



SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E CIENTÍFICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E
MATEMÁTICAS

**O Sistema de Numeração Decimal na formação de professores dos
anos iniciais**

Raquel Soares do Rêgo Ferreira

BELÉM/PARÁ

2020

Raquel Soares do Rêgo Ferreira

O Sistema de Numeração Decimal na formação de professores dos anos iniciais

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas do Instituto de Educação Matemática e Científica, da Universidade Federal do Pará, como requisito à obtenção do Título de Doutor em Educação em Ciências e Matemáticas, Área de Concentração: Educação Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Renato Borges Guerra.

BELÉM/PARÁ

2020

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo (a)
Autor (a)

F383s Ferreira, RAQUEL SOARES DO RÉGO FERREIRA.
O Sistema de Numeração Decimal na formação de
professores dos anos iniciais / RAQUEL SOARES DO
RÉGO FERREIRA Ferreira. — 2020.
282 f. : il. color.

Orientador(a): Prof. Dr. Renato Borges Guerra Guerra
Tese (Doutorado) - Universidade Federal do Pará,
Instituto de Educação Matemática e Científica, Programa de
Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas,
Belém, 2020.

1. Formação de professores. 2. Percurso de Estudo
e Pesquisa (PEP). 3. Teoria Antropológica do Didático
(TAD). 4. Sistema de Numeração Decimal (SND). I.
Título.

CDD 510.7

Raquel Soares do Rêgo Ferreira

O Sistema de Numeração Decimal na formação de professores dos anos iniciais

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas do Instituto de Educação Matemática e Científica, da Universidade Federal do Pará, como requisito à obtenção do Título de Doutor em Educação em Ciências e Matemáticas, Área de Concentração: Educação Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Renato Borges Guerra.

BANCA EXAMINADORA


1º Examinador: Presidente Prof. Dr. Renato Borges Guerra – IEMCI/UFPA


2º Examinador: Prof. Dr. Tadeu Oliver Gonçalves (membro interno) – IEMCI/UFPA


3º Examinador: Prof. Dr. José Messildo Viana Nunes (membro interno) – IEMCI/UFPA


4º Examinador: Prof. Dra. Talita Carvalho Silva de Almeida (membro externo) – IEMCI/UFPA


5º Examinador: Prof. Dr. Gleison de Jesus Marinho Sodré (membro externo) – Escola da Aplicação da UFPA

À Deus, que me deu fôlego, saúde e vida,

Sem ele nada seria possível!

Aos meus genitores,

A minha família

Minha base, meu tudo!

O amor, tudo sofre,

tudo crê,

tudo espera,

tudo suporta!

AGRADECIMENTOS

Ao autor e consumidor de minha fé, Jesus Cristo, que se fez sempre presente em minha vida e que me inspirou com fé e sabedoria para escrever este trabalho.

À Secretaria Estadual de Educação – SEDUC pelo investimento.

À Universidade Federal do Pará (UFPA) e ao Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática e, em especial, aos professores deste programa que compartilharam seus saberes, contribuindo para minha formação acadêmica.

Aos membros da Banca Examinadora por suas valiosas contribuições.

Aos meus colegas, Maysa Almeida, a Marta Rodrigues, a José (Zé) Carlos e a Gleison Sodré e demais colegas que colaboraram com incentivo, companheirismo, apoio e conhecimentos compartilhados, em especial a minha amiga de todas as horas Aline Miranda, que em todos os momentos sempre esteve ao meu lado com uma palavra de conforto e força.

Ao Grupo GEDIM pelas valiosas discussões.

A todas as pessoas que no anonimato contribuíram para realização deste sonho.

Ao meu respeitado e estimado orientador Renato Guerra, meu eterno amigo, que dedicou seu valioso tempo na construção desse trabalho, com paciência e competência, proporcionando-me conhecimento, amadurecimento e crescimento. Gratidão e reconhecimento eternizados.

E, principalmente, a minha família, minha base, meu tudo! Que me compreenderam, me apoiaram e me amaram em todos os momentos.

As lendas

A primeira lei diz:

"A pessoa que vem até você é a pessoa certa."

Ninguém entra em nossas vidas por acaso. . .

Todas as pessoas ao nosso redor, interagindo com a gente,

tem algo para nos fazer aprender e avançar em cada situação.

A segunda lei diz:

"Aconteceu a única coisa que poderia ter acontecido."

Nada, nada, absolutamente nada do que acontece em nossas vidas poderia ter sido de outra forma, mesmo o menor detalhe. . . Não há nenhum:

"Se eu tivesse feito tal coisa." Ou:

"Aconteceu que um outro. . ."

Não! O que aconteceu foi tudo que poderia ter acontecido,

e foi para aprendermos a lição e seguirmos em frente.

Todas e cada uma das situações que acontecem em nossas vidas são perfeitas!

A terceira lei diz:

"Toda vez que você iniciar é o momento certo."

Tudo começa na hora certa, nem antes, nem depois.

Quando estamos prontos para iniciar algo em nossas vidas é que as coisas acontecem.

E a quarta e última afirma:

"Quando algo termina, ele termina."

Simplesmente assim!

Se algo acabou em nossas vidas, é para nossa evolução.

Por isso, é melhor sair, ir em frente e se enriquecer com a experiência.

Não é por acaso que estamos lendo este texto agora.

Se ele vem à nossa vida hoje

é porquê estamos preparados para entender que nenhum floco de neve cai no lugar errado."

(Autor desconhecido)

E dando graças constantemente a Deus Pai por todas as coisas.

Em nome de nosso Senhor Jesus Cristo.

(Efésios 5:20)

RESUMO

Este trabalho trata do problema de formação inicial de professores relativos aos numerais decimais, considerando as dificuldades sobre o seu ensino e sua aprendizagem. Observados por diferentes pesquisas, os dados apontam fortes indícios de a causa residir na naturalização dos numerais decimais no seio da sociedade. Essa problemática foi enfrentada a partir da validação da tese de que os processos de quantificação de unidades de grandezas concretas permitirem a desnaturalização dos numerais decimais com ajuda dos recursos teóricos e metodológicos da teoria antropológica do didático. Consideramos a hipótese de que fatores externos à sala de aula agem dificultando o ensino, partem dos objetos de interesses desse campo teórico. Essa problemática foi enfrentada por meio de um percurso de estudos e pesquisas com protagonismo principal dos professores em formação que foi desenvolvido com ajuda de um orientador de estudo e pesquisa. Esse percurso foi realizado sob a orientação do pesquisador com auxílio de um modelo praxeológico de referência sobre o processo de quantificação a partir de uma situação geradora, ambos tomados como hipóteses a serem validadas, e com isso, a tese de proverem um percurso de estudo e pesquisa que levassem os professores em formação ao encontro da desnaturalização dos numerais decimais. Os resultados demonstraram que os professores em formação viram e assumiram a ocorrência de mudanças de suas relações com os numerais decimais e apontaram, favoravelmente, em direção à validação desse percurso encaminhado a partir da situação geradora e do modelo praxeológico de referência propostos. Os resultados encorajaram o desenvolvimento de futuras pesquisas, entre elas, qual o impacto da concepção de numerais, aqui encaminhadas, sobre o currículo dos anos iniciais, já que extrapolam a disciplina matemática? E, talvez, mais urgente, sobre a concepção e construção de organizações praxeológicas sobre os numerais decimais para o ensino dos anos iniciais do fundamental, sob a compreensão aqui desenvolvida, para fins de validação experimental em sala de aula.

Palavras – chave: Formação de professores. Percurso de Estudo e Pesquisa (PEP). Teoria Antropológica do Didático (TAD). Sistema de Numeração Decimal (SND).

ABSTRACT

This work deals with the problem of initial teacher training related to decimal numerals, considering the difficulties in their teaching and learning. Observed by different researches and which point to strong indications of the cause being the naturalization of decimal numerals within society. This problem was faced from the validation of the thesis that the quantification processes of units of concrete quantities allow the denaturalization of decimal numerals, with the help of the theoretical and methodological resources of the didactic anthropological theory, we consider the hypothesis that factors external to the room of the classroom act by making it difficult to teach part of the objects of interest in this theoretical field. This problem was addressed through a course of studies and research with the main role of teachers in training that was developed with the help of a study and research advisor. This journey was carried out under the guidance of the researcher with the help of a praxeological reference model on the quantification process from a generating situation, both taken as hypotheses to be validated, and with that the thesis, of providing a study path and research that would take teachers in training to meet the denaturalization of decimal numerals. The results demonstrate that the teachers in formation saw and assumed the occurrence of changes in their relations with the decimal numerals and point favorably towards the validation of this path forwarded from the proposed generating situation and praxeological reference model. The results encourage the development of future research, among them, on what impact of the design of numerals forwarded here on the curriculum of the early years, since they go beyond the mathematical discipline and, perhaps more urgently, on the design and construction of praxeological organizations on the decimal numerals for teaching the early years of elementary, under the understanding developed here, for the purpose of experimental validation in the classroom.

Keywords: Teacher training. Course of study and research (CSR). Anthropological Theory of Didactics (TAD). Decimal numbering system (DNS).

RÉSUMÉ

Ce travail aborde le problème de la formation initiale des enseignants liée aux nombres décimaux, en considérant les difficultés de leur enseignement et de leur apprentissage. Observées par différentes recherches, les données indiquent de fortes indices que la cause réside dans la naturalisation des nombres décimaux au sein de la société. Ce problème s'est posé dès la validation de la thèse selon laquelle les processus de quantification des unités de grandeurs concrètes permettent la dénaturalisation des nombres décimaux à l'aide des ressources théoriques et méthodologiques de la théorie anthropologique didactique. Nous considérons l'hypothèse que des facteurs extérieurs à la salle de classe agissent pour rendre l'enseignement difficile, à partir des objets d'intérêt dans ce champ théorique. Ce problème a été abordé à travers un parcours d'études et de recherche avec le rôle principal des enseignants dans la formation qui a été développé avec l'aide d'un conseiller d'étude et de recherche. Ce parcours a été réalisé sous la direction du chercheur à l'aide d'un modèle de référence praxéologique sur le processus de quantification à partir d'une situation génératrice, à la fois pris comme hypothèses à valider, et avec cela, la thèse de fournir un parcours d'étude et recherche qui amènerait les enseignants en formation pour répondre à la dénaturalisation des nombres décimaux. Les résultats ont montré que les enseignants en formation ont vu et supposé l'occurrence de changements dans leurs relations avec les nombres décimaux et pointent favorablement vers la validation de cette voie issue de la situation génératrice et du modèle de référence praxéologique proposés. Les résultats ont encouragé le développement de recherches futures, parmi lesquelles, quel est l'impact de la conception des chiffres, présentée ici, sur le programme des premières années, puisqu'elles vont au-delà de la discipline mathématique? Et, peut-être, plus urgent, sur la conception et la construction d'organisations praxéologiques sur les nombres décimaux pour l'enseignement des premières années de l'élémentaire, sous la compréhension développée ici, à des fins de validation expérimentale en classe.

Mots-Clé: Formation des enseignants. Parcours d'étude et de recherche (PEP). Théorie anthropologique de la didactique (TAD). Système de numérotation décimale (SND).

RESUMEN

Este trabajo aborda el problema de la formación inicial del profesorado relacionado con los números decimales, considerando las dificultades en su enseñanza y aprendizaje. Observadas por diferentes investigaciones y que apuntan a fuertes indicios de que la causa es la naturalización de los números decimales en la sociedad. Este problema se enfrentó a partir de la validación de la tesis de que los procesos de cuantificación de unidades de cantidades concretas permiten la desnaturalización de numerales decimales, con la ayuda de los recursos teóricos y metodológicos de la teoría didáctica antropológica, consideramos la hipótesis de que factores externos a la sala del aula actúan dificultando la enseñanza de parte de los objetos de interés en este campo teórico. Este problema se abordó a través de un curso de estudios e investigaciones con el rol principal del docente en la formación que se desarrolló con la ayuda de un asesor de estudios e investigaciones. Este recorrido se realizó bajo la guía del investigador con la ayuda de un modelo praxeológico de referencia sobre el proceso de cuantificación a partir de una situación generadora, tanto tomadas como hipótesis a validar, como con ello la tesis, de aportar una trayectoria de estudio y investigación que llevaría a los profesores en formación a afrontar la desnaturalización de los números decimales. Los resultados demuestran que los docentes en formación vieron y asumieron la ocurrencia de cambios en sus relaciones con los números decimales y apuntan favorablemente hacia la validación de este camino adelantado a partir de la situación generadora propuesta y modelo de referencia praxeológico. Los resultados incentivan el desarrollo de investigaciones futuras, entre ellas, sobre qué impacto del diseño de numerales aquí reenviado en el currículo de los primeros años, ya que van más allá de la disciplina matemática y, quizás más urgentemente, en el diseño y construcción de organizaciones praxeológicas en el numerales decimales para la enseñanza de los primeros años de la escuela primaria, bajo el entendimiento desarrollado aquí, con fines de validación experimental en el aula.

Palabras-clave: Formación de profesores. Estudio e Investigación Camino (PEP). Teoría Antropológica de la Didáctica (TAD). Sistema de numeración decimal (SND).

LISTA DE FIGURAS

Figura 01:	Sistemas de Numerações.....	70
Figura 02:	Hieroglíficos utilizados pelos egípcios.....	71
Figura 03:	Representa o Sistema de Numeração Decimal dos Egípcios	71
Figura 04:	Representação do numeral 2348.....	72
Figura 05:	Ausência de unidade.....	72
Figura 06:	Registros dos 27 símbolos da numeração Ática.....	74
Figura 07:	Alguns registros da numeração alfabética do Jônico.....	75
Figura 08:	Registros de numerais romanos.....	77
Figura 09:	Representação simbólica da unidade (prego) e da dezena (viga)..	79
Figura 10:	Representação simbólica da ausência de unidade (zero).....	79
Figura 11:	Representações de quantidades segundo os símbolos de 1 a 59.	80
Figura 12:	Representação de 19 unidades.....	80
Figura 13:	Representações de quantidade acima de 60 unidades.....	81
Figura 14:	Representação de 3623 e 83.....	81
Figura 15:	Representação da quantidade 3623 unidades.....	82
Figura 16:	Quadrado unitário dividido em 3 partes iguais.....	98
Figura 17:	Volumes dos prismas.....	100
Figura 18:	Volume dos cubos.....	101
Figura 19:	Aglomerados de tampinhas.....	104
Figura 20:	Aglomerados de tampinhas.....	104
Figura 21:	Contagem.....	105
Figura 22:	A nova unidade dezena.....	105
Figura 23:	A nova unidade centena.....	106
Figura 24:	A quantificação que será representado no ábaco.....	106
Figura 25:	Representação das quantidades no ábaco.....	107
Figura 26:	Representação do numeral no ábaco.....	107
Figura 27:	Relações entre os sistemas didáticos do PEP da tese.....	116
Figura 28:	Resposta R_4	120
Figura 29:	Trajetória do percurso do Fl_1	120
Figura 30:	Representação do Et de Fl'_2	124
Figura 31:	Resposta R_8	125
Figura 32:	Resposta R_{10}	126
Figura 33:	Trajetória do percurso do Fl_2	129
Figura 34:	Resposta R_{12}	131

Figura 35:	Resposta R_{15}	134
Figura 36:	Trajectoria do percurso do FI_3	135
Figura 37:	Resposta R_{17}	136
Figura 38:	Representação dos grãos e tubérculos.....	138
Figura 39:	Trajectoria do percurso do FI_4	141
Figura 40:	Representação do Et por FI_1	142
Figura 41:	Trajectoria da sessão 1.....	144
Figura 42:	Representação da base 5.....	149
Figura 43:	Sequência de numerais entre SNQ e SND.....	150
Figura 44:	Relação unívoca entre SND e SNQ dos Et's.....	152
Figura 45:	Trajectoria do percurso do FI_1	156
Figura 46:	Registro da relação entre letras e numerais.....	157
Figura 47:	Relação entre numerais quinários e decimais simples.....	158
Figura 48:	Relação entre numerais quinários e decimais de 1 a 15.....	159
Figura 49:	Registro e representação de 1 a 15.....	160
Figura 50:	Representação simbólica dos numerais.....	160
Figura 51:	Contagem com tampas plásticas.....	162
Figura 52:	Registro de contagem.....	162
Figura 53:	Relação entre letras e numerais.....	163
Figura 54:	Registro do processo de agrupamento sucessivo.....	164
Figura 55:	Registro de comprovação de quantidades.....	164
Figura 56:	Registro de comprovação de quantidades.....	165
Figura 57:	Representação numérica do feijão.....	165
Figura 58:	Registro da mudança de base do quinário para decimal.....	166
Figura 59:	Registro das transformações numéricas.....	166
Figura 60:	Trajectoria do percurso de FI_2	170
Figura 61:	Amarradinho de dez tampinhas mais duas tampinhas.....	172
Figura 62:	Amarradinho ou grupo com 5 tampinhas.....	172
Figura 63:	Representação da contagem com grupo de 5 tampinhas.....	173
Figura 64:	Resposta pronta referente ao SND.....	173
Figura 65:	Representação de quantidade das letras na base 5.....	174
Figura 66:	Representação do IO.....	175
Figura 67:	Representação do VO.....	175
Figura 68:	Trajectoria do percurso do FI_5	178
Figura 69:	Trajectoria do percurso do $S_2(FI, D, \mathbb{Z}_2)$	181
Figura 70:	Representação do processo de numeração no ábaco.....	183

Figura 71:	Representação simbólica da contagem do numeral 4.....	184
Figura 72:	Representação do numeral 119 no quadro branco.....	186
Figura 73:	Representação da contagem com os dedos das mãos.....	186
Figura 74:	Representação simbólica da contagem com os dedos das mãos..	187
Figura 75:	Representação simbólica da contagem quinária com os dedos das mãos.....	187
Figura 76:	Representação simbólica da contagem dos H's.....	188
Figura 77:	Representação do processo de contagem quinária no ábaco.....	189
Figura 78:	Representação quantitativa das bolinhas na UOS2.....	190
Figura 79:	Representação quantitativa das bolinhas na US.....	190
Figura 80:	Representação quantitativa das bolinhas na UOS1.....	191
Figura 81:	Representação do numeral treze na base quinária.....	192
Figura 82:	Ábaco de registro gráfico.....	192
Figura 83:	Representação do numeral 13.....	193
Figura 84:	Respostas prontas referente as bases 10, 5, 4 e 3.....	199
Figura 85:	Representação do numeral treze no ábaco.....	199
Figura 86:	Representação do 13 quinário no ábaco.....	200
Figura 87:	Representação do numeral 13.....	201
Figura 88:	Ábaco escrito.....	203
Figura 89:	Aglomerado estruturado de três amarradinhos.....	203
Figura 90:	Aglomerado estruturado de amarradinhos e unidades.....	204
Figura 91:	Sequência numérica do processo de contagem referente ao 1º agrupamento.....	204
Figura 92:	Sequência numérica do processo de contagem referente ao 2º agrupamento.....	205
Figura 93:	Sequência numérica do processo de contagem referente ao 3º agrupamento.....	205
Figura 94:	Contagem referente as unidades simples.....	205
Figura 95:	Registro dos numerais 33 em bases diferentes.....	206
Figura 96:	Questionamento sobre o numeral 25.....	207
Figura 97:	Ilustração do 1º agrupamento na sequência numérica.....	208
Figura 98:	Ilustração do 1º agrupamento e as duas unidades restantes na sequência numérica.....	208
Figura 99:	Representação do numeral 7 na base 5.....	208
Figura 100:	Relação entre letras e numerais.....	209
Figura 101:	Processo de contagem quinária na unidade simples no ábaco.....	210

Figura 102:	Processo de contagem quinária da US até UOS3 no ábaco.....	211
Figura 103:	Representação do numeral quinhentos no ábaco.....	211
Figura 104:	Representação do numeral quinhentos na forma de potência.....	211
Figura 105:	Representação do dois mil e quinhentos no ábaco.....	212
Figura 106:	Relação entre 31000 e o 10000.....	212
Figura 107:	Representação do 2500.....	213
Figura 108:	Representação de $1875 + 125$	214
Figura 109:	Representação do feijão no ábaco escrito.....	215
Figura 110:	Representação da quantidade da produção de feijão no ábaco escrito.....	215
Figura 111:	Representação da produção de feijão no ábaco.....	216
Figura 112:	Representação da produção de arroz.....	216
Figura 113:	Representação da produção de arroz pela fórmula.....	217
Figura 114:	Representação da produção de arroz no ábaco.....	217
Figura 115:	Percurso do $S_2(FI, D, Z_2)$	220
Figura 116:	Sete unidades de fichas plásticas.....	226
Figura 117:	Primeiro agrupamento de duas unidades tampinhas.....	227
Figura 118:	2º agrupamento: dois agrupamentos do agrupamento anterior imediatos.....	227
Figura 119:	Ábaco escrito.....	227
Figura 120:	Quadro de unidades.....	228
Figura 121:	Ábaco escrito base dois.....	228
Figura 122:	Ábaco escrito base cinco.....	229
Figura 123:	Registro do numeral 7 na base 2 no quadro de unidades.....	229
Figura 124:	1º Agrupamento – 2 unidades de tampinhas.....	230
Figura 125:	2º Agrupamento de 2 de 2 de tampinhas.....	230
Figura 126:	Registro do $(7)_2$ no ábaco escrito.....	231
Figura 127:	Registro do agrupamento de palitos de picolé na base 2.....	231
Figura 128:	Quantitativo estruturado por tipo de agrupamentos – passos N3/MPR.....	232
Figura 129:	Amarradinhos de 2 unidades de palitinho.....	232
Figura 130:	2º agrupamento de 2 de 2 palitinhos.....	233
Figura 131:	Quantitativo total estruturado por tipos de amarradinhos – passos N3/MPR.....	233
Figura 132:	1º agrupamento amarradinhos de 4 palitinhos – passos P1/P2/MPR.....	234

Figura 133:	2º agrupamento de 4 de 4 palitinhos - passos N3/N4/ N5/MPR....	234
Figura 134:	Representação no ábaco escrito.....	234
Figura 135:	Registro do $(6)_3$ no ábaco escrito.....	235
Figura 136:	Registro do $(10)_2$ no ábaco escrito.....	236
Figura 137:	Registro no ábaco escrito - passo N3/MPR.....	239
Figura 138:	Registro no ábaco escrito - passos N4/ N5/MPR.....	239
Figura 139:	Aglomerado inicial (27) palitos de picolé.....	242
Figura 140:	1º Agrupamento 4 unidades de palitos.....	242
Figura 141:	Registro da quantidade unidades de unidade simples.....	242
Figura 142:	2º Agrupamento – 4 de 4 palitos de picolé.....	243
Figura 143:	Registro das unidades simples e de ordem superior 1.....	243
Figura 144:	Registro das US, UOS1 e UOS2.....	243
Figura 145:	Trajetória da sessão 5.....	246
Figura 146:	Relações entre os sistemas didáticos.....	264
Figura 147:	Relações entre os sistemas didáticos.....	268
Figura 148:	Trajetória de Formação Docente.....	269
Figura 149:	Estrutura da tese.....	274

LISTA DE QUADROS

Quadro 1:	Os três níveis de abstração	102
Quadro 2:	Representação de grãos ou tubérculos.....	112
Quadro 3:	Representação de grãos ou tubérculos.....	263

LISTA DE SIGLAS

Byte	- Termo binário
EPP	- Equipamento Praxeológico Pessoal
EP	- Equipamento Praxeológico
EPI	- Equipamento Praxeológico Institucional
EP(fi)	- Equipamento Praxeológico Formação Inicial
FI	- Formação Inicial de professores
GEDIM	- Grupo de Estudo e Pesquisa em Didática da Matemática
IEMCI	- Instituto de Educação Matemática e Científica
Kg	- Quilograma
MER	- Modelo Epistemológico de Referência
MPR	- Modelo Praxeológico de Referência
MQD	- Modelo de Quantificação Decimal
RI	- Relação Institucional
UFPA	- Universidade Federal do Pará
UI	- Universo Cognitivo Institucional
UC	- Universo Cognitivo
OP	- Organização Praxeológica
OPC	- Organizações Praxeológicas Complexas
PCN	- Parâmetros Curriculares Nacionais
PEP	- Percurso de Estudo e Pesquisa
PNAIC	- Plano Nacional pela Alfabetização na Idade Certa
RP	- Relações Pessoais
RI	- Relações Institucionais
RNA	- Representação Numérica no Ábaco
RAA	- Representação Aglomerados no Ábaco
RND	- Representação Não Decimal
SND	- Sistema de numeração decimal
SNQ	- Sistema de Numeração Quinária
SN	- Sistema de Numeração
SNPD	- Sistema de Numeração Posicional Decimal
SNP	- Sistema de Numeração Posicional
TAD	- Teoria Antropológica do Didático
TSD	- Teoria das Situações Didáticas
TTD	- Teoria da Transposição Didática
UFPA	- Universidade Federal do Pará

