ANÁLISE DA TRANSFERÊNCIA DE CALOR CONVECTIVA POR TRANSFORMADA INTEGRAL EM CANAIS COM PAREDES ONDULADAS

HELDER KIYOSHI MIYAGAWA

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Recursos Naturais da Amazônia, PRODERNA/ITEC, da Universidade Federal do Pará, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Engenharia de Recursos Naturais.

Orientador: João Nazareno Nonato Quaresma

Belém

Dezembro de 2019

ANÁLISE DA TRANSFERÊNCIA DE CALOR CONVECTIVA POR TRANSFORMADA INTEGRAL EM CANAIS COM PAREDES ONDULADAS

HELDER KIYOSHI MIYAGAWA

TESE DE DOUTORADO APRESENTADA AO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE RECURSOS NATURAIS DA AMAZÔNIA, PRODERNA/ITEC, DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ, COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS À OBTENÇÃO DO TÍTULO DE DOUTOR EM ENGENHARIA DE RECURSOS NATURAIS.

Avaliada por:

Prof. João Nazareno Nonato Quaresma, D.Sc.
(PRODERNA/ITEC/UFPA - Presidente)

Prof. Emanuel Negrão Macêdo, D.Sc.
(PRODERNA/ITEC/UFPA - Membro)

Prof. Antônio Guilherme Barbosa da Cruz, D.Sc.
(PRODERNA/ITEC/UFPA - Membro)

Prof. Diego Cardoso Estumano, D.Sc.
(BIOTEC/ICB/UFPA - Membro)

Prof. Dr. João Alves de Lima, D.Sc.
(DEER/CEAR/UFPB - Membro)

BELÉM, PA - BRASIL

DEZEMBRO DE 2019

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

M618a Miyagawa, Helder Kiyoshi
Análise da transferência de calor convectiva por transformada integral em canais com paredes onduladas / Helder Kiyoshi Miyagawa. — 2019.
xviii, 124 f. : il. color.

Orientador(a): Prof. Dr. João Nazareno Nonato Quaresma
Tese (Doutorado) - Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Recursos Naturais na Amazônia, Instituto de Tecnologia, Universidade Federal do Pará, Belém, 2019.

1. Transformação integral generalizada. 2. Convecção forçada. 3. Melhoria de transferência de calor. 4. Canais de parede ondulada. I. Título.

CDD 660.2

Dedico este trabalho primeiramente a Deus, por ser essencial em minha vida, autor de meu destino, meu guia, ao meu pai Kimio Miyagawa e à minha mãe Elisa Kauati Miyagawa e a minha avó Shu Kauati (*in memorian*).

AGRADECIMENTOS

A Deus, por me dar forças em todos os momentos da vida.

Gostaria também de agradecer a minha família que sempre me apoiou. Minha mãe, Elisa Kauati Miyagawa, por ser um ponto de referência de honestidade, humildade e incentivo durante toda a minha vida e ao meu pai, Kimio Miyagawa, que sempre me auxiliou quando eu mais precisava bem como ao meu irmão, Erick Kiichi Miyagawa. Também gostaria de deixar meu agradecimento especial a minha avó Shu Kauati (*in memorian*) a qual não pôde ver o fim desta etapa da mina vida, mas com certeza está feliz por essa conquista.

Ao meu orientador João Nazareno Nonato Quaresma, pelo apoio e confiança depositados em mim desde a época do mestrado, pela orientação e dedicação em todos os momentos desta jornada.

Aos professores Renato Machado Cotta e Kleber Marques Lisbôa pelas valiosas contribuições no desenvolvimento e melhoria da tese.

Ao professor Emanuel Negrão Macêdo, pelas contribuições para a tese, momentos de descontração e por aceitar fazer parte deste momento da minha vida.

Ao professor Diego Cardoso Estumano o qual tenho respeito desde a época do meu ensino médio no Ideal Militar pela contribuição na minha formação e pelos momentos de alegria durante o doutorado.

Aos professores Antônio Guilherme Barbosa da Cruz e João Alves de Lima por aceitarem o convite de participar da banca e contribuir para a minha formação e certamente no enriquecimento desde trabalho.

A todos os colegas do LSP que fiz durante o período do mestrado e doutorado, em especial, Igor José do Carmo Coimbra, Elenilson Tavares Cabral, Ingrid Vasconcelos Curcino, Péricles Crisiron Pontes e Fabio de Andrade Pontes que se mostraram verdadeiros parceiros durante todos esses anos.

Aos colegas do PRODERNA Raimundo Nonato, Alan Castelo Motta, Raimundo Mangabeira e Renata Soraia os quais me acompanharam durante este período.

Aos colegas de trabalho da Faculdade de Ciências Naturais, Adriana de Marques Miranda e Mário Franco, os quais, apesar da minha rápida estadia como técnico, sempre me incentivaram na minha vida acadêmica. Aos colegas do LabISisBio, Ivoneide, Tainá, Jaise, Júlio, Ricardo, Rubens, Patrícia e Daniel, assim como ao Prof. Alberdan Silva Santos coordenador dos laboratórios os quais atualmente trabalho.

À Karen Marcela Barros da Costa pela motivação diária e por sempre estar disposta a me ouvir e me aconselhar por todos os anos desde que nos conhecemos. Pelo amor incondicional, o qual as vezes penso em não merecer e que me faz somente aumentar mais o meu amor e admiração pela maravilhosa pessoa que ela é.

À COPPE-UFRJ por ceder o acesso ao *software* COMSOL multiphysics para o desenvolvimento deste trabalho.

Ao PRODERNA pela oportunidade dada ao desenvolvimento do meu curso de doutorado.

Ao CNPq pelo apoio financeiro concedido.

Resumo da Tese apresentada ao PRODERNA/UFPA como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Doutor em Engenharia de Recursos Naturais (D.Eng.)

ANÁLISE DA TRANSFERÊNCIA DE CALOR CONVECTIVA POR TRANSFORMADA INTEGRAL EM CANAIS COM PAREDES ONDULADAS

Helder Kiyoshi Miyagawa

Dezembro/2019

Orientador: João Nazareno Nonato Quaresma

Área de Concentração: Uso e Transformação de Recursos Naturais

A abordagem híbrida numérica-analítica conhecida como Técnica de Transformação Integral Generalizada (GITT) é empregada na solução das equações de Navier-Stokes e de energia que matematicamente modelam a transferência de calor convectiva em canais com paredes onduladas. O escoamento é considerado laminar, incompressível e bidimensional envolvendo um fluido newtoniano com propriedades físicas independentes da temperatura, enquanto as temperaturas das paredes são mantidas constantes ao longo do comprimento do canal. É adotada a formulação de função corrente, que elimina o campo de pressão e satisfaz automaticamente a equação de continuidade. Extensivas análises de convergência são realizadas para os campos de função corrente e de temperatura, bem como para o produto do fator de atrito pelo número de Reynolds e para o número de Nusselt local, a fim de demonstrar a robustez do método. A verificação dos resultados da GITT também é realizada comparando a velocidade da linha central, o produto do fator de atrito pelo número de Reynolds, a temperatura média e o número de Nusselt local com resultados obtidos com o *software* comercial de simulação COMSOL *Multiphysics* demonstrando boa concordância. Também é analisada a influência dos parâmetros, como o número de Reynolds, amplitude da parede ondulada, número de ondas e fase entre as corrugações das paredes nos campos de velocidade, temperatura e geração de entropia, demonstrando sua importância para a intensificação de transferência de calor convectiva e para a otimização energética.

Abstract of Thesis presented to PRODERNA/UFPA as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Natural Resource Engineering (D.Eng.)

ANALYSIS OF THE CONVECTIVE HEAT TRANSFER BY INTEGRAL TRANSFORMS IN CHANNELS WITH WAVY WALLS

Helder Kiyoshi Miyagawa

December/2019

Advisor: João Nazareno Nonato Quaresma

Concentration Area: Use and Transformation of Natural Resources

The hybrid numerical-analytical approach known as the Generalized Integral Transformation Technique (GITT) is employed in the solution of the Navier-Stokes and energy equations that mathematically model the convective heat transfer in corrugated wall channels. The flow is considered laminar, incompressible, and two-dimensional involving a Newtonian fluid with temperature-independent physical properties, while wall temperatures are kept constant along the length of the channel. The streamfunction formulation is adopted, which eliminates the pressure field and automatically satisfies the continuity equation. Extensive convergence analyses are performed for the streamfunction and temperature fields, as well as for the product of friction factor by the Reynolds number and the local Nusselt number to demonstrate the robustness of the method. Verification of GITT results is also performed by comparing the centerline velocity, product of friction factor by the Reynolds number, average temperature, and local Nusselt number with those results obtained with the commercial COMSOL Multiphysics simulation software showing good agreement. The influence of parameters such as Reynolds number, wavy wall amplitude, number of waves, and phase between wall corrugations on the fields of velocity, temperature, and entropy generation are also analyzed, demonstrating their importance for convective heat transfer intensification and energy optimization.

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO ... 1
1.1 MOTIVAÇÃO ... 1
1.2 OBJETIVOS ... 2
1.2.1 Objetivo Geral ... 2
1.2.2 Objetivos Específicos ... 2
1.3 CONTRIBUIÇÃO DA TESE ... 3
1.4 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO ... 3

CAPÍTULO 2 - REVISÃO DA LITERATURA ... 5
2.1 DUTOS IRREGULARES ... 5
2.1.1 Estudos Experimentais ... 5
2.1.2 Soluções Numéricas ... 6
2.1.3 Soluções Híbridas ... 9
2.2 TRANSFORMADA INTEGRAL GENERALIZADA (GITT) ... 10

CAPÍTULO 3 - FORMULAÇÃO MATEMÁTICA E METODOLOGIA DA SOLUÇÃO ... 12
3.1 FORMULAÇÃO MATEMÁTICA ... 12
3.2 METODOLOGIA DE SOLUÇÃO ... 16
3.2.1 Determinação do filtro ... 17
3.2.2 Determinação das constantes k_1 e k_2 ... 18
3.2.3 Determinação do Problema de Autovalor ... 19
3.2.4 Par Transformada-Inversa ... 22
3.2.5 Transformação Integral do Problema ... 22
3.2.6 Valores de Interesse ... 26
3.3 ALGORITMO COMPUTACIONAL ... 28

CAPÍTULO 4 - CONVECÇÃO FORÇADA EM DUTOS DE GEOMETRIA IRREGULAR ... 31
4.1 CARACTERIZAÇÃO DO ESCOAMENTO NO DUTO COM PAREDE ONDULADA ... 31
4.2 SIMULAÇÃO UTILIZANDO O *SOFTWARE* COMSOL ... 32
4.2.1 Malha do problema ... 32
4.3 AVALIAÇÃO DO COMPRIMENTO FINAL DO CANAL ... 34
4.4 ANÁLISE DE CONVERGÊNCIA ... 35
4.5 VERIFICAÇÃO NUMÉRICA ... 39

4.6 ANÁLISE DA INFLUÊNCIA DOS PARÂMETROS 42
4.7 ISOLINHAS DA FUNÇÃO CORRENTE E DA TEMPERATURA 44
4.8 AVALIAÇÃO DOS VALORES MÉDIOS DO PRODUTO DO FATOR DE ATRITO PELO NÚMERO DE REYNOLDS E DO NÚMERO DE NUSSELT 48

CAPÍTULO 5 - ESTUDO DA INFLUÊNCIA DA GEOMETRIA NA GERAÇÃO DE ENTROPIA EM CANAIS CORRUGADOS 52
5.1 ANÁLISE DE GERAÇÃO DE ENTROPIA 52
5.2 GEOMETRIAS ANALISADAS 55
5.2 ANÁLISE DA INFLUÊNCIA DOS PARÂMETROS NA TRANSFERÊNCIA DE CALOR 60
5.2.1 Efeito da quantidade de comprimentos de onda na transferência de calor... 60
5.2.2 Variação da fase de onda na transferência de calor 62
5.2.3 Influência do número de Reynolds na transferência de calor para canais com ângulo de fase 180° *65*
5.2.4 Influência da amplitude do canal na transferência de calor para canais com ângulo de fase 180° 67
5.3 LINHAS DE CORRENTE E ISOTERMAS DE TEMPERATURA 71
5.4 ANÁLISE DA INFLUÊNCIA DOS PARÂMETROS NA GERAÇÃO DE ENTROPIA 76
5.4.1 Efeito da quantidade de comprimentos de onda na geração de entropia...... 76
5.4.2 Efeito da variação da fase de onda na geração de entropia 77
5.4.3 Influência do número de Reynolds em canais com ângulo de fase 180° na geração de entropia 78
5.4.4 Influência da amplitude em canais com ângulo de fase 180° na geração de entropia 79
5.4.5 Entropia global 79
5.4.6 Número de Bejan 81

CAPÍTULO 6 - CONCLUSÕES E SUGESTÕES **83**

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS **85**
APÊNDICE A - TRANSFORMAÇÃO INTEGRAL DO PROBLEMA E COEFICIENTES DO SISTEMA DIFERENCIAL **91**
APÊNDICE B - COEFICIENTES DO SISTEMA APÓS A MUDANÇA DE VARIÁVEL **98**
APÊNDICE C - ESCOAMENTO COMPLETAMENTE DESENVOLVIDO ENTRE PLACAS PARALELAS **107**

APÊNDICE D - CÁLCULO DO FATOR DE ATRITO BASEADO NAS FORÇAS VISCOSAS 109
APÊNDICE E - TUTORIAL PARA A SIMULAÇÃO NO *SOFTWARE* COMSOL 111
APÊNDICE F - TABELA DOS VALORES UTILIZADOS NAS SIMULAÇÕES 124

LISTA DE FIGURAS

Figura 3.1 Duto genérico estudado. 12

Figura 3.2 Condição de contorno em variáveis primitivas. 15

Figura 3.3 Condições de contorno aplicando a formulação em função corrente. 15

Figura 4.1 Parâmetros do canal estudado. 31

Figura 4.2 Detalhe da malha utilizada na simulação por meio do *software* COMSOL. 33

Figura 4.3 Análise de convergência de malha para as simulações no COMSOL. 33

Figura 4.4 Comparação do produto fRe, e do número de Nusselt local, Nu_x, considerando x_{out} = 20, 80, 100 e ∞, para o caso: Re = 100 α = 0,1. 34

Figura 4.5 Comportamento de convergência de: (a) produto fRe; e (b) o número local de Nusselt em diferentes posições axiais para Re = 100 e α = 0,3. 38

Figura 4.6 Comportamento de convergência de: (a) produto fRe; e (b) o número local de Nusselt em diferentes posições axiais para Re = 500 e α = 0,1. 38

Figura 4.7 Verificação dos resultados da GITT para a velocidade no centro do canal, Uc, com os resultados do *software* COMSOL para: Re = 100; Pr = 6,93; α = 0,3; and Re = 300; Pr = 6,93; α = 0,1. 39

Figura 4.8 Verificação dos resultados da GITT do produto fRe, ao longo do canal com os resultados do COMSOL para: Re = 100; Pr = 6,93; α = 0,3; and Re = 300; Pr = 6,93; α = 0,1. 40

Figura 4.9 Verificação dos resultados da GITT da temperatura média, T_{av}, ao longo do canal, com os resultados do COMSOL para: Re = 100; Pr = 6,93; α = 0,3; e Re = 300; Pr = 6,93; α = 0,1. 41

Figura 4.10 Verificação dos resultados da GITT do número de Nusselt local, Nu_x, ao longo do canal, com os resultados do COMSOL para: Re = 100; Pr = 6,93; α = 0,3; and Re = 300; Pr = 6,93; α = 0,1. 41

Figura 4.11 Influência do número de Reynolds para: α = 0,2; Pr = 6,93 em: (a) velocidade central, (b) produto fRe, (c) temperatura média, e (d) número de Nusselt local. 42

Figura 4.12 Influência da amplitude para: Re = 300; Pr = 6,93; no(a): (a) velocidade central, (b) produto fRe, (c) temperatura média, e (d) número de Nusselt local. 43

Figura 4.13 Linhas de corrente e isotermas para: Re = 100; Pr = 6,93; para: (a) linhas de corrente para α = 0,1 e (b) isotermas para α = 0,1; (c) linhas de corrente para α = 0,2 e (d) isotermas para α = 0,2; (e) linhas de corrente para α = 0,3 e (f) isotermas α = 0,3. 45
Figura 4.14 Linhas de corrente e isotermas para: Re = 300; Pr = 6,93; para: (a) linhas de corrente para α = 0,1 e (b) isotermas para α = 0,1; (c) linhas de corrente para α = 0,2 e (d) isotermas para α = 0,2; (e) linhas de corrente para α = 0,3 e (f) isotermas α = 0,3. 46
Figura 4.15 Linhas de corrente e isotermas para: Re = 500; Pr = 6,93; para: (a) linhas de corrente para α = 0,1 e (b) isotermas para α = 0,1; (c) linhas de corrente para α = 0,2 e (d) isotermas para α = 0,2; (e) linhas de corrente para α = 0,3 e (f) isotermas α = 0,3. 47
Figura 4.16 Comparação do número de Nusselt médio em relação ao canal de placas planas. 49
Figura 4.17 Comparação de fRe médio em relação ao canal de placas planas. 50

Figura 5.1 Valores médios para um duto com ângulo de fase 0, com 3 e 6 comprimentos de ondas e Re = 100 e 200 e α = 0.2: (a) número de Nusselt; (b) temperatura e (c) do produto fRe. 61
Figura 5.2 Valores médios para um duto com ângulo de fase 180°, para 3 e 6 comprimentos de onda, Re = 100 e 200 e α = 0.2: (a) número de Nusselt; (b) temperatura e (c) produto fRe. 62
Figura 5.3 Resultados para dutos com ângulo de fase 0° e 180° e 3 comprimentos de onda e Re = 200 e α = 0,1 e 0,3: (a) produto fRe; (b) número de Nusselt local, (c) número de Nusselt médio e (d) produto fRe médio. 63
Figura 5.4 Resultados para dutos com ângulo de fase 0 e 180° e 6 comprimentos de onda e Re = 200 e α = 0,1 e 0,3: (a) produto fRe; (b) número de Nusselt local, (c) número de Nusselt médio e (d) produto fRe médio. 64
Figura 5.5 Resultado para dutos com ângulo de fase 180° e 3 comprimentos de onda, α = 0,2 e Re = 100, 150, 200: (a) produto fRe; (b) número de Nusselt local, (c) número de Nusselt médio e (d) produto fRe médio. 66
Figura 5.6 Resultados para dutos com ângulo de fase 180° e 6 comprimentos de onda, α = 0,2 e Re = 100, 150, 200: (a) produto fRe; (b) número de Nusselt local, (c) número de Nusselt médio e (d) produto fRe médio. 67

Figura 5.7 Resultados para dutos com ângulo de fase 180° e 3 comprimentos de onda, Re = 150 e α = 0,1, 0,2 e 0,3: (a) produto fRe; (b) número de Nusselt local, (c) número de Nusselt médio e (d) produto fRe médio.. 68
Figura 5.8 Resultados para dutos com ângulo de fase 180° e 6 comprimentos de onda e Re = 150 e α = 0,1, 0,2 e 0,3: (a) produto fRe; (b) número de Nusselt local, (c) número de Nusselt médio e (d) produto fRe médio.. 69
Figura 5.9 Valores médios para um duto com ângulo de fase 0° e 180° e com 3 e 6 comprimentos de onda para Re = 150 e α = 0,1: (a) do produto fRe_{av}; (b) número de Nusselt. 70
Figura 5.10 Valores médios para um duto com ângulo de fase 0° e 180° e com 3 e 6 comprimentos de onda para Re = 150 e α = 0,3: (a) do produto fRe_{av}; (b) número de Nusselt. 70
Figura 5.11 Linhas de corrente para um duto com 3 comprimentos de onda e ângulo de fase 0 para Pr = 6,93; Re = 100 e 200; α = 0,1 e 0,3. 71
Figura 5.12 Isotermas para um duto com 3 comprimentos de onda e ângulo de fase 0 para Pr = 6,93; Re = 100 e 200; α = 0,1 e 0,3. 72
Figura 5.13 Linhas de corrente para um duto com 3 comprimentos de onda e ângulo de fase 180° para Pr = 6,93; Re = 100 e 200; α = 0,1 e 0,3. 73
Figura 5.14 Isotermas para um duto com 3 comprimentos de onda e ângulo de fase 180° para Pr = 6,93; Re = 100 e 200; α = 0,1 e 0,3. 74
Figura 5.15 Linhas de corrente para um duto com 6 comprimentos de onda e ângulo de fase 180° para Pr = 6,93; Re = 100 e 200; α = 0,1 e 0,3. 75
Figura 5.16 Isotermas para um duto com 6 comprimentos de onda e ângulo de fase 0 para Pr = 6,93; Re = 100 e 200; α = 0,1 e 0,3. 75
Figura 5.17 Verificação entre os resultados da GITT e do COMSOL para a entropia média em um duto com 6 comprimentos de onda e ângulo de fase 0 para Pr = 6,93; Re = 100; α = 0,1 e 0,3.. 76
Figura 5.18 Resultados para a entropia média para dutos de 3 e 6 comprimentos de onda para Pr = 6,93; Re = 100; α = 0,2 e diferentes ângulos de fase (a) 0°; (b) 180°. 77
Figura 5.19 Resultados para a entropia média para dutos com ângulo de fase 0° e 180° para Pr = 6,93; Re = 200; α = 0,1 e 0,3 e diferentes comprimentos de onda: (a) 3; (b) 6. 77

Figura 5.20 Resultados para a entropia média para um duto com ângulo de fase 180° para Pr = 6,93; α = 0,2 e Re = 100, 150 e 200 e diferentes comprimentos de onda: (a) 3 comprimentos de onda; e (b) 6 comprimentos de onda. 78
Figura 5.21 Resultados para a entropia média para um duto com ângulo de fase 180° para Pr = 6,93; Re = 150 e α = 0,1, 0,2 e 0,3 e diferentes comprimentos de onda: (a) 3 comprimentos de onda; (b) 6 comprimentos de onda.. 79
Figura 5.22 Resultados para o número de Bejan médio considerando os casos de menor geração de entropia para Re = 100, 150 e 200.. 82

LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1 Principais referências de trabalhos experimentais de escoamento em dutos corrugados 5

Tabela 2.2 Referências do escoamento em canais com geometria irregular 6

Tabela 2.3 Número de Nusselt médio na quarta concavidade do canal 8

Tabela 2.4 Produto fRe na quarta concavidade do canal... 8

Tabela 4.1 Desvio relativo médio entre as malhas analisadas.................................... 33

Tabela 4.2 Valores em x = 20 para vários comprimentos de saída. 35

Tabela 4.3 Convergência da função corrente em diferentes posições axiais para: *Re*=100; *Pr* = 6,93; α = 0,3. 36

Tabela 4.4 Convergência da função corrente em diferentes posições axiais para: *Re*=500; *Pr* = 6,93; α = 0,1. 36

Tabela 4.5 Convergência da temperatura para: *Re* = 100; *Pr* = 6,93; α = 0,3............. 37

Tabela 4.6 Convergência da temperatura para: *Re* = 500; *Pr* = 6,93; α = 0,1............. 37

Tabela 4.7 Desvio relativo absoluto médio dos dados das Figuras 4.5 e 4.6. 38

Tabela 4.8 Desvio relativo entre os resultados da GITT e do COMSOL.................... 41

Tabela 4.9 Valores do produto fRe_{av} e de Nu_{av} para os casos estudados...................... 50

Tabela 5.1 Equações e formas dos dutos para o estudo da geração de entropia para α = 0.3. 56

Tabela 5.2 Entropia global para Reynolds igual a 100.. 80

Tabela 5.3 Entropia global para Reynolds igual a 150.. 80

Tabela 5.4 Entropia global para Reynolds igual a 200.. 81

NOMENCLATURA

a	amplitude da parede ondulada
Be	número de Bejan
Br	número de Brinkman
k_1, k_2	valor da função corrente nas paredes do canal
fRe	produto do fator de atrito pelo número de Reynolds
c_p	calor específico
$F(x,y)$	filtro para função corrente
k	condutividade térmica do fluido
M_i	norma da autofunção para o campo de função corrente
N_g	entropia gerada (adimensional)
N_i	norma da autofunção para o campo de temperatura
Nu_{av}	número de Nusselt médio
Nu_x	número de Nusselt local
NT	ordem de truncamento para os termos da expansão da temperatura
NV	ordem de truncamento para os termos da expansão da função corrente
p^*, p	campo de pressão, dimensional e adimensional, respectivamente
Pr	número de Prandtl
Re	número de Reynolds
S	entropia (dimensional)
T^*, T	campo de temperatura, dimensional e adimensional, respectivamente
T_{av}	temperatura média adimensional
$\overline{T}_i$	campo de temperatura transformado
T^*_{in}	temperatura de entrada (dimensional)
T^*_w	temperatura da parede (dimensional)
u^*_{av}	velocidade média (dimensional)
u_1	velocidade longitudinal de entrada (adimensional)
u^*, u	velocidade longitudinal, dimensional e adimensional, respectivamente
v^*, v	velocidade transversal, dimensional e adimensional, respectivamente
v_1	velocidade de entrada transversal adimensional
x^*, x	coordenada longitudinal, dimensional e adimensional, respectivamente
y^*, y	coordenada transversal, dimensional e adimensional, respectivamente

Letras Gregas

α	amplitude do canal ondulado (adimensional)
β_i	autovalores para o campo de função corrente na coordenada ξ
γ_i	autovalores para o campo de temperatura na coordenada ξ
Γ_i	autofunções para o campo de função corrente

μ	viscosidade dinâmica
μ_i	autovalores para o campo de função corrente
$\bar{\mu}_i$	potencial químico
ν	viscosidade cinemática
ξ	coordenada transformada
λ_i	autovalores para o campo de temperatura
ρ	massa específica
ϕ	campo de função corrente
$\bar{f}_i$	campo de função corrente transformado
Φ	razão de distribuição de entropia
ψ^*, ψ	campo de função corrente, dimensional e adimensional, respectivamente
ψ_∞	distribuição de funções corrente totalmente desenvolvida
ω^*, ω	vorticidade, dimensional e adimensional, respectivamente

Subscritos e sobrescritos

i, j, k	índices dos problemas de autovalor
∞	refere-se a situação totalmente desenvolvida
*	variáveis dimensionais
$\bar{\ }$	quantidades transformadas integrais

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

1.1 MOTIVAÇÃO

A transferência de calor é um fator de grande importância na indústria de transformação a qual requer grandes quantidades de energia para a sua operação. Sendo assim, faz-se necessário a busca por equipamentos com baixo custo e alta eficiência na troca térmica. Canais com geometria irregular possuem ambas as características, apesar da perda de carga mais acentuada se comparado aos canais de placa paralela, e atualmente são estudados tanto de forma numérica como experimental. Geometrias irregulares favorecem a formação de vórtices em baixos valores de número de Reynolds o que aumenta de maneira significativa a transferência de calor.

Além de aplicações em transferência de calor, geometrias irregulares podem ser aplicadas em áreas biológicas como diálise renal e oxigenadores de membrana onde o escoamento pode ser considerado laminar devido ao baixo número de Reynolds em um canal ondulado estreito por onde escoa um fluido de alta viscosidade (NISHIMURA, 1990).

Em aplicações de transferência de calor gás-gás e gás-líquido, baixas velocidades devido as forças de atrito, juntamente com as baixas condutividades térmicas dos gases requerem um trocador de calor de superfície relativamente grande (KUNDU, 2001). Canais com geometria irregular podem melhorar essas características além de tornarem o projeto dos trocadores de calor mais compactos.

A modelagem do escoamento e da transferência de calor utilizada no projeto desses processos é baseado nas equações de Navier-Stokes e da energia. Porém, devido a complexidade das mesmas e ao seu caráter fortemente não linear, soluções analíticas só podem ser obtidas com a simplificação para casos específicos ou casos limites.

Métodos numéricos foram desenvolvidos para a solução das equações completas de Navier-Stokes. Dentre esses métodos destacam-se os de diferenças finitas (e suas variantes) (STONE e VANKA, 1996; NICENO e NOBILE, 2001; HAITHAM *et al.*, 2005), elementos finitos (PARVIN e HOSSAIN, 2012; DORMOHAMMADI *et al.*, 2018) e volumes finitos (WANG e VANKA, 1996; MAHMUD *et al.*, 2002; RAMGADIA *et al.*, 2012), este último empregado principalmente na Dinâmica dos Fluidos Computacional (CFD).

A Técnica da Transformada Integral Generalizada (GITT) é uma alternativa para solução de problemas não lineares que conserva uma parte analítica no processo de solução. Essa técnica é baseada na expansão de autofunções para expressar as variáveis dependentes desconhecidas (COTTA, 1993; COTTA e MIKHAILOV, 1990; SPHAIER *et al*., 2011).

A GITT foi aplicada de maneira satisfatória em escoamentos bidimensionais de camada limite (MACHADO e COTTA, 1995; FIGUEIRA da SILVA *et al.*, 1996) e das equações de Navier-Stokes em canais de placas planas (PÉREZ-GUERRERO e COTTA, 1995; SILVA, 2003) utilizando tanto a formulação em função corrente quanto a formulação em variáveis primitivas. Em geometrias irregulares a técnica foi aplicada em uma expansão gradual (PÉREZ-GUERRERO, 1995; PÉREZ-GUERRERO *et al.*, 2000) e em geometrias senoidais (SILVA, 2011). Somente dois estudos foram publicados solucionando-se o problema da transferência de calor em dutos senoidais (CASTELLÕES *et al.*, 2010 e COTTA *et al.*, 2019). O trabalho de CASTELLÕES *et al.* (2010), porém, utilizou uma solução simplificada para o campo de velocidade válida somente para baixos valores de número de Reynolds (abaixo de 100).

A motivação deste trabalho é então ampliar o campo de aplicação da GITT na solução do problema do desenvolvimento simultâneo dos campos de velocidade e de temperatura em um duto de placas com geometria irregular o qual, até o momento, não foi solucionado, assim como a influência de diversas geometrias na transferência de calor e na geração de entropia a qual ainda não foi avaliada pela GITT utilizando a formulação acoplada das equações de Navier-Stokes e da energia.

1.2 OBJETIVOS

1.2.1 Objetivo Geral

A presente tese apresenta como objetivo geral a solução das equações de Navier-Stokes e da energia em canais com paredes de geometria irregular empregando-se a Técnica da Transformada Integral Generalizada (GITT).

1.2.2 Objetivos Específicos

- Comparar os resultados da GITT com os resultados obtidos pelo método de elementos finitos utilizando o *software* comercial COMSOL *multiphysics*;

- Avaliar as diferentes configurações de escoamento e geométricas a fim de se demostrar a influência das mesmas nas características do escoamento, da transferência de calor e da geração de entropia;
- Aplicar a GITT em diferentes geometrias de duto irregular;
- Estudar a geração de entropia em canais corrugados;
- Gerar resultados de referência para trabalhos futuros.

1.3 CONTRIBUIÇÃO DA TESE

O desenvolvimento de uma formulação genérica para o escoamento bidimensional em geometrias irregulares aumenta a possibilidade de casos a serem estudados nos problemas de engenharia relacionados em particular aos problemas de aumento de troca térmica.

A solução pela GITT, aplicada no presente trabalho, de ambos os campos de velocidade e temperatura ainda não foi demonstrada, sendo, a presente tese, o primeiro relato da solução acoplada das equações de Navier-Stokes e da energia simultaneamente considerando adicionalmente números de Reynolds acima de 100. Além disso, o estudo presente pretende explorar outras características geométricas, como a mudança de número de comprimentos de ondas e a defasagem entre as paredes, as quais ainda não foram demonstradas utilizando a GITT na solução acoplada das equações de Navier-Stokes e da energia, como a variação do ângulo de fase entre as paredes e a mudança na geometria das mesmas.

1.4 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

No capítulo de introdução buscou-se apresentar de maneira sucinta os objetivos do presente trabalho, além de mostrar a motivação e diferenças em relação aos trabalhos anteriores os quais versam sobre o mesmo tema.

O Capítulo 2 é dedicado à apresentação da literatura e o estado da arte dos avanços em relação ao escoamento em canais corrugados mostrando os principais pontos dos estudos experimentais, numéricos e híbridos aplicados ao problema desenvolvido pela tese.

O Capítulo 3 é dedicado à descrição do problema proposto assim como a sua modelagem matemática e metodologia de solução, além de uma breve descrição do algoritmo computacional desenvolvido para a solução do problema.

O Capítulo 4 apresenta e discute os principais resultados obtidos no presente trabalho incluindo as diferentes condições de escoamento e geometria e suas influências na transferência de quantidade de movimento e energia ao longo do escoamento.

No Capítulo 5 é apresentado um novo estudo, no qual é estudado uma abordagem alternativa para o estudo da intensificação térmica em microcanais aplicando a geração de entropia para diferentes geometrias.

No Capítulo 6 são apresentadas as principais conclusões bem como sugestões para trabalhos futuros.

CAPÍTULO 2

REVISÃO DA LITERATURA

2.1 DUTOS IRREGULARES

A dinâmica de fluidos e a transferência de calor que ocorrem em um canal de parede irregular têm sido estudados em diferentes áreas da ciência (SILVA, 2003). Superfícies de geometrias de paredes onduladas são, por exemplo, utilizadas em trocadores de calor compactos nos quais a parede com geometria ondulada aumenta a transferência de calor entre os dissipadores e o fluido refrigerador utilizando o mesmo volume e peso do caso de paredes planas. O uso de trocadores de calor compactos fornece um método atraente e viável de produção de trocadores de calor menores com melhores características termo hidráulicas, reduzindo, assim, os custos de materiais (JALURIA, 2008).

A geometria aplicada em estudos de canais de paredes irregulares é geralmente simples. Funções periódicas (em concordância de fase ou não), em forma de arco, triangulares, trapezoidais ou retangulares são utilizadas para descrever a parede longitudinalmente.

2.1.1 Estudos Experimentais

Alguns dos principais estudos experimentais para a caracterização do escoamento em geometrias onduladas podem ser observados na Tabela 2.1. Os mesmos foram realizados principalmente para dutos senoidais (NISHIMURA *et al*., 1990; RUSH *et al*., 1999; OVIEDO-TOLEDO *et al.*, 2008) ou em forma de arco (NISHIMURA *et al*., 1990) por meio de traçadores ou por acompanhamento de partículas.

Tabela 2.1 - Principais referências de trabalhos experimentais de escoamento em dutos corrugados.

Autor	Geometria	Método
NISHIMURA *et al*. (1990)	Arco e Seno	Acompanhamento de partículas (Al)
RUSH *et al.* (1999)	Seno	Traçador
OVIEDO-TOLEDO *et al.* (2008)	Seno	Acompanhamento de partículas (Ag)

Os trabalhos apresentados na Tabela 2.1 demostraram que os parâmetros geométricos como comprimento de onda, ângulo de fase entre as paredes e espaçamento entre as paredes influenciam significativamente na transferência de calor do canal estudado, o aumento de um ou mais destes parâmetros aumenta a transferência de calor apesar de aumentar também a perda de carga. Além disso, nos trabalhos de RUSH *et al.* (1999) e OVIEDO-TOLEDO *et al.* (2008), foi observada a influência da região de saída do canal na caracterização do escoamento na região ondulada principalmente na última concavidade na direção do escoamento. Esses estudos experimentais apontaram a viabilidade de aproximar o escoamento como bidimensional para os casos em que a ondulação das paredes é sinusoidal. No entanto, quando as paredes foram descritas por função em forma de arco, há evidências de formação de zonas de recirculação tridimensionais NISHIMURA *et al*. (1990) ao longo do escoamento.

2.1.2 Soluções Numéricas

Os métodos numéricos mais comuns para a solução numérica das equações de Navier-Stokes acopladas à equação da energia são os de diferenças finitas, volumes finitos e elementos fintos. Na Tabela 2.2, além dos métodos de solução comumente empregados na solução do problema proposto, podem ser observados alguns dos principais estudos e diferentes aplicações de canais com geometria irregular.

Tabela 2.2 - Referências do escoamento em canais com geometria irregular.

Autores	Geometria	Método
WANG e VANKA (1995), STONE e VANKA (1999)	Seno	Diferenças Finitas
NIČENO e NOBILE (2001)	Seno e Arco	Volumes Finitos
WANG e CHEN (2002)	Seno*	Diferenças Finitas
HAITHAN *et al.* (2005), HAITHAN e SAHIN (2013)	Seno e arco	Diferenças Finitas
SUI *et al.* (2010)	Seno (variável)	Volumes Finitos (Fluent®)
PARVIN e HOSSAIN (2012)	Triangular (MHD)	Elementos Finitos
AHMED *et al.* (2013)	Trapezoidal	Volumes Finitos
RAMGADIA e SAHA (2012, 2013, 2016)	Seno (transiente e diferença de fase)	Volumes Finitos
PATI *et al.* (2017)	Seno* (diferença de fase)	Volumes Finitos
MAYELI *et al.* (2017)	Seno* (MHD)	Volumes Finitos
DORMOHAMMADI *et al.* (2018)	Seno (nanofluido)	Elementos Finitos
MODAL *et al.* (2019)	Seno	Elementos Finitos (COMSOL®)

*Mesma geometria do canal do presente estudo.

A transferência de quantidade de movimento, de calor e massa em canais com geometrias irregulares bidimensionais já foi analisada de forma numérica em diferentes contextos. A geometria do canal senoidal foi investigada e comparada com a configuração do canal de placas planas por WANG e VANKA (1995) e STONE e VANKA (1999), indicando que, para os baixos números de Reynolds (Re < 180), o número de Nusselt atinge valores médios mais altos.

O esquema de diferenças finitas ADI foi aplicado para estudar o fluxo de calor e fluido nos canais das paredes sinusoidais (WANG e CHEN, 2002), demostrando o aumento no número de Nusselt ao se aumentar a amplitude do canal e aumentar o número de Reynolds. Para a mesma geometria, a configuração das paredes do duto em fase não demonstrou aprimoramento significativo na transferência de calor em comparação com a configuração fora de fase (PATI *et al*., 2017).

A geometria em forma de arco foi estuda para Reynolds até 80 por NIČENO e NOBILE (2001) pelo método de volumes finitos. HAITHAN *et al.* (2005) (método de diferenças finitas *semi-implicit method for pressure-linked equations*, SIMPLE) estendeu o estudo para essa geometria até Re = 400. Foi verificado que o aumento da distância entre as placas ocasionou a diminuição da recirculação enquanto o aumento no número de Reynolds facilitou o aparecimento de zonas de recirculação. Ainda foi observado que as propriedades em cada concavidade estudada variam até a quarta concavidade a partir do qual as mesmas são praticamente constantes até a última concavidade a qual é influenciada pela região de saída.

Além disso, o comportamento transiente do escoamento e da transferência de calor também foi analisado para diferentes configurações geométricas, aplicando o método de volumes finitos, levando à conclusão de que é possível obter um aprimoramento mais significativo na transferência de calor usando formas assimétricas (RAMGADIA e SAHA, 2012, 2013, 2016).

A possibilidade da utilização de *softwares* comerciais no estudo do problema de transferência de calor e transferência de massa, em dutos de geometrias irregulares, foi demonstrada respectivamente por SUI *et al.* (2010), utilizando o *software* Ansys Fluent e por MONDAL *et al.* (2019) utilizando o *software* COMSOL. Ambos os estudos comprovam numericamente a recirculação do escoamento dentro das concavidades pela utilização de canais com geometrias senoidais. Foi verificado que o valor do número de Nusselt é aumentado ao se aumentar a amplitude do canal e ao se diminuir a distância entre as paredes e que para Reynolds entre 300 a 400 foi observado que a transferência de calor pode ser mantida em níveis elevados ao longo da direção do escoamento (SUI *et al.*, 2010).

Outras aplicações de geometrias irregulares envolvem o escoamento magnetohidrodinâmico (MHD) em canais de geometria triangular (PARVIN e HOSSAIN, 2012) e senoidal, (MAYELI *et al.*, 2017) e o escoamento de nanofluidos (AHMED *et al.*, 2013) em geometria trapezoidal.

Apesar de extensamente abordados, como demostrado na Tabela 2.2, os estudos numéricos diferem significativamente nos resultados obtidos em parâmetros como o número de Nusselt médio e do produto fRe médio dentro de uma concavidade considerando a mesma geometria. Os resultados de alguns trabalhos podem ser observados nas Tabelas 2.3 e 2.4.

Tabela 2.3 - Número de Nusselt médio na quarta concavidade do canal.

	Número de Nusselt médio			
Re	WANG e VANKA (1995)	NICENO e NOBILE (2001)	HAITHAM *et al.* (2005)	RAGMANDIA e SAHA (2016)
25	4,068	3,963	4,390	4,398
100	4,041	4,041	4,588	4,266
200	4,041	4,260	-	4,760
400	5,470	4,988	5,773	5,314

Como pode ser observado nas Tabelas 2.3 e 2.4, os valores calculados no número de Nusselt e do produto fRe médio para a quarta concavidade variam em cada estudo utilizando geometrias idênticas. Para o número de Nusselt a maior diferença ocorre quando Re = 200 resultando em um erro relativo máximo maior que 15%. Para o produto fRe, para todos os valores de Reynolds, o maior erro relativo entre os resultados é superior a 25%.

Tabela 2.4 - Produto fRe na quarta concavidade.

	Produto fRe médio			
Re	WANG e VANKA (1995)	NICENO e NOBILE (2001)	HAITHAM *et al.* (2005)	RAGMANDIA e SAHA (2016)
25	-	1,820	1,294	1,486
100	-	0,583	0,415	0,458
200	-	0,368	-	0,263
400	-	0,202	0,165	0,150

A Técnica da Transformada Integral Generalizada (GITT) é uma alternativa, com caráter híbrido, aos métodos puramente numéricos, os quais discretizam o problema em todas as dimensões, ao conservar a solução analítica do problema analisado ao transformar o sistema de equações diferencias parciais original em um sistema de equações diferencias ordinárias em uma das dimensões originais, na qual é aplicado, quando necessário, a etapa numérica.

2.1.3 Soluções Híbridas

Existem na literatura poucos estudos utilizando a Técnica da Transformada Integral Generalizada (GITT) na simulação de escoamentos em geometrias irregulares. A técnica foi aplicada em alguns estudos relacionados tanto a solução das equações de Navier-Stokes quanto na solução da equação da energia em dutos de geometria corrugada.

Inicialmente, PÉREZ-GUERRERO *et al.* (1995) aplicaram a GITT e utilizaram a formulação em função corrente, com a introdução de um filtro para melhora da convergência numérica, na solução das equações de Navier-Stokes no escoamento bidimensional laminar em um canal em expansão gradual.

SILVA (2003) utilizando-se também da formulação em função corrente aplicou a GITT na solução das equações de Navier-Stokes em dutos bidimensionais com paredes de geometria senoidal para uma faixa de número de Reynolds de 100-500. No estudo a recirculação é intensificada ao se aumentar o número de Reynolds e a amplitude das ondas que formam a parede do canal. O produto fator de atrito pelo número de Reynolds foi calculado e comparado com métodos numéricos disponíveis na literatura para diferentes valores de número de Reynolds e de amplitude do canal obtendo-se resultados em concordância com os de WANG e CHEN (2002).

As equações de Navier-Stokes em sua formulação em variáveis primitivas, foram solucionadas por LIMA *et al*. (2007) e apesar dos resultados em boa concordância com os obtidos com por PÉREZ-GUERRERO *et al.* (1995) convergem mais lentamente se comparado aos obtidos pela formulação utilizando funções corrente. Além disso, a utilização da função corrente seguida pela solução aplicando a GITT foi recentemente aplicada na solução de escoamentos magnetohidrodinâmicos (MHD) por PONTES *et al.* (2018) com boa concordância com os dados da literatura.

A solução da equação da energia em canais de paredes onduladas já foi demostrada nos trabalhos de CASTELLÕES *et al.* (2010) e COTTA *et al.* (2019), em geometria semelhante ao trabalho de SILVA (2003), porém a solução desenvolvida não soluciona as equações de Navier-Stokes, o campo de velocidade é aproximado por uma função válida somente para valores de número de Reynolds baixos (Re < 100).

A presente tese, por meio da GITT, soluciona as equações de Navier-Stokes e da energia. É utilizado o *software* comercial COMSOL para a compração dos resultados. Sendo assim, ao ser o primeiro estudo a resolver simultaneamente as equações de Navier-Stokes e da energia aplicando a GITT, o presente trabalho se difere dos demais estudos publicados na área. Além disso, o estudo estende a aplicação da GITT para diferentes geometrias de canais ondulados ampliando a inovação no campo da solução das equações acopladas de Navier-Stokes e da energia utilizando a GITT.

2.2 TÉCNICA DA TRANSFORMADA INTEGRAL GENERALIZADA (GITT)

A técnica da transformada integral possui um enfoque clássico bem conhecido na solução de certas classes de problemas de difusão lineares e transformáveis (LUIKOV, 1973; ÖZISIK, 1980). MIKHAILOV e ÖZISIK (1984) compilam uma série de trabalhos que utilizam as ideias da transformação integral na solução exata de problemas em difusão de calor e massa. Ao longo das últimas décadas, após o trabalho pioneiro de ÖZISIK e MURRAY (1974) esta metodologia de solução foi amplamente estendida para permitir soluções analíticas aproximadas em uma vasta gama de problemas não-transformáveis, como mostrando nos trabalhos de LEITE e ÖZISIK (1980), COTTA e ÖZISIK (1986, 1987), COTTA (1992, 1993, 1994) e COTTA e MIKHAILOV (1990, 1993). Exemplos de alguns desses problemas são problemas com coeficientes variáveis, com coeficientes variáveis nas condições de contorno, problemas que envolvem um problema auxiliar complicado e problemas não lineares.

Assim como o método da transformada integral clássica (ou método de expansão em autovalores), o método da transformada integral generalizada ganhou um enfoque analítico-numérico pela aplicação de uma etapa numérica após a transformação analítica do problema, oferecendo ao usuário precisão controlada, onde a diferença em relação a outros métodos numéricos está na garantia da convergência das soluções para ordens crescentes de truncamento nas séries, e um desempenho computacional bastante eficiente para uma grande variedade de problemas, os quais são classificados e sistematicamente apresentados com diversas aplicações (COTTA, 1993), incluindo formulação não-lineares de interesse em aplicação de transferência de calor e escoamento de fluidos.

Este método difere dos métodos numéricos até então utilizados para solução de problemas de caráter fortemente não linear e acoplados, pois não há necessidade de discretização do domínio para geração de malhas. Esses comportamentos são originados devido à natureza híbrida da solução, pois a etapa analítica é aplicada sobre todas menos uma variável independente e a tarefa numérica é sempre reduzida à integração de um sistema diferencial ordinário em apenas uma coordenada. Outra característica da solução é a aplicação de filtros algébricos oriundos geralmente de versões simplificadas do próprio problema a ser analisado, empregados para acelerar a convergência da solução.

