SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E CIENTÍFICA PRO-GRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIASE MATEMÁTICAS

THAYS DE SOUZA BORGES

GEOMETRIA ANALÍTICA NOS LIVROS DIDÁTICOS: UMA ANÁLISE DO MODELO EPISTEMOLÓGICOS DOMINANTE PARA O ENSINO DE CÔNICAS NO ENSINO MÉDIO

BELÉM – PA
2023

THAYS DE SOUZA BORGES

GEOMETRIA ANALÍTICA NOS LIVROS DIDÁTICOS: UMA ANÁLISE DO MODELO EPISTEMOLÓGICO DOMINANTE PARA O ENSINO DE CÔNICAS NO ENSINO MÉDIO

Texto apresentado ao Programa de Pós- Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas, Área de concentração emEducação Matemática, do Instituto de Educação Matemática e Científica da Universidade Federal do Pará, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Educação em Ciências e Matemáticas.

Orientador: Prof. Dr. José Messildo Viana Nunes

BELÉM – PA
2023

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

B732g Borges, Thays de Souza.
GEOMETRIA ANALÍTICA NOS LIVROS DIDÁTICOS: UMA ANÁLISE DO MODELO EPISTEMOLÓGICOS DOMINANTE PARA O ENSINO DE CÔNICAS NO ENSINO MÉDIO / Thays de Souza Borges. — 2023.
117 f. : il. color.

Orientador(a): Prof. Dr. Prof. Dr. José Messildo Viana Nunes
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Pará, Instituto de Educação Matemática e Científica, Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas, Belém, 2023.

1. Modelo Epistemológico de Referência. 2. Teoria Antropológica do Didático. 3. Praxeologias. 4. Cônicas.. I. Título.

CDD 510.7

THAYS DE SOUZA BORGES

GEOMETRIA ANALÍTICA NOS LIVROS DIDÁTICOS: UMA ANÁLISE DO MODELO EPISTEMOLÓGICO DOMINANTE PARA O ENSINO DE CÔNICAS NO ENSINO MÉDIO

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação emEducação em Ciências e Matemáticas do Instituto de Educação Matemática e Científica da Universidade Federal do Pará, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Educação em Ciências e Matemáticas — Área de Concentração em Educação Matemática

____

Prof. Dr. José Messildo Viana Nunes
Orientador – IEMCI/UFPA

____

Prof. Dr. Saddo Ag Almouloud
Membro interno–

____

Prof. Dr. José Carlos de Souza Pereira
Membro externo –

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente **a Deus**, fonte da minha vida, inspiração e sabedoria. Até aqui o Senhor me sustentou e nunca me abandonou! Obrigada por estar sempre comigo e pelo Teu grande amor.

Aos professores do Mestrado em Educação em Ciência e Matemáticas do PPGECM/IEMCI/UFPA por todos os ensinamentos que me instruíram até aqui.

Ao meu respeitado orientador Prof. Dr. Saddo Ag Almouloud por suas horas dedicadas ao meu trabalho, pela paciência, sabedoria e orientações prestadas no decorrer desta caminhada. O meu muito obrigado pelos ensinamentos e partilha de conhecimentos valiosos.

Aos professores. Doutores José Messildo Viana Nunes e José Carlos de Souza Pereira, primeiramentepela amizade e por seguinte por suas valiosas contribuições, enriquecendo o meu exercício do pensar científico e o trabalho aqui apresentado.

Ao Grupo GEDIM. pelas valiosas discussões, que muito contribuem para meu crescimento pessoal e profissional.

Ao meu esposo. Por todo apoio carinho e compreensão que sempre me dedicou nos momentos de angústia e aflição na busca e construção do meu crescimento profissional.

Aos meus pais e irmãos, que se fazem sempre presente na arquibancada da vida torcendo e incentivando cada passo meu conquistado até aqui. Meu mais sincero “muito obrigada!” sem o apoio de vocês, eu nada seria!

“Conhecimento é o segredo de um futuro brilhante. Lembre-se disso quando pensar em desistir “

Albert Einstein

RESUMO

O presente trabalho tem como objetivo realizar uma investigação nos livros didáticos do ensino médio da rede pública paraense afim de identificar o modelo epistemológico dominante na exposição do conteúdo de geometria analítica, em particular, o estudo da geometria das cônicas, tomando-se como referência a teoria antropológica do didático (TAD) de Yves Chevallard (1999) e o modelo epistemológico de referência desenvolvidos por Benito (2019), em sua tese de doutorado. A metodologia adotada foi a pesquisa qualitativa de cunho documental. A escolha dos livros se deu de acordo com a aquisição dos mesmos na rede pública e com base no Programa Nacional do Livro Didático (2020). Buscamos ainda, realizar um levantamento de estudos científicos, como os de: Macena (2007), Oliveira (2011), Siqueira (2016) e Jesus (2017), para compreender de que forma a aprendizagem das cônicas desenvolve-se no Ensino Médio. Em relação às análises realizadas, identificamos que apesar de haver uma distinção entre a predileção dos autores a respeito de qual geometria trabalhar no ensino e na aprendizagem de cônicas, a geometria analítica se sobressai em relação à geometria sintética. Conclui-se assim, que o conteúdo sobre as Cônicas, ainda recebe um tratamento muito algebrizado na educação básica.

Palavras-chave: Modelo Epistemológico de Referência. Teoria Antropológica do Didático. Praxeologias. Cônicas.

ABSTRACT

The objective of this work is to carry out an investigation into high school books from public schools in Pará, in order to identify the dominant epistemological model in exposing the content of analytical geometry, in particular, the study of the geometry of conics, taking it yves chevallard's (1999) anthropological theory of didactics (TAD) and the reference epistemological models developed by Benito (2019), in his doctoral thesis, were used as reference. The adopted methodology was the bibliographical qualitative research. The choice of books was made according to their acquisition in the public network and based on the National Textbook Program (2020). We also seek to carry out a survey of scientific studies, such as those of: Macena (2007), Oliveira (2011), Siqueira (2016) and Jesus (2017), to understand how the learning of conic figures develops in High School . Regarding the performed analyses, we identified that although there is a distinction between the authors' predilection regarding which geometry to work on teaching and learning conics, analytical geometry stands out in relation to synthetic geometry. It is thus concluded that the content on Conics still receives a very algebraic treatment in basic education**.**

Keywords: Epistemological Model of Reference. Anthropological Theory of Didactics. Praxeologies. Conics

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE SIGLAS

FNDE	Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação
GEDIM	Grupo de Estudos e Pesquisa em Didática da Matemática
ME	Modelo Epistemológico
MER	Modelo Epistemológico de Referência
MED	Modelo Epistemológico Dominante
OD	Organização Didática
OM	Organização Matemática
PEP	Percurso de Estudo e Pesquisa
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
PNLD	Programa Nacional do Livro Didático
TAD	Teoria Antropológica do Didático
UFPA	Universidade Federal do Pará

Sumário

INTRODUÇÃO

Ao ingressar na licenciatura, alguns alunos buscam, como primordial objetivo, tornar- se professor assim como eu. Ligado a esse desejo profissional, destacam-se diversos momentos da vida acadêmica que precisam ser traçados, bem como uma busca contínua por novas formas de ensino e aprendizagem no intuito de aliar teoria e prática para atingir a excelência na formação docente.

Ao longo das experiências vivenciadas em minha vida acadêmica, desde a escola regular até universidade, identifiquei uma defasagem de conhecimento na disciplina de Geometria Analítica, mais especificamente nos assuntos de cônicas, bem como uma notória dificuldade dos alunos do ensino médio na compreensão dos referidos assuntos. Isso ficou bem mais evidente na experiência de prática docente, proporcionada pelo estágio obrigatório durante a graduação.

Naquela ocasião, como futura docente de matemática, surgiu o interesse em realizar pesquisas voltadas para essa parte do conhecimento, no intuito de identificar e entender as dificuldades apresentadas não só por mim enquanto aluna, como também, para outros estudantes do ensino médio que partilhavam da mesma arduidade. Compreendo assim, que realizar tal investigação auxiliou não só a mim, enquanto profissional em formação inicial, como também muitos colegas recém-formados. Além disso, serviu como um importante instrumento para o estudo da complexidade envolvida nos processos de ensino e aprendizagem do objeto Cônicas.

A escolha por investigar o livro didático e seus recursos metodológicos se deu devido à conscientização, advinda do contato com alunos mais humildes que mesmo atualmente, apesar do vasto avanço tecnológico, ainda não possuíam acesso fácil a internet. Sendo assim, faziam do livro sua única fonte de conhecimento segura.

Movida pela importância deste recurso didático milenar, busquei estudos e metodologias que revelassem a preocupação com o ensino e a aprendizagem das Cônicas, deparei-me com a tese de doutorado de Benito (2019), na qual o autor buscou em seus estudos construir um Percurso de Estudo e Pesquisa (PEP) para formação inicial de professores, com alunos da graduação de Licenciatura em Matemática dos estados de São Paulo e Sergipe, pautando-se em um Modelo Epistemológico de Referência (MER) elaborado pelo próprio autor, no qual aborda os tipos de geometria (analítica, sintética...) encontradas nos livros didáticos dos referidos estados (São Paulo e Sergipe), e ao coletar tais dados, o pesquisador elaborou então sua proposta de PEP, voltado para o ensino desse objeto matemático a partir da construção de um fogão solar como ponto de partida para a abordagem de conceitos, elementos e aplicações das cônicas: elipse, parábola e hipérbole.

No entanto, no desenvolvimento de sua pesquisa e por imprevistos ocorridos ao longo de sua trajetória, o autor relata que só foi possível a abordagem da cônica parábola em ambos os estados, não concluindo assim o estudo das demais cônicas (elipse e hipérbole). Motivada por essa ideia incompleta, surgiu o interesse em dar continuidade nos estudos que iniciei na graduação e utilizar-me do MER desenvolvido por Benito (2019), para que fosse possível identificar o modelo de geometria utilizado como referência dominante (MED) nas escolas públicas do estado do Pará, bem como, posteriormente, avançar nos estudos em uma futura tese de doutorado e contemplar um PEP que seria desenvolvido por mim que permitiria, desta vez, comtemplar as três cônicas (Elipse, parábola e Hipérbole).

Nesse sentido, considero a identificação de um Modelo Epistemológico de Referência dominante (MED) em livros didáticos da rede pública paraense, pertinente para contribuição, não somente, da compreensão de como está exposta uma forma de ensinar esse objeto matemático nas escolas públicas do estado do Pará como também, de suma importância para que, de posse desses resultados, seja possível fazer, posteriormente, uma avaliação na perspectiva de modificar, caso seja necessário, as organizações praxeológicas existentes nesse importante recurso didático de ensino utilizado desde a formação inicial e continuada de professores de matemática, quanto para a prática docente escolar na busca contínua de melhoria no ensino e aprendizagem dos mais diversificados conteúdos matemáticos.

Ao considerarmos os aspectos destacados nos parágrafos anteriores, a proposta desta pesquisa pauta-se nos conhecimentos que nortearam a tese de doutorado de Benito (2019), mais precisamente, nos estudos desenvolvidos no Modelo Epistemológico de Referência (MER), criado pelo autor visando, por meio deste, identificar quais as organizações praxeológicas dominantes sobre cônicas presentes nos livros didáticos da rede pública, do Programa Nacional do Livro Didática 2020 (PNLD) de matemática do Ensino Médio do estado do Pará. Nesse sentido,temos a questão norteadora a responder:

Qual é o modelo de referência dominante presente nos livros didáticos de matemática do ensino médio, mais adotados na rede pública do estado do Pará, a respeito do ensino de cônicas, elipse, parábola e hipérbole?

Ao visar um melhor balizamento das ações que serão desenvolvidas ao longo da pesquisa, tendo em vista responder à questão norteadora, foi estabelecido o objetivo geral e os objetivos específicos, os quais descrevo a seguir:

Na realização do presente estudo estabelecemos como objetivo geral:

- *Realizar uma investigação nos livros didáticos do ensino médio adotados na rede pública paraense mais utilizados a fim de identificar o modelo epistemológico dominante na exposição do conteúdo de Geometria Analítica, em particular, o estudo da geometria das Cônicas, tomando-se como referência a Teoria antropológica do didático (TAD) de Yves Chevallard (1999) e o modelo epistemológico de referência desenvolvido por Benito (2019), em sua tese de doutorado*

Para atingi-lo, tem-se como objetivos específicos:

- *Revisar a literatura pertinente ao objeto de estudo da pesquisa;*

- Realizar um levantamento dos 2 livros mais utilizados até o presente momento (2022) pela rede de ensino pública paraense, de acordo com os dados dispostos no site do Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação (FNDE), a fim de fazer a análise proposta nesta pesquisa nestes livros didáticos *relativo à parábola, elipse e hipérbole;*

- *Analisar o Modelo Epistemológico dominante das organizações praxeológicas* sobre cônicas *presentes nos livros didáticos da rede pública estadual (PNLD 2020) de matemática do Ensino Médio paraense.*

Vislumbrando, uma melhor compreensão acerca da visão geral que estrutura tal pesquisa destacaremos a seguir as metodologias utilizadas bem como um breve resumo do que encontraremos ao longo dos capítulos.

O presente estudo é composto por 4 capítulos.

No capítulo 1, estão descritos os caminhos que foram tomados para a realização da pesquisa perpassando desde metodologia adotada na escolha dos livros didáticos e na abordagem dos estudos aqui ressaltados, como também uma breve descrição do que será visto posteriormente.

Ao adentrarmos no capítulo 2**,** apresento-lhes as pesquisas em educação matemática concernentes á temática aqui abordada bem como, uma breve, mas pertinente, explanação dos elementos teóricos da Teoria Antropológica do Didático (TAD) necessários como: noções de organização praxeológica ou praxeologia **-** Organização matemática (OM) e Organização didática (OD).

No capítulo 3, é explicitado o modelo epistemológico (ME) de Benito (2019), cujo a pesquisa tornou-se de suma importância para a construção dos alicerces desta investigação metodológica, uma vez que se tomou tal modelo como base de referência para o desenvolvimento investigativo almejado.

Já no capítulo 4, debruço-me a expor as análises realizadas na busca pelo modelo epistemológico dominante (MED) presente nos livros didáticos analisados, respaldados no modelo epistemológico (ME) de Benito (2019) e por fim, indica-se as considerações finais do referido estudo.

CAPÍTULO 1: TRAJETÓRIA DE PESQUISA

No presente capítulo, expomos os encaminhamentos teóricos adotados para a realização desta pesquisa. Apresentamos assim, acerca da metodologia adotada tanto na pesquisa quanto na escolha dos livros que serão analisados, bem como a estrutura geral do trabalho.

A fim de esclarecer a metodologia e a estrutura geral presente nesta investigação, destacamos que nesta pesquisa utilizamos uma metodologia de aspecto qualitativo, que será desenvolvida alicerçada na Teoria Antropológica do Didático.

Tal metodologia, segundo Silveira e Cordova (2009), tem por característica compreender a totalidade do fenômeno, além da ênfase ao subjetivo como forma de compreender e interpretar as experiências, assim como, destacar a importância das interpretações dos eventos mais do que a interpretação do pesquisador.

Em relação ao método empregado, realizamos uma pesquisa bibliográfica de viés documental, com apoio de Gil (2008), quando aponta que representa uma modalidade de pesquisa que faz uso de materiais impressos, tais como livros, revistas, dissertações, teses e outros que auxiliam na análise do objeto de investigação.

Pesquisa Bibliográfica documental: é desenvolvida com base em material já elaborado, constituído principalmente de livros e artigos científicos. Não se recomenda trabalhos oriundos da internet. É muito parecida com a bibliográfica. A diferença está na natureza das fontes, pois esta forma vale-se de materiais que não receberam ainda um tratamento analítico, ou que ainda podem ser reelaborados de acordo com os objetos da pesquisa. Além de analisar os documentos de "primeira mão" (documentos de arquivos, igrejas, sindicatos, instituições etc.), existem também aqueles que já foram processados, mas podem receber outras interpretações (GIL, 2008 p.07)

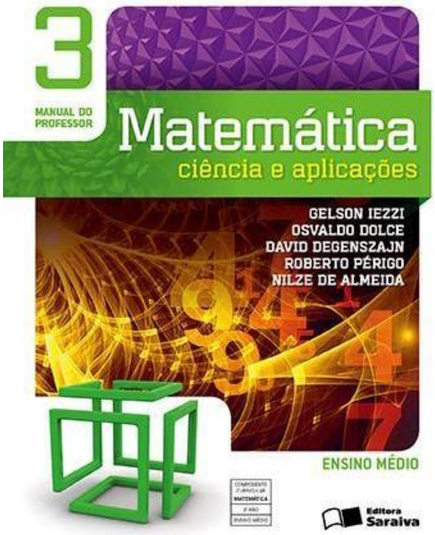
Na execução metodológica da pesquisa, o MER como proposta de organização praxeológica e a análise de dados, estarão apoiados nos pressupostos teóricos da Teoria Antropológica do Didático (CHEVALLARD, 1999, 2009), especificamente no que concerne à noção de praxeologia:

Para a realização de um levantamento de pesquisas que abordassem a respeito do ensino de Cônicas, utilizamos inicialmente, em sites de busca, tais como: Google e google acadêmico, no período de dezembro a fevereiro de 2023, os seguintes descritos: “Cônicas”, “ensino de Cônicas”, “análise de livros didáticos sobre Cônicas” e “análise praxeológica sobre Cônicas”. Cônicas”. Nossa busca ocorreu no final do segundo semestre de 2022 e no primeiro semestre do ano de 2023 e pela limitação de obras que realizassem especificamente um levantamento sobre as geometrias das cônicas ou até mesmo a análise praxeologia acerca da temática de nosso estudo, selecionamos as teses e dissertações que abordam apenas aspectos do ensino e aprendizagem do referido conteúdo matemático. Assim, destacam-se os trabalhos de Oliveira (2011), Siqueira (2016), Macena (2007) e Jesus (2017), os quais explanaram estudos sobre o assunto de diversas formas.

No que tange aos livros didáticos aqui analisados, salientamos que a escolha dos livros didáticos se deu mediante as indicações do Programa Nacional do Livro Didático- PNLD (2020). Desse modo, selecionamos os dois livros mais utilizados até o presente momento, pela rede de ensino pública paraense, segundo os dados dispostos no site do Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação (FNDE), que podem ser encontrados na aba do site denominada “sistema de distribuição de livros”, onde é possível realizar uma pesquisa detalhada a respeito da distribuição de livros em todo o brasil por meio de alguns parâmetros disponibilizados pelo site como: O ano e o programa didático em que deseja fazer a pesquisa, além da possibilidade de restringir a pesquisa por meio da unidade federativa e do município que deseja saber.

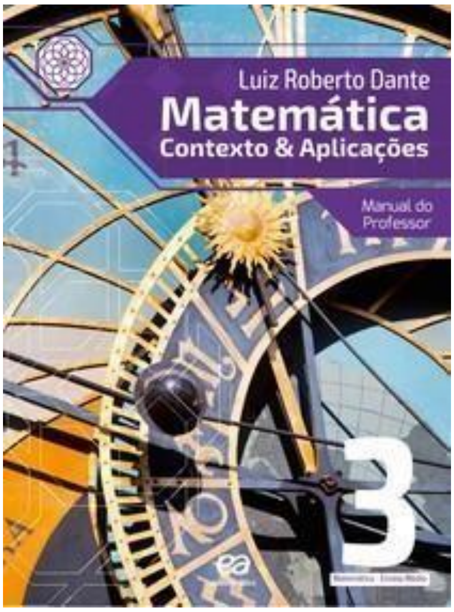
A seguir, indicamos as obras analisadas para nossa investigação:

FIGURA 1: CAPA DO LIVRO "MATEMÁTICA CIÊNCIA E APLICAÇÕES" (L1)



Fonte: Iezzi et al (2016)

Figura 2: "Capa do livro: *Matemática Contexto e Aplicações"* (L2)



Fonte: Dante (2016)

CAPÍTULO 2 - CAMINHO TEÓRICO

Neste capítulo, abordamos os encaminhamentos teóricos adotados para a realização desta pesquisa. Trazemos assim, acerca dos processos de ensino e de aprendizagem das Cônicas, bem como destacamos pesquisas correlatas sobre a temática em estudo. Além disso, abordaremos certos elementos da Teoria Antropológica do Didático, a qual serviu de subsídio para as análises dos dados alcançados.

Ao longo do tempo, pesquisadores e professores de matemática têm discutido quais são as melhores formas de ensinar e aprender tal disciplina, bem como as possíveis metodologias de ensino para as mais diversificadas áreas de conhecimento dela. Dentre suas vastas ramificações de ensino está o estudo de cônicas, relacionado com a Geometria Analítica. Segundo Miguel e Miorim (2005):

> Para além das dimensões científica e tecnológica, a Matemática se consolida como fundamental componente da cultura geral do cidadão que pode ser observada na linguagem corrente, na imprensa, nas leis, na propaganda, nos jogos, nas brincadeirase em muitas outras situações do cotidiano (p.378).

Diante disso, é inegável o quão participativa a matemática no cotidiano das pessoas, assim como a presença do conceito de cônicas nas práticas sociais, seja pelos seus aspectos físicos, que auxiliam no desenvolvimento das mais diversas áreas de conhecimento, a exemplo: as leis de Kepler na astronomia, os conceitos ópticos e acústicos, cujo as propriedades refletorasdas Cônicas atuam em objetos como espelhos, antenas parabólicas, ou seja pelas suas propriedades estéticas, que geralmente são encontradas em pontes, torres e etc.

Devido à riqueza das suas conexões e à frequente presença no cotidiano, poderíamos supor que o ensino de cônicas ocorreria de modo simples e que resultaria em uma efetiva aprendizagem do estudante. Entretanto, investigações acerca do ensino e aprendizagem de Geometria Analítica revelam que tal conteúdo não se apresenta de maneira tranquila por parte dos alunos, como aponta Andrade (2007):

> [...] escutamos dos alunos, inclusive daqueles que tinham desempenho satisfatório, ocomentário de que esta [geometria analítica] era a parte da matemática mais complicada e difícil, ocasionando, como consequência, baixo rendimento por parte destes, do ponto de vista da avaliação somativa (ANDRADE, 2007, p.22)

Alguns pesquisadores, no âmbito da Educação Matemática, como Siqueira (2016) e Macena (2007) acreditam que este distanciamento de afinidade dos alunos com esta parte de conhecimento da matemática é uma consequência da formação precária dos docentes em geometria, uma vez que a falta de preparo dos professores também se mostra como ponto determinante para gerar aversão pelo estudo da disciplina.

Por outro lado, existem também aqueles estudiosos como Oliveira (2011) e Jesus et al. (2017) que defendem a ideia de que a complexidade na compreensão e afinidade da disciplina se dá pelo fato de ela misturar mais de uma linguagem matemática, o que leva os alunos a um entrave de sua aprendizagem, uma vez que a incompreensão de qualquer uma delas se torna um fator dificultador da fluência de outros conteúdos matemáticos.

No que tange ao ensino, especificamente de Cônicas, Jesus et al. (2017) destaca que muitos alunos sentem dificuldade neste conhecimento matemático devido ao fato dele envolver mais de uma linguagem em seus conhecimentos, como por exemplo o da álgebra. Os autores também afirmam que:

> [...] As Cônicas pertencem à geometria analítica e esta, por sua vez, trabalha com geometria e álgebra, ou seja, nessa área da matemática são utilizados dois tipos de linguagem: a geométrica e algébrica. A confluência de duas ou mais linguagens dentrodos temas da matemática exige, por vezes, um grau de abstração e compreensão maisaprofundado, o que faz parecer aos olhos dos estudantes tratar- se de raciocínios complexos e quase inatingíveis. [..] (JESUS et al, 2017, p. 4)

Sobe esse enfoque, torna-se pertinente refletirmos acerca do mediador e principal responsável por amenizar tais aflições dos alunos, o professor. Sabe-se que na vida profissional,sobretudo na prática docente, é comum o professor se deparar com conteúdo que não foram trabalhados de maneira consistente em seu período de formação inicial. Isso causa, muitas vezes, uma certa insegurança ao ter que lecionar futuramente este conteúdo aos seus alunos, e como consequência pode causar certa negligência no ensino ou até mesmo, como qualquer serhumano passivo de erro, equivocar-se em aspectos conceituais.

Para amenizar os aspectos negativos supracitados, faz-se necessário a utilização, por parte do professor, de práticas de ensino, que possuam potencial para auxiliar o aluno no seu processo de aprendizagem e ter a clareza de que precisa analisar de forma crítica as organizações matemáticas (OM) e didáticas (OD) (CHEVALLARD, 1999; DELGADO, 2006), conforme proposto pela Teoria Antropológica do Didático (TAD), de materiais didáticos que possam auxiliar e assegurar a relação entre prática e teoria, para que ambas as partes resultem em uma boa atuação profissional e um processo de ensino eaprendizagem mais eficiente. Portanto, faz-se necessário e oportuno conhecermos alguns aspectos a respeito da Teoria Antropológica do Didático a fim de entendermos de que maneira essa teoria pode nos amparar na melhoria e elaboração de recurso didáticos.

2.1 TEORIA ANTROPOLÓGICO DO DIDÁTICO

A Teoria Antropológica do Didático, difundida a partir de 1992, tornou-se um importante aparato teórico nas discussões dentro do campo de conhecimento da Didática da Matemática, por intermédio das publicações de Yves Chevallard na França e, por demais colaboradores, como Bosch e Gascón, com debates feitos na Espanha. (SANTOS, 2020)

O tema central da teoria, que foi recentemente ampliada (CHEVALLARD, 1989), é o dos saberes e das instituições. Um saber não existe "no vácuo", em um vazio social: todo saber aparece em um determinado momento, em uma certa sociedade, ancorado em uma ou mais instituições (CHEVALLARD, 1989)

A TAD tem sua origem na abordagem teórica do conceito de transposição didática introduzido por Chevallard (1986), que caracteriza o papel do saber nas diferentes instituições, isto é, partindo do saber sábio, que corresponde ao: Saber do matemático de profissão, ao saber passado aos seus membros, por integrantes de uma tribo indígena, entre outros. Pois, nem todo saber sábio é acadêmico. *No entanto,* nos atearemos nesta pesquisa, ao saber matemático acadêmico, mais precisamente, a passagem do saber sábio ao saber a ensinar representado pela transposição feita pelos especialistas em Educação, geralmente apresentada nos documentos oficiais e nos materiais didáticos.

Ao refletirmos sobre a ação humana e a ação matemática percebemos que ambas são formadas por duas partes, as quais são dependentes uma da outra, sendo elas: a prática (do grego práxis) e o saber (do grego logos). Assim, Chevallard (1999) apresenta, no escopo teórico da TAD, a noção de praxeologia, a qual representa uma ferramenta importante para analisar práticas docentes e o saber matemático.

Conforme indica Chevallard (1999, apud ALMOULOUD, 2015) existem dois tipos de praxeologias (ou organizações), são elas: matemática (OM) e didática (OD). A organização matemática refere-se à organização do ensino da matemática que é possível de ser desenvolvida na sala de aula e a organização didática refere-se em como é feita a construção dos conteúdos a serem desenvolvidos. Assim sendo, Costa (2015) afirma que:

> Cada atividade matemática possui uma organização didática correspondente e que os conteúdos matemáticos, o conjunto de objetos matemáticos a serem trabalhos em sala de aula, apresentam uma forma específica de abordagem sendo necessário que o sujeito reorganize seus conceitos e mobilize seus saberes a respeito (p. 22).

Na TAD as praxeologias podem ser desenvolvidas por meio dos s guantescomponentes: Tarefa, Técnica, Tecnologia e Teoria. Dessa forma, Chevallard (1991, apud COSTA, 2015) considera as componentes tarefa e técnica como bloco do saber-fazer, enquanto as componentes tecnologia e teoria, considera como o bloco do saber.

Para apresenta cada uma dessas componentes praxeologias o teórico expresso notações próprias para identificá-las, tais como: *tarefa* pelo símbolo (t) *tipos de tarefas* pelo símbolo (T), *técnica* pelo símbolo (ô), *tecnologia* pelo símbolo(θ) e *teoria* pelo símbolo (Θ). Neste sentido, ilustramos abaixo com exemplos, cada componente praxeológico definido por Chevallard.

A ***tarefa*** é uma atividade específica, que Chevallard (1999) define como uma ação em que para executá-la, alguns conhecimentos serão mobilizados. (CHEVALLARD, 1999, apud COSTA 2015). Podemos citar como exemplo de *tarefa,* a seguinte situação em secções cônicas:

Tipo de tarefa (T): Determine a equação da parábola

Tarefa (t): Determinar a equação da parábola de foco (9,0) e diretriz x= -9

O exemplo acima mostra que a tarefa (t) está interligada com o tipo de tarefa (T) e pode ser identificada por meio de um verbo de ação que segundo Almouloud (2007, apud COSTA 2015), caracterizaria um gênero de tarefa, como:*determinar, calcular, resolver, localizar, somar, decompor,* os quais não determinam o conteúdo estudado. Para a resolução de um tipo de tarefa requer odesenvolvimento de uma técnica que atenda as necessidades da tarefa proposta.

Por isso, uma **técnica** é uma maneira de fazer ou realizar as tarefas t € T. Segundo Chevallard (1998), uma praxeologia relativa a um tipo de tarefa T necessita, em princípio, de uma técnica (ô) que venha acompanhada de uma justificativa para a sua aplicação. Portanto, a escolha da técnica não representa uma decisão aleatória, pois não se usa qualquer técnica para resolver uma tarefa.

Técnica (ô): Como o vértice desta parábola está na origem, utilizaremos a equação y^2=4 cx onde c é a distância do foco ao vértice que por sua vez será calculado utilizando a fórmula d(F,V) =$\sqrt{(x2 - x1)^2 + (y2 - y1)^2}$

- **RESOLUÇÃO**

Figura X: Resolução do exemplo proposto

O foco é F (9, 0) e o vértice é V (0, 0)

Portanto o valor de c é:

$c = d(F, V) = \sqrt{9^2 + 0^2} = 9$

Usando a equação

$y^2 = 4cx$

Temos:

$y^2 = 4.9.x$

$y^2 = 36x$

Fonte: Autores

Para o exemplo mencionado acima, definimos uma técnica (ô), que nos auxiliou na resolução de uma tarefa. A este bloco, constituído por um tipo de tarefa e uma técnica, Chevallard (1999) denomina-se de bloco *PRÁTICO-*

TEÓRICO , identificado como um *saber-fazer*. No entanto, como já mencionado acima, toda técnica precisa ser justificada por meio de um discurso lógico (logos) que lhe sustenta, tal discurso é chamado por tal estudioso de tecnologia (θ).

A **tecnologia (θ)**, no âmbito da TAD, é definida inicialmente como um discurso racional sobre uma técnica, cujo primeiro objetivo consiste em justificá-la racionalmente, isto é, em assegurar que a técnica permita que se cumpra bem a tarefa do tipo T.

Ao considerar o exemplo inicialmente utilizado e a técnica usada para a resolução dessa tarefa, é possível justificá-la por meio da fórmula de distância entre dois pontos e das propriedades das operações algébricas utilizadas quandose tem uma equação da parábola com o vértice da origem.