SUMÁRIO

<i>Introdução</i>	22
<i>Capítulo 1</i>	26
1. Formação de professores e o saber a ser ensinado	26
1.1 A formação de professores e os numerais decimais.....	26
1.2 O problema da integração do pedagógico e do matemático.....	30
1.3 A questão de pesquisa e os objetivos a serem alcançados.....	35
<i>Capítulo 2</i>	43
2. O problema de formação de professores como mudança de práticas com os objetos de ensino	43
2.1 Introdução.....	43
2.2 A TAD e a noção do PEP.....	43
2.3 O PEP como questionamento de mundo.....	53
2.4 Mesogênese, cronogênese e topogênese.....	57
2.5 O PEP desta pesquisa.....	63
<i>Capítulo 3</i>	65
3. A concepção do projeto de formação inicial de professores relativo ao SND	65
3.1 Introdução.....	65
3.2 A concepção do projeto.....	66
3.3 O modelo de quantificação.....	68
3.3.1 Civilização egípcia.....	70
3.3.2 Civilização Grega.....	73
3.3.3 Civilização Romana.....	76
3.3.4 Civilização Babilônica.....	79

3.3.5	Civilização Hindu.....	83
3.4	Números e numerais.....	86
3.5	Mais numerais, menos números.....	95
3.6	Um modelo de quantificação decimal – MQD.....	103
3.7	O modelo praxeológico de referência – MPR.....	108
3.8	A situação para a existência e funcionamento de $\mathcal{S}(\text{FI}, \text{D}, \text{Qg})$	111
3.8.1	As tarefas para execução do $\mathcal{S}(\text{FI}, \text{D}, \text{Qg})$	113
3.8.2	Síntese do projeto de desenvolvimento da pesquisa de tese.....	116
	<i>Capítulo 4</i>	117
4.	Análise praxeológica e as possíveis trajetórias de difusões dos sistemas didáticos	117
4.1	Introdução.....	117
4.2	Sessões do PEP.....	117
4.2.1	Sessão (S1).....	117
4.2.2	Sessão (S2).....	145
4.2.3	Sessão (S3).....	182
4.2.4	Sessão (S4).....	198
4.2.5	Sessão (S5).....	220
	<i>Capítulo 5</i>	252
5.	Finalmente caminhando para novas trajetórias	252
5.1	Introdução.....	252
5.2	A tese em forma de questão: Q_T	252
5.3	O PEP desenvolvido nessa pesquisa.....	259
5.4	A concepção do projeto.....	260
5.5	O modelo praxeológico de referência.....	261

5.6	A situação como condição inicial para a execução do $\mathcal{S}(\text{FI}; \text{D}; \text{Qg})$	263
5.7	A execução do projeto.....	265
5.8	Sínteses.....	269
5.8.1	Do desenvolvimento do PEP.....	269
5.8.2	Do desenvolvimento da trajetória de formação docente (TFD).....	269
5.9	Encontros nesta pesquisa.....	271
5.10	Encaminhamentos futuros.....	276
	<i>Referências Bibliográficas</i>	277

Introdução

A motivação em desenvolver esta pesquisa adveio das experiências como professora formadora do Plano Nacional pela Alfabetização na Idade Certa – PNAIC¹ e das práticas como professora do magistério superior no curso de graduação em Licenciatura Integrada em Ciências, Matemática e Linguagens para os Anos Iniciais do Ensino Fundamental, curso de formação de professores para os anos iniciais da Universidade Federal do Pará (UFPA)².

Atuante há 19 anos como professora de matemática da educação básica, só passei a compreender de fato o que é “ensino”, refiro-me ao ato de ensinar com intencionalidade didática no sentido de reelaborar o saber para ser ensinado, a partir das experiências vivenciadas como professora formadora, pois a dinâmica de formar exigia tornar os professores “aptos” segundo o desejado pelos cursos de formação continuada. Especificamente, ensinar para os anos iniciais do ensino fundamental inclui, entre outras tarefas, incorporar a (co)responsabilidade pela construção dos saberes necessários e fundamentais para o crescimento e desenvolvimento dos seus alunos, tarefa nada simples quando se está frente ao problema didático: o que ensinar de um saber para esses alunos? E como ensinar esse saber para esses alunos?

A formação de professores na perspectiva de ensinar matemática para os anos iniciais tem sido considerado pelas autoridades educacionais de nossa sociedade, um núcleo problemático, pois pode levar ao êxito ou ao fracasso escolar das crianças. Em particular, os problemas dos professores frente a saberes a serem

¹ Plano Nacional pela Alfabetização na Idade Certa – PNAIC é um compromisso formal e solidário assumido pelos governos Federal, do Distrito Federal, dos Estados e dos Municípios, desde 2012, para atender a Meta 5 do Plano Nacional da Educação (PNE), que estabelece a obrigatoriedade de “Alfabetizar todas as crianças, no máximo, até o final do 3º (terceiro) ano do ensino fundamental. Disponível em: <http://www.educacao.df.gov.br/pnaic-pacto-nacional-pela-alfabetizacao-na-idade-certa/#:~:text=O%20PNAIC%20%E2%80%93%20Pacto%20Nacional%20pela,Alfabetizar%20todas%20as%20crian%C3%A7as%2C%20no>. Consultado em 19/08/2020.

² O Instituto de Educação Matemática e Científica – IEMCI possui um curso de graduação em Licenciatura Integrada em Ciências, Matemática e Linguagens para os Anos Iniciais do Ensino Fundamental, criado no ano de 2008. No que tange à formação geral, pretende promover ‘iniciação acadêmica e científica’ aos futuros professores dos anos iniciais do ensino fundamental, mediante a abordagem interdisciplinar de questões abrangentes e fundamentais de conhecimento científico e social. Ao mesmo tempo, planeja-se criar um ambiente de estudos e de debates sobre a realidade contemporânea – incluída imprescindivelmente na formação docente – e, em particular, sobre o contexto sociocultural do Estado do Pará, da Região de inserção da UFPA e, especialmente, da Região Amazônica. Disponível em: <http://www.iemci.ufpa.br/index.php/graduacao>. Consultado em 19/08/2020.

ensinados que exigem estudos sobre as especificidades desses saberes para um dado ano escolar, o verdadeiro problema didático concreto, principalmente quando esses professores admitem que só é possível ensinar aquilo que se sabe.

Foi observando os professores em formação frente ao problema didático relativo a um saber que me dei conta da indispensabilidade do ensino da matemática na formação inicial de professores, pois transformar um conteúdo de modo a ser ensinado, apresentava complexidades não alcançadas por aqueles que não dominavam as práticas matemáticas dos anos iniciais, inclusive seus alcances para os demais anos da escola, e isso parecia impedi-los de se tornarem agentes de suas próprias práticas.

Durante os encontros de formações, cujo eixo de disciplina tratava do ensino da matemática, muitos professores em formação se manifestavam com desinteresse e resistência, por exemplo, com expressões dos seguintes tipos:

“Professora eu não gosto de matemática”.

“Eu não sei matemática”.

“Nunca aprendi muito essa tal de matemática”.

“Eu não sei nem pra mim... como vou ensinar?”

“Eu sei que preciso saber matemática”

“Professora quando vou ensinar, tenho que usar o livro didático, pois não sei trabalhar sem ele”.

Essas manifestações me pareciam mostrar um cenário preocupante por se tratar de professores que ensinam matemática, uma vez que revelam sujeitos que admitem não poder ensinar o que não sabem, bem como os tipos de relações que eles mantêm com a matemática, desde não gostarem até não terem conhecimento suficiente para “preparar” um saber para ensinar.

Além disso, era consultada frequentemente sobre conteúdos matemáticos previstos para o ensino dos anos iniciais que me revelaram uma insuficiência de conhecimentos matemáticos que, como uma consequência, deixava claro suas baixas relações com a matemática escolar. Entre essas manifestações, encontramos:

“Círculo e circunferência é a mesma coisa? ”.

“O conjunto dos números naturais são 0,1,2,3 assim sucessivamente? ”

“Professora, número, numeral e algarismo são as mesmas coisas? ”.

“O sistema romano é parecido com sistema decimal, a diferença são as letras? ”.

“Aprendi que quantidade, é tipo a soma, tem a ver com as operações, por exemplo nós temos uma quantidade de numerações, e a partir delas a gente faz a construção de maiores quantidades”.

Os casos apresentados não foram casos isolados e ratificaram para mim a necessidade de intervenção, orientação e ensino de modo a promover uma mudança de relação desses professores com a matemática escolar.

Esse pensar elevou meu interesse pela temática, meus estudos e questionamentos se intensificaram a partir de minhas participações nos seminários e no grupo de pesquisa – Grupo de Estudo e Pesquisa em Didática da Matemática (GEDIM) do Instituto de Educação Matemática e Científica (IEMCI) da Universidade Federal do Pará (UFPA), cujo propósito é pensar a formação docente como o papel primordial para a construção dos saberes matemáticos para o ensino.

Nesse caminhar, diante de mobilizações de saberes que me sujeitei no GEDIM, quando frente à formação de professores, auxiliou-me a construir novas relações com objetos matemáticos escolares. O que me levou a um novo modo de encaminhar as formações de professores, especificamente, em uma disciplina do curso de Licenciatura Integrada em Ciências, Matemática e Linguagens em que considerei a necessidade dos professores em formação inicial a reconstruírem os conhecimentos matemáticos para o ensino, em particular, sobre os números e operações.

A partir de então, fiz um levantamento sobre estudos que tratavam de formação de professores para os anos iniciais envolvendo sistemas de numeração e, dentre eles, encontrei os de Cenci, Becker, Mackedanz (2015), Sadovsky (2010), Terigi e Wolman (2007), Itzcovich (2010), que afirmavam que os professores que atuam nos anos iniciais têm baixa relação com os saberes matemáticos e, em particular, com o SNP. Isso foi decisivo para minha pesquisa com vista ao doutoramento, já que ratificavam minhas preocupações com a relação dos professores com a matemática escolar.

A partir dessa problemática da relação da pessoa com os saberes a serem ensinados, fecundamente tratada pela teoria antropológica do didático (CHEVALLARD, 1999), daqui em diante TAD, dediquei meus estudos de tese para o doutoramento, os quais são aqui resumidos do modo que seguem os capítulos.

No capítulo 1, tratamos sobre a formulação do problema como um problema de pesquisa que emerge a partir das nossas práticas professorais e de nossos estudos e pesquisas que tratam da relação entre o sistema de numeração decimal e a formação de professores como um problema docente.

No capítulo 2, a partir de noções da TAD, apresentamos o problema da formação inicial ou continuada como a mudança de relação dos professores com um saber a ser ensinado, além da metodologia de percurso de estudos e pesquisas (PEP) recorrida para o desenvolvimento desta pesquisa, inclusive da empiria realizada.

No capítulo 3, apresentamos a construção dos dispositivos didáticos para orientação de ações encaminhadas durante o PEP, considerando a necessidade de avaliações das hipóteses de naturalização, desconhecimento da estrutura do SNP e da insuficiente formação matemática dos professores. Especificamente, uma situação supostamente capaz de criar condições para o desenvolvimento do percurso e o modelo praxeológico de referência (MPR) relativo aos numerais posicionais supostamente capazes de orientar a criação de condições para o funcionamento do percurso para a formação e para a pesquisa.

No capítulo 4, apresentamos trajetórias da formação, em consonância com a pesquisa, advinda das análises do PEP, o que inclui a validação de hipóteses e a produção de respostas para questionamentos realizados aos professores e pelos professores em formação e da pesquisa em andamento.

No capítulo 5, em retrospectiva, encaminhamos um relatório em forma de artigo incluindo as respostas às questões de pesquisa, à validação da situação e do MPR como dispositivos que podem engendrar o PEP como recurso de formação relativo aos numerais decimais, além de encaminhar futuras e necessárias pesquisas decorrentes de novos questionamentos que emergiram em nossos estudos.

1. FORMAÇÃO DE PROFESSORES E O SABER A SER ENSINADO

Neste capítulo, apresentaremos o problema de pesquisa que emerge a partir das nossas práticas professorais e de estudos de pesquisas que tratam da relação entre o sistema de numeração decimal e a formação de professores como um problema docente que carece de investigações.

1.1 A FORMAÇÃO DE PROFESSORES E OS NUMERAIS DECIMAIS

Parece não haver dúvidas de que o ensino nas escolas básicas deve contemplar o sistema de numeração decimal – SND, pois os numerais decimais se mostram no seio de nossa sociedade como saber indispensável para o enfrentamento de diferentes práticas rotineiras e de especialistas de diferentes áreas de conhecimento da humanidade e, entre elas, a do conhecimento fundamental para o desenvolvimento da matemática escolar.

Nesse sentido, entre os saberes ditos da matemática ensinados nas escolas fundamentais, o numeral decimal se destaca como “agente duplo” no sentido de participar das atividades escolares em meio a saberes artificiais criados e mantidos intramuros das escolas e também por participar de inúmeras práticas correntes em diferentes atividades humanas como um saber inquestionável a ponto de agir como fiador de decisões e acordos sociais.

Essa natureza inquestionável dos numerais decimais parece ter sido alcançada pelo seu *modus operandi* nessas práticas sociais e, como em consequência, parece influenciar as organizações matemáticas para seu ensino, com ênfase em tarefas que exploram as operações entre eles, que perpassa pela memorização de tabuadas que podem ser verificadas experimentalmente com materiais concretos.

No entanto, o caráter experimental que pode ser agregado ao ensino das operações entre numerais decimais, inclusive sua construção como produto de uma prática de quantificação, não encanta os matemáticos, pois os numerais são

expressões de seus números e estes estão longe de serem alcançados por práticas com materiais concretos.

Assim, os matemáticos como *influencer* das práticas matemáticas escolares não recomendam tarefas com manipulação de materiais concretos e até as banalizam quando as aceitam, com exceção, para alunos dos anos iniciais do ensino fundamental.

Em nossa interpretação, o que ensinamos nos primeiros anos da escola fundamental, senão em toda a escola básica, são os numerais decimais e não números, mesmo que lhes atribuam as prematuras noções matemáticas como elementos pertencentes de um dado conjunto numérico, pois estas noções são banalizadas nas escolas básicas e, portanto, jamais ensinadas, mas apenas apresentadas com a desfaçatez do termo “por definição”.

É sob essa compreensão que nos interessamos por numeral decimal como o saber que se aprende na rua e na escola, pelo seus usos e pelo caráter inquestionável que sela verdades, nem sempre verdadeiras, mas cujo ensino encontra dificuldades como mostra o estudo de Cenci, Becker e Mackedanz (2015) sobre o debate acadêmico no período de 2008 a 2015 acerca da formação docente no ensino de Matemática nos anos iniciais do Ensino fundamental, com enfoque nas intervenções docentes no ensino do Sistema de Numeração Decimal.

Nesse estudo, as pesquisas envolvidas apontam resultados sobre formação continuada que vão ao encontro de minhas observações realizadas nas práticas de formação inicial e continuada e que são assim expressos por Cenci, Becker e Mackedanz (2015):

- 1 – Os professores se preocupam como organizar os conteúdos para o ensino com crianças;
- 2 – Os professores se sentem inseguros diante das capacidades e habilidades exigidas pelo ensino matemático para desenvolver conhecimentos satisfatórios nas crianças;
- 3 – Avaliam que os cursos de formação profissional estão mais voltados para o domínio operacional e procedimental da matemática do que a um profissional que fale sobre matemática;

- 4 – Consideram que o professor tem um papel de colaborador indispensável no processo da aprendizagem, pois reconhecem que são os professores os responsáveis em levar os alunos a reconstruir modelos matemáticos ensinados;
- 5 – Que há dificuldades dos professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental em dominar o conceito de número e o sistema de numeração decimal e concluem que os professores precisam compreender as características matemáticas do sistema numérico para poder ensiná-lo;
- 6 – O ensino para crianças enfatiza registros numéricos e operações e poucos investimentos sobre a construção numérica, operatória, entre outras pertinentes ao ensino para a faixa etária;
- 7 – Que há deficiência do ensino de matemática nos anos iniciais e apontam o interesse em avançar nas pesquisas para curso de formação de professores deste nível de escolaridade, evidenciando ao não cumprimento das recomendações para os cursos de formação docente para esse ensino;
- 8 – É preciso haver maior interação entre Pedagogia e Matemática;
- 9 – Avaliam que a formação inicial é insuficiente para o desenvolvimento de um bom trabalho na prática docente, que ela tem grande influência sobre a mesma;

Esses aspectos sobre a formação continuada estão fortemente imbricados entre si e abrangem desde questionamentos sobre a relação com as práticas matemáticas, em geral, até questões sobre a insuficiência de saberes específicos, para que possam permitir segurança ao professor no seu exercício profissional nos anos iniciais do ensino fundamental, em particular, a respeito dos números e dos sistemas de numeração, e, não menos importante, de questões sobre a necessária integração dos saberes pedagógicos e matemáticos.

Além disso, a formação continuada aponta, sem dúvida, para a formação inicial provida pelos cursos de formação, quando observa que, em geral, esta é insuficiente para o exercício da profissão de professores dos anos iniciais, como apontam os PCN's quando assim destaca no seguinte extrato de texto.

A exigência legal de formação inicial para atuação no ensino fundamental nem sempre pode ser cumprida, em função das deficiências do sistema educacional. No entanto, a má qualidade do ensino não se deve simplesmente à não formação inicial de parte dos professores, resultando também da má qualidade da formação que tem sido ministrada. Este levantamento mostra a urgência de se atuar na formação inicial dos professores. (BRASIL, 1998, p.25)

Essa problemática sobre a formação inicial de professores para os anos iniciais do ensino fundamental envolve diferentes aspectos. Entre eles, chama-nos atenção, pela relação com nossas atividades de formadores de professores, relativos aos saberes matemáticos, e também aos aspectos demandados, que são relativos aos numerais decimais, SND, como uma das insuficiências da formação inicial.

Especificamente sobre a formação inicial, os estudos de Cenci, Becker e Mackedanz (2015) afirmam que as pesquisas são predominantemente inseridas como estudos cognitivistas com focos nas concepções de professores em formação inicial sobre um determinado “conceito matemático, como a construção do número, e outras nas concepções sobre a formação em si, principalmente, direcionadas à disciplina Metodologias de Ensino da Matemática do curso de Pedagogia” (CENCI; BECKER; MACKEDANZ, 2015, p.33).

As produções com base nas concepções dos professores em formação inicial, segundo Cenci, Becker e Mackedanz (2015), revelam que eles se sentem inseguros frente às capacidades e habilidades que podem ser exigidas pelo ensino da matemática para o desenvolvimento de conhecimentos satisfatórios nas crianças. Também, diante dessa análise, cita Curi (2004) sobre os cursos de Pedagogia propiciarem pouca oportunidade para a construção de competências matemáticas.

Finalmente, o estudo de Cenci, Becker e Mackedanz (2015) afirma que os cursos de formação de professores, em particular sobre as licenciaturas, deveriam estar menos dedicados com domínio operacional e procedimental da matemática e mais a formação de profissionais que falem sobre a matemática, para então concluir que é preciso haver maior interação entre a Pedagogia e a Matemática.

Em nossa interpretação, as pesquisas assumem, em geral, o saber matemático a ser ensinado como inquestionável, pois não se detém sobre o que deve ser ensinado de um saber nos anos iniciais e tampouco como organizar esses saberes para o ensino. Por um lado, no caso das concepções dos professores sobre o ensino de um dado conceito matemático, por exemplo, os estudos buscam saber como os professores consideram aspectos cognitivos dos alunos para que aprendam esse conceito que é sempre tomado como pronto, acabado e inquestionável. Por outro lado, relaciona-se com o anterior, por considerarem que a

aprendizagem do aluno depende da metodologia de ensino e não do conceito a ser ensinado.

Essa nossa compreensão é ratificada pelo estudo de Fernandes (2013), citado por Cenci, Becker e Mackedanz (2015), que destaca que há maior preocupação dos professores em formação inicial relativa às práticas e às metodologias de ensino de Matemática do que sobre conteúdos matemáticos, ou mesmo sobre o currículo dos anos iniciais do ensino fundamental. Nesse sentido, Fernandes (2013) chama atenção sobre a necessidade de se enfrentar o desafio de desenvolver conhecimentos específicos para o ensino da matemática que não sejam definidos apenas pelos conteúdos matemáticos, mas também pela prática docente dos professores, que tomamos como um tipo de condição, a fim de que os saberes possam ser aprendidos pelos alunos.

Parece que a interação entre o pedagógico e o matemático é a solução para a problemática do ensino e da aprendizagem da matemática e, em particular, do SND, embora o estudo não mencione desse modo. No entanto, nem os anunciadores da necessidade de interação e tampouco Cenci, Becker e Mackedanz (2015) encaminham como fazer a interação entre os conhecimentos das práticas docentes e conteúdos matemáticos de modo que os professores se sintam seguros e, como consequência, os alunos aprendam.

1.2 O PROBLEMA DA INTEGRAÇÃO DO PEDAGÓGICO E DO MATEMÁTICO

Um enfrentamento à problemática de interação entre o pedagógico e o matemático foi proposto por Schulman (1986) quando afirmou que para o ensino não bastava o conhecimento do conteúdo matemático, “considerado classicamente como transparente, inquestionável e independente da forma de ensinar” (BOSCH; GASCÓN, 2001, p.10, tradução nossa), mas também, precisava considerar o conhecimento pedagógico do conteúdo, ou seja, os conhecimentos necessários ou indispensáveis para o professor que dizem respeito “à aprendizagem dos alunos sobre um conteúdo específico e, em particular, o conhecimento do professor sobre as dificuldades típicas dos alunos em cada tópico matemático concreto e do modo de prevê-las e remediá-las” (BOSCH; GASCÓN, 2001, p.13, tradução nossa).

Entretanto, Schoenfeld (2000) destaca que há dificuldades para se delimitar a noção de conhecimento pedagógico de conteúdo, do modo que permita ser reconhecido, acessado e organizado frente ao conhecimento do conteúdo, de modo a integrá-los em uma organização didática para ser ensinada.

De acordo com, Schulman (1986), uma resposta a essa problemática é encaminhada pelo estudo de Ripoll, Rangel e Giraldo (2016, p. XXIV) que busca promover um estímulo para que o professor extraia do campo da matemática inspiração para o ensino.

Esse estudo toma a noção de conhecimento de conteúdo para o ensino do modo proposto por Klein (2009, 2010, 2011), como as organizações do conteúdo matemático escolar fundamentadas por meio da matemática acadêmica e, sob a legitimidade epistemológica da instituição matemática, assume-as como a condição suficiente para o professor vencer a insegurança e a difícil tarefa de replanejamento do conteúdo para o ensino.

Em nossa interpretação, o replanejamento do conteúdo para o ensino assume implicitamente a existência das práticas docentes sobre esse conteúdo e, com isso, o acesso ao conteúdo matemático escolar fundamentado na matemática acadêmica, frente a essas práticas, seria a condição suficiente para levar o professor ao encontro do conhecimento pedagógico do conteúdo. Nesse sentido, o afirmado por Schoenfeld (2000) ainda se faz válido, pois as práticas docentes relativas a esse conteúdo não são questionadas e, portanto, não explicitadas, sobretudo quando essas práticas sequer estão presentes, como ocorre quando os professores estão em formação inicial.

Assim, o replanejamento do conteúdo para o ensino é a tarefa docente de fazer a interação do pedagógico com o matemático, tomada como rotineira do professor, no sentido de pertencer à cultura das práticas docentes que se aprendem no campo das práticas, vendo e fazendo o que se viu fazer, no sentido da noção de habitus de Bourdieu (2004). Portanto, seria a tarefa não problemática para os professores enfrentada pelo seu conhecimento didático por meio de uma ordinária transposição didática interna, no sentido de acontecer, naquele momento, aquilo que

é somente seu nesse processo, aquele que antecede à sala de aula, em que o professor escreve o texto de sua aula em suposta dialética com hipotéticos alunos ideais.

Esse processo tomado de modo naturalizado, tornam invisíveis os gestos didáticos do professor, tão necessários ou indispensáveis para a construção da organização de saberes relativos ao SND, para serem ensinados de forma que os alunos aprendam, pois ficam no impenetrável universo cognitivo do professor. Isso, em consequência ou por premissa cultural escolar, corrobora para esconder a complexidade que envolve a construção dessa organização didática tanto quanto banaliza os gestos didáticos dos docentes para o ensino do SND, ou seja, do seu replanejamento de conteúdo para o ensino.