A aplicação da Técnica da Transformada Integral Generalizada (GITT) pode ser resumida nos seguintes passos:

i. Definição do problema auxiliar, com base, por exemplo, nos termos difusivos da formulação original.
ii. Solução do problema auxiliar e obtenção das autofunções, autovalores, normas e propriedades de ortogonalidade;
iii. Desenvolvimento do par transformada-inversa associado;
iv. Transformação Integral do problema diferencial parcial em um sistema de equações algébricas ou diferenciais ordinárias acopladas ou ainda outra equação diferencial parcial;
v. Truncamento do sistema infinito e solução numérica do sistema diferencial resultante para obtenção dos campos transformados;
vi. Obtenção do potencial original, fazendo-se uso da fórmula de inversão.

A ideia básica na técnica é a não necessidade de encontrar uma transformação integral analítica. Assim, é possível escolher um problema auxiliar de autovalor que seja característico do problema original ou não, desenvolver o par transformada inversa e efetuar a transformação integral chegando a um sistema ordinário infinito e acoplado.

Após o truncamento em ordem suficientemente grande para a precisão requerida, automaticamente selecionada durante o próprio processo de solução, o sistema diferencial ordinário é resolvido numericamente por algoritmos bem estabelecidos, com controle automático de erro, disponíveis em bibliotecas científicas. A fórmula explícita de inversão fornece então uma representação analítica nas demais variáveis independentes eliminadas pela transformação integral.

CAPÍTULO 3

FORMULAÇÃO MATEMÁTICA E METODOLOGIA DA SOLUÇÃO

3.1 FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

Considere um fluido newtoniano em regime laminar e permanente o qual escoa em um canal bidimensional com paredes irregulares definidas por duas funções que representam a condição de contorno, $y_1(x)$ e $y_2(x)$. Em busca de se generalizar a formulação e a solução do problema proposto, admite-se inicialmente que não existe simetria em relação a linha central do canal conforme observado na Figura 3.1.

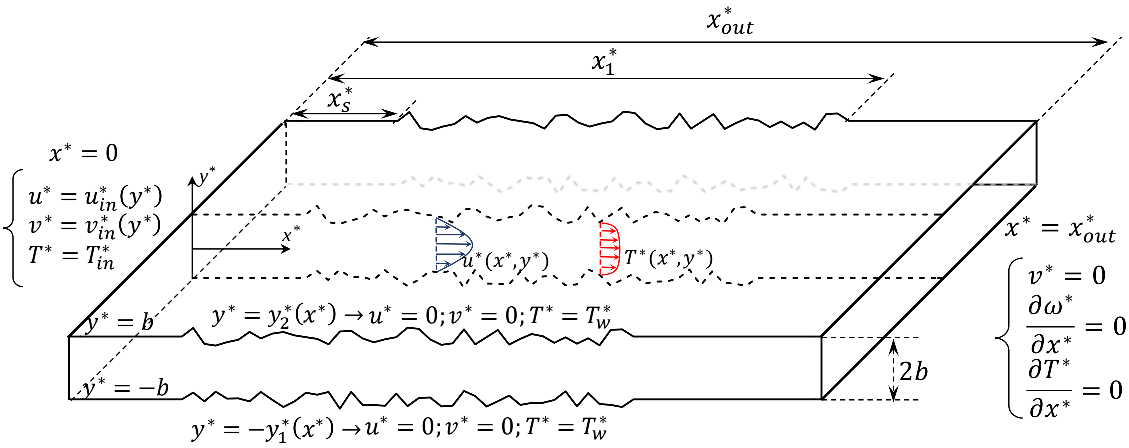


Figura 3.1 - Duto genérico estudado.

Além disso, algumas hipóteses simplificadoras são aplicadas:

- O fluido que escoa no canal é incompressível;
- As propriedades do fluido ao longo do canal são constantes;
- As paredes são consideradas impermeáveis;
- As paredes são mantidas a temperatura constate;
- Nas paredes é considerada a condição de não deslizamento;
- O fluido obedece a lei de Fourier;
- Não há termos fontes de geração calor.

O escoamento e a transferência de calor são modelados, aplicando as hipóteses simplificadoras, segundo as equações da continuidade, de Navier-Stokes e da energia:

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*}+\frac{\partial v^*}{\partial y^*}=0 \quad (3.1a)$$

$$u^*\frac{\partial u^*}{\partial x^*}+v^*\frac{\partial u^*}{\partial y^*}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p^*}{\partial x^*}+\nu^*\left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}}+\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}}\right) \quad (3.1b)$$

$$u^*\frac{\partial v^*}{\partial x^*}+v^*\frac{\partial v^*}{\partial y^*}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p^*}{\partial y^*}+\nu^*\left(\frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}}+\frac{\partial^2 v^*}{\partial y^{*2}}\right) \quad (3.1c)$$

$$k\left(\frac{\partial^2 T^*}{\partial x^{*2}}+\frac{\partial^2 T^*}{\partial y^{*2}}\right)=\rho C_p\left(u^*\frac{\partial T^*}{\partial x^*}+v^*\frac{\partial T^*}{\partial y^*}\right) \quad (3.1d)$$

A adimensionalização das Eqs. (3.1a-d) pode ser realizada empregando os seguintes grupos adimensionais:

$$x=\frac{x^*}{b};\, y=\frac{y^*}{b};\, y_1(x)=\frac{y_1^*(x^*)}{b};\, y_2(x)=\frac{y_2^*(x^*)}{b};\, u=\frac{u^*}{u_{av}};\, v=\frac{v^*}{u_{av}};$$

$$p=\frac{p^*}{\rho u_{av}^2};\ Re=\frac{b.u_{av}}{\nu};\ Pr=\frac{\nu}{\alpha};\ T=\frac{T^*-T_w^*}{T_{in}^*-T_w^*};\, Pe=Re\,Pr;\, x_{out}=\frac{x_{out}^*}{b} \quad (3.2a\text{-}p)$$

$$\omega=\frac{\omega^* b}{u_{av}};\ \psi=\frac{\psi^*}{u_{av}b};\ f_1=\frac{f_1^*(y^*)}{u_{av}};\ f_2=\frac{f_2^*(y^*)}{u_{av}}$$

Para o canal ondulado, o comprimento de referência é igual a semi-distância entre as placas superior e inferior, b. T_w é a temperatura da placa inferior e superior. y_1 e y_2 são as equações que descrevem a forma geométrica das paredes onduladas. Re e Pr são os números Reynolds e Prandtl, respectivamente.

Mantendo a generalidade da formulação proposta é possível assumir que as velocidades podem ser representadas por suas componentes, que em termos de função corrente são dados por (WHITE, 2011):

$$u=\frac{\partial\psi}{\partial y} \quad ; \quad v=-\frac{\partial\psi}{\partial x} \quad (3.3a, b)$$

A formulação de função de corrente é aplicada para eliminar o campo de pressão simplificando a solução do problema ao eliminar a necessidade de resolver o gradiente de pressão o qual pode ser calculado *a posteriori*. Além disso, a formulação de função corrente satisfaz automaticamente a lei da conservação da massa.

Derivando a Eq. (3.1b) em relação à coordenada y e a Eq. (3.1c) em relação à x, com posterior subtração de ambas e levando em conta a Eq. (3.1a) e as definições de função corrente (Eqs. (3.3a,b)), o campo de pressão é eliminado. Assim, aplicando também as variáveis adimensionais, as Eqs. (3.1a-c) podem ser apresentadas como:

$$\frac{\partial \psi}{\partial y}\left(\frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3}+\frac{\partial^3 \psi}{\partial x \partial y^2}\right)-\frac{\partial \psi}{\partial x}\left(\frac{\partial^3 \psi}{\partial x^2 \partial y}+\frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3}\right)=\frac{1}{\mathrm{Re}}\nabla^4 \psi; \tag{3.4a}$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y}\frac{\partial T}{\partial x}-\frac{\partial \Psi}{\partial x}\frac{\partial T}{\partial y}=\frac{1}{RePr}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right); \tag{3.4b}$$

na qual o número de Reynolds (Re) é definido a partir da semidistância entre as paredes e a velocidade média, ambas na entrada do duto. ∇^4 é o operador biharmônico. As condições de contorno nas paredes do duto são especificadas considerando impermeabilidade, não deslizamento e temperatura constante, assim:

$$u(x,-y_1(x)) = 0 \quad ; \quad v(x,- y_1(x)) = 0 \quad ; \quad T(x, -y_1(x)) = 0 \quad ; \quad x > 0 \tag{3.5a-c}$$

$$u(x, y_2(x)) = 0 \quad ; \quad v(x, y_2(x)) = 0 \quad ; \quad T(x, y_2(x)) = 0 \quad ; \quad x > 0 \tag{3.5d-f}$$

aplicando a definição de função corrente nas Eqs. (3.5.a-f) nas paredes do duto:

$$\psi\left(x,-y_1(x)\right)=k_1 \quad ; \quad \frac{\partial \psi\left(x,-y_1(x)\right)}{\partial \mathbf{n}}=0 \quad ; \quad T\left(x,-y_1(x)\right)=0; \tag{3.6a-c}$$

$$\psi\left(x,y_2(x)\right)=k_2 \quad ; \quad \frac{\partial \psi\left(x,y_2(x)\right)}{\partial \mathbf{n}}=0 \quad ; \quad T\left(x,y_2(x)\right)=0; \tag{3.6d-f}$$

Em que, **n**, k_1 e k_2 representam o vetor normal à parede do canal e os valores da função corrente nas paredes do duto, respectivamente.

A análise das condições de contorno na direção x é realizada considerando um duto truncado na extremidade de saída. Na entrada do canal é considerado que u é prescrito, v = 0 e que existe uma temperatura constante de entrada T_{in} (Figura 3.2). Na saída do canal para um duto truncado é imposta a condição de inexistência de recirculação, assim, é considerada a condição de $\partial\omega / \partial x = 0$, na qual ω é a vorticidade e v = 0. Além disso, é considerado que a temperatura não varia com x, de modo que $\partial T / \partial x = 0$.

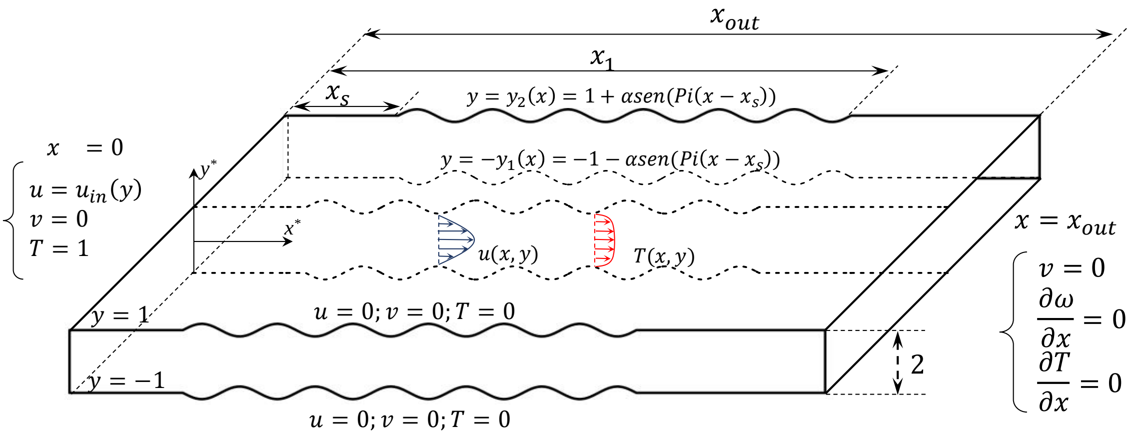


Figura 3.2 - Condição de contorno em variáveis primitivas.

As condições de contorno em termos de função corrente podem ser observadas na Figura 3.3.

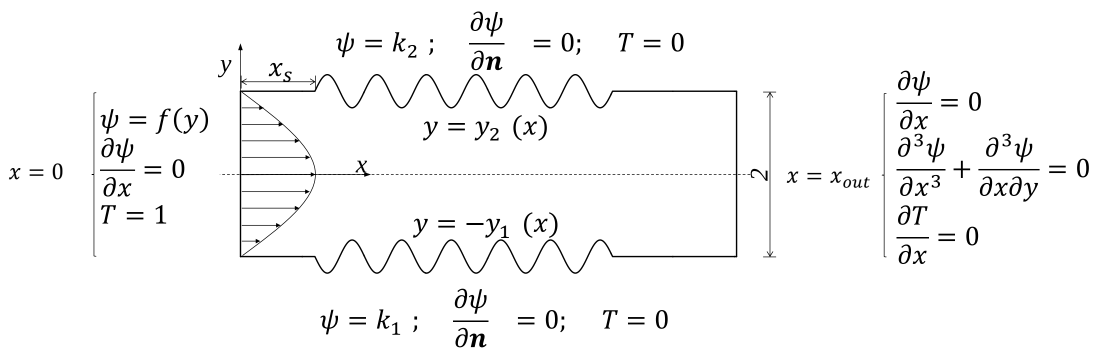


Figura 3.3 - Condições de contorno aplicando a formulação em função corrente.

Assim, em termos de função corrente, podemos considerar as condições de contorno, a entrada (0, y) e na saída (x_{out}, y):

$$\psi(0, y) = 0; \qquad \frac{\partial \psi(0, y)}{\partial x} = 0; \qquad T(0, y) = 1; \qquad (3.7a\text{-}c)$$

$$\frac{\partial \psi(x_{out}, y)}{\partial x} = 0; \ \frac{\partial \omega(x_{out}, y)}{\partial x} = \frac{\partial^3 \psi(x_{out}, y)}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \psi(x_{out}, y)}{\partial x \partial y^2} = 0; \ \frac{\partial T(x_{out}, y)}{\partial x} = 0; \qquad (3.7d\text{-}f)$$

em que x_{out} representa o valor da coordenada axial na saída do duto.

3.2 METODOLOGIA DE SOLUÇÃO

A metodologia adotada para a solução do problema é a Técnica da Transformada Integral Generalizada (GITT). Para facilitar a solução e convergência da mesma, é conveniente definir um filtro que permita homogeneizar as condições de contorno na direção y sendo possível a escolha de um problema de autovalor adequado em tal direção. Assim:

$$\psi(x,y) = \phi(x,y) + F(x,y) \tag{3.12}$$

na qual $\phi(x,y)$ é o potencial desconhecido a ser determinado. $F(x,y)$ é o mesmo filtro utilizado por Pérez Guerreiro (1995) o qual apesar de não ser uma solução particular de $\psi(x,y)$, possui os mesmos valores de $\psi(x,y)$ no contorno do problema além de melhorar a convergência da solução por GITT. Introduzindo a Eq. (3.12) nas equações formuladas em função corrente (3.4a) e (3.4b), temos:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{\partial^3\phi}{\partial x^3} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{\partial^3\phi}{\partial x\partial y^2} - \frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial^3\phi}{\partial x^2\partial y} - \frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial^3\phi}{\partial y^3} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{\partial^3 F}{\partial x^3} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{\partial^3 F}{\partial x\partial y^2} \\
&- \frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial^3 F}{\partial x^2\partial y} - \frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial^3 F}{\partial y^3} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial^3\phi}{\partial x^3} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial^3\phi}{\partial x\partial y^2} - \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial^3\phi}{\partial x^2\partial y} - \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial^3\phi}{\partial y^3} \\
&+ \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial^3 F}{\partial x^3} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial^3 F}{\partial x\partial y^2} - \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial^3 F}{\partial x^2\partial y} - \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial^3 F}{\partial y^3} \\
&= \frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^4\phi}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4\phi}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4\phi}{\partial y^4} + \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 F}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4}\right)
\end{aligned} \tag{3.13}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial x}\frac{dT}{dy} = \frac{1}{RePr}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right) \tag{3.14}$$

A introdução do filtro nas condições de contorno na direção y definidas pelas Eqs. (3.6.a-f) leva a:

$$\phi(x,-y_1) = 0; \qquad \frac{\partial\phi(x,-y_1)}{\partial \mathbf{n}} = 0; \qquad T(x,-y_1) = 0 \tag{3.15. a,b}$$

$$\phi(x, y_2) = 0; \qquad \frac{\partial \phi(x, y_2)}{\partial \mathbf{n}} = 0; \qquad T(x, y_2) = 0 \qquad (3.15.\ c,d)$$

3.2.1 Determinação do filtro

De forma semelhante à metodologia apresentada por PÉREZ-GUERRERO (1995) e PÉREZ-GUERRERO *et al.* (2000), o filtro F(x,y) deve ser tal que reproduza o valor da função corrente nas paredes do duto ao longo do seu comprimento. Esta função pode ser construída consideramdo que em cada posição ao longo do duto existe um perfil de velocidade desenvolvido, o qual se adapta à irregularidade do canal.

Para facilitar o estudo é realizada uma transformação de coordenadas. A relação entre o sistema de coordenadas original (x,y) e o sistema transformado (x, η) é dado por:

$$\eta = y - y_3(x)\,,\ y_0(x) = \frac{1}{2}\left[y_1(x) + y_2(x)\right],\ y_3(x) = \frac{1}{2}\left[y_2(x) - y_1(x)\right] \qquad (3.16\ a\text{-}c)$$

na qual y_3 representa a defasagem entre os eixos y e η. Assim, é possível descrever a função F similar ao campo de função corrente do escoamento completamente desenvolvido (PÉREZ GUERRERO, 1995) de acordo com o Anexo C como:

$$F(\eta; x) = \frac{3}{4} Q \left[\left(\frac{\eta}{y_0} \right) - \frac{1}{3} \left(\frac{\eta}{y_0} \right)^3 \right] + \frac{Q}{2} + k_1 \qquad (3.17)$$

ou em termos das coordenadas originais:

$$F(x, y) = \frac{3}{4} Q \left[\left(\frac{y - y_3}{y_0} \right) - \frac{1}{3} \left(\frac{y - y_3}{y_0} \right)^3 \right] + \frac{Q}{2} + k_1 \qquad (3.18)$$

na qual Q está relacionada com a vazão volumétrica na seção transversal do duto. A dependência de x do filtro F(x,y) é levada em conta nas funções $y_0(x)$ e $y_3(x)$, as quais definem superfícies planas que passariam pelas paredes do canal. Verifica-se ainda que os valores de F(x,y) nas paredes fornecem:

$$F(x, -y_1) = k_1 \qquad \text{e} \qquad F(x, y_2) = Q + k_1 = k_2 \qquad (3.19\ a,b)$$

$$\frac{\partial F(x,-y_1)}{\partial \mathbf{n}}=0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial F(x,y_2)}{\partial \mathbf{n}}=0 \tag{3.19 c,d}$$

em que y pertence ao intervalo $[-y_1(x), y_2(x)]$, e η a $[-y_0(x), y_0(x)]$. Assim, é possível definir uma nova variável ξ, a qual permitirá determinar mais facilmente os coeficientes da transformação integral:

$$\xi=\frac{\eta}{y_0}=\frac{y-y_3}{y_0} \tag{3.20}$$

cujo domínio é $\xi \in [-1,1]$

O filtro F(x,y) é então reescrito como:

$$F(\xi)=\frac{3}{4}Q\left[\xi-\frac{\xi^3}{3}\right]+\frac{Q}{2}+k_1 \tag{3.21}$$

3.2.2 Determinação das constantes k_1 e k_2

A terminação das constantes k_1 e k_2 das Eqs. (3.6a, 3.6d) pode ser feita partindo do princípio que os valores da função corrente nas paredes do duto estão relacionados entre si. Assim utilizando as definições de função corrente (Eqs. (3.3a, 3.3b)) e integrando as velocidades na entrada do duto:

$$\psi(0,y)=k_1+\int_{-y_1}^{y}u_{in}(y')dy' \tag{3.22}$$

A Eq. (3.22) descreve o valor da função corrente na entrada do duto em função de $u_1(y)$.

A partir de (3.22) é possível determinar $\psi(0,y_2)$:

$$\psi(0,y_2)=k_2=k_1+\int_{-y_1}^{y_2}u_{in}(y)dy \tag{3.23}$$

A integral dada pela Eq. (3.23) define vazão por unidade de comprimento (Q), na entrada do duto, em que fica evidenciada a dependência entre as constantes k_1 e k_2:

$$k_2 = k_1 + Q \tag{3.25b}$$

Assim, é possível determinar valores constantes para k_1 e k_2 contanto que os mesmos respeitem a restrição de igualdade determinada pela Eq. (3.25b). Para auxiliar a visualização dos resultados e demonstrar a simetria da solução, pode-se definir $k_1 = -1$ e $k_2 = 1$, e para garantir a igualdade da Eq. (3.25b), $Q = 2$.

3.2.3 Determinação do Problema de Autovalor

3.2.3.1 Campo de Função Corrente

Após o processo de filtragem na direção y, as condições de contorno se tornam homogêneas, assim é mais apropriada a escolha do problema auxiliar nessa direção, pois o problema na direção x apresenta condições de contorno não homogêneas.

$$\frac{\partial^4 Y_i(x,y)}{\partial y^4} = \mu_i^4 Y_i(x,y)\,, \qquad -y_1(x) < y < y_2(x) \tag{3.26a}$$

Com condições de contorno:

$$Y_i(x,-y_1) = 0; \qquad \left.\frac{\partial Y_i}{\partial \mathbf{n}}\right|_{y=-y_1} = 0 \tag{3.26b,c}$$

$$Y_i(x,y_2) = 0; \qquad \left.\frac{\partial Y_i}{\partial \mathbf{n}}\right|_{y=y_2} = 0 \tag{3.26d,e}$$

O sistema formado pelas Eqs. (3.26a-e) pode ser reescrito em termos da nova coordenada ξ (Eq. 3.20), como:

$$\frac{d^4 Y_i(\xi)}{d\xi^4} = \left(\mu_i y_0\right)^4 Y_i(\xi) = \beta_i^4 Y_i(\xi) \tag{3.27a}$$

$$Y_i(-1) = 0\ ; \qquad \frac{dY_i(-1)}{d\xi} = 0 \tag{3.27b,c}$$

$$Y_i(1) = 0 \quad ; \qquad \frac{dY_i(1)}{d\xi} = 0 \tag{3.27d,e}$$

A solução analítica do problema formado pelas Eqs. (3.27a-e) resulta em:

$$Y_i(\xi) = \begin{cases} \dfrac{\cos(\beta_i \xi)}{\cos(\beta_i)} - \dfrac{\cosh(\beta_i \xi)}{\cosh(\beta_i)} & , \quad i = 1, 3, 5, ... \\ \dfrac{\text{sen}(\beta_i \xi)}{\text{sen}(\beta_i)} - \dfrac{\text{senh}(\beta_i \xi)}{\text{senh}(\beta_i)} & , \quad i = 2, 4, 6, ... \end{cases} \tag{3.28}$$

Na qual o autovalor β_i é encontrado a partir de:

$$\beta_i = \mu_i y_0 \tag{3.29}$$

E pode ser determinado pela equação transcendente:

$$tg(\mu_i) = \begin{cases} -tgh(\mu_i) & i = 1,3,5... \\ tgh(\mu_i) & i = 2,4,6... \end{cases} \tag{3.30}$$

Nas coordenas originais a Eq. (3.28) pode ser reescrita como:

$$Y_i(x, y) = \begin{cases} \dfrac{\cos\left[\mu_i (y - y_3)\right]}{\cos(\mu_i y_0)} - \dfrac{\cosh\left[\mu_i (y - y_3)\right]}{\cosh(\mu_i y_0)} & , \quad i = 1, 3, 5, ... \\ \dfrac{\text{sen}\left[\mu_i (y - y_3)\right]}{\text{sen}(\mu_i y_0)} - \dfrac{\text{senh}\left[\mu_i (y - y_3)\right]}{\text{senh}(\mu_i y_0)} & , \quad i = 2, 4, 6, ... \end{cases} \tag{3.31}$$

As autofunções gozam da seguinte propriedade de ortogonalidade:

$$\int_{-y_1}^{y_2} Y_i Y_j dy = \begin{cases} 0 & , \quad \text{para } i \neq j \\ M_i(x), & \quad \text{para } i = j \end{cases} \tag{3.32}$$

A norma é calculada a partir de sua definição:

$$M_i(x) = \int_{-y_1}^{y_2} Y_i^2 dy, \quad i = 1, 2, 3, ... \tag{3.33}$$

Aplicando a transformação de variável em ξ:

$$M_i(x) = y_0 \int_{-1}^{1} Y_i^2(\xi) d\xi = 2y_0(x), \quad i = 1, 2, 3, ... \tag{3.34}$$

3.2.3.2 Campo de Temperatura

O problema de autovalor é dado por:

$$\frac{\partial^2 \Gamma_i(x,y)}{\partial y^2} = -\lambda_i^2 \Gamma_i(x,y), \quad -y_1(x) < y < y_2(x) \tag{3.35a}$$

$$\Gamma_i(x, -y_1) = 0 \tag{3.35b}$$

$$\Gamma_i(x, y_2) = 0 \tag{3.35c}$$

Ou em termos de coordenada ξ (Eq. (3.20)), como:

$$\frac{d^2\Gamma_i}{d\xi^2} = -\gamma_i^2 \Gamma_i, \qquad -1 < \xi < 1 \tag{3.36a}$$

$$\Gamma_i(-1) = 0, \qquad \Gamma_i(1) = 0 \tag{3.36b,c}$$

$$\gamma_i = \lambda_i y_0 \tag{3.36d}$$

A autofunção, os autovalores e a integral de normalização são dadas respectivamente por:

$$\Gamma_i(\xi) = \operatorname{sen}\left[\gamma_i(\xi+1)\right]; \qquad i = 1,2,3,... \tag{3.37}$$

$$\gamma_i = \frac{i\pi}{2}, \qquad i = 1,2,3,... \tag{3.38}$$

$$\int_{-y_1}^{y_2} \Gamma_i(x,y)\Gamma_j(x,y)\,dy = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ N_i(x) = y_0, & i = j \end{cases} \tag{3.39}$$

3.2.4 Par Transformada-Inversa

Admite-se que os potencias estudados, ϕ(x,y) e T(x,y), podem ser representados por expansões em autofunções e é possível então definir o par transformada-inversa para os campos de função corrente como:

$$\bar{\phi}_i(x) = \frac{1}{M_i(x)} \int_{-y_1}^{y_2} Y_i(x,y)\phi(x,y)dy\,, \quad \text{Transformada} \tag{3.40a}$$

$$\phi(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} Y_i(x,y)\bar{\phi}_i(x)\,, \quad \text{Inversa} \tag{3.40b}$$

E para o campo de temperatura:

$$\bar{T}_i(x) = \frac{1}{N_i(x)} \int_{-y_1}^{y_2} \Gamma_i(x,y) T(x,y) dy\,, \quad \text{Transformada} \tag{3.41a}$$

$$T(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} \Gamma_i(x,y) \bar{T}_i(x), \quad \text{Inversa} \tag{3.41b}$$

3.2.5 Transformação Integral do Problema

Estabelecido o par transformada inversa dado pelas Eqs. (3.40a,b) e (3.41a,b), definidas as autofunções e a propriedade de ortogonalidade dos problemas de autovalor escolhidos, é possível realizar a transformação do problema diferencial original. Para isto, o campo de função corrente é operado com $\int_{-y_1}^{y_2} Y_i(x,y)dy$ ambos os lados da Eq. (3.13). Após a introdução da fórmula de inversão nos termos não transformáveis, resulta o seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias acopladas para o cálculo dos potenciais transformados $\bar{\phi}_i$:

$$\begin{aligned} \bar{\phi}_i^{(iv)} = -\mu_i^4\bar{\phi}_i + \frac{L_i}{M_i} + \frac{Re}{M_i}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\Big\{ & A_{ijk}\bar{\phi}_j\bar{\phi}_k + B_{ijk}\bar{\phi}_j\bar{\phi}_k^{'} + C_{ijk}\bar{\phi}_j\bar{\phi}_k^{''} + D_{ijk}\bar{\phi}_j\bar{\phi}_k^{'''} + \\ & E_{ijk}\bar{\phi}_j^{'}\bar{\phi}_k + F_{ijk}\bar{\phi}_j^{'}\bar{\phi}_k^{'} + G_{ijk}\bar{\phi}_j^{'}\bar{\phi}_k^{''}\Big\} + \frac{1}{M_i}\sum_{j=1}^{\infty}\Big\{H_{ij}\bar{\phi}_j + I_{ij}\bar{\phi}_j^{'} + J_{ij}\bar{\phi}_j^{''} + K_{ij}\bar{\phi}_j^{'''}\Big\} \end{aligned} \tag{3.42}$$

na qual os coeficientes que dependem de cada posição em x são calculados (anexo A) a partir de:

$$A_{ijk}=\int_{-y_1}^{y_2}Y_i\frac{\partial Y_j}{\partial y}\frac{\partial^3 Y_k}{\partial x^3}dy+\int_{-y_1}^{y_2}Y_i\frac{\partial Y_j}{\partial y}\frac{\partial^3 Y_k}{\partial x\partial y^2}dy-\int_{-y_1}^{y_2}Y_i\frac{\partial Y_j}{\partial x}\frac{\partial^3 Y_k}{\partial x^2\partial y}dy$$
$$-\int_{-y_1}^{y_2}Y_i\frac{\partial Y_j}{\partial x}\frac{\partial^3 Y_k}{\partial y^3}dy \tag{3.43a}$$

$$B_{ijk}=3\int_{-y_1}^{y_2}Y_i\frac{\partial Y_j}{\partial y}\frac{\partial^2 Y_k}{\partial x^2}dy+\int_{-y_1}^{y_2}Y_i\frac{\partial Y_j}{\partial y}\frac{\partial^2 Y_k}{\partial y^2}dy-2\int_{-y_1}^{y_2}Y_i\frac{\partial Y_j}{\partial x}\frac{\partial^2 Y_k}{\partial x\partial y}dy \tag{3.43b}$$

$$C_{ijk}=3\int_{-y_1}^{y_2}Y_i\frac{\partial Y_j}{\partial y}\frac{\partial Y_k}{\partial x}dy-\int_{-y_1}^{y_2}Y_i\frac{\partial Y_j}{\partial x}\frac{\partial Y_k}{\partial y}dy \tag{3.43c}$$

$$D_{ijk}=\int_{-y_1}^{y_2}Y_i\frac{\partial Y_j}{\partial y}Y_k dy \tag{3.43d}$$

$$E_{ijk}=-\int_{-y_1}^{y_2}Y_iY_j\frac{\partial^3 Y_k}{\partial x^2\partial y}dy-\int_{-y_1}^{y_2}Y_iY_j\frac{\partial^3 Y_k}{\partial y^3}dy \tag{3.43e}$$

$$F_{ijk}=-2\int_{-y_1}^{y_2}Y_iY_j\frac{\partial^2 Y_k}{\partial x\partial y}dy \tag{3.43f}$$

$$G_{ijk}=-\int_{-y_1}^{y_2}Y_iY_j\frac{\partial Y_k}{\partial y}dy \tag{3.43g}$$

$$H_{ij}=\mathrm{Re}\,a_{ij}-b_{ij} \tag{3.43h}$$

$$I_{ij}=\mathrm{Re}\,c_{ij}-d_{ij} \tag{3.43i}$$

$$J_{ij}=\mathrm{Re}\,e_{ij}-f_{ij} \tag{3.43j}$$

$$K_{ij}=\mathrm{Re}\,g_{ij}-h_{ij} \tag{3.43k}$$

$$L_i=\mathrm{Re}\,i_i-j_i \tag{3.43l}$$

$$a_{ij}=\int_{-y_1}^{y_2}Y_i\frac{\partial Y_j}{\partial y}\frac{\partial^3 F}{\partial x^3}dy+\int_{-y_1}^{y_2}Y_i\frac{\partial Y_j}{\partial y}\frac{\partial^3 F}{\partial x\partial y^2}dy-\int_{-y_1}^{y_2}Y_i\frac{\partial Y_j}{\partial x}\frac{\partial^3 F}{\partial x^2\partial y}dy+$$
$$-\int_{-y_1}^{y_2}Y_i\frac{\partial Y_j}{\partial x}\frac{\partial^3 F}{\partial y^3}dy+\int_{-y_1}^{y_2}Y_i\frac{\partial^3 Y_j}{\partial y^3}\frac{\partial F}{\partial x}dy+\int_{-y_1}^{y_2}Y_i\frac{\partial^3 Y_j}{\partial x^2\partial y}\frac{\partial F}{\partial y}dy+ \tag{3.43m}$$
$$-\int_{-y_1}^{y_2}Y_i\frac{\partial^3 Y_j}{\partial x^2\partial y}\frac{\partial F}{\partial x}dy-\int_{-y_1}^{y_2}Y_i\frac{\partial^3 Y_j}{\partial y^3}\frac{\partial F}{\partial x}dy$$

$$b_{ij}=\int_{-y_1}^{y_2}Y_i\frac{\partial^4 Y_j}{\partial x^4}dy+2\int_{-y_1}^{y_2}Y_i\frac{\partial^4 Y_j}{\partial x^2\partial y^2}dy \tag{3.43n}$$

$$c_{ij} = \int_{-y_1}^{y_2} Y_i Y_j \frac{\partial^3 F}{\partial x^2 \partial y} dy - \int_{-y_1}^{y_2} Y_i Y_j \frac{\partial^3 F}{\partial y^3} dy + 3\int_{-y_1}^{y_2} Y_i \frac{\partial^2 Y_j}{\partial x^2} \frac{\partial F}{\partial y} dy + \int_{-y_1}^{y_2} Y_i \frac{\partial^2 Y_j}{\partial y^2} \frac{\partial F}{\partial y} dy - 2\int_{-y_1}^{y_2} Y_i \frac{\partial^2 Y_j}{\partial x \partial y} \frac{\partial F}{\partial x} dy \tag{3.43o}$$

$$d_{ij} = 4\int_{-y_1}^{y_2} Y_i \frac{\partial^3 Y_j}{\partial x^3} dy + 4\int_{-y_1}^{y_2} Y_i \frac{\partial^3 Y_j}{\partial x \partial y^2} dy \tag{3.43p}$$

$$e_{ij} = 3\int_{-y_1}^{y_2} Y_i \frac{\partial Y_j}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial y} dy - \int_{-y_1}^{y_2} Y_i \frac{\partial Y_j}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial x} dy \tag{3.43q}$$

$$f_{ij} = 6\int_{-y_1}^{y_2} Y_i \frac{\partial^2 Y_j}{\partial x^2} dy - \int_{-y_1}^{y_2} Y_i \frac{\partial^2 Y_j}{\partial y^2} dy \tag{3.43r}$$

$$g_{ij} = \int_{-y_1}^{y_2} Y_i Y_j \frac{\partial F}{\partial y} dy \tag{3.43s}$$

$$h_{ij} = 4\int_{-y_1}^{y_2} Y_i \frac{\partial Y_j}{\partial x} dy \tag{3.43t}$$

$$i_i = \int_{-y_1}^{y_2} Y_i \left(\frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial^3 F}{\partial x^3} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial^3 F}{\partial x \partial y^2} - \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial^3 F}{\partial x^2 \partial y} - \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial^3 F}{\partial y^3} \right) dy \tag{3.43u}$$

$$j_i = \int_{-y_1}^{y_2} Y_i \left(\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} \right) dy \tag{3.43v}$$

O campo de temperatura é operado com $\int_{-y_1}^{y_2} \Gamma_i(x,y) dy$ a Eq. (3.14) levando a:

$$\frac{d^2 \bar{T}_i(x)}{dx^2} = \left(\frac{\gamma_i}{y_0} \right)^2 \bar{T}_i(x) + \frac{Pe}{N_i} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left(S_{ijk} \frac{d\bar{T}_j(x)}{dx} \bar{\phi}_k(x) + T_{ijk} \bar{T}_j(x) \frac{d\bar{\phi}_k(x)}{dx} \right) + \frac{1}{N_i} \sum_{j=1}^{\infty} \left(U_{ij} \bar{T}_j(x) + V_{ij} \frac{d\bar{T}_j(x)}{dx} \right) \tag{3.44}$$

na qual os coeficientes que dependem de cada posição em x são calculados a partir de:

$$S_{ijk} = \int_{-1}^{1} \Gamma_i \Gamma_j \frac{dY_k}{d\xi^3} d\xi \tag{3.45a}$$

$$T_{ijk} = \int_{-1}^{1} \Gamma_i \frac{d\Gamma_j}{d\xi^3} Y_k d\xi \tag{3.45b}$$

$$U_{ij} = \int_{-y_1}^{y_2} \Gamma_i \frac{\partial^2 \Gamma_j}{\partial x^2} dy \qquad (3.45c)$$

$$V_{ij} = k_{ij} Pe - l_{ij} \qquad (3.45d)$$

$$k_{ij} = \int_{-y_1}^{y_2} \Gamma_i \Gamma_j \frac{\partial F}{\partial y} dy \qquad (3.45e)$$

$$l_{ij} = 2\int_{-1}^{1} \Gamma_i \frac{\partial \Gamma_j}{\partial x^2} dy \qquad (3.45f)$$

As condições de contorno na direção x podem ser transformadas também de maneira análoga resultando em:

$$\bar{\phi}_i(0) = 0\,; \quad \frac{d\bar{\phi}_i(0)}{dx} = 0\,; \quad \bar{T}_i(0) = \bar{a}_i \qquad (3.46a\text{-}c)$$

$$\frac{d\bar{\phi}_i(x_{out})}{dx} = \bar{b}_i + \sum_{j=1}^{\infty} \bar{c}_{ij} \bar{\phi}_j(x_{out}) \qquad (3.46d)$$

$$\frac{d^3\bar{\phi}_i(x_{out})}{dx} = \bar{d}_i + \sum_{j=1}^{\infty} [\bar{e}_{ij} \bar{\phi}_j(x_{out}) + \bar{f}_{ij} \bar{\phi}_j'(x_{out}) + \bar{g}_{ij} \bar{\phi}_j''(x_{out})] \qquad (3.46e)$$

$$\frac{d\bar{T}_i(x_{out})}{dx} = \sum_{j=1}^{\infty} \bar{h}_{ij} \bar{T}_j(x_{out}) \qquad (3.46f)$$

na qual os coeficientes são calculados como:

$$\bar{a}_i = \frac{1}{y_0(0)} \int_{-y_1(0)}^{y_2(0)} \Gamma_i(0,y) dy; \quad \bar{b}_i = -\frac{1}{2y_0(x_{out})} \int_{-y_1(x_{out})}^{y_2(x_{out})} Y_i(x_{out},y) \frac{\partial F(x_{out},y)}{\partial x} dy \qquad (3.46g,h)$$

$$\bar{c}_{ij} = -\frac{1}{2y_0(x_{out})} \int_{-y_1(x_{out})}^{y_2(x_{out})} Y_i(x_{out},y) \frac{\partial Y_j(x_{out},y)}{\partial x} dy \qquad (3.46i)$$

$$\bar{d}_i = -\frac{1}{2y_0(x_{out})} \int_{-y_1(x_{out})}^{y_2(x_{out})} Y_i(x_{out},y) \left[\frac{\partial^3 F(x_{out},y)}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 F(x_{out},y)}{\partial x \partial y^2} \right] dy \qquad (3.46j)$$

$$\bar{e}_{ij} = -\frac{1}{2y_0(x_{out})} \int_{-y_1(x_{out})}^{y_2(x_{out})} Y_i(x_{out},y) \left[\frac{\partial^3 Y_j(x_{out},y)}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 Y_j(x_{out},y)}{\partial x \partial y^2} \right] dy \qquad (3.46k)$$

$$\bar{f}_{ij} = -\frac{1}{2y_0(x_{out})} \int_{-y_1(x_{out})}^{y_2(x_{out})} Y_i(x_{out},y) \left[3\frac{\partial^2 Y_j(x_{out},y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Y_j(x_{out},y)}{\partial y^2} \right] dy \qquad (3.46l)$$

$$\bar{g}_{ij} = -\frac{3}{2y_0(x_{out})} \int_{-y_1(x_{out})}^{y_2(x_{out})} Y_i(x_{out},y) \frac{\partial Y_j(x_{out},y)}{\partial x} dy \qquad (3.46m)$$

$$\bar{h}_{ij} = -\frac{1}{y_0(x_{out})} \int_{-y_1(x_{out})}^{y_2(x_{out})} \Gamma_i(x_{out}, y) \frac{\partial \Gamma_j(x_{out}, y)}{\partial x} dy \qquad (3.46n)$$

3.2.6 Valores de Interesse

Para a análise de fluxo de calor e resistência ao escoamento do fluido, são calculadas quantidades adimensionais relevantes. Primeiro, a tensão de cisalhamento na superfície da parede é dada por:

$$\tau_w = -\mu \left(\frac{\partial u^*}{\partial y^*} + \frac{\partial v^*}{\partial x^*} \right)_{y^* = y_2^*} \qquad (3.47)$$

O fator de atrito é definido como:

$$f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho u_{av}^2} \qquad (3.48)$$

Usando as Eqs. (3.47) e (3.48) juntamente com a definição da função de função corrente dada pelas Eqs. (3.3a,b), o produto do coeficiente do fator de atrito pelo número de Reynolds, fRe, pode ser calculado por (Anexo D):

$$fRe = -\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right)\Bigg|_{y=y_2} \qquad (3.49)$$

ou, aplicando o esquema de filtragem fornecido pela Eq. (3.8) e a fórmula inversa definida na Eq. (3.15b), segue:

$$fRe = -\left[\left.\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right|_{y=y_2} - \left.\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right|_{y=y_2} + \sum_{i=1}^{\infty} \left(\left.\frac{\partial^2 Y_i}{\partial y^2}\right|_{y=y_2} - \left.\frac{\partial^2 Y_i}{\partial x^2}\right|_{y=y_2} \right) \bar{\phi}_i(x) \right] \qquad (3.50a)$$

$$fRe = -\left[\left.\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right|_{y=y_1} - \left.\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right|_{y=y_1} + \sum_{i=1}^{\infty} \left(\left.\frac{\partial^2 Y_i}{\partial y^2}\right|_{y=y_1} - \left.\frac{\partial^2 Y_i}{\partial x^2}\right|_{y=y_1} \right) \bar{\phi}_i(x) \right] \qquad (3.50b)$$

para as paredes superior e inferior respectivamente. O produto fRe médio ao longo do canal pode ser calculado integrando no domínio da parede:

$$f\,\mathrm{Re}_{av} = \frac{\int_0^x \left[1 + y'^2_i(\xi)\right] fRe\,d\xi}{\int_0^x \left[1 + y'^2_i(\xi)\right] d\xi} \tag{3.51}$$

O número local de Nusselt é definido por:

$$Nu_x = -\frac{hb}{k} = -\frac{b}{\left(T^*_{av} - T^*_w\right)} \frac{\partial T^*}{\partial \boldsymbol{n}^*}\bigg|_{y^* = y^*_i} \tag{3.52}$$

ou em termos das variáveis adimensionais para as paredes inferior e superior respectivamente:

$$Nu_x = -\frac{1}{y_0}\left(y_1^{'} sen\theta_1 - \cos\theta_1\right)\frac{1}{T_{av}}\left(\sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i \overline{T}_i(x)\right) \tag{3.53a}$$

$$Nu_x = -\frac{1}{y_0}\left(y_2^{'} sen\theta_2 - \cos\theta_2\right)\frac{1}{T_{av}}\left(\sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i \overline{T}_i(x)\right) \tag{3.53b}$$

em que $\theta_i = tg^{-1}(y_i'(x))$. Assim como para o produto fRe, o número de Nusselt médio é dado por:

$$Nu_{av} = \frac{\int_0^x \left[1 + y'^2_i(\xi)\right] Nu_x\,d\xi}{\int_0^x \left[1 + y'^2_i(\xi)\right] d\xi} \tag{3.54}$$

A temperatura média na forma adimensional é dada como:

$$T_{av}(x) = \frac{\int_{-y_1}^{y_2} u(x,y)T(x,y)dy}{\int_{-y_1}^{y_2} u(x,y)dy} = \frac{\int_{-y_1}^{y_2} u(x,y)T(x,y)dy}{\left(k_2 - k_1\right)} \tag{3.55}$$

O custo computacional em problemas de domínio irregular solucionados pela GITT é influenciado pelo cálculo dos coeficientes. O cálculo numérico dos mesmos possui a desvantagem que eles devem ser calculados somente dentro do processo de solução do sistema diferencial ordinário, pois os coeficientes possuem dependência em relação a coordenada axial x, esse processo traria alto custo computacional e baixo desempenho do código.

Para contornar esse problema foi utilizada a mesma metodologia empregada em PÉREZ-GUERRERO (1995), SILVA (2003). Nesta abordagem todos os coeficientes são calculados analiticamente utilizando a computação simbólica do *software* Mathematica® (2018). Para isto, é feita a transformação do domínio utilizando-se a variável ξ definida pela Eq. (3.20) que transforma o domínio de $[-y_1(x), y_2(x)]$ para $[-1, 1]$ e ao utilizar a regra da cadeia é possível estabelecer coeficientes com derivadas na nova variável. Esse processo permite que novos coeficientes independentes da coordenada x surjam, permitindo o cálculo em separado e somente por uma única vez dos coeficientes que são armazenados e multiplicados posteriormente por funções dependentes do domínio irregular.