No entanto, **a teoria (Θ)** tem como objetivos justificar e esclarecer a tecnologia, bem como tornar inteligível o discurso tecnológico. Passa-se então a um nível superior de justificação-explicação produção, [...] retomando com relaçãoà tecnologia o papel que esta tem em relação à técnica. A este Bloco, referente ao papel que a tecnologia e a teoria possuem em relação a técnica, Chevallar (1999) denomina de bloco tecnológico-teórico (θ/Θ), o qual está relacionado como saber. O autor adverte, no entanto, que geralmente essa capacidade de justificare de explicar a teoria é quase sempre obscurecida pela forma abstrata como os enunciados teóricos são apresentados frequentemente (CHEVALLARD, 1998 apud ARAUJO, 2009). No caso exemplificado acima, é possível considerar algunscampos da matemática como: Geometria, Geometria analítica e álgebra.

Barbosa e Lins (2011) afirmam que uma organização matemática é elaborada em torno de uma noção, ou conceito, inerente à própria Matemática. As Praxeologias Didáticas ou Organizações Didáticas são as respostas (a rigor) a questões do tipo “como realizar o estudo de determinado assunto”. Refere-se ao modo que possibilita a realização do estudo de um determinado tema , o conjuntode tarefas, de técnicas, de tecnologias, etc., mobilizadas para o estudo de um tema.

Posto isso, acreditamos que a TAD é fundamental para a análise completa da organização didática e matemática nos livros didáticos escolhidos. Por tal razão, utilizaremostal teoria, por meio da análise praxeológica, para identificar as tarefas presentes em livros didáticos do ensino médio acerca do conteúdo de cônica.

Além disso, diante de tudo que foi exposto até aqui, é perceptível que o processo de ensino dos conteúdos matemáticos, em qualquer nível, tem a sua finalidade direcionada para a aprendizagem, tal processo vem alicerçado nos dispositivos de análise metodológicas de ensino que buscam a compreensão dos conceitos matemáticos de maneira representacional, estrutural e funcional. Uma importante contribuição para o ensino desses conceitos foi a criação de recurso metodológico denominado de Modelo Epistemológico de Referência (MER) e Modelo epistemológico dominante (MED) no âmbito da TAD (CHEVALLARD, 2009).

Para Benito (2019) o modelo epistemológico de referência se mostra como uma ferramenta de trabalho técnico-experimental, capaz de ser usado e ampliado de acordo com a necessidade da investigação, o autor ressalta ainda que:

> No âmbito da TAD, devemos ter uma referência epistemológica para nos guiar durante uma investigação em Educação Matemática e nos fornecer condições e princípios que nos permitem entender os fenômenos didáticos por uma perspectiva diferente daquela encontrada na literatura atual, muito mais suscetível de interferências humanas. Essa referência epistemológica é apresentada atualmente na TAD como Modelo Epistemológico de Referência (MER)-(BENITO, 2019, p.53)

Para Guadagnini e dias (2022) cujos estudos pautaram-se no desenvolvimento de um modelo epistemológico de referência para o ensino de fatoração, implementado por meio de um percurso de estudo e pesquisa no ensino fundamental, esses modelos, tanto o (MER), quanto o (MED) estão centrados no ensinar e aprender a fatoração, assim a construção de um MED depende da interpretação do MER, uma vez que MED, ainda na opinião dos autores, mantém-se implícito, não sendo questionado e justificado explicitamente fazendo-se uso apenas de critérios genéricos do senso comum.

A respeito destes modelos de organizações (matemática e didática), presente no desenvolvimento de cada modelo (MER e MED) citado acima Bosch e Gascón (2010, p. 62) salientam que:

> Entre as organizações matemáticas escolares e as correspondentes organizações didáticas, podemos considerar modelos didáticos de referência que sejam, em primeira instância, específicos de um tema, de um setor, ou de um domínio da Matemática escolar. Porém, igualmente ao que se passa com o MER, a estrutura e a dinâmica dos citados MED devem ser coerentes com um modelo didático de referência geral, cuja descrição se formula no nível da disciplina (Matemática, neste caso)

Portanto, para encontrarmos o Modelo Epistemológico Dominante presente nos livros didáticos da rede pública de ensino paraense a respeito do ensino de cônicas, torna-se de suma importância termos conhecimento, não somente das organizações praxeológicas propostas por Chevallard, como também as organizações didáticas presentes no modelo epistemológico de referência (MER), elaborado por Benito, que serviu como alicerce fundamental nos meus estudos para a construção da presente pesquisa.

A vista disto, torna-se oportuno aliarmos os conhecimentos abordados no modelo epistemológico (MER) de referência de Benito (2019), com os materiais didáticos, mais utilizados em nosso estado, para que seja possível aprofundarmos nossos conhecimentos a fim de obter clareza e compreensão acerca de quais os tipos de modelos epistemológicos encontram-se de forma dominante, nos livros didáticos, para o ensino de cônicas no ensino médio da rede pública paraense.

Almejando uma maior compreensão acerca dos modelos epistemológicos que perpassam o ensino-aprendizagem das figuras cônicas bem como um maior entendimento do que, de fato, buscaremos em nossa investigação, explanaremos a seguir o modelo epistemológico de referência (MER) de Benito.

CAPÍTULO 3 - UM MODELO EPISTEMOLÓGICO DE REFERÊNCIA PARA O ENSINO DE CÔNICAS

Neste capítulo, exporemos não somente o modelo epistemológico de referência de Benito, cujo conteúdo nos orientará pelo resto da pesquisa, como também conheceremos um pouco mais dos tipos de geometrias existentes em seu modelo.

Em seus estudos para a construção de sua tese de doutorado, Benito (2019) desenvolveu um modelo epistemológico de referência para o estudo das cónicas por meio de questões técnicas e teóricas. Das quais, segundo o autor as primeiras contemplam as particularidades matemáticas presentes em cada modelo de geometria apresentado por ele. E as últimas, por sua vez, são aquelas que nortearam a construção do MER propriamente dito.

Por se tratar aqui de um estudo cujas análises basearam-se nos modelos das geometrias construídos por esse autor, não nos ateremos aos questionamentos iniciais das questões teóricas e técnicas que deram origem aos encaminhamentos desses modelos. Mas sim, o entendimento do que é e o que aborda, matematicamente, cada modelo proposto, para que desta forma seja possível, dentro dos conhecimentos aqui adquiridos, nos pautarmos em cada modelo para realizar as análises nos livros didáticos escolhidos.

De posse dos devidos esclarecimentos, torna-se pertinente antes de adentramos em cada modelo, entendermos o que o autor entende por geometria. A respeito de tal temática, Benito (2019, p. 55) afirma:

> Para nós, chamaremos de “protogeometria” um par formado por um conjunto de pontos e um conjunto de retas, em que uma reta é um conjunto de pontos. Quando a este par são acrescentadas relações entre seus objetos (pontos e retas) este passa a ser chamado de “geometria”. Por sua vez, as cônicas passam a ser elementos de algumas geometrias quando a estas são acrescentadas métricas (distâncias). Sendo assim, o que apresentamos no MER a seguir são modelos de geometrias em que as cônicas estão presentes

Em seus estudos, o autor subdividiu a geometria das cônicas em três modelos, a saber: *O modelo da Sintética, analítica e por último, o modelo da geometria linear*. No entanto, abordaremos adiante, apenas os dois primeiros modelos citados, pois o modelo de geometria linear faz uma abordagem do conceito de cônicas em formato matricial, que só é visto em livros didáticos do nível superior, fato que o torna pouco relevante no itinerário de investigação desta pesquisa que se limita aos livros didáticos de nível médio de ensino.

Na medida em que a questão de pesquisa deste trabalho envolve a busca pelos tipos de geometria, torna-se pertinente fazer um levantamento sobre alguns estudos a respeito do que se entende pelo termo Geometria Sintética ou Geometria analítica, o qual historicamente, já foi abordado anteriormente por outros estudiosos.

No início do século XIX, de acordo com Lygeros (s.d.), Constantin Carathéodory publicou um artigo no Jornal da Universidade de Bruxelas, em 1900, onde destaca a importância da geometria, bem como a mudança da mesma com a introdução da geometria sintética. Com isso, em seu tratado para a Educação Matemática, Klein (1927) buscou analisar as diferenças que existem entre Geometria Analítica e Geometria Sintética, o qual, concluiu que a etimologia das palavras análise e síntese se referem a diferentes métodos de exposição. Assim, Klein (1927) destaca que:

> [...] Geometria sintética, aquela na qual as figuras se estudam em si mesmas sem intervenção alguma de fórmulas, enquanto na analítica essas se aplicam constantemente mediante o uso dos sistemas coordenados. Na realidade, a diferença entre ambas as espécies de Geometria é puramente qualitativa: segundo que predominem as fórmulas ou as figuras, se tem uma ou outra Geometria, já que uma Geometria Analítica não pode, sem perder seu nome, prescindir em absoluto da representação geométrica, nem pelo contrário, a Geometria Sintética pode ir muito além sem expressar de um modo preciso, com fórmulas adequadas, seus resultados. (pg. 73-74).

Para Courant e Robbins (2000), a Geometria Sintética pode ser encarada como um método de tratamento da Geometria, do qual Euclides já se utilizava. A respeito disso, os autores afirmam:

> [...] é o método clássico de Euclides, no qual o assunto é construído sobre fundamentos puramente geométricos independentes da álgebra e do conceito de contínuo numérico e no qual os teoremas são deduzidos por raciocínio lógico a partir de um corpo inicial de proposições denominadas axiomas ou postulados. (p. 201)

Gascón (2002), destaca em sua obra que na época em que Descartes começou a envolver coordenadas aos entes geométricos “vários matemáticos importantes (Poncelet, Chasles e Monge, entre outros), reivindicaram a importância dos métodos sintéticos da geometria pura, que proporcionam provas simples e intuitivas, frente aos potentes métodos analíticos, que não revelam o significado que se recebe" (p. 13). Em sua pesquisa o autor questiona ainda a descontinuidade dos ensinos das geometrias existente nos currículos na Espanha do ensino secundário e do bacharelado.

A respeito desta descontinuidade no ensino das geometrias nos currículos escolares, Leivas (2017) citando Gascón (2002) afirma que tal fato "não deixa de ser similar ao que ocorre no Brasil, em que a Geometria Analítica prioriza a álgebra e as fórmulas em função da geometria dos entes envolvidos. Para ele, o ensino de Geometria atual, entre outros aspectos, dá conta da falta de trânsito e complementariedade entre Geometria Sintética e Analítica, ou seja, vivem em mundos separados." (p.31)

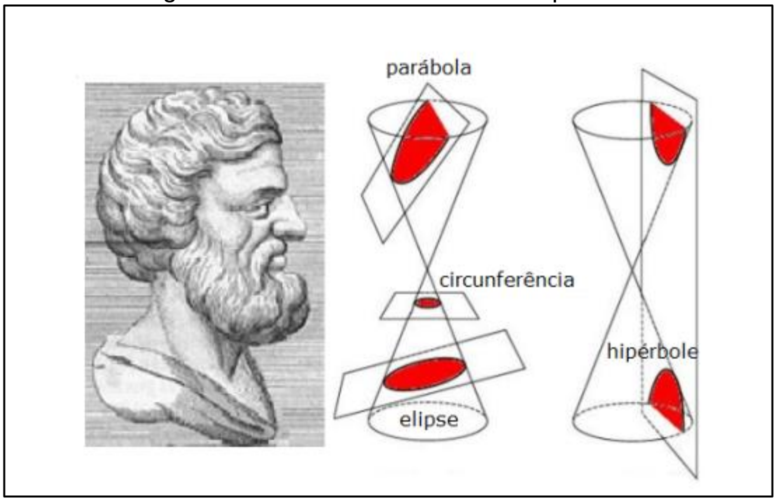
A seguir, destacaremos o que é o modelo de cada geometria segundo os estudos de Benito (2019) em sua tese de doutorado.

3.1 O MODELO DA GEOMETRIA SINTÉTICA

O modelo da geometria sintética, é aquele que segundo o autor, possibilita trabalhar as definições das cônicas de forma mais intuitiva e ilustrativa. Além, de ser possível abordar também conceitos, tanto no espaço como no plano, tal como: Reta diretriz, foco, eixos de simetria, excentricidade.

Para o desenvolvimento dessas ideias, o autor buscou inicialmente o corte das cônicas realizado por Apolônio de Perga (262-190 a.C), cujos estudos abordavam diversos cortes cônicos realizados por um plano em um cone, por diferentes ângulos, onde cada corte se dava de forma diferentes do outro, surgindo também figuras geométricas distintas.

Figura 3: cônicas de acordo com Apolonio



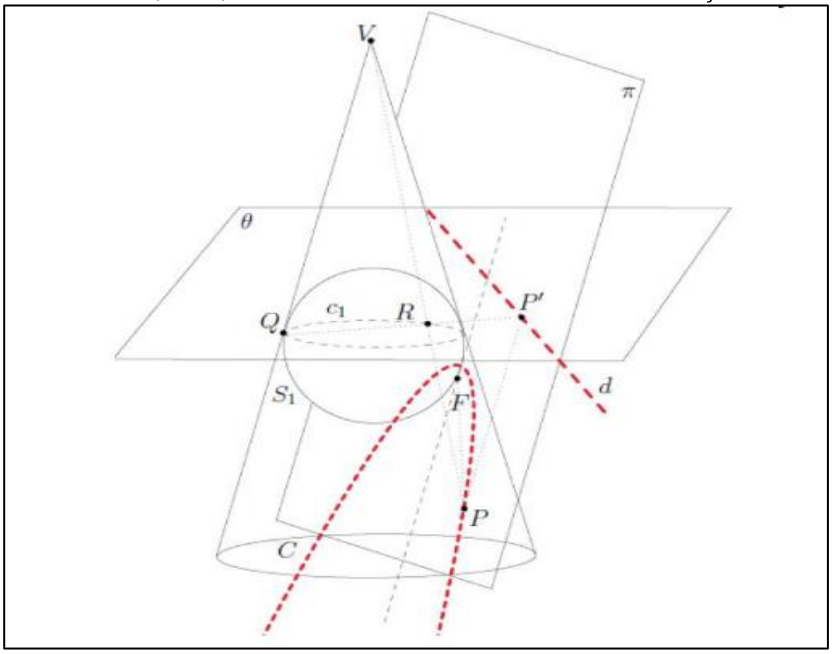
Fonte: Lino (2018, p.13)

O autor explica que com esta representação (Figura 3), baseada no corte das cônicas, Apolónio não conseguiu mostrar os principais elementos destas cuvas como: Focos, diretrizes e eixos focais. No entanto, o autor ressalta que foi possível perceber o trabalho da geometria sintética no espaço, bem como classificar o tipo de cônica encontrada, devido a descoberta da excentricidade, como podemos ver no trecho a seguir:

> por meio de esferas inscritas no cone que tangenciam, simultaneamente, o cone e o plano que contém a cônica identificaram estes elementos trabalhando na geometria sintética no espaço. Além disso, conhecendo o foco e a reta diretriz de uma cônica é possível determinar a razão entre as medidas das distâncias $d1$ (distância de um ponto fixo P da cônica até seu foco) e $d2$ (distância deste mesmo ponto P até a reta diretriz associada a este foco). Essa razão. (BENITO, 2019, p.58)

Com o passar dos anos e a evolução cientifica, estudiosos como Dandelin e Quételet, segundo Benito (2019), foram se aprimorando e aprofundando estes estudos e ao inscreveram esferas em um cone intercetado por um ou mais planos conseguiram determinar os elementos das cônicas (parábola, elipse e hipérbole) geradas por esta intersecção ainda por meio de cortes geométricos (Figura 4).

Figura 4: Parábola, foco, eixo de simetria e reta diretriz – construção de Dandelin

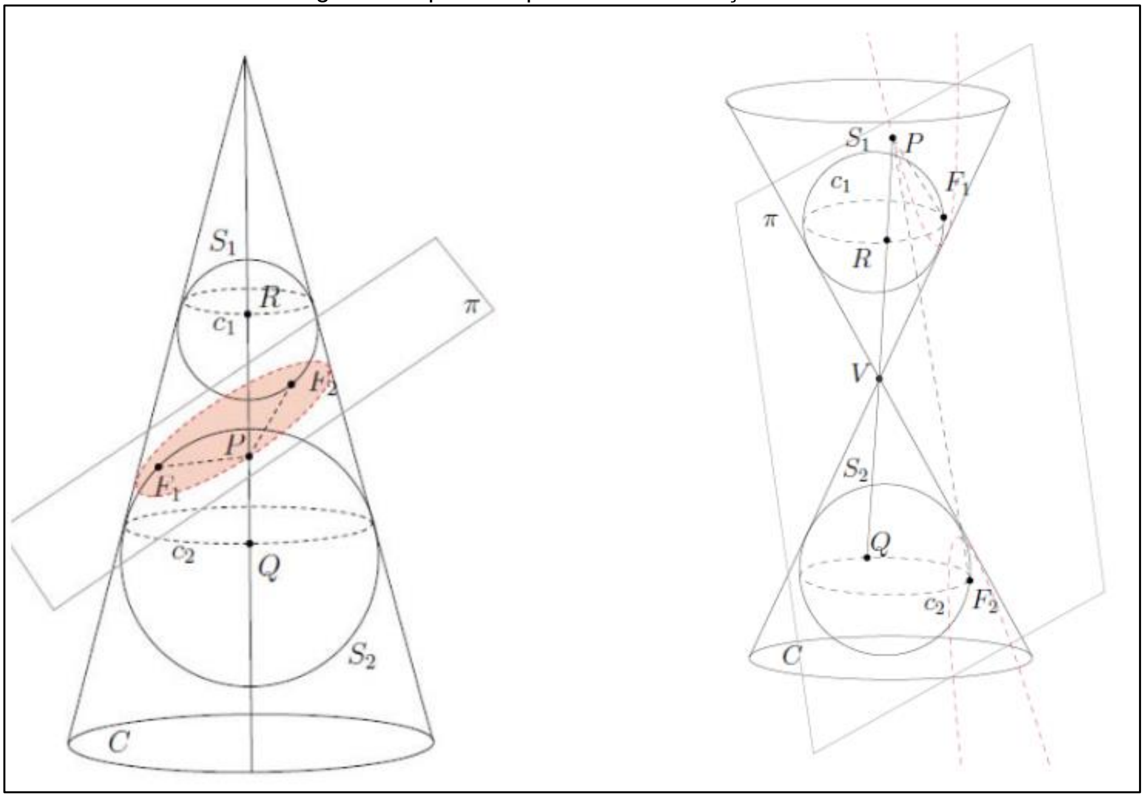


Fonte: Benito (2019, p. 59 apud MONTEIRO, 2014, p. 12)

Na figura 4 O ponto F representa o foco da parábola e sua diretriz d é a reta de interseção entre π e o plano θ, que corta o cone e contém a circunferência $C1$. Nessa situação é possível também determinar o eixo de simetria (ou eixo focal) da parábola na interseção de um terceiro plano, determinado pelo eixo central e o ponto F com o plano π.

Já nas figuras cônicas elipse e hipérbole o autor, destaca que a descoberta de seus elementos por Dandelin e Quételet ocorreu de forma semelhante, uma vez que a obtenção dos dois focos (F e F') se deu a partir de duas esferas inscritas em um cone e duas retas diretrizes (uma para cada foco) para cada uma destas cônicas como mostra a Figura 5.

Figura 5:Elipse e Hipérbole - construção de Dandelin



Fonte: Benito **(**2019, p. 59 apud MONTEIRO, 2014, p. 13)

Além do corte das cônicas, o autor aborda ainda, como parte integrante do modelo de geometria sintética, o ensino de cônicas por meio do conceito de lugar geométrico, e chama atenção do leitor para a relação existente entre lugar geométrico e excentricidade de uma cônica, que segundo Benito (2019) Uma cônica é todo lugar geométrico dos pontos de um plano cuja razão entre as distâncias a um ponto fixo F e a uma reta fixa d é uma constante ε chamada de excentricidade.

Na sequência, o ator destaca que na geometria sintética, o conceito de lugar geométrico pode ser abordado de diversas formas que permitem a percepção visual do formato da cônica de maneira intuitiva e gradativa, além do desenvolvimento de um discurso por parte do aluno, que justifique a construção daquela figura como, por exemplo: As construções por dobraduras, por fio esticado (barbante) ou até mesmo meios com uma interação digital como o software Geogebra.

A construção das cônicas por meio de dobraduras é feita a partir de retas tangentes a elas, produzidas por vincos feitos em papel vegetal a cada dobra realizada. O autor especfica uma técnica para cada cônica. Para a parábola, Benito afirma que basta desenhar em uma folha de papel vegetal uma reta cujo o autor denominou de “d” e um ponto “F” que será o foco, desde que $F \notin d$. Depois basta escolher um ponto qualquer pertencente a reta “d” e fazer uma dobra de maneira que tal ponto se torne coincidente com o ponto F. O pesquisador afirma que ao repetirmos o passo anterior considerando o máximo de pontos da reta perceberemos visualmente uma parábola tangenciando todas essas dobras realizadas como podemos ver na figura 6.

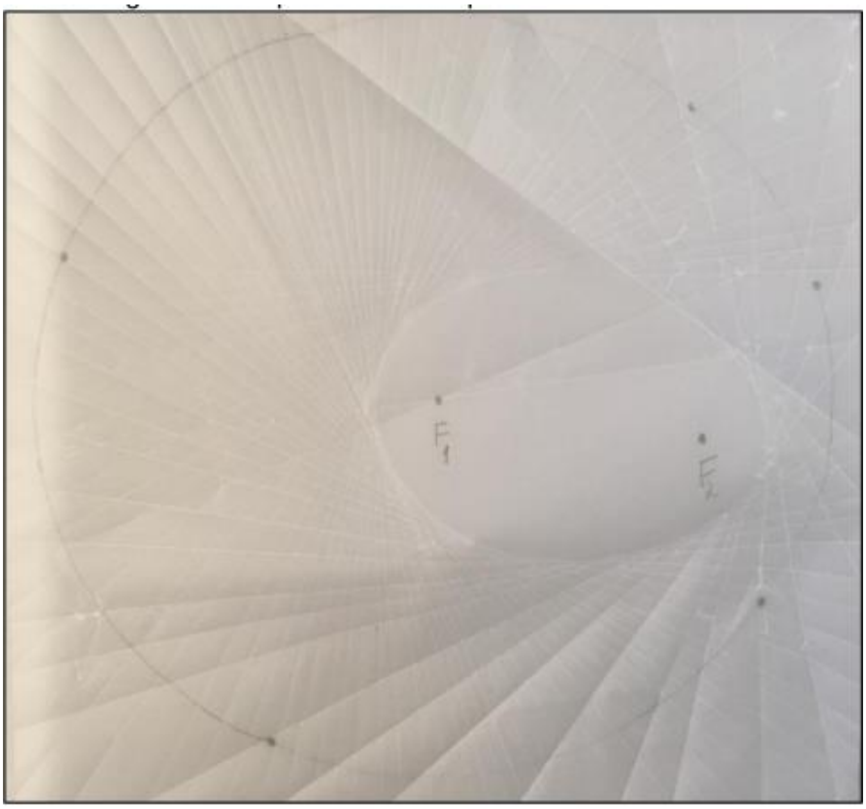
Figura 6: Parábola construída por dobraduras

Fonte: Benito (2019, p.62)

Na construção da elipse, o autor nos orienta, ainda no papel vegetal, a traçarmos uma circunferência com raio “R” e denominarmos seu centro de F1. Na sequência devemos marcar um outro ponto fixo qualquer, diferente de F1, no interior do círculo, cujo nome será F2. Como F2 ≠ F1, tem-se, portanto os dois focos da elipse (F1 e F2) . Em seguida, Benito, nos orienta a escolher um “ponto de partida” pertencente à circunferência e após a escolha, devemos fazer uma dobra de forma que F2 coincida com o referido ponto escolhido.

Diante disso, o pesquisador afirma que basta repetimos o passo anterior com o máximo de pontos possíveis, de forma que percorra toda circunferência, para que seja possível notar, a elipse (Figura 7) se formando em meio as dobraduras como mostra a ilustração adiante.

Figura 7: Elipse construída por dobraduras

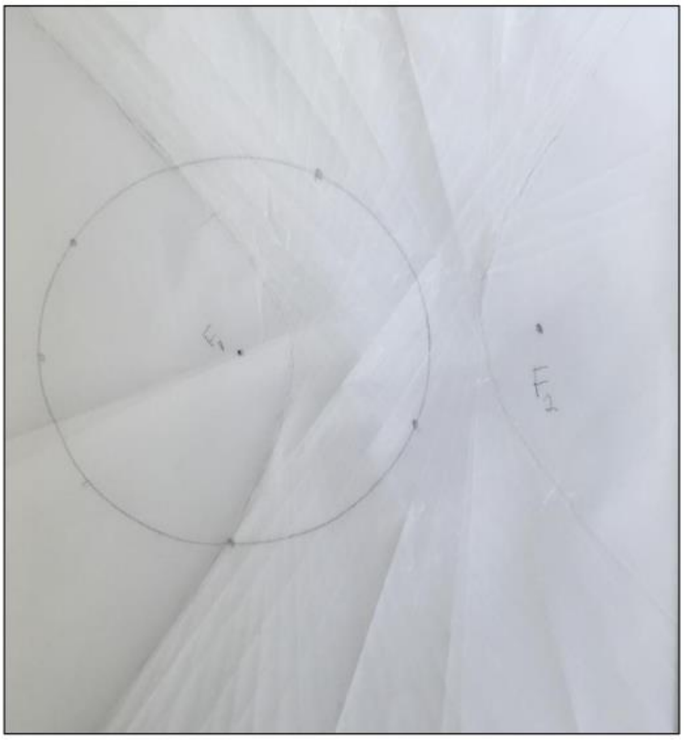


Fonte: Benito (2019, p.64)

Já na construção da hipérbole, o autor ressalta que se dá de forma similar a construção ocorrida na elipse, uma vez que Assim como feito na construção da elipse, no papel vegetal, devemos traçar uma circunferência de raio “R” e denominarmos seu centro de F1. Na sequência devemos marcar também um outro ponto fixo qualquer, diferente de F1, mas desta vez, este ponto deve estar no exterior do círculo, cujo nome será F2. Teremos assim os dois focos da hipérbole (F1 e F2). Em seguida, Benito, nos orienta a escolhemos um “ponto de partida” pertencente à circunferência, e fazer uma dobra de forma que F2 coincida com o referido ponto escolhido da mesma forma que foi feito na elipse.

Diante disso ao repetimos o passo anterior com o máximo de pontos possíveis, de forma que percorra toda circunferência, para que seja possível notar, visualmente os dois ramos da hipérbole tangenciando os vincos que foram construídos como vemos na Figura 8.

Figura 8:Hipérbole construída por dobraduras

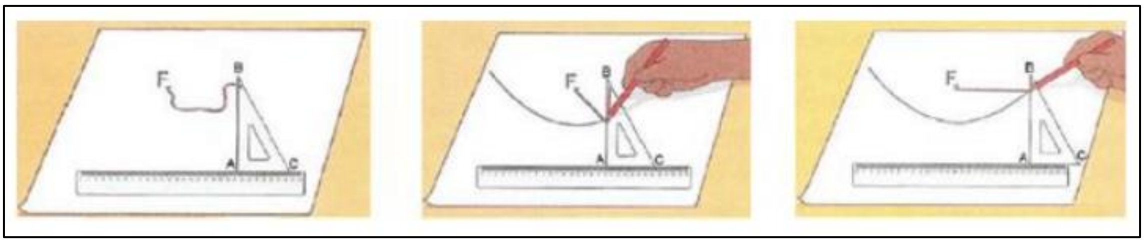


Fonte: Benito (2019, p.65)

A segunda metodologia de ensino exposta por Benito (2019), como parte integrante nos processos de ensino e de aprendizagem de cônicas por meio do conceito de lugar geométrico é a utilização do método “Fio esticado”, que trata de uma construção interativa das figuras cônicas que pode ser realizada em sala de aula com o auxílio de materiais simples como tachinhas, barbante, régua, lápis e esquadro.

Para a construção da Parábola utilizando o método do fio esticado, o autor baseando- se nos estudos de Siqueira (2016, considera uma das extremidades do barbante fixo num ponto e o outro se movimenta em um esquadro para a direita e esquerda, conforme ilustrado na Figura 9.

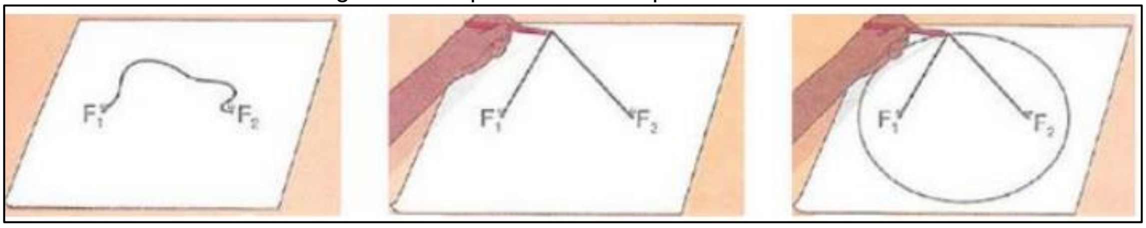
Figura 9: Parábola construída por fio esticado



Fonte: Benito (2019, p.67)

Para o estudo da elipse, com o método do fio esticado, foi pedido aos alunos que fixassem duas extremidades (F1 e F2) de forma que com um lápis, pode-se esticar o barbante em seguida, o autor pede que o barbante seja rotacionado ao redor dessas extremidades surgindo assim a Figura 10.

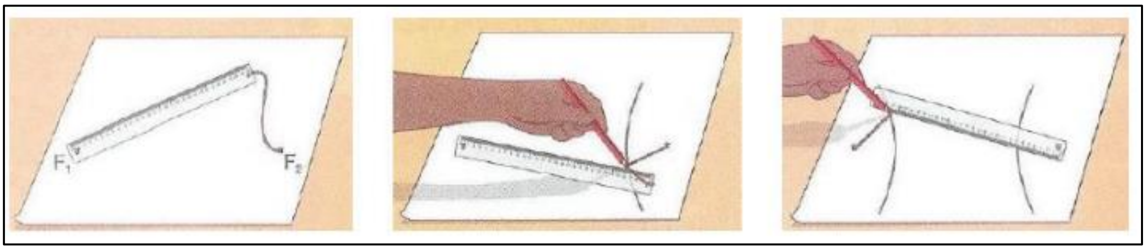
Figura 10: Elipse construída por fio esticado



Fonte: Benito (2019, p.67)

Já na construção da Hipérbole com o método do fio esticado, em uma barra de isopor o pesquisador orientou marcar dois pontos com a tachinha de modo que a "medida da distância entre eles deva ser maior que a diferença, em módulo, entre a medida do comprimento da régua e do barbante" (SIQUEIRA, 2016, p.82). Em seguida, os alunos investigados deveriam fixar uma das extremidades do barbante em um dos pontos com a tachinha e no outro fica uma das extremidades da régua. Assim, esticaram o barbante até tocar na outra ponta da régua e vai demarcando a Hipérbole.

Figura 11: Hipérbole construída por fio esticado



Fonte: Benito (2019, p.68)

Por fim, Benito (2019) afirma que ambos os métodos (Por dobraduras e o método do fio esticado) são de suma importância para a compreensão do conceito de cônicas abordadas pelo método do lugar geométrico. Pois esses métodos trazem em suas diferentes abordagens a compreensão das propriedades que tratam da soma e da diferença constantes de distâncias de um ponto da cônica aos seus focos de forma mais intuitiva.

No entanto, apesar de tais métodos servirem como um grande facilitador na compreensão da referida propriedade cônica, Benito (2019) acredita que o software Geogebra seja o ambiente ideal para ilustrá-los. E segue seus estudos orientando em como ilustrar tal propriedade.