Além disso, o estudo de Ripoll, Rangel e Giraldo (2016) assume a atividade matemática escolar como uma atividade matemática acadêmica, rejeitada como atividade experimental que nesse sentido se distancia das práticas de ensino e de aprendizagem sobre o SND. Assim, as práticas que envolvem a quantificação de materiais concretos somente serão possíveis se puderem ser vistas como aplicações do conhecimento do conteúdo, nesse caso, dos conjuntos numéricos da matemática.

Nesses termos, entendemos que a contagem de um aglomerado de cadeiras é tomada como uma aplicação da noção matemática de números naturais e, com isso, faz ignorar a história e a epistemologia da noção de numeral, importante conhecimento social ainda vivo por ser indispensável para tornar possível diferentes ações humanas, não menos importante, como produto de abstrações de práticas de quantificações.

A linha de investigação que considera a problemática da interação entre o matemático e o didático, no sentido da articulação e da integração de saberes, inclusive suas razões de ser no seio das sociedades em que vive, é a do programa epistemológico da didática da matemática. Nessa linha, essa problemática emerge como consequência do seu princípio básico de investigação sobre o ensino e aprendizagem da matemática, a qual considera que, a problemática da aprendizagem se origina no ensino, mas precisamente, sobre as transformações sofridas por esse saber para ser ensinável.

A respeito dessa compreensão, a interação entre o pedagógico e o matemático é tratada como parte da problemática de formação do professor em relação aos conhecimentos a serem ensinados, tomando para isso, a compreensão do pedagógico como a do didático, ou seja, da ajuda ao estudo de um conhecimento.

Nesse contexto, a problemática da formação de professores relativo a um dado saber ganha diferentes encaminhamentos, entre eles, a teoria das situações didáticas ou TSD de Brousseau (1998), a teoria da transposição didática de Chevallard (1985) ou TTD, e, de forma mais alargada, a Teoria Antropológica do Didático ou TAD de Chevallard (1999), todos em consonâncias entre si.

A linha teórica da TAD encaminhou vasto campo de investigação sobre a formação de professores no que tange ao saber específico, em nosso caso, o matemático. Um dado conhecimento da matemática a ser ensinada, de modo indispensável, considera a construção de organizações didáticas como bem exemplifica a obra de Bosch *et al.* (2019).

Nessa linha de investigação, Sadovsky (2010) trata do ensino da Matemática como um núcleo problemático na escola primária e destaca que a formação docente é uma necessidade imperiosa para poder explorar quais as questões que se põe em jogo na formação e que permitem iluminar as decisões na hora de se pensar no planejamento de intervenções sobre a formação docente de futuros professores.

Para isso, buscou junto a professores em formação conhecer quais assuntos se mostravam ricos para serem ensinados e o porquê. Quais se mostravam áridos e o porquê. Igualmente, com professores formadores, buscou um panorama de como seria uma visão a respeito das dificuldades e sucesso de seus alunos.

Assim, ao indagar professores sobre a pertinência de incluir ou não na formação um trabalho sobre conteúdos matemáticos nos primeiros anos escolar e sobre a álgebra elementar, obteve como resposta a necessidade do estudo de sistemas de numeração – SN, considerando a riqueza do tema, no sentido de permitir a construção de sentidos e pela interação ofertada com outras áreas, de habilitar grande variedade de contextos e representações, a de existência de muitos

materiais para seu ensino, por retomar algo postergado na escola primária e, por último, por ser um tema interessante.

A resposta que encaminhou o SN para a formação foi ratificada por professores formadores frente à riqueza do “fazer matemático”. É ele quem permite implantar, pela diversidade de propostas didáticas e pela bibliografia existente, também, por considerar como um tema árduo, no sentido de que não há uma formação nas escolas primárias que desenvolva o pensar e justificar as operações e procedimentos, que acostuma ser a memorização, e ainda por acreditarem que há tanta dificuldade que podem levar a rejeição da matemática.

É importante considerar que essa pesquisa, ao buscar relacionar a complexidade do objeto com a árdua tarefa de ensinar, encontrou que o SN aparece porque custaria a ser entendido o seu aspecto posicional. Além disso, o SND aparece como um dos temas com maior dificuldade para os alunos e professores em sala de aula, sobretudo para o ensino quando docentes enfrentam carências de conhecimentos em seus alunos, como assim manifestou um dos docentes:

A gestão do conteúdo especificamente referente ao valor posicional dos símbolos, é certamente complicado para reverter conceitos errôneos incorporados nos alunos em tal sentido, o que traz consigo certas dificuldades na interpretação dos algoritmos e das operações matemáticas básicas e de seus modos de serem apresentados as crianças. (SADOVSKY, 2010, p.51, tradução nossa).

A problemática de aprendizagem do sistema de numeração, enfim, pode ser vista como uma problemática do ensino que integra o pedagógico, enquanto didático e o matemático. Essa compreensão é ratificada por outros estudos, em diferentes tempos e espaços, como de Terigi e Wolman (2007), Itzcovich (2008), Lendínez, Garcia e Sierra (2017).

A problemática de formação de professores relativo à noção de número é abordada no estudo de Lendínez, Garcia e Sierra (2017). Para seu enfrentamento encaminha um modelo epistemológico de referência a fim de orientar professores à construção de organizações para o ensino nos anos iniciais do fundamental sobre a noção de número, tendo em conta a comparação de quantidades de unidades de materiais concretos, ou não, com base em argumentos da matemática acadêmica, que os fazem se distanciar da noção de numerais enquanto produto de uma prática social, no caso, o SND, o qual estamos interessados.

O estudo de Terigi e Wolman (2007) mostra, sob certas condições, possíveis propostas para o ensino que podem colocar, em hipótese, as crianças em uma posição de crescente domínio do SND enquanto ferramenta cultural, mas deixa em aberto como construir uma organização para o ensino dos numerais decimais e, em particular, como fazer revelar essa máquina SND como produtora dos numerais decimais.

Itzcovich (2008) deixa claro que o estudo de sistema de numeração decimal (SND) deve ser tomado como um problema de ensino e como tal, de responsabilidade do professor. Para revelar esse tipo de problemática, destaca que os numerais decimais constituem um conhecimento de uso recorrente e, por isso, não raro, faz os professores perderem de vista a complexidade envolvida sobre esses objetos de ensino que, em consequência, podem levar dificuldades aos que estudam.

De outro modo, Itzcovich (2008), ressalta o papel condicionante da civilização e das sociedades que a compõem sobre o ensino dos numerais decimais que produzem dificuldades ao ensino e à aprendizagem desse saber.

Chevallard (2009d) alerta sobre a necessidade de se questionar a cultura no sentido de questionar as práticas com objetos, inclusive quando estes se fazem visíveis. Seguindo esse princípio básico da TAD, é necessário questionar o saber a ser ensinado para ser aprendido em uma dada posição da escola como condição inicial para encontrar problemáticas relativas ao ensino e à aprendizagem. Assim, não há o didático sem matemática e nem o matemático sem o didático.

1.3 A QUESTÃO DE PESQUISA E OS OBJETIVOS A SEREM ALCANÇADOS

Em nosso caso, devemos questionar os numerais decimais enquanto produto de uma atividade de transposição didática, aqui entendida como o trabalho de transformações e de adaptações de saberes relativos aos numerais decimais para serem ensinados, tendo em conta suas relações com os outros conhecimentos matemáticos e não matemáticos, inclusive não disciplinares, que podem contribuir para uma organização didática que atendam às necessidades do ensino e, em consequência, da aprendizagem.

Assim, nesse contexto teórico, ganha relevância a gênese histórica e epistemológica do conteúdo matemático por poder encaminhar condições que

esbocem a razão ou sentido da produção e da difusão do conhecimento matemático a ser ensinado e, ainda, fazer revelar outros conhecimentos necessários, nem sempre estão claros, que foram e podem continuar sendo indispensáveis para o funcionamento das práticas de ensino relativos ao SND.

Sobre esse pensar, as práticas docentes em sala de aula se constituem em recriações de conteúdos matemáticos para situações de ensino de modo a atender uma intencionalidade didática e não se pode perder de vista que essa recriação está condicionada pela disciplina matemática e, sobretudo, por níveis de (co)determinação didática mais externos à sala de aula, como a pedagogia, a escola e, não menos importante, a sociedade e a civilização em que o ensino está inserido, como destacou Itzcovich (2008) sobre o ensino dos numerais decimais.

Seguindo essa linha de pensamento, ao questionar quais são os supostos conteúdos matemáticos da escola pertinentes para o ensino dos numerais decimais, foi observado que a gênese histórica e epistemológica dos numerais decimais independe da gênese histórica e epistemológica dos números matemáticos, embora os numerais decimais sejam vistos pelos matemáticos como representantes dos seus números naturais.

Além disso, observa-se que os numerais decimais funcionam e continuam funcionando como dispositivo social que torna possível diferentes práticas de diferentes atividades humanas de modo eficiente e eficaz, independentemente de serem objetos do ensino da matemática escolar.

Em geral, a relação das pessoas com os numerais decimais, por se tratar de uma prática utilizada desde os primeiros anos de vida, não “carecem” de questionamentos, pois “é o que é”, unidade é unidade, dezena é dezena, centena sempre será centena e assim sucessivamente.

Nesse sentido, o SND não aparece como uma prática regrada de produção de numerais decimais, mas que pode ser vista como uma máquina para facilitar os cálculos sem recorrer aos ábacos e, ao mesmo tempo, que torna possível uma quantidade inimaginável de cálculos por meio de algoritmos que recorrem a estrutura dos numerais, com auxílio de calculadoras eletrônicas ou de computadores.

Os numerais, enquanto palavras, são registros que funcionam como nomes para quantidades de grandezas físicas e que ainda hoje são usados para esse fim, ajudando a construir respostas para outras questões da sociedade, como construir “número de celulares”, “chapas de veículos”, por exemplo, e, sobretudo, como representantes de números matemáticos.

Em nosso mundo, não se costuma olhar para a máquina SND, ainda que se recorra com frequência aos seus produtos, é o caso dos numerais, usados em nosso cotidiano, como por exemplo, 60kg de feijão ou 200 megabytes de memória. Nos dois casos são apenas nomes para totalidades de aglomerados de unidades de grandezas, enquanto o SND se faz invisível pela cultura da prática decimal de quantificação que, embora exiba as unidades físicas quantificadas, kg de feijão e bytes de memória, não diz claramente como essas unidades são organizadas para produzir os numerais 60 e 200.

No ensino, há recorrência à cultura das práticas de quantificação por contagem, que somente é possível pelos nomes de quantidades derivadas dos numerais decimais como palavras, que funcionam como modo de banalizar a máquina SND. Isso é feito por meio de analogias com memorização. Primeiro é memorizado de 1 a 10 e depois até 20, e daí em diante segue uma regra aprendida por mimetismo, sempre interrompida quando se atinge a necessidade de extrapolar nove unidades, 19 (vinte), 29 (trinta)... e assim por diante, sempre perguntando: E agora? Qual é o que vem depois de 999? Uma vez respondido segue a lógica da prática. Não há qualquer relação com a máquina SND para construir numerais como quantificação de unidades de grandezas.

Assim, segundo Terigi e Wolman (2007) ensinar sistema de numeração na formação de professores é "desnaturalizar" o conhecimento adulto sobre ele. Com efeito, os alunos, os professores e os usuários do sistema de numeração pensam nele como uma técnica de traduzir quantidades, uma vez que nossa tendência é acreditar que para ter o conhecimento basta conhecer a regra que o rege.

Itzcovich (2008) afirma que em alguns casos

A intenção varia entre a banalização e a naturalização do objeto, isso quer dizer, transformar a banalização como se não fora complexo e ao mesmo tempo, o trata como se sua apropriação fosse natural e espontânea. As regras do sistema de numeração, embora sejam “naturais” são produtos da elaboração de um conjunto de convenções que demandaram séculos para

que os seres humanos as construíssem. (ITZCOVICH, 2008, p.32, tradução nossa)

Essa forma de vida do saber que vive na escola não permite que ele seja questionado. Se questionassem o que é contar, por exemplo, encontrariam a necessidade de infinitos nomes para as quantidades para tornar possível a contagem. Mas quantidades têm nome que são aprendidos nas práticas sociais correntes e com isso podem banalizar o SND, tornando desnecessária a aprendizagem das práticas de quantificação como produtora dos numerais.

Escondem que o SND responde outras questões, geralmente mantidas invisíveis na escola, embora sejam para a escola, como a construção dos algoritmos das operações básicas, ou ainda, como procedimento para tratamento de informação, inclusive de processamento computacional. Toda compreensão dessas questões reside em entender a estrutura do Sistema de Numeração Posicional – SNP, em que se inclui o nosso conhecido e tradicional SND.

Essa forma de pensar sobre o sistema de numeração obscurece e gera embaraços na compreensão do que de fato ele é, inclusive a respeito dos problemas envolvidos no processo da construção do saber sobre ele. Nesse sentido, fica claro que o SND, conteúdo previsto nos programas de ensino no Brasil, é banalizado e naturalizado em qualquer etapa do ensino, mesmo nas universidades. A banalização e ou naturalização não o torna propriamente um objeto de ensino, assim como usar um *notebook*, culturalmente instituído como máquina que nos ajuda a fazer trabalhos escolares, não torna esse *notebook* um objeto de ensino nas escolas.

Mas, considerando a potencialidade da máquina SND para compreensão e desenvolvimento de práticas sociais e considerando o seu caráter cultural, sua estrutura precisa ser estudada e ensinada para ser aprendida por novas gerações considerando seu caráter convencional, arbitrário.

A complexidade que envolve o SND parece se tornar clara quando os questionamentos aqui postos são encaminhados. Revela o potencial emaranhado de saberes não matemáticos e matemáticos que se relacionam com o SND e, portanto, organizar o saber para ser ensinado se torna um problema da profissão docente do ensino dos anos iniciais.

Os questionamentos ora apresentados colaboram com os professores no sentido de os tornarem reflexivos sobre suas práticas, à medida que tenham

relações de cumplicidade com os saberes matemáticos de suas práticas, aqui entendidas como relações suficientemente profundas para concebê-los de diferentes modos em situações distintas, isso exige tornar os objetos culturais banalizados ou naturalizados alcançáveis para aprendizagem pelo ensino.

Assim, considerando a hipótese sobre a naturalização dos numerais decimais frente à gênese histórica e epistemológica desses numerais como produto de quantificações que os revelam independentes dos números matemáticos, constituintes elementares de suas gêneses, formulamos a seguinte questão de tese a ser validada:

Q_T. A quantificação de unidades de grandezas discretas, por diferentes tipos de agrupamentos de mesma natureza, desnaturaliza os numerais decimais?

Em se tratando dos pressupostos metodológicos da TAD para enfrentar essa problemática, é necessário encaminhar uma formação de professores que os dote de uma infraestrutura teórico-metodológica e que os levem a construir uma relação de cumplicidade com os numerais decimais a partir de suas realidades de modo a melhor compreender essas realidades e então reconstruírem suas práticas, tendo em conta suas necessidades e suas próprias dificuldades.

Espera-se que a formação promova o encontro de novas problemáticas sobre formação de professores para produção de novas práticas docentes com os numerais decimais, tendo em conta a mobilização de velhos e novos saberes em interações entre si para atender o ensino para um dado ano escolar em consonância com o mundo, exigindo dos formadores e dos núcleos de formações um olhar para os numerais decimais como indispensável na formação inicial de professores.

Para isso, é necessário o alargamento dos seus saberes e novas relações oportunizadas com os saberes matemáticos, em particular com Sistema de Numeração Decimal (SND) e isso constitui uma tarefa docente complexa que requer um pensar crítico de suas práticas constantemente (SADOVSKY, 2010).

Essa tarefa não é fácil, pois o professor pode precisar de conhecimentos sobre saberes não disponíveis em seu universo cognitivo, principalmente no processo de formação inicial, que podem colaborar e permitir planejamentos e orientações no seu ensino.

Para contrapor dificuldades, Sadovsky (2010) recomenda que os cursos de formação de professores devem proporcionar o encontro e o reencontro dos futuros

professores com o SND e oportunizar o resgate e a ressignificação dos saberes matemáticos desde o nível primário dando-lhes fundamentos para sua utilização didática e principalmente porque não se pode planejar um ensino daquilo que não se sabe o que ensinar

Essa tarefa não é fácil de ser realizada, pois fica mais complexa à medida que se percebe que os numerais decimais estão em relação profunda com os saberes do mundo que cerca alunos e professores e tal olhar parece não estar presente nos cursos de formação de professores para os anos iniciais.

Os outros saberes são vistos *como fazeres*, sem se apropriar do *por que fazer*, ou seja, não os compreendem como condição de fazer revelar uma razão de ser para o objeto dito matemático. Não há a presença clara de uma infraestrutura de saberes, principalmente não matemáticos, capaz de esclarecer sua funcionalidade.

Além disso, nunca é demais lembrar que é preciso ter clareza, uma vez que o ensino e a aprendizagem estão regulados por fatores externos à sala de aula e, seu desenvolvimento, condicionado às condições e às restrições das instituições envolvidas como a escola, as instituições formadoras, a pedagogia (como a que dita as habilidades e competências a serem conquistadas), além das normatizações dos sistemas de ensino, estes envoltos em suas “querências” para atender à sociedade em que vivemos sob o manto cultural que conformam os saberes como sábios e necessários para a nossa manutenção.

Além disso, os professores estão condicionados ao uso de livros didáticos produzidos por uma sociedade sob o manto da cultura de uma civilização que, geralmente, não se sente autorizados a questionar o que é esse saber para um dado ano escolar, já que está representado pelo livro, e, tampouco, procura buscar as questões que esse saber responde nesse ano escolar ou para essa sociedade, pois as atividades para os alunos constantes no livro parecem cumprir esse papel. Isso pode não permitir o necessário questionamento sobre suas práticas.

Para aqueles que questionam o SND, o problema didático reside na complexidade do SND, já que estão longe de serem naturais, visto que derivam de práticas assentadas em um conjunto de convenções que demandaram séculos para serem construídas.

Para enfrentar esse problema didático Itzcovich (2008) recomenda que os professores devem:

1 – Realizar uma reconstrução estrutural do SNP que o faça apropriável para aqueles que ainda não tem esse conhecimento no momento de estudá-los.

2 – Desnaturalizar nosso saber adulto sobre as regras que regem nosso sistema, de modo a não pensar como se fossem apenas uma técnica de tradução das quantidades a uma versão gráfica, para unicamente a que tenhamos que aprender as regras que regulam essa tradução. (ITZCOVICH, 2008, p.32, tradução nossa)

As recomendações estão em consonância com a nossa questão de pesquisa no sentido de encaminhar os objetivos que podem permitir validá-la, desde que possamos levar os professores a construírem práticas de quantificação de unidades que produzam numerais posicionais não decimais e, em consequência, revelem a estrutura do SND como forma de desnaturalização. (RIPOLL; RANGEL; GIRALDO, 2016)

Além disso, esse pensar vai, de certo modo, ao encontro da seguinte afirmação apontado por Ripoll, Rangel e Giraldo (2016):

Realizar esses procedimentos em outras bases tira-nos da “zona de conforto” que a base 10 proporciona, e nos força a pensar nas justificativas para cada um dos passos que executamos automaticamente cujas validades são tomadas como certas. Esse exercício pode ajudar o professor a entender com mais clareza procedimentos que ensina usualmente aos alunos. (RIPOLL; RANGEL; GIRALDO, 2016, p.32).

No entanto, o modo da consecução desse encaminhamento não está pronto. Mesmo que reconheçamos a existência de recursos matemáticos que podem dar conta de tarefas de mudança de base, tais recursos não estão disponíveis aos alunos dos anos iniciais, além da insuficiente formação matemática dos professores que atuam nessa faixa etária do ensino, particularmente, por conta dos cursos de formação darem pouca ênfase na formação matemática, segundo Ripoll, Rangel e Giraldo (2016), Cenci, Becker e Mackedanz (2015) e Sadovsky (2010).

Assim, a naturalização e o desconhecimento da estrutura parecem ser equivalentes, quando se referem aos numerais decimais. Isso quer dizer que se for alcançada a estrutura dos numerais decimais, também é alcançada a sua desnaturalização e vice-versa.

Nesse sentido, para responder nossa questão de pesquisa, torna-se necessário objetivar a formulação de um projeto de formação inicial de professores relativo aos numerais posicionais não decimais de modo a fazer os professores verem mudanças de suas relações (CHEVALLARD, 2018) com os numerais posicionais sob as hipóteses de que há (1) naturalização dos numerais decimais; (2) desconhecimento da estrutura dos numerais decimais e, não menos importante, (3) uma insuficiente formação matemática provida pelos cursos de formações.

Como objetivo específico, realizar um percurso de formação inicial junto a uma turma de um curso de formação inicial de professores para os anos iniciais, relativa aos numerais posicionais não decimais, sob as condições e restrições impostas pelo programa do curso e das condições a serem encaminhadas para a consecução dos objetivos da pesquisa, o que inclui não tomar, a priori, como válidas as hipóteses desse relatório de pesquisa.

A resposta a nossa questão de pesquisa será então encaminhada a partir da consecução de nossos objetivos à luz da teoria antropológica do didático (CHEVALLARD, 1999). No próximo capítulo, apresentaremos os recursos teóricos e metodológicos que promoveram a mudança de relação na formação inicial de professores.

2. O PROBLEMA DA FORMAÇÃO DE PROFESSORES COMO MUDANÇA DE PRÁTICAS COM OS OBJETOS DE ENSINO

2.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo introduzimos os recursos teóricos e metodológicos da TAD que permitem formular o problema da formação de professores relativo a um saber a ser ensinado a partir da noção de mudança das relações de professores com o saber.

2.2 A TAD E A NOÇÃO DO PEP

A TAD é uma ampliação da teoria da transposição didática desenvolvida por Chevallard (1994) que assume a relatividade do saber frente às transformações que este sofre em suas difusões e, em particular, por meio das transposições didáticas entre as diferentes instituições, aqui entendidas como espaços sociais situadas num determinado lugar e tempo, por ações de sujeitos dessas instituições que lhes impõem jeitos de fazer e pensar próprios reconstruindo-os sob condições distintas de sua possível gênese.

Segundo a TAD, um saber vive nas instituições em forma de organizações praxeológicas, daqui em diante OP, cuja unidade mais simples pode ser entendida ou modelada em termos de praxeologias que são idealizadas como portadoras de duas componentes: uma relativa a práxis, ou seja, a tarefa que se faz e a técnica sobre como se faz; e outra componente, geralmente ausente em situação, relativa ao jeito de pensar sobre o que se faz e como se faz, chamada de tecnologia da técnica, que pode estar, mas nem sempre, sujeita a um discurso teórico que lhe dá uma razão.

Assim, as praxeologias se referem a qualquer estrutura possível de atuação do conhecimento humano institucionalizado e são sempre entendidas como pertencentes a algum conjunto de práticas humanas, rotineiras ou não, que vivem no interior de uma instituição e, portanto, vistas como pertencentes a algum *Equipamento Praxeológico Institucional (EPI)* (CHEVALLARD, 1999), isto é, ao conjunto de todas as OP que vivem no interior dessa instituição.

As OP são obras humanas que possuem uma razão de ser, respondem questões de uma ou mais instituições, embora possam não ser objetivamente notadas em situação pelos sujeitos que vivem nessas instituições que lhes dão abrigo.

O termo viver no interior de uma instituição é empregado aqui no sentido de forma de vida da praxeologia nessa instituição e isso não se limita às suas componentes, quer dizer, tarefas, técnica, tecnologia e teoria. É preciso considerar que uma praxeologia é colocada em ação em resposta a uma situação, que encaminha o seu uso e/ou aplicação e, se assim podemos dizer, que atende um sistema de percepção e ação como os saberes práticos* ou *habitus* que encaminham o que e como deve ser feito em uma dada situação.

O *habitus* se revela — lembrem que consiste em um sistema de disposições, ou seja, de virtualidades, potencialidades e eventualidades — só em relação com uma situação determinada. É só *em sua relação com* certas estruturas que o *habitus* produz determinados discursos ou práticas (BOURDIEU, WAQUANT, 2005, p.197, tradução nossa)³.

