. Portanto, X' é ponto interior a F'.

4. Pontos do contorno de F em pontos do contorno de F'.

Demonstração: Diz-se que um ponto X pertence ao contorno da figura F quando X pertence a F, mas não é interior a F (nenhum círculo de centro X pode estar inteiramente contido em F). Neste caso, X' = w (X) deve pertencer ao contorno de F', pois se X' estivesse no interior de F', então, em decorrência do 3º caso, X = w^{-1} (X') também estaria no interior de F.

5. Vértices de F em vértices de F' (se F e F' forem polígonos).

Demonstração: Suponhamos agora que F e F' sejam polígonos e que X seja um vértice de F. Em particular, X está no contorno de F. Logo, pelo 4º caso, concluímos que seu homólogo X' = w (X) está no contorno de F'. Se não fosse vértice, o ponto X' pertenceria ao lado $\overline{A'B'}$ de F' , sendo diferente de A' = w (A) e de B' = w (B). Então, X pertenceria ao lado $\overline{AB}$ de F, com X $\neq$ A e X $\neq$ B, logo X não seria vértice de F.

4.3 TEOREMA FUNDAMENTAL DA SEMELHANÇA

Seja O um ponto do plano π (ou do espaço E) e r um número real positivo. A homotetia de centro O e razão r é a figura w : $\pi \to \pi$ (ou w : E $\to$ E) definida do seguinte modo : w (O) = O e, para todo X $\neq$ O, w (X) = X' é o ponto da semi-reta $\overline{OX}$ tal que $\overline{OX'}$ = r . $\overline{OX}$ (Figura 6).

Dizemos que duas figuras F e F' chamam-se homotéticas quando existe uma homotetia w, tal que w (F) = F'.

- Uma homotetia de razão 1 é simplesmente a aplicação identidade e transforma toda reta que passa por O em si mesma.

- Toda homotetia é uma correspondência biunívoca, cuja inversa é a homotetia de mesmo centro e razão 1/r.
- Numa homotetia, os pontos O, X e X’ são sempre colineares, nesta ordem se $r > 1$ ou na ordem O, X’ e X se $O < r < 1$.

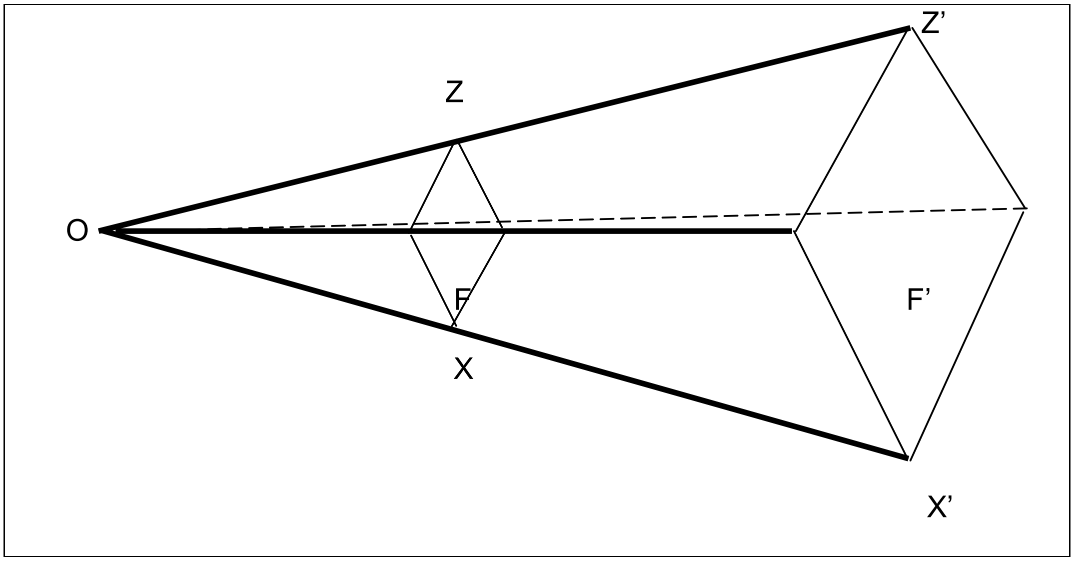


Figura 6: Semelhança de pontos lineares
Fonte: Adaptado de Lima (1991)

4.4 TEOREMA 2

Toda homotetia é uma semelhança que transforma qualquer reta em si própria ou numa reta paralela.

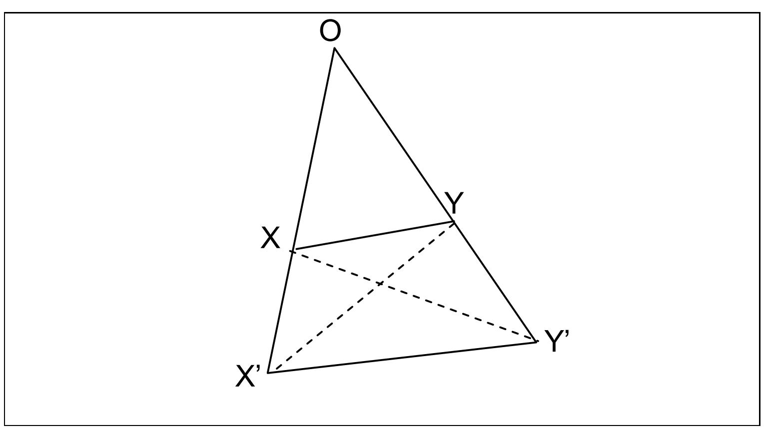


Figura 7: Homotetia no triângulo
Fonte: Adaptado de Lima (1991)

Demonstração: Seja w uma homotetia de centro O e razão r. Vamos considerar $r \neq 1$, (pois para r = 1 recai na função identidade). Mostraremos que w é uma semelhança de razão r. Para isso, vamos considerar O, X e Y não colineares, temos que $\overline{OX'} = r \cdot \overline{OX}$ e $\overline{OY'} = r \cdot \overline{OY}$. Tomando os triângulos OYX' e OYX, temos que $A(OYX') = \overline{OX'} \cdot h/2 = r \cdot \overline{OX} \cdot h/2$ e $A(OYX) = \overline{OX} \cdot h/2 \Rightarrow A(OYX') = r \cdot A(OYX)$.

Tomando agora os triângulos OXY' e OXY, temos que $A(OXY') = \overline{OY'} \cdot h/2 = r \cdot \overline{OY} \cdot h/2$ e $A(OXY) = \overline{OY} \cdot h/2 \Rightarrow A(OXY') = r \cdot A(OXY)$. Temos então, $A(OXY') - A(OXY) = A(OYX') - A(OXY)$, logo temos que $A(OXY') = A(OYX')$, subtraindo de ambos os membros da última igualdade a área que corresponde à parte comum nos dois triângulos, que é $A(OXY)$, então $A(XYX') = A(XYY')$. Como a base $\overline{XY}$ é comum aos triângulos XYX' e XYY', como suas áreas são iguais, logo suas alturas também são iguais. Então, concluímos que $\overline{XY} \,//\, \overline{X'Y'}$.

Vamos mostrar agora que $\overline{X'Y'} / \overline{XY} = r$. Considere, na Figura 8, as letras a, b e c e as áreas dos triângulos por elas indicadas. Assim $A(OY'X') = a + b + c$ e $a + b = A(OYX') = r \cdot A(OXY) = r \cdot a \Rightarrow a + b = r \cdot a$.

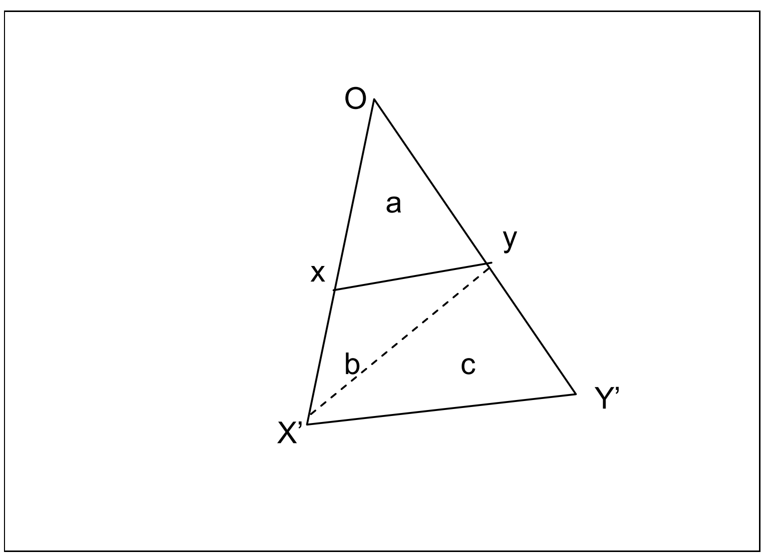


Figura 8: Homotetia e áreas
Fonte: Adaptado de Lima (1991)

Tomando os triângulos OY’X’ e OYX’, temos que A (OY’X’) = $\overline{OY'}$. h / 2 = r $\overline{OY}$. h / 2 e A (OYX’) = $\overline{OY}$. h / 2 $\Rightarrow$ A (OY’X’) = r . A (OYX’) $\Rightarrow$ a + b + c = r . (a + b), como (a + b) = r . a e (a + b + c) = r . (a + b) $\Rightarrow$ c = r . b . Então A (YY’X’) = r . A (XYX’) = $\overline{X'Y'}$. h / 2 = r . $\overline{XY}$. h / 2 $\Rightarrow$ $\overline{X'Y'}$ = r . $\overline{XY}$. Logo $\overline{X'Y'}$ / $\overline{XY}$ = r

Corolário do Teorema 2. Toda paralela a um lado de um triângulo determina um triângulo parcial semelhante ao triângulo total.

Considere no triângulo ABC abaixo, $\overline{XY}$ // $\overline{BC}$ (Figura 9).

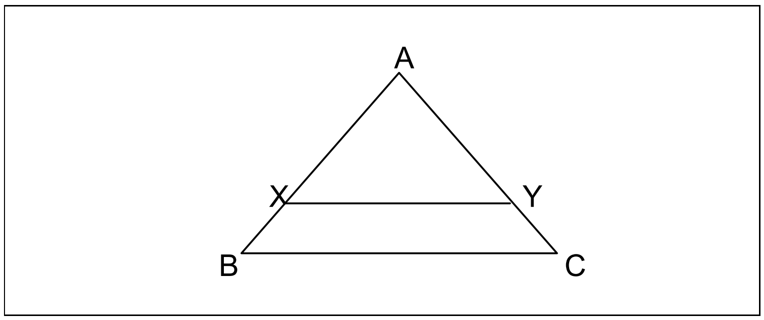


Figura 9: Semelhança de triângulos
Fonte: Adaptado de Lima (1991)

Demonstração: Vamos considerar que a homotetia w de centro A e razão r = $\overline{AC}$ / $\overline{AY}$ transforma Y em C e X em X’ situado na semi-reta $\overline{AB}$. Logo, a imagem de $\overline{XY}$ pela definição de homotetia é o segmento $\overline{CX}$ começando em C. Paralelo a $\overline{XY}$. Assim X’ pertence às retas BC e AB, ou seja, X’ = B. Portanto, w (A) = A, w (X) = B e w (Y) = C, isto é, w é uma semelhança entre os triângulos AXY e ABC.

4.5 TEOREMA 3

Dois triângulos semelhantes têm ângulos iguais e lados homólogos proporcionais (Figura 10). Reciprocamente, se dois triângulos cumprem uma das três condições abaixo, então eles são semelhantes:

a) Têm lados proporcionais;
b) Têm ângulos iguais;
c) Têm um ângulo igual compreendido entre lados proporcionais.

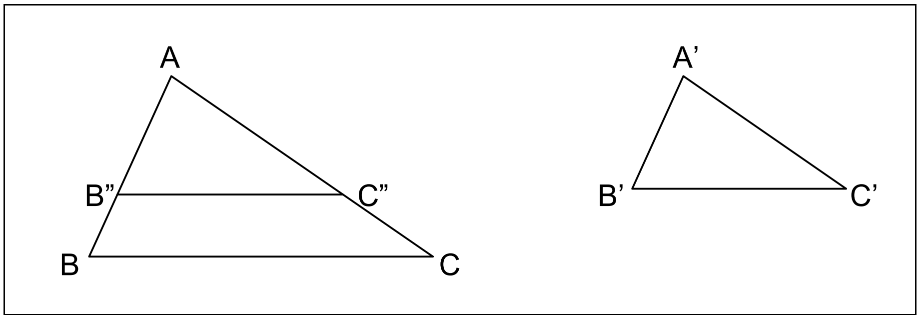


Figura 10: Semelhança de triângulos
Fonte: Adaptado de Lima (1991)

Demonstração: seja w : ABC $\rightarrow$ A’B’C’ uma semelhança de razão r entre os triângulos ABC e A’B’C’ , com A’ = w (A), B’ = w (B) e C’ = w (C). Por definição de semelhança temos $\overline{A'B'}$ / $\overline{AB}$ = $\overline{A'C'}$ / $\overline{AC}$ = $\overline{B'C'}$ / $\overline{BC}$ = r, considere $0 < r < 1$. A homotetia δ de centro A e razão r, transforma o triângulo ABC no triângulo parcial AB”C” , com $\overline{B''C''}$ paralelo a $\overline{BC}$. Então o < B” = < B e < C” = < C.

Os triângulos AB”C” e A’B’C’ são congruentes pois $\overline{AB''}$ = $\overline{A'B'}$ = r . $\overline{AB}$, $\overline{AC''}$ = $\overline{A'C'}$ = r . $\overline{AC}$ e $\overline{B''C''}$ = $\overline{B'C'}$ = r . $\overline{BC}$. Logo <A = <A’, < B = < B’ e < C = < C’.

a) Sejam ABC e A’B’C’ triângulos tais que $\overline{A'B'}$ = r . $\overline{AB}$, $\overline{A'C'}$ = r . $\overline{AC}$ e $\overline{B'C'}$ = r . $\overline{BC}$, para todo r > 0. A homotetia de centro A e razão r transforma ABC no triângulo AB”C” cujos lados medem $\overline{AB''}$ = r $\overline{AB}$, $\overline{AC''}$ = r . $\overline{AC}$ e $\overline{BC''}$ = r . $\overline{BC}$. AB”C” e A’B’C’ são congruentes pois têm lados iguais. Como AB”C” é semelhante a ABC, segue-se que ABC e A’B’C’ são semelhantes.

b) Sejam ABC e A’B’C’ triângulos tais que < A = < A’ , < B = < B’ e C < C’ . Nas retas AB e AC tomemos os pontos B” e C”, respectivamente, de modo que $\overline{AB''}$ = $\overline{A'B'}$ e $\overline{AC''}$ = $\overline{A'C'}$. Os triângulos AB”C” e A’B’C’ são congruentes porque têm um ângulo igual (< A = < A’) compreendido entre lados iguais . Logo < B” = < B’, como < B = < B” concluímos então que as retas B”C” e BC são paralelas, logo os triângulos AB”C” e ABC são semelhantes.

c) Suponhamos agora que os triângulos ABC e A’B’C’ cumpram o seguinte < A = < A’ , $\overline{A'B'}$ = r . $\overline{AB}$ e $\overline{A'C'}$ = r . $\overline{AC}$. Considere sobre as retas $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$, respectivamente, os pontos B” e C” com $\overline{AB''}$ = $\overline{A'B'}$ e $\overline{AC''}$ = $\overline{A'C'}$. Os triângulos AB”C” e A’B’C’ são congruentes, como no caso b). A homotetia de centro A e razão r transforma $\overline{AB}$ em $\overline{AB''}$ e $\overline{AC}$ em $\overline{AC''}$, pois $\overline{AB''} = r \cdot \overline{AB}$ e $\overline{AC''} = r \cdot \overline{AC}$. Logo, essa homotetia é uma semelhança entre o triângulo ABC e o triângulo AB"C". Como AB"C" e A'B'C' são congruentes, tem-se que ABC e A'B'C' são semelhantes.

4.6 TEOREMA 4

Dois círculos quaisquer são figuras semelhantes e a razão de semelhança é a razão entre seus raios.

Demonstração: Considere os círculos C de raio a e C' de raio a' concêntricos como mostra a Figura 11.

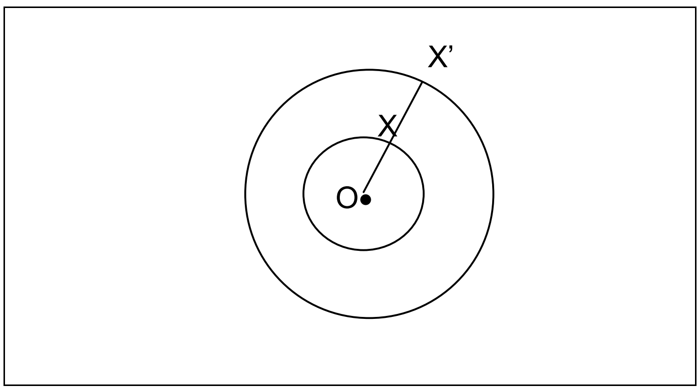


Figura 11: Homotetia no círculo
Fonte: Adaptado de Lima (1991)

A homotetia de centro O e razão r transforma o segmento $\overline{Oa}$ em um segmento $\overline{Oa'} = r \cdot \overline{Oa} \Rightarrow r = \overline{Oa'} / \overline{Oa} = \overline{OX'} / \overline{OX} = r_2 / r_1$. Logo, essa homotetia define uma semelhança entre C e C'.

4.7 TEOREMA 5

Dois arcos de circunferência são semelhantes se, e somente se, subtendem o mesmo ângulo central.

Demonstração: Sejam AB e A'B' arcos de circunferência nos círculos de centro O e O', respectivamente, os quais subtendem os ângulos centrais α = AÔB e α' = A'Ô'B'. Seja M o ponto médio de $\overline{AB}$ e M' o ponto médio de $\overline{A'B'}$.

Toda semelhança entre os arcos AB e A’B’ determina uma semelhança entre os triângulos AMB e A’M’B’; logo, os ângulos < M e < M’ são iguais. Daí resulta que os ângulos centrais α e α' também são iguais, pois $\alpha = 360º - 2 < M$ e $\alpha' = 360º - 2 < M'$. Assim, arcos semelhantes subtendem o mesmo ângulo central. Reciprocamente, suponhamos que os arcos AB e A’B’ subtendem ângulos centrais iguais. Sem perda de generalidade, podemos supor que os círculos onde estão situados esses arcos são concêntricos. Neste caso, a homotetia (com esse centro) que leva um círculo no outro é uma semelhança entre os arcos dados.

4.8 TEOREMA 6

As áreas de duas figuras semelhantes estão entre si como o quadrado da razão de semelhança.

Obs. Em dois retângulos semelhantes R e R’ com razão de semelhança $r > 0$, cujas áreas são A e A’, respectivamente, segue a seguinte relação $A' = r^2. A$.

Demonstração: Seja $w : F \rightarrow F'$ uma semelhança de razão r entre as figuras F e F’. Podemos afirmar que a área de F’ é igual a r^2 vezes a área de F. Isto é verdade quando F e F’ são retângulos e, portanto, também quando F e F’ são polígonos retangulares. Assim, todo polígono retangular P, contido em F, é transformado pela semelhança w num polígono retangular P’, contido em F’, tal que a área de P’ é igual a r^2 vezes a área de P. E vice-versa, todo polígono retangular Q’, contido em F’, é transformado por w^{-1} num polígono retangular Q, cuja área é $(1/r)^2$ vezes a área de Q’, logo a área de Q’ é r^2 vezes a área de Q. Assim, a área de F’ é o número real cujas aproximações por falta são r^2 vezes as aproximações por falta da área de F. Desta maneira, temos: área de F’ = r^2 (área de F).