A respeito da ilustração da elipse, utilizando o software GeoGebra, Benito (2019) destaca que:

> Para desenhar uma elipse basta selecionar a ferramenta com este nome, escolher $F1$ e $F2$ como focos e P como um ponto pertencente à curva. Em seguida, marcarmos um novo ponto B na elipse e traçamos os segmentos de reta $d1$ e $d2$, ligando o ponto B aos focos $F1$ e $F2$, respectivamente, exibindo o nome e a medida dos segmentos. Ao movimentarmos o ponto B sobre a elipse notamos que a soma das medidas dos segmentos $d1$ e $d2$ é sempre a mesma, isto é, $d(BF1)$ + $d(BF2)$ = k, $k \in \mathbb{R}$, para qualquer B pertencente à elipse. Assim, a elipse pode ser definida como o lugar geométrico dos pontos de um plano cuja soma das medidas das distâncias destes pontos a dois pontos fixos (focos) deste plano é sempre uma constante k, k maior que a medida da distância entre os focos, pois é necessário garantir a existência do triângulo $BF1F2$.

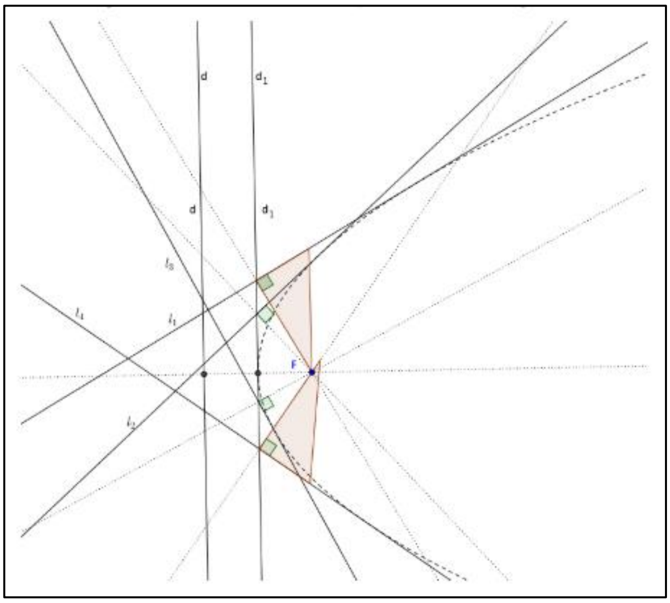
O autor segue esta mesma linha de orientação nas demais figuras (parábola e hipérbole). No intuito de ilustrar por meio da exploração visual, possibilitada pelas ferramentas do software Geogebra, o autor apresenta as características das propriedades que tratam da soma e da diferença constantes existente nas distâncias de um ponto da cônica aos seus focos.

Por fim, o autor relembra que uma forma mais tradicionalista de construir as curvas que representam as cônicas, é utilizando esquadro, papel, lápis e explorando conceitos mais abordados na geometria plana como o das retas tangentes.

Para a construção da parábola, o autor indica que é preciso traçar uma reta d para representar a diretriz da parábola e um ponto F que será seu foco, com $F \notin d$. Em seguida, ele instrui o leitor a traçar uma perpendicular à reta d de modo que passe por F e determine nessa reta o ponto médio entre F e a reta d. Ao determinar o ponto médio, devemos então traçar, por ele, uma reta $d1$ paralela à reta d que, segundo Benito (2019) será a reta tangente à parábola pelo seu vértice. Por fim, o autor solicita então que o leitor posicione o esquadro de modo que o vértice do ângulo reto coincida com um ponto da reta d e um de seus lados passe pelo ponto F e então trace a reta l determinada pelo outro lado do ângulo reto do esquadro. E afirma que esta reta l

representará uma outra tangente à parábola com foco F e diretriz d. Portanto, ao repetirmos o processo para outros pontos da reta d encontraremos então um conjunto de retas. Cujo o autor nomeia de $l1$, $l2$, $l3$, …, tangentes à parábola como mostra a Figura 12.

Figura 12: Parábola construída por retas tangentes



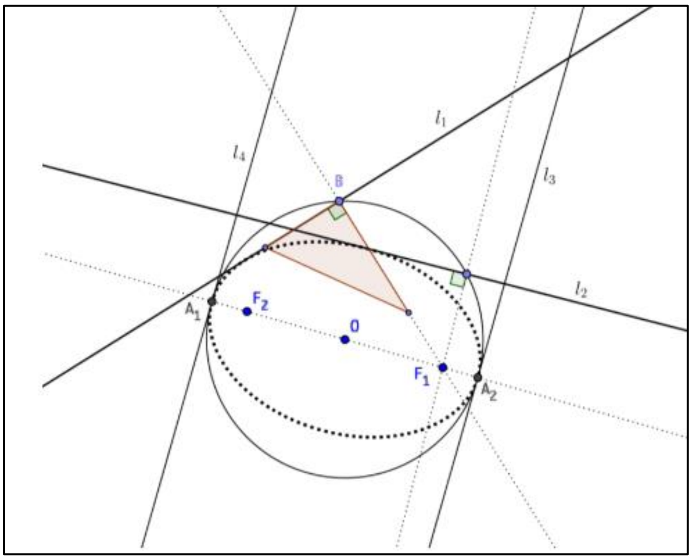
Fonte: Benito (2019, p.71)

Na construção da elipse, o autor utilizou-se da circunferência como ponto de partida para a estruturação de um dos seus focos, uma vez que o pesquisador orienta incialmente traçar uma circunferência e dentro do mesmo, devemos fixar um dos focos da elipse chamado de F1, de modo que este ponto não seja coincidente com o centro da circunferência. Em seguida, a orientação é votada para posicionarmos o esquadro de forma que o vértice do ângulo reto esteja sobre um ponto B e um de seus lados passe pelo foco. Após isso, devemos então traçar uma reta denominada de $l1$ no outro lado do esquadro.

Segundo o estudioso, essa reta será tangente à elipse com foco F1 no interior dessa circunferência auxiliar. E assim como vimos na figura anterior (parábola) o autor afirma que ao repetirmos esse processo para diferentes pontos da circunferência encontraremos uma família de tangentes à elipse denominadas de $l1$, $l2$, $l3$, $l4$, ...

Com relação ao segundo foco da elipse (F2). Benito faz uso da simetria existente ao passarmos uma reta pelo ponto F1 e pelo centro da circunferência, pois, essa reta interceptará a circunferência em dois pontos pelos quais passam duas tangentes à elipse e, portanto, esses dois pontos pertencem à elipse. Como ilustrado na Figura 13

Figura 13: Elipse construída por retas tangentes

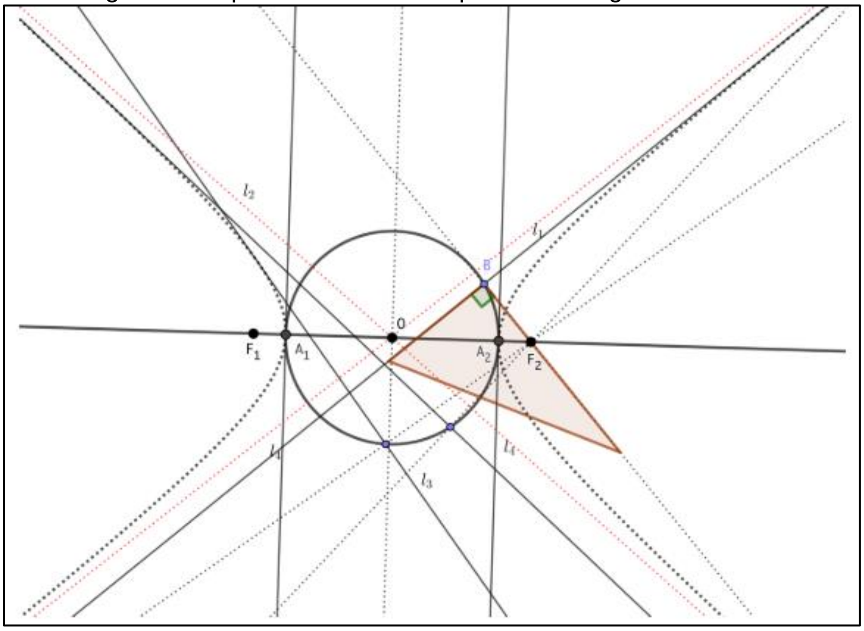


Fonte: Benito (2019, p. 72)

Para a hipérbole, assim como foi feito no passo a passo da elipse, o autor utiliza-se da circunferência para iniciar a construção e solicita que o leitor fixe um ponto chamado de F1 para ser o foco da hipérbole, no entanto, diferente da construção anterior, desta vez, o ponto deve ser fixado do lado de fora da circunferência. O leitor é instruído então a posicionar o vértice do ângulo reto do esquadro sobre um ponto da circunferência e um de seus lados, de forma que seja possível passar por F1. Feito isto, devemos então traçar uma reta denominada pelo autor de $l1$ pelo outro lado do ângulo reto do esquadro que será uma reta tangente da hipérbole cujo foco denominado de F1 estará na parte de fora da circunferência. O autor reitera que assim como nas figuras anteriores, ao repetirmos esses passos encontraremos um conjunto de retas tangentes a hipérbole.

Quanto ao segundo foco, o autor fez o uso mais uma vez da simetria de uma reta que ao perpassar pelo centro na circunferência transita em dois lugares distintos na hipérbole, desta forma pode-se concluir que F2 será simétrico a F1 tomando como parâmetro o centro da circunferência como mostra a Figura 14.

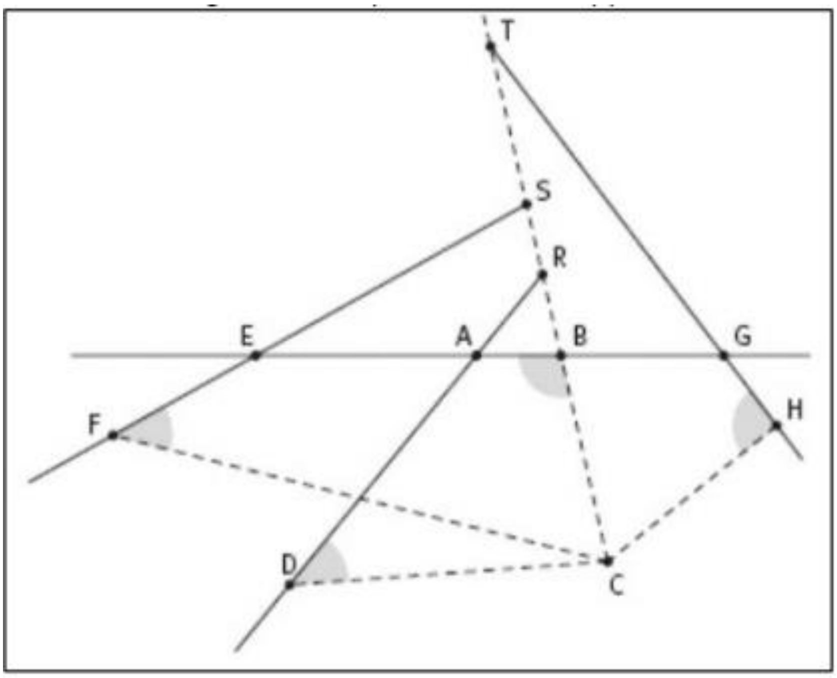
Figura 14: hipérbole construída por retas tangentes



Fonte: Benito (2019, p.73)

Após a representação das cônicas por meio das retas tangentes, o autor chama atenção para o fato de se trabalhar com o problema de Pappus como uma outra metodologia para encontrar o lugar geométrico, partindo, é claro, do conceito das distâncias, uma vez que o problema de Pappus trata de encontrar um ponto “c” de modo que a partir dele seja possível construir segmentos de retas que formem ângulos com retas já dadas .Além de ser possível, segundo Benito, trabalhar a ideia de que o produto dos comprimentos de dois desses segmentos é sempre proporcional ao produto dos comprimentos dos restantes como mostra a Figura 15.

Figura 15: ilustração do problema de Pappus



Fonte: Roque (2012, p. 260)

Bento (2019, p.77), baseado nos estudos de Roque (2012) a respeito da solução deste problema de Pappus, afirmam que:

> .. este problema foi solucionado por Pappus quando demonstrou que a solução para o caso geral deve ser uma cônica. Descartes atacou o problema partindo de 4 retas caminhando na direção de uma resposta para um número maior de retas, porém resolveu abordar o problema considerando-o já resolvido e utilizando incógnitas para representar as soluções ainda não encontradas. Ainda segundo a autora, Descartes determinou que o segmento AB medisse x e o segmento BC medisse y, o que resultou na criação de um sistema de duas coordenadas conveniente para facilitar a resolução do problema, depois, o desafio foi descrever os demais segmentos em função de x e y. Com os cálculos feitos podemos obter que o valores para x e y, que satisfazem o problema, devem satisfazer também uma equação polinomial do segundo grau na forma $\alpha x2 + \beta xy + \gamma y2 + \theta x + \psi\ y + \epsilon = 0$, com os parâmetros α, β, γ, θ, ψ e ϵ sendo números reais, isto é, o lugar geométrico para o ponto C é uma cônica.

Ao fim da construção do modelo de geometria sintética, o pesquisador conclui que é perceptível que a noção de lugar geométrico se faz presente em quase todas as construções possíveis para abordar algum conceito de cônicas. Seja, como representação do local em que passam as retas tangentes, seja para cumprir com determinado valor de excentricidade ou até mesmo como uma possível definição de cônicas a partir de distâncias como no problema de Pappus acima.

Para Benito(2019), o problema de Pappus permite aos estudantes uma reflexão a respeito da passagem do modelo da geometria sintética para o modelo da geometria analítica no estudo de cônicas, pelo fato de possibilitar o desenvolvimento de praxiologias em que esses modelos de geometria se complementem, pois o autor acredita que o estudo das cônicas não se dá em cima de uma única geometria, mas sim da mistura do conhecimento existente em cada uma delas, até que alcance inevitavelmente um completo desenvolvimento do conhecimento que circundam tal temática.

Diante de tal pensamento torna-se pertinente conhecermos o segundo modelo de geometria desenvolvimento em seu MER.

3.2 O MODELO DA GEOMETRIA ANALÍTICA

Benito (2019) descreve este modelo como sendo a algebrização do primeiro modelo (geometria sintética), pois se apoiando nos estudos de Gascón (2002), o autor afirma que "são precisamente as limitações das técnicas sintéticas que dão sentido às técnicas analíticas", isto é, esta geometria surge para suprir as insuficiências da geometria sintética (Benito, 2019, p.81). O autor afirma ainda que, em relação ao ensino e aprendizagem de cônicas, este foi o modelo mais encontrado nos livros didáticos de matemática do ensino básico, tanto no estado de São Paulo quanto no estado de Sergipe.

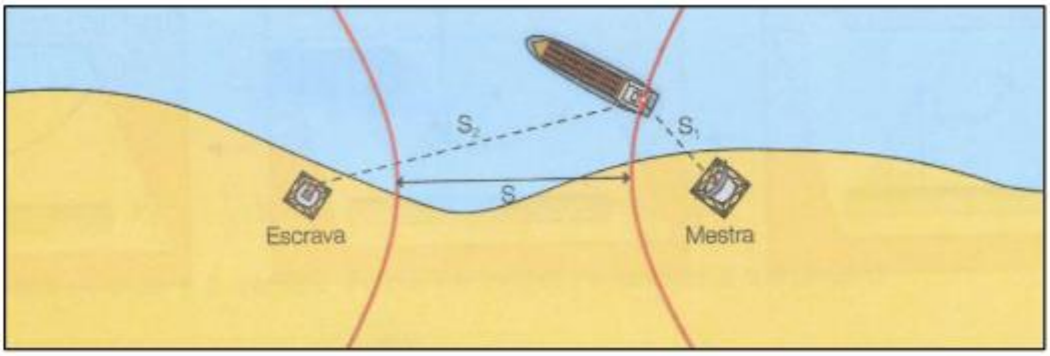
Neste modelo, as cônicas são definidas como curvas que surgem em um plano cartesiano que representam graficamente uma equação polinomial do segundo grau em duas variáveis, $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, com os parâmetros A, B, C, D, E e F pertencentes ao conjunto dos números reais e com a condição de que $A^2 + C^2 \neq 0$, para garantir que a equação terá ao menos um termo de grau dois (Benito, 2019, p.80)

Portanto, a principal característica da geometria analítica, em um contexto que trate um corpo que se movimenta em uma trajetória em formato cônico, segundo o autor, é trabalhar com as distancias, sejam elas descritas em plano cartesiano ou não, e utilizar-se usar-se de manipulações algébricas que leve ao estudante encontrar equações, de grau dois, que possibilitem encontrar elementos característicos das cônicas, inicialmente não fornecidos, a exemplo do foco e vértice.

O estudioso destaca ainda a existência de um importante sistema, utilizado nos dias atuais, que se utiliza do conceito de medições á distância para trabalhar localização de navios, chamado de SISTEMA LORAN.

O sistema LORAN pode identificar a distância de um navio por meio da emissão de ondas sonoras que partem de duas estações de rádios colocadas em pontos diferentes, gerando uma distância constante entre as velocidades das ondas sonoras e o navio, possibilitando desta forma a identificação da localização do navio. O receptor LORAN do navio mede a diferença de tempo em que os sinais foram recebidos para então definir qual a variação constante, chamada de "s" como vemos na ilustração da Figura 16.

Figura 16:Ilustração do funcionamento do sistema LORAN e uma cônica (hipérbole)



Fonte: Souza e Garcia (2016b, p. 103)

A constante S, mostrada na Figura 16, segundo Benito (2019), é a diferenças entre as medidas de duas distâncias exatamente da mesma forma que utilizamos para definir uma hipérbole no plano a partir da noção de lugar geométrico. Desta forma, para que seja possível determinar a localização exata do navio é necessário aliar os conhecimentos acerca da figura cônica hipérbole e a tecnologia utilizada pelo sistema LORAN.

Uma segunda opção de abordagem da aprendizagem de cônicas pautada nos métodos propostos pela geometria analítica, descrita no MER do pesquisador, é a utilização do Geogebra, desde que, na visão de Benito, seja estimulado dentro das atividades propostas ao aluno, a necessidade por parte do discente de introdução de um sistema referencial cartesiano no plano em que se encontra desenhada a cônica e o estimulo em trabalhar com formulas algébricas e conceitos de distâncias entre pontos pertencentes a cônica, necessários para se alcançar uma equação do tipo Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, como a formula da distância entre dois pontos.

Dando prosseguimento aos estudos propostos por essa pesquisa, analisaremos a diante quais os tipos de geometrias dominantes encontrados nos dois livros didáticos mais utilizados pelas Instituições Estaduais Públicas do ensino médio paraense.

CAPÍTULO 4 - ANÁLISE DOS MODELOS EPISTEMOLÓGICOS DOMINANTES NOS LIVROS DIDÁTICOS

Neste Capítulo, expenderemos o que há a respeito de cada cônica e de que forma elas estão expostas nas duas obras didáticas mais adquiridas pelo estado do Pará.

A investigação, de ambos os livros didáticos, se deu de forma eletrônica, uma vez que foi possível acessar todo o conteúdo das duas obras, no modo on-line e em formato pdf pelo site: www.edocente.com.br. Em ambas as coleções, o volume 3 - ensino médio foi o escolhido para análise, em virtude do conteúdo de cônicas ser abordado somente no Terceiro ano do ensino médio das escolas regulares de ensino.

QUANTO À ELIPSE

T1: Determinar a equação da Elipse com centro na origem.

T2: Determinar a equação da Elipse com centro fora da origem.

T3: Encontrar as coordenadas do foco da Elipse.

T4: Determinar a excentricidade da Elipse.

T5: Representar o gráfico da Elipse.

QUANTO À HIPÉRBOLE

T1: Determinar a equação da Hipérbole com centro na origem.

T2: Determinar a equação da Hipérbole com centro fora da origem.

T3: Encontrar as coordenadas do foco da Hipérbole.

T4: Representar a equação das assíntotas.

T5: Representar o gráfico da Hipérbole

QUANTO À PARÁBOLA

T1: Determinar a equação da Parábola com vértice na origem.

T2: Determinar a equação da Parábola com vértice fora da origem.

T3: Determina a equação diretriz da Parábola.

T4: Determina as coordenadas do vértice da Parábola.

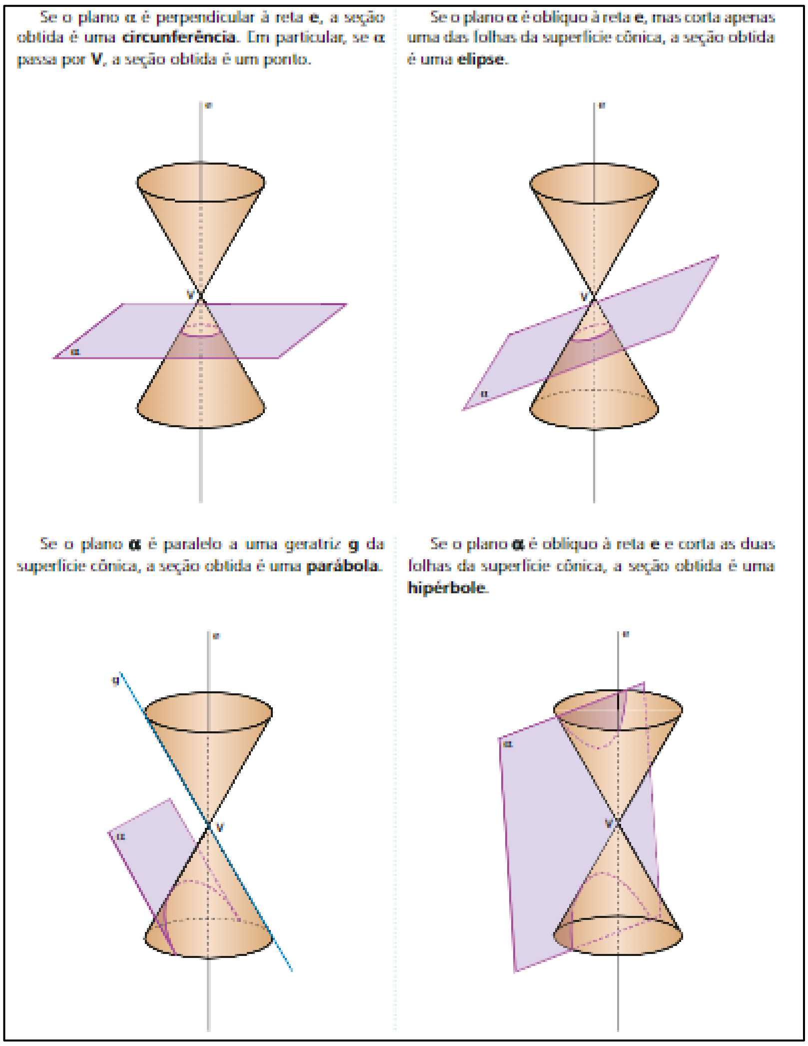
T5: Representar o gráfico da Parábola

A seguir, realizaremos a explanação acerca do livro (L1) intitulado "Matemática Ciência e Aplicações

4.1 ANÁLISE NO LIVRO DIDÁTICO (L1): *MATEMÁTICA CONTEXTO E APLICAÇÕES*

No livro didático (**L1**), intitulado "***Matemática Ciência e Aplicações***", mais precisamente no capitulo 4, onde encontra-se os conhecimentos acerca das cônicas – Elipse, Parábola e Hipérbole- Os autores iniciam o capítulo apoiando-se em uma breve representação geométrica, e na sequência, por meio de um sucinto apanhado histórico, mostram o surgimento e os cortes que dão origem a cada figura Cônica e afirmam que neste capitulo eles farão um estudo inicial da elipse, da hipérbole e da parábola, denominadas, juntamente com a circunferência de seções cônicas. Como vemos na Figura 17.

Figura 17:Representação dos cortes que deram origem a cada figura Cônica em (L1)



Fonte: Iezzi et al (2016, p.88)

Após a ilustração do corte de cada Cônica, os autores abordam individualmente seus conceitos, e buscam familiarizar o aluno por meio da ilustração de objetos encontrados no cotidiano do discente, que tenha o formato da figura Cônica estudada naquele momento, assim como é feito nas abordagens realizadas por meio da geometria sintética. Buscam também destacar características matemáticas como seu conceito, por meio de respostas a perguntas do tipo: O que é ...? (os autores completam a pergunta com corte de cônica trabalhada). Por fim, abordam seus elementos principais e demonstram a equação reduzida da figura em questão, para então colocar exemplos resolvidos e propostos sobre o que foi aprendido até aquele momento.

A seguir analisaremos, de que forma a cônica Elipse é abordada em L1.

4.1.1 O ESTUDO DA ELIPSE

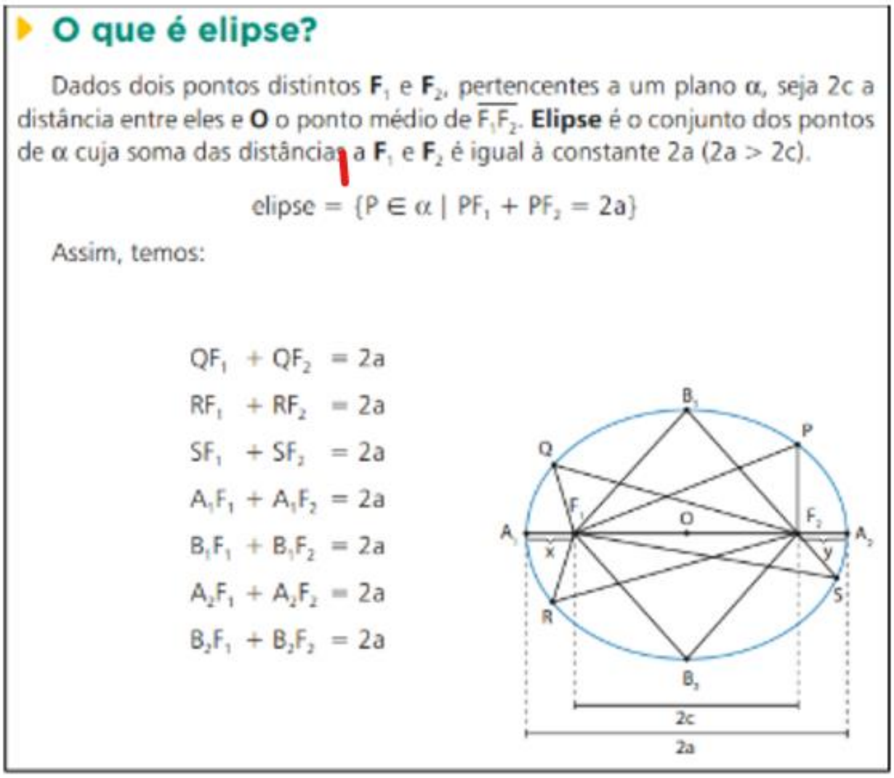
O estudo da elipse se inicia por meio da ilustração de objetos e situações cotidianas em que a cônica é encontrada, como mostra a Figura 18.

Figura 18:Representação dos cortes que deram origem a cada figura Cônica em (L1)

Fonte: Iezzi et al. (2016, p.89)

Em seguida, conforme indica a Figura 19, explana-se geometricamente os conceitos matemáticos existentes na formação da mesma, e cada elemento construído mediante segmentos de retas.

Figura 19: Representação dos conceitos matemáticos da cônica elipse em (L1- I)



O que é elipse?

Dados dois pontos distintos $\mathbf{F_1}$ e $\mathbf{F_2}$, pertencentes a um plano α, seja 2c a distância entre eles e **O** o ponto médio de $\overline{F_1F_2}$. **Elipse** é o conjunto dos pontos de α cuja soma das distâncias a $\mathbf{F_1}$ e $\mathbf{F_2}$ é igual à constante 2a (2a > 2c).

$$\text{elipse} = \{P \in \alpha \mid PF_1 + PF_2 = 2a\}$$

Assim, temos:

$$QF_1 + QF_2 = 2a$$
$$RF_1 + RF_2 = 2a$$
$$SF_1 + SF_2 = 2a$$
$$A_1F_1 + A_1F_2 = 2a$$
$$B_1F_1 + B_1F_2 = 2a$$
$$A_2F_1 + A_2F_2 = 2a$$
$$B_2F_1 + B_2F_2 = 2a$$

Fonte: Iezzi et al. (2016, p. 89)

No que concerne a figura 20 e com base nos modelos de geometrias descritos por Benito (2019), é possível afirmar que os autores do livro didático L1, utilizam-se do modelo de geometria sintética, mais uma vez para desenvolver o raciocínio de ensino- aprendizagem dos estudantes que fazem uso desse material como fonte de conhecimento, uma vez que, apoiam-se em ferramentas didáticas que abordam o conceito de lugar geométrico, neste caso, o da figura cônica elipse, de maneira mais participativa e ilustrativa, sem deixar de abordar conceitos e condições importantes inerentes desta figura cônica. Como veremos na ilustração pela Figura 20.

Figura 20: Representação dos conceitos matemáticos da cônica elipse em (L1)

Notemos que $A_1A_2 = 2a$, pois:

$$A_1F_1 + A_1F_2 = A_2F_2 + A_2F_1$$

então:

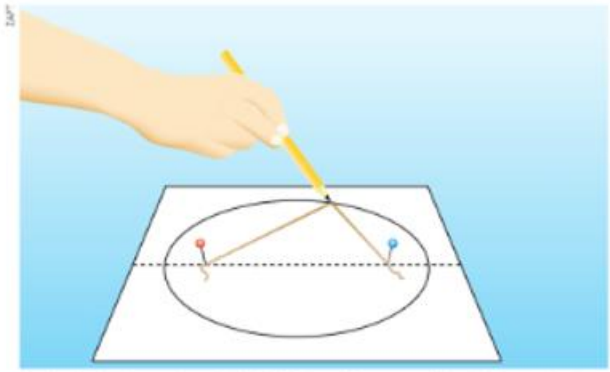
$$x + (x + 2c) = y + (y + 2c)$$

portanto, $x = y$.

Daí:

$$A_1A_2 = A_1F_1 + F_1F_2 + F_2A_2 = x + 2c + y = 2(x + c) = 2a$$

Observe a figura a seguir para compreender o traçado de uma elipse.



Um barbante de comprimento 2a é fixado em dois pregos distantes 2c um do outro (observe que $2a > 2c$). Mantendo o barbante esticado, desloca-se a ponta do lápis. A curva que ele descreverá será uma elipse.

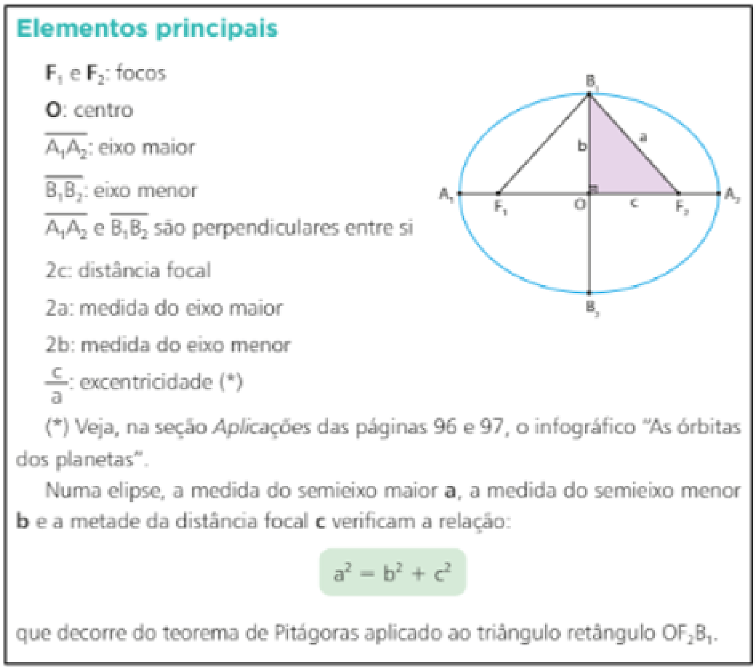
Fonte: Iezzi et al. (2016, p.90)

A Figura 20 mostra o método de Kepler ou método do fio esticado como é popularmente conhecido, em que as extremidades do barbante são fixadas em dois pontos distintos de uma folha de papel e com o auxílio da ponta do lápis, estica-se o fio do barbante, movimenta-o para direita e para esquerda delimitando assim, os limites das possíveis marcações do lápis.

