



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E CIENTÍFICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E
MATEMÁTICAS**

FLÁVIO NAZARENO ARAUJO MESQUITA

**A prática de ensino como uma trajetória de formação docente do
professor de matemática**

**Belém-PA
2017**

Flávio Nazareno Araujo Mesquita

**A prática de ensino como uma trajetória de formação docente do
professor de matemática**

Texto apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Educação Em Ciências e Matemática da Universidade Federal do Pará – Doutorado em Educação em Ciências e Matemáticas –vinculado à Linha de Pesquisa **Percepção Matemática, Processos e Raciocínios, Saberes e Valores**, como exigência para Defesa de Tese.

Orientador: Prof. Dr. Renato Borges Guerra

**Belém-PA
2017**

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

- M578p Mesquita, Flávio Nazareno Araujo
 A prática de ensino como uma trajetória de formação docente do professor de matemática /
 Flávio Nazareno Araujo Mesquita. — 2017
 162 f. : il.
- Tese (Doutorado) - Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas
 (PPGECM), Instituto de Educação Matemática e Científica, Universidade Federal do Pará, Belém,
 2017.
 Orientação: Prof. Dr. Renato Borges Guerra
1. Transposição Didática Interna . 2. Percurso de Estudo e Investigação ou Pesquisa. 3.
 Equação do Segundo Grau. 4. Fatoração do Trinômio do Segundo Grau. 5. Modelo
 Epistemológico Pessoal de Referência. I. Guerra, Renato Borges , *orient.* II. Título
-

Flávio Nazareno Araujo Mesquita

A prática de ensino como uma trajetória de formação docente do professor de matemática

Texto apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Educação Em Ciências e Matemática da Universidade Federal do Pará – Doutorado em Educação em Ciências e Matemáticas –vinculado à Linha de Pesquisa **Percepção Matemática, Processos e Raciocínios, Saberes e Valores**, como exigência para Qualificação de Tese.

Banca Examinadora

Presidente: Prof. Dr. Renato Borges Guerra – UFPA

Examinador: Prof. Dr. Saddo Ag Almouloud–PUC-SP

Examinador: Prof. Dr. Reginaldo da Silva - IFPA

Examinador: Prof. Dr. José Messildo Viana Nunes - UFPA

Examinador: Prof. Dr. Iran de Abreu Mendes - UFPA

AVALIADO EM: ____/____/____

DEDICATÓRIA

À minha família e em especial às
minhas filhas Flávia Drielle e Lívia
Vitória, minha esposa e companheira
em todas as ocasiões Maria das
Graças, minha mãe e meu pai.

AGRADECIMENTOS

Ao ingressar no curso tive que superar obstáculos que não seria possível sem a colaboração de várias pessoas que fizeram e fazem parte do meu convívio. Assim, esses agradecimentos são uma forma de expressar e eternizar minha gratidão à minha querida mãe, Maria Amélia Araujo Mesquita, que esteve e está sempre pronta para ajudar com seu amor e carinho. Ao meu pai, Godofredo Gaspar Mesquita, paizão companheiro. A todos os meus irmãos (Socorro, Paulo, Gerci, Fábio, Cláudio, Moisés, Amélia e Júnior) e todos meus sobrinhos e cunhados que de alguma forma contribuíram nessa minha caminhada.

Às minhas filhas Flávia Drielle e Lívia Vitória, que são minha razão de existência, e à minha querida esposa Maria das Graças pela cumplicidade em todos os momentos alegres ou de sofrimento.

Ao meu orientador Renato Borges Guerra que, além de sua participação decisiva na realização dessa obra, é um amigo generoso que nunca se furta a colaborar com seu notório saber as pessoas que o solicitam ou simplesmente em meio a um papo informal na hora do café no IEMCI.

A todos os professores do Programa pelas contribuições na minha formação. Em especial à professora Isabel de Lucena que colaborou sobremaneira na minha caminhada como pesquisador desde a especialização.

Aos professores Iram Mendes, Saddo Almouloud, Reginaldo da Silva e José Messildo Nunes por aceitarem participar da banca de defesa.

Aos colegas mestrandos, doutorandos e graduandos do instituto, em especial ao Denivaldo, amigo e irmão de sempre e à querida colega e amiga Maysa pelas contribuições nas correções do texto.

A todos do Grupo de Estudo de Didática da Matemática (GEDIM) pelo incentivo.

Aos funcionários do IEMCI por serem muito solícitos.

Para finalizar agradeço a Deus pela superação de dificuldades e serenidade para que pudesse seguir nesta caminhada.

RESUMO

MESQUITA, Flávio Nazareno Araujo. **A prática de ensino como uma trajetória de formação docente do professor de matemática**. 2017. 163 f. Tese (Doutorado em Educação em Ciências e Matemáticas) – Instituto de Educação Matemática e Científica, Universidade Federal do Pará, Belém, 2017.

Esta pesquisa trata de problematizar a prática de ensino com um dado objeto da matemática escolar a partir da compreensão dessa prática como fases do processo de transposição didática interna desse objeto realizada pelo professor. Assim, há o questionamento se esse processo leva a construção de uma trajetória de formação docente relativo a um dado objeto matemático escolar. Uma resposta afirmativa é construída a partir de um percurso de estudos e investigação sob o suporte teórico da teoria antropológica de didático, considerando o ensino de resoluções de equações do segundo grau. A construção dessa trajetória é a metodologia da pesquisa que se corporifica em um percurso de estudo e investigação pessoal do professor que busca no enfrentamento de seu problema de formação construir ou acessar a infraestrutura matemática escolar necessária que dê respostas aos seus questionamentos. Essa infraestrutura se dá pela compreensão de um modelo epistemológico de referência pelo professor que se traduz em seu modelo epistemológico pessoal de referência para o estudo da resolução de equações do segundo grau corporificado em sistemas de tarefas que articula vários objetos da matemática escolar. A construção da trajetória se deu pela formação de sistemas didáticos solitários e auxiliares que compõem o processo de transposição didática interna realizado pelo professor.

PALAVRAS-CHAVE: Transposição Didática Interna. Percurso de Estudo e Investigação ou Pesquisa. Equação do Segundo Grau. Fatoração do Trinômio do Segundo Grau. Modelo Epistemológico Pessoal de Referência.

ABSTRACT

MESQUITA, Flávio Nazareno Araujo. The practice of teaching as a trajectory of teacher training of the mathematics teacher. 2017. 162 f. Tese (Doutorado em Educação em Ciências e Matemáticas) – Instituto de Educação Matemática e Científica, Universidade Federal do Pará, Belém, 2017.

This research tries to problematize the practice of teaching with an given object of internal didactic transcription of execution of this practice by the teacher. Thus, there is questioning if this process leads to the construction of a trajectory of teacher training on a given school mathematician. An affirmative answer is constructed from a course of studies and research on the theoretical support of the anthropological theory of education, considering the teaching of resolutions of equations of the second degree. The construction of this trajectory is the methodology of the research that is embodied in a course of study and personal investigation of the teacher who seeks in the confrontation of his training problem to build or access the necessary mathematical school infrastructure that answers his questions. This infrastructure is given by the understanding of a epistemological model of reference by the teacher that is translated into his personal epistemological model of reference for the study of the resolution of equations of the second degree embodied in task systems that articulate several objects of school mathematics.

KEY WORDS: Internal Didactic Transposition. Course of Study and Investigation or Research. Second degree equation. Factoring of the Second Degree Trinomial. Personal Epistemological Model of Reference.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - As duas etapas da transposição didática.....	16
Figura 2 - As duas etapas da TDI.....	18
Figura 3 - Sistemas didáticos que vivem na escola ou fora dela.....	40
Figura 4 - Percurso de estudo e investigação ou pesquisa.....	43
Figura 5 - Saberes articulados no MER ₀	46
Figura 6 - Trajetória pessoal de formação docente de $\mathcal{P}$	48
Figura 7 - Tarefa intermediária transformadora (T I T).....	75
Figura 8 - Resolução do aluno D.....	91
Figura 9 - Resultado encontrado pelas alunas J e M.....	104
Figura 10 - Resolução da aluna K.....	105
Figura 11 - Tarefa T _{AR} com áreas de retângulos.....	108
Figura 12 - Resolução de J e R.....	109
Figura 13 - Resolução final de J.....	110
Figura 14 - Resolução do aluno A.....	110
Figura 15 - Multiplicação de polinômio por polinômio.....	119
Figura 16 - Aplicação da fatoração do trinômio do 2º grau.....	126
Figura 17 - Resolução da equação do segundo grau por fatoração.....	126
Figura 18 - Completamento de quadrado.....	128
Figura 19 - Saberes Articulados no MEPR ₄	132

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 - Cálculo do termo desconhecido.....	50
Quadro 2 - Roteiro para resolução de equação do primeiro grau.....	52
Quadro 3 - Fatoração de trinômios quadrados perfeitos.....	55
Quadro 4 - Fatoração do trinômio do segundo grau.....	56
Quadro 5 - Resolução de equação literal com fatoração e simplificação.....	57
Quadro 6 - Resolução de equação fracionária com produto de polinômios.....	57
Quadro 7 - Problema envolvendo equação fracionária redutível à equações do segundo grau.....	60
Quadro 8 - Tarefas propostas para resolução de equações do segundo grau....	64
Quadro 9 - Resolução de equações do segundo grau por completamento de quadrados.....	66
Quadro 10 - A fórmula usual de resolução de equações do segundo grau no livro didático.....	67
Quadro 11 - Organização matemática para resolução de equações do segundo grau (MER_0).....	72
Quadro12 - Institucionalização da fórmula usual de resolução de equações do segundo grau.....	92
Quadro13 - O sistema de tarefas ST_0	143
Quadro14 - O sistema de tarefas ST_1	144
Quadro15 - O sistema de tarefas ST_2	145
Quadro16 - O sistema de tarefas ST_3	147
Quadro17 - O sistema de tarefas ST_4	151

LISTA DE SIGLAS

EF – Ensino Fundamental

EJA – Educação de Jovens e Adultos

EP – Equipamento Praxeológico

GEDIM – Grupo de Estudo de Didática da Matemática

IEMCI – Instituto de Educação Matemática Científica

MEPR – Modelo Epistemológico Pessoal de Referência

MER – Modelo Epistemológico de Referência

MRU – Método de Redução à Unidade

OD – Organização Didática

ODM - Organização Didático-Matemática

OM – Organização Matemática

PARFOR – Plano Nacional de Formação de Professores

PEP – Percorso de estudo e investigação ou pesquisa

PER – Parcours d'Étude et de Recherche (Percorso de Estudo e Investigação)

PNLD – Plano Nacional do Livro Didático

SD – Sistema Didático

SDA – Sistema Didático Auxiliar

SDP – Sistema Didático Principal

ST – Sistema de Tarefas

TAD – Teoria Antropológica do Didático

TD – Transposição Didática

TDI – Transposição Didática Interna

TFPD – Trajetória de Formação Pessoal Docente

T I T – Tarefa Intermediária Transformadora

UC – Universo Cognitivo

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO.....	12
2	A PROBLEMÁTICA DA TESE.....	15
2.1	O PROCESSO DE TRANSPOSIÇÃO DIDÁTICA INTERNA (TDI) E A QUESTÃO DE TESE	15
2.2	COMPREENSÕES DA TEORIA ANTROPOLÓGICA DO DIDÁTICO....	23
3	METODOLOGIA DA PESQUISA: UMA TRAJETÓRIA PESSOAL DE FORMAÇÃO DOCENTE.....	36
3.1	SISTEMA DIDÁTICO PRINCIPAL (SDP) E SISTEMAS DIDÁTICOS AUXILIARES (SDA).....	36
3.1.1	Noções fundamentais.....	36
3.1.2	Formação dos sistemas didáticos.....	37
3.2	CONSTRUÇÃO DA METODOLOGIA.....	40
4	A (RE)CONSTRUÇÃO DE UM PERCURSO COM OBJETOS DA MATEMÁTICA ESCOLAR: ESTADO INICIAL DA DIACRONIA DA TRAJETÓRIA.....	49
4.1	UMA TRAJETÓRIA COM OBJETOS MATEMÁTICOS NOS ANOS INICIAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL.....	49
4.2	UMA TRAJETÓRIA COM OBJETOS MATEMÁTICOS NOS ANOS FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL.....	51
4.3	UMA TRAJETÓRIA COMO PROFESSOR DE AULAS PARTICULARES.....	59
4.4	UMA TRAJETÓRIA COMO PROFESSOR DO ENSINO BÁSICO.....	62
4.5	O SISTEMA DE TAREFAS ST_0	69
5	A INSTAURAÇÃO DE SISTEMAS DIDÁTICOS E OS ESTADOS ORDINAIS DA DIACRONIA DA TRAJETÓRIA.....	71
5.1	O ENCONTRO DO PROFESSOR $\mathcal{P}$ COM O MER_0	71
5.1.1	O sistema de tarefas ST_1 e primeiro estado da diacronia da trajetória.....	76
5.1.2	O sistema didático auxiliar SDA_1: realização de ST_1 em sala de aula.....	79

5.2	O SISTEMA DIDÁTICO AUXILIAR SDA ₂ : OS DESDOBRAMENTOS DE ST ₁ REALIZADO EM SALA DE AULA.....	93
5.2.1	O sistema de tarefas ST₂ e o segundo estado da diacronia da trajetória.....	97
5.3	SISTEMAS DIDÁTICOS AUXILIARES COM ALUNOS-PROFESSORES DA LICENCIATURA.....	101
5.3.1	O sistema didático auxiliar SDA₃.....	101
5.3.1.1	Primeira etapa de estudos em SDA ₃	103
5.3.1.2	Segunda etapa de estudos em SDA ₃	106
5.3.1.3	Considerações sobre o SDA ₃	111
5.3.1.4	O sistema de tarefas ST ₃ e o terceiro estado da diacronia da trajetória.....	112
5.3.1.4.1	<i>Considerações sobre o sistema de tarefas ST₃.....</i>	<i>114</i>
5.3.1.5	O sistema didático auxiliar SDA ₄ : desdobramentos do sistema de tarefas ST ₃	117
5.3.2	O sistema didático auxiliar SDA₅.....	118
5.3.2.1	Desenvolvimento dos estudos no SDA ₅	118
5.3.2.2	Considerações sobre o SDA ₅	123
5.4	A FATORAÇÃO DO TRINÔMIO DO SEGUNDO GRAU SOB NOVA ÓTICA.....	124
5.4.1	A fatoração do trinômio do segundo grau em livros didáticos.....	125
5.4.2	A fatoração do trinômio do segundo grau realizada por meio da tarefa intermediária transformadora (T I T).....	129
5.4.3	A fatoração do trinômio do segundo grau por completamento de quadrados.....	130
5.4.4	O sistema de tarefas ST₄ e o quarto estágio da diacronia da trajetória.....	132
5.4.4.1	Considerações sobre ST ₄	139
6	CONSIDERAÇÕES E PERSPECTIVAS FUTURAS.....	141
	REFERÊNCIAS.....	154
	ANEXOS.....	161

1 INTRODUÇÃO

Iniciei como professor quando ainda era estudante do Ensino Médio por meio de aulas particulares de Matemática, prosseguindo com essa atividade quando ingressei no Ensino Superior no curso de Engenharia Elétrica e, seguindo com a conclusão do curso de Licenciatura em Matemática que ocorreu quando já havia assumido turmas regulares do Ensino Básico em escolas particulares de Belém.

Após muitos anos de experiência docente, considerava que as práticas de ensino que imprimia em sala de aula estavam cristalizadas, prontas e acabadas, pois julgava que a matemática escolar não tinha problemas para ser ensinada e aprendida, bastando para isso o treino repetido das tarefas impostas pelo professor e pelos livros didáticos.

Entretanto, diante de estudos que realizei na pós-graduação, desde a especialização até o doutorado, no viés do professor que questiona suas práticas de ensino, provocaram mudanças nas relações que tinha com objetos matemáticos escolares prontos e acabados. Mais precisamente, durante o curso do mestrado em que, à luz da Teoria Antropológica do Didático – TAD, ao me deparar com uma nova organização matemática – OM – para a tarefa de resolver equações do 2º grau, vi essa mudança se acentuar. Essa OM apresenta articulação de vários objetos da matemática escolar.

Em Mesquita (2011) ficou evidente que a mudança de relação que experimentei com os objetos considerados, ocasionada pelo encontro com um novo modelo para resolução de equação do segundo grau, não se substanciou suficientemente a ponto de provocar uma mudança de minhas práticas docentes em sala de aula, pois o jeito de fazer habitual para esse objeto se fez presente e comprometeu as articulações e integrações dos objetos do currículo, despertando-me interesse. Ficou claro nos resultados que houve um distanciamento entre o que pensei em fazer para mudar minha praxeologia diante dos saberes em jogo e o que fiz de fato.

O estranhamento causado no ensino por meio de organizações didático-matemáticas (ODM) idealizadas e construídas acabava por determinar seu abandono. Assim, emergiu meu projeto de tese em que assumo a investigação da problemática do professor que diante do saber reorganizado para o seu ensino, não consegue traduzi-lo numa prática de ensino que dê respostas ao problema da

desarticulação levantado por pesquisadores do programa em didática da matemática liderados por Yves Chevallard e Joseph Gascón.

Desse modo, passo a enxergar as praxeologias matemáticas escolares dominantes na escola sobre a equação do segundo grau como problemáticas e, sobretudo, como um problema praxeológico da profissão docente que deve ser enfrentado pelo professor.

Nesse sentido, é que questionamos se o percurso de estudo e investigação ou pesquisa (PEP), sob a compreensão do PER (Parcours d'Étude et de Recherche) em Chevallard (2009a, 2009b, 2009c), para enfrentar essa problemática do professor a ser instituído a partir das suas práticas docentes com o objeto de ensino, produz, em retrospectiva uma trajetória pessoal de formação docente?

Esse questionamento deriva de um dos problemas de formação docente anunciado por Chevallard (2009a) sob a luz da Teoria Antropológica do Didático, daqui em diante TAD, que pode ser expresso do seguinte modo: o quê das práticas do docente, incluindo seu modo de pensá-las, pode apoiar, impedir ou mesmo ser neutra, para a aprendizagem de uma prática desejada pelo professor sobre um dado objeto de ensino?

Para responder à questão posta, consideramos que a transposição didática interna, daqui em diante TDI, é sempre realizada pelo professor na busca de adequar uma prática aos modos de fazer e pensar essa prática para uma posição da escola, que pode ser aqui entendida como os anos em suas modalidades de ensino, por exemplo, para atender uma intencionalidade de ensino.

Os recursos teóricos e metodológicos da TAD, que se ocupa da investigação da ação do homem em situação matemática, o que inclui o ensino e aprendizagem e a formação docente, sustentam nossa investigação, considerando a prática de ensino de um professor em busca de encontrar condições, senão criá-las, que tornem possível o estudo de um dado objeto da matemática escolar para si e, em ação contínua, para uma dada posição da escola.

Sob esse entendimento, construo minha trajetória sincrônica em retrospectiva do PEP que realizei na diacronia de minhas práticas consideradas em sistemas didáticos.

Para tanto, a organização do texto traz na seção 1 a introdução; as seções 2 e 3 trazem a construção do referencial teórico metodológico a partir da compreensão da transposição didática interna e da teoria antropológica do didático e a construção

da questão de tese, além da noção de formação de sistema didáticos para a construção da metodologia.

No desenvolvimento da metodologia, a seção 4 traz um memorial que dá pistas sobre a formação de meu equipamento praxeológico e universo cognitivo relativo aos objetos matemáticos de interesse nessa pesquisa, constituindo, assim, o estado inicial E_0 da trajetória de formação.

A seção 5 evidencia o encontro com o a OM que chamamos de modelo epistemológico de referência inicial (MER_0) e seus desdobramentos com os estados E_1 , E_2 , E_3 e E_4 de compreensões que tive desse modelo e que substanciam o Modelo epistemológico Pessoal de Referência (MEPR) do professor.

Por último, a seção 6 traz as considerações finais em que é feita uma leitura geral do trabalho evidenciando a tese e suas possibilidades de desdobramentos para o ensino e a formação de professores.

2 A PROBLEMÁTICA DA TESE

Neste capítulo problematizamos a prática de ensino do professor a partir da noção do papel do professor no processo da transposição didática, o de colocar em texto, nem sempre em escrito, um dado saber a ensinar.

2.1 O PROCESSO DE TRANSPOSIÇÃO DIDÁTICA INTERNA (TDI) E A QUESTÃO DE TESE

Os objetos da matemática escolar são construídos para ser ensinados por meio do processo de transposição didática a partir da ação da *noosfera*¹ e tem início com as escolhas dos objetos a serem ensinados até chegarem às mãos do professor para serem reconstruídos para, em processo contínuo, se tornarem objetos ensinados.

Mais precisamente, Chevallard (1991, 2005) divide o trabalho da transposição didática em duas etapas: o trabalho externo realizado pela noosfera e o trabalho interno realizado, em ação contínua, pelo professor.

Essa divisão é evidenciada quando Chevallard postula que a noosfera é que vai proceder a seleção do *saber a ensinar* que serão submetidos ao trabalho de transposição, ou seja, a noosfera “vai assumir o *trabalho externo* da transposição didática, por oposição ao *trabalho interno*, que se realiza no interior mesmo do sistema de ensino” (CHEVALLARD, 2005, p. 36, grifos nossos).

Os elementos do saber sofrem transformações nesse trabalho que serão impostas para tornarem os saberes ensináveis. Arsarc (1989) citado por Ravel (2003) ilustra (Figura 1) as etapas da transposição didática, já anunciadas por Chevallard (1985). O processo de transposição didática interna ocorre a partir do trabalho de transformar o saber a ensinar em saber ensinado por meio da elaboração do texto do saber. Chevallard (2005) compreende que a noosfera é quem primeiramente constrói o texto do saber a partir de sua seleção. Assim:

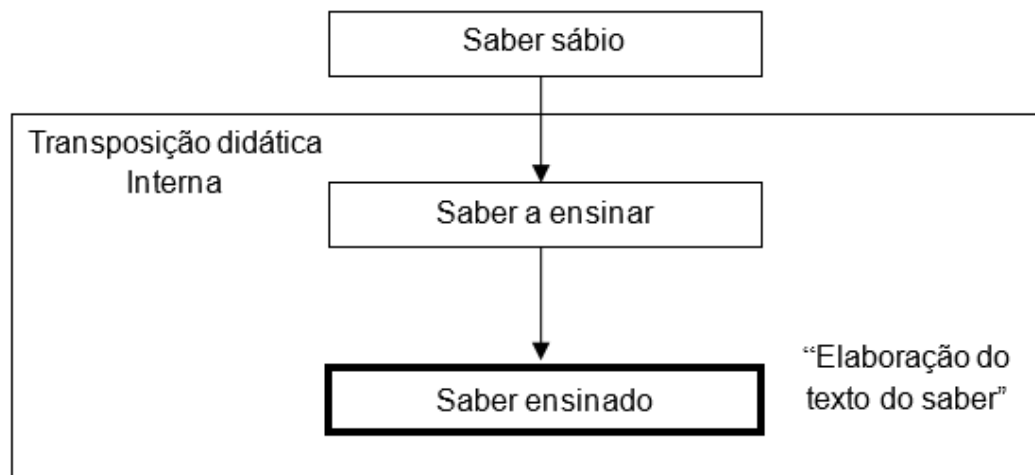
Quando a noosfera pretende introduzir objetos do saber no conteúdo de ensino, ela seleciona os “elementos do saber sábio” e os

¹A noosfera é a esfera onde se pensa o funcionamento didático, constituída das autoridades e especialistas da educação, com participação de diferentes agentes da sociedade, inclusive de pais e

transforma a fim de poder, notadamente, escrever um programa oficial de ensino (RAVEL, 2003, p. 4, tradução nossa).

Dessa maneira, o saber a ensinar antes de passar pelo discurso do professor já foi (re)organizado por agentes do entorno do sistema didático.

Figura 1: As duas etapas da transposição didática



Fonte: Arsac (1989, apud Ravel (2003), p. 4)

Chevallard (1991, 2005) afirma que os conteúdos do saber que são designados a ensinar são explicitamente postos nos programas oficiais e implicitamente trabalhados por meio da tradição, da evolução e da interpretação desses programas, ou seja, pelo uso que se faz deles. É nesse momento que o professor atua, pois cabe a ele a interpretação do saber corporificado em manuais e livros didáticos, e, pelos hábitos e tradições evolutivas da interpretação dos programas. Arsarc (1989), citado por Ravel (2003), ao comentar o esquema da figura 1, precisa a definição de saber a ensinar dada por Chevallard (1985):

Vamos retornar imediatamente para a noção de saber a ensinar: ele não se reduz ao programa, pois percebemos de fato que um programa apela por uma interpretação. O saber a ser ensinado é aquele que o professor pensa que deve ensinar quando os livros publicados, os manuais, os hábitos tomados, fixaram quase que definitivamente a interpretação de dito programa. (ARSARC, 1989 apud RAVEL, 2003, p. 4-5, tradução nossa).

Quando o professor se engaja na preparação do seu curso ele retém do processo de transposição didática o único momento em que se encontra envolvido “solitário” com o saber: a redação do texto do saber, realizada como notas de aula do professor, que “nada mais é que um *metatexto* que não está escrito

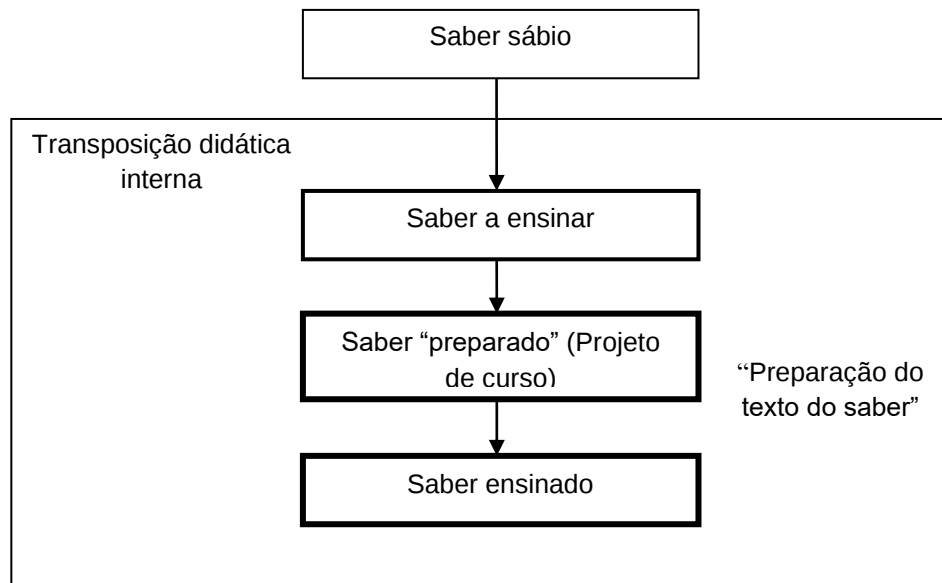
definitivamente em nenhum lugar, que é a matriz de variantes que lhe dará forma concreta” (CHEVALLARD, 2005, p. 21, tradução nossa). Assim, Chevallard põe em evidência o papel do professor no processo de transposição didática interna em que cabe a ele o discurso final do saber a ser ensinado, seja no preparo desse saber, seja na exposição oral e escrita em sala de aula.

Para o professor, a ferramenta essencial de sua prática é o texto do saber (que se torna a palavra dele), e as variações que ele permite impor. As outras variáveis de governo que pode dispor – especialmente aquelas que não estão especificamente ligadas a conteúdos do saber – são variáveis subordinadas e o permite, sobretudo, organizar e por em marcha sua primeira arma, o texto do saber. Este é o único capaz de se fazer existir ao professor enquanto tal; é ao mesmo tempo o principal instrumento terapêutico. É através dele e imediatamente graças a ele, que o professor atuará para modificar os efeitos do ensino ou para atuar sobre o que siga sendo patológico, apesar do ensino dado (CHEVALLARD, 2005, p. 41- 42, tradução nossa).

Ravel (2003) direciona seu olhar sobre o processo que ocorre com um objeto de saber desde que é designado para o ensino, até que esse objeto de saber seja efetivamente ensinado. A partir de questões genéricas tais como – o que acontece quando um objeto de saber surge nos programas oficiais para ser ensinado? Como é feita sua transição para a sala de aula? Quais são os atores responsáveis por essa transição e quais seus papéis? Que sistemas de condições e restrições atuam sobre eles? – ela encaminha suas questões de tese e sua metodologia.

Mais precisamente, para compreender o papel do professor no processo de transposição didática interna, Ravel (2003) põe seu foco na etapa intermediária que chama de preparação do texto do saber (projeto de curso), dividindo assim, a TDI em duas fases: do saber a ser ensinado ao saber preparado, e do saber preparado para o saber ensinado, segundo ilustra a Figura 2.

Esse trabalho de reconstrução de um objeto de ensino para se tornar ensinado é realizado em ato “contínuo” pelo professor, em duas fases distintas: a fase da preparação da aula, corporificada por seu texto do saber, e, a da aula propriamente dita.

Figura 2: As duas etapas da TDI

Fonte: Ravel (2003, p. 6)

Ravel (2003) busca evidenciar condições e restrições que atuam sobre as práticas de ensino do professor no processo de TDI. Tomando a aritmética como objeto matemático, em duas abordagens – de raciocínio e algorítmica (com introdução da informática). Ela analisa possíveis maneiras de como o saber a ensinar é apresentado nos programas oficiais, nos livros e manuais didáticos que os professores tomam como referência na construção de seu texto do saber, para assim buscar respostas sobre como o professor cumpre esse encargo.

Sua problemática se desdobra em três conjuntos de questionamentos, mas direcionamos nosso olhar sobre aquele que nos interessa aqui:

Quais são as conformidades institucionais de um professor? Que sistema de restrições e condições impostas pesam em sua escolha matemáticas e didáticas e estas sujeições do passado definem para ele? Qual é o "peso" da organização didática sobre a determinação da organização matemática² que deve implementar? Por outro lado, qual o "peso" da organização matemática na determinação da

² Organização matemática (OM) é uma realidade matemática (praxeologia matemática) que pode ser construída para uma classe de onde se estuda certo objeto matemático. Ou seja, é texto do saber feito pelo professor anterior à sala de aula, feito no momento em que o professor atua solitário. Por outro lado, a organização didática (OD) é a maneira como pode ser construída a realidade matemática, ou seja, como vai se dá o estudo do objeto em sala de aula (CHEVALLARD, 1999). Bosch e Gascón (2001) postulam que para determinada instituição escolar, a organização didática escolar dependerá fortemente da organização matemática objeto de estudo na escola e, reciprocamente, que a organização matemática estará, a sua vez, determinada pela organização didática correspondente. A codeterminação das OM e OD faz que se considere o uso do termo organização didático-matemática (ODM).

organização didática a ser implementada? (RAVEL, 2003, p. 9-10, tradução nossa).

Para a construção de respostas Ravel analisa as práticas de ensino de dois professores de um curso de *l'arithmétique en terminale S spécialité mathématique* em que busca compreender o sistema de condições e restrições que atuam nas escolhas do professor para o ensino de aritmética desde a preparação do saber anterior à sala de aula ao saber ensinado na sala de aula.

Por meio de análise de obras e aplicação de questionários aos professores, busca compreender o “peso” das organizações didáticas sobre a organização matemática que se corporifica nos seus textos do saber. E, por meio das observações de aulas, analisa a realização do texto do saber nas práticas efetivas de ensino. Assim, Ravel dirige seus questionamentos sobre a responsabilidade que professores e autores de livros didáticos possuem na evolução da transposição didática de um saber.

Por outro lado, nesta pesquisa consideramos a TDI como um processo problemático e pessoal, para um professor concreto, de encontrar uma resposta R como reconstrução de uma OM concreta em uma instituição concreta. Ou seja, nossa empreitada situa-se na fase da TDI (do saber a ensinar ao saber ensinado), porém direcionando o foco para a formação pessoal do professor, a partir da construção de trajetórias para suas aprendizagens.

Nesse sentido, direcionamos nosso interesse para a prática de ensino do professor durante o processo de transposição didática interna realizada com base na problematização das práticas com matemática escolares³ – tendo em conta as condições e restrições que se impõem sobre essas práticas – conduzindo a uma formação pessoal docente – de onde emerge a seguinte questão que orienta essa pesquisa:

A prática de ensino realizada por um professor que questiona as práticas com matemática em relação a um dado objeto que vive nas instituições escolares determina uma trajetória pessoal de formação docente em relação a esse objeto?

³ Chevallard (2005) nos encaminha que, no processo de transposição didática, as escolas ensinam práticas que usam matemática. Assim, as práticas com matemática na escola se corporificam em uma matemática escolar distinta da matemática dos matemáticos.

O questionamento pode, inicialmente, parecer restringir-se à formação continuada, no entanto, o objetivo deste trabalho consiste em problematizar a transposição didática interna como dispositivo de formação do professor de matemática, tendo em conta as práticas com matemática que vivem na escola, o que implica, de certo modo, tomar a escola também como ambiente de formação, inclusive para os professores em formação inicial.

Antes de se apresentar os fundamentos teóricos que asseguram a problemática da questão anunciada, torna-se necessário, mesmo que de modo breve, esclarecer alguns aspectos sobre a transposição didática, considerando a existência de outras compreensões que podem pôr a questão anunciada como suficientemente ingênua para permitir o esforço de um empreendimento que demanda uma pesquisa.

As fases da transposição didática interna são ignoradas por correntes de pensamento que interpretam a transposição didática como um processo finalizado para um saber. Esta iniciaria com a transformação do saber em saber a ser ensinado e, finalmente com a delimitação do objeto de ensino, compreendendo, assim, a prática de ensino da matemática como campo de aplicação de conhecimentos produzidos, sistematicamente, pela pesquisa acadêmica e, como tal, longe das práticas escolares, como deixa escapar essa interpretação o seguinte extrato de texto.

O lugar da matemática nessa concepção de prática e de formação docente continua sendo considerado central e fundamental, porém, ainda fortemente distanciado das práticas escolares, pois a aplicação desses conhecimentos passa por um processo de racionalidade técnica e/ou de transposição didática do saber sábio ou científico para o saber a ser ensinado e, finalmente, em objeto de ensino, conforme teorização de Chevallard (1991) (FIORENTINI; OLIVEIRA, 2013, p. 921).

Sob esse olhar, o processo de transposição didática realizado por um professor é interpretado como a mera tarefa do professor de “preparar aulas” sobre um dado objeto matemático de ensino que já se encontra finalizado. Caberia ao professor reduzir esse objeto ultimado, como manifestação de uma racionalidade técnica, em sequências didáticas para o ensino em uma dada escola.

O que estaria em jogo na transposição didática seria a possibilidade ou não de adaptação dos objetos de uma matemática com letra maiúscula. Essa possibilidade de adaptação regularia a vida de todos os objetos matemáticos de

ensino na escola, independente de se constituírem em respostas que lhe dariam sentido, como quer fazer acreditar o seguinte extrato de texto:

Em síntese, nessa concepção de prática pedagógica do educador matemático, só existe a Matemática (com letra maiúscula), aquela que vem dos matemáticos profissionais, mas que pode ser transposta/adaptada para o contexto de ensino e aprendizagem. Além disso, nessa perspectiva, o processo formativo enfatiza mais a dimensão técnica e didática (relações entre professor-aluno-conteúdo e métodos de ensino) do que a pedagógica (o sentido, a relevância e as consequências do que ensinamos) (FIORENTINI; OLIVEIRA, 2013, p. 921).

É preciso, então, destacar que o processo de transposição didática de um dado saber é dinâmico e não finalizado enquanto esse saber constituir-se como objeto de ensino. Por um lado, pela permanente iteração, uma fase agindo sobre a outra fase da transposição didática interna – a fase de preparação do texto do saber e o saber ensinado de fato – como já evidenciado em Ravel (2003) e Silva (2013) e, por outro lado, por meio das transposições desse saber entre as diferentes instituições de ensino (CHEVALLARD, 2005, 2009a). As instituições precisam “adaptar” as práticas considerando suas idiossincrasias de fazer e pensar essas práticas.

A transposição didática interna é sempre realizada pelo professor, mesmo que não problematizada, quando ele busca adequar uma prática aos modos de fazer e pensar de dada posição escolar. Além disso, a transposição didática interna pode dar-se a partir do questionamento do professor sobre uma prática com dado objeto matemático da cultura escolar, incluindo as suas próprias, seja por não ter domínio sobre tais práticas ou por não encontrar sentido para elas.

Essas carências matemáticas e didáticas podem se revelar como um dos problemas de formação docente quando o professor busca responder, por exemplo, aos seguintes questionamentos: Quais questões da matemática escolar são respondidas por uma prática com um dado objeto a ser ensinado? Em que práticas da matemática da escola esse objeto está presente, ou pode ser incluído?

Para os didáticos da matemática do programa epistemológico, os objetos a serem ensinados não estão prontos e disponíveis a priori para o ensino. Precisam ser reconstruídos para atender uma intencionalidade de ensino.

Para isso, a transposição didática da matemática assume a compreensão de que os fenômenos didáticos estão integrados aos fenômenos relacionados à produção da matemática e, igualmente importantes, ao uso da matemática.

Atividades matemáticas escolares são, então, integradas a um domínio mais amplo do estudo das *práticas matemáticas institucionalizadas*. O domínio da didática vai além de instituições de ensino, para todos aqueles que abraçam qualquer tipo de manipulação do conhecimento matemático. Pode-se dizer que a didática da matemática – como é considerada no *Programa Epistemológico – estuda a cognição matemática no sentido de que condições tornam a produção e o desenvolvimento do conhecimento matemático possível nas instituições sociais* (BOSCH; CHEVALLARD; GASCÓN, 2006, p. 1256, grifos deles, tradução nossa).

Nesse contexto, a transposição didática interna feita pelo professor remete à busca das condições, se não, da criação destas para tornar possível o estudo de um dado objeto da matemática escolar em uma dada posição dessa instituição.

Desse modo, parece-nos claro que a prática de ensino como uma transposição didática interna está na prática docente da escola, e a matemática escolar, nesse caso, não se confunde com outra matemática, pois é a matemática que vive na escola, com a diferença que nesse processo, quando problematizada, se busca dar uma organização, ou seja, certa estrutura às práticas de modo que permitam encontrar um saber, não necessariamente, matemático. Nesse sentido, parafraseando Chevallard et al (2001) sobre o problema da elaboração do currículo, a tarefa do professor não se reduz unicamente em sequenciar e temporizar os objetos matemáticos da escola, mas realizar um trabalho de reorganização dos elementos técnicos e tecnológicos que compõe cada obra, com base nas questões às quais ela responde. Trata-se de uma verdadeira reconstrução criativa das praxeologias⁴ que fazem parte da escola.

Mas, a teoria da transposição didática, que deixa claro as diferentes problemáticas que circulam e condicionam diferentes aspectos da transposição didática de um dado saber, com especial atenção sobre o sistema didático constituído pelo saber, pelo professor e pelos alunos, em inter-relações, não anuncia claramente a transposição didática interna realizada pelo professor como problemática.

⁴ O jeito de fazer e de pensar as atividades institucionais.

A transposição didática interna ganha novos contornos dentro da Teoria Antropológica do Didático (CHEVALLARD,1999). Esta teoria, uma forma ampliada da teoria da transposição didática, por meio de seu modelo praxeológico põe em evidência a relatividade do saber a partir da noção das transposições didáticas entre diferentes instituições, que exigem adaptações das práticas com os saberes segundo novos jeitos de fazer e pensar o conhecimento. Na subseção seguinte discorreremos sobre esses novos contornos da TDI a partir da TAD.

2.2 COMPREENSÕES DA TEORIA ANTROPOLÓGICA DO DIDÁTICO (TAD)

A relatividade do saber concebida pela transposição entre as diferentes instituições, onde ele vive e se transforma, o faz ser assumido em definitivo como qualquer estrutura ou organização possível de atuação do conhecimento humano e que pode ser modelado por praxeologias.

De outro modo, falar de saber significa falar de atividades humanas situadas, que podem ser compreendidas de modo mais específico como um saber fazer, constituído de uma tarefa (T) e um jeito de fazê-la, que é denominado de técnica ($\hat{o}$), que sempre se faz acompanhar, de modo indissociável, de um discurso, *logos* [θ , Θ] ou *saber*, mesmo que esse pareça ausente, constituído por uma tecnologia (θ) e uma teoria (Θ) com a função de justificar, explicar ou produzir a práxis, mesmo que esse discurso se reduza a uma afirmação do tipo “aqui é assim que se faz”. Assim, a praxeologia é um produto da integração dos elementos T , $\hat{o}$, θ , Θ .

Uma pessoa, que vive numa dada posição de uma instituição, realiza tarefas relativas com dados objetos com a imposição, nem sempre explícita, do jeito de fazer e do jeito de pensar dessa instituição para aquela posição, que o leva a criar para si um conjunto de relações com esse objeto, mais ou menos em conformidade com essa instituição. As praxeologias e as relações da pessoa com os objetos correspondentes constituem o equipamento praxeológico e o universo cognitivo da pessoa relativo àquele objeto. No quadro da TAD

Uma pessoa x é o resultante de seu passado e presente de conformidades institucionais. O conhecimento de uma pessoa x pode assumir duas formas principais. Em diacronia, podemos imaginar o fazer da história da pessoa como sujeito, por meio da crônica de suas conformidades e contra conformidades. Em sincronia, podemos imaginar o quadro de suas relações pessoais, que é dizer o que eu chamei acima de seu universo cognitivo UC (x) [...]. Mas também

podemos encarar o conjunto de praxeologias que a pessoa dispõe, ou que está equipada (mesmo que ela não possa atualizar tal ou tal praxeologia que venha a ocupar tal posição dentro de tal instituição): é o que chamo de equipamento praxeológico da pessoa. Claro que, mesmo que haja uma história da pessoa como sujeito, existe uma dinâmica cognitiva, que é o que faz com que alguns objetos desapareçam da UC (x), enquanto outros irão aparecer, e há uma dinâmica praxeológica em que o equipamento praxeológico de x , que denotamos por $EP(x)$, muda – algumas partes deste equipamento perdem suas características de operação, enquanto outras partes são remodeladas e novos elementos são adicionados ao longo do tempo (CHEVALLARD, 2009a, p. 6-7, tradução nossa).

Parece claro que o equipamento praxeológico de uma pessoa, correspondente a seu universo cognitivo relativo a um dado objeto, é fruto de sua história de conformidades – passadas e presentes – em distintas instituições, cada uma com seu equipamento praxeológico e universo cognitivo próprios⁵, mesmo admitindo-se congruências parciais ou totais, relativas às praxeologias com esse objeto.

Torna-se oportuno destacar que uma praxeologia que vive em uma dada instituição pode ser fruto de alterações e recombinações praxeológicas que, segundo Chevallard (2009a), são um fenômeno no coração da história das praxeologias.

Se $\Pi \oplus \Lambda$ denota uma praxeologia $[T / \tau / \theta / \Theta]$ existente em uma instituição I , a sua transposição para outra instituição^{*}, pode-se denotar por $(\Pi \oplus \Lambda)^*$, e pode em alguns casos (aproximadamente) se escrever $\Pi \oplus (\Lambda^*)$; Neste caso, a práxis será bem (essencialmente) a mesma, mas o logos terá mudado. A praxeologia transposta $(\Pi \oplus \Lambda)^*$ às vezes pode também ser escrita $(\Pi^*) \oplus \Lambda$, na qual o logos será mantido, mas a práxis alterada, e que às vezes é esvaziada de sua substância (teremos $\Pi^* \approx \emptyset$) (CHEVALLARD, 2009a, p. 4, tradução nossa).

É preciso ter clareza que as alterações e recombinações praxeológicas podem ser frutos da transposição didática de praxeologias entre instituições, como também podem ser fruto da reconstrução de uma praxeologia que vive em uma dada posição, de modo a atender novas condições impostas pelos níveis mais externos de codeterminação didática advindas da pedagogia, ou da escola e até

⁵ Para fazer coisas, nós seres humanos nos reunimos em coletivo – as instituições – que nos oferecem (e impõem) determinadas maneiras de fazer e de pensar próprias – as praxeologias (BOSCH; GASCÓN, 2009, p. 93).

mesmo da sociedade, mas, sobretudo, para atender uma necessidade do professor para o ensino de uma praxeologia nessa instituição.

Aqui emerge o papel do professor no processo de transposição didática, como o agente das alterações e combinações praxeológicas, por necessidade do ensino para levar à aprendizagem, mais precisamente, o problema anunciado por Chevallard (2002, 1998a, 1998b) como problema praxeológico do professor de reconstruir uma organização matemática OM, de modo que possa ser estudada numa dada posição da escola.

Podemos falar, então, de uma praxeologia didática do professor relativa a uma organização matemática OM concreta. É a resposta $R_\pi = [T_\pi/\tau_\pi/\theta_\pi/\Theta_\pi]$ que cada professor dá ao problema de reconstruir uma OM concreta em uma instituição concreta (BOSCH; GASCÓN, 2001, p. 2-3, tradução nossa).