Esses sistemas institucionalizados se manifestam em dialética com situações e são responsáveis pela dinâmica cognitiva institucional que, em reciprocidade, produz uma dinâmica praxeológica adequada a essas situações, ou seja, articula e integra praxeologias frente às situações reconhecidas no interior dessa instituição. Essas dinâmicas cognitivas e praxeológicas associadas constituem o que é denominado de relação institucional, ou simplesmente *RI*, com as *OP* movimentadas, em particular, com os objetos que compõem essas *OP*.

Como exemplo, Chevallard (2018) fala da sua relação pessoal com a escova de dente, com a máquina de café da cafeteria, com o pedal do freio do seu carro etc., todos os objetos que fazem parte do seu universo. De outro modo, Chevallard (2016) assim se refere à noção de relação com um objeto:

Foi a resposta a esta pergunta: De onde surge uma relação pessoal com um objeto? A resposta é: essa relação resulta do uso do objeto em todas as praxeologias que o envolvem, de uma maneira ou de outra, o que a pessoa teve que lidar. (CHEVALLARD, 2016, p.16, tradução nossa)

³ El *habitus* se revela - recuerden que consiste en un sistema de disposiciones, es decir, de virtualidades, potencialidades y eventualidades - sólo en relación con una situación determinada. Es sólo *en su relación con* ciertas estructuras que el *habitus* produce determinados discursos o prácticas.

O conjunto de objetos e de todas as relações criadas com eles no interior de uma instituição, em sentido amplo, o que inclui movimentação de saberes em situação, é denominado de Universo Cognitivo Institucional e é assim denotado por Chevallard (2016): $UI = \{(o, RI(p, o) / R(fi, o) \neq \emptyset\}$, onde p é uma posição institucional, o é um objeto e RI é a relação institucional relativa a um objeto e a posição e fi são os professores em formação inicial.

A noção de relação com um saber é entendida, então, como o conjunto de todas as OP que a instituição realiza ou realizou com esse saber. Nos parece que essa compreensão deixa claro que o modelo praxeológico proposto pela TAD não tem pretensão de alcançar a complexidade das atividades humanas, em particular da atividade matemática acadêmica ou escolar, mas em contribuir para a compreensão das diferentes atividades humanas, em particular, e de nosso interesse, das produções de organizações de saberes matemáticos para os seus ensinos, chamadas de organizações matemático-didáticas, a partir da noção de uma invariante estrutural, a noção de praxeologia. Chevallard (2018, p.34) afirma que: “a noção de praxeologia é o coração da TAD”.

Nas instituições escolares vivem organizações praxeológicas didático-matemática, ou seja, organizações praxeológicas construídas por meio de articulações e integrações de praxeologias para fins de aprendizagem por meio do ensino intencional.

Em geral, essas organizações são iniciadas como organizações de *praxeologias pontuais* que, em relação com outras praxeologias pontuais, ganham complexidade seguindo, embora nem sempre evidente, um dado saber. Isto é desprendido do seguinte extrato de texto.

De fato, muito raramente se encontra praxeologias pontuais, isto é (praxeologias) para um *único* tipo de tarefas T . Geralmente, numa determinada instituição, uma teoria Θ responde a *várias* tecnologias θ_j , cada uma das quais, por sua vez, justifica e faz inteligível *várias* técnicas θ_{ij} correspondente a tantos tipos de tarefas T_{ij} . As organizações pontuais vão assim se agregando, primeiramente como organizações *locais*, $[T_i/\hat{\theta}_i/\theta/\Theta]$, centradas sobre uma tecnologia θ determinada, em seguida em organizações *regionais*, $[T_{ij}/\hat{\theta}_{ij}/\theta_j/\Theta]$ formada em torno de uma teoria Θ . (CHEVALLARD, 1999, p.226, tradução nossa)

As noções de organizações pontuais, locais e regionais são noções teóricas e, portanto, não querem dizer que o ensino assim funcione nos espaços escolares. Elas são modelos que permitem as análises e, não menos importante, o desenvolvimento de organizações praxeológicas complexas, considerando as possíveis articulações e integrações praxeológicas.

Nesse sentido Chevallard (1999, p.227, tradução nossa) afirma “que a noção de praxeologia aparece assim, como uma noção genérica cujo estudo convém aprofundar-se – sobretudo mediante o estudo empírico e a análise de dados de observação reconhecidos”.

As análises didáticas realizadas, seguindo o modelo de organizações praxeológicas disponibilizado pela TAD, por García (2005), Sierra (2006), Barquero (2009), Ruiz Munzon (2010), Serrano (2013), dentre outros, têm evidenciado um ensino de matemática como ensino de praxeologias desconectadas e que seguem um ritual de visita a um museu, chamada por Chevallard (2009b, 2013c) de paradigma de visita às obras ou simplesmente monumentalismo, onde se conhece as obras, mas não se sabe para que servem.

Segundo Chevallard (2013c)

No marco da teoria antropológica do didático, este paradigma se conhece como o paradigma da “visita de obras” ou — segundo uma metáfora que se usa na TAD — “a visita de monumentos”. Cada um desses traços de conhecimento — por exemplo, a fórmula de Herón para o cálculo de área de um triângulo — se apresenta como um monumento com valor em si mesmo, que os estudantes devem admirar e desfrutar, ainda que não saibam quase nada sobre suas razões de ser, não atuais nem do passado. (CHEVALLARD, 2013c, p.164, tradução nossa)

Ainda nesse sentido, as organizações didático-matemáticas em ação em sala de aula podem ser entendidas como dotadas de inúmeras facetas que as tornam organizações praxeológicas complexas, ou OPC, (SODRÉ, 2019) no sentido de serem agregações de diferentes organizações praxeológicas associadas a diferentes tecnologias e ou teorias, inclusive de saberes práticos.

Assim, a análise didática de uma organização praxeológica em situação, exige uma compreensão mínima sobre sua possível construção histórica e epistemológica no seio da instituição que lhe dá abrigo, de modo a permitir os contrastes necessários para evidenciar os saberes, suas articulações bem como as

possíveis condições e restrições que agem sobre essa organização praxeológica para a consecução de um dado objetivo: o encontro de uma resposta a um dado questionamento.

Correlativamente, as compreensões ou subjetivações de praxeologias relativas a um mesmo objeto por uma pessoa é denominada de relações da pessoa com esse objeto, ou simplesmente *RP* e constituem o *universo cognitivo da pessoa* relativo a esse objeto (CHEVALLARD, 2018). Esse cognitivo pessoal é um social incorporado, resulta das diferentes experiências vividas por essa pessoa com esse objeto em diferentes tempos e posições em diferentes instituições.

Deve-se notar que o termo cognitivo não é tomado aqui em sua acepção intelectualista corrente: Eu tenho uma relação pessoal com a minha escova de dente, com a máquina de café da cafeteria, com o pedal do freio do meu carro, etc., todos os objetos que fazem parte do meu universo *cognitivo*, que da mesma forma inclui, por exemplo, a noção de equação quadrática ou de derivada. (CHEVALLARD, 2018, p.32)

Dessa forma, em termo da TAD, dizemos que um professor conhece ou passa a conhecer um objeto de ensino quando tem uma relação pessoal com esse objeto, entendida como resultante de todas as praxeologias realizadas por esse professor com esse objeto, cada uma em conformidade com a relação institucional correspondente em que esse professor vive ou viveu. Para Chevallard (2018)

As instituições se remodelam segundo as relações pessoais de seus sujeitos, de uma maneira geral, as nossas relações “pessoais” são o resultado da história das nossas sujeições institucionais passadas e presentes. (CHEVALLARD, 2018, p.33)

De outro modo, a relação de um professor com um dado objeto nasce, modifica ou se ratifica, quando esse professor realiza, ou vê realizar, uma organização praxeológica com esse objeto em uma dada posição de uma escola, situada em um lugar num dado tempo.

Quando a realização da praxeologia está em conformidade com as relações institucionais (*RI*) associadas, dizemos que a pessoa, no caso, o professor, aprendeu a usá-la em conformidade com as instituições, mesmo que essas conformidades nem sempre sejam claras ou explícitas.

Existe uma dialética entre as relações institucionais e pessoais; as primeiras proporcionam as condições e restrições sob as quais se criam e evoluem as segundas; a mudança, as segundas são pontos de apoio para as primeiras quando alcançam um estado idôneo segundo as exigências institucionais (ARAYA; MATHERON, 2006, p. 262, tradução nossa).

Assim, a noção de universo cognitivo da pessoa é interdependente da noção de universo cognitivo institucional e correlaciona o equipamento praxeológico pessoal com os equipamentos praxeológicos das instituições que a pessoa vive e ou viveu. De outro modo, a pessoa é detentora de um *Equipamento Praxeológico Pessoal (EPP)* que se refere ao conhecimento dessa pessoa.

Essa interdependência nos faz ver como a habilidade e a competência que a pessoa demonstra em situações, por meio da mobilização dos habitus a ela associados, mas precisamente, o social inscrito no indivíduo

Permite produzir uma infinidade de atos de jogo que estão inscritos no jogo em estado de possibilidades e de exigências objetivas; as coações e exigências do jogo, ainda que não estejam reunidas num código de regras, impõem-se àqueles e somente àqueles que, por terem sentido do jogo, isto é, o senso da necessidade imanente do jogo, estão preparados para percebê-las e realizá-las. (BOURDIEU, 2004, p.82)

A interdependência entre o equipamento praxeológico e o universo cognitivo da pessoa é que torna possível as ações em situações que são construídas tendo em conta o passado e o presente de conformidades institucionais nos encontros e reencontros com as praxeologias com objetos em diferentes situações e em diferentes instituições em que atua e atuou.

Ao tornar-se sujeito de uma instituição I na posição p, um indivíduo fi, que sempre é uma pessoa, com certo universo cognitivo UC (fi), se sujeita às *relações institucionais* $R_I(p; o)$, que irão reformular suas relações pessoais: se o objeto o existe para os sujeitos de I na posição p, a relação pessoal de fi à o, $R(fi; o)$, tende a se parecer com a relação institucional $R_I(p; o)$, a menos que fi revele-se, a este respeito, não estar em conformidade com I. Em geral, nossas relações "pessoais" são frutos de nossa história de conformidades institucionais passadas e presentes. (CHEVALLARD, 2018, p.33)

É importante considerar que a dialética entre uma pessoa e uma instituição se desenvolve em conformidade com a relação institucional relativa a um dado objeto

institucional, no entanto, essa relação institucional pode ser modificada pelos sujeitos dessa instituição quando criam para si novas conformidades para se livrarem de velhas práticas que os estão limitando ou impedindo de desenvolver novas práticas.

Entretanto, a conformidade de uma pessoa a uma instituição, relativa ao modo de pensar e de manipular um dado objeto em uma dada posição dessa instituição, pode não se dar de forma simples e direta, e sim de modo complexo e conflituoso. A pessoa pode inicialmente não aceitar ou até mesmo rejeitar uma praxeologia com esse objeto, tendo em conta que o encontro com esse objeto nessa instituição impõe mudanças em suas relações com ele que lhes parecem estranhas e até contrariam suas conformidades praxeológicas.

As conformidades de um professor relativa a um saber a ser ensinado referem-se as suas OP para o ensino desse objeto em diferentes posições de diferentes escolas e, em particular, na didática criada por ele nas salas de aula. Assim, os estranhamentos que contrariam um professor mediante uma nova OP que pode levá-lo a mudar sua relação com esse saber tem sua origem em sua relação pessoal com ele, que pode decorrer da baixa qualidade de seu equipamento praxeológico relativo a esse saber, mas também de condições externas à sala de aula.

É preciso considerar que há condições de agir que não são criadas pelo professor e que, frequentemente, são restrições que ele sabe ou ignora ou lhes são invisíveis por serem criadas em outros níveis, chamados por Chevallard (2018) de níveis de (co)determinação didática.

Esses níveis podem ser pensados como grandes esferas encaixantes com a sala de aula em seu centro. Elas agem umas sobre as outras mutuamente, da mais externa em direção à sala de aula e, nessa ordem, são: a civilização, a sociedade, a escola, a pedagogia e a disciplina que o professor ensina, em nosso caso, relativa à matemática.

Tradicionalmente se considera o nível da pedagogia como sendo o didático e que por sua vez acaba por se deter no nível da disciplina, deixando invisível os níveis de condicionamentos superiores externos à sala de aula, sem os quais muitos fenômenos relativos à difusão da disciplina não podem ser explicados. Ignorar os

níveis mais externos de (co)determinação didática certamente leva a “um estreitamento do âmbito dos estudos que, embora desprovido de consequências invalidantes para algumas pesquisas, devem, em alguns casos, ser reconsideradas”. (CHEVALLARD, 2018, p.37)

É nesse ambiente teórico, que assume a existência de condições externas à sala de aula que agem sobre as praxeologias ensinadas que emergem um dos problemas da formação de professores, especificamente, o problema de formação relativo a um saber a ser ensinado a partir da mudança de relação de professores com esse saber nos seguintes termos

A formação de uma pessoa, como sujeito prometida a uma instituição, por exemplo, a formação *profissional* de uma pessoa, supõe assim uma dinâmica cognitiva e praxeológica que resulta na exploração adequada de novas sujeições expressamente impressas à pessoa, o que implica um trabalho de identificação e de tratamento de conflitos impactado nestas novas sujeições, com as sujeições antigas, quando as primeiras são vividas pela pessoa como incompatíveis com a sua “identidade”. (CHEVALLARD, 2018, p.37).

Sob essa compreensão, a nossa questão é inserida na problemática de formação inicial de professores FI, em que desejamos mudar as suas relações pessoais com o sistema de numeração decimal, no sentido de fazê-las integrar em seu equipamento praxeológico novas organizações praxeológicas sobre sistema de numeração, tratando possíveis conflitos que podem emergir no processo para a formação quando novas organizações forem postas frente às antigas que caracterizam suas relações anteriores com esse objeto de ensino.

Nesses termos, a problemática de formação é assim anunciada: *Considerando um grupo de professores em formação inicial (FI) em que o EP(FI) e, correlativamente, UC (FI) sobre sistema de numeração decimal é questionado, desejamos saber se uma dada hipótese é capaz de prover uma mudança, de algum modo, na relação de (FI) com o sistema de numeração decimal. E nesse sentido, nos perguntamos sobre o quê em EP(FI) ou UC(FI) pode favorecer a mudança?*

Segundo Chevallard (2018), o enfrentamento desse tipo de problemática não é simples e é extremamente difícil, senão impossível, se considerarmos como indispensável a descrição do UC(FI) ou do EP(FI) dos professores em formação,

pois estes são acessados de modo fragmentado e, além disso, a simples descrição da relação de um professor com um objeto dificilmente seria esgotada.

Essa dificuldade pode ser removida em muitos casos (CHEVALLARD, 2018) dependendo do objetivo da pesquisa. Chevallard (2018) cita como exemplo, se é desejado saber, se a relação que o objeto possui a uma dada propriedade ou quando se deseja saber se uma determinada praxeologia com o objeto pertence ao EP dos professores.

Esta pesquisa se insere nos tipos de casos possíveis e exemplificados, uma vez que a questão de tese Q_T deseja saber se a quantificação de unidades de grandezas discretas desnaturaliza os numerais decimais. Essa questão não anuncia qual o tipo de praxeologias de quantificação, uma vez que não é possível sabermos a priori quais praxeologias de quantificação pertencem ao EP(FI). Porém, estamos interessados nos numerais decimais enquanto produto do SND e, esse caso, sugere que a praxeologia de quantificação seja do tipo que recorre a agrupamentos de unidades.

Nesse sentido, duas outras questões sequenciais derivam da questão de tese Q_T . A primeira é a questão Q_N assim anunciada: ***Como construir um numeral posicional a partir de aglomerados de unidades físicas?*** A segunda questão Q_M , é mais específica e obtida da hipótese de tese desta pesquisa relativa à desnaturalização como tomada de conhecimento da estrutura do SND, é assim anunciada: ***As práticas de quantificação de unidades de uma grandeza discreta por agrupamentos iterativos de unidades, ou seja, as que consideram agrupamentos de agrupamentos de mesma natureza, revela a estrutura dos numerais posicionais?***

Para enfrentar esse tipo de problemática de formação com base na mudança de relação com saber, Chevallard (2018) chama atenção para o fato de ser necessário considerar que a relação dos professores em formação inicial com os saberes da matemática escolar contém um núcleo comum, em que grande parte das condições e restrições são moldadas por sua vivência enquanto aluno da educação básica, caracterizadas por Chevallard (2018) como paradigma escolar do *inventário de saber*, assim sendo, de leituras inventariantes do universo do saber, por exemplo,

os conteúdos programáticos para cada ano, em nosso caso, os da disciplina de matemática da escola.

Para contrapor isso, ele propõe o que denomina de paradigma escolar de questionamento do mundo, ou seja, uma leitura questionante do mundo, inclusive do mundo dos saberes. Nesse paradigma, a comunidade de estudo constituída do pesquisador-formador D e os professores em formação FI, vai ao encontro de saberes, não por serem considerados desejáveis em si mesmos, mas para responder a questionamentos sobre o mundo, bem como para questionar esses saberes.

Deste modo, a metodologia de investigação em consonância com os fundamentos teóricos aqui considerados, deve ser provida de modo a emergir questionamentos suficientemente fortes aos professores que os façam assumi-la como uma problemática deles e, com isso, constituam uma comunidade de estudo, chamada de sistema didático principal, que encaminhe um percurso de estudo e pesquisa, daqui em diante PEP, rico em situações, não necessariamente planejadas a priori, que os leve a estudos e a investigações de obras, em sentido amplo, e não menos importante a mobilizar os EP(FI) em situação. Os *UC(FI)* e *EP(FI)* constituem condições e restrições pré-existentes não conhecidas e de difícil acesso pelo pesquisador/formador, mas com fragmentos que podem ser alcançados quando são mobilizados em situações.

Logo, o PEP é construído por meio de uma sequência de sistemas didáticos auxiliares, em sentido cronológico, não linear em estrutura relativa aos saberes mobilizados, pois admite “idas e vindas” por meio de sistemas didáticos auxiliares, às vezes até solitários, instituídos pela comunidade de estudo ou por um professor em formação a partir de situações criadas ou modificadas durante o desenvolvimento do PEP.

Nesses termos, a condição de existência e funcionamento dos sistemas didáticos, o que inclui o próprio PEP, são as situações posto que são estas que levam a questionamentos que geram novas situações que se desdobram em questionamentos. Todos frutos de estudos e análises e obras que ajudam a criar ou modificar respostas que vão se tornando condições para novas situações frente ao EP(FI) e ao EPI institucional disponível, além dos recursos matérias disponíveis e

julgados importantes, em algum sentido, pela comunidade de estudo, para responder ao questionamento derivado da situação inicial.

2.3 O PEP COMO QUESTIONAMENTO DE MUNDO

A metodologia do PEP foi proposta por Chevallard (2018) para o ensino, como também para a pesquisa e, não menos importante, para o desenvolvimento de organizações praxeológicas e, por contiguidade, foi se consolidando como percursos de formação de professores.

Nesse sentido, Chevallard (2018, 2009b) se referiu à pedagogia de questionamentos, como engenharia didática de segunda geração e, mais recentemente, tem recebido a denominação de formação de professores por questionamentos (BOSCH; GASCÓN, 2009; RUIZ *et al.*, 2014).

Chevallard (2004, 2009d, 2013a, 2013b) destacou a necessidade de fazer uma efetiva mudança de rota no ensino tradicional, entendido como o ensino em que o professor é o detentor do saber e os alunos são os que visitam as obras, em que os saberes são apresentados sem que se diga a que questões eles respondem.

Para isso, ele introduziu a noção do PEP que consiste em uma metodologia para a pesquisa e desenvolvimento de respostas às dadas questões sobre organizações praxeológicas, entre elas, as praxeologias docentes com os saberes específicos. Portanto, as funções de pesquisa e desenvolvimento de organizações praxeológicas são características do PEP que nos permite trazer de uma maneira orgânica mais recursos que são realmente usados para abordar uma questão e conhecer o mundo, natural e social.

Chevallard (2013b, p.168) afirma que o novo paradigma didático tem como propósito criar um novo *ethos* cognitivo a partir de uma questão Q e isso envolve os FI e os professores e/ ou pesquisadores D, em tipos de tarefas que demandam atitudes procognitivas em contraste com a retrocognitiva adotada pelo ensino tradicional dominante em nossas escolas.

O paradigma de questionar o mundo exige uma atitude muito diferente, que chamamos procognitiva (em sentido não relacionado com o uso desta palavra, a uma droga que reduz o 'delírio ou a desorientação'), e que nos empurra a nos comportarmos como se o conhecimento estivesse ainda por descobrir e todavia por conquistar – ou por descobrir e conquistar de novo.

Portanto na interpretação retrocognitiva, saber é 'saiba de volta', enquanto que na via procognitiva, 'saber é seguir para frente'. (CHEVALLARD, 2013b, p.169, tradução nossa)

Sob esse paradigma, o questionamento de mundo consiste em encontrar por meio de um PEP um novo conhecimento ou reencontrar um conhecimento antigo e meio esquecido, de maneira que os FI, num movimento de *questionar – (re)encontrar – questionar* aprendam: aprendam ou voltem a aprender as respostas prontas $R^\diamond$, as obras O e, finalmente, a resposta desejada $R^\heartsuit$.

Segundo Chevallard (2013b)

A indagação dirigida por x sobre Q abre um caminho chamado Percurso de Estudos e Pesquisas (PEP). Para avançar por esse caminho, a equipe de indagação FI tem que utilizar o conhecimento – relativo as respostas $R^\diamond$, assim como as obras O – até então desconhecidas de seus membros, com as quais a equipe terá que se familiarizar para poder continuar em frente a trilha em direção a resposta $R^\heartsuit$. Uma condição necessária para ele é que D e cada membro fi de FI se comportem procognitivamente, com vontade de encontrar novo conhecimento – novas obras – sem mais delongas. (CHEVALLARD, 2013b, p.170, tradução nossa)

Quando se investiga uma questão, o objetivo é como "investigar a questão Q para lhe trazer uma resposta $R^\heartsuit$ que satisfaça certas exigências" (CHEVALLARD, 2018, p. 44). Essa tarefa é formalizada esquematicamente por:

$$S(FI, D, Q) \rightarrow R^\heartsuit$$

A expressão $S(FI, D, Q)$ denota o sistema didático principal ou comunidade de estudo e investigação da questão Q . Esse estudo e investigação da questão Q pelo sistema didático $S(FI, D, Q)$ demandará trabalhos sinérgicos que, segundo Chevallard (2018, p.47, tradução nossa), necessitará de ferramentas, de recursos, em resumo, de suportes didáticos que constituirão um meio didático M específico, que ele deve identificar, recolher e/ou aprender a usar, a fim de produzir uma resposta $R^\heartsuit$. Isso é esquematicamente representado pelo seguinte esquema ampliado:

$$[S(FI, D, Q) \rightarrow M] \rightarrow R^\heartsuit$$

O meio M é constituído de tipos de tarefa e, como toda ação humana, seguindo a TAD, pode ser descrito por meio de praxeologias $\wp_1, \wp_2, \dots, \wp_n$, nem

todas pertencentes a um único domínio de conhecimento e isso caracteriza o PEP como uma Organização Praxeológica Complexa (OPC) (SODRÉ, 2019). As obras são referidas por Chevallard (2016), especificamente para essa metodologia, como suporte didático nos seguintes termos:

Suportes didáticos são complexos praxeológicos ou partes deles: podem ser “ingredientes” de praxeologias matemáticas, de escrever praxeologias (neste ou essa linguagem), de praxeologias de programação de computadores, de praxeologias de condução, de praxeologias de cozimento, etc. Todas essas “entidades praxeológicas” são conhecidas na TAD pelo nome de obras (CHEVALLARD, 2016, p.16, tradução nossa)

No âmbito da TAD, uma obra $\mathcal{Q}_i$ é compreendida como qualquer realidade criada por seres humanos com vista a alcançar alguma função praxeológica (CHEVALLARD, 2016, p.16, tradução nossa) e elas constituem o suporte didático necessário, ou pelo menos útil, que permite os sistemas didáticos auxiliares S (FI , D , $\mathcal{Q}$) reconstruírem respostas R_j . O seguinte extrato de texto é esclarecedor quanto ao processo de desenvolvimento dessa metodologia.