3.3 ALGORITMO COMPUTACIONAL

É necessário trucar as séries infinitas em um número de termos suficientemente grande, em um domínio finito, que garanta o erro relativo prefixado para obtenção dos potenciais originais. Portanto, o sistema diferencial ordinário pode ser reescrito como:

$$\begin{aligned}\bar{\phi}_i^{(iv)} = -\mu_i^4\bar{\phi}_i + \frac{L_i}{M_i} + \frac{Re}{M_i}\sum_{i=1}^{NV}\sum_{j=1}^{NV}\Big\{ & A_{ijk}\bar{\phi}_j\bar{\phi}_k + B_{ijk}\bar{\phi}_j\bar{\phi}_k' + C_{ijk}\bar{\phi}_j\bar{\phi}_k'' + D_{ijk}\bar{\phi}_j\bar{\phi}_k''' + \\ & E_{ijk}\bar{\phi}_j'\bar{\phi}_k + F_{ijk}\bar{\phi}_j'\bar{\phi}_k' + G_{ijk}\bar{\phi}_j'\bar{\phi}_k''\Big\} + \frac{1}{M_i}\sum_{j=1}^{NV}\Big\{H_{ij}\bar{\phi}_j + I_{ij}\bar{\phi}_j' + J_{ij}\bar{\phi}_j'' + K_{ij}\bar{\phi}_j'''\Big\}\end{aligned} \tag{3.56}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2\bar{T}_i(x)}{dx^2} = & \left(\frac{\gamma_i}{y_0}\right)^2\bar{T}_i(x) + \frac{Pe}{N_i}\sum_{j=1}^{NT}\sum_{k=1}^{NV}\left(S_{ijk}\frac{d\bar{T}_j(x)}{dx}\bar{\phi}_k(x) + T_{ijk}\bar{T}_j(x)\frac{d\bar{\phi}_k(x)}{dx}\right) \\ & + \frac{1}{N_i}\sum_{j=1}^{NT}\left(U_{ij}\bar{T}_j(x) + V_{ij}\frac{d\bar{T}_j(x)}{dx}\right)\end{aligned} \tag{3.57}$$

Assim como as condições de contorno:

$$\bar{\phi}_i(0) = 0\,; \quad \frac{d\bar{\phi}_i(0)}{dx} = 0\,; \quad \bar{T}_i(0) = \bar{a}_i \tag{3.58a-c}$$

$$\frac{d\bar{\phi}_i(x_{out})}{dx} = \bar{b}_i + \sum_{j=1}^{NV} \bar{c}_{ij}\bar{\phi}_j(x_{out}) \tag{3.58d}$$

$$\frac{d^3\bar{\phi}_i(x_{out})}{dx} = \bar{d}_i + \sum_{j=1}^{NV} [\bar{e}_{ij}\bar{\phi}_j(x_{out}) + \bar{f}_{ij}\bar{\phi}_j'(x_{out}) + \bar{g}_{ij}\bar{\phi}_j''(x_{out})] \tag{3.58e}$$

$$\frac{d\bar{T}_i(x_{out})}{dx} = \sum_{j=1}^{NT} \bar{h}_{ij}\bar{T}_j(x_{out}) \tag{3.58f}$$

no qual NV e NT são os números de termos a serem utilizados no truncamento das séries para o campo de função corrente e para temperatura respectivamente.

A solução numérica do sistema formado pelas Eqs. (3.56), (3.57) submetido as condições de contorno representadas pelas Eqs. (3.58a-f) evidencia o caráter híbrido da GITT. O sistema diferencial formado é não linear, acoplado e com comportamento *stiff* que é intensificado a medida que o número de Reynolds aumenta.

A rotina selecionada para a solução desse sistema foi a DBVPFD (double precision boundary value problem by finite difference) da biblioteca IMSL (2010) a qual possui controle automático de erro global na solução de sistemas de equações diferenciais. Para a utilização da mesma é necessário transformar o sistema diferencial ordinário de ordem maior ou igual a dois para um de primeira ordem. Para isto é definido:

$$\chi_i = \bar{\phi}_i \tag{3.59a}$$

$$\frac{d\chi_i}{dx} = \chi_{NV+i} = \frac{d\bar{\phi}_i}{dx} \tag{3.59b}$$

$$\frac{d\chi_{NV+i}}{dx} = \chi_{2NV+i} = \frac{d^2\bar{\phi}_i}{dx^2} \tag{3.59c}$$

$$\frac{d\chi_{2NV+i}}{dx} = \chi_{3NV+i} = \frac{d^3\bar{\phi}_i}{dx^3} \tag{3.59d}$$

$$\frac{d\chi_{3NV+i}}{dx} = \frac{d^4\bar{\phi}_i}{dx^4} \tag{3.59e}$$

$$\chi_{4NV+i} = \bar{T}_i \tag{3.59f}$$

$$\frac{d\chi_{4NV+i}}{dx} = \chi_{4NV+NT+i} = \frac{d\bar{T}_i}{dx} \tag{3.59g}$$

$$\frac{d\chi_{4NV+NT+i}}{dx}=\frac{d^2\overline{T}_i}{dx_2} \tag{3.59h}$$

Na quais para as Eqs. (3.59a-d), i varia de 1 até NV, e para as Eqs. (3.59f-h) de 1 até NT. Além disso, para a transformação ao domínio [0,1] é conveniente definir o seguinte operador:

$$\frac{d(\;)}{dx}=\frac{d(\;)}{d\eta}\frac{d\eta}{dx} \quad ; \quad \frac{d\eta}{dx}=c(1-\eta) \tag{3.60.a,b}$$

em que $\eta = 1 - e^{-cx}$ e c é o parâmetro de contração de escala. Portanto o sistema pode ser reescrito como:

$$\frac{d\chi_i}{d\eta}=\frac{\chi_{NV+i}}{\left(\frac{d\eta}{dx}\right)} \tag{3.61a}$$

$$\frac{d\chi_{NV+i}}{d\eta}=\frac{\chi_{2NV+i}}{\left(\frac{d\eta}{dx}\right)} \tag{3.61b}$$

$$\frac{d\chi_{2NV+i}}{d\eta}=\frac{\chi_{3NV+i}}{\left(\frac{d\eta}{dx}\right)} \tag{3.61c}$$

$$\frac{d\chi_{3NV+i}}{d\eta}=\frac{1}{\left(\frac{d\eta}{dx}\right)}\left[\begin{array}{l}-\mu_i^4\chi_i+\frac{L_i}{M_i}+\frac{Re}{M_i}\sum_{i=1}^{NV}\sum_{j=1}^{NV}\Big(\chi_j\chi_k A_{ijk}+\chi_j\chi_{NV+k}B_{ijk}+\chi_j\chi_{2NV+k}C_{ijk}+\\ \quad +\chi_j\chi_{3NV+k}D_{ijk}+\chi_{NV+j}\chi_k E_{ijk}+\chi_{NV+j}\chi_{NV+k}F_{ijk}+\\ \quad +\chi_{NV+j}\chi_{2NV+k}G_{ijk}\Big)+\frac{1}{M_i}\sum_{j=1}^{NV}\Big(\chi_j H_{ij}+\chi_{NV+j}I_{ij}+\\ \quad +\chi_{2NV+j}J_{ij}+\chi_{3NV+j}K_{ij}\Big)\end{array}\right] \tag{3.61d}$$

$$\frac{d\chi_{4NV+NT+i}}{d\eta}=\frac{1}{\left(\frac{d\eta}{dx}\right)}\left[\begin{array}{l}\left(\frac{\gamma_i}{y_0}\right)^2\chi_{4NV+i}+\frac{Pe}{N_i}\sum_{j=1}^{NT}\sum_{k=1}^{NV}\Big(S_{ijk}\chi_{4NV+NT+j}\chi_k+\\ +T_{ijk}\chi_{4NV+j}\chi_{NV+k}\Big)+\frac{1}{N_i}\sum_{j=1}^{NT}\Big(U_{ij}\chi_{4NV+j}+V_{ij}\chi_{4NV+NT+j}\Big)\end{array}\right] \tag{3.61e}$$

CAPÍTULO 4

CONVECÇÃO FORÇADA EM DUTOS DE GEOMETRIA IRREGULAR

4.1 CARACTERIZAÇÃO DO ESCOAMENTO NO DUTO COM PAREDE ONDULADA

Para o presente estudo, foram considerados os parâmetros da amplitude do canal e do número de Reynolds. Os comprimentos do canal são $x_s = 3$, $x_1 = 15$ e $x_{out} = 20$. O duto estudado é mostrado na Figura 4.1.

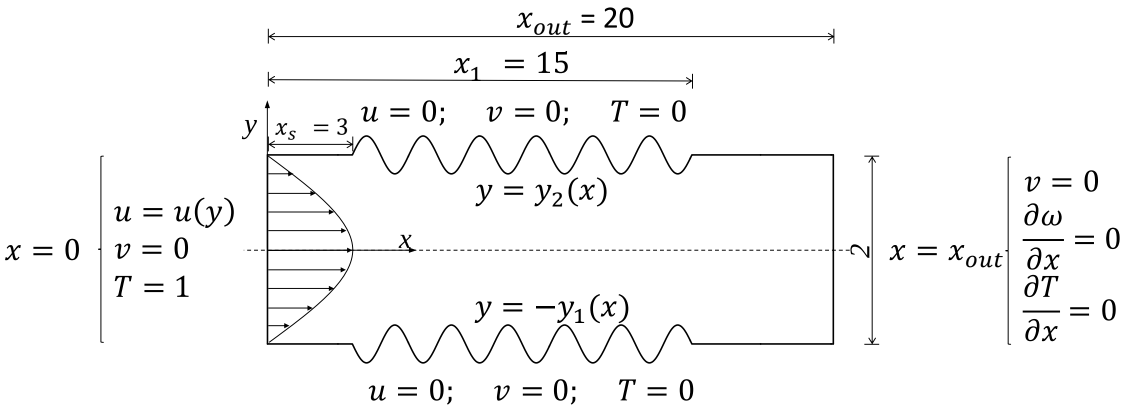


Figura 4.1 - Parâmetros do canal estudado.

A equação característica da onda será a utilizada no trabalho de WANG e CHEN (2002):

$$y_1(x) = y_2(x) = 1 + \alpha \text{sen}\left[\pi\left(x - x_s\right)\right] \tag{4.1}$$

Para evitar inconsistências numéricas causadas pelas singularidades introduzidas pelas derivadas no domínio, uma função contínua aproximada é introduzida para suavizar a transição entre as seções retas e sinusoidais do canal representado na Figura 4.1. A geometria modificada é então dada por:

$$y_2(x) = y_1(x) = 1 + \alpha \text{sen}[\pi(x - x_s)]\left[U_s\left(x, x_s\right) - U_s\left(x, x_1\right)\right] \tag{4.2}$$

na qual $U_s(x,x')$ é uma aproximação contínua da função de degrau unitário:

$$U_s(x,x') = \frac{1}{1+\exp\left[-\beta(x-x')\right]} \tag{4.3}$$

na qual na Eq. (4.3), β é um parâmetro ajustável. Para todas as simulações apresentadas na presente tese, β = 50 na entrada da região ondulada e β = 11 na saída. Os valores de contração de escala utilizados em todos os casos estudados podem ser observados no Anexo F.

4.2 SIMULAÇÃO UTILIZANDO O *SOFTWARE* COMSOL

O problema em estudo também foi solucionado utilizando o método de elementos finitos por meio do *software* comercial COMSOL Multiphysics 5.3v. Foi utilizado o modelo multifísico *Nonisothermal Flow* (nitf) no qual o campo de temperatura está acoplado ao campo de velocidade. Mais detalhes do processo de modelagem podem ser verificados no Anexo E.

4.2.1 Malha do problema

A malha final utilizada para a solução do problema proposto foi gerada com tamanho máximo para cada elemento de 5.10^{-3}. Foi utiliza uma malha estruturada com cinco camadas nos contornos do problema enquanto que para o resto do domínio foi utilizado uma não estruturada e não uniforme. Um detalhe da malha final utilizada é mostrada na Figura 4.2:

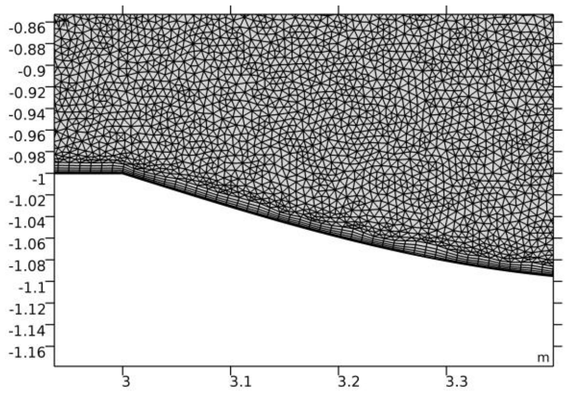


Figura 4.2 - Detalhe da malha utilizada na simulação por meio do *software* COMSOL.

A análise de convergência de malha foi realizada para o caso de Re = 100 e α = 0,3 (Figura 4.3a,b) e para Re = 500 e α = 0,1 (Figura 4.3c,d), para o cálculo do produto fRe e do número de Nusselt local. Os tamanhos de elemento considerandos nas malhas utilizadas para a análise de convergência foram 20.10^{-3}, 10.10^{-3} e 5.10^{-3}.

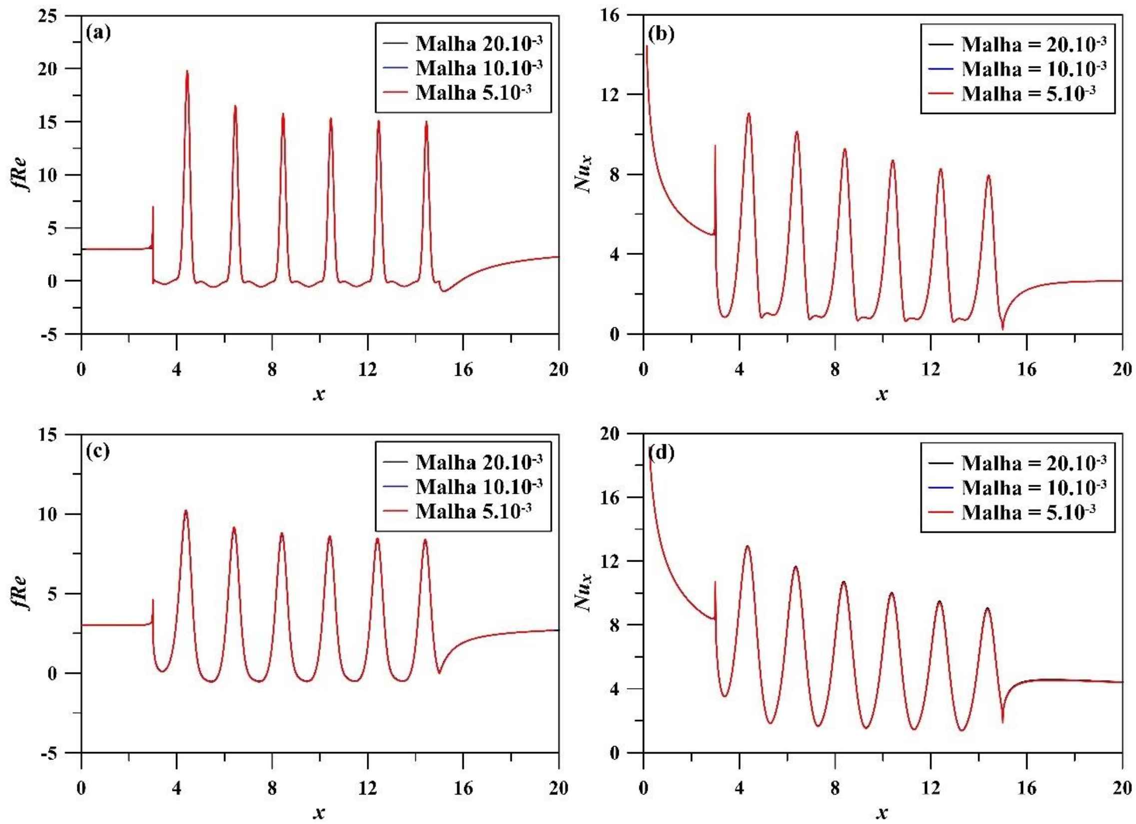


Figura 4.3 - Análise de convergência de malha para as simulações no COMSOL.

Como pode ser observado na Figura 4.3 os resultados convergem para o tamanho de malha de 5.10^{-3}, sendo possível notar um pico em x = 3, onde existe a aproximação das condições de contorno. A Tabela 4.1 mostra a evolução do desvio relativo médio entre as malhas analisadas na qual pode ser observada a diminuição do desvio conforme a malha é diminuída.

Tabela 4.1 - Desvio relativo médio entre as malhas analisadas.

	Re = 100, α = 0,3		Re = 500, α = 0,1	
Malha (Elementos)	fRe	Nu_x	fRe	Nu_x
20.10^{-3} ($1. 10^6$)	-	-	-	-
10.10^{-3} ($7. 10^6$)	0.0397	0.0147	0.0517	0.0168
5.10^{-3} ($27. 10^6$)	0.0319	0.0098	0.0323	0.0102

4.3 AVALIAÇÃO DA VARIAÇÃO DO COMPRIMENTO FINAL DO CANAL

Para verificar que a solução utilizando a condição de contorno truncada do canal também é válida para o escoamento completamente desenvolvido, foi inicialmente verificada a influência do comprimento final do duto nas características do escoamento. Para tanto, foram realizadas simulações para Re = 100 e $\alpha = 0{,}1$, utilizando o comprimento final de x_{out} = 20, 80, 100 e ∞ para NV = 50 e NT = 100.

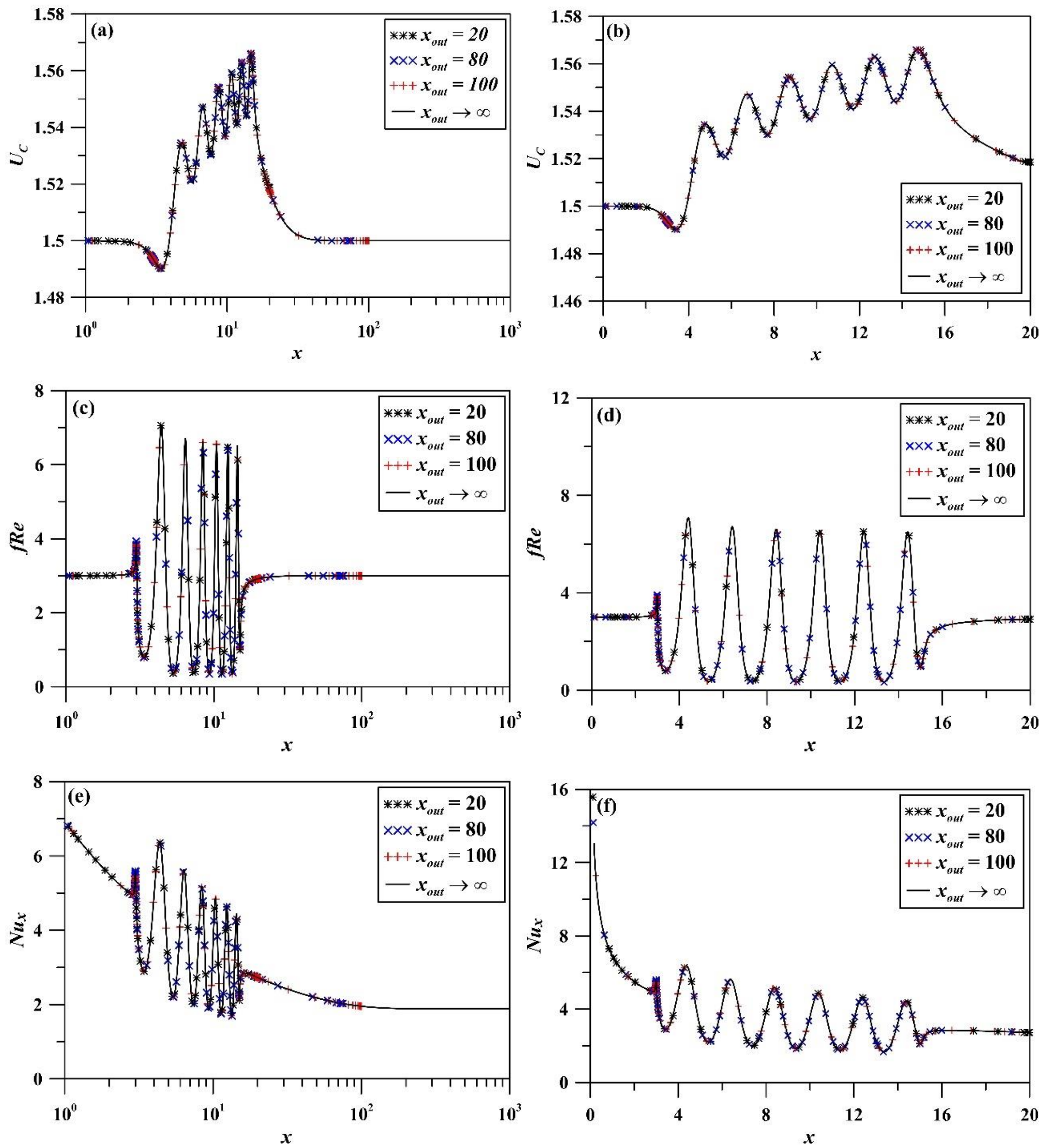


Figura 4.4 - Comparação dos resultados para diferentes valores de x_{out} para Re = 100 e $\alpha = 0{,}1$: (a) e (b) componente da velocidade na linha central; (c) e (d) produto fRe; (e) e (f) número local de Nusselt.

A Figura 4.4 mostra a comparação do produto fRe, e do número de Nusselt local, Nu_x, considerando x_{out} = 20, 80, 100 e ∞, para o caso Re = 100 α = 0,1. As Figuras 4.4a,c,d mostram o comprimento total do canal enquanto que as Figuras 4.4b,d,e são ampliações das Figuras 4.4a,c,d, respectivamente, considerando somente o trecho até x_{out} =20. A diferença gráfica dos valores da velocidade central, do produto fRe, e do número de Nusselt local, Nu_x, pode ser observada na Figura 4.4, na qual não é possível observar de maneira significativa a diferença entre os valores considerando x_{out} = 20. Sendo assim, tendo em vista o menor esforço computacional e a pouca influência dos valores de x_{out} testados na zona ondulada, optou-se por utilizar o valor de x_{out} = 20.

Tabela 4.2 - Valores em x = 20 para vários comprimentos de saída.

x_{out}	U_C	fRe	Nu_x
20	1.519	2.911	2.072
80	1.500	3.000	2.025
100	1.500	3.000	1.954
∞	1.500	3.000	1.885

A Tabela 4.2 mostra os valores da velocidade no centro do canal, produto fRe e número de Nusselt local para vários comprimentos de x_{out} em x = 20. Assim, as condições de contorno consideradas para a GITT para o duto truncado também descrevem o comportamento considerando o escoamento completamente desenvolvido, apesar do numero de Nusselt local apresentar maior sensibilidade.

4.4 ANÁLISE DE CONVERGÊNCIA

Para demonstrar a convergência do método da Transformada Integral foi realizado o incremento gradual da ordem de truncamento das séries/expansões do sistema transformado até que os campos estudados (função corrente e temperatura) atingissem um determinado valor de erro numérico pré-estabelecido. A fim de monitorar o comportamento ao longo do canal foram estabelecidos os seguintes parâmetros:

- Valor da função corrente em y = 0,5;
- Valor da temperatura em y = 1,0;
- Produto do fator de atrito por Reynolds (graficamente): fRe;
- Número de Nusselt local (graficamente): Nu_x.

Deste modo, a análise de convergência foi realizada para o campo de velocidade no plano médio da entrada do canal (y = 0,5) e para a temperatura em y = 1,0, enquanto que o produto fRe e o número de Nusselt local na placa superior em y = y_2(x) ao longo da coordenada axial do canal.

Para a análise de convergência, os casos analisados foram os casos para Re = 100 e α = 0,3, e Re 500 e α = 0,1, ambos para Pr = 6,93 (água). Os resultados podem ser observados nas Tabelas 4.3-4.6, nas quais se percebe que para números de Reynolds mais altos o problema se torna mais difícil de convergir, pois a não linearidade e a rigidez numérica do sistema são acentuados.

Tabela 4.3 - Convergência da função corrente em diferentes posições axiais para: *Re* = 100; *Pr* = 6,93; α = 0,3.

				$\psi(x, y = 0{,}5)$					
NV=NT	*x*=1,5	*x*=3,5	*x*=5,5	*x*=7,5	*x*=9,5	*x*=11,5	*x*=13,5	*x*=15,5	*x*=20
10	0,6875	0,6886	0,8008	0,8105	0,8160	0,8190	0,8208	0,8123	0,7278
20	0,6875	0,6885	0,8031	0,8123	0,8176	0,8205	0,8223	0,8138	0,7283
30	0,6875	0,6884	0,8031	0,8123	0,8176	0,8206	0,8223	0,8138	0,7283
40	0,6875	0,6884	0.8031	0.8123	0,8176	0,8206	0,8223	0,8138	0,7283
50	0,6875	0,6883	0,8031	0,8123	0,8176	0,8206	0,8223	0,8138	0,7283

As Tabelas 4.3 e 4.4 ilustram o comportamento de convergência para o valor da função corrente para os casos em que Re = 100, Pr = 6,93 e α = 0,3, e Re = 500, Pr = 6,39 e α = 0,1, respectivamente. A convergência para ambas as condições foi muito boa, os campos convergiram para 30 e 40 termos, respectivamente. O elevado valor do número de Re propicia a formação de zonas de recirculação nas concavidades do canal tornando o problema mais complexo e elevando o número de termos necessários para a convergência dos resultados.

Tabela 4.4 - Convergência da função corrente em diferentes posições axiais para: *Re* = 500; *Pr* = 6,93; α = 0,1.

				$\psi(x, y = 0{,}5)$					
NV=NT	*x*=1,5	*x*=3,5	*x*=5,5	*x*=7,5	*x*=9,5	*x*=11,5	*x*=13,5	*x*=15,5	*x*=20
10	0,6875	0,6852	0,6939	0,6974	0,6996	0,7012	0,7025	0,7036	0,6955
20	0,6875	0,6855	0,6980	0,7016	0,7039	0,7057	0,7070	0,7072	0,6969
30	0,6875	0,6855	0,6980	0,7017	0,7040	0,7058	0,7071	0,7073	0,6970
40	0,6875	0,6855	0,6980	0,7016	0,7040	0,7057	0,7071	0,7073	0,6970
50	0,6875	0,6855	0,6980	0,7016	0,7040	0,7057	0,7071	0,7073	0,6970

As Tabelas 4.5 e 4.6 ilustram o comportamento de convergência para a temperatura para os casos em que Re = 100, Pr = 6,93 e α = 0,3, e Re = 500, Pr = 6,39 e α = 0,1, respectivamente.

Tabela 4.5 - Convergência da temperatura para: *Re* = 100; *Pr* = 6,93; α = 0,3.

				$T(x, y = 1)$			
NV	NT	*x*=3.5	*x*=5.5	*x*=7.5	*x*=9.5	*x*=11.5	*x*=13.5
30	30	0.3495	0.2354	0.2103	0.1948	0.1831	0.1739
40	40	0.3497	0.2369	0.2116	0.1959	0.1841	0.1748
50	50	0.3498	0.2368	0.2114	0.1958	0.1840	0.1748
50	60	0.3498	0.2367	0.2114	0.1958	0.1840	0.1747
50	70	0.3498	0.2368	0.2115	0.1958	0.1840	0.1748
50	80	0.3498	0.2367	0.2114	0.1958	0.1840	0.1747
50	90	0.3498	0.2367	0.2114	0.1958	0.1840	0.1747

De acordo com a Tabela 4.5, é possível observar que a convergência é alcançada em dois algarismos ao longo de toda a seção de canais ondulados. Quando as paredes do canal são paralelas, x < 3.0 ou x > 15.0, a convergência é melhorada para quatro algarismos, demonstrando o aumento da complexidade do problema quando as paredes são irregulares.

Tabela 4.6 - Convergência da temperatura para: *Re* = 500; *Pr* = 6,93; α = 0,1.

				$T(x, y = 1)$			
NV	NT	*x*=3.5	*x*=5.5	*x*=7.5	*x*=9.5	*x*=11.5	*x*=13.5
30	30	0.3766	0.2210	0.1985	0.1831	0.1720	0.1633
40	40	0.3783	0.2208	0.1978	0.1828	0.1717	0.1631
50	50	0.3787	0.2211	0.1980	0.1830	0.1720	0.1633
50	60	0.3784	0.2209	0.1979	0.1829	0.1719	0.1632
50	70	0.3783	0.2209	0.1979	0.1829	0.1718	0.1632
50	80	0.3783	0.2209	0.1979	0.1829	0.1719	0.1632
50	90	0.3783	0.2209	0.1979	0.1829	0.1719	0.1632

Para a Tabela 4.6, o número de termos para o campo de função corrente foi fixado em NV = 50 e a convergência foi alcançada para NT = 70. A convergência é atrasada apenas em x = 1,5 (outras posições já convergidas com NT = 60), o que indica que, à medida que o número de Reynolds aumenta, a convergência é reduzida na região de entrada do canal devido a solução por séries ter dificuldade de recuperar as condições de contorno da temperatura em x = 0. A convergência para o produto fRe e o número de Nusselt local é demonstrada graficamente nas Figuras. 4.5 e 4.6 respectivamente. Os resultados confirmam o comportamento observado nas Tabelas 4.5 e 4.6.

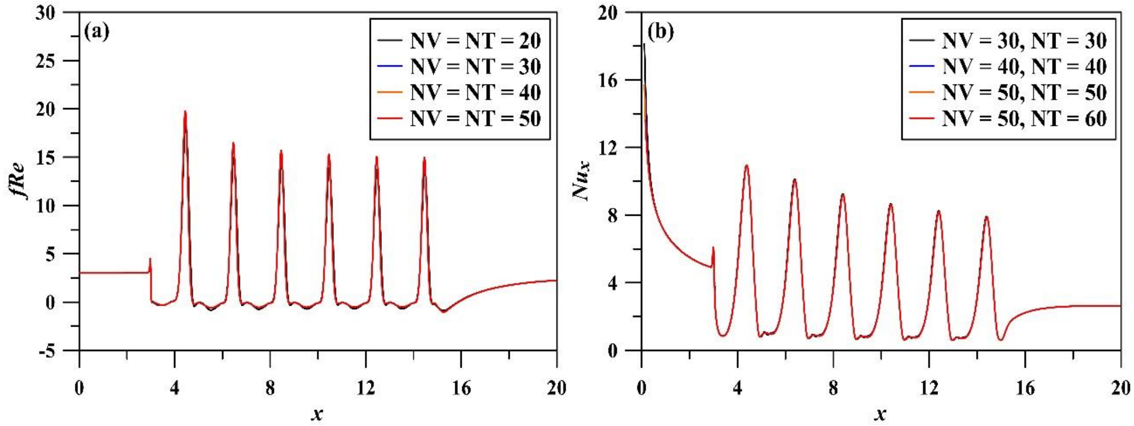


Figura 4.5 - Comportamento de convergência de: (a) produto fRe; e (b) o número local de Nusselt em diferentes posições axiais para Re = 100 e α = 0,3.

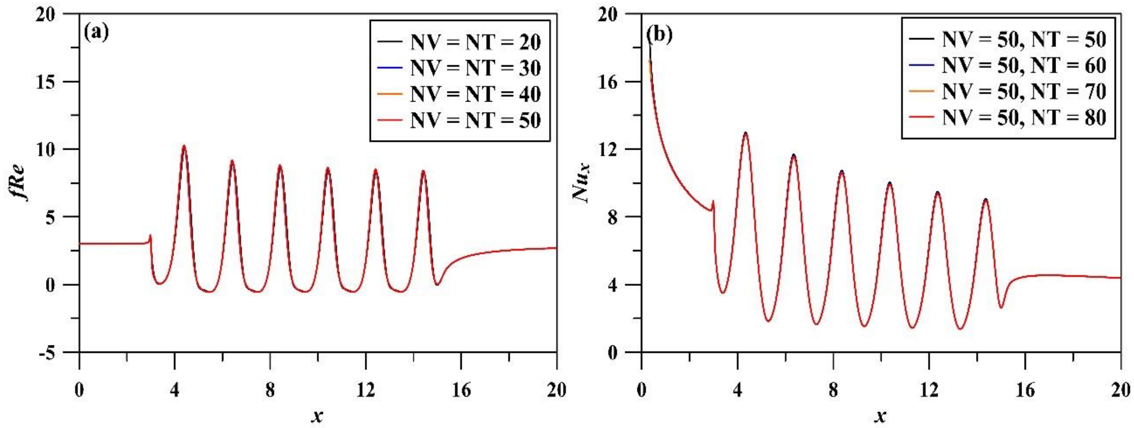


Figura 4.6 - Comportamento de convergência de: (a) produto fRe; e (b) o número local de Nusselt em diferentes posições axiais para Re = 500 e α = 0,1.

A Tabela 4.7 mostra o desvio relativo médio calculado para as Figuras 4.5 e 4.6. Como pode ser observado, a tendência do desvio é minuir conforme o número de termos (NV e NT) aumentam.

Tabela 4.7 - Desvio relativo absoluto médio dos dados das Figuras 4.5 e 4.6.

		Re = 100, α = 0.3		Re = 500, α = 0.1	
NV	NT	fRe	Nu_x	fRe	Nu_x
20	20	0.1097	0.0504	0.1156	0.0798
30	30	0.0997	0.0257	0.0763	0.0501

40	40	0.0230	0.0124	0.0113	0.0251
50	50	0.0138	0.0061	0.0054	0.0102
50	60	0.0115	0.0037	0.0023	0.0048
50	70	0.0097	0.0029	0.0014	0.0022
50	80	0.0059	0.0021	0.0006	0.0013

4.5 VERIFICAÇÃO NUMÉRICA

A verificação dos resultados obtidos foi realizada comparando os resultados obtidos pela GITT com aqueles obtidos pelo *software* comercial COMSOL Multiphysics v5.3 o qual é baseado no método de elementos finitos na solução de problemas de escoamento de fluidos e transferência de calor. A comparação foi realizada utilizando os gráficos de velocidade, temperatura média, fRe e Nusselt local para os mesmos casos utilizados na análise de convergência (Re = 100, α = 0,3; Re = 500, α = 0,1; e número de Pr = 6,93).

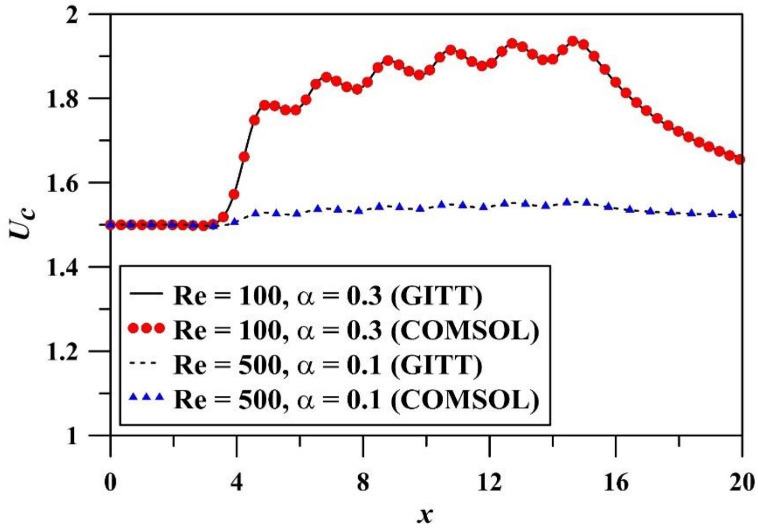


Figura 4.7 - Verificação dos resultados da GITT para a velocidade no centro do canal, U*c*, com os resultados do *software* COMSOL para: *Re* = 100; *Pr* = 6,93; α = 0,3; and *Re* = 300; *Pr* = 6,93; α = 0,1.

Como pode ser observado nas Figuras 4.7-4.10, todos os resultados obtidos pela GITT possuem boa concordância com os dados obtidos pelo *software* comercial. Na Figura 4.8 pode-se notar que, devido à descontinuidade do contorno no ponto onde o canal de placas paralelas é modificado para o canal de placas onduladas, tanto os resultados do *software* comercial como os resultados da GITT, apresentam um excedente devido aos valores serem calculados a partir de derivadas locais nas paredes, as quais, podem ser explicadas pelo elevado valor do gradiente tanto de velocidade como de temperatura em x = x_s = 3.

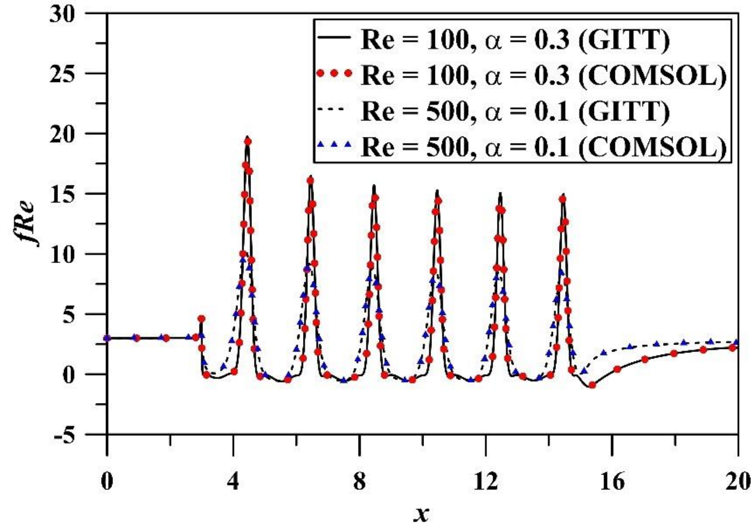


Figura 4.8 - Verificação dos resultados da GITT do produto fRe, ao longo do canal com os resultados do COMSOL para: Re = 100; Pr = 6,93; α = 0,3; and Re = 300; Pr = 6,93; α = 0,1.

Como pode ser observado na Figura 4.8, o produto fRe é constante na entrada do canal de placas paralelas e apresenta a mesma tendência caso o duto fosse estendido como mostrado na Figura 4.4. No canal de placa ondulada, para o caso quando α = 0,1, o valor começa a diminuir até o vale da onda, quando atinge um mínimo e começa a aumentar até sua crista. Além disso, quando a recirculação está presente (Re = 500), os pontos de descolamento e recolamento da camada limite são caracterizados pela mudança do sinal do produto fRe.

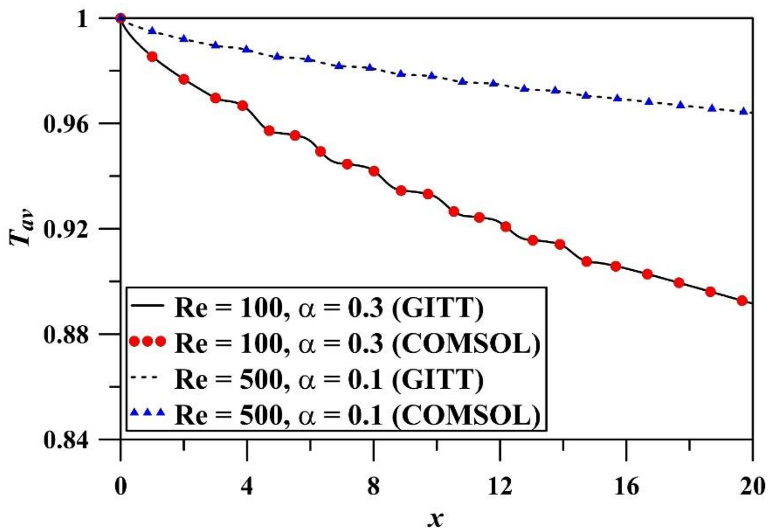


Figura 4.9 - Verificação dos resultados da GITT da temperatura média, T_{av}, ao longo do canal, com os resultados do COMSOL para: Re = 100; Pr = 6,93; α = 0,3; e Re = 300; Pr = 6,93; α = 0,1.

As Figuras 4.9 e 4.10 representam a temperatura média ao longo do canal e Nu_x, respectivamente. Os resultados mostram boa concordância entre os cálculos da GITT e do COMSOL. O mesmo *overshoot* é observado em x = 3.0 devido à necessidade de calcular o gradiente de temperatura na descontinuidade do domínio.

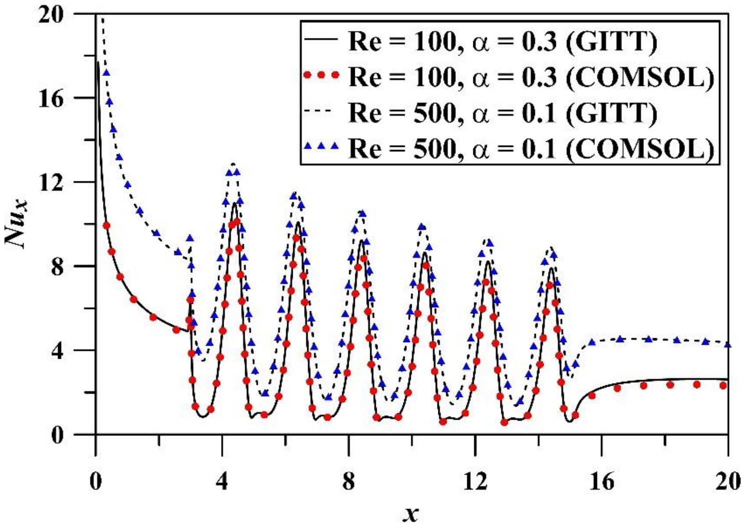


Figura 4.10 - Verificação dos resultados da GITT do número de Nusselt local, Nu_x, ao longo do canal, com os resultados do COMSOL para: Re = 100; Pr = 6,93; α = 0,3; and Re = 300; Pr = 6,93; α = 0,1.

A Tabela 4.8 mostra o desvio relativo médio entre os dados da GITT e os obtidos pelo COMSOL. Como pode ser observado o maior desvio está relacionado aos valores de fRe e número de Nusselt local. O comportamento pode ser explicado, pois, ambos os valores, são calculados a posteriori por derivadas dos campos de velocidade e temperatura.

Tabela 4.8 - Desvio relativo entre os resultados da GITT e do COMSOL.

	U_c	T_{av}	fRe	Nu_x
Re = 500, α = 0.1	0.0011	0.0000	0.0358	0.0247
Re =100, α = 0.3	0.0031	0.0001	0.0418	0.0418

4.6 ANÁLISE DA INFLUÊNCIA DOS PARÂMETROS

4.6.1 Número de Reynolds

A influência do número de Reynolds para o escoamento estudado pode ser observada nas Figuras 4.11 – 4.12. Os demais parâmetros foram Pr = 6,93 e α = 0,2. Como pode ser observado o aumento do número de Reynolds influencia fortemente na transferência de calor.

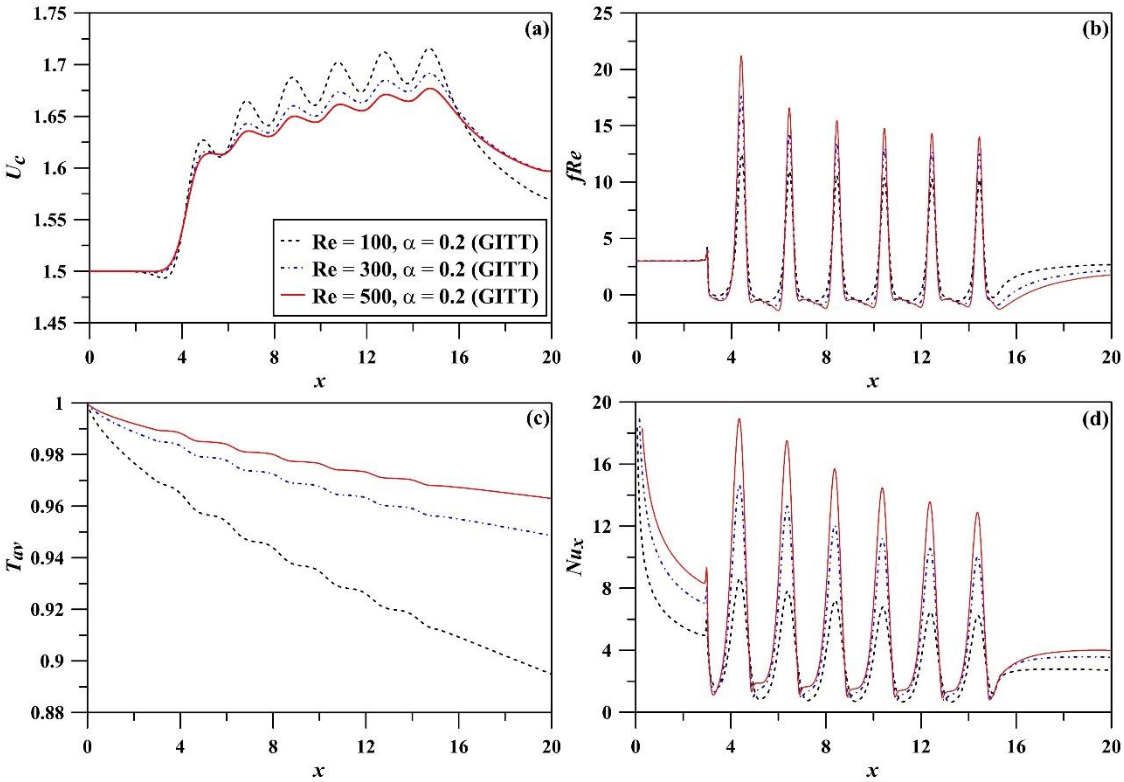


Figura 4.11 - Influência do número de Reynolds para: α = 0,2; Pr = 6,93 em: (a) velocidade central, (b) produto *fRe*, (c) temperatura média, e (d) número de Nusselt local.

A Figura 4.11a ilustra a velocidade axial, no centro do canal, para números de Reynolds = 100, 300 e 500. Como pode ser observado, a intensidade da velocidade é diminuída pelo aumento do número de Reynolds, mesmo elevando a intensidade das forças inerciais, devido à presença de zonas de escoamento reverso e recirculações mais significativas. A influência no número de Re no produto fRe é mostrado na Figura 4.11b. Como esperado, quanto maior o valor de Re, maior será a recirculação a qual pode ser verificada pelo aumento do intervalo entre o rompimento e a formação da camada limite.

A Figura 4.11c demonstra a evolução da temperatura ao longo do eixo longitudinal do canal. Como pode ser observado, o aumento do número de Re, implica no aumento da temperatura média do canal. O aumento da transferência de calor convectiva pode ser verificada pelo aumento da amplitude no número de Nusselt local (Figura 4.11d) à medida que o número de Re é elevado. Assim como observado na Figura 4.11b, o comportamento do número de Nusselt acompanha a geometria do problema.

4.5.2 Amplitude do Canal

O efeito da amplitude do canal no campo de velocidade pode ser observado na Figura 4.12. Os parâmetros utilizados para as simulações foram, Re = 300, Pr = 6,93 e α = 0,1, 0,2 e 0,3.