Com tal experimento oriundo da geometria sintética, é possível ilustrar de maneira prática que a soma das distâncias de um ponto qualquer até os pontos fixos, será sempre um valor constante, denominado pelos autores de (L1) de 2a. Além disso, com essa abordagem os autores permitem que seus estudantes percebam que a curva descrita pela união de todos os pontos que atendem tal condição forma, por sua vez, a figura cônica elipse.

Na sequência, é possível ver, por meio da Figura 21, que os autores de (L1) passam a conceituar cada elemento pertencente a elipse e destaca a importância da relação existente entre esses elementos com a explanação do triângulo retângulo, o qual leva a aplicação do Teorema de Pitágoras.

Figura 21: Representação dos elementos principais da figura Cônica Elipse em (L1)



Elementos principais

F_1 e **F_2**: focos

O: centro

$\overline{A_1A_2}$: eixo maior

$\overline{B_1B_2}$: eixo menor

$\overline{A_1A_2}$ e $\overline{B_1B_2}$ são perpendiculares entre si

2c: distância focal

2a: medida do eixo maior

2b: medida do eixo menor

$\frac{c}{a}$: excentricidade (*)

(*) Veja, na seção *Aplicações* das páginas 96 e 97, o infográfico "As órbitas dos planetas".

Numa elipse, a medida do semieixo maior **a**, a medida do semieixo menor **b** e a metade da distância focal **c** verificam a relação:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

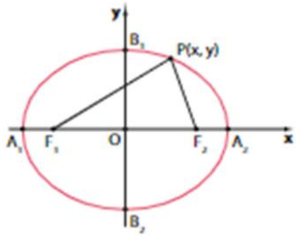
que decorre do teorema de Pitágoras aplicado ao triângulo retângulo OF_2B_1.

Fonte: Iezzi et al. (2016, p.90)

Após especificar cada elemento da elipse, os autores ilustram, geometricamente, a forma que seus elementos se comportam no sistema cartesiano, apoiam-se nesse pensamento geométrico para desenvolver algebricamente, a construção da equação reduzida da elipse, pautando-se na posição em que seu eixo maior se encontra, uma vez que se tem como parâmetro de posicionamento o eixo das abcissas (x) e das ordenadas. (y). Caracteriza-se, neste momento, uma abordagem metodológica pautada na geometria analítica descrita por Benito (2019) como vemos na Figura 22

Figura 22: Representação da equação reduzida da figura Cônica Elipse em (L1)

Equação reduzida (I)



Tomemos um sistema cartesiano ortogonal tal que:

$$\overline{A_1A_2} \subset Ox \text{ e } \overline{B_1B_2} \subset Oy$$

É fácil verificar que os focos são os pontos:

$$F_1(-c, 0) \text{ e } F_2(c, 0)$$

Chama-se **equação reduzida da elipse** a equação que o ponto genérico da curva, P(x, y), verifica.

$$P \in \text{elipse} \Leftrightarrow PF_1 + PF_2 = 2a$$

Vamos deduzi-la.

$$\sqrt{(x + c)^2 + (y - 0)^2} + \sqrt{(x - c)^2 + (y - 0)^2} = 2a \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \sqrt{(x + c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x - c)^2 + y^2}$$

Elevando os dois membros ao quadrado e desenvolvendo, temos:

$$(x + c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} + (x - c)^2 + y^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2 \Rightarrow$$
$$4cx - 4a^2 = -4a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} = a^2 - cx$$

Elevando os dois membros ao quadrado novamente, temos:

$$a^2(x - c)^2 + a^2y^2 = (a^2 - cx)^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a^2x^2 - c^2x^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

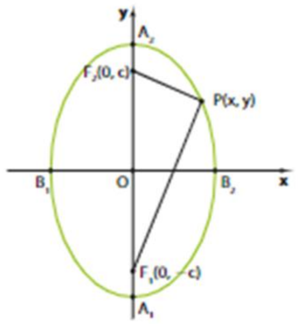
e, dividindo os dois membros da igualdade por a^2b^2, resulta:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Equação reduzida (II)

Analogamente, se a elipse apresenta $\overline{A_1A_2} \subset Oy$ e $\overline{B_1B_2} \subset Ox$, temos:

$$PF_1 + PF_2 = 2a$$
$$\sqrt{(x - 0)^2 + (y + c)^2} + \sqrt{(x - 0)^2 + (y - c)^2} = 2a$$



e, repetindo o raciocínio anterior, decorre novamente a equação da elipse:

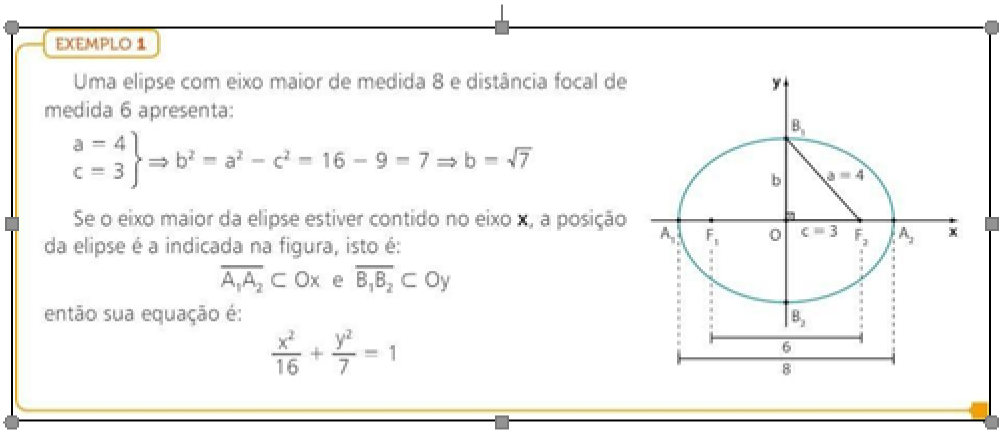
$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$$

Fonte: Iezzi et al (2016, p 91-92)

Posterior a esta primeira parte ilustrada, os autores propõem 2 (duas) atividades exemplificadas e 10 (dez) propostas acerca do assunto ensinado até aqui, das quais analisamos a seguir 1 (uma) questão exemplo e 1 (uma) proposta. É importante ressaltar que as atividades exemplificadas não apresentam um comando específico sobre o tipo de tarefa a ser executada.

A seguir apresentaremos a questão exemplo referente a figura Cônica Elipse no L1.

FIGURA 23: QUESTÃO EXEMPLO (Q1) DE L1



Fonte: Iezzi et al (2016, p.94)

Como as questões exemplificadas em L1 possuíam tarefas similares, mudando somente os valores, escolhemos o exemplo 1 para realizar a análise praxeológica. Ele foi dado logo após o autor destacar os principais elementos da Elipse, bem como mostrar a equação reduzida da mesma. Identificamos a partir da figura 23 a seguinte análise praxeológica:

Tarefa 1 (*τ*): Determinar a equação da Elipse com centro na origem.

Tarefa 2 (*τ*): Representar o gráfico da Elipse.

Técnica 1 (*τ*): Reconhecer os principais elementos da Elipse e saber suas relações.

Técnica 2 (*τ*): Utilizar a fórmula do Teorema de Pitágoras $A^2 = B^2 + C^2$

Técnica 3 (*τ*): Substituir os valores a e b na fórmula da Elipse $\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1$

Tecnologia (*θ*): Por meio do Teorema de Pitágoras foi possível encontrar a medida do semieixo menor e através da representação gráfica, observou-se dois aspectos: a Elipse encontra-se com centro na origem e seu eixo maior pertence ao eixo das abscissas. Portanto, foi possível determinar a equação da Elipse

através da fórmula $\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2}$

Teoria (*Θ*): Álgebra e Geometria Analítica.

Na figura seguinte, apresentaremos o exercício proposto (P1) referente Cônica Elipse em L1

FIGURA 24: EXERCÍCIO PROPOSTO (P1) DE L1

5 Determine a equação da elipse com centro na origem, que passa pelo ponto $P(1, \sqrt{6})$ e tem um foco $F_1(0, -2)$.

Fonte: Iezzi et al (2016, p.93)

FIGURA 25: RESOLUÇÃO DO EXERCÍCIO PROPOSTO (P1) DE L1

A seguir, apresentaremos na figura 25 a resolução do exercício proposto P1.

5- Já que $F_1\ (0,-2)$ tem $x = 0$, então temos que $F_1F_2 \subset 0_y$, portanto $c = 2$, então

$$a^2 - b^2 = c^2 = 4$$
$$a^2 = 4 + b^2$$

O ponto P $(1, \sqrt{6})$, substituiremos na equação reduzida da Elipse.

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$$
$$\frac{\sqrt{6}^2}{a^2} + \frac{1^2}{b^2} = 1$$
$$\frac{6}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 1$$

Fazendo um sistema com as equações, temos:

$$\begin{cases} \frac{6}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 1 \\ a^2 = 4 + b^2 \end{cases}$$

Será resolvido pelo método da substituição

$$\frac{6}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 1$$
$$\frac{6.b^2 + 1.a^2}{a^2.b^2} = \frac{1.a^2.b^2}{a^2.b^2}$$
$$6b^2 + a^2 = a^2.b^2$$

Substituindo a^2:

$$6b^2 + 4 + b^2 = (4 + b^2)\,b^2$$
$$7b^2 + 4 = 4b^2 + (b^2)^2$$
$$3b^2 + 4 - (b^2)^2 = 0$$

Essa equação iremos resolver por soma e produto

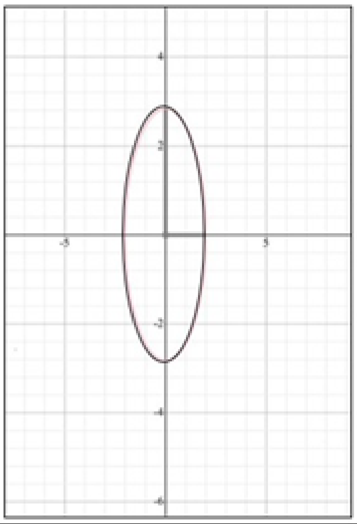
$$S = \frac{-3}{-1} = 3 \qquad b^2{}_1 = -1$$
$$P = \frac{4}{-1} = -4 \qquad b^2{}_2 = 4$$

Já que b^2 não pode ser negativo, substituindo o valor de $b^2=4$, temos:

$$a^2 = 4 + b^2$$
$$a^2 = 4 + 4$$
$$a^2 = 8$$

Substituindo os valores de a^2 e b^2 na equação reduzida, temos:

$$\frac{y^2}{8} + \frac{x^2}{4} = 1$$



Fonte: Autor

A escolha da questão ilustrada na figura 24 se deu pelo fato da mesma, a priori, solicitar uma mesma tarefa exemplificada na questão exemplo, portanto, buscou-se aqui compreender, por meio desta análise identificar se o nível de conhecimento do aluno, necessário para resolver a questão proposta, se iguala aos conhecimentos exigidos ao autor para resolver a questão exemplo (Q1).

Desse modo, como base na figura 25, identificamos a análise praxeológica abaixo:

Tarefa (*τ*): Determinar a equação da Elipse com centro na origem.

Técnica 1 (*τ*): Reconhecer os principais elementos da Elipse e saber suas relações

Técnica 2 (*τ*): Utilizar a fórmula do Teorema de Pitágoras $A^2 = B^2 + C^2$

Técnica 3 (*τ*): Resolver sistemas lineares para encontrar os valores de *a* e *b.*

Técnica 4 (*τ*): Resolver equação Biquadrada por soma e produto.

Técnica 5 (*τ*): Substituir os valores na fórmula da equação reduzida da elipse $\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2}$

Tecnologia (*θ*): Através do Teorema de Pitágoras e da substituição do ponto P na equação reduzida da Elipse, foi possível chegar em um sistema linear. Utilizou-se manipulações algébricas para solucionar o sistema e resolver a equação Biquadrada. Sendo assim, chegou-se nos valores de a^2 *a* a^2e, por fim, substituí-los na fórmula da equação reduzida da elipse $\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2}$

Teoria (*Θ*): Álgebra e Geometria Analítica.

Ao fazer essa análise, percebemos ambas as questões exigem somente conhecimentos da geometria analítica para se desenvolver. No entanto, apesar de ambas as questões escolhidas tratarem de conhecimentos matemáticos presentes na geometria analítica, nota-se que não foi exigido do aluno os mesmos níveis de dificuldade dosconhecimentos acerca desta geometria, que foram exigidos na questão exemplo (Q1). Uma vez que, no exercício exemplificado, não é cobrado o conhecimento de resolução de sistema linear, nem o conceito de equação Biquadrada. Portanto, nota-se um relevante diferença entre o exemplo proposto pelos autores e o proposto (P1) ao aluno, umavez que o segundo utiliza-se de outros conceitos matemáticos não abordados neste capítulo para a resolução da mesma, fato este, que de acordo com os estudos aqui levantados por Jesus (2017) pode acarretar um entrave na aprendizagem do discente.

Após a investigação realizada, foi possível perceber que os autores de L1 priorizam a geometria sintética, na abordagem da cônica elipse, pois utilizam-na em diversos momentos como: Ao introduzir o conceito da cônica, nos aspectos de construção ponto a ponto e no reforço de sua construção de forma intuitiva pelo método do fio esticado, para enfatizar a construção de conceitos pertencentes a mesma, enquanto fazem uso das ferramentas metodológicas presentes na geometria analítica para desenvolver as ideias pertencentes as equações reduzidas , presente na maioria dos exercícios propostos aos alunos.

A seguir, realizaremos a investigação acerca da cônica Hipérbole em (L1)

4.1.2 ESTUDO DA HIPÉRBOLE

Assim como no estudo anterior, os autores inicialmente mostram ilustrações de objetos encontrados no cotidiano do discente que tenham o formato da Cônica estudada, como mostra a Figura 23. Em seguida, destaca características matemáticas como: Conceito (figura 24), elementos (figura 25) e demonstra a equação reduzida da hipérbole.

Figura 26: Representação da figura Cônica hipérbole encontrada no cotidiano do aluno em (L1)

Hipérbole

Você já deve ter observado o que acontece quando se acende um abajur em um ambiente escuro: na parede, é possível visualizar duas regiões iluminadas. Seus contornos têm a forma da cônica que passaremos a estudar: a hipérbole.

Veja agora a foto ao lado, que mostra um conhecido ponto turístico de Brasília: a Catedral Metropolitana.

Projetada por Oscar Niemeyer, ela apresenta dezesseis pilares dispostos ao longo de um círculo. Os contornos desses pilares lembram uma hipérbole.

Catedral Metropolitana de Brasília (DF) em 2014.

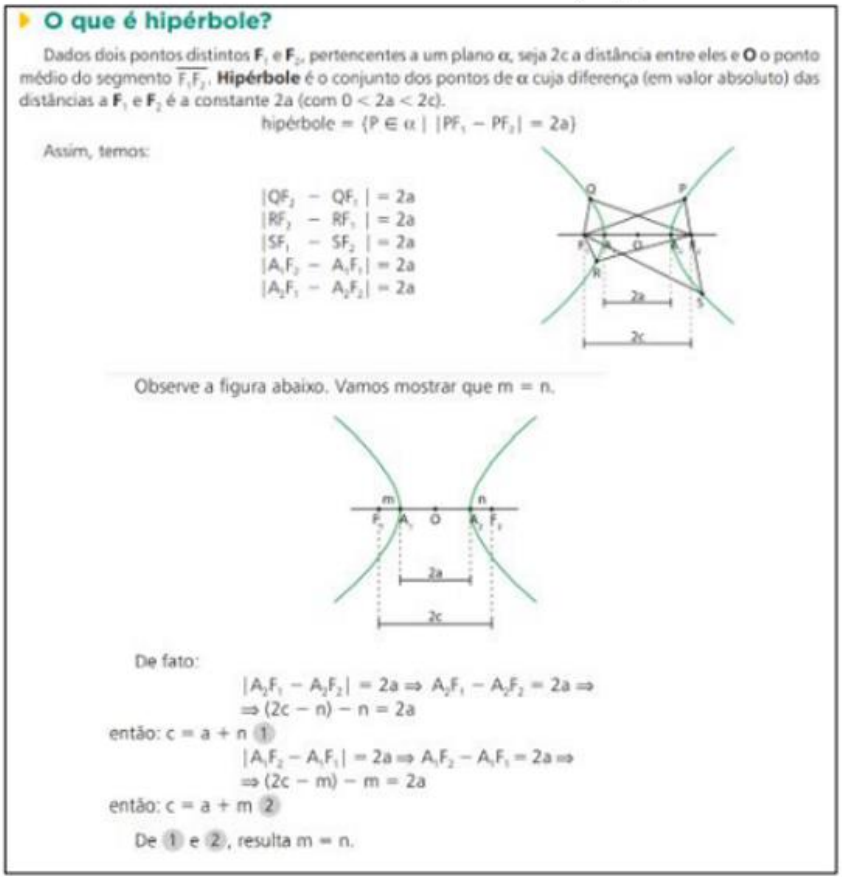
Fonte: Iezzi et al. (2016, p.98)

Apesar de iniciar seus estudos por meio da geometria sintética, ilustrando objetos e construções que tenham o formato cônico da hipérbole, como ja havia feito na figura anterior, foi possível notar que, os autores de L1, abandonam a ideia de utilizar o método de kepler ou método do fio esticada para realizarem a abordagem inicial dos elementos da figura cônica hipérbole como mostra a ilustração da Figura 24.

No entanto, optam desta vez, por uma representação geométrica mais direta cujo objetivo é fazer o aluno perceber que fixados dois pontos distintos,F1 e F2 de um plano, a hipérbole pode ser definida como o conjunto de pontos desse plano cuja diferença, em módulo, das distâncias de cada um deles até F1 e F2 seja um valor constante menor que a distância existente entre F1F2, focando assim em uma desenvolvimento mais algébrico característico do geometria analítica descrita por Benito (2019).

Em seguida, os autores fazem a explanação dos principais elementos de uma hipérbole como é possível ver na ilustração da Figura 27.

Figura 27: Ilustração dos conceitos matemáticos da figura Cônica hipérbole em (L1)



O que é hipérbole?

Dados dois pontos distintos $\mathbf{F_1}$ e $\mathbf{F_2}$, pertencentes a um plano α, seja $2c$ a distância entre eles e **O** o ponto médio do segmento $\overline{F_1F_2}$. **Hipérbole** é o conjunto dos pontos de α cuja diferença (em valor absoluto) das distâncias a $\mathbf{F_1}$ e $\mathbf{F_2}$ é a constante $2a$ (com $0 < 2a < 2c$).

$$\text{hipérbole} = \{P \in \alpha \mid |PF_1 - PF_2| = 2a\}$$

Assim, temos:

$$|QF_2 - QF_1| = 2a$$
$$|RF_2 - RF_1| = 2a$$
$$|SF_1 - SF_2| = 2a$$
$$|A_1F_2 - A_1F_1| = 2a$$
$$|A_2F_1 - A_2F_2| = 2a$$

Observe a figura abaixo. Vamos mostrar que $m = n$.

De fato:

$$|A_2F_1 - A_2F_2| = 2a \Rightarrow A_2F_1 - A_2F_2 = 2a \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (2c - n) - n = 2a$$

então: $c = a + n$ 1

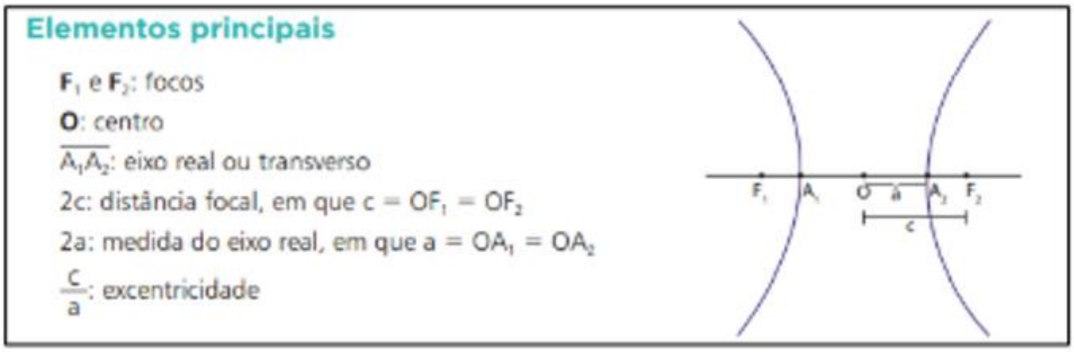
$$|A_1F_2 - A_1F_1| = 2a \Rightarrow A_1F_2 - A_1F_1 = 2a \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (2c - m) - m = 2a$$

então: $c = a + m$ 2

De 1 e 2, resulta $m = n$.

Fonte: Iezzi et al. (2016, p.98)

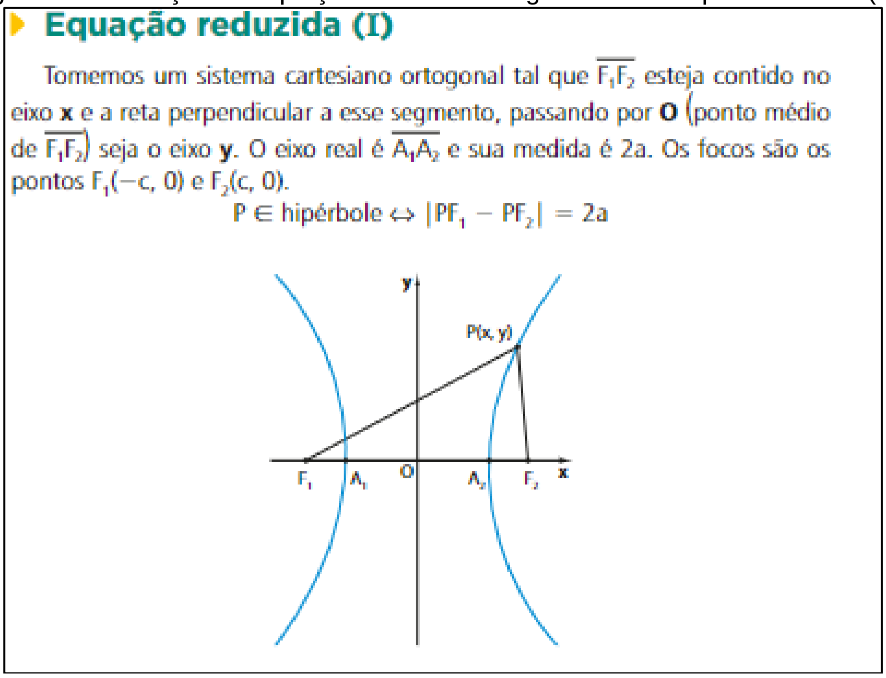
Figura 28: Ilustração dos elementos principais da figura Cônica Hipérbole em (L1)



Fonte: Iezzi et al. (2016, p.99)

Na sequêcia, os autores de L1 descrevem a forma representativa da equação reduzida da Hipérbole, em que apresentam, pela primeira vez, o conceito de eixo imaginário aos seus estudantes, e ressaltam que o objetivo de tal "ferramenta" metodológica é identificar se o eixo real encontra-se na reta das ordenadas ou das abscissas como mostra a Figura 26.

Figura 29: Ilustração da equação reduzida da figura Cônica Hipérbole em I- (L1)



Fonte: Iezzi et al (2016, p.99)

Figura 30: Ilustração da equação reduzida da figura Cônica Hipérbole em (L1)

Chama-se **equação reduzida da hipérbole** a equação que o ponto genérico da hipérbole, P(x, y), verifica.

Vamos deduzi-la:

$$|PF_1 - PF_2| = 2a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} - \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = \pm 2a$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \pm 2a$$

Elevando os dois membros ao quadrado e desenvolvendo, temos:

$$(x+c)^2 + y^2 = (x-c)^2 + y^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + 4a^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4cx - 4a^2 = \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow cx - a^2 = \pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Elevando os dois membros ao quadrado novamente, temos:

$$(cx - a^2)^2 = a^2 \cdot (x-c)^2 + a^2y^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)$$

Chamando $c^2 - a^2 = b^2$ (observe que $a < c \Rightarrow c^2 - a^2 > 0$), temos que:

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

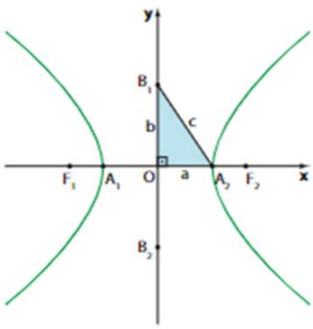
Dividindo membro a membro por a^2b^2, resulta na equação reduzida da hipérbole:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

Observe que, se $x = 0$, temos:

$$\frac{0}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{b^2} = -1 \Rightarrow y^2 = -b^2$$

Como $b \in \mathbb{R}_+^*$, temos que $y \notin \mathbb{R}$. Desse modo, não há pontos em comum entre a hipérbole e o eixo **y**. Os pontos $B_1(0, b)$ e $B_2(0, -b)$ não pertencem à hipérbole mas determinam o segmento $\overline{B_1B_2}$ de medida 2b, que é chamado **eixo imaginário da hipérbole**.



$\overline{B_1B_2}$: eixo imaginário

$B_1B_2 = 2b$: medida do eixo imaginário

Relação notável: $\boxed{c^2 = a^2 + b^2}$

Fonte: Iezzi et al (2016, p.100**)**

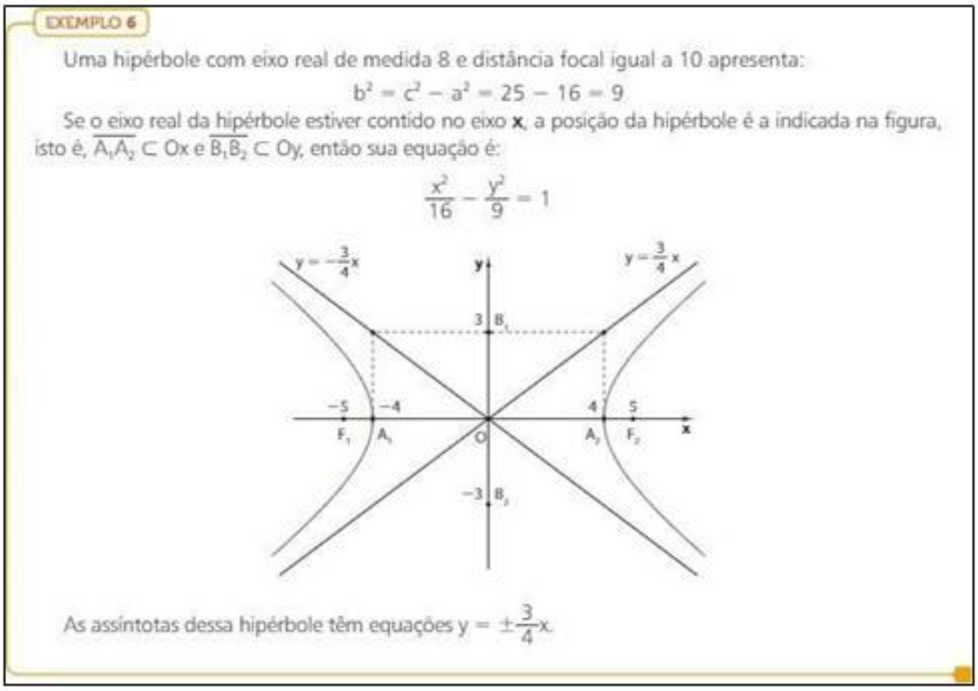
A partir dos conceitos apresentados, os autores devem explorar, novamente, a ideia de representação do triângulo retângulo no sistema cartesiano e, assim, resulta na aplicação do Teorema de Pitágoras como ferramenta para evidenciar, a relação existente entre esses elementos para o desenvolvimento da equação reduzida da Hipérbole, caracterizando desta maneira, mais uma vez o uso dos conceitos da geometria analítica como base de sua metodologia.

Na continuidade dos estudos das equações da hipérbole, os autores expõem a respeito das retas assíntotas, sobre as quais, eles esclarecem: Servem de suporte para o cálculo do coeficiente angular formado entre a referida reta e o eixo real.

Posto isso, foram expostas 2 questões exemplos similares, cujo a tarefa deambas consiste “representar a equação das assíntotas" com centro na origem. Além disso, foram estabelecidos 6 exercícios propostos com tarefas diversificadasacerca do assunto tratado até aqui. Diante do exposto, escolhemos aqui uma questão exemplo e um exercício proposto para realizar a análise praxeológica.

A seguir (figura 31) apresentaremos a questão exemplo referente a Cônica Hipérbole em L1.

Figura 31: Questão exemplo (Q3) de L


EXEMPLO 6

Uma hipérbole com eixo real de medida 8 e distância focal igual a 10 apresenta:

$$b^2 = c^2 - a^2 = 25 - 16 = 9$$

Se o eixo real da hipérbole estiver contido no eixo **x**, a posição da hipérbole é a indicada na figura, isto é, $\overline{A_1A_2} \subset Ox$ e $\overline{B_1B_2} \subset Oy$, então sua equação é:

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$

As assíntotas dessa hipérbole têm equações $y = \pm\frac{3}{4}x$.

Fonte: Iezzi et al (2016, p.104)

Esse exercício resolvido (figura 21) foi dado logo após o autor destacar os principais elementos da Hipérbole, chamando atenção do leitor para as assíntotas,bem como mostrar a equação reduzida da figura cônica em questão. Como as duas questões propostas em L1 propunham a mesma tarefa, mudando apenas seus valores, escolhemos Q3 para realizar a seguinte análise praxeológica:

Tarefa 1 (τ): Determinar a equação da Hipérbole com centro na origem.

Tarefa 2 (τ): Representar o gráfico da Hipérbole.

Tarefa 3 (τ): Determinar a equação das assíntotas da Hipérbole.