Para recorrer às respostas R_i ($1 < i < m$), o sistema didático recorre a obras de vários tipos, como teorias, experimentos, narrativas historiográficas, etc. Portanto, o meio agora é escrito na forma: $M = \{R_1, R_2, \dots, R_m, O_{m+1}, O_{m+2}, \dots, O_n, \dots\}$. Para usar essas obras, o aluno e o pesquisador precisam estudá-los. (CHEVALLARD, 2016, p.18, tradução nossa)

Estudar uma obra consiste em estudar questões sobre ela que dependem da investigação e dos encaminhamentos realizados a partir de uma questão geradora Q . As obras são diversificadas e, entre elas, Chevallard (2016) destaca um tipo crucial para as pesquisas empíricas. São as coletas de dados, aqui denotadas pela letra D_k , uma vez que criam condições para encaminhar questões Q_k no decorrer do processo de modo harmônico ou não com outras obras.

As respostas parciais $R^\diamond_1, R^\diamond_2, \dots, R^\diamond_n$ são respostas “legitimadas” pela classe $[FI, D]$, com ajuda, do manual da classe, de um site da web, de curso de um professor etc., que são alcançadas pelo estudo das obras.

De outro modo, as “obras” $O_{n+1}, \dots, O_m$ como teorias, recursos experimentais, dados etc., encaminham as praxeologias que achamos úteis para desconstruir as respostas parciais prontas $R^\diamond$ e extrair eventualmente material adicional e construir

com ou sem eles uma resposta desejada $R^\heartsuit$ que devem satisfazer certas restrições, a priori, denotada no esquema com um pequeno coração.

$S(FI, D, \mathcal{Q}) \rightarrow M \rightarrow R^\heartsuit$, em que

$$M = \{\mathcal{Z}_1, \mathcal{Z}_2, \dots, \mathcal{Z}_m, R^\diamond_1, R^\diamond_2, \dots, R^\diamond_n, \mathcal{Q}_1, \dots, \mathcal{Q}_p, \mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \dots, \mathcal{D}_k\}$$

Em síntese, esse esquema no contexto desta pesquisa é assim discriminado:

$FI \rightarrow$ é um grupo de alunos ou professores em formação;

$D \rightarrow$ é uma equipe de professores, em que se inclui o pesquisador

$\mathcal{Z} \rightarrow$ é uma questão que se pretende responder

$R^\diamond_k \rightarrow$ Respostas praxeológicas legitimadas pela classe $[FI, D]$

$\mathcal{Q}_k \rightarrow$ Obras estudadas

$\mathcal{D}_k \rightarrow$ Dados, aqui são chamados de dados observacionais e textuais, coletados pelo pesquisador.

A criação do meio M implica também na criação de um sistema de condições. Para isso, cada agente do sistema didático $S(FI, D, Q)$ deve saber o seu papel e dispor dos meios para exercê-los.

Segundo Chevallard (2009b)

Para que haja um PEP, num significado razoável, é necessário que a organização didática concebida ou observada pareça objetivar (no primeiro caso) ou manifestar (no segundo caso) um número de condições que afetem simultaneamente a mesogênese, a topogênese e a cronogênese (CHEVALLARD, 2009b, p.23, tradução nossa)

A mesogênese, a topogênese e a cronogênese são distintas das classes tradicionais de estudo e essa distinção é imprescindível na constituição do PEP, pois estão relacionados diretamente com as organizações didáticas que o compõem. Essas organizações são formadas no seio de um meio, chamado por Chevallard (2009a) de *milieu*.

A “fabricação” do *milieu M* acontece no desenrolar do PEP, ou seja, ele não está pronto a priori, pois é constituído a partir de várias produções *externas* à classe e *internas* a ela. Essa produção incluem as respostas dadas pelos professores em formação contando com suas próprias atividades e, por isso, legitimada somente por

seu proponente e, quando submetida e legitimada pela classe, poderá encaminhar a resposta desejada $R^\bullet$.

De outro modo, Chevallard (ibidem) considera que o milieu precisa pelo menos dessas duas condições para se ter um meio favorável

(a) Submeter cada uma das respostas R°_i , que compõe a resposta $R^\bullet$ em preparação, a prova de uma dialética da mídia e do milieu necessário, e (b) oferecer materiais adequados para a construção de uma resposta $R^\bullet$ válida e satisfazendo as restrições impostas (CHEVALLARD, 2009b, p.23, tradução nossa)

Essas condições agem sobre a mesogênese, cronogênese e topogênese existentes em cada momento de estudo.

2.4 MESOGÊNESE, CRONOGÊNESE E TOPOGÊNESE

A criação de novas relações tendo em conta os saberes dos professores sobre o SND, que serão os agentes do PEP, demandará uma dinâmica que envolve um fator que consideramos primordial, o tempo e a contradição entre os saberes antigos e os novos.

Chevallard (2009d) afirma que

O docente é, portanto, aquele que sabe antes dos que já sabem, ou seja, ele que sabe “mais”. Isto lhe permite conduzir a *cronogênese do saber*. Essa é, estritamente, a condição que lhe permite levar a realizar a renovação didática: é a condição mínima. Se essa situação de avanço cronológico, sempre é destruída (pela aprendizagem), e sempre reconstruída (pelo ensino, isto é, pela introdução de novos objetos transacionais) se estruturada, segundo o eixo temporal único de um tempo progressivo, acumulativo e irreversível, existiria uma identificação – embora em assincronia cronológica – do tempo de ensino e do tempo de aprendizagem: a ficção de um tempo único se tornaria realidade. (CHEVALLARD, 2009d, p.81, tradução nossa)

De outro modo, o tempo de ensino não pode ser confundido com o tempo de aprendizagem. O professor ou orientador de estudo, embora saiba mais, não conhece o momento exato da movimentação desses ou daqueles, e nem quais, saberes podem vir a ser envolvidos. Cada um, orientador ou professor em formação, tem sua posição relativa aos saberes que podem ser posto em jogo, que

denominamos de topogênese. Essa dialética entre os agentes do PEP, o professor/pesquisador dotado de um horizonte do saber, que lhe permite vislumbrar trilhas possíveis e os alunos que ainda estão a construir essas trilhas, implicam em um tempo necessário de estudo, não dominado por ambos, os quais denominamos de cronogênese.

A cronogêsis, tempo de estudo de um dado saber, o professor em seu papel de orientador de estudo, que ratifica ou retifica escolhas e níveis de profundidade dos estudos das obras pelos alunos, estes como (re)construtores de respostas, que definem a topogênese, em dinâmica simultânea, constroem em decorrência e em consequência o meio ou a mesogênese necessária para construir a resposta desejada.

Segundo Chevallard (2009d, p.87, tradução nossa) “o saber do professor é diferente: ou mais precisamente o lugar do professor em relação com o saber é outro, irreduzível ao do aluno”. No PEP o papel do professor/orientador é utilizar o seu saber, não para dar respostas prontas e sim para orientar os alunos a buscarem suas respostas, construir os seus próprios saberes. Chevallard (2009d, p.91, tradução nossa) afirma que “sempre há algo novo (cronogênese) para se aprender e sempre um pouco acima do nível do aluno (topogênese), essa é a necessidade do sistema didático”.

Para que haja essa construção de saberes, é preciso também que haja cooperação. Chevallard (2018) chama atenção para as tarefas do PEP que requerem cooperação de FI e D, mesmo que D ou FI estejam reduzidos a uma pessoa e devam seguir pelo menos os seguintes princípios: princípio da ignorância metódica “quanto às questões que fazem parte da pesquisa, não se conhece eventualmente os elementos de respostas explícitas ou implícitas recorrentes na instituição, (CHEVALLARD, 2018, p.46)”; Princípio da dúvida metódica, quando Chevallard (2009c) menciona que qualquer afirmação que emergja no sistema didático $S(X, Y, Q)$ sobre as questões e sobre a pesquisa deve ser considerada fundamentalmente como conjectural, ou seja, não se deve acreditar ou rejeitar a priori, permitindo que seja trabalhada posteriormente sua veracidade, principalmente quando não é uma afirmação muito conhecida por parte expressiva dos estudantes da pesquisa.

A observância desses princípios estão imprimidas em um novo contrato didático contendo cinco gestos ou tarefas que caracterizam o PEP como uma verdadeira pesquisa (CHEVALLARD, 2013a). Essas tarefas são apresentadas por Chevallard (2013a) e assim interpretadas no contexto desta pesquisa:

Tarefa H_1 . *Observar as respostas $R^\diamond$ que vivem nas instituições.*

Essas respostas $R^\diamond$ são compreendidas como praxeologias de quantificação, por exemplo, que vivem nas instituições escolares, em particular, em nosso caso, no curso de graduação de formação de professores dos anos iniciais sem perder de vista o equipamento praxeológico institucional e pessoal.

Tarefa H_2 . *Analisar - notadamente no duplo plano experimental e teórico- essas respostas $R^\diamond$.*

Em nosso caso, estamos interessados em encontrar como a práxis de quantificação é produzida, quais as limitações dessa práxis para o fim a que se destina ou ainda para as condições a que são impostas pela práxis sobre sua realização.

Tarefa H_3 . *Avaliar essas mesmas respostas $R^\diamond$.*

Para nós, essa tarefa objetiva encontrar o alcance da práxis tendo em conta as respostas da tarefa anterior, considerando as vantagens e desvantagens do uso desses tipos de práxis, considerando os condicionantes impostos em seu uso, por exemplo.

Tarefa H_4 . *Desenvolver uma resposta própria, $R^\heartsuit$.*

Em nossa pesquisa, o registro $R^\heartsuit$ denota a práxis buscada pela classe [FI, D]. Essa resposta pode ser encaminhada, por exemplo, articulando aspectos invariantes das tarefas anteriores, quando possível. De qualquer modo, demanda a descrição da textualização da práxis que revele, de algum modo, sua estrutura de saberes que posto em ação concorra para reconstrução dessas práxis.

Tarefa H_5 . *Difundir e defender a resposta $R^\heartsuit$ assim produzida.*

As respostas produzidas são compartilhadas e postas à prova no duplo plano, “teórico”, e se couber o “experimental” à classe [FI, D], como assim deixa claro Ladage e Chevallard (2010) quando afirmam que:

Estudantes de mestrado e doutorado tem seus relatórios de pesquisas julgados por uma banca da UE. Suas investigações devem apresentar uma resposta $R^\forall$ a uma respectiva questão Q , essas respostas precisam ser em tal caso, difundidas e defendidas e são asseguradas pelo registro escrito. A defesa acontece por via oral diante de um júri específico reunido para validarem ou não a pesquisa. Esse procedimento, de divulgar e defender os resultados de suas pesquisas, é obrigatório para todos que realizarem investigações. (LADAGE; CHEVALLARD, 2010, p.06, tradução nossa)

Essa tarefa assume também o papel de controle da produção individual e coletiva da classe $[FI, D]$, de modo a evitar que a classe simplesmente "copie" respostas existentes como uma resposta $R^\forall$. De outro modo, apresentar, analisar e defender perante à comunidade são partes inseparáveis da tarefa H_5 . Isso permite evitar a "copiagem", embora possamos admitir o compartilhamento de cópias como uma prova parcial de aprendizagem.

Como resultado de qualquer pesquisa, as respostas encontradas, inclusive a desejada, são sempre tomadas como provisórias e, portanto, não devem ser consideradas como definitiva, isso quer dizer que a investigação pode ser, quando decidido, pela classe $[FI, D]$, "reiniciada e retomada anteriormente com a resposta $R^\forall$ tomada, para a segunda pesquisa, como uma resposta $R^\diamond$ como as outras". (LADAGE; CHEVALLARD, 2010, p.08, tradução nossa)

A técnica que o diretor de estudo D deve assumir para o desenvolvimento do PEP consiste em coordenar os cinco tipos de tarefas, não necessariamente de modo sequencial, e, sobretudo, fazer a classe $[FI, D]$ "incorporar" as seguintes atitudes demandadas pelo paradigma hoje emergente dito "de questionamento do mundo" (CHEVALLARD, 2013b, p.167, tradução nossa). Essas atitudes são assim anunciadas por Chevallard (2013a):

h_1 . Problematizadora: consiste em problematizar as situações vividas ou observadas, isto é, levantar questões sobre elas. Esta é obviamente uma atitude essencial da qual nasce tanto a questão Q do esquema herbartiano quanto o engendramento das questões Q_j .

h_2 . Atitude herbartiana: consiste em não deixar escapar nenhuma questão Q , em tanto (por negação, por ignorância, por retroações) e, concretamente, para se envolver em seu estudo *hic et nunc* (aqui e agora) ou, pelo menos, para colocar os seus estudos *em expectativa*.

h_3 . Atitude procognitiva: A que se opõe à atitude retrocognitiva que é a assinatura secular do mundo escolar-universitário atualmente em declínio e que nos faz "olhar para trás" de maneira reflexa para o conhecimento

adquirido até o presente, que muitas vezes duvidamos (quando não os esquecemos), abandonando assim o reflexo retrocognitivo. Por oposição, são enviados esforços para projetar para o futuro, em uma tensão procognitiva, em direção ao conhecimento útil para a investigação em curso, enquanto não tenha sido encontrado. Considerar-se-á que quando abordamos uma questão "aberta" (para nós mesmos, mas também para qualquer outra pessoa), não é anormal "não saber nada" sobre esta questão além das ferramentas - respostas R_i , questões Q_j e outras obras $\mathcal{Q}_k$ - que seu estudo pode exigir. É a questão que conta, não o fato de que dispomos ou não, no momento em que vamos começar nossos estudos, das ferramentas pertinentes - essa pertinência dificilmente pode ser conhecida antecipadamente.

h₄. A exotérica, que se opõe à ilusão esotérica de quem acha que tudo sabe (pelo menos em um determinado domínio), que é conhecido em inglês como um know-it-all. A atitude exotérica consiste sempre em chamar para si - seja uma pessoa ou uma instituição - o que tem que estudar para *aprender ainda mais* ou para *verificar* o que já considera saber. A atitude exotérica está articulada a dois princípios que estão relacionados com o conhecimento e com a ignorância: 1) Permitimo-nos de forma alguma não saber, e isso em qualquer domínio (incluindo, portanto, o seu eventual campo de "especialização"); 2) Abstermo-nos de não afrontar a própria ignorância, independentemente do domínio (mesmo que pareça inicialmente estranho), para progredir tanto quanto possível e tanto quanto seja útil para um conhecimento adequado ao projeto em que esse conhecimento é suposto servir.

h₅. A enciclopedista comum: Consiste em se ver como não estranho a todos os campos praxeológicos possíveis, mesmo que, para muitos deles, seja com um grau de exotericidade próximo a zero, em tudo se esforçando constantemente para crescer, tanto quanto seja útil, esse grau de exotericidade. (CHEVALLARD, 2013a, p.04, tradução nossa)

Essas atitudes são consideradas por Chevallard (2013a) como condições desejáveis para as realizações das técnicas das tarefas dos tipos ***H₁*** à ***H₅***, em particular das praxeologias de *dialéticas de investigação*, destacadas frequentemente como o *contrapé* da cultura didática escolar-universitária atual e ainda dominante. Essas praxeologias de dialéticas de investigação são assim descritas segundo Chevallard (2013a)

δ₁. A primeira dialética é a do *estudo e pesquisa*: uma investigação supõe assim que foi apontada uma "boa combinação" de estudo (das respostas R^0_i , questões Q_j e de outras obras $\mathcal{Q}_k$) e de pesquisa (para passar das obras precedentes à resposta R^*).

δ₂. A segunda dialética é a do *individual e do coletivo* (ou da autonomia e da sinonímia), segundo a qual nenhum membro fi de FI pode estar pronto para prosseguir o estudo e a pesquisa relativamente à Q enquanto uma resposta R^* não tenha sido produzida e validada por FI sob a direção (ou supervisão) de D . Cada $fi \in FI$ deve saber renunciar à criação de sua própria lei (autonomia) e contribuir para a construção coletiva e para assunção de uma lei do grupo FI (sinonímia).

§ 3. A terceira dialética é a da *análise (e síntese) praxeológica e da análise (e síntese) didática*: se qualquer análise didática supõe uma análise praxeológica (de interesse didático), o recíproco é igualmente verdadeiro: para entender uma realidade praxeológica (de toda natureza: prática, técnica, tecnológica, teórica) é útil, senão indispensável, realizar uma análise didática (de onde ela vem, como foi "aprendida" pela instituição ou onde a descobriram etc.).

§ 4. A quarta dialética é a do *tema e do irrelevante*: contra o postulado da escola do caminho mais curto, que somente conduz a um objetivo conhecido e determinado para o *avanço*, ela impulsiona a pesquisa, em princípio aberta, *arriscando o irrelevante* em matéria de pesquisa documentária, por exemplo, (movimentando notadamente as R^0_i) nas escolhas das questões Q_i engendradas pelo estudo de Q , e de onde decidirá ou não iniciar ou continuar o estudo.

§ 5. A quinta dialética é a do *paraquedista e da trufa*: contra o duplo habitus escolar da escassez documental e da busca da adaptação imediata do documento ao projeto de estudo e pesquisa, ela conduz a "cobrir" vastas áreas, em que, a priori, se pensa que não se encontrará grande coisa, mas onde poderá acontecer o inesperado, e onde aprenderemos a detectar as raras "pepitas" - as "trufas" - muitas vezes não muito visíveis, que farão avançar a pesquisa.

§ 6. A sexta dialética é a *de caixas pretas e caixas brancas*: contra o primado dado ao conhecimento *já* disponível (retrocognição), ela convida a dar primazia ao conhecimento pertinente, para a descoberta (procognição), seja qual for seu status a priori, frente às disciplinas ensinadas, que limitam ao estritamente necessário o trabalho de clarificação (as caixas consideradas "claras" são sempre caixas cinzentas), assumindo o risco, pontualmente, (a) de esclarecer as caixas pretas localizadas fora do currículo oficial, (b) para deixar no escuro o que está no currículo familiar em tal disciplina ensinada, visando outros lugares para esclarecer, c) rastrear as caixas "invisíveis", considerando a "transparência", para *desconstruir as evidências da cultura da instituição sempre que seja útil*.

§ 7. A sétima dialética é a *dialética clássica de conjecturas e provas*, mas que, de uma perspectiva mais ampla, também é chamada de *dialética da mídia e do meio* (espaço social sobre uma atividade): contra os ensaios mais ou menos regrados para o avanço de asserções consideradas seguras em virtude da autoridade da instituição de ensino, ela engaja a submissão das afirmações obtidas às críticas das diversas dialéticas e às avaliações do grau de incerteza de uma determinada asserção, independentemente da instituição ou da pessoa que a emite.

§ 8. A oitava dialética é a *da leitura (= da "excrição") e da escrita (= da inscrição)*: contra a cópia formal de textos onde se escrevem as respostas R^0 com aplicação em texto "desvitalizado", ela nos convida a entrar na dialética da leitura "excreativa", que dá vida às respostas R^0 depositadas nos documentos disponíveis e à escrita "inscritiva" de uma resposta adequada R^v que toma forma gradualmente pelo cruzamento de vários níveis de escrita (diário de bordo, notas de síntese, glossário, produção final).

§ 9. A nona dialética é a *de difusão e recepção*: contra a tentação de não defender sua resposta R^v , assumida antecipadamente conhecida e reconhecida pela instituição em que é produzida, contra o oportunismo de encaminhar R^v a fim de agradar a quem é dirigida, ela convida a *defender R^v* sem infidelidade ao trabalho realizado, mas em atenção para que outros possam aceitar. (CHEVALLARD, 2013a, p.5-6, tradução nossa)

As dialéticas buscam assegurar, de algum modo, que não haja julgamento a priori, por exemplo, se isso ou aquilo é um saber ou não, se deve ser considerado ou não, o que é ou não é um conhecimento a priori do conteúdo do equipamento praxeológico, EP, pessoal ou institucional, e sim o que é útil ou necessário para o desenvolvimento do PEP. Esse EP deve crescer na ação do percurso das investigações e “para isso não é suficiente ser matemático, biólogo, físico, pedagogo, geógrafo etc., mas ser praxeologicamente adequado, ou seja, é procurando o saber que se torna ‘sábio’”. (CHEVALLARD, 2013a, p.08, tradução nossa).

Essa é a metodologia questionadora do mundo que recorreremos nesta pesquisa. Ela é o PEP construído em consonância com os recursos teóricos disponibilizados pela TAD, para assumir as funções de metodologia de pesquisa no campo das análises praxeológicas dos professores, bem como a metodologia de formação inicial e continuada de professores frente as suas atividades específicas, como assim requer nossa questão de pesquisa.

2.5 O PEP DESTA PESQUISA

O PEP desta pesquisa foi desenvolvido sob a restrição de que um saber da matemática escolar pode ser produto de uma prática social ou saber prático, principalmente no ensino fundamental, muito embora seja dominante no meio docente o pensar sobre os saberes escolares como produtos de saberes dos matemáticos.

Esse PEP começou bem antes da construção deste relatório de pesquisa e, se podemos assim dizer, continua em andamento, mesmo que tenhamos alcançado a resposta, julgada por nós, como adequada para encerrar o presente relatório.

As situações concretas vividas por nós em formações continuadas de professores dos anos iniciais, relativo ao SND e às leituras de obras em busca de melhor compreender as lacunas existentes, que impedem uma melhor compreensão da noção de número que vive na escola, levaram-nos ao encontro da questão de tese Q_T e, como em consequência, instituímos o sistema didático $S(D, Q_T)$.

Para o funcionamento desse sistema didático, invocamos situações de manipulação de materiais concretos que são correntes nos anos iniciais do ensino

fundamental e isso nos levou ao encontro do questionamento Q_N : ***Como construir um numeral a partir de aglomerados de unidades físicas?*** Esse questionamento nos levou a instituir o sistema didático $S(D, Q_N)$, cujos estudos sobre diferentes obras, sobretudo de Stevin (1585) e Ripoll, Rangel e Giraldo (2015), levou-nos a construir práticas de manipulação de unidades de grandezas que, em hipótese, poderiam gerar numerais posicionais.

Essa hipótese foi substantiada por meio do questionamento Q_M : ***As práticas de quantificação de unidades de uma grandeza por agrupamento iterativos, ou seja, as que consideram agrupamentos de agrupamentos de mesma natureza, revela a estrutura dos numerais posicionais?*** sob a restrição de construir uma trajetória de formação de professores em formação inicial para os anos iniciais que os fizessem ver suas mudanças de relações com os numerais decimais.

A questão Q_M tornou-se, então, a condição de existência e funcionamento do sistema didático por $S(D, Q_N)$ e, como consequência, do sistema didático $S(D, Q_T)$. Para isso, foi criado o sistema didático $S(D, Q_M)$, cujo funcionamento frente às restrições e condições postas, concebeu e executou um projeto de formação inicial de professores relativo ao SND em consonância com a busca de respostas para as questões relacionadas até aqui postas, em particular, para a questão de tese Q_T .

A concepção do projeto de formação inicial de professores em consonância com a pesquisa de tese, torna-se objeto do nosso próximo capítulo.

3. A CONCEPÇÃO DO PROJETO DE FORMAÇÃO INICIAL DE PROFESSORES RELATIVO AO SND.

3.1 INTRODUÇÃO

A pesquisa desta tese se constituiu em um percurso de estudos e pesquisas, PEP, que demandou para seu funcionamento a realização de um sistema didático com os professores, podendo ser interpretado como um PEP auxiliar, com duplo papel, especificamente, como campo de empiria para a pesquisa e, em simultaneidade, como percurso de formação de professores relativo ao SNP.

Assim, a pesquisa começou como um PEP para responder à questão de tese – Q_T . Para isto, o pesquisador D instituiu o sistema didático $S(D, Q_T)$ que, para seu funcionamento criou condições a partir do questionamento Q_N : ***Como construir um numeral a partir de aglomerados de unidades físicas?*** Esse questionamento produziu uma situação de pesquisa como uma condição para o funcionamento do novo sistema didático $S(D, Q_N)$.

Para criar condições para responder Q_N e, em consequência, uma condição para responder Q_T , sob a restrição de construir uma trajetória de formação de professores em formação inicial para os anos iniciais que os fizessem ver suas mudanças de relações com os numerais decimais, esse sistema didático $S(D, Q_N)$ encaminhou a questão específica Q_M : ***As práticas de quantificação de unidades de uma grandeza por agrupamento iterativos, ou seja, as que consideram agrupamentos de agrupamentos de mesma natureza, revela a estrutura dos numerais posicionais?***

A questão Q_M criada por $S(D, Q_N)$ levou a criação do sistema didático $S(D, Q_M)$ que, em consonância com as condições e restrições postas, deve conceber um percurso de estudo e pesquisa com participação dos professores em formação inicial, com base na engenharia didática reversa (SILVA, 2019), no sentido de admitir que um saber matemático escolar pode ser produto de um saber prático.