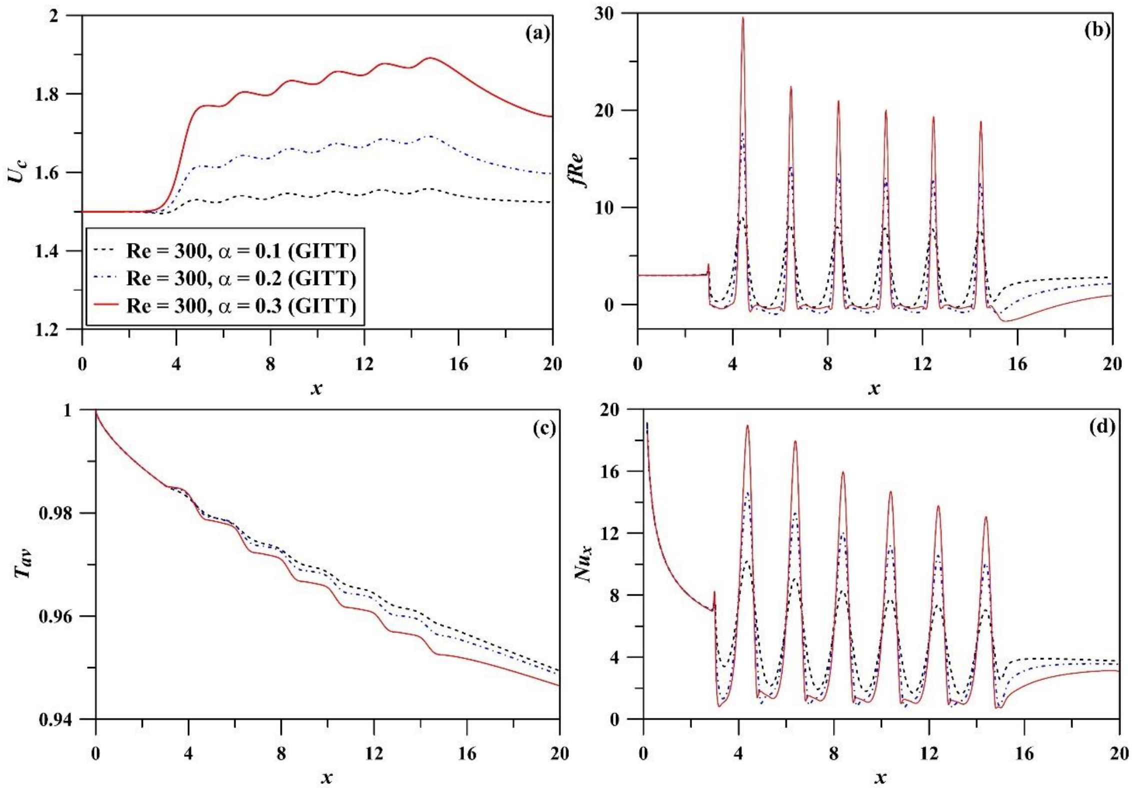


Figura 4.12 - Influência da amplitude para: Re = 300; *Pr* = 6,93; no(a): (a) velocidade central, (b) produto fRe, (c) temperatura média, e (d) número de Nusselt local.

Avaliando a Figura 4.12a, pode-se notar que a velocidade é fortemente influenciada pelo aumento da amplitude do canal. O aumento de amplitude implica maior velocidade no centro do canal e consequentemente maior recirculação. O produto fRe é fortemente influenciado pelo aumento da amplitude do canal (Figura 4.12b). O valor do fator é intensificado com o aumento da amplitude do canal, possibilitando a formação de recirculações mais intensas. Pode-se perceber ainda, que os pontos de rompimento e formação da camada limite são inicialmente deslocados para a montante do escoamento, porém, com a aumento da amplitude, as recirculações se tornam maiores e com o centro deslocado para o sentido do escoamento.

De acordo com a Figura 4.12c é possível observar que ao se aumentar o valor da amplitude, a temperatura média do canal é diminuída comprovando assim a transferência de calor mais eficiente. O comportamento pode ser confirmado analisando o aumento da intensidade do número de Nusselt local a cada módulo devido ao aumento da amplitude (Figura 4.12d).

4.7 ISOLINHAS DA FUNÇÃO CORRENTE E DA TEMPERATURA

As Fig. 4.13-4.15 representam as linhas de corrente e as isotermas para diferentes valores do número de Reynolds (100, 300 e 500) e o parâmetro geométrico α = 0,1, 0,2 e 0,3. Os valores das isotermas variam de 0 a 1. O valor de entrada quente é 1 e o valor nas paredes é 0. A configuração simétrica, para ambas as linhas de corrente e isotermas, é um resultado da geometria simétrica adotada.

Nas Figuras 4.13-4.15 pode-se observar a influência do número de Reynolds no desenvolvimento dos campos de velocidade e temperatura. Para a condição simulada mais elementar (Re = 100) o caso quando α = 0,1 não apresentou zonas de recirculação (Fig. 4.13a), a camada limite é fixada à parede resultando em baixa taxa de transferência de calor. À medida que o número de Reynolds é aumentado, a quantidade de movimento e a transferência de calor são transferidos pelas forças inerciais e as zonas de recirculação começam a surgir, seguidas pelas distorção das isotermas.

Para Re = 300 (Figura 4.14), quando α = 0,1, o primeiro vórtice é formado a partir da segunda concavidade. A temperatura média diminui indicando a melhor troca de calor para a parede quando α = 0,3. O número de Nusselt local aumenta acentuadamente de α = 0,1 para α = 0,3, demonstrando a grande influência da geometria do canal. Quando α = 0,1, o centro de vórtice é deslocado a montante do escoamento, enquanto a forma α = 0,2, é deslocada a jusante. À medida que o número de Reynolds e a amplitude ondulada são aumentados, de 300 e 0,2 respectivamente, a zona de recirculação ocupa quase toda a área da concavidade. Há também uma formação de vórtices secundários quando Re = 500 e α = 0,3 (Figura 4.15e).

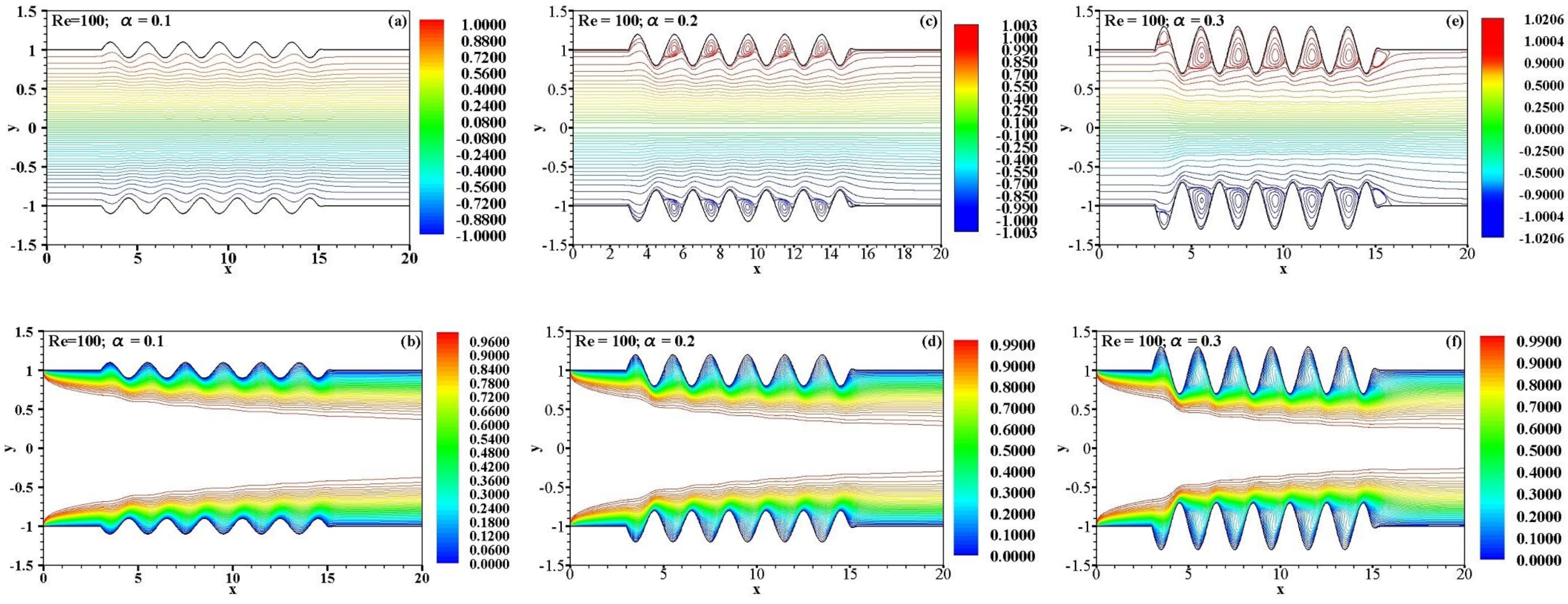


Figura 4.13 - Linhas de corrente e isotermas para: Re = 100; Pr = 6,93; para: (a) linhas de corrente para α = 0,1 e (b) isotermas para α = 0,1; (c) linhas de corrente para α = 0,2 e (d) isotermas para α = 0,2; (e) linhas de corrente para α = 0,3 e (f) isotermas α = 0,3.

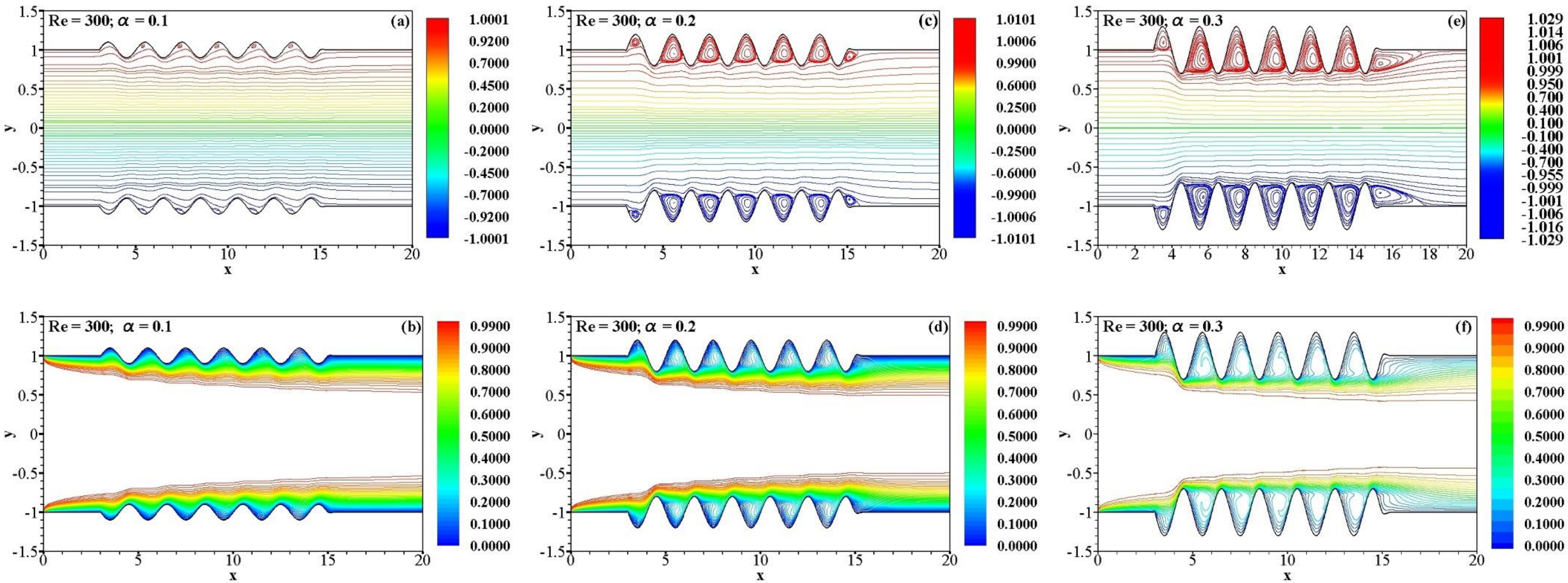


Figura 4.14 - Linhas de corrente e isotermas para: Re = 300; Pr = 6,93; para: (a) linhas de corrente para α = 0,1 e (b) isotermas para α = 0,1; (c) linhas de corrente para α = 0,2 e (d) isotermas para α = 0,2; (e) linhas de corrente para α = 0,3 e (f) isotermas α = 0,3.

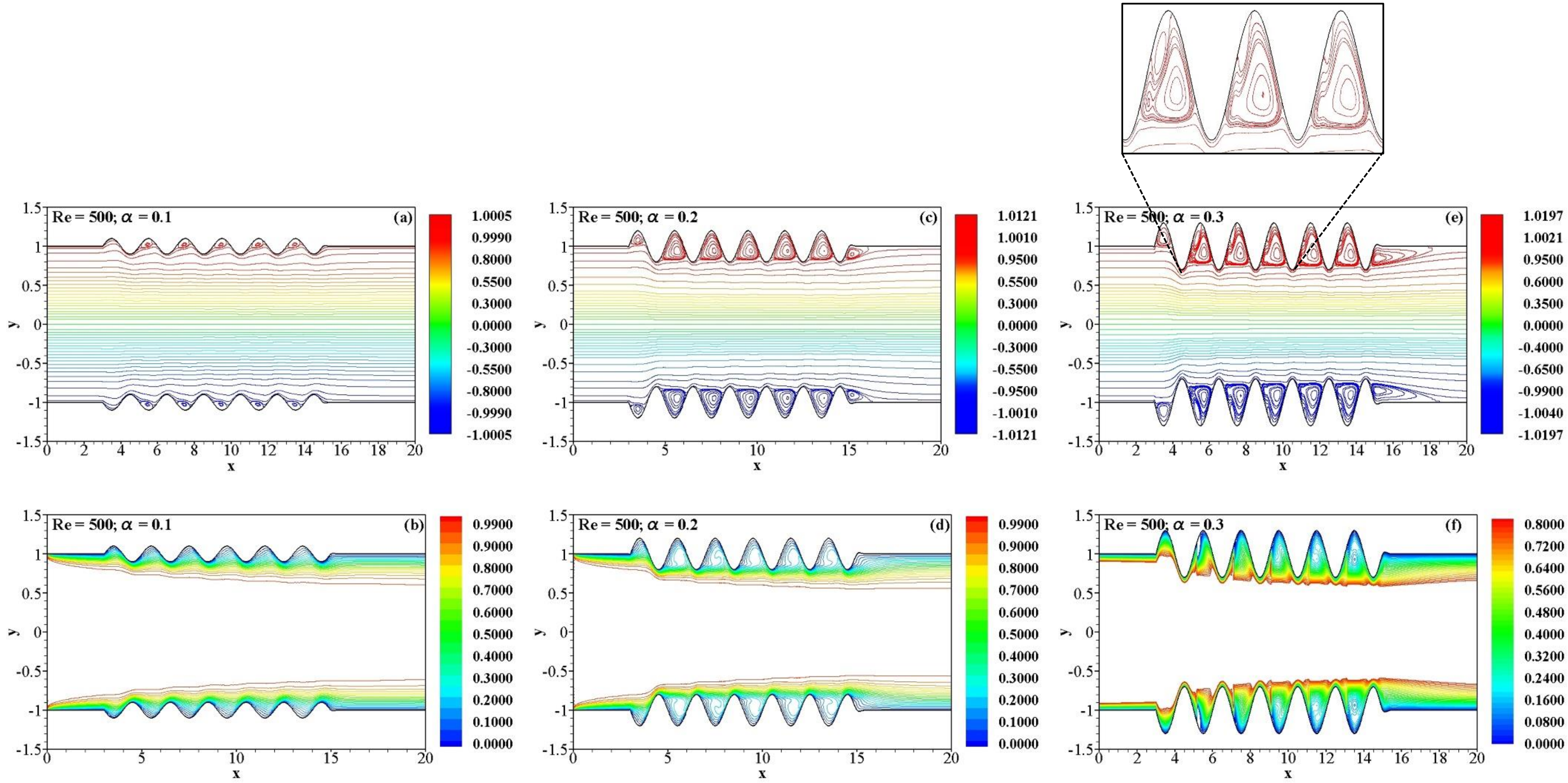


Figura 4.15 - Linhas de corrente e isotermas para: *Re* = 500; *Pr* = 6,93; para: (a) linhas de corrente para $\alpha = 0{,}1$ e (b) isotermas para $\alpha = 0{,}1$; (c) linhas de corrente para $\alpha = 0{,}2$ e (d) isotermas para $\alpha = 0{,}2$; (e) linhas de corrente para $\alpha = 0{,}3$ e (f) isotermas $\alpha = 0{,}3$.

À medida que o número de Reynolds aumenta, para o mesmo parâmetro geométrico, as isotermas se aproximam das paredes e penetram no escoamento (Figuras 4.13-15), o que indica que o fluido quente é esfriando pela temperatura da parede. Como resultado, a transferência de calor é aumentada, como demonstrado pelo aumento do número de Nusselt (Fig. 4.6d, 7d). Também é possível observar a partir das isotermas (Fig. 4.13-15), que o aumento do parâmetro geométrico, é seguido pela penetração mais profunda das isolinhas na região dos módulos que aumentam a transferência de calor.

Como pode ser observado nas Fig. (4.13-15), por meio das linhas de corrente, a recirculação do escoamento devido a modificação da geometria ou pelo aumento de número de Reynolds, enclausura as partículas de fluido dentro das concavidades o que permite uma troca mais intensa de calor entre a parede e o fluido central do canal uma vez que as partículas enclausuradas, devido a recirculação, trocam constantemente calor com a parede e com o centro do sistema. Esse comportamento eleva a transferência de calor, o que pode ser observado pela penetração das isotermas dentro da concavidades (Figs. (4.14-15))

4.8 AVALIAÇÃO DOS VALORES MÉDIOS DO PRODUTO DO FATOR DE ATRITO PELO NÚMERO DE REYNOLDS E DO NÚMERO DE NUSSELT

O aumento da transferência de calor é agora avaliado pelo cálculo do número de Nusselt médio ao longo do escoamento. A Figura 4.16 mostra o comportamento do valor do número de Nusselt médio ao longo do canal em comparação com o canal de placas planas.

Como pode ser observado na Figura 4.16 o aumento da amplitude do canal para o número de Reynolds mais baixo simulado, Re = 100, diminui o valor do número de Nusselt médio ao longo do escoamento, o que significa que para números de Reynolds baixos, o transporte difusivo de calor é elevado em relação ao transporte convectivo pelo aumento do impedimento do escoamento devido a mudança de geometria. Além disso, a introdução da geometria irregular diminui o valor de Nu_{av} o que significa que a modificação do canal diminui a transferência de calor.

Para Re = 300, o aumento da amplitude do canal, ao contrário do caso em que Re = 100, é seguido pelo aumento do número de Nusselt médio e, consequentemente, pelo aumento do transporte convectivo de calor. A comparação com o canal de paredes planas também mostra que a transferência de calor não é efetiva, porém para o caso em que α = 0,3 existem zonas onde o número de Nussel médio é elevado.

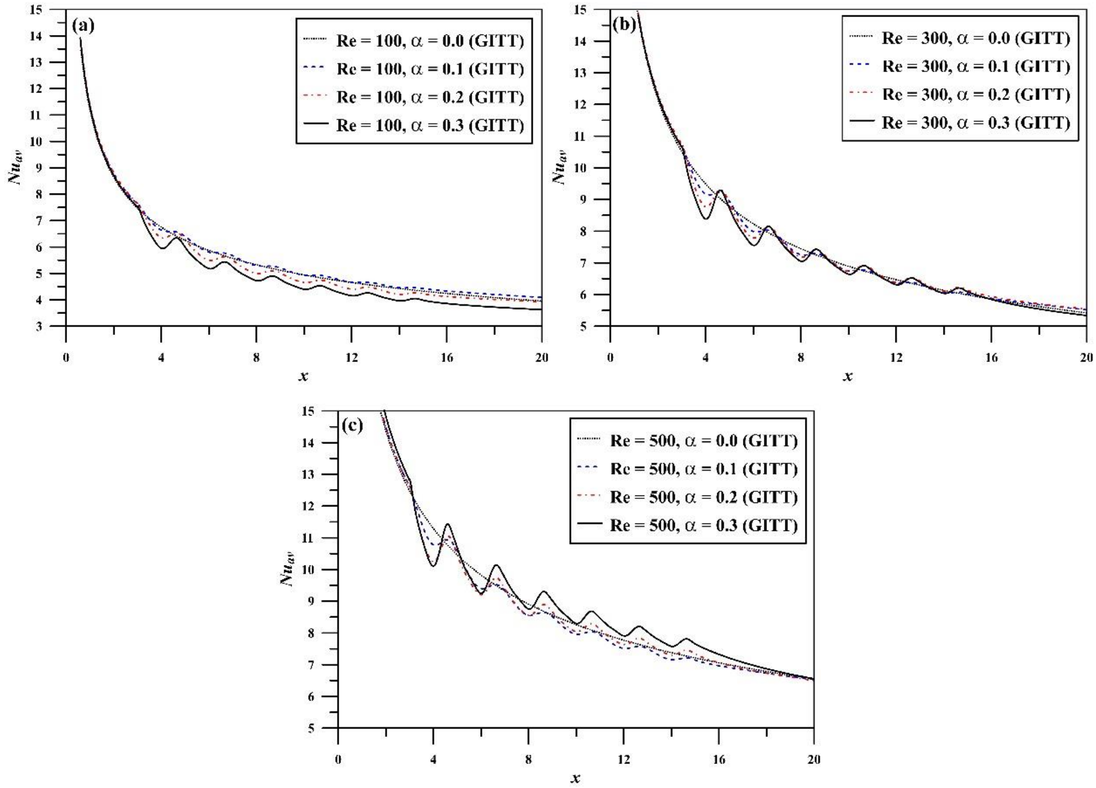


Figura 4.16 - Comparação do número de Nusselt médio em relação ao canal de placas planas para vários valores de α (0,0, 0,1, 0,2 e 0,3) para: (a) Re = 100, (b) Re = 300, (c) Re = 500.

O caso Re = 500 e α = 0,3 é o único dos casos estudados no qual a transferência de calor é aumentada em relação ao canal de placas planas. Como pode ser observado a transferência de calor é elevada ao longo de todo o canal se comparado ao canal de placas planas. O aumento do número de Reynolds, seguido pelo aumento da amplitude do canal, eleva o transporte convectivo e consequentemente a transferência de calor.

Adicionalmente, vale ressaltar o cálculo do valor médio do atrito gerado pela adição das ondulações do canal. O valor do produto fRe ao longo ao escoamento é aumentado na região mais estreita do canal, pelo aumento da velocidade, e diminuído nas regiões onde existem as concavidades. Ao se aumentar o valor da amplitude de α = 0,1 a 0,3, como pode ser observado na Figura 4.17, o valor do produto fRe médio ao longo do canal é sempre diminuído no caso em que Re = 100 (Figura 4.17a).

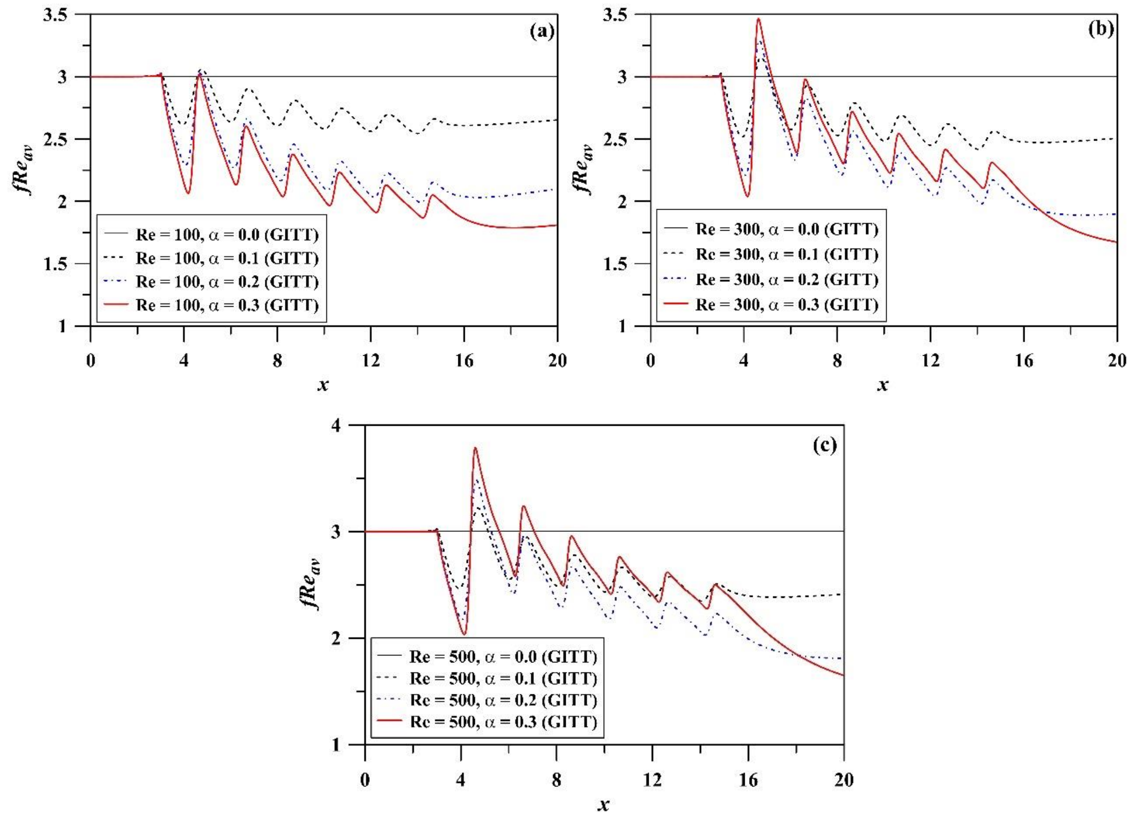


Figura 4.17 - Comparação de fRe médio em relação ao canal de placas planas para vários valores de α (0,0, 0,1, 0,2 e 0,3) para: (a) Re = 100, (b) Re = 300, (c) Re = 500.

Para Re = 300 e α = 0,3 (Figura 4.17b) o valor de fRe_{av}, a partir de x = 5, é maior que o valor considerando α = 0,2. A configuração considerando α = 0,3 aumenta consideravelmente o valor da velocidade na parte mais estreita do canal (Figura 4.12a) aumentando consequentemente o valor do produto fRe. Este comportamento é intensificado quando Re = 500 e α = 0,3 (Figura 4.17c), na qual o valor para α = 0,3 é maior ao longo do escoamento do que as outras configurações.

A Tabela 4.9 mostra os valores dos números de Nusselt médio e do produto fRe médio em x = 20. Como pode ser observado, o aumento de amplitude reduz os valores de número de Nu_{av}, excerto pelo caso em Re = 500 no qual o Nu_{av} é levemente elevado, e do produto fRe. O aumento do número de Reynolds

Tabela 4.9: Valores do produto fRe_{av} e de Nuav para os casos estudados.

Re	α	fRe_{av}	Nu_{av}
100	0.0	3.0000	4.4226
100	0.1	2.6521	4.0911
100	0.2	2.1011	3.9252
100	0.3	1.8095	3.6255

300	0.0	3.0000	5.5600
300	0.1	2.5055	5.5160
300	0.2	1.8996	5.5403
300	0.3	1.6725	5.3366
500	0.0	3.0000	6.8056
500	0.1	2.4109	6.5399
500	0.2	1.8086	6.5008
500	0.3	1.6470	6.5516

CAPÍTULO 5

ESTUDO DA INFLUÊNCIA DA GEOMETRIA NA GERAÇÃO DE ENTROPIA EM CANAIS CORRUGADOS

5.1 ANÁLISE DE GERAÇÃO DE ENTROPIA

A segunda lei da termodinâmica afirma que a operação de sistemas reais é inevitavelmente caracterizada por uma perda de trabalho disponível. Isso causa uma diminuição da eficiência termodinâmica de um sistema em relação a um processo ideal equivalente (sem perdas). A aplicação da segunda lei em processos de engenharia pode ser utilizada na melhoria de sistemas que envolvem a transferência de calor e quantidade de movimento na busca da melhor eficiência de um processo minimizando a entropia gerada pelo sistema.

Segundo BEJAN (1979) existe uma proporcionalidade direta entre a irreversibilidade de um processo (geração de entropia) e a quantidade desprendida de trabalho para realizar o mesmo. Essa irreversibilidade, devido, por exemplo, a transferência de calor, leva a uma penalidade na quantidade de trabalho útil disponível.

O desenvolvimento de uma equação termodinâmica para a entropia utiliza a hipótese de não equilíbrio local a qual permite a formulação da segunda lei da termodinâmica e da taxa de geração de entropia em um sistema contínuo, sendo possível obter a formulação local da taxa de geração de entropia. De acordo com a termodinâmica fora do equilíbrio (PRIGONINE, 1955; DEMIREL, 2014), a segunda lei da termodinâmica pode ser expressa como:

$$\rho \frac{DS}{Dt^*} = -\nabla.\vec{\sigma} + S_g \tag{5.1}$$

na qual S é a entropia específica, σ o vetor fluxo de entropia e S_g a geração de entropia por unidade de volume. Segundo PRIGONINE (1955) a condição de reversibilidade de um processo, pode ser avaliado pelo termo de geração de entropia, $S_g = 0$ indica um processo reversível, enquanto que $S_g > 0$ indica um processo irreversível.

Aplicando as equações de Gibbs, os balanços de energia interna, massa e espécies químicas é possível demostrar que, para um sistema com múltiplas espécies com reação, a Eq. (5.1) (SCIACOVELLI *et al*, 2015) é modificada para:

$$\rho\frac{Ds}{Dt^*} = -\nabla.\left(\frac{q}{T^*} - \frac{1}{T^*}\sum_i \mu_i \vec{J}_i\right) - \frac{1}{T^{*2}}\left(q.\nabla T^*\right) - \frac{1}{T^*}\left(\tau : \nabla\vec{u}\right) + \\ + \frac{1}{T^*}\sum_i \vec{J}_i \cdot \vec{F}_i - \sum_i \nabla\left(\frac{\overline{\mu}_i}{T^*}\right)\cdot\vec{J}_i - \frac{1}{T^*}\sum_i \overline{\mu}_i r_i \tag{5.2}$$

em que μ_i é o potencial químico, $\vec{u}$ é o vetor velocidade, τ o tensor tensão, $\vec{J_i}$ o fluxo difusivo de massa, $\vec{F_i}$ as forças de corpo por unidade de massa e r_i o termo fonte devido a reação.

Comparando as Eqs. (5.1, 5.2), resulta em dois termos que descrevem o fluxo de entropia (Eq. (5.3)) e a geração de entropia (Eq. (5.5)):

$$\sigma = \frac{q}{T^*} - \frac{1}{T^*}\sum_i \overline{\mu}_i \vec{J}_i \tag{5.3}$$

$$S_g = -\frac{1}{T^{*2}}\left(q.\nabla T^*\right) - \frac{1}{T^*}\left(\tau : \nabla\vec{u}\right) + \frac{1}{T^*}\sum_i \vec{J}_i \cdot \vec{F}_i - \sum_i \nabla\left(\frac{\overline{\mu}_i}{T^*}\right)\cdot\vec{J}_i - \frac{1}{T^*}\sum_i \overline{\mu}_i r_i \tag{5.4}$$

A Eq. (5.4) é subdividida em quatro contribuições relacionadas a transferência de calor (S_h), a dissipação viscosa (S_μ), a transferência de massa (S_m) e a reação química (S_r):

$$S_g = S_h + S_\mu + S_m + S_r \tag{5.5a}$$

em que:

$$S_h = -\frac{1}{T^*}\left(q.\nabla T^*\right) \tag{5.5b}$$

$$S_\mu = -\frac{1}{T^*}\left(\tau : \nabla\vec{u}\right) \tag{5.5c}$$

$$S_m = +\frac{1}{T^*}\sum_i \vec{J}_i \cdot \vec{F}_i - \sum_i \nabla\left(\frac{\overline{\mu}_i}{T^*}\right)\cdot\vec{J}_i \tag{5.5d}$$

$$S_r = -\frac{1}{T^*}\sum_i \bar{\mu}_i r_i \tag{5.5e}$$

A geração de entropia global, S_g, em um sistema é associada à irreversibilidade termodinâmica devido os componentes individuais (por exemplo, trocadores de calor e turbo máquinas). A produção de entropia em cada componente de um processo químico industrial decorre de suas partes elementares (aletas, pás, paredes e outros). Os fenômenos de transporte local são responsáveis pela produção de entropia local a nível diferencial e por meio da Eq. (5.5a) é possível quantificar a produção global de entropia e a investigar como a geração de entropia é distribuída localmente por todo o sistema ao avaliar a taxa de geração de entropia local S_g em cada ponto do domínio de interesse.

Ao adotar essa abordagem, é possível detectar os fenômenos físicos correspondentes (transferência de calor, atrito por fluido) que são os principais responsáveis pela irreversibilidade termodinâmica, e facilitar a identificação de possíveis melhorias no sistema ou a seleção de um conjunto mais adequado de parâmetros de projeto que minimizem a taxa de geração de entropia.

A escolha de um projeto ótimo pode ser iniciada pela seleção de possíveis parâmetros de projeto com base na distribuição local da taxa de geração de entropia. Em seguida, um conjunto de possíveis projetos é avaliado a posteriori e aquele que obtém o melhor desempenho, dadas as restrições, é identificado. O sucesso dessa abordagem depende claramente das modificações dos parâmetros de projeto propostos, e isso implica que projetos sub-ótimos possam ser encontrados.

A análise de entropia para a otimização de um projeto já foi demostrada em vários casos e condições de operação. Vários estudos na geração de entropia em sistemas que envolvem a transferência de calor e escoamento de líquidos estão disponíveis na literatura. A geração de entropia local foi estudada para diferentes configurações de dutos, incluindo dutos retangulares, dutos curvos, dutos com restrições, dutos com secção transversal em forma de seno (YILBAS, *et al*., 1999; NARUWASA, U., 2001; KO, TH. 2006). Outras investigações sobre as irreversibilidades na transferência de calor, incluem sistemas de convecção natural e cavidades cilíndricas, resumidos no artigo de VAROL *et al*. (2008).

Em relação a aplicação em canais simétricos com geometria irregular, AKBARZADEH *et al.* (2017) avaliaram diferentes geometrias (senoidal, trapezoidal e triangular) e foi verificado que dentre os canais analisados o canal triangular fornece a maior geração de entropia térmica e o menor número de Nusselt local, enquanto que o canal trapezoidal tem a maior queda de pressão, e a entropia viscosa foi acumulada principalmente ao longo no canal ondulado.

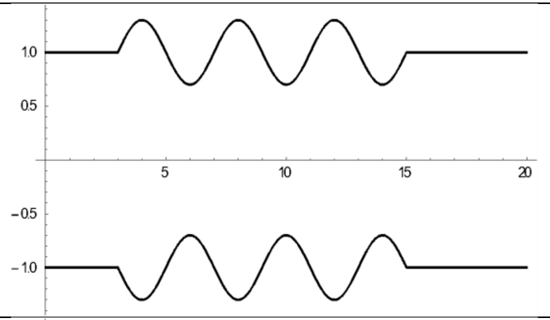
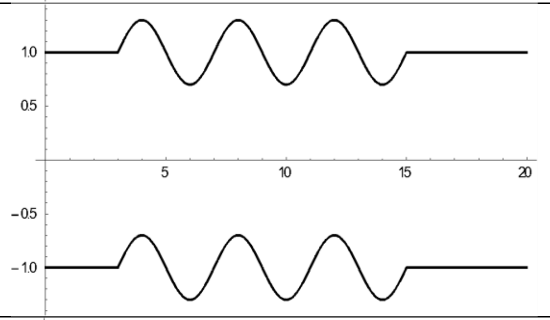
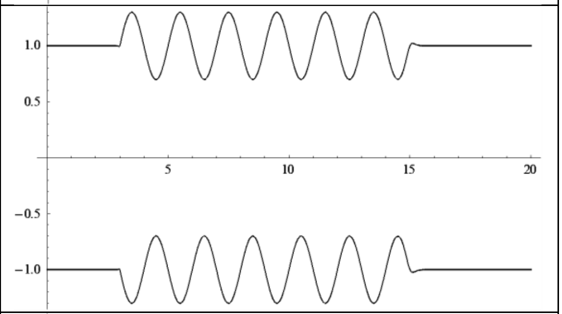
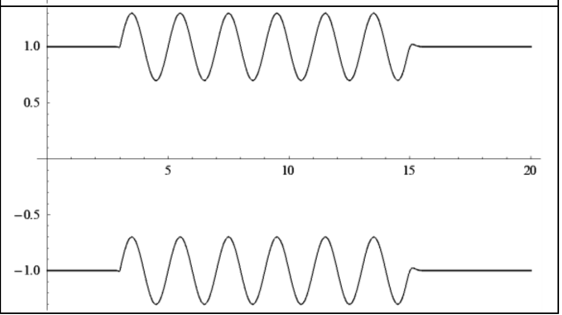
Nos sistemas magnetohidrodinâmicos (MHD), um termo adicional na taxa de geração de entropia local deve ser adicionado, o qual é responsável pela produção de entropia devido ao efeito Joule associado ao fluido eletricamente condutor (RASHIDI *et al.*, 2013). Alguns estudos de sistemas MHD envolvem a análise da geração de entropia em microcanais (IBANEZ e CUEVAS, 2010) e escoamento anular em cilindros rotativos (MAHIAN *et al*., 2012). A minimização da geração de entropia foi adotada por Rashidi *et al.* (2013) para otimizar o fluxo MHD sobre um disco rotativo. Os pesquisadores aplicaram um trabalho de rede neural artificial e um algoritmo de enxame de partículas para minimizar a irreversibilidade termodinâmica global do sistema.

Atualmente a análise da geração de entropia em dutos com geometria irregular é aplicada principalmente em escoamentos MHD de nanofluidos. O nanofluido composto por Al_2O_3 – água foi estudado por MAYELI *et al.* (2017) e SALAMI *et al.* (2019), em geometrias triangular, trapezoidal e sinusoidal. Nesses estudos, foi verificado que a configuração trapezoidal proporciona os maiores valores do número de Nusselt. Além disso, os resultados mostram que os canais com menor deslocamento de fase apresentam melhores desempenhos térmico. O nanofluido composto por cobre-água foi estudado por DORMOHAMMADI *et al*. (2018) utilizando a abordagem de minimização da geração de entropia para otimizar a transferência de calor e o escoamento em um canal ondulado. Neste estudo foi verificado que a geração de entropia devido a transferência de calor é reduzida pelo aumentando a da amplitude de onda em um número de onda fixo.

5.2 GEOMETRIAS ANALISADAS

Para o estudo da geração de entropia em diferentes configurações geométricas, foram estudadas as geometrias apresentas na Tabela 5.1:

Tabela 5. 1 - Equações e formas dos dutos para o estudo da geração de entropia para α = 0.3.

Equações das Paredes	Fase	Forma
$y_2(x) = 1 + \alpha sen\left[\frac{\pi}{2}(x - x_s)\right]$ $y_1(x) = 1 + \alpha sen\left[\frac{\pi}{2}(x - x_s)\right]$	0	
$y_2(x) = 1 + \alpha sen\left[\frac{\pi}{2}(x - x_s)\right]$ $y_1(x) = 1 + \alpha sen\left[\frac{\pi}{2}(x - x_s) + \pi\right]$	180°	
$y_2(x) = 1 + \alpha sen\left[\pi(x - x_s)\right]$ $y_1(x) = 1 + \alpha sen\left[\pi(x - x_s)\right]$	0	
$y_2(x) = 1 + \alpha sen\left[\pi(x - x_s)\right]$ $y_1(x) = 1 + \alpha sen\left[\pi(x - x_s) + \pi\right]$	180°	

Como pode ser observado na Tabela 5.1, além do número de ondulações, nesse estudo, também foi realizada a mudança de fase entre as equações superior em inferior com a intenção de demonstrar a diferença destas configurações tanto na transferência de calor, quanto na geração de entropia.

A Eq. (5.4) ser aplicada para escoamentos com transferência de calor, sem transferência de massa e sem reação química de acordo com BEJAN (1982), BIRD *et al*. (2002) e DEMIREL (2014) como:

$$\rho\frac{\partial s^*}{\partial t^*}=-\left(\nabla.\rho s^*\overrightarrow{u^*}\right)-\left(\nabla.\frac{q}{T^*}\right)-\frac{1}{T^{*2}}\left(q.\nabla T^*\right)-\frac{1}{T^*}\left(\tau:\nabla\overrightarrow{u^*}\right) \tag{5.6}$$

na qual os dois primeiros termos do lado direito da Eq. (5.6) representam a conservação do fluxo entrópico do sistema.

Para a análise de geração de entropia, somente os termos que contribuem para a geração local de entropia são analisados (SCIACOVELLI *et al*, 2015). Os últimos dois termos do lado direito da Eq. (5.6) representam a geração de entropia do escoamento devido a transferência de calor e dissipação viscosa ao longo do escoamento, respectivamente. Para um fluido Newtoniano que obedece a lei de Fourier em um escoamento bidimensional incompressível, a geração de entropia pode ser, então, calculada separadamente de acordo como (AKBARZADEH *et al.,* 2017, AMIRAHMADI *et al*., 2016; BASHI *et al*., 2017):

$$S_{g,therm}^{'''}=\frac{k}{T^{*2}}\left[\left(\frac{\partial T^*}{\partial x^*}\right)^2+\left(\frac{\partial T^*}{\partial y^*}\right)^2\right] \tag{5.7a}$$

$$S_{g,\mathrm{visc}}^{'''}=\frac{\mu}{T^*}\left\{2\left[\left(\frac{\partial u^*}{\partial x^*}\right)^2+\left(\frac{\partial v^*}{\partial y^*}\right)^2\right]+\left[\left(\frac{\partial u^*}{\partial y^*}\right)+\left(\frac{\partial v^*}{\partial x^*}\right)\right]^2\right\} \tag{5.7b}$$

na qual $S_{g,therm}'''$ representa a entropia gerada pelo transporte de energia e $S_{g,visc}'''$ a entropia relativa ao escomento viscoso. Em termos adimensionais as quantidades podem ser representadas por (AMIRAHMADI et al., 2016; BASHI et al., 2017):

$$N_{g,thermal}=\frac{S_{g,therm}^{'''}b^2}{k} \tag{5.8a}$$

$$N_{g,\mathrm{visc}}=\frac{S_{g,visc}^{'''}b^2}{k} \tag{5.8b}$$

Aplicando os grupos adimensionais definidos pelas Eqs. (3.2a-p) e substituindo nas Eq. (5.4):

$$N_{g,thermal} = \frac{1}{\left(T + \frac{T_w}{T_0 - T_w}\right)^2} \left[\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)^2 \right] \tag{5.9a}$$

$$N_{g,\mathrm{visc}} = \frac{Br}{\left(T + \frac{T_w}{T_0 - T_w}\right)} \left\{ 2\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 \right] + \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) \right]^2 \right\} \tag{5.9b}$$

Na qual:

$$Br = \frac{\mu . u_{av}^2}{k\left(T_0 - T_w\right)} \tag{5.10}$$

Nas Eqs. (5.9) há a formação de dois novos grupos adimensionais. O quociente entre T_w e $(T_0 - T_w)$ deve ser determinado para cada problema para se obter uma estimativa numérica da geração de entropia e Br (Eq. (5.10)) é o número de Brinkman o qual depende de várias condições do problema analisado em questão, tanto da transferência de calor (diferença entre as temperaturas de entrada do escoamento e das paredes), como do escoamento (viscosidade dinâmica do fluido).

Para um problema típico de resfriamento observando aplicações de micro canais de processadores, é possível considerar um fluido a 348,15K submetido ao canal com paredes mantidas a 318,15K (CASTELLÕES, 2010), o que leva ao valor do quociente $T_w/(T_0 - T_w) = 9{,}09$. Considerando a água como fluido de trabalho e um canal de dimensão b = 600µm, o número de Brinkman é igual a $1{,}1.10^{-6}$, $2{,}5.10^{-6}$, e $4{,}4.10^{-6}$ para Reynolds igual a 100, 150 e 200 respectivamente.

O número de Brinkman representa a razão entre o calor produzido pela dissipação viscosa e o calor transportado pela condução, e também pode ser representado pelo produto Pr.Ec, no qual Ec é o número de Eckert. Quanto maior o valor de Br, mais rápida é a condução do calor produzido pela dissipação viscosa e, portanto, maior o aumento da transferência de calor.

Na maioria dos problemas de engenharia Br << 1 o que justifica a desconsideração da dissipação viscosa na equação do balanço energético, porém para o cálculo da geração de entropia a contribuição viscosa deve ser considerada uma vez que a ordem de magnitude da contribuição viscosa pode ser da mesma ordem de magnitude da contribuição térmica (BEJAN, 1996).

A entropia gerada total é calculada pela soma das quantidades de entropia $N_{g,tot} = N_{g,visc} + N_{g,therm}$. Além disso, o valor da entropia média ao longo do escoamento (Sg_{av}) pode ser calculada pela integração da soma das entropias no eixo y:

$$Sg_{av} = \frac{\int_{-y_1(x)}^{y_2(x)} \left(N_{g,therm} + N_{g,\mathrm{visc}}\right) dy}{\int_{-y_1(x)}^{y_2(x)} dy} = \frac{1}{y_1(x) + y_2(x)} \int_{-y_1(x)}^{y_2(x)} \left(N_{g,therm} + N_{g,\mathrm{visc}}\right) dy \qquad (5.11)$$

A entropia média global ao longo do canal pode ser calculada pela integração da entropia média no eixo x:

$$Sg_{tot} = \frac{\int_0^{x_{out}} Sg_{av} dx}{\int_0^{x_{out}} dx} = \frac{1}{x_{out}} \int_0^{x_{out}} Sg_{av} dx \qquad (5.12)$$

A quantidade de geração de entropia total ($N_{g,tot}$) é boa para gerar perfil de entropia espacial, mas falha em fornecer uma ideia de qual fonte de entropia é a dominante. Sendo assim, uma forma de quantificar a dominância é, segundo BEJAN (1982), a taxa de distribuição de irreversibilidade, Φ, a qual é igual à razão da geração de entropia devido ao atrito do fluido ($N_{g,visc}$) pela transferência de calor ($N_{g,therm}$).

A irreversibilidade da transferência de calor domina a irreversibilidade do escoamento viscoso para $\Phi < 1$ e o escoamento viscoso domina quando $\Phi > 1$. Para $\Phi = 1$, tanto a transferência de calor quanto o escoamento viscoso têm a mesma contribuição para gerar entropia.

Adicionalmente, em muitos projetos de engenharia e problemas de otimização, é necessário o cálculo da contribuição da geração de entropia por transferência de calor ($N_{g,therm}$) pela taxa geral de geração de entropia ($N_{g,tot}$). Como parâmetro alternativo de distribuição da irreversibilidade, PAOLETTI *et al.* (1989) definem o número de Bejan (Be), o qual é a razão da geração de entropia devido à transferência de calor pela geração total de entropia. Matematicamente, o número de Bejan é definido como:

$$Be = \frac{N_{g,therm}}{N_{g,tot}} = \frac{1}{1+\Phi} \tag{5.13}$$

O número de Bejan varia de 0 a 1. Consequentemente, Be = 1 é o limite no qual a irreversibilidade da transferência de calor é dominante, Be = 0 é o limite oposto no qual a irreversibilidade é dominada pelos efeitos viscosos e Be = 1/2 é o caso em que as taxas de geração de transferência de calor e de entropia pelo escoamento viscoso são iguais.

5.2 ANÁLISE DA INFLUÊNCIA DOS PARÂMETROS NA TRANSFERÊNCIA DE CALOR

A análise da influência dos parâmetros: número de Reynolds, amplitude do canal, número de comprimentos de onda e defasagem entre as paredes será avaliado de acordo com os campos de velocidade, função corrente, temperatura a fim de demonstrar a influência, principalmente da geometria do canal, na quantidade de calor trocada. Os valores do número de Nusselt e produto fRe foram calculados em $y = y_2$ para melhor comparação com os casos sem defasagem.