O objetivo que nos levou a tratarmos do assunto de semelhança, é pela importância deste tema nas diferentes áreas do conhecimento humano, inclusive o do senso comum, que, em geral, não é muito bem compreendido, pois, como ocorre na apresentação acima, destinada à formação continuada de professores do ensino médio, não enfatiza a dificuldade de se estabelecer se duas figuras planas ou espaciais são semelhantes ou não. A seguir tal rigor apresentado, torna-se em geral impraticável afirmar com uma minuciosa observação se duas figuras são semelhantes, restando a nós a tarefa de identificarmos os casos em que isso é possível. Daí a importância do estudo de semelhanças de triângulos, por exemplo, que com a simples observação de igualdades de ângulos podemos garantir a semelhança entre eles ou ainda a imediata resposta sobre a semelhança entre polígonos regulares de mesmo número de lados. Por outro lado, nos parece ser, de certo modo, simples construir duas figuras semelhantes e muito disso tem sido usado no decorrer dos séculos em áreas, como por exemplo, Arquitetura, Engenharia e Artes. Assim, nos propomos construir uma transposição para a definição de figuras semelhantes para o ensino médio que explore essa característica de simplicidade de construção e ao mesmo tempo estabelecer os elementos característicos no conceito descrito acima, que destacamos ser a forma (invariância) – figuras semelhantes têm a mesma forma – e proporcionalidade existentes nas dimensões que compõem as figuras. No capítulo a seguir mostramos como foram desenvolvidas as atividades no processo didático construído pela comunidade de estudo em busca de respondermos as questões de nossa pesquisa.

CAPÍTULO V

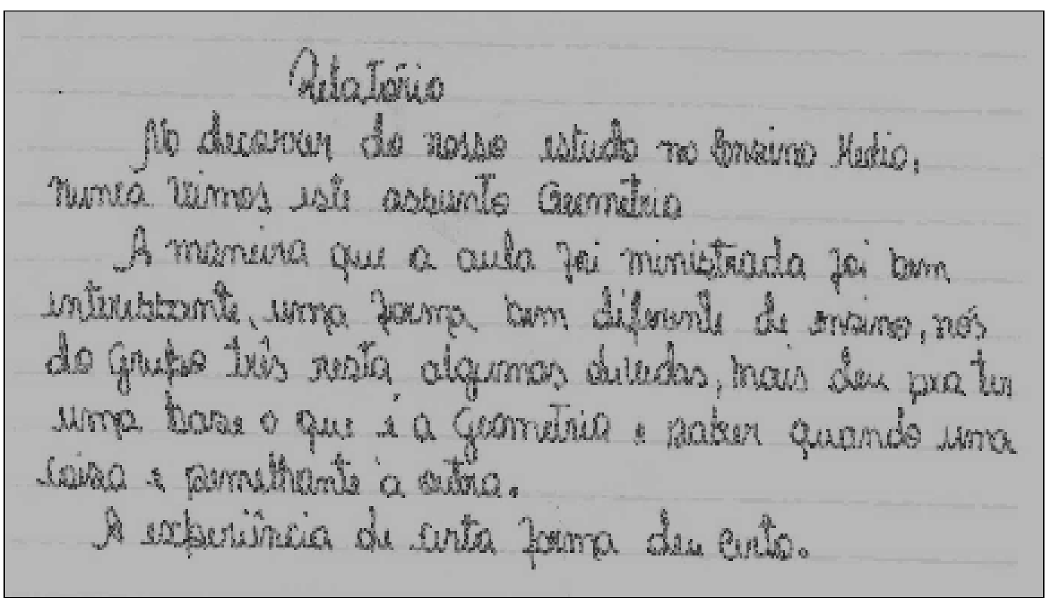
5 ANÁLISE DOS DADOS

Neste capítulo analisamos as atividades desenvolvidas pelos alunos durante a intervenção metodológica. Este capítulo está estruturado do seguinte modo: descrição em forma de relato e análise de episódios de cada atividade à luz da fundamentação teórica adotada por nós.

5.1 1ª ATIVIDADE

1º dia de aula:

Esta atividade consta de um questionamento que fizemos à turma sobre semelhança. Considerando que esse tema nortearia o nosso trabalho, perguntamos aos alunos o que eles entendiam por coisas ou objetos semelhantes? Para responder este questionamento sugerimos aos grupos que fizessem uma pesquisa sobre semelhança entre figuras e objetos, já que alguns alunos diziam não ter estudado geometria nas séries anteriores, como segue nos relatos abaixo (Figuras 12 e 13). O objetivo desta atividade era buscar subsídios junto aos grupos para as atividades seguintes e em particular que nos levassem de alguma forma ao conceito de semelhança entre figuras poligonais envolvendo invariância da forma e proporcionalidade.



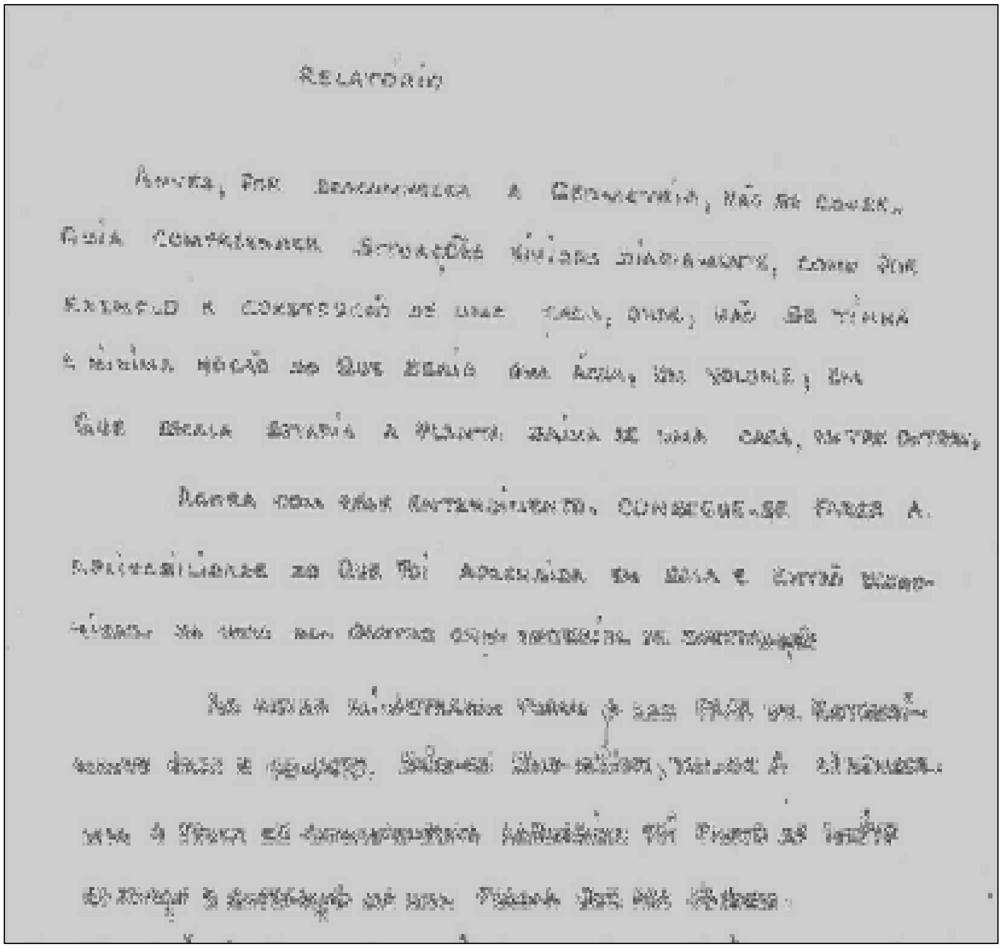
Relatório

No decorrer do nosso estudo no Ensino Medio, nunca vimos esse assunto Geometria

A maneira que a aula foi ministrada foi bem interessante, uma forma bem diferente de ensino, nós do Grupo três resta algumas duvidas, mais deu pra ter uma base o que é a Geometria e saber quando uma coisa é semelhante à outra.

A experiência de certa forma deu certo.

Figura 12: Relatos dos alunos
Fonte: Elaborado pelo autor com base nos dados da pesquisa de campo, 2007



RELATÓRIO

ANTES, POR DESCONHECER A GEOMETRIA, NÃO SE CONSEGUIA COMPREENDER SITUAÇÕES VIVIDAS DIARIAMENTE, COMO POR EXEMPLO A CONSTRUÇÃO DE UMA CASA, ONDE, NÃO SE TINHA A MÍNIMA NOÇÃO DO QUE SERIA UMA ÁREA, UM VOLUME, EM QUE ESCALA ESTARIA A PLANTA BAIXA DE UMA CASA, ENTRE OUTRAS.

AGORA COM ESSE ENTENDIMENTO, CONSEGUE-SE FAZER A APLICABILIDADE DO QUE FOI APRENDIDO EM SALA E ...

Figura 13: Relatos dos alunos
Fonte: Elaborado pelo autor com base nos dados da pesquisa de campo, 2007

A primeira atividade foi marcada pela insegurança decorrente de estarmos cientes, que a partir do momento em que convidamos os alunos a formarem uma comunidade de estudo em torno de um problema matemático, certamente se estabeleceria uma relação didática de caráter aberto entre nós (alunos e professor), onde cada um dos participantes exerceria um *topos* neste processo de estudo, e isso nos levaria a andar por caminhos que não nos permitiriam prever os obstáculos que poderiam surgir no estudo desta obra matemática.

Eis o que afirma Chevallard (2001, p. 200):

> Dentre as coisas que um professor ensina a seus alunos, existem algumas que ele conhece e outras que ignora – e talvez nunca poderá saber. O professor não pode prever com exatidão o que o aluno fará, nem tampouco o que aprenderá. De fato, toda tentativa de ''fechar'' a relação didática pode chegar a bloquear ou

> enfraquecer o processo de estudo, com o conseqüente empobrecimento e até mesmo paralisação da aprendizagem.

No entanto, decidimos enfrentar a insegurança com o questionamento posto como forma de pesquisa que subsidiasse o nosso estudo em caminhos diversos, pela complexidade de significados que a palavra trás para cada um de nós, de modo que nos levassem a considerar apenas o significado matemático por nós desejado; invariância da forma e proporcionalidade.

2º dia de aula:

Como havia sido combinado na aula anterior, a turma foi dividida em dez grupos de cinco alunos, numerados de acordo com a ordem de apresentação deste dia, convidamos os grupos a apresentarem suas respostas para serem anotadas no quadro, como segue no Quadro 1.

Quadro 1: Resposta dos grupos

Grupos	Respostas
Primeiro grupo	São objetos ou coisas com características iguais.
Segundo grupo	Semelhança é uma coisa parecida com a outra. Para ser semelhante tem que ter aparência física parecida, ter sentimentos iguais.
Terceiro grupo	São coisas com pelo menos uma característica comum (se tiver duas coisas com características comuns, já são semelhantes).
Quarto grupo	Coisas que têm uma característica comum, como filhos e pais; cor dos olhos.
Quinto grupo	São coisas com características parecidas, como pessoas ou animais.
Sexto grupo	No conceito geométrico duas ou mais figuras que são diferentes apenas pela escala na qual são constituídas, são semelhantes.
Sétimo grupo	são diferentes apenas pela escala na qual são constituídas, são semelhantes.
Oitavo grupo	A semelhança entre figuras depende dos elementos dessas figuras.
Nono grupo	Para serem semelhantes, as figuras não precisam ser iguais.
Décimo grupo	Semelhança faz a relação entre duas coisas que se parecem.

Fonte: Elaborado pelo autor com base nos dados da pesquisa de campo, 2007

Após as apresentações, fizemos uma reflexão das respostas dadas buscando destacar a semelhança entre figuras num contexto matemático. Para isso, lançamos a seguinte pergunta: será que, pelo fato de duas coisas se parecerem ou duas pessoas terem o mesmo gosto, isto as torna semelhantes? Quatro grupos afirmaram que sim, os outros disseram não ter certeza. Então, reformulamos a pergunta: será que dois irmãos gêmeos de sexos diferentes que se parecem e possuem o mesmo gosto, são semelhantes? Será que duas casas que se parecem, levando em conta a parte frontal (portas que possuem a mesma forma e janelas que possuem a mesma forma), são semelhantes?

Depois de discussão entre os membros dos grupos e entre os grupos, obtivemos como respostas, que o fato de ser parecido ou ter o mesmo gosto, não garante a semelhança entre os seres. Perguntamos como eles poderiam justificar essa resposta, e, então, uma aluna do grupo dois se manifestou, dizendo que possui um irmão gêmeo de sexo diferente e que ela e seu irmão pareciam em muitas coisas, porém, ela não se considerava semelhante a ele, pois a anatomia dos corpos era diferente.

Quando questionados se os gêmeos tivessem o mesmo sexo, seriam semelhantes? o grupo de número seis se posicionou dizendo: *dois irmãos gêmeos de sexos diferentes ou de mesmo sexo não são semelhantes, são parecidos, pois, podem apresentar muitas diferenças, como, por exemplo, no tamanho*. Pedimos ao grupo que explicasse melhor o que estava dizendo, e o grupo se manifestou da seguinte forma: *os irmãos podem ter alturas diferentes: as pernas, os braços, os dedos, os pés de um pode ter comprimento diferentes do outro*.

Perguntamos se a turma concordava ou não com o grupo. Sete grupos concordaram e os demais não se manifestaram. Fizemos, então, a seguinte pergunta: *vocês estão dizendo que, duas ou mais figuras ou objetos que apresentam medidas variadas, não são semelhantes. É isso?* Eles responderam que sim. A partir da resposta deles enfatizamos que o fato de duas ou mais figuras serem de tamanhos diferentes, não as impedem de serem semelhantes, porém, temos que procurar verificar que relações são observáveis entre figuras que entendemos ser semelhantes. Mesmo os alunos não tendo respondido de forma satisfatória, consideramos relevante para o processo, pois surgiu o tema medida de comprimento, que poderíamos usar para atingirmos nossa meta que era estabelecer a relação entre semelhança de figuras, usando a proporcionalidade, ao mesmo tempo em que buscávamos de modo subjacente destacar a invariância da forma.

Retomamos o questionamento sobre as casas “Será que duas casas que se parecem, levando em conta a parte frontal (portas que possuem a mesma forma e janelas que possuem a mesma forma), são semelhantes?”, os grupos se expressaram com frases diferentes, porem, com o mesmo sentido, *a saber: duas casas que têm a parte da frente idêntica podem ter as partes internas diferente; então, não são semelhantes*. Solicitamos que explicassem melhor, e um aluno do grupo quatro respondeu: *professor vamos supor que as portas e as janelas da frente das casas sejam do mesmo tamanho, mas, por exemplo, se existir dentro de uma casa uma janela de um tamanho e na outra casa uma janela de outro tamanho, ou, então, uma janela quadrada em uma casa e na outra uma janela retangular ou redonda, essas casas não serão semelhantes.*

Perguntamos qual a opinião dos grupos a respeito do que havia sido colocado pelo aluno, e, alguns alunos se manifestaram dizendo que concordavam com ele, uma vez que, se uma janela é quadrada e a outra é retangular ou redonda, então, estas casas não são semelhantes. Tomamos a palavra dizendo: *vocês estão falando que, se as casas tiverem janelas com formas diferentes, essas casas não são semelhantes?* Disseram que sim.

Nas falas dos alunos podemos perceber que estão estudando Matemática, pois foi estabelecido um processo didático em que os alunos se encontram frente a um problema e estão tentando resolvê-lo refletindo a respeito das situações estabelecidas pela problemática, movimentando conceitos matemáticos, usando modelos geométricos como quadrado, retângulo e círculo para buscar compreender a semelhança entre as casas. Para Chevallard (2001), forma-se um processo didático todas as vezes que alguém, por algum motivo, se propõe a estudar Matemática para resolver uma determinada situação.

> caracterizamos o *fazer matemático como um trabalho de modelagem*. Esse trabalho transforma o estudo de um sistema não-matemático, ou um sistema previamente matematizado, no estudo de problemas matemáticos que são resolvidos utilizando de maneira adequada certos modelos (CHEVALLARD, 2001, p. 56, grifos do autor).

Achamos que o momento era oportuno para tratarmos sobre a questão das formas. Concordamos com o posicionamento dos alunos dizendo que a forma das figuras é um dos conceitos que podem ser usados para compreender semelhança, pois figuras de formas distintas não são semelhantes.

Alguns alunos pediram para que discutíssemos novamente a esse respeito, pois não estavam conseguindo acompanhar o raciocínio. Perguntamos, então, como eles identificavam que uma figura é um quadrado. Eles deram a seguinte resposta: *se a figura possui os quatro lados iguais, ela é um quadrado*. Perguntamos se a igualdade das medidas dos lados era suficiente para definir um quadrado. Responderam que *sim.*

Neste momento observamos que os alunos tinham dificuldades para construírem o conceito de semelhança, pois tal construção movimenta conceitos prévios, como o citado acima, que os alunos demonstravam não ter domínio. Para contornar a situação, fomos ao quadro e desenhamos um losango, cujos lados mediam 20 cm e os ângulos opostos mediam 120º e 60º, que chamamos de figura A, e um quadrado de lado 20 cm que identificamos como figura B. Em seguida, perguntamos qual das figuras era um quadrado ou se as duas figuras eram quadrados. Foram enfáticos em responder, *somente a figura B é um quadrado*. Ao perguntarmos qual explicação eles tinham para tal afirmação, a resposta foi imediata: *a figura A não se parece com um quadrado, não tem forma de quadrado*.

Em virtude da resposta apresentada pelos alunos, questionamos fazendo a seguinte pergunta: vocês disseram que, se a figura possuir quatro lados iguais, será um quadrado, e vocês estão dizendo que só a figura B é um quadrado. Como podem justificar isso? Após debaterem a questão, um aluno do sétimo grupo perguntou: *professor será que a resposta tem haver com os ângulos das figuras*? Como assim? Perguntamos, e ele respondeu: *na figura A os ângulos são iguais dois a dois, e, no quadrado, que é a figura B, todos os ângulos são iguais de 90º. Se for isso, uma figura, para ser quadrado, tem que ter quatro lados iguais e quatro ângulos de 90°.* Neste momento, nos posicionamos ratificando a manifestação do aluno dizendo que o quadrado é uma figura que possui quatro lados iguais e quatro ângulos de 90º. Por isso dois quadrados são sempre semelhantes, no entanto dois losangos podem não ser semelhantes. E perguntamos: alguém pode nos explicar por quê? O grupo oito respondeu: *professor é porque nós podemos construir dois losangos com os lados iguais, sendo que os ângulos de um podem ser dois de 120º* *e dois de 60º, e do outro, dois ângulos de 110º e dois de 70º. Neste caso, eles não são semelhantes, serão só parecidos*.

Levando em consideração o exposto acima, solicitamos que selecionassem as respostas dos grupos que melhor se ajustavam para descrever semelhança entre figuras num contexto matemático. Após discussão entre os membros dos grupos e entre os grupos, ficou em consenso que seriam mantidas as respostas dos grupos 6, 8 e 9.

Quadro 2: Respostas mantidas

Sexto grupo	No conceito geométrico duas ou mais figuras que são diferentes apenas pela escala na qual são constituídas, são semelhantes.
Oitavo grupo	A semelhança entre figuras depende dos elementos dessas figuras.
Nono grupo	Para serem semelhantes, as figuras não precisam ser iguais.

Fonte: Elaborado pelo autor com base nos dados da pesquisa de campo, 2007

Perguntados sobre como os membros dos grupos justificavam a seleção feita, eles disseram o seguinte: *as respostas do 6º, 8º e 9º grupos estão mais dentro do assunto que o professor está querendo trabalhar, que é semelhança entre figuras dentro da Matemática.* Passamos, então, a trabalhar com as respostas que restaram. Usamos a definição do nono grupo – *Para serem semelhantes, as figuras não precisam ser iguais.* Então, perguntamos qual era a idéia que o grupo tinha a respeito da frase trazida como resposta. Nesse momento, queríamos que o grupo socializasse com os demais as suas idéias. O grupo respondeu que: *seriam coisas ou figuras que não precisam ser do mesmo tamanho; duas figuras podem ser semelhantes, sendo uma menor e outra maior*. Pedimos para o nono grupo justificar sua resposta, e eles disseram: *não sabemos como explicar, mas, pelo que foi falado aqui na sala professor, podemos afirmar que, dois quadrados, um pequeno e um grande, são semelhantes.*

Perguntamos para a turma se alguém discordava da posição do grupo. Como ninguém se pronunciou contra, procuramos, então, fazer uma explanação dizendo que dois objetos ou duas figuras, podem ser semelhantes mesmo tendo tamanhos diferentes ratificando a fala do nono grupo.