Esse pensar atende ao estudo dos numerais decimais considerando que eles emergiram historicamente e, epistemologicamente, das práticas de quantificação de

unidades de grandezas discretas (LENDÍNEZ; GARCÍA; SIERRA, 2017) e independente das construções dos saberes matemáticos atuais, como por exemplo, os conjuntos numéricos.

Além disso, a questão Q_M foi derivada de Q_N sob a compreensão de que as práticas de quantificação não dependem de conhecimentos matemáticos e, portanto, estão ao alcance de quem possui baixo conhecimento matemático, inclusive professores e alunos dos anos iniciais, e podem permitir que professores em formação inicial (FI), questionem os numerais, criando assim, condições para que possam mudar suas relações com o SNP.

3.2 A CONCEPÇÃO DO PROJETO

A resposta à questão Q_M foi construída pela direção de estudo D, no duplo papel, o de pesquisador e de formador, e pelos professores em formação inicial FI por meio de encontros não planejados, a priori, com situações de quantificações criadas no seio do PEP auxiliar, daqui para frente representado pelo sistema didático $\mathcal{S}(FI, D, Qg)$, em que Qg se referiu a questões iniciais com potencialidade de gerar esse sistema didático.

As situações que foram criadas proveram observações sobre gestos didáticos dos professores em formação FI na execução de suas tarefas de difusões e defesas de suas respostas e questionamentos como mobilização de seus estudos sobre diferentes obras.

Esses gestos são condições indispensáveis para que o pesquisador, com segurança, pudesse validar as hipóteses postas e fazer com que os professores vissem, em formação FI, os numerais decimais como numerais posicionais dotados de uma estrutura que é invariante em relação à base considerada.

Para criar condições para a existência e funcionamento do $\mathcal{S}(FI, D, Qg)$, foi necessário engendrar estudos pelo sistema didático $\mathcal{S}(D, Q_M)$ visando a uma compreensão sobre o SND ou modelo epistemológico de referência (MER) que, em especificidade, é um modelo de quantificação decimal (MQD). Este modelo foi tomado como condição específica para a construção de um novo modelo, o modelo praxeológico de referência (MPR) relativo aos elementos constituintes dessa

questão Q_M , ou seja, a de considerar a suposta insuficiência de conhecimentos matemáticos frente à quantificação de aglomerados de unidades por agrupamentos de mesma natureza, como enfrentamento do desconhecimento da estrutura do SND por sua naturalização.

Ressaltamos que o MPR deverá estar disponível somente ao diretor de estudo D e deve funcionar para atender o seu duplo papel na direção de estudos do sistema didático $\mathcal{S}(FI, D, Qg)$ quando:

- (1) Primeiro, relativo aos topos de D como *formador*. Nesse caso, o MPR deve funcionar para a direção de estudo D como orientador de seus gestos didáticos de criar ou modificar condições para que leve os professores FI a verem mudanças de suas relações com os numerais posicionais.
- (2) Segundo, e em consonância com o primeiro, relativo aos topos de D enquanto *pesquisador*, o MPR é a base de sua orientação para a construção de situações didáticas, inclusive a questão geradora Qg para o desenvolvimento do $\mathcal{S}(FI, D, Qg)$, e de gestos didáticos para criação de condições necessárias de modo a prover respostas à sua pesquisa.

Assim, em seguimento apresentamos os principais resultados dos estudos realizados por $\mathcal{S}(D, Q_M)$ para a construção do MPR e do texto de uma situação que possa gerar a situação didática $\#(FI, D, Qg)$, entendida como subjetivação do texto pela classe $[FI, D]$, para a existência e funcionamento do sistema didático $\mathcal{S}(FI, D, Qg)$.

De outro modo, o $\mathcal{S}(FI, D, Qg)$ deve se dar por meio de situações sem considerar possíveis variáveis didáticas relacionadas aos gestos didáticos recorridos em seu desenvolvimento, admitindo que os resultados encontrados possam ser submetidos às experiências em situações mais complexas e sob hipóteses mais profundas, sobretudo, sob intervenções controladas da direção de estudo D.

3.3 OS MODELOS DE QUANTIFICAÇÕES

As práticas de quantificações que inclui a contagem natural estão presentes em diversas civilizações, inclusive com registros históricos de tempos remotos, tais como: Egípcia, Romana, Grega, Babilônica, Hindu, dentre outros, como os da região da mesopotâmia.

Os primeiros registros numéricos de que se tem notícias surgiram, juntamente com as primeiras formas da própria escrita, na região da Mesopotâmia, por volta de 4.000 antes da era comum. Eram usadas pequenas peças de argila, de diversos formatos (como discos, cilindros, cones, esferas, ovóides), para contar coisas, como produtos da agricultura e bens manufaturados. Peças de formatos diferentes eram empregadas para contar objetos diferentes: ovóides para contar jarras de óleo, ou esferas para sacas de grãos, por exemplo. Essas peças eram armazenadas em invólucros de argila com quantidades fixas, em cujas superfícies eram gravados o formato e a quantidade de peças. (RIPOLL; RANGEL; GIRALDO, 2015, p.07)

O extrato de texto destaca saberes práticos de atividades humanas específicas, com jeitos próprios de fazer e pensar, se assim podemos dizer, da contagem concreta como método de controle de quantidades físicas e, não menos importante, da dependência da simbolização em relação à natureza da unidade dos objetos contados. De qualquer modo, é nesse tipo de práticas concretas de contagem que surgiram os sistemas de numerações (SN), como ratifica o seguinte extrato de texto.

Interessante observar que a técnica mesopotâmica de contagem por peças e invólucros já continha o germe da estrutura do nosso próprio sistema de numeração contemporâneo: a formação de grupos de símbolos, que são encapsulados em um novo símbolo (neste caso, fisicamente encapsulados). Entretanto, não se verificou uma “evolução linear” dos sistemas de numeração até os dias de hoje. Ao contrário, em diferentes partes do planeta, sistemas de numeração bem distintos foram desenvolvidos. (RIPOLL; RANGEL; GIRALDO, 2015 p.08)

Vários sistemas foram usados paralelamente por diferentes povos, inclusive vizinhos e contemporâneos entre si, alguns se consolidaram com o uso em larga escala, inclusive permanecendo até os dias atuais, como o sistema romano e o sistema decimal hindu.

Nossas discussões a respeito do Sistema de Numeração Decimal – SND pôde nos permitir construir uma compreensão, ou seja, um modelo epistemológico artificial para o sistema de numeração decimal posicional – SNDP, para isso um estudo histórico se tornou necessário, não propriamente sobre a evolução cronológica e sim sobre as características compartilhadas e não compartilhadas entre os distintos sistemas de numeração.

Assim, o produto desse estudo foi o nosso Modelo de Quantificação Decimal – MQD, que pode ser visto como um Modelo Epistemológico de Referência – MER, como condição à direção de estudo D para a construção de um modelo praxeológico de referência – MPR.

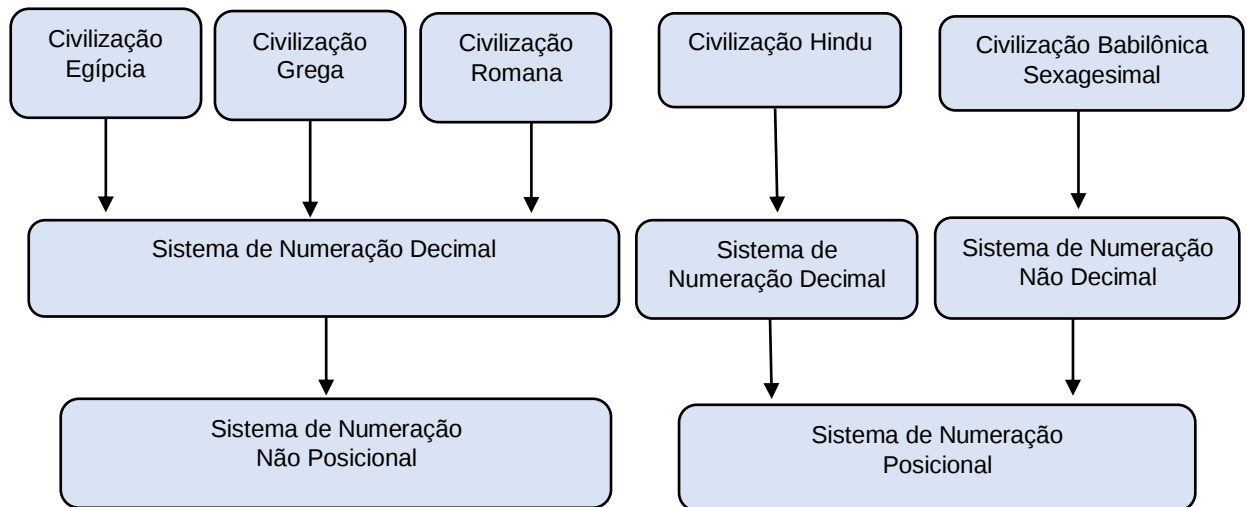
Ressaltamos que estes modelos não serão explícitos na pesquisa empírica aos professores em formação FI, como uma organização de estudo, por exemplo, pois seu papel é de atender às necessidades da formação e da pesquisa e de criar ou modificar com segurança, as condições para o funcionamento do percurso da empiria.

Nesse sentido, parafraseando Ripoll, Rangel e Giraldo (2015), o critério de seleção dos sistemas de numeração para o estudo não se baseou em sua importância histórica, mas tão somente exemplificar sistemas com estruturas diferentes, de forma que seja possível comparar características, analisar as limitações e as vantagens de cada um.

Assim, entre diferentes civilizações, cronologias, espaços sociais, instituições ou grupos sociais, com diferentes sistemas de numeração destacamos os seguintes povos: egípcios, gregos, romanos, babilônios e hindu por permitirem destacar aspectos de interesse desta pesquisa, como uso de agrupamentos decimais e o caráter posicional ou não de sistemas de numeração.

As práticas de contagens das civilizações Egípcias, Gregas e Romanas estão associadas a tipos de sistemas de numeração decimal não posicional e as práticas de contagens das civilizações Hindu e Babilônicas estão associadas a tipos de sistema de numeração posicional, inclusive com o decimal, o que esquematicamente assim representamos:

Figura 01: Sistemas de Numerações



Fonte: Próprio autor (2020)

Seguem abaixo, as práticas de contagens de cada civilização apresentada na figura 01.

3.3.1 Civilização egípcia

Segundo Perelman (2013), aproximadamente 7000 anos atrás, os egípcios praticavam a contagem por agrupamentos de 10 e registravam usando 7 símbolos chamados hieroglíficos, esses registros eram escritos em blocos de pedra e em papiros.

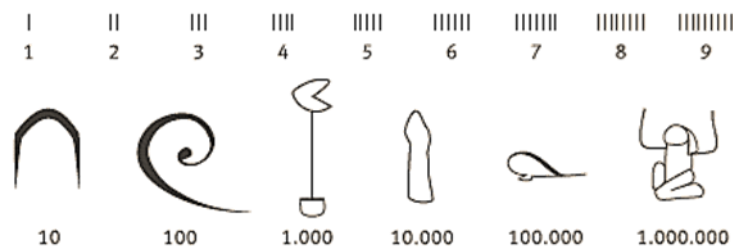
Segundo Roque (2012)

O sistema decimal egípcio já estava desenvolvido por volta do ano 3000 a.C., ou seja, antes da unificação do Egito sob o regime dos faraós. O número 1 era representado por uma barra vertical, e os números consecutivos de 2 a 9 eram obtidos pela soma de um número correspondente de barras.

Em seguida, os números eram múltiplos de 10, por essa razão, diz-se que tal sistema é decimal. O número 10 é uma alça; 100, uma espiral; 1 mil, a flor de lótus; 10 mil, um dedo; 100 mil, um sapo; e 1 milhão, um deus com as mãos levantadas. (ROQUE, 2012, p.45)

Os sete hieroglíficos eram representados pelos seguintes símbolos:

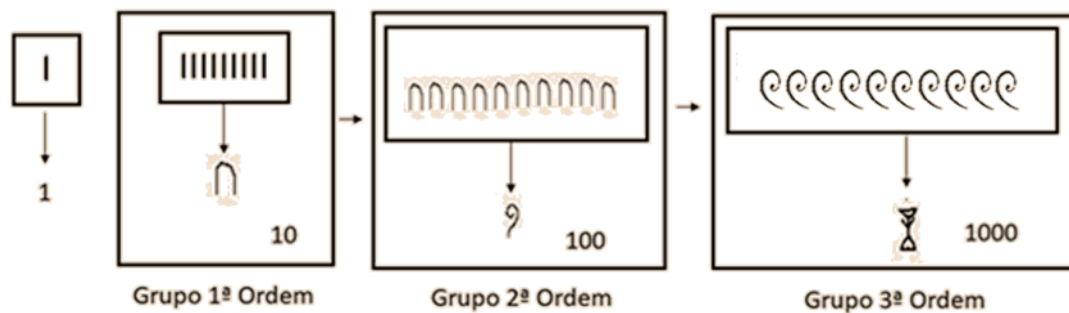
Figura 02: Hieroglíficos utilizados pelos egípcios



Fonte: Roque (2012, p.45)

De acordo com Roque (2012), a convenção para escrever e para ler os números era simples: os números maiores vêm escritos na frente dos menores e, se há mais de uma linha de números, devemos começar de cima. Sendo assim, para escrever um número, basta dispor todos os símbolos seguindo tal convenção e a soma dará o número desejado. A contagem que eles utilizavam era aditiva.

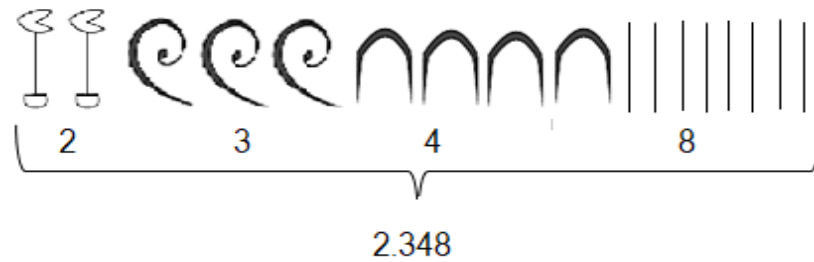
Figura 03: Representa o Sistema de Numeração Decimal dos Egípcios



Fonte: Próprio autor (2020)

Para os Egípcios, por exemplo, para representar o numeral 2348, era suficiente escrever conforme a figura abaixo:

Figura 04: Representação do numeral 2348



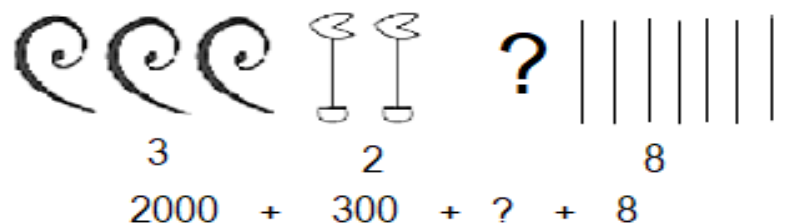
Fonte: Próprio autor (2020)

Observe que a figura 4 apresenta uma sequência de símbolos com 4 ordens, cada qual com o valor respectivo aos símbolos, o resultado da contagem é $2000 + 300 + 40 + 8$, caso as ordens dos símbolos fossem alteradas não haveria alteração no resultado, porque o valor não estava condicionado à posição ocupada, mas aos símbolos e não havia uma ordem estabelecida, a posição não os definia.

A notação hieroglífica não permitia que se procedesse a uma escrita rápida em virtude das suas características (ALMEIDA 2011, p. 149) dentre elas citamos a representação das quantidades físicas, no que diz respeito às quantidades das unidades maiores, que ainda são os símbolos que os representam, por exemplo a quantidade de 9999 unidades necessita de 36 símbolos para representá-lo (ALMEIDA, 2011).

Outra característica, que também é uma limitação desse sistema, segundo Perelman (2013), foi o registro dos símbolos, o limite máximo de repetições de cada símbolo ficou condicionado por eles de até nove vezes em cada numeral, ou seja, de 1 a 9, ficando de fora a representação das ausências de unidades, não se tinha um símbolo para registrar e representar o zero.

Figura 05: Ausência de unidade



Fonte: Próprio autor (2020)

Esse exemplo ratifica que a troca de posição dos símbolos não altera o valor correspondente à quantificação final, a ordem é indiferente e o espaço vazio representa ausência de unidade e de um símbolo, não era possível distinguir a quantidade representada 2308 de 238 simbolicamente, mas no ábaco era possível ver a diferença no que diz respeito à ausência de unidade.

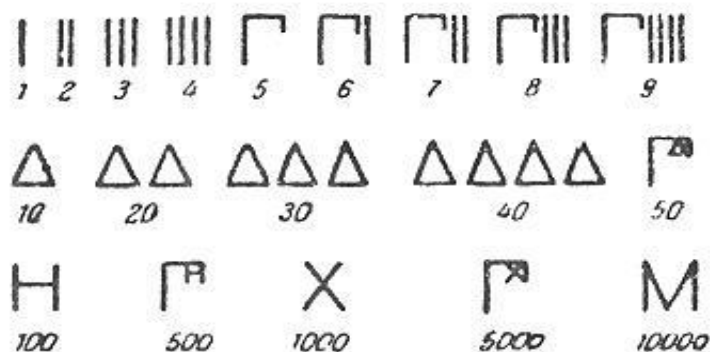
Em resumo, há a identificação da unidade de grandeza contada pelo numeral 1, essa identificação possibilitou ordenar e agrupar as unidades de 1 a 9. Não dispunham de símbolos que representasse a ausência de unidade nesse sistema, isso quer dizer, que não havia uma representação simbólica para a ausência. Outro aspecto relevante foi quanto à ordenação e à reordenação de quantidades agrupadas. Essa técnica gerava novas unidades de grandezas de ordem superior que as anteriores, essas representações podiam até ser organizadas em um ábaco. O resultado de todo esse processo de quantificação resultou no registro do numeral.

3.3.2 Civilização Grega

Os gregos contavam a partir das unidades e faziam agrupamentos de 10 caracterizando a base decimal (IFRAH, 1985; ALMEIDA, 2011), já Vasquez (2010) ressalta que o sistema de numeração constituído pelos agrupamentos de 10 era fundamentalmente aditivo em combinação com alguns princípios multiplicativos, mas não era posicional. Por ser aditivo, um mesmo número continha várias representações simbólicas tornando os algoritmos de operações aritméticas longos e complicados.

Segundo Ifrah (1985) eles usavam dois tipos de sistemas de numeração: o jônico e o ático. Esse sistema possuía 27 símbolos que eram as letras do seu alfabeto.

Figura 06: Registros dos 27 símbolos da numeração Ática



Fonte: Perelman (2013, p. 14)

Uma característica do sistema ático era arrumar as quantidades de unidades por ordem e os agruparem, tal qual o sistema romano. Para exemplificar, tomamos um conjunto de símbolos apresentado em Almeida (2011)

A sequência HHΔΔΔIIII, representa duzentas e trinta e quatro unidades. Note-se que a ordem dos termos é irrelevante para um eventual cálculo do número representado, pois o valor está ligado aos próprios símbolos e não depende da posição que estes tomam na sequência. Assim bastará somar os valores que cada um deles simboliza para se obter o número em questão. Contudo, e de um modo geral, a convenção adotada foi ordenar os símbolos por ordem decrescente do seu valor da esquerda para a direita, o que parece lógico, pois corresponde à forma de escrita grega. (ALMEIDA, 2011, p.96)

Segundo Perelman (2013) o sistema ático também chamado grafônico, era constituído por uma base primária, cuja contagem era de 10 unidades e grupos auxiliares com 5 unidades, tal qual o sistema romano. As 5 unidades podiam ser usadas individualmente ou como combinação de outros símbolos, por exemplo, no princípio multiplicativo para se obter 50, 500, 5000, dentre outros (ALMEIDA, 2011).

As combinações com o 5 aconteciam quando excedia a quantidade de vezes que os símbolos podiam se repetir, as unidades 1, 10, 100 e 1000 só repetiam até quatro vezes, análogo à civilização romana quanto à limitação de repetições dos símbolos que era até três vezes.

O sistema ático por excesso de algarismos possuía limitação. Em Almeida F. (2007), vemos a desvantagem do uso do sistema ático, quando apresenta uma quantidade equivalente a 7699 unidades. Essa quantidade para ser representada

simbolicamente, carece de 15 símbolos, ratificando que a excessiva quantidade de símbolos dificultava as operações aritméticas dos gregos.

Como tentativa de amenizar esse problema com os cálculos, recorreram ao ábaco, uma vez que “a palavra latina abacus deriva do grego abax significando ‘tabuleiro de areia’”. O ábaco teria sido o mais antigo instrumento de computação usado pelo homem” (ALMEIDA F., 2007, p.65).

O sistema ático era um sistema que, em um determinado momento, precisava evoluir e a partir de então, o sistema Jônico substituiu o sistema ático. Segundo Perelman (2013) A partir do século III a.C, os números passaram a ser representados pelo alfabeto grego sobrescritas e seu sistema fora denominado alfabético.

Figura 07: Alguns registros da numeração alfabética do Jônico

$\bar{\alpha}$	$\bar{\beta}$	$\bar{\gamma}$	$\bar{\delta}$	$\bar{\epsilon}$	$\bar{\zeta}$	$\bar{\eta}$	$\bar{\theta}$	
1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\bar{\iota}$	$\bar{\kappa}$	$\bar{\lambda}$	$\bar{\mu}$	$\bar{\nu}$	$\bar{\xi}$	$\bar{\omicron}$	$\bar{\pi}$	$\bar{\varsigma}$
10	20	30	40	50	60	70	80	90
$\bar{\rho}$	$\bar{\sigma}$	$\bar{\tau}$	$\bar{\upsilon}$	$\bar{\phi}$	$\bar{\chi}$	$\bar{\psi}$	$\bar{\omega}$	$\bar{\eta}$
100	200	300	400	500	600	700	800	900

Fonte: Perelman (2013, p. 14)

A figura 07 mostra a numeração Jônica por meio de letras gregas. Para diferenciá-las, colocavam-nas sobrescritas por um traço designando que deixou de ser letra e passou a ser quantidade. As quantidades passaram a seguir uma regra de 1 – 9 representadas por uma letra, 10 – 90 por outra letra, 100 – 900, outra letra.

Sintetizando, seu processo de contagem iniciava a partir da unidade simples, essas quantidades eram físicas, simbolicamente representadas de um a nove, eles ordenavam, reordenavam as quantidades de agrupamentos em $(9 + 1)$, “cada símbolo compreende a um hieróglifo especial para indicar a unidade e cada uma de suas potências de 10” (IFRAH, 1985, p. 159). Os agrupamentos constituíam novas unidades que eram simples porque formavam grupos de dez unidades, entretanto, a

cada nova quantificação de 10 unidades constituía uma nova unidade de ordem superior, pois quanto maior o agrupamento das unidades, maior a quantidade de símbolos para representar o numeral correspondente aos agrupamentos. Esse sistema era aditivo e em alguns momentos multiplicativo. Essa civilização não dispunha de um símbolo para representar a ausência de unidades, ou seja, o zero.

3.3.3 Civilização Romana

O processo de contagem e registros para civilização romana, assim como foi apresentado para as civilizações Egípcias e Gregas não foi diferente, a civilização romana também tinha um jeito próprio de contar e registrar. Segundo Eves (1997) as práticas de contagem dessa civilização resultaram no que hoje conhecemos por sistema de numeração romano.

Criado há mais de 2 mil anos, na Roma eles representavam seus registros por letras do latim ou do alfabeto romano (IFRAH, 1985). Era formado por sete símbolos que se combinavam por acréscimo à direita ou retirada à esquerda. Segundo Rodrigues (2013) os romanos usavam o princípio aditivo e o subtrativo, os dois símbolos eram colocados em ordem crescente de valor (lendo da esquerda para a direita) e representavam um numeral como se fossem um único símbolo, representando a diferença do maior pelo menor. Representados da seguinte forma: $I = 1, V = 5, X = 10, L = 50, C = 100, D = 500, M = 1000$.

Perelmon (2013) apresenta algumas características referentes a esses sistemas:

- 1) Os símbolos por exemplo: I, X, C, M não podem repetir mais de três vezes.
- 2) A representação simbólica de uma quantidade menor não pode estar à direita de uma maior e neste caso a menor deve ser adicionada a maior. Por exemplo: 283 é representado simbolicamente por **CCLXXXIII**, isso quer dizer: $(C + C) + (L + X + X + X) + (I + I + I)$ agrupamento (2) de centenas de unidades com agrupamento de (4) dezenas de unidades, com agrupamento das unidades (3), assim representado por $200 + 80 + 3 = 283$, o princípio utilizado nesse caso foi o aditivo, pois sempre à direita as quantidades são somativas.