5.2.1 Efeito da quantidade de comprimentos de onda na transferência de calor

Para demostrar a influência da quantidade de comprimentos de ondas na transferência de calor, foram considerados dutos com três e seis comprimentos de ondas, com e sem defasem de fase, considerando Re = 100 e 200 e amplitude de 0,2. Os resultados obtidos podem ser verificados nas Figuras 5.1 e 5.2.

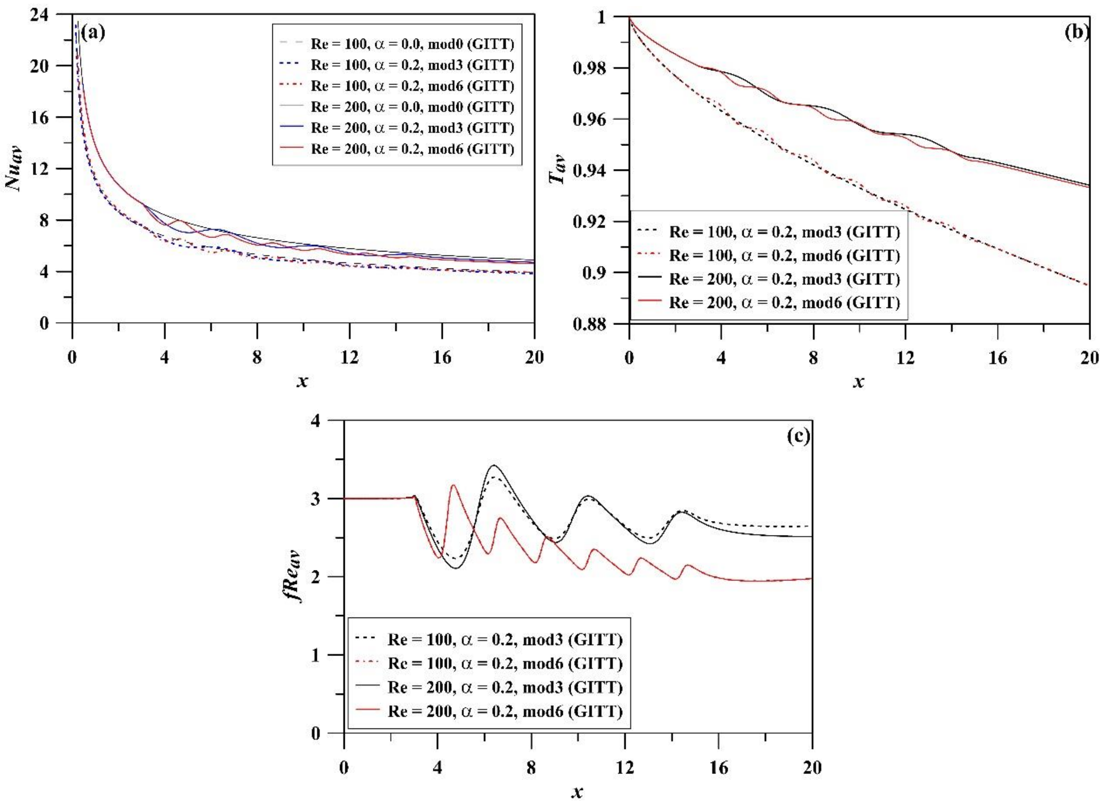


Figura 5.1 - Valores médios para um duto com ângulo de fase 0°, com 3 e 6 comprimentos de onda, Re = 100 e 200 e α = 0.2: (a) número de Nusselt; (b) temperatura e (c) do produto fRe.

A Figura 5.1 representa a variação do número de Nusselt médio e da temperatura média ao longo do canal para um duto com fase igual a 0° e amplitude 0,2. É possível observar que tanto Nu_{av} quanto T_{av} não são fortemente influenciados pela quantidade de comprimentos de ondas no canal. Além disso, até Re = 200, o valor de Nu_{av} não é elevado ao se comparar com o canal de placas planas como pode ser observado na Figura 5.1a. A temperatura média (Figura 5.1b) é levemente elevada quando se considera o duto com 3 comprimentos de onda ao se comparar com o duto de 6 comprimentos de ondas para Re = 200, para Re = 100 o comportamento é oposto demostrando que quanto maior o número de Reynolds, a transferência de calor é levemente elevada (diminuindo a temperatura média do canal) quando se considera o duto com 6 comprimentos de onda sem diferença de fase entre as equações características das paredes.

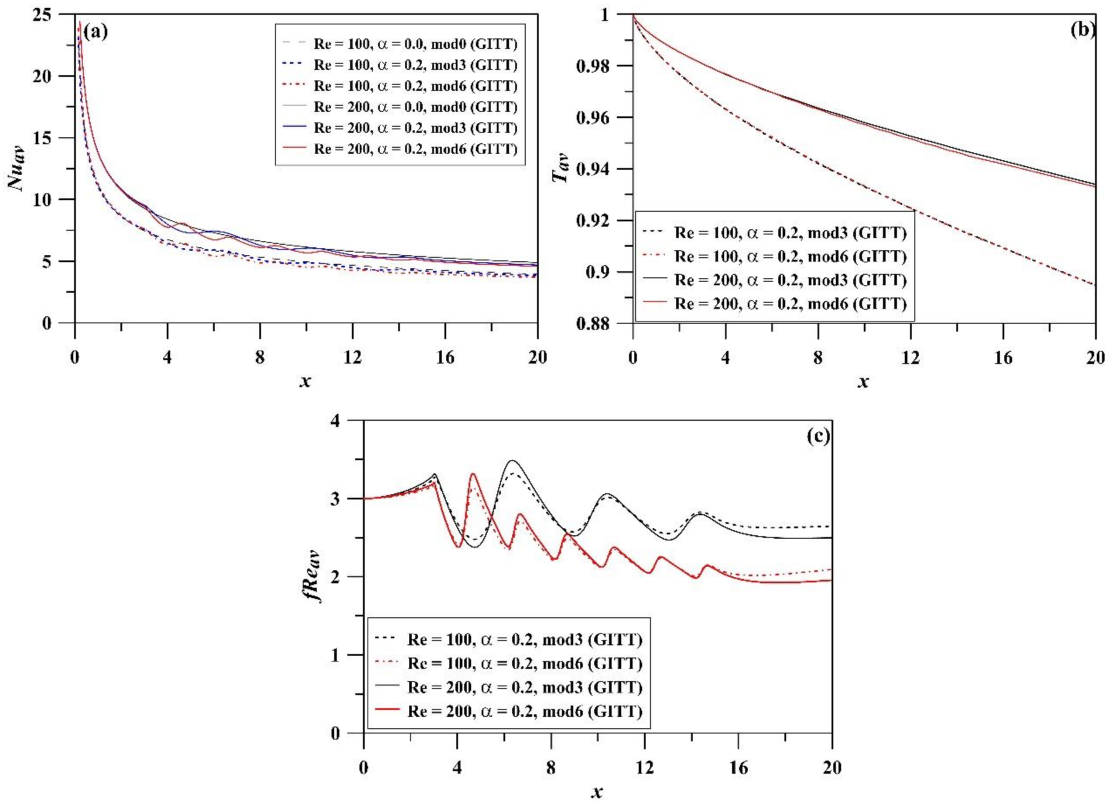


Figura 5.2 - Valores médios para um duto com ângulo de fase 180°, para 3 e 6 comprimentos de onda, Re = 100 e 200 e α = 0.2: (a) número de Nusselt; (b) temperatura e (c) produto fRe.

A Figura 5.2 representa a variação do número de Nusselt médio e da temperatura média ao longo do canal para um duto com fase igual a 180 graus e amplitude 0,2. É possível, assim como na Figura 5.1, observar que tanto Nu_{av} quanto T_{av} não são fortemente influenciados pela quantidade de comprimentos de ondas no canal. Comparando as Figuras 5.1b e 5.2b, pode ser notado que a temperatura média oscila menos ao longo do canal para o caso no qual existe a fase de 180 graus entre as equações características, além disso a temperatura média é levemente inferior no caso de 6 comprimentos de onda. O número de Nusselt médio, assim como na Figura 5.2, não é superior ao Nu_{av} de um canal de placas planas.

5.2.2 Variação da fase de onda na transferência de calor

Para demostrar a influência do ângulo de fase entre as paredes na transferência de calor, foram considerados dutos com 0° e 180 graus de defasagem entre as equações caraterísticas das paredes, para 3 e 6 comprimentos de ondas, considerando Re = 200 e amplitudes de 0,1 e 0,2. Os resultados obtidos foram calculados na parede superior e podem ser verificados nas Figuras 5.3 e 5.4.

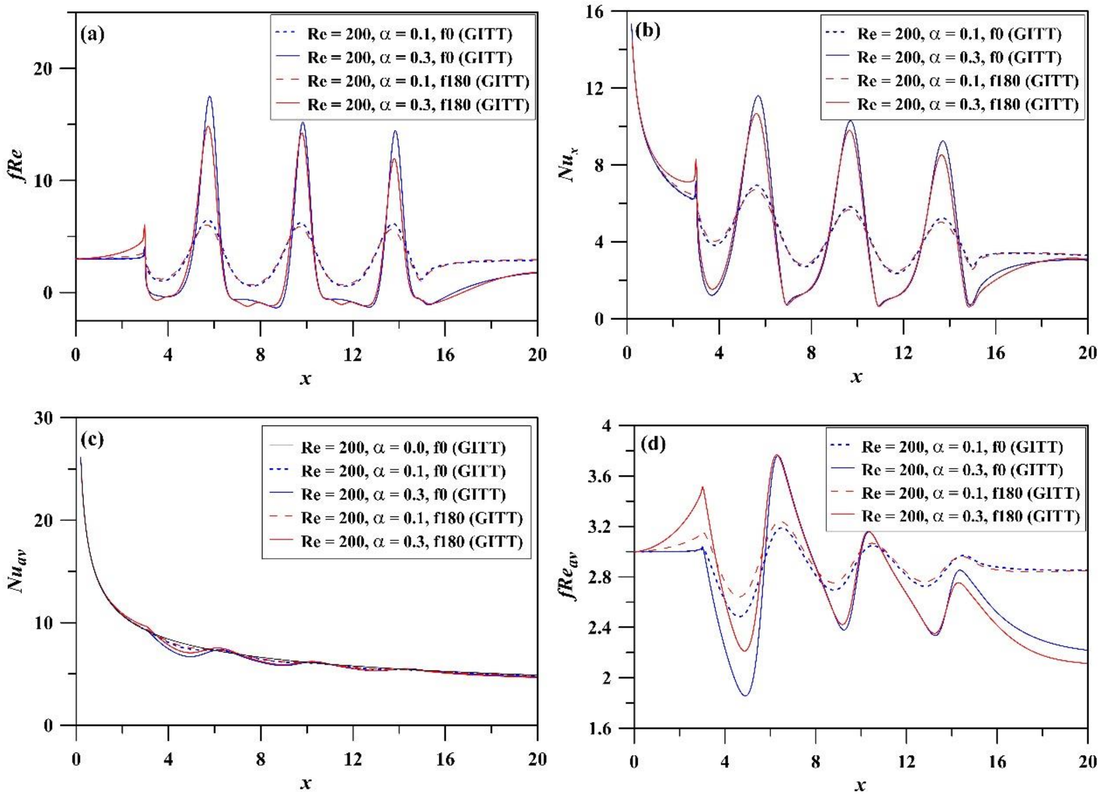


Figura 5.3 - Resultados para dutos com ângulo de fase 0° e 180° e 3 comprimentos de onda, Re = 200 e α = 0,1 e 0,3: (a) produto fRe; (b) número de Nusselt local, (c) número de Nusselt médio e (d) produto fRe médio.

A Figura 5.3 mostra a variação do produto fRe, do número de Nusselt médio e do número de Nusselt local para um duto com ângulo de fase 0° e 180° para 3 comprimentos de onda, Re = 200 e α = 0,1 e 0,3. Como pode ser observado, a mudança de fase de 0° para 180° diminui o produto fRe (Figura 5.3a), assim como a amplitude no número de Nusselt local (Figura 5.3b), porém como pode ser observado na Figura 5.3c a transferência de calor convectiva é levemente elevada caracterizado pelo aumento de Nu_{av}. Este comportamento pode ser explicado pois o duto com 180° de fase apresenta menos resistência ao escoamento gerando valores menos intensos para o produto fRe e facilitando a transferência de calor. O aumento na amplitude do canal, assim como no caso do duto em fase, diminui a transferência de calor por convecção (Figura 5.3c) ao gerar mais impedimento ao escoamento do canal (Figura 5.3a), o qual não é superado pelo aumento de Re até 200. O produto fRe médio é fortemente influenciado pela amplitude das ondas do canal, para a amplitude 0.3 a variação do produto fRe médio é elevado, o que leva a pontos mais intensos de máximos e mínimos, porém para o caso de 3 comprimentos de onda, no início do canal ondulado, o produto fRe médio, apesar de diminuir consideravelmente, é elevado a valores acima dos valores para α = 0,1 (Figura 5.3d).

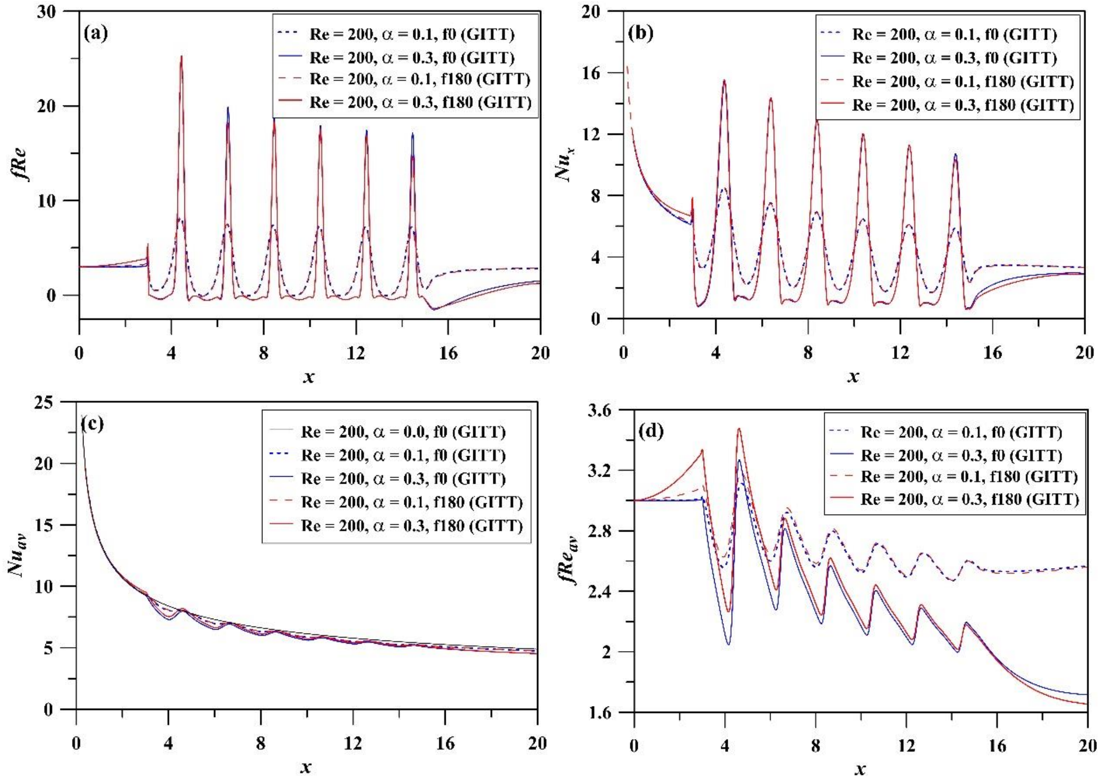


Figura 5.4 – Resultados para dutos com ângulo de fase 0° e 180° e 6 comprimentos de onda, Re = 200 e α = 0,1 e 0,3: (a) produto fRe; (b) número de Nusselt local, (c) número de Nusselt médio e (d) produto fRe médio.

A Figura 5.4 mostra a variação do produto fRe, do número de Nusselt médio e do número de Nusselt local para um duto com ângulo de fase 0° e 180° e 6 comprimentos de onda, Re = 200 e α = 0,1 e 0,3. Na Figura 5.4, pode ser observado que a mudança de fase de 0° para 180° praticamente não modifica os perfis do produto fRe (Figura 5.4a), e da amplitude no número de Nusselt local (Figura 5.4b). A principal diferença se encontra na última concavidade a qual é influenciada pela geometria na saída do canal. Além disso, como pode ser observado na Figura 5.4c a transferência de calor convectiva é levemente elevada caracterizada pelo aumento de Nu_{av}. O aumento do número de concavidades torna o escoamento do duto em fase e fora de fase com características de escoamento e transferência de calor praticamente iguais. A variação na amplitude do canal, assim como no caso do duto em fase, diminui a transferência de calor por convecção (Figura 5.4c) ao gerar mais impedimento ao escoamento do canal (Figura 5.4a) o qual não é superado pelo aumento de Re até 200. O produto fRe médio é fortemente influenciado pela amplitude das ondas do canal, para a amplitude 0.3 a variação do produto fRe médio é elevado, o que leva a pontos mais intensos de máximos e mínimos, porém para o caso de 6 comprimentos de onda, apesar do valor ser elevado acima do valor de $\alpha = 0,1$, após $x = 5$, o valor diminuiu consideravelmente gerando menor resistência ao escoamento (Figura 5.4d).

5.2.3 Influência do número de Reynolds na transferência de calor para canais com ângulo de fase 180°

Para demostrar a influência do número de Reynolds na transferência de calor em dutos com ângulo de fase de 180°, foram considerados 3 e 6 comprimentos de ondas, amplitude igual a 0,2 e Re = 100, 150 e 200. Os resultados obtidos para o produto fRe e número de Nusselt local foram calculados na parede superior e podem ser verificados nas Figuras 5.5 e 5.6.

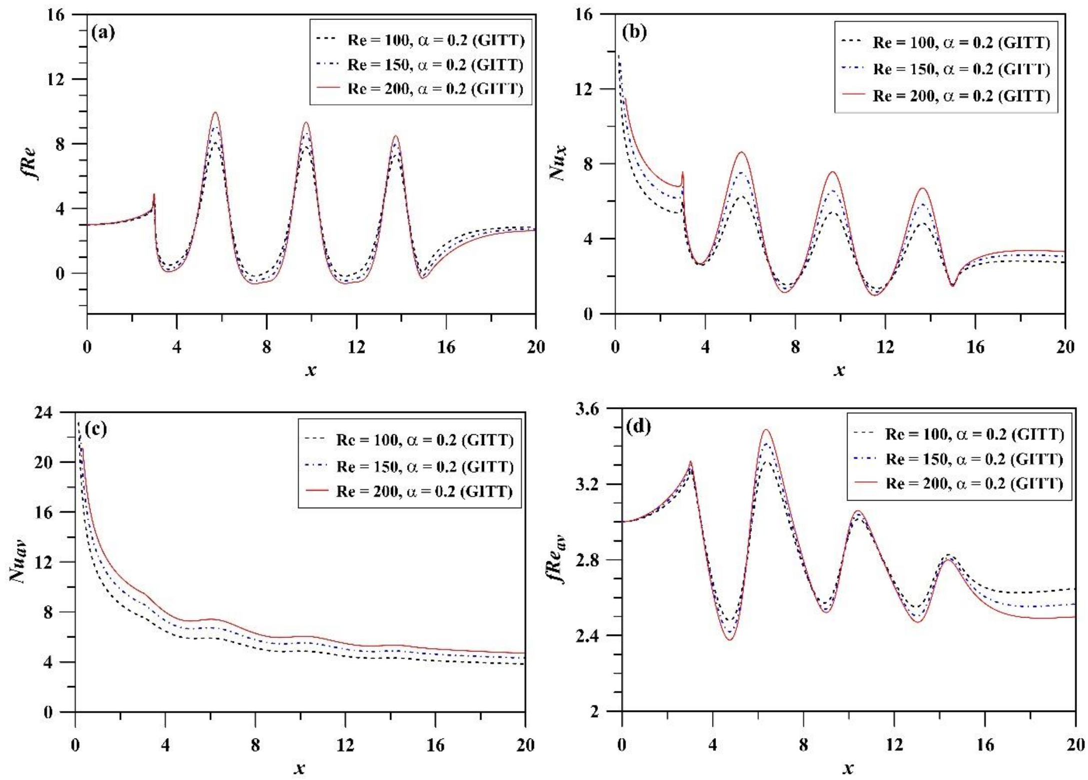


Figura 5.5 - Resultado para dutos com ângulo de fase 180° e 3 comprimentos de onda, α = 0,2 e Re = 100, 150, 200: (a) produto fRe; (b) número de Nusselt local, (c) número de Nusselt médio e (d) produto fRe médio.

De acordo com a Figura 5.5, assim como no caso para 6 comprimentos de onda e fase 0, o aumento do número de Reynolds eleva consequentemente a transferência de calor por convecção, verificado pelo aumento de Nu_{av} (Figura 5.5c), elevando também os gradientes de velocidades nas concavidade e o produto fRe ao longo do canal (Figura 5.5a) assim como o produto fRe médio (Figura 5.5d)

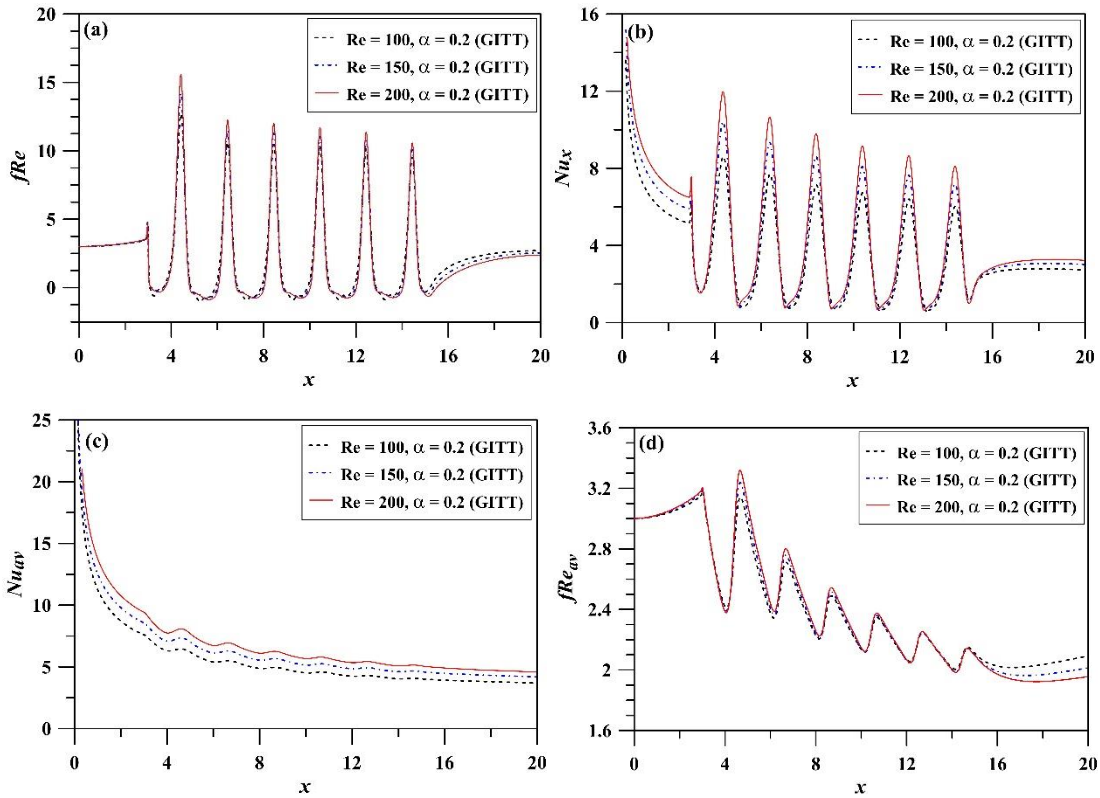


Figura 5.6 - Resultados para dutos com ângulo de fase 180° e 6 comprimentos de onda, α = 0,2 e Re = 100, 150, 200: (a) produto fRe; (b) número de Nusselt local, (c) número de Nusselt médio e (d) produto fRe médio.

De acordo com a Figura 5.6, assim como no caso para 6 comprimentos de onda e fase 0°, o aumento do número de Reynolds eleva consequentemente a transferência de calor por convecção verificado pelo aumento de Nu_{av} (Figura 5.6c), elevando também os gradientes de velocidades nas concavidades elevando levemente no produto fRe ao longo do canal (Figura 5.6a), o que pode ser comprovado na Figura 5.6a, em que a diferença principal do valor do produto fRe médio é após a região onde existe a geometria corrugada.

5.2.4 Influência da amplitude do canal na transferência de calor para canais com ângulo de fase 180°

Para demostrar a influência da amplitude do na transferência de calor em dutos com ângulo de fase de 180°, foram considerados 3 e 6 comprimentos de ondas, Re = 150 e amplitude do canal igual a 0,1, 0,2 e 0,3. Os resultados obtidos para o produto fRe e número de Nusselt local foram calculados na parede superior e podem ser verificados nas Figuras 5.7 e 5.8.

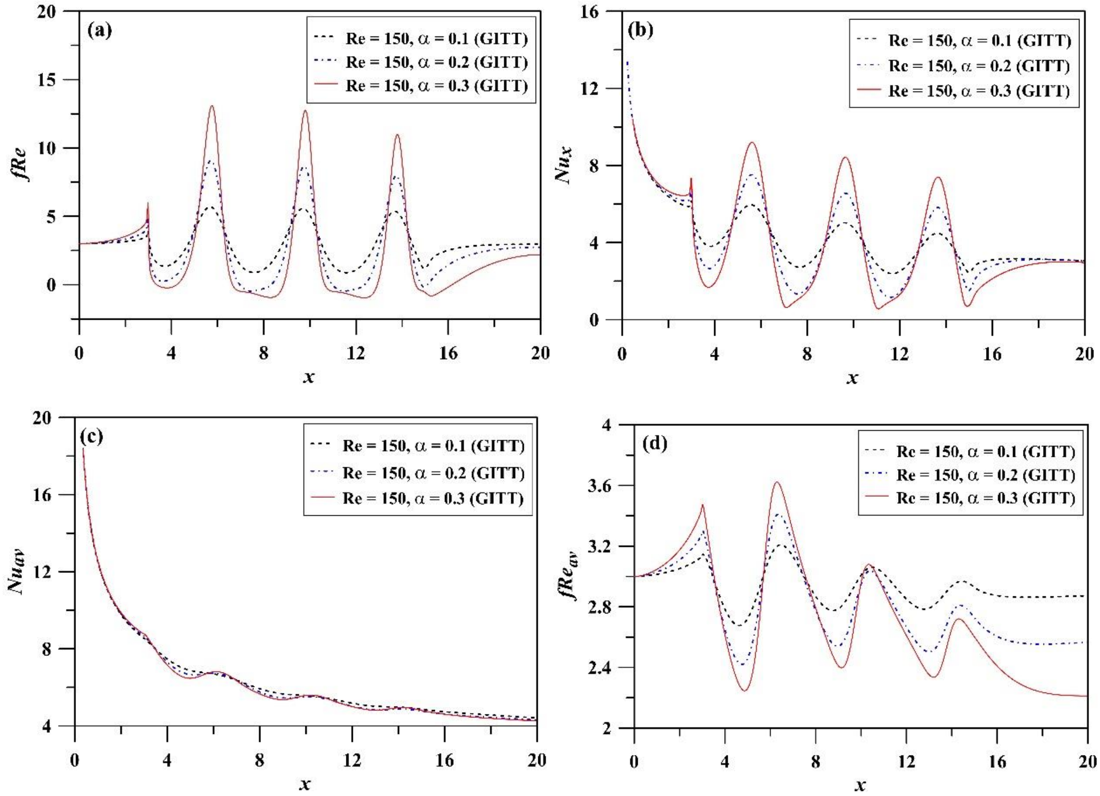


Figura 5.7 - Resultados para dutos com ângulo de fase 180° e 3 comprimentos de onda, Re = 150 e α = 0,1, 0,2 e 0,3: (a) produto fRe; (b) número de Nusselt local, (c) número de Nusselt médio e (d) produto fRe médio.

De acordo com a Figura 5.7, assim como no caso para 6 comprimentos de onda e fase 0°, o aumento da amplitude eleva consequentemente o produto fRe devido ao maior impedimento do escoamento (Figura 5.7a), o que é comprovado pelo cálculo do produto fRe médio ao longo do canal (Figura 5.7d). A presença das ondulações diminui localmente o número de Nusselt (Figura 5.7b) nas cristas, enquanto que nos vales existe a intensificação do mesmo. Apesar do aumento relativo do número de Nusselt local, a transferência de calor convectiva não é intensificada se comparado ao caso do duto com paredes de placas planas (Figura 5.7c). Além disso, aumentar o valor da amplitude do canal diminui o número de Nusselt médio para o caso estudado.

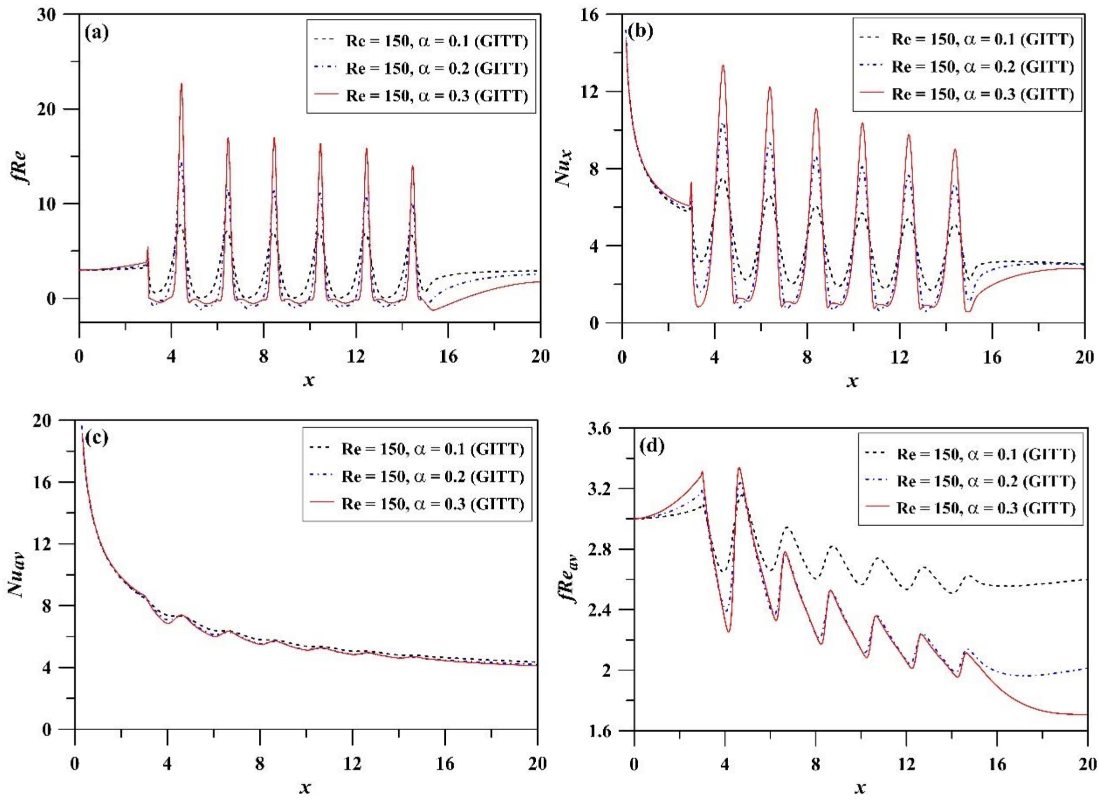


Figura 5.8 - Resultados para dutos com ângulo de fase 180° e 6 comprimentos de onda, Re = 150 e α = 0,1, 0,2 e 0,3: (a) produto fRe; (b) número de Nusselt local, (c) número de Nusselt médio e (d) produto fRe médio.

De acordo com a Figura 5.8, assim como na Figura 5.7, o aumento da amplitude eleva o produto fRe e do produto fRe médio, devido ao maior impedimento do escoamento (Figuras 5.8a e 5.8d). A presença das ondulações eleva localmente o número de Nusselt (Figura 5.8b) nas cristas, enquanto que nos vales existe a intensificação do mesmo assim como a amplitude na variação do mesmo. Apesar do aumento relativo do número de Nusselt local, a transferência de calor convectiva não é intensificada se comparado ao caso do duto com paredes de placas planas (Figura 5.8c). Além disso, aumentar o valor da amplitude do canal diminui o número de Nusselt médio para o caso estudado.

5.2.5 *Estudo da intensificação térmica na placa inferior*

A comparação entre os valores locais do produto fRe e número de Nusselt entre os canais com e sem defasem, assim como entre os canais com 3 e seis módulos não é prática, pois os máximos e mínimos de intensidade ocorrem em frequências diferentes e em posições axiais distintas. Sendo assim, neta secção somente serão avaliados os valores médios do número de Nusselt local e do produto fRe ao longo do canal. Assim, foram estudados os casos para Re = 150, α = 0,1 e 0,3, para 3 e 6 comprimentos de onda para os dutos sem diferença de fase e com diferença de fase igual a 180°.

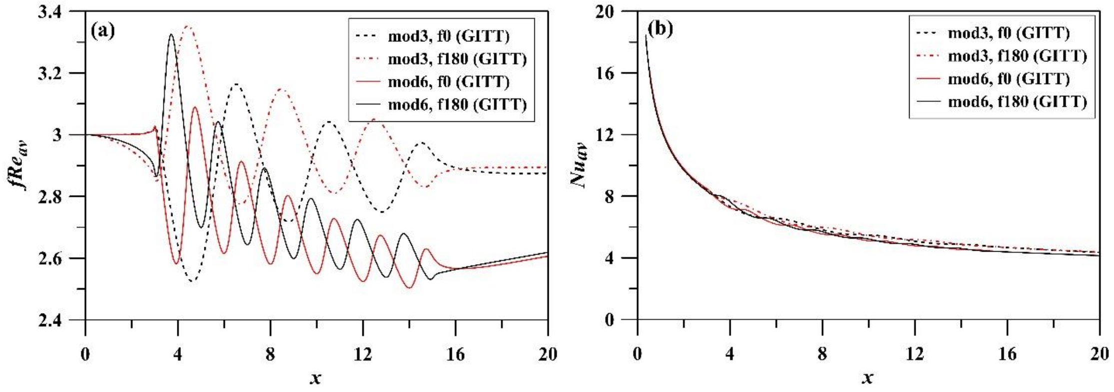


Figura 5.9 - Valores médios para um duto com ângulo de fase 0° e 180° e com 3 e 6 comprimentos de onda para Re = 150 e α = 0,1: (a) do produto fRe_{av}; (b) número de Nusselt.

A Figura 5.9 mostra a diferença entre o canal com 3 e com 6 comprimentos de onda, assim como considerando ou não a defasagem entre as equações para o caso em que Re = 150 e α = 0,1. Observando apenas as linhas cheias na Figura 5.9a, é possível notar que o valor do produto fRe médio se comporta de forma oposta quando somente a fase entre as paredes é modificada, este comportamento pode ser explicado pela definição do valor médio o qual acompanha a geometria da parede. O número de Nusselt médio praticamente não é afetado para todos os casos mostrados na Figura 5.9b.

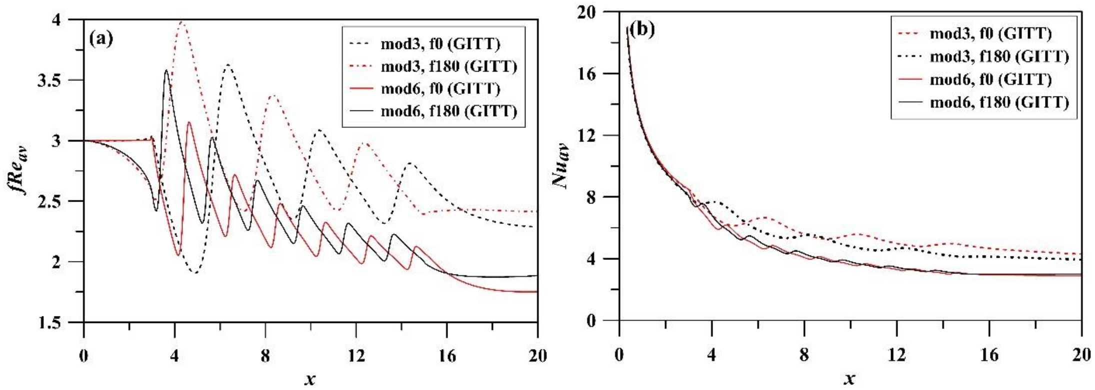


Figura 5.10 - Valores médios para um duto com ângulo de fase 0° e 180° e com 3 e 6 comprimentos de onda para Re = 150 e α = 0,3: (a) do produto fRe_{av}; (b) número de Nusselt.

A Figura 5.10 mostra a diferença entre o canal com 3 e com 6 comprimentos de onda, assim como considerando ou não a defasagem entre as equações para o caso em que Re = 150 e α = 0,3. Observando apenas as linhas cheias ou somente as linhas tracejadas da Figura 5.10a, assim como na Figura 5.9a, é possível notar que o valor do produto fRe médio se comporta de forma oposta quando somente a fase entre as paredes é modificada. O número de Nusselt médio possui o mesmo comportamento, porém o mesmo é elevado pela diminuição dos comprimentos de onda (Figura 5.9b).

5.3 LINHAS DE CORRENTE E ISOTERMAS DE TEMPERATURA

As Fig. 5.11-5.16 representam as linhas de corrente e as isotermas para diferentes valores do número de Reynolds (100 e 200), amplitude α = 0,1 e 0,3, comprimentos de onda 3 e 6 e ângulos de fase 0° e 180°. Os valores das linhas de corrente são iguais a -1 e 1 nas paredes superior e inferior respectivamente, enquanto que os valores das isotermas variam de 0 a 1. O valor de entrada quente é 1 e o valor nas paredes é 0.

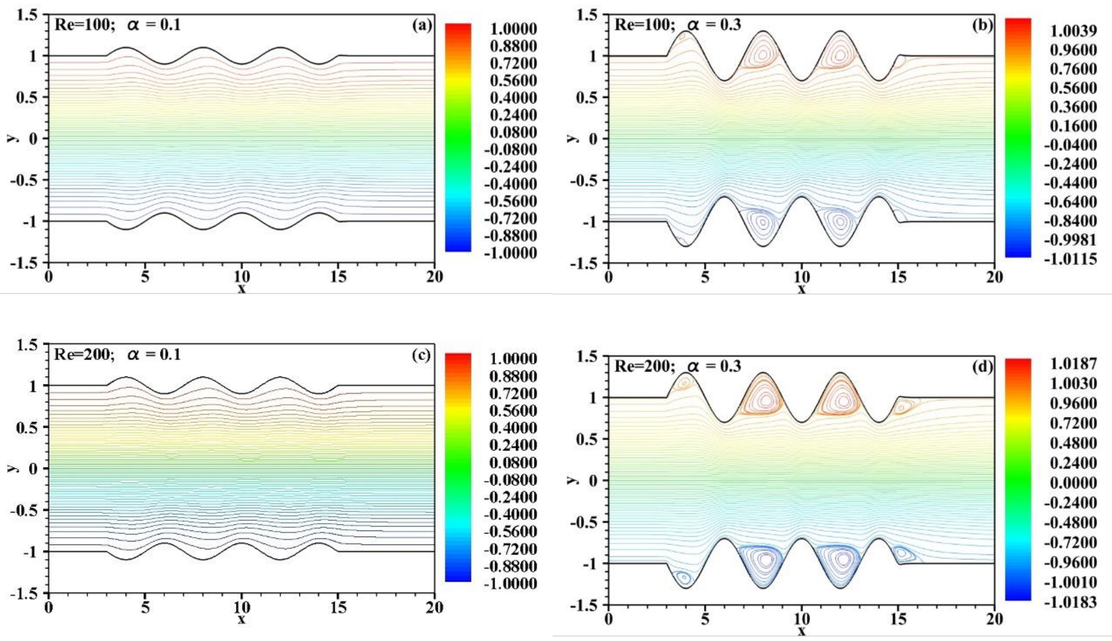


Figura 5.11 - Linhas de corrente para um duto com 3 comprimentos de onda e ângulo de fase 0° para *Pr* = 6,93; *Re* = 100 e 200; α = 0,1 e 0,3.

Como pode ser observado na Figura 5.11 o aumento de ambos os parâmetros, amplitude de onda e número de Reynolds, eleva significantemente a recirculação nas concavidades do canal. Para α = 0.1, não é possível observar recirculações no canal enquanto que para α = 0.3, é possível observa a formação de uma zona de recirculação na primeira concavidade.

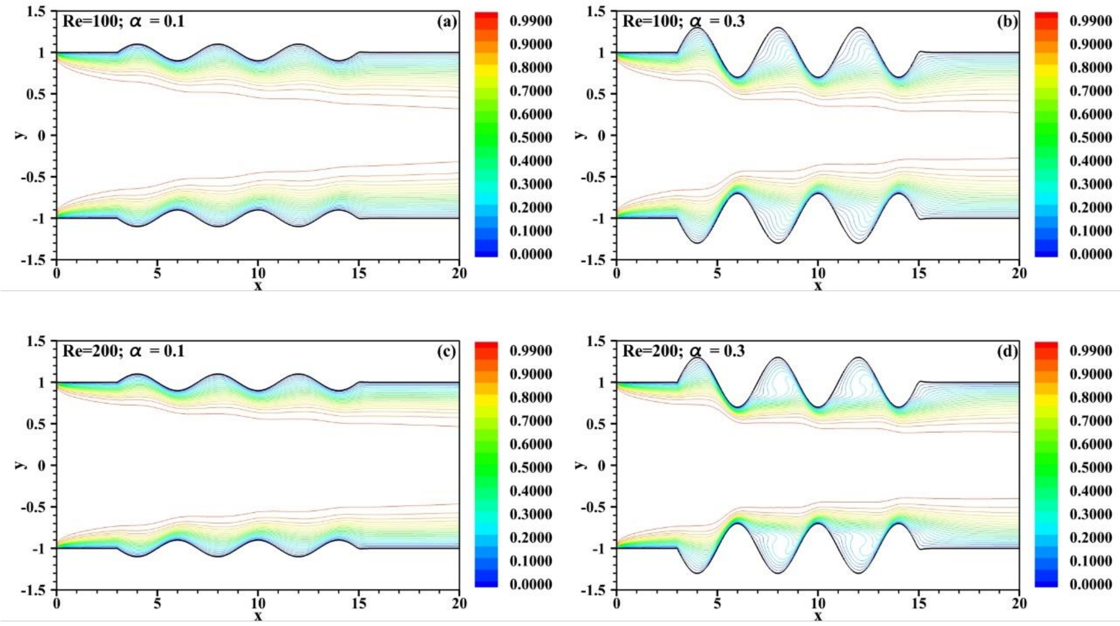


Figura 5.12 - Isotermas para um duto com 3 comprimentos de onda e ângulo de fase 0° para *Pr* = 6,93; *Re* = 100 e 200; α = 0,1 e 0,3.

Na Figura 5.12, as isotermas demostram que para o mesmo número de Reynolds, existe uma melhora na transferência de calor convectiva quando se eleva a amplitude do canal verificada pela aproximação das isotermas de menor temperatura do centro do canal. A influência do número de Reynolds pode ser melhor verificada para o caso em que α = 0.3, no qual é possível verificar que as isotermas de temperatura ocupam mais espaço dentro da concavidade, o que eleva a transferência de calor convectiva.

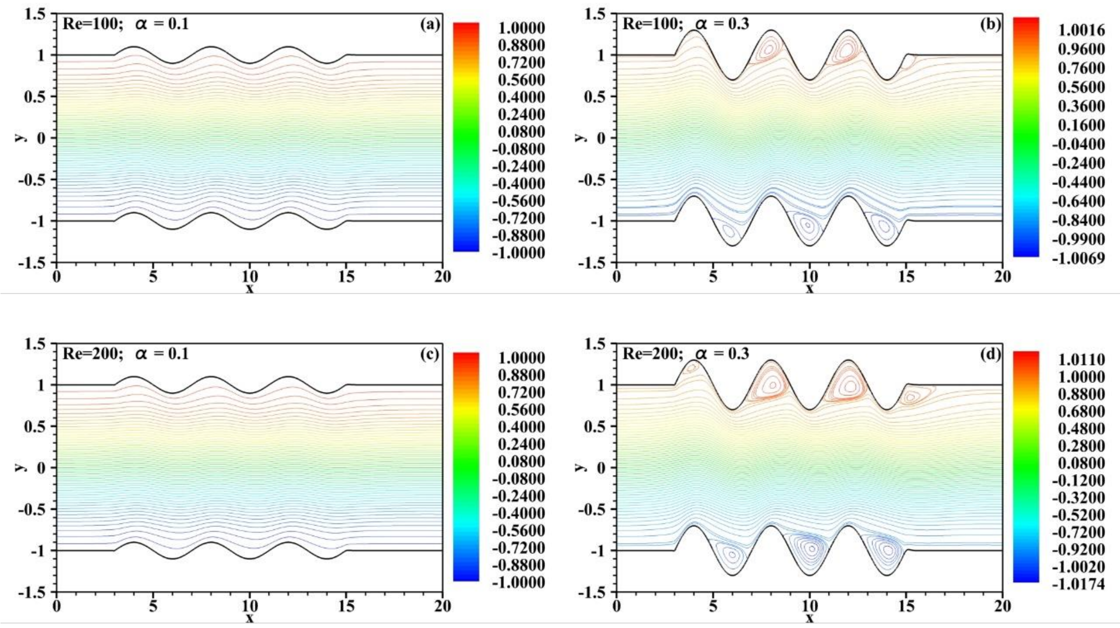


Figura 5.13 - Linhas de corrente para um duto com 3 comprimentos de onda e ângulo de fase 180° para *Pr* = 6,93; *Re* = 100 e 200; α = 0,1 e 0,3.

Para a geometria com ângulo de fase igual a 180° e 3 comprimentos de onda, a Figura 5.13 demostra que o aumento de ambos os parâmetros, amplitude de onda e número de Reynolds, eleva significantemente a recirculação nas concavidades do canal. Para α = 0.1, não é possível observar recirculações no canal enquanto que para α = 0.3, é possível observar a formação de uma zona de recirculação adicional na parede superior após a última concavidade. Além disso, como a geometria não é simétrica, os valores máximos de mínimos da função corrente também não são simétricos.