As alterações e recombinações praxeológicas atendem uma necessidade institucional e também uma necessidade pessoal do professor. Pois, não se deve esquecer que um professor, sob a compreensão da TAD é uma pessoa portadora de uma história como sujeito de diferentes instituições, passadas e presentes, mas que não perde seu papel de agente social que deve ser capaz de impor dinâmicas praxeológicas e cognitivas capazes de transformar partes de seu universo cognitivo e de seu equipamento praxeológico ao longo do tempo, de modo a construir respostas a questões demandadas pela pedagogia, escola, e pela sociedade e a cultura em que está inserido. A ausência dessa capacidade de realizar dinâmicas praxeológicas e cognitivas impediriam todo o poder criativo desse professor.

Assim, a formação de um professor para enfrentar o problema praxeológico concreto, exigiria adequações do professor a novas conformidades institucionais resultantes de suas dinâmicas cognitivas e praxeológicas.

É sob essa compreensão que a formação do professor, “formal ou informal” (CHEVALLARD, 2009a, p.7), pode ser anunciada como o problema de levá-lo a imprimir mudanças em seu equipamento praxeológico correspondente a seu universo cognitivo relativo a um dado objeto de ensino, tendo em conta o trabalho de identificar e tratar os conflitos relacionados aos choques entre as novas conformidades e as conformidades anteriores, quando as primeiras se mostrem incompatíveis com a suas relações e práticas com um dado objeto.

Postulamos que esse problema – um problema praxeológico concreto de um professor relativo a um dado objeto de ensino, considerando as condições e restrições impostas pelos diferentes níveis de instituições sobre as práticas desse objeto – pode ser enfrentado por meio do processo de transposição didática interna quando realizado de forma engajada por esse professor.

Mais precisamente, esse enfrentamento pode iniciar-se a partir do problema de formação anunciado por Chevallard (2009a) de encontrar as condições que permitam ao professor mudar sua relação com um dado saber escolar. Consideramos essa mudança de relação como uma mudança de seu equipamento praxeológico e suas conexões, incluindo as situações, relativas a esse saber. Assim, postulamos que o problema praxeológico do professor de encontrar uma resposta para reconstrução de uma OM concreta pode ser denotado como um Problema Pessoal de Formação Docente (PPFD).

Assim, realizar uma transposição didática consiste em recriar uma organização articulada e integrada de praxeologias, inclusive de seus fragmentos praxeológicos, para atender a uma intenção de ensino, pois sob a TAD, o saber a ser ensinado necessita responder uma ou mais questões, matemáticas ou extramatemáticas, que lhe deem sentido. Tal processo implica reconstruir organizações de tarefas da matemática escolar que atendam à intenção de ensino mencionado, e isso, como um problema praxeológico do professor faz emergir o questionamento sobre o que ensinar do saber e como ensinar.

A busca de respostas a tal questionamento, relativas aos saberes da matemática escolar, conduz a uma das linhas de investigação previstas pela TAD que considera os saberes da epistemologia e da história da matemática, inclusive dos saberes que funcionam com matemática, não necessariamente nessa ordem ou de modo simultâneo. Pois, essa infraestrutura de saberes, pode permitir construir uma epistemologia artificial para o saber considerado, que é chamada de Modelo Epistemológico de Referência – MER – como uma fecunda trajetória de praxeologias.

É nesse contexto, que uma resposta à questão inicialmente anunciada⁶ se coloca como uma das possíveis respostas ao problema de formação, formal ou

⁶ A prática de ensino quando realizado por um professor que questiona as práticas com matemática que vivem nas instituições escolares, relativo a um dado objeto matemático escolar, encaminha uma trajetória pessoal de formação docente relativo a esse objeto?

informal, do professor de matemática relativo a um dado objeto de ensino. Mas, como construir a resposta à questão inicialmente posta? Para isso é preciso considerar o modelo praxeológico proposto pela TAD por se constituir em potente ferramenta para a análise e o desenvolvimento de organizações praxeológicas. Chevallard (2002) expressa o problema praxeológico por meio de uma sequência de questões preliminares, segundo o trecho a seguir:

O problema praxeológico do professor pode ser expresso em uma pequena sequência de questões altamente inter-relacionadas, embora não muito específicas (Chevallard, 1999). Em primeiro lugar, quais os tipos de tarefas que o professor deve executar na escola, relacionadas a determinados objetos matemáticos? Que técnicas estão disponíveis para realizar esses tipos de tarefas? Qual é o seu significado? Que controle que ele tem de qualquer uma destas técnicas e o domínio que os alunos têm delas? O que ele pode fazer para melhorar esse controle, para participar na criação e eventual difusão de novas técnicas e novos tipos de tarefas mais adequadas? Finalmente, quais tecnologias foram induzidas por quais teorias para justificar e explicar as técnicas e os tipos de tarefas? Até que ponto essas tecnologias são conhecidas por ele? O que ele pode fazer para melhorar este conhecimento? Para participar da criação e difusão de quaisquer teorias e tecnologias mais adequadas? (CHEVALLARD, 2002, p. 1, tradução nossa).

Para o enfrentamento do problema praxeológico, o modelo proposto pela TAD é posto a partir de construções de compreensões sobre a prática docente considerando articulações e combinações do modelo mínimo denominado de *praxeologia pontual* que, nas relações com outras praxeologias pontuais, ganha complexidade segundo, mas nem sempre evidente, um dado saber. Isso é compreendido pelo seguinte extrato de texto:

As organizações pontuais vão assim se agregando, primeiramente como organizações *locais*, $[T_{ij}/\hat{\theta}_i/\theta/\theta]$, centradas sobre uma tecnologia θ determinada, em seguida em organizações *regionais*, $[T_{ij}/\hat{\theta}_{ij}/\theta_j/\theta]$, formada em torno de uma teoria θ . (Além disso, nomeamos uma organização praxiológica *global* o complexo praxiológico $[T_{ijk}/\hat{\theta}_{ijk}/\theta_{jk}/\theta_k]$ obtido em uma determinada instituição pela agregação de várias organizações regionais correspondentes a várias teorias θ_k (CHEVALLARD, 1999, p. 5).

Essa compreensão orienta um modelo taxionômico das organizações praxeológicas que “implicitamente” aponta a construção por articulações e combinações de outras organizações praxeológicas, com certa estrutura e unidade,

que pode ser tomado, em sentido lato, como um MER⁷, como já anunciado anteriormente, para um dado saber.

A partir dessa compreensão, a TAD remete a modelos *strictu senso* em que as praxeologias matemático-didáticas são construídas de modo a fazer com que o saber surja por meio de tipos de tarefas que se desdobram em outras tarefas que Chevallard (2002) denomina de *sistema de tarefas*. Assim o saber não surgiria de forma repentina para os sujeitos da escola, mas organizado em um sistema inteligível que o torne visível à medida que evolui a organização didática.

O ensino superior, em geral, faz o saber fazer parecer como uma *simples aplicação* do "saber" e também faz parecer aos sujeitos desse nível de ensino que o texto do saber é o próprio saber. Ali é dominante a abordagem axiomática, por exemplo, que põe em evidência a teoria por meio de suas tecnologias em movimentos, como parece substanciar o extrato de texto a seguir:

A passagem de uma praxeologia pontual $[T/\hat{\theta}/\theta/\theta]$ para uma praxeologia local $[T_i/\hat{\theta}_i/\theta,\theta]$ destaca a tecnologia θ , bem como a posterior passagem para uma praxeologia regional $[T_{ij}/\hat{\theta}_{ij}/\theta_j,\theta]$ põe em primeiro plano a teoria θ . Em ambos os casos, a visibilidade do bloco do saber aumenta, em detrimento do saber-fazer. (CHEVALLARD, 1999, p. 6).

Essa percepção do saber como texto do saber pode ser tomada, em analogia, na Educação Básica pelos professores. As práticas escolares, nesse sentido, seriam versões ou transposições didáticas das práticas matemáticas da academia, que em geral, são suficientemente ingênuas, ou mesmo infantilizadas, que dispensariam, no máximo, olhares suspeitos quanto aos aspectos ditos conceituais dos objetos matemáticos.

As práticas escolares seriam complexas por agregarem elementos pedagógicos não conhecidos ou reconhecidos pela instituição de formação específica, a Matemática, mas sem despertar questionamentos por estarem substanciados nos textos escolares chancelados pela sociedade por meio da *noosfera* com o selo do PNLD⁸, por exemplo. A esse respeito, Bosch e Gascón (2009) assumem que além das praxeologias matemáticas a ensinar, o professor

⁷ Segundo Sierra (2006), um MER é uma reconstrução racional da organização matemática (OM) em torno de um determinado objeto matemático de estudo para o desenho, experimentação e análise de processos de estudo. Ou seja, a construção de um MER tem objetivos de análise e desenvolvimento de organizações matemático-didáticas para uma instituição.

⁸ Plano Nacional do Livro Didático.

deve ativar outros tipos de praxeologias para o ensino, ou seja, o equipamento praxeológico matemático do professor não pode reduzir-se àquilo que deve ensinar. Entretanto, isso não parece estar evidente para os professores em sua prática de ensino.

Assim, o saber escolar é o texto do saber. Sem questionamentos. Não fica claro que a atividade matemática da escola, em contraste com um modelo com estrutura e unidade segundo um saber, mostra-se dominada por mobilização de noções paramatemáticas⁹ e protomatemáticas¹⁰ que, como ferramentas indispensáveis, engendram modos de fazer as tarefas que permitem torná-las exercícios rotineiros naturalizados que despistam a necessidade do saber.

Esse fazer, que demanda uma situação para evocar o modo de fazer, produz desarticulações entre as organizações matemáticas estudadas que colaboram, sem dúvida, para tornar invisíveis possíveis questionamentos aos alunos e, não menos importante, aos professores, sobre as práticas da escola com um saber considerado. O problema da desarticulação vem sendo enfrentado pelo programa epistemológico em diversas pesquisas em didática da matemática (BOLEA, 2003; FONSECA, 2004; SIERRA, 2006; GARCIA, 2005; GARCIA et al, 2006; BARQUERO, 2009; ANDRADE, 2012; GUERRA e ANDRADE, 2013; ASSUNÇÃO, 2016; SILVA, 2013; SILVA, 2017; FONSECA; BOSCH e GASCÓN, 2010; LUCAS et al, 2014, RODRÍGUEZ, 2005) que evidenciam que as praxeologias pontuais são marcadas por tarefas e técnicas que não se desdobram em outras tarefas por necessidade de transformação ou mudança da técnica. Ou seja, na escola não é raro o ensino de matemática se dar por praxeologias pontuais em que não há articulações entre as mesmas por meio do trabalho da técnica. Esses pesquisadores encaram esse problema como o da desarticulação como anuncia Garcia et al (2006, p.10, tradução nossa):

⁹ As noções paramatemáticas são objetos dos quais o professor toma consciência deles, que lhes dá um nome (“parâmetro”, “equação”, “demonstração”, etc.): em resumo, objetos que entram em seu campo de *percepção didática*. Estas noções são noções-ferramenta da atividade matemática: “normalmente” não são *objetos de estudo* para o matemático. As noções paramatemáticas são geralmente *pré-construídas* (por mostração) (CHEVALLARD, 2005, p.58-59, itálicos do autor).

¹⁰ Noções protomatemáticas são aquelas mobilizadas implicitamente pelo *contrato didático*. São os extratos mais profundos das noções (CHEVALLARD, 2005, p.60). São objetos que não possuem uma denominação e não há algoritmo para seu uso, mas são fundamentais para o ensino de noções paramatemáticas e matemáticas. Por exemplo, a identidade $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ supõe a consideração de noções paramatemáticas tais como a noção de fatoração e de simplificação, que por sua vez devem ser consideradas à luz de noções protomatemáticas, como a noção de padrão, de simplicidade, etc (CHEVALLARD, 2005, p. 65).

Como organizar o ensino da matemática escolar, de forma a provocar a ligação dos diferentes tipos de conteúdo: conceitos, procedimentos e atitudes? Como conseguir que esse conhecimento matemático aprendido pelos alunos não serão reduzidos a um conjunto de técnicas desconectadas mais ou menos algorítmicas e sem qualquer sentido?

Não há, assim, clareza para o professor sobre o quanto é problemática a construção de novas organizações didático-matemáticas, um de seus problemas primordiais para o exercício profissional, o já anunciado problema praxeológico do professor de reconstruir OM de modo que possa ser estudada numa dada escola. Nesse sentido, Chevallard (1998a, 1998b) anuncia as duas grandes tarefas do professor:

A primeira consiste nas tarefas de concepção e organização de dispositivos de estudo e gestão de seus ambientes (um dispositivo sendo o componente material de uma técnica, por oposição à sua componente gestual); a segunda, nas tarefas de ajuda ao estudo, em particular da direção de estudo e ensino, com o qual é chamado para realizar sua implementação, no quadro dos dispositivos anteriormente mencionados, de técnicas didáticas determinadas. (CHEVALLARD, 1998b, p.10).

No entanto, a presença de um agente perturbador sobre uma praxeologia escolar com um dado objeto de ensino, pode fazer encaminhar tal problemática. Por exemplo, quando emerge a necessidade de adequar uma praxeologia a uma redução do tempo de ensino, como acontece para a EJA (Educação de Jovens e Adultos), ou um professor do Sistema Multisseriado que teria que organizar os objetos de ensino para alunos de anos diversos na mesma sala, como trata a tese de Silva (2013). Mas, sobretudo, por meio de elementos teóricos da TAD que, em seus fundamentos, evidencia a necessidade de se questionar o saber a ser ensinado.

Nesse âmbito, da TAD, o MER surge como um dispositivo que torna possível ao professor desenvolver organizações didático-matemáticas como respostas ao seu problema praxeológico.

Contudo, é necessário considerar pelo menos as seguintes questões, implicadas entre si, mesmo que pareçam ingênuas: Q_{i1} – Como construir um MER para um dado objeto de ensino, ou um tema, por exemplo? Q_{i2} – Como construir um sistema de tarefas que mantenha a unidade da estrutura estabelecida pelo MER?

Primeiro, para a questão Q_{i1} , porque o MER poderia ser desenvolvido a partir da matemática acadêmica que disporia de saberes capazes de fundamentar qualquer objeto matemático. No entanto, não é difícil perceber que a matemática da escola envolve objetos legitimados pela cultura escolar como objetos matemáticos que se mostram estranhos aos matemáticos: a fração, a regra de três e a redução à unidade são exemplos clássicos dessa afirmação. Portanto, a tarefa de construir um MER para os objetos da matemática escolar nem sempre será alcançada pela matemática da academia.

De outro modo, a resposta à primeira questão parece não ser fácil, principalmente tomando a atividade matemática acadêmica como referência. Exige grande investimento de tempo e infraestrutura matemática para tal fim, como pode ser notado pelo esforço de Felix Klein (1908), citado por Gascón (2014), ao buscar tratar as práticas escolares com fundamentos da matemática acadêmica, e, mais recentemente, pelo grupo de pesquisadores da didática da matemática liderado por Gascón (2010) para a análise praxeológica de organizações matemáticas que vivem na escola.

O uso da matemática acadêmica na construção de um MER pode produzir rupturas com as práticas da matemática escolar, como acontece, por exemplo, com o método da redução a unidade, sempre rejeitado por argumentos eruditos da matemática, mas com forte uso nas escolas e disciplinas das ciências aplicadas. Aliás, invariavelmente, a matemática acadêmica, tomada como referência, conduz, por conflitos com seus objetos, a morte de organizações praxeológicas escolares, como o estudo da regra de três, das frações, entre outros, que, ainda assim, insistem em viver na escola. Bosch (1994), por exemplo, afirma que o Método da Redução à Unidade (MRU) é um instrumento discursivo pouco técnico e eminentemente natural que se justifica pelo simples fato de realizar-se na escola ou livros didáticos. Entretanto, Assunção (2016) analisa que o MRU, que está presente nas práticas sociais e na escola é um saber que não apenas se realiza para satisfação da matemática escolar, mas como método para enfrentamento de problemas reais.

Segundo, em relação à questão Q_{i2} , que uma vez construído o MER, mesmo com alcance limitado, a sua tradução em um sistema de tarefas não é única e nem acabada. Isto quer dizer que pode implicar na mudança do MER, considerando a

emergência de condições não presentes na construção desse modelo. Nesse sentido, Bosch e Gascón (2010) amparados em Chevallard (1991), afirmam que:

A teoria da transposição didática nos ensina que não há nenhum sistema de referência privilegiado para as análises das diferentes etapas do processo de transposição didática. Porém a ausência de um sistema de referência absoluto não faz menos imprescindível a utilização de sistemas de referência relativos adequados a cada situação, modelos cujo caráter hipotético lhes atribui uma provisionalidade permanente, ou melhor dito, uma evolução permanente e sempre submetidos à prova do contraste empírico e reformulados em função dos novos problemas por abordar (BOSCH; GASCÓN, 2010, p. 61, tradução nossa).

Ou seja, preparar e realizar o estudo de objetos ou temas matemáticos a partir de um MER não é tarefa simples. Mesquita (2011), em sua dissertação de mestrado, deixa claro haver conflitos entre o que o professor organiza e aquilo que executa no ensino. Pois pode haver, não raramente, estranhamentos entre um novo tipo de tarefa planejada pelo professor, por exemplo, com respeito à ergonomia da organização praxeológica naturalizada pela escola para as práticas do professor em sala de aula para uma posição dessa escola; uma nova tarefa, pertencente ao equipamento praxeológico do professor e que ele considera indispensável por promover conexões entre tarefas de uma organização praxeológica, em atendimento a um MER, pode causar estranhamentos, por exemplo, por não estar naturalizada na prática docente do professor para aquela organização praxeológica.

Em resumo, é no momento de realizar em sala de aula sua organização didática, ao justapor fragmentos praxeológicos, que o professor poderá notar que há uma incompatibilidade entre novos fragmentos e os demais. Isso significa que há uma organização matemática que precisa ser conciliada com a organização didática correspondente.

Para responder às questões (Q_{i1} e Q_{i2}), questionamos a formação docente quanto à infraestrutura didático-matemática que permite a empreitada de conciliação da organização matemática e didática que atendam a um MER.

Essa infraestrutura não está pronta e não é disponibilizada na formação inicial do professor, uma vez que a formação específica e a formação pedagógica, em geral, tomam a construção de sequências didáticas de modo naturalizado, e por isso não questionam as praxeologias com os objetos matemáticos a serem ensinados como engendrados de saberes.

Esses aspectos da formação inicial fomentam desencontros dos professores com o seu papel na reconstrução de organizações praxeológicas e, com isso, o próprio problema praxeológico do professor. Podendo levar o professor a ignorar que o uso das praxeologias com objetos matemáticos estão sujeitos a condições e restrições dos níveis de codeterminação didática¹¹ além do nível da disciplina.

No entanto, considerando a TAD, persistirá o questionamento sobre a possível existência de um MER sobre um dado objeto de ensino da matemática da escola que possa ser traduzido por meio de um sistema de tarefas que vivem na escola, inclusive em potencialidades, e, portanto, sujeitos às condições e restrições impostas pela escola e os demais níveis de codeterminação didática, mesmo que não se possa de todo percebê-los.

Esse MER poderá conduzir, frente o caráter pontual das praxeologias escolares, fortemente desarticuladas e com a naturalização de tarefas, a uma possível resposta à seguinte questão que, parafraseando Gascón (2010) sobre o problema da desarticulação, pode ser assim anunciada: Como conseguir que os conhecimentos matemáticos da escola não se reduzam, para os professores, a um conjunto completamente desarticulado de técnicas mais, ou menos, algorítmicas e carentes de sentido?

Como já destacamos, é inegável que o modelo praxeológico estrutural e taxionômico da TAD orienta um modelo geral de construção de organizações praxeológicas segundo um saber ao postular que a passagem de uma praxeologia pontual para uma local, põe em evidência a tecnologia, e de uma local para uma regional evidencia a teoria em que o saber vai, assim, se tornando mais visível. Assim, este saber não está necessariamente pré-construído¹² e sim em construção por meio de combinações e recombinações praxeológicas.

Dessa maneira, o MER não estaria necessariamente pré-construído à espera de ser descoberto, pois a passagem de um nível de organização praxeológica para

¹¹ Desde a formulação da teoria da transposição didática e do elemento essencial que é o sistema didático em que o saber que é eleito para ser ensinado vai ter seu derradeiro discurso, Chevallard (2005, 1999, 2009b) define que o SD sofre influência de diversos níveis: os níveis de codeterminação didática que exercem seu papel no processo de TD. De forma simplificada, os níveis podem ser dispostos em ordem decrescente em hierarquia da seguinte forma: humanidade → civilização → sociedade → escola → pedagogia → disciplina → área → tema → setor.

¹² Para Chevallard (2005) um saber pré-construído está estreitamente subordinado a uma situação definida, a um contexto, que é absolutamente não descontextualizável. Opõe-se à algoritmização, que reduz o saber a algoritmos.

outro nível superior de organização vai se constituindo em um processo de construção do saber.

A busca em dar unidade às praxeologias escolares relativa a um objeto de ensino, sem dúvida, determina certa estrutura segundo uma tecnologia/teoria que não está definida a priori, mas que se constituirá a partir da ecologia das praxeologias demandadas pelo equipamento praxeológico, segundo a posição da escola considerada. E isso requer que o professor questione as técnicas dominantes nas práticas com matemática da escola, que estão sempre prontas para funcionar sem conflitos com as tarefas que as requerem. Sierra, Bosch e Gascón (2013) propõem o questionamento tecnológico-teórico em que as técnicas são tomadas como objeto de estudo e não apenas como ferramentas prontas para uso nas tarefas a que se destinam.

Sob essa compreensão, o problema praxeológico pessoal concreto de um professor quando enfrentado sob as condições e restrições concretas de uma ou mais escolas, o levará – por meio do processo de transposição didática interna realizada em dialética contínua, consigo e com diferentes instituições, inclusive de professores em formação – a construir compreensões sobre o objeto de ensino em comunhão com um sistema de tarefas em unidade.

A compreensão do saber pelo professor, que é obtido em comunhão com o sistema de tarefas que vive nas práticas docentes sobre esse saber, é aqui denominada de Modelo Epistemológico Pessoal de Referência (MEPR). Pois, não podemos esquecer que a dimensão pessoal do problema praxeológico do professor se impõe quando se observa que a construção de uma resposta para o enfrentamento desse problema demanda dinâmicas cognitivas e praxeológicas da pessoa do professor. Além disso, essa dimensão se impõe também considerando que a dimensão institucional se desenvolve em dialética com a dimensão pessoal, ou seja, não há instituição sem pessoas.

Existe uma dialética entre as relações institucionais e pessoais; as primeiras proporcionam as condições e restrições sob as quais se criam e evoluem as segundas; as segundas são pontos de apoio para as primeiras quando alcançam um estado idôneo segundo as exigências institucionais (ARAYA; MATHERON, 2007, p.262, tradução nossa).

Não queremos, assim, afirmar a dispensabilidade do enfrentamento problema praxeológico pela instituição docente, mas destacar a indispensabilidade da dimensão pessoal desse problema para a formação do professor.

Portanto, o sistema de tarefas associado com o MEPR, forma o par (ST, MEPR), que constitui uma das respostas possíveis ao problema praxeológico concreto de um professor de acordo com o modelo praxeológico proposto pela TAD.

Esse processo quando realizado com engajamento pelo professor, poderá lhe prover diferentes sistemas didáticos que o levarão ao encontro com diferentes instituições, professores, obras acadêmicas e das escolas básicas que irão providenciar a infraestrutura necessária para o enfrentamento da problemática anunciada.

Ressaltamos que o texto do saber, que se constitui em uma organização praxeológica para o ensino de um saber, é construído pelo professor em interações com sua relação com o saber a ser ensinado, ou seja, a partir de sua história de vida com as praxeologias em situação de ensino ou estudo, em diferentes instituições de ensino em que atua e atuou como professor, como professor-aluno em formações continuadas e até quando aluno em formação nos diferentes níveis de ensino.

Os encontros nesse processo de transposição didática interna podem ser breves ou intensos e se constituem, em retrospectiva sincrônica, na Trajetória Pessoal de Formação Docente (TPFD) relativa a um dado objeto de ensino.

Esse caminhar constitui a metodologia da investigação para o enfrentamento da questão dessa tese, pois, não esqueçamos que um dos objetos de interesse da TAD é a ação do professor em situação de estudo – sob um conjunto de condições impostas por uma ou mais instituições, anunciada por Chevallard (2009b) – de encontrar uma praxeologia para um objeto de ensino, considerando as restrições institucionais impostas, que atenda a um dado conjunto de condições admissíveis, mesmo que em potencialidade, por si e pelas instituições consideradas.

3 METODOLOGIA DE PESQUISA: UMA TRAJETÓRIA PESSOAL DE FORMAÇÃO DOCENTE

Neste capítulo é realizada a construção da metodologia da pesquisa para o enfrentamento da questão de tese anunciada. A formação de sistemas didáticos é fundamental para o desenvolvimento da metodologia, uma vez que por meio deles, o Percurso de Estudo e Pesquisa (PEP) se concretiza. Dessa maneira, para a organização desse capítulo são dadas noções de sistemas didáticos, principal e auxiliar, e em seguida é apresentada a metodologia para o enfrentamento da questão de tese.

3.1 SISTEMA DIDÁTICO PRINCIPAL (SDP) E SISTEMAS DIDÁTICOS AUXILIARES (SDA)

3.1.1 Noções Fundamentais

Começamos pela definição de objeto, que Chevallard (1992, 2009a) nomeia a qualquer coisa, material ou não, *que exista pelo menos para uma instituição ou uma pessoa*. Assim, tudo é objeto, incluindo as pessoas. Em particular, qualquer prática, ou seja, todo produto intencional da atividade humana é um objeto.

E, por outro lado, uma instituição I para Chevallard (1992, 2009a), é um dispositivo social “total”, ou mesmo uma parte muito pequena do espaço social, mas que impõe a seus sujeitos (ou mais precisamente, para as pessoas x que ocupam nela diferentes posições) o seu jeito de fazer e pensar, ou seja, suas praxeologias. Para exemplificar, uma escola é uma instituição, a família, um curso, a vida cotidiana, o professor, são instituições. Assim, segundo Chevallard (1992, p.127, tradução nossa), num quadro da antropologia cognitiva:

O objeto O existe para x (respectivamente para I) se existir um objeto $R(x, O)$ (respectivamente $RI(O)$), a que se chama de relação pessoal de X com (O) (respectivamente, relação institucional de I com O). Assim, o objeto O existe se existir ao menos para uma pessoa X ou para uma instituição I , ou seja, se pelo menos uma pessoa ou uma instituição I tiver uma relação com esse objeto.

Podemos falar, então, da relação da pessoa com o objeto e de relação da instituição com tal objeto, compreendendo que uma pessoa pode assumir o papel de instituição. A dada instituição I está associado um conjunto de objetos O_I , e existe uma relação $R_I(O)$ dessa instituição com esses objetos. Por outro lado, o sujeito surge para a instituição quando sua relação pessoal com o objeto passa a se conformar com a relação institucional a este objeto, ou seja, $R(X, O) \approx R_I(O)$. Dizemos que este é um sujeito conformado à instituição. Se a relação pessoal $R(X, O)$ passou a existir para a pessoa ou se mudou para se conformar à resposta $R_I(O)$, há uma aprendizagem relativamente a “O” (CHEVALLARD, 1992, 2011a).

Chevallard (1992) chama atenção para uma noção fundamental: a relação da instituição com o objeto não é única, mas existe para cada posição P na qual os sujeitos de I ocupam seu lugar.

Além disso, uma pessoa é formada por um complexo de conformidades institucionais a dado objeto, e isso faz com que ela nunca seja completamente conforme, em sua história de conformidades, à determinada instituição. Isso produz uma pseudo-liberdade do sujeito para exercer seu poder de criação na instituição. Chevallard (1992) refere-se a uma clivagem em que $R(X, O)$ apresenta-se em duas componentes: pública e privada. Enquanto a pública é a que se faz vista pela instituição e é objeto de avaliação institucional em que esta dá o veredicto da conformidade ou não do sujeito, a componente privada é invisível, e escapa a esta avaliação.

É na componente privada que as sujeições a diversas instituições irão trabalhar nas relações pessoais, inscrevendo assim a *coloração* própria da pessoa. Entretanto, é devido a essa componente privada que o sujeito pode viver sua adesão voluntária à instituição (CHEVALLARD, 1992). Ou seja, as relações pessoais e institucionais estão sempre em uma dialética, na qual as dinâmicas praxeológicas e cognitivas, institucional e pessoal, vivem em constante interdependência.

3.1.2 Formação dos Sistemas Didáticos

Nas instituições que tem a intenção de ensino (no quadro da antropologia didática), como a Escola, cada sujeito tem sua posição determinada. Entre o conjunto $p(I)$ de posições institucionais, duas merecem destaque: o professor como

pessoa que tem a tarefa de ensinar um objeto do saber a ser ensinado (ou seja, impor a relação institucional/pessoal ao novo sujeito) e o aluno como sujeito do saber (CHEVALLARD, 1995). O professor, representando a instituição de ensino, irá dispor de seu equipamento praxeológico para dar início ao processo de estudo de um dado objeto “O”, momento em que o sistema didático (SD) se forma.

O sistema didático se forma cada vez que algumas pessoas se deparam com uma questão cuja resposta não seja evidente e decidem *fazer algo* para resolvê-la. Nesse caso as pessoas se transformam em estudantes da questão, sem que por isso devam ser forçosamente alunos. [...] Também podem ser, claro, professores que estudam questões de matemática no âmbito de uma atividade docente (CHEVALLARD; BOSCH; GASCÓN, 2001, p.195).

Assim, um SD pode ser formado por alunos e um diretor de estudo (professor da escola, professor particular, pai de alunos, etc.) que exerce o papel da instância de ajuda ao estudo; ou simplesmente por alunos que dispensam toda ajuda exterior, que, neste caso, Chevallard (1992) denomina de sistema *autodidático*.

Um SD nunca existe sozinho. Ecologicamente sua existência apela geralmente à de *outros tipos sistemas didáticos* que reunirão, por exemplo, à escola primária, ou mesmo aluno à volta de outros professores: a criança e a sua mãe, ou o seu pai, etc.; e, sobretudo, a criança consigo própria – caso dos *sistemas autodidáticos*, em que a mesma pessoa ocupa as posições de professor e de aluno [...] (CHEVALLARD, 1992, p. 135, grifos dele).

Nessa perspectiva, Chevallard (1998) postula a existência de sistemas didáticos que se formam no sistema de ensino em diversos níveis. A escola é um dispositivo didático que engloba outros dispositivos didáticos como as salas de aulas. Por outro lado, a sala de aula não é um sistema didático em si, senão um amálgama de sistemas didáticos que Chevallard (1998b, 2011a) denomina de *sistemas didáticos principais* (SDP) ($S(X, Y, O)$) que se formam para o estudo de obras O, onde X é a coletividade de alunos (mas pode representar um único aluno) da classe e Y o professor.

Por outro lado, Chevallard (1998b, 2011a) considera todo e qualquer sistema didático, formado ao redor do sistema principal, para ajudar X a estudar a obra O, como um sistema auxiliar. Assim, um sistema didático auxiliar (SDA) é todo aquele

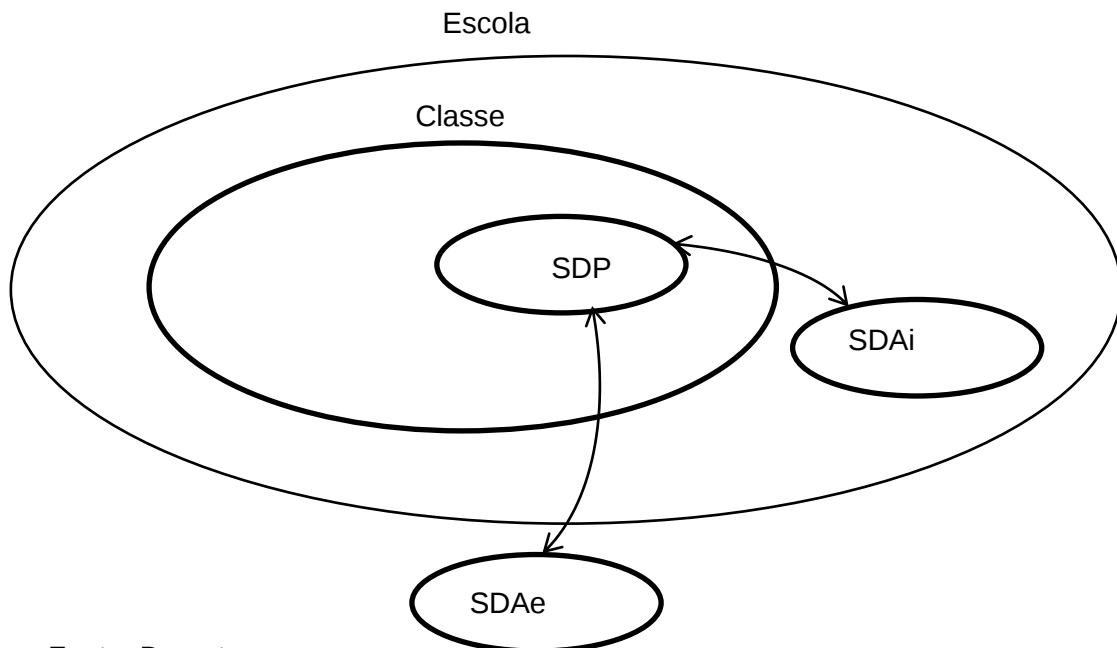
que é formado (formal ou informalmente) para manter em curso o processo de estudo, mesmo que X não conte com a presença de uma instância Y de ajuda, ou mesmo com a presença de Y' (professor particular, pai, mãe ou um estagiário da escola) para auxiliar no estudo da obra. Embora possam ser efêmeros, os SDA podem ser cruciais na aprendizagem tanto de X como de Y.

Chevallard (2005, 2009b) ressalta que em um sistema didático $S(X, Y, Q)$ ¹³ podemos ter $X = Y$ (sistema autodidático). Para melhor exemplificar, esse tipo de sistema didático pode ser formado por um “pesquisador que se instrui sobre determinado tema matemático para avançar em suas pesquisas, ou o professor que estuda alguma questão matemática para ensiná-la melhor” (CHEVALLARD; BOSCH; GASCÓN, 2001, p.195-196). Unificando esses exemplos, consideramos aqui o professor também como pesquisador que busca respostas R para questões problemáticas da sua profissão. Isso constitui o cerne do processo de transposição didática interna que ressalta o papel do professor nesse processo: sua pesquisa, seu ensino e sua aprendizagem, ou seja, sua formação pessoal.

Na escola, mais precisamente na sala de aula, podemos falar de um sistema didático principal $S(X, Y, Q)$ que, segundo Chevallard (1998b), é o *líder de uma rede* de sistemas didáticos induzidos por ele até certo ponto, que são os sistemas didáticos auxiliares $S(X', Y', Q)$ que vivem no interior da escola – SDA_i – ou externos à ela – SDA_e – (Figura 3).

¹³ O estudo da obra O consiste em formular questões Q sobre essa obra (CHEVALLARD, 2011).

Figura 3: Sistemas didáticos que vivem na escola ou fora dela



Fonte: Do autor

É claro que um sistema didático não se realiza de qualquer maneira, pois há condições e restrições impostas pelo meio em que ele vai funcionar. Uma das condições é a existência de um contrato didático e um contrato pedagógico em que cada sujeito do sistema desempenha, em sua posição, seu papel em conformidade com a instituição (CHEVALLARD, 2011a). Outras condições e restrições são aquelas que cada instância leva para o sistema didático, como por exemplo: o professor com suas relações e praxeologias com a obra O, os alunos e suas relações e praxeologias com a obra O, e as próprias condições e restrições da obra.

A partir da noção de SDP e SDA, apresentamos a seguir a proposta metodológica da pesquisa.

3.2 CONSTRUÇÃO DA METODOLOGIA

O problema praxeológico concreto de um professor de realizar a transposição didática interna sobre uma organização praxeológica exige o enfrentamento de um problema do tipo primordial, anunciado como a terceira questão de pesquisa da educação por Chevallard (2009b), mais especificamente, como segue:

Dado um projeto de atividade em que tal pessoa ou instituição objetiva realizar, qual é para essa pessoa ou instituição o equipamento praxeológico que se julga indispensável, ou pelo menos útil, na concepção e execução desse projeto? (CHEVALLARD, 2009b, p. 29, tradução nossa).

O enfrentamento dessa questão deverá levar o professor ao encontro da infraestrutura didático-matemática necessária para a construção de uma resposta para a questão inicialmente anunciada dessa pesquisa.

O problema primordial mostra sua complexidade à luz da TAD, no mínimo, em sua dimensão cognitiva, quando restrito a uma pessoa, no caso, ao professor. Pois, sua resposta R dependerá de suas abstrações sobre as práticas em situação, mesmo que supostas, por esse professor.

As abstrações das práticas exercem importante papel para o acesso às praxeologias que poderão ser mobilizadas, segundo a posição da escola a que se destina o sistema de tarefas a ser construído, considerando a programabilidade do ensino, em conteúdo e tempo, por exemplo, e de outras condições e restrições impostas nem sempre diretamente observáveis por ele.

Para serem mobilizadas, as praxeologias do professor, em seu equipamento praxeológico, exigem uma relação pessoal com os objetos matemáticos considerados, cuja qualidade viabilize uma dinâmica praxeológica e cognitiva que possibilite a integração de novas tarefas ou organizações didático-matemática em seu equipamento, levando-o ao encontro da infraestrutura julgada por ele como necessária para a construção da resposta R.

A relação pessoal com um dado objeto matemático, segundo a TAD, se dá por meio de manipulações de praxeologias com o objeto em diferentes situações e contextos, concretos ou não: em aplicações ou usos, como fazem os engenheiros, por exemplo; para a produção de outros objetos matemáticos, como fazem os matemáticos; para o ensino, como fazem os professores e para as construções de praxeologias para o estudo, denominado de transposição didática.

Os encontros do professor com essas praxeologias ocorrem em condições distintas, nem sempre percebidas por ele, em processos de ensino ou estudos propriamente ditos, ou seja, em sistemas didáticos do tipo S (P, A, O), que unem em relações distintas os encontros do professor P e dos alunos A com o saber O.

Seguindo a compreensão da TAD, podemos pensar a diacronia da TDI em duas fases. A primeira fase se desenvolve por meio de um SDP que denotamos aqui por sistema didático solitário $S(P, Q)$ que mobiliza, sincronicamente, praxeologias, e fragmentos destas, sujeitas a uma diacronia escolar. Ou seja, as praxeologias aprendidas que participam da história de vida do professor e as praxeologias delas decorrentes, com ajuda do estudo, como os saberes aprendidos por meio da sincronia das diacronias de práticas e de obras até então estudadas pelo professor. Assim, a partir de $S(P, Q)$ um novo sistema solitário $S(P, O)$ de estudo e análise é instaurado para a manutenção do modelo epistemológico pessoal de referência (MEPR) ou construção de um novo MEPR que permitirá confirmar ou mudar a resposta R , que não sendo definitiva, denotamos agora por $R^\diamond$.

A resposta $R^\diamond$ é construída na primeira fase com base no modelo didático de referência *lato sensu* proposto por Chevallard (1999) e é constituído de seis momentos didáticos: 1) momento do encontro com a praxeologia; 2) momento exploratório; 3) momento de estudo e construção do entorno tecnológico-teórico; 4) momento do trabalho da técnica; 5) momento da institucionalização, 6) momento da avaliação; com ênfase em quatro desses momentos, os momentos didáticos dois, três, quatro e cinco, que são aqui traduzidos, respectivamente, como momentos de naturalização, problematização, reconstrução e institucionalização da técnica em jogo no MEPR.

Essa resposta $R^\diamond$ é sempre tomada como provisória, então se inicia a segunda fase da TDI que consiste em por à prova empiricamente por meio da exposição de $R^\diamond$ em um novo sistema didático, chamado de sistema didático auxiliar. Esses sistemas didáticos auxiliares podem ser instaurados em uma sala de aula com alunos $S(P, A, R^\diamond)$ ou em encontros com colegas docentes P' , inclusive em formação inicial, $S(P, P', R^\diamond)$, e, não menos importante, com um professor orientador P'' , $S(P, P'', R^\diamond)$.

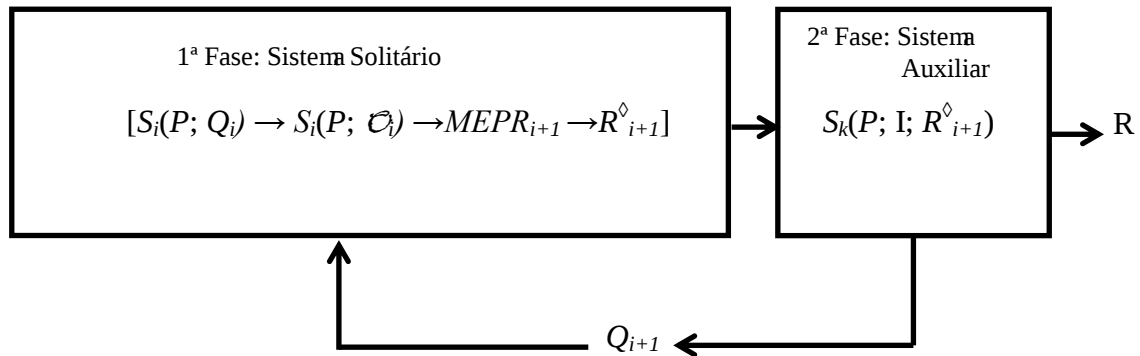
Os questionamentos Q_i oriundos dos sistemas didáticos auxiliares, independente do agente questionador, aluno, colega docente, orientador, inclusive o próprio professor agente da TDI, leva à instauração de um novo sistema solitário que reinicia a primeira fase da TDI.

A reiteração desse processo busca encontrar de uma resposta R que esteja dentro do que o professor julga admissível como prática matemática da escola, segundo os programas oficiais, inclusive a respeito do tempo de ensino necessário,

em consonância com a intenção didática do professor de ensinar um saber, em conexão com outros saberes, de modo a dar sentido a essa resposta R encontrada.

Essa reiteração das duas fases da TDI constitui a diacronia de um percurso de estudo e pesquisa (PEP) que pode ser representado esquematicamente na Figura 4.

Figura 4: Percurso de estudo e investigação ou pesquisa



Fonte: do autor

Em que I denota os sujeitos que interagem com o professor P no sistema auxiliar, como alunos A , colegas P' , e orientador P'' , por exemplo, e O a obra estudada entendida como textos teóricos e respostas prontas já existentes.

O processo iterativo dado pelo esquema acima nos diz que a resposta $R^{\diamond}$ é a resposta construída e não definitiva dada pelo sistema didático solitário $S_i(P; O_i)$ que encaminha o estudo de obras e respostas prontas instaurando outro sistema didático solitário $S_j(P; Q_i)$ das análises teóricas das $R^{\diamond}_k$ até então encontradas. A resposta $R^{\diamond}_{i+1}$ é então difundida e defendida pelo professor P no(s) sistema(s) didático(s) auxiliar(es) $S_i(P; I; R^{\diamond}_{i+1})$ e, quando sucumbe a um questionamento Q_{i+1} julgado pertinente por P , o desenvolvimento da TDI gera, então, um meio M esquematicamente representado por $M = \{MEPR_0, MEPR_1, \dots, MEPR_k, R^{\diamond}_0, R^{\diamond}_1, \dots, R^{\diamond}_k, Q_0, \dots, Q_m, O_0, \dots, O_p\}$ que passa a constituir também as condições de construção de uma resposta R pelo professor.

Esta metodologia encaminha uma investigação dita completa por Chevallard (2012-2013), pois implica a realização dos seguintes “gestos” básicos realizados não necessariamente de modo linear:

- I. Observar as respostas $R^{\diamond}$ que vivem nas instituições.

- II. Analisar – notadamente em duplo plano experimental e teórico – essas respostas $R^\diamond$.
- III. Avaliar essas mesmas respostas $R^\diamond$.
- IV. Desenvolver uma resposta própria, R .
- V. Difundir e defender a resposta R assim produzida.

Segundo Chevallard (2012-2013) quando P simplesmente “copia” – isto é, retoma sem alterações – uma resposta existente, $R^\diamond$, como uma resposta R , então, nesse caso, há em estado “puro”, a condição de P não ter que, de qualquer forma, apresentar para comentar, analisar, e especialmente para defender sua resposta, ou seja, não há investigação e pesquisa.

As características desta metodologia, aqui descritas, nos permitem afirmar que ela é o seguinte PEP:

$$[S(P; Q_0)] \vdash \{MEPR_0, MEPR_1, \dots, MEPR_k, R_0, R_1, \dots, R_n, Q_0, \dots, Q_m, O_0, \dots, O_p\} \vdash R$$

De outro modo, o sistema didático $S(P; Q)$ instaura o problema de formação pessoal do professor (PFPP), cuja resposta é fundamentada pelo meio M construído. Assim, a resposta R pode ser explicada, justificada e até produzida a partir dos $MEPR_i$ e das questões Q_i que levaram às modificações transitórias de R_i ou $MEPR_i$.

O desenvolvimento do PEP é tomado de forma finalizada quando o professor encontra um $MEPR$, admissível por ele, que atenda tanto sua intenção didática como a da escola, em conformidade com o programa oficial da disciplina, e, com tempo de ensino compatível com o preconizado por essa escola, para o objeto de ensino em questão.