3) Quantidades menores também podem ser escritas à esquerda de uma maior, neste caso o princípio é o subtrativo, não se admite repetição simbólica quantitativa. Exemplo: $40 = XL \rightarrow 50 - 10 = 40$.

Perelmon (2013, p.06, tradução nossa) apresenta os numerais 94, 944, 1809, 1959 com o propósito de esclarecer completamente o método de escrita na numeração romana como de fato os registros romanos se posicionam em determinadas situações:

Figura 08: Registros de numerais romanos

XCIV	= 100 - 10 + 5 - 1	= 94
CMXLIV	= 1000 - 100 + 50 - 10 + 5 - 1	= 944
MDCCCIX	= 1000 + 500 + 300 + 10 - 1	= 1809
MCMLIX	= 1000 + 1000 - 100 + 50 + 10 - 1	= 1959

Fonte: Perelmon (2013, p.6)

Na figura 08 acima, o autor resume as discussões apresentadas: a adição e a subtração de quantidades, os registros simbólicos e a ausência de unidade, o zero, não têm registro simbólico, ou seja, só é possível percebê-lo quando há a correspondência da quantidade com o símbolo, por meio do registro físico (caneta, lápis e papel) ou o ábaco, instrumento utilizado para perceber a ausência de símbolo. A limitação desse sistema está na “realização de operações aritméticas na forma escrita, essa é sua desvantagem” (PERELMON, 2013, p.07, tradução nossa)

4) Para representar quantidades maiores, coloca-se um traço horizontal sobre um ou vários algarismos desse sistema, o que significa que os algarismos sejam múltiplos de 10.

Exemplos: $\overline{X}D = 1000 + 500 = 1500$, $\overline{D}CI = 5000 + 100 + 1 = 5101$

Em linhas gerais, parafraseando Perelmon (2013), a numeração romana, apesar do tempo decorrido, além da numeração hindu, parece ser a única que se preservou até os dias atuais nas escolas de nossa sociedade, por exemplo, para registro de tempo secular, horas de relógios, capítulos de livros, ordinais de eventos.

As contagens nesse sistema eram físicas com ajuda do ábaco, nele as unidades físicas eram reagrupadas e reordenadas de acordo com a necessidade, da

esquerda para a direita e os resultados das quantidades eram representados por símbolos ou pela justaposição deles. No que diz respeito à relação de quantidade e sua representação, para eles não fazia sentido um símbolo para ausência de unidades.

Esses sistemas de numeração são denominados de *Sistema de Numeração Não Posicional* e se referem às respostas advindas de processos de contagens e dos registros que emergiram das práticas de algumas civilizações, no nosso caso, as Egípcias, as Gregas e as Romanas.

As civilizações até aqui apresentadas utilizavam os agrupamentos $9 + 1$ unidade, ou seja, agrupavam de 10 em 10, originando uma nova unidade a partir desses agrupamentos, estabelecendo um tipo de sistema decimal. A quantificação e a representação simbólica de cada civilização se constituíam em numerais e não dependiam de uma ordem ou posição, ou seja, não precisavam de uma regularidade para existir (IFRAR, 1985; EVES, 2004)

Foram construídas unidades simbólicas por justaposição de símbolos formando os numerais. Da excessiva repetição de símbolos ficou conhecido como a era do simbolismo (EVES, 2004). O uso demasiado deles gerou em um certo momento um “problema”, tornando-se inviável contar e operar com grandes quantidades de símbolos.

Segundo Rodrigues (2013)

Em primeiro lugar, eles não nos permitem representar números de qualquer ordem de grandeza, de modo que, para que possamos representar números cada vez mais elevados temos sempre a necessidade de criar novos símbolos, e em segundo lugar, o que é mais grave, eles não nos permitem efetuar com facilidade as operações aritméticas. (RODRIGUES, 2013, p. 26)

Os sistemas de numerações foram um marco para a evolução das civilizações, que careciam desenvolver novas condições que acompanhassem suas necessidades de evolução, apesar da contribuição das civilizações Egípcia, Grega e Romana não responderem no mesmo nível, pois a predominância de excessivos símbolos para representar as quantidades os tornavam limitados.

Para suprir essa carência havia a necessidade de simplificação de símbolos, uma nova organização, que gerassem infinitos nomes a infinitos numerais originários dos agrupamentos e que tivessem como aliado um símbolo que representasse a ausência de unidades, o zero.

3.3.4 Civilização Babilônica

Segundo Almeida (2011) os Babilônios usavam grupos de dez unidades, como um tipo de agrupamento parcial para construção do principal agrupamento, chamado sexagesimal.

Para Ifrah (1985, p. 237) “isso significa que sessenta unidades de uma determinada ordem eram nela equivalentes a uma unidade de ordem imediatamente superior”. Os Babilônios tinham pelo menos dois símbolos, o “prego” (vertical) que representava uma unidade simples e uma “viga” que representava um agrupamento de dez unidades. Além desses, adotaram uma representação para o zero, como representado pela figura 09.

Figura 09: Representação simbólica da unidade (prego) e da dezena (viga)



Fonte: Ifrah (1985)

Figura 10: Representação simbólica da ausência de unidade (zero)

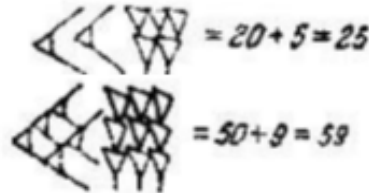


Fonte: Perelmon (2013)

O prego expressava as quantidades de 1 a 9 e também 60 unidades, no caso de 1 a 9 se repetiam os símbolos quantas vezes fossem necessários para expressar o valor requerido, tal qual para 60 unidades, a única diferença era no espaçamento. Usar o mesmo símbolo para representar quantidades distintas causava incertezas

na hora de lê-los (PERELMON, 2013; IFRAH, 1985). A partir de dez unidades, o símbolo mudava porque os agrupamentos passavam a ser contagem de dez em dez unidades e o símbolo que os representava era a viga.

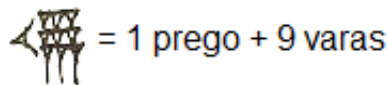
Figura 11: Representações de quantidades segundo os símbolos de 1 a 59



Fonte: Perelmon (2013)

Segundo Ifrah (1985, p. 237) “Os números de 1 a 59 eram representados do modo aditivo, repetindo cada um desses símbolos tantas vezes quantas fossem necessárias.”

Figura 12: Representação de 19 unidades



Fonte: Ifrah (1985)

Almeida (2011) afirma que

Os símbolos usados têm um valor variável, o qual depende da posição que ocupam na escrita dos números: um símbolo dado será associado às unidades simples, às dezenas, às centenas, ou aos milhares, conforme ocupe primeiro, o segundo, o terceiro ou o quarto lugar na expressão de um número, começando para tal da direita para a esquerda. A importância do sistema posicional reside no fato de permitir exprimir valores tão grandes quanto o que se exija, ou tão pequeno quanto o que se pretenda, recorrendo a um conjunto diminuto de símbolos. (ALMEIDA, 2011, p.48)

O diferencial dessa civilização estava no princípio da posição das unidades contadas, de 1 a 59 unidades físicas, a nova unidade de ordem superior ficou rotulada de sessenta, isso quer dizer agrupamentos de 60 em 60 unidades. Para Ifrah (1985, p. 238) “O número 1, por exemplo, valia uma unidade simples na

primeira casa, um 'sessenta' (ou 1×60) na segunda casa e um 'sessenta' vezes sessenta (ou 1×60^2) na terceira e assim por diante"

A constituição desse agrupamento era tornar as unidades múltiplas de sessenta, economizando representações simbólicas, caso diferente das civilizações astecas, que apesar de suas práticas serem as mesmas, a diferença estava no princípio, o deles era somente aditivo, causando um grande desgaste no processo de contagem, pelo uso excessivo de símbolos.

Na civilização Babilônica, o processo foi otimizado pelo princípio multiplicativo, eles não abandonaram o aditivo, passaram a fazer uso dos dois princípios chamado por Sierra (2006) de sistema híbrido.

Figura 13: Representações de quantidade acima de 60 unidades

$$\nabla \ll \nabla \nabla \nabla = 1.60 + 23 = 83.$$

$$\langle \Pi \rangle \langle \langle \langle \Pi \rangle \rangle \rangle = 12 \cdot 60 + 34 = 754$$

Fonte: Perelman (2013)

A figura, hora apresentada por Perelman (2013), ajuda-nos identificar por meio dos símbolos e seus numerais respectivos, as ordens por eles ocupadas que correspondem à 2ª e à 3ª ordem. Entretanto, o autor questiona a representação de quantidades, caso não existisse uma ordem intermediária: Como se escreveria, o número $1 \times 60 \times 60 + 23 = 3623$? e $1 \times 60 + 23 = 83$? Ele então responde, de acordo com a figura a seguir.

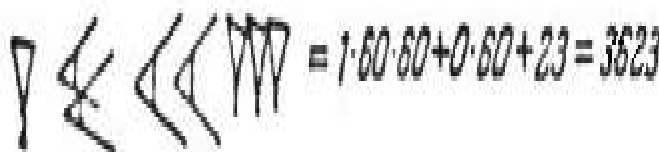
Figura 14: Representação de 3623 e 83

Y << W

Fonte: Perelman (2013)

Segundo o autor (idem) essa representação confunde os numerais que os representam, faltando algo para diferenciá-los, havendo a necessidade de inserir um novo símbolo para representar a ausência de unidade, no caso o numeral “zero”. Com o auxílio desse símbolo, foi possível representar de forma correta a quantidade de 3623 unidades representada na figura 15.

Figura 15: Representação da quantidade 3623 unidades



Fonte: Perelmon (2013)

Segundo Almeida (2011), com a inserção do símbolo que representa a ausência de unidades, a civilização babilônica abrevia significativamente a escrita dos números e considera uma contribuição imprescindível para a constituição do sistema de numeração atual.

Segundo Perelmon (2013, p.11, tradução nossa) outra importante contribuição que permanece até os dias atuais, “é a divisão da hora em 60 minutos, e 1 minuto em 60 segundos, a divisão da circunferência em trezentos e sessenta partes, chamadas de graus”, em que um grau dividimos em 60 minutos e 60 minutos em 60 segundos, dentre outros.

Vasquez (2010) afirma que a numeração deve ser usada como meio de comunicar as quantidades das unidades. Na civilização babilônica era possível ver essa comunicação porque no sistema babilônico a contagem era um a um, a partir do numeral um, seus agrupamentos se constituíam em 9 + 1 unidades físicas, os registros desses agrupamentos eram em tábuas, ou no ábaco, o que formavam grupos de 10 em 10 unidades. Cada grupo de dez formava novos grupos de ordens superiores, cada posição ocupada por um símbolo tinha um numeral correspondente, isto é, ordenando e reordenando um mesmo numeral, significando dizer que cada um, em sua devida posição, representava uma quantidade, embora ainda utilizassem muitos símbolos para fazerem registros. Esse sistema é considerado pela história o primeiro sistema posicional de numeração.

Nos nossos estudos sobre as práticas de contagens das civilizações: Egípcia, Grega e Romana apesar de suas contribuições, ainda havia a necessidade de se criar um “sistema de numeração mais eficaz” (ALMEIDA, 2011, p. 131) no sentido de reduzir a quantidade de símbolos e representá-los. Essa redução contribuiu também para que não houvesse a falta de grandes quantidades de nomes, possibilitando o desdobramento de unidades para ordens superiores, pois havia carência de respostas para atender às necessidades de evolução das civilizações.

A resposta para os sistemas de numeração babilônica mostrava que eles precisavam diminuir a quantidade de símbolos, e entender o papel do zero. Segundo Almeida (2011, p.127) “as unidades não precisavam ser mais construídas pela lei da acumulação ou agrupamento como foi visto nas outras civilizações”, mas corresponder cada unidade a um símbolo e ter como resultado um registro representado pelo numeral.

Foi o sistema de numeração Babilônico que chegou de um sistema de numeração que atendesse às necessidades das civilizações, sua limitação era não ter variedades de símbolos com a capacidade de corresponder a uma grande quantidade de unidades.

3.3.5 Civilização Hindu

Em toda trajetória das civilizações, a civilização hindu, segundo Almeida F. (2007) é um sistema de numeração completo, pois conseguiu contemplar um conjunto de condições ditas necessárias e com as mesmas potencialidades do nosso sistema atual. Foi ela quem deu o desfecho “final” quanto às necessidades humanas ter um sistema capaz de alcançar grandes quantidades, melhor ainda, representar simbolicamente cada um.

Segundo Ifrah (1985, p. 264) “Foi no norte da Índia, por volta do século V da era cristã, que nasceu o ancestral de nosso sistema moderno e que foram estabelecidas as bases do cálculo escrito tal como é praticado hoje em dia”. A história fala que foram os árabes os responsáveis por sua propagação no Ocidente, mas na verdade só começou a ser estabelecido em meados do século XIII, e até aos dias atuais tem exercido sua funcionalidade de forma universal.

O sistema de numeração hindu é formado por uma quantidade de dez unidades variando de 1 a 9, é um sistema decimal composto por símbolos de mesma quantidade, o diferencial desse sistema para os outros apresentados está na relação que cada símbolo tinha com as quantidades, ou seja, nessa civilização cada símbolo representava uma única quantidade, “as unidades não mais se constituíam por uma mera agregação de símbolos, mas sim designada por um único símbolo, e também a existência de um símbolo especial para os números de um a nove” (SILVA, 2000, p. 394)

Entenda-se o sistema de numeração indo-arábico como agrupamentos de 10, em que, a cada 10 unidades constitui uma nova unidade de ordem imediatamente superior, um novo agrupamento de 10 unidades de 10 constitui nova unidade de ordem superior e assim por diante. Podemos assim dizer que 10 unidades constituem a 1ª unidade de ordem superior chamada por dezena, 10 dezenas constituem a 2ª unidade de ordem superior chamada de centena que equivale a 100 unidades e 10 centenas constitui a 3ª unidade de ordem superior que equivale a 1000 unidades e assim, sucessivamente.

Na falta de uma das unidades ou de uma ordem, assim como os Babilônios, os hindus também representaram a ausência dessas unidades por um registro chamado por eles de sunya, que significa vazio (IFRAH, 1985). A partir disso, o sistema hindu em qualquer tempo tem a capacidade de gerar tantas quantas forem as unidades de ordem superior, podendo também fazer o trabalho inverso, ou seja, uma unidade qualquer pode ser decomposta em 10 unidades de ordem imediatamente inferior.

Ripoll, Rangel e Giraldo (2015) reitera afirmando que

O sistema de numeração que usamos hoje é posicional. Isto porque, em primeiro lugar, o valor de um algarismo é determinado por sua posição no numeral e um mesmo algarismo assume infinitos valores diferentes. Isto permite que um conjunto finito de algarismos seja suficiente para representar todos os números naturais – o que não ocorre com os sistemas não posicionais. (RIPOLL; RANGEL; GIRALDO, 2015, p. 17)

O sistema de numeração indo-arábico é um sistema considerado econômico por demandar apenas dez símbolos para construir, em potencialidade, infinitos

numerais, sobretudo por admitir representar simbolicamente todas as unidades de agrupamentos para a construção do numeral, inclusive as ausentes, entre as unidades simples e as unidades do maior agrupamento existente na quantificação de uma dada grandeza. Isso o caracteriza com o Sistema de Numeração Posicional Decimal (SNPD).

Esse sistema de numeração posicional admite a dispensabilidade do ábaco, pois todo numeral nesse sistema pode ser interpretado como um ábaco escrito, no sentido da verossimilhança entre o ábaco e o numeral e, por isso, carrega a facilidade de realização pelo homem das principais operações aritméticas. Também, se operam com os numerais indo-arábicos como se operam com suas representações em ábacos, conforme modo defendido por Stevin (1585).

Os sistemas de numerações não posicionais aqui apresentados, contribuem para a compreensão do sistema de numeração posicional decimal, embora não possamos afirmar que este seja uma evolução dos sistemas não posicionais, já que “foram usados paralelamente, mesmo por povos vizinhos e contemporâneos entre si, até que o sistema posicional decimal fosse adotado em larga escala” (RIPOLL; RANGEL; GIRALDO, 2015, p. 08).

Além disso, o sistema de numeração babilônica, embora use agrupamentos parciais de dez unidades, o que nos remeteu a considerá-lo nesse percurso de estudo, não constitui um sistema de numeração decimal, mas apresenta um invariante em relação ao sistema de numeração decimal indo-arábico que é a relatividade do valor dos símbolos nos numerais.

A relação histórica entre numeral e quantidades concretas é revelada por todos os sistemas de numeração e ainda se faz presente nos dias de hoje e, frequentemente, são conhecidas apenas por especialistas, em particular os que lidam com tratamentos de informação de diferentes atividades humanas, principalmente das áreas da informática.

Nesse sentido, os numerais participam de inúmeras decisões em todas as esferas da sociedade e, portanto, se distanciam de seu avatar na matemática conhecido como número racional, embora a ele sejam dedicados todos os créditos.

3.4 NÚMEROS E NUMERAIS

Para Ripoll, Rangel e Giraldo (2015, p.01) “O conceito matemático de número natural tem sua gênese (histórica e cognitiva) na noção concreta e intuitiva de contagem”. Esses autores afirmam ainda, que são constituídos em objetos de ensino, em grande parte da matemática nos anos iniciais das escolas do nível fundamental e, por razões nem sempre muito claras, são objetos de diferentes pesquisas dedicadas aos seus estudos, em particular, sobre sua escrita, seus usos e significados, suas operações elementares e a resolução de problemas envolvendo essas operações.

Sob as condições impostas pela sociedade, entre elas, a matemática acadêmica e as práticas matemáticas supostas possíveis para professores da escola básica, sem dedicadas preocupações com as condições impostas pelas pedagogias e escolas, Ripoll, Rangel e Giraldo (2015) esboçam uma construção do conceito matemático de número natural assumindo como linha condutora duas noções concretas elementares: contagem e medida, ambas usadas para a quantificação de grandezas.

Essa linha condutora, embora possa ser tomada como escolha arbitrária dos autores, está presente no desenvolvimento histórico-epistemológico da noção de número que, se assim podemos dizer, parece intrínseca a essa noção. Há dificuldades em se falar sobre números, em particular na escola, sem falar de contagem e medida.

Isso, talvez, se deva aos fortes laços históricos e epistemológicos que existem entre essas práticas concretas de contagem e medida e a noção matemática de número natural, que são reveladas por diferentes autores quando tratam dos números matemáticos, como evidencia o seguinte extrato de texto.

Há basicamente dois tipos de grandezas: as discretas (como um rebanho) e as contínuas (como o tempo, o peso e a distância). Comparar uma grandeza discreta com a unidade significa efetuar uma contagem; O resultado é sempre um número inteiro. Se, entretanto, a grandeza é contínua, compará-la com a unidade é medi-la; O resultado da comparação (medida) é um número real. Se a grandeza (contínua) que se quer medir é comensurável com a unidade escolhida, a medida é um número racional; se é incomensurável, sua medida é um número irracional.(LIMA, 1991, p.07).

A academia matemática em busca de atender suas condições normativas sobre as atividades matemáticas, que assume o número como obra do pensamento, reconhece de certo modo a dificuldade em separar a noção (abstrata) de número das práticas concretas de contar, como assim evidencia a seguinte manifestação:

O desenvolvimento do conceito de número, apesar de ter sido impulsionado por necessidades concretas, implica um tipo de abstração. Quando dizemos “abstrato” é necessário tornar preciso o significado desse termo, pois a dicotomia entre concreto e abstrato, evocada frequentemente em relação à ideia de número, dificulta a compreensão do que está em jogo. Contar é concreto, mas usar um mesmo número para expressar quantidades iguais de coisas distintas é um procedimento abstrato. (ROQUE, 2012, p.23).

As supra citações são de referências atuais, mas a compreensão de que a noção de numeral está imbricada com as práticas de contar e medir já se fez presente bem antes em trabalhos de diferentes estudiosos e, entre eles, encontramos Stevin (1585), um engenheiro e matemático, cujos trabalhos são considerados de grande influência para o desenvolvimento da matemática, em particular, sobre a noção de números.

Ele assim se manifestava: “o número não é somente resultado de contagem de quantidades discretas, mas também é resultado de medidas de grandezas” (STEVIN,1585). Embora as noções de medida que se referem a Stevin (1585) possam diferir da noção de medida que se referem a Lima (1991), ambas compartilham invariantes como a palavra *contínuo*, que seguem, de algum modo, um mesmo sentido.

A compreensão de Stevin (1585) de número contínuo quebrou a compreensão grega de número que, embora fosse dotada de aspectos pragmáticos referentes às operações e cálculos, contava com linha teórica sustentada em suas tradições filosóficas que não permitiam admitir a divisibilidade da unidade e tampouco pensá-la como número.

O número grego era concebido a partir da ação de contar uma dada quantidade de uma grandeza discreta, aqui entendida como aglomeração de duas ou mais unidades de mesma natureza dessa grandeza. Para Klein (1992) essa ação de contar permitiria acessar o conceito, o número como obra do pensamento, ali em que 3 é o mesmo sempre, sem importar 3 de quê. Essa forma de pensar

encaminhou a infinitude potencial dos números, uma vez que dado qualquer número, é possível obter outros números com adição de uma unidade.

Mas a concepção grega atribuía à unidade um papel ambíguo, ao mesmo tempo era essência – e por isso não poderia ser dividida, pois a perderia (essência) – e era substância, já que fazia parte constitutiva dos números – por exemplo do 2 em diante.

Ainda que a unidade pudesse ser tomada sem grandes dificuldades em grandezas discretas, havia a complexidade de se fazer o mesmo em grandezas contínuas ou geométricas. Estas não admitiam homogeneidades uma vez que, comprimento, superfícies e volumes não são comparáveis a partir de uma única unidade.

Além disso, a medida de uma dada grandeza, a partir de uma unidade física de mesma natureza, nem sempre era possível de se obter. Pois mesmo que se admitisse, nesse caso, a divisibilidade da unidade em “tamanhos” cada vez menores, não caberiam exatamente um número finito de vezes nessa grandeza, pois tais grandezas eram ditas incomensuráveis.

Segundo Waldegg (1996) a concepção de número para Stevin (1585) foi baseada em experiências cotidianas e profissionais considerando o número como uma extensão da prática generalizada de medir, que se constituiu a partir do reconhecimento de um isomorfismo operatório entre número e quantidade, isto é, do reconhecimento de que se pode operar com os números do mesmo modo que se manipulam as quantidades em geral, contínuas ou discretas.

A essência dos números para Stevin (1585) estava em suas operações e isso era defendido por ele com afirmações do tipo: O número expressa a quantidade de cada coisa; “As operações aritméticas, como relações e transformações de números, expressam as ações e transformações que se fazem com as coisas (quantificáveis)” (WALDEGG, 1996, p.13).

Segundo Klein (1968), Stevin teria posto suas experiências em práticas comerciais, financeiras e de engenheiro à serviço de suas preocupações teóricas e, reciprocamente, teria posto sua “teoria” em marcha nas suas “atividades práticas” e é nesse pensar que toma a “unidade como resultado não só de uma abstração realizada sobre os objetos enquanto quantidades, mas sobretudo, como abstração

de ações coordenadas realizadas no processo de medir esses objetos” (WALDEGG, 1996, p.16).

Assim, a unidade independente de ser numérica ou geométrica se torna um número, pois admite ser divisível ilimitadamente e, além disso, as suas partes são também números. De outro modo, a unidade se constituía em número e as frações, que podiam ser obtidas pela divisão ilimitada dela, também se tornam números, contrariando a concepção grega de fração como comparações entre números.

O que Stevin (1585) buscava, em nossos termos teóricos, era dotar as práticas de medidas e ou contagem do cotidiano de uma teoria, no sentido formal grego, que lhe disponibilizasse tecnologias para desenvolvimento de técnicas rápidas, simples e confiáveis para operar essas práticas.

Esse imbricado de práticas e discursos teóricos se tornam um complexo à medida que os discursos formais não são suficientes quando restrito à atividade matemática, pois na ação prática está em jogo muito mais que matemática, diríamos que se trata de uma prática híbrida, governada pela contagem em suas complexidades que consideram o que se conta (escolha de uma unidade) e como se conta (o processo), levando em consideração a necessidade de registro de quantidade, todas dependentes do espaço social, instituição ou grupo social, em que se realiza essa prática de contagem; Uma praxeologia da matemática mista (CHEVALLARD, 2013c).