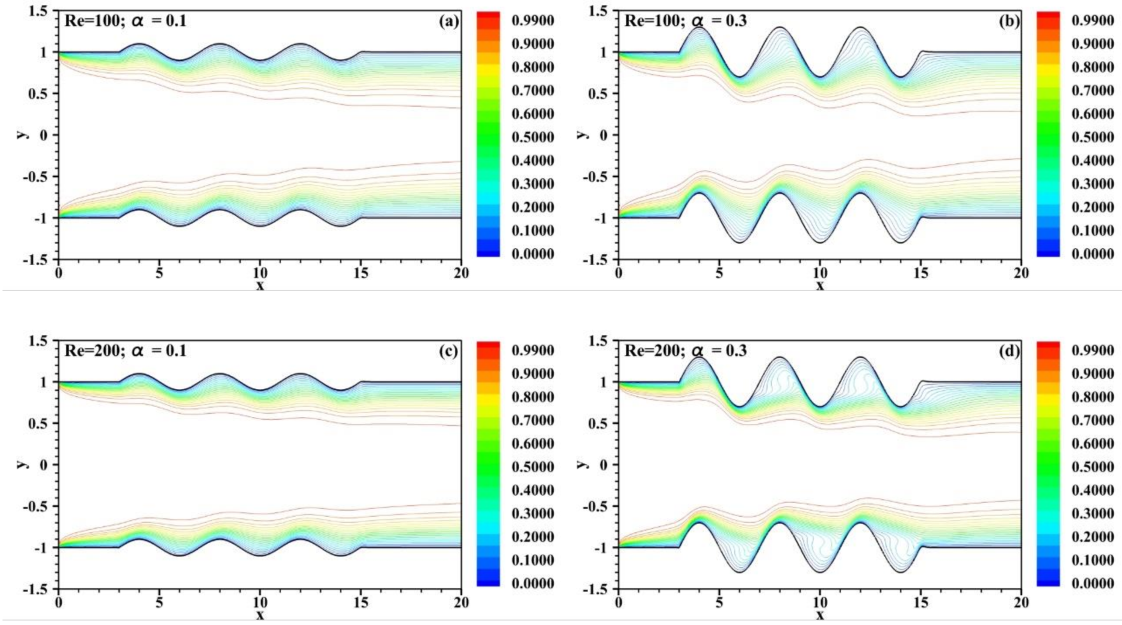


Figura 5.14: Isotermas para um duto com 3 comprimentos de onda e ângulo de fase 180° para Pr = 6,93; Re = 100 e 200; α = 0,1 e 0,3.

Na Figura 5.14, as isotermas demostram que para o mesmo número de Reynolds, assim como no caso com ângulo de fase igual a 0°, existe uma melhora na transferência de calor convectiva quando se eleva a amplitude do canal, verificada pela aproximação das isotermas de menor temperatura do centro do canal. A influência do número de Reynolds pode ser melhor verificada para o caso em que α = 0.3, no qual é possível verificar que as isotermas de temperatura ocupam mais espaço dentro da concavidade o que eleva a transferência de calor convectiva. A comparação entre as Figuras 5.12 e 5.14, não mostra diferença significativa entre as duas configurações de canais quando somente a fase é modificada, assim como analisado na Figura 5.13.

As Figuras 5.15 e 5.16 mostram as linhas de corrente e as isotermas para os casos de 6 comprimentos de onda; ângulo de fase 180°; Pr = 6,93; Re = 100 e 200; α = 0,1 e 0,3. Assim como observado no caso com 3 comprimentos de onda, para α = 0,1 os casos estudados não apresentam recirculação (Figuras 5.15a,c). Para α = 0,3 o aumento do número de Reynolds eleva consequentemente a recirculação a qual ocupa praticamente todo o espaço da concavidade para o caso de Re = 200 (Figuras 5.15d). A transferência de calor é levemente intensificada, pelo aumento de amplitude, para o mesmo número de Reynolds.

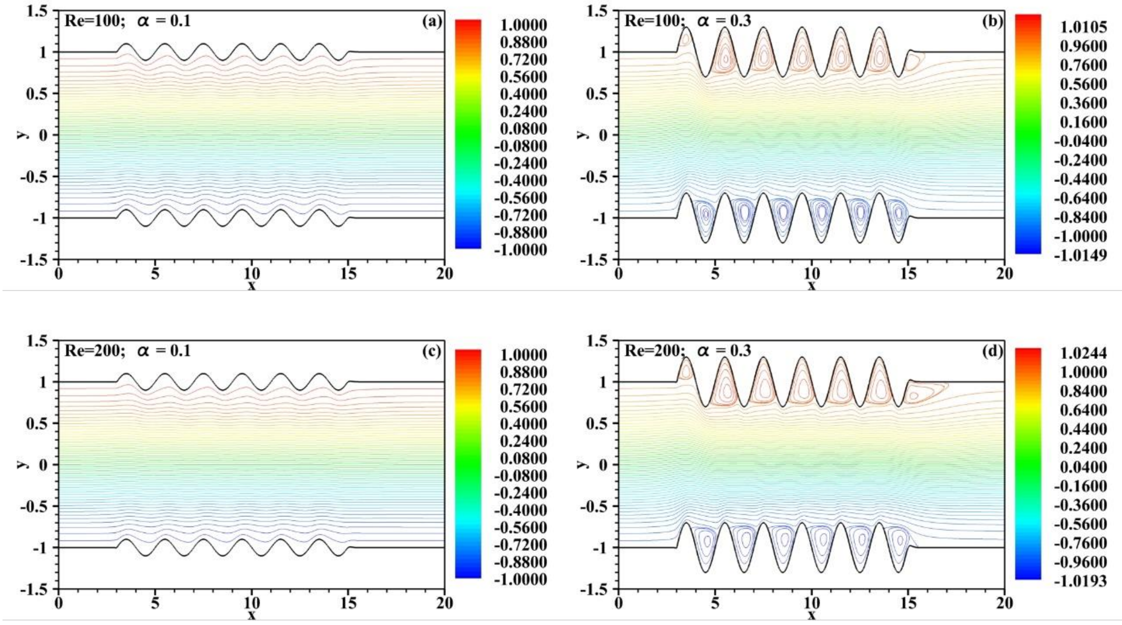


Figura 5.15 - Linhas de corrente para um duto com 6 comprimentos de onda e ângulo de fase 180° para Pr = 6,93; Re = 100 e 200; α = 0,1 e 0,3.

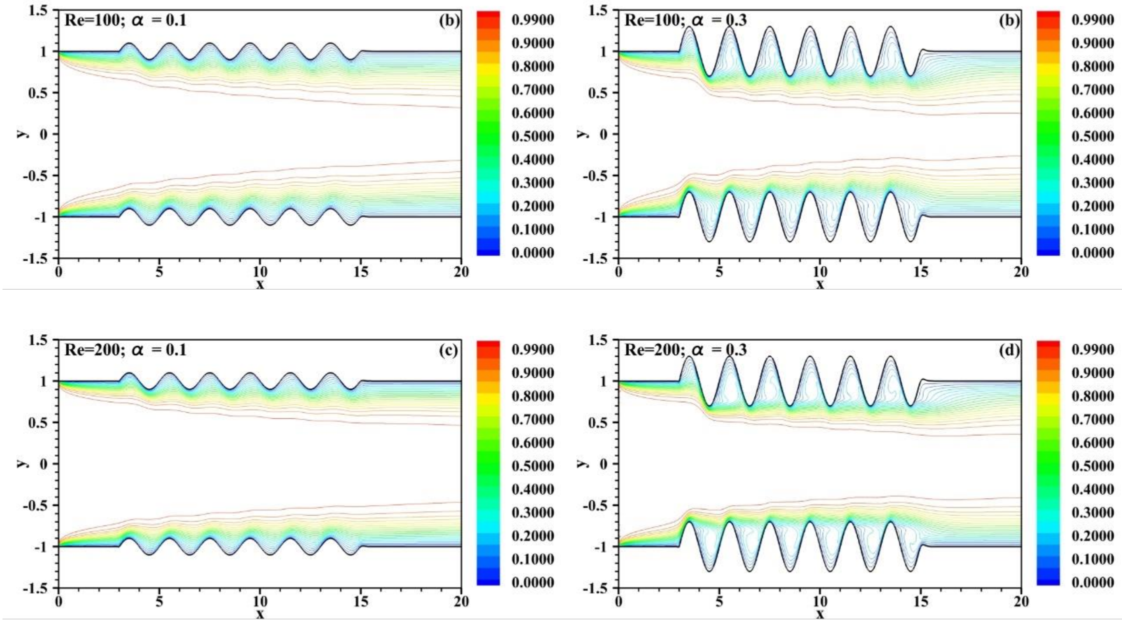


Figura 5.16 - Isotermas para um duto com 6 comprimentos de onda e ângulo de fase 0° para Pr = 6,93; Re = 100 e 200; α = 0,1 e 0,3.

5.4 ANÁLISE DA INFLUÊNCIA DOS PARÂMETROS NA GERAÇÃO DE ENTROPIA

A análise da influência dos parâmetros: número de Reynolds, amplitude do canal, número de comprimentos de onda e defasagem entre as paredes será avaliada, de acordo com a geração de entropia média, a fim de demonstrar a influência, principalmente da geometria do canal, na quantidade de entropia gerada. A entropia global também é calculada, assim como os valores médios do número de Bejan ao longo do canal.

Os resultados da entropia média, assim como os resultados de produto fRe e número de Nusselt, também foram inicialmente verificados com os resultados obtidos pelo *software* COMSOL 5.3v. Como pode ser observado na Figura 5.17 os resultados mostram boa concordância entre os dois métodos. Além disso, o aumento da amplitude do canal eleva a entropia média nas zonas mais estreitas do canal, enquanto que nas regiões mais largas a entropia é diminuída.

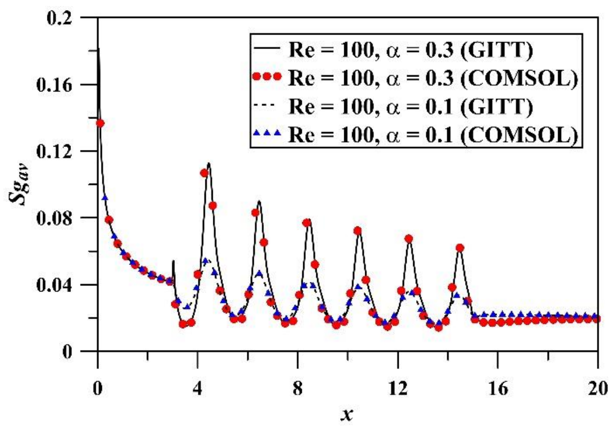


Figura 5.17 - Verificação entre os resultados da GITT e do COMSOL para a entropia média em um duto com 6 comprimentos de onda e ângulo de fase 0 para Pr = 6,93; Re = 100; α = 0,1 e 0,3.

5.4.1 Efeito da quantidade de comprimentos de onda na geração de entropia

Para demostrar a influência da quantidade de comprimentos de ondas na transferência de calor, foram considerados dutos com três e seis comprimentos de ondas, com e sem defasem de fase, Re = 100 e amplitude de 0,2. Os resultados obtidos podem ser verificados na Figura 5.18.

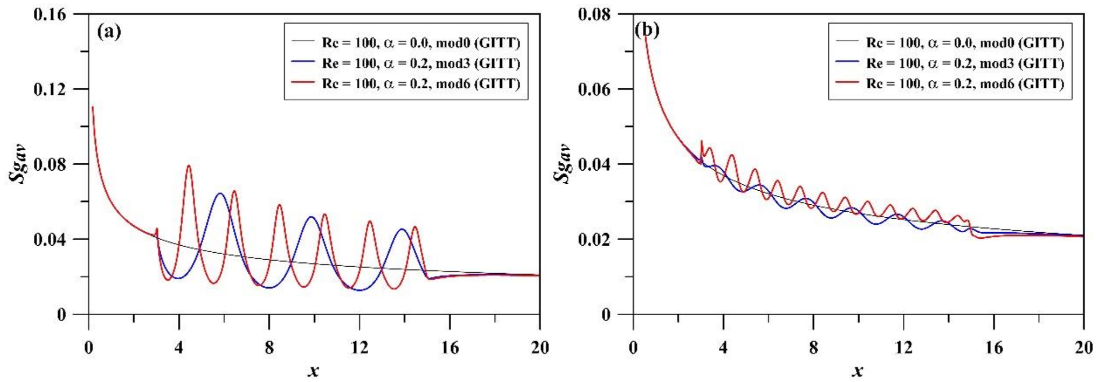


Figura 5.18 - Resultados para a entropia média para dutos de 3 e 6 comprimentos de onda para Pr = 6,93; Re = 100; α = 0,2 e diferentes ângulos de fase (a) 0°;(b) 180°.

Como pode ser observado na Figura 5.18 a entropia média ao londo do canal para o ângulo de fase igual a 180° possui menor amplitude que o caso em que não existe defasagem entre as equações. Ainda é possível observar a mesma instabilidade numérica presente no cálculo do número de Nusselt local e de fRe, o qual é mais evidenciado na Figura 5.18b devido aos valores próximos do caso do duto liso.

5.4.2 Efeito da variação da fase de onda na geração de entropia

Para demostrar a influência do ângulo de fase entre as paredes na geração de entropia, foram considerados dutos com 0° e 180° graus de defasagem entre as equações caraterísticas das paredes, para 3 e 6 comprimentos de ondas, considerando Re = 200 e amplitudes de 0,1 e 0,2. Os resultados podem ser observados na Figura 5.19.

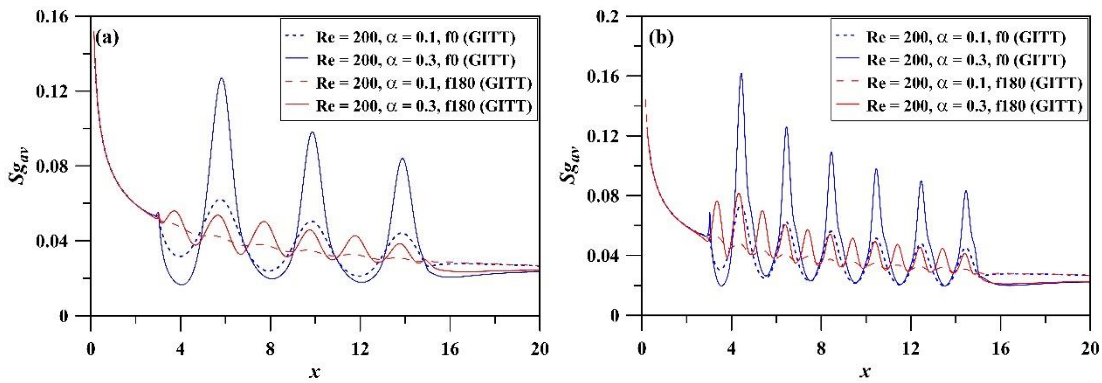


Figura 5.19 - Resultados para a entropia média para dutos com ângulo de fase 0° e 180° para Pr = 6,93; Re = 200; α = 0,1 e 0,3 e diferentes comprimentos de onda: (a) 3; (b) 6.

A Figura 5.19 mostra que para a mesma quantidade de comprimentos de onda, a entropia gerada é consideravelmente diminuída quando o ângulo entre as equações da parede é de 180°. Este comportamento pode ser observado mais facilmente para o caso em que a amplitude da onda é de 0,1, pois tanto para 3 quanto para 6 comprimentos de onda, o caso em que α = 0,1 praticamente não eleva a entropia média se comparada ao canal de placas paralelas.

5.4.3 Influência do número de Reynolds em canais com ângulo de fase 180° na geração de entropia

Para demostrar a influência do número de Reynolds na geração de entropia em dutos com ângulo de fase de 180°, foram considerados 3 e 6 comprimentos de ondas, amplitude igual a 0,2 e Re = 100, 150 e 200. Os resultados obtidos podem ser verificados na Figura 5.20.

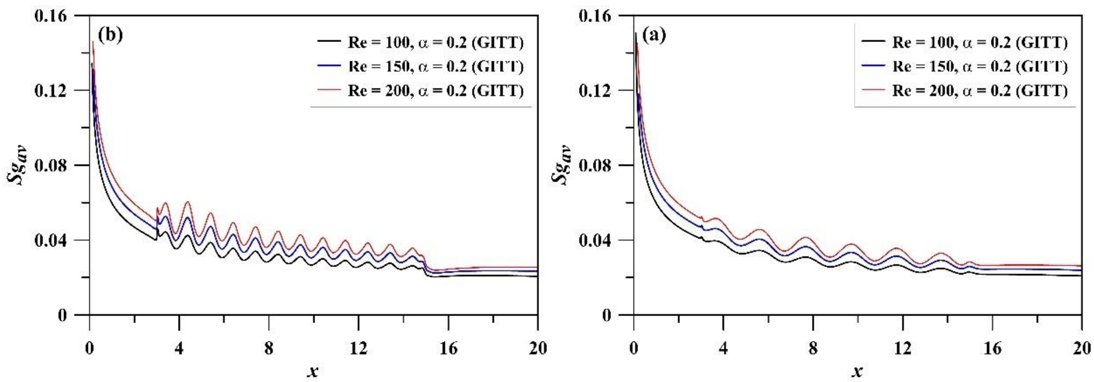


Figura 5.20 - Resultados para a entropia média para um duto com ângulo de fase 180° para *Pr* = 6,93; α = 0,2 e *Re* = 100, 150 e 200 e diferentes comprimentos de onda: (a) 3 comprimentos de onda; e (b) 6 comprimentos de onda.

O aumento do número de Reynolds eleva a convecção ao longo do canal e consequente eleva a quantidade gerada de entropia tanto para o caso de 3 comprimentos de onda (Figura 5.20a) quanto para 6 comprimentos de onda (Figura 5.20b). Além disso, comparando a Figura 5.20a com a Figura 5.20b a entropia média para 3 comprimentos de onda é menor que a entropia gerada para 6 comprimentos de onda.

5.4.4 Influência da amplitude em canais com ângulo de fase 180° na geração de entropia

Para demostrar a influência da amplitude do na geração de entropia em dutos com ângulo de fase de 180°, foram considerados 3 e 6 comprimentos de ondas, Re = 150 e amplitude do canal igual a 0,1, 0,2 e 0,3. Os resultados obtidos podem ser verificados na Figura 5.21.

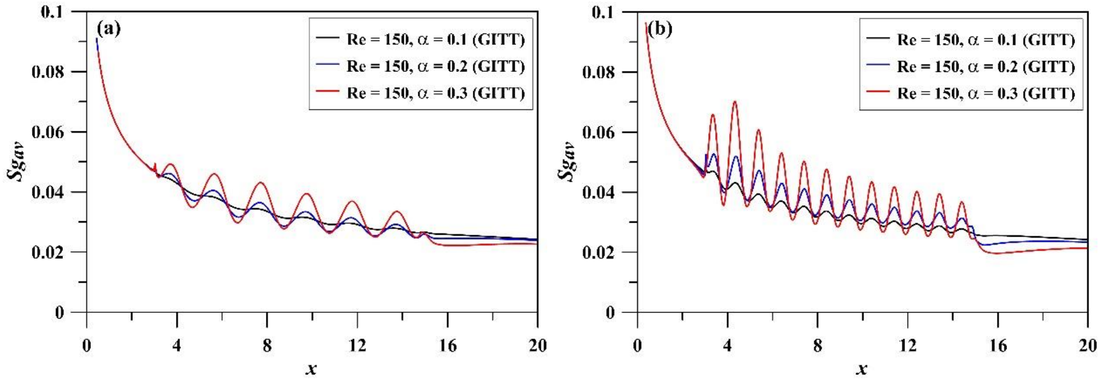


Figura 5.21 - Resultados para a entropia média para um duto com ângulo de fase 180° para *Pr* = 6,93; *Re* = 150 e α = 0,1, 0,2 e 0,3 e diferentes comprimentos de onda: (a) 3 comprimentos de onda; (b) 6 comprimentos de onda.

Assim como observado na Figura 5.21, o aumento de 3 para 6 comprimentos de onda eleva a geração de entropia local independente da amplitude do canal. Considerando somente a entropia como parâmetro, o valor de amplitude igual a 0,1 para três comprimentos de onda é o caso que gera a menor entropia ao longo de todo o canal. Comparando ainda as Figuras 5.21a e 5.21b pode ser observado que no canal com 3 comprimentos de onda existem regiões onde a geração média de entropia é menor que de um canal com placas planas, enquanto que para o caso de 6 comprimentos de onda estas regiões são praticamente inexistentes.

5.4.5 Entropia global

A entropia global foi calculada para todos os casos estudados de geração de entropia e pode ser observado nas Tabelas 5.2, 5.3 e 5.4 para Reynolds iguais a 100, 150 e 200, respectivamente. Nas Tabelas 5.2, 5.3 e 5.4 pode ser observado que a introdução do canal de geometria ondulada para todos os casos estudados, independente de considerar número de comprimentos de onda ou mudança de fase das equações das paredes, diminui a geração de entropia global do canal evidenciando a eficiência energética ao se utilizar canais com geometria ondulada.

Para Re = 100 (Tabela 5.2) e para um canal com 3 comprimentos de onda, a menor geração de entropia total é alcançada quando α = 0,1 e o ângulo de fase entre as paredes é de 180°. Para um canal com 6 comprimentos de onda, a menor geração de entropia total é alcançada quando α = 0,1 e o ângulo de fase entre as paredes é de 0. Considerando apenas os casos com 3 ondas, é possível perceber que o aumento da amplitude aumenta também entropia global do sistema.

Tabela 5.2 - Entropia global para Reynolds igual a 100.

Re	Nº Ondas	α	Fase	Sg_{tot}
100	0	0.0	0°	0.04660
100	3	0.1	0°	0.03326
100	3	0.2	0°	0.03326
100	3	0.3	0°	0.03486
100	**3**	**0.1**	**180°**	**0.03309**
100	3	0.2	180°	0.03832
100	3	0.3	180°	0.04406
100	**6**	**0.1**	**0°**	**0.03421**
100	6	0.2	0°	0.03528
100	6	0.3	0°	0.04144
100	6	0.1	180°	0.04144
100	6	0.2	180°	0.03986
100	6	0.3	180°	0.03863

Para Re = 150 (Tabela 5.3), tanto para um canal com 3 comprimentos de onda quanto para um com 6, a menor geração de entropia total é alcançada quando α = 0,1 e o ângulo de fase entre as paredes é de 180°. Quando a fase é igual 0°, é possível notar que a amplitude igual a 0,2 apresenta a menor geração de entropia, significando que para Re = 150 a geração de entropia não está diretamente relacionada ao aumento da entropia viscosa, além de sugerir que existe um ponto de mínima geração de entropia entre as amplitudes de 0,1 e 0,3.

Tabela 5.3 - Entropia global para Reynolds igual a 150.

Re	Nº Ondas	α	Fase	Sg_{tot}
150	0	0.0	0°	0.06787
150	3	0.1	0°	0.04396

150	3	0.2	0°	0.03794
150	3	0.3	0°	0.04093
150	**3**	**0.1**	**180°**	**0.03779**
150	3	0.2	180°	0.03941
150	3	0.3	180°	0.04046
150	6	0.1	0°	0.04665
150	6	0.2	0°	0.04264
150	6	0.3	0°	0.05810
150	**6**	**0.1**	**180°**	**0.03836**
150	6	0.2	180°	0.04108
150	6	0.3	180°	0.04622

Para Re = 200 (Tabela 5.4), tanto para um canal com 3 comprimentos de onda quanto para um com 6, a menor geração de entropia total é alcançada quando α = 0,1 e o ângulo de fase entre as paredes é de 0°. Adicionalmente é possível observar que para Re = 200, a entropia é sempre elevada ao se aumentar a amplitude, o que implica que nessas condições, a entropia viscosa possui influência mais significativa na geração de entropia.

Tabela 5.4 - Entropia global para Reynolds igual a 200.

Re	Nº Ondas	α	Fase	Sg_{tot}
200	0	0	0°	0.10530
200	**3**	**0.1**	**0°**	**0.04251**
200	3	0.2	0°	0.04857
200	3	0.3	0°	0.05535
200	3	0.1	180°	0.04329
200	3	0.2	180°	0.04445
200	3	0.3	180°	0.04619
200	**6**	**0.1**	**0°**	**0.04232**
200	6	0.2	0°	0.04795
200	6	0.3	0°	0.04811
200	6	0.1	180°	0.04478
200	6	0.2	180°	0.04545
200	6	0.3	180°	0.04945

5.4.6 Número de Bejan

A análise do número de Bejan foi realizada considerando o número de Bejan médio ao longo do escoamento. Os casos analisados foram os de menor geração de entropia para cada número de Reynolds. Os resultados podem ser observados na Figura 5.22.

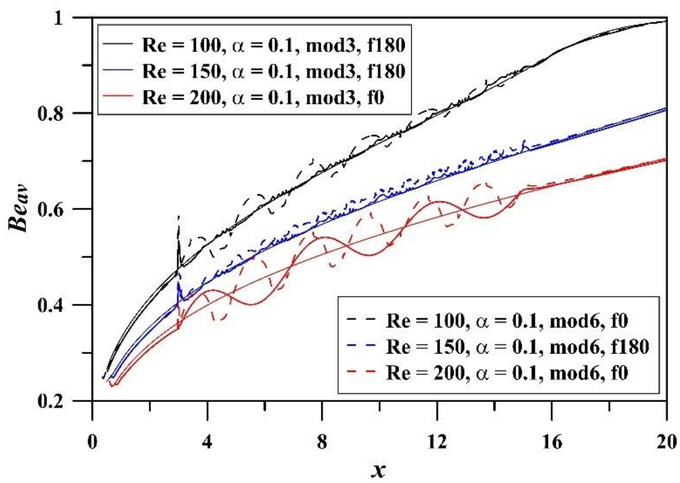


Figura 5.22 - Resultados para o número de Bejan médio considerando os casos de menor geração de entropia para *Re* = 100, 150 e 200.

Como pode ser observado na Figura 5.22 a tendência é que o número de Bejan aumente ao longo do canal no início do escoamento o valor do número de Bejan é próximo de zero, pois inicialmente o escoamento não está completamente desenvolvido e a geração de entropia devido aos efeitos viscosos é superior aos efeitos térmicos, a medida que o escoamento se desenvolve, os efeitos térmicos são mais influentes que os efeitos viscosos. Além disso, é possível notar a influência da geometria do canal no número de Bejan uma vez que o mesmo oscila ao longo do canal, principalmente para os casos em que não há diferença de fases entre as equações das paredes.

O aumento do número de Reynolds é acompanhado pela diminuição do número de Be médio devido ao aumento da resistência ao escoamento elevando as forças viscosas e consequentemente a geração de entropia viscosa. Para Re = 150, existe pouca diferença em relação ao canal com placas paralelas. Além disso, nos casos no qual o ângulo de fase é igual a 180°, possuem pouca influência no número de Bejan médio.

CAPÍTULO 6

CONCLUSÕES E SUGESTÕES

No presente trabalho, foi estudado o escoamento em um canal de placas onduladas. As equações para a conservação da quantidade de movimento e energia foram modeladas de acordo com as equações de Navier-Stokes e da energia. A formulação em função corrente foi aplicada para facilitar a solução, ao se eliminar a necessidade de solução do campo de pressão e foi feita a transformação das variáveis do domínio de [-$y_1(x)$, $y_2(x)$] para [-1, 1] tendo como objetivo facilitar o processo de integração dos coeficientes solução do sistema após a aplicação da GITT. A convergência da GITT foi realizada mostrando a rápida convergência, em quatro algarismos significativos, da solução para a função corrente (NV = 50), se comparado com a convergência para a temperatura (NT = 80) a qual foi alcançada mais lentamente na entrada do canal para números de Reynolds elevados para quatro algarismos significativos.

Os resultados da GITT foram verificados com os obtidos pelos gerados empregando o método de elementos finitos utilizando o *software* comercial COMSOL 5.3v com boa concordância. Os resultados, por ambos os métodos, mostraram que a descontinuidade no início do canal na passagem do canal de placas planas para a geometria ondulada gera um excedente para os valores de produto fRe e número de Nusselt local, Nu_x, os quais são calculados pelo gradiente local de velocidade e temperatura. Foi demostrado que o aumento, tanto do número de Reynolds, quanto da amplitude do canal ondulado, intensifica a transferência de calor, devido a maior recirculação gerada no interior das concavidades. O número de Nusselt local confirma os resultados do aumento da taxa de transferência de calor. Comparado com o canal de placas planas, por meio do cálculo do número de Nusselt médio, a transferência de calor é intensificada ao se utilizar dutos corrugados somente no caso em que Re = 500. Ao se calcular o produto fRe médio, foi observado que, apesar de regiões onde o produto fRe local é intensificado, o valor médio sobre a parede é diminuído devido as zonas de recirculação que geram valores negativos do produto fRe local. Ao se introduzir as paredes de geometria ondulada foi observado ainda que o produto fRe médio foi diminuído quando comparado com os canais de placas planas.

O estudo da mudança na geometria do canal demostrou que, para números de Reynolds até 200, existe pouca diferença na transferência de calor convectiva ao se modificar a fase da função senoidal que caracteriza as paredes do canal, mantendo os demais parâmetros constantes. O estudo da entropia demostrou que, em geral, a geração de entropia é atenuada ao se aumentar a amplitude do canal. Além disso, a utilização de canais com geometria ondulada diminui a entropia total do sistema para quaisquer configurações estudadas se comparado com o canal com placas planas.

Uma vez que o uso de modelos contínuos para a minimização da geração de entropia ainda não é amplamente abordado na literatura, como sugestão para um trabalho futuro, é possível utilizar a técnicas de otimização em problemas de engenharia para melhorar a eficiência da transferência de calor em canais corrugados ao se minimizar a entropia global do sistema. A aplicação da GITT para o cálculo da taxa de geração de entropia global $S_{g,tot}$ a partir da distribuição local pode auxiliar em problemas de otimização de projeto de dutos de geometria irregular. A taxa de geração de entropia global pode ser adotada como a função objetivo para a qual um mínimo é procurado, enquanto que o conjunto de parâmetros geométricos (amplitude e número de ondas, por exemplo) relevantes do projeto é escolhido como as variáveis. Os valores ótimos dos parâmetros podem ser calculados assim utilizando técnicas de otimização.

Como ampliação da aplicação da técnica, o mesmo problema pode ser aplicado no caso do escoamento MHD, no qual, desconsiderando a dissipação viscosa, somente um termo magnético é adicionado na equação de Navier-Stokes na direção x, sendo possível aplicar a mesma metodologia com o mesmo problema filtro na solução do problema.

Ressalta-se que a solução por GITT das equações de Navier Stokes e da Energia de maneira acoplada ainda não tinha sido calculada para o escoamento em canais de geometria ondulada, assim como o estudo sistemático da geração de entropia utilizando a GITT. Além disso, este estudo representa um diferencial da aplicação da técnica estudada a qual pode ser aplicada para diversas geometrias, sendo necessário somente a mudança da geometria da parede, uma vez que a formulação empregada foi elaborada de maneira mais genérica possível.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AHMED, M.A.; YUSOFF, M.Z.; SHUAIB, N.H. Effects of geometrical parameters on the flow and heat transfer characteristics in trapezoidal-corrugated channel using nanofluid. **International Communications in Heat and Mass Transfer**, v. 42, p. 69–74, 2013.

AKBARZADEH, M.; RASHIDI, S.; ESFAHANI, J.A. Influences of corrugation profiles on entropy generation, heat transfer, pressure drop, and performance in a wavy channel. **Appl. Therm. Eng**. v.116, p278–291, 2017.

AMIRAHMADI, S., RASHIDI, S., ABOLFAZLI ESFAHANI, J., 2016. Minimization of exergy losses in a trapezoidal duct with turbulator, roughness and beveled corners. **Appl. Therm. Eng.** v.107, p533–543, 2016.

BASHI, M., RASHIDI, S., ESFAHANI, J.A. Exergy analysis for a plate-fin triangular duct enhanced by a porous material. **Appl. Therm. Eng**. v.110, p1448–1461, 2017.

BEJAN, A. A Study of Entropy Generation in Fundamental Convective Heat Transfer. **Journal of Heat Transfer**. v.101, 1979.

BEJAN, A. **Entropy generation through heat and fluid flow**, John Wiley & Sons, New York, NY, EUA, 1982.

BEJAN, A; TSATSARONIS, G.; MORAN, M. **Thermal Design and Optimization**, Wiley, New York, 1996.

BIRD, R.B., STEWART, W.E., LIGHTFOOT, E.N. **Transport Phenomena**, 2nd edition, John Wiley & Sons, New York, NY, EUA, 2002.

CASTELLÕES, F. V. **Análise da Intensificação Térmica em Canais Corrugados a Baixos Números de Reynolds**. Tese de Doutorado. Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica, COPPE, Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2010.

CASTELLÕES, F. V.; QUARESMA, J. N. N.; COTTA, R. M. Convective heat transfer enhancement in low Reynolds number flows with wavy walls. **International Journal of Heat and Mass Transfer**. V. 53, p. 2022–2034, 2010.

COTTA, R. M. **Computational integral transform approach in nonlinear diffusion and convection-diffusion problems**. Laboratório di Ingeneria Nucleare di Montcuccolino, Serie Scientifica LIN-1202 (Invited Lecture). Universitá degli Studi di Bologna, Italy, July, 1992.

COTTA, R. M. **Integral Transform in Computational Heat and Fluid Flow**. CRC Press, Boca Raton, 1993.

COTTA, R. M. Benchmark results in computational heat and fluid flow. **International Journal of Heat and Mass Transfer** (Invited Paper), v.37, p.381-393, 1994.

COTTA, R. M.; ÖZISIK, M. N. Laminar forced convection in ducts with periodic variation of inlet temperature. **International Journal of Heat and Mass Transfer**, v.29, n.10, p.1495-1501, 1986.

COTTA, R. M.; ÖZISIK, M. N. Diffusion Problems with general Time-Dependent coefficients. **Revista Brasileira de Ciências Matemáticas**, v.9, n.4, p.269-292, 1987.

COTTA, R. M.; MIKHAILOV, M. D. Unified Integral Transform Method. **Journal Braz. Assoc. Mech. Sciences**, RBCM (Invited Paper), v. 12, p. 301-310, 1990.

COTTA, R. M.; MIKHAILOV, M. D. The integral Transform Method. **Applied Math. Modeling**, v.17, p. 156-161, 1993.

COTTA, R. M; LISBOA, K.M.; CURI, M.F.; BALABANI, S.; QUARESMA, J.N.N.; PEREZ-GUERRERO, J.S.; MACEDO, E.N.; AMORIM, N.S. A Review of Hybrid Integral Transform Solutions in Fluid Flow Problems with Heat or Mass Transfer and under Navier-Stokes Equations Formulations. **Num. Heat Transfer, Part B - Fundamentals**, v.76, no.1-28, 2019.

DEMIREL, Y. **Nonequilibrium Thermodynamics Transport and Rate Processes in Physical, Chemical and Biological Systems.** 3a edição, Elsevier B.V, 2014.

DORMOHAMMADI R.; FARZANEH-GORD M.; EBRAHIMI-MOGHADAM A.; AHMADI M. H. Heat transfer and entropy generation of the nanofluid flow inside sinusoidal wavy channels. **Journal of Molecular Liquids**, v.269, p.229–240, 2018.

FIGUEIRA da SILVA; COTTA, R. M. Benchmark results for internal forced convection through integral transformation. **Integral Communications in heat and Mass Transfer**. V. 23, p. 1019-1029, 1996.

HAITHAM, M. S. B.; ANAND, N. K.; CHEN, H. C. Numerical study of heat and momentum transfer in channels with wavy walls. **Numerical Heat Transfer**, Part A, v.47, p. 417–439, 2005.

HAITHAM, M. S. B.; SAHIN, A. Z. Thermodynamic analysis of fluid flow in channels with wavy sinusoidal walls. **Thermal Science**, v. 17, n. 3, p. 813-822, 2013.

IBÁÑEZ, G., CUEVAS, S. Entropy generation minimization of a MHD (magnetohydrodynamic) flow in a microchannel. **Energy**, v.35, pp. 4149-415, 2010.

IMSL LIBRARY. Rogue Wave Software. **Visual Numerics**. Boulder, 2010.

JALURIA, Yogesh. **Design and optimization of thermal systems**. CRC Press, 2008.

KO, TH. Numerical analysis of entropy generation and optimal Reynolds number for developing laminar forced convection in double-sine ducts with various aspect ratios. **International Journal of Heat Mass Transfer**, v.49, pp. 718-726, 2006.

KUNDU, Jadeep. **Numerical Investigation of Laminar Forced Convection in Two-Dimensional and Three-Dimensional Sinusoidal Corrugated Ducts**. Tese de Mestrado. Department of Mechanical Engineering, Andhra University, 2001.

LEITE, S. Q. D; ÖZISIK, M. N. On the solution of linear diffusion problem in media with moving boundaries. **Nucl. Science and Eng**., v.76, p.345-350, 1980.

LIMA, G. G. C.; SANTOS, C. A. C.; HAAG, A.; COTTA, R. M. Cotta. Integral transform solution of internal flow problems based on Navier–Stokes equations and primitive variables formulation. **Int. J. Numer. Meth. Engng**. v. 69, p.544–561, 2007.

LUIKOV, A. V. **Heat and Mass Transfer**. Mir Publishers, Moscow, 1973.

MACHADO H. A.; COTTA, R. M. Integral transform method dor boundary layer equations in simultaneous heat and fluid flow. **International Journal Numerical Methods Heat & Fluid Flow Problems**. V.5, p.225-237, 1995.

MAHIAN, O.; MAHMUD, S.; POP I. Analysis of first and second laws of thermodynamics between two isothermal cylinders with relative rotation in the presence of MHD flow. **Int J Heat Mass Transfer**, v.55, pp. 4808-4816, 2012

MAHMUD, S.; SARDUL ISLAM, A. K. M.; MAMUN, M. A. H. Separation characteristics of fluid flow inside two parallel plates with wavy surface. **International Journal of Engineering Science**. v. 40, p. 1495–1509, 2002.

MAYELI, P.; HESAMI, H.; MOGHADDAM, M.H.D.F., Numerical investigation of the MHD forced convection and entropy generation in a straight duct with sinusoidal walls containing water–Al2O3 nanofluid, **Numer. Heat Transf. Part A Appl**. v.71, p.1235–1250, 2017.

MATHEMATICA. Standart Version 9.0,1, Champaign, Illinois, 2013.

NARUSAWA, U. The second-law analysis of mixed convection in rectangular ducts. **Heat Mass Transfer**, v.37, pp. 197-203, 2001.

MIKHAILOV, M. D.; ÖZISIK, M. N. **Unified Analysis and Solution of Heat and Mass Diffusion**. John Wiley, New York, 1984.

NICENO, B.; NOBILE, E. Numerical analysis of fluid flow and heat transfer in periodic wavy channels. **International Journal of Heat and Fluid Flow**, v.22, p. 156-167, 2001.

NISHIMURA, T.; MURAKAMI, S.; ARAKAWA, S.; KAWAMURA, Y. Flow observations and mass transfer characteristics in symmetrical wavy-walled channels at moderate Reynolds numbers for steady flow. **International Journal of Heat Mass Transfer**. v. 33. n. 5. p. 835-845, 1990.

MONDAL, B.; MEHTA, S. K.; PATOWARI, P. K.; PATI, S. Numerical study of mixing in wavy micromixers: comparison between raccoon and serpentine mixer. **Chemical Engineering & Processing: Process Intensification.** v.136, p44–61, 2019.

OVIEDO-TOLENTINO, F.; MÉNDEZ, R. R.; HÉRNANDEZ-GUERRERO, A.; GIRÓN-PALOMARES, B. Experimental study of fluid flow in the entrance of a sinusoidal channel. **International Journal of Heat and Fluid Flow**. V.29, p. 1233–1239, 2008.

ÖZISIK, M. N. & MURRAY, R. L. On the solution of linear diffusion problems with variable boundary conditions parameters. **Journal of Heat Transfer**. Vol. 96, p. 48-51, 1974.

ÖZISIK, M. N. **Heat Conduction**, John Wiley, New York, 1980.

PAOLETTI, S.; RISPOLI, F., SCIUBBA, E. Calculation of exergetic losses in compact heat exchanger passages, **ASME AES** v.10, p. 21–29, 1989.

PARVIN, S.; HOSSAIN, F. N. Finite element simulation of MHD combined through a triangular wavy channel. **International Communications in Heat and Mass Transfer**. Vol. 39, p. 811-817, 2012.

PATI, S.; MEHTA, S. K.; BORAH, A. Numerical investigation of thermo-hydraulic transport characteristics in wavy channels: Comparison between raccoon and serpentine channels. **International Communications in Heat and Mass Transfer.** v.88, p. 171-176, 2017.

PÉREZ-GUERRERO, J. S.; COTTA, R. M. Integral transform solution of developing laminar duct flow in Navier-Stokes formulation. **International journal for numerical methods in fluids.** v. 20, p. 1203-1213, 1995.

PÉREZ-GUERRERO, J. S. **Transformação Integral das equações de Navier-Stokes para escoamento laminar em canais de Geometria Bidimensional Arbitrária**. Tese de Doutorado, PEM/COPPE, Rio de Janeiro, 1995.

PÉREZ-GUERRERO, J. S.; QUARESMA, J. N. N.; COTTA, R. M. Simulation of laminar flow inside ducts of irregular geometry using integral transforms. **Computational Mechanics**. v. 25, p. 413-420, 2000.

PONTES, F.A.; MACÊDO, E.N.; BATISTA, C. da S.; LIMA, J.A.; QUARESMA, J.N.N. Hybrid solutions obtained via integral transforms for magnetohydrodynamic flow with heat transfer in parallel-plate channels. **Int. J. Numer. Methods Heat Fluid Flow**. v.28, p1474-1505, 2018.

PRIGONINE, I. Introduction to thermodynamics of Irreversible Processes. Third Edition, NY, John Wiley and Sons, 1955.

RAMGADIA, A. G.; SAHA, Arun K. Fully developed flow and heat transfer characteristics in a wavy passage: Effect of amplitude of waviness and Reynolds number. **International Journal of Heat and Mass Transfer**, v.55, p.2494–2509, 2012.

RAMGADIA, A. G.; SAHA, Arun K. Numerical study of fully developed flow and heat transfer in a wavy passage. **International Journal of Thermal Sciences**. v. 67, p. 152-166, 2013.

RAMGADIA A.G.; SAHA, Arun K. Numerical study of fully developed unsteady flow and heat transfer in asymmetric wavy channels, **International Journal of Heat and Mass Transfer** v.102, p98–112, 2016.

RASHIDI, M. M.; Ali, M.; FREIDOONIMEHR, N.; NAZARI, F.; Parametric analysis and optimization of entropy generation in unsteady MHD flow over a stretching rotating disk using artificial neural network and particle swarm optimization algorithm. **Energy**, v.55, pp. 497-510, 2013.

RUSH, T. A.; NEWELL, T. A.; JACOBI, A. M. An experimental study flow and heat transfer in sinusoidal wavy passages. **International Journal of Heat and Mass Transfer**. v.31, p. 430-442, 1999.

SALAMI, M.; ALIABADI, M. K.; FEIZBADI, A. Investigation of corrugated channel performance with different wave shapes. **Journal of Thermal Analysis and Calorimetry**. 2019.

SCIACOVELLI, A.;VERDA, V.; SCIUBBA, E. Entropy generation analysis as a design tool—A review. **Renewable and Sustainable Energy Reviews**. v.43, p.1167–1181, 2015.

SILVA, R. L. **A Técnica da Transformada Integral Generalizada no Escoamento e na Transferência de Calor em Dutos. Tese de Doutorado**, PPGEM/UFPB, João Pessoa-Paraíba, 2003.

SILVA, R. L.; QUARESMA, J. N. N.; SANTOS, C. A. C.; COTTA, R. M. Integral transforms solution for flow development in wavy wall ducts. **International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow**. V. 21. n. 2, p. 219-243, 2011.

SLATTERY, J.C. **Advanced Transport Phenomena**, Cambridge University Press,New York, NY, EUA, 1999.

SPHAIER, L. A.; COTTA, R. M.; NAVEIRA-COTTA, C.P.; QUARESMA, J. N. N. The UNIT algorithm for solving one-dimensional convection-diffusion problems via integral transforms. **International Communications in Heat and Mass Transfer.** V.38, p.565-571, 2011.

STONE, K.; VANKA, S. P. Numerical Study of Developing Flow and Heat Transfer in a Wavy Passage. **Journal of Fluids Engineering**, v. 121, 1999.

SUI, Y.; TEO, C.J.; LEE, P.S.; CHEW, Y.T.; SHU, C. Fluid flow and heat transfer in wavy microchannels. **International Journal of Heat and Mass Transfer**, v. 53, p.2760–2772, 2010.

VAROL, Y.; OZTOP, H.F.; KOCA, A. Entropy production due to free convection in partially heated isosceles triangular enclosures. **Applied Thermal Engineering**, 28 (2008), pp. 1502-1513

YILBAS, B. S; SHUJA, S. Z; BUDAIR, M. O. Second law analysis of a swirling flow in a circular duct with restriction. **Int J Heat Mass Transfer**, v.42, pp. 4027-4041, 1999.

WANG, G.; VANKA, S. P. Convective heat transfer in periodic wavy passages. **International Journal Heat Mass Transfer.** v. 38, n. 17, p. 3219-3230, 1995.

WANG, C.-C.; CHEN, C.-K. Forced convection in a wavy-wall channel. **International Journal Heat and Mass Transfer**, v.45, p. 2587–2595, 2002.

WHITE, Frank M. **Mecânica dos fluidos**. Porto Alegre: AMGH, 2011.

WOLFRAM, S. MATHEMATICA. A System for doing Mathematics by Computer, The Advanced Book Program. Addison Wesley, Reading, 2005.