Técnica 1 (τ): Reconhecer os principais elementos da Hipérbole

Técnica 2 (τ): Utilizar a fórmula do Teorema de Pitágoras $C^2 = A^2 + B^2$**Técnica 3 (τ):**Colocar na forma da equação reduzida da hipérbole

Técnica 4 (τ): Substituir os valores a e b na fórmula das assíntotas da Hipérbole $\frac{\pm B}{A}X$

Tecnologia (θ): Por intermédio do Teorema de Pitágoras, foi possível encontrar

Em seguida mostraremos (figura 32) o exercício proposto P3 referente a figura cônica Hipérbole no L1:

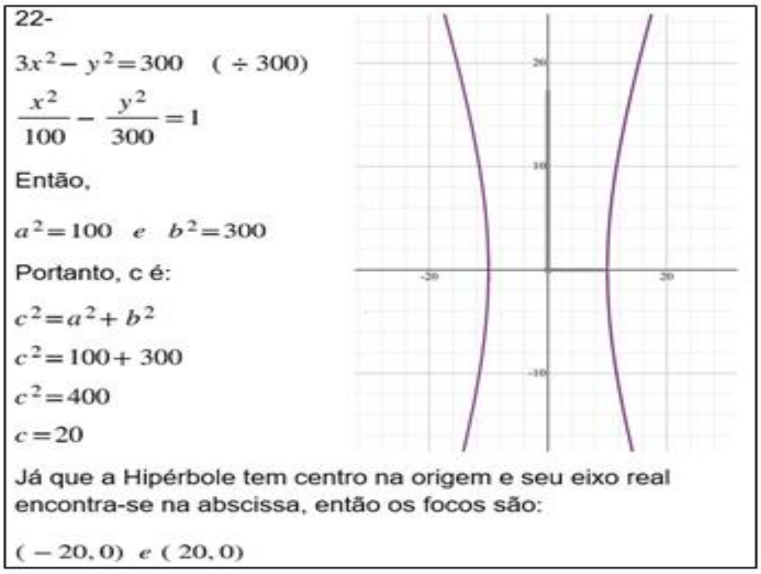
FIGURA 32: EXERCÍCIO PROPOSTO (P3) DE L1

22 Determine as coordenadas dos focos da hipérbole cuja equação é $3x^2 - y^2 = 300$.

Fonte: Iezzi et al (2016, p.103)

Na figura 33, destacaremos a resolução do exercício proposto P4, presenteem L1.

FIGURA 33: RESOLUÇÃO DO EXERCÍCIO PROPOSTO (P3) DE L1



22-

$3x^2 - y^2 = 300 \quad (\div 300)$

$\frac{x^2}{100} - \frac{y^2}{300} = 1$

Então,

$a^2 = 100 \quad e \quad b^2 = 300$

Portanto, c é:

$c^2 = a^2 + b^2$

$c^2 = 100 + 300$

$c^2 = 400$

$c = 20$

Já que a Hipérbole tem centro na origem e seu eixo real encontra-se na abscissa, então os focos são:

$(-20, 0) \quad e \quad (20, 0)$

Fonte: Autor

A questão ilustrada na figura 32, foi escolhida por se tratar de uma tarefa diferente do que foi exposto inicialmente para o aluno na Questão Exemplo (Q3), a fim de entender se somente com o conhecimento que foi ensinado ao aluno através do livro didático (L1) seria o suficiente para que o mesmo resolvesse oexercício proposto a ele.

Desse modo, como base na figura 33, identificamos a análise praxeológica abaixo:

Tarefa (*T*): Encontrar as coordenadas do foco da Hipérbole.

Técnica 1 (*T*): Colocar a equação da Hipérbole na sua forma reduzida $\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1$

Técnica 2 (*T*): Reconhecer os principais elementos da Hipérbole e saber suas relações.

Técnica 3 (*T*): Utilizar a fórmula do Teorema de Pitágoras $C^2 = A^2 + B^2$

Técnica 4 (*T*): Realizar manipulações algébricas.

Técnica 5 (*T*): Utilizar as formas do Foco, do tipo: *F1 (-c, 0) e F2 (c, 0)*.

Tecnologia (θ): Mediante manipulações algébricas foi possível chegar na equação reduzida da Hipérbole e, assim, determinar os semieixos. Posteriormente ao utilizar o

Teorema de Pitágoras, obteve-se o valor da distânciaentre foco e centro. Dessa forma, encontrou-se as coordenadas dos Focos.

Teoria(*Θ*):Geometria Analítica e Álgebra

Ao fim desta análise realizada, foi possível aferir que os autores de L1, no que diz respeito a abordagem da cônica hipérbole, ~~os autores~~ utilizaram somente a geometria analítica como ferramenta praxeológica de abordagem para propor uma forma de ensinar aos estudantes, os conceitos pertencentes a mesma, a geometria sintética foi utilizada unicamente no início da abordagem e de maneira ilustrativa ao exemplificar os objetos que se encontram no formato da figura cônica Hipérbole e na ilustração ponto a ponto.

Após as análises da questão proposta P3, percebemos que, apesar de ser uma tarefa diferente da exemplificada pelos autores, o nível de conhecimento exigido ao aluno está de acordo com o que é ensinado, através do L1, para o mesmo. Uma vez que, tanto as questões exemplificadas quanto aos exercícios propostos, apoiam se na geometria analítica e apresentam o mesmo grau de dificuldade em relação aos conceitos matemáticos desta geometria, necessários para a sua resolução.

A seguir, realizaremos a investigação acerca da cônica Parábola em (L1)

4.1.3 ESTUDO DA PARÁBOLA

Assim como nas cônicas anteriormente abordadas no livro didático, os autores iniciam os estudos desta cônica por meio da ilustração de objetos encontrados no cotidiano do discente, que tenham configurações cônicas (Figuras 34 e 35), além de destacarem também características matemáticas como: Conceitos (Figura 36), elementos (Figura 37) e, posteriormente, calculam a equação reduzida da parábola, em seguida finalizam a abordagem a esta figura cônica, ao associar a Parábola com o estudo de equação quadrática.

Figura 34: Registros da figura Cônica Parábola encontrada no cotidiano do aluno (I) em (L1).

Parábola

A curva que descreve, por exemplo, o movimento de uma bala lançada por um canhão é chamada parábola.

O movimento com trajetória parabólica já era estudado por Galileu Galilei no século XVI. Observe abaixo uma ilustração elaborada por esse cientista.

Gravura que mostra trajetórias parabólicas de balas de canhão. Os números, próximos a cada parábola, indicam a inclinação do canhão em relação à direção horizontal.

Fonte: Iezzi et al. (2016, p. 106)

Figura 35: Registros da figura Cônica Parábola encontrada no cotidiano do aluno (II) em L1

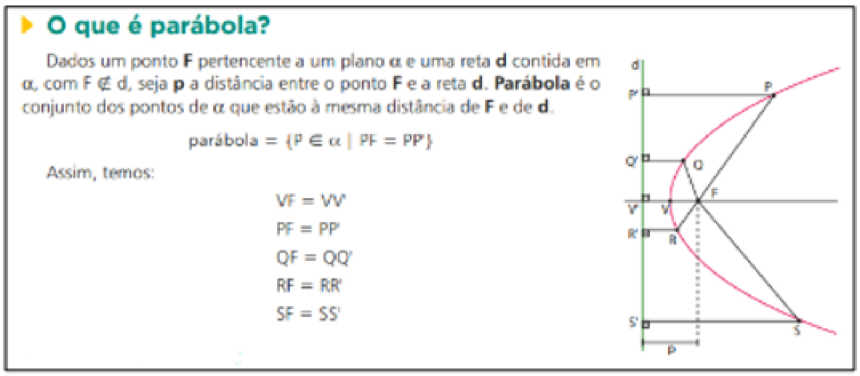
As fotos seguintes mostram cartões-postais de duas cidades brasileiras. Na primeira, vemos as fontes de água do parque do Ibirapuera, em São Paulo. Na segunda, a ponte Juscelino Kubitschek, em Brasília.

Lago do parque do Ibirapuera, São Paulo (SP), em 2012.

Ponte Juscelino Kubitschek, Brasília (DF), em 2010.

Fonte: Iezzi et al. (2016, p. 107)

Figura 36: Representação dos conceitos matemáticos da figura Cônica Parábola em L1



O que é parábola?

Dados um ponto **F** pertencente a um plano α e uma reta **d** contida em α, com $F \notin d$, seja **p** a distância entre o ponto **F** e a reta **d**. **Parábola** é o conjunto dos pontos de α que estão à mesma distância de **F** e de **d**.

$$\text{parábola} = \{P \in \alpha \mid PF = PP'\}$$

Assim, temos:

$$VF = VV'$$
$$PF = PP'$$
$$QF = QQ'$$
$$RF = RR'$$
$$SF = SS'$$

Fonte : Iezzi et al. (2016, p.107)

Os autores apoiam-se, inicialmente, na geometria sintética para ilustrar ao leitor que a Parábola é formada por um conjunto de pontos os quais equidistam a uma mesma distância de um ponto F e uma reta d. Portanto, nesse momento o autor faz uso da geometria sintética como ferramenta para o ensino desses conceitos. Em seguida, eles nomeiam cada elemento ressaltado no gráfico (Figura 37).

Figura 37: Descrição dos elementos principais da figura Cônica Parábola em L1

Elementos principais

F: foco

d: diretriz

p: parâmetro

V: vértice

$\overline{VF}$: eixo de simetria (é a reta que passa por **F** e é perpendicular à diretriz)

Relação notável: $VF = \frac{p}{2}$, pois $VF = VV'$.

Fonte: Iezzi et al (2016, p.107)

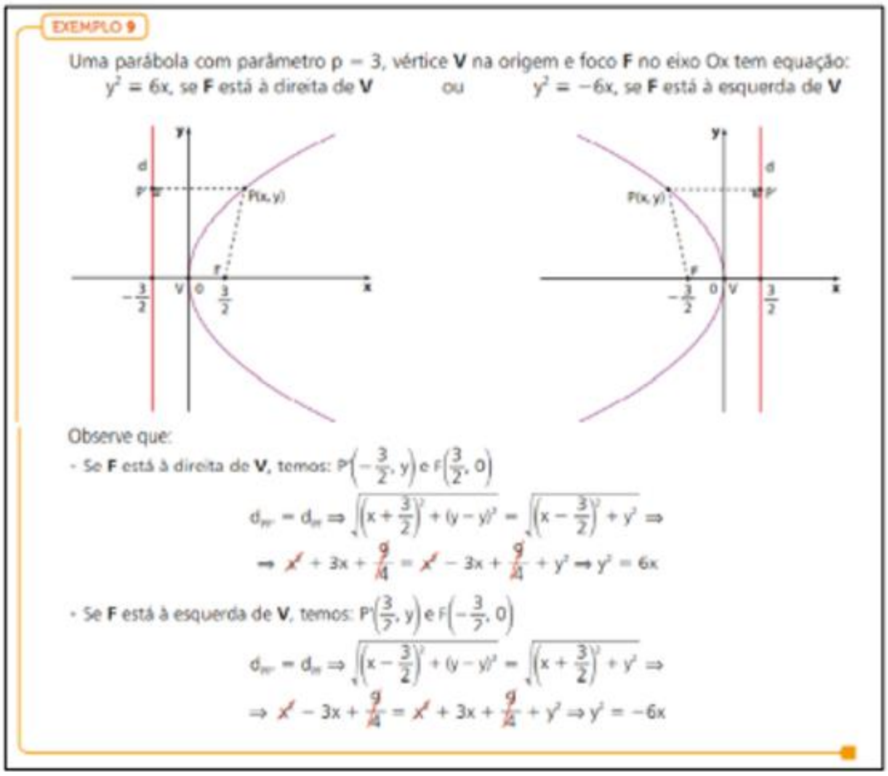
A partir da relação existente entre os elementos, foi possível identificar uma relação notável entre o vértice e o foco da parábola com a medida do parâmetro, a qual, em seguida, será aplicada para determinar a equação da reta diretriz d. Além disso, a mesma relação torna-se fundamental no desenvolvimento da equação reduzida da parábola.

Diante do exposto, os autores, por meio da geometria analítica, apresentam ao estudante e ao professor, o foco como elemento principal responsável pela forma de representação no sistema cartesiano. Destacando dois casos com vértice na origem:

1. Quando o foco pertence ao eixo das abscissas (x).
2. Quando o foco pertence ao eixo das ordenadas (y)

Em seguida, apresentam 2 questões exemplos similares para representar visualmente os casos destacados anteriormente e suas respectivas análises praxeológicas.

Figura 38: Questão Exemplo: Quando o foco pertence ao eixo das abscissas (x).



EXEMPLO 9

Uma parábola com parâmetro p = 3, vértice **V** na origem e foco **F** no eixo Ox tem equação:

$y^2 = 6x$, se **F** está à direita de **V** ou $y^2 = -6x$, se **F** está à esquerda de **V**

Observe que:

- Se **F** está à direita de **V**, temos: $P'\left(-\frac{3}{2}, y\right)$ e $F\left(\frac{3}{2}, 0\right)$

$$d_{PP'} = d_{PF} \Rightarrow \sqrt{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2 + (y-y)^2} = \sqrt{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2 + y^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cancel{x^2} + 3x + \cancel{\frac{9}{4}} = \cancel{x^2} - 3x + \cancel{\frac{9}{4}} + y^2 \Rightarrow y^2 = 6x$$

- Se **F** está à esquerda de **V**, temos: $P'\left(\frac{3}{2}, y\right)$ e $F\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$

$$d_{PP'} = d_{PF} \Rightarrow \sqrt{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2 + (y-y)^2} = \sqrt{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2 + y^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cancel{x^2} - 3x + \cancel{\frac{9}{4}} = \cancel{x^2} + 3x + \cancel{\frac{9}{4}} + y^2 \Rightarrow y^2 = -6x$$

Fonte: Iezzi et al. (2016, p.109)

Este exercício resolvido foi dado logo após o autor destacar a equação reduzida da Hipérbole, bem como mostrar a equação reduzida da figura Cônica em questão. Identificamos a partir da figura 38 a seguinte análise praxeológica:

Tarefa 1 (*T*): Representar o gráfico da Parábola.

Tarefa 2 (*T*): Determinar a equação da Parábola com vértice na origem.

Técnica 1 (*τ*): Reconhecer os principais elementos da Parábola e saber suasrelações

Técnica 2 (*τ*): Utilizar a fórmula de distância entre dois pontos

$\sqrt{(X2 - X1)^2 + (Y2 - Y1)^2}$

Técnica 3 (*τ*): Manipulações algébricas.

Tecnologia (*θ*): A partir dos elementos apresentados inicialmente, pôde-se representar, graficamente, a Parábola. Por intermédio da fórmula da distância entre dois pontos, com o auxílio de manipulações algébricas, foi possível determinar a equação reduzida da figura cônica Parábola.

Teoria (*Θ*): Geometria Analítica e Álgebra.

A seguir apresentaremos o exercício Proposto referente a figura

Cônica *Parábola* no L1:

FIGURA 39: EXERCÍCIO PROPOSTO (P5) DE L1

29 Qual é a equação da diretriz da parábola de equação $2x^2 - 7y = 0$?

Fonte: Iezzi et al (2016, p.109)

Na figura 23, apresentaremos a resolução do exercício proposto P5presente em L1.

Figura 40: Resolução do Exercício Proposto (P5) de L1

29- $2x^2 - 7y = 0$ $2x^2 = 7y$ $x^2 = \frac{7}{2}y$ Então, $2p = \frac{7}{2}$ $p = \frac{7}{4}$	A diretriz é uma reta horizontal de equação: $y = -\frac{p}{2}$ $y = -\frac{\frac{7}{4}}{2}$ $y = -\frac{7}{4} \cdot \frac{1}{2}$ $y = -\frac{7}{8}$

Fonte: Autor

A questão ilustrada na figura 39, foi escolhida por se tratar de uma atividade diferente do que foi exposto inicialmente para o aluno na questão exemplo (Q5). De modo a entender se somente com o conhecimento que foi ensinado ao aluno através do livro didático (L1) seria o suficiente para que o aluno resolvesse o exercício proposto a ele.

Portanto, como base na figura 40, identificamos a análise praxeológica abaixo:

Tarefa (τ): Determinar a equação diretriz da Parábola.

Técnica 1 (τ): Colocar a equação da Parábola na forma reduzida $a^2 = 2aa$

Técnica 2 (τ): Reconhecer os principais elementos da Parábola e saber suas relações.

Técnica 3 (τ): Manipulações algébricas.

Técnica 4 (τ): Utilizar a equação $y = -\frac{p}{2}$ para determinar a equação da diretriz.

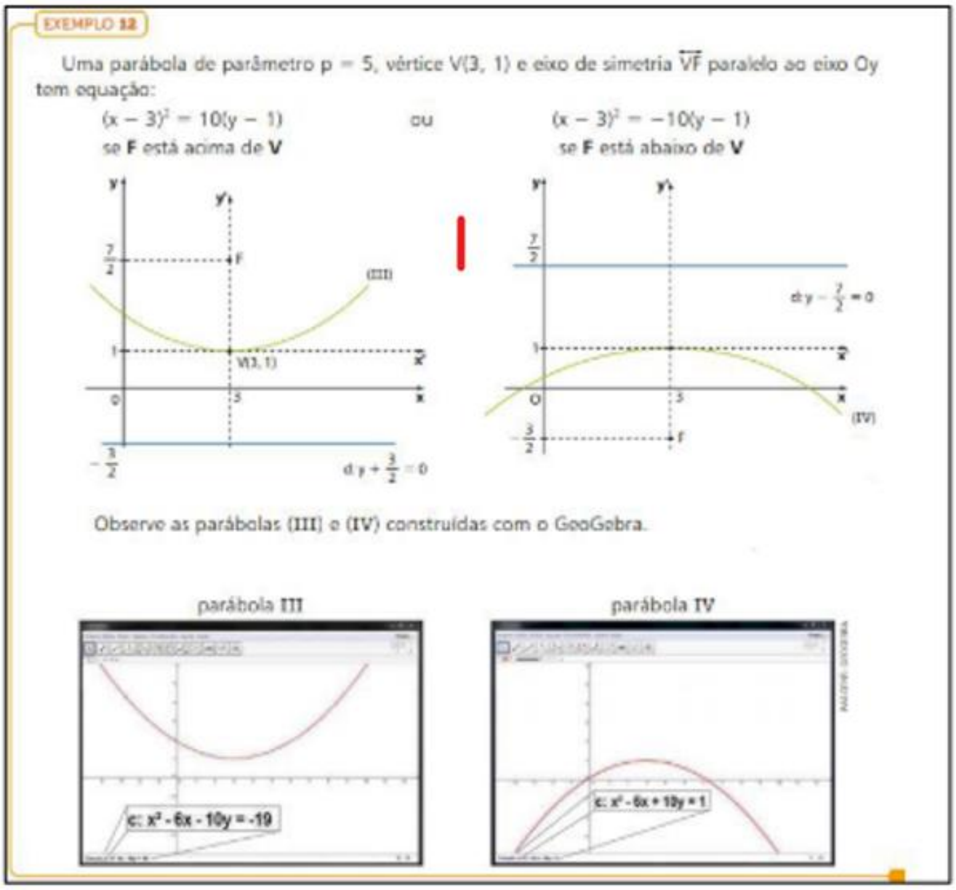
Tecnologia (θ): Por meio de manipulações algébricas foi possível chegar na equação reduzida da parábola e determinar o parâmetro “p”. Para então substituí-bna equação da diretriz da parábola

Teoria (Θ): Álgebra e Geometria Analítica.

Apesar da diferença entre as tarefas solicitadas na questão exemplo (Q5) e no exercício proposto (P5), o L1 permite ao aluno aquisição de conhecimento da geometria sintética suficiente para o desenvolvimento da atividade. Uma vez que a mesma exige umembasamento teórico presente no conteúdo abordado até então.

Dando sequência aos estudos conceituais da Parábola, os autores abordam a equação reduzida dessa da parábola com o seu vértice fora da origem. Assim como a abordagem realizada na equação com o vértice na origem, os autores buscam exemplificar os casos na intenção de complementar a forma com que a parábola pode ser representada graficamente e neste momento fazem uso do aplicativo de cunho matemático Geogebra, com o intuito de chegar a forma algébrica da equação desta cônica, caracterizando assim mais um vez, o uso da geometria analítica como forma principal de apoio didático no desenvolvimento cognitivo matemático abordado como apresentamos na Figura 42

Figura 41: Questão Exemplo: Quando o vértice está fora da origem



Fonte: Iezzi et al. (2016, p. 111)

Assim, após esse exercício resolvido, fizemos a análise praxeológica abaixo

Tarefa 1 (T): Determinar a equação da Parábola com vértice fora da origem.

Tarefa 2 (T): Representar o gráfico da Parábola.

Técnica 1 (τ): Reconhecer os principais elementos da Parábola e saber suas relações.

Técnica 2 (τ): Utilizar a fórmula da equação reduzida da Parábola $(a - aa)^2$

$=2a(a - aa)$

Técnica 3 (τ): Representação gráfica.

Tecnologia (θ): Ao reconhecer os principais elementos da Parábola, utilizou-se da fórmula da equação reduzida para assim, determiná-la. Posteriormente, fez uso do software GeoGebra como apoio para a representação gráfica da referida figura cônica.

Teoria (Θ): Geometria Analítica.

A seguir, apresentaremos o exercício proposto (P6) de L1 referente a figura cônica Parábola.

Figura 42: Exercício Proposto (P6) de L1

37 Obtenha a equação da parábola cuja diretriz é d: x = −2 e cujo foco é F(6, 0).

Fonte: Iezzi et al (2016, p.112)

Posteriormente, mostraremos, na figura 43, a resolução do exercíciopro-posto P6.

Figura 43: Resolução do Exercício Proposto (P6) de L1

37- A distância entre o foco e diretriz é igual ao parâmetro, então:

$$p = Fd = \sqrt{(6-(-2))^2 + (0-0)}$$

$$p = \sqrt{(6+2)^2}$$

$$p = \sqrt{8^2}$$

$$p = 8$$

O vértice é o ponto médio da distância entre o foco e a diretriz, logo sua coordenada é (2,0)

Portanto, temos a equação:

$$\left(y - y_0\right)^2 = 2.p\left(x - x_0\right)$$

$$(y-0)^2 = 2.8(x-2)$$

$$y^2 = 16(x-2)$$

Fonte: Autor

A Escolha da questão ilustrada na figura 42, se deu pelo fato, a priori, de representar a mesma tarefa exemplificada na Questão exemplo (P6), a partir daí buscou-se saber se o mesmo nível de conhecimento exposto na questão exemplificada pelo autor era suficiente para que o aluno conseguisse resolver a questão proposta a ele. Desse modo, como base na figura 43, identificamos a análise praxeológica abaixo:

Tarefa (T): Determina a equação da Parábola com vértice fora da origem.

Técnica 1 (τ): Reconhecer os principais elementos da Parábola e saber suas relações.

Técnica 2 (τ): Utilizar a fórmula da distância entre dois pontos

$\sqrt{(X2 - X1)^2 + (Y2 - Y1)^2}$

Técnica 3 (τ): utilizar a fórmula da equação reduzida da Parábola $(y - y_0)^2 =$

$2.\, p(x - x_0)$

Tecnologia (θ): Por meio da fórmula de distância entre dois pontos foi possível encontrar o valor do parâmetro p e, também, o vértice da Parábola. Dessa forma ao substituir esses elementos pôde determinar a equação da Parábola.

Teoria (Θ): Álgebra e Geometria Analítica.

Assim, percebe-se que na questão acima o vértice da Parábola não se encontrava na origem, o que a diferenciou da questão exemplificada. Contudo, mesmo assim, o aluno seria capaz de resolver o exercício, pois os conhecimentos da geometria analítica usados na questão exemplificada (Q6) são os mesmos que o aluno precisaria pararesolver o exercício proposto P6.

Por fim os autores, utilizam-se mais uma vez da geometria analítica e abordam dois tópicos, o primeiro intitulado “reconhecimento de uma Cônica pela equação”, onde o autor buscar ilustrar, aos estudantes, a maneira algébrica que as equações de cada cônica estudada (elipse, parábola e hipérbole) se estruturará, caso ela esteja com seu eixo maior na vertical ou na horizontal no plano cartesiano. Para exemplificar, mostraremos na Figura 44 a abordagem realizada na figura cônica elipse.

Figura 44: Representação do reconhecimento de uma cônica pela equação

Reconhecimento de uma cônica pela equação

Elipses

Comparemos as equações das elipses:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

(elipse com eixo maior horizontal)

$$\frac{(y - y_0)^2}{a^2} + \frac{(x - x_0)^2}{b^2} = 1$$

(elipse com eixo maior vertical)

Concluímos que:

- uma equação do 2º grau nas incógnitas **x** e **y** representa uma elipse com eixo maior paralelo a Ox ou Oy se for redutível à forma:

$$\frac{(x - x_0)^2}{k_1} + \frac{(y - y_0)^2}{k_2} = 1, \text{ com } k_1 > 0,\ k_2 > 0 \text{ e } k_1 \neq k_2$$

- se $k_1 > k_2$, $k_1 = a^2$ e $k_2 = b^2$, então o eixo maior é horizontal.
- se $k_1 < k_2$, $k_1 = b^2$ e $k_2 = a^2$, então o eixo maior é vertical.
- (x_0, y_0) é o centro da elipse.

Fonte: Iezzi et al (2016, p 113)

Já o segundo tópico, intitulado: “Interseção de Cônicas “, tem o intuito de aprofundar os conhecimentos algébricos acerca das equações cônicas, mostrando como seria realizado os cálculos algébricos caso as figuras venham a se encontrar em algum ponto em comum das curvas no plano cartesiano, como ilustramos na Figura 45.

Figura 45: Ilustração da interseção de cônicas

Interseções de cônicas

É regra geral na Geometria Analítica que, dadas duas curvas $f(x, y) = 0$ e $g(x, y) = 0$, a interseção delas é o conjunto dos pontos que satisfazem o sistema:

$$\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$$

Já aplicamos esse conceito para achar a interseção de duas retas, de uma reta e uma circunferência e de duas circunferências. O mesmo conceito se aplica para obter a interseção de uma reta e uma cônica, de duas cônicas etc.

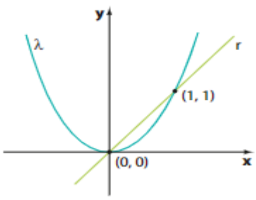
EXEMPLO 13

Vamos determinar os pontos comuns à reta $r: x - y = 0$ e à parábola $\lambda: y = x^2$.
Para isso, devemos resolver o sistema de equações:

$$\begin{cases} x = y & (1) \\ y = x^2 & (2) \end{cases}$$

Substituindo (1) em (2), resulta:

$$y = y^2 \Rightarrow y^2 - y = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \Rightarrow x = 0 \\ \text{ou} \\ y = 1 \Rightarrow x = 1 \end{cases}$$



Assim, temos: $r \cap \lambda = \{(0, 0), (1, 1)\}$.

Fonte: Iezzi et al (2016, p 118)

Desse modo, percebe-se por meio das ilustrações da Figura 36, que o autor faz uso, novamente, da geometria analítica em ambos os tópicos como praxeologias matemáticas e didáticas para o pleno desenvolvimento do aprofundamento dos conhecimentos algébricos relacionados com a construção conceitual das cônicas.

Diante da investigação aqui realizada no livro "**Matemática Ciência e aplicações**", notou-se a preocupação dos autores em desenvolver por meio da geometria sintética, o primeiro contato do aluno com o conteúdo de secções Cônicas recorrendo a um apanhado histórico do corte que originou cada cônica, bem como, a exemplificação por meio da ilustração de objetos e monumentos arquitetônicos encontrados no dia a dia dos discentes que possuíam formatos cônicos.

Tal relação, também, é vista dos estudos desenvolvidos por Macena (2007), a qual aponta que a importância desse tipo de abordagem se dá pelo fato do discente conseguir perceber a aproximação da matemática com o seu cotidiano, além de mudar a alusão de uma disciplina engessada e inalcançável.

No entanto, há uma discrepância no que se refere à abordagem conceitual quanto à exemplificação do trânsito de cônica para outra. Uma vez que a primeira abordagem, inicia o ensino da elipse com o uso do método de Kepler. Os autores utilizam-se das organizações matemáticas da geometria sintética, para desenvolver um pensamento algébrico acerca dos conceitos que circundam a cônica estudada de forma intuitiva e quando passam para o estudo das demais cônicas (Hipérbole e Parábola), utilizam as organizações -da geometria sintética somente como suporte para ilustração inicial de onde encontrar a cônica estudada e passam a conceituar suas características com enfoque maior na parte algébrica, utilizando, desta vez, da geometria analítica em ambas as cônicas

A falta de linearidade no desenvolvimento dos conceitos pertencentes as cônicas podem ocasionar confusões no entendimento do objeto matemático, bem como um menor desempenho do aluno, uma vez que segundo Jesus (2017), a retomada de ideias auxilia na eficácia da aprendizagem do discente. Assim, entendemos que a ausência dessa retomada pode dificultar a fluidez desse ensino e refletir diretamente em seu desempenho acerca da temática estudada.

No que tange às tarefas propostas e exemplificadas presentes em todo livro didático, foi possível identificar uma notória redução de atividades ao longo do estudo de cada cônica -e uma predileção dos autores em priorizar, nas tarefas propostas aos estudantes, os técnicas algébricas em detrimento das técnicas que fazem apelo à geometria, explorando, desta maneira mais a geometria analítica do que a sintética, uma vez que as representações gráficas das cônicas são ilustradas por meio de prints da tela do aplicativo Geogebra, sem explorar os conhecimentos que podem ser notados mediante essa construção.

Tais situações são identificadas ainda na investigação de Macena (2007), a qual aponta que os estudos deixados de serem exploradas causam lacunas no conhecimento para o aluno, assim como na pesquisa de Siqueira (2016), o qual explica que no estudo de cônica, o que mais se observa é que o ensino geométrico sendo esquecido, com ênfase para perspectiva algébrica.

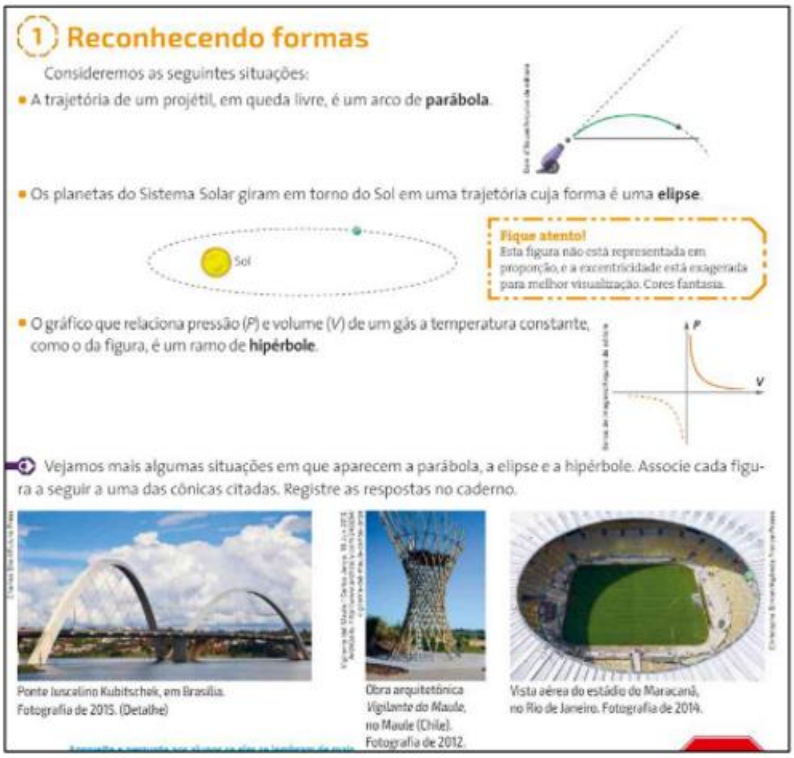
A seguir, iniciaremos explanação do livro didático (L2): Matemática Contexto e Aplicações.