As reconstruções de $MEPR$, que fundamentam a resposta R , indica a mudança de relação do professor com o saber em jogo, e, portanto, sob as condições aqui expostas, pressupomos que a TDI possa ser tomada como uma resposta à dimensão pessoal do problema praxeológico do professor, ou simplesmente, PFPP como já anunciado.

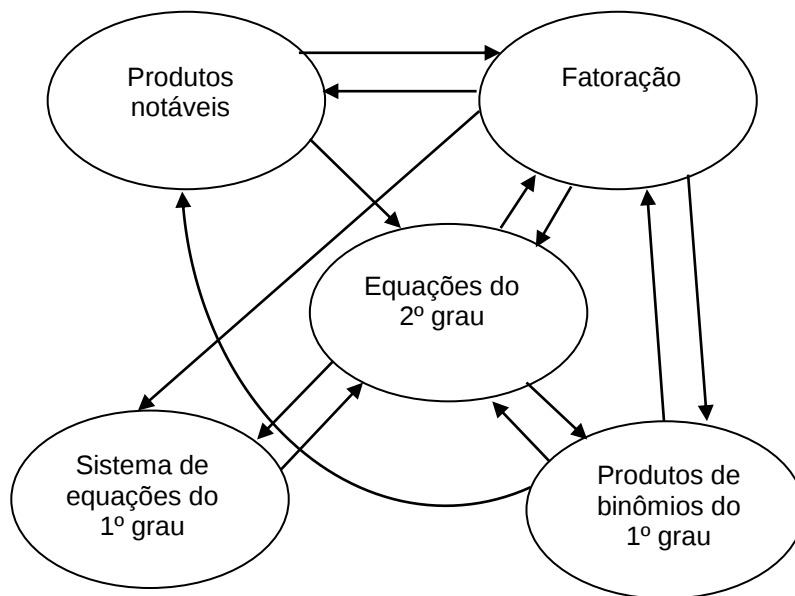
Além disso, o meio M pode permitir a construção de diferentes respostas para o problema praxeológico do professor com relação a um dado saber. Isto quer dizer que a construção de uma resposta R pode ser expressa como uma em trajetória de sistemas didáticos do PEP, em geral, complexo em relações entre os sistemas didáticos que o constituem.

Parafraseando Chevallard (2002), a construção de um tipo de resposta R pode ser vista como uma trajetória de sistemas didáticos em diacronias sincrônicas, no sentido da diacronia dos sistemas didáticos atenderem uma sincronia do MEPR, eliminando as rotas sem saída, os fracassos, mas conservando toda a riqueza do desenvolvimento fecundo do PEP considerado.

O PEP é um dispositivo de formação para o professor que, interpretando Bosch e Gascón (2009), conforma-se a cada situação, e está em permanente evolução sendo submetido à prova do contraste empírico, reelaborados para o enfrentamento de novas questões. Assim, postulamos que essa construção contínua, em sincronia, revela uma possível trajetória pessoal de formação docente (TPFD).

Para exemplificar, a dinâmica interativa das fases da TDI representada na Figura 4 põe em evidência um percurso de estudo e investigação para provocar mudanças no equipamento praxeológico e, conseqüentemente, no universo cognitivo do professor $\mathcal{P}$ (autor da tese), relacionadas a objetos do saber matemático escolar após $\mathcal{P}$ se deparar com uma organização matemática para a resolução de equações do segundo grau proposta em Silva e Guerra (2009) e que traduz a compreensão desses pesquisadores sobre as práticas com matemáticas da escola relacionadas à resolução de equação do 2º grau. Assim, essa OM – que inicia todo processo de questionamento das práticas de ensino de $\mathcal{P}$ relacionadas à resolução de equações do 2º grau - será tomada aqui como o Modelo Epistemológico de Referência Inicial (MER₀) do objeto matemático em questão.

O PEP realizado por $\mathcal{P}$ se revela aqui por meio crônicas, inspiradas nas crônicas realizadas por Chevallard (2011b), e que, em diacronia sincrônica, substanciam a trajetória de formação docente do professor $\mathcal{P}$ relacionada a objetos matemáticos da escola na busca de organizá-los de maneira que torne o saber cada vez mais evidente. Ou seja, a preparação do texto do saber para o ensino da resolução de equações do 2º grau a partir do encontro de $\mathcal{P}$ com MER₀ que integra a fatoração, os produtos notáveis, sistemas de equações do 1º grau, entre outros objetos da matemática escolar, como ilustra a Figura 5, presentes no trabalho de Silva e Guerra (2009) e que marca a dinâmica praxeológica e cognitiva substancializada pela dialética do sistema didático solitário - daqui em diante SDS - de $\mathcal{P}$ com os SDA.

Figura 5: Saberes articulados no MER_0 

Fonte: Do autor

As aprendizagens de $\mathcal{P}$ são evidenciadas por meio das mudanças de estados E_i ($i = 0, 1, 2, \dots$) que denotam as dinâmicas praxeológicas e cognitivas e que ocorrem por meio do estudo de questões ou obras como já anunciado anteriormente, em que essas aprendizagens se corporificam em um sistema de tarefas da matemática escolar desejado por $\mathcal{P}$. Em outros termos, suas aprendizagens sobre o ensino da resolução de equação do 2º grau são marcadas pela ação contínua de $\mathcal{P}$ na busca da construção de seu projeto de atividade.

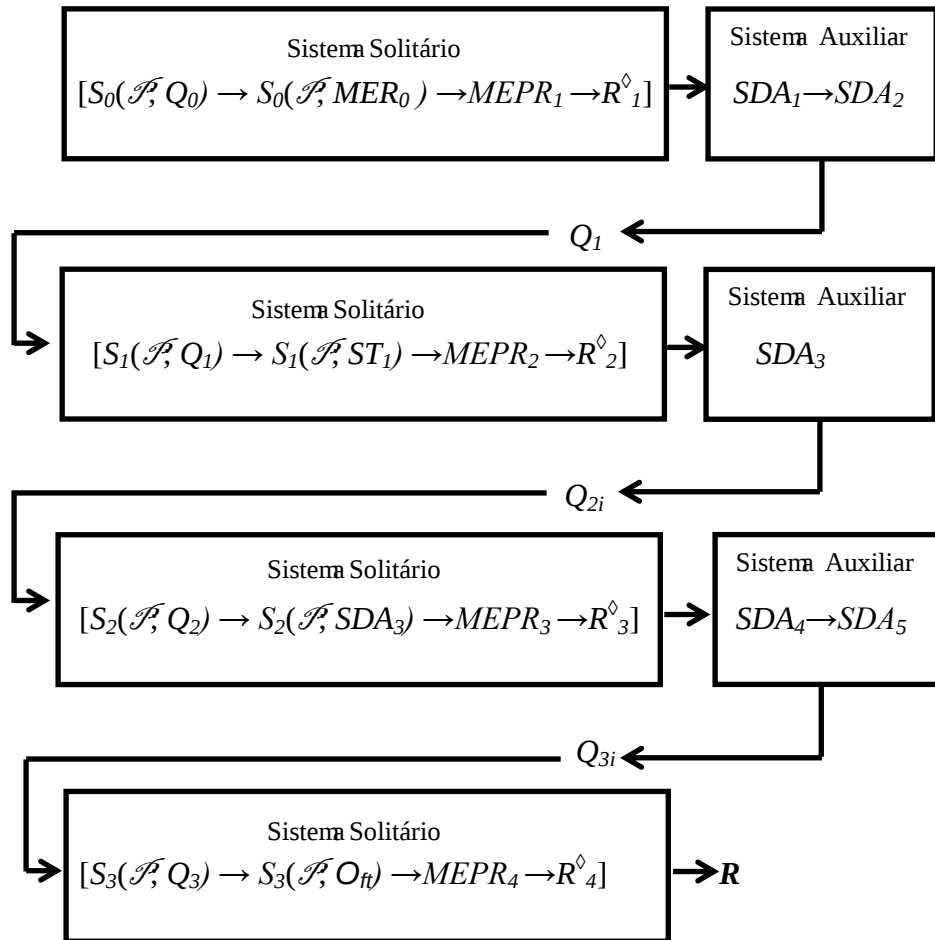
Nos capítulos seguintes, apresentamos os vários sistemas didáticos instaurados por $\mathcal{P}$ que evidenciam sua trajetória a partir do estudo da TAD que traz à tona o problema da desarticulação dos objetos da matemática escolar, entre outros, e após seu encontro com o MER_0 em que, diante de uma nova relação com a resolução de equação do segundo grau, questiona sua prática de ensino com esse objeto que foi construída desde aluno do Ensino Básico, professor de aulas particulares, até se tornar professor de escolas oficiais, evidenciados pelo sistema solitário $S_0(\mathcal{P}, Q_0)$ associado a $S_0(\mathcal{P}, MER_0)$ e que constitui o que chamamos $MEPR_0$ que marca o estado inicial E_0 do seu EP e UC relacionados aos objetos matemáticos apresentados no MER_0 . A partir desse encontro são apresentados sistemas didáticos instaurados por $\mathcal{P}$ na busca de construir compreensões sobre sua prática

de ensino que substanciam os vários estados ordinais (E_1 , E_2 , E_3 e E_4) do seu modelo epistemológico pessoal de referência (MEPR) sobre a resolução de equações do segundo grau, corporificados por cinco sistemas de tarefas (ST_0 , ST_1 , ST_2 , ST_3 e ST_4) elaborados a partir das interações de sistemas didáticos solitários de $\mathcal{P}$ com os sistemas didáticos auxiliares.

A primeira compreensão de $\mathcal{P}$ sobre o MER_0 o levou à elaboração do sistema de tarefas ST_1 associado ao $MEPR_1$ como resposta $R_1^\diamond$ após a instauração do sistema solitário $S_0(\mathcal{P}, Q_0)$ associado ao sistema $S_0(\mathcal{P}, MER_0)$ e que constitui o estado E_1 ; dos sistemas didáticos SDA_1 e SDA_2 , da aplicação (realizada por $\mathcal{P}$) em sala de aula e análise (realizada por $\mathcal{P}$ e seu orientador de estudo) do ST_1 posto à prova, foi gerado um conjunto de questões Q_1 , que levou $\mathcal{P}$ em seu sistema solitário $S_1(\mathcal{P}, Q_1)$ associado a $S_1(\mathcal{P}, ST_1)$ à resposta R_2 corporificada pelo o sistema de tarefas ST_2 associado ao $MEPR_2$ (estado E_2 da TPF); do SDA_3 , surge o conjunto de questões Q_{2i} que, estudadas em $S_2(\mathcal{P}, Q_2)$ associado ao sistema $S_2(\mathcal{P}, SDA_3)$ foi elaborada a resposta R_3 substanciada por (ST_3 , $MEPR_3$), a partir das discussões realizadas com alunos de licenciatura, que marca o estado E_3 da trajetória; finalmente, as discussões e análises de ST_3 , realizadas nos sistemas didáticos auxiliares SDA_4 e SDA_5 , surge um conjunto de questões Q_{3i} , estudadas por $\mathcal{P}$ em nos sistemas solitários $S_3(\mathcal{P}, Q_3)$ associado a $S_3(\mathcal{P}, O_{ft})$ das obras estudadas por $\mathcal{P}$ que leva à resposta desejada R representada pelo sistema de tarefas ST_4 ($MEPR_4$) que substancia o estado E_4 da trajetória pessoal de formação docente de $\mathcal{P}$. Todo esse processo esta representado na Figura 6.

Embora a construção dessa trajetória pessoal de formação docente do professor seja a do próprio autor da tese, optamos em escrever as crônicas ora na primeira pessoa do singular, ora na terceira pessoa do plural, uma vez que o desenvolvimento da mesma é da pessoa do professor sob influência das instituições de formação e ensino, e não do indivíduo e suas idiossincrasias. Contudo, há passagens da trajetória que precisam ficar claras que foram vividas pelo autor da tese ($\mathcal{P}$) e outras com o orientador de pesquisas que simbolizaremos por $\mathcal{P}''$.

Figura 6: Trajetória pessoal de formação docente de $\mathcal{P}$



Fonte: Do autor

4 A (RE)CONSTRUÇÃO DE UM PERCURSO COM OBJETOS MATEMÁTICOS DA ESCOLA: ESTADO INICIAL DA DIACRONIA DA TRAJETÓRIA

Neste capítulo, reconstruo uma possível trajetória em que narro meus encontros, em diferentes momentos, com objetos da matemática escolar, desde o curso do Ensino Básico até me tornar professor, quando buscava evidenciar praxeologias cristalizadas em meu EP e UC ao longo do tempo. Essa reconstrução se dá a partir de narrativas de minhas memórias sobre as praxeologias realizadas em diferentes instituições: pois enquanto sujeito delas “é válido pensar em termos pluralistas sobre o uso da memória por diferentes grupos sociais, que devem ter diferentes visões do que é importante ou memorável” (BURKE, 2000 apud MIGUEL; MENDES, 2010, p. 84). Revelando, desse modo, as conformidades institucionais que constituem meu fazer docente e alcançar o objetivo de (re)construir o equipamento praxeológico e minhas relações pessoais com a equação do segundo grau, com o auxílio de tarefas propostas em livros didáticos.

4.1 UMA TRAJETÓRIA COM OBJETOS MATEMÁTICOS NOS ANOS INICIAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL

Antes de começar a frequentar a escola, frequentei aulas particulares de matemática nas quais, à época, muitos pais enviavam seus filhos para “desemburrá-los” antes de entrarem na escola formal. As aulas eram realizadas com objetivos bem claros: fazer as crianças memorizarem boa parte da tabuada envolvendo as operações de adição, subtração e multiplicação e efetuar cálculos com essas operações por meio de expressões numéricas. Assim, quando entrei na escola, tinha alguma relação com as operações numéricas.

Nas séries iniciais, a matemática era ensinada nos moldes das aulas particulares – com o uso de palmatória ou régua como punição a quem não acertasse a resposta. Daí, a primeira aprendizagem relacionada à matemática que tive, foi a da memorização da tabuada.

Era perceptível a valorização das respostas corretas, e a memorização como recurso para obtê-las. A ênfase dada exclusivamente às respostas prontas não abria espaço ao surgimento de questões durante o processo de estudo. Além disso, qualquer resposta que fugisse a essa dinâmica era passível de punição, de modo

que o ensino era marcado por respostas prontas e acabadas em si. Nesse sentido, Bosch e Gascón (2009, p. 95, tradução nossa) afirmam que:

Tal como ocorre com a maioria dos processos formativos atuais, especialmente no âmbito da escolaridade obrigatória, porém também em grande parte da formação profissional, os sistemas de ensino tendem a cair no que Chevallard (2001, 2004a, 2004b, 2006) tem denunciado de pedagogia do “monumentalismo” que antepõe ao estudo de determinadas construções praxeológicas (os “monumentos”) aos estudos das questões, problemas ou necessidades que estão na origem do projeto de formação. Quando o projeto de formação está mais baseado naquilo que o formador pode oferecer do que naquilo que as pessoas em formação necessitam, os conteúdos de ensino – que podem ser “saberes” com um claro componente teórico, porém também “saberes-fazer” com uma marcada orientação prática – se converte em “obras” ou monumentos que os estudantes devem conhecer (no sentido do “saber visitado”), embora nada saiba muito bem porque foi construído num dia e para quê serve hoje.

A pedagogia do monumentalismo a que se refere Chevallard parece envolver toda minha trajetória escolar enquanto aluno, pois não recorro de, em algum momento, ter sido encorajado a questionar algum objeto matemático ensinado pelo professor, a não ser responder a pergunta sempre presente ao final de uma explicação: entenderam?

Durante o curso da 4ª série do 1º Grau, (5º Ano do Ensino Fundamental nos dias atuais) recordo-me que as tarefas de matemática eram sempre voltadas para a resolução de *problemas* aritméticos, resolução de expressões numéricas, cálculo do termo desconhecido e uma sentença matemática (que na 4ª série aparecia como: *calcular o valor do quadradinho*). Ao fazer uma busca de como se dava o ensino do cálculo do valor do quadradinho, encontrei em Affonseca (1980) um exemplo do uso de uma técnica para calcular o quadradinho nas operações de adição e subtração. O Quadro 1 traz esse exemplo.

Quadro 1 – Cálculo do termo desconhecido

...Observe:

$$9 - 4 = 5 \Leftrightarrow 5 + 4 = 9$$

Que relação existe entre adição e subtração?

Descobriu?

Vamos conferir.

A subtração e a adição são equivalentes. Veja

$$9 - 4 = 5 \Leftrightarrow 5 + 4 = 9$$

(minuendo – subtraendo = diferença) $\Leftrightarrow$ (diferença + subtraendo = minuendo)

Então,

$$\square - 6 = 17 \Leftrightarrow 17 + 6 = 23$$

$$\square = 23 \text{ (se falta o minuendo)}$$

$$23 - \square = 17 \Leftrightarrow 23 - 17 = 6$$

$$\square = 6 \text{ (se falta o subtraendo)}$$

Fonte: (AFFONSECA, 1980, p. 96)

O algoritmo para calcular o *valor do quadradinho* para a operação de subtração (quando o quadradinho estava no minuendo ou subtraendo) era assim explicado: se o quadradinho estivesse no minuendo, fazia-se a adição entre a diferença e o subtraendo; caso o quadradinho estivesse no subtraendo, fazia-se a subtração entre minuendo e a diferença. O mais importante nesse algoritmo é a memorização dos termos da subtração para efetuar o cálculo corretamente. Se houvesse alguma confusão sobre qual termo era o subtraendo ou minuendo, haveria o risco de insucesso no cálculo. As séries iniciais foram marcadas pelas quatro operações fundamentais da Aritmética e as tarefas sempre voltadas ao uso das quatro operações como objeto fundamental dessa modalidade de ensino.

4.2 UMA TRAJETÓRIA COM OBJETOS MATEMÁTICOS NOS ANOS FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL

Na 6ª série do primeiro grau (7º ano do Ensino Fundamental nos dias atuais) como num passe de mágica surgiram os números negativos. A noção de número inteiro e suas regras operatórias permitiam realizar subtrações que antes eram consideradas impossíveis, por exemplo, em Andrini (1989a, p.25), há uma “indicação simplificada” para expressar a adição $(+7) + (-9)$ por simplesmente $6 - 9$

que resulta – 3. As regras de sinais causaram uma confusão nas praxeologias que eu possuía sobre operações numéricas e na comparação entre números.

Para os cálculos dos termos desconhecidos, o quadradinho não mais aparecia nas tarefas, pois nessa série, o cálculo do valor quadradinho passava a ter um caráter de tarefa “sem moral” perante os alunos, considerando-se que este tipo de tarefa havia se tornado rotineiro. Em seguida, introduzia-se a noção de variável e a letra x entrava em cena. A tarefa que antes era calcular o valor do quadradinho passou a ser *resolver a equação do 1º grau*. Por exemplo, para calcular o valor de x na equação $x - 3 = 5$, Andrini (1989a) baseia-se na propriedade da igualdade em que se pode “somar (ou subtrair) um mesmo número aos dois membros de uma igualdade, obtendo uma sentença equivalente” (p.106). Assim, na equação $x - 3 = 5$ basta somar 3 aos dois membros para obter $x + 0 = 8$, donde vem $x = 8$. “Com base nessa propriedade, ele conclui que ‘para passar’ um termo de uma equação de um membro para outro, troca-se o sinal desse termo” (p.106). Andrini (1989a) usa de forma análoga tal propriedade para a multiplicação e divisão. Em seguida apresenta um “método prático para resolver equações” (p.109), apresentado segundo o Quadro 2 a seguir.

Quadro 2: Roteiro para resolução de equações do 1º grau

Vamos resolver as equações abaixo usando um modo prático, organizando o seguinte roteiro:

- 1) Isolar no 1º membro os termos em x e no 2º membro os termos que não apresentam x (devemos trocar o sinal dos termos que mudam de um membro para outro).
- 2) Reduzir os termos semelhantes.
- 3) Dividir os membros pelo coeficiente de x .

Exemplos:

1) Resolver a equação

$$3x - 4 = 2x + 8$$

$$3x - 2x = 8 + 4$$

$$x = 12$$

2) Resolver a equação

$$7x - 2 + 4 = 10 + 5x$$

$$7x - 5x = 10 + 2 - 4$$

$$2x = 8$$

$$x = 8/2$$

Fonte: Andrini (1989a, p.109)

Há nesse fazer um conjunto de regras em que a finalidade é isolar a variável no 1º membro da equação. E não é raro que o *habitus* (BOURDIEU, 1989, BOURDIEU e WAQUANT, 2005) faça com que o sujeito que se depare com a equação $10 = 2x$ a resolva da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
 -2x &= -10 \text{ que multiplicada por } (-1), \text{ resulta em} \\
 2x &= 10 \\
 x &= 10/2 \\
 x &= 5
 \end{aligned}$$

A maneira de proceder a resolução da equação está correta, porém há gasto de tempo maior, uma vez que pela propriedade reflexiva da igualdade, se $a = b$, então $b = a$.

Além disso, o 2º passo do roteiro se refere à redução dos termos semelhantes que só é definido no livro da 7ª série da coleção. Reduzir termos semelhantes na 6ª série é tarefa indiscutível, aprendida por imitação, e incorporação de um *habitus*. Por exemplo, $5x + 3x = 8x$, pois assim deveria ser feito, e não raramente isso se explica ingenuamente na escola pela tarefa de somar cinco maçãs com três maçãs que resulta oito maçãs.

Ainda nesse ano, estudei a resolução de sistemas de equações do 1º grau com duas equações e duas variáveis em que *três métodos* eram ensinados para sua resolução: método da adição, da substituição e da comparação. Nas tarefas de resolução de sistemas não raramente já vinham com a indicação do método que seria usado indicavam o método que deveria ser usado.

Na 7ª série os termos de uma equação, por exemplo, $5x$ e $3x$, encontraram-se dentro da definição de monômios, mais especificamente termos (ou monômios) semelhantes, pois por meio de regra matemática somente termos semelhantes poderiam ser somados e subtraídos entre si. Para a soma de $5x$ com $3x$, bastava somarem-se seus coeficientes e manter a parte literal dos termos. Brandão (1975, p.38) afirma que “os termos semelhantes de um monômio podem ser substituídos por um único. Para isso, dá-se como coeficiente a soma algébrica dos coeficientes desses termos e conserva-se a mesma parte literal”.

Em um exemplo de Brandão (1975, p. 38) a regra distributiva que antecipava a tarefa de fatorar um polinômio, aparece sem ser revelada nesse momento nem pelo professor, nem pelos autores de livro didático.

$$5a^3x^2 - 7a^3x^2 + 4a^3x^2 = (5 - 7 + 4)a^3x^2 = 2a^3x^2$$

Nesse ano de curso da 7ª série a álgebra escolar surge para mim como se nada tivesse a ver com as operações entre letras e números estudadas em equações do 1º grau. As expressões algébricas surgiram com a definição de serem aquelas que apresentam letras e números em sua composição.

As operações entre os polinômios (adição, subtração e o produto de monômios, de polinômios, a divisão de monômios e de polinômios), os produtos notáveis e a fatoração de polinômios pareciam ser estudadas para atender obrigações de um currículo escolar que não era revelado aos alunos.

Tarefa do tipo *calcular o valor numérico da expressão algébrica* foi exigida no início do tema “expressões algébricas”. Recordo-me que não tive grandes dificuldades para enfrentar esta tarefa, pois ao substituir as letras por números a expressão se tornava “familiar”, ou seja, calcular expressão numérica já fazia parte de meu equipamento praxeológico. Entretanto, essa tarefa não mais surgiu no decorrer desse ano, somente retornou no ano seguinte quando estudei equação do 2º grau.

Memorizar os tipos de tarefas e as técnicas era minha estratégia para obter êxito nas provas. As praxeologias que aprendi com os polinômios na 7ª série foram práticas de repetição de tarefas e técnicas. Tarefas do tipo: *multiplicar dois polinômios, desenvolver os produtos notáveis, desenvolver os produtos e reduzir os termos semelhantes, fatorar as diferenças de dois quadrados, fatorar os trinômios quadrados perfeitos, fatorar completamente os polinômios*, as enfrentava seguindo um modelo de resolução para cada uma. Os Quadros 3 e 4 ilustram técnicas para realização de tarefas de fatorar polinômios (SCIPIONE, 1972). Assim, começaram minhas relações com os objetos matemáticos produtos de polinômios, produtos notáveis e a fatoração de polinômios.

Quadro 3: Fatoração de trinômios quadrados perfeitos

Trinômio quadrado perfeito

Sabe-se que $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$; e $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$. Vale dizer que poderá escrever:

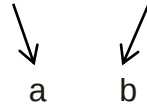
$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2 \quad \text{e} \quad a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

o que significa ter fatorado o polinômio $a^2 + 2ab + b^2$ no produto $(a + b).(a + b)$ e $a^2 - 2ab + b^2$ no produto $(a - b).(a - b)$.

É necessário, então reconhecer-se quando um trinômio do tipo $a^2 \pm 2ab + b^2$ é decomponível no quadrado de um binômio do tipo $(a \pm b)^2$, ou seja, quando um trinômio é quadrado perfeito.

Vejam os:

$$a^2 + 2ab + b^2$$



Os termos extremos admitem raízes exatas e o terceiro termo é duas vezes essas raízes. Aí, fatora-se $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$

Fonte (Scipione, 1972, p. 55)

No Quadro 3, a fatoração do trinômio quadrado perfeito se dá pelo cálculo das raízes quadradas exatas dos termos extremos. Assim, qualquer mudança na forma de apresentação do polinômio poderia levar a erro. Por exemplo, se o polinômio estivesse registrado como $a^2 + b^2 + 2ab$, este não poderia ser fatorado, pois $2ab$ não tem raiz exata. Isso parecia factível com o enunciado da técnica. Assim, fatorar o trinômio $x^2 + 6x + 9$ era uma tarefa que para enfrentá-la bastava seguir os seguintes passos:

- 1º) Calcular as raízes quadradas de x^2 e 9, donde vem, respectivamente, x e 3;
- 2º) multiplicar o produto dessas raízes por 2;
- 3º) observar se o resultado dessa multiplicação era igual ao termo central; e
- 4º) caso afirmativo, escrever $x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$, pois o trinômio é quadrado perfeito. Caso o termo central tenha sinal negativo, então $x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$.

Para a fatoração do trinômio do 2º grau, as tarefas propostas no quadro 4 tinham sempre a prerrogativa de que os trinômios eram fatoráveis como produto de binômios do 1º grau e os números procurados, sempre inteiros e possíveis de ser encontrados.

A técnica usada para fatorar o trinômio do 2º grau é a da decomposição do termo independente em fatores primos, mas a mesma não era ensinada para fatorar

os trinômios quadrados perfeitos conforme os procedimentos citados no quadro 3. Obviamente a fatoração do termo independente em fatores primos pode ser usada para qualquer trinômio do 2º grau de uma variável, fatorável em binômios do 1º grau, seja ele quadrado perfeito ou não. Os trinômios não fatoráveis não eram discutidos.

Quadro 4: Fatoração do trinômio do 2º grau

Trinômio do 2º grau do tipo $x^2 + px + q$

Vejamos o produto $(x + a).(x + b)$ graficamente:

	x	b
a	ax	ab
x	x^2	bx

Ou $(x + a).(x + b) = x^2 + ax + bx + ab$

$= x^2 + (a + b)x + ab$

Donde: $x^2 + (a + b)x + ab = (x + a).(x + b)$ ou $x^2 + px + q = (x + a).(x + b)$

Do que se conclui:

Quando num trinômio do 2º grau do tipo $x^2 + px + q$, os números p e q são, respectivamente, soma e produto de dois números a e b , então fatora-se $x^2 + px + q$ no produto de $x + a$ por $x + b$.

Nesta altura do curso, apenas estudaremos os casos em que os valores de p , q , a e b são inteiros, assim como o coeficiente de x^2 é sempre igual à unidade.

Examinaremos os casos possíveis:

1) Fatorar : $x^2 + 11x + 30$

Devemos procurar dois números cujo produto seja +30 e cuja soma seja +11. É fácil ver que são os números +5 e +6.

Donde: $x^2 + 11x + 30 = (x + 5).(x + 6)$

2) Fatorar: $x^2 + 17x + 52$

Quais são os números cujo produto é + 52 e cuja soma é +17? Não os encontrando, à primeira vista, basta decompor o produto 52 em seus fatores primos e fazer as alternativas possíveis:

52	2	
26	2 => 4	4 e 13 são os números procurados.
13	13 => 13	
1		

Donde: $x^2 + 17x + 52 = (x + 4).(x + 13)$

3- Fatorar: $x^2 - 11x + 30$

+30 representa o produto dos valores a e b que procuramos. Como $30 > 0$, então a e b tem sinais iguais (ambos positivos ou ambos negativos). - 11 representa a soma dos valores que procuramos e que já sabemos, possuírem o mesmo sinal. Logo, o sinal de a e b será negativo, porque a soma (-11) também o é. Teremos

$x^2 - 11x + 30 = (x - 5).(x - 6)$

Fonte (Scipione, 1972, p. 56-58)

Para tarefas de calcular o m.m.c. (mínimo múltiplo comum) entre expressões algébricas, simplificar frações algébricas, fazer operações entre frações algébricas e resolver equações literais e fracionárias (que eram redutíveis às equações do 1º grau) houve necessidade do uso de algumas operações entre polinômios, além da fatoração, conforme ilustram as tarefas nos quadros 5 e 6, que pareciam dar sentido a essas tarefas de operar e fatorar polinômios naquele ano.

Quadro 5: Resolução de equação literal com fatoração e simplificação

E.2) Seja resolver a equação: $ax + bm = bx + am$.
 Isolando os termos que contêm a incógnita, no primeiro membro, vem:
 $ax - bx = am - bm$.
 Fatorando-se, tem-se
 $x(a - b) = m(a - b) \Rightarrow x = m(a - b) / (a - b)$. Simplificando
 $x = m$

Fonte: Brandão (1975, p.89-90)

Quadro 6: Resolução de equação fracionária com produto de polinômios

1) Seja resolver a equação: $\frac{x-1}{x+2} = \frac{x-5}{x-8}$ (1).
 Resolução
 1) O m.m.c. é o produto $(x + 2)(x - 8)$
 2) Dividindo o m.m.c. pelos denominadores e multiplicando os quocientes obtidos pelos respectivos numeradores, tem-se
 $(x - 1)(x - 8) = (x + 2)(x - 5)$
 3) Efetuando os produtos em cada membro, isolando os termos que contêm a incógnita e reduzindo, vem:
 $6x = 18 \Rightarrow x = 3$
 Ora, $x = 3$ não anula nenhum denominador em (1). Logo 3 é a solução da equação

Fonte: Brandão (1975, p.93)

Na 8ª série (atualmente 9º ano), entre outros objetos, tive o encontro com a equação do 2º grau por meio de uma sucessão de ações do professor que parecia naturalizada em que eu, no *topos* de aluno que já estava habituado como um contrato didático enrijecido, já esperava que ocorresse: definição seguida de exemplos e exercícios. Em Bongiovanni et al (1990) encontra-se a seguinte

definição que é, essencialmente, a mesma que o professor dava em sala: *Uma equação que pode ser colocada na forma $ax^2 + bx + c = 0$, onde a , b e c são números reais e $a \neq 0$, é chamada de equação do 2º grau* (ibidem, p. 65). Essa definição parecia ser a chave que abria a porta para o estudo desse objeto, pois a partir daí, o professor se sentia livre para navegar em um mar de tarefas que seriam propostas no caminhar do curso.

Dada a definição, o professor escrevia exemplos de equações do 2º grau seguidos de uma tarefa que, posteriormente, seria “essencial” para a resolução de equações: determinar os coeficientes da equação. Assim, resolver equações do 2º grau era tarefa aparentemente simples, pois bastaria definir seus coeficientes e usar a técnica indicada conforme o caso.

No caso da equação ser incompleta do tipo $ax^2 + bx = 0$, o procedimento a ser seguido era fatorar o binômio e igualar a zero seus fatores. Neste caso, um dos fatores sempre resulta na tarefa de resolver uma equação do 1º grau. Noutro caso em que a equação era do tipo $ax^2 + c = 0$, procedia-se da mesma maneira como era resolvida uma equação do 1º grau: isolando a variável no 1º membro, com a diferença de se calcular uma raiz quadrada, se fosse possível (caso o radicando fosse positivo).

Para a equação completa $ax^2 + bx + c = 0$, o professor indicava o uso da fórmula $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ em que precisava apenas substituir os valores de a , b e c e calcular o valor numérico. Não encontro em minha memória alguma vez o professor ter discutido essa fórmula em sala, apenas destacou que $b^2 - 4ac$ era o discriminante da equação (Δ) que, na hierarquia das tarefas, era o primeiro a ser calculado, pois determinava se a equação tinha raízes reais ou não, além de determinar também o tipo de raízes (reais e iguais; reais e diferentes, ou se elas não existissem).

Várias tarefas surgiram em decorrência desse encontro com equações do 2º grau que eu, enquanto aluno, apenas enfrentava sem questionar. Por exemplo: discutir as raízes da equação do 2º grau $(k - 2)x^2 - x + 1 = 0$; calcular a soma e o produto das raízes de $x^2 - 6x + 8 = 0$ sem resolvê-la, etc.

Parecia que este objeto era o mais importante a ser estudado nessa posição e tempo da escola. De fato, em muitos outros tipos de tarefas posteriores, resolver equação do 2º grau se constituiu como a tarefa que seria usada no enfrentamento

de ditas tarefas, tais como: resolver equações biquadradas; resolver equações irracionais redutíveis a equações do segundo grau; resolver equações fracionárias redutíveis a equações do segundo grau; calcular os zeros da função quadrática; calcular áreas, resolver problemas com triângulos retângulos, etc. Resolver equações do 2º grau parecia um “remédio genérico” que ajudaria a enfrentar muitos problemas nessa cadeia ecológica dos saberes.

As dificuldades iniciais que enfrentei no estudo das equações na 8ª série (erros de cálculo, discussão das raízes, tarefas que envolviam soma e produto, entre outras) foram aos poucos sendo atenuadas por entender que bastaria resolver os exemplos já resolvidos pelo professor e os *exercícios propostos* no livro didático, além das listas de tarefas, pois desde a minha época de aluno da escola básica acreditava que só se aprendia matemática por meio de treino de suas tarefas, que deveriam se tornar rotineiras.

Além disso, busquei ir além da sala de aula ao resolver as tarefas propostas em outros livros didáticos não adotados pela escola. E, quando comecei a chegar aos resultados corretos sem o auxílio do professor, parecia que a matemática havia se desvendado. Desde esse tempo, já formava um sistema didático auxiliar para a escola, mas que de fato, era a obrigação que tinha com minha própria formação que estava norteando meu fazer, minha trajetória.

Foi assim que comecei a ter maior interesse pelo estudo da matemática e, o suposto sucesso que tive nessa disciplina, parecia me tornar um matemático para outras pessoas a tal ponto que, ainda como estudante do Ensino Médio, já dava aulas particulares para alunos do Ensino Fundamental. O fato de um indivíduo considerar válido o conhecimento matemático que eu tinha naquele momento, fazia de mim um matemático para ele (CHEVALLARD; BOSCH; GASCÓN 2001). Parecia que ensinar a alguém era tão simples, pois estava tudo pronto. Bastava seguir os modelos de ensino da matemática cristalizados em meu fazer.

4.3 UMA TRAJETÓRIA COMO PROFESSOR DE AULAS PARTICULARES

Desde cedo (entre 15 e 16 anos de idade) comecei a dar aulas particulares de matemática e o modelo docente espontâneo (GASCÓN, 2001) parecia se corporificar em uma prática de repetição de como aprendi a fazer enquanto aluno: resolver exemplos e fazer os alunos repetir as tarefas em exercícios, pois nessa

modalidade informal de ensino, não tinha a preocupação de organizar um curso, mas, de fazer com que os alunos enfrentassem as tarefas propostas da escola por seus professores, seja no caderno, seja no livro didático ou em listas de exercícios. Obviamente que obtinha antecipadamente o conteúdo que iria ensinar e levava para essas aulas meus livros e listas de exercícios prontos.

Houve um tempo em que dei aulas para muitos alunos do Ensino Fundamental e, quando era solicitado, nem me preocupava em estudar as tarefas, pois considerava que nessa modalidade de ensino essas tarefas já estavam cristalizadas em meu equipamento praxeológico e universo cognitivo.

Embora, as praxeologias com matemática do nível fundamental parecessem estar cristalizadas em meu EP, as condições poderiam fazer com que, mesmo temporariamente, eu tivesse que mobilizar meu EP para vencer tarefas que pareciam estranhas a ele.

Assim, tarefas que não reconhecia eram estudadas por mim durante o curso da aula e, após vencê-las, tinha que ensinar de imediato ao aluno naquela aula. Ou seja, o mobilizar práticas para vencer uma tarefa e ensiná-las, nesse caso, era quase simultâneo. Nesse momento, teria que tentar refazer o passo a passo do que tinha articulado em minha caixa de equipamento praxeológico para que pudesse ser transformado em ensino. O resultado disso era o ensino da resolução das tarefas sem supostamente ter preparação prévia, mas que parecia atender as necessidades do aluno, pois raramente não conseguia o resultado esperado: o aluno ter êxito nas avaliações escolares.

Para exemplificar, lembro que em uma dessas aulas, um aluno da 8ª série apresentou um exercício da escola que naquele momento não me parecia rotineiro e que vou mostrar aqui outro análogo a ele, segundo ilustra o Quadro 7.

Quadro 7: Problema envolvendo equação fracionária redutível à equação do 2º grau

As despesas de um condomínio totalizam R\$600,00. Três condôminos, não dispondo de dinheiro para pagar sua parte, obrigam os demais a pagar, além de sua parte, um adicional de R\$45,00 cada um. Considere x o número de condôminos desse prédio. Calcule x .

Fonte: Bongiovanni et al, 1990

Como esse exercício fazia parte de resolução de equações fracionárias redutíveis a equações do 2º grau, sabia que sua resolução se daria por meio desse objeto matemático. Pedi para o aluno resolver outra tarefa enquanto pensava sobre

a resolução dessa tarefa. A organização de como cheguei ao resultado foi a seguinte:

1 – Escrever uma expressão que representasse quanto cada condômino pagaria se todos dessem sua parte.

$$\frac{600}{x}$$

2 – Escrever uma expressão que representasse quanto cada condômino pagaria se 3 condôminos não pagassem.

$$\frac{600}{x-3}$$

3 – A partir de uma simples lógica financeira de que o valor que cada condômino pagaria se 3 não pagassem, menos o valor que cada um pagaria se todos pagassem, é igual a 45 reais, escrevi a seguinte equação:

$$\frac{600}{x-3} - \frac{600}{x} = 45$$

que é equivalente à equação $x^2 - 3x - 40 = 0$, cujas raízes são -5 e 8 , calculadas *simplesmente* por soma e produto das raízes ou por meio da fórmula de resolução de equações do 2º grau. Como a quantidade x não pode ser negativa, então a quantidade procurada é $x = 8$. A técnica usada para resolver a equação fracionária é transformá-la numa equação cuja resolução é rotineira, supostamente não problemática para o ensino.

Embora pareça ficar evidente em minhas memórias que ensinar as praxeologias com matemática de objetos que supostamente eu já sabia fosse uma mera tradução das praxeologias instituídas para o ensino e que já havia engessado em meu EP, compreendo que cumpria meu papel na transposição didática ao realizar a ajuda ao estudo num sistema didático auxiliar ao da escola. Ou seja, começava assim, a minha trajetória de formação docente em que deveria de alguma forma exprimir o saber que parecia já estar pronto para ser ensinado.

Ser professor de aulas particulares me impulsionou para a sala de aula formal e o jeito de ensinar os objetos matemáticos na escola não era mais inédito. A partir daí já faziam parte de meu EP e UC as praxeologias e relações com os objetos matemáticos que iriam impulsionar minha docência, ou seja, as praxeologias para

ensinar foram iniciadas nas aulas particulares e continuadas na escola e que será abordada na sessão seguinte.

4.4 UM TRAJETÓRIA COMO PROFESSOR DO ENSINO BÁSICO

Quando iniciei a docência na escola formal as condições mudaram, pois tinha que atender a turmas de alunos e não somente um aluno em particular. Mas, as práticas adquiridas nas aulas particulares contribuíram sobremaneira para que meu ingresso na escola não começasse sem nenhuma noção de como ensinar. Obviamente que as responsabilidades aumentaram, uma vez que o professor está envolvido na escola em condições e restrições de toda ordem que fazem parte do seu trabalho docente, tais como: fazer plano de curso, plano de aula, lidar com comportamentos diferenciados dos alunos, preencher diários de classe, corrigir tarefas propostas aos alunos, avaliar, etc.

Além disso, as práticas com matemática que experimentei enquanto aluno, deram-me a noção do funcionamento do sistema didático nos intramuros da escola, da sala de aula, em particular do sistema didático para o estudo dos objetos da matemática escolar. Nesse sentido, Gonçalves e Mendes (2007, p. 48), apoiados em Camargo (1998), afirmam que “[...] situações vivenciadas como alunos são de forte influência no trabalho do professor em sala de aula, porque correspondem a experiências relativas ao ensino, à aprendizagem [...]”.

Assim, quando comecei a lecionar matemática na escola (ainda não tendo formação em licenciatura¹⁴), não enxergava grandes dificuldades, pois em meu equipamento praxeológico e universo cognitivo já havia desenvolvido praxeologias e relações com os objetos matemáticos desde quando fui aluno do Ensino Básico e do Ensino superior, além de professor de aulas particulares em que treinava os alunos por meio de listas de exercícios em grande quantidade, com tarefas similares da escola (Mesquita, 2011). Ou seja, já havia algo que para mim era natural no ensino da matemática: resolver bastantes exercícios. Assim, Liston e Zeichner (1993) citados por Gonçalves (2006, p. 182) reafirmam que:

Está claro que os futuros professores ascendem a sua formação profissional com uma bagagem histórica de experiências educativas

¹⁴ Minha formação inicial era em Engenharia e os objetos matemáticos da escola não me pareciam nem um pouco problemáticos.

como estudantes. Têm ideias prévias sobre o que significa ser um bom professor, o conteúdo que deve ensinar, como deve fazê-lo e o tipo de ambiente de aula que gostaria de proporcionar. Não chega em branco.

As praxeologias que possuía como professor de matemática no Ensino Básico parecia ir ao encontro com o modelo docente dominante (GASCÓN, 2001). Ensinar equação do 2º grau no 9º ano, por exemplo, era tarefa rotineira do professor e considerava não haver nenhuma dificuldade em seu ensino. As tarefas para resolução dessas equações já estavam organizadas e prontas para serem ensinadas bastando realizar a ação corporal de reprodução, como *habitus* (BOURDIEU, 1989, 2005) de fazer sem questionar apenas para afirmar seu *status quo*. Por exemplo, ao perguntar para uma turma como resolver uma equação completa do 2º grau, seria natural que ouvisse a resposta uníssona: *usando a fórmula de Báskara*.

Em Mesquita (2011) assevero que as OM propostas na coleção de Andrini (1989) adotada pela primeira escola em que lecionei corroborou a construção de meu conhecimento sobre o saber a ensinar que já possuía, pois o encadeamento do conteúdo nesse livro parecia estar em acordo com meu pensar e fazer o ensino. Embora que, enquanto professor de aulas particulares não tinha responsabilidades de organizar um curso, mas de fazer os alunos enfrentar as tarefas que já estavam postas pela escola.

A organização dos objetos na coleção de Andrini (1989a, 1989b, 1989c) apresentava os objetos matemáticos traduzidos em uma grande quantidade de exercícios para serem resolvidos, após serem dadas breves definições desses objetos, seguidas de exemplos que mostravam como resolver as tarefas propostas.

O Quadro 8 mostra tarefas propostas em Andrini (1989 c) como preparação para o uso dos recursos disponíveis para resolução de equações do 2º grau, sejam completas ou incompletas.

Quadro 8: Tarefas propostas para resolução de equações do 2º grau

5 - Equação do 2º grau
Definição
 Uma equação do 2º grau com uma variável tem a forma
 $ax^2 + bx + c = 0$ $a \neq 0$
 x é a incógnita
 a , b e c números reais, chamados de coeficientes
Exemplos:
 1) $x^2 - 7x + 10 = 0$, onde $a = 1$, $b = -7$ e $c = 10$
 3) $8x^2 - 4x = 0$, onde $a = 8$, $b = -4$ e $c = 0$
Exercícios
 2) Determine os valores dos coeficientes a , b e c nas equações seguintes:
 a) $2x^2 + 8x + 7 = 0$ g) $4x^2 - 16 = 0$
 e) $-x^2 - 4x + 9 = 0$ h) $x^2 - 3x = 0$
 3) Coloque na forma $ax^2 + bx + c = 0$ as seguintes equações do 2º grau:
 a) $5x + 3x^2 = 4x - 7$ b) $x^2 + 4x = 2(x - 1)$
 4) Coloque na forma $ax^2 + bx + c = 0$ as seguintes equações do 2º grau:
 Resolvido $(x + 3)^2 = 1$, $x^2 + 6x + 9 = 1$, $x^2 + 6x + 9 - 1 = 0$,
 $x^2 + 6x + 8 = 0$
 a) $(x - 5)^2 - 9 = 0$ b) $(x + 1)^2 - x = 7$

Fonte (Andrini, 1989c, p. 49-50)

As tarefas propostas no quadro 8 pareciam factíveis e bem direcionadas para a resolução equações do 2º grau, pois escrever as equações na forma reduzida e determinar seus coeficientes são tarefas indispensáveis para a escolha da técnica adequada para a sua resolução. Além disso, no item 4 parecia haver uma relação de produtos notáveis com a equação do 2º grau, pois para escrever a equação na forma $ax^2 + bx + c = 0$ seria necessário o desenvolvimento do quadrado da soma ou da diferença de dois termos e assim pensava que o estudo de produtos notáveis no ano anterior estava se justificando para além do seu *habitat* natural que é o 8º ano.