APÊNDICE A

TRANSFORMAÇÃO INTEGRAL DO PROBLEMA E COEFICIENTES DO SISTEMA DIFERENCIAL

A.1 CAMPO DE FUNÇÃO CORRENTE

Definindo:

$$L_1[f,g] = \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial^3 g}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 g}{\partial x \partial y^2}\right) - \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial^3 g}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 g}{\partial y^3}\right) \tag{A.1.a}$$

$$L_2[f] = \frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^4 f}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 f}{\partial y^4}\right) \tag{A.1.b}$$

A aplicação do filtro na Eq. geral (3.4a) resulta em:

$$L_1[\phi,\phi] + L_1[\phi,F] + L_1[F,\phi] + L_1[F,F] = L_2[\phi] + L_2[F] \tag{A.2}$$

Aplicando a transformação integral para cada termo da Eq. (A.2):

$$\int_{-y_1}^{y_2} Y_i L_1[\phi,\phi] dy = \int_{-y_1}^{y_2} Y_i \left[\frac{\partial \phi}{\partial y}\left(\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \phi}{\partial x \partial y^2}\right) - \frac{\partial \phi}{\partial y}\left(\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 \phi}{\partial y^3}\right)\right] dy \tag{A.3}$$

$$\int_{-y_1}^{y2} Y_i \frac{\partial \phi}{\partial y}\left(\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \phi}{\partial x \partial y^2}\right) dy = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\int_{-y_1}^{y_2} Y_i \psi_j \frac{\partial \psi_j}{\partial y}\left[\frac{\partial^3 Y_k}{\partial x^3}\psi_k + \frac{\partial^3 \psi_k}{\partial x^3} Y_k + 3\left(\frac{\partial^2 Y_k}{\partial x^2}\frac{\partial \psi_k}{\partial x} + \frac{\partial^2 \psi_k}{\partial x^2}\frac{\partial Y_k}{\partial x}\right) + \frac{\partial \psi_k}{\partial x}\frac{\partial^2 Y_k}{\partial y^2} + \psi_k \frac{\partial^3 Y_k}{\partial x \partial y^3}\right] dy$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \psi_j \psi_k \int_{-y_1}^{y_2} Y_i \frac{\partial Y_j}{\partial y}\left(\frac{\partial^3 Y_k}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 Y_k}{\partial x \partial y^2}\right) dy + \psi_j \psi_k' \int_{-y_1}^{y_2} Y_i \frac{\partial Y_j}{\partial y}\left(3\frac{\partial^2 Y_k}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Y_k}{\partial y^2}\right) dy + \psi_j \psi_k'' \int_{-y_1}^{y_2} 3Y_i \frac{\partial Y_j}{\partial y}\frac{\partial Y_k}{\partial x} dy + \psi_j \psi_k''' \int_{-y_1}^{y_2} Y_i \frac{\partial Y_j}{\partial y} Y_k dy \tag{A.4}$$

$$\int_{-y_1}^{y2} Y_i \frac{\partial \phi}{\partial y}\left(\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 \phi}{\partial y^3}\right) dy = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\int_{-y_1}^{y_2} Y_i \left(\frac{\partial Y_j}{\partial x}\psi_j + Y_j \frac{\partial \psi_j}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2 \psi_k}{\partial x^2}\frac{\partial Y_k}{\partial y} + 2\frac{\partial \psi_k}{\partial x}\frac{\partial^2 Y_k}{\partial x \partial y} + \psi_k \frac{\partial^3 Y_k}{\partial x^2 \partial y} + \psi_k \frac{\partial^3 Y_k}{\partial y^3}\right) dy$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\psi_j\psi_k\int_{-y_1}^{y_2} Y_i \frac{\partial Y_j}{\partial x}\left(\frac{\partial^3 Y_k}{\partial x^2 \partial y}+\frac{\partial^3 Y_k}{\partial y^3}\right)dy + \\
&\quad \psi_j\psi_k^{'}\int_{-y_1}^{y_2} 2Y_i \frac{\partial Y_j}{\partial x}\frac{\partial^2 Y_k}{\partial x \partial y}dy + \psi_j\psi_k^{''}\int_{-y_1}^{y_2} Y_i \frac{\partial Y_j}{\partial x}\frac{\partial Y_k}{\partial y}dy + \\
&\quad \psi_j^{'}\psi_k\int_{-y_1}^{y_2} Y_i Y_j\left(\frac{\partial^3 Y_k}{\partial x^2 \partial y}+\frac{\partial^3 Y_k}{\partial y^3}\right)dy + \\
&\quad \psi_j^{'}\psi_k^{'}\int_{-y_1}^{y_2} 2Y_i Y_j \frac{\partial^2 Y_k}{\partial x \partial y}dy + \psi_j^{'}\psi_k^{''}\int_{-y_1}^{y_2} 2Y_i Y_j \frac{\partial Y_k}{\partial y}dy
\end{aligned} \tag{A.5}
$$

$$
\int_{-y_1}^{y_2} L_1[\phi, F]dy = \int_{-y_1}^{y_2} Y_i\left[\frac{\partial \phi}{\partial y}\left(\frac{\partial^3 F}{\partial x^3}+\frac{\partial^3 F}{\partial x \partial y^2}\right)-\frac{\partial \phi}{\partial y}\left(\frac{\partial^3 F}{\partial x^2 \partial y}+\frac{\partial^3 F}{\partial y^3}\right)\right]dy \tag{A.6}
$$

$$
\begin{aligned}
\int_{-y_1}^{y2} Y_i \frac{\partial \phi}{\partial y}\left(\frac{\partial^3 F}{\partial x^3}+\frac{\partial^3 F}{\partial x \partial y^2}\right)dy &= \sum_{j=1}^{\infty}\int_{-y_1}^{y_2} Y_i \frac{\partial Y_j}{\partial y}\psi_j\left(\frac{\partial^3 F}{\partial x^3}+\frac{\partial^3 F}{\partial x \partial y^2}\right)dy \\
&= \sum_{j=1}^{\infty}\psi_j\int_{-y_1}^{y_2} Y_i \frac{\partial Y_j}{\partial y}\left(\frac{\partial^3 F}{\partial x^3}+\frac{\partial^3 F}{\partial x \partial y^2}\right)dy
\end{aligned} \tag{A.7}
$$

$$
\begin{aligned}
\int_{-y_1}^{y2} Y_i \frac{\partial \phi}{\partial y}\left(\frac{\partial^3 F}{\partial x^2 \partial y}+\frac{\partial^3 F}{\partial y^3}\right)dy &= \sum_{j=1}^{\infty}\int_{-y_1}^{y_2} Y_i\left(\frac{\partial Y_j}{\partial x}\psi_j + Y_j\frac{\partial \psi_j}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial^3 F}{\partial x^2 \partial y}+\frac{\partial^3 F}{\partial y^3}\right)dy \\
&= \sum_{j=1}^{\infty}\psi_j\int_{-y_1}^{y_2} Y_i \frac{\partial Y_j}{\partial x}\left(\frac{\partial^3 F}{\partial x^2 \partial y}+\frac{\partial^3 F}{\partial y^3}\right)dy + \\
&\quad \psi_j^{'}\int_{-y_1}^{y_2} Y_i Y_j\left(\frac{\partial^3 F}{\partial x^2 \partial y}+\frac{\partial^3 F}{\partial y^3}\right)dy
\end{aligned} \tag{A.8}
$$

$$
\int_{-y_1}^{y2} L_1[F, \phi]dy = \int_{-y_1}^{y_2} Y_i\left[\frac{\partial F}{\partial y}\left(\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3}+\frac{\partial^3 \phi}{\partial x \partial y^2}\right)-\frac{\partial F}{\partial y}\left(\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^2 \partial y}+\frac{\partial^3 \phi}{\partial y^3}\right)\right]dy \tag{A.9}
$$

$$
\begin{aligned}
\int_{-y_1}^{y2} Y_i \frac{\partial F}{\partial y}\left(\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3}+\frac{\partial^3 \phi}{\partial x \partial y^2}\right)dy &= \sum_{j=1}^{\infty}\int_{-y_1}^{y_2} Y_i \frac{\partial F}{\partial y}\left[\frac{\partial^3 Y_j}{\partial x^3}\psi_j + Y_j\frac{\partial^3 \psi_j}{\partial x^3} + 3\left(\frac{\partial^2 Y_j}{\partial x^2}\frac{\partial \psi_j}{\partial x} + \right.\right. \\
&\quad \left.\left.\frac{\partial Y_j}{\partial x}\frac{\partial^2 \psi_j}{\partial x^2}\right) + \frac{\partial \psi_j}{\partial x}\frac{\partial^2 Y_j}{\partial y^2} + \psi_j\frac{\partial^3 Y_j}{\partial x \partial y^3}\right]dy
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^{\infty} \psi_j \int_{-y_1}^{y_2} Y_i \left(\frac{\partial^3 Y_j}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 Y_j}{\partial x \partial y^2} \right) \frac{\partial F}{\partial y}\, dy + \\
&\quad \psi_j' \int_{-y_1}^{y_2} Y_i \left(3\frac{\partial^2 Y_j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Y_j}{\partial y^2} \right) \frac{\partial F}{\partial y}\, dy + \\
&\quad \psi_j'' \int_{-y_1}^{y_2} 3Y_i \frac{\partial Y_j}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial y}\, dy + \psi_j''' \int_{-y_1}^{y_2} Y_i Y_j \frac{\partial F}{\partial y}\, dy
\end{aligned} \tag{A.11}
$$

$$
\begin{aligned}
\int_{-y_1}^{y2} Y_i \frac{\partial F}{\partial y} \left(\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 \phi}{\partial y^3} \right) dy &= \sum_{j=1}^{\infty} \int_{-y_1}^{y_2} Y_i \frac{\partial F}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi_j}{\partial x} \frac{\partial^2 Y_j}{\partial y^2} + \psi_j \frac{\partial^3 Y_j}{\partial x \partial y^2} + \psi_j \frac{\partial^3 Y_j}{\partial y^3} \right) dy \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \psi_j \int_{-y_1}^{y_2} Y_i \frac{\partial F}{\partial x} \left(\frac{\partial^3 Y_j}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 Y_j}{\partial y^3} \right) dy + \psi_j' \int_{-y_1}^{y_2} Y_i \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial^2 Y_j}{\partial y^2}\, dy
\end{aligned} \tag{A.12}
$$

$$
\int_{-y_1}^{y2} Y_i L_1[F,F]\, dy = \int_{-y_1}^{y2} Y_i \left[\frac{\partial F}{\partial y} \left(\frac{\partial^3 F}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 F}{\partial x \partial y^2} \right) - \frac{\partial F}{\partial x} \left(\frac{\partial^3 F}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 F}{\partial y^3} \right) \right] dy \tag{A.13}
$$

$$
\begin{aligned}
\int_{-y_1}^{y2} Y_i L_2[F]\, dy &= \frac{1}{\mathrm{Re}} \int_{-y_1}^{y2} Y_i \left[\left(\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} \right) \right] dy \\
&= \frac{1}{\mathrm{Re}} \int_{-y_1}^{y2} Y_i \left[\left(\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} \right) \right] dy
\end{aligned} \tag{A.14}
$$

em que $\dfrac{\partial^4 F}{\partial y^4} = 0$

$$
\int_{-y_1}^{y2} Y_i L_2[\phi]\, dy = \frac{1}{\mathrm{Re}} \int_{-y_1}^{y2} Y_i \left[\left(\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} \right) \right] dy \tag{A.15}
$$

$$
\begin{aligned}
\int_{-y_1}^{y2} Y_i \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4}\, dy &= \sum_{j=1}^{\infty} Y_i \left(\int_{-y_1}^{y_2} \frac{\partial^4 Y_j}{\partial x^4} \psi_j\, dy + 4\int_{-y_1}^{y_2} \frac{\partial^3 Y_j}{\partial x^3} \psi_j'\, dy + 6\psi_j'' \int_{-y_1}^{y_2} {}_i \frac{\partial^2 Y_j}{\partial x^2}\, dy + \right. \\
&\qquad \left. 4\int_{-y_1}^{y_2} \frac{\partial Y_j}{\partial x} \psi_j'''\, dy + Y_j \psi_i^{(iv)} \right) \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \left(\psi_j \int_{-y_1}^{y_2} Y_i \frac{\partial^4 Y_j}{\partial x^4}\, dy + 4\psi_j' \int_{-y_1}^{y_2} Y_i \frac{\partial^3 Y_j}{\partial x^3}\, dy + \right. \\
&\qquad \left. 6\psi_j'' \int_{-y_1}^{y_2} Y_i \frac{\partial^2 Y_j}{\partial x^2}\, dy + 4\psi_j''' \int_{-y_1}^{y_2} Y_i \frac{\partial Y_j}{\partial x}\, dy \right) + N\psi_i^{(iv)}
\end{aligned} \tag{A.16}
$$

$$
\begin{aligned}
\int_{-y_1}^{y2} Y_i \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2}\, dy &= \int_{-y_1}^{y_2} 2Y_i \left(\frac{\partial^2 \psi_j}{\partial x^2} \frac{\partial Y_j}{\partial y} + 2\frac{\partial \psi_j}{\partial x} \frac{\partial^3 Y_j}{\partial x \partial y^2} + \psi_j \frac{\partial^4 Y_j}{\partial x^2 \partial y^2} \right) dy \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \left(\psi_j \int_{-y_1}^{y_2} 2Y_i \frac{\partial^4 Y_j}{\partial x^2 \partial y^2}\, dy + 4\psi_j' \int_{-y_1}^{y_2} Y_i \frac{\partial^3 Y_j}{\partial x \partial y^2}\, dy + 2\psi_j'' \int_{-y_1}^{y_2} Y_i \frac{\partial Y_j}{\partial y}\, dy \right)
\end{aligned} \tag{A.17}
$$

$$\int_{-y_1}^{y2} Y_i \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} dy = \int_{-y_1}^{y2} Y_i \left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\partial^4 Y_j}{\partial y^4} \psi_j \right) dy = \mu_i^4 N \psi_i \tag{A.18}$$

Deixando em evidência o diferencial de 4ª ordem e reordenando de maneira conveniente, tem-se:

$$\begin{aligned} \bar{\phi}_i^{(iv)} = -\mu_i^4 \bar{\phi}_i + \frac{L_i}{N} + \frac{Re}{N} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \Big\{ & \bar{\phi}_j \bar{\phi}_k A_{ijk} + \bar{\phi}_j \bar{\phi}_k^{'} B_{ijk} + \bar{\phi}_j \bar{\phi}_k^{''} C_{ijk} + \bar{\phi}_j \bar{\phi}_k^{'''} D_{ijk} + \\ & \bar{\phi}_j^{'} \bar{\phi}_k E_{ijk} + \bar{\phi}_j^{'} \bar{\phi}_k^{'} F_{ijk} + \bar{\phi}_j^{'} \bar{\phi}_k^{''} G_{ijk} \Big\} + \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{\infty} \Big\{ \bar{\phi}_j H_{ij} + \bar{\phi}_j^{'} I_{ij} + \bar{\phi}_j^{''} J_{ij} + \bar{\phi}_j^{'''} K_{ij} \Big\} \end{aligned} \tag{A.19}$$

na qual os coeficientes são dependentes de x e calculador por:

$$\begin{aligned} A_{ijk} = & \int_{-y_1}^{y_2} Y_i \frac{\partial Y_j}{\partial y} \frac{\partial^3 Y_k}{\partial x^3} dy + \int_{-y_1}^{y_2} Y_i \frac{\partial Y_j}{\partial y} \frac{\partial^3 Y_k}{\partial x \partial y^2} dy - \int_{-y_1}^{y_2} Y_i \frac{\partial Y_j}{\partial x} \frac{\partial^3 Y_k}{\partial x^2 \partial y} dy \\ & - \int_{-y_1}^{y_2} Y_i \frac{\partial Y_j}{\partial x} \frac{\partial^3 Y_k}{\partial y^3} dy \end{aligned} \tag{A.20}$$

$$B_{ijk} = 3\int_{-y_1}^{y_2} Y_i \frac{\partial Y_j}{\partial y} \frac{\partial^2 Y_k}{\partial x^2} dy + \int_{-y_1}^{y_2} Y_i \frac{\partial Y_j}{\partial y} \frac{\partial^2 Y_k}{\partial y^2} dy - 2\int_{-y_1}^{y_2} Y_i \frac{\partial Y_j}{\partial x} \frac{\partial^2 Y_k}{\partial x \partial y} dy \tag{A.21}$$

$$C_{ijk} = 3\int_{-y_1}^{y_2} Y_i \frac{\partial Y_j}{\partial y} \frac{\partial Y_k}{\partial x} dy - \int_{-y_1}^{y_2} Y_i \frac{\partial Y_j}{\partial x} \frac{\partial Y_k}{\partial y} dy \tag{A.22}$$

$$D_{ijk} = \int_{-y_1}^{y_2} Y_i \frac{\partial Y_j}{\partial y} Y_k dy \tag{A.23}$$

$$E_{ijk} = -\int_{-y_1}^{y_2} Y_i Y_j \frac{\partial^3 Y_k}{\partial x^2 \partial y} dy - \int_{-y_1}^{y_2} Y_i Y_j \frac{\partial^3 Y_k}{\partial y^3} dy \tag{A.24}$$

$$F_{ijk} = -2\int_{-y_1}^{y_2} Y_i Y_j \frac{\partial^2 Y_k}{\partial x \partial y} dy \tag{A.25}$$

$$G_{ijk} = -\int_{-y_1}^{y_2} Y_i Y_j \frac{\partial Y_k}{\partial y} dy \tag{A.26}$$

$$H_{ij} = Re\, a_{ij} - b_{ij} \tag{A.27}$$

$$I_{ij} = Re\, c_{ij} - d_{ij} \tag{A.28}$$

$$J_{ij} = Re\, e_{ij} - f_{ij} \tag{A.29}$$

$$K_{ij} = \mathrm{Re}\, g_{ij} - h_{ij} \tag{A.30}$$

$$L_i = \mathrm{Re}\, i_i - j_i \tag{A.31}$$

$$\begin{aligned} a_{ij} = &\int_{-y_1}^{y_2} Y_i \frac{\partial Y_j}{\partial y}\frac{\partial^3 F}{\partial x^3}dy + \int_{-y_1}^{y_2} Y_i \frac{\partial Y_j}{\partial y}\frac{\partial^3 F}{\partial x \partial y^2}dy - \int_{-y_1}^{y_2} Y_i \frac{\partial Y_j}{\partial x}\frac{\partial^3 F}{\partial x^2 \partial y}dy - \int_{-y_1}^{y_2} Y_i \frac{\partial Y_j}{\partial x}\frac{\partial^3 F}{\partial y^3}dy \\ &+ \int_{-y_1}^{y_2} Y_i \frac{\partial^3 Y_j}{\partial y^3}\frac{\partial F}{\partial x}dy + \int_{-y_1}^{y_2} Y_i \frac{\partial^3 Y_j}{\partial x^2 \partial y}\frac{\partial F}{\partial y}dy - \int_{-y_1}^{y_2} Y_i \frac{\partial^3 Y_j}{\partial x^2 \partial y}\frac{\partial F}{\partial x}dy - \int_{-y_1}^{y_2} Y_i \frac{\partial^3 Y_j}{\partial y^3}\frac{\partial F}{\partial x}dy \end{aligned} \tag{A.32}$$

$$b_{ij} = \int_{-y_1}^{y_2} Y_i \frac{\partial^4 Y_j}{\partial x^4}dy + 2\int_{-y_1}^{y_2} Y_i \frac{\partial^4 Y_j}{\partial x^2 \partial y^2}dy \tag{A.33}$$

$$\begin{aligned} c_{ij} = &\int_{-y_1}^{y_2} Y_i Y_j \frac{\partial^3 F}{\partial x^2 \partial y}dy - \int_{-y_1}^{y_2} Y_i Y_j \frac{\partial^3 F}{\partial y^3}dy + 3\int_{-y_1}^{y_2} Y_i \frac{\partial^2 Y_j}{\partial x^2}\frac{\partial F}{\partial y}dy \\ &+ \int_{-y_1}^{y_2} Y_i \frac{\partial^2 Y_j}{\partial y^2}\frac{\partial F}{\partial y}dy - 2\int_{-y_1}^{y_2} Y_i \frac{\partial^2 Y_j}{\partial x \partial y}\frac{\partial F}{\partial x}dy \end{aligned} \tag{A.34}$$

$$d_{ij} = 4\int_{-y_1}^{y_2} Y_i \frac{\partial^3 Y_j}{\partial x^3}dy + 4\int_{-y_1}^{y_2} Y_i \frac{\partial^3 Y_j}{\partial x \partial y^2}dy \tag{A.35}$$

$$e_{ij} = 3\int_{-y_1}^{y_2} Y_i \frac{\partial Y_j}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y}dy - \int_{-y_1}^{y_2} Y_i \frac{\partial Y_j}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial x}dy \tag{A.36}$$

$$f_{ij} = 6\int_{-y_1}^{y_2} Y_i \frac{\partial^2 Y_j}{\partial x^2}dy - \int_{-y_1}^{y_2} Y_i \frac{\partial^2 Y_j}{\partial y^2}dy \tag{A.37}$$

$$g_{ij} = \int_{-y_1}^{y_2} Y_i Y_j \frac{\partial F}{\partial y}dy \tag{A.38}$$

$$h_{ij} = 4\int_{-y_1}^{y_2} Y_i \frac{\partial Y_j}{\partial x}dy \tag{A.39}$$

$$i_{ij} = \int_{-y_1}^{y_2} Y_i \left(\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial^3 F}{\partial x^3} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial^3 F}{\partial x \partial y^2} - \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial^3 F}{\partial x^2 \partial y} - \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial^3 F}{\partial y^3} \right)dy \tag{A.40}$$

$$j_{ij} = \int_{-y_1}^{y_2} Y_i \left(\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} \right)dy \tag{A.41}$$

Considerando-se o perfil de entrada uniforme, as condições de contorno do duto truncado em x = 0 são:

$$u = 0 \text{ e } v = 0 \tag{A.42.a,b}$$

Ou em termos de função corrente:

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = 1 \ \text{e} \ \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \tag{A.43.a,b}$$

Assim, em termos da variável ξ:

$$\int_{-\frac{H_{min}}{2}}^{y} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} d\xi = \int_{-\frac{H_{min}}{2}}^{y} 1 d\xi \tag{A.44.a,b}$$

$$\psi = k_1 + y + \frac{H_{min}}{2} \ \text{e} \ \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \tag{A.45.a,b}$$

Em x = 0:

$$\phi = -\frac{y}{2} + \frac{2}{H_{min}^2} y^3 \tag{A.46.a}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{\partial F}{\partial x} \tag{A.46.b}$$

Aplicando a transformação integral em A.44.b:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \sum_{i=1}^{NTV} \left(\frac{\partial Y_i}{\partial x} \bar{\phi}_i + Y_i \frac{\partial \bar{\phi}_i}{\partial x} \right) \tag{A.47}$$

$$\left.\frac{\partial \phi}{\partial x}\right|_{x=0} = \sum_{i=1}^{NTV} \left[\left.\frac{\partial Y_i}{\partial x}\right|_{x=0} \bar{\phi}_i(0) + Y_i(0,y) \frac{\partial \bar{\phi}_i(0)}{\partial x} \right] \tag{A.48}$$

$$\left.\frac{\partial \phi}{\partial x}\right|_{x=0} = \sum_{i=1}^{NTV} Y_i(0,y) \frac{\partial \bar{\phi}_i(0)}{\partial x} = 0 \tag{A.49}$$

$$\sum_{i=1}^{NTV} \left[\frac{\partial \bar{\phi}_i(0)}{\partial x} \int_{-y_1}^{y_2} Y_i(0,y) Yj(0,y) dy \right] = 0 \tag{A.50}$$

$$\frac{\partial \bar{\phi}_i(0)}{\partial x} = 0 \tag{A.51}$$

Aplicando a transformação integral em (A.44.a):

$$\phi(0,y) = -\frac{y}{2} + \frac{2}{H_{min}^2} y^3 \tag{A.52}$$

$$\sum_{i=1}^{NTV} Y_i(0,y)\bar{\phi}_i(0) = -\frac{y}{2} + \frac{2}{H_{min}^2} y^3 \tag{A.53}$$

$$\sum_{i=1}^{NTV} \left[\bar{\phi}_i(0) \int_{-y_1}^{y_2} Y_i(0,y) Yj(0,y) dy \right] = \int_{-y_1}^{y_2} \left(-\frac{y}{2} + \frac{2}{H_{min}^2} y^3 \right) Y_i(0,y) dy \tag{A.54}$$

$$N(0)\bar{\phi}_i(0) = \int_{-y_1}^{y_2} \left(-\frac{y}{2} + \frac{2}{H_{min}^2} y^3 \right) Y_i(0,y) dy \tag{A.55}$$

Mudando a variável para ξ:

$$H_{min}\bar{\phi}_i(0) = y_0 \int_{-1}^{1} \left(-\frac{y_0(0)\xi}{2} + \frac{2y_0^3(0)\xi^3}{H_{min}^2} \right) Y_i(\xi) d\xi \tag{A.56}$$

$$\bar{\phi}_i(0) = \frac{H_{min}}{8} \int_{-1}^{1} \left(\xi^3 - \xi \right) Y_i(\xi) d\xi \tag{A.57}$$

APÊNDICE B

COEFICIENTES DO SISTEMA APÓS A MUDANÇA DE VARIÁVEL

Considerando:

$$\xi = \frac{y - y_3(x)}{y_0(x)} \quad , \quad p = \frac{1}{y_0(x)} \quad e \quad q = \frac{y_3(x)}{y_0(x)} \tag{B.1.a,b,c}$$

$$\xi = yp - q \tag{B.2}$$

Assim:

$$\frac{\partial^n \xi}{\partial x^n} = \xi W_{(n)} - S_{(n)} \tag{B.3}$$

em que:

$$W_{(n)} = y_0(x) p^{(n)} \quad e \quad S_{(n)} = y_3(x) p^{(n)} - q^{(n)} \tag{B.4.a,b}$$

Desta forma, qualquer derivada de uma autofunção em relação a x poderá ser representada facilmente como uma derivada em ξ, ao se aplicar a regra da cadeia. As derivadas da autofunção em relação a y são calculadas mais facilmente como:

$$\frac{\partial^n Y_i}{\partial y^n} = \frac{\partial^n Y_i}{\partial \xi^n}\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^n \tag{B.5}$$

Como $\dfrac{\partial \xi}{\partial y} = p$

$$\frac{\partial^n Y_i}{\partial y^n} = \frac{\partial^n Y_i}{\partial \xi^n} p^n \tag{B.6}$$

Os coeficientes do Anexo A, foram então calculados fornecendo as expressões (B.1-6) ao *software* Mathematica®, com o qual se gerou a seguinte representação para os coeficientes:

Coeficientes "Tridimensionais":

$$A_{ijk} = A1(x)A1_{ijk} + A2(x)A2_{ijk} + A3(x)A3_{ijk} + A4(x)A4_{ijk} + A5(x)A5_{ijk} \quad (B.7)$$

$$\begin{aligned} &A1(x) = 2(W'W'' - W'^3); \quad A2(x) = W''' - W'W''; \\ &A3(x) = 2(W''S' + W'S' - 2W'^2 S'); \\ &A4(x) = S''' - W''S; \quad A5(x) = 2(S'S'' + pp' - W'S'^2) \end{aligned} \quad (B.8.a-e)$$

$$B_{ijk} = B1(x)B1_{ijk} + B2(x)B2_{ijk} + B3(x)B3_{ijk} + B4(x)B4_{ijk} + B5(x)B5_{ijk} \quad (B.9)$$

$$\begin{aligned} &B1(x) = W'^2; \quad B2(x) = 3W''' - 2W'^2; \quad B3(x) = 2W'S' \\ &B4(x) = 3S'' - 2W'S'; \quad B5(x) = p^2 - S'^2 \end{aligned} \quad (B.10.a-e)$$

$$\begin{aligned} &B1_{ijk} = A1_{ijk}; \quad B2_{ijk} = A2_{ijk}; \quad B3_{ijk} = A3_{ijk}; \\ &B4_{ijk} = A4_{ijk}; \quad B5_{ijk} = A5_{ijk} \end{aligned} \quad (B.11.a-e)$$

$$C_{ijk} = C1(x)C1_{ijk} + C2(x)C2_{ijk} \quad (B.12)$$

$$C1(x) = 2W'; \quad C2(x) = 2S' \quad (B.13.a,b)$$

$$C1_{ijk} = A2_{ijk}; \quad C2_{ijk} = A4_{ijk} \quad (B.14.a,b)$$

$$D_{ijk} = \int_{-1}^{1} Y_i Y_j' Y_k d\xi \quad (B.15)$$

$$\begin{aligned} E_{ijk} = {} & E1(x)E1_{ijk} + E2(x)E2_{ijk} + E3(x)E3_{ijk} + E4(x)E4_{ijk} + \\ & E5(x)E5_{ijk} + E6(x)E6_{ijk} \end{aligned} \quad (B.16)$$

$$\begin{aligned} &E1(x) = -2W'^2; \quad E2(x) = -2W'S'; \quad E3(x) = -(W'' + 2W'^2) \\ &E4(x) = -(p^2 + S'^2); \quad E5(x) = -(2W'S' + S''); \quad E6(x) = -W'' \end{aligned} \quad (B.17.a-f)$$

$$\begin{aligned} &E1_{ijk} = A6_{ijk}; \quad E2_{ijk} = A7_{ijk}; \quad E3_{ijk} = A8_{ijk}; \\ &E4_{ijk} = A9_{ijk}; \quad E5_{ijk} = A10_{ijk}; \quad E6_{ijk} = A11_{ijk} \end{aligned} \quad (B.18.a-f)$$

$$F_{ijk} = F1(x)F1_{ijk} + F2(x)F2_{ijk} + F3(x)F3_{ijk} \quad (B.19)$$

$$F1(x) = -2W'; \quad F2(x) = -2S'; \quad F3(x) = -2W' \quad (B.20.a-c)$$

$$F1_{ijk} = A8_{ijk}; \quad F2_{ijk} = A10_{ijk}; \quad F3_{ijk} = A11_{ijk} \quad (B.21.a-c)$$

$$F_{ijk} = A11_{ijk} \quad (B.22)$$

nas quais as integrais:

$$A1_{ijk} = \int_{-1}^{1} \xi^2 Y_i\ Y_j^{'} Y_k^{''} d\xi$$
$$A2_{ijk} = \int_{-1}^{1} \xi Y_i\ Y_j^{'} Y_k^{'} d\xi$$
$$A3_{ijk} = \int_{-1}^{1} \xi Y_i\ Y_j^{'} Y_k^{''} d\xi$$
$$A4_{ijk} = \int_{-1}^{1} Y_i\ Y_j^{'} Y_k^{'} d\xi$$
$$A5_{ijk} = \int_{-1}^{1} Y_i\ Y_j^{'} Y_k^{''} d\xi$$
$$A6_{ijk} = \int_{-1}^{1} \xi^2 Y_i\ Y_j\ Y_k^{'''} d\xi \qquad \text{(B.23.a-j)}$$
$$A7_{ijk} = \int_{-1}^{1} \xi Y_i\ Y_j\ Y_k^{'''} d\xi$$
$$A8_{ijk} = \int_{-1}^{1} \xi Y_i\ Y_j\ Y_k^{''} d\xi$$
$$A9_{ijk} = \int_{-1}^{1} Y_i\ Y_j\ Y_k^{'''} d\xi$$
$$A10_{ijk} = \int_{-1}^{1} Y_i\ Y_j\ Y_k^{''} d\xi$$
$$A11_{ijk} = \int_{-1}^{1} Y_i\ Y_j\ Y_k^{'} d\xi$$

Podem ser avaliadas analiticamente no *software* Mathematica®.

Coeficientes “Bidimensionais”:

$$\begin{aligned} a_{ij} = {} & a1(x)a1_{ij} + a2(x)a2_{ij} + a3(x)a3_{ij} + a4(x)a4_{ij} + a5(x)a5_{ij} + \\ & a6(x)a6_{ij} + a7(x)a7_{ij} + a^{*}8(x)a8_{ij} + a8(x)a9_{ij} \end{aligned} \qquad \text{(B.24)}$$

$$a1(x) = 2(fqW'^3 - fqW'W'');$$
$$a2(x) = 4fqW'^2 S' - 2fqW'''S' - 2fqW'S'';$$
$$a3(x) = 4fqW'^3 - 2fqW''' - 2fqW'W''';$$
$$a4(x) = 2fq(W'W'' - S'S'' - pp' - W'^3 + W'S'^2);$$
$$a5(x) = fq(8W'^2 S' + S''' - 4W'S'' - 2W''S'); \qquad \text{(B.25.a-i)}$$
$$a6(x) = 2fq(W'S'' - W''S'' - 2W'^2 S');$$
$$a7(x) = 2fq(W''' - W'W'' - 2S''S' - 2pp' + 2W'S'^2);$$
$$a8(x) = 2fq(pp' - S'S'' - W'S'^2);$$
$$a9(x) = 2fq(S''' - W''S')$$

nas quais $fq = \frac{4}{3}Q$

$$\begin{aligned} b_{ij} &= b1(x)b1_{ij} + b2(x)b2_{ij} + b3(x)b3_{ij} + b4(x)b4_{ij} + b5(x)b5_{ij} + b6(x)b6_{ij} + \\ &\quad b7(x)b7_{ij} + b8(x)b8_{ij} + b9(x)b9_{ij} + b10(x)b10_{ij} + b11(x)b11_{ij} + b12(x)b12_{ij} + \\ &\quad b13(x)b13_{ij} + b14(x)b14_{ij} \end{aligned} \tag{B.26}$$

$$\begin{aligned} & b1(x) = (W'\mu_j^*)^4 / p; \quad b2(x) = 6W'^2 W''/p; \quad b3(x) = 4W'^3 S'\mu_j^{*4} / p; \\ & b4(x) = 12W'W''S'/p + 6W'^2 S''/p; \quad b5(x) = 4W'W'''/p + 3W''^2/p; \\ & b6(x) = 6W'^2 S'^2 \mu_j^{*4} / p + 2pW'^2 \mu_j^{*4}; \\ & b7(x) = 6W''S'^2/p + 12W'S'S''/p + 2pW'' + 8p'W'; \\ & b8(x) = 4W'S'''/p + 4W'''S'/p + 6W''S''/p; \quad b9(x) = W^{(iv)} / p; \\ & b10(x) = 4W'S'^3 \mu_j^{*4} / p + 4p'S'\mu_j^{*4}); \quad b11(x) = 6S'^2 S'' + 2pS'' + 8p'S'; \\ & b12(x) = 4S'S'''/p + 3S''^2/p + 4p'' + 4p'W'; \quad b13(x) = S^{(iv)} / p; \\ & b14(x) = S'\mu_j^{*4} / p + 2pS'\mu_j^{*4} \end{aligned} \tag{B.26.a-m}$$

$$\begin{aligned} & b1_{ij} = a12_{ij}; \quad b2_{ij} = a13_{ij}; \quad b3_{ijk} = a3_{ij}; \quad b4_{ijk} = a15_{ij}; \quad b5_{ijk} = a4_{ij}; \\ & b6_{ij} = a6_{ij}; \quad b7_{ij} = a16_{ij}; \quad b8_{ijk} = a6_{ij}; \quad b9_{ijk} = a7_{ij}; \quad b10_{ijk} = a10_{ij}; \\ & b11_{ij} = a17_{ij}; \quad b12_{ij} = a11_{ij}; \quad b13_{ijk} = a8_{ij}; \quad b14_{ijk} = a8_{ij} \end{aligned} \tag{B.27.a-m}$$

$$\begin{aligned} c_{ij} &= c1(x)c1_{ij} + c2(x)c2_{ij} + c3(x)c3_{ij} + c4(x)c4_{ij} + c5(x)c5_{ij} + c6(x)c6_{ij} + \\ &\quad c7(x)c7_{ij} + c8(x)c8_{ij} + c9(x)c9_{ij} + c10(x)c10_{ij} + c11(x)c11_{ij} + c12(x)c12_{ij} \end{aligned} \tag{B.28}$$

$$\begin{aligned} & c1(x) = -fqW'^2; \quad c2(x) = -2fqW'S'; \quad c3(x) = fq(2W'^2 - 3W''); \\ & c4(x) = fq(W'^2 - S'^2 - p^2); \quad c5(x) = fq(2W'S' - 3S''); \\ & c6(x) = fq(3W'' - 6W'^2); \quad c7(x) = 2fqW'S'; \quad c8(x) = 4fq(3W'' - 2W'^2); \\ & c9(x) = fq(2S'' - 8W'S'); \quad c10(x) = fq(S'^2 + p'^2); \quad c11(x) = fq(3S'' - 2W'S'); \\ & c12(x) = fq(2p^2 - 2S'^2 - W'') \end{aligned} \tag{B.29.a-l}$$

$$\begin{aligned} & c1_{ij} = a1_{ij}; \quad c2_{ij} = a2_{ij}; \quad c3_{ijk} = a3_{ij}; \quad c4_{ijk} = a4_{ij}; \quad c5_{ijk} = a5_{ij}; \\ & c6_{ij} = a9_{ij}; \quad c7_{ij} = a6_{ij}; \quad c8_{ijk} = a7_{ij}; \quad c9_{ijk} = a10_{ij}; \quad c10_{ijk} = a11_{ij}; \\ & c11_{ij} = a8_{ij}; \quad c12_{ij} = a9_{ij} \end{aligned} \tag{B.30.a-l}$$

$$\begin{aligned} d_{ij} &= d1(x)d1_{ij} + d2(x)d2_{ij} + d3(x)d3_{ij} + d4(x)d4_{ij} + d5(x)d5_{ij} + d6(x)d6_{ij} + \\ &\quad d7(x)d7_{ij} + d8(x)d8_{ij} + d9(x)d9_{ij} \end{aligned} \tag{B.31}$$

$$d1(x)=4W'^3/p;\quad d2(x)=12W'^2S'/p;\quad d3(x)=12W'W''/p;$$
$$d4(x)=12W'S'^2/p+4p';\quad d5(x)=12W''S'/p+12W'S''/p;$$
$$d6(x)=4W'''/p;\quad d7(x)=4S'^3/p+4pS';\quad d8(x)=12S'S''/p+8p';$$
$$d9(x)=4S'''/p \tag{B.32.a-i}$$

$$d1_{ij}=a13_{ij};\quad d2_{ij}=a15_{ij};\quad d3_{ijk}=a4_{ij};\quad d4_{ijk}=a16_{ij};\quad d5_{ijk}=a6_{ij};$$
$$d6_{ij}=a7_{ij};\quad d7_{ij}=a17_{ij};\quad d8_{ijk}=a11_{ij};\quad d9_{ijk}=a8_{ij} \tag{B.33.a-i}$$

$$e_{ij}=e1(x)e1_{ij}+e2(x)e2_{ij}+e3(x)e3_{ij}+e4(x)e4_{ij} \tag{B.34}$$

$$e1(x)=-2fqW';\quad e2(x)=-2fqS';\quad e3(x)=-e1(x);\quad e4(x)=-e2(x) \tag{B.35.a-d}$$

$$e1_{ij}=a3_{ij};\quad e2_{ij}=a5_{ij};\quad e3_{ijk}=a7_{ij};\quad e4_{ijk}=a8_{ij} \tag{B.36.a-d}$$

$$f_{ij}=f1(x)f1_{ij}+f2(x)f2_{ij}+f3(x)f3_{ij}+f4(x)f4_{ij}+f5(x)f5_{ij} \tag{B.37}$$

$$f1(x)=6W'^2/p;\quad f2(x)=12W'S'/p;\quad f3(x)=6W''/p;$$
$$f4(x)=6S'^2/p+2p;\quad f5(x)=6S''/p \tag{B.38.a-e}$$

$$f1_{ij}=a4_{ij};\quad f2_{ij}=a6_{ij};\quad f3_{ijk}=a7_{ij};\quad f4_{ijk}=a10_{ij};\quad f5_{ijk}=a8_{ij} \tag{B.39.a-e}$$

$$h_{ij}=h1(x)h1_{ij}+h2(x)h2_{ij} \tag{B.40}$$

$$h1(x)=4W';\quad h2(x)=4S' \tag{B.40.a,b}$$

$$h1_{ij}=a7_{ij};\quad h2_{ij}=a8_{ij} \tag{B.41.a,b}$$

nas quais as integrais:

$$a1_{ij}=\int_{-1}^{1}\xi^4 Y_i\ Y_j''d\xi$$
$$a2_{ij}=\int_{-1}^{1}\xi^3 Y_i\ Y_j''d\xi$$
$$a3_{ij}=\int_{-1}^{1}\xi^3 Y_i\ Y_j'd\xi$$
$$a4_{ij}=\int_{-1}^{1}\xi^2 Y_i\ Y_j''d\xi$$
$$a5_{ij}=\int_{-1}^{1}\xi^2 Y_i\ Y_j'd\xi \tag{B.42.a-i}$$
$$a6_{ij}=\int_{-1}^{1}\xi Y_i\ Y_j''d\xi$$
$$a7_{ij}=\int_{-1}^{1}\xi Y_i\ Y_j'd\xi$$
$$a^*8_{ij}=N_i$$
$$a8_{ij}=\int_{-1}^{1}Y_i\ Y_j'd\xi$$

$$
\begin{aligned}
a9_{ij} &= \int_{-1}^{1} \xi^2 Y_i\ Y_j\, d\xi \\
a10_{ij} &= \int_{-1}^{1} \xi Y_i\ Y_j\, d\xi \\
a11_{ij} &= \int_{-1}^{1} Y_i\ Y_j'' d\xi \\
a12_{ij} &= \int_{-1}^{1} \xi^4 Y_i\ Y_j\, d\xi \\
a13_{ij} &= \int_{-1}^{1} \xi^3 Y_i\ Y_j''' d\xi \\
a14_{ij} &= \int_{-1}^{1} \xi^3 Y_i\ Y_j\, d\xi \\
a15_{ij} &= \int_{-1}^{1} \xi^2 Y_i\ Y_j''' d\xi \\
a16_{ij} &= \int_{-1}^{1} \xi Y_i\ Y_j''' d\xi \\
a17_{ij} &= \int_{-1}^{1} Y_i\ Y_j''' d\xi
\end{aligned}
\qquad \text{(B.42.i-r)}
$$

são calculadas analiticamente

Coeficientes “Unidimensionais”:

$$
\begin{aligned}
FI_i = {} & FI1(x)FI1_i + FI2(x)FI2_i + FI3(x)FI3_i + FI4(x)FI4_i + \\
& FI5(x)FI5_i + FI6(x)FI6_i
\end{aligned}
\qquad \text{(B.43)}
$$

$$
\begin{aligned}
FI1(x) &= fq^2 \left(W''' + 3W'W'' - 4W'^3 \right); \\
FI2(x) &= fq^2 \left(S''' + 3W''S' + 4W'S'' - 8W'^2 S' \right); \\
FI3(x) &= fq^2 \left(4S'S'' + 4pp' - 4W'S'^2 - 2W'W'' + 4W'^3 - 2W''' \right); \\
FI4(x) &= fq^2 \left(8W'^2 S' - 4W'S'' - 4W''S' - 2S''' \right); \\
FI5(x) &= fq^2 \left(W''' - W'W'' - 4S'S'' - 4pp' + 4W'S'^2 \right) \\
FI6(x) &= fq^2 \left(S''' - W''S' \right)
\end{aligned}
\qquad \text{(B.43.a-f)}
$$

$$
FJ_i = FJ1(x)FJ1_i + FJ2(x)FJ2_i + FJ3(x)FJ3_i + FJ4(x)FJ4_i \qquad \text{(B.44)}
$$

$$
\begin{aligned}
FJ1(x) &= fq/p\left(W^{(iv)} + 8W'W''' + 6W'^3 + 12W'^2 W'' \right); \\
FJ2(x) &= fq/p\left(S^{(iv)} + 8W'S''' + 8W'''S' + 12W''S'' + 24W'W''S' + 12W'^2 S'' \right); \\
FJ3(x) &= fq/p\left(W^{(iv)} - 8S'S''' - 6S''^2 - 12pp'' - 24pp'W' - 12W''S'^2 - 24WS'S'' \right); \\
FJ4(x) &= fq/p\left(S^{(iv)} - 12S'^2 S'' - 4p^2 S'' - 16pp'S' \right);
\end{aligned}
\qquad \text{(B.45.a-d)}
$$

$$\begin{aligned} FJ1_i &= FI3_i \\ FJ2_i &= FI4_i \\ FJ3_i &= FI3_i \\ FJ4_i &= FI4_i \end{aligned} \qquad \text{(B.46.a-d)}$$

nas quais:

$$\begin{aligned} FI1_i &= \int_{-1}^{1} \xi^5 Y_i \, d\xi \\ FI2_i &= \int_{-1}^{1} \xi^4 Y_i \, d\xi \\ FI3_i &= \int_{-1}^{1} \xi^3 Y_i \, d\xi \\ FI4_i &= \int_{-1}^{1} \xi^2 Y_i \, d\xi \\ FI5_i &= \int_{-1}^{1} \xi^1 Y_i \, d\xi \\ FI6_i &= \int_{-1}^{1} Y_i \, d\xi \end{aligned} \qquad \text{(B.47.a-f)}$$

Para os coeficientes das condições de contorno:

$$\hat{M}_i = fq\left[CM1(x)CM1_i + CM2(x)CM2_i + CM3(x)CM3_i + CM4(x)CM4_i\right] \qquad \text{(B.48)}$$

$$\begin{aligned} CM1(x) &= -\left(\frac{W'}{p}\right)_{out}; \quad CM2(x) = -\left(\frac{S'}{p}\right)_{out}; \\ CM3(x) &= \left(\frac{W'}{p}\right)_{out}; \quad CM4(x) = \left(\frac{S'}{p}\right)_{out} \end{aligned} \qquad \text{(B.49.a-d)}$$

$$\begin{aligned} CM1_i &= FI3_i \\ CM2_i &= FI4_i \\ CM3_i &= FI5_i \\ CM4_i &= FI6_i \end{aligned} \qquad \text{(B.50.a-d)}$$

$$\hat{N}_i = CN1(x)CN1_i + CN2(x)CN2_i \qquad \text{(B.51)}$$

$$CN1(x) = -CM1(x); \quad CN2(x) = -CM2(x) \qquad \text{(B.52.a,b)}$$

$$\begin{aligned} CM1_{ij} &= a7_{ij} \\ CM2_{ij} &= a9_{ij} \end{aligned} \qquad \text{(B.53.a,b)}$$

$$O_i = fq\left[CO1(x)CO1_i + CO2(x)CO2_i + CO3(x)CO3_i + CO4(x)CO4_i\right] \qquad \text{(B.54)}$$

$$CO1(x) = -\left[\left(W''' + 6W'W'' + 2W'^3\right)/p\right]_{out};$$
$$CO2(x) = -\left[\left(S''' + 6W'S'' + 6W''S' + 6W'^2S'\right)/p\right]_{out};$$
$$CO3(x) = \left[\left(W''' - 6S'S'' - 6W'S' - 6pp'\right)/p\right]_{out};$$
$$CO4(x) = \left[\left(S''' - 2S'^3 - 2p^2S'\right)/p\right]_{out};$$
(B.55.a-d)

$$CO1_i = FI3_i$$
$$CO2_i = FI4_i$$
$$CO3_i = FI5_i$$
$$CO4_i = FI6_i$$
(B.56.a-d)

$$P_i = CP1(x)CP1_i + CP2(x)CP2_i + CP3(x)CP3_i + CP4(x)CP4_i + CP5(x)CP5_i + CP6(x)CP6_i + CP7(x)CP7_i + CP8(x)CP8_i + CP9(x)CP9_i \quad (B.57)$$

$$CP1(x) = \left(\frac{W'^3}{p}\right)_{out}; \quad CP2(x) = \left(\frac{3W'^2S'}{p}\right)_{out}; \quad CP3(x) = \left(\frac{3W'W''}{p}\right)_{out};$$
$$CP4(x) = \left(\frac{3W'S'^2 + pp'}{p}\right)_{out}; \quad CP5(x) = -\left(\frac{3W''S' + 3W'S''}{p}\right)_{out};$$
$$CP6(x) = \left(\frac{W'''}{p}\right)_{out}; \quad CP7(x) = \left(\frac{S'^3}{p} + pS'\right)_{out};$$
$$CP8(x) = -\left(\frac{3S'S''}{p} + 2p'\right)_{out}; \quad CP9(x) = \left(\frac{S'''}{p}\right)_{out};$$
(B.58.a-i)

$$CP1_{ij} = a13_{ij}$$
$$CP2_{ij} = a15_{ij}$$
$$CP3_{ij} = a4_{ij}$$
$$CP4_{ij} = a16_{ij}$$
$$CP5_{ij} = a6_{ij}$$
$$CP6_{ij} = a7_{ij}$$
$$CP7_{ij} = a17_{ij}$$
$$CP8_{ij} = a11_{ij}$$
$$CP9_{ij} = a9_{ij}$$
(B.60.a-i)

$$Q_i = CQ1(x)CQ1_i + CQ2(x)CQ2_i + CQ3(x)CQ3_i + CQ4(x)CQ4_i + CQ5(x)CQ5_i \quad (B.61)$$

$$CQ1(x) = \left(\frac{3W'^2}{p}\right)_{out}; \quad CQ2(x) = \left(\frac{6W'S'}{p}\right)_{out}; \quad CQ3(x) = \left(\frac{3W''}{p}\right)_{out};$$
$$CQ4(x) = \left(\frac{3S'}{p} + p\right)_{out}; \quad CQ5(x) = -\left(\frac{3S''}{p}\right)_{out}$$
(B.62.a-e)

$$
\begin{aligned}
CQ1_{ij} &= a4_{ij} \\
CQ2_{ij} &= a6_{ij} \\
CQ3_{ij} &= a7_{ij} \\
CQ4_{ij} &= a11_{ij} \\
CQ5_{ij} &= a9_{ij}
\end{aligned}
\tag{B.63.a-e}
$$

$$
CR_i = \left(2CO_i\right)_{out} \tag{B.64}
$$

APÊNDICE C

ESCOAMENTO COMPLETAMENTE DESENVOLVIDO ENTRE PLACAS PARALELAS

Considera-se um duto de placas paralelas, tal como o esquematizado na figura C1. Quando o escoamento torna-se completamente desenvolvido, a velocidade transversal é nula, e as equações de Navier-Stokes então se reduzem a:

$$\frac{d^2u}{dy^2} = \mathrm{Re}\frac{dp}{dx} = K \qquad \text{(C.1)}$$

Com as condições de contorno:

$$u(-b) = 0 \quad ; \quad u(b) = 0 \qquad \text{(C.2)}$$

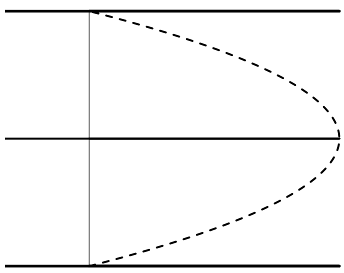


Figura C.1: Escoamento totalmente desenvolvido em um canal de placas planas

A solução de (C.1) fornece a componente longitudinal da velocidade no escoamento desenvolvido:

$$u = -\frac{Kb^2}{2}\left[1-\left(\frac{y}{b}\right)^2\right] \qquad \text{(C.3)}$$

Considerando que a vazão por unidade de comprimento no canal é Q:

$$Q = \int_{-b}^{b} u\,dy \qquad \text{(C.4)}$$

Integrando-se a expressão C.4, resulta que:

$$-\frac{Kb^2}{2}=\frac{3Q}{4b} \tag{C.5}$$

Logo o perfil da componente de velocidade u pode ser expresso em função de Q:

$$u=\frac{3Q}{4b}\left[1-\left(\frac{y}{b}\right)^2\right] \tag{C.6}$$

Da definição de função corrente:

$$u=\frac{\partial\psi}{\partial y} \tag{C.7}$$

Logo,

$$\int_{k_1}^{\psi}d\psi=\int_{-b}^{y}u\,dy \tag{C.8}$$

em que k_1 é um valor arbitrário de $\psi(-b)$.