4.2 ANÁLISE NO LIVRO DIDÁTICO (L2): "MATEMÁTICA CONTEXTO E APLICAÇÕES"

Ao analisarmos o conteúdo explanado acerca das cônicas no livro (L2), percebe-se que, assim como em (L1), analisado anteriormente, o autor, preocupa-se em abordar o assunto de cônicas inicialmente de forma contextualizada com o cotidiano do aluno, uma vez que ele inicia os estudos com um capítulo intitulado: "Reconhecendo formas", onde busca expor exemplos ilustrativos de situações e espaços físicos que possuem formas cônicas, presente no dia a dia dos discentes. Dando exemplo de cada uma das Cônicas que ainda serão abordadas mais adiante no livro, como vemos já nas próximas seções.

4.2.1 ESTUDO DA PARÁBOLA

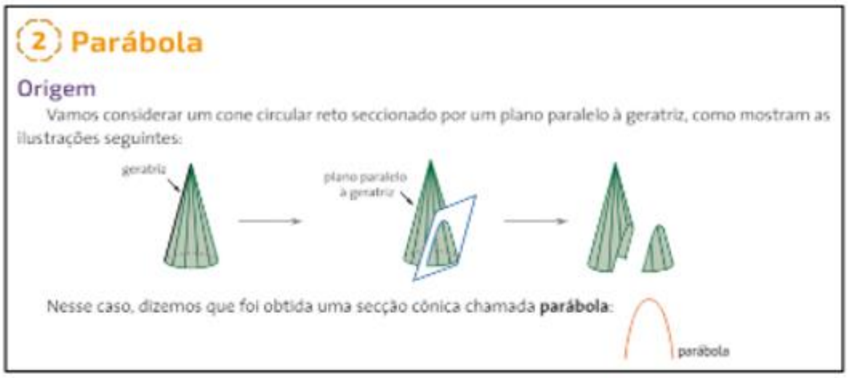
Figura 46: Introdução dos conceitos de cônica em (L2)



Fonte: Dante (2016, p.143)

Após essa abordagem inicial conforme representado nas Figuras 46 e 47, onde ocorre o reconhecimento lúdico das cônicas em âmbito geral, o autor inicia o estudo específico da cônica, denominada de Parábola, em que mostra, a origem do respectivo objeto matemático por meio de ilustrações geométricas dos cortes que deram origem à representação do objeto estudado, o que caracteriza o uso da geometria sintética como recurso metodológico inicial.

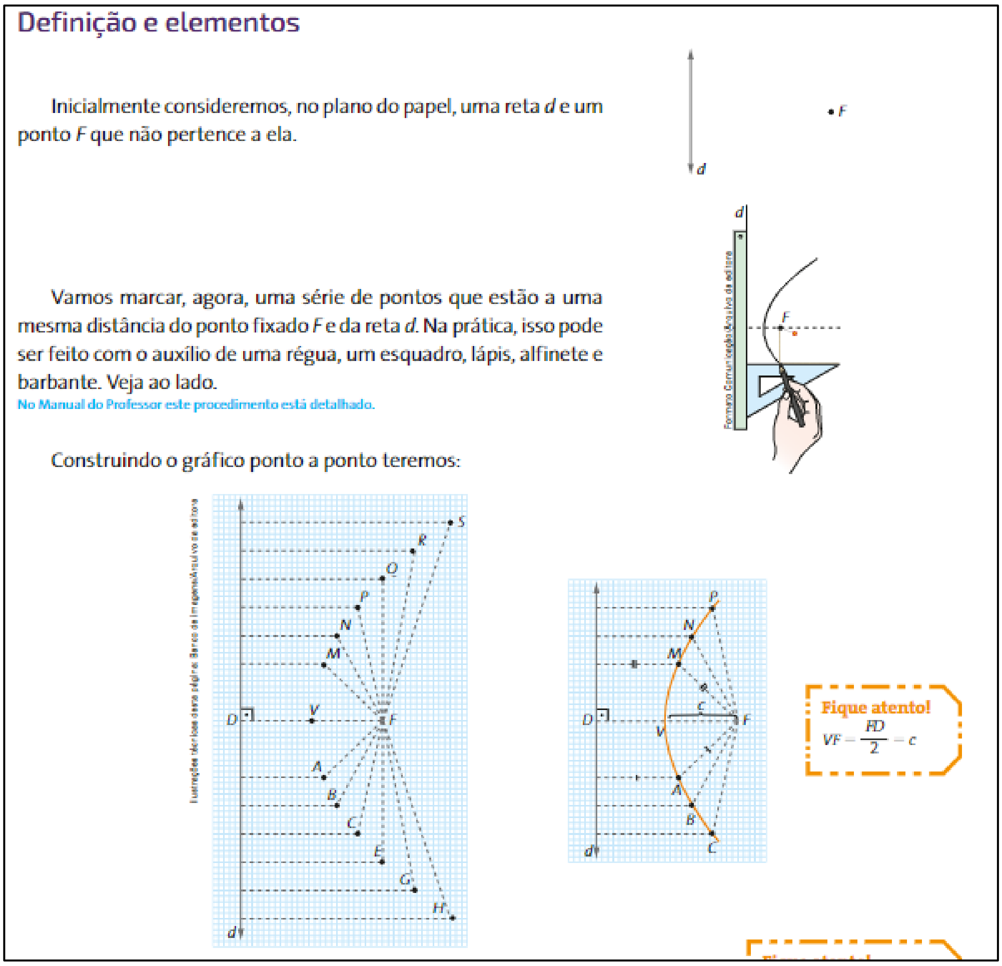
Figura 47: Introdução dos conceitos de cônica em (L2)



Fonte: Dante (2016, p. 143)

Posteriormente, o autor busca conceituar a definição e os elementos da parábola (Figuras 48 e 49), por dois métodos. O primeiro, por meio da construção geométrica de pontos no plano cartesiano e o segundo, ilustra a construção da curva parabólica com o auxílio de réguas, e o conceito de pontos equidistantes. Por fim, o autor destaca que a definição de parábola se dá por meio do conceito de lugar geométrico dos pontos do plano que distam igualmente de uma reta “d”, denominada de diretriz e de um ponto fico “f”, não pertencente à diretriz, chamado de foco. Percebe-se aqui o autor apoia-se na-geometria sintética para o desenvolvimento de conceitos acerca da parábola.

Figura 48: Definição dos conceitos da cônica parábola I em (L2)



Definição e elementos

Inicialmente consideremos, no plano do papel, uma reta *d* e um ponto *F* que não pertence a ela.

Vamos marcar, agora, uma série de pontos que estão a uma mesma distância do ponto fixado *F* e da reta *d*. Na prática, isso pode ser feito com o auxílio de uma régua, um esquadro, lápis, alfinete e barbante. Veja ao lado.

No Manual do Professor este procedimento está detalhado.

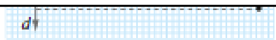
Construindo o gráfico ponto a ponto teremos:

Fique atento!

$VF = \frac{FD}{2} = c$

Fonte: Dante (2016, p 144)

Figura 49: Definição dos conceitos da cônica parábola II em (L2)



Fique atento!
Todo ponto da parábola tem essa propriedade e todo ponto do plano que possui essa propriedade pertence à parábola.

A parábola é o conjunto de todos os pontos do plano que estão à mesma distância de *F* e *d*.

Na figura devemos destacar:

- o ponto *F*, foco da parábola;
- a reta *d*, diretriz da parábola;
- o ponto *V*, vértice da parábola (ponto médio de $\overline{FD}$, distância de *F* até *d*);
- a reta que passa por *F*, perpendicular à diretriz *d*, que se chama eixo de simetria da parábola;
- a medida de $\overline{FD}$, parâmetro (2*c*) da parábola.

Assim, definimos que parábola é o lugar geométrico dos pontos do plano que distam igualmente de uma reta fixa *d*, chamada **diretriz**, e de um ponto fixo *F*, não pertencente à diretriz, chamado **foco**.

Fonte: Dante (2016, p 144)

Ao abordar a equação da reta, o autor buscou descrever a lei de formação da Parábola separadamente em casos (1), (2), (3), (4), onde em cada caso, ele ilustra geometricamente e algebricamente a forma com que a curva da parábola pode se comportar, primeiro com seu vértice na origem, e depois, em um ponto qualquer (Figuras 50 e 51).

Figura 50: Apresentação da equação da parábola com vértice na origem e simetria em relação ao eixo oX (I) em (L2)

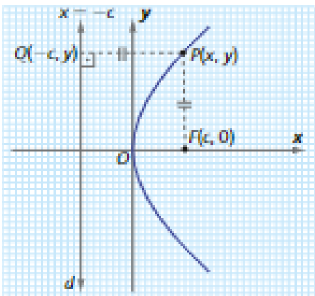
Equação da parábola

Relembre os alunos de que o gráfico de uma função quadrática é uma parábola.

Equação da parábola com vértice na origem

A partir do foco (*F*) e da diretriz (*d*), podemos chegar à equação da parábola formada por todos os pontos $P(x, y)$ do plano tais que $d(P, F) = d(P, d)$.

1º caso: diretriz $x = -c$ e foco $F(c, 0)$



Fique atento!
c indica a distância do foco ao vértice e é sempre positivo.
Logo, −*c* indica um número negativo.

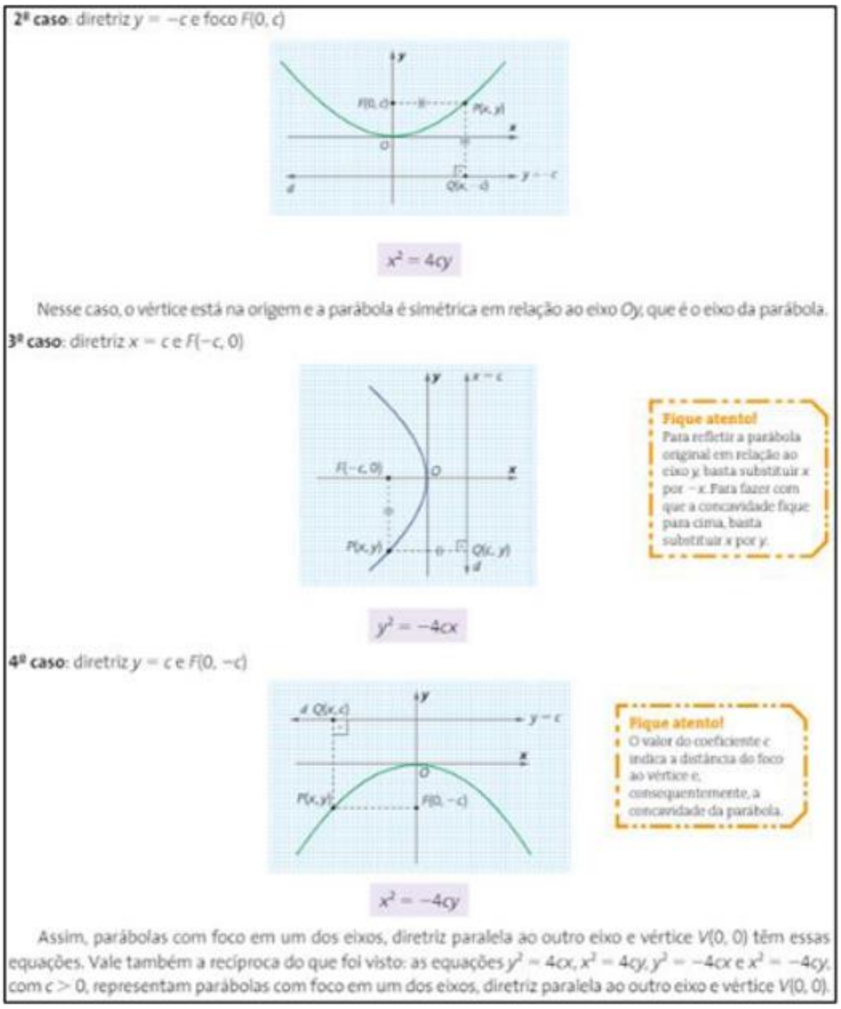
$$d(P, F) = d(P, Q) \Rightarrow \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x+c)^2 + (y-y)^2} \Rightarrow (x-c)^2 + y^2 = (x+c)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cancel{x^2} - 2cx + \cancel{c^2} + y^2 = \cancel{x^2} + 2cx + \cancel{c^2} \Rightarrow \boxed{y^2 = 4cx}$$

Nesse caso, o vértice está na origem e a parábola é simétrica em relação ao eixo *Ox*, que é o eixo da parábola. Os demais casos são análogos. Assim, temos:

Fonte: Dante (2016, p 144)

Figura 51: Apresentação da equação da parábola com vértice na origem e simetria em relação ao eixo oX (II) em (L2)


2º caso: diretriz $y = -c$ e foco $F(0, c)$

$$x^2 = 4cy$$

Nesse caso, o vértice está na origem e a parábola é simétrica em relação ao eixo Oy, que é o eixo da parábola.

3º caso: diretriz $x = c$ e $F(-c, 0)$

Fique atento!
Para refletir a parábola original em relação ao eixo y, basta substituir x por $-x$. Para fazer com que a concavidade fique para cima, basta substituir x por y.

$$y^2 = -4cx$$

4º caso: diretriz $y = c$ e $F(0, -c)$

Fique atento!
O valor do coeficiente c indica a distância do foco ao vértice e, consequentemente, a concavidade da parábola.

$$x^2 = -4cy$$

Assim, parábolas com foco em um dos eixos, diretriz paralela ao outro eixo e vértice $V(0, 0)$ têm essas equações. Vale também a recíproca do que foi visto: as equações $y^2 = 4cx$, $x^2 = 4cy$, $y^2 = -4cx$ e $x^2 = -4cy$, com $c > 0$, representam parábolas com foco em um dos eixos, diretriz paralela ao outro eixo e vértice $V(0, 0)$.

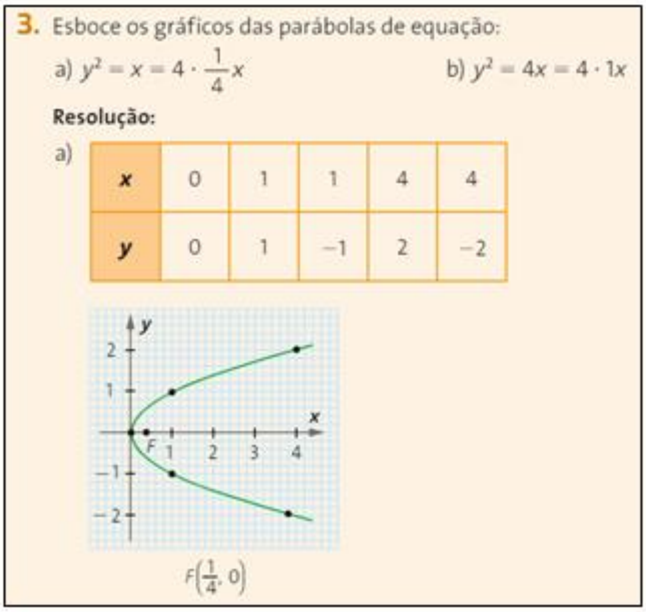
Fonte: Dante (2016, p.145)

Nota-se, que o autor parte dos conceitos geométricos somente para chegar à equação da parábola que ele deseja ressaltar, fato característico da geometria sintética. Além disso, observou-se a preocupação do autor em esclarecer conceitos que possam não ter sido compreendidos pelo aluno no decorrer da explicação, uma vez que o mesmo se utiliza da estratégia de espalhar pequenas notas em cor cítrica, neste caso a cor laranja, intitulada “Fique atento!”, na qual faz pequenos comentários conceituais de forma complementar ao que está sendo ensinado.

Após a ilustração das diversas formas que a lei de formação da equação da parábola com centro na origem pode ser representada, o autor ilustra três (3) exercícios resolvidos, nos quais, em cada exercício aborda-se questões diferentesacerca da Parábola como: *Determinar a equação da parábola, dado os valores dofoco e da* *diretriz da mesma; Determinar elementos como o foco e a diretriz, dadoa equação da parábola e esboçar o gráfico da parábola, dada uma determinada equação.*

A seguir, na figura 43, apresentaremos o exercício resolvido (R1) de L2

FIGURA 52: EXERCÍCIO RESOLVIDO (R1) DE L2



3. Esboce os gráficos das parábolas de equação:

a) $y^2 = x = 4 \cdot \frac{1}{4}x$ b) $y^2 = 4x = 4 \cdot 1x$

Resolução:

a)

x	0	1	1	4	4
y	0	1	−1	2	−2

Fonte: Dante (2016, p. 146)

Portanto, realizamos para tal exercício a seguinte análise praxeológica:

Tarefa (*T*): Representar o gráfico da Parábola.

Técnica 1 (*τ*): Reconhecer os principais elementos da parábola e saber suas relações.

Técnica 2 (*τ*): Reescrever a equação dada na forma geral da equação da parábola.

Técnica 3 (*τ*): Manipulações algébricas.

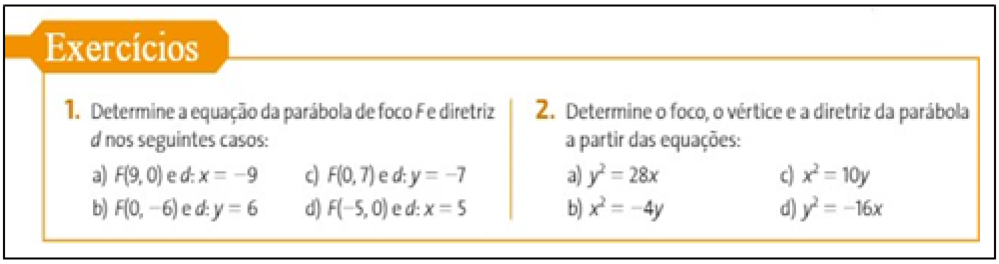
Tecnologia (*θ*): Mediante a equação reduzida da Parábola, com auxílio demanipulações algébricas, foi possível traçar a representação da figura cônica parábola

Teoria (*Θ*): Álgebra e Geometría Analítica.

Na sequência, é solicitado aos alunos dois exercícios propostos, compostos de 4 atividades que vão de (*a a d*) cada. Embora os dois exercícios apresentem o mesmo comando para todas as suas respectivas alternativas, o autor buscou trabalhar em ambos, a maioria dos conceitos ensinados até aqui, uma vez que apresenta uma diversificação de casos presentes em cada alternativa.

Na primeira, cujo comando é “*Determine a equação da parábola de foco Fe diretriz D nos seguintes casos:*”. O autor buscou colocar entre as alternativas, casos variados quanto a simetria da parábola diante dos eixos das abscisas e dasordenadas, partindo dos valores que compõem a parábola para encontrar a equação da referida figura cônica. Já na segunda atividade, de comando “*Determine o foco, o vértice e a diretriz da parábola a partir das equações*” observa-se a mesma preocupação em relação a diversificar os casos quanto a simetria da parábola, colocando desta vez o caminho inverso do proposto na atividade 1, uma vez que o aluno partirá das equações dispostas em cada alternativa para encontrar os elementos solicitados no comando da questão. Em ambos os exercícios o autor teve o cuidado de selecionar casos que possuíam sempre o vértice na origem, como mostra a figura abaixo:

Figura 53: Exercício Proposto (P1) de (L2)



Exercícios

1. Determine a equação da parábola de foco F e diretriz d nos seguintes casos:

a) $F(9, 0)$ e $d: x = -9$

b) $F(0, -6)$ e $d: y = 6$

c) $F(0, 7)$ e $d: y = -7$

d) $F(-5, 0)$ e $d: x = 5$

2. Determine o foco, o vértice e a diretriz da parábola a partir das equações:

a) $y^2 = 28x$

b) $x^2 = -4y$

c) $x^2 = 10y$

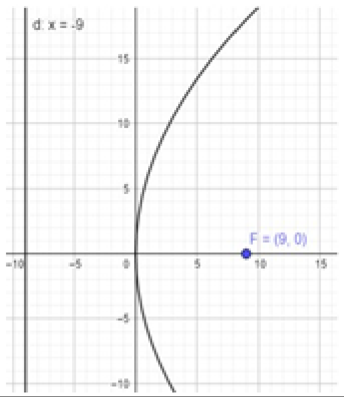
d) $y^2 = -16x$

Fonte: Dante (2016, p. 146)

Percebe-se, no entanto que apesar do autor exemplificar por meio dos exercícios resolvidos, cada atividade que seria proposta aos alunos adiante, nota-se o esquecimento de propor aos discentes a atividade relacionada a geometria sintética ao esboço de gráficos, uma vez que esta, torna-se a única tarefa exemplificada anteriormenteque não é solicitada aos mesmos nos exercícios propostos. Diante do exposto, e com a ausência de uma atividade gráfica, escolhemos resolver o exercício proposto 1) letra “a” de P1 e realizar sua análise praxeológica.

FIGURA 54: RESOLUÇÃO DO EXERCÍCIO PROPOSTO P1 DE L2

1-a)



Pelo gráfico, percebe-se que a Parábola é do tipo $y^2 = 4cx$, logo, precisamos do valor de 2c, então:

$$d(F,d) = 2c = \sqrt{(9-(-9))^2 + (0-0)^2}$$

$$2c = \sqrt{18^2}$$

$$2c = 18$$

Assim, temos a seguinte equação:

$$y^2 = 4cx$$

$$y^2 = 2.18.x$$

$$y^2 = 36x$$

Fonte: Autores

Tarefa (T): Determinar a equação da Parábola com vértice na origem.

Técnica 1 (τ): Reconhecer os principais elementos da parábola e saber suas relações.

Técnica 2 (τ): Utilizar o conhecimento de distância entre dois pontos $\sqrt{(X2 - X1)^2 + (Y2 - Y1)^2}$

Técnica 3 (τ): Aplicar a fórmula da equação reduzida da Parábola $a^2 = 4cx$

Tecnologia (θ): Com o auxílio da construção gráfica e da utilização da fórmula dadistância entre dois pontos, para encontrar a medida do parâmetro 2c, foi possíveldeterminar a equação da figura cônica Parábola.

Teoria (Θ): Geometria Analítica e Álgebra.

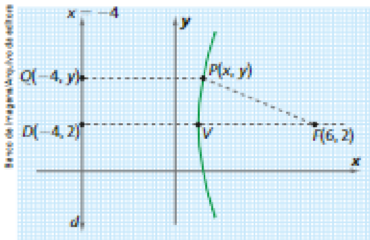
Após a análise dos exercícios resolvidos e propostos, percebemos que, apesar da diferença de tarefas escolhidas por nós, os autores se preocuparam em dispor atividades propostas que apresentassem as mesmas tarefas ilustradas, por eles, nos exercícios resolvidos. Sendo assim, observou-se que o conhecimento matemático da geometria analítica necessário para a resolução de P1 estava de acordo com o saber exigido nas atividades resolvidas pelos autores.

O autor prossegue o conteúdo de cônicas exemplificando as equações da parábola cuja representação tem seu vértice em um ponto qualquer e para tal, utiliza-se dos preceitos da geometria analítica, como praxeologias matemáticas e didáticas para o desenvolvimento pois, nesse momento as representações algébricas passam a ser seu principal objetivo de ensino a ser transmitido. E utiliza-se da geometria sintética somente como recurso visual para que o estudante consiga observar o traçado da curva em estudo como mostra a figura a seguir:

Figura 55: Representações algébricas e geométricas da equação da parábola com vértice fora da origem (I) em (L2)

Equação da parábola com vértice em um ponto qualquer Assunto opcional

Vamos determinar a equação da parábola que tem como diretriz a reta de equação $x = -4$ e como foco o ponto $F(6, 2)$:



Nesse caso, o vértice é o ponto médio do segmento de reta FD, no qual $F(6, 2)$ e $D(-4, 2)$:

$$V\left(\frac{6-4}{2}, \frac{2+2}{2}\right) \Rightarrow V(1, 2)$$

Pela distância de V até F encontramos o valor de c:

$$c = \sqrt{(6-1)^2 + (2-2)^2} = 5$$

Os pontos $P(x, y)$ da parábola são tais que $d(P, F) = d(P, Q)$, em que $Q(-4, y)$:

$$d(P, F) = d(P, Q) \Rightarrow \sqrt{(x-6)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{(x+4)^2 + (y-y)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x-6)^2 + (y-2)^2 = (x+4)^2 \Rightarrow (y-2)^2 = (x+4)^2 - (x-6)^2 =$$

$$= \cancel{x^2} + 8x + 16 - \cancel{x^2} + 12x - 36 = 20x - 20 \Rightarrow (y-2)^2 = 20(x-1)$$

Observemos que na equação obtida aparecem as coordenadas do vértice $x_V = 1$ e $y_V = 2$ e também o valor $c = 5$:

$$(y - \underbrace{2}_{y_v})^2 = \underbrace{\underbrace{20}_{4 \cdot 5}}_{c} (x - \underbrace{1}_{x_v})$$

Reciprocamente, a partir da equação da parábola $(y-2)^2 = 20(x-1)$, podemos chegar ao vértice e ao valor de c (distância de V a F ou de V à diretriz d) e, daí, ao foco e à diretriz:

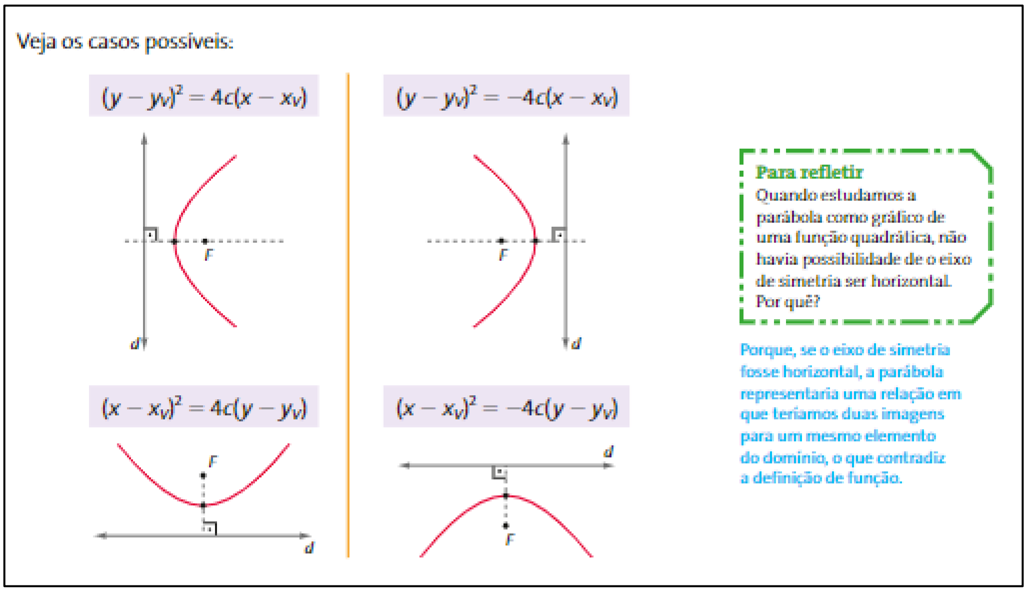
$$(y-2)^2 = 20(x-1) = 4 \cdot 5(x-1)$$

em que $V(1, 2)$ e $c = 5$.

Fonte: Dante (2016, p 147)

Apesar de ter dado, inicialmente, uma importância maior a parte algébrica no desenvolvimento da equação da parábola, o autor ressalta o estudo das diferentes representações da parábola de acordo com cada tipo de equação (Figura 56).

Figura 56: Apresentação da equação da parábola com vértice na origem e simetria em relação ao eixo oX (II) em (L2)



Fonte: Dante (2016, p 148)

Portanto, nota-se que ao abordar a parábola, o autor promove um equilíbrio acerca da geometria utilizada para os desenvolvimentos dos conceitos que circundam tal objeto matemática, uma vez que inicia seus estudos com a geometria sintética e neste momento, utiliza-se da geometria analítica em conjunto com a sintética, salientando mais a sintética desta vez, para complementar o que já foi explanado.

Em seguida apresenta três exercícios resolvidos, dos quais todos propõema mesma tarefa: "encontre as equações da parábola, da diretriz e as coordenadasde seus elementos (vértice e foco)", com modificações somente dos valores pertencentes a cada uma. Por esse motivo, dentre tais exercícios, escolhemos o exercício resolvido (R2) para ilustrar o passo a passo sugerido pelo autor no intuitode se resolver questões com vértice fora da origem, como mostra a figura a seguir:

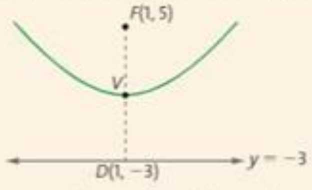
FIGURA 57: EXERCÍCIO RESOLVIDO (R2) DE L2

Exercícios resolvidos

4. Determine a equação e as coordenadas do vértice da parábola que tem foco no ponto $F(1, 5)$ e a reta diretriz de equação $y = -3$.

Resolução:

Os dados do problema permitem fazer um esboço do gráfico e, assim, identificar o tipo da equação:



$$(x - x_V)^2 = 4c(y - y_V)$$

O vértice é o ponto médio de $\overline{FD}$. Então:

$$V\left(\frac{1+1}{2}, \frac{5-3}{2}\right) \Rightarrow V(1, 1)$$

Pela distância de V a F encontramos o valor de c:

$$c = \sqrt{(1-1)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{0+16} = 4$$

Podemos escrever agora a equação procurada:

$(x - x_V)^2 = 4c(y - y_V) \Rightarrow (x-1)^2 = 4 \cdot 4(y-1) \Rightarrow (x-1)^2 = 16(y-1)$

Logo, a equação é $(x-1)^2 = 16(y-1)$ e $V(1, 1)$.

Fonte: Dante (2016, p. 148)

A seguir, apresentaremos a análise praxeológica do exercício resolvido

Tarefa 1 (T): Determinar a equação da Parábola com vértice fora da origem.

Tarefa 2 (T): Encontrar a coordenada do vértice.

Técnica 1 (τ): Reconhecer os principais elementos da parábola e saber suas relações.

Técnica 2 (τ): Esboçar graficamente a Parábola para determinar quais dos casospossíveis refere-se a esta figura cônica.

Técnica 3 (τ): Utilizar o conhecimento de distância entre dois pontos

$$\sqrt{(X2 - X1)^2 + (Y2 - Y1)^2}$$

Técnica 4 (τ): Aplicar a fórmula da equação reduzida da Parábola $(a - aa)^2 = 4c(y - yv)$

Tecnologia (θ): Com o auxílio da construção gráfica, foi possível encontrar a coordenada do vértice. E com a utilização da fórmula da distância entre dois pontos, para encontrar a medida do parâmetro 2c, foi possível determinar a equação da figura cônica Parábola.

Teoria (*Θ*): Geometria, Álgebra e Geometria Analítica.

Observa-se no passo a passo da questão resolvida, no que diz respeito a parte gráfica da parábola, que apesar do autor ter dado uma grande ênfase conceitual em tal aspecto matemático anteriormente, o mesmo só é utilizado comoum apoio orientador quanto ao tipo de equação que será encontrada posteriormente. Consideramos assim, que tal aspecto revela uma preferência pela abordagem da geometria analítica.

Na sequência o autor disponibilizou aos alunos quatro exercícios propostos, dos quais dois consistem em encontrar a equação da parábola dado ovalor de seus elementos como (vértice e foco); um outro com o objetivo de encontrar aspectos como: as coordenadas do vértice e do foco, a equação da retadiretriz e a equação do eixo de simetria da parábola dada uma determinada equação. O que revela a utilização da geometria analítica como predileção nas propostas dos exercícios mais uma vez.