Embora o desenvolvimento do produto notável seja imposto pela tarefa de escrever a equação na forma reduzida, essa tarefa torna habitual uma prática de sempre desenvolver o produto notável em qualquer situação em que ele se encontre na equação. Se a tarefa fosse resolver a equação $(x + 3)^2 = 1$, não seria raro ensinar aos alunos a desenvolver o produto notável antes para reduzir a equação e depois usar a fórmula para resolvê-la¹⁵.

¹⁵ Durante uma aula no ano de 2015 em que estava debatendo sobre tarefa, técnica e tecnologia para alunos de licenciatura em matemática de uma faculdade em Belém, propus que a turma resolvesse a equação $(x + 3)^2 = 1$. Pedi que explicassem como resolveriam. Um dos alunos foi ao quadro e desenvolveu o produto, reduziu a equação e usou a fórmula resolvente e muitos disseram ter resolvido da mesma maneira. Perguntei se havia outra técnica para sua resolução e não obtive resposta.

Por outro lado, se considerarmos que equação $(x + 3)^2 = 1$ pode ser resolvida escrevendo-a na forma $x^2 - c = 0$, pois ela poderia ser escrita assim com uma simples mudança de variável (que não faz parte das praxeologias com esse tipo de tarefa no 9º ano). Assim, pode-se proceder das seguintes maneiras:

- Substituir $x + 3$ por y em que resultaria em $y^2 = 1$. Calcular as raízes quadradas dos dois membros da equação que leva a $y = 1$ ou $y = -1$, e que retornando com a variável x , vem $x + 3 = 1$ e $x + 3 = -1$, cujas raízes são $x = -2$ e $x = -4$;
- Considerar $(x + 3)^2 = 1$, $(x + 3)^2 - 1 = 0$, que é uma diferença de dois quadrados e que quando fatorada vem $(x + 3 + 1).(x + 3 - 1) = 0$, $(x + 4)(x + 2) = 0$, que resulta em $x = -4$ ou $x = -2$. Este último modo de fazer privilegia a fatoração e justifica algebricamente a prática do uso do sinal $\pm$ na frente da raiz quadrada.

Mas não questionava as tarefas contidas nos livros didáticos de Andrini, pois a forma como se encadeavam os conteúdos me era familiar, parecia simples e eficaz. Resolver a equação $(x + 3)^2 = 1$ fazendo a diferença de dois quadrados não fazia parte de minhas praxeologias para o ensino, apesar de estar dentro de meus possíveis. Esse discurso que apresento é um reflexo do presente, de um novo olhar para as praxeologias para o ensino desse objeto matemático que será ainda mais discutido nos capítulos seguintes.

A coleção de livros de Andrini foi adotada por três anos letivos seguidos pela primeira escola em que trabalhei e o encadeamento dos conteúdos por ela apresentada acabaram por se tornar habitual para mim, não somente pela imposição que a escola fazia ao adotar o livro, mas, sobretudo pela conformidade em que achava que estavam as organizações do livro com meu jeito de fazer desde aluno. Ou seja, a relação que construí com a organização contida nesta obra dava-me segurança e familiaridade necessárias à minha atividade de ensino. Não havia em meu EP e UC nenhum estranhamento com a organização proposta na coleção.

Recordo que em uma das escolas que lecionei para o 9º ano, o livro adotado foi da coleção “Matemática: uma aventura no pensamento” de Guelli (2005a) em que apresenta a resolução da equação $(x - 3)^2 = 25$, como ilustra o quadro 9.

Guelli (2005a) apresenta a equação sendo resolvida pela extração da raiz quadrada em ambos os membros da equação em que considera o modelo de

resolução $X^2 = c$, donde sai que $X = \pm\sqrt{c}$. Toda equação do 2º grau pode ser transformada nesse modelo, “basta” usar a técnica de completamento de quadrado, que esse autor assume como a técnica de fatoração do trinômio quadrado perfeito, para que se transforme numa equação do tipo $X^2 = c$.

Apesar do modelo proposto no livro de Guelli (2005a) possibilitar uma tarefa intermediária para resolver a equação por completamento de quadrado de um trinômio do 2º grau, abrindo espaço para a discussão das suas raízes, pois para c negativo a equação não tem solução e para $c = 0$ as raízes são reais e iguais, o autor só apresenta equações que têm duas soluções reais e diferentes para a técnica que ele denomina de resolução de equação por fatoração do trinômio quadrado perfeito (Quadro 9).

Quadro 9: Resolução de equações do 2º grau completando quadrado

Resolvendo equações por meio da fatoração do trinômio quadrado perfeito

Veja como resolvemos a equação do 2º grau $(x - 3)^2 = 25$:

$$x - 3 = \sqrt{25} \quad \text{ou} \quad x - 3 = -\sqrt{25}$$

$$x - 3 = 5 \quad \quad \quad x - 3 = -5$$

$$x = 8 \quad \quad \quad x = -2$$

$$S = \{-2, 8\}$$

Então, podemos resolver a equação do 2º grau $x^2 - 6x + 8 = 0$ assim:

$$1) x^2 - 6x = -8$$

$$2) x^2 - 6x + \left(-\frac{6}{2}\right)^2 = -8 + \left(-\frac{6}{2}\right)^2$$

$$3) x^2 - 6x + 9 = 1$$

$$4) (x - 3)^2 = 1$$

$$x - 3 = \sqrt{1} \quad \text{ou} \quad x - 3 = -\sqrt{1}$$

$$x - 3 = 1$$

$$x - 3 = -1$$

$$x = 4$$

$$x = 2$$

$$S = \{2, 4\}$$

Fonte: Guelli (2005a, p. 61)

Em seguida, ele usa a mesma técnica para exibir a fórmula resolvente usual da equação do 2º grau, como ilustra o Quadro 10. Obviamente que a fatoração do trinômio quadrado perfeito se mostra como tarefa rotineira, e o completamento de quadrado é a tarefa que parece não estar clara ou pronta para ser ensinada.

Quadro 10: A fórmula usual de resolução da equação do 2º grau no livro didático

A fórmula quadrática

Uma equação do 2º grau na variável x pode ser escrita na forma $ax^2 + bx + c = 0$, sendo a , b e c números reais e $a \neq 0$. Podemos transformar essa equação do 2º grau e expressar a variável x em termos dos coeficientes a , b e c :

1) $2x + 7x + 3 = 0$ 2) $\frac{2}{2}x^2 + \frac{7}{2}x + \frac{3}{2} = 0$ 3) $x^2 + \frac{7}{2}x = -\frac{3}{2}$ 4) $x^2 + \frac{7}{2}x + \left(\frac{7}{4}\right)^2 = -\frac{3}{2} + \left(\frac{7}{4}\right)^2$ 5) $\left(x + \frac{7}{4}\right)^2 = \frac{25}{16}$ 6) $x + \frac{7}{4} = \pm \sqrt{\frac{25}{16}}$ 7) $x = -\frac{7}{4} \pm \frac{5}{4}$ 8) $x = \frac{-7 \pm 5}{4}$ 9) $x = \frac{1}{2}$ ou $x = -3$	1) $ax^2 + bx + c = 0$ 2) $\frac{a}{a}x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$ 3) $x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$ 4) $x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$ 5) $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$ 6) $x + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{\frac{-4ac + b^2}{4a^2}}$ 7) $x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ 8) $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ 9) $x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ou $x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
---	---

Fonte: Guelli (2005a, p. 64)

A partir da exibição da fórmula resolvente, Guelli apresenta as resoluções das equações como aplicação dessa fórmula e abandona o completamento de quadrado e a fatoração.

O método de resolução de equações do 2º grau por completamento de quadrados não fazia parte de meu EP e nem me interessava que fizesse, pois acreditava que o custo para o ensino seria muito alto, ou seja, desprenderia muito mais tempo para o ensino e não conseguiria vencer o conteúdo naquele ano. Obviamente que a clareza que não tinha do problema praxeológico do professor de

preparar o curso para se tornar um objeto ensinável favoreceu o abandono da técnica de completamento de quadrado, pois essa apresentação de Guelli é tarefa exclusiva do professor em seu *topos*.

O livro de Guelli passou a ser usado como uma mera lista de exercícios em que recorria apenas para a fixação das técnicas, pois as praxeologias estavam cristalizadas e não usava mais *epsis litteris* os livros adotados pelas escolas a não ser para resoluções de tarefas propostas que escolhia em acordo com a ODM dominante em meu EP para o Ensino de Matemática em Nível Fundamental. Apesar de tomar os “problemas” propostos nos livros que seriam enfrentados por meio do uso da equação do 2º grau, as situações em que esses “problemas” surgiam eram pontuais e longe de serem rotineiras.

Assim, as praxeologias com os objetos em destaque no MER₀ eram as dominantes e ingênuas, seja pelo encadeamento nos programas escolares, seja na organização posta nos livros didáticos. Por exemplo, no 7º ano eram estudados entre outros objetos da matemática escolar equações do 1º grau com uma variável, sistemas de equações do 1º grau com duas equações e duas variáveis; no 8º ano, as expressões algébricas, valor numérico, definição, grau e operações entre monômios e polinômios, produtos notáveis, fatoração de polinômios e equações fracionárias; no 9º ano, as equações do 2º grau e as equações redutíveis à equação do 2º grau e parecia nada ter mudado para mim, pois assim havia aprendido enquanto aluno e continuava mantendo enquanto professor o mesmo pensar sobre os objetos de ensino.

Comecei a lecionar para alunos da EJA (Educação de Jovens e Adultos) e nessa modalidade de ensino, duas séries eram cursadas no mesmo ano. Por exemplo, a 4ª Etapa do EF se compunha do 8º e 9º anos e os conteúdos eram os mesmos das séries ordinárias. O que se estabelecia como um contrato informal era que os conteúdos da 8º ano fossem estudados no primeiro semestre do ano letivo e os conteúdos do 9º ano, no segundo semestre. Assim, os objetos matemáticos que trabalhava num ano letivo completo teriam que ser estudados na metade do tempo. Ou seja, não havia uma organização própria dos objetos matemáticos para a EJA. Um livro que encontrei para a EJA só se diferenciava dos livros das séries ordinárias pela quantidade de tarefas em um único livro, mas as abordagens em nada mudavam, não havia uma praxeologia para ensinar matemática para a EJA.

4.5 O SISTEMA DE TAREFAS ST_0

Após toda essa experiência praxeológica que tive desde aluno do Ensino Básico, mais precisamente as praxeologias para resolução equações do 2º grau, naturalizei uma organização para o ensino desse objeto. Essa organização encaminha uma compreensão que abstraí sobre esse objeto matemático denota o modelo epistemológico pessoal de referência inicial (MEPR₀), em que associado a ele há o de sistema de tarefas inicial denotada por ST_0 . Cada tarefa é denotada por T_{0i} ($i=1,2,3,4...$), e se apresenta da seguinte maneira:

T_{01} – Definir uma equação do 2º grau.

É toda equação do tipo $ax^2 + bx + c = 0$, com a , b e c sendo números reais e $a \neq 0$, é uma equação do 2º grau.

T_{02} – Exemplificar equações do 2º grau;

Exemplos: a) $x^2 - 2x + 4 = 0$

b) $-2x^2 + 5x - 1 = 0$

c) $x^2 - 4x = 0$

d) $x^2 - 9 = 0$

T_{03} – Determinar os valores dos coeficientes da equação;

Exemplo: a) $x^2 - 5x + 6 = 0$ ($a = 1$, $b = -5$ e $c = 6$)

b) $-2x^2 + x + 1 = 0$ ($a = -2$, $b = 1$, $c = 1$)

c) $x^2 - 4x = 0$ ($a = 1$, $b = -4$, $c = 0$)

d) $x^2 - 9 = 0$ ($a = 1$, $b = 0$, $c = -9$)

T_{04} – Classificar as equações do 2º grau como completa ou incompleta;

T_{05} – Resolver a equação incompleta do tipo $ax^2 - c = 0$;

Exemplo: Calcular as raízes das equações incompletas do 2º grau.

a) $x^2 - 25 = 0$

Resolução: Usando a técnica da extração da raiz quadrada,

$$x^2 = 25, x = \pm\sqrt{25}, x = \pm 5$$

T_{06} – Resolver a equação incompleta do tipo $ax^2 + bx = 0$;

a) $x^2 - 5x = 0$

Resolução: Usando como técnica a fatoração do polinômio pondo o fator comum em evidência, vem $x(x - 5) = 0$, donde se obtém $x = 0$ e $x = 5$.

T₀₇ – Resolver equações completas do 2º grau;

Aqui é apresentada a fórmula de resolução $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Exemplo: Calcular as raízes da equação $x^2 - 7x + 12 = 0$.

Resolução: Usando a fórmula com $a = 1$, $b = -7$ e $c = 12$, calcula-se as raízes $x = 3$ e $x = 4$.

A praxeologia dominante em meu EP em questão apresenta as técnicas de resolução de equações por meio de exemplos, cada uma com sua técnica distinta, sem relações claras entre elas, o que contrasta com o preconizado pelo modelo praxeológico de Chevallard (1999), que trataria a resolução das equações em unidade, a partir de uma clara integração de praxeologias que vivem na escola do ensino fundamental.

O enfrentamento dessa problemática foi realizado por um PEP, como método de pesquisa legitimado pela TAD, que se constitui em unidade complexa em volume de dados e relações entre os sistemas didáticos nele construídos, que torna hercúleo o trabalho de descrevê-lo em sua totalidade. Entretanto, seus dados permitem construir uma trajetória a partir do estado inicial E_0 , e por meio de vários sistemas didáticos intermediários, atingir os estados intermediários, até atingir o sistema didático final, ou estado final, que produz uma resposta R admissível.

Assim, é apresentada a seguir uma trajetória cujos estados ordinais são tomados em sincronias, mas em acordo com a diacronia do PEP. A trajetória assim construída, que constitui uma entre outras possíveis, denominamos de trajetória em diacronias sincrônicas da TDI que fundamenta o MEPR e, conseqüentemente, a resposta R encontrada, segundo o preconizado pelo modelo praxeológico de Chevallard (1999) sobre a articulação e integração praxeológica segundo um saber, no caso, o que contempla a resolução da equação do segundo grau.

5 A INSTAURAÇÃO DOS SISTEMAS DIDÁTICOS E OS ESTADOS ORDINAIS DA DIACRONIA DA TRAJETÓRIA

Nesse capítulo são realizadas crônicas desde encontro que tive com o MER_0 em que, a partir disso, questiono a prática de ensino de resolução equação do segundo grau corporificada por ST_0 . Esse encontro produz mudanças na minha relação pessoal com esse objeto de ensino, que são evidenciadas a seguir.

5.1 O ENCONTRO DE $\mathcal{P}$ COM O MER_0

No curso de mestrado iniciei os estudos, no Grupo de Estudo de Didática da Matemática (GEDIM)¹⁶, de teorias da didática da matemática francesa, em especial a transposição didática e seu desdobramento com a teoria antropológica do didático em que o professor $\mathcal{P}$ é um dos diretores de estudos e orientador de minha tese.

Durante o curso, e ainda buscando reorganizar meu projeto de pesquisa de mestrado, $\mathcal{P}$ apresentou-me o artigo *Contextualização do Ensino de Matemática* (SILVA; GUERRA, 2009) que se encontra no livro *Formação de professores: mitos do processo* em que há uma proposta de organização da resolução de equações do 2º grau (Quadro 11), considerado como o MER_0 , para exemplificar a contextualização da matemática pela própria matemática na escola, inspirado em um trecho da obra de Queysanne e Delachet (1964).

¹⁶ É um dos grupos de estudos do Instituto de Educação Matemática (IEMCI) e Científica da Universidade Federal do Pará (UFPA)

Quadro 1: Organização matemática para resolução de equações do 2º grau (MER₀)

A equação do 2º grau é apresentada na forma, $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$, que permite escrevê-la como sendo $x^2 + px + q = 0$, que é um polinômio do segundo grau que pode ser pensado como um produto de polinômios do 1º grau

$$x^2 + px + q = (x - \alpha)(x - \beta). \quad (I)$$

A solução da equação $(x - \alpha)(x - \beta) = 0$ pode ser encontrada observando-se que o produto de dois números reais A e B é nulo ($AB = 0$) quando um dos fatores for nulo ($A = 0$ ou $B = 0$). Assim, $x - \alpha = 0$ ou $x - \beta = 0$, obtendo-se $x = \alpha$ ou $x = \beta$. (II)

Tudo se resume, portanto, em fatorar um polinômio do 2º grau em um produto de fatores do primeiro grau: $x^2 + px + q = (x - \alpha)(x - \beta)$. Desse modo, $(x - \alpha)(x - \beta) = x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta$ que identificado com o polinômio $x^2 + px + q$, obtém-se

$$\begin{cases} -(\alpha + \beta) = p \\ \alpha\beta = q \end{cases}$$

Em alguns exemplos podem ser fatorados mentalmente¹ como a seguir:

$$x^2 - 7x + 12 = 0 \Rightarrow (x - 3)(x - 4) = 0. \text{ Pois, } -(3 + 4) = -7 \text{ e } 3 \cdot 4 = 12$$

Em geral, não é tão fácil encontrarmos α e β por operações mentais. Para isso, observamos que o quadrado da diferença de dois termos é igual ao quadrado de sua soma menos quatro vezes o produto entre eles, ou seja, $(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = p^2 - 4q$, (III) que permite obter o sistema do primeiro grau

$$\begin{cases} -(\alpha + \beta) = p \\ \alpha - \beta = \sqrt{p^2 - 4q} \end{cases} \text{ que pode ser resolvido pelo método da adição. Assim, o exemplo anterior } x^2 - 7x + 12 = 0, \text{ resulta em } p = -7 \text{ e } q = 12, \text{ pois } \begin{cases} -(\alpha + \beta) = p \\ \alpha - \beta = \sqrt{p^2 - 4q} \end{cases}, \begin{cases} \alpha + \beta = 7 \\ \alpha - \beta = 1 \end{cases}$$

donde resulta $\alpha = 4$ e $\beta = 3$. Após vários exercícios, resolvemos o caso geral, e obtemos a fórmula de resolução da equação do 2º grau.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

¹ É evidente para nós professores que nem sempre é possível a fatoração, mas abordaremos para nossos alunos como se fosse sempre possível e, posteriormente, após adquirirem o domínio da resolução, apresentamos os casos não possíveis (...).

Fontes: Silva e Guerra (2009, p. 93-96)

Na OM proposta no Quadro 11, Silva e Guerra (2009, p.93-96) assumem o problema do isolamento do objeto matemático da escola ao afirmarem que:

Temos observado que a maioria dos professores de Matemática, e os livros-texto, procuram apresentar conteúdos de forma isolada, estanque, como um produto acabado. Tudo começando e terminando sem propósito de continuidade, de relações com os conteúdos já abordados na mesma série ou anteriores e ainda sem apontar para um objetivo prático, seja com as relações do cotidiano ou para fornecer significado para os alunos dos próximos conteúdos matemáticos. Temos insistido com os nossos alunos-docentes que

procurem observar como os conteúdos estão relacionados e que os mesmos não estão providos necessariamente de seriação.

(...) Ao longo desta explanação, foram utilizados vários conteúdos que se interligam nos moldes dos mapas conceituais de Ausubel (1968), como por exemplo: Equação do Primeiro Grau (6^ª e 7^ª séries), Produtos de Polinômios (7^ª série), Sistema de Equação do Primeiro Grau (6^ª série), Valor Numérico (7^ª série), Identidade de Polinômios (3^º ano do EM), Fatoração e Produtos Notáveis (7^ª série). Além disso, outros conteúdos estão de forma implícita nesses conteúdos abordados explicitamente, como é o caso de expressões numéricas (no conteúdo Valor Numérico), iniciada na 4^ª série do EF; Operações Fundamentais etc.

Nesse modelo pareciam-me evidentes as articulações da tarefa resolver equações do 2^º grau com tarefas outras, do seu passado e futuro (CHEVALLARD, 2005) na posição que ocupa no programa da escola básica.

Assim, o MER₀ fez-me pensar que poderia realizá-lo em sala de aula em uma sequência de tarefas que proporcionaria uma nova praxeologia para o ensino de equações do 2^º grau e, assim, enfrentar o problema da desarticulação dos objetos matemáticos na escola que inspirou diversos trabalhos de pesquisa em didática das matemáticas sob a égide da TAD já citados aqui em que as conexões de objetos do saber e suas integrações são fundamentais para a superação de obstáculos no ensino de matemática relacionados ao tempo didático e ao isolamento dos objetos de ensino no currículo. Ou seja, vislumbrei uma maneira de romper com as praxeologias dominantes de ensino de equações do 2^º grau.

E, mais ainda, a integração dos objetos matemáticos do MER₀ dá sentido ao uso de fórmulas e algoritmos tão criticado por correntes de pensamentos que anunciam sua ineficácia para o aprendizado da matemática escolar, mas que Silva e Guerra (2009) discutem sua importância para o desenvolvimento do saber fazer matemático na escola.

Mais precisamente, a fórmula de resolução da equação do 2^º grau não surge como um passe de mágica para solucionar equações, mas de uma necessidade de facilitação da manipulação do objeto matemático. Nesse caso, a necessidade de romper com o ciclo de resolver equações por soma e produto de suas raízes, em que os produtos notáveis são os objetos matemáticos usados para encontrar o sistema de equações do 1^º grau que resolve a tarefa de encontrar as raízes de uma equação do 2^º grau.

A característica de integração das praxeologias escolares acima me fez encaminhar um tipo de compreensão que é considerado como meu MEPR₁. Esse

modelo epistemológico permite, então, analisar e questionar diferentes praxeologias sobre a resolução da equação do segundo grau presentes no Ensino Fundamental, e em particular, a praxeologia dominante usada pelo professor.

Após minha relação ter sido modificada pelo encontro com esse modelo novo que ao mesmo tempo traz relações entre objetos já consagrados pelas práticas da matemática escolar, pensamos em numa possível organização didático-matemática que poderia ser desenvolvida em uma turma de 4ª etapa da EJA, pois há objetos matemáticos articulados no MER₀ que fazem parte dos programas do 7º, 8º e 9º anos do Ensino Fundamental e supostamente não encontraria restrição pedagógica para seu uso, um dos níveis de codeterminação didática.

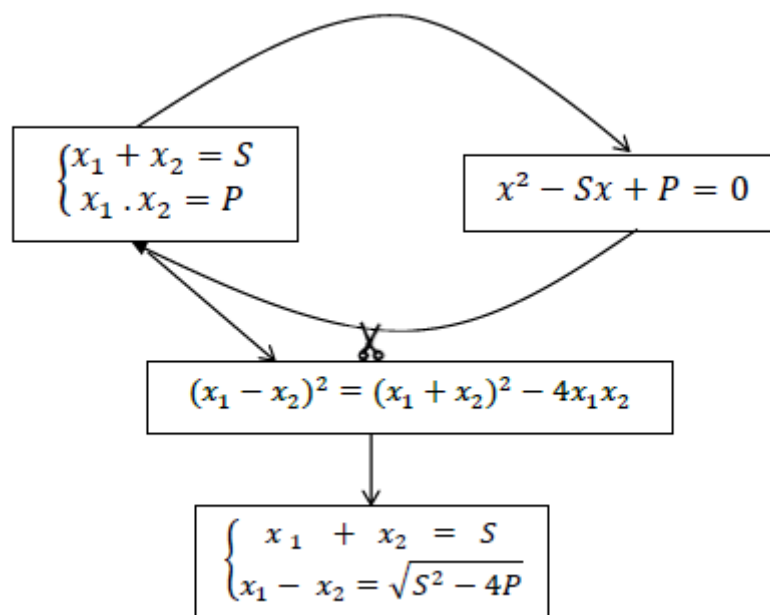
Por exemplo, no 7º ano são estudadas as operações que envolvem números negativos, além de equações do 1º grau e sistemas de equações do 1º grau com duas equações e duas variáveis; no 8º ano são estudadas as expressões algébricas, os polinômios e suas operações e a fatoração. E, no 9º ano, as equações do 2º grau e sistemas de equações do 2º grau com soma e produto. Além disso, a tarefa de escrever a equação do 2º grau na forma fatorada, envolve também um saber implícito, o Teorema fundamental da Álgebra, que mesmo não fazendo parte do currículo do Ensino Fundamental, surge como objeto do futuro visto no presente, mas sem necessariamente ser feita sua formalização.

Além disso, as práticas de ensino para a EJA se resumiam para mim em ensinar “resumidamente” os conteúdos de dois anos regulares em um ano. Por exemplo, para a 4ª etapa ensinava os conteúdos do 8º ano no 1º semestre e conteúdos do 9º ano no segundo semestre de um ano letivo. Entretanto, a escolha dos objetos a serem estudados e como deveriam ser ensinados não estava em jogo. Havia uma tentativa de resumir o que era feito nos anos regulares pondo ênfase nos objetos matemáticos que eu pensava ser mais importante para o aluno da EJA.

Vislumbrei, também, o enfrentamento da complexa tarefa de fazer emergir o saber, por meio das articulações de praxeologias presentes na escola. No caso em tela, as praxeologias com os objetos matemáticos da escola envolvidos no modelo atenderiam a um saber que as justificassem. Assim, resolver equações do 2º grau (ou do 1º grau) não se justifica apenas pela busca de suas raízes, mas fundamentalmente pelo método utilizado, ou seja, como é feita essa busca.

No enfrentamento dessa tarefa de fazer emergir o saber surge no MER₀ a relação entre os produtos notáveis $(\alpha - \beta)^2 - (\alpha + \beta)^2 = -4\alpha\beta$ que introduzimos como a seguinte tarefa: Calcular a diferença entre o quadrado da diferença e o quadrado da soma de dois termos. Essa tarefa estabelece uma relação entre a diferença, a soma e o produto desses termos e se constitui na ferramenta que vai quebrar o ciclo ilustrado na Figura 7, pois o sistema do 2º grau se transforma em um sistema de 1º grau, considerando a tarefa de resolver sistemas do 1º grau como uma prática rotineira ou um elemento estável¹⁷. E essa tarefa será denominada daqui em diante de Tarefa Intermediária Transformadora (T I T), pois transforma um problema de solução não conhecida em outro cujo método é conhecido, tarefa essa tão comum na atividade matemática, mas que na escola parece ser transparente.

Figura 7: Tarefa intermediária transformadora (TIT)



Fonte: Do autor

A partir disso, minha relação pessoal com esses objetos sofre alterações, pois me despertou o pensar sobre como poderia se dá o ensino da resolução da equação do 2º grau sob um novo jeito de fazer e pensar esse objeto. Assim, um questionamento surge:

¹⁷ Elementos estáveis são aqueles que, subjetivamente, isto é, para os sujeitos da instituição I, parecem naturais, transparentes, não problemáticos (CHEVALLARD, 1992, p. 130).

Q₀: Como organizar os objetos matemáticos do MER₀ para o ensino? Como se dá essa organização em sala de aula?

Essas questões, que substanciam o sistema didático solitário $S_0(\mathcal{P}, Q_0)$ não me pareciam problemáticas, pois considerava que a resposta estava dada pelo próprio modelo, uma vez que as tarefas que se relacionam nele já faziam parte do meu EP e UC, então bastava apenas colocar as tarefas ali presentes em determinada ordem, e pô-lo em ação em sala de aula. Sempre tendo a intenção de fazer acontecer as conexões dos objetos do saber e levar os alunos a compreenderem a importância de uma fórmula na atividade matemática.

5.1.1 O Sistema de tarefas ST₁ e o primeiro estado da diacronia da trajetória

Essa nova compreensão sobre o saber resolução de equações do segundo grau, entendida aqui como um MEPR₁, evidencia-se no estudo realizado em $S_0(\mathcal{P}, Q_0)$ associado ao sistema didático solitário $S_0(\mathcal{P}, \text{MER}_0)$. Assim, a partir de MEPR₁ desenvolvi um sistema de tarefas que simbolizo por ST₁, em que as tarefas são designadas como T_{1i}, (i = 1,2,3...). Dessa maneira, o primeiro estado E₁ da diacronia da trajetória é constituído como uma nova maneira de assumir a resolução de equação do segundo grau para o ensino.

Sistema de tarefas ST₁

- Intenção didática: Tarefas T₁₁ em conexão com T₁₂ criam condições para encaminhar a resolução de segundo grau na T₁₃

T₁₁: Desenvolver os produtos de polinômios do tipo $(x + a)(x + b)$.

A tarefa de desenvolver os produtos notáveis: o quadrado da soma e da diferença de dois termos: $(a + b)^2$ e $(a - b)^2$, bem como o produto da soma pela diferença estão incluídas em T₁₁. A técnica é a regra distributiva.

Ex. Desenvolver os produtos:

a) $(x + 5).(x + 6)$.

Solução: $(x + 5).(x + 6) = x^2 + 5x + 6x + 30 = x^2 + 11x + 30$

b) $(x + 5).(x + 5)$.

Solução: $(x + 5).(x + 5) = x^2 + 5x + 5x + 25 = x^2 + 10x + 25$

T₁₂: Fatorar polinômios do 2º grau com uma variável do tipo $x^2 + Sx + P$ como produto de binômios $(x + \alpha)(x + \beta)$

A técnica usada para essa tarefa é a soma e produto, por tentativas fatorando o produto P.

Ex. Fatorar o trinômio

a) $x^2 + 11x + 30$

$$\begin{array}{r|l} 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

Por combinações dos fatores primos, chega-se aos números 5 e 6. Assim, tem-se $x^2 + 11x + 30 = (x + 5).(x + 6)$

T₁₃: Resolver equações do tipo $x^2 + px + c = 0$.

A técnica a ser usada é a fatoração do trinômio do 2º grau.

Ex. Resolver as equações:

a) $x^2 + 11x + 30 = 0$

Por T₁₂, tem-se que $(x + 5).(x + 6) = 0$. Assim, aplica-se a regra do produto nulo, donde vem $x = -5$ ou $x = -6$.

b) $x^2 - 2,5x + 2,5 = 0$.

Nessa equação, a técnica de fatoração usada em T₁₂, pode se tornar inadequada, pois a decomposição de números decimais ou fracionários não é tarefa da escola. Além disso, para equações sem soluções reais, essa técnica não convém. Assim, as tarefas T₁₄ e T₁₅ seguintes são propostas no sistema para o enfrentamento desse tipo de equação.

- Intenção didática: Encaminhar nova técnica de resolução por meio das seguintes tarefas.

T₁₄: Desenvolver a diferença $(a - b)^2 - (a + b)^2$. (T I T- tarefa intermediária transformadora).

A técnica é o desenvolvimento dos quadrados por regra distributiva e a redução de termos semelhantes.

Assim, $(a - b)^2 - (a + b)^2 = a^2 - ab - ab + b^2 - (a^2 + ab + ab + b^2) = -4ab$, ou seja $(a - b)^2 - (a + b)^2 = -4ab$.

Usando exemplos numéricos, $(5 - 3)^2 - (5 + 3)^2 = -4.5.3 = -60$.

T₁₅: Solucionar sistemas de equações do 1º grau com duas variáveis.

A técnica é o método da adição.

Ex. Solucionar o sistema $\begin{cases} a + b = 5 \\ a - b = 1 \end{cases}$.

Usando o método da adição, tem-se que

$$a + b = 5$$

$$\underline{a - b = 1}$$

$$2a = 6$$

$a = 3$, que substituído em uma das equações, leva a $b = 2$

T₁₆: Solucionar equações do 2º grau do tipo $x^2 + Sx + P = 0$, onde S e P são, respectivamente, a soma e o produto das raízes α e β da equação, por meio do sistema

$$\begin{cases} \alpha + \beta = -S \\ \alpha - \beta = \sqrt{(-S)^2 - 4P} \end{cases} \text{ Sistema } S_1$$

A resolução de equação do 2º grau consiste em tomar a soma S e o produto P das raízes dados na equação e substituí-los no sistema S_1 em que a 2ª equação $\alpha - \beta = \sqrt{S^2 - 4P}$ vem da tarefa intermediária transformadora T_{14} . Assim, por exemplo, para resolver a equação $x^2 - 2,5x + 2,5 = 0$, basta tomar

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 2,5 \\ \alpha - \beta = \sqrt{(2,5)^2 - 4.2,5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 2,5 \\ \alpha - \beta = \sqrt{0,25} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 2,5 \\ \alpha - \beta = 0,5 \end{cases} \Rightarrow \alpha = 1,5 \text{ e } \beta = 1$$

T₁₇: Desenvolver a fórmula $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ da equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$, por meio do sistema S_1 .

Essa tarefa foi posta para a institucionalização da fórmula usual de resolução de equação do 2º grau.

O sistema ST_1 , que é a resposta $R_1^\diamond$ para Q_0 , foi difundida e defendida no sistema didático auxiliar $S_1(\mathcal{P}, A, R_1^\diamond)$ que será apresentado a seguir, em que A denota alunos da quarta etapa da EJA de uma escola pública.

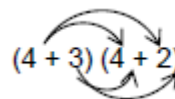
5.1.2 O sistema didático auxiliar SDA₁: realização de ST₁ na sala de aula

No sistema didático auxiliar S₁ ($\mathcal{P}$, A, R₁[◊]) a organização das tarefas descritas e analisadas em Mesquita (2011) foram aqui reescritas e reanalisadas, pois é nesse espaço-tempo que surge a problemática da tese.

Há tarefas que, apesar de serem mobilizadas no MER₀, não estavam claramente postas na organização que elaborei para estudo em sala de aula. A essas tarefas chamamos – inspirado na noção de OM intermediária¹⁸ anunciada em Bosch e Gascón (2001) – como Ferreira (2014), de tarefas intermediárias (TI) que são estratégicas e indispensáveis para o desenvolvimento da ODM. Após o relato sobre desenvolvimento das tarefas, são realizadas algumas análises escritas como notas.

Tarefa T₁₁: Desenvolver os produtos de polinômios

Após obter informações sobre o andamento do programa com a turma, iniciei as aulas com a seguinte tarefa: Desenvolver o produto $(x + 3).(x + 5)$. Como não obtive respostas dos alunos, desenvolvi um produto usando apenas números, como indicado a seguir:

$$(4 + 3)(4 + 2) = 4.4 + 4.2 + 3.4 + 3.2 = 4^2 + (3 + 2).4 + 3.2$$


Em seguida, escrevi no quadro a seguinte tarefa: Desenvolver o produto $(5 + 4)(5 + 4)$. Alguns alunos responderam rapidamente 81. Expliquei que a resposta estava correta, mas que queria que eles desenvolvessem a tarefa usando a regra distributiva, e não escrevessem o resultado das multiplicações. A intenção era de facilitar a compreensão de produtos do tipo $x.x$ ser igual a x^2 .

Em seguida, retomamos o produto $(x + 5)(x + 3)$. Mas, ao perguntar a turma o resultado de $x \cdot x$, a turma respondeu $2x$. Retomei o produto anterior exibindo $5 \cdot 5 = 5^2$. Após isso, pareceu naquele momento que a turma havia superado produto $x.x$,

¹⁸ Se uma OD consiste, essencialmente, em uma resposta à questão: Como construir uma determinada OM em uma instituição escolar? Então, deve incluir em sua base, uma sequência de OM em evolução, das quais se situa a OM considerada: aquelas a partir das quais a OM se constrói e aquelas a partir das quais a OM acaba por incluir-se. Geralmente as “razões de ser” de uma OM se encontram nas OM que a precedem ou nas OM que se integrará. Estas tendem a desaparecer à medida que a construção avança, porém pode ser importante, desde o ponto de vista da eficácia da OD correspondente, saber manter vivas estas OM “intermediárias” ao menos durante a construção da OM considerada. (BOSCH e GASCÓN, 2001, p. 18)

pois todos responderam x^2 . Assim, o produto $(x + 5)(x + 3)$ foi novamente retomado e foi resolvido por meio da regra distributiva.

$$(x + 3) \cdot (x + 5) = x^2 + 5x + 3x + 15$$

Continuando com o produto de polinômios, a minha intenção era fazer com que T_{11} se tornasse rotineira para que posteriormente, estivesse no campo de percepção dos alunos que, por exemplo, no produto $(x + 3)(x + 5) = x^2 + 8x + 15$, 8 é a soma $3 + 5$ e 15 é o produto $3 \cdot 5$. Isso ficou evidenciado no seguinte trecho da aula:

Escrevi no quadro o produto $(x + 3)(x + 5) = x^2 + 8x + 15$ e apontei para o 8 e para o 15, perguntando a respeito de alguma relação desses resultados com os binômios. A aluna Murielli respondeu que 8 era a soma $3 + 5$ e 15 era a multiplicação 3×5 . Escrevi mais alguns exercícios análogos no quadro e pedi para os alunos realizarem os produtos de forma rápida. Apesar dessa percepção da aluna, eles tentaram resolver os exercícios sem dar respostas diretas, ou seja, usaram a regra da distribuição (MESQUITA, 2011, p.74).

Objetivando mostrar para os alunos que o trinômio do 2º grau pode ser obtido por meio das operações de soma e produto dos termos independentes dos binômios, explicitiei essa tarefa com os seguintes exemplos:

- a) $(x + 4)(x + 3) = x^2 + 4x + 3x + 4 \cdot 3 = x^2 + (4 + 3)x + 4 \cdot 3 = x^2 + 7x + 12$
 b) $(x - 5)(x - 2) = x^2 - 5x - 2x + 5 \cdot 2 = x^2 - (5 + 2)x + 5 \cdot 2 = x^2 - 7x + 10$.

Assim, propus exercícios análogos aos exemplos a e b. Nas tarefas em que surgiram os produtos notáveis, estes foram sendo classificados segundo os tipos que aparecem nos livros didáticos e nas práticas de ensino, a fim de que os alunos tomassem conhecimento dos termos usados nesses produtos. Por exemplo: $(x + 5)^2$ (Quadrado da soma de dois termos), $(x - 5)^2$ (Quadrado da diferença de dois termos), $(x + 6)(x - 6)$ (Produto da soma pela diferença de dois termos). A tarefa de desenvolver os produtos notáveis usando as letras a e b também foi proposta, $(a + b)^2$, $(a - b)^2$ e $(a - b)(a + b)$, para suas generalizações, pois seriam utilizadas no andamento das aulas.

Assim, encerramos a tarefa T_{11} e demos início à próxima tarefa prevista em ST_2 : fatorar polinômios.

Notas sobre T₁₁

Tinha a intenção de tornar T₁₁ rotineira o mais breve possível para que eu pudesse avançar para as fatorações e equações. Entretanto, houve a necessidade do estudo das operações entre monômios, pois ao perguntar para a turma qual o resultado de $x.x$, muitos na sala deram a resposta $2x$. Uma *técnica didática* (BOSCH e GASCÓN, 2001) que usei naquele momento foi substituir x por números, por exemplo: $5.5 = 5^2$. E mesmo eu tendo que dispor de tempo para que os alunos não tivessem dúvidas sobre essa tarefa, isso não fez parte de minhas análises, pois não tinha a intenção naquele momento de problematizar tarefas que deveriam ser rotineiras para a turma. O uso de produtos de números para justificar o porquê $x.x = x^2$ foi espontâneo (não estava previsto na OM). Nesse sentido:

Dizemos que esta praxeologia é “espontânea” porque as tarefas didáticas que a geram não estão organizadas de antemão em todos os seus detalhes senão que, pelo contrário, muitas delas se improvisam dependendo do curso que tomem os acontecimentos. (BOSCH e GASCÓN, 2001. p. 3, grifos deles, tradução nossa)

Assim, as novas tarefas começam a surgir na organização, como por exemplo: *desenvolver o produto $(4 + 3)(4 + 2)$ sem realizar as multiplicações dos números*, que mesmo sendo estranha aos alunos, foi proposta para atender outra tarefa: escrever os produtos do tipo $(x + a)(x + b)$ como $x^2 + (a + b)x + a.b$. Essa última tarefa se torna estratégica para tornar visível a tarefa inversa¹⁹ de fazer $ax + bx = (a + b)x$ e, assim, evidenciar a soma e o produto dos termos independentes dos binômios.

Dessa maneira, realizar a tarefa T₁₁ fez emergir tarefas intermediárias que são condições encontradas no sistema didático que jogam importante papel na composição do MEPR. Não esqueçamos que para Chevallard (2009a, 2009b), Bosch e Chevallard (1999) e Bosch e Gascón (2010), a TAD define a didática como a ciência das condições e restrições da difusão social de praxeologias. Assim, quando uma tarefa que, considerada como rotineira na organização matemática, torna-se visível na OD, então ela passa a compor a OM. Dessa forma, desenvolver

¹⁹ Segundo Lucas et al (2014), uma das conjecturas específicas do questionamento tecnológico das técnicas matemáticas escolar é que “não há reversão das técnicas para realizar a tarefa matemática inversa” (ibidem p.1334), o que permite a atomização das técnicas usadas na escola.

os produtos do tipo $(x + a).(x + b)$ é uma tarefa que deve ser considerada na organização matemática para que a soma e o produto dos termos independentes se tornem visíveis no trinômio do 2º grau.

Tarefa T₁₂: Fatorar polinômio do 2º grau com uma variável

Apresentei T₁₂ para os alunos como uma tarefa inversa à tarefa T₁₁. Ou seja, fatorar um trinômio do 2º grau é escrevê-lo como um produto de binômios do 1º grau polinômios. Por exemplo, a partir da tarefa: calcular $(x - 2)(x - 3) = x^2 - 5x + 6$, surge a tarefa: fatorar o trinômio $x^2 - 5x + 6$, que tem como resultado $(x - 2).(x - 3)$. No trecho a seguir descrevo como fiz a introdução de T₁₂.

Para ilustrar, escrevi no quadro alguns exemplos, tais como: $x^2 + 2x = x(x + 2)$, $x^2 - 5x = x(x - 5)$, $5x^2 - 10x = x(5x - 10)$, $x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$, $x^2 - 4x + 4 = (x - 2)(x - 2)$, $x^2 - 16 = (x + 4)(x - 4)$, entre outros. (...) Todos os polinômios que foram apresentados eram fatoráveis. Mas, *expliquei que havia polinômios não fatoráveis, e que não iríamos trabalhar com eles naquele momento*²⁰.

Para os alunos que apresentaram dificuldades para realizar a fatoração do trinômio por soma e produto, sugeri que fatorassem o termo constante do trinômio, pois esse poderia fornecer o produto dos termos constantes dos binômios resultantes. Por exemplo, dado o trinômio $x^2 - 8x + 12$, fatorar o termo 12 escrevendo $12 = 2.2.3 = 2.6$ e testar a soma desses fatores, no caso $2 + 6 = 8$. Assim, obtive melhores resultados para os trinômios (MESQUITA, 2011, p.76)

A intenção era fazer com que os alunos fatorassem o polinômio do 2º grau de uma variável por meio da soma (que é dada pelo coeficiente do termo do 1º grau do polinômio) e do produto (que é dado pelo termo independente do polinômio) de dois números que são os termos independentes dos binômios do primeiro grau. Ou seja, $x^2 - Sx + P = (x - a).(x - b)$, onde $a + b = S$ e $a.b = P$.

Alguns binômios do 2º grau com uma variável foram também fatorados da mesma forma, como destacado no seguinte trecho:

E seguindo essa mesma estratégia, para os binômios do tipo $x^2 - 16$ ou $x^2 + 5x$, sugeri o registro do termo nulo. Dessa forma, $x^2 - 16$ poderia ser escrito como $x^2 + 0x - 16$ e $x^2 + 5x$, como $x^2 + 5x + 0$. A partir disso, a fatoração se dava pela soma e pelo produto novamente. Assim, todos os alunos que realizaram as fatorações, as fizeram dessa forma. Contudo, ressaltei que essas fatorações

²⁰ Essa fala será revista em análises posteriores dentro do texto, pois a constatação de que há trinômios do 2º grau não fatoráveis (para o nicho ecológico considerado na pesquisa) tem que ser potencializada pelo sistema de tarefas e não dada de antemão aos alunos. Estava tentando realizar o MER₀ o mais próximo possível do que havia compreendido dele.

poderiam ser feitas de forma direta, sem colocação do termo nulo. Ou seja, $x^2 - 16 = (x + 4).(x - 4)$, no qual expliquei que os termos independentes dos binômios teriam que ser simétricos, pois como o termo de x não aparece, isso indica que a soma desses números é zero e o produto deveria ser igual a -16. Para o caso do polinômio $x^2 + 5x$, apenas escrevi x como um fator comum e fiz sua fatoração direta $x^2 + 5x = x.(x + 5)$ (MESQUITA, 2011, p.76).