Fizemos uso de uma metáfora com as bolas de basquete, de futebol e de tênis, com o propósito de estabelecer relações entre elas que ajudassem a compreender a semelhança pela observação da forma. No entanto, ressaltamos que só a forma não é suficiente para verificarmos se duas ou mais figuras são semelhantes; para verificarmos se duas figuras são semelhantes é imprescindível usarmos a expressão e o que o oitavo grupo trouxe como resposta, ou seja – *A semelhança entre figuras depende dos elementos dessas figuras.*

No entanto, enfatizamos que, para discutirmos a respeito dos elementos que compõem uma figura, como por exemplo, segmentos, vamos primeiramente, trabalhar a resposta do sexto grupo. Porém, chamamos a atenção dos grupos, pois a frase poderia levar a uma interpretação dúbia. Pois para duas ou mais figuras serem semelhantes, não é suficiente considerarmos apenas a escala, temos que considerar também, a forma e os ângulos caso existam. Contudo, iríamos usar a resposta para discutir a respeito do trabalho com escala que proporciona a articulação com proporcionalidade entre segmentos que tem estreita relação com semelhança. Segue a resposta do grupo: *No conceito geométrico, duas ou mais figuras que são diferentes apenas pela escala na qual são constituídas, são semelhantes.* Destacamos a palavra escala que é estabelecida por meio da proporção entre as medidas de um desenho e as medidas do tamanho real do desenho. Por exemplo, entre as medidas de uma casa na planta baixa (projeto) e as medidas desta casa no tamanho real, existe uma proporcionalidade entre os segmentos correspondentes das figuras.

Optamos pela técnica da escala por acreditarmos que chegaríamos às medidas de comprimento e, consecutivamente, na proporcionalidade entre segmentos destas figuras. Deste modo, poderíamos mostrar a semelhança entre algumas figuras geométricas poligonais, a partir da proporcionalidade, todavia só este critério não é suficiente para estabelecer a semelhança entre figuras quaisquer.

Nesta atividade, os alunos do nono grupo mostram estar assumindo a responsabilidade por seus erros e acertos matemáticos quando dizem que ‘’não sabemos explicar’’ quando duas figuras de tamanhos diferentes são semelhantes. Chevallard (2001) chama a atenção para a importância do trabalho matemático dos alunos no contexto escolar, pois tradicionalmente este trabalho não é levado a sério, ou melhor, o trabalho matemático dos alunos nunca é considerado um verdadeiro trabalho matemático. Esta situação leva os alunos a dependerem totalmente do professor, ficando, para este último, toda a responsabilidade pela aprendizagem matemática do aluno.

Na atividade descrita acima, os alunos do sétimo e do oitavo grupo, ao identificarem o quadrado como uma figura de quatro lados iguais e quatro ângulos iguais, como também ao concluírem que dois losangos que podem ter as mesmas medidas, mas com os ângulos distintos não são semelhantes, demonstram as articulações entre os modelos matemáticos evocados caracterizando uma atividade matemática, estudando Matemática, desenvolvendo um processo didático.

A dificuldade apresentada pelos alunos para definir o conceito de quadrado, destacamos como relevante no processo de estudo, pois nos permitiu observar a movimentação de formas geométricas distintas como: quadrado, retângulo e círculo, onde os alunos demonstraram estarem articulando saberes para assimilação de semelhança entre figuras pela invariância da forma.

Para a aula seguinte, solicitamos que os alunos trouxessem instrumentos que pudessem ser usados para fazerem medições.

5.2 2ª ATIVIDADE

3º dia de aula:

Dando continuidade ao trabalho com escala, usamos quatro fascículos de Geografia ‘’Trabalhando com mapas’’, e selecionamos cinco folhas que continham o mapa do Brasil, sendo reproduzidas dez cópias, duas de cada folha, de forma que cada par de grupo ficasse com o mapa na mesma escala, para compararmos as respostas dos pares de grupos.

A motivação que nos levou a utilizar este material foi a possibilidade de relacionar a Matemática a outras áreas do conhecimento mostrando, por exemplo, uma das aplicações da Matemática na Geografia e utilizar o conhecimento significativo que os alunos possuíssem do mapa do Brasil.

Segue abaixo, um dos mapas utilizados na atividade.

Figura 14: Mapa com a divisão política do Brasil
Fonte: Trabalhando com mapas as regiões brasileiras. São Paulo: Ática, 2003

Outra motivação que nos levou a utilizar este recurso didático foi considerarmos que mesmo os alunos que não possuíssem conhecimentos para interpretar o mapa do Brasil, se interessariam em saber quanto mede o Brasil de norte a sul e de leste a oeste.

Nesta tarefa os alunos tiveram dificuldade em desenvolver o processo de estudo, pois muitos alunos não sabiam trabalhar com unidades de medida. Percebemos que vários alunos não tinham noção do comprimento, de um metro, de um centímetro ou de um milímetro, como também não sabiam identificar essas medidas no instrumento de medida. Para orientá-los a fazerem medições usamos o material que cada grupo trouxe para trabalhar, como régua escolar, trena e fita métrica. A partir de então, passamos a mostrar como manusear os instrumentos de medição e qual o comprimento de um metro, como também o de um centímetro e mais as relações entre metro, centímetro e milímetro.

Neste momento, aproveitamos para ressaltar que, apesar da unidade de comprimento padrão ser o metro, os múltiplos do metro (quilômetro, hectômetro, decâmetro e os submúltiplos decímetro, centímetro e milímetro) também são unidades de medidas usadas de acordo com a conveniência do que se quer medir. Com a finalidade de levar os alunos à prática pedimos que os mesmos medissem o comprimento e a largura das bancadas do laboratório da escola; as medidas encontradas por eles mostraram que as bancadas têm, em média, três metros de comprimento e as larguras em média oitenta e cinco centímetros. Perguntamos, então, se eles fossem medir a espessura da capa do caderno deles, mediriam em quê? Eles responderam: *mediríamos em milímetros, porque mede menos que um centímetro*. Ato contínuo, perguntamos, então, se eles tivessem que medir da cidade de Belém até a cidade de Salinas[3], mediriam em quê? E tivemos como resposta: *mediríamos em quilômetros, pelo fato de ser grande a distância entre as duas cidades, e demoraria muito se fosse medir em metro.*

Nesta fase do processo de estudo, destacamos a experiência dos alunos que trabalham na construção civil, em marcenaria, com costura e com extensão de rede telefônica, esses, mostraram ter habilidades com medidas de comprimento em centímetros e metros. Essa habilidade nos leva a destacar a importância dos saberes prévios dos alunos ao relacioná-los com os conhecimentos matemáticos trabalhados em sala de aula, uma vez que foram eles que auxiliaram os outros no processo de estudo colaborativo proporcionado pela comunidade de estudo, assumindo o papel de matemático, pois para Chevallard (2001), uma pessoa assume o papel de matemático todas as vezes que ajuda outras pessoas a solucionar problemas que necessitam de conhecimentos matemáticos.

A dificuldade – unidade de medida – surgido no início desta atividade proporcionou a movimentação de saberes matemáticos como: adição; o comprimento de um metro; o comprimento de um centímetro; as relações entre metro, centímetro e milímetro; múltiplos e submúltiplos do metro. Esta articulação feita pelos alunos entre esses saberes matemáticos, demonstra um fazer matemático na busca pela construção do conceito de semelhança entre figuras poligonais.

[3] Salinas é uma cidade litorânea do estado do Pará.

4º dia de aula:

Após os alunos terem a leitura de centímetro, milímetro e de metro, distribuímos a atividade a cada grupo, sendo solicitado que cada grupo medisse o mapa do Brasil nos extremos norte (Monte Caburaí) e sul (Arroio Chuí), oeste (Serra da Contamana) e leste (Ponta do Seixas), de forma que medissem o comprimento dessas extensões no desenho, e, usando a escala em que o mapa se encontrava, calculassem a medida de comprimento real entre esses pontos. Pedimos que, ao efetuarem as medições, fizessem as devidas anotações para, posteriormente, serem socializadas entre os grupos.

Então, passamos a interagir com cada grupo para observar como estavam desenvolvendo a atividade. Uns grupos estavam tentando resolver a partir da soma e outros a partir da multiplicação. Nesse momento, procuramos não interferir no desenvolvimento do raciocínio dos mesmos, e tivemos somente a preocupação de saber se alguém estava tendo dificuldades para interpretar a escala na qual o mapa se encontrava. Porém, todos demonstraram segurança ao fazerem a interpretação da razão da escala corretamente.

A seguir perguntamos como procederam para encontrar a medida entre os extremos: uns grupos responderam: *encontramos o valor real verificando quantos centímetros e quantos milímetros havia entre dois extremos, olhamos na escala quantos quilômetros correspondiam a um centímetro e quantos quilômetros correspondiam a um milímetro, e então somamos os quilômetros correspondentes*. Outros grupos disseram que, para encontrar a medida real entre os extremos, verificaram *quantos centímetros e milímetros existiam entre os pontos extremos. Em seguida, multiplicaram a medida dos extremos no desenho pelo valor em quilômetros que correspondia a um centímetro na escala*. Nesse momento, perguntamos se algum destes grupos havia usado uma fórmula para encontrar a resposta, e tivemos como resposta *que não*. Então, levando em consideração a maneira como os grupos calcularam, pedimos que tentassem escrever uma fórmula onde eles pudessem usar os dados para chegarem ao resultado encontrado.

O grupo de número três apresentou a fórmula: M = m x E. Então, pedimos para o grupo, explique o que cada letra representava na fórmula e os membros deste grupo disseram que *M é a medida no tamanho real, m é a medida entre os extremos no mapa e que E representava a escala.* O sétimo grupo apresentou a equação $Tr = c_1 + c_2 + c_3 + ...+ c_{17}$. Novamente, pedimos que o grupo explicasse o que cada letra representava, responderam da seguinte maneira: *Tr é o tamanho real entre os extremos; cada c representa um centímetro que corresponde a 260km, que é a escala; só não sabemos como vamos representar os milímetros*.

Perguntamos aos outros grupos se tinham alguma objeção ou se concordavam com os dois grupos; todos responderam que sim. Explanamos que, no primeiro momento dos cálculos, mesmo sem se darem conta, tinham usado uma expressão algébrica, e que ambas as maneiras estavam corretas, entretanto, por uma questão de conveniência, iríamos usar a fórmula do grupo três; e pedimos que todos os grupos calculassem novamente a medida entre os extremos, usando a fórmula M = m x E, e verificassem se daria o mesmo valor do resultado anterior. Em seguida, expuseram como resposta *que deu o mesmo resultado*.

Levando em conta a situação vivida no momento, mostramos a eles que, ao usarem a fórmula M = m x E para solucionar o problema, havia necessidade de se fazer uma análise com relação à escala na qual o mapa se encontrava, pois as escalas eram: 1cm / 250km ; 1cm / 260km etc. E não apenas 250m ou 260km. Logo, se usassem a equação M = m x E e substituíssem, por exemplo, 1/250 no lugar do E, será que o resultado seria o mesmo? O oitavo grupo se manifestou dizendo *se usarmos 1/ 700 no lugar de 700, é claro que o resultado não será o mesmo, 1 / 700 é menor que 700.* Assim, solicitamos que verificassem de que maneira poderiam construir a fórmula com as mesmas variáveis, de tal maneira que fosse possível utilizar a escala na forma de razão. Passados alguns minutos, não tivemos resposta de nenhum grupo. Então, demos como sugestão que trocassem de posição o **M** e o **m**, ou seja, m = M x E, e verificassem se, usando os valores corretos nas variáveis correspondentes, o resultado se alteraria ou não. Alguns alunos se manifestaram dizendo que *o resultado é o mesmo, só que dá mais trabalho porque temos que passar o E para o outro lado da igualdade.* Outros disseram que não conseguiram resolver.

Ao verificarmos junto aos que não conseguiram, percebemos que o problema estava na divisão de um inteiro por uma fração demonstrando mais uma dificuldade para desenvolver o processo de estudo, o que foi facilmente solucionado com uma explicação sobre como se faz a divisão entre frações. Pedimos aos alunos que erraram para refazerem os cálculos, e todos chegaram à resposta certa.

Após termos procurado saber como os alunos procederam para encontrarem os resultados, passamos a fazer as anotações dos dados obtidos pelos grupos. Ao anotarmos os resultados no quadro, percebemos que dois pares de grupos conseguiram as mesmas medidas; os outros três pares divergiram apenas em um milímetro na hora das medições, o que consideramos irrelevante para o processo de estudo, pois não era nosso objetivo discutir sobre a exatidão de medidas. A síntese com as respostas dos grupos são apresentadas no Quadro 3.

Quadro 3: Resposta dos grupos

Primeiro grupo E = 1 cm/ 250 km	Norte a sul medida no tamanho real 4400km Leste a oeste medida no tamanho real 4325km
Segundo grupo E = 1 cm/ 260 km	Norte a sul medida no tamanho real 4576km Leste a oeste medida no tamanho real 4472km
Terceiro grupo E = 1 cm/ 700 km	Norte a sul medida no tamanho real 4620km Leste a oeste medida no tamanho real 4480km
Quarto grupo E = 1 cm/ 480 km	Norte a sul medida no tamanho real 4464km Leste a oeste medida no tamanho real 4416km
Quinto grupo E = 1 cm/ 360 km	Norte a sul medida no tamanho real 4572km Leste a oeste medida no tamanho real 4464km
Sexto grupo E = 1 cm/ 250 km	Norte a sul medida no tamanho real 4425km Leste a oeste medida no tamanho real 4325km
Sétimo grupo E = 1 cm/ 260 km	Norte a sul medida no tamanho real 4576km Leste a oeste medida no tamanho real 4472km
Oitavo grupo E = 1 cm/ 700 km	Norte a sul medida no tamanho real 4550km Leste a oeste medida no tamanho real 4480km
Nono grupo E = 1 cm/ 480 km	Norte a sul medida no tamanho real 4464km leste a oeste medida no tamanho real 4368km
Décimo grupo E = 1 cm/ 360 km	Norte a Sul medida no tamanho real 4572km Leste a oeste medida no tamanho real 4464km

Fonte: Elaborado pelo autor com base nos dados da pesquisa de campo, 2007

Levando em consideração que a atividade estava pronta, perguntamos se eles achavam que o mapa do Brasil no desenho era semelhante à extensão territorial do Brasil. Várias respostas foram dadas, porém, com o mesmo sentido, segundo a opinião deles transcrita a seguir: *professor tudo indica que sim, porque o mapa representa o território brasileiro, mas é difícil conseguir enxergar esta semelhança*.

Preferimos deixar que os alunos construíssem e identificassem o conceito de semelhança por meio da proporcionalidade entre os segmentos correspondentes das figuras nas próximas atividades, pois nesta atividade o objetivo era familiarizá-los com o uso de escala, o que, em nossa avaliação, os grupos mostraram ter alcançado.

Nesse episódio, no momento que os alunos constroem o modelo matemático para resolução do problema, fazendo uma articulação integrada de saberes e, portanto, um fazer matemático, construindo um modelo – uma fórmula – para encontrar a distância entre os extremos do Brasil, demonstram o desenvolvimento de uma atividade matemática. No processo de estudo conseguiram construir modelos matemáticos e usá-los para darem a resposta do problema.

Nesse caso, segundo Chevallard (2001), podemos dizer que foi formado um processo de estudo – sistema didático – por meio de um problema, que era medir os extremos no mapa, e tomaram a iniciativa de estudar para encontrar a solução do mesmo, de onde inferimos que os alunos dessa comunidade de estudo mostram não estarem na simples condição de receptores, mas construtores do seu conhecimento.

O estudo de fração surgiu nesta fase da atividade, como uma dificuldade que proporcionou a movimentação de saberes matemáticos como: multiplicação de fração, divisão de fração e divisão de um inteiro por uma fração, sendo indispensável a articulação desses saberes para a superação dessa dificuldade.

Os alunos ao construírem o modelo matemático para a resolução do problema, movimentaram saberes matemáticos que caracterizam um fazer matemático – estudar Matemática: medida de comprimento; soma; multiplicação; múltiplos e submúltiplos do metro; expressões algébricas; proporção e operações com frações, são saberes que se articulam no processo de estudo para a construção do conceito de semelhança entre figuras poligonais.

5.3 3ª ATIVIDADE

5º dia de aula:

Como trabalhar escala tinha o objetivo de mostrar a proporcionalidade entre os segmentos das figuras poligonais semelhantes, e, consecutivamente, levar os alunos a construírem o conceito de semelhança, recorremos a uma atividade significativa com escala usando uma planta de projeto de uma casa (Figura 15).

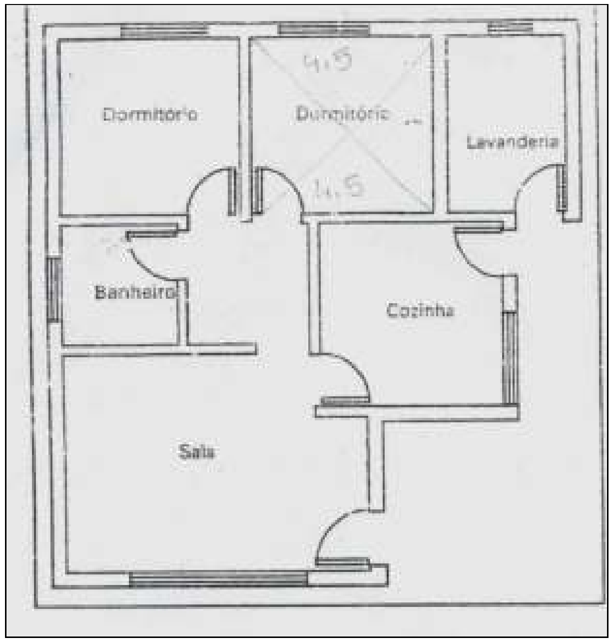


Figura 15: Planta baixa
Fonte: Elaborado pelo autor, 2007
Escala: 1cm – 100cm

Pedimos que medissem o comprimento e a largura interna de cada compartimento no desenho e, usando a escala do projeto, calculassem o comprimento e a largura interna de cada compartimento da casa. Os cálculos realizados por um grupo estão expostos na Figura 16.

	Medida no projeto	Medida real na construção
Sala	3,9 cm x 5,4cm	3,90 m x 5,40 m
Cozinha	3,3 cm x 3,30m	3,30 m x 3,30 m
Banheiro	2,2 cm x 2,1cm	2,20 m x 2,10 m
Dormitório 1	3,2cm x 3,2cm,	3,20m x 3,20m
Dormitório 2	3,2cm x 3,2cm	3,20 m x 3,20 m
Lavanderia	3,2cm x 2,1cm	3,20 x 210m

Equipe 04

Figura 16: Respostas dos alunos
Fonte: Elaborado pelo autor, 2007

Ao desenvolverem esta atividade, os grupos não demonstraram dificuldades para interpretar o problema. Fizeram todas as medições de maneira correta, o que mostra que, na atividade anterior foram assimilados, os conceitos relativos à medida de comprimento e à escala.

Questionados qual o procedimento usado para encontrarem as dimensões reais de cada compartimento da casa. Tivemos como resposta, que uns grupos usaram a fórmula m = M x E, outros M = m x E, e houve quem usasse as duas fórmulas, sob a alegação de que procederam assim para exercitar. Os grupos que usaram a equação m = M x E fizeram a seguinte explanação: *usamos a equação m = M x E, pegamos E = 1/ 100 que é a razão de proporcionalidade e passamos para o outro lado da igualdade, multiplicando a quantidade de centímetros e milímetros de cada dimensão no projeto pelo inverso de E. O resultado é o tamanho real de cada dimensão da casa.*

Os grupos que fizeram uso da fórmula M = m x E, disseram: *nós usamos o inverso da razão de semelhança, ou seja, E = 100, daí multiplicamos direto pela quantidade de centímetros e milímetros do comprimento e da largura de cada compartimento do projeto. Assim, conseguimos chegar ao tamanho real de cada compartimento.*

Os grupos que utilizaram ambos os modelos, deram as mesmas respostas.

Tendo em vista o conhecimento assimilado pelos alunos ao executarem as tarefas, enfatizamos que, de um modo geral, se temos uma figura e queremos ampliá-la proporcionalmente em todas as suas dimensões, basta multiplicarmos todos os segmentos que a constituem pelo mesmo fator. Nesse momento, um aluno do sétimo grupo fez a seguinte colocação: *professor, então é isso que acontece com a fotografia. Eu tenho uma foto pequena de quando eu era criança, que depois foi ampliada. O interessante é que quando comparo a foto pequena com a foto grande percebo que todos os detalhes do meu corpo cresceram, mas não ficaram deformados*. Perguntamos, então, se as duas fotos representavam a mesma imagem, e ele respondeu que sim, porém uma era maior e a outra menor.