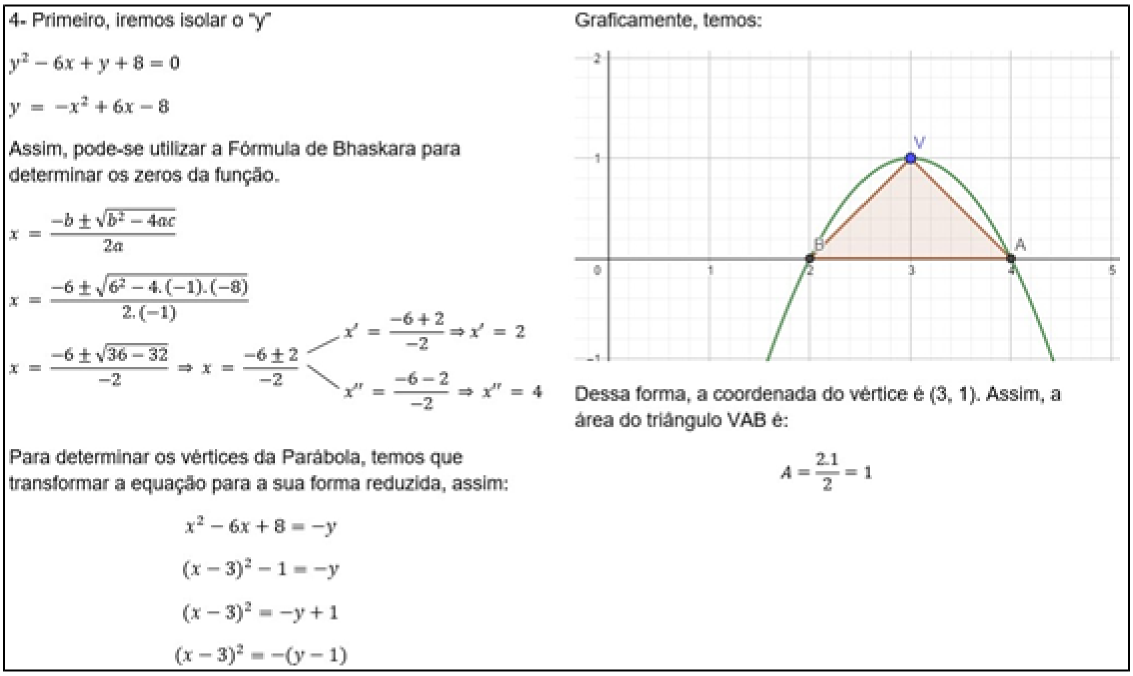
FIGURA 58: EXERCÍCIO PROPOSTO (P2) DE L2

4. A parábola de equação $x^2 - 6x + y + 8 = 0$ intersecta o eixo x nos pontos A e B. Sendo V o vértice da parábola, determine a área do triângulo VAB.

Fonte: Dante (2016, p. 149)

A seguir, apresentaremos na figura 59 a resolução do exercício proposto P2.

Figura 59: Resolução do Exercício Proposto (P2) de L2


4- Primeiro, iremos isolar o "y"

$y^2 - 6x + y + 8 = 0$

$y = -x^2 + 6x - 8$

Assim, pode-se utilizar a Fórmula de Bhaskara para determinar os zeros da função.

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$x = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4.(-1).(-8)}}{2.(-1)}$

$x = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 32}}{-2} \Rightarrow x = \frac{-6 \pm 2}{-2}$ $x' = \frac{-6+2}{-2} \Rightarrow x' = 2$; $x'' = \frac{-6-2}{-2} \Rightarrow x'' = 4$

Para determinar os vértices da Parábola, temos que transformar a equação para a sua forma reduzida, assim:

$x^2 - 6x + 8 = -y$

$(x-3)^2 - 1 = -y$

$(x-3)^2 = -y + 1$

$(x-3)^2 = -(y-1)$

Graficamente, temos:

Dessa forma, a coordenada do vértice é (3, 1). Assim, a área do triângulo VAB é:

$A = \frac{2.1}{2} = 1$

Fonte: Autores

Escolhemos o exercício proposto (P2), por se tratar de um problema matemático que envolve uma interpretação diferenciada, por parte do aluno, já que o mesmo se utiliza de duas linguagens matemáticas (geometria analítica e geometria plana) para sua resolução. Portanto, a partir da figura 59 identificamosa seguinte análise praxeológica:

Tarefa (*τ*): Encontrar a coordenada do vértice.

Técnica 1 (*τ*): Manipulações algébricas.

Técnica 2 (*τ*): Utilizar a fórmula de Bhaskara $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Técnica 3 (*τ*): Transformar a equação para a forma reduzida.

Técnica 4 (*τ*): Utilizar a fórmula da área de um triângulo qualquer$a = \frac{a.h}{2}$

Tecnologia (*θ*): Por meio de manipulações algébricas para isolar o valor de y parapos-teriormente encontrar os zeros da função quadrática. Em seguida, foi possívelencon-trar a coordenada do vértice e com o auxílio da construção gráfica juntamente com a fórmula da área de um triângulo qualquer, determinou-se a áreado triângulo VAB.

Teoria (*Θ*): Álgebra, Geometria Analítica e Geometria Plana.

Ao realizar a análise praxeológica da questão proposta P2 observa-se que ocorre o uso de mais duas linguagens matemáticas, além da geometria analítica, as quais são: álgebra econceitos da geometria plana.

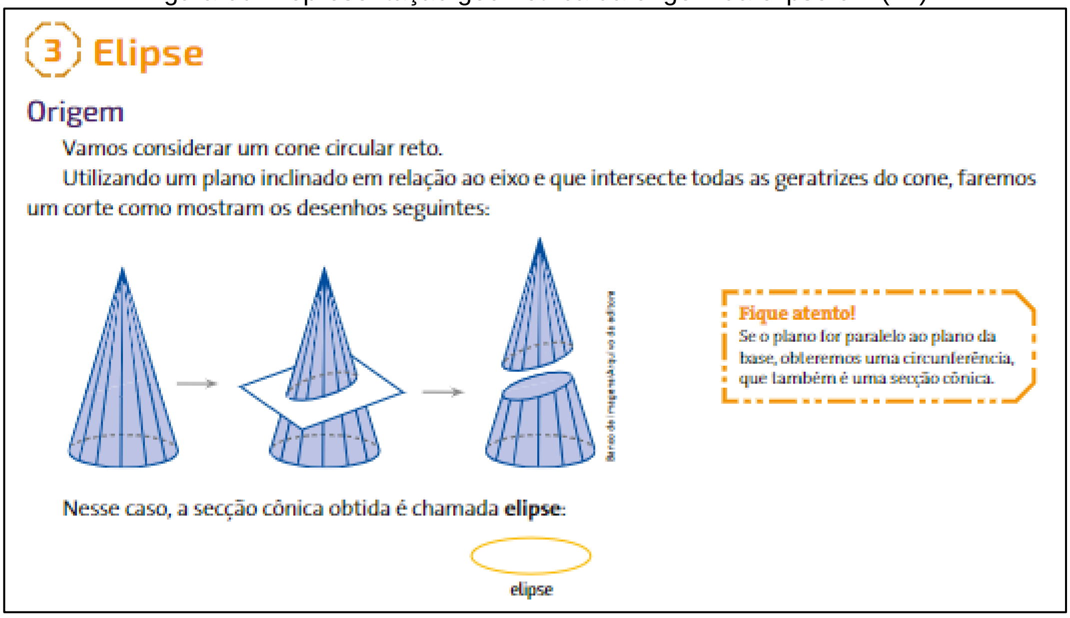
Dessa forma, ao fim das análises das questões resolvidas e propostas, o autor propôs uma variedade de tarefas, que apresentam sempre conceito da geometria analítica. Contudo, percebemos que a tarefa "Representar o gráfico da Parábola", cujo conhecimentos advém da geometria sintéticasó foi solicitada uma vez no exercício resolvido. Em relação ao rigor matemático exigido pelas questões propostas, nota-se que se manteve proporcional ao longo de toda abordagem da figura cônica Parábola.

A seguir analisaremos a figura cônica Elipse em L(2)

4.2.2 ESTUDO DA ELIPSE

O autor introduz o assunto de elipse, da mesma forma que a parábola, ilustrando a sua origem por meio das secções Cônicas, fazendo apelo geometria sintética. Novamente, utiliza-se das notas em cor cítrica, para chamar atenção do aluno, para o fato de que esta secção não deve ocorrer de forma paralela ao plano da base, uma vez que, caso isso ocorra a figura formada será uma outra secção cônica chamada de circunferência (Figura 60).

Figura 60: Representação geométrica da origem da elipse em (L2)


3 Elipse

Origem

Vamos considerar um cone circular reto.

Utilizando um plano inclinado em relação ao eixo e que intersecte todas as geratrizes do cone, faremos um corte como mostram os desenhos seguintes:

Fique atento!

Se o plano for paralelo ao plano da base, obteremos uma circunferência, que também é uma secção cônica.

Nesse caso, a secção cônica obtida é chamada **elipse**:

elipse

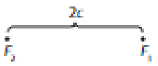
Fonte: Dante (2016, p 150)

Em seguida, o autor ilustra geometricamente por meio do método de Kepler, presente na geometria sintética, a construção intuitiva de que a distância de um ponto qualquer até dois pontos fixos denominados de F1F2 terão sempre o mesmo valor quando somados. Além disso, expande tal conhecimento, para o fato de que qualquer ponto que atenda tais condições pertencerá a Elipse como mostra a Figura 61

Figura 61: Definição e elementos da Elipse(I) em (L2)

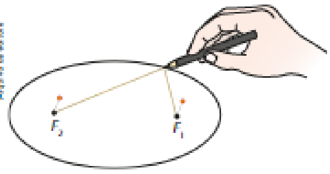
Definição e elementos

Consideremos, inicialmente, no plano do papel, dois pontos fixos, F_1 e F_2, tais que a distância entre eles seja $2c$.



Imagine que vamos marcar uma série de pontos tais que a soma de suas distâncias aos pontos fixos F_1 e F_2 seja sempre constante e maior do que $2c$. Na prática, isso pode ser feito com o auxílio de um lápis, dois alfinetes e barbante. Veja:

No Manual do Professor este procedimento está detalhado.



Fique atento!
No desenho ao lado, o barbante tem comprimento $2a$.

Construindo o gráfico ponto a ponto teremos:

$AF_1 + AF_2 = BF_1 + BF_2 = CF_1 + CF_2 = ... = JF_1 + JF_2 = ... = LF_1 + LF_2 = ... = 2a$ (constante), sendo $2a > 2c$.

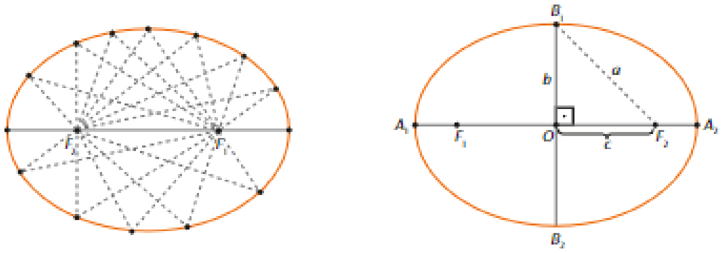
Fonte: Dante (2016, p 150)

A partir da caracterização da Elipse como sendo o conjunto de todos os pontos tais que a soma dessas distâncias até os pontos fixos deve permanecer constantes, o autor de L2 define não só os elementos pertencentes à Elipse, como também o conceito de lugar geométrico por meio dos recursos metodológicos oferecidos pela geometria sintética.

Juntamente com as caracterizações dos elementos ditos, Dante (2016) preocupa-se em informar as alterações geométricas que a excentricidade causa na cônica e destacar como observação a importância do teorema de Pitágoras para a determinação de seus elementos como mostra a Figura 47.

Figura 62: Definição e elementos da Elipse (II) em (L2)

A elipse é o conjunto de todos os pontos do plano que satisfazem essa propriedade.



Assim, definimos que elipse é o lugar geométrico dos pontos de um plano tais que a soma de suas distâncias a dois pontos fixos, F_1 e F_2, denominados focos, seja constante.

Na figura acima, temos:

- F_1 e F_2 são os focos da elipse e a distância entre eles é a distância focal ($2c$);
- $\overline{A_1A_2}$ é o eixo maior da elipse e sua medida é a soma que consta da definição ($2a$);
- $\overline{B_1B_2}$ é o eixo menor da elipse cuja medida é $2b$;
- O é o centro da elipse (intersecção dos eixos da elipse e ponto médio de $\overline{F_1F_2}$, $\overline{A_1A_2}$ e $\overline{B_1B_2}$);
- o número $e = \frac{c}{a}$ chama-se **excentricidade** da elipse ($0 < e < 1$).

Observações:

1ª) $\overline{B_1F_2} \cong \overline{OA_2}$, pois ambos têm medida a.

2ª) No $\triangle B_1OF_2$ podemos notar que $b^2 + c^2 = a^2$. Essa relação é fundamental na determinação dos elementos da elipse.

Fique atento!
A excentricidade indica quanto a elipse se aproxima de um segmento de reta ou de uma circunferência, conforme seu valor se aproxima de 1 ou de 0, respectivamente.

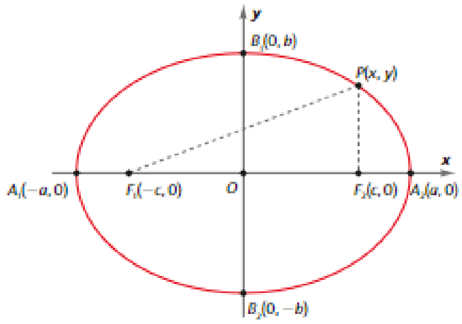
Fonte: Dante (2016, p 151)

Passado esse primeiro momento de introdução ao conceito e aos elementos da elipse, o autor apoia-se somente nos conceitos geométricos, presentes na geometria sintética para dar continuidade no ensino, ao abordar, sem apresentar qualquer cálculo, a representação gráfica que dá origem a relação algébrica presente nos pontos de foco da elipse que equidistam- se no plano cartesiano conforme representado na Figura 48.

Figura 63: Representação geométrica da equação da elipse com centro na origem (I) em (L2)

Equação da elipse

Vamos inicialmente considerar a elipse com as extremidades do eixo maior nos pontos $A_1(-a, 0)$ e $A_2(a, 0)$, do eixo menor em $B_1(0, b)$ e $B_2(0, -b)$ e, consequentemente, o centro em $O(0, 0)$.



Consideremos um ponto $P(x, y)$ qualquer da curva.
Pela definição observamos que:

$$PF_1 + PF_2 = A_1F_1 + A_1F_2 = A_1A_2 = 2a$$

Fonte: Dante (2016, p 151)

A partir da relação destacada pelo autor na Figura 48, o autor apresenta a equação da elipse sem desenvolver os cálculos algébricos, característico do uso metodológico por meio da geometria sintética. O autor, ressalta ainda que há uma grande quantidade de cálculos por trás da equação reduzida da elipse, mas que esses cálculos não serão tratados neste capítulo. Estes fatos estão destacados na Figura 49

Figura 64: Representação geométrica da equação reduzida da elipse com centro na origem (II) em (L2)

Daí, temos:

$$PF_2 + PF_1 = 2a \Rightarrow \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} = 2a$$

A partir dessa igualdade, desenvolve-se uma grande quantidade de cálculos que omitiremos neste livro. Efetuados todos os cálculos, chega-se em:

Veja o desenvolvimento da equação reduzida da elipse no Manual do Professor.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Fique atento!
A recíproca é verdadeira:
equações da forma $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, com $a \neq b$, representam elipses, ou seja, apenas os pontos de uma elipse satisfazem essa equação.

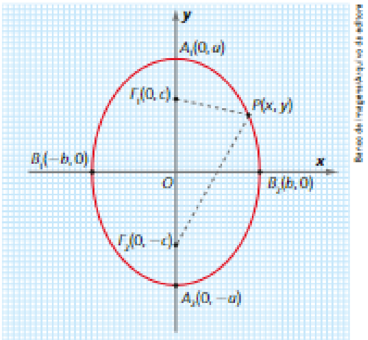
em que $a = OA_1 = OA_2$, $c = OF_1 = OF_2$ e b tal que $b^2 = a^2 - c^2$. Essa equação é denominada **equação reduzida da elipse** de focos no eixo Ox e centro na origem.

Fonte: Dante (2016, p 151)

Dando continuidade aos estudos da elipse, o autor destacas como a figura a fica estruturada, de forma gráfica e algébrica, quando está com seu eixo na origem ou fora dela. O mesmo faz a representação gráfica, em quatro gráficos distintos, além de ilustrar como seriam as equações gerais – lei de formação-, de cada Elipse representada no sistema cartesiano como vemos nas Figuras 65, 66 e 67.

Figura 65: Representação algébrica e geométrica da equação da elipse com centro na origem (II) em (L2)

Vejamos agora:



Se os focos da elipse estão sobre o eixo Oy e o centro na origem, conforme a figura, a equação reduzida da elipse é dada por:

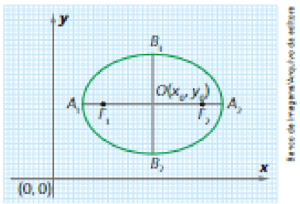
$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

Fonte: Dante (2016, p 152)

Figura 66: Representação algébrica e geométrica da equação da elipse com centro fora da origem (I) em (L2)

Analogamente, chegamos às equações da elipse com centro qualquer. Assim, temos as seguintes equações, considerando o centro um ponto qualquer, $O(x_0, y_0)$, e os eixos paralelos aos eixos x e y:

1ª) $\overline{F_1F_2}$ é paralelo ao eixo x, $a = OA_1$, $b = OB_1$ e $a > b$.

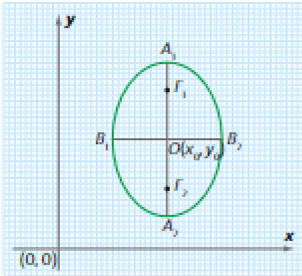


$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

Fonte: Dante (2016, p 152)

Figura 67: Representação algébrica e geométrica da equação da elipse com centro fora da origem (II) em (L2)

2ª) $\overline{F_1F_2}$ é paralelo ao eixo y, $a = OA_1$, $b = OB_1$ e $a > b$.



$$\frac{(x - x_0)^2}{b^2} + \frac{(y - y_0)^2}{a^2} = 1$$

Fonte: Dante (2016, p 152)

Por conseguinte, o autor apresenta 7 (sete) exercícios resolvidos e 13 (treze) exercícios propostos, constituídos por tarefas diversificadas em ambos. Sendo assim, escolhemos para análise, um exercício resolvido e um proposto. Apresentaremos a seguir o exercício resolvido (R3), como indicado na figura 68 a seguir:

FIGURA 68: EXERCÍCIO RESOLVIDO (R3) DE L2

11. Calcule a excentricidade $e = \frac{c}{a}$ e faça o esboço do gráfico de cada elipse:

a) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$

b) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

Resolução:

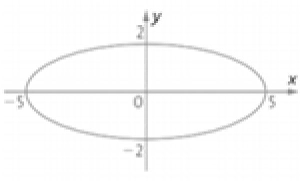
a) $a^2 = 25 \Rightarrow a = 5$

$b^2 = 4 \Rightarrow b = 2$

$c^2 = a^2 - b^2 = 25 - 4 = 21 \Rightarrow c = \sqrt{21}$

$e = \frac{\sqrt{21}}{5} \simeq \frac{4{,}58}{5} \simeq 0{,}91$

x	*y*
0	2
0	−2
5	0
−5	0
2	1,8
2	−1,8



Observação: Quanto maior o valor de $e = \frac{c}{a}$, mais próxima de um segmento de reta é a elipse correspondente.

Para refletir
O que acontece com a elipse à medida que o valor de *e* tende a zero?

Fonte: Dante (2016, p. 154 - 155)

Desse modo, identificamos a seguinte análise praxeológica:

Tarefa 1 (*τ*): determinar a excentricidade.

Tarefa 2 (*τ*): Determinar o gráfico da Elipse.

Técnica 1 (*τ*): Reconhecer os principais elementos da Elipse e saber suasrelações.

Técnica 2 (*τ*): Teorema de Pitágoras $a^2 = a^2 + a^2$

Técnica 3 (*τ*): Manipulações algébricas.

Técnica 4 (*τ*): Utilizar a fórmula da excentricidade E= $\frac{c}{a}$

Tecnologia (*θ*): Por meio do reconhecimento dos elementos principais presentesna equação reduzida da Elipse, foi possível chegar no Teorema de Pitágoras e, assim, encontrar a excentricidade. Utilizou-se a equação para determinar pontos presentes na referida figura cônica para posteriormente construir o gráfico.

Teoria (*Θ*): Álgebra e Geometria Analítica

Posteriormente aos exercícios resolvidos, têm-se os exercícios propostos pelo autor. Assim, temos na figura 69 o exercício proposto P3

FIGURA 69: EXERCÍCIO PROPOSTO P3 DE L2

17. (FGV-SP) Dada a elipse de equação $9x^2 + 16y^2 - 144 = 0$, quais são as coordenadas de seus focos?

Fonte: Dante (2016, p.156)

Em seguida, apresentaremos a resolução desse exercício escolhido para análise

FIGURA 70: RESOLUÇÃO DO EXERCÍCIO PROPOSTO P3 DE L2

17- Faz-se necessário, transformar a equação na sua forma reduzida, logo:

$$9x^2 + 16y^2 - 144 = 0$$

$$9x^2 + 16y^2 = 144$$

$$\frac{9x^2}{144} + \frac{16y^2}{144} = \frac{144}{144}$$

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$$

Dessa forma, percebe-se que a Elipse se encontra com centro na origem e seu eixo maior está na abscissa. Portanto:

$a^2 = 16$ e $b^2 = 9$

Usando o Teorema de Pitágoras, temos:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$16 = 9 + c^2$$

$$16 - 9 = c^2$$

$$7 = c^2$$

$$\sqrt{7} = c$$

Assim, os focos são:

$$F_1\left(\sqrt{7}, 0\right) F_2\left(-\sqrt{7}, 0\right)$$

Fonte: Autores

Escolhemos esse exercício proposto (P3) por ser um problema diferente, pois, percebemos que ele apresentava uma equação que não estava em sua forma reduzida. Além disso, o autor identifica a questão como uma atividade

Tarefa (*T*): Encontrar as coordenadas dos focos da Elipse.

Técnica 1 (*τ*): Colocar a equação da Elipse na sua forma reduzida $\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2}$

Técnica 2 (*τ*): Realizar manipulações algébricas.

Técnica 3 (τ): Reconhecer os principais elementos da Hipérbole e saber suas relações.

Técnica 4 (τ): Utilizar a fórmula do Teorema de Pitágoras $a^2 = b^2 + c^2$

Técnica 5 (τ): Utilizar as formas do Foco, do tipo: *F1 (c, 0) e F2 (-c, 0)*.

Tecnologia (θ): Mediante manipulações algébricas foi possível chegar na equação reduzida da Elipse e, assim, determinar os semieixos. Posteriormente, ao utilizar o Teorema de Pitágoras, obteve-se o valor da distância entre foco e centro. Dessa forma, encontrou-se as coordenadas dos Focos.

Teoria (Θ): Álgebra e Geometria Analítica.

Após análise praxeológicas das atividades vistas acima, notou-se que, embora as tarefas solicitadas fossem diferentes, ambas abordam conceitos da geometria analítica e o grau de dificuldade encontra- se similar. Portanto, torna-se possível ao aluno resolver as atividades propostas somente com o auxílio dos conhecimentos abordados em L2.

Para finalizar os estudos desta cônica, o autor explana a utilização do software Geogebra para construção gráfica das curvas que representam a elipse e a parábola que foram estudadas até esse momento. O autor de L2 preocupa-se em explicar passo a passo de como fazer uso do software como ferramenta auxiliadora na construção gráfica.

O uso de tal metodologia é uma alternativa à escolha da geometria sintética como base norteadora destes conhecimentos até aqui. Segundo Oliveira (2011), tal abordagem é de fundamental importância para que desperte a exploração do pensamento geométrico no aluno. Além disso, esse autor juntamente com Siqueira (2016) apontam as vantagens em utilizar a tecnologia para o ensino de cônicas.

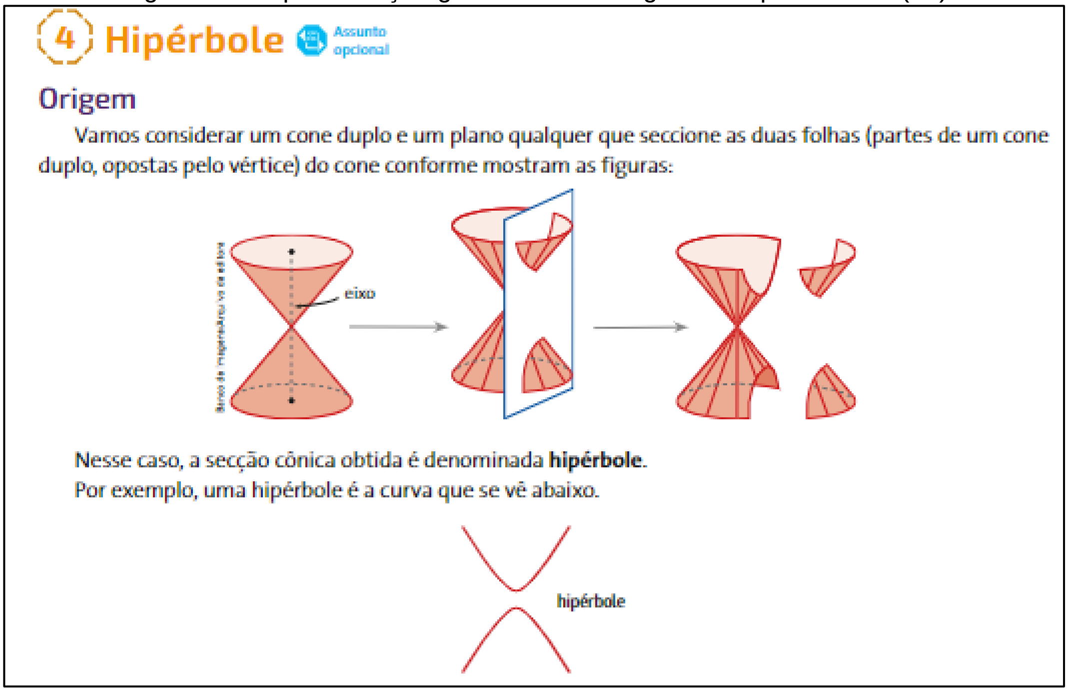
Ao realizar a análise da elipse, percebe-se que o autor se utilizou sempre dos métodos dispostos pela geometria sintética para explanar os conceitos acerca da referida cônica, uma vez que utilizou métodos como: cortes cônicos como desenvolvimento inicial e a didática do fio esticado para destacar os elementos presentes na Elipse bem como as equações que descrevem as diferentes representações dessas cônicas no plano cartesiano sem desenvolver nenhum cálculo geométrico.

A seguir, realizamos a análise acerca da abordagem da Hipérbole.

4.2.3 ESTUDO DA HIPÉRBOLE

Assim, como as demais cônicas abordadas no livro didático L2 até aqui, o autor inicia o ensino da hipérbole, utilizando-se da geometria sintética, com alusões geométricas referente aos cortes das diagonais de um plano alfa com um cone, onde se deu sua origem, como mostra a Figura 71.

Figura 71: Representação geométrica da origem da hipérbole em (L2)



4 Hipérbole Assunto opcional

Origem

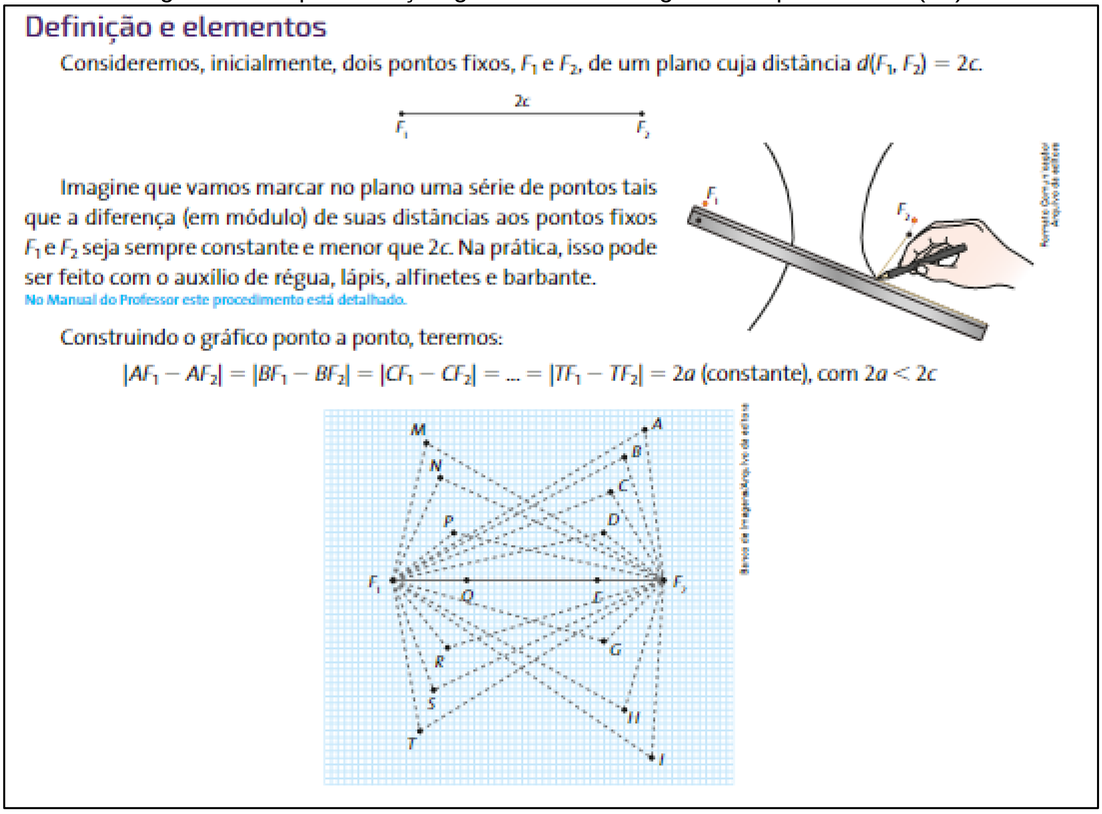
Vamos considerar um cone duplo e um plano qualquer que seccione as duas folhas (partes de um cone duplo, opostas pelo vértice) do cone conforme mostram as figuras:

Nesse caso, a secção cônica obtida é denominada **hipérbole**.
Por exemplo, uma hipérbole é a curva que se vê abaixo.

Fonte: Dante (2016, p 160)

Seguido desta abordagem inicial, Dante (2016) introduz os conceitos da hipérbole como: Sua definição e seus elementos de duas formas, em a primeira trata de uma atividade lúdica, utilizando-se dos conceitos da geometria sintética, na qual o autor ilustra a construção da cônica com o auxílio de materiais facilmente manipuláveis como a régua, lápis, alfinete e barbante. Já a segunda, de caráter geométrico, o escritor mostra que também é possível construí-la, ponto a ponto, dos quais, a diferença (em módulo) de suas distâncias a dois pontos fixos, F1 e F2, seja sempre constante e menor que a distância existente entre F1F2. (Ver Figura 54).

Figura 72: Representação geométrica da origem da hipérbole em (L2)



Definição e elementos

Consideremos, inicialmente, dois pontos fixos, F_1 e F_2, de um plano cuja distância $d(F_1, F_2) = 2c$.