As tarefas de fatorar os trinômios e os binômios do segundo grau deveriam ser propostas de tal forma que fossem usadas no estudo de equações completas e incompletas do 2º grau. Ou seja, havia a intenção de fazer a tarefa de fatorar polinômios do 2º grau com uma variável se tornasse habitual de tal forma que ao se deparar com equações do segundo grau, o aluno dispusesse dessa tarefa para a resolução de ditas equações. No sentido de Bourdieu (2005), as estruturas de um *habitus* racional logicamente anterior comandam o processo de estruturação de novos *habitus* racionais a serem produzidos.

Numa tarefa proposta em Mesquita (2011) cujo enunciado era: *Fatore os polinômios*: a) $x^2 - 7x + 12$, b) $x^2 - 10x + 25$, c) $x^2 - 5x$, d) $x^2 - 16$, e) $x^2 - 5x - 6$, f) $x^2 - 5x + 6$, g) $x^2 - 7x$, h) $x^2 + 6x + 9$, i) $x^2 + 4x - 21$, indiquei a técnica de fatorar o termo independente para dar as *pistas* sobre quais seriam os números a e b no produto $(x + a).(x + b)$.

Mesmo os números a e b podendo ser encontrados por tentativas, que ocorreu mais rapidamente nos item (a), (b) e (f), houve dificuldades na fatoração dos itens (c), (d) e (e), em que tive que ajuda-los da seguinte maneira: em (c) escrevi $x^2 - 5x$ como $x^2 - 5x + 0$ para ressaltar que se a soma de dois números é diferente de zero e o produto deles é zero, então um deles é igual a zero; em d) $x^2 - 16$ como $x^2 + 0x - 16$ expliquei que se a soma de dois números é zero, então eles são opostos; em (e) $x^2 - 5x - 6$ expliquei que se a soma de dois números é -5 e o produto é - 6, quer dizer que os números tem sinais opostos (produto deles negativo) e que o maior deles (em valor absoluto) é negativo (soma deles é negativa). Ou seja, assumi para todo tipo de polinômio do 2º grau do tipo $ax^2 + bx + c$, com $a = 1$ com b e c iguais ou diferentes de zero, a fatoração por soma e produto.

Após realizar várias tarefas do mesmo tipo, dei início ao estudo da próxima tarefa de *resolver equações do 2º grau*.

Notas sobre T₁₂

Em T₁₂, ficou evidente que não ocorreu a problematização da tarefa de fatorar o trinômio do 2º grau. Apesar de impor os mesmos exercícios de produtos notáveis para que os alunos fizessem sua fatoração, não apareceu aqui uma tarefa que imputasse dificuldades maiores para eles. Embora, os alunos tivessem apresentado alguma dificuldade com regras de sinais, por exemplo, nas fatorações que foram propostas, minha intenção era problematizar a tarefa seguinte: Calcular x de modo que $x^2 - 5x - 6 = 0$.

A fatoração de binômios do 2º grau por soma e produto surgiu na OD sem ser pensada na OM, pois o programa exigia a exibição dos casos de fatoração. Além disso, a tarefa de fatorar os binômios foi posta tendo em vista a resolução de equações incompletas do 2º grau que também fazem parte do programa da 4ª Etapa.

Ocorreu assim, uma desarticulação, não relatada em Mesquita (2011), entre a fatoração e a resolução de equações, uma vez que a tarefa de *fatorar o polinômio do 2º grau* engendra a tarefa *resolver equações do 2º grau*. Tal situação só ficou evidente a partir da tarefa T₁₃ que será mostrada a seguir.

Tarefa T₁₃: Resolver equações do 2º grau

A introdução dessa tarefa foi realizada segundo a descrição feita em Mesquita (2011), conforme o trecho a seguir:

Aproveitando o trabalho desenvolvido pelos alunos com fatoração do trinômio do 2º grau, iniciei o cálculo de raízes de equações do 2º grau. Antes discutimos a respeito do produto de dois fatores ser igual a zero. Ex. Quais as possibilidades de $A \cdot B = 0$, sendo A e B dois números?

Em seguida foi mostrada a equação $x^2 - 5x + 6 = 0$. Fizemos a fatoração do trinômio e obtivemos $(x - 2)(x - 3) = 0$, donde calculamos $x = 2$ ou $x = 3$. Foram calculadas raízes de algumas equações do 2º grau completas e incompletas, conforme o exemplo 3 abaixo.

Exemplo 3

a) $x^2 - 25 = 0 \Rightarrow x^2 + 0x - 25 = 0 \Rightarrow (x - 5)(x + 5) = 0 \Rightarrow x = 5$ ou $x = -5$.

b) $x^2 - 5x = 0 \Rightarrow x^2 - 5x + 0 = 0 \Rightarrow (x - 0)(x - 5) = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = 5$.

Expliquei para os alunos que resolver uma equação do 2º grau é calcular o valor da variável do polinômio do 2º grau para a qual seu valor numérico é igual a zero. Essa explicação pareceu não ficar muito clara para eles. Então, fizemos a verificação da igualdade em

dois exemplos, calculando o valor numérico do trinômio para as raízes encontradas (MESQUITA, 2011, p. 77).

Na introdução de resolução de equações do 2º grau, o trecho acima revela que uma das propriedades do produto para números reais é estratégica para a realização da tarefa. Se $A.B = 0$, então $A = 0$ ou $B = 0$ e isso é uma *regra (produto nulo)* que não era rotineira para os alunos, mas que seria usada para resolver equação por meio da fatoração, ou seja, se o polinômio do 2º grau estiver fatorado em fatores do 1º grau, a equação está resolvida, pois resolver equações do primeiro grau é tarefa que considerava rotineira.

A tarefa proposta para a resolução de equações do 2º grau por fatoração se deu pela minha intenção de fazer com que ficasse explícito para os alunos que numa equação do tipo $x^2 - Sx + P = 0$, S é a soma das raízes e P é o produto delas. Isso ficou expresso no seguinte trecho:

Realizamos cálculos de raízes de algumas equações completas do 2º grau, até que questionei que relação tinha os resultados encontrados com os trinômios das equações? A aluna Cláudia respondeu que “a soma dos números dava o número do meio e a multiplicação deles dava o último número”. A partir daí indiquei que a soma das raízes numa equação do tipo $x^2 - Sx + P = 0$ seria o número S e o produto das mesmas o número P . Deixei outras equações para eles resolverem em casa (MESQUITA, 2011, p. 77).

Propus equações para serem resolvidas por meio da soma e do produto de suas raízes modo que, por algumas *tentativas*, havia aluno (s) que dava(m) a resposta sem escrever no caderno. Mas, antes que sugerisse uma equação em que a técnica por tentativas não tivesse o alcance desejado, uma das alunas questionou essa técnica, segundo expresso no trecho:

Durante a resolução das equações usando a técnica da fatoração do polinômio a aluna Marília falou: “professor, estou cansada de fazer essa matemática tendo que adivinhar”. Expliquei que era isso mesmo que eu estava tentando levar o aluno a refletir e que a partir deste momento o trabalho seria conduzido no sentido de encontrar um jeito de fazer a resolução das equações sem ter que “adivinhar” os resultados (MESQUITA, 2011, p. 77).

Parecia que a aluna havia fornecido a “chave” para o sucesso da ODM, pois a partir daí, pensei estar realizando, de fato, o MER₀ em sala de aula. Isso fica evidente no seguinte trecho:

Foi muito importante a fala da aluna, pois pareceu nesse momento que minhas intenções e objetivos estavam sendo realizados. Esta aluna percebeu a dificuldade ou limitação da técnica, o que me proporcionou fazer um discurso sobre o aprimoramento de uma técnica ou utilização de novas maneiras de enfrentar uma tarefa, seja matemática, seja qualquer tarefa do nosso dia-a-dia. Nesse discurso, exibi de maneira clara a intenção de buscar outra forma de calcular as raízes de uma equação do 2º grau e mostrar a importância das generalizações que a álgebra pode proporcionar. A partir daqui as fórmulas e os algoritmos podem ser fundamentados por necessidades sociais e consolidados como facilitadores de atividades com a Matemática.

Esse momento se configurou para mim como o “envelhecimento” do saber, ou seja, o momento em que ficou claro que deveria agir e provocar a renovação do saber, pois a aluna ao mostrar seu descontentamento com a técnica me leva a refletir sobre as restrições da técnica que foi aplicada. Essa colocação feita pela aluna fez-me pensar que o direcionamento que eu estava dando às aulas encontrava-se realmente com minhas intencionalidades antes planejadas com meu aluno hipotético (MESQUITA, 2011, p.78)

Após os alunos resolverem algumas equações ainda por tentativas, indiquei a seguinte tarefa Ex_3 (que chamei na ocasião de exercício 3): *Dados o perímetro $P = 14cm$ e a área $A = 12 cm^2$ de um retângulo, calcular suas dimensões.* Antes de começar a resolução junto com os alunos, fiz uma *retrospectiva* de cálculo de áreas e perímetros de retângulos. Não vou aqui me deter nos detalhes do como se deu essa *retrospectiva*, mas de fato essa tarefa parecia estar relacionada com o MER_0 que me propunha a desenvolver em sala. A tarefa Ex_3 foi proposta naquele momento com a intenção de contextualizar o modelo algébrico a partir uma tarefa da geometria. Obviamente essa que tarefa tem suas limitações, pois as dimensões do retângulo são valores estritamente positivos.

Tomei Ex_3 para exibir o sistema de equações do 2º grau, que denominei de Sistema S_2 .

$$\begin{cases} 2x + 2y = 14 \\ x \cdot y = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 7 \\ x \cdot y = 12 \end{cases} \quad \text{Sistema } S_2$$

Após perguntar para os alunos quais os números cuja soma é igual a 7 e cujo produto é igual a 12, a aluna Marília respondeu rapidamente que os resultados eram 3 e 4. Então, escrevi no quadro um sistema com dados cujo resultado não pudesse ser tão óbvio:

$$\begin{cases} x + y = 5,5 \\ x \cdot y = 6 \end{cases}$$

Após algumas tentativas sem sucesso, expliquei para a turma que iríamos estudar um método para resolver esse tipo de tarefa. Assim, dei início à tarefa T₁₄.

Notas sobre a tarefa T₁₃

Iniciei escrevendo a tarefa de resolver a equação do 2º grau $x^2 - 5x + 6 = 0$ esperando que os alunos fizessem a fatoração do trinômio para usarem a técnica do produto nulo. Entretanto, penso factível iniciar com polinômios já fatorados para que se possa por em evidência algumas tarefas na ODM e ressaltar ainda mais a fatoração para a resolução de equações do 2º grau. Ou seja, a tarefa inicial (T'₁₃) para resolver equações do 2º grau com a intenção de articular esse objeto com a fatoração é a seguinte: Resolver a equação $(x - 2) \cdot (x - 3) = 0$. A partir daí, definir a equação do 2º grau e resolvê-la por meio da fatoração.

Iniciar T₁₃ por meio de um trinômio já fatorado põe em evidência a técnica do produto nulo e sua resolução se dá pela tarefa de resolver equação do 1º grau, além de relacionar um polinômio fatorado com resolução de equações. A compreensão é que se um trinômio do 2º grau estiver escrito na forma fatorada, suas raízes estarão determinadas.

Tarefa T₁₄: Desenvolver a diferença $(a - b)^2 - (a + b)^2$

A partir da dificuldade de sistematização da resolução de sistema de equações do 2º grau do tipo S₂, propus para os alunos desenvolverem a tarefa intermediária transformadora (T I T) por meio da tarefa: *Desenvolver a expressão algébrica $(x + 2)^2 - (x - 2)^2$.*

Alguns alunos apresentaram erros de regras de sinais. Em seguida fizemos alguns exercícios análogos, tais como: $(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab$, $(x_1 + x_2)^2 - (x_1 - x_2)^2 = 4x_1x_2$. Perguntei à turma se eles haviam notado algo nesses resultados. Logo recebi a resposta da aluna Cláudia que disse que “sempre aparecia o 4 na frente das letras”. Retomei a atividade da aula anterior com $(x + 2)^2 - (x - 2)^2 = 4 \cdot x \cdot 2 = 8x$, para que eles percebessem o produto exibindo os termos x e 2 dos binômios e esses multiplicados por 4 . Após isso, reescrevi a igualdade e chegamos à seguinte relação $(x - 2)^2 = (x + 2)^2 - 4 \cdot x \cdot 2$.

Em seguida pedi para os alunos calcularem y nas igualdades: a) $(x - a)^2 = (x + a)^2 - y$, b) $(x' - x'')^2 = (x' + x'')^2 - y$, d) $(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - y$. Alguns alunos chegaram ao resultado correto $y = 4ax$ na

equação (a). Após a correção de (a) no quadro, mais alunos conseguiram fazer a equação (b) ($y = 4x'x'$) e, na equação (c) perguntei se eles poderiam fornecer-me a resposta sem fazer cálculos e eles responderam $y = 4\alpha\beta$; mostrando assim, que tinham observado a regularidade nos resultados. No final os solicitei que substituíssem y pelo resultado encontrado. Dessa forma, ficou estabelecido para a turma que $(\alpha + \beta)^2 - (\alpha - \beta)^2 = 4\alpha\beta$, ou que $(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta$. (MESQUITA, 2011, p. 80)

Parecia, dessa forma, que a tarefa TIT estava resolvida. No seguimento das aulas, propus outra tarefa: *resolver sistemas de equações do 1º grau*.

Notas sobre T₁₄

A tarefa (T I T) foi proposta nesse momento para que o modelo de resolução de equações do 2º grau por meio de produtos notáveis se realizasse em sala de aula. Mas, a T I T não estava rotineira ou não era habitual, pois foi estudada apenas no momento de resolução de equações do 2º grau. Na organização didático-matemática, o momento do surgimento de determinada tarefa é determinante para que não se perca o trabalho da técnica.

Tornar T I T rotineira assim como qualquer outra tarefa é uma necessidade imposta pelo MER₀. Assim como um sujeito que responde naturalmente à entrada de $(a + b)^2$ em que a saída é *o quadrado do primeiro mais duas vezes o primeiro pelo segundo, mais o quadrado do segundo*, T I T é a tarefa que precisa fazer parte do universo cognitivo e do equipamento praxeológico dos alunos de forma que a resposta seja imediata: *a diferença entre o quadrado da diferença e o quadrado da soma de dois números é igual a quatro vezes o produto deles*. Porém, ressalto que não é possível que isso seja apenas dito, mas que haja compreensão da relação entre soma, diferença e o produto. É fundamental que haja tal racionalidade para que o sistema de tarefas seja inteligível.

Tarefa T₁₅: Resolver sistemas de equações do 1º grau

A tarefa de resolver sistemas de equações do 1º grau e do 2º grau foi introduzida na sala de aula após o trabalho com a T I T, segundo o trecho a seguir:

Essa aula foi destinada à minha apresentação sobre uma forma de resolver equações do 2º grau sem ter que “adivinhar” suas raízes. Iniciei com o sistema S₂.

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ x \cdot y = 12 \end{cases}$$

Antes de solucionarmos tal sistema, apresentei o sistema do primeiro grau (sistema S_3) abaixo, no qual foram feitas perguntas aos alunos sobre quais seriam os valores de x e y que satisfaziam as duas igualdades. Em pouco tempo houve alunos que deram a resposta correta ($x = 5$ e $y = 3$).

$$\begin{cases} x + y = 8 \\ x - y = 2 \end{cases} \quad (\text{Sistema } S_3)$$

Disse a eles que isso voltava a ser adivinhação, tal como havia dito à aluna Marília.

O método usado por mim para resolver S_3 foi o da substituição. Mas, usamos também o método da adição que é ensinado na 6ª série do ensino fundamental. Em seguida, foi usado o método da substituição na resolução do sistema S_2 . Assim, surgiu a equação do 2º grau $x^2 - 7x + 12 = 0$ com apenas uma variável e a solução dessa equação eram os valores das variáveis x e y do sistema. Ainda assim, voltamos novamente à adivinhação das raízes da equação e os alunos calcularam mentalmente esses valores ($x = 3$ e $y = 4$). Dessa forma, argumentei sobre uma possível articulação de objetos matemáticos estudados até então com a finalidade de encontrarmos uma técnica de resolução de equações do 2º grau sem ter que “adivinhar” as raízes. (MESQUITA, 2011, p.81)

Notas sobre a tarefa T_{15}

Ao fazer a releitura desse episódio, observei que T_{15} também foi introduzida intempestivamente para atender a necessidade de *resolver um sistema de equações do segundo grau do tipo S_2* . Mas T_{15} precisa ser introduzida na ODM numa posição anterior à técnica (T I T), pois a transformação do sistema do 2º grau para o sistema do 1º grau pela TIT requer que o sistema do 1º grau seja tarefa rotineira.

Além disso, a tarefa de resolver o sistema S_2 por meio da substituição foi pouco explorada. Serviu apenas naquele momento para falar para a turma sobre o ciclo que se formava ao resolvê-lo, pois recaía na equação do 2º grau. Ou seja, essa tarefa passou apenas como um monumento visitado pelos alunos, parafraseando Chevallard (1999, 2009a).

Até aqui não tinha explicitamente definido o que é uma equação do 2º grau para os alunos, mas a resolução de S_2 que resulta em equação do 2º grau precisava tornar-se rotineira para que houvesse o surgimento do ciclo.

Tarefa T₁₆: Resolver equações do 2º grau por meio do sistema da soma e da diferença

Em seguida exibi novamente a tarefa intermediária transformadora (T I T) que relaciona os produtos notáveis com a resolução de S_2 da seguinte maneira:

Assim, exibi a igualdade $(p - q)^2 = (p + q)^2 - 4pq$ (igualdade 1) que já havíamos trabalhado em aulas anteriores. Em seguida voltamos à equação $x^2 - 7x + 12 = 0$ e reforçamos que a soma das raízes é igual a 7 (coeficiente do termo de primeiro grau com o sinal trocado) e o produto das raízes é o termo independente do trinômio, mantendo seu sinal.

A troca de sinal na soma das raízes e da manutenção do sinal no produto já havia sido trabalhada com a exibição do trinômio na sua forma fatorada. Escrevi que numa equação do 2º grau de raízes p e q , temos que $p + q = S$ e $p \cdot q = P$ e a equação poderia ser escrita na forma $x^2 - Sx + P = 0$. A partir da igualdade 1, reescrevi o sistema S_1 que havia exposto no texto do saber.

$$\begin{cases} x + y = S \\ (x - y)^2 = S^2 - 4P \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = S \\ x - y = \sqrt{S^2 - 4P} \end{cases} \quad (\text{Sistema } S_1)$$

Nota: Expliquei que se o coeficiente numérico do termo do 2º grau fosse diferente de 1, por exemplo, $2x^2 - 6x + 8 = 0$, então deveríamos dividir todos os termos por esse coeficiente para que a equação ficasse na forma $x^2 - Sx + P = 0$. Ou seja, $\frac{2x^2}{2} - \frac{6x}{2} + \frac{8}{2} = \frac{0}{2} \Rightarrow x^2 - 3x + 4 = 0$. Assim, teríamos $S = 3$ e $P = 4$. A partir disso, as equações do 2º grau foram resolvidas usando-se o sistema S_1 . (MESQUITA, 2011, p.82).

Assim, pareceu-me ter realizado o ensino da resolução de equações do 2º grau sob uma nova forma de fazer e pensar. A inculcação desse *habitus* parece não ter problema para o sujeito que ainda não experienciou outras formas de fazer, como por exemplo, o aluno D, que usou a fórmula apresentada, conforme ilustra a Figura 8.

Figura 8: Resolução do aluno D

3)

A) $x^2 - 9x + 20 = 0$
 $p - q = \sqrt{5^2 - 4 \cdot p}$
 $p + q = 5$
 $p - q = \sqrt{5^2 - 4 \cdot 20} = \sqrt{81 - 8} = \sqrt{73}$
 $p - q = 1$
 $p + q = 5$

 $2p = \frac{10}{2}$
 $p = 5 \Rightarrow 5 + q = 9$
 $q = 4$

B) $x^2 - 10x + 25 = 0$
 $p - q = \sqrt{5^2 - 4 \cdot p}$
 $p + q = 5$
 $p - q = \sqrt{10^2 - 4 \cdot 25} = \sqrt{100 - 100} = 0$
 $p + q = 10$
 $p - q = 0$
 $p + q = 10$

 $2p = \frac{10}{2}$
 $p = 5 \Rightarrow 5 + q = 10$
 $q = 5$

$x^2 - 5x - 24 = 0$
 $p - q = \sqrt{5^2 - 4 \cdot p}$
 $p + q = 5$
 $p - q = \sqrt{5^2 - 4 \cdot 24} = \sqrt{25 - 96} = \sqrt{-71}$
 $p + q = 5$
 $p - q = -11$
 $p + q = 5$

 $2p = \frac{16}{2}$
 $p = 8$
 $p + q = 5$
 $8 + q = 5$
 $q = -3$

Fonte: Mesquita (2011, p.84)

Em seguida, foi desenvolvida a fórmula $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ (fórmula usual) por meio do sistema S_1 .

Notas sobre T_{16}

A tarefa T_{16} , apesar de estratégica, pois articula as tarefas T_{14} e T_{15} que romperia com o ciclo já anunciado - formado pelo sistema de equações do 2º grau que ao ser enfrentado pelo método da substituição que retornaria à equação do 2º grau - foi posta na organização didática como um “remédio milagroso” que curaria uma *enfermidade* a qualquer tempo.

Tarefa T₁₇: Desenvolver a fórmula usual de resolução de equações do 2º grau

Após resolvermos várias equações do 2º grau por meio do sistema S_1 , inclusive usando calculadora para a resolução das equações $x^2 - 7x + 5 = 0$ e $2x^2 - 5x + 3 = 0$, falei para os alunos da fórmula usual que poderíamos desenvolver a partir do sistema S_1 . Dessa maneira, tomei como exemplo a equação $2x^2 - 6x + 8 = 0$, e desenvolvi a fórmula usual, segundo o roteiro (Quadro 12) apresentado em Mesquita (2011).

Quadro 2: Institucionalização da fórmula usual de equações do 2º grau

- Escrevi a equação do 2º grau sob a forma $ax^2 + bx + c = 0$;
- Por comparação escrevi junto com os alunos $a = 2$, $b = -6$ e $c = 8$;
- Coloquei o sistema S_1 no quadro, porém substituindo x e y pelas supostas raízes p e q da equação

$$\begin{cases} p - q = \sqrt{S^2 - 4P} \\ p + q = S \end{cases}$$

- Expliquei aos alunos que resolver a equação seria calcular as raízes p e q ;
- Perguntei aos alunos quais os valores de S e P . Após consultarem os seus cadernos, alguns alunos responderam 3 e 4. Então substitui estes valores no sistema, contudo escrevendo $S = 6/2$ e $P = 8/2$

$$\begin{cases} p - q = \sqrt{\left(\frac{6}{2}\right)^2 - 4 \cdot \frac{8}{2}} \\ p + q = \frac{6}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p - q = \sqrt{\frac{6^2}{2^2} - 4 \cdot \frac{8}{2}} \\ p + q = \frac{6}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p - q = \sqrt{\frac{6^2 - 4 \cdot 2 \cdot 8}{2^2}} \\ p + q = \frac{6}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} p - q = \frac{\sqrt{6^2 - 4 \cdot 2 \cdot 8}}{2} \\ p + q = \frac{6}{2} \end{cases}$$

Substituindo 6 por $-b$, 2 por a e 8 por c , obtive

$$\begin{cases} p - q = \frac{\sqrt{(-b)^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{a} \\ p + q = \frac{-b}{a} \end{cases}, \text{ donde veio que}$$

$p = \frac{-b + \sqrt{(-b)^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$ e $q = \frac{-b - \sqrt{(-b)^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$. Como x é a variável da equação, então escrevi de forma simplificada a fórmula usual:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{(-b)^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$

Assim, com a institucionalização da fórmula usual realizada por mim, parecia que havia realizado uma praxeologia segundo os momentos didáticos de Chevallard (1999).

Entretanto, a organização didática realizada em SDA_1 , que é a segunda resposta do questionamento Q_0 , sucumbe frente às praxeologias dominantes no meu EP quando é confrontada pelo questionamento de uma aluna quanto ao caráter empírico de adivinhação usado na técnica da tarefa T_{13} . Esse questionamento encaminha a problematização da técnica por mim feito e em seguida continuo com a organização por meio da tarefa T_{14} . No entanto, esta tarefa se mostrou estranha às minhas práticas de resolução de equação do segundo grau. Essa estranheza só ficou evidente quando eu e meu orientador de estudo realizamos as análises de ST_1 após sua realização em sala, considerada aqui como uma resposta provisória RST_1 .

5.2 – O SISTEMA DIDÁTICO SDA_2 : OS DESDOBRAMENTOS DE ST_1 EM SALA DE AULA

O sistema ST_1 me pareceu satisfatório num primeiro momento, pois havia elaborado um texto do saber diferente do habitual em que pensava estar realizando a conexão de saberes, além de uma prática de ensino que dá significado ao uso de fórmulas e algoritmos (GUERRA; SILVA, 2006) como produto do trabalho da técnica. Só ficou claro para mim que a integração entre os produtos notáveis e a fórmula de resolução de equações do 2º grau não aconteceu a contento em minhas análises, clarificadas pelo orientador da tese $\mathcal{P}$ que, no sistema didático $S_2(\mathcal{P}, \mathcal{P}'', RST_1)$, apontou para tal problema em destaque no trecho a seguir.

A relação entre tarefa, técnica e tecnologia ficou evidenciada para mim desde o planejamento do meu texto de saber, mas as aulas me encaminham a refletir sobre as tarefas e perceber um aspecto sobre a razão de ser delas no currículo. Uma nova praxeologia construída por articulações e integrações praxeológicas só é realmente exequível e aceita, se todas as praxeologias articuladas e integradas forem do domínio do sujeito, inclusive do professor. No caso deste, se uma das praxeologias articuladas não se faz presente em seu equipamento praxeológico, este poderá abreviar essa praxeologia por mecanização ou algoritmização e correlativamente não mudará sua relação com o objeto em uma nova praxeologia. De outro modo, o não domínio de todas as praxeologias articuladas e integradas interfere na mudança do equipamento praxeológico e

correlativamente do seu universo cognitivo de relações com o objeto da nova praxeologia.

Quando tomei a organização matemática posta por Silva e Guerra (2009) para referência do meu texto de saber, considerei principalmente a concepção teórica da transposição didática interna como o momento do professor de fazer valer a transacionalidade do objeto de ensino por meio de articulações e integrações praxeológicas e isso parecia ali ser contemplado.

Assim, busquei ir mais longe me pondo de modo a seguir uma intencionalidade que iria catalisar as articulações, a tecnologia. Claro que tais articulações estão sujeitas às restrições, em nosso caso, de ordem curricular. Só poderia articular praxeologias constantes do currículo e isso parecia ser contemplado na organização de referência, já que a princípio reconheci as praxeologias ali postas, ou seja, faziam parte de meu equipamento praxeológico, mas uma se mostrou não muito conforme com o que seria desejado.

Havia uma praxeologia que envolvia a relação entre quadrado da soma e quadrado da diferença que se mostrou na praxeologia didática como uma dificuldade. Essa praxeologia não fazia parte de meu equipamento praxeológico como professor do ensino fundamental e isso me levou a tratá-la em sala de aula - embora fosse um passo estratégico que resolve o problema - como algo mecânico que em um momento lançaria mão e depois esqueceria. O trabalho com a diferença entre quadrado da soma e da diferença de dois termos, $(\alpha + \beta)^2 - (\alpha - \beta)^2 = 4\alpha\beta \Rightarrow (\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta$, foi evocado por mim apenas quando estávamos trabalhando com as equações do 2º grau, de tal forma que pareceu uma tarefa isolada e não interligada aos objetos produtos notáveis e fórmula de resolução da equação do segundo grau. Ou seja, isso não fazia parte do meu universo cognitivo, nem das praxeologias que dispunha para o ensino fundamental, de tal forma que, mesmo sendo direcionado pelo texto do saber anterior à sala de aula, minha ação em sala foi redirecionada, de modo a recorrer a antigas práticas docentes como a mecanização.

Assim, como pode ser notado em meu relato, no processo de resolução da equação do segundo grau, após mecanizar a praxeologia em questão, eu a abandono e assumo a resolução da equação do segundo grau como a resolução do sistema de equações do primeiro grau que passa a ser obtido diretamente por uma fórmula, processo esse que embaça realmente o pensar sobre o objeto equação do segundo grau como o objeto sistema de duas equações lineares de duas variáveis, pois o que permite pensar um como outro é a praxeologia não dominada por mim para esse nível de ensino.

Tudo se passa como o sujeito que estuda a demonstração de um teorema e seguindo as articulações de proposições válidas tem a sensação que essas surgem como passos de mágicas ou adivinhações convenientes. Embora se perceba as articulações, nada fica *a posteriori*. Não houve uma nova relação para mim enquanto professor de ensino fundamental com o objeto de conexão entre o quadrado da soma e o quadrado da diferença e o produto de dois números. Segundo Chevallard (2009) a formação de uma pessoa como sujeito de uma instituição, por exemplo a formação *profissional* de uma pessoa, exige uma dinâmica cognitiva e praxeológica resultantes da exploração adequada das novas

conformidades impressas especificamente para a pessoa, que implica em um trabalho de identificação e resolução de conflitos relacionados com o choque dessas conformidades novas com antigas, quando experimentados pela primeira vez pelo indivíduo são incompatíveis com a sua identidade.

Em meu caso, poderia dizer que o meu texto de saber foi construído movimentando praxeologias dominadas por mim enquanto professor de diferentes níveis de ensino. E isso não me despertou a possibilidade de uma dada praxeologia envolvida não ser por mim dominada para o nível de ensino fundamental. Isso me levou a abreviá-la quando em sala de aula. Naquele momento não tive a consciência disso e quanto isso estava prejudicando o desenvolvimento por mim desejado da nova praxeologia. Não surge para mim uma nova relação de conexão objetiva entre as equações do segundo grau e a resolução de sistemas de equações lineares (MESQUITA, 2011, p. 90-92).

Nas ações didáticas em sala de aula, a força exercida pela atuação de meu equipamento praxeológico para o ensino desse objeto inibiu a mudança no jeito de fazer e isso fez emergir um problema na articulação e integração que tanto almejava. Por outro lado, houve relativo sucesso no encaminhamento de valorizar fórmulas e algoritmos da matemática pelo trabalho da técnica e isso fica expresso nas seguintes afirmações:

(...) Minha ação em sala de aula fez revelar com força uma nova relação com a fórmula da equação do segundo grau para o ensino fundamental, não como um novo processo de articulações de praxeologias geradas à luz de uma tecnologia que poderia otimizar o tempo didático e fazer acontecer as transacionalidades, como pensei inicialmente, mas como uma síntese de um processo complexo e árduo e que por isso teria que ser valorizada. Isso é enfático em meus relatos. Deixo claro explicitamente em meus relatos essa intencionalidade subjacente, desde a elaboração do texto do saber até a culminância em sala de aula como revela o trecho de meu relato. *Tomei essas resoluções como exemplo para destacar a importância de fórmulas em Matemática como síntese de um fazer mais simples e seguro, um aperfeiçoamento da técnica. Ressaltei que não podemos abrir mão de técnicas que deem uma solução rápida e segura às equações, além de, nesse discurso, exibir de maneira clara minha intenção de buscar outra forma de calcular as raízes de uma equação do segundo grau e mostrar a importância das generalizações que a álgebra pode proporcionar. A partir daqui as fórmulas e algoritmos podem ser fundamentados por necessidades sociais e consolidados como facilitadores de atividades com a matemática.* Esse pensar não é de quem deseja as transacionalidades que podem levar a fórmula como consequência, mas de quem deseja revelar a funcionalidade, ou aplicações, da fórmula (MESQUITA, 2011, p. 92).

Ainda sobre os ganhos esperados com o estudo e ação de uma nova praxeologia didática, ressalto que:

Outra nova relação estabelecida é a relação entre fatoração de polinômios do segundo grau e a resolução da equação do segundo grau. Não havia uma praxeologia objetivamente falando em meu equipamento praxeológico para qualquer nível de ensino sobre esse fazer para todos os tipos de equações do segundo grau, incompletas e completas. Os livros textos não tornam visíveis as tecnologias e tratam os tipos de equações de forma isoladas (completas e incompletas). O pensar de uma tecnologia que dê conta de todos os casos, a leitura conveniente do teorema fundamental da álgebra, foi estratégico e me fez olhar as equações, inclusive sua fórmula, de modo único. Isso pode ser notado em meu relato quando escrevo *“Isso mostra que a fórmula tem sua utilidade não somente para calcular as raízes da equação, mas para transformar o trinômio do 2º grau num produto de dois binômios do 1º grau, tarefa intencional de engendrar a ideia de que fatorar é resolver equação polinomial”*. Enriqueceu meu equipamento praxeológico e correlativamente meu universo cognitivo, pois questões até então tratadas de modo não muito claro, ou errôneo, nos manuais escolares, foram para mim esclarecidas. (...) Assim uma nova relação com as equações do segundo grau de fato foi estabelecida e com forte nível de co-determinação didática, como busquei revelar acima. Para isso, a praxeologia sobre cálculos de raízes de polinômios, por mim estudada no curso superior fundamentada na aplicação do teorema fundamental da álgebra, quando estudada como saber indiscutível, ou intuitivamente verificável, pôde se tornar uma praxeologia pontual para o ensino fundamental com desdobramento surpreendente para o desenvolvimento da nova praxeologia didática em questão. Claro que a nova praxeologia didática de todo não foi prejudicada, pois articula várias praxeologias do Ensino Fundamental presentes em meu equipamento praxeológico que sem dúvida contribuíram para um fazer de articulação, mesmo mecânico como por vezes pareceu em meus relatos, e a consequente mudança do meu universo cognitivo como revelado anteriormente. (MESQUITA, 2011, P. 93).

As análises exibidas revelaram que na organização didática realizada a partir do MER₀ houve problemas de integração e não considerações de tarefas que corporificassem o MER₀ a contento, pois as articulações que nele encontrei e que mudaram minha relação com os objetos matemáticos articulados não foram suficientes para exercer mudanças significativas nas praxeologias dominantes no ensino presentes há muito tempo em meu equipamento praxeológico.

Assim, encaminhamos a problemática da tese como o problema primordial do professor de desenvolver seu projeto de atividade por meio da construção do equipamento praxeológico que julga necessário acessar (CHEVALLARD, 2009b). De outro modo, a construção da infraestrutura necessária para a realização do de seu

projeto de atividade que se corporifica, em nosso caso, como a problemática pessoal praxeológica do professor de organizar um sistema de tarefas a partir das praxeologias com matemática que vivem na escola que torne a OM exequível, robusta e inteligível para a escola. Uma etapa importante nesse processo é eliminar na OM desejada a estranheza causada pela tarefa intermediária transformadora em ST_1 .

De outro modo, na organização matemática construída ($R_1^\diamond$) há alguma integração entre as tarefas T_{15} , T_{16} e T_{17} , mas estas independem de T_{14} , ou seja, esta tarefa se mostra desnecessária. Além disso, $R_1^\diamond$ é construída em dois blocos com intenções de evidenciar duas técnicas, a segunda com maior alcance, no entanto, não está clara a relação entre elas, talvez pelo isolamento de T_{14} entre os dois blocos.

Em resumo, não há unidade em $R_1^\diamond$ como preconiza o modelo praxeológico da TAD e presente $MEPR_1$. Assim, uma questão Q_1 , então, se põe: Como eliminar a estranheza causada por T_{14} e dar unidade a organização, respeitando de algum modo o $MEPR_1$?

Dessa maneira, instaurou-se um sistema $S_1(\mathcal{P}, Q_1)$ que associado ao sistema $S(\mathcal{P}, ST_1)$ para a elaboração de uma resposta $R_2^\diamond$ substanciada pela OM expressa no sistema de tarefas a seguir.

5.2.1 O sistema de tarefas ST_2 e o segundo estado da diacronia

Ao retomar as experiências e os resultados obtidos nos sistemas didáticos auxiliares (SDA_1 e SDA_2), tive novas compreensões sobre o MER_0 que substanciaram a mudança do $MEPR_1$ para o $MEPR_2$ e que denota a mudança de estado E_1 para um estado E_2 evidenciada pelo sistema de tarefas ST_2 (como a resposta $R_2^\diamond$) a seguir, mas sem perder de vista que em cada sistema didático, as condições podem mudar consideravelmente e um novo sistema de tarefa pode ser construído.

Sistema de tarefas ST₂

Intenção didática: articular a T I T com a resolução de equações do 2º grau

T₂₁: Desenvolver o produto do tipo $(a + b)x$, onde a e b são constantes reais;

Técnica: Regra distributiva

Assim, $(a + b)x = ax + bx$, que se estende para exemplos do tipo:

$$(3 + 4)x = 3x + 4x$$

T₂₂: Fatorar a expressão $ax + bx$. (Tarefa inversa à tarefa T₂₁)

Técnica: Fator comum em evidência.

Assim, $ax + bx = (a + b)x$, que se estende para, por exemplo, $3x + 4x = (3 + 4)x$

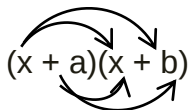
T₂₃: Desenvolver os produtos de polinômios do tipo $(x + a)(x + b)$ onde a e b são constantes, exibindo a soma e o produto.

Técnica: Regra distributiva e fator comum em evidência, realizadas em T₂₁ e T₂₂.

Exemplo. Desenvolver os produtos

a) $(x + a)(x + b)$

solução: $(x + a)(x + b) = x^2 + ax + bx + ab = x^2 + (a + b)x + a.b.$



b) $(x + 3).(x + 4)$

Solução: $(x + 3).(x + 4) = x^2 + 3x + 4x + 3.4 = x^2 + (3 + 4)x + 3.4 = x^2 + 7x + 12$

T₂₄: Desenvolver os produtos notáveis: o quadrado da soma e da diferença de dois termos: $(a + b)^2$ e $(a - b)^2$, e o produto da soma pela diferença $(a + b)(a - b)$.

Técnica: Regra distributiva.

T₂₅: Fatorar trinômios do 2º grau com uma variável do tipo $x^2 + Sx + P$ como produto de binômios $(x + \alpha)(x + \beta)$

Técnica: Soma e produto, por tentativas fatorando o produto P.

Ex. Fatorar o trinômio $x^2 + 11x + 30$

$$\begin{array}{r|l} 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

Por combinações dos fatores primos, chega-se aos números 5 e 6. Assim, tem-se $x^2 + 11x + 30 = (x + 5).(x + 6)$

Obs. Os trinômios dessa tarefa são todos fatoráveis por essa técnica e $\alpha\beta$ são inteiros.

T₂₆: (Tarefa intermediária transformadora): Desenvolver a diferença $(a - b)^2 - (a + b)^2$.

A técnica é o desenvolvimento dos quadrados por regra distributiva e a redução de termos semelhantes.

Assim, $(a - b)^2 - (a + b)^2 = a^2 - ab - ab + b^2 - (a^2 + ab + ab + b^2) = -4ab$, ou seja $(a - b)^2 - (a + b)^2 = -4ab$.

Usando exemplo numérico, $(5 - 3)^2 - (5 + 3)^2 = -4.5.3 = -60$.

T₂₇: Dada a soma e o produto de dois números, calcular a diferença deles.

Técnica: Tarefa intermediária transformadora.

Exemplo: Seja a soma de dois números igual a 11 e seu produto igual a 30, qual a diferença deles?

Solução: Sejam a e b esses números. Então a soma deles é $a + b = 11$ e o seu produto é dado por $a.b = 30$.

Considerando que $(a - b)^2 - (a + b)^2 = -4ab$, então, $(a - b)^2 - 11^2 = -4.30$, que resulta em $(a - b)^2 = 1 \Rightarrow a - b = 1$.

T₂₈: Solucionar sistemas de equações do 1º grau com duas variáveis.

Técnica: Método da adição.

Exemplo. Solucionar o sistema $\begin{cases} a + b = 5 \\ a - b = 1 \end{cases}$.

Usando o método da adição, tem-se que

$$a + b = 5$$

$$\underline{a - b = 1}$$

$$2a = 6$$

$a = 3$, que substituído em uma das equações, leva a $b = 2$

T₂₉: Calcular dois números cuja soma e o produto deles sejam dados.

Exemplo: Seja a soma de dois números igual a 11 e seu produto igual a 30, quais esses números?

Solução: Pelo exemplo de T₂₇, tem-se que $a - b = 1$. Assim, pelo sistema resolvido em T₂₈, vem que $a = 3$ e $b = 2$.

T₂₍₁₀₎: Resolver equações do tipo $(x - a)(x - b) = 0$.

Técnica: Regra do produto nulo de dois números reais.

Exemplo: Resolver a equação $(x - 3)(x - 2) = 0$.

Solução: Pela regra do produto nulo, tem-se que $x - 3 = 0$ ou $x - 2 = 0$. Assim, $x = 3$ ou $x = 2$.

T₂₍₁₁₎: Resolver equações do tipo $x^2 + Sx + P = 0$ por fatoração.

Técnica: Soma e produto do trinômio como realizado em T₂₅ e o produto nulo usado em T₂₍₁₀₎.

Exemplo: Calcular o valor de x sabendo-se que $x^2 - 5x + 6 = 0$.

Solução: Fatorando-se o trinômio por T₂₆ tem-se que $(x - 2)(x - 3) = 0$. Assim, por T₂₉ vem que $x = 2$ ou $x = 3$.

Obs. Aqui os trinômios não são mais simples de serem fatorados ou a fatoração em binômios do 1º grau com coeficientes reais pode nem ser possível. Assim, é encaminhado o trabalho da técnica na tarefa a seguir.

T₂₍₁₂₎: Solucionar equações do 2º grau do tipo $x^2 + sx + p = 0$, onde $-s$ e p são, respectivamente, a soma e o produto das raízes α e β da equação.

Técnica: As tarefas T₂₆ e T₂₇ são articuladas para que o sistema
$$\begin{cases} \alpha + \beta = -s \\ \alpha - \beta = \sqrt{s^2 - 4p} \end{cases}$$
 resolva a equação.

Exemplo: Resolver as equações: a) $x^2 - 5x + 6 = 0$; b) $x^2 + 4x + 5 = 0$

Solução:

a) $-s = 5$ e $p = 6$. Assim, $\alpha + \beta = 5$, e $(\alpha - \beta)^2 = 5^2 - 4.6 = 1$, que resulta $\alpha - \beta = 1$.

Daí, resolvendo o sistema $\begin{cases} \alpha + \beta = 5 \\ \alpha - \beta = 1 \end{cases}$, tem-se $\alpha = 3$ e $\beta = 2$.

b) $-s = -4$ e $p = 5$. Assim, $\alpha + \beta = -4$, e $(\alpha - \beta)^2 = (-4)^2 - 4.5 = -4$, que resulta $\alpha - \beta = \sqrt{-4}$ que não é real. Assim, a equação não possui raízes reais.

T₂₍₁₃₎: Determinar as raízes de uma equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$, por meio de seus coeficientes.

Técnica: Tarefa T_{17} , tomando os passos do exemplo mostrado no quadro 12 em SDA_1 que foi analisado em SDA_2 .

Após uma nova compreensão do MEPR, que encaminhou o $MEPR_2$ e seu sistema de tarefas associado ST_2 , levamos a tarefa T_{27} de ST_2 para ser debatida numa turma de Licenciatura em Matemática em que poderiam ser discutidas condições para o desenvolvimento do MEPR a partir da seguinte tarefa, que chamamos de T_0 : Dada a soma e o produto de dois números, calcular sua diferença, sem o uso de equações do 2º grau. Ou seja, Esse sistema didático será discutido na seção a seguir.

5.3 O SISTEMAS DIDÁTICOS AUXILIARES COM ALUNOS-PROFESSORES DA LICENCIATURA

Esses sistemas didáticos foram instaurados em duas turmas de Licenciatura em Matemática do PARFOR²¹ - UFPA em que fui professor da disciplina Didática da Matemática que tem como principal objetivo estudar teorias da didática da matemática francesa.

5.3.1 O sistema didático auxiliar SDA_3

A partir do SDA_2 em que alunos do Ensino Fundamental fizeram parte no processo de construção da ODM a partir do MER_0 , pensamos ser factível buscar condições favoráveis para a continuação do PEP em um curso de formação de professores com alunos da graduação em Licenciatura em Matemática do PARFOR Matemática da UFPA.

Desenvolvemos discussões em SDA_3 em que eu pensava em buscar condições para dar resposta à Q_1 a partir da proposição da tarefa que indicamos como T_0 (*calcular a diferença entre dois números, dada a soma e o produto deles, sem o uso de equação do 2º grau*). Ou seja, condições que surgem durante o estudo

²¹Plano Nacional de Formação de Professores

são traduzidas em questões e respostas para o sistema didático solitário, e a continuidade do MEPR em que o sistema de tarefas desejado vai sendo robustecido.

Por outro lado, haveria também possibilidades de perturbação no universo cognitivo dos alunos-professores em suas relações às práticas com matemática que há na escola, que apesar disso, não estar no foco da pesquisa, colocou-se como um dos objetivos da disciplina.