No instante seguinte, perguntamos à turma se achava que, no caso dessas duas fotos, as imagens eram semelhantes, sete grupos responderam que sim. Então, alguns alunos se manifestaram dizendo: *professor, sendo assim, os compartimentos do desenho no projeto da casa e os compartimentos da casa no tamanho real, são semelhantes*. Indagamos sobre como eles haviam chegado a esta conclusão, e eles responderam: *ora, se todas as medidas cresceram na mesma* *proporção, é como se tivessem esticado na mesma proporção, tanto no comprimento como na largura, e continuam com a mesma forma; então, todas as medidas cresceram na mesma proporção, que é o que aconteceu com a foto. Se a foto ampliada é semelhante à reduzida, então, o desenho do projeto da casa e a casa no tamanho real, também são.*

Neste episódio, em que os alunos conseguem, a partir da ampliação e da redução da foto, fazer a relação com as medidas do projeto e as medidas da casa no tamanho real, identificando a semelhança entre os compartimentos da casa no projeto e os compartimentos da casa no tamanho real, está caracterizado que estão estudando Matemática, já que conseguem perceber que, ao multiplicarem os segmentos do projeto pelo mesmo fator multiplicativo (o inverso da razão de proporcionalidade), estão ampliando o desenho do projeto em todas as dimensões, criando uma figura semelhante à primeira.

Esta análise corrobora com a teoria de Chevallard (2001), pois estes alunos demonstram estarem estudando Matemática, uma vez que, para chegarem a esta conclusão, formaram um sistema didático, onde, através da proporcionalidade, eles conseguem perceber a semelhança entre as figuras. Entendemos que a atividade desenvolvida pelos alunos vai ao encontro da teoria de Chevallard, ou seja, demonstram estar fazendo Matemática para construir o conceito de semelhança entre figuras planas pela forma e pela proporcionalidade; dizemos que estão fazendo Matemática pelo fato de utilizarem o modelo matemático (M = m x E ou m = M x E) construído na atividade anterior e ratificado pelas palavras de Chevallard (2001) quando diz: ‘’O primeiro grande tipo de atividade matemática consiste em resolver problemas a partir das ferramentas matemáticas que já conhecemos e sabemos utilizar’’.

Os alunos ao formarem um sistema didático para solucionar a problemática da terceira atividade, movimentaram saberes matemáticos construídos em atividades anteriores como: medida de comprimento, escala e o modelo m = M x E ou M = m x E. E mais, a partir da relação percebida na ampliação e redução da foto, concluíram que as dependências do projeto e as dependências da casa eram semelhantes. Esta conclusão nos leva a ressaltar a importância de situações matemáticas que ocorrem fora da escola, e que podem ser usados como saberes prévios, para serem relacionadas com os conhecimentos matemáticos trabalhados em sala de aula.

5.4 4ª ATIVIDADE

6º dia de aula:

Dando continuidade ao trabalho com escala, propusemos outra atividade, na qual os alunos teriam que, a partir do projeto da planta de uma casa (Figura 17), identificar a razão de proporcionalidade – que passamos a chamar de K – entre os segmentos correspondentes (comprimento e largura) dos compartimentos da casa no projeto e dos compartimentos da casa no tamanho real, e mais: determinar as medidas reais de cada compartimento da casa, sendo que a única informação que consta na planta do projeto é a medida no tamanho real de uma dimensão de um compartimento da casa.

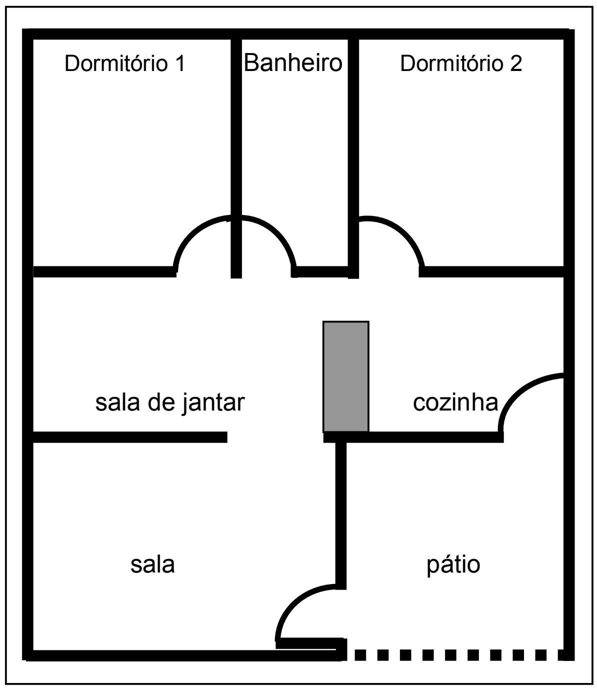


Figura 17: Planta baixa
Fonte: Elaborado pelo autor, 2007

Obs: a largura do banheiro é igual a 1,54 m (1m e 54cm ou 154cm).

Nesta atividade, os alunos demonstraram dificuldade que julgamos ser de interpretação do problema, pois possuíam conhecimentos construídos nas atividades anteriores, como a fórmula m = M x E e medida de comprimento que poderiam ser usados para chegarem à solução.

No processo de resolução do problema, o sétimo grupo nos chamou e fez a seguinte pergunta: *professor, nós podemos usar a fórmula que usamos na* *atividade anterior para resolver o problema*? Perguntamos: de que maneira utilizariam a fórmula? Eles responderam: *professor, no caso anterior, nós tínhamos a razão de proporcionalidade e medimos o comprimento e a largura no projeto. Quando multiplicamos esses valores pelo inverso da razão, encontramos a medida real do comprimento e da largura. Agora temos o tamanho real de uma medida e podemos medir no projeto qual o tamanho desse segmento. Ai é só jogar na fórmula m = M x K, quando dividirmos m por M acharemos qual é a razão de proporcionalidade entre esses dois segmentos. Nós só temos uma duvida: é se esta razão que nós vamos encontrar serve para todas as medidas do projeto.*

Dissemos a eles que deveriam primeiro achar a razão para esta dimensão do banheiro entre o projeto e o tamanho real, e aplicar para as demais medidas. Depois, voltaríamos para perguntar se a razão era válida para todos os segmentos ou não. Após a sugestão deste grupo, pedimos que os demais seguissem esta sugestão e verificassem se a razão entre os segmentos representava a escala, na qual o projeto se encontrava.

A seguir, perguntamos qual valor de K tinha sido encontrado e se a razão encontrada serviu para todas as dimensões. Todos os grupos encontraram K = 1 / 110, e responderam que serviu. Contudo, os grupos apresentaram notações diferentes para K, como segue no quadro-síntese abaixo.

Quadro 4: Resposta dos grupos

Primeiro grupo	**m = M x K → 1,4 = 1,54 x K → K = 1cm / 1,1m**
Segundo grupo	**m = M x K → 1,4 = 154 x K → K = 1 cm/ 110cm**
Terceiro grupo	**m = M x K → 1,4 = 1,54 x K → K = 1cm / 1,1m**
Quarto grupo	**m = m x K → 154 = 1,4 x K → K = 110cm / 1cm**
Quinto grupo	**m = M x K → 1,4 = 154 x K → K = 1cm / 110cm**
Sexto grupo	**m = M x K → 1,4 = 154 x K → K = 1cm / 110cm**
Sétimo grupo	**m = m x K → 1,54 = 1,4 x K → K = 1,1m / 1cm**
Oitavo grupo	**m = M x K → 1,4 = 154 x K → K = 1cm / 110cm**
Nono grupo	**m = m x K → 1,54 = 1,4 x K → K = 1,1m / 1cm**
Décimo grupo	**m = M x K → 1,4 = 154 x K → K = 1cm / 110cm**

Fonte: Elaborado pelo autor com base nos dados da pesquisa de campo, 2007

Enfatizamos que os valores encontrados representavam a mesma escala, ou seja, eles estavam dizendo que o comprimento de 1cm no projeto corresponde a

110cm no tamanho real, ou 1,1m no tamanho real corresponde a 1cm no projeto. Entretanto, como o que eles tinham no primeiro momento era o projeto, seria interessante que eles enxergassem K = 1/ 110, ou seja, 1cm no projeto corresponde a 110cm no tamanho real.

Perguntamos como podiam afirmar que a razão serviu para todas as dimensões, responderam com a seguinte afirmação: *professor, a partir do momento que nós encontramos a razão (K), foi só pegar a fórmula m = M x K, e fazer o que fizemos na questão anterior, ou seja, multiplicar a medida de cada dimensão do projeto por 110. Nos dois problemas anteriores a gente multiplicou cada medida que encontramos nos desenhos pelo valor correspondente a 1 cm no tamanho real. Agora, foi do mesmo jeito, pegamos cada medida do projeto e multiplicamos pelo valor correspondente a 1 cm que encontramos, ou seja 110 cm.*

Um aluno fez o seguinte questionamento: *professor, eu posso dizer o seguinte: se eu tiver a medida no tamanho real e multiplicar por K, eu encontro o comprimento da medida no projeto, e se eu tenho o tamanho da medida no projeto e multiplico pelo inverso de K, eu encontro a medida no tamanho real?*

Concordamos com o exposto pelo aluno, porém, ressaltamos a importância de observar as unidades de medidas nas quais a escala se encontra, para que, se necessário, sejam feitas as transformações de unidades de maneira correta, pois, dependendo da escala, talvez seja mais conveniente fazer a transformação de unidade.

O episódio acima caracteriza uma atividade matemática dos alunos, já que mostram estarem estudando Matemática, como também fazendo Matemática, pois, para Chevallard (2001), se pessoas, por exemplo, de uma comunidade de estudo formam um processo didático frente a determinado objeto matemático para encontrar a solução da problemática, podemos dizer que esta atitude caracteriza que estão estudando Matemática. Este conceito de “estudar”, interpretado por Chevallard, confirma nossas reflexões a respeito do trabalho desenvolvido pelos alunos neste momento da atividade, já que, não tinham como nas outras atividades, o valor da constante de proporcionalidade; porém, através do estudo foi possível encontrar o valor de k e, a partir daí, encontrar as demais soluções para o problema. Já o fazer matemático, nesta atividade matemática, se dá pelo fato dos alunos estarem utilizando o modelo matemático construído por eles através do estudo na segunda atividade. De acordo com Chevallard (2001) uma maneira de “fazer

Matemática" é usar o modelo matemático que já conhecemos e sabemos utilizar para a solução de um problema, foi o que ocorreu com os alunos no momento em que utilizaram o modelo m = M x k ou M = m x k para encontrar o valor de k.

7º dia de aula:

Dando continuidade à atividade, pedimos que se dirigissem à quadra de esportes da escola para desenharem em tamanho real – à escolha do grupo – um dos cômodos da casa que estava no projeto.

À medida que os grupos iam terminando a tarefa, conferíamos as medidas do cômodo desenhado. Solicitamos a cada grupo que verificasse qual o comprimento de uma diagonal do cômodo desenhado. Esta solicitação fez surgir uma dificuldade, que foi superada com uma explanação a respeito da definição de diagonal de figuras poligonais. Perguntamos então a cada grupo se o desenho feito por eles na quadra era semelhante ao desenho do projeto, porém, pedimos que os grupos analisassem a pergunta e dessem a resposta ao voltarmos à sala. Todos os grupos optaram por desenhar o dormitório 1 ou o dormitório 2.

Quando retornamos à sala de aula, solicitamos o posicionamento dos grupos referente à semelhança entre o desenho da quadra e do projeto. A maioria dos alunos respondeu que os desenhos eram semelhantes, pois o que eles tinham desenhado na quadra, apesar de ser maior que o desenho do projeto, representava o mesmo desenho, só que ampliado proporcionalmente para todas as dimensões. Já a minoria, respondeu: as figuras podem ser semelhantes, mas os desenhos na quadra são maiores. Esta expressão "maior" nos permitiu a seguinte pergunta: *vocês acham que o fato de uma figura ser maior e outra menor impede que elas sejam semelhantes?* Os alunos que disseram que as figuras eram semelhantes responderam da seguinte forma*: professor, nós anotamos que o senhor falou aqui, na sala de aula, que objetos de tamanhos diferentes podem ser semelhantes, e o senhor usou como exemplo as três bolas de tamanhos diferentes e os dois quadrados; então, duas figuras com tamanhos diferentes podem ser semelhantes sim.*

Ratificamos dizendo que o fato de duas figuras poligonais terem tamanhos diferentes, não impede que elas sejam semelhantes; todavia, para que elas sejam semelhantes é necessário considerar alguns critérios, como: as figuras têm que ter a mesma forma, a proporcionalidade entre os segmentos correspondentes das duas figuras tem que ser a mesma e que os ângulos correspondentes sejam iguais. No caso de dois quadrados com tamanhos diferentes, podemos dizer que são sempre semelhantes, pois a proporcionalidade que existe entre um par qualquer de lados é a mesma para quaisquer pares de lados dos dois quadrados, e como foi concluído na primeira questão um quadrado possui todos os ângulos de 90°.

Já no desenho, por exemplo, de retângulos, que foi feito na quadra, existe mais de um segmento a ser analisado. Neste caso, é necessário que exista uma única razão de proporcionalidade entre os segmentos correspondentes das bases e das alturas entre os dois retângulos para garantir a semelhança.

Pedimos novamente que refletissem sobre a semelhança dos desenhos. Após discussão interna nos grupos, tivemos como resposta de todos os grupos que o desenho feito por eles na quadra e o desenho do projeto eram semelhantes, pois representavam o mesmo compartimento, sendo que o desenho da quadra era maior porque havia crescido proporcionalmente no comprimento e na largura.

Ainda colocamos a eles o seguinte questionamento: *Existe um segmento no desenho feito por vocês que poucos deram importância, que é a diagonal. Pensem comigo: será que esse segmento nos ajudaria a tornar mais evidente a semelhança entre o retângulo do projeto e o retângulo desenhado na quadra?* Alguns alunos responderam *que sim*. Perguntamos, uma vez mais*: de que forma vocês podem demonstrar o que estão falando?* E eles nos deram a seguinte resposta: *professor, se o comprimento e a largura crescem ou diminuem proporcionalmente, então ocorre o mesmo com as diagonais.* Questionamos como poderiam justificar o que afirmavam, e eles disseram: *é só pegar a medida da diagonal do desenho feito na quadra e multiplicar pela razão de proporcionalidade, e comparar o resultado com o tamanho da diagonal do mesmo compartimento no projeto. Se o resultado for igual ao tamanho da diagonal do projeto, então os desenhos são realmente semelhantes, ou, se quando dividir a diagonal pequena pela razão de proporcionalidade encontrar a diagonal grande, não haverá duvidas entre a semelhança dessas figuras*.

Sugerimos que eles fizessem essa verificação. Em poucos minutos os grupos responderam que quando multiplicaram o valor do comprimento da diagonal do desenho feito na quadra por K, encontraram exatamente o tamanho da diagonal no compartimento do projeto, e quando dividiram a diagonal do compartimento do projeto por K encontraram o valor da diagonal do desenho na quadra. Perguntamos se alguém discordava ou se havia alguma dúvida. Os alunos responderam que *estava clara a semelhança pela forma e pela proporcionalidade entre essas duas figuras*.

Neste episódio, os alunos demonstram estarem exercendo uma atividade matemática, que é caracterizada pelo processo de estudo que se estabeleceu ao refletirem sobre a semelhança entre o desenho do projeto e o desenho na quadra. Para definirem a semelhança entre os retângulos (projeto, quadra) movimentaram saberes como: medida de comprimento, proporcionalidade e o modelo m = M x E como também fizeram uso da diagonal. A dificuldade – identificação da diagonal – que surgiu nesta fase do trabalho nos mostra a falta de conhecimentos geométricos dos alunos, que caso não tivesse sido superada, poderia dificultar a aprendizagem decorrente do processo de estudo realizado neste episódio. Esta reflexão vai ao encontro das palavras de Chevallard quando diz:

> Devemos considerar que os processos de ensino e aprendizagem da Matemática são aspectos específicos do processo de estudo da Matemática, entendendo a palavra ''estudo'' em um sentido mais amplo, que engloba tanto o trabalho matemático do aluno como o do matemático profissional, que também ''estuda'' problemas de Matemática (CHEVALLARD, 2001, p. 46, grifos do autor).

Esses saberes matemáticos que são articulados no decorrer do processo de estudo, caracterizam um fazer matemático dos alunos na construção do conceito de semelhança entre figuras poligonais.

8º dia de aula:

Mediante o exposto no episódio acima, consideramos que os alunos demonstram ter assimilado, mesmo que de forma embrionária, o conceito de semelhança de figuras planas pela forma e pela proporcionalidade. A fim de comprovarmos esta hipótese, solicitamos que desenhassem pares de figuras planas semelhantes pela forma e pela proporcionalidade. Para esta atividade, não consideramos os rigores nos desenhos, haja vista que a maioria dos alunos não possuía a proficiência para desenhar. Portanto, o objetivo desta atividade era percebermos até que ponto os membros dos grupos tinham apreendido os conceitos de semelhança, pela forma e pela proporcionalidade.

Em seguida fomos procurados por uma aluna que, até então, não se mostrara muito interessada pelos trabalhos. Esta trouxe o seu caderno com dois triângulos, com os lados proporcionais; ela queria saber se os desenhos que haviam sido construídos por ela eram semelhantes. Optamos por não responder e perguntamos o que ela achava e por quê? *Ela respondeu que achava que os triângulos eram semelhantes porque tinham a mesma forma e os segmentos eram proporcionais*. Questionamos como ela podia provar que os lados dos triângulos eram proporcionais, e ela nos respondeu que *os lados do triângulo pequeno mediam 3cm, 5cm e 7cm; já cada lado do triângulo maior media 6cm, 10cm e 14cm; cada lado do triângulo maior era 2 vezes maior que o lado do triângulo menor, logo cada 1cm do lado do triângulo pequeno corresponde a 2cm do lado do triângulo maior. Então, a razão de proporcionalidade entre os lados dos triângulos era 1cm/2cm.*

Concordamos com a aluna, dizendo que ela havia construído duas figuras semelhantes. Ao voltar para o seu grupo e discutir o assunto com seus colegas, a mesma passou a colaborar com os que não tinham concluído a tarefa. Ao encerrarmos esta atividade, a aluna, comentou: *eu nunca tinha entendido uma aula de Matemática como eu entendi esta*; *essa foi a melhor aula de Matemática que eu já tive*. Os demais alunos criaram diferentes pares de figuras semelhantes. Segue abaixo o desenho do 4º grupo (Figura 18).

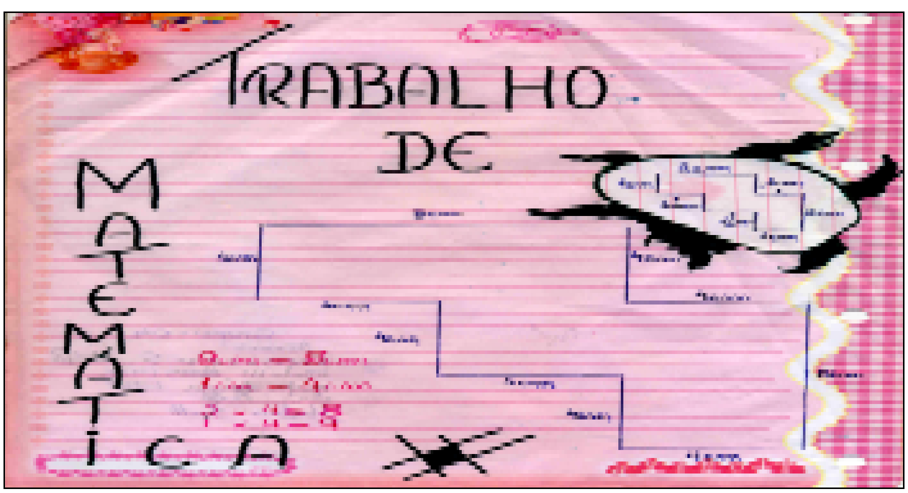


Figura 18: Praxeologia dos alunos
Fonte: Elaborado pelo autor com base nos dados da pesquisa de campo, 2007

Neste episódio, podemos concluir, à luz da teoria de Chevallard (2001), que os alunos estão fazendo Matemática ao utilizarem o modelo matemático de figuras poligonais semelhantes pela forma e pela proporcionalidade, construído por eles, através do estudo de semelhança entre retângulos, como é o caso da aluna que desenhou os triângulos e o 4ª grupo que fez o desenho acima. Para Chevallard, uma das formas de fazer Matemática é utilizar com regularidade um modelo matemático em situações distintas. Neste episódio destaca-se também, a interação da aluna – que nos mostrou os triângulos – com seus colegas, pois isto mostra a relevância do estudo colaborativo como um agente facilitador do processo de estudo que ocorreu na comunidade de estudo.