Imagine que vamos marcar no plano uma série de pontos tais que a diferença (em módulo) de suas distâncias aos pontos fixos F_1 e F_2 seja sempre constante e menor que $2c$. Na prática, isso pode ser feito com o auxílio de régua, lápis, alfinetes e barbante.

No Manual do Professor este procedimento está detalhado.

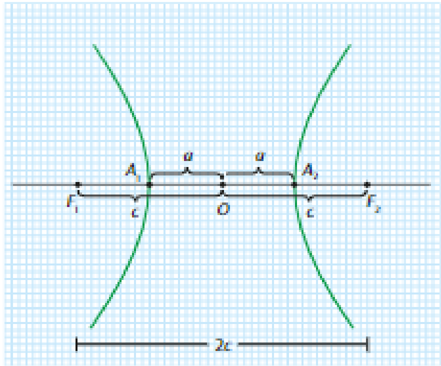
Construindo o gráfico ponto a ponto, teremos:

$$|AF_1 - AF_2| = |BF_1 - BF_2| = |CF_1 - CF_2| = ... = |TF_1 - TF_2| = 2a \text{ (constante), com } 2a < 2c$$

Fonte: Dante (2016, p 160)

Sucessivamente, o autor busca conceituar geometricamente cada elemento abordado anteriormente de forma lúdica, para na sequência formalizá-lo. Após as ilustrações, o mesmo, procura nomear os elementos presentes em tais representações geométricas, fazendo uso da geometria sintética mais uma vez. Assim como, apresenta (visto na Figura 54) o conceito de excentricidade na nota “Fique atento!”, como vemos na Figura 55 destacada a seguir:

Figura 73: Definição e elementos da hipérbole (II) em (L2)



Assim, definimos que hipérbole é o lugar geométrico dos pontos $P(x, y)$ de um plano tais que a diferença (em módulo) de suas distâncias a dois pontos fixos, F_1 e F_2, é constante.

Na figura anterior, temos:

- F_1 e F_2 são os focos da hipérbole, sendo $F_1F_2 = 2c$ a distância focal;
- A_1 e A_2 são os vértices da hipérbole, sendo $A_1A_2 = A_1F_2 - A_1F_1 = 2a$ (constante da definição);
- O é o centro da hipérbole (ponto médio de $\overline{F_1F_2}$ e de $\overline{A_1A_2}$);
- o número $e = \frac{c}{a}$ é a excentricidade da hipérbole (note que $e > 1$, pois $c > a$).

Fique atento!
Quanto mais próximo de 1 for a excentricidade, mais a hipérbole se aproxima de duas retas paralelas (perpendiculares ao eixo x real). E, se a excentricidade for cada vez maior, tendendo ao infinito, a hipérbole se aproxima de duas semirretas opostas (com origem em A_1 e A_2).

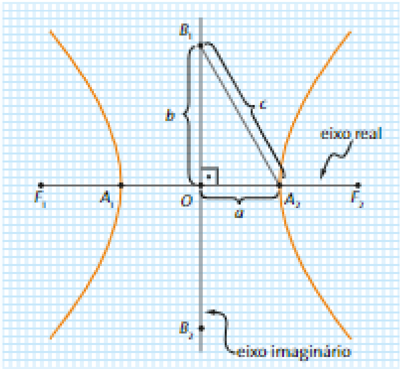
Fonte: Dante (2016, p 161)

Consecutivamente o autor faz uma observação para acrescentar mais dois elementos fundamentais da hipérbole, os quais são: Eixo real e o Eixo imaginário presentes no plano cartesiano, o que caracteriza mais uma vez o uso da geometria sintética como fonte de desenvolvimento cognitivo acerca dos conhecimentos da hipérbole, já que não desenvolve algebricamente tais ilustrações. Esses eixos apresentam uma relação pitagórica abordado por L2 primeiramente de forma geométrica exposta por meio da representação do triangulo pitagórico que surge entre as curvas da hipérbole e os eixos imaginários.

E posteriormente, o autor destaca a reação algébrica oriunda da representação geométrica feita inicialmente, como mostra a Figura 56.

Figura 74: Definição e elementos da hipérbole (III) em (L2)

Observação: Considerando uma hipérbole de focos F_1 e F_2 e vértices A_1 e A_2, vimos que $F_1F_2 = 2c$ e $A_1A_2 = 2a$. Então, $OF_2 = c$ e $OA_2 = a$.



Fique atento!

- Nas mesmas condições de B_1 existe B_2, sobre a mediatriz de $\overline{A_1A_2}$, tal que $B_1B_2 = 2b$.
- $\overline{A_1A_2}$ é chamado **eixo real** e $\overline{B_1B_2}$, **eixo imaginário** da hipérbole.

Seja B_1 um ponto da mediatriz de $\overline{A_1A_2}$ tal que o triângulo B_1OA_2 seja retângulo em O, com o cateto $\overline{OA_2}$ medindo a e a hipotenusa $\overline{B_1A_2}$ medindo c. Assim, chamando de b a medida do cateto $\overline{OB_1}$, temos $a^2 + b^2 = c^2$ ou $b^2 = c^2 - a^2$.

Fonte: Dante (2016, p 162)

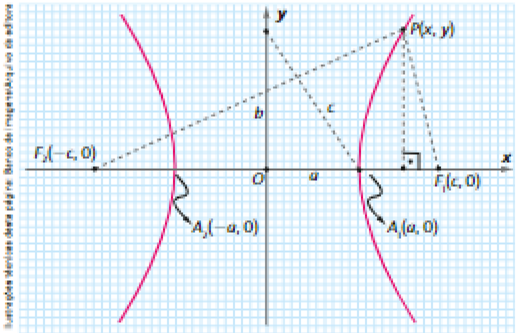
Após a formalização dos elementos que compõem a hipérbole, o autor inicia uma nova etapa de aprendizagem, trata-se de expor a equação reduzida da Cônica, de modo a dividi-la em casos com: centro na origem e centro fora da origem, assim como foi feito nas demais curvas abordadas neste livro.

Neste momento, percebe-se uma preferência do autor em fazer uso da geometria analítica para representar, graficamente, os casos em que a hipérbole está com seu centro na origem do plano cartesiano e os casos em que a curva da cônica está com seu eixo em um ponto qualquer diferente da origem no referido plano, uma vez que utiliza a ideia de distância entre dois pontos para desenvolver os conhecimentos desejados, como ilustrado nas Figuras 57, 58 e 59.

Figura 75: Representação algébrica e geométrica da equação da Hipérbole com centro na origem (I) em (L2)

Equação da hipérbole

Consideremos inicialmente a hipérbole da figura, na qual os focos pertencem ao eixo Ox e o centro é a origem $O(0, 0)$.



Um ponto $P(x, y)$ qualquer da curva deve satisfazer, de acordo com a definição, a seguinte condição:

$$|PF_2 - PF_1| = 2a$$

Como $PF_2 = \sqrt{(x + c)^2 + (y - 0)^2}$ e $PF_1 = \sqrt{(x - c)^2 + (y - 0)^2}$, temos:

$$\left|\sqrt{(x + c)^2 + y^2} - \sqrt{(x - c)^2 + y^2}\right| = 2a$$

A partir dessa igualdade, desenvolve-se uma grande quantidade de cálculos que omitiremos aqui. Efetuados todos os cálculos, chega-se em: Veja o desenvolvimento da equação reduzida da hipérbole no Manual do Professor.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Fique atento!
A recíproca é verdadeira: equações dessa forma representam hipérboles, ou seja, apenas pontos de uma hipérbole satisfazem essa equação.

Observando a hipérbole acima, note que: $a = OA_1 = OA_2$, $c = OF_1 = OF_2$ e b é tal que $b^2 = c^2 - a^2$.

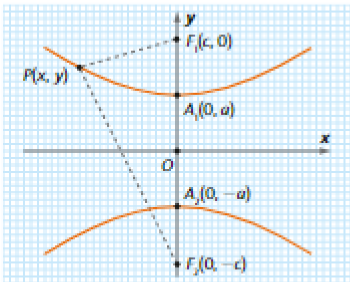
Essa fórmula é denominada **equação reduzida da hipérbole**, quando os focos estão sobre o eixo x e são equidistantes da origem.

Fonte: Dante (2016, p 163)

Figura 76: Representação algébrica e geométrica da equação da Hipérbole com centro na origem (II) em (L2)

Veja agora:

Faça uma comparação, com os alunos, das equações da elipse, da hipérbole e da parábola. É importante que eles saibam, a partir das equações, a cônica representada.



Caso os focos estejam sobre o eixo y e também equidistantes da origem, a equação reduzida da hipérbole será:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

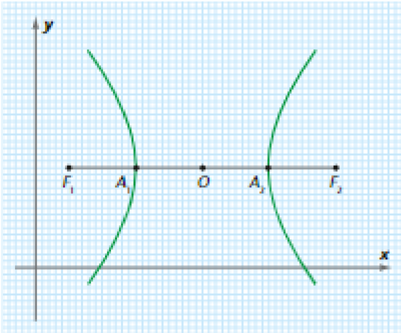
Fonte: Dante (2016, p 163)

Figura 77: Representação algébrica e geométrica da equação da Hipérbole fora da origem (I) em (L2)

Analogamente, podemos generalizar essa equação para um centro qualquer.

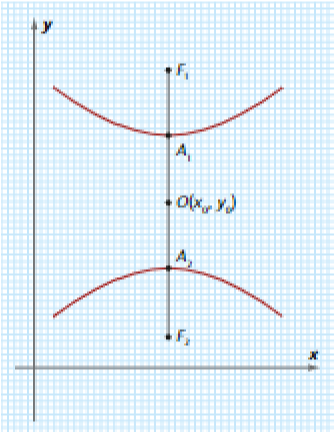
Considerando o centro da hipérbole $O(x_0, y_0)$ e os eixos (real e imaginário) paralelos aos eixos x e y, temos:

1º) Eixo real paralelo ao eixo x:



$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

2º) Eixo real paralelo ao eixo y:



$$\frac{(y - y_0)^2}{a^2} - \frac{(x - x_0)^2}{b^2} = 1$$

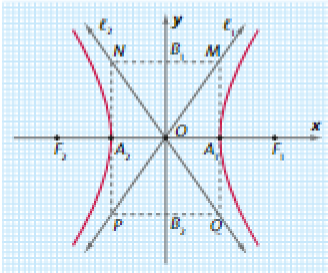
Fonte: Dante (2016, p 164)

Na sequência, como ilustrado pela figura 60, o autor aborda o comportamento das assíntotas por meio da representação gráfica e segue o estudo ao apresentar as equações dessas referidas retas sem os desenvolvimentos de cálculos, caracterizando mais uma vez o uso da geometria sintética como suporte principal para o desenvolvimento deste tópico matemático.

Figura 78: Representação algébrica e geométrica da equação das assíntotas da elipse em (L2)

Assíntotas da hipérbole

Consideremos a figura abaixo.



Podemos construir o retângulo *MNPQ*, de dimensões $2a$ e $2b$. As retas ℓ_1 e ℓ_2, que contêm as diagonais desse retângulo, são denominadas **assíntotas** da hipérbole.

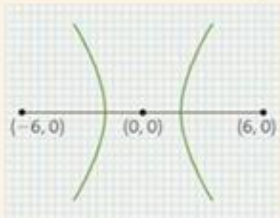
As equações das retas assíntotas são dadas por: $bx - ay = 0$ ou $y = \frac{b}{a}x$ e $bx + ay = 0$ ou $y = -\frac{b}{a}x$.

Fonte: Dante (2016, p 164)

Em seguida, propõem-se aos discentes, 17 exercícios propostos,dos quais a tarefa que mais se repete é a de “Determinar a equação da Hipérbole”.Dos quais, analisaremos aqui 1 (um) exercícios resolvido e 1 (um) proposto:

FIGURA 79: EXERCÍCIO RESOLVIDO (R5) DE L2

15. Determine a equação da hipérbole de focos $F_1(6, 0)$ e $F_2(-6, 0)$ e de excentricidade igual a $\frac{3}{2}$.



Resolução:

Pelos dados do problema, temos:

$c = 6$

$e = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{3}{2} \Rightarrow a = \frac{2c}{3} = \frac{2 \cdot 6}{3} = 4$

$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 36 = 16 + b^2 \Rightarrow b^2 = 20$

Como os focos estão sobre o eixo Ox e $O(0, 0)$, vem:

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{20} = 1 \Rightarrow 5x^2 - 4y^2 = 80$

Logo, a equação da hipérbole é $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{20} = 1$ ou $5x^2 - 4y^2 = 80$.

Fonte: Dante (2016, p. 163)

Escolhemos o exercício resolvido R5 (figura 79), ao passo que, diferente das demais questões, seu raciocínio parte de uma interpretação de conceitos dos elementos presentes no gráficos. Desse modo, identificamos a seguinte análisepraxeológica para a referida questão:

Tarefa (τ): Determinar a equação da Hipérbole com centro na origem.

Técnica 1 (τ): Reconhecer os principais elementos da Hipérbole e saber suas relações.

Técnica 2 (τ): Utilizar a fórmula da excentricidade.

Técnica 3 (τ): Utilizar a fórmula do Teorema de Pitágoras $c^2 = a^2 + b^2$

Técnica 4 (τ): Colocar a equação da Hipérbole na sua forma reduzida $\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1$

Tecnologia (θ): Por meio da fórmula da excentricidade foi possível chegar noTeorema de Pitágoras e, assim, determinar a equação reduzida da Hipérbole.

Teoria (Θ): Álgebra e Geometria Analítica.

Após essa análise, apresentaremos o exercício proposto (P5) referente àfigura cônica Hipérbole.

FIGURA 80: EXERCÍCIO PROPOSTO (P5) DE L2

25. Em uma hipérbole de excentricidade igual a $\sqrt{5}$, os vértices são os pontos $A_1(2, 0)$ e $A_2(-2, 0)$. Determine as coordenadas de seus focos

Fonte: Dante (2016, p. 167)

A seguir, na figura 81, mostraremos a resolução do exercício propostoescolhido para análise.

FIGURA 81: RESOLUÇÃO DO EXERCÍCIO PROPOSTO (P5) DE L2

25- Aplica-se a fórmula da distância entre pontos para determinar o valor de a

$$dA_1A_2 = 2a = \sqrt{\left(2-(-2)\right)^2 + (0-0)^2}$$

$$2a = \sqrt{4^2}$$

$$2a = 4$$

$$a = 2$$

Em seguida, usa-se a fórmula da excentricidade

$$e = \frac{c}{a}$$

$$\sqrt{5} = \frac{c}{2}$$

$$c = 2\sqrt{5}$$

Assim, temos que os focos são:

$F_1\left(2\sqrt{5}, 0\right)$ e $F_2\left(-2\sqrt{5}, 0\right)$

Fonte: Autores

O exercício da figura 80 foi escolhido, pois, em relação ao exercício resolvido, apresentava uma tarefa diferenciada. Assim, procuramos averiguar se os conhecimentos propostos ao aluno no conteúdo da cônica Hipérbole, proposto por L2, seriam suficientes para que o mesmo a solucionasse. Posto isso,identificamos, a partir da figura 81, a seguinte análise praxeológica:

Tarefa (*τ*): Encontrar as coordenadas dos focos da Hipérbole.

Técnica 1 (*τ*): Reconhecer os principais elementos da Hipérbole e saber suas relações.

Técnica 2 (*τ*): Utilizar a fórmula da distância entre dois pontos $\sqrt{(X2 - X1)^2 + (Y2 - Y1)^2}$

Técnica 3 (*τ*): Manipulações algébricas.

Técnica 4 (*τ*): Utilizar a fórmula da excentricidade

Técnica 5 (*τ*): Aplicar a forma das coordenada dos focos.

Tecnologia (*θ*): Por intermédio da distância entre dois pontos, juntamente com a

Diante do exposto, percebe-se que o grau de dificuldade apresentado nos exercíciosresolvidos e propostos, aqui escolhidos, mostraram-se similares. No que se refere às tarefas maisabordadas, notamos que “determinar a equação” foi a mais trabalhada tanto nos exercícios resolvidos quanto nos propostos caracterizando mais uma vez a preferência pelo uso da geometria analítica.

Portanto, ao concluir a investigação acerca da hipérbole em L2, nota-se que o autor buscou desenvolver novamente um equilíbrio entre o uso das geometrias sintéticas e analíticas ao abordar os conceitos desta cônica. No entanto, pode-se destacar a preferência em utilizar-se mais da geometria sintética em detrimento da analítica, uma vez que se utilizou, desta última rapidamente, somente na abordagem do conceito de distância entre dois pontos presente na obtenção das equações reduzidas da figura estudada.

Diante do que foi exposto no livro: “***Matemáticas contexto e aplicações***”, foi possível inferir que o autor buscou introduzir o primeiro contato do aluno com as cônicas por meio da geometria sintética, na qual o autor buscou formas de contextualizar os conceitos matemáticos com o que é visto no cotidiano do aluno. Além disso, o autor apoia sua metodologia de ensino, de forma contínua, nos cortes oriundos das secções cônicas para formalizar conceitos e elementos fundamentais da figura estudada.

Nota-se ainda que L2, no que tangencia aos desenvolvimentos dos conteúdos acerca das cônicas, preferiu desenvolver o conhecimento dando ênfase a geométrico sintética em detrimento da álgebra oferecido pela geometria analítica, uma vez que o autor não se preocupa com o referido desenvolvimento para demonstrar quaisquer equações ilustradas no Livro Didático. Ressalta apenas o esboço gráfico e a fórmula final. Portanto, segundo Siqueira (2016) tal fato é indicado como uma abordagem incomum, visto que na maioria das vezes é aprofundado somente a parte algébrica e é deixado de expor este assunto (Cônicas) no contexto da geométrico.

No entanto, ao que se refere aos exercícios resolvidos, o autor mostra uma preocupação em ilustrar cada passo tomado por ele, para o desenvolvimento correto da questão com base na geometria analítica, uma vez que em todas as atividades exemplificadas o autor realizou consideráveis desenvolvimentos algébricos para se chegar à resolução desejada. Com relação às atividades propostas aos discentes, verifica-se que o grau de dificuldade cresce gradativamente à medida que cônicas são abordadas. Em virtude disso, a Hipérbole, abordada por último, apresentou o maior nível de dificuldade entre suas questões propostas.

4.3 QUADRO COMPARATIVO:

Para conclusão de nossas análises, elaboramos um quadro comparativo entre os livros analisados para comparar as abordagens feitas nesses materiais didáticos, bem como um rsumo a respeito das geometrias encontradas em cada parte das obras analisadas. Como apresentado no Quadro 1 **Comparativo entre L1 e L2**

Quadro 1: Comparativo entre L1 E L2

GEO SINTÉTICA X GEO ANALÍTICA	L1: Matemática ciência & aplicações	L2: Matemática contexto & aplicações
Metodologia na descrição das figuras cônicas (GERAL)	GEOMETRIA SINTÉTICA ✓ Abordagem histórica; ✓ Cortes cônicos; ✓ Representação cotidiana (em todas as figuras)	GEOMETRIA SINTÉTICA ✓ Representação cotidiana; ✓ Cortes cônicos; (em todas as figuras)
ABORDAGEM DA FIGURA CÔNICA ELIPSE	GEOMETRIA SINTÉTICA ✓ Introdução ✓ Construção ponto a ponto ✓ Método de Kepler (Elipse) -- GEOMETRIA ANALÍTICA ✓ Abordagem da equação reduzida da reta	GEOMETRIA SINTÉTICA ✓ Introdução ✓ Construção ponto a ponto ✓ Método de Kepler (Elipse) ✓ Abordagem da equação reduzida da reta
	GEOMETRIA SINTÉTICA	GEOMETRIA SINTÉTICA

ABORDAGEM DA FIGURA CÔNICA PARÁBOLA	✓ **Introdução** ✓ **Construção ponto a ponto** ------------------------------- **GEOMETRIA** **ANALÍTICA** ✓ **Abordagem da equação reduzida da reta**	✓ **Introdução** ✓ **Construção ponto a ponto** ✓ **Abordagem intuitiva** ✓ **Abordagem da equação reduzida da reta**
ABORDAGEM DA FIGURA CÔNICA **HIPÉRBOLE**	**GEOMETRIA** **SINTÉTICA** ✓ **Introdução** ✓ **Construção ponto a ponto** -------------------------------- **GEOMETRIA** **ANALÍTICA** ✓ **Abordagem da equação reduzida da reta**	**GEOMETRIA** **SINTÉTICA** ✓ **Introdução** ✓ **Construção ponto a ponto** ✓ **Abordagem intuitiva** ✓ **Abordagem da equação reduzida da reta**
TAREFA MAIS ABORDADA	**GEOMETRIA** **ANALÍTICA** **Determinar equação**	**GEOMETRIA** **ANALITICA** **Determinar equação**

Fonte: Autora

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesta pesquisa, realizou-se uma investigação nos livros didáticos do ensino médio da rede pública paraense afim de identificar o modelo epistemológico dominante na exposição do conteúdo de Geometria Analítica, em particular, o estudo da geometria das Cônicas, tomando-se como referência a Teoria antropológica do didático (TAD) de Chevallard (1999) e os modelos epistemológicos de referência desenvolvidos por Benito (2019), em sua tese de doutorado.

Revisou-se literaturas sobre o ensino das Cônicas, para que fosse possível identificar as dificuldades acerca deste conteúdo matemático para melhor compreender de que forma a aprendizagem de cônicas vem se desenvolvendo no ensino médio, e porque tais dificuldades perduram entre os estudantes. Estudos científicos como os de Oliveira (2011), Siqueira (2016), Macena (2007) e Jesus (2017) revelam preocupação com o ensino e a aprendizagem das Cônicas. Tais estudos apontam que este conteúdo matemático é pouco tratado na educação básica e revelam uma defasagem acerca de seu conhecimento.

Com as análises realizadas presentes no livro L1: Matemática ciências e aplicações, foi possível verificar a partir da análise praxeológicas que o viés algébrico da geometria analítica prevalece em detrimento de um ensino- aprendizagem de aspectos mais intuitivos como o proposto na geometria sintética, que por sua vez é utilizada, em sua grande maioria, somente como apoio introdutório de cada figura cônica abordada.

No que se refere ao livro L2: Matemática conceito e aplicações, notou-se por meio da análise praxeológica que ao contrário de L1, a geometria Sintética é utilizada como suporte principal no desenvolvimento do raciocínio de todo conteúdo referente à cônicas, uma vez que o autor deixa explicitado ao seu leitor, que por trás de cada equação cônica ali destacada, existe uma quantidade significativa de cálculos algébricos que não seriam destacados naquele momento. Além disso, o referente livro didático utiliza-se de noções de caráter intuitivo sempre que faz referência a construção de uma cônica.

No entanto, as atividades mais propostas aos alunos tanto por L1 quando por L2, focam a determinação da equação de cada cônicas, os tipos de tarefas propostas exigiam para seu cumprimento por parte dos discentes técnicas e tecnologias oriundas da geometria analítica para desenvolver os cálculos algébricos, uma vez que as ideias de gráfico não são muito utilizadas pelos autores.

Desta forma, diante das análises realizadas, reiterou-se a importância do Livro Didático nos processos de ensino e aprendizagem, e entendemos que tal recurso pode ser uma grande ferramenta de desenvolvimento intelectual quando utilizado de maneira correta. Além do mais, estimamos que a Teoria Antropológica do Didático seja um referencial para futuras pesquisas que abordem sobre o Livro Didático.

Esta dissertação de Mestrado constitui-se em uma investigação teórica sobre o modelo de geometria das Cônicas dominante nos Livros Didáticos paraenses, tomando como base o modelo epistemológico de Referência desenvolvidos por Benito (2019), em sua tese de doutorado onde o autor, buscou em seus estudos construir um Percurso de Estudo e Pesquisa (PEP) para formação inicial de professores, com alunos da graduação de Licenciatura em Matemática dos estados de São Paulo e Sergipe, pautando-se em um MER elaborado pelo próprio autor, no qual aborda os tipos de geometria (analítica, sintética...) encontradas nos livros didáticos dos referidos estados (São Paulo e Sergipe), e ao coletar tais dados, o pesquisador elaborou então sua proposta de PEP, voltado para o ensino desse objeto matemático a partir da construção de um fogão solar como ponto de partida para a abordagem de conceitos, elementos e aplicações das cônicas: elipse, parábola e hipérbole.

No entanto, no desenvolvimento de sua pesquisa e por imprevistos ocorridos ao longo de sua trajetória, o autor relata que só foi possível a abordagem da cônica parábola em ambos os estados, não concluindo assim o estudo das demais cônicas (elipse e hipérbole). Portanto, tem-se na presente pesquisa a relevância na coleta dos dados aqui relatados, para que seja possível dar continuidade na importante contribuição acadêmica iniciada por Benito. Comtemplando desta vez, as três figuras cônicas (Elipse, Parábola e Hipérbole).

Mediante tal constatação, propiciou emergir, no decorrer de sua construção, algumas possibilidades de pesquisas futuras. Uma primeira possibilidade seria a proposição de um estudo voltado para o ensino superior, no qual poder-se-á realizar uma análise dos Livros Didáticos de Geometria Analítica adotados nos cursos de Licenciatura das universidades públicas do Estado do Pará, quanto ao conteúdo de cônicas. Outra possibilidade, seria a construção de Percurso de estudo e Pesquisa para o ensino do objeto matemático em estudo, destinada à educação básica, na qual poderemos explorar aspectos geométricos que favoreçam a aprendizagem dos discentes, no que se refere a tal conteúdo, ou até mesmo em nível superior, dando continuidade nas investigações de Benito, ao explorar as figuras parábola e hipérbole, cujos estudos não foram possíveis concretizar-se na obra do autor.

Ao concluir o presente estudo, acredito que tal investigação, pode contribuir para abordagem do conteúdo matemático sobre cônicas, principalmente no que se refere à escolha por propostas de tarefas e metodologias didáticas adotadas pelo professor, que seja adequada a geometria encontrada em cada livro didático presente nas instituições de trabalho desse profissional, aliando assim, prática docente e materiais didáticos rumo a contínua melhora de uma educação de sucesso. Destaco ainda, que tenho a compreensão de que as considerações aqui levantadas se limitam aos livros didáticos analisados em minha investigação.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD. Saddo Ag. Teoria antropológica do didático: metodologia de análise de materiais didáticos. In: **Revista Iberoamericana de Educación Matemática**, n. 42, nov. 2015.

ANDRADE, Roberto Carlos Guerra**. Geometria analítica plana: praxeologias matemáticas no ensino médio**. 2007. 121 f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) - Universidade Federal do Pará, Belém. 2007.

BALESTRI, Rodrigo. **Matemática: Interação e tecnologia**, v. 3. 2. ed. São Paulo, 2016.

BENITO, Ricardo Nicasso. **Construção de um percurso de estudo e pesquisa para formação de professores: o ensino de cônicas**. 2019. 220 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática)-Pontifícia Universidade Católica De São Paulo- PUC, São Paulo. 2019.

BRASIL. Ministério da Educação e Cultura. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio.** v. 2. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília. MEC/SEB, 2006.

Courant, R.; Robbins, H. (2000**). O que é Matemática? Uma abordagem elementar de métodos e conceitos**. Rio de Janeiro: Editora Moderna.

CHEVALLARD, Y. **La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné**. Grenoble: La Pensée Sauvage, 1986.

CHEVALLARD, Y. **Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège** – Deuxième partie. Perspectives curriculaires: la notion de modélisation. Petit X, Grenoble, v. 19, p. 43-75, 1989.

CHEVALLARD, Y. **Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques:** L'approche anthropologique. Actes de l'U. E. de La Rochell, 1998.

CHEVALLARD, Y. **L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique.** Recherches en didactiques desmathématiques. Grenoble. La pensée Sauvage Éditions, v. 19, p. 221-265,1999.

CHEVALLARD, Y. **Passé et présent de la théorie anthropologique du didactique. In: Congrés international sur la théorie anthropologique du didactique**,2007, Jaén Anais [...]. Jaén: Universidad de Jaén, 2007

CHEVALLARD, Yves, BOSCH, Mariana, GASCÓN, Josep**. Estudar matemáticas: o elo perdido entre o ensino e a aprendizagem.** Tradução: Daisy Vaz de Moraes, Porto Alegre: Artmed, 2001.

COSTA, Acylena Coelho. **Geometria analítica no espaço: Análise das organizações matemática e didática nos materiais didáticos.** 2015. 113 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC), São Paulo. 2015.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática: contexto e aplicações. Ensino médio**.3. Ed. São Paulo: ática, 2016. GIL, Antônio.Carlos. Metodologia do ensino superior. São Paulo: Atlas, 2005.112

DELGADO,Tomás Ángel Sierra. **Lo Matemático en el Diseño y Analisis de Organizaciones Didácticas: los sistemas de numeración y la medida de magnitudes**. Memória para optar al Grado de Doctor. Universidad Complutense de Madrid, Facultad de Educación, Departamento de Didáctica y Organización Escolar. Madrid, 2006

GASCÓN, J. (2012). **Geometría sintética en la ESO y analítica en el Bachillerato. Dos mundos completamente separados?** Revista SUMA, v. 39, febrero 2002, pp. 13-25

GASCÓN, Josep. **Os modelos epsitemológico de referência como instrumento de emancipação da didática e da história da matemática**. In: ALMOULOUD, S. A.;FARIAS, L. M. S.; HENRIQUES, A (org.). A Teoria Antropológica do Didático:princípios e fundamentos. Curitiba: CRV, 2018. pp. 51-76.

IEZZI, Gelson. DOLCE, Osvaldo. DEGENSZAJN, David. PÉRIGO, Roberto. ALMEIDA, Nilze de**. Matemática: ciência e aplicações. Ensino médio**. v. 3. 9. ed. São Paulo: Saraiva, 2016.

JESUS, Caio Sousa de. SANTOS, Lucas Rodrigues dos. SOUSA, Wanessa Ferreira de. QUEIROZ, Douglas Caixeta de. **Os processos de ensino e aprendizagem das Cônicas no ensino médio- desafios e possibilidades**. Instituto federal de Goiás- IFG- Campos Valparaiso. Goiás. 2017.

Klein, F. (1927). **Matemática Elementar desde un punto de vista superior**. Trad. Roberto Araujo. v. II, Geometria. Madrid: Biblioteca Matemática

LEIVAS, José Carlos Pinto. **Geometria Sintética: narrativa de um episódio com uma aluna-professora.** Revista Iberoamericana de educação matemática. SSN: 1815-0640 . Número 49. Abril 2017 Página 26-40

LEONARDO, Fábio Martins de. **Conexões com a Matemática. Ensino médio**: v. 3. 3. Ed. São Paulo: Morderna, 2016.

LYGEROS, S.D.(2016). **Sur la géométrie synthétique de Carathéodory**. Acessado em em 10 de agosto de 2023 em https://lygeros.org/category/articles/

MACENA, Marta Maria Maurício. **Contribuições da investigação em sala de aula para uma aprendizagem das secções cônicas com significado**. Disertação (Mestrado em Ensino de Ciências Naturais e Matemática) – Centro de Ciências Exatas e da Terra, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2007. MACHADO, N. J. Sobre livros didáticos: quatro pontos. Em aberto, Brasília, v. 16, n. 69, p. 4-10, jan/mar 1996.

SIQUEIRA, C. A. F. **Um estudo didático das cônicas: Quadros, Registros e Pontos de Vista.** (Mestrado em Educação Matemática) PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO. PUC – SP,2016.

VARELLA, Márcia. **Provas e demonstrações na geometria analítica: análise das organizações didática e matemática nos materiais didáticos**. 2010. 214 p. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC). São Paulo