Em SDA_2 o MER_0 foi posto em prática com uma organização que parecia a tradução direta do próprio modelo em uma sequência de tarefas e desenvolvimento de técnicas mecanizadas. No intuito de desenvolver o sistema de tarefas em construção, optamos por desenvolver o estudo em $SDA_3 - S_3(\mathcal{P}, \mathcal{P}', T_0)$ – por meio da discussão de tarefas e técnicas para enfrentamento da tarefa proposta T_0 que decorre da questão Q_1 , $\mathcal{P}'$ representa o conjunto de alunos-professores do município de Mãe do Rio (no Estado do Pará) que efetivamente participaram das discussões e $\mathcal{P}$ o professor pesquisador.

Não elaborei uma organização para o ensino a partir do MER_0 nesse sistema didático, como realizado em SDA_2 , mas a proposição da tarefa T_0 para dar início às discussões que almejávamos, pois acreditávamos que os alunos da graduação tinham em seus equipamentos praxeológicos e universos cognitivos alguns elementos com potencial para gerar discussões no enfrentamento da tarefa T_0 . Foi feita uma introdução da TAD para que eles tivessem noções sobre os elementos de uma praxeologia: tarefas, técnicas e tecnologia e teoria.

A turma era composta por 26 alunos, e alguns alunos são professores com formação em pedagogia. O desenho curricular do curso apresenta essa disciplina Didática da Matemática no 2º período do curso, conforme mostra o anexo 1.

Os extratos da realização desse curso para o texto foram retirados de gravações de áudio e vídeo com a permissão de todos os alunos e foram utilizadas letras do alfabeto para nominar alguns deles. As observações foram divididas em etapas que não necessariamente estão escritas aula por aula.

5.3.1.1 Primeira etapa de estudos em SDA₃

Realizamos leituras e discussões sobre teorias da didática francesa, em especial, a transposição didática e a teoria antropológica do didático, em que apresentei os elementos da praxeologia: tarefa, técnica, tecnologia e teoria.

A partir dessas discussões, propus a tarefa T'₀ (com valores numéricos para a soma e o produto) : *Encontrar a diferença $a - b$ entre dois números, sabendo que sua soma é $a + b = -\frac{7}{15}$ seu produto é $a \cdot b = -\frac{2}{15}$. Restrição: Não pode ser usada a equação do 2º grau.*

A escolha dos valores da soma $a + b = -\frac{7}{15}$ e do produto $a \cdot b = -\frac{2}{15}$ foi feita para que os alunos não chegassem a uma resposta rapidamente por tentativas e erros, o que de fato aconteceu.

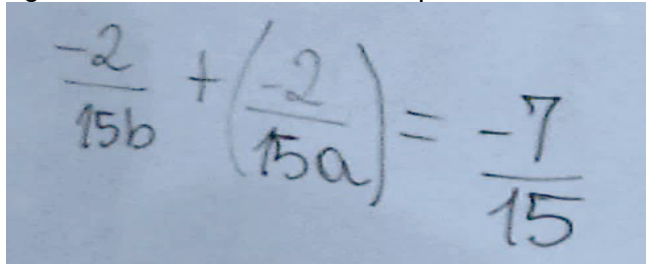
Após propor T'₀, e ter dado um tempo para que os alunos pensassem sobre sua resolução, expliquei que os dados da tarefa remetiam, por meio dos termos soma, produto e diferença, a objetos do saber estudados no 8º ano do EF em expressões algébricas. Isso foi exercício de memória com intencionalidade de ajuda ao estudo, o que Araya e Matrheron (2007) amparados em Centeno (1995) denominam de memória didática.

Para auxiliá-los, distribui livros de matemática do 8º ano (GUELLI, 2005a; DANTE, 2004; ANDRINI, 1989b; BONJORNIO et al, 2009, IEZZI et al, 2009; MORI e ONAGA, 2009) para grupos de alunos.

Em seguida, as alunas J e M iniciaram a resolução de T₀ no quadro usando o método da substituição. A aluna J disse que para encontrar $a - b$, deveriam calcular os valores de a e b . Assim, ao isolar uma variável em $a \cdot b = -\frac{2}{15}$, chegaram à equação do 2º grau, mas lembraram da restrição imposta na tarefa. A aluna J fez outra tentativa usando o produto da soma pela diferença de dois termos argumentando com a seguinte fala: *Já que eu tenho a soma, eu posso usar o produto da soma pela diferença para calcular a diferença.* Assim ela escreveu a expressão $(a - b) \cdot (a + b) = a^2 - b^2$, mas concluíram que não chegariam ao resultado da diferença por não terem dados sobre a diferença dos quadrados dos números. Houve nessa ação da aluna J uma tentativa de usar um produto notável para enfrentar a tarefa proposta.

Noutra tentativa, as alunas M e J isolaram primeiramente a variável a na igualdade $a \cdot b = -\frac{2}{15}$ e fizeram a mesma coisa com a variável b . Depois, substituíram na soma $a + b = -\frac{7}{15}$, obtendo a igualdade ilustrada na Figura 9.

Figura 9: Resultado encontrado pelas alunas J e M



$$\frac{-2}{15b} + \left(\frac{-2}{15a}\right) = \frac{-7}{15}$$

Fonte: Do autor

A aluna J pensava ter chegado à diferença de acordo com a restrição imposta em T_0 , pois ao resolver a igualdade acima surge o produto $a \cdot b$ no segundo membro e a expressão $-a - b$, no primeiro membro da igualdade, como segue $-2a - 2b = -7ab \Rightarrow -2(a - b) = -7ab$. Intervi nesse momento ao pedir para as alunas junto com a turma reverem as regras de sinais. Assim, chegaram à conclusão que voltavam à soma $a + b = -\frac{7}{15}$.

A manipulação simbólica dos dados da tarefa se revelou pela reação das alunas, objetivada na tentativa delas de resolver a tarefa apenas usando os dados contidos nela. Isso é de fato uma prática rotineira na escola e me fez refletir sobre as práticas de ensino que possibilitam tal manipulação simbólica em que o trabalho da técnica é inexistente.

Noutro momento, J faz a diferença $a - b$ tornar-se zero, na tentativa de encontrar os valores de a e b , mas a aluna L apressou-se em discordar ao perguntar para J: *mas você já resolveu o problema?* Perguntei para L sobre o motivo do questionamento. E ela respondeu: *mas não é o que a gente quer? Não é calcular a diferença?*

A aluna K encontrou a diferença fazendo uma relação desta com a soma e o produto, conforme ilustra a Figura 10 a seguir.

Figura 10: Resolução da aluna K

$$\begin{aligned}
 a-b &= (a+b) + (a \cdot b) \\
 a-b &= -\frac{7}{15} + \left(-\frac{2}{15}\right) \\
 a-b &= \frac{-7-2}{15} \\
 a-b &= \frac{-9}{15} = \frac{3}{5}
 \end{aligned}$$

Fonte: Do autor

Alguns alunos questionaram sobre o surgimento inesperado de uma relação de adição entre a soma e o produto que levasse a diferença de dois números e não houve acordo sobre tal relação por não haver justificativa.

Perguntei para K como surgiu tal igualdade? K respondeu que não sabia, mas que aparecia ali a diferença, a soma e o produto. Em seguida, perguntei a todos se a igualdade apresentada por K (Figura 10) seria possível para algum par de números reais? A aluna J respondeu que se a e b fossem positivos, não daria certo. Ela deu um exemplo para constatar sua fala. Dei outro exemplo em que a igualdade era satisfeita, $a = -2$ e $b = -4$. Mas para o caso de T'_0 , perguntei se o resultado seria correto? O que poderia tornar tal resposta válida ou não? Nesse momento, pelas respostas dos alunos, constatei que eles não tinham em seus EP uma relação para o enfrentamento de T'_0 . Mas a tentativa dos alunos em buscar relações entre soma, produto e a diferença de dois números, levou-me a refletir sobre tarefas intermediárias que precisam ser elaboradas pelo professor para que o momento exploratório dos alunos se dê de maneira inteligível no enfrentamento de tarefas problemáticas.

Em outro momento o aluno W solucionou o problema no quadro usando equação do 2º grau, no qual chegou aos valores $b' = -\frac{2}{3}$ e $b'' = \frac{1}{5}$. Alertei que a restrição impedia o uso de equações do 2º grau. Mas W disse que precisava saber os valores dos números para obter a diferença deles. Depois tentariam outra forma já sabendo o resultado.

A aluna S perguntou sobre os valores de a . Neste momento surgiu a dúvida sobre quais seriam os valores de a e b a ser considerado, pois se $a = -\frac{2}{3}$ então $b =$

$\frac{1}{5}$, ou $b = -\frac{2}{3}$ então $a = \frac{1}{5}$. Após a resolução, W apresentou $a - b = \frac{13}{15}$. Mas, J explicou que o resultado poderia ser negativo $a - b = -\frac{13}{15}$, se considerasse $a = -\frac{2}{3}$ e $b = \frac{1}{5}$.

Apesar da resolução de W não ser aceita pelo grupo pela transgressão cometida à restrição imposta para T'₀, levei em consideração a discussão que a aluna J trouxe sobre os valores de a . Afinal, não pensei a diferença com o resultado negativo para a tarefa T'₀ proposta. Assim, surgiu uma modificação na tarefa que não deixassem margens para interpretações dúbias: *Calcular o módulo da diferença de dois números, dadas sua soma e seu produto.*

A insistência na busca dos valores de a e b fez com que eu expusesse para a turma que determinar a diferença $a - b$ não trazia em si a necessidade de encontrar os valores de a e b . E, a partir da primeira tentativa feita por J e M quando tentaram usar o produto da soma pela diferença de dois termos, propus, para exemplificar o que queria de T'₀, a tarefa auxiliar T_A: Se $a^2 - b^2 = 10$ e $a + b = 5$, calcular $a - b$, sem calcular os valores de a e b . Assim, bastava fazer $a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)$. Aí teríamos $5 \cdot (a - b) = 10$ e, finalmente, $(a - b) = 2$. Em seguida, poderíamos calcular a e b tendo a soma e a diferença deles, obtendo $a = 3,5$ e $b = 1,5$. Ou seja, um sistema do 2º grau $\begin{cases} a^2 - b^2 = 10 \\ a + b = 5 \end{cases}$ (S₄) foi resolvido por meio de sua transformação no sistema do 1º grau $\begin{cases} a + b = 5 \\ a - b = 2 \end{cases}$ (S₅) por meio da fatoração

$$a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b).$$

Embora o sistema S₄ possa ser resolvido por substituição em que resulta na eliminação dos termos do 2º grau, minha intenção era apresentar tarefas que transformasse o sistema de equações do 2º grau (S₄), no sistema do 1º grau (S₅) com o uso de fatoração e produtos notáveis. Em seguida, retomamos T'₀.

5.3.1.2 Segunda etapa de estudos em SDA₃

Com a retomada da tarefa T'₀, a aluna J disse que havia encontrado a solução por tentativas, que era só pensar em dois números cujo produto fosse -2 no numerador e 15 no denominador. Assim, conforme sua exposição, ela exibiu frações com numeradores 1 e -2 e denominadores 3 e 5 e realizou combinações até chegar

ao resultado. Ou seja $a = \frac{1}{5}$ e $b = -\frac{2}{3}$. J afirmou que também estava pensando no resultado que W alcançou usando a equação do 2º grau. Em seguida fez a diferença e chegou a $a - b = \frac{13}{15}$.

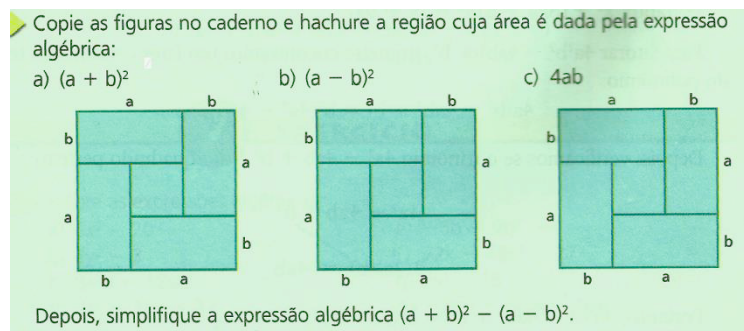
Tal tentativa de resolução me fez refletir sobre como o ensino de matemática pode estar resumido a chegar ao resultado de uma tarefa sem pensar sobre o trabalho da técnica realizado para isso. Embora tivesse falado várias vezes que a tarefa de calcular a diferença de dois números não, necessariamente, trazia em si a tarefa de calcular antes os números, J parecia disposta a tal empreitada, numa visão estritamente numérica.

Retomando o resultado alcançado por J em que $a - b = \frac{13}{15}$, o aluno W afirmou que *a + b deve ser maior que a - b e que, nesse caso, o resultado da diferença foi maior que a soma* ($a + b = -\frac{7}{15}$). M respondeu que se trocassem os valores de a e b , ou seja, $a = -\frac{2}{3}$ e $b = \frac{1}{5}$ e a diferença seria $a - b = -\frac{13}{15}$ que seria menor que $a + b = -\frac{7}{15}$. Após as falas dos alunos, perguntei para a turma se todos concordavam que a soma de dois números é sempre maior que a diferença deles. W respondeu que *se considerarmos números inteiros..., é só fazer tentativas*. A partir da fala de W, pedi para a turma considerar $a = 2$ e $b = -5$. Nesse exemplo, $a + b = -3$ e $a - b = 7$.

Obviamente que, para números inteiros estritamente positivos, $a + b$ será sempre maior que $a - b$. No caso da diferença encontrada, de fato tanto $a - b = \frac{13}{15}$ quanto $a - b = -\frac{13}{15}$ satisfaz a tarefa T'_0 , pois em ambos os casos serão encontrados os números a e b .

Seguindo, distribuí para a turma um impresso da organização de Silva e Guerra (2009), o MER_0 para que os alunos reagissem no enfrentamento de T'_0 . Apesar disso, alguns continuaram tentando a solução de T_0 sem dar muita importância ao modelo. E, além disso, mesmo consultando os livros didáticos, não encontravam nenhuma relação que daria condições para enfrentar T'_0 .

Houve um momento em que a aluna S apresentou tarefas com produtos notáveis contidas no livro de Guelli (2005) e, entre as tarefas, encontrava-se uma (que denominei aqui de T_{AR} (Figura 11) – tarefa com áreas de retângulos) que poderia ser aproveitada por ela.

Figura 2: Tarefa T_{AR} com áreas de retângulos

Fonte: Guelli (2005, p.131)

Pedi para S resolver a T_{AR}, pois mesmo com no contexto geométrico que restringe o pensar algebricamente, poderia desencadear a resolução da tarefa T'₀. Mas S não conseguiu resolvê-la. Foi nesse momento que escrevi os produtos notáveis um em cada linha e perguntei para a turma que relação esses produtos teriam entre si?

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Após algum tempo, perguntei a todos como eles poderiam relacionar $(a + b)^2$ com $(a - b)^2$ de modo a^2 e b^2 fossem eliminados da relação? Pois, a proposta nada informava sobre o valor dos quadrados dos números e sim a soma e o produto deles para calcular sua diferença. Recorri à resolução do sistema de equações $\begin{cases} x + y = 10 \\ x + y = 6 \end{cases}$ o qual calculei x por meio da supressão da variável y fazendo a operação de subtração da 1ª linha pela segunda, ou seja, multiplicando por (-1) a segunda linha e usando a adição termo a termo. Disse que assim poderiam fazer com os produtos notáveis ali dispostos.

Assim, a aluna J e o aluno R escreveram e explicaram no quadro a solução encontrada por eles, conforme ilustra a Figura 12.

Figura 3: Resolução de J e R

$$\begin{aligned}
 &\begin{cases} (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \\ (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \end{cases} \\
 &\begin{cases} -(a-b)^2 = -a^2 + 2ab - b^2 \\ (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \end{cases} \\
 &-(a-b)^2 + (a+b)^2 = 4ab \\
 &(a+b)^2 - 4ab = (a-b)^2 \\
 &\boxed{(a-b)^2 = (a+b)^2 - 4ab}
 \end{aligned}$$

Fonte: Do autor

Em seguida, J apresentou a resolução de T'_0 (Figura 13) seguindo a relação desenvolvida na figura 8 (tarefa intermediária transformadora) e também calculou os valores de a e b por meio do sistema do 1º grau resultante:

$$\begin{cases} a + b = -\frac{7}{15} \\ a - b = \frac{13}{15} \end{cases} \text{ que resulta em } a = \frac{1}{5} \text{ e } b = -\frac{2}{3}$$

Figura 4: Resolução final de J

$$\begin{aligned}
 (a-b)^2 &= (a+b)^2 - 4ab \\
 (a-b)^2 &= \left(\frac{-7}{15}\right)^2 - 4 \cdot \left(\frac{-2}{15}\right) \\
 (a-b)^2 &= \frac{49}{225} + \frac{8}{15} \\
 (a-b)^2 &= \frac{49 + 120}{225} \\
 (a-b)^2 &= \frac{169}{225}
 \end{aligned}$$

Fonte: Do autor

Outro aluno (A) também apresentou solução usando os produtos notáveis, porém calculando primeiro o valor de $a^2 + b^2$, segundo ilustra a figura 14 a seguir.

Figura 5: Resolução do aluno A

$$\begin{aligned}
 (A+B)^2 &= A^2 + 2AB + B^2 \\
 \left(\frac{-7}{15}\right)^2 &= 1^2 + 2 \cdot \left(\frac{-2}{15}\right) \\
 \frac{49}{225} &= A^2 + B^2 - \frac{4}{15} \\
 \frac{49}{225} + \frac{4}{15} &= A^2 + B^2 \\
 A^2 + B^2 &= \frac{109}{225} \\
 (A-B)^2 &= A^2 - 2AB + B^2 \\
 (A-B)^2 &= A^2 + B^2 - 2AB \\
 (A-B)^2 &= \frac{109}{225} - 2 \cdot \left(\frac{-2}{15}\right) \\
 (A-B)^2 &= \frac{109}{225} + \frac{4}{15} \\
 (A-B)^2 &= \frac{109 + 60}{225} \\
 (A-B)^2 &= \frac{169}{225} \\
 (A-B) &= \pm \sqrt{\frac{169}{225}} \\
 A-B &= \pm \frac{13}{15}
 \end{aligned}$$

Fonte: Do autor

A resolução do aluno A também contribuiu para que novas tarefas possam ser propostas no sistema de tarefas, pois o cálculo de $a^2 + b^2$ dada a soma $a + b$ e o produto $a \cdot b$ é uma tarefa possível para o EF.

A partir do que foi discutido, reescrevi a tarefa T'_0 , segundo já havia anunciado, que passou a ser a seguinte tarefa (T''_0): *Dados a soma e o produto de dois números a e b, calcular o módulo da diferença deles em cada caso.*

a) $a + b = 8$ e $a.b = 15$

b) $a + b = 5$ e $a.b = 6$

c) $a + b = -5$ e $a.b = 6$

d) $a + b = -4$ e $a.b = -12$

e) $a + b = -4$ e $a.b = 3$

f) $a + b = -4$ e $a.b = 3$

g) $a + b = -\frac{7}{15}$ e $a.b = -\frac{2}{15}$

h) $a + b = S$ e $a.b = P$

A tarefa (T''_0) foi proposta para que a relação entre o quadrado da soma e da diferença de dois termos encontrada pelos alunos na Figura 8 fosse debatida e institucionalizada para a resolução de T_0 sem o uso de equações do 2º grau, além do objetivo que todos encontrassem o mesmo resultado da diferença. T''_0 é uma resposta à uma dificuldade encontrada no SDA.

Em seguida, equações do 2º grau foram resolvidas a partir dessa relação, além da resolução da equação $ax^2 + bx + c = 0$ em que a fórmula usual $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ foi encontrada.

5.3.1.3 Considerações sobre o SDA₃

A partir das dificuldades de $\mathcal{P}'$ em enfrentar T'_0 surgiu, então, um conjunto de questões Q_{3i} geradas a partir do estudo dessa tarefa que são relacionadas a seguir.

A primeira questão que surgiu foi $Q_{2(1)}$: Como reelaborar T'_0 de maneira não permita embaraços em sua interpretação? A resposta imediata foi a proposição de T''_0 .

Durante os debates a tarefa T_0 desdobrou-se em outras tarefas que não estavam previstas para o sistema de tarefas em construção. As discussões se deram com a finalidade de criar condições para a proposição da tarefa intermediária transformadora $[(a - b)^2 - (a + b)^2 = -4ab]$ que relaciona os produtos notáveis com a resolução de equações do 2º grau por meio da transformação do sistema de

equação $\begin{cases} a + b = s \\ a \cdot b = p \end{cases}$ no sistema $\begin{cases} a + b = s \\ a - b = u \end{cases}$. Ou seja, não foi feita uma sequência de tarefas para o ensino tal como realizada no SDA₂ com uma turma de 4ª Etapa do EF, mas a proposição de enfrentamento da tarefa T_0 para que pudessem ser considerados seus desdobramentos. Embora não tenhamos discutido a fatoração do trinômio para a resolução de equações do 2º grau, este objeto continua fazendo parte do sistema de tarefas, integrado a novas condições a partir dos dados retirados do SDA₃. Em consequência desses dados, elaborei as seguintes questões:

Q₂₍₂₎: Que condições podem ser elaboradas para que os alunos ao enfrentar a tarefa do tipo T'_0 não busquem calcular os números e depois sua diferença?

Q₂₍₃₎: Que tipos de tarefas podem ser propostas para o ST de modo que a tarefa intermediária transformadora (T I T) se torne a técnica para o enfrentamento T_0 ?

Q₂₍₄₎: Em que posição no sistema de tarefas a tarefa T_0 seria proposta?

Assim, minha compreensão sobre o MER₀ sofreu novas modificações fazendo, assim, a instauração do sistema solitário $S_2(\mathcal{P}, Q_{2i})$ associado ao sistema $S_2(\mathcal{P}, SDA_3)$ para o estudo de possíveis respostas que se traduzem em um novo modelo epistemológico pessoal MEPR₃ associado a um novo sistema de tarefas ST₃, a seguir.

5.3.1.4 O Sistema de tarefas ST₃ e o terceiro estado da diacronia da trajetória

O ST₃ (que é a resposta parcial $R^\diamond_3$ ao conjunto de questões Q_{2i}) é resultado da mudança de estado do MEPR para o ensino de resolução de equações do 2º grau após as discussões de T_0 no SDA₃. Além disso, fizeram parte da construção de ST₃ os livros didáticos consultados em SDA₃ entre outros que foram utilizados.

Sistema de tarefas ST₃

Intenção didática: Potencializar a tarefa que transforma um problema conhecido em outro de solução conhecida.

T₃₁: Desenvolver o produto de monômios por polinômio do tipo $(a + b)x$.

T₃₂: Fatorar polinômios do tipo $ax + bx$.

T₃₃: Desenvolver os produtos de binômios do tipo $(x + a)(x + b)$ onde a e b são termos independentes de x , exibindo a soma $(a + b)$ e o produto $(a.b)$.

T₃₄: Desenvolver os produtos notáveis $(a + b)^2$ e $(a - b)^2$ e $(a + b).(a - b)$.

T₃₅: Calcular $(a - b)$, sem calcular a e b , dados os valores de $a^2 - b^2$ e $a + b$.

T₃₆: Transformar o sistema de equações $\begin{cases} a + b = s \\ a^2 - b^2 = k \end{cases}$ no sistema $\begin{cases} a + b = s \\ a - b = u \end{cases}$ e calcular a e b , sendo que s e k são dados.

T₃₇: Calcular os valores de $(a + b)^2$ e $(a - b)^2$ dados os valores de $a^2 + b^2$ e $a.b$.

T₃₈: Calcular os valores de $a + b$ e $a - b$, dados $a^2 + b^2$ e $a.b$.

T₃₉: Transformar o sistema de equações $\begin{cases} a^2 + b^2 = q \\ a.b = p \end{cases}$ no sistema $\begin{cases} a + b = s \\ a - b = u \end{cases}$ e calcular a e b , sendo que p e q são dados.

T₃₍₁₀₎: Desenvolver a expressão $(a - b)^2 - (a + b)^2$.

T₃₍₁₁₎: Calcular $(a - b)^2$ dados $a + b$ e $a.b$.

T₃₍₁₂₎: Calcular $a - b$ dados $a + b$ e $a.b$.

T₃₍₁₃₎: Transformar o sistema de equações $\begin{cases} a + b = s \\ a.b = p \end{cases}$ no sistema $\begin{cases} a + b = s \\ a - b = u \end{cases}$ e calcular a e b , sendo que s e p são dados.

T₃₍₁₄₎: Fatorar os trinômios do 2º grau do tipo $x^2 + Sx + P$ como produto de binômios do 1º grau do tipo $(x + a).(x + b)$, em que $S = a + b$ e $P = a.b$ (tarefa inversa à tarefa T₃₃).

T₃₍₁₅₎: Fatorar os binômios do 2º grau do tipo $x^2 + Sx$ como produto de um monômio por um binômio do 1º grau.

T₃₍₁₆₎: Fatorar os binômios do 2º grau do tipo $x^2 - P$ como um produto de binômios do primeiro grau.

T₃₍₁₇₎: Calcular o valor da variável x nas equações produto do tipo $(x - a).(x - b) = 0$.

T₃₍₁₈₎: Calcular o valor de x nas equações produto do tipo $x.(x - a) = 0$.

T₃₍₁₉₎: Resolver equações do tipo $x^2 - Sx + P = 0$.

T₃₍₂₀₎: Resolver equações do tipo $ax^2 + bx + c = 0$.

5.3.1.4.1 Considerações sobre o sistema ST₃

As tarefas T₃₁ e T₃₂ foram propostas para o enfrentamento da tarefa T₃₃. Em T₃₁ a técnica a ser usada é a regra distributiva; já T₃₂ é tarefa inversa à T₃₁ e a técnica é transformar em produto o binômio, pondo o fator comum em evidência.

Na tarefa T₃₃ os produtos $(x + a).(x + b)$ são propostos para que se evidencie que o coeficiente do termo de x representa a soma $(a + b)$ e o termo independente, o produto $(a.b)$, como segue $(x + a).(x + b) = x^2 + (a + b)x + a.b$. A técnica para enfrentamento dessa tarefa é a regra distributiva. Primeiramente, seriam propostos produtos com termos independentes literais e, em seguida, numéricos, segundo os itens a seguir:

a) $(x + a).(x + b)$ b) $(x + a).(x - b)$ c) $(x - a).(x - b)$

d) $(x + 2).(x + 3)$ e) $(x - 2).(x - 3)$ f) $(x + 2).(x - 3)$

g) $(x - 2).(x + 3)$ h) $(x + 3).(x + 3)$ i) $(x - 3).(x - 3)$

j) $\left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(x - \frac{1}{3}\right)$ k) $(x - 0,5).(x - 1,3)$ l) $2.(x - 3).(x - 4)$

m) $(x + 2).(x - 2)$ n) $(x - 5).(x + 5)$ o) $\left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(x + \frac{1}{2}\right)$

p) $x.(x - 5)$ q) $x(x + 4)$ r) $x \cdot \left(x + \frac{1}{2}\right)$

Os itens (a), (b) e (c) são propostos para a explicitação da soma e do produto dos termos independentes no trinômio usando regras de sinais. Os itens (d) a (l) são propostos para que se torne rotineira a tarefa sem o uso da regra distributiva, ou seja, a realização de, por exemplo, $(x + 2).(x + 3)$ fosse resolvida imediatamente com a saída $x^2 + 5x + 6$. Esses itens são propostos com intenção de resolver, no futuro, equações completas do 2º grau. Os itens de (m) a (r) são propostos para que os produtos tenham como resultados binômios do 2º grau com uma variável tendo em vista a resolução de equações incompletas do 2º grau.

Na Tarefa T_{34} há a explicitação dos produtos notáveis para que se tenha o encaminhamento da tarefa *intermediária transformadora* (TIT) que surgirá em $T_{3(10)}$. A técnica usada é a regra distributiva.

As tarefas T_{35} e T_{36} são propostas para que haja articulações dos produtos notáveis “produto da soma pela diferença de dois termos” que evidencie a transformação, por exemplo, do sistema $\begin{cases} a + b = s \\ a^2 - b^2 = k \end{cases}$ para o sistema $\begin{cases} a + b = s \\ a - b = u \end{cases}$ cuja técnica é rotineira. No livro didático de Bongiovanni et al (1990) encontrei as seguintes tarefas: *Sabendo que $a - b = 4$ e que $a + b = 10$, quanto vale $a^2 - b^2$?* e *Sabendo que $x + y = 12$ e que $x^2 - y^2 = 24$, quanto vale $x - y$?* (p. 117) que, mesmo não apresentando posteriormente a função dessas tarefas, fazem parte das praxeologias pontuais com matemática da escola e que aqui assumem o *status* de tarefas transformadoras.

As tarefas T_{37} e T_{38} são enfrentadas por meio dos produtos notáveis “quadrado da soma e quadrado da diferença de dois termos” e sinalizam para a transformação do sistema $\begin{cases} a^2 + b^2 = q \\ a \cdot b = p \end{cases}$ para sistema do 1º grau $\begin{cases} a + b = s \\ a - b = u \end{cases}$ cuja solução é rotineira, e que é proposta nas tarefas T_{38} e T_{39} .

A tarefa $T_{3(10)}$ consiste em mostrar que $(a - b)^2 - (a + b)^2 = -4ab$ pelo desenvolvimento dos produtos notáveis. Essa tarefa (TIT) exhibe a relação entre a soma, a diferença e o produto de dois termos e será a tarefa que vai realizar a transformação do sistema do tipo $\begin{cases} a + b = s \\ a \cdot b = p \end{cases}$ noutro sistema do tipo $\begin{cases} a + b = s \\ a - b = u \end{cases}$, segundo as tarefas propostas em $T_{3(11)}$, $T_{3(12)}$ e $T_{3(13)}$.

As tarefas $T_{3(14)}$, $T_{3(15)}$ e $T_{3(16)}$ de fatoração foram propostas como inversas das tarefas de produtos e a técnica é a fatoração do termo independente.

As fatorações sugeridas são inicialmente feitas com polinômios que são resultados de alguns itens de T_{33} .

a) $x^2 + 5x + 6$

b) $x^2 - 5x + 6$

c) $x^2 - x - 6$

d) $x^2 + x - 6$

e) $x^2 + 6x + 9$

f) $x^2 - 6x + 9$

g) $2x^2 - 14x + 24$

h) $x^2 - \frac{5}{6}x + \frac{1}{6}$

i) $x^2 - 2x - 5$

j) $x^2 - 4$

l) $x^2 - 25$

m) $x^2 - 5x$.

Essas tarefas foram propostas de modo que sempre fosse possível escrever o polinômio $x^2 - Sx + P$ na forma $(x + a).(x + b)$. Assim, avançamos para as tarefas de resolver equações.

As tarefas $T_{3(17)}$ e $T_{3(18)}$ são propostas para indicar que equações do tipo produto podem ser resolvidas pela regra do produto nulo. Assim, ao fatorar o polinômio de uma variável em um produto de binômios do 1º grau, basta igualar seus termos a zero e resolver as equações resultantes. Ao resolver, por exemplo, a equação $(x - 2).(x - 3) = 0$, faz-se $x - 2 = 0$ ou $x - 3 = 0$, donde se encontra $x = 2$ ou $x = 3$, para evidenciar que as raízes da equação têm sinais opostos aos termos independentes dos binômios. Isso justifica a notação genérica $x^2 - Sx + P = 0$ para equações do 2º grau cujo coeficiente do termo do segundo grau é unitário.

As equações propostas em T_{19} são tais que a princípio não apresente dificuldades na fatoração do trinômio $x^2 - Sx + P$ ou do binômio do 2º grau (caso S ou P seja nulo) até que sejam propostas equações cuja soma e produto não sejam imediatos. Assim, para resolver a equação, basta considerar a soma de suas raízes igual a $-S$ e o produto delas igual a P e articular as tarefa $T_{3(10)}$, $T_{3(11)}$, $T_{3(12)}$ e $T_{3(13)}$ considerando que $\begin{cases} a + b = -S \\ a.b = P \end{cases}$ que por meio dos produtos notáveis, se transforma em $\begin{cases} a + b = -S \\ a - b = u \end{cases}$. Assim, a e b são as raízes da equação $x^2 - Sx + P = 0$.

A tarefa $T_{3(20)}$ generaliza a resolução da equação do inclusive com a institucionalização da fórmula usual $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Ainda buscando responder às questões geradas em SDA_3 , buscamos em outros sistemas didáticos discutir outra tarefa (T_1), que será exposta adiante, em que seu resultado será analisado para que novas condições e tarefas sejam incorporadas no meio didático que se traduz na construção da infraestrutura didático-matemática como a resposta R desejada.

5.3.1.5 O sistema didático auxiliar SDA₄: desdobramentos do sistema de tarefas ST₃

No SDA₃ discutimos sobre o enfrentamento da tarefa T'₀ (*encontrar a diferença entre dois números $(a - b)$, sabendo que sua soma $(a + b)$ é $-\frac{7}{15}$ e seu produto $(a \cdot b)$ é $-\frac{2}{15}$*), em que foi imposta a condição do não uso da equação do 2º grau. E, a partir do que foi observado, constatamos que encontrar a diferença $a - b$ implicava para os alunos a busca incessante dos números a e b inicialmente e que após isso, calculavam sua diferença. Ou seja, calcular os números a e b foi a tarefa final da organização, pois $a - b$ parecia uma mera operação de subtração, uma vez que no enfrentamento da tarefa, ninguém questionou o propósito de calcular essa diferença. Além disso, ocorreu a discussão sobre o sinal do resultado de $a - b$ após terem usado a relação entre os produtos notáveis $(a - b)^2 = (a + b)^2 - 4ab$. Ou seja, a ordem dos números importava para os alunos, pois para eles $a - b$ é negativo somente se b for menor que a .

Em conversas com o professor $\mathcal{P}''$ (em que se instaura o sistema didático auxiliar S₄($\mathcal{P}$, $\mathcal{P}''$, ST₃)) discutimos outra possibilidade para a tarefa T₀ que poderia ser levada para outra turma de licenciatura que eu daria aula, na busca de dar robustez ao MEPR em desenvolvimento.

A partir dos resultados encontrados em SDA₃, eu e $\mathcal{P}''$ concordamos com uma modificação em T₀ que tornasse mais explícita a relação dos produtos notáveis e a resolução da tarefa. Assim, T₀ foi modificada para a seguinte tarefa (T₁): Dada a soma $(a + b)$ e o produto $(a \cdot b)$ de dois números, calcular o quadrado da diferença deles $(a - b)^2$, sem o uso de equação do 2º grau.

Embora eu estivesse pensando inicialmente que calcular o quadrado da diferença de dois números dada sua soma e seu produto, que é a tarefa T₃₍₁₁₎ do sistema de tarefas ST₃, poderia, por si só, promover melhor compreensão da relação que há entre os produtos notáveis no enfrentamento da própria tarefa, $\mathcal{P}''$ alertou-me para seu alcance, pois sua finalidade não se restringia a isso, mas também em discutir a e b (que são as raízes da equação do 2º obtida do sistema de equações $\begin{cases} a + b = S \\ a \cdot b = P \end{cases}$), e $(a - b)^2$ é o discriminante da equação do 2º grau, pois o seu resultado permite estudar as raízes: se $(a - b)^2 > 0$, $a \neq b$; $(a - b)^2 < 0$, a e b e $(a - b)^2 = 0$, então $a = b$.

Nesse momento de estudo e discussão com $\mathcal{P}''$ a relação do quadrado da diferença de dois termos e o discriminante Δ da equação do 2º grau passou a fazer parte de meu universo cognitivo, e mais ainda, passava a fazer parte do estudo do sistema de tarefas com a dinâmica do MEPR. A tarefa T_1 além de relacionar um produto notável à discussão das raízes da equação do 2º grau possibilitaria também, no futuro, encontrar essas raízes a partir da transformação já proposta pelas tarefas T_{311} , T_{312} e T_{313} do sistema ST_3 .

Assim, levei a tarefa T_1 para outra turma de licenciatura (PARFOR Breves), em que novamente ministrei a disciplina Didática da Matemática e que será apresentada, a seguir.

5.3.2 O sistema didático auxiliar SDA_5

O $SDA_5 - S_5(\mathcal{P}, \mathcal{P}', T_1)$ – foi instaurado para que os alunos-professores ($\mathcal{P}'$) do curso de Licenciatura em Matemática do PARFOR localizado no município de Breves no Estado do Pará apresentassem aulas sobre objetos matemáticos escolar de interesse para o sistema de tarefas em construção. As tarefas de interesse propostas e as técnicas apresentadas pelos alunos-professores estão descritas a seguir, com dados retirados de diário de bordo e gravações de áudio e vídeo.

5.3.2.1 Desenvolvimento das atividades no SDA_5

Como em SDA_3 , Iniciamos esse sistema didático com o estudo de noções básicas de teorias da Didática da Matemática, mais particularmente, a transposição didática e a TAD. As noções dessas teorias dariam o suporte teórico para exemplificações de práticas com matemática escolar. Maior ênfase foi dada à noção de praxeologia e seus elementos (tarefa, técnica, tecnologia e teoria) e sua funcionalidade num sistema didático.

Em outro momento, propus para os alunos que apresentassem em pequenos grupos aulas sobre produtos de polinômios, produtos notáveis, fatoração do trinômio quadrado perfeito e do trinômio do 2º grau. Essas tarefas foram propostas para encaminhar questionamentos das práticas de ensino a elas associadas.

A primeira equipe se dirigiu ao quadro para mostrar a fatoração do trinômio quadrado perfeito. O aluno W escreveu o polinômio $9x^2 + 24x + 16$ e dirigiu-se verbalmente à turma com a seguinte fala:

Isso aqui tem que virar um binômio de Newton, faz a raiz quadrada de $9x^2$ que é igual a $3x$, aí faz a raiz quadrada de $24x$, mas essa não dá exata. Então faz a raiz de 16 que é igual a 4 . Aí faz $(3x + 4)^2$ e desenvolve para ver se dá o polinômio. Se der, então $(3x + 4)^2$ é a fatoração de $9x^2 + 24x + 16$.

Nenhuma equipe apresentou uma aula sobre a fatoração de um trinômio qualquer do 2º grau.

Um segundo grupo de alunos apresentou o produto de polinômios por meio da seguinte tarefa: Calcular o polinômio que representa o volume do bloco retangular de dimensões $(5x - 3)$, $(x - 8)$ e $(2x + 9)$.

Figura 15: Multiplicação de polinômio por polinômio

MULTI
POLIN

Diagram of a rectangular block with dimensions: $2x+9$, $x-8$, and $5x-3$.

Handwritten calculations:

$$\begin{array}{r} 2x+9 \\ \times x-8 \\ \hline 2x^2+9x \\ -16x-72 \\ \hline 2x^2-7x-72 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2x^2-7x-72 \\ \times 5x-3 \\ \hline 10x^3-35x^2-360x \\ -6x^2+21x+216 \\ \hline 10x^3-41x^2-339x+216 \end{array}$$

Final result: $10x^3 - 41x^2 - 339x + 216$

Fonte: Do autor

Esses alunos recorreram a uma situação geométrica para abordar o produto de polinômios por polinômios. Explicaram que a medida do volume do bloco retangular é calculada pelo produto de suas arestas. Em seguida realizaram as multiplicações dos polinômios segundo ilustra a Figura 15, explicando passo-a-

passo o algoritmo. O grupo enfatizou que possíveis erros poderiam ocorrer com as regras de sinais e redução dos termos semelhantes.

Perguntei por que a tarefa proposta foi calcular o volume de um bloco retangular e não simplesmente calcular o produto dos polinômios dados? Um deles respondeu que calcular o volume do bloco dava mais sentido ao produto de polinômios.

Embora calcular o volume do bloco fosse a tarefa que teria que ser discutida, pois ela impõe condições para as arestas $(5x - 3)$, $(x - 8)$ e $(2x + 9)$ para que o bloco retangular seja possível, essa situação saiu de cena após a equipe dar início aos procedimentos para multiplicar os polinômios.

Retomando a igualdade $(5x - 3).(x - 8).(2x + 9) = 10x^3 - 41x^2 - 339x + 216$, perguntei para a turma como poderíamos fazer o inverso? Ou seja, como encontrar a forma fatorada do polinômio $10x^3 - 41x^2 - 339x + 216$? Uma resposta do aluno A foi igualar o polinômio a zero e calcular suas raízes. A resposta parecia ter sentido para a pergunta que eu havia posto, pois o bloco retangular já havia sido esquecido nesse momento. Muito embora não fosse pretensão minha encaminhar a discussão sobre métodos que levassem ao encontro das raízes do polinômio do 3º grau, pretendia mostrar aos alunos que o polinômio quando escrito na forma fatorada, essas raízes estão determinadas. Para o caso do exemplo dado, as raízes são $x = 3/5$ ou $x = 8$ ou $x = -9/2$.

Outra equipe apresentou os produtos notáveis: quadrado da soma e da diferença de dois termos. Durante sua exposição, o aluno J fez o produto $(a + b).(a + b) = a.a + ab + ab + b.b = a^2 + 2ab + b^2$ pela regra distributiva. Esse colocou por escrito: *o quadrado do primeiro termo, mais duas vezes o primeiro, vezes o segundo termo, mais o quadrado do segundo termo*. Ele disse que *assim o aluno aprende rápido*.

Outro aluno N apresentou a tarefa de desenvolver o seguinte produto $(x + 3).(x + 5)$ o qual obteve $x^2 + 8x + 15$. Novamente perguntei para a turma como seria enfrentada a tarefa de fatorar o trinômio para obter o produto? N respondeu que a soma dos números é 8 e o produto é 15.

Aproveitei a tarefa que havia proposto e escrevi vários trinômios para que os alunos pudessem os fatorar pela soma e produto. Até que um dos trinômios não pudesse ser fatorado por tentativas $(x^2 + 4x + 20)$. Perguntei o que poderia ser feito? O aluno E respondeu que faria o polinômio igual a zero e resolveria a equação do 2º

grau pela fórmula de resolução para encontrar os números. Perguntei, então, como fatorar o polinômio sem usar a fórmula de resolução da equação do 2º grau? Nesse momento, pensando ainda na resolução da equação do 2º grau por meio dos produtos notáveis, propus a tarefa (T₁) que havia planejado para os alunos: *Dada a soma S e o produto P de dois números, calcular o quadrado da diferença deles, em cada caso sem usar equação do 2º grau:*

a) $S = 7; P = 10$

b) $S = 9; P = 20$

c) $S = 2; P = -15$

d) $S = 7/5; P = 2/5$

e) $S = 4; P = 8$

f) $S = 10; P = 25$

Deixei-os à vontade para usarem a técnica que soubessem para enfrentar a tarefa. Após algum tempo, repetiu-se o procedimento que ocorrera com a turma PARFOR Mãe do Rio em que os alunos foram em busca de encontrar, inicialmente, os dois números para depois calcularem a diferença deles. Não interferi nesse procedimento.

Um dos grupos de alunos que concluiu quase todos os itens da tarefa dirigiu-se ao quadro para mostrar suas soluções. Um dos alunos dessa equipe (aluno P) escreveu as respostas no quadro da seguinte maneira: No item (a), escreveu $(5 - 2)^2 = (3)^2 = 9$, e disse que $2 + 5 = 7$ e $2 \cdot 5 = 10$. Ele também apresentou as resposta dos itens (b), (c), (d) e (f) $((4 - 5)^2 = (-1)^2 = 1, (-3 - 5)^2 = 64, (1 - 2/5)^2 = (3/5)^2 = 9/25, (5 - 5)^2 = 0)$. Perguntei como havia chegado às soluções e ele respondeu que *pensaram* nos números até encontrar as respostas.

Para o item (e) ele afirmou que não havia encontrado os números. Esse aluno disse para a turma que tentou várias combinações de números e que não conseguia encontra-los. O aluno J, que também não havia encontrado os números, disse que *não era possível resolver esta questão*.

O item (e) ainda estava sem solução. Então, sugeri para os alunos que escrevessem o sistema de equações $\begin{cases} a + b = 4 \\ a \cdot b = 8 \end{cases}$ e tentassem resolvê-lo.

Rapidamente um dos alunos (E) apresentou a equação $a^2 - 4a + 8 = 0$. Mesmo impondo a restrição para não usarem a resolução da equação do 2º grau, o aluno (G) apressou-se em dizer que a equação não tinha raízes reais, pois em seus cálculos, o valor de Δ deu negativo. Insisti com a turma de que essa resposta deveria ser dada sem usar equação do 2º grau.

Em seguida, distribuí cópias da OM proposta em Silva e Guerra (2005) para equação do 2º grau (Quadro 11). Dispondo da relação entre os produtos notáveis $(a - b)^2 = (a + b)^2 - 4ab$, os alunos P e J calcularam $(a - b)^2 = -16$.

Escrevi no quadro três itens que alguns alunos já haviam resolvido para discutirmos: a) $(a - b)^2 = 9$; e) $(a - b)^2 = -16$ e; f) $(a - b)^2 = 0$. Um dos alunos (W) que não havia se pronunciado, ao se deparar com os esses resultados falou que havia resolvido todos os itens também por equação do 2º grau e que $(a - b)^2$ dava resultado igual ao de Δ .