No final da aula, fomos procurados por um grupo, que nos falou: *professor, nós não conseguimos fazer na quadra um desenho semelhante ao compartimento do projeto.* Perguntamos por que e eles responderam: *professor, quando nós multiplicamos a diagonal do desenho da quadra por 1 / 110 não deu a medida da diagonal do desenho do projeto; então, as figuras não são semelhantes.* Solicitamos que eles fossem até à quadra e medissem novamente a diagonal do desenho que tinham feito, em seguida confirmaram o que nós suspeitávamos, dizendo: *professor, nós erramos na hora de anotar o valor da medida da diagonal do desenho na quadra, pegamos agora o valor da medida certa e multiplicamos por K. As figuras são semelhantes sim.*

Neste episódio, podemos concluir, à luz da teoria de Chevallard (2001), que este grupo está assumindo a responsabilidade pelos erros e acertos de sua produção matemática, uma vez que para nós, ficou claro que o grupo havia assimilado o modelo de semelhança pela forma e pela proporcionalidade, pois, no momento em que multiplicaram a diagonal do desenho da quadra por 1 / 110, está implícito, na fala do grupo, que esperava como resposta a medida da diagonal do desenho do projeto para que as figuras fossem semelhantes. Chevallard propõe que, ao se formar um sistema didático, os estudantes desse processo de estudo assumam a responsabilidade pelas respostas encontradas, dessa forma, não deixando somente para o professor toda a responsabilidade do processo de aprendizagem matemática do aluno. A respeito da responsabilidade do aluno no processo de aprendizagem matemática Chevallard afirma que:

> Em síntese, o aluno realiza um trabalho que ninguém considera nem exige que seja um verdadeiro trabalho matemático; trata-se de um trabalho visto como auxiliar da aprendizagem escolar, concentrado na sala de aula e absolutamente dependente de um professor, ao qual se pede que haja como matemático somente para satisfazer

> necessidades de origem didática (CHEVALLARD, 2001, p. 82, grifos do autor).

Acreditamos que o grupo assumiu a responsabilidade por seu erro matemático, por ter consciência que estava articulando os saberes matemáticos – medida de comprimento e o modelo m = M x E – necessários e suficientes para a resolução da problemática, os quais tinham sido assimilados na primeira, na segunda e na terceira atividade.

5.5 5ª ATIVIDADE

9º dia de aula:

Para esta atividade, solicitamos aos grupos que desenhassem o projeto da planta da casa que cada grupo gostaria de construir, sendo que o grupo optaria pelo valor da escala a ser usada no projeto. A partir do projeto pronto, os grupos deveriam calcular aproximadamente quantos m^2 de lajota seriam usados para o piso de cada cômodo da casa e também para as paredes da cozinha até a altura de 2m, qual a área de cada cômodo do projeto e qual a relação existente entre cada área do projeto e cada área da casa. O objetivo matemático desta atividade era de proporcionar aos alunos a identificação da relação existente entre áreas de figuras semelhantes, como também o cálculo de área. Nesta atividade, nossas análises estarão focadas em dois momentos: no cálculo de área e na relação existente entre áreas de retângulos semelhantes.

Após discussão interna, os grupos passaram a fazer o projeto da planta da casa. Segue, abaixo, o projeto de alguns grupos (Figuras 19 e 20).

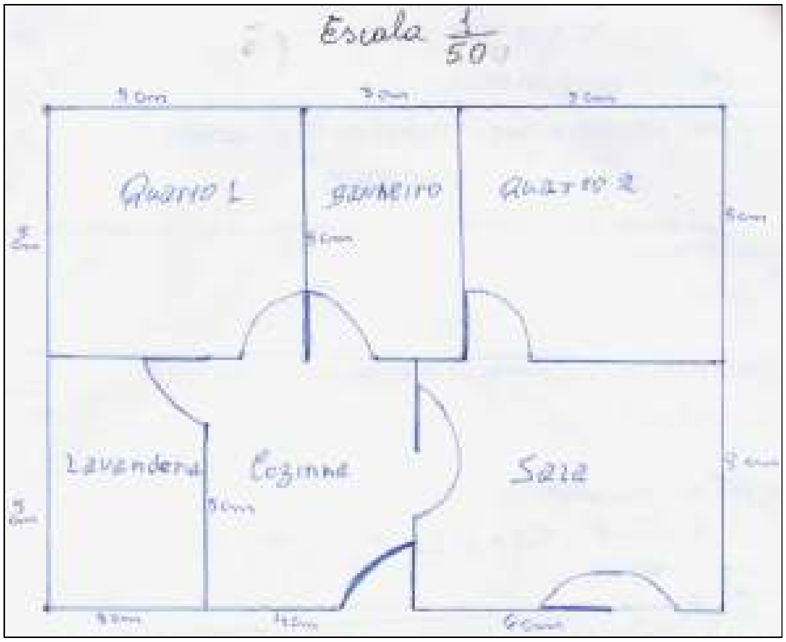


Figura 19: Praxeologia dos alunos
Fonte: Elaborado pelo autor com base nos dados da pesquisa de campo, 2007

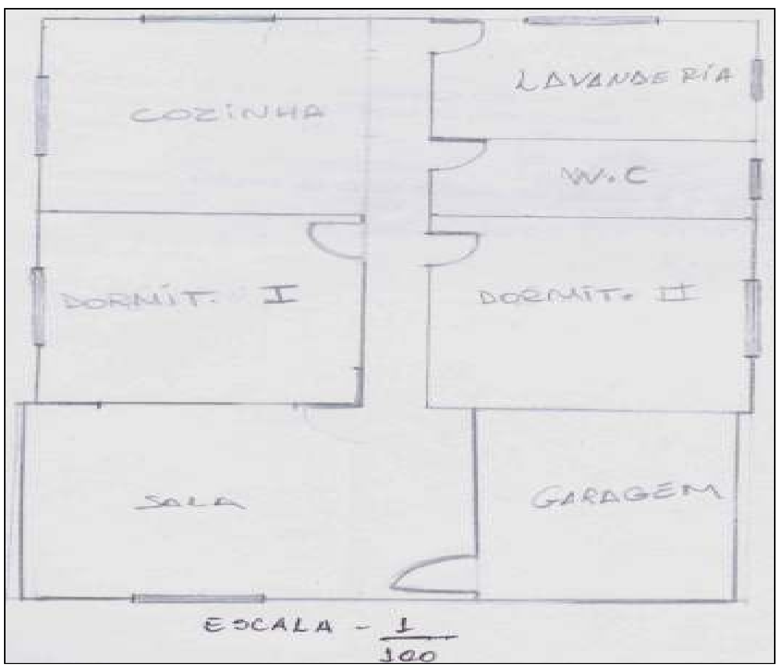


Figura 20: Praxeologia dos alunos
Fonte: Elaborado pelo autor com base nos dados da pesquisa de campo, 2007

10º dia de aula:

No cálculo de área os grupos tiveram dificuldade para encontrar a solução do problema, que era calcular quantos m^2 de lajota seriam necessários, pois revelaram que não sabiam como proceder para calcular o m^2. Para a superação desta dificuldade recorremos ao objeto matemático unidade de medida, explanando que m^2 é uma das unidades usadas para medir área; logo, calcular m^2 é calcular a área de uma figura plana. Perguntamos se eles sabiam calcular, por exemplo, a área de um retângulo e tivemos "não" como resposta. Ainda com o objetivo de superar o problema recorremos a uma abordagem sobre o cálculo de área.

Chamamos a atenção dos alunos para o sentido da palavra área, e a relacionamos ao lugar que uma figura plana ocupa num plano; pedimos que tirassem uma folha do caderno e a colocassem sobre a mesa e observassem o lugar ocupado pela folha, pois este corresponderia à área da folha; o lugar ocupado por uma lajota no piso, por exemplo, da sala é uma área; o lugar ocupado pela quadra poliesportiva no terreno da escola é uma área; o lugar que uma casa ocupa no terreno em que ela está construída é uma área, assim como o terreno onde a casa está localizada também é uma área.

Neste momento, o nono grupo se manifestou dizendo: *professor, nesse caso da folha de papel, a área vai ser medida em m^2 ou em cm^2?* Perguntamos, então: se vocês forem medir a área desta folha de papel, na opinião do grupo qual seria a unidade de medida mais conveniente para calcular está área e por quê? Tivemos como resposta: *professor achamos que a unidade de medida é cm^2, porque a folha mede menos que um metro e mais que um milímetro tanto no comprimento como na largura; então não tem como essa área medir um m^2 ou mais, a não ser que a gente pegue os dois comprimentos e as duas larguras, um seguido do outro e meça, mas ai perde o sentido de área que o senhor estava falando, porque vai ficar uma linha reta*.

Mediante o exposto ratificamos o posicionamento do grupo e passamos a tratar a respeito de como calcular o valor numérico da área de uma figura poligonal; perguntamos qual dos alunos sabia o valor aproximadamente das medidas (comprimento e largura) do terreno em que se encontra construída a sua casa. Uma aluna do 2º grupo se manifestou dizendo que o seu terreno media 5m de largura e 15m de comprimento. Passamos a trabalhar com essas dimensões. Considerando que a forma do terreno era retangular, fizemos o desenho do terreno no quadro e o dividimos em quadrados unitários de um $1m^2$ de área.

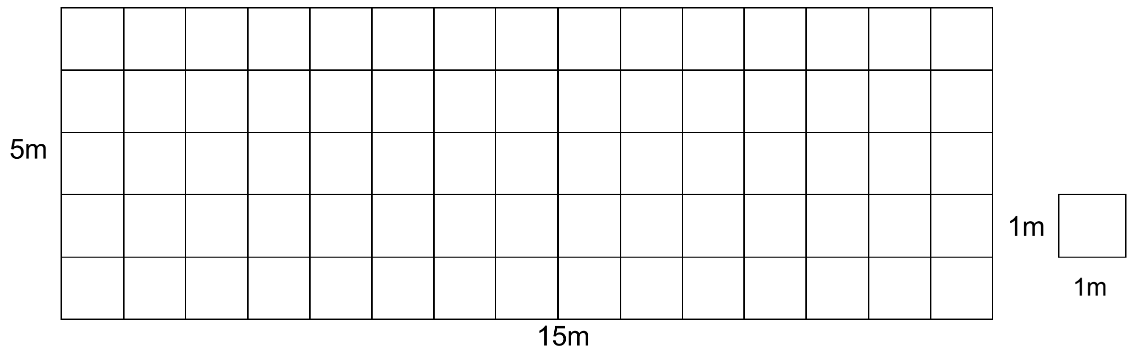
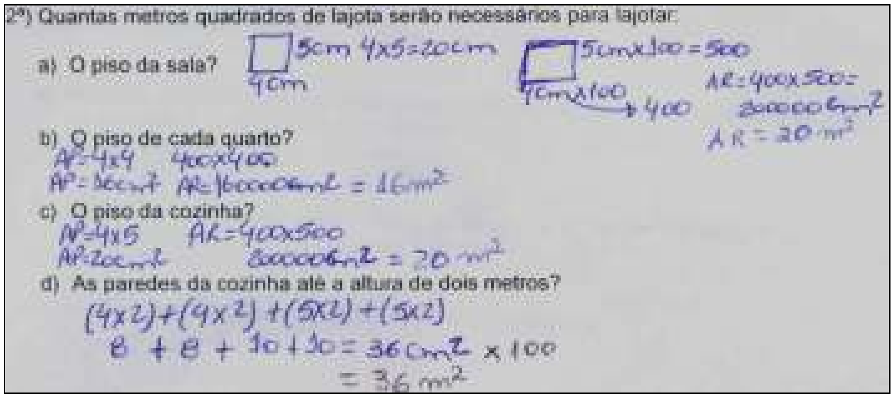


Figura 21: Fracionamento de área
Fonte: Elaborado pelo autor, 2007

Então, perguntamos quantos quadrados de $1m^2$ existiam dentro do retângulo, ao que todos os grupos responderam: *há setenta e cinco quadrados de $1m^2$ dentro do retângulo*. O sétimo grupo se manifestou dizendo: *professor, então, a área do terreno da colega é $75m^2$, porque cabem setenta e cinco quadrados de um m^2 de área dentro do terreno.* Logo em seguida o grupo de número três se pronunciou dizendo: *se é assim, para calcular a área de uma figura não precisa conferir quantos quadrados de lado unitários cabem dentro da figura, basta procurar quantos quadrados cabem no comprimento e quantos cabem na largura e multiplicar a quantidade no comprimento pela quantidade na largura, como neste caso 15m x 5m = $75m^2$.*

Mediante a colocação do grupo nos posicionamos, dizendo que, se a figura for um quadrado ou um retângulo eles podem calcular a área usando esse modelo matemático *comprimento vezes largura* ou, se quiserem, base vezes a altura (A = b x h). Todavia, se a figura for, por exemplo, um triângulo, um trapézio, um losango ou outra figura que não seja quadrado ou retângulo, este modelo matemático não pode ser usado. Entretanto, para encontrarmos o valor aproximado da área de uma figura qualquer, podemos, sempre, fracioná-la em quadrados ou retângulos, ou em outras figuras que se saiba calcular a área, depois é só somar as áreas contidas na figura maior.

Após esta abordagem a respeito do cálculo de área, os alunos executaram a tarefa. Segue, abaixo, os cálculos de alguns grupos (Figuras 22, 23 e 24).



2ª) Quantas metros quadrados de lajota serão necessários para lajotar:

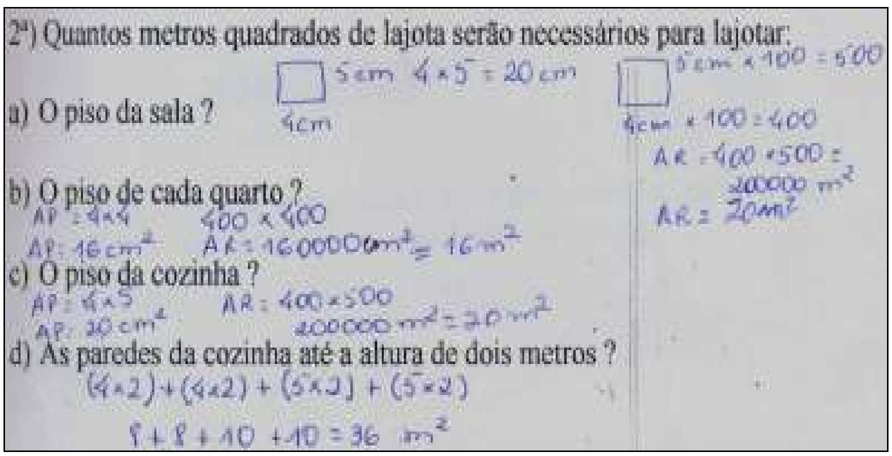
a) O piso da sala? 5cm 4x5=20cm 4cm 5cmx100=500 4cmx100 → 400 AR=400x500= 200000cm² AR=20m²

b) O piso de cada quarto? AP=4x4 400x400 AP=16cm² AR=160000cm² = 16m²

c) O piso da cozinha? AP=4x5 AR=400x500 AP=20cm² 200000cm² = 20m²

d) As paredes da cozinha até a altura de dois metros?
(4x2)+(4x2)+(5x2)+(5x2)
8 + 8 + 10 + 10 = 36cm² x 100
= 36m²

Figura 22: Praxeologia dos alunos
Fonte: Elaborado pelo autor com base nos dados da pesquisa de campo, 2007



2ª) Quantos metros quadrados de lajota serão necessários para lajotar:

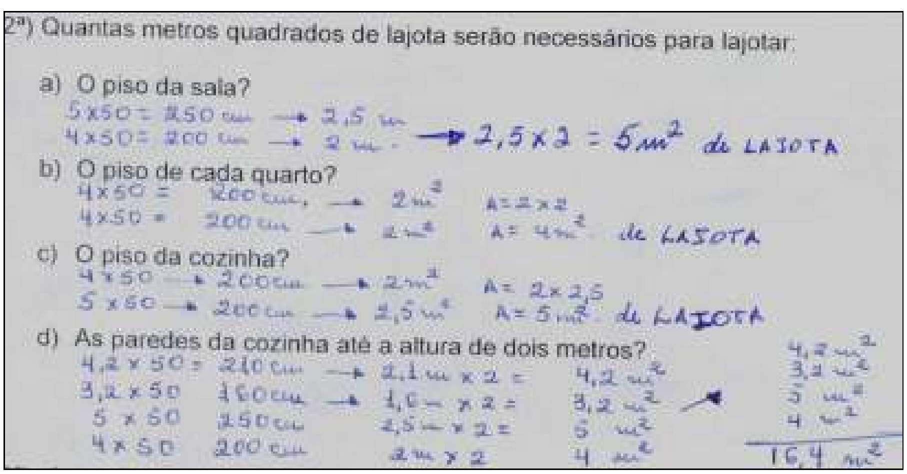
a) O piso da sala ? 5cm 4x5 = 20cm 4cm 5cm x 100 = 500 4cm x 100 = 400 AR = 400 x 500 = 200000 m² AR = 20m²

b) O piso de cada quarto ? AP = 4x4 400 x 400 AP: 16cm² AR = 160000cm² = 16m²

c) O piso da cozinha ? AP = 4x5 AR = 400x500 AP: 20cm² 200000 m² = 20m²

d) As paredes da cozinha até a altura de dois metros ?
(4x2) + (4x2) + (5x2) + (5x2)
8 + 8 + 10 + 10 = 36 m²

Figura 23: Praxeologia dos alunos
Fonte: Elaborado pelo autor com base nos dados da pesquisa de campo, 2007



2ª) Quantas metros quadrados de lajota serão necessários para lajotar:

a) O piso da sala?
5x50 = 250 cm → 2,5 m
4x50 = 200 cm → 2 m → 2,5 x 2 = 5m² de LAJOTA

b) O piso de cada quarto?
4x50 = 200 cm → 2m² A = 2x2
4x50 = 200 cm → 2m² A = 4m² de LAJOTA

c) O piso da cozinha?
4x50 → 200cm → 2m² A = 2x2,5
5x50 → 200cm → 2,5m² A = 5m² de LAJOTA

d) As paredes da cozinha até a altura de dois metros?
4,2 x 50 = 210 cm → 2,1 m x 2 = 4,2 m²
3,2 x 50 160cm → 1,6 m x 2 = 3,2 m²
5 x 50 250cm 2,5 m x 2 = 5 m²
4 x 50 200 cm 2m x 2 4 m²

4,2 m²
3,2 m²
5 m²
4 m²
16,4 m²

Figura 24: Praxeologia dos alunos
Fonte: Elaborado pelo autor com base nos dados da pesquisa de campo, 2007

Neste episódio, segundo o conceito de estudar Matemática da teoria de Chevallard et al. (2001), entendemos que os grupos estão estudando Matemática, uma vez que segundo declaração dos mesmos, não possuíam a noção de espaço que corresponde a uma área, como também não tinham um modelo matemático que pudesse ser usado para fazer os cálculos para encontrar o valor numérico de uma área. Mas, através do processo didático formado a partir da comunidade de estudo que se estabeleceu na turma, os grupos conseguiram construir o modelo matemático "A = comprimento x largura" para resolver o problema das lajotas.

A dificuldade surgida neste episódio permitiu a articulação entre saberes matemáticos tais como: unidade de medida de área, cálculo de área, o espaço correspondente a uma área, o fracionamento de uma área como recurso para encontrar a área total, multiplicação e adição. Esta movimentação desses saberes matemáticos desenvolvidos pelos alunos, caracteriza-se como uma atividade matemática – estudar Matemática – para a construção do modelo A = b x h, para ser usada na resolução do problema.