Substituindo o perfil (C.6) em (C.7) e integrando-se (C.8), obtém-se:

$$\psi=\frac{3Q}{4}\left[\left(\frac{y}{b}\right)-\frac{1}{3}\left(\frac{y}{b}\right)^3\right]+\frac{Q}{2}+k_1 \tag{C.9}$$

O valor da função corrente na parede superior, isto é, em y = b, é dado por:

$$\psi(b)=Q+k_1 \tag{C.10}$$

APÊNDICE D

CÁLCULO DO FATOR DE ATRITO BASEADO NAS FORÇAS VISCOSAS

Definindo:

$$f = \frac{\tau_w}{\rho u_{av}^2} \tag{D.1}$$

multiplicando-se pelo número de Reynolds:

$$f\,Re = \frac{\tau_w}{\rho u_{av}^2}\frac{\rho u_{av} b}{\mu} = \frac{\tau_w b}{\mu u_{av}} \tag{D.2}$$

em que τ_w é a tensão na parede dada por:

$$\tau_w = -\frac{b}{u_{av}}\left(\frac{\partial u^*}{\partial y^*}+\frac{\partial v^*}{\partial x^*}\right)\Bigg|_{y=y2} \tag{D.3}$$

Assim, já em termos adimensionais:

$$f\,Re = -\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\Bigg|_{y=y2} \tag{D.4}$$

ou em termos de função corrente:

$$f\,Re = -\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial^2 y}+\frac{\partial^2 \psi}{\partial^2 x}\right)\Bigg|_{y=y2} \tag{D.5}$$

Aplicando o filtro $\psi(x,y) = \phi(x,y) + F(x,y)$:

$$\begin{aligned} f\,Re = -\Bigg[& \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\Bigg|_{y=y_2} + \sum_{i=1}^{NTV}\left(\psi_i \frac{\partial^2 Y_i}{\partial y^2}\Bigg|_{y=y_2}\right) - \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\Bigg|_{y=y_2} + \\ & - \sum_{i=1}^{NTV}\left(\psi_i \frac{\partial^2 Y_i}{\partial x^2}\Bigg|_{y=y_2} + 2\frac{d\psi_i}{dx}\frac{\partial Y_i}{\partial x}\Bigg|_{y=y_2} + Y_i\Big|_{y=y_2}\frac{\partial^2 \psi_i}{\partial x^2}\right)\Bigg] \end{aligned} \tag{D.6}$$

APÊNDICE E

TUTORIAL PARA A SIMULAÇÃO NO *SOFTWARE* COMSOL

Introdução

Este exemplo descreve a transferência de calor e o escoamento em um canal de paredes corrugadas (Figura E.1). A geometria do canal é senoidal e as temperaturas das paredes são mantidas contastes.

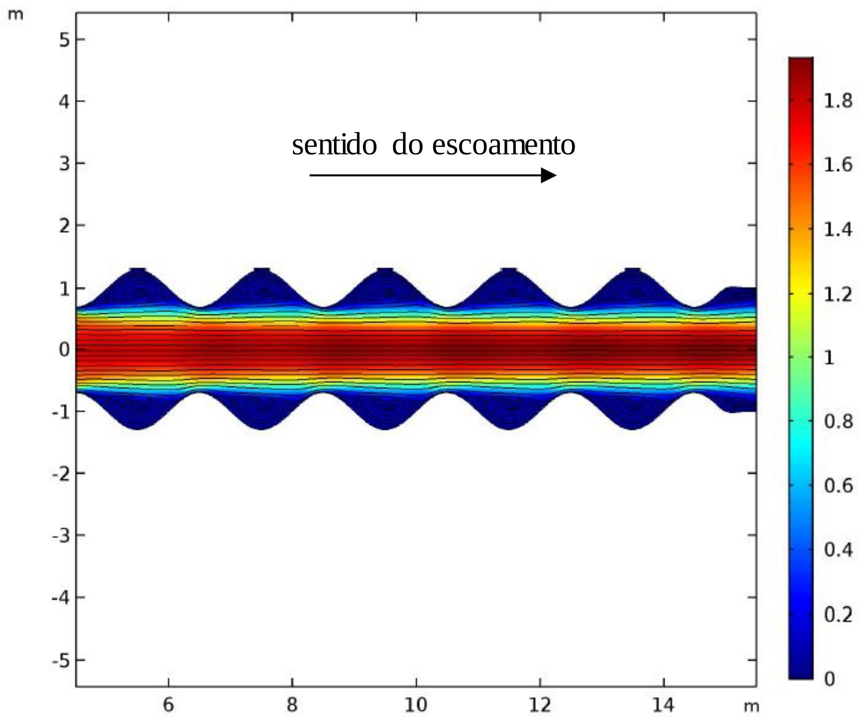


Figura E.1 - Detalhe da geometria: Campo de velocidade e linhas de corrente do exemplo.

Definição do Modelo

O modelo é baseado no escoamento bidimensional em geometria irregular de fluido newtoniano, que segue as leis de Fourier sem fontes de geração de calor, em geometria irregular em regime permanente.

Equações do Modelo

O modelo escolhido no *software* COMSOL na simulação é um modelo multifísico visto que envolve a dinâmica de fluidos acoplada à transferência de calor. A pressão, p, e os campos de velocidade u e v são a solução das equações de Navier-Stokes, enquanto a temperatura é resolvida através da equaçao do balanço de energia.

Resultados

A análise do modelo fornece o campo de velocidade, distribuição de pressão e distribuição de temperatura no fluido. A Figura E.2 mostra um gráfico das linhas isotérmicas.

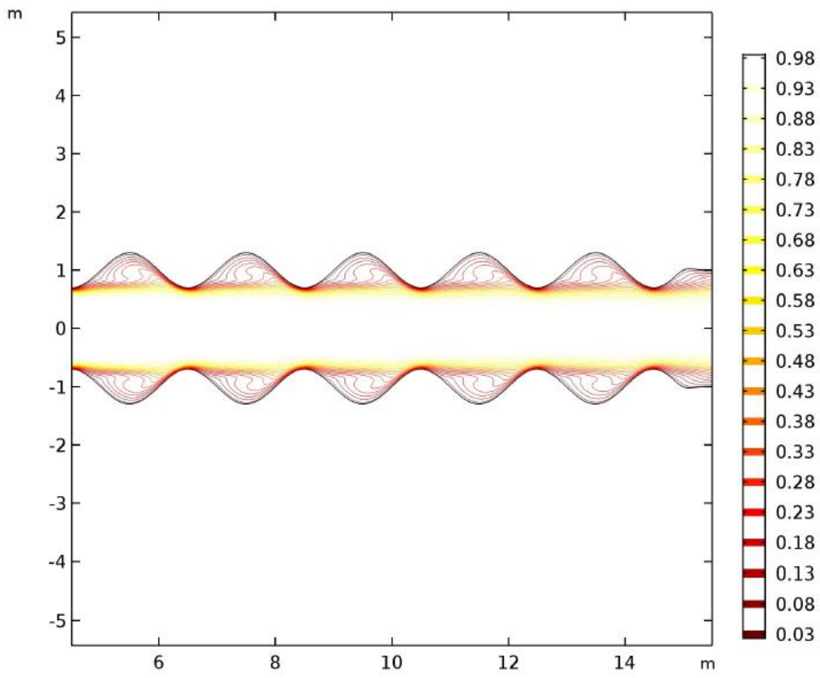


Figura E.2 - Detalhe do gráfico das isotermas.

Notas da implementação no COMSOL

Para construir um modelo no COMSOL Multiphysics, são utilizadas duas interfaces físicas: a interface Laminar Flow para o escoamento laminar e a interface Heat Transfer in Fluids para transferência de calor.

Instruções

No menu **File**, escolha **New**.

Na nova janela, clique em **Wizard model**.

1 Na janela **Wizard model**, clique em 2D.

2 Na lista **Select Physics**, selecione **Fluid Flow** > **NonIsothermal Flow** > **Laminar Flow (nitf)**

3 Clique em **Add**.

4 Clique em **Study**.

5 Na lista **Select Study**, selecione **Preset Studies for Selected Physics Interfaces** > **Stationary**.

6 Clique em **Done**

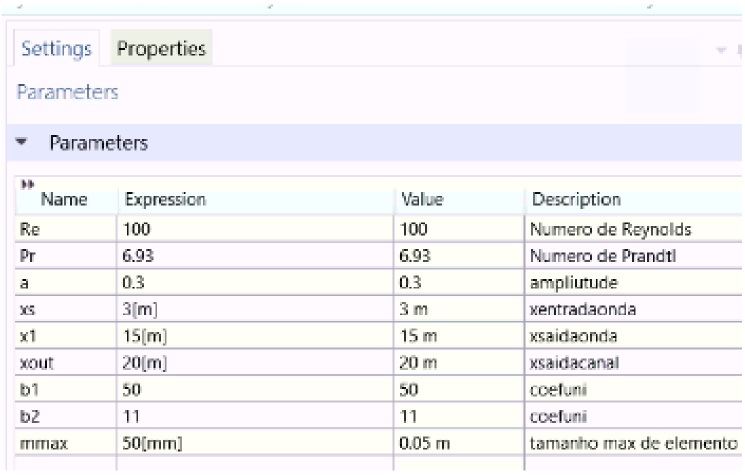
Global Definitions:

Parâmetros

1 Na barra de ferramentas Home, clique em **Parameters**.

2 Na janela Settings, localize a seção **Parameters**.

3 Na tabela, insira as seguintes configurações para a, Re, Pr, xs, xout, x1, b1, b2 (Figura E.3):



Name	Expression	Value	Description
Re	100	100	Numero de Reynolds
Pr	6.93	6.93	Numero de Prandtl
a	0.3	0.3	ampliutude
xs	3[m]	3 m	xentradaonda
x1	15[m]	15 m	xsaidaonda
xout	20[m]	20 m	xsaidacanal
b1	50	50	coefuni
b2	11	11	coefuni
mmax	50[mm]	0.05 m	tamanho max de elemento

Figura E.3 - Parâmetros utilizados no exemplo.

Funções

Para manter-se a mesma geometria do contorno utilizada na GITT, é necessário definir as aproximações das funções Unistep no contorno: Localizar **Compoent1** > **Definitions** > **functions** para cada função. Renomear em **Function Name** o nome das funções para UniSs e UniS1. Definir: UniSs (x) = 1/(1+exp(-b1*(x-xs))) e UniS1(x) = 1/(1+exp(-b2*(x-x1))) (Figura E.4).

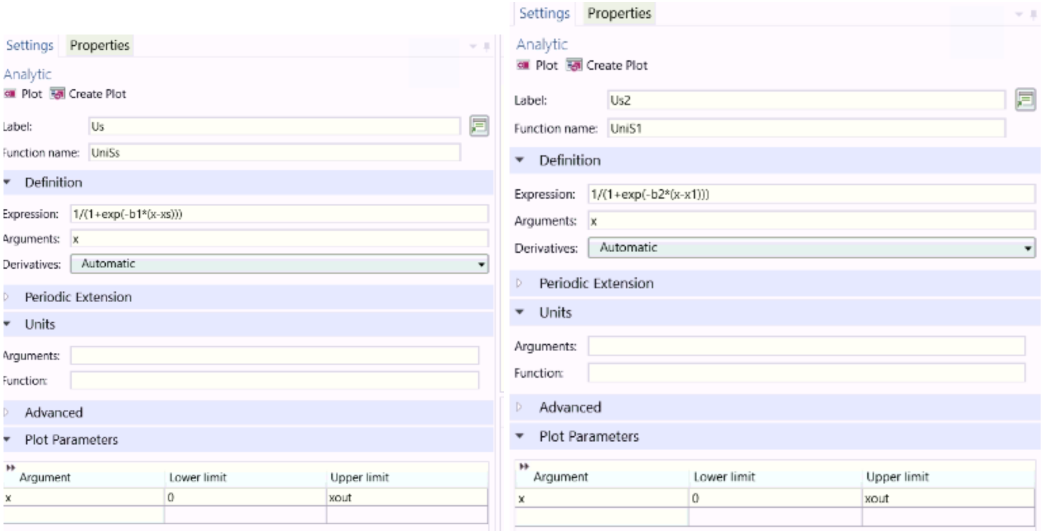


Figura E.4 - Funções unistep utilizadas no exemplo.

Geometria

Paredes Superior e Inferior

Localizar: **Geometry** > **Parametric Curve**: definir as paredes superior e inferior. Para a parede superior: x = s, y = 1+a*sin(pi*(s-xs))*(UniSs(s)-UniS1(s)) (Clicar em **Build All Objects**) (Figura E.5) e para a parede inferior: x = s, y = -(1+a*sin(pi*(s-xs))*(UniSs(s)-UniS1(s))) (Clicar em **Build All Objects**)

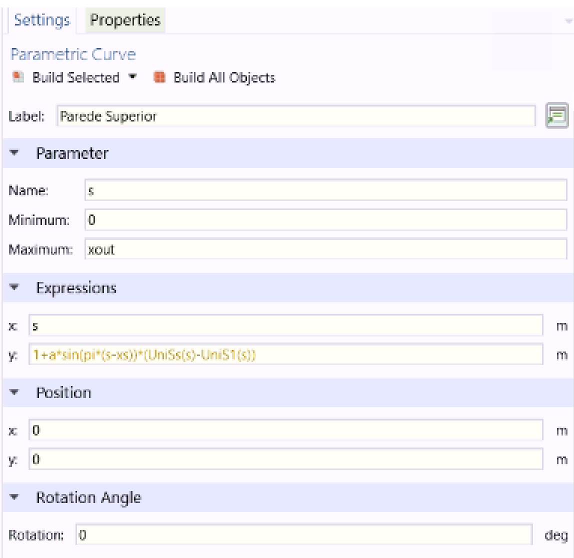


Figura E.5 - Parâmetros para parede superior do canal.

Entrada e Saída do Canal

Localizar: **Geometry** > **Line Segment**: definir as paredes entrada e saída os pontos inicias e finais. (0,-1) e (0,1); (xout,-1) e (xout,1) para a entrada (Figura E.6) e saída respectivamente.

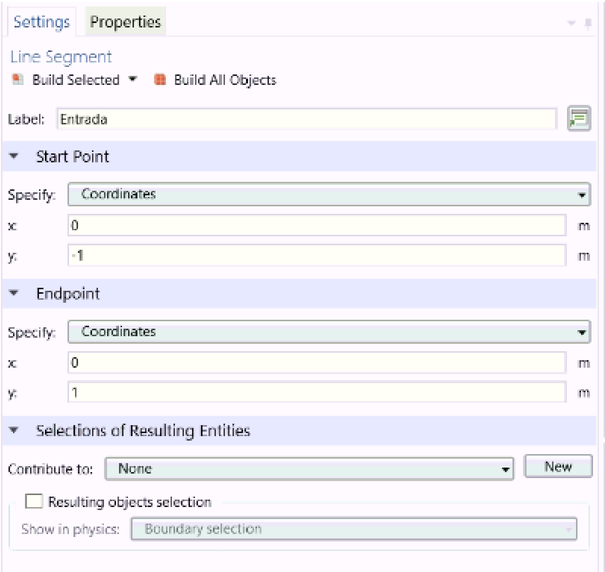


Figura E.6 - Parametros para construção do segmento de reta da entrada do canal.

Localizar: **Geometry** > **Conversions** > **Convert to solid** (Figura E.7)

Selecionar todos os contornos e converter para sólido

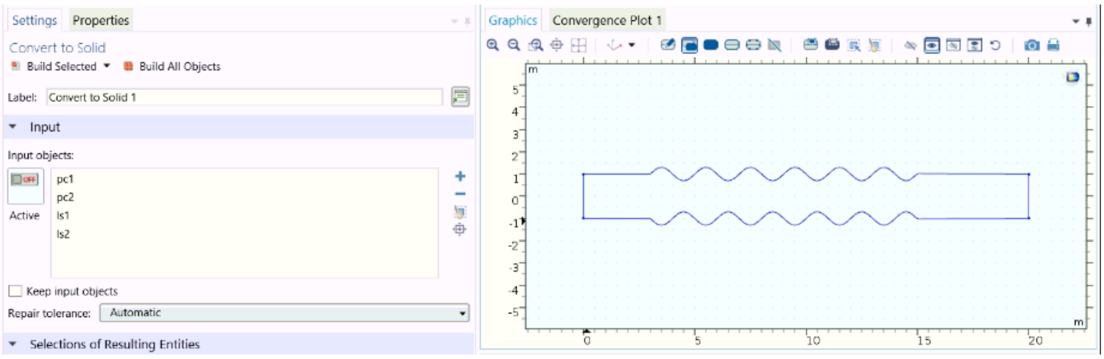


Figura E.7 - Detalhe da tela *Convert do Solid*.

Clicar em **Buld All Objects**

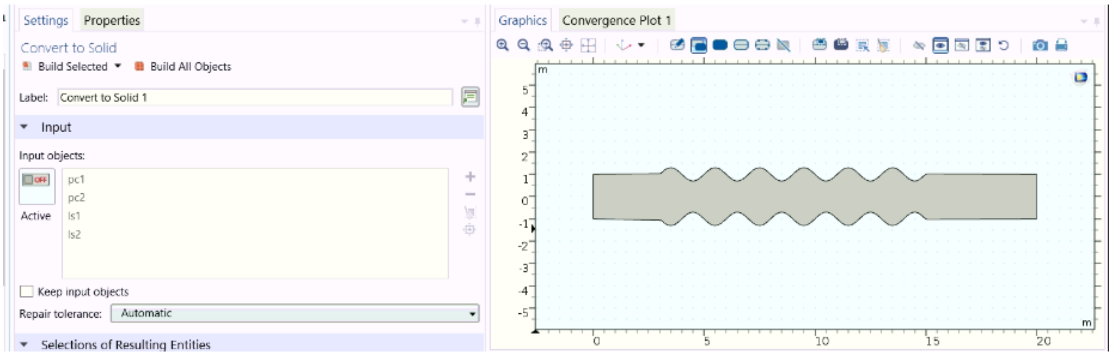


Figura E.8 - Resultado após converter os segmentos que representam os contornos.

Clicar em: **Form Union** > **Build All Objects** (Figura E.8)

Módulo Fluid Flow

Para caracterizar o escoamento por meio do número de Reynolds é conveniente modificar a viscosidade dinâmica tornando-a função de Reynolds como: μ = 1/Re:

Localizar **Fluid Properties** > **Dynamic Visocisty** > **User Defined**.

<u>Condições de contorno:</u>

Para a entrada:

Laminar **Flow** > **Inlet**: selecionar o contorno da entrada.

Adicionar campo de velocidade em **Normal Inflow**: 1.5[m/s]*(1-(y*1[m^-1])^2)

Para a saída:

Laminar Flow > **Outlet**: selecionar o contorno da saída.

Módulo Heat Transfer in Fluids

Assim como para o módulo de escoamento de fluidos em que a viscosidade foi modificada em função no número de Reynolds, é necessário modificar o valor da condutividade térmica em termos de números adimensionais como: k = 1/(RePr). Localizar: **Fluid Properties** > **Heat Conduction Fluid** > **User Defined** (Figura E.9). Esta consideração implica que as outras propriedades do fluido como densidade e capacidade calorífica devem ser igual a unidade.

Assim, é necessário redefini-las em: **Fluid Properties** > **Thermodynacmis Fluid** > **User Defined**, ρ=1, Cp = 1.

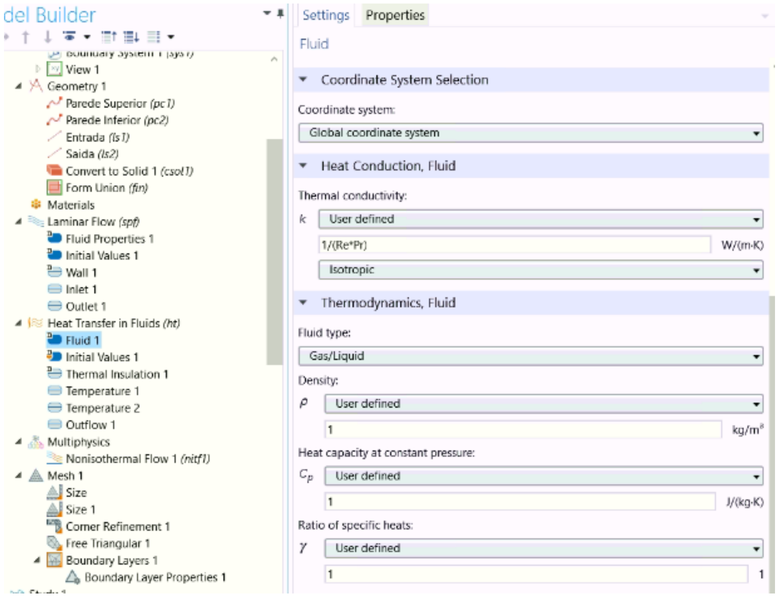


Figura E.9 - Definição das propriedades físicas do fluido.

Condições de contorno:

Para a entrada, localizar a condição de contorno: **Heat Transfer in Fluids** > **Temperature**, selecionar o contorno da entrada e definir T = 1

Para as paredes, localizar o contorno de temperatura: **Heat Transfer in Fluids** > **Temperature**, selecionar o contorno das paredes e definir T = 0

Para a saída, localizar a condição: **Heat Transfer in Fluids** > **Outflow** e selecionar o contorno da saída

Construção da Malha

A malha é construída será não uniforme e não estruturada de maneira a ser possível controlar o tamanho máximo de elemento gerado assim como o tamanho mínimo de um elemento no domínio (Figura E.10):

Mesh1 > **User Controled**

Mehs1> **Size**>

Denifir:

Maximum element size: mmax

Minimun element size: 0.01*mmax

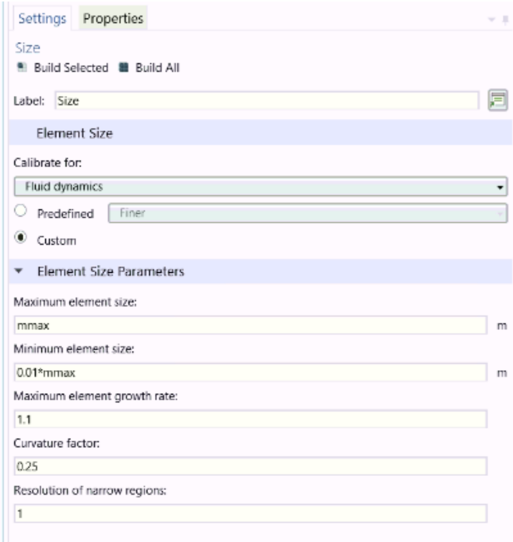


Figura E.10 - Parâmetros para construção da malha.

Além disso, são adicionadas 5 camadas no contorno das paredes superior e inferior em: **Mesh1**>**Boundary Layres1**>**Boundary**>**boundary layer properties**: **number of boundary layers**: 5 (Figura E.11)

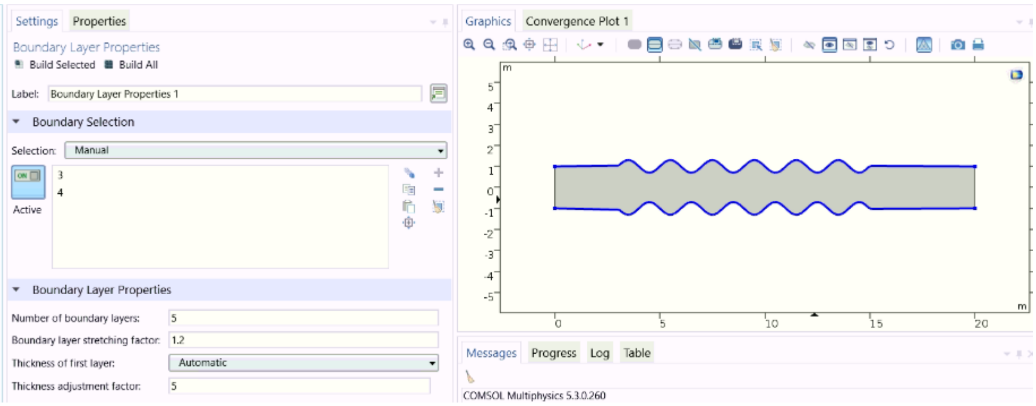


Figura E.11 - Adição de 5 camadas no contorno.

Clicar em **Mesh1** > **Build All**

Definição de funções usadas para a análise a posteriori

Definida a geometria do problema, é possível adicionar funções para a integração do domínio irregular.

I - Integração do domínio irregular:

A integração do domínio é realizada utilizando a função **Genneral Projection** encontrada em: **Definitions**>**Componet Coupling**>**Genneral Projections**: Selecionar o todo o domínio (Figura E.12).

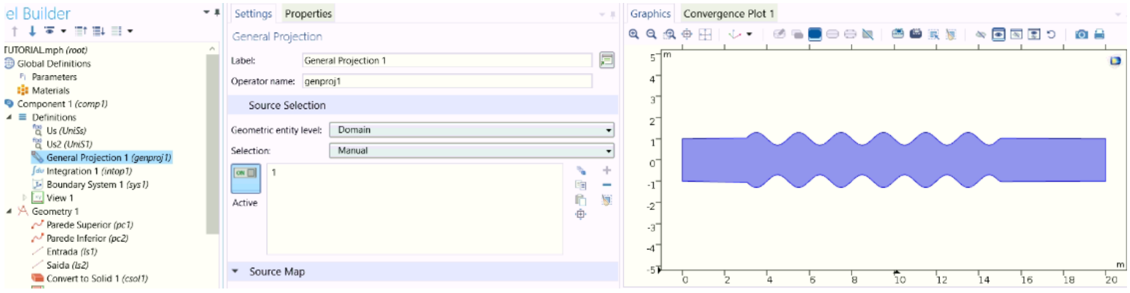


Figura E.12 - Escolha do domínio a ser integrado pela função genproj1.

OBS.: Somente disponível para domínios não uniformes na versão **5.3** ou superior.

II - Integral no sobre o contorno irregular de 0 a xout.

É necessário definir a integral em: **Definitions** > **Componet Coupling** > **Integration**: Mudar para **Boundary** e selecionar o contorno (Figura E.13).

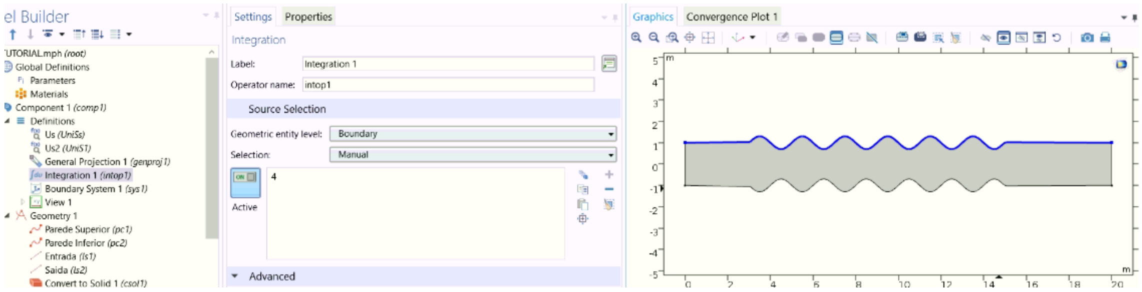


Figura E.13 - Seleção do contorno para integração.

Simulação

Iniciar simulação em **Home** > **Compute**

Pós Processamento e Exibição de Resultados

Para auxiliar na construção dos gráficos é necessário definir a linha central do canal em: **Dataset** > **Cut Line 2D** (Figura E.14):

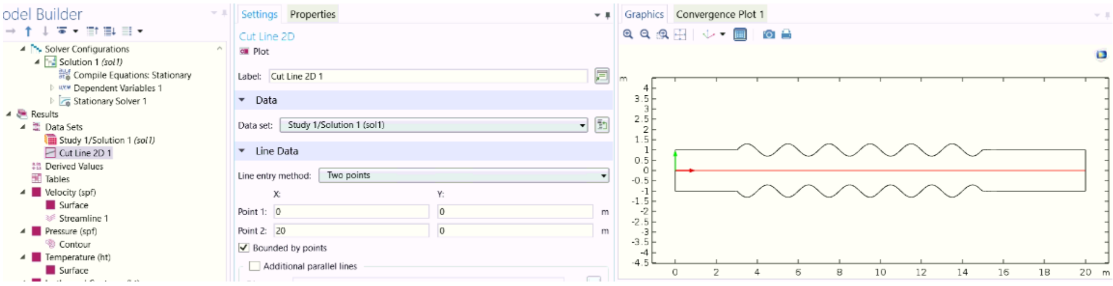


Figura E.14 - Corte central do domínio.

Linhas de corrente:

As linhas de corrente podem ser definidas em: **Velocity(spf)** > **Streamline** > **Stremline Position** > **Uniform Density** > **Separating Distance** > 0.005. O resultado será a Figura E.1.

Velocidade no centro:

Criar um novo grupo de gráficos 1D em: **Results** > **1D Plot Group**.

Renomear o novo grupo em **Label** como Velocidade.

Adicionar um novo gráfico em: **Linegraph**.

Construir o gráfico da velocidade no centro do canal definindo u em **Expression** e **CutLine 2D 1** em **Data Set**.

Clicar em **Plot** (Figura E.15)

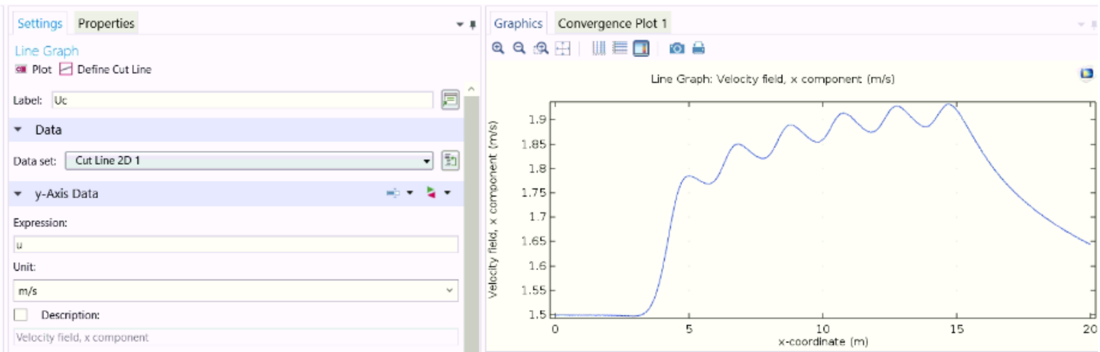


Figura E.15 - Velocidade no centro do canal.

Temperatura Média:

Criar um novo grupo de gráficos 1D em: **Results** > **1D plot Gourp**.

Renomear o novo grupo em **Label** como Temperatura Média.

Adicionar um novo gráfico em: **Linegraph**.

Selecionar o contorno superior: **Selection** > **Manual** > Selecionar a parede superior.

Construir o gráfico da velocidade no centro do canal definindo **(genproj1(T*u)/genproj1(u))** em **Expression** e **Study 1/ Solution 1 (sol1)** em **Data Set**.

Clicar em **Plot** (Figura E.16)

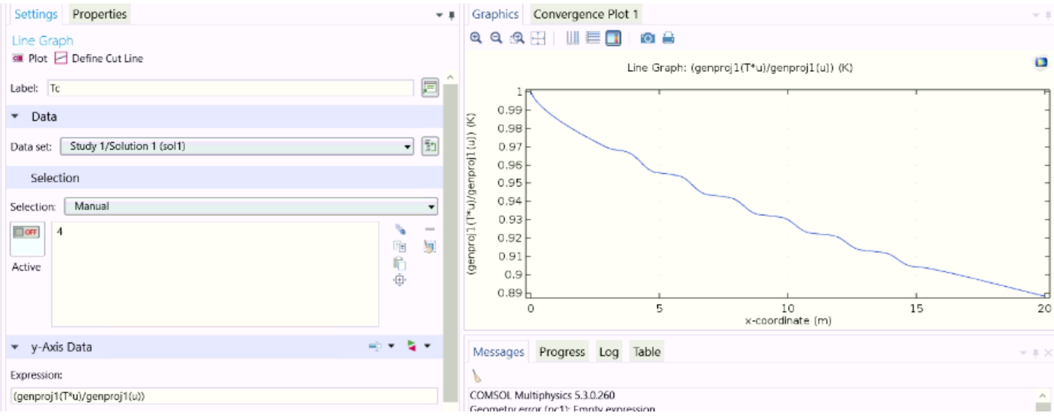


Figura E.16 - Temperatura média ao longo do canal.

Produto fRe:

Criar um novo grupo de gráficos 1D em: **Results** > **1D plot Group**.

Renomear o novo grupo em **Label** como Fator de Atrito.

Adicionar um novo gráfico em: **Linegraph**.

Selecionar o contorno superior: **Selection** > **Manual** > Selecionar a parede superior.

Construir o gráfico da velocidade no centro do canal definindo -(uy+vx), na qual uy e vx representam o valor da derivada da velocidade u em relação a x e da v em relação a x respectivamente, em **Expression** e **Study 1/ Solution 1 (sol1)** em **Data Set**.

Clicar em **Plot** (Figura E.17)

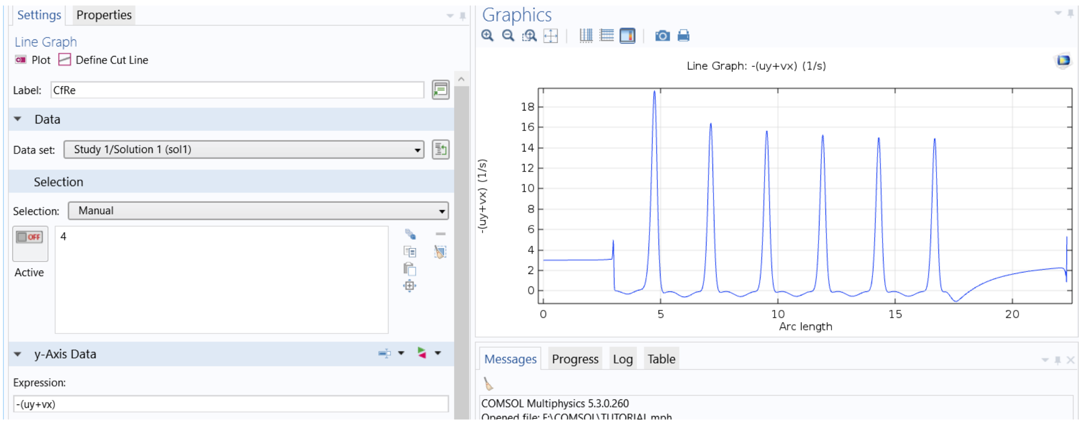


Figura E.17 - Gráfico do produto fRe.

Nusselt Local:

Criar um novo grupo de gráficos 1D em: **Results** > **1D plot Group**.

Renomear o novo grupo em **Label** como Nusselt Local.

Adicionar um novo gráfico em: **Linegraph**.

Selecionar o contorno superior: **Selection** > **Manual** > Selecionar a parede superior.

Construir o gráfico da velocidade no centro do canal definindo ((Tx)^2+(Ty)^2)^(1/2), na qual Tx e Ty representam os valores das derivadas da Temperatura u em relação a x e da v em relação a x respectivamente, em **Expression** e **Study 1/ Solution 1 (sol1)** em **Data Set**.

Clicar em **Plot** (Figura E.18)

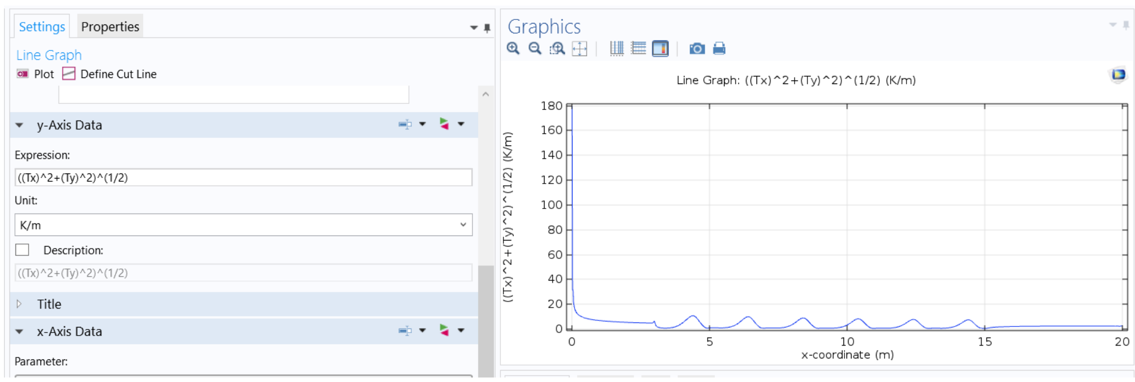


Figura E.17 - Gráfico do número de Nussel local.

Obs: Em todos dos gráficos 1D usar: **Xaxys data** > **Expression** > x o valor da ordenada se o valor do eixo x ao invés do valor do arco (Figura E.19).

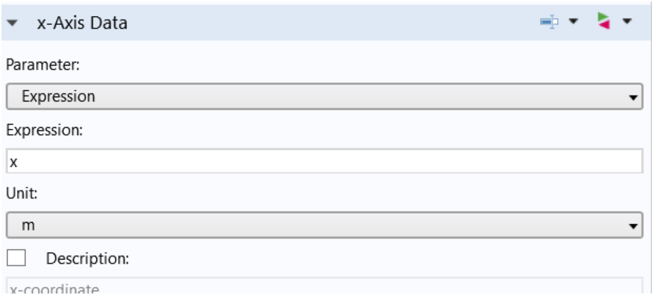


Figura E.19 - Definição para o parâmetro do eixo x.

Exportar os dados

Para exportar os dados dos gráficos, ir em: **Export** > **Plot** >Escolher o Gráfico, Filename: Nome do Arquivo. E clicar em **Export** (Figura E.20).

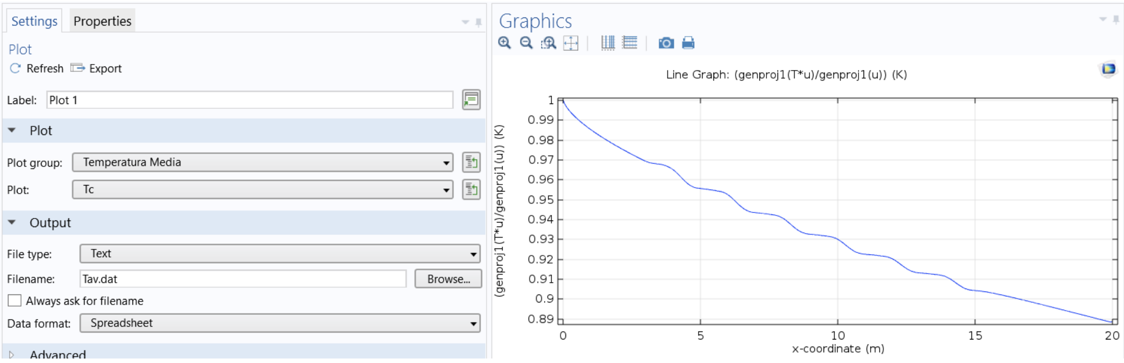


Figura E.20 - Exemplo de exportação dos dados (T médio).

APÊNDICE F

TABELA DOS VALORES UTILIZADOS NAS SIMULAÇÕES

Re	Nº Ondas	α	Fase	Sg_{tot}	Contração de escala	NV	NT
100	0	0.0	0°	0.04660	0.100	50	100
100	3	0.1	0°	0.03326	0.010	50	60
100	3	0.2	0°	0.03326	0.010	50	60
100	3	0.3	0°	0.03486	0.010	50	60
100	**3**	**0.1**	**180°**	**0.03309**	0.030	50	60
100	3	0.2	180°	0.03832	0.020	50	60
100	3	0.3	180°	0.04406	0.020	50	60
100	**6**	**0.1**	**0°**	**0.03421**	0.430	50	100
100	6	0.2	0°	0.03528	0.300	50	100
100	6	0.3	0°	0.04144	0.100	50	100
100	6	0.1	180°	0.04144	0.060	50	90
100	6	0.2	180°	0.03986	0.020	50	90
100	6	0.3	180°	0.03863	0.098	50	90
Re	Nº Ondas	α	Fase	Sg_{tot}	Contração de escala	NV	NT
150	0	0.0	0°	0.06787	0.060	50	90
150	3	0.1	0°	0.04396	0.100	50	60
150	3	0.2	0°	0.03794	0.040	50	60
150	3	0.3	0°	0.04093	0.010	50	60
150	**3**	**0.1**	**180°**	**0.03779**	0.030	50	60
150	3	0.2	180°	0.03941	0.010	50	60
150	3	0.3	180°	0.04046	0.020	50	60
150	6	0.1	0°	0.04665	0.260	50	90
150	6	0.2	0°	0.04264	0.020	50	90
150	6	0.3	0°	0.05810	0.100	50	90
150	**6**	**0.1**	**180°**	**0.03836**	0.100	50	60
150	6	0.2	180°	0.04108	0.100	50	60
150	6	0.3	180°	0.04622	0.312	50	60
Re	Nº Ondas	α	Fase	Sg_{tot}	Contração de escala	NV	NT
200	0	0.0	0°	0.10530	0.010	50	100
200	**3**	**0.1**	**0°**	**0.04251**	0.010	50	100
200	3	0.2	0°	0.04857	0.100	50	100
200	3	0.3	0°	0.05535	0.140	50	90
200	3	0.1	180°	0.04329	0.030	50	90
200	3	0.2	180°	0.04445	0.100	50	90
200	3	0.3	180°	0.04619	0.260	50	90
200	**6**	**0.1**	**0°**	**0.04232**	0.200	50	90
200	6	0.2	0°	0.04795	0.020	50	90
200	6	0.3	0°	0.04811	0.200	50	70
200	6	0.1	180°	0.04478	0.020	50	90
200	6	0.2	180°	0.04545	0.10003	50	80
200	6	0.3	180°	0.04945	0.15302419	50	60
Re	Nº Ondas	α	Fase		Contração de escala	NV	NT
300	0	0.0	0°	-	0.100	50	100
300	6	0.1	0°	-	0.300	50	100
300	6	0.2	0°	-	0.050	50	100
300	6	0.3	0°	-	0.040	50	90
500	0	0.0	0°	-	0.100	50	100
500	6	0.1	0°	-	0.191	50	100
500	6	0.2	0°	-	0.025	50	80
500	6	0.3	0°	-	0.430	50	50