Assim, os alunos P, J e W explicaram cada item discutindo a qualidade dos números. *Se $(a - b)^2$ for positivo, a é diferente de b; se $(a - b)^2$ for igual a zero, a é igual a b e; se $(a - b)^2$ for negativo, a e b não são possíveis.*

Ainda seguindo o MER₀ apresentado aos alunos, pedi para os mesmos calcularem os números a e b , caso fosse possível. Nesse caso, havia a necessidade, segundo o modelo, de encontrar a diferença dos números e resolver o sistema $\begin{cases} a + b = -S \\ a - b = \sqrt{S^2 - 4P} \end{cases}$. Assim, o sistema $\begin{cases} a + b = 7 \\ a \cdot b = 10 \end{cases}$ foi transformado no sistema $\begin{cases} a + b = 7 \\ a - b = 3 \end{cases}$, cujo resultado é $a = 5$ e $b = 2$.

A partir daí, foram propostas equações do 2º grau para serem resolvidas por meio da transformação do sistema de soma e produto das suas raízes para um sistema do 1º grau que tem a soma e a diferença delas. Mas antes, foi calculado o quadrado da diferença das raízes para discutir se a equação era ou não possível.

Tomando os dados descritos, faremos a seguir algumas considerações sobre o SDA₅.

5.3.2.2 Considerações sobre o SDA₅

O SDA₅ forneceu-me elementos para reflexão a partir de dúvidas e ações dos alunos e minhas próprias ações que se traduzem em questões. Por exemplo, a discussão das raízes da equação do 2º grau por meio do produto notável quadrado da diferença de dois termos só foi possível porque os alunos da graduação haviam resolvido uma equação resultante do sistema de equação que fornecia a soma e o produto dos números. Mas, o aluno hipotético do 8º ano ou 4ª etapa do Ensino Fundamental não está supostamente equipado com tal praxeologia. Assim, uma questão surge:

Q₃₁: Que tarefas intermediárias possibilitam a discussão de dois números cujo quadrado da diferença deles seja calculado?

Na escola, estuda-se potenciação de números com regras de sinais no 7º ano do EF e numa potência cujo expoente seja par, o resultado é sempre positivo, independente do sinal da base, e igual a zero se a base for nula. Assim, o quadrado da diferença de dois números sempre será positivo ou nulo e não poderá ser negativo. Nesse caso, há uma perspectiva de estudo de inequações potência sem mencionar tal objeto, pois $(a - b)^2 \geq 0$, que põe em evidência as desigualdades que são inicialmente estudadas no 7º ano por meio das inequações do 1º grau.

A tarefa que sugeri para os alunos de fatorar o trinômio do 2º grau, até surgir o trinômio $x^2 - 4x + 5$ em que a fatoração como produto de dois binômios de coeficientes reais não era possível, chamou-me atenção, pois até o momento eu estava pensando no ensino da resolução de equações do 2º grau por meio da articulação de produtos notáveis no 8º ano ou 4ª etapa do Ensino Fundamental; e essa tarefa se inseria no estudo de equações por meio do MER₀ inicialmente proposto e que se desdobrou até aqui em MEPR parciais.

Quando reescrevia o diário de bordo e transcrevia partes dos áudios e vídeos, observei que havia passado pela tarefa de fatorar o polinômio desde o desenvolvimento da tarefa de calcular o volume do bloco retangular apresentada pelos alunos quando perguntei como inverter a tarefa. Ora, fatorar o polinômio engendra a tarefa de resolver a equação polinomial segundo o teorema fundamental

da álgebra²². Assim, a tarefa de fatorar o trinômio do 2º grau, que chamamos de T_2 passa a ser problematizada no percurso.

Dessa maneira, o desenvolvimento do sistema de tarefas passa a ter a fatoração do trinômio do 2º grau ($x^2 - Sx + P$) como objeto matemático central que possibilita o enfrentamento de outras tarefas no sistema de tarefas. Assim, tornou-se de nosso interesse o estudo de métodos de fatoração, e outras questões Q_{4i} foram geradas, como relacionadas a seguir:

Q_{32} : Fatorar um trinômio do 2º grau tem como técnica a resolução da equação de segundo grau associada?

Q_{33} : A solução da equação do segundo grau tem como técnica a fatoração do trinômio do segundo grau?

Q_{34} : Como a fatoração do trinômio do 2º grau acontece em livros didáticos para o 8º ou 9º ano do EF?

Q_{35} : Qual a técnica para verificar se um trinômio do segundo grau é redutível ou não a um produto de binômios de primeiro grau?

Na busca por respostas para essas questões, outro sistema didático surge e nele mostramos métodos de fatoração propostas em livros didáticos e as que propomos para a fatoração do trinômio do 2º grau.

5.4 A FATORAÇÃO DO TRINÔMIO DO SEGUNDO GRAU SOB NOVA ÓTICA

A dinâmica do MEPR me fez por o foco no estudo da fatoração do trinômio do segundo grau e as potencialidades que os sistemas de tarefas mostravam para o desenvolvimento desse objeto matemático. Assim, encaminhei o estudo de praxeologias de fatoração do trinômio do segundo grau apresentadas em livros didáticos, instaurando, assim, o sistema didático solitário $S_3(\mathcal{P}, O_{ft})$, bem como a compreensão do Teorema Fundamental da Álgebra na obra de Lima et al (1998) como o saber que engendra as praxeologias. E, em seguida proponho uma OM para o ensino da fatoração do trinômio do segundo grau articulando vários objetos da matemática escolar para o enfrentamento do conjunto de questões $Q_{3(i)}$ no sistema solitário $S_3(\mathcal{P}, Q_{3(i)})$.

²² Em um de seus enunciados, o teorema fundamental da álgebra afirma que todo polinômio real pode ser escrito como um produto de fatores reais do 1º ou do 2º grau. Ou seja, um produto de binômios reais do 1º grau ou de trinômios reais do 2º grau.

5.4.1 A fatoração do trinômio do segundo grau em livros didáticos

No capítulo 4 apresentamos no livro de Scipione (1972) a fatoração do trinômio do 2º grau pelo método da fatoração do termo independente.

Quando num trinômio do 2º grau do tipo $x^2 + px + q$, os números p e q são, respectivamente, soma e produto de dois números a e b , então fatora-se $x^2 + px + q$ no produto de $x + a$ por $x + b$.

Nesta altura do curso, apenas estudaremos os casos em que os valores de p , q , a e b são inteiros, assim como o coeficiente de x^2 é sempre igual à unidade.

Examinaremos os casos possíveis:

1) Fatorar : $x^2 + 11x + 30$

Devemos procurar dois números cujo produto seja +30 e cuja soma seja +11. É fácil ver que são os números +5 e +6.

Donde: $x^2 + 11x + 30 = (x + 5).(x + 6)$

2) Fatorar: $x^2 + 17x + 52$

Quais são os números cujo produto é + 52 e cuja soma é +17? Não os encontrando, à primeira vista, basta decompor o produto 52 em seus fatores primos e fazer as alternativas possíveis:

52	2	4 e 13 são os números procurados.
26	2=> 4	
13	13=> 13	
1		

Donde: $x^2 + 17x + 52 = (x + 4).(x + 13)$

3- Fatorar: $x^2 - 11x + 30$

+30 representa o produto dos valores a e b que procuramos. Como $30 > 0$, então a e b tem sinais iguais (ambos positivos ou ambos negativos). $- 11$ representa a soma dos valores que procuramos e que já sabemos, possuírem o mesmo sinal. Logo, o sinal de a e b será negativo, porque a soma (-11) também o é. Teremos $x^2 - 11x + 30 = (x - 5).(x - 6)$. (SCIPIONE, 1972, p.56-58)

A restrição da técnica se mostra quando o autor buscar somente os casos possíveis, e para coeficientes do trinômio e termos independentes do binômio sendo números inteiros.

No livro de Dante (2004a) do 8º ano não consta a fatoração do trinômio do 2º grau senão os quadrados perfeitos, porém há um subitem intitulado “Aplicações dos produtos notáveis e da fatoração” (p.170) em que o autor sugere a “aplicação da fatoração na resolução de equação- produto” (p.172), segundo a Figura 16 a seguir.

Figura 16: Aplicação da fatoração do trinômio do 2º grau

Aplicação na resolução de equação-produto

A equação $(x + 2)(x - 3) = 0$ é denominada *equação-produto*. Pense por quê. Veja sua resolução:

Se $(x + 2)(x - 3) = 0$, então $x + 2 = 0$ ou $x - 3 = 0$.

Para $x + 2 = 0$ temos $x = -2$, e para $x - 3 = 0$ temos $x = 3$.

Logo, a equação-produto $(x + 2)(x - 3) = 0$ tem duas soluções ou raízes: -2 e 3 .

Verificação:

$$(x + 2)(x - 3) \rightarrow (-2 + 2)(-2 - 3) = 0(-5) = 0$$

$$(x + 2)(x - 3) \rightarrow (3 + 2)(3 - 3) = 5 \cdot 0 = 0$$

Lembre-se da propriedade dos números reais: se $a = 0$ ou $b = 0$, então $a \cdot b = 0$, e se $a \cdot b = 0$, então $a = 0$ ou $b = 0$.

Fonte: Dante (2004a, p.170)

A tarefa é resolver a equação-produto com o trinômio já fatorado. A tarefa de fatorar o trinômio não está em jogo, apesar de ter sido anunciada acima. A fatoração do trinômio do 2º grau só é realizada no livro do 9º ano em que Dante (2004b) apresenta a fatoração do trinômio antes da resolução da equação do 2º grau, como segue na Figura 17.

Figura 17: Resolução de equação do 2º grau por fatoração

Resolvendo equações do 2º grau completas por fatoração

Suponha que você queira fatorar a expressão algébrica $x^2 + 4x - 5$. Lembre-se: fatorar é transformar em produto. A questão é:

Como expressar $x^2 + 4x - 5$ na forma $(x + a)(x + b)$?

Para fazer essa fatoração, vamos praticar um pouco de cálculo algébrico:

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$

A expressão a ser fatorada é $x^2 + 4x - 5$. Então:

$$x^2 + (a + b)x + ab = x^2 + 4x - 5$$

Temos, portanto, duas condições a serem satisfeitas:

$$\begin{cases} a + b = 4 \\ ab = -5 \end{cases}$$

Por tentativas, podemos escolher vários pares ordenados de números que tenham soma 4: (2, 2), (5, -1), (1, 3), (7, -3), (0, 4), (6, -2), ...

Da mesma forma, tomamos pares ordenados de números que tenham produto -5: (-1, 5), (5, -1), (1, -5), ...

Os pares ordenados que satisfazem as duas condições ao mesmo tempo são: (5, -1) e (-1, 5).

Soma: $5 - 1 = 4$	Soma: $-1 + 5 = 4$
Produto: $5(-1) = -5$	Produto: $(-1)5 = -5$

Portanto, podemos escrever: $x^2 + 4x - 5 = (x + 5)(x - 1)$ ou $x^2 + 4x - 5 = (x - 1)(x + 5)$.

44. Fatore estes trinômios em seu caderno, escrevendo-os na forma $(x + a)(x + b)$.

a) $x^2 + 8x + 15$	d) $x^2 - 7x + 12$	g) $x^2 + x - 42$
b) $x^2 + 2x - 24$	e) $x^2 - 3x - 40$	h) $x^2 + 11x + 18$
c) $x^2 + 13x + 36$	f) $x^2 + x - 30$	i) $x^2 + 9x + 18$

45. Usando a fatoração de trinômios, podemos resolver algumas equações completas do 2º grau. Por exemplo: quais as raízes da equação $x^2 - 3x - 10 = 0$?

Fatorando: $x^2 + (a + b)x + ab = x^2 - 3x - 10$

$$\begin{cases} a + b = -3 \\ ab = -10 \end{cases}$$

Fonte: Dante (2004b, p.172)

Como realizado em Scipione (1972), o livro de Dante (2004b) propõe as tarefas de fatoração somente com valores inteiros para a e b . A resolução do sistema $\begin{cases} a + b = 4 \\ a \cdot b = -5 \end{cases}$ feita por tentativas com o uso de pares de valores é a técnica usada para encontrar a e b e se mostra com alcance limitado e nem a fatoração do produto é sugerida, como faz em Scipione (1972). Além disso, Scipione apresenta a fatoração no livro do 8º ano, enquanto Dante (2004b), no 9º ano.

A técnica que Dante utiliza para generalizar a resolução de equação do 2º grau por meio de fatoração é o completamento de quadrado, já apresentado na seção 4 no quadro 10 no livro de Guelli (2005b). Assim, o completamento de quadrado usado para fatorar o trinômio - que faz a equação do 2º grau do tipo $ax^2 + bx + c = 0$ se transformar numa outra do tipo $x^2 - P = 0$ - é a técnica que além de ser usada num contexto geométrico (Figura 18) que tem menor alcance do que o algébrico, não responde à tarefa de fatorar o trinômio do 2º grau nesses livros. O completamento de quadrados é uma técnica que está nas praxeologias com matemática escolar, mas que só aparece para o professor, no momento em que este mostra o surgimento da fórmula usual de resolução de equações do 2º grau.

Veremos a seguir que é possível realizar a fatoração do trinômio do 2º grau tanto pelo completamento de quadrado quanto pela tarefa intermediária transformadora já anunciada antes.

Figura 18: Completamento de quadrado

O método de "completar quadrados" de Al-Khowarizmi

Você sabia que... ... no século IX, o famoso matemático árabe Al-Khowarizmi usou um interessante método de "completar quadrados", dando uma interpretação geométrica à resolução de equações do 2º grau?

Você já tinha ouvido falar desse método?
Vamos resolver a equação $x^2 + 6x - 3 = 0$ pelo método de "completar quadrado".
 $x^2 + 6x - 3 = 0 \rightarrow x^2 + 6x = 3$
A interpretação geométrica da expressão algébrica $x^2 + 6x$ é:

Observe que falta algo para completar o quadrado.

Completamos o quadrado juntando 9 regiões quadradas de área 1 e encontramos um quadrado perfeito.

$x^2 + 6x + 9 \rightarrow$ trinômio quadrado perfeito
Para não alterar a igualdade $x^2 + 6x = 3$, também somamos 9 ao 2º membro:
 $x^2 + 6x + 9 = 3 + 9$
Fatorando o trinômio, temos: $(x + 3)^2 = 12$. Agora você já sabe resolver.
 $x + 3 = +\sqrt{12} \rightarrow x = \sqrt{12} - 3$ ou $x + 3 = -\sqrt{12} \rightarrow x = -\sqrt{12} - 3$

Como no método de "completar quadrados" x é uma medida de comprimento, só consideramos a raiz positiva: $\sqrt{12} - 3$.

Fonte: Guelli (2005b, p. 175)

O ensino da tarefa de fatoração do trinômio de segundo grau sempre se mostrou problemática por exigir, no fundo, a resolução da equação do segundo grau, mas isso encontrava restrição na escola. É fácil ver o que afirmamos quando se verifica que essa tarefa está reduzida a casos particulares ou é simplesmente omitida nos livros didáticos do 8º ano ou da 4ª etapa do EF, como, por exemplo, em Imenes e Lellis (2009), que apresenta a fatoração de polinômio apenas no caso em que a técnica é por o fator comum em evidência; Bonjorno et al (2009), Souza e Pataro (2015), Silveira (2015) e Andrini (2015) que apresentam a fatoração em quatro casos: Fator comum, Agrupamento (que decorre do caso do fator comum), diferença de dois quadrados e trinômio quadrado perfeito; O livro de Mazzeiro e Machado (2012) nem apresentam o estudo de polinômios no 8º ano; e não muito recente, Mori e Onaga (2009) apresentam a fatoração do trinômio do 2º grau por meio da soma e do produto, fazendo tentativas, como em Dante (2005a).

Assim, a partir da trajetória em que enveredei por sistemas didáticos que auxiliaram nessa mudança de olhar para a fatoração, afirmamos que a tarefa de fatorar o trinômio do 2º grau está quase invisível no programa escolar por não

apresentar técnica que assegure o enfrentamento dessa tarefa para num alcance que a torne um objeto de ensino indispensável para a escola.

Dessa maneira, por meio do desenvolvimento do MEPR a partir do MER₀, propomos o uso da técnica dos produtos notáveis dar uma resposta à tarefa fundamental de fatorar o trinômio do 2º grau, pela infraestrutura que usada para seu enfrentamento, pode ser definitivamente estudada no 8º ou 4ª etapa do EF.

5.4.2 A fatoração do trinômio do 2º grau realizada por meio da tarefa intermediária transformadora

A mobilização de tarefas e técnicas até então feitas para atender a articulação de objetos para a resolução de equações do 2º grau agora será apresentada para atender à fatoração do trinômio do 2º grau, da seguinte maneira:

T'₂: Escrever o trinômio do 2º grau $T = x^2 + px + q$ na forma $T = (x + a).(x + b)$

A tarefa consiste em encontrar os termos a e b , dados os coeficientes p e q do trinômio. Assim, tomando-se a identidade $x^2 + sx + p = (x + a).(x + b)$ que, após o desenvolvimento do produto leva a $x^2 + sx + p = x^2 + (a + b)x + a.b$, tem-se $\begin{cases} a + b = s \\ a.b = p \end{cases}$ que por meio da relação $(a - b)^2 = (a + b)^2 - 4.a.b$, já será possível verificar se a fatoração será ou não possível ou se o trinômio é ou não quadrado perfeito, no caso da fatoração ser possível. Nesse último caso se pode realizar a transformação já anunciada em ST₃, em que o sistema $\begin{cases} a + b = p \\ a.b = s \end{cases}$ torna-se $\begin{cases} a + b = s \\ a - b = \sqrt{s^2 - 4p} \end{cases}$. Assim, os termos independentes dos binômios podem ser calculados, caso a fatoração seja possível.

A seguir são apresentados exemplos de uso dessas técnicas.

Ex. Escrever os trinômios abaixo na forma $(x + a).(x + b)$

a) $x^2 + 10x + 21$

Solução

Fazendo $x^2 + 10x + 21 = (x + a).(x + b) = x^2 + (a + b)x + a.b$, vem que

$a + b = 10$ e $a.b = 21$. Assim, tem-se que $(a - b)^2 = 10^2 - 4.21 = 100 - 84 = 16$. Como $(a - b)^2 = 16$, conclui-se que a fatoração é possível e a e b são distintos. Para o

cálculo de a e b , recorre-se ao sistema $\begin{cases} a + b = 10 \\ a - b = 4 \end{cases}$ em que obtém-se $a = 7$ e $b = 3$.

Assim, $x^2 + 10x + 21 = (x + 7).(x + 3)$

b) $x^2 + 4x + 8$

Analogamente, tem-se que $(a - b)^2 = -16$, e daí se conclui que a fatoração não será possível.

5.4.3 A fatoração do trinômio do 2º grau por completamento de quadrado

É possível também fatorar o trinômio do 2º grau pela técnica de completamento de quadrados. Nesse caso, alguns critérios devem ser estabelecidos.

Essa tarefa consiste em escrever, em princípio, o trinômio $T = x^2 + sx + p$ na forma $T = k^2 - q$ usando a técnica do completamento de quadrados, em que $k = x + w$. Em seguida, fatora-se a diferença de dois quadrados $k^2 - q$, obtendo-se $T = (k + \sqrt{q}).(k - \sqrt{q})$, para o caso de $q \geq 0$; para $q < 0$, a fatoração não será possível para números reais. Mais especificamente, se $q = 0$, tem-se um trinômio quadrado perfeito. Para o caso da fatoração ser possível, o trinômio $T = x^2 + sx + p$ pode ser escrito na forma $T = (x + a).(x + b)$; para o caso de trinômio quadrado perfeito, $a = b$. Assim, a tarefa se traduz em calcular os valores de a e b .

Um procedimento possível para o cálculo de a e b por meio da técnica do completamento de quadrados é a seguinte:

Seja o trinômio $x^2 + sx + p$. Fazendo $s = 2.w$, obtém-se $T = x^2 + 2wx + p$. Somando e subtraindo o trinômio por w^2 , tem-se que $T = x^2 + 2wx + w^2 + p - w^2$, que resulta $T = (x + w)^2 + p - w^2$. Fazendo $k = (x + w)$ e $q = -(p - w^2)$, vem que $T = k^2 - q$. Assim, para $(p - w^2) \leq 0$, tem-se que o trinômio T pode ser escrito como $T = (k + \sqrt{q}).(k - \sqrt{q})$. Mas $k = x + w$, e isso resulta em $T = (x + w + \sqrt{q}).(x + w - \sqrt{q})$. E finalmente, fazendo $a = w + \sqrt{q}$, e $b = w - \sqrt{q}$, vem que $T = (x + a).(x + b)$

Como exemplos, fatorar os trinômios:

a) $x^2 + 10x + 21$

Solução: Considerando $T = x^2 + 2wx + p = T = x^2 + 10x + 21$, tem-se que $w = 5$. E, de $T = (x + w)^2 + p - w^2$ onde $q = -(p - w^2)$, temos que $T = (x + 5)^2 + 21 - 5^2$. Assim,

$q = -4$, que é menor que zero, indica que a fatoração é possível. Logo $(x + 5)^2 - 4$ é uma diferença de dois quadrados, que fatorada, resulta em $T = (x + 7).(x + 3)$.

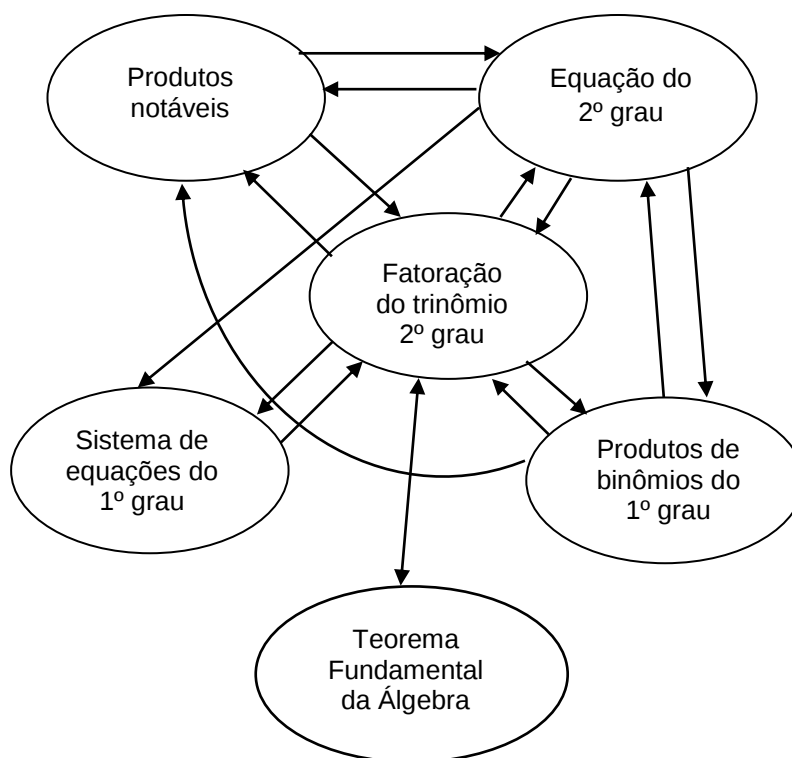
b) $x^2 + 4x + 8$

Solução: De maneira análoga, tem-se que $w = 2$. E, de $T = (x + w)^2 + p - w^2$, temos que $T = (x + 2)^2 + 8 - 2^2 = (x + 2)^2 + 4$ que não é uma diferença de dois quadrados. Logo, o trinômio $x^2 + 4x + 8$ não pode ser escrito na forma $(x + a).(x + b)$ com a e b sendo reais.

Tanto o uso da tarefa intermediária transformadora (T I T) que relaciona os produtos notáveis quadrado da soma e da diferença de dois termos, quanto o completamento de quadrados são técnicas que podem ser usadas para discutir a fatoração do trinômio do 2º grau, assim como o fatorar quando possível.

O modelo epistemológico pessoal de referência que estamos a construir nessa trajetória de formação, em sua dinâmica, proporcionou um novo olhar para a tarefa de fatorar o trinômio do 2º grau que passa a ter seu *status* no bloco do saber em que, por exemplo, calcular as raízes de equações do 2º grau passa a ter a tarefa de fatorar o trinômio como tecnologia. A técnica usada para a discussão e cálculo de suas raízes pode ser a T I T ou o completamento de quadrado.

Assim, a resposta R desejada é dada pela nova compreensão do MER_0 se traduz no modelo epistemológico pessoal de referência ($MEPR_4$) em que fatorar o trinômio do segundo grau é a tarefa que engendra praxeologias com vários saberes escolares, mais especificamente, com produtos de polinômios, produtos notáveis, sistemas de equações do primeiro grau, equações do 2º grau e, implicitamente, o teorema fundamental da álgebra e a tarefa T I T é a técnica usada para fatorar o trinômio do 2º grau, segundo indica a Figura 19 a seguir.

Figura 19: Saberes articulados no MEER₄

Fonte: Do autor

5.4.4 O sistema de tarefas ST₄ e o quarto estado da diacronia da trajetória

O ST₄ substancia a compreensão que tive do objeto fatoração do trinômio do segundo grau e que marca o MEPR₄ e o último estado (E₄) - mas não necessariamente o estado terminal - alcançado na trajetória pessoal de formação docente num processo em que a prática de ensino na transposição didática interna, é postulada como dispositivo que detona um percurso de estudo e investigação ou pesquisa (PEP) na formação do professor.

Nas tarefas que são propostas em ST₄ são apresentadas suas técnicas, algumas seguidas de exemplos para melhor ilustra-las.

Sistema de tarefas ST₄

Intenção didática: Fatorar, se possível, o trinômio do segundo grau por meio da TIT.

T₄₁: Desenvolver o produto de monômios por polinômio do tipo $(\alpha + \beta)x$.

Técnica: Regra distributiva. Assim, $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$

T₄₂: Fatorar polinômios do tipo $\alpha x + \beta x$.

Técnica: Fator comum em evidência. Assim, $\alpha x + \beta x = (\alpha + \beta)x$ (tarefa inversa a T₄₁)

T₄₃: Desenvolver os produtos de binômios do tipo $(x + \alpha)(x + \beta)$ onde α e β são termos independentes de x , exibindo a soma $(\alpha + \beta)$ e o produto $(\alpha.\beta)$.

Técnica: Regra distributiva. Assim, $(x + \alpha)(x + \beta) = x^2 + \alpha x + \beta x + \alpha\beta = x^2 + (\alpha + \beta)x + \alpha\beta$.

Exemplo: Desenvolver o produto $(x - 3).(x - 2)$.

Solução: $(x - 3).(x - 2) = x^2 + (-3 - 2)x + (-3).(-2) = x^2 - 5x + 6$

T₄₄: Desenvolver os produtos notáveis $(\alpha + \beta)^2$ e $(\alpha - \beta)^2$ e $(\alpha + \beta).(\alpha - \beta)$.

Técnica: Regra distributiva. Assim, $(\alpha + \beta)^2 = (\alpha + \beta)(\alpha + \beta) = \alpha^2 + \alpha\beta + \alpha\beta + \beta^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$. Analogamente, $(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$ e $(\alpha + \beta).(\alpha - \beta) = \alpha^2 - \beta^2$.

T₄₅: Calcular $(\alpha - \beta)$, sem calcular α e β , dados os valores de $\alpha^2 - \beta^2$ e $\alpha + \beta$.

Técnica: Produto da soma pela diferença de dois termos $(\alpha + \beta).(\alpha - \beta)$.

Exemplo: Sabendo que $\alpha^2 - \beta^2 = 5$ e $\alpha + \beta = 5$, calcular $\alpha - \beta$.

Solução: Por T₄₄, tem-se que $(\alpha + \beta).(\alpha - \beta) = \alpha^2 - \beta^2$. Daí, $5.(\alpha - \beta) = 5$. Logo, $\alpha - \beta = 1$

T₄₆: Solucionar sistemas de equações do 1º grau com duas variáveis.

Técnica: Método da adição.

Exemplo. Solucionar o sistema $\begin{cases} a + b = 5 \\ a - b = 1 \end{cases}$.

Usando o método da adição, tem-se que

$$a + b = 5$$

$$\underline{a - b = 1}$$

$$2a = 6$$

$a = 3$, que substituído em uma das equações, leva a $b = 2$

T₄₇: Transformar o sistema de equações $\begin{cases} \alpha + \beta = s \\ \alpha^2 - \beta^2 = k \end{cases}$ no sistema $\begin{cases} \alpha + \beta = s \\ \alpha - \beta = u \end{cases}$ e calcular α e β , sendo que s e k são dados.

Técnica: Articulação das tarefas T_{44} , T_{45} e T_{46} .

T₄₈: Calcular os valores de $(\alpha + \beta)^2$ e $(\alpha - \beta)^2$ dados os valores de $\alpha^2 + \beta^2$ e $\alpha.\beta$.

Técnica: Desenvolvimento do quadrado da soma e da diferença de dois termos em T_{44} .

Exemplo: Calcular os valores de $(\alpha + \beta)^2$ e $(\alpha - \beta)^2$, sabendo que $\alpha^2 + \beta^2 = 25$ e $\alpha.\beta = 12$.

Solução: Por T_{44} , $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta = 25 + 2.12 = 49$. E, $(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta = 25 - 2.12 = 1$.

Assim, $(\alpha + \beta)^2 = 49$ e $(\alpha - \beta)^2 = 1$

T₄₉: Calcular os valores de $\alpha + \beta$ e $\alpha - \beta$, dados $\alpha^2 + \beta^2$ e $\alpha.\beta$.

Técnica: As mesmas que enfrentam a tarefa T_{48} , calculando, em seguida, as raízes quadradas dos resultados dos exemplos dados na tarefa.

Assim, $\alpha + \beta = 7$ e $\alpha - \beta = 1$.

T₄₍₁₀₎: Transformar o sistema de equações $\begin{cases} \alpha^2 + \beta^2 = q \\ \alpha.\beta = p \end{cases}$ no sistema $\begin{cases} \alpha + \beta = s \\ \alpha - \beta = u \end{cases}$ e calcular α e β , sendo que p e q são dados.

Técnica: As usadas Tarefas T_{48} e T_{49} .

T₄₍₁₁₎: Mostrar que $(\alpha - \beta)^2 - (\alpha + \beta)^2 = -4\alpha\beta$. **(T I T)**

A técnica é o desenvolvimento dos quadrados por regra distributiva e a redução de termos semelhantes.

Assim, $(\alpha - \beta)^2 - (\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 - \alpha\beta - \alpha\beta + \beta^2 - (\alpha^2 + \alpha\beta + \alpha\beta + \beta^2) = -4\alpha\beta$, ou seja $(\alpha - \beta)^2 - (\alpha + \beta)^2 = -4\alpha\beta$.

Usando exemplo numérico, $(5 - 3)^2 - (5 + 3)^2 = -4.5.3 = -60$.

T₄₍₁₂₎: Calcular $(\alpha - \beta)^2$ dados $\alpha + \beta$ e $\alpha \cdot \beta$.

Técnica: Tarefa T₄₍₁₁₎ (TIT).

Exemplo: Seja a soma de dois números igual a 11 e seu produto igual a 30, qual o quadrado diferença deles?

Solução: Sejam α e β esses números. Então a soma deles é $\alpha + \beta = 11$ e o seu produto é dado por $\alpha \cdot \beta = 30$.

Considerando que $(\alpha - \beta)^2 - (\alpha + \beta)^2 = -4\alpha\beta$, então, $(\alpha - \beta)^2 - 11^2 = -4 \cdot 30$, que resulta em $(\alpha - \beta)^2 = 1$.

T₄₍₁₃₎: Dada a soma e o produto de dois números reais, determinar, sem calculá-los, se eles são iguais, distintos ou não são possíveis.

Técnica: Análise do quadrado da diferença dos números.

Exemplos: Dada a soma e o produto de dois números reais, determinar se esses números são possíveis, e no caso de serem, se são iguais ou distintos.

a) $S = -5$ e $P = -66$

b) $S = 12$ e $P = 36$

c) $S = 8$ e $P = 25$

Solução: Sejam os números α e β . Pelas tarefas T₄₍₁₁₎ e T₄₍₁₂₎, tem-se que $(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta$. Dessa maneira:

a) $(\alpha - \beta)^2 = (-5)^2 - 4 \cdot (-66) = 25 + 264 = 289$. Como $(\alpha - \beta)^2 = 289 > 0$, então os números α e β são reais e distintos.

b) $(\alpha - \beta)^2 = 12^2 - 4 \cdot 36 = 144 - 144 = 0$. Como $(\alpha - \beta)^2 = 0$, então os números α e β são reais e iguais.

c) $(\alpha - \beta)^2 = 8^2 - 4 \cdot 25 = 64 - 100 = -36$. Como $(\alpha - \beta)^2 = -36 < 0$, então os números α e β não são possíveis para os números reais.

T₄₍₁₄₎: Calcular $\alpha - \beta$ dados $\alpha + \beta$ e $\alpha \cdot \beta$, se possível.

Técnica: Uso da tarefa T₄₍₁₂₎ para calcular $(\alpha - \beta)^2$, em seguida, se possível, calcular sua raiz quadrada.

Nos exemplos da tarefa T₄₍₁₃₎, tem-se que:

a) $(\alpha - \beta)^2 = 289$, então $\alpha - \beta = 17$.

b) $(\alpha - \beta)^2 = 0$, então $\alpha - \beta = 0$.

c) $(\alpha - \beta)^2 = -36$, então $\alpha - \beta$ não é possível.

T₄₍₁₅₎: Transformar o sistema de equações $\begin{cases} \alpha + \beta = s \\ \alpha \cdot \beta = p \end{cases}$ no sistema $\begin{cases} \alpha + \beta = s \\ \alpha - \beta = u \end{cases}$ e calcular α e β (se possível), dados s e p .

Técnica: Calcular $(\alpha - \beta)^2$, analisar o resultado e, se possível, escrever o sistema $\begin{cases} \alpha + \beta = s \\ \alpha - \beta = u \end{cases}$. Em seguida, resolvê-lo pelo método da adição.

Exemplo: Transformar o sistema $\begin{cases} \alpha + \beta = 2 \\ \alpha \cdot \beta = -120 \end{cases}$ num sistema do 1º grau, se possível, e calcular α e β .

Solução: Articulação das tarefas T₄₍₁₁₎, T₄₍₁₂₎, T₄₍₁₃₎, T₄₍₁₄₎.

Sabe-se, por T₄₍₁₁₎, que $(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta$. Assim,

$(\alpha - \beta)^2 = 2^2 - 4 \cdot (-120) = 4 + 480 = 484$, que é positivo. Logo, α e β são reais e distintos, e $\alpha - \beta = \sqrt{484} = 22$. Desse modo, tem-se o sistema do 1º grau $\begin{cases} \alpha + \beta = 2 \\ \alpha - \beta = 22 \end{cases}$, que resolvido se determina $\alpha = 12$ e $\beta = -10$.

T₄₍₁₆₎: Fatorar, se possível, os trinômios do 2º grau do tipo $T = x^2 + Sx + P$ como produto de binômios do 1º grau do tipo $T = (x + \alpha) \cdot (x + \beta)$, em que $S = \alpha + \beta$ e $P = \alpha \cdot \beta$ (tarefa inversa à tarefa T₄₍₃₎).

Técnica: Articulação das tarefas T₄₍₁₁₎, T₄₍₁₂₎, T₄₍₁₃₎, T₄₍₁₄₎ e T₄₍₁₅₎.

Exemplo: Fatorar, se possível, os trinômios:

a) $T = x^2 + 15x + 36$

b) $T = x^2 - 14x + 49$

c) $T = x^2 + 2x + 5$

Solução: O enfrentamento da tarefa consiste em calcular os valores de α e β . Por T₄₍₃₎, sabe-se que $x^2 + Sx + P = (x + \alpha) \cdot (x + \beta) = x^2 + (\alpha + \beta)x + \alpha\beta$. Assim, tem-se que:

a) $\begin{cases} \alpha + \beta = 15 \\ \alpha \cdot \beta = 36 \end{cases}$. Assim, por T₄₍₁₂₎, tem-se que $(\alpha - \beta)^2 = 15^2 - 4 \cdot 36 = 225 - 144 = 81$.

Como $(\alpha - \beta)^2 = 81 > 0$, então, por T₄₍₁₃₎, o trinômio é fatorável na forma $(x + \alpha) \cdot (x + \beta)$ e α e β são reais e distintos. Desse modo, tem-se que $\alpha - \beta = 9$ que resulta no

sistema $\begin{cases} \alpha + \beta = 15 \\ \alpha - \beta = 9 \end{cases}$, que resolvido pelo método da adição, encontra-se $\alpha = 12$ e

$\beta = 3$. Finalmente, tem-se $x^2 + 15x + 36 = (x + 12).(x + 3)$.

b) $\begin{cases} \alpha + \beta = 8 \\ \alpha.\beta = -33 \end{cases}$, que feito de maneira análoga ao item (a), vem que $(\alpha - \beta)^2 = 0$, então,

o trinômio é fatorável na forma $(x + \alpha).(x + \beta)$ e α e β são reais e iguais e seus valores são iguais a -7 e o trinômio é quadrado perfeito. Assim, $x^2 - 14x + 49 = (x - 7).(x - 7) = (x - 7)^2$.

c) $\begin{cases} \alpha + \beta = 2 \\ \alpha.\beta = 5 \end{cases}$. Calculando $(\alpha - \beta)^2 = 2^2 - 4.5 = 4 - 20 = -16$. Logo, o trinômio não pode ser fatorado na forma $(x + \alpha).(x + \beta)$, com α e β reais.

T₄₁₇: Escrever o trinômio $T = ax^2 + bx + c$ na forma $T = a(x^2 + Sx + P)$.

Técnica: Por em evidência o coeficiente do 2º grau dividindo cada termo do trinômio por esse coeficiente.

Exemplo: Escrever o trinômio $T = 3x^2 + 12x - 15$ na forma $a(x^2 + Sx + P)$.

Solução: Pondo o coeficiente 3 em evidência e dividindo os termos de T por 3, tem-se $3.(x^2 + 4x - 5)$

T₄₁₈: Fatorar, se possível, o trinômio $T = ax^2 + bx + c$ como o produto

$$T = a(x + \alpha).(x + \beta)$$

Técnica: Proceder da mesma maneira como em $T_{4(17)}$ obtendo $T = a(x^2 + Sx + P)$ e, em seguida, fatorar, se possível, o trinômio $x^2 + Sx + P$ por meio das técnicas usadas em $T_{4(17)}$.

Exemplo: Escrever o trinômio $T = 3x^2 + 12x - 15$, como $T = a(x + \alpha).(x + \beta)$, se possível.

Solução: Por $T_{4(17)}$, tem-se que $T = 3(x^2 + 4x - 5)$. O fator $(x^2 + 4x - 5)$ pode ser estudado por meio de $T_{4(16)}$. Assim, para $x^2 + 4x - 5$ tem-se $S = 4$ e $P = -5$, donde calcula-se $(\alpha - \beta)^2 = 36$ que indica a possibilidade da fatoração. Daí se tem o sistema $\begin{cases} \alpha + \beta = 4 \\ \alpha - \beta = 6 \end{cases}$, donde se calcula $\alpha = 5$ e $\beta = -1$. Logo, $T = 3(x + 5).(x - 1)$.

T₄₍₁₉₎: Fatorar binômios do tipo $x^2 + Sx$ como o produto $(x + \alpha).(x + \beta)$.

Técnica: A mesma empregada em $T_{4(16)}$.

Exemplo: Fatorar $x^2 + 5x$.

Solução: Nesse caso $S = \alpha + \beta = 5$ e $P = 0$. Assim, por meio de $T_{4(16)}$, tem-se que $(\alpha - \beta)^2 = 25$ e $\alpha - \beta = 5$. Dai, conclui-se que $\alpha = 5$ e $\beta = 0$. Logo, $x^2 + 5x = (x + 5)(x + 0)$ ou $x^2 + 5x = x.(x + 5)$.

$T_{4(20)}$: Fatorar os binômios do 2º grau do tipo $x^2 - P$ como um produto de binômios do primeiro grau.

Técnica: A mesma empregada em $T_{4(16)}$.

Exemplo: Fatorar $x^2 - 25$.

Solução: Nesse caso $S = \alpha + \beta = 0$ e $P = -25$. Assim, por meio de $T_{4(16)}$, tem-se que $(\alpha - \beta)^2 = 100$ e $\alpha - \beta = 10$. Dai, conclui-se que $\alpha = 5$ e $\beta = -5$. Logo, $x^2 - 25 = (x + 5)(x - 5)$.

$T_{4(21)}$: Calcular o valor da variável x de modo que $(x - \alpha).(x - \beta) = 0$.

Técnica: Regra do produto nulo para resolver equações do 1º grau.

Assim, tem-se $x - \alpha = 0$ ou $x - \beta = 0$, onde $x = \alpha$ ou $x = \beta$.

$T_{4(22)}$: Calcular o valor de x de modo que $x.(x - \alpha) = 0$.

Técnica: Regra do produto nulo para resolver equações do 1º grau.

$T_{4(23)}$: Calcular as raízes de trinômios do 2º grau do tipo $T = ax^2 + bx + c$.

Técnica: Fatoração do trinômio segundo as tarefas $T_{4(17)}$ e $T_{4(18)}$.

Exemplo: Calcular as raízes do trinômio $3x^2 + 12x - 15$, sabendo-se as raízes de um trinômio do 2º grau são os valores que o tornam nulo.

Solução: A tarefa traduz-se em calcular as raízes da equação $3x^2 + 12x - 15 = 0$. Por $T_{4(17)}$, tem-se $3(x^2 + 4x - 5) = 0$. A tarefa agora consiste em fatorar o trinômio $x^2 + 4x - 5$ como produto de binômios do 1º grau $(x - \alpha).(x - \beta)$. Por $T_{4(16)}$, $S = \alpha + \beta = 4$ e $P = \alpha\beta = -5$. Por $T_{4(13)}$, tem-se que $(\alpha - \beta)^2 = 4^2 - 4.(-5) = 36$. Assim, a fatoração é possível e α e β são reais e distintos. Para calcular α e β basta resolver o sistema $\begin{cases} \alpha + \beta = 4 \\ \alpha - \beta = 6 \end{cases}$, em que $\alpha = 5$ e $\beta = -1$. Assim, tem-se $3(x + 5).(x - 1) = 0$, que

por $T_{4(21)}$ leva a $x = -5$ ou $x = 1$, ou seja, as raízes do trinômio $3x^2 + 12x - 15$ são reais e distintas e com sinais opostos a α e β .

5.4.4.1 Considerações sobre ST_4

A mudança de estado de E_3 para E_4 corporificado pelo sistema de tarefas ST_4 consiste na resposta R desejada, ou o último estado alcançado pelo MEPR construído por $\mathcal{P}$. A tarefa principal desse último sistema passou a ser fatorar o trinômio do 2º grau. As tarefas T_{41} a $T_{4(14)}$ que formam o primeiro conjunto de tarefas continuam com as mesmas funções postas em ST_3 , com exceção de $T_{4(11)}$ e $T_{4(12)}$ que ganham o status de tarefas analíticas, pois discutem a possibilidade de existência e qualidade dos números α e β , e a tarefa $T_{4(13)}$ que inclui a possibilidade ou não de encontrar os números α e β . Porém, as $T_{4(15)}$ a $T_{4(19)}$ fazem parte de um conjunto de tarefas que são enfrentadas por técnicas construídas a partir do primeiro conjunto de tarefas, o que não ocorria no sistema de tarefas ST_3 . A resolução de equações do 2º grau, postas de maneira implícita nas tarefas $T_{4(20)}$ a $T_{4(23)}$ passam a ter como tecnologia a fatoração do trinômio do 2º grau.

A tarefa $T_{4(16)}$ possibilita que qualquer trinômio do 2º grau seja escrito na forma $a(x^2 + Sx + P)$ de modo que viabilize sua análise e sua fatoração, se possível, na forma $a(x + \alpha).(x + \beta)$, em que $\alpha + \beta = S$ e $\alpha.\beta = P$.

Assim, a fatoração do trinômio do 2º grau ensinada no EF substantia o teorema fundamental da álgebra (TFA) que assumimos como o elemento tecnológico-teórico que justifica todo o processo de construção do sistema de tarefas. O TFA, em seu enunciado afirma que todo polinômio $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ possui pelo menos uma raiz real ou complexa e assim pode ser decomposto em n fatores $(x - x_n)$. Admitindo que a fatoração do trinômio do 2º grau é objeto matemático escolar que tem seu *habitat* no 8º ano do Ensino Fundamental, consideramos o TFA em que $p(x) = T$, quando fatorável, os coeficientes dos fatores do 1º grau sejam reais. Assim, para $n = 2$, temos que $T = ax^2 + bx + c$ ($a_2 = a$; $a_1 = b$ e $a_0 = c$) e assumimos os seguintes critérios de fatoração do trinômio:

- 1) $p(x) = a(x + \alpha).(x + \beta)$, se $p(x)$ é fatorável em binômios do 1º grau (Critério C_1) ou;
- 2) $p(x) = ax^2 + bx + c$, se $p(x)$ é irreduzível (Critério C_2).