A seguir, passamos a fazer o questionamento: será que é possível encontrarmos o valor de uma área no tamanho real tendo apenas o valor da área no projeto e a escala na qual o projeto se encontra? Um aluno do terceiro grupo fez a seguinte colocação: *professor, nós podemos usar a fórmula m = M x k. Este caso é o mesmo das atividades anteriores; nós temos o valor da área no projeto e o valor de k. É só multiplicar a área do projeto pelo inverso k que vamos encontrar a área no tamanho real.*

Como nenhum grupo apresentou outra sugestão, solicitamos que os grupos usassem o sugerido pelo aluno do terceiro grupo, apenas para a área da sala no projeto que cada grupo desenhou e verificasse se o valor encontrado era igual ao da área da sala no tamanho real. Em seguida perguntamos se o valor encontrado era igual ao valor do item anterior. Os grupos responderam: *não deu a mesma resposta, o valor que encontramos agora para a área no tamanho real é menor que o valor encontrado no item anterior.* Questionamos, então, quais das respostas estavam corretas, e eles responderam: *a do item anterior*. Mediante a resposta dos grupos, solicitamos que verificassem qual adaptação poderia ser feita na fórmula m = M x k, para que pudéssemos usá-la para encontrar o valor da área da sala no tamanho real, usando o valor da área no projeto e do valor de k.

A resposta foi que não conseguiram resolver o problema. Diante da situação, decidimos usar a estratégia de mostrar o cálculo do perímetro de dois retângulos que supomos serem semelhantes (Figura 25).

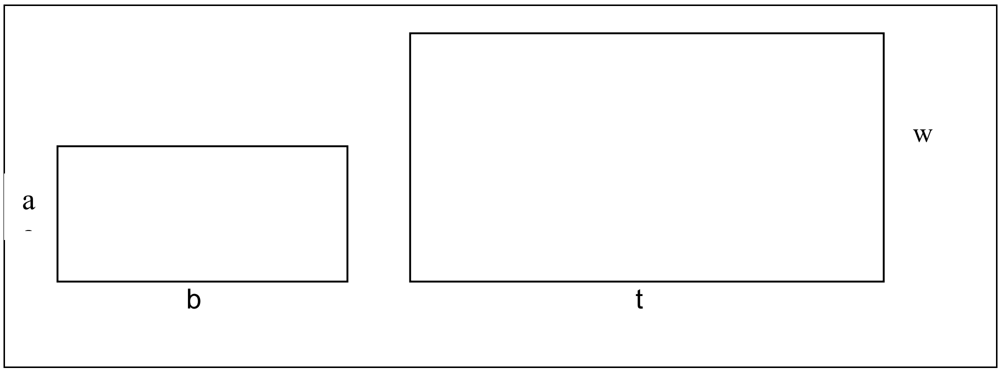


Figura 25: Retângulos semelhantes
Fonte: Elaborado pelo autor, 2007

Então, explanamos que o perímetro de uma figura plana é a soma da medida do comprimento de todos os lados da figura plana.

Como partimos da hipótese de que os retângulos eram semelhantes, foi possível afirmar que:

$a = w \cdot k$ e $b = t \cdot k$

E mais.

$P_r = a + a + b + b$ $P_R = w + w + t + t$

$P_r = 2a + 2b$ $P_R = 2w + 2t$

Como $a = w \cdot k$ e $b = t \cdot k$, temos, então:

$P_r = 2 \cdot w \cdot k + 2 \cdot t \cdot k$ $P_r = k\,(2w + 2t)$, ou seja, $P_r = k \cdot P_R$

A seguir, pedimos que os alunos analisassem o que está feito e tentassem resolver o problema das áreas semelhantes. O grupo de número cinco nos chamou e fez a seguinte colocação: *professor, nós fizemos o seguinte: pensamos em dois retângulos semelhantes, um menor com 3cm de largura e 5cm de comprimento, e outro maior com 6cm de largura e 10cm de comprimento, onde k = 1 / 2. A área do retângulo pequeno é 3 x 5 = 15cm*^{2} *e a área do maior é 6 x 10 = 60cm*^{2} *. Como os retângulos são semelhantes, 5 = 10 . k e 3 = 6 . k . usando as fórmulas A = b x h e m = M . k temos o seguinte.*

Ap = b x h

$Ap = 5 \times 3$

$Ap = 10 \,.\, k \,.\, 6 \,.\, k$

$Ap = 60 \,.\, k^2$, como $Ag = 60cm^2$ $\quad Ap = Ag.k^2$.

Nós queríamos saber se é assim que é para fazer, se está certo. Concordamos com o que havia sido feito, porém solicitamos que alguém do grupo fosse até o quadro mostrar como eles raciocinaram na questão. Um dos membros do grupo foi ao quadro e fez como transcrevemos acima.

Perguntamos aos grupos, se haviam entendido ou se precisavam de mais esclarecimento, e responderam da seguinte forma: *não há duvidas nos cálculos, só não sabemos é como usar esta fórmula para solucionar o problema da atividade.* Pedimos que os grupos tentassem resolver o problema utilizando o modelo construído pelo quinto grupo e, após o cálculo, comparassem a resposta com o item anterior. Segue, abaixo, o cálculo de alguns grupos (Figuras 26 e 27).

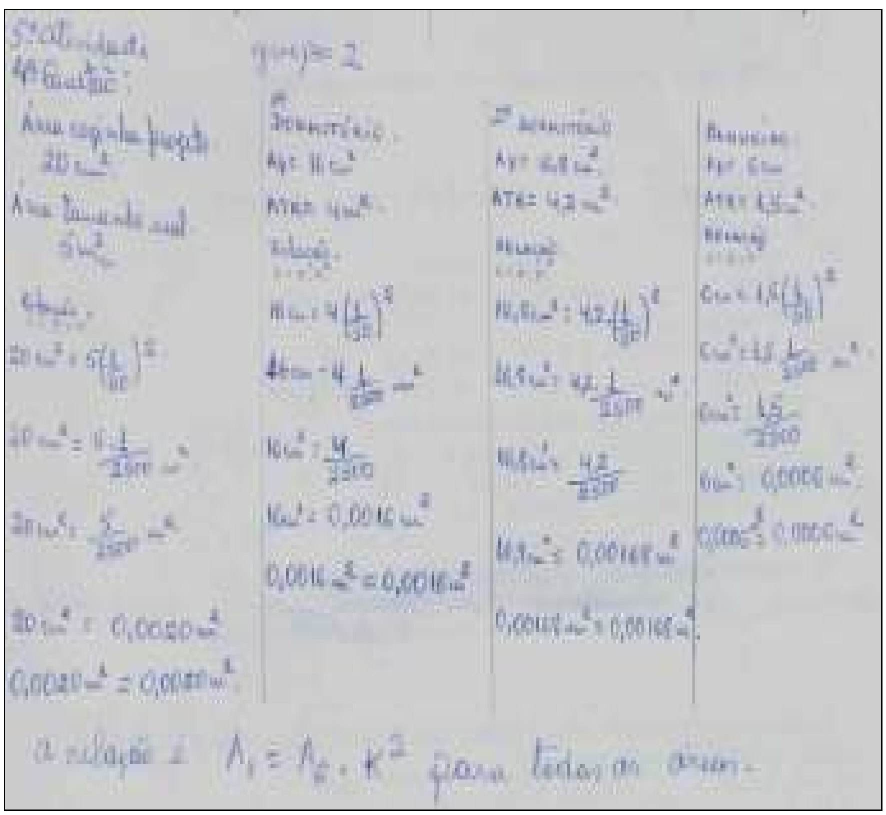
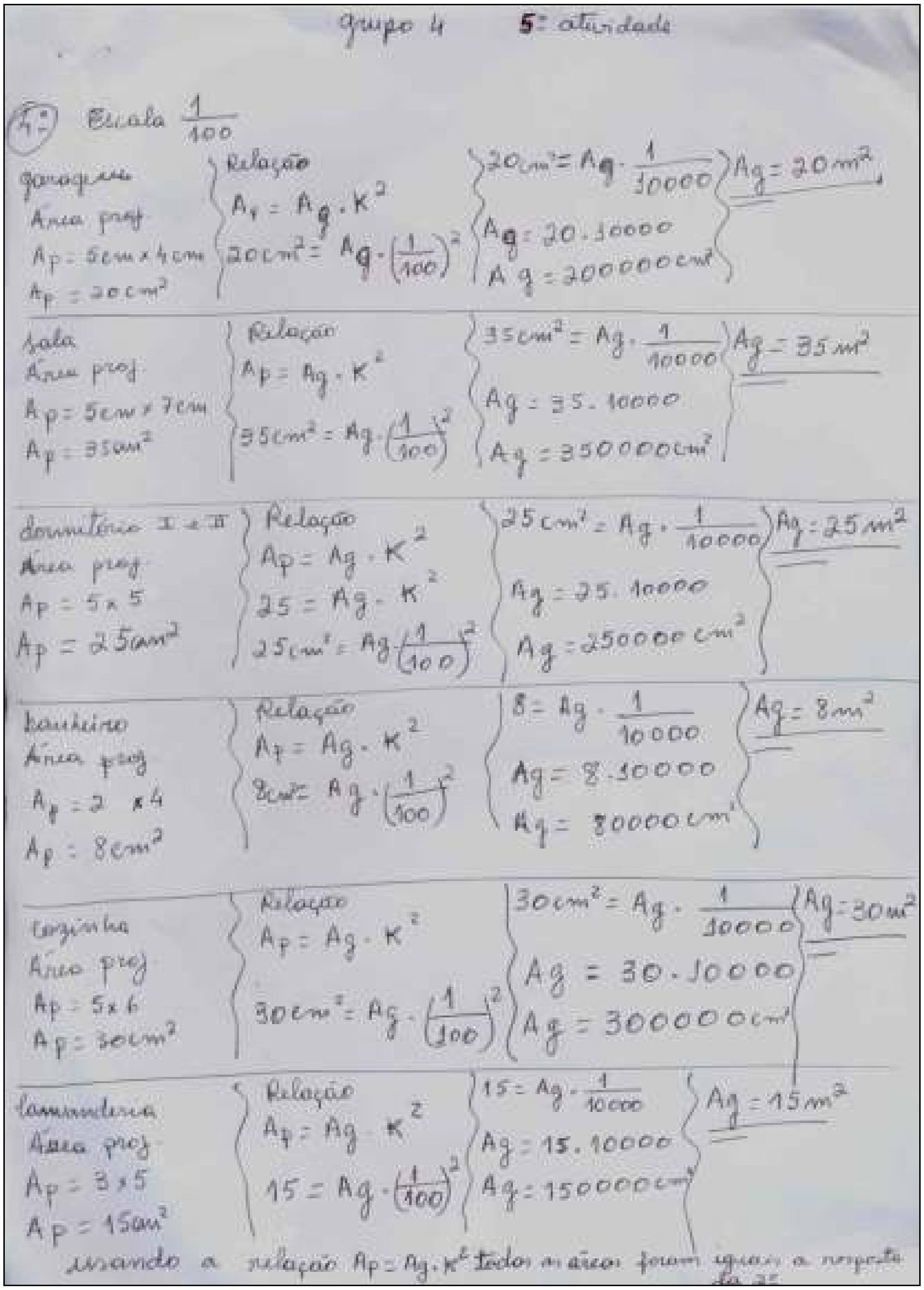


Figura 26: Praxeologia dos alunos
Fonte: Elaborado pelo autor com base nos dados da pesquisa de campo, 2007


grupo 4 5ª atividade

1ª) Escala $\frac{1}{100}$

garagem
Área proj
$A_p = 5cm \times 4cm$
$A_p = 20cm^2$
Relação
$A_p = A_g \cdot K^2$
$20cm^2 = A_g \cdot \left(\frac{1}{100}\right)^2$
$20cm^2 = A_g \cdot \frac{1}{10000}$
$A_g = 20 \cdot 10000$
$A_g = 200000cm^2$
$A_g = 20m^2$

sala
Área proj
$A_p = 5cm \times 7cm$
$A_p = 35cm^2$
Relação
$A_p = A_g \cdot K^2$
$35cm^2 = A_g \cdot \left(\frac{1}{100}\right)^2$
$35cm^2 = A_g \cdot \frac{1}{10000}$
$A_g = 35 \cdot 10000$
$A_g = 350000cm^2$
$A_g = 35m^2$

dormitório I e II
Área proj
$A_p = 5 \times 5$
$A_p = 25cm^2$
Relação
$A_p = A_g \cdot K^2$
$25 = A_g \cdot K^2$
$25cm^2 = A_g \cdot \left(\frac{1}{100}\right)^2$
$25cm^2 = A_g \cdot \frac{1}{10000}$
$A_g = 25 \cdot 10000$
$A_g = 250000cm^2$
$A_g = 25m^2$

banheiro
Área proj
$A_p = 2 \times 4$
$A_p = 8cm^2$
Relação
$A_p = A_g \cdot K^2$
$8cm^2 = A_g \cdot \left(\frac{1}{100}\right)^2$
$8 = A_g \cdot \frac{1}{10000}$
$A_g = 8 \cdot 10000$
$A_g = 80000cm^2$
$A_g = 8m^2$

cozinha
Área proj
$A_p = 5 \times 6$
$A_p = 30cm^2$
Relação
$A_p = A_g \cdot K^2$
$30cm^2 = A_g \cdot \left(\frac{1}{100}\right)^2$
$30cm^2 = A_g \cdot \frac{1}{10000}$
$A_g = 30 \cdot 10000$
$A_g = 300000cm^2$
$A_g = 30m^2$

lavanderia
Área proj
$A_p = 3 \times 5$
$A_p = 15cm^2$
Relação
$A_p = A_g \cdot K^2$
$15 = A_g \cdot \left(\frac{1}{100}\right)^2$
$15 = A_g \cdot \frac{1}{10000}$
$A_g = 15 \cdot 10000$
$A_g = 150000cm^2$
$A_g = 15m^2$

usando a relação $A_p = A_g \cdot K^2$ todos as áreas foram iguais a resposta

Figura 27: Praxeologia dos alunos
Fonte: Elaborado pelo autor com base nos dados da pesquisa de campo, 2007

Nos cálculos realizados pelos grupos, podemos perceber que os alunos conseguem, a partir do processo de estudo para o cálculo de área assimilar a relação que existe entre áreas semelhantes.

Nesta etapa da 5ª tarefa, os alunos desenvolveram uma atividade matemática, marcada pela formação de um processo de estudo, cuja finalidade era encontrar a relação existente entre as áreas semelhantes. Para isso articularam saberes matemáticos como: os modelos m = M x k e A = b x h, o cálculo do perímetro de uma figura e potenciação. Também é possível observar, à luz da teoria de Chevallard (2001), um fazer matemático dos alunos, uma vez que, para resolver o problema da relação entre as áreas semelhantes, utilizaram o modelo matemático que construíram na segunda atividade, adaptando-o para esta nova situação. Para Chevallard (2001), todas as vezes que alguém recorre a modelos matemáticos construídos através de um processo didático, e resolve problemas que necessitam de conhecimentos matemáticos, está fazendo Matemática.

A dificuldade – cálculo de área – surgida neste episódio proporcionou a movimentação do cálculo do perímetro de figuras planas semelhantes, possibilitando no processo de estudo a assimilação da relação existente entre áreas semelhantes.

5.6 6ª ATIVIDADE

11º dia de aula:

Nesta atividade foi fornecido aos grupos o desenho de uma caixa d'água de um prédio, cuja única informação era apenas o comprimento de 20m desta caixa no tamanho real. Os grupos teriam que encontrar a razão de semelhança entre as dimensões da caixa no desenho e no tamanho real, encontrar o volume da caixa no desenho e no tamanho real e identificar qual a relação existente entre os dois volumes. O objetivo desta atividade era de proporcionar aos alunos a identificação da relação existente entre volumes de sólidos semelhantes, como também o cálculo de volume. Nesta atividade, nossas análises estiveram focadas em dois momentos: no cálculo de volume e na relação existente entre volumes de paralelepípedos retângulos semelhantes.

Para o primeiro item desta atividade os grupos não demonstraram nenhuma dificuldade, uma vez que haviam utilizado este raciocínio na 4ª atividade. Dessa forma, todos os grupos apresentaram como resposta k = 1cm / 500cm ou k = 1cm / 5m. Ao questionarmos como haviam chegado a está resposta, disseram: *professor foi só medir o comprimento da caixa no desenho e usar a fórmula m = M x k, para fazer os cálculos como fizemos na 4ª atividade.*

Dando continuidade à atividade, solicitamos que passassem para o segundo item. Decorrido certo tempo, percebemos que eles não tinham conseguido resolver o problema. Ao serem questionados a esse respeito, disseram que não sabiam como proceder para calcular o volume da caixa. Neste momento percebemos que havia necessidade de fazermos uma abordagem a respeito de volume.

Então, demos início à abordagem dizendo que o sentido da palavra volume de um sólido está relacionado à idéia da quantidade de espaço que o sólido ocupa no espaço. Por exemplo, o caderno de vocês ocupa certo espaço dentro da mochila ou quando está em cima da mesa. Esta quantidade de espaço ocupada pelo caderno sobre a mesa ou dentro da mochila é o volume do caderno, ou seja, é o volume que o caderno ocupa no espaço; uma caixa de sapato ocupa no armário um espaço, esta quantidade de espaço ocupada pala caixa é o volume da caixa, porém, em alguns casos, como caixas, garrafas e outros, temos que especificar de qual volume estamos falando.

Se do volume que o objeto ocupa no espaço ou se do volume interno do objeto, pois se for o volume interno, estaremos falando do volume que cabe dentro do objeto, por exemplo, os líquidos contidos nas garrafas. Outro exemplo que utilizamos foi o seguinte: pedimos que eles imaginassem um aquário, completamente cheio de água e pensassem em uma bola, por exemplo, de ferro sendo colocada dentro do aquário; então, perguntamos o que eles achavam que iria acontecer com a água de dentro do aquário. Deram a seguinte resposta: *parte da água vai derramar*.

Neste momento, um aluno do 2º grupo fez a seguinte colocação: *esta água que vai derramar do aquário quando a bola for colocada dentro é o volume da bola.* Pedimos a ele que justificasse o que estava afirmando, então o aluno respondeu: *no momento em que a bola é colocada dentro do aquário, ela ocupa um lugar naquele espaço, expulsando uma quantidade de água que está no aquário; esta água que derramou do aquário é igual ao volume da bola não é?* Concordamos, mas ressaltamos a necessidade de medirmos a quantidade de água que transbordou, para que se possa saber qual o valor numérico aproximado do volume da bola.

Dando continuidade à abordagem, passamos a tratar a respeito de como calcular o valor numérico do volume de um sólido. Explanamos que, se o sólido pertencer à família dos prismas (consideramos que um sólido pertence à família dos prismas quando fazemos cortes paralelos à base deste sólido e obtemos sempre áreas iguais a da base) o cálculo pode ser feito da seguinte forma: vamos imaginar uma caixa que mede 3 m de largura, 5 m de comprimento e 2 m de altura (Figura 28).