Desse modo, assumimos o TFA - que não está posto explicitamente no sistema de tarefas senão no MEPR de $\mathcal{P}$ - como a tecnologia que justifica a técnica de fatoração do trinômio 2º grau. Os polinômios constituem a teoria que justifica o TFA.

Assim, ST_4 é a resposta R desejada, que apesar de todo o processo de estudo, é parcial, pois a trajetória pessoal de formação docente continua como um PEP aberto, uma vez que novas condições podem ser encontradas ou construídas e que podem modificar a infraestrutura até então criada.

A construção da organização didático-matemática a partir da compreensão do MER_0 detona todo o processo de problematização da prática de ensino de objetos matemáticos da escola como um processo de transposição didática que não encerra e que caracteriza o dinamismo do MEPR.

6 CONSIDERAÇÕES E PERSPECTIVAS FUTURAS

O professor que questiona as práticas de ensino de certo objeto que vive na escola se vê diante de um problema praxeológico que se desdobra em questões do tipo: o que ensinar desse objeto e como ensinar?

A busca de respostas para essa questão se mostrou como tarefa complexa, pois requereu do professor pesquisador o desenvolvimento de um percurso de estudo e investigação ou pesquisa (PEP) que evidenciasse as condições consideradas pertinentes para o progresso da sua infraestrutura didático-matemática.

Nesse percurso, os sistemas didáticos solitários e auxiliares jogam papel fundamental, pois a sua compreensão sistematiza sobremaneira o desenvolvimento do PEP e direciona a prática de ensino como processo de transposição didática interna em suas duas fases: a preparação do texto do saber e sua realização em sala de aula, ou mais precisamente, a organização matemática e didática em dialética contínua para a formação pessoal do professor.

A trajetória pessoal de formação docente (TPFD) é uma consequência desse percurso e uma resposta considerada factível para a instituição docente, pois impõe ao professor um processo de estudo contínuo que implica na dinâmica praxeológica e cognitiva de seu ensino que, por sua vez, implica no seu aprendizado, na sua formação.

A compreensão da transposição didática interna e da TAD e seus encaminhamentos metodológicos dão o suporte para o questionamento de práticas de ensino a partir do enfrentamento de problemas concretos enfrentados pelo professor nessas práticas. E isso está claro quando Chevallard (2009a; 2009b) anuncia a formação do professor como a sua dinâmica praxeológica e cognitiva e apresenta o problema primordial em que para dado projeto de atividade que o professor deseja se enganjar, qual o conjunto de praxeologias que este deve acessar na concepção e execução desse projeto? Assim, Chevallard (2009a; 2009b) encaminha o percurso de estudo e investigação como metodologia de pesquisa e desenvolvimento de praxeologias.

Assim, compreender a transposição didática interna em suas duas fases como a prática de ensino é fundamental para o desenvolvimento da metodologia

dessa pesquisa, pois a dialética dos sistemas solitários e auxiliares se baseia nessa compreensão. Para tanto, as obras estudadas aqui exercem papel fundamental, pois a partir delas podem ser construídas as compreensões necessárias para o desenvolvimento da pesquisa.

O estudo das obras pertencentes aos programas epistemológicos em didática das matemáticas liderados por Joseph Gascón e Yves Chevallard possibilitaram a compreensão de noções fundamentais da TAD e seus encaminhamentos metodológicos, tais como: o modelo mínimo que sustancia a praxeologia e seus momentos didáticos; as noções de modelo epistemológico de referência; a compreensão do problema praxeológico do professor e seu enfrentamento encaminhado pelas noções de percurso de estudo e investigação, de sistemas de tarefas e a compreensão do problema praxeológico como um problema de formação docente a ser enfrentado, além da compreensão de formação como a dinâmica praxeológica e cognitiva do professor em relação a determinado objeto de ensino.

A trajetória pessoal de formação docente se substancia a partir do PEP iniciado pelo professor $\mathcal{P}$ quando este se vê a frente de um modelo epistemológico de referência (MER_0) para o ensino das resoluções das equações de segundo grau proposto por Silva e Guerra (2009) onde se articulam objetos da matemática já estudados e a estudar, tais como o produto de polinômios, a fatoração, os produtos notáveis, sistema de equações do primeiro grau para a resolução de equações do segundo grau, identidades de polinômios, entre outros.

O MER_0 engendrou diferentes sistemas didáticos, solitários e auxiliares, para as construções de MEPR com o suporte de um saber matemático escolar que disponibilizasse as tecnologias que deem às tarefas a unidade necessária e ao mesmo tempo possibilitasse o estudo de objetos a serem estudados no horizonte do currículo escolar.

Os estados apresentados nessa pesquisa que representam a dinâmica do modelo epistemológico pessoal de referência evidenciaram as mudanças sofridas nas relações pessoais de $\mathcal{P}$ com os objetos matemáticos equações do segundo grau e fatoração do trinômio do segundo grau, objetivados nos sistemas de tarefas desenvolvidos ao longo desse percurso de formação.

No estado inicial, a organização para ensino da resolução de equação do segundo grau realizada por $\mathcal{P}$, que é fruto de sua compreensão construída a partir

de sua história de suas relações pessoais com esse objeto e que substantia um $MEPR_0$, realizava-se por meio do sistema de tarefas ST_0 (Quadro 13).

Quadro 3: O sistema de tarefas ST_0

Tipos de tarefas	
T_{01}	Definir uma equação do 2º grau.
T_{02}	Exemplificar equações do 2º grau.
T_{03}	Determinar os valores dos coeficientes da equação.
T_{04}	Classificar as equações do 2º grau como completa ou incompleta.
T_{05}	Resolver a equação incompleta do tipo $ax^2 - c = 0$.
T_{06}	Resolver a equação incompleta do tipo $ax^2 + bx = 0$.
T_{07}	Resolver equações completas do 2º grau.

Fonte: do autor

Esse sistema de tarefas não apresenta uma inteligibilidade que dê unidade aos três tipos de equação do segundo grau. Na verdade, se constituem em três algoritmos para atender três tipos de equações, sem uma tecnologia que permita entendê-los de modo único, com a perda da generalidade desejada pelo fazer matemático. Não há explicitamente um método único que se reduza aos três algoritmos. As técnicas parecem surgir como truques matemáticos, por exemplo, o truque de completar o quadrado que somente é usado para encontrar a fórmula da equação do segundo grau.

O encontro com o MER_0 imprimiu mudanças nas relações de ensino $\mathcal{P}$ com a resolução de equações do segundo grau e os objetos articulados a ela que de imediato fizeram emergir a questão Q_0 : Como organizar o ensino de resolução de equação do segundo grau a partir do MER_0 ? Assim, uma nova compreensão deste objeto de ensino foi desenvolvida por $\mathcal{P}$ no sistema solitário $S_0(\mathcal{P}, Q_0)$ associado ao sistema $S_0(\mathcal{P}, MER_0)$. A resposta desse estudo representa um novo estado E_1 para o modelo epistemológico pessoal de referência ($MEPR_1$). Associado a esse modelo, $\mathcal{P}$ desenvolve o sistema de tarefas ST_1 (Quadro 14) como resposta provisória à questão Q_0 .

Quadro 4: O sistema de tarefas ST₁

Tipos de tarefas	
T ₁₁	Desenvolver os produtos de polinômios do tipo $(x + a)(x + b)$. A tarefa de desenvolver os produtos notáveis: o quadrado da soma e da diferença de dois termos: $(a + b)^2$ e $(a - b)^2$, bem como o produto da soma pela diferença estão incluídas em T1.
T ₁₂	Fatorar polinômios do 2º grau com uma variável.
T ₁₃	Resolver equações do tipo $x^2 + px + c = 0$ por fatoração.
T ₁₄	Desenvolver a diferença $(a - b)^2 - (a + b)^2$. (T I T- tarefa intermediária transformadora).
T ₁₅	Solucionar sistemas de equações do 1º grau com duas variáveis.
T ₁₆	Solucionar equações do 2º grau do tipo $x^2 + Sx + P = 0$, onde S e P são, respectivamente, a soma e o produto das raízes α e β da equação, por meio do sistema: $\begin{cases} x + y = S \\ x - y = \sqrt{S^2 - 4P} \end{cases} \text{ Sistema } S_1$
T ₁₇	Desenvolver a fórmula $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ da equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$, por meio do sistema S ₁ .

Fonte: Do autor

O sistema ST₁ parecia realizar a articulação de objetos matemáticos escolares por meio de tarefas do 8º e 9º ano do EF para a resolução de equações do 2º grau.

Embora a relação de $\mathcal{P}$ tenha sofrido mudanças pelo encontro com o MER₀, pois as articulações dos objetos matemáticos pareciam estar sendo realizadas a contento, quando ST₁ foi posto à prova em sala de aula, instaurando o sistema didático auxiliar S($\mathcal{P}$, A, ST₁) produziu questões e respostas que foram estudadas e analisadas por $\mathcal{P}$ e seu orientador de estudo $\mathcal{P}''$ no sistema auxiliar S($\mathcal{P}$, $\mathcal{P}''$, RST₁) que houve problema de articulação da tarefa T₁₄. Essa tarefa aparece na organização de maneira repentina e se reduziu ao uso da técnica de desenvolver produtos notáveis e redução de termos semelhantes. Não ficou clara a relação entre os produtos notáveis e a resolução da equação do 2º grau. Assim, o problema praxeológico de $\mathcal{P}$ é levantado com a seguinte questão Q₁: Como eliminar a estranheza causada por T₁₄ e dar unidade a organização, respeitando de algum modo o MEPR₁?

Na busca de resposta à questão Q₁, foi instaurado o sistema solitário S₁($\mathcal{P}$, Q₂) associado ao sistema S₁($\mathcal{P}$, RST₁) para a construção de uma resposta

praxeológica para o enfrentamento da estranheza causada por uma tarefa que não faz parte de seu EP para o ensino. Assim, uma nova compreensão do MER_0 denotada por $MEPR_2$ se corporifica associado ao sistema de tarefas ST_2 , como mostra o Quadro 15 a seguir.

Quadro 15: O sistema de tarefas ST_2

Tipos de tarefas	
T_{21}	Desenvolver o produto do tipo $(a + b)x$, onde a e b são constantes reais.
T_{22}	Fatorar a expressão $ax + bx$. (Tarefa inversa à tarefa T_{21}).
T_{23}	Desenvolver os produtos de polinômios do tipo $(x + a)(x + b)$ onde a e b são constantes, exibindo a soma e o produto, tal como $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + a.b$
T_{24}	Desenvolver os produtos notáveis: o quadrado da soma e da diferença de dois termos: $(a + b)^2$ e $(a - b)^2$, e o produto da soma pela diferença $(a + b)(a - b)$.
T_{25}	Fatorar trinômios do 2º grau com uma variável do tipo $x^2 + Sx + P$ como produto de binômios $(x + \alpha)(x + \beta)$
T_{26}	(Tarefa intermediária transformadora): Desenvolver a diferença $(a - b)^2 - (a + b)^2$.
T_{27}	Dada a soma e o produto de dois números, calcular a diferença deles.
T_{28}	Solucionar sistemas de equações do 1º grau com duas variáveis.
T_{29}	Calcular dois números cuja soma e o produto deles sejam dados.
$T_{2(10)}$	Resolver equações do tipo $(x - a)(x - b) = 0$.
$T_{2(11)}$	Resolver equações do tipo $x^2 + Sx + P = 0$ por fatoração..
$T_{2(12)}$	Solucionar equações do 2º grau do tipo $x^2 + sx + p = 0$, onde $-s$ e p são, respectivamente, a soma e o produto das raízes α e β da equação.
$T_{2(13)}$	Determinar as raízes de uma equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$, por meio de seus coeficientes.

Fonte: Do autor

A resposta praxeológica R_2 representada por ST_2 encaminhou uma nova discussão em outro sistema auxiliar $S(\mathcal{P}, \mathcal{P}', T_0)$ em que $\mathcal{P}'$ eram alunos-professores do curso de licenciatura e T_0 a tarefa que foi discutida nesse sistema didático auxiliar (SDA_3). Essa tarefa T_0 foi inspirada na tarefa T_{29} com a imposição de uma restrição, como segue: *dada a soma e o produto de dois números, calcular a diferença entre eles, sem o uso de equações do 2º grau.*

As discussões em SDA_3 revelaram que novas condições poderiam ser impostas no sistema de tarefas para o enfrentamento da tarefa T_0 e um conjunto de questões Q_{2i} foi levantado e enfrentado por $\mathcal{P}$ no sistema didático solitário $S_2(\mathcal{P}, Q_{2i})$

associado ao sistema $S_2(\mathcal{P}, SDA_4)$ das quais se destaca $Q_{2(3)}$: Que tipos de tarefas podem ser propostas para o ST de modo que a tarefa intermediária transformadora (T I T) se torne a técnica para o enfrentamento T_0 ?

Assim, uma nova compreensão do MER_0 foi estabelecida (representada por $MEPR_3$) e um novo estado E_3 da diacronia da trajetória é estabelecido e corporificado pelo sistema de tarefas ST_3 (quadro 16).

Quadro 16: O sistema de tarefas ST₃

	Tipos de tarefas		Tipos de tarefas
T ₃₁	Desenvolver o produto de monômios por polinômio do tipo $x(a + b)$.	T ₃₁₁	Calcular $(a - b)^2$ dados $a + b$ e $a.b$
T ₃₂	Fatorar polinômios do tipo $ax + bx$	T ₃₁₂	Calcular $a - b$ dados $a + b$ e $a.b$
T ₃₃	Desenvolver os produtos de binômios do tipo $(x + a)(x + b)$ onde a e b são termos independentes de x , exibindo a soma $(a + b)$ e o produto $(a.b)$	T ₃₁₃	Transformar o sistema de equações $\begin{cases} a + b = s \\ a.b = p \end{cases}$ no sistema $\begin{cases} a + b = s \\ a - b = u \end{cases}$ e calcular a e b , sendo que s e p são dados
T ₃₄	Desenvolver os produtos notáveis $(a + b)^2$ e $(a - b)^2$ e $(a + b).(a - b)$	T ₃₁₄	Fatorar os trinômios do 2º grau do tipo $x^2 + Sx + P$ como produto de binômios do 1º grau do tipo $(x + a).(x + b)$ (tarefa inversa à tarefa T ₃₃)
T ₃₅	Calcular $(a - b)$, sem calcular a e b , dados os valores de $a^2 - b^2$ e $a + b$	T ₃₁₅	Fatorar os binômios do 2º grau do tipo $x^2 + Sx$ como produto de um monômio por um binômio do 1º grau.
T ₃₆	Transformar o sistema de equações $\begin{cases} a + b = s \\ a^2 - b^2 = k \end{cases}$ no sistema $\begin{cases} a + b = s \\ a - b = u \end{cases}$ e calcular a e b , sendo que s e k são dados	T ₃₁₆	Fatorar os binômios do 2º grau do tipo $x^2 - P$ como um produto de binômios do primeiro grau
T ₃₇	Calcular os valores de $(a + b)^2$ e $(a - b)^2$ dados os valores de $a^2 + b^2$ e $a.b$	T ₃₁₇	Calcular o valor da variável x nas equações produto do tipo $(x - a).(x - b) = 0$
T ₃₈	Calcular os valores de $a + b$ e $a - b$, dados $a^2 + b^2$ e $a.b$	T ₃₁₈	Calcular o valor de x nas equações produto do tipo $x.(x - a) = 0$
T ₃₉	Transformar o sistema de equações $\begin{cases} a^2 + b^2 = q \\ a.b = p \end{cases}$ no sistema $\begin{cases} a + b = s \\ a - b = u \end{cases}$ e calcular a e b , sendo que p e q são dados	T ₃₁₉	Resolver equações do tipo $x^2 - Sx + P = 0$
T ₃₁₀	Desenvolver a expressão $(a - b)^2 - (a + b)^2$.	T ₃₂₀	Resolver equações do tipo $ax^2 + bx + c = 0$

Fonte: Do autor

A condição imposta em T_0 se constituiu como uma dificuldade para $\mathcal{P}'$ em seu enfrentamento, pois para encontrar a diferença de dois números havia necessariamente, para eles, a tarefa anterior de calcular tais números. Esse modo de fazer e pensar a tarefa se tornou um obstáculo que precisava ser enfrentado por $\mathcal{P}$ em seu MEPR. Nesse sentido, uma nova compreensão do MER_0 encaminhou o $MEPR_3$ e sua resposta praxeológica $R_3^\diamond$ objetivamente apresentada em ST_3 em que a tarefa $T_{3(11)}$ é incluída e que leva à instauração de outros sistemas didáticos para sua discussão.

No sistema didático auxiliar (SDA_4) - $S(\mathcal{P}, \mathcal{P}'', ST_3)$ - $\mathcal{P}''$ sugere a mudança da tarefa T_0 para T_1 : *dada a soma e o produto de dois números, calcular o quadrado da diferença deles, sem o uso de equações do 2º grau*. Essa nova tarefa que foi encaminhada para o sistema didático auxiliar (SDA_5) $S_5(\mathcal{P}', \mathcal{P}, T_1)$, não surgiu repentinamente. Calcular o quadrado da diferença é uma tarefa que evidencia a relação entre os produtos notáveis $(a - b)^2 = (a + b)^2 - 4ab$ como também evidencia o quadrado da diferença de dois números como uma tarefa que discute a existência e a qualidade desses números, se são iguais ou distintos. Ou seja, o quadrado da diferença de dois números é o próprio discriminante de uma equação do 2º grau em que esses dois números, caso existam, são suas raízes reais.

Assim, T_1 tornava evidente a relação entre os produtos notáveis, pois calcular o quadrado da diferença de dois números já deixa claro que se trata de um produto notável, apesar de que alguns alunos-professores da licenciatura no SDA_5 tentarem também (como em SDA_3) calcular primeiro os números para depois calcular o quadrado da diferença deles. Quando um dos alunos relacionou o quadrado da diferença ao discriminante da equação, a tarefa de calcular o quadrado da diferença ganha um novo *status* na turma.

O pensar sobre o saber que dá unidade às tarefas encaminhou $\mathcal{P}$ para o Teorema Fundamental da Álgebra, e que, pelas condições observadas e criadas no seu percurso de formação, torna claro o problema da fatoração do trinômio do 2º grau. Assim, instaurou-se o sistema didático solitário $S_3(\mathcal{P}, O_{ft})$ associado a $S_3(\mathcal{P}, Q_{3(i)})$, em que $Q_{3(i)}$ são questões demandadas do estudo realizado em SDA_5 , das quais se destacam: Q_{32} : Fatorar um trinômio do 2º grau tem como técnica a resolução da equação de segundo grau associada? Q_{33} : A solução da equação do segundo grau tem como técnica a fatoração do trinômio do segundo grau?

A partir disso, a fatoração do trinômio do segundo grau passa a ter para outro *status*, pois nas análises realizadas por $\mathcal{P}$ a fatoração se constituía em uma das tarefas que se articulava a outras para a tarefa principal de resolver equações do 2º grau. A técnica usada para fatorar o trinômio do 2º grau se dava por tentativas dada a soma e o produto dos números que se queira no trinômio $x^2 + Sx + P$.

Esse novo *status* da fatoração do trinômio desencadeou o trabalho da técnica para o enfrentamento dessa tarefa que vem sendo preterida no 8º ano, seja por autores de livros didáticos, seja por professores²³.

As tarefas propostas a partir do MER₀ para resolução de equações do 2º grau foram repensadas para a fatoração do trinômio, ou seja, a tarefa de fatorar o trinômio passa a ser fundamental e as técnicas usadas primeiramente para o cálculo das raízes da equação do 2º grau por meio da relação dos produtos notáveis (tarefa intermediária transformadora) para transformação do sistema de equações do 2º grau em um sistema do 1º grau com técnicas rotineiras de resolução, passaram a ser técnicas para a fatoração do trinômio do 2º grau.

Assim, resolver equações do 2º grau passa a ser tarefa decorrente da tarefa de fatorar o trinômio do 2º grau e que substantia uma nova compreensão de $\mathcal{P}$ sobre o MER₀: o MEPR₄, que configura o 4º estado (E₄) corporificado no sistema de tarefas ST₄ (quadro 17). E mais ainda, a tarefa de calcular o quadrado da diferença de dois números, passou a ser uma tarefa que discute se o trinômio pode ser escrito ou não como um produto de binômios do 1º grau de coeficientes reais.

Além disso, a técnica de completamento de quadrado que aparece somente nos livros didáticos no 9º ano do EF como técnica que cumpre o papel principal de mostrar a fórmula usual de resolução de equações do 2º grau, passa a ser também uma técnica que possibilita a fatoração do trinômio do 2º grau com critérios que indicam se um trinômio é ou não fatorável, como o faz o quadrado da diferença de dois números. Embora o sistema de tarefas para essa técnica não tenha sido desenvolvido, o completamento de quadrados usado para escrever um trinômio do 2º qualquer $T = ax^2 + bx + c$ como a diferença de dois quadrados $T = X^2 - k$ possibilita o pensar num MEPR a ser construído.

²³ Em conversas informais com três professores, essas afirmaram não ensinar o caso de fatoração do trinômio do 2º grau em nenhum ano do EF.

Quadro 17: O sistema de tarefas ST₃

	Tipos de tarefas		Tipos de tarefas
T₄₁	Desenvolver o produto de monômios por polinômio do tipo $x(\alpha + \beta)$.	T₄₍₁₃₎	Dada a soma e o produto de dois números reais, determinar se eles são iguais, distintos ou não são possíveis.
T₄₂	Fatorar polinômios do tipo $\alpha x + \beta x$.	T₄₍₁₄₎	Calcular $\alpha - \beta$ dados $\alpha + \beta$ e $\alpha \cdot \beta$, se possível.
T₄₃	Desenvolver os produtos de binômios do tipo $(x + \alpha)(x + \beta)$ onde α e β são termos independentes de x , exibindo a soma $(\alpha + \beta)$ e o produto $(\alpha \cdot \beta)$.	T₄₍₁₅₎	Transformar o sistema de equações $\begin{cases} \alpha + \beta = s \\ \alpha \cdot \beta = p \end{cases}$ no sistema $\begin{cases} \alpha + \beta = s \\ \alpha - \beta = u \end{cases}$ e calcular α e β , dados s e p .
T₄₄	Desenvolver os produtos notáveis $(\alpha + \beta)^2$ e $(\alpha - \beta)^2$ e $(\alpha + \beta) \cdot (\alpha - \beta)$.	T₄₍₁₆₎	Fatorar, se possível, os trinômios do 2º grau do tipo $T = x^2 + Sx + P$ como produto de binômios do 1º grau do tipo $T = (x + \alpha) \cdot (x + \beta)$, em que $S = \alpha + \beta$ e $P = \alpha \cdot \beta$ (tarefa inversa à tarefa T ₄₃).
T₄₅	Calcular $(a - b)$, sem calcular a e b , dados os valores de $a^2 - b^2$ e $a + b$.	T₄₍₁₇₎	Escrever o trinômio $ax^2 + bx + c$ na forma $a(x^2 + Sx + P)$.
T₄₆	Solucionar sistemas de equações do 1º grau com duas variáveis..	T₄₍₁₈₎	Fatorar, se possível, o trinômio $ax^2 + bx + c$.
T₄₇	Transformar o sistema $\begin{cases} \alpha + \beta = s \\ \alpha^2 - \beta^2 = k \end{cases}$ no sistema $\begin{cases} \alpha + \beta = s \\ \alpha - \beta = u \end{cases}$ e calcular α e β , sendo que s e k são dados.	T₄₍₁₉₎	Fatorar os binômios do 2º grau do tipo $x^2 + Sx$.
T₄₈	Calcular os valores de $(\alpha + \beta)^2$ e $(\alpha - \beta)^2$ dados os valores de $\alpha^2 + \beta^2$ e $\alpha \cdot \beta$.	T₄₍₂₀₎	Fatorar os binômios do 2º grau do tipo $x^2 - P$ como um produto de binômios do primeiro grau.
T₄₉	Calcular os valores de $\alpha + \beta$ e $\alpha - \beta$, dados $\alpha^2 + \beta^2$ e $\alpha \cdot \beta$.	T₄₍₂₁₎	Calcular o valor da variável x de modo que $(x - \alpha) \cdot (x - \beta) = 0$.
T₄₍₁₀₎	Transformar o sistema $\begin{cases} \alpha^2 + \beta^2 = q \\ \alpha \cdot \beta = p \end{cases}$ no sistema $\begin{cases} \alpha + \beta = s \\ \alpha - \beta = u \end{cases}$ e calcular α e β , sendo que p e q são dados.	T₄₍₂₂₎	Calcular o valor de x de modo que $x \cdot (x - \alpha) = 0$.
T₄₍₁₁₎	Mostar que $(\alpha - \beta)^2 - (\alpha + \beta)^2 = -4\alpha\beta$.	T₄₍₂₃₎	Calcular as raízes de trinômios do 2º grau do tipo $T = ax^2 + bx + c$.
T₄₍₁₂₎	Calcular $(\alpha - \beta)^2$ dados $\alpha + \beta$ e $\alpha \cdot \beta$.		

Fonte: Do autor

A construção da trajetória do PEP apresentada evidencia a mudança de relação do professor com a resolução da equação do segundo grau por meio da adição de novos elementos tecnológico-teóricos que fundamentaram seu MEPR que, em consequência, explicitou-se por meio da construção de novas praxeologias.

Sob a compreensão do problema de formação anunciado por Chevallard (2009a), podemos afirmar então que o PEP engendrado pela prática de ensino do professor, entendida como compostas das duas fases da TDI, frente à reconstrução do MEPR, constitui uma trajetória pessoal de formação docente (TPFD) para o professor.

A riqueza profunda do PEP pode ser influenciada de algum modo pelo objeto de ensino escolhido, que podem implicar em ganhos mais relevantes ou não de saberes e procedimentos matemáticos, acadêmicos ou escolares, para o professor. Mas, os encaminhamentos incertos permitem evidenciar outros saberes, às vezes, indispensáveis para as práticas matemáticas que nem sempre são objetos de ensino.

Foi evidenciado, por exemplo, o papel funcional de relações ou propriedades entre tarefas como técnicas das tarefas de transformação de uma tarefa problemática em tarefa determinada, ou seja, dotada de técnica que permite enfrentá-la. Embora as tarefas de transformações sejam rotineiras nas atividades matemáticas, elas são frequentemente recorridas no ensino, pelo professor, como *bypass* nas realizações das atividades matemáticas escolares. Isso é aqui observado nas relações entre expressões algébricas sobre produtos notáveis como técnicas indispensáveis para as transformações e por ele recorrida, quando a percebe, para construção de novas respostas praxeológicas.

O encontro com as tarefas de transformação na trajetória remeteu reflexivamente ao encontro de diferentes técnicas de tarefas de transformação, por exemplo, que são usadas nas práticas de ensino escolares, como as propriedades dos conjuntos numéricos em relação a uma dada operação que, geralmente, não são evidenciadas como regras para sintetizar expressões algébricas e numéricas; a substituição de variáveis em diferentes tipos de tarefas, por exemplo, como a redução dos sistemas algébricos lineares. Em todos esses casos a tarefa de transformação e suas técnicas são apresentadas por mostraçã, de modo naturalizado, sem questionamentos, como parte da resolução de uma tarefa problemática, e, por isso, tornadas invisíveis.

Talvez, por isso, frequentemente, o uso dos teoremas matemáticos, em articulação, ou isolados como técnica de transformação de tarefas no ensino da matemática escolar – o papel funcional de transformar uma tarefa possível de ser realizada criando as hipóteses que permitirão uma ou mais tarefas serem enfrentadas, pela simples anunciação do teorema – não seja explícito, podendo ser até inexistente.

Assim, por exemplo, considerar os triângulos inscritos em um semicírculo é assegurar que são retângulos que criam a hipótese do teorema de Pitágoras, permitindo usar as relações métricas e trigonométricas fartamente conhecidas desse tipo de triângulo, para responder diferentes praxeologias escolares sobre esses objetos em relação.

As tarefas de transformação e suas técnicas podem ser vistas, então, como um dispositivo para construir integrações praxeológicas, pois estas integrações podem ser descritas como a transformação de uma tarefa problemática em tarefas rotineiras, no sentido de terem sido incorporadas anteriormente. Pode-se dizer que, de algum modo, esse pensar está no centro do modelo didático proposto pela TAD: naturalizar, problematizar o alcance da técnica, e, reconstruir a técnica para um dado tipo de tarefa, para só então institucionalizar essa técnica para o tipo de tarefa considerada. Foi uma técnica de transformação de tarefas que permitiu produzir as respostas $R^\diamond$ durante o PEP e ajudaram a traduzir o MEPR em respostas praxiológicas R .

Além de aquisições de novos saberes e procedimentos que resultam em novas organizações praxeológicas, o PEP engendrado pela prática de ensino, considerando as duas fases da TDI, também encaminhou de modo inevitável problemas relativos ao currículo e programas escolares para o ensino da matemática.

A complexidade e robustez dessa problemática exigem esforços que não admitem ser enfrentados por um professor isolado e se constitui em grande interesse para futuras pesquisas a serem realizadas por diferentes especialistas, mas com participação indispensável da instituição de docentes pesquisadores.

Finalmente, o PEP não seria engendrado sem os saberes da TAD. O problema da desarticulação das praxeologias e o papel funcional das organizações praxeológicas nas construções de novas organizações praxeológicas, evidenciados pela TAD, foram indispensáveis para levar o professor a questionar o saber

matemático, e vê-lo como problemático para ser ensinado e, em consequência, para ser aprendido.

Esse modo de pensar, sem dúvida, provê as condições para o questionamento das práticas de ensino vistas como dotadas das fases da TDI, uma da preparação reflexiva do saber a ser ensinado e outra do ensino reflexivo do saber. Portanto, as teorias do programa episemológico, em particular, a TAD, que inclui em seu cerne a transposição didática e o PEP, mostra-se como parte indispensável da infraestrutura de saberes necessários para a formação docente.

REFERÊNCIAS

AFFONSECA, E. T. M.. **Experiências em Matemática**: 4º livro, primeiro grau. 9. Ed. Belo Horizonte, LEMI; Rio de Janeiro, FENAME, 1980.

ANDRADE, R.C.D. **A noção de tarefa fundamental como dispositivo didático para um percurso de formação de professores**: o caso da geometria. Tese (Doutorado) – Universidade Federal do Pará, Instituto de Educação Matemática e Científica, Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas, Belém, 2012.

ANDRINI, A. **Praticando Matemática**: 6ª série. São Paulo: Editora do Brasil, 1989a.

ANDRINI, A. **Praticando Matemática**: 7ª série. São Paulo: Editora do Brasil, 1989b.

ANDRINI, A. **Praticando Matemática**: 8ª série. São Paulo: Editora do Brasil, 1989c.

ANDRINI, A, VASCONCELOS, M. J. **Praticando Matemática 8**. 4 ed. Renovada. Editora do Brasil, São Paulo, 2015.

ARAYA, A. MATHERON, Y. **Una problemática de la memoria: Propositiones y ejemplos para su estudio antropológico en didáctica de las matemáticas**. In: Sociedad, Escuela y Matemáticas: Aportaciones de la Teoría Antropológica do Didáctico (TAD), RUIZ, L., ESTEPA, A. GARCIA, F. J. Pág. 261-278. Universidade de Jaén, 2007.

ASSUNÇÃO, C. A. G. **Práticas com Matemáticas na Educação do Campo**: o caso da redução à unidade na Casa Escola da Pesca. Tese (Doutorado) – Universidade Federal do Pará, Instituto de Educação Matemática e Científica, Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas, Belém, 2016.

BARQUERO, B. **Ecología de la Modelización Matemática en la enseñanza universitaria de las Matemáticas**. Tese (Doutorado) – Universitat Autònoma de Barcelona, Espanha, 2009.

BOLEA, P. **El proceso de algebrización de organizaciones matemáticas escolares**. Monografía del Seminario Matemático García de Galdeano, n. 29. Zaragoza, Spain: Departamento de Matemáticas, Universidad de Zaragoza, 2003.

BONGIOVANNI, V., LEITE, O. R. V., LAURENANO, J. L. T. **Matemática é vida: Trabalhando com números, medidas e geometria**. 1º grau, 8ª série. 3ª edição. Ed. Ática, São Paulo, 1990.

BONJORNIO, J. R., OLIVARES, A., BONJORNIO, R.A., GUSMÃO, T. **Matemática: fazendo a diferença**. Edição renovada. Ed. FTD, São Paulo, 2009.

BOSCH, M. **La dimensión ostensiva en la actividad matemática.** El caso de la proporcionalidad, Tesis doctoral, UAB, Barcelona, 1994.

BOSCH, M, CHEVALLARD, Y.;. **La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs.** 1999. Disponível em:

<http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Sensibilite_aux_ostensifs.pdf> .

Acesso em: 24 abr. 2011.

BOSCH, M., CHEVALLARD, Y. & GASCÓN, J. **Science of Magic? The use of models and theories in didactics of mathematics.** In Bosch, M. Proceedings of the 4th Conference of the European Research in Mathematics Education, 2006.

BOSCH, M.; GASCÓN, J. **Las prácticas docentes del profesor de matemáticas.** *XIème École d'Été de Didactique des Mathématiques* que se celebró en agosto de 2001.

BOSCH, M.; GASCÓN, J. **Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico a la formación del profesorado de matemáticas de secundaria.** In: GONZÁLEZ, M. J.; GONZÁLEZ, M. T.; MURILLO, J. (ed.) Investigación en Educación Matemática XIII. 2009. p. 89-113).

Disponívelem:<<http://www.seiem.es/publicaciones/archivospublicaciones/actas/Actas13SEIEM/SEIEMX III.pdf>>. Acessoem: 12 dezembro 2012.

BOSCH, M., GASCÓN, J.. **Fundamentación antropológica de las organizaciones didácticas:** de los talleres de prácticas matemáticas a los recorridos de estudio e investigación. Disponível em:

<<http://www.atd-tad.org/wp-content/uploads/2012/05/mariannaJosep-CITAD-II-2010.pdf>>. Acesso em 15 outubro de 2014.

BOURDIEU, P. **Poder Simbólico.** Lisboa: Difel, 1989.

BOURDIEU, P. e WAQUANT, L. **Una invitación a la sociología reflexiva.** Sigloveintiuno editores, 2005

BRANDÃO, M. **Matemática Conceituação Moderna.** Ensino de primeiro grau. 7ª série, Editora do Brasil. São Paulo, 1985.

CHEVALLARD Y. (1985) **La transposition didactique – Du savoir savant au savoir enseigné, La Pensée sauvage.** Grenoble, deuxième édition augmentée, 1991.

CHEVALLARD, Y. Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. **Recherches en didactique des mathématiques**, 12/1, p. 73-111, 1992.

CHEVALLARD, Y. **La fonction professorale : esquisse d'un modèle didactique.** (1995). Disponível em:

<http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/La_fonction_professorale.pdf>.. Acesso em 30 de setembro de 2016.

CHEVALLARD, Y. El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, v. 19, n. 2, p. 221-266, 1999.

CHEVALLARD, Y. **Organiser l'étude. 1. Structures & fonctions.** (2002) Disponível em : http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=52 . Acesso em agosto de 2015.

CHEVALLARD, Y. **La TAD face au professeur de mathématiques.** Communication au Séminaire DiDiST de Toulouse. 2009a. Disponível em: <http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=162>. Acesso em: 15 maio. 2013.

CHEVALLARD, Y. **Organisations didactiques: 1. les cadres généraux, 1998a.** Disponível em: http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Organisations_didactiques_1_1998_.pdf. Acesso em 15 Abril de 2016.

CHEVALLARD, Y. **Organisations didactiques: 2. Gestes, dispositifs, programmes,** 1998b. Disponível em: <http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Organisations_didactiques_2_1998_.pdf>. Acesso em 15 abril de 2016.

CHEVALLARD, Y. **La Transposición Didáctica:** del saber sabio al saber enseñado. 3. ed. 2. reimp. Buenos Aires: Aique Grupo Editor, 2005.

CHEVALLARD, Y. **La notion d'ingénierie didactique, un concept à refonder:** questionnement et éléments de réponse à partir de la TAD. 2009b. Disponível em: <<http://yves.chevallard.free.fr/>>. Acesso em: 15 abril de 2013.

CHEVALLARD, Y. **Introduction à la théorie anthropologique du didactique /** Introdução à teoria antropológica do didático. Slides bilíngue: Francês/ português. 2011a. Disponível em: <<http://yves.chevallard.free.fr/>>. Acesso em: 24 jun. 2013.

CHEVALLARD, Y. **Conditions et contraintes de la recherche en didactique des mathématiques : un témoignage.** 2011b. Disponível em <http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=199> Acesso em: 13 de dezembro de 2015.

CHEVALLARD, Y. **Éléments de didactique du développement durable. Leçon 1. Enquête codisciplinaire & EDD.** (2012-2013). Disponível em: <http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Didactique_du_DD_2012-2013_1.pdf>. Acesso em 20 de dezembro de 2016.

CHEVALLARD, Y. **La notion de PER : problèmes et avancées.** 2009c. Disponível em: <<http://yves.chevallard.free.fr/>>. Acesso em: 24 jun. 2014.

CHEVALLARD, Y.; BOSCH, M.; GASCÓN, J. **Estudar Matemática: o elo perdido entre o ensino e a aprendizagem**. Porto Alegre: Artmed Editora, 2001.

DANTE, L. R. **Tudo é Matemática**. 7ª série. 1ª edição. Ed. Ática, São Paulo, 2004(a).

DANTE, L. R. **Tudo é Matemática**. 8ª série. 1ª edição. Ed. Ática, São Paulo, 2004(b).

FERREIRA, R. S. R. **Modelo epistemológico de referência: As tarefas intermediárias no ensino das frações**. 123 f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática)– Instituto de Educação Matemática e Científica, Universidade Federal do Pará, Belém. 2014.

FIORENTINI, D.; OLIVEIRA, A.T.C.C. O Lugar das Matemáticas na Licenciatura em Matemática: que matemáticas e que práticas formativas? **Bolema**, v. 27, n. 47, pp. 917-938. (2013)

FONSECA, C. **Discontinuidades matemáticas y didácticas entre la secundaria y la universidad**. Tese (Doutorado em set/2004) – Universitat de Vigo, Espanha, 2004.

FONSECA, C BOSCH, M.; GASCÓN, J. El momento del trabajo de la técnica en la completación de organizaciones matemáticas: el caso de la “regla de Ruffini”. **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (RELIME)**, v. 22, n. 2; p.05-34, 2010

GARCÍA, F. J. **La modelización como herramienta de articulación de la matemática escolar: de la proporcionalidad a las relaciones funcionales**. Doctoral dissertation. Universidad de Jaén. 2005.

GARCÍA, F. J.; GASCÓN, J.; HIGUERAS, L. R.; BOSCH, M., Mathematical modelling as a tool for the connection of school mathematics. **ZDM**, v. 38, p. 226-246, 2006

GASCÓN, J. Incidencia del modelo epistemológico de las matemáticas sobre las prácticas docentes. **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa**, México, v. 4, n. 2, p. 129,159, 2001.

GASCÓN, J. Del Problem Solving a los Recorridos de Estudio e Investigación. Crónica del viaje colectivo de una comunidad científica. **Revista Iberoamericana de Educación Matemática (UNIÓN)**, n. 22, p. 9-35, 2010.

GASCÓN, J. Las Matemáticas para la Enseñanza en una Formación del Profesorado Basada en el Estudio de Cuestiones. **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 28, n. 48, p. 319-340, 2014.

GONÇALVES, T. O. **A constituição do formador de professores de Matemática: a prática formadora**. Belém: Cejup, 2006.

GONÇALVES, T. O.; MENDES, M. J. F. Reflexões sobre a formação do professor de Matemática. In: _____. **Formação e inovação curricular no ensino de Ciências e Matemáticas: pesquisando idéias, saberes e processos**. Belém: Cejup, 2007. (Coleção Pesquisa em Educação em ciências e Matemáticas)

GUELLI, O. **Matemática: uma aventura do pensamento/7ª série**. 2.ed. São Paulo: Ática, 2005(a).

GUELLI, O. **Matemática: uma aventura do pensamento/8ª série**. 2.ed. São Paulo: Ática, 2005(b).

GUERRA, R. B.; ANDRADE, R. C. D. Tarefas Fundamentais do Fazer matemático Escolar: organização matemática para o ensino da geometria analítica. **Margens** (UFPA), v. 6, p. 109-135, 2013.

GUERRA, R. B.; SILVA, F. H. S. **Fórmulas e algoritmos e o ensino de matemática**. In: REUNIÃO DE DIDÁTICA DA MATEMÁTICA DO CONE SUL,. São Paulo, 2006.

IEZZI, G., DOLCE, O., MACHADO, A. **Matemática e Realidade**. 8º ano. 6ª edição. Ed. Atual, São Paulo, 2009.

IMENES, L. M., LELLIS, M., **Matemática**. 8º ano. 1ª edição. Ed. Moderna, São Paulo, 2009.

KLEIN, F. **Matemática elemental desde un punto de vista superior**. Traducción al español de Jesús Fernández. Madrid: Nivola, 1908/2006.

LIMA, E.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C. **A Matemática do ensino médio**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1998. (Coleção do Professor de Matemática, v.3)

LUCAS, C., FONSECA, C., GASCÓN, J., CASAS, J. O Fenômeno Didático Institucional da Rigidez e a Atomização das Organizações Matemáticas Escolares. **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 28, n. 50, p. 1327-1347, dez. 2014

MAZZIEIRO, A. S., MACHADO, P. A. F. **Descobrimos e aplicamos a Matemática**. 8º ano. Ed. Dimensão, Belo Horizonte, 2012

MESQUITA, F. N. A. **As dinâmicas praxeológicas e cognitivas e a construção do conhecimento didático do professor de matemática**. Dissertação (Mestrado em

Educação em Ciências e Matemáticas) – Instituto de Educação Matemática e Científica, Universidade Federal do Pará, Belém, 2011.

MIGUEL, A.; MENDES, I. A. Mobilizing in mathematics teacher education: memories, social practices, and discursive games. **ZDM Mathematics Education**, v.42, 381-392, abril, 2010.

MORI, I., ONAGA, D. S. **Matemática: ideias e desafios**. 8º ano. 15ª edição reformada. Ed. Saraiva. São Paulo, 2009.

QUEYSANNE, M.; DELACHET, A. **A álgebra moderna**. Tradução de Gita K. Ghinzberg. São Paulo: Difusão Européia do Livro, 1964. (Coleção Saber Atual)

RODRÍGUEZ, E. **Metacognición, resolución de problemas y enseñanza de las matemáticas**: una propuesta integradora desde el enfoque antropológico. 2005. Tese (Doutorado em set/2005) - Universidad Complutense de Madrid, 2005.

RAVEL, L.. **Des programmes a la classe: etude de la transposition didactique interne**: Exemple de l'arithmétique en Terminale S spécialité mathématique. Thèse préparée au sein de l'équipe de Didactique des Mathématiques (DDM), Laboratoire Leibniz-IMAG. 2003.

SCIPIONE, D. P. N. **Matemática na Escola Renovada**. Curso Ginásial. Vol. 3. Ed. Saraiva. São Paulo, 1972.

SIERRA, T. A. **Lo matemático en la creación y análisis de Organizaciones Didácticas**. El caso de los sistemas de numeración. Tese (Doutorado em out/2006) - Universidad Complutense de Madrid, 2006.

SIERRA, T. A., BOSCH, M., GASCÓN, J. El Cuestionamiento Tecnológico-Teórico en la Actividad Matemática: el caso del algoritmo de la multiplicación. **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 27, n. 47, p. 805-828, dez. 2013

SILVA, D.P. **A Invariável Prática da Regra de Três**. Tese (Doutorado em Educação em Ciências e Matemáticas). Universidade Federal do Pará, Instituto de Educação Matemática e Científica. Belém, 2017.

SILVA, F. H. S.; GUERRA, R. B. **Contextualização do ensino da matemática**. In: SILVA, F. H. S. Formação de professores: mitos do processo. Belém: UFPA, 2009.

SILVA, R da. **O conhecimento matemático-didático do professor do multiseriado**: análise praxeológica. Tese (Doutorado) - Universidade Federal do Pará, Instituto de Educação Matemática e Científica, Programa de Pós - Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas, Belém, 2013.

SILVEIRA, E. **Matemática**: compreensão e prática. 8º ano. 3ª edição. Ed. Moderna, São Paulo, 2015.

SOUZA, J., PATARO, P. M. **Vontade de saber Matemática**. 8º ano. 3ª edição. Ed. Moderna, São Paulo, 2015

ANEXOS

ANEXO 1

Didática da Matemática no Currículo do PARFOR Matemática da UFPA

PERÍODO	DISCIPLINA
1º Período	Aritmética Básica
	Laboratório de Ensino de Aritmética Básica
	Introdução à Educação
	Álgebra Básica
	Laboratório de Ensino de Álgebra Básica
	Introdução à Informática
	Ação de Extensão de introdução à informática
2º Período	Psicologia da Aprendizagem
	Ações de Extensão de Psicologia da Aprendizagem
	Conjuntos e Funções
	Laboratório de Ensino de Conjuntos e Funções
	Didática da Matemática
	Ações de Extensão de Didática da Matemática
	Geometria Plana
	Laboratório de Ensino de Geometria Plana