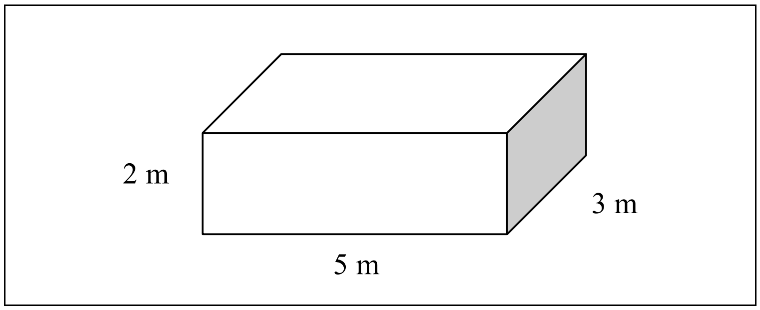


Figura 28: Paralelepípedo
Fonte: Elaborado pelo autor, 2007

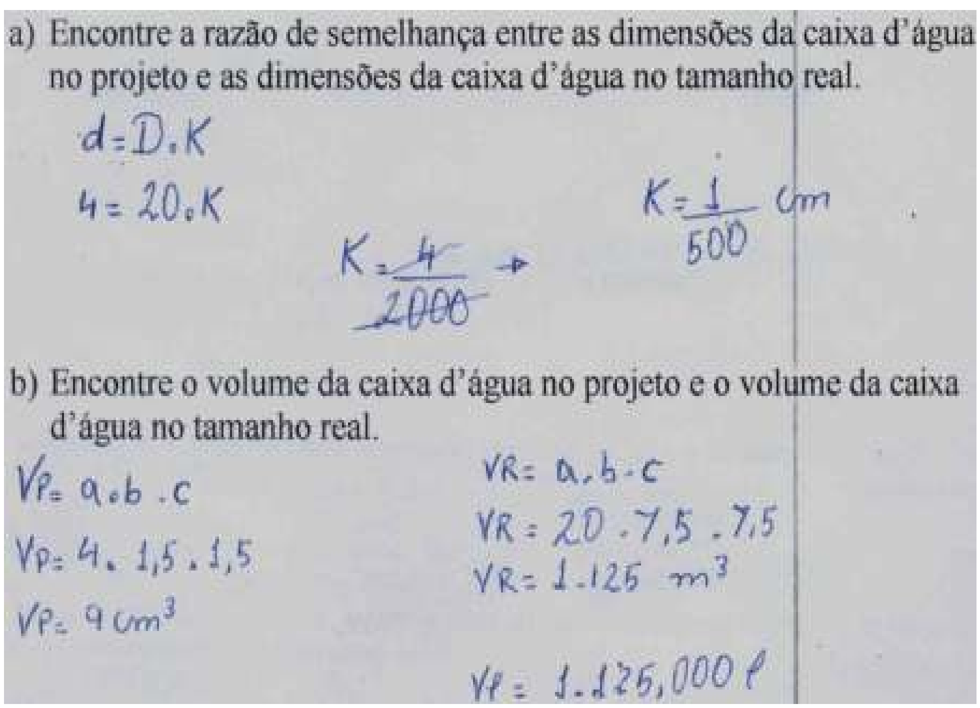
Pensem quantos cubos que medem 1m de largura, 1m de comprimento e 1m de altura – cubos de 1m^3 de volume – cabem no comprimento, na largura e na altura dessa caixa. Tivemos a seguinte resposta dos grupos 2 e 7: *professor, no comprimento cabem 5, na largura 3, então 5 x 3 = 15, na altura que cabem 2, no total são duas quantidades de 15 cubos que é igual a 30 cubos de 1m^3 de volume.* Nesse momento, uma aluna do 4º grupo fez a seguinte colocação: *professor, esses trinta cubos é o volume dessa caixa. Mas qual é a unidade de volume, porque da área é m^2 e do volume pode ser m^3?* Perguntamos por que ela achava que a unidade de medida do volume poderia ser m^3, a resposta dada foi a seguinte: *na área eram duas medidas, o comprimento e a largura e agora na caixa são três medidas comprimento, largura e altura*. Nos posicionamos dizendo que neste caso a unidade de medida era m^3, entretanto, esclarecemos que m^3 é apenas uma das unidades de medida de volume, mas existem outras, como, por exemplo, cm^3, mm^3 e outros.

Após este momento, o grupo de número dez se posicionou dizendo: *nós podemos calcular o volume seguindo o raciocínio do cálculo de área.* Pedimos que fossem mais claros no que estavam falando, então disseram: *no caso da área, multiplicávamos comprimento vezes a largura, que foi o que fizemos no primeiro momento com a caixa 5 x 3 = 15 e depois fizemos novamente para a altura 5 x 3 =*

15, 15 + 15 = 30 que é o volume da caixa. Então, é só fazer 15 x 2 = 30; esse 2 é a altura. Logo, para calcular o volume da caixa é só fazer comprimento vezes largura vezes altura que, neste caso, é 5 x 3 x 2 = 30m^3, certo?

Concordamos com o grupo, porém, ressaltamos que, se o sólido for da família dos prismas, podemos usar o modelo *comprimento vezes largura vezes altura*, ou seja, V = a . b . c, (V = Ab x h). No caso do sólido pertencer a família das pirâmides, ou das esferas o modelo é outro, caso o sólido não seja de nenhuma dessas famílias, uma alternativa – caso esteja com o sólido em estado real – é fazer a imersão em um recipiente com líquido para calcular o volume, se o sólido for demasiadamente grande, pode-se construir uma miniatura semelhante pela forma, pela proporcionalidade dos segmentos homólogos e pela congruência entre os ângulos correspondentes, e então fazer a imersão da maquete no líquido para calcular o volume do sólido e usando a relação existente entre os dois volumes semelhantes pode-se calcular o volume no tamanho real.

Vencida esta fase pedimos que tentassem resolver o segundo item da atividade. A seguir os cálculos de alguns grupos (Figuras 29, 30 e 31).


a) Encontre a razão de semelhança entre as dimensões da caixa d'água no projeto e as dimensões da caixa d'água no tamanho real.

d=D.K

4=20.K

$K=\frac{4}{2000}$ → $K=\frac{1}{500}$ cm

b) Encontre o volume da caixa d'água no projeto e o volume da caixa d'água no tamanho real.

VP= a.b.c

VP= 4.1,5.1,5

VP= 9 cm^3

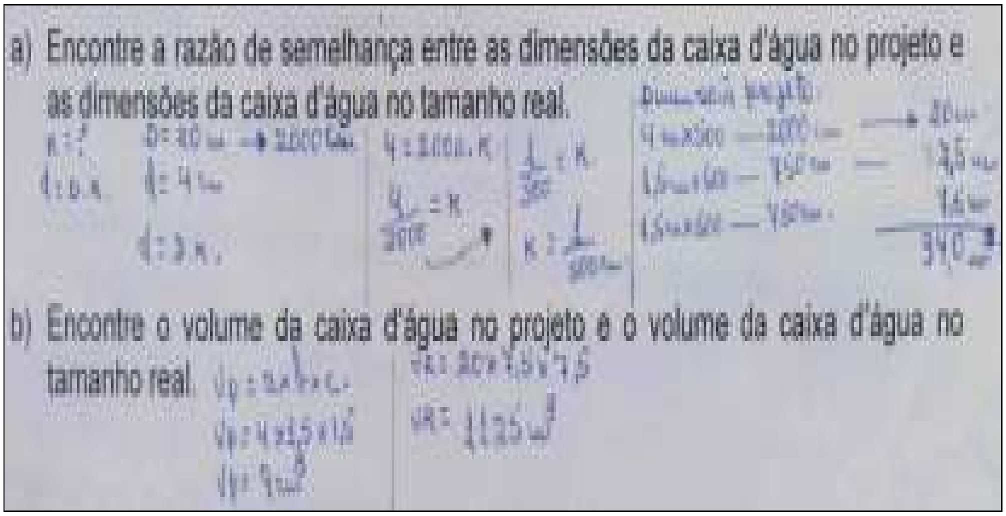
VR= a.b.c

VR= 20.7,5.7,5

VR= 1.125 m^3

VP= 1.125,000 ℓ

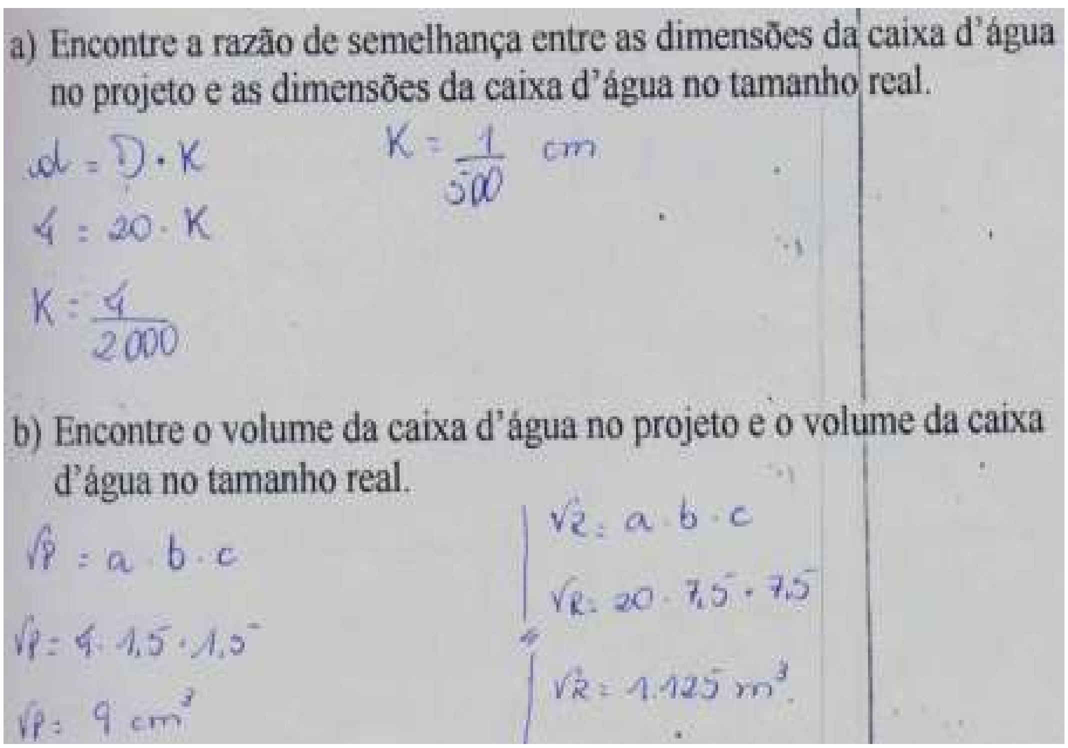
Figura 29: Praxeologia dos alunos
Fonte: Elaborado pelo autor com base nos dados da pesquisa de campo, 2007



a) Encontre a razão de semelhança entre as dimensões da caixa d'água no projeto e as dimensões da caixa d'água no tamanho real.

b) Encontre o volume da caixa d'água no projeto e o volume da caixa d'água no tamanho real.

Figura 30: Praxeologia dos alunos
Fonte: Elaborado pelo autor com base nos dados da pesquisa de campo, 2007



a) Encontre a razão de semelhança entre as dimensões da caixa d'água no projeto e as dimensões da caixa d'água no tamanho real.

d = D · K

4 = 20 · K

K = 4/2000

K = 1/500 cm

b) Encontre o volume da caixa d'água no projeto e o volume da caixa d'água no tamanho real.

Vp = a · b · c

Vp = 4 · 1,5 · 1,5

Vp = 9 cm³

VR = a · b · c

VR = 20 · 7,5 · 7,5

VR = 1.125 m³

Figura 31: Praxeologia dos alunos
Fonte: Elaborado pelo autor com base nos dados da pesquisa de campo, 2007

Neste item da 6ª atividade, identificamos no processo didático realizado pelos alunos, uma atividade matemática caracterizada pelo estudo do objeto matemático – cálculo do volume. Uma vez que os grupos para chegarem à solução do problema, demonstram que estudaram Matemática, para construírem um modelo capaz de solucionar a problemática. Esta análise vai ao encontro da teoria de

Chevallard (2001), quando diz que uma pessoa ou um grupo de pessoas que se lança a resolver um problema matemático, cuja resposta não é imediata, forma neste momento um sistema didático, onde esta pessoa ou os membros deste grupo passam a ser estudantes. Para Chevallard, atividades matemáticas, por exemplo, dessa natureza tiram os alunos da condição de meros receptores de conhecimento e os elevam ao status de construtores de seu próprio conhecimento, onde, segundo Chevallard, nesse tipo de processo de aprendizagem, o professor assume o *topos* de coordenador do estudo e o aluno o *topos* de protagonista no processo de estudo, dessa forma não ficando mais para o professor toda a responsabilidade pela aprendizagem matemática do aluno.

12º dia de aula:

Para o item seguinte, fizemos o questionamento: será que podemos encontrar o valor numérico do volume de um sólido semelhante – no tamanho real – tendo apenas o valor numérico do volume no desenho e a escala na qual o desenho se encontra? Os grupos de número 5 e 8 responderam que sim; então pedimos que explicassem como procederiam, e o 5º grupo fez a seguinte colocação: *professor é só usar a fórmula m = M x k, este problema é parecido com o caso das áreas semelhantes, sendo que agora são três dimensões que vão ser usadas: comprimento, largura e altura.* Pedimos que o grupo mostrasse no quadro o que eles estavam dizendo. Um membro do grupo foi até o quadro e fez a seguinte explanação:

Professor, vamos imaginar duas caixas semelhantes, uma menor com 3cm de largura e 5cm de comprimento e 2cm de altura e outra maior com 6cm de largura e 10cm de comprimento e 4cm de altura; neste caso, a razão de proporcionalidade é 1 / 2. O volume da caixa pequena é V = 3 x 5 x 2 = 30cm^3, o volume maior é V = 6 x 10 x 4 = 240cm^3, como as caixas são semelhantes e a razão é 1 / 2, então 3 = 6 . k , 5 = 10 . k e 2 = 4 . k. usado a fórmula V = a . b . c e m = M . k temos.

$Vp = 5 \times 3 \times 2$

$Vp = (10 . k) .(6 . k) .(4 . k)$

$Vp = 240 . k^3$

$Vp = Vg . k^3$.

Tendo em vista o exposto pelos alunos no quadro, concordamos com o grupo e solicitamos que fizessem o último item da atividade. Decorrido certo tempo, todos os grupos haviam concluído a tarefa sem dificuldades. Seguem os cálculos realizados por alguns grupos (Figuras 32, 33, 34 e 35).

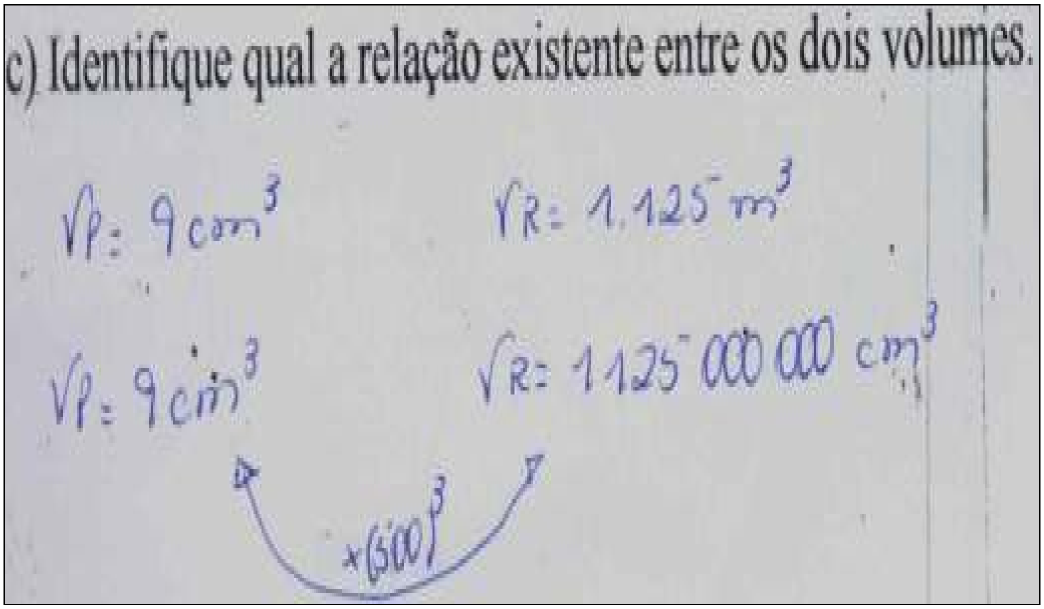


Figura 32: Praxeologia dos alunos
Fonte: Elaborado pelo autor com base nos dados da pesquisa de campo, 2007

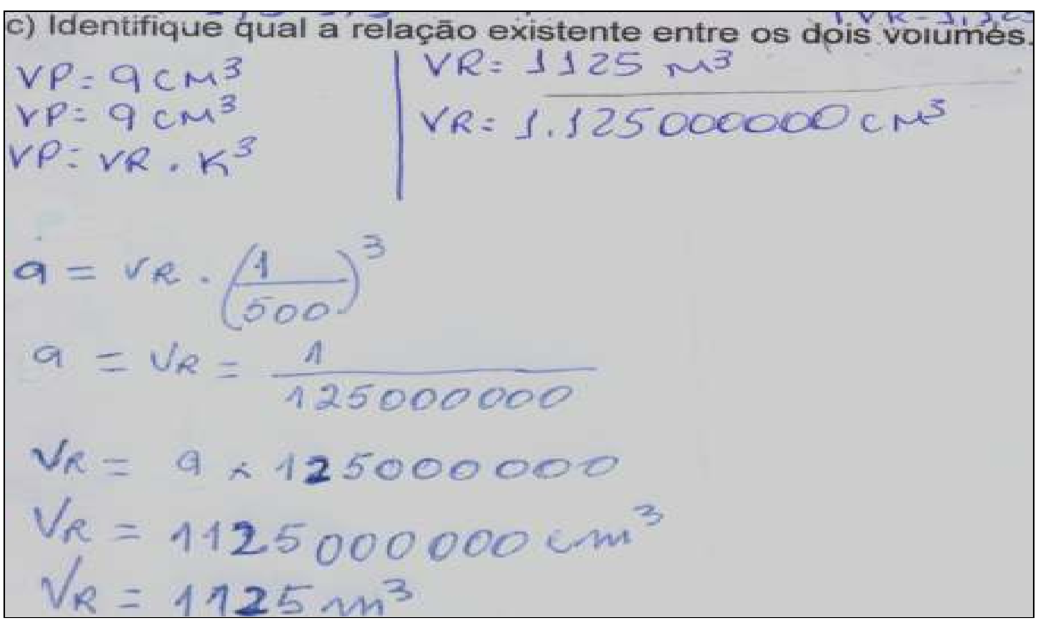


Figura 33: Praxeologia dos alunos
Fonte: Elaborado pelo autor com base nos dados da pesquisa d campos, 2007

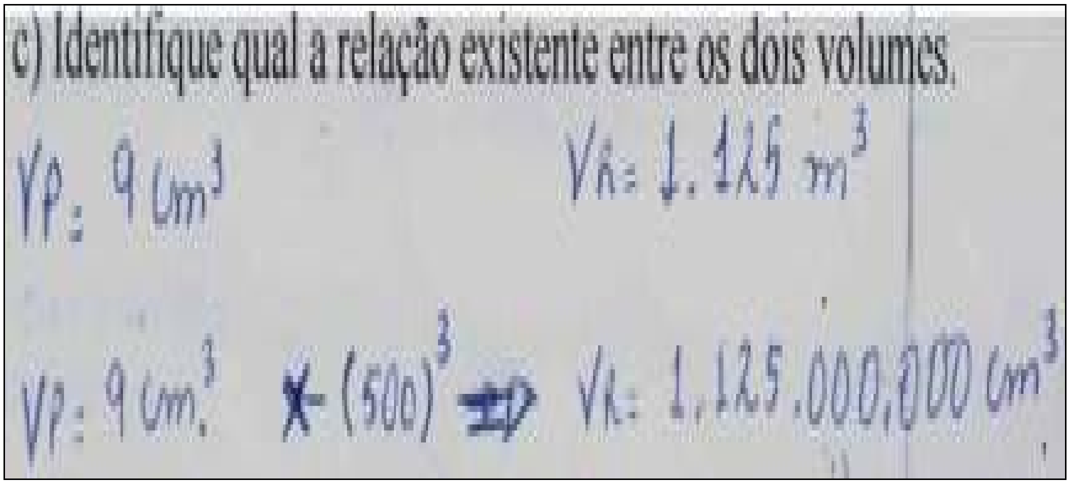


Figura 34: Praxeologia dos alunos
Fonte: Elaborado pelo autor com base nos dados da pesquisa de campo, 2007

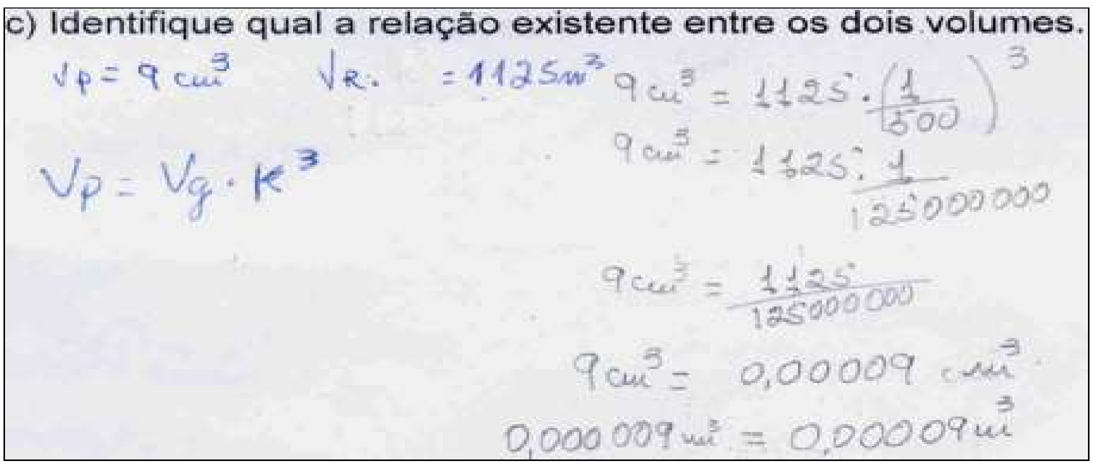


Figura 35: Praxeologia dos alunos
Fonte: Elaborado pelo autor com base nos dados da pesquisa de campo, 2007

Nossa análise a respeito do item **c** da 6ª atividade nos levou a inferir, baseados nos conceitos de fazer Matemática à luz da teoria de Chevallard (2001), que os alunos construíram o modelo matemático existente na relação entre os volumes semelhantes para resolução da problemática, articulando de forma integrada saberes e, portanto, um fazer matemático, demonstrando o desenvolvimento de uma atividade matemática, que é estar estudando Matemática no processo didático estabelecido na comunidade de estudo.

Para Chevallard (2001), quando um grupo de estudo ou uma pessoa usa modelos matemáticos que foram construídos por eles, através de um processo de estudo ou fazem uso de modelos que já dominam, para resolver problemas que necessitam de conhecimentos matemáticos, este grupo ou esta pessoa está fazendo Matemática.

A busca da relação existente entre volumes semelhantes proporcionou aos alunos a movimentação de saberes importantes para a assimilação desta relação, tais como os modelos m = M x k e V = a . b . c e o raciocínio utilizado na relação entre áreas semelhantes. A dificuldade – cálculo de volume – caso não fosse contornada talvez prejudicasse a aprendizagem perseguida pelo processo de estudo. No entanto, no momento em que buscávamos a superação dessa dificuldade, foi possível movimentar a técnica do fracionamento do volume de um sólido em volumes unitários, como também a abordagem sobre a imersão de um sólido como estratégia capaz de solucionar a problemática do cálculo do volume de um sólido.

O processo didático estabelecido na comunidade de estudo, desde o início da intervenção com a primeira atividade, onde fizemos o questionamento sobre o que os alunos entendiam por coisas ou objetos semelhantes, até o momento em que foi discutido na comunidade de estudo a relação existente entre volumes de sólidos semelhantes, foi marcado pela evidência de dificuldades. Ao serem contornadas revelaram a movimentação de saberes matemáticos que nos permitiu uma análise a respeito de quais saberes foram movimentados na construção do conceito de semelhança entre figuras poligonais.

A partir do momento em que convidamos os alunos a formar uma comunidade de estudo em torno de uma obra matemática, admitíamos a possibilidade de possíveis dificuldades, não da forma que ocorreu. Mas certamente ao se estabelecer a relação didática de caráter aberto entre nós (alunos e professor), atores do processo de estudo, nos levou a andar por caminhos que não nos permitiriam prever quais dificuldades poderiam surgir no estudo desta obra matemática. Entretanto as destacamos como relevantes para o processo de estudo, pois nos permitiram perceber a articulação de saberes matemáticos que foram movimentados na construção do conceito de semelhança, tais como: a forma das figuras; a definição do conceito de quadrado; unidade de medida; comprimento de metro e centímetro; a relação entre metro, centímetro e milímetro; proporcionalidade entre segmentos; frações; escala e expressões algébricas.

6 CONSIDERAÇOES FINAIS

No presente capítulo, trataremos a respeito das conclusões obtidas após o desenvolvimento da pesquisa, bem como alguns aspectos que foram possíveis de serem observados no processo de construção do conceito de semelhança.

Muitas dificuldades surgem, quando implementamos mudanças no processo de ensino/aprendizagem, vivenciadas por professores e alunos, principalmente quando ocorre no 3º ano do ensino médio, haja vista os vícios do sistema educacional que estão arraigados, tanto nos alunos como nos professores.

Nossa experiência como docentes tem nos mostrado que, mesmo frente à resistência, ainda presente em nossos dias, não podemos nos eximir de buscarmos mudanças em nossas práticas pedagógicas, que propiciem aos alunos um ambiente motivador capaz de promover uma aprendizagem que tenha relação com o seu contexto sócio-cultural.

Tal tomada de decisão não implica que estas mudanças transformem de maneira imediata a conjuntura em que se encontra o sistema educacional brasileiro. Entretanto, há necessidade de que os professores reflitam na e sobre a prática docente, a fim de criarem estratégias que possam levar o aluno ao estudo da obra que está sendo objeto de estudo na sala de aula.

Este trabalho objetivou investigar uma seqüência didática para o ensino da geometria euclidiana com enfoque no estudo de semelhança, onde procuramos introduzir o conceito de semelhança a partir da realidade da comunidade de estudo, buscando dessa forma a relação entre o conhecimento escolar e o contexto sócio-cultural dos alunos. Um dos pontos que podemos enfatizar nesta pesquisa ocorreu no momento da intervenção metodológica junto à comunidade de estudo que se estabeleceu na turma, a interação que ocorreu entre os membros da comunidade, permitiu o trabalho em grupo na construção do conhecimento, funcionando como fator motivador para a aprendizagem, onde mesmo os alunos que afirmavam nunca terem estudado geometria – fato este que não podemos desconsiderar frente ao abandono que este tema tem sofrido no sistema educacional brasileiro – conseguiram, realizar um fazer matemático no estudo de semelhança. Assim entendemos que a seqüência didática utilizada na intervenção, apresentou resultados satisfatórios, tanto qualitativos quanto quantitativamente.

O trabalho também evidenciou a importância da geometria euclidiana no dia a dia dos alunos fora da sala de aula, haja vista, o engajamento dos mesmos na tentativa de construir a solução das situações problemas propostas a eles. Aqui destacamos os relatos de alguns alunos, onde uns diziam nunca terem estudado geometria e outros diziam ter visto algo de geometria mas não sabiam exatamente o que, este último sentimento dos alunos talvez se explique pela forma que alguns livros didáticos ainda tratam o assunto: de maneira tímida; superficial e desconectada, como por exemplo, não é comum encontrarmos a relação entre o estudo das homotetias e a noção de semelhança.

Outro ponto a ser considerado, é a comunidade não ter tratado o conceito de semelhança de maneira exclusivamente teórica, numa linguagem formal, exigindo abstração e memorização de fórmulas, não queremos dizer com isso que no decorrer do estudo deste objeto matemático o formalismo do conceito de semelhança não foi considerado. Porém em nosso trabalho procuramos inicialmente tratar o assunto a partir do conhecimento social que os alunos possuíam a respeito de semelhança e partindo dessa premissa foram criadas situações que permitiram aos alunos a construção do conceito de semelhança, que sob nossa óptica pode ser considerada como uma estratégia com resultados positivos para o processo de ensino aprendizagem.

Outro fator relevante a considerar na intervenção, foi estimular a comunidade de estudo a analisar os erros cometidos pelos grupos na construção das resoluções das problemáticas propostas e concomitantemente na construção do conceito de semelhança, proporcionando aos mesmos a possibilidade de superar tais erros, pois dentre as várias vantagens em promover um sistema didático, podemos destacar o de levar o aluno a estudar e consecutivamente a se responsabilizar pelos erros e acertos de sua produção matemática, dividindo com o professor a responsabilidade do aprendizado matemático, uma vez que consideramos que essa é uma das competências importantes para o aprendiz.

Durante a intervenção, foi possível verificarmos que o estudo de semelhança articula diferentes saberes e objetos matemáticos tais como:

- Conhecimentos prévios – construídos na escola ou não – usados como subsunçores para ancorar novos conhecimentos.
- A noção de espaço como elemento importante no estudo da geometria e particularmente no estudo de figuras semelhantes, pois os alunos que apresentavam dificuldades para construir

cognitivamente a noção de espaço, apresentavam mais dificuldades para formalizar o conceito de semelhança entre figuras.

- As formas geométricas construídas pelo homem e pela natureza, consideradas como um modelo do espaço físico que vivemos.
- O conceito de paralelismo e perpendicularismo entre segmentos de retas, bem como o conceito de segmento de reta.
- O conceito de algumas figuras, como por exemplo, quadrado, retângulo, triângulo, paralelepípedo retângulo e outros.
- O sistema de representação das figuras, construídos a partir de um ponto simétrico a outro em relação a uma reta, utilizando para isso a construção de reta perpendicular, o transporte de segmento e outros.
- O conceito de área e perímetro de figuras planas e conceito de volume dos sólidos.
- A noção de medida de comprimento que se mostrou um saber relevante para a compreensão do conceito de proporcionalidade entre os segmentos das figuras.
- Operações com números inteiros e fracionários que foram fundamentais na construção das fórmulas para a resolução das situações problemas.

Esses e outros saberes matemáticos, se movimentam de forma integrada na construção do conceito de semelhança, os quais são relevantes no processo de construção e aprendizagem desse objeto matemático, nos levando a inferir que entender a articulação desses saberes que ocorrem no estudo de semelhança é estar estudando e consequentemente fazendo matemática.

A esses saberes estão ligados competências que dizem respeito a aprendizagem como: desenvolvimento de habilidades de percepções espaciais; construção de modelos utilizados na resolução de problemas e a construção do conceito de semelhança entre figuras geométricas.

Segue abaixo o esquema das articulações de alguns saberes movimentados no processo de construção do conceito de semelhança. Este esquema, não tem a pretensão de buscar nenhuma aproximação com um mapa conceitual, o tratamos como um conjunto de saberes que vão sendo movimentados no processo de construção de determinado objeto matemático.

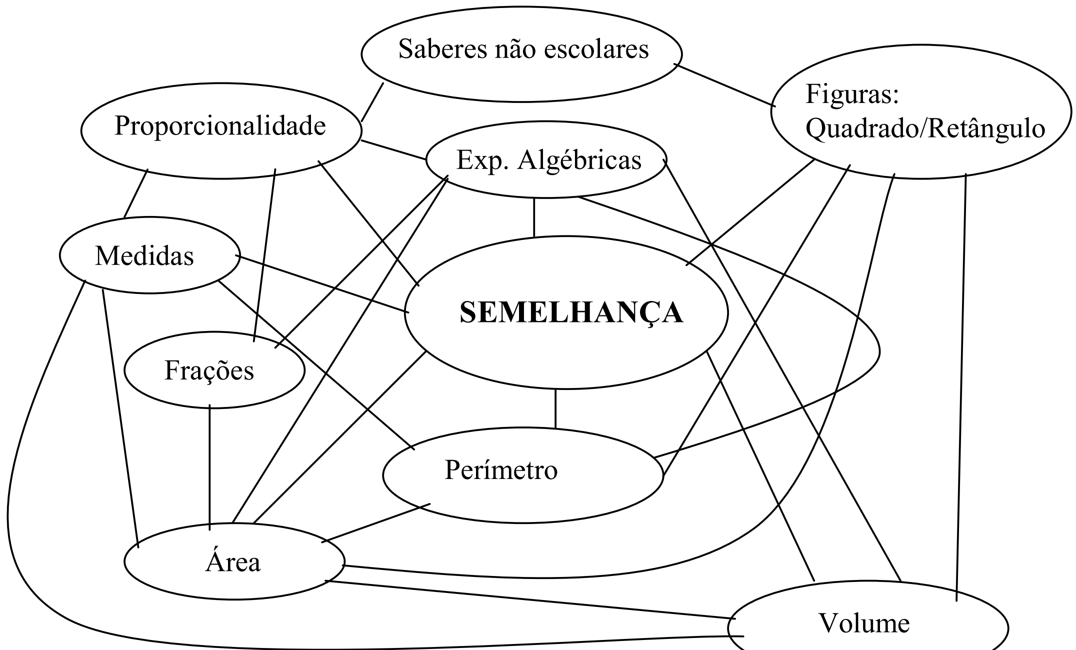


Figura 36: Esquema das articulações dos saberes
Fonte: Elaborado pelo autor (2007)

Outro ponto positivo a considerar é a motivação dos alunos para participarem da construção da solução de um problema. Acreditamos que este entusiasmo se dê pelo fato do aluno perceber que é capaz de construir com o professor, e com seus colegas, os conceitos matemáticos necessários para resolução da problemática vivenciada.

Os resultados apresentados são motivadores para experiências similares com outros temas e em outros níveis do ensino básico. Destacamos as dificuldades surgidas no processo de aprendizagem como vetores ostensivos de articulações de saberes, nem sempre percebidos no processo de ensino-aprendizagem.

Não de extrapolamos nossas análises para além do nosso objeto de pesquisa, pois ele nos proporcionou observações relevantes para o processo de aprendizagem. Merecendo destaque a construção do conceito de semelhança, que a nosso ver flui de maneira a facilitar a compreensão quando se inicia a partir dos conhecimentos que os alunos já possuem, para serem utilizados na construção formal do conceito e então ganharem significados mais abstrato e abrangente.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRAFICAS

ALARCÃO, I. **Formação reflexiva de professores estratégias de supervisão**. Portugal: Porto Editora, 1996.

ANDRÉ, Marli Eliza; DALMASO, Afonso. **Etnografia da prática escolar**. 12. ed. Campinas: Papirus, 2005.

ALMOULLOUD, A. S. Mr-21 A Geometria na escola básica: que espaço e forma tem hoje? In: ENCONTRO PAULISTA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 7., São Paulo, 2004, **Anais...** São Paulo: USP, 2004. 10p. Disponível em: <www.sbempaulista .org.br/anais/epem>. Acesso em: 28 set. 2005.

ANDERY, Maria Amália et al. **Para compreender a ciência.** 5. ed. Rio de Janeiro: Espaço e Tempo, 1994.

BRASIL, Ministério da Educação. **Parâmetros curriculares nacionais:** ensino médio. Brasília, 1999.

______. Ministério da Educação. **Parâmetros curriculares nacionais:** ensino fundamental. Brasília, 1998.

BOYER, C. **História da Matemática.** Tradução: Elza F. Gomide. São Paulo: Edgar Blucher 1974.

D'AMORE, Bruno. **Epistemologia e didática da Matemática.** Tradução: Maria Cristina Bonomi Barufi. São Paulo: Escrituras Editora, 2005.

CARVALHO, Alex Moreira et al. **Aprendendo metodologia científica.** Rio de Janeiro: O Nome da Rosa, 2000.

CHASSOT, Attico. **Alfabetização científica**: questões e desafios para a educação. Ijuí: Unijuí, 2001. (Coleção Educação em Química)

CHEVALLARD, Yves et al. **Estudar Matemática**: o elo entre o ensino e a aprendizagem. Tradução: Daisy Vaz de Moraes. Porto Alegre: Artmed, 2001.

DAYRELL, J. A escola como espaço sócio-cultural. In: DAYRELL, J. **Múltiplos olhares sobre a educação e cultura.** Belo Horizonte: UFMG, 1996.

FOSSA, John A. **Ensaios sobre a educação matemática**. Belém: Eduepa, 2001. (Série Educação; n. 2)

FRANCO, Maria Laura Puglisi Barbosa. **Anáise de conteúdo**. 1. ed. Brasília: Plano Editora, 2003. 72p.

FAINGUELERNT, Estela Kaufiman. O ensino de geometria no 1º e 2º graus. **Educação Matemática em Revista**, Blumenau, v. 3, n. 4, p. 45-53, jan. 1995.

FORQUIN, Jean-Claude. **Escola e cultura**: as bases sociais e epistemológicas do conhecimento escolar. Porto Alegre: Artes Médicas, 1993.

GERALDI, Corinta M. Grisolia et al. Refletindo com Zeichner: um encontro orientado por preocupações políticas teóricas e epistemológicas. In: GERALDI, Corinta Maria Grisolia; FIORENTINI, Dario; PEREIRA, Elisabete Monteiro de Aguiar (orgs). **Cartografia do trabalho docente**. 3. ed. São Paulo: Mercado de Letras, 2003.

GONÇALVES, Elisa Pereira. **Conversa sobre iniciação à pesquisa científica.** Campinas: Alínea, 2005.

GONÇALVES, Tadeu Oliver e FIORENTINI, Dario. Formação e desenvolvimento profissional de docentes que formam matematicamente futuros professores. In: FIORENTIN, Dario; NACARATO, Adair Mendes (orgs), **Cultura, formação e desenvolvimento profissional de professores que ensinam Matemática**: investigando e teorizando a partir da prática docente. São Paulo: 2005.

GONÇALVES, Tadeu Oliver; GONÇALVES, Terezinha V. O., Reflexões sobre uma prática docente situada: buscando novas perspectivas para a formação de professores. In: GERALDI, Corinta Maria Grisolia; FIORENTINI, Dario; PEREIRA, Elisabete Monteiro de Aguiar (orgs). **Cartografia do trabalho docente.** 3 ed. São Paulo: Mercado de Letras, 2003.

LORENZATO, Sergio. Por que não ensinar geometria? **Educação Matemática em Revista**, Blumenau, v. 3, n. 4, p. 3-13, jan.1995.

MOTTA, Cristina Dalva Van Berghem. **História da Matemática na educação matemática**: espelho ou pintura? 2. ed. Santos: Comunicar, 2006.

LIMA, Elon Lages. **Medidas e formas em geometria**: comprimento, área, volume, e semelhança. Rio de Janeiro: sociedade brasileira de matemática, 1991.

LINS, Romulo Campos; GIMENEZ, Joaquim. **Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI.** 1997. (Coleção perspectivas em educação Matemática)

LÜDKE, Menga; ANDRÉ, Marli E. D. A. **Pesquisas em educação:** abordagens qualitativas. São Paulo: EPU, 1986.

MACHADO, S. D. Alcântara (org.). **Aprendizagem em Matemática** – Registro de Representação Semiótica. Campinas: Papirus, 2003.

MALINOWSKI, Bronislaw. **Os argonaltas do Pacífico ocidental.** Um relato do empreendimento e da aventura dos nativos nos arquipélagos da Nova Guiné, Melanésia. São Paulo: Abril Cultural, 1978. (Coleção Os Pensadores).

MOREIRA, Marco A.; MASSINI, Elcie S. F. Salzano. **Aprendizagem significativa:** a teoria de David Ausubel. São Paulo: Centauro, 2002.

NIVEN, Ivan Morton. **Números**: racionais e irracionais. Tradução: Renate Watanabe. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1984.

NOVAK, Joseph Donald. **Uma teoria de educação**. Tradução: Marco Antonio Moreira, São Paulo: Pioneira, 1981.

PAVANELO, R. M. O abandono do ensino da geometria no Brasil: causas e conseqüências. **Zetetiké**, Revista da Faculdade de Educação da Unicamp, Campinas, n. 1, mar. 1993.

PEREZ, G. **Pressupostos e reflexões teóricas e metodológicas da pesquisa participante no ensino da geometria para as camadas populares (1º e 2º graus)**. 1991. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, 1991.

PERRENOUD, Phelipe. **A prática reflexiva no oficio de professor:** profissionalização e razão pedagógica. Tradução: Claudia Schilling. Porto Alegre: Artmed, 2002.

RUDIO, Franz Vitor. **Introdução ao projeto de pesquisa científica**. Petrópolis: Vozes, 1980.

SHÖN, Donald A. **Educando o profissional reflexivo:** um novo design para o ensino-aprendizagem. Tradução: Roberto Cataldo Costa. Porto Alegre: Artes Médicas Sul, 2000.

THIOLLENT, Michel. **Metodologia da pesquisa-ação**. São Paulo: Cortez: Autores Associados, 1986. (Coleção Temas básicos de pesquisa-ação)

ZAICHNER, Kenneth M. Para além da divisão entre professor pesquisador e pesquisador acadêmico. In: GERALDI, Corinta Maria Grisolia; FIORENTINI, Dario; PEREIRA, Elisabete Monteiro de Aguiar (orgs). **Cartografia do Trabalho Docente.** 3. ed. São Paulo: Mercado de Letras, 2003.

______. **A formação reflexiva de professores:** idéias e práticas. Tradução: A . J. Carmona Teixeira, Maria João Carvalho e Maria Nóvoa. Lisboa: Educa, 1993.