É nessa hibridização de prática social que conta com matemática em sua estrutura, sem se reduzir à matemática, que o sistema de numeração joga um papel estratégico nas operações com os números como se fossem operações com grandezas físicas, uma vez que as manipulações dos números são tomadas como manipulações de numerais ou registros de quantidades e estes, em um isomorfismo operacional, tomados como quantidades ou medidas nas atividades práticas, de modo a facilitar “as contas dos negócios dos homens” (WALDEGG, 1996, p. 13). É esse aspecto físico dos numerais decimais que julga o papel fundamental no desenvolvimento teórico de Stevin (1585).

Essa compreensão sobre a teoria de Stevin (1585) é sustentada quando ele sistematiza a prática de contagem, destacando que começa com a identificação da unidade numérica com a unidade métrica, em geral, tomada de acordo com a

atividade em domínio prático, em que se pode aplicar sempre e de mesma maneira a operação de subdividi-las em dez partes iguais (WALDEGG,1996, p.15).

Este aspecto que une número e numeral, indispensável nas práticas cotidianas de contagem e, por isso, no desenvolvimento teórico dado por Stevin (1585) desperta especial atenção por encaminhar claramente a indispensabilidade dos sistemas de numerações, entre eles, especificamente, o sistema de numeração posicional decimal (SNPD) para as atividades humanas que envolvem as noções de quantidades, não necessariamente de número como obra do pensamento matemático, de acordo com o objetivo de nossa investigação.

Seguindo a flecha do tempo, encontrarmos outras compreensões para a noção de número natural ainda assentadas sobre as práticas de contagem. A matemática em seu desenvolvimento teve a necessidade de questionar esses números, pois a continuidade destacada por Stevin (1585) estava longe da noção de continuidade que emergia nas novas práticas matemáticas, como do cálculo diferencial

Encontrava-me então, enquanto professor da Politécnico federal de Zürich, obrigado pela primeira vez a expor os elementos do cálculo diferencial, e senti nesta ocasião, mais premente que antes, quão falta faz à aritmética um fundamento autenticamente científico. (DEDEKIND,1930, p.01, apud VÁSQUEZ, 2010, p.57).

Dedekind (1930) estava interessado em encontrar os fundamentos de objetos matemáticos enquanto objetos do pensamento, no sentido de conceitos lógicos, independente de representações ou de ações desenvolvidas ao solucionar situações específicas, mas reconhecia, para esse caso, a importância das ações do que fazemos ao contar uma quantidade como um fundamento

Se segue com precisão o que fazemos ao contar um conjunto ou uma quantidade de coisas, se chega à consideração da capacidade do espírito de pôr em correspondência uma coisa com outra coisa, ou representar uma coisa com outra coisa, faculdade sem a qual não é possível nenhum pensamento em absoluto. Sobre este fundamento único, embora absolutamente essencial, deve ser construída toda a ciência dos números, segundo meu ponto de vista. (DEDEKIND,1930, p.102).

Entretanto, que fique claro, ele não desejava levar as intuições e ações práticas cotidianas ao pensamento matemático, mas de modelar as bases da atividade que poderiam ser elevadas ao nível de definições universais que permitissem descrever suas propriedades, independentes de suas representações ou de ações desenvolvidas ao solucionar situações específicas, tendo em conta as ações subjacentes das atividades de contar e representar. (VÁSQUEZ, 2010, p.58).

A noção matemática de número natural de Dedekind (1930) dedica especial importância a noção de número ordinal que faz do cardinal uma simples aplicação dele. (VÁSQUEZ, 2010, p.61).

Se, na consideração de um sistema $\mathbb{N}$ simplesmente infinito ordenado por uma aplicação, se dispensa por completo as características específicas dos elementos, se mantém fundamentalmente sua distinguibilidade e somente se consideram as relações que se estabelecem mediante a aplicação de ordenação ($\mathbb{N}$), então estes elementos são chamados números naturais ou números ordinais e também simplesmente números, e o elemento fundamental 1 é chamado o número fundamental da sucessão numérica $\mathbb{N}$. Com referência a esta liberação dos elementos de todos os outros conteúdos (abstração) se pode denominar com direito aos números uma criação livre do espírito humano. (VÁSQUEZ apud DEDEKIND, 2010, p.60, tradução nossa)

Os números naturais são assim apresentados como aplicação de uma teoria geral, no caso, a de sistemas infinitos ordenados, como objetos da lógica, como uma ideia da mente, isolado dos referentes práticos (VÁSQUEZ, 2010, p.60)

Assim, a noção de número ficava livre das complexidades envolvidas no processo de contagem como escolhas de unidades, modos de contagem e registro de representações segundo as especificidades de situações sempre dependentes dos espaços sociais em dados tempos em que se inserem essas situações.

Essa intenção também é seguida, de certo modo, sob a mesma compreensão de sistemas simplesmente infinitos e bem ordenados por Giuseppe Peano em sua obra *Arithmetices principia nova methodo Expositiva* (1889) que buscou fundamentar a aritmética a partir de um conjunto de axiomas que, em nossa compreensão, parecem descrever um processo de contagem, como depreendemos de Godino, Cid e Batanero (2004) quando assim escrevem.

Um conjunto de objetos ($\mathbf{N}$) é dito ser naturalmente ordenado (e, portanto, pode ser usado para contar e classificar outros conjuntos de objetos de qualquer natureza) se satisfizer as seguintes condições:

1. Cada objeto tem outro próximo chamado de seu sucessor.
2. Existe um primeiro elemento, 0, que não é sucessor de qualquer outro elemento.
3. Dois elementos diferentes não podem ter o mesmo sucessor (função sucessor é injetiva).
4. Qualquer subconjunto de $\mathbf{N}$ que contém o 0 e que contém o sucessor de cada um dos seus elementos coincide com $\mathbf{N}$ (princípio da indução). Em vez de usar subconjuntos, o princípio de indução pode ser formulado com propriedades dizendo que toda propriedade dos números válidos para 0 e que, sendo válido para n , é também para $n + 1$, é verdadeiro para todos os números naturais. (GODINO; CID; BATANERO, 2004, p.26, tradução nossa)

É importante notar na supra citação que, a asserção de um número é obtida a partir de outro como sucessor deste, em vez do acréscimo de uma unidade, e que por indução encaminha à infinitude desses números, em nossa interpretação é uma descrição do processo de contagem.

Dessa forma, consideramos que os números naturais são produtos da noção de contagem, tornados independentes de problemas de quantificações de grandezas e como frutos de axiomas. Essas teorias apresentam diferenças que fogem de nossos objetivos explorá-las aqui, baseiam-se em uma noção de sistema simplesmente infinito e bem ordenado, com ênfase na estrutura ordinal centrada na condição ou propriedade de indução⁴.

É preciso destacar que o ensino da matemática escolar frequentemente se deixa influenciar por compreensões da matemática acadêmica e a noção de número é uma delas. As duas últimas compreensões estão presentes em diferentes organizações para o ensino de números, sendo que uma das principais preocupações reside em buscar diferenciar número de numeral, como se isso fosse simples e fácil.

Tal atitude nega a complexidade envolvida na construção da noção de número que, embora tenha reconhecida como seu fundamento genético a contagem, busca negá-la.

⁴ Vàsquez Lasprilla (2010, p.63), que apresentam os números como entes matemáticos e como tais, obras do pensamento que independem de suas representações e de seus usos práticos no mundo cotidiano, em que se insere o sistema de numeração posicional.

O problema da contagem surgiu da necessidade de controlar quantidades e, em uma fase posterior, de registrar esse controle. Este problema teria sido resolvido, em certos momentos, simplesmente por meio de correspondências um a um entre coleções de objetos e, em outros períodos, com um grau maior de abstração. Daí a justificativa dos autores em afirmar que, os problemas concretos de contagem são anteriores ao conceito abstrato de número, tanto no sentido matemático como no histórico. (RIPELL; RANGEL; GIRALDO, 2015, p.04)

No entanto, não se pode negar que os problemas de controlar quantidades e de seus registros ainda vivem entre nós e que o confuso da relação entre a noção de número abstrato e quantificações não foi diluído no tempo.

Os laços apertados entre número natural e numerais estão institucionalizados no seio de diferentes atividades humanas, inclusive na matemática, que com frequência, um deles passa pelo outro. Talvez por isso, Seife (2010) afirme que:

Há números e números. Os números puros pertencem ao domínio dos matemáticos – indivíduos curiosos que os estudam em abstrato, como ideias platônicas, revelando uma verdade maior. Sob o olhar de um matemático, os números são interessantes em si mesmos. Para o resto da humanidade, não. (SEIFE, 2010, p.12)

A inserção do número no dia a dia é ratificada quando ouvimos afirmações sobre eles estarem em todos os lugares, que fazem parte do nosso meio, às vezes causando embaraços, controvérsias e momentos de boas emoções como assim segue afirmando Seife (2010).

Da perspectiva de um não matemático, os números só são interessantes quando dão informações sobre o mundo. Um número adquire significado na vida cotidiana apenas quando nos diz quantos quilos ganhamos desde o mês passado, ou quantos dólares custará um sanduíche, ou quantas semanas faltam para o pagamento dos impostos, ou quanto dinheiro temos do fundo de previdência. Não estamos nem aí para as propriedades do número cinco. Somente quando ligados a uma unidade de medida – “quilos”, “dólares” ou “semanas”, que indicam seu significado no mundo real – os números despertam o interesse dos não matemáticos. (SEIFE, 2010, p.13)

As palavras do extrato nos levam a considerar que a noção de número ganha sentidos ou significados em acordo com o uso. Na matemática, como um objeto abstrato dotados de propriedades infalíveis, mas que em relações com a realidade, está em jogo não somente as quantidades como também as qualidades das

grandezas frente a situações em contextos. No entanto, persiste um entendimento de que números em contextos do mundo concreto seriam números matemáticos feitos numerais que jogados ao mundo, vão ganhando sentidos e significados em seus usos.

Os números em contexto os quais Seife (2010) se refere são numerais adjetivados em seus usos e, como numerais, são imperfeitos quando comparados aos números matemáticos.

Um número sem unidade de medida é étero e abstrato. Com uma unidade, ganha sentido – mas, ao mesmo tempo, perde sua pureza. Atréadas a unidades, as cifras não podem mais habitar o reino platônico da verdade absoluta; ficam maculadas pelas incertezas e imperfeições do mundo real. Para os matemáticos, os números são representações de verdades indubitáveis; para o restante de nós, significam medições intrinsecamente impuras. (SEIFE, 2010, p.13).

Seife (2010) parece ignorar que os números matemáticos independem de representações e, não menos importantes, que estas não são dotadas de suas propriedades, de modo que o uso de um não implica no uso do outro, quando assim ratifica seu pensamento.

É universal: no mundo concreto, há uma medição por trás de cada número. Por serem intrinsecamente sujeitas a erros (afinal, são feitas por seres humanos, usando instrumentos criados pelo homem), as medições não são totalmente confiáveis. Até o mero ato de contar objetos está sujeito a erros, como veremos. Por isso, toda medição e todo número do mundo real tem um quê de imprecisão, de incerteza. Trata-se de um reflexo imperfeito da realidade. Números são sempre impuros: uma mescla de verdade, erro e incerteza.

As falácias matemáticas nos afetam porque somos cegos para essa impureza. Números, cifras e gráficos têm sempre uma aura de perfeição. Parecem verdades absolutas, inquestionáveis. Mas isso não passa de ilusão. Os números de nosso mundo cotidiano – aqueles com os quais nos importamos – são falhos, e não só porque as medições são imperfeitas. Podem ser alterados e remendados, manipulados, torcidos e virados de cabeça para baixo. Por trajarem o alvo manto do fato irrefutável, são dotados de um incrível poder. É por isso que as falsidades matemáticas são tão perigosas. (SEIFE, 2010, p.14)

Os números matemáticos independem de empirias, enquanto um numeral adjetivado depende do que se conta e como se conta e, portanto, podem estar

dotados de “impurezas”, como os erros humanos involuntários decorrente de usos inadequados, de dispositivos de cálculo, por exemplo, ou até mesmo voluntários de modo a atender interesses e intenções de quem os criam e os manipulam.

No entanto, os numerais de um dado sistema de numeração sustentado por processos de contagem não são capazes de exatidões de modo a sustentarmos que representam números matemáticos, inclusive os números racionais que guardam estreitas relações com o processo de contagem. O número matemático racional representado pela fração $\frac{1}{3}$ não encontra um representante no sistema posicional decimal, bem como nenhum número irracional tem representação nesse sistema de numeração.

Nesse sentido, poderíamos pensar que os numerais adjetivados são avatares de números matemáticos que, como tais, são entes terrenos dependentes de unidades que lhes atribuem sentido por meio de diferentes práticas desenvolvidas em diferentes atividades humanas.

No entanto, é preciso insistir que os numerais não são obras de matemáticos em seu universo platônico, mesmo quando entendidos como aglomerados de “*uns*”, mas sim obras humanas com propósitos de construir respostas às questões que emergem em situações no interior de espaços sociais, nas relações do homem com o mundo, com os outros e consigo mesmo (CHARLOT, 2003). Os numerais são ferramentas desenvolvidas pelo homem para os homens tornarem possíveis suas diferentes práticas necessárias às suas atividades.

3.5 MAIS NUMERAIS, MENOS NÚMEROS

As compreensões teóricas sobre números independentes de suas representações até aqui esboçadas são construções artificiais a partir de velhas práticas de quantificações de grandezas, em busca de dotar essas práticas de um discurso teórico que, embora possam torná-las opacas, permitem desdobramentos teóricos mais profundos sobre a noção mais geral de números necessária às atividades da matemática.

Segundo Lima (1991, p.07) “um número real é o resultado da comparação de uma grandeza com a unidade, que é uma grandeza de mesma espécie, fixada como

padrão”. Se bem entendido, nesse caso, os naturais, racionais também são vistos como números reais, no entanto, existiram outros números, ditos irracionais, que não seriam resultados de processos de contagem como ocorre com os demais.

A implicação da impossibilidade de um número irracional ser resultado de um processo de contagem é que ele não pode ser tomado como um todo obtido pela adição ou união de unidades e, nesse caso, não dispõe de um número inteiro de unidades que representem sua medida.

Por essa razão, os matemáticos quando expressam números irracionais preferem representá-los de modos indiretos, como resultado de operações entre números inteiros, por exemplo, $\sqrt{2}$, $\log 3$, ou como registros que na cultura matemática não se confunda com registros de números inteiros ou racionais, como e , π , etc.

Em problemas do mundo real que são enfrentados usando modelos matemáticos em que emergem esses números, eles são convenientemente substituídos por números racionais de suas vizinhanças. A vizinhança adequada é determinada em acordo com normas das atividades humanas instituídas nos espaços sociais em que se desenvolvem. A substituição não é uma escolha por acaso, mas necessariamente condicionada pela prática social envolvida.

Parafraseando Chevallard (1999), podemos dizer que, em geral, uma prática precede geneticamente a teoria que lhes dá uma compreensão, embora classicamente, essas práticas sejam apresentadas como meras aplicações dessa teoria.

As construções teóricas aqui apresentadas sobre os números naturais, no entanto, são limitadas, pois não justificam ou explicam como se efetuam as operações entre dois números, por exemplo, pois os algoritmos para efetuar uma adição somente se justificam pela manipulação de numerais de acordo com as propriedades desses numerais.

Enquanto o resultado de uma adição de dois números matemáticos é um número matemático que pode ser definido com uma regra inquestionável, o resultado da adição de dois números enquanto numerais é verificável empiricamente, o que é de extrema importância nos negócios dos homens.

É preciso considerar que a noção de número matemático não está em jogo quando recorremos a contagem e isso tem implicações quando tratamos de objetos concretos ou sensíveis – que podem ser entendidos como os objetos que se contam, no caso uma unidade de grandeza, como também o processo de contagem e, de modo indispensável, de objetos sensíveis que são manipulados segundo as quantidades para produzir novos objetos sensíveis manipuláveis de acordo com novas quantidades.

Estamos falando, então, de operações entre numerais sob a compreensão de Stevin (1585) de se operar com números, no caso numerais, como se operam com quantidades físicas ou vice-versa.

Um problema da medida, por exemplo, envolve nas práticas cotidianas, as noções de unidade e de processo de contagem dessas unidades, acompanhadas de suas representações. Há medida que referimos consiste em comparar o tamanho de uma dada grandeza com uma unidade u que deve ser de mesma espécie, de modo a determinar quantas vezes essa unidade u “cabe”, exatamente, na grandeza a ser medida.

Nesta perspectiva, a medida é reduzida ao problema da contagem, pois quando a unidade u não “cabe” um número inteiro de vezes na grandeza em consideração, nova unidade é obtida a partir da divisão da unidade anterior, tantas vezes quanto for necessário para que se encontre uma (sub)unidade que “caiba” exatamente um número inteiro de vezes na grandeza que está sendo medida.

Neste caso, uma estratégia para obter a comparação é subdividir a unidade u , com o objetivo de buscar uma subunidade u' (isto é, $u = q \cdot u'$ para algum $q \in \mathbb{N}$), que caiba uma quantidade inteira p de vezes na grandeza a (isto é, $a = p \cdot u'$), ou seja, u e a são múltiplos inteiros de uma unidade comum u' (RIPOLL; RANGEL; GIRALDO, 2015, p. XXXI)

Assim, em uma situação concreta em que a medida de uma grandeza a tomando uma unidade u' é dada pelo número natural p , teríamos que a medida tomada em relação a unidade u seria igual ao número racional $\frac{p}{q}$, onde q é o número de vezes que a unidade u foi dividida e p é o número de vezes que a nova (sub)unidade cabe exatamente na grandeza a . “É assim que se diz que o conceito

de número racional emerge da noção de medida, no caso particular de grandezas comensuráveis” (RIPOLL; RANGEL; GIRALDO, 2015, p.XXXI).

A compreensão de medida como números racionais, obtidas a partir do processo de contagem, é abordada por Guerra e Santos (2008) para tratar operações entre frações. Esses autores recorrem a noção do cálculo de medidas de áreas de retângulos por permitirem o uso de materiais manipulativos para expressar a técnica do cálculo dessa medida. Esses autores começam destacando que:

O livro X, teorema 5 de Euclides explicita que se dois segmentos são comensuráveis, ou seja, têm uma medida comum, a razão entre eles é igual à razão que guardam entre si dois números. Aqui, similarmente, admitir ter uma medida comum para duas áreas A e B, segundo Bergé e Sessa (2003, p. 168), é dizer que se nenhum múltiplo inteiro de A cabe exatamente em B, é possível dividir a área A em n partes iguais de modo tal que a área A/n caiba exatamente m vezes na área B e, neste caso, a medida de B em relação a A é $m(\frac{A}{n})$, ou que $\frac{B}{A} = \frac{m}{n}$. (GUERRA; SANTOS, 2008, p.09)

Ferreira (2014), a partir da compreensão recorrida por Guerra e Santos (2008), exemplifica uma situação de medida tomando um quadrado de lado com medida igual a um, como uma unidade de referência e assumem que este pode ser dividido em três partes iguais, cada uma das partes identificadas como $\frac{1}{3}$ da unidade de área.

Sob esse entendimento, ele destaca que o quadrado unitário dividido em 3 partes iguais terá cada parte medindo um terço de unidade de área e que pode ser representada geometricamente pelos retângulos de dimensões 1 e $\frac{1}{3}$.

Figura 16 - Quadrado unitário dividido em 3 partes iguais



Fonte: Ferreira (2014)

A partir da noção, a parte toda da fração, mostra que os retângulos de lados 1 e $\frac{1}{3}$ tem medida de área igual a $\frac{1}{3}$. Por outro lado, o retângulo com medida de área igual a $\frac{1}{3}$ está contido 3 vezes no quadrado unitário e se o tomarmos como nova unidade, a medida de área do quadrado unitário será $1 = 3\left(\frac{1}{3}\right)$, ou seja, a medida da área do quadrado unitário se a unidade tomada for $\frac{1}{3}$, é 3 já que é a quantidade de vezes que “unidade” $\frac{1}{3}$ está contida no quadrado.

Essa abordagem de Guerra e Silva (2008) nos encaminha as tarefas rotineiras de medidas presentes no mundo sensível, em geral, enfrentadas com técnicas desse tipo, ou seja, a partir da contagem de unidades que podem ou não serem tomadas da unidade de referência anterior. Esse procedimento é tomado como sempre possível, considerando a certeza construída nas práticas empíricas de medidas, sobre o número de vezes que uma grandeza pode ser dividida em partes iguais, no mundo sensível, é finito.

De outro modo, do ponto de vista das práticas de medidas de grandezas concretas seria sempre possível definir uma unidade, mesmo que muito pequena em relação à grandeza a ser medida, que possamos aceitar como se coubesse exatamente um número inteiro de vezes na grandeza em consideração.

É sob esse pensar que se assentam, as tradicionais unidades de medidas usadas nas práticas rotineiras e específicas em diferentes atividades humanas do mundo sensível como o comprimento (medido em metro, quilômetro), de capacidade (litro, mililitro), de volume (metro cúbico, centímetro cúbico), de área (metros quadrados, centímetros quadrados), tempo (hora, minutos) dentre outros.

Em nosso mundo cotidiano, as unidades estão socialmente postas de acordo com as situações em contextos concretos e, por isso, as escolhas das unidades ocorre de forma tão natural que não nos damos conta das unidades usadas. Por exemplo, a unidade de medida adequada socialmente para medir a distância entre duas cidades é o quilômetro (nos referimos aos países que se usam o metro e seus múltiplos) do mesmo modo que se assume o centímetro para medir a largura de uma janela. Fazemos as escolhas entre as que se encontram no campo dos possíveis dessas práticas, ou seja, medir é uma prática em acordo com uma situação em contexto no interior de um espaço social.

Logo, os numerais adjetivados são produtos de ações sobre quantidades físicas e somente são alcançados com um modo de contar e um sistemas de numeração em consonância com esse processo. Assumimos, assim, que se pressupomos a matemática escolar como ferramenta de leitura de mundo, o número do mundo que nos cerca, como destaca Seife (2010), é do tipo do número adjetivado, coordenando ações sobre as unidades dos numerais, do mesmo modo que agimos coordenadamente com as unidades físicas de grandezas no processo de quantificação, conforme defendido por Stevin (1585).

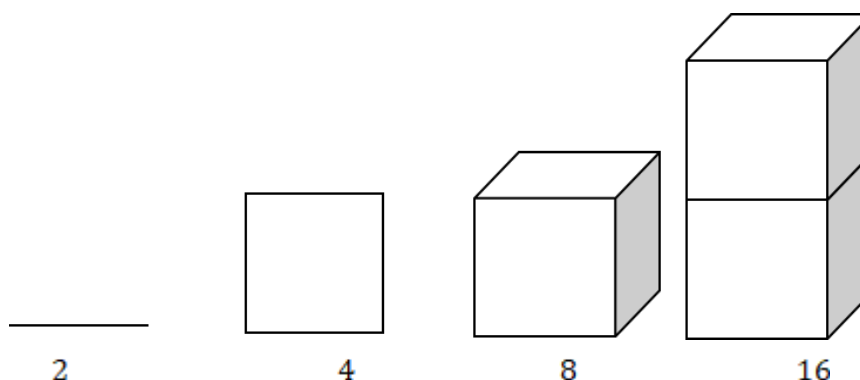
Para Stevin (1585) há uma identificação entre o tratamento de quantidades contínuas e discretas, quando se assume que:

- a) A unidade (numérica ou geométrica, agora identificada) é um número;
- b) A unidade é ilimitadamente divisível;
- c) As partes da unidade são números.

A partir dessas premissas, Stevin (1585) mostra como cada grandeza corresponde a um número, entendido como resultado da medição, e como cada número corresponde a uma grandeza. Nesse sentido, é bastante esclarecedor o seguinte exemplo presente em Waldegg (1996):

Um exemplo desses argumentos é o seguinte: suponha que tenhamos um segmento de comprimento 2 (Figura). Se formarmos um quadrado com ela, a área será $2^2 = 4$ e se construirmos agora um cubo, seu volume será $2^3 = 8$. Assim, o raciocínio coincide com o grego: a primeira potência é linear, a segunda é quadrada e a terceira é cúbica. Se empilharmos 2 destes cubos, o volume do prisma resultante será $2^4 = 16$, o que teria dado um significado geométrico à quarta potência e, análogo a todos os subseqüentes (WALDEGG 1996, p.12 apud STEVIN, 1585, p. 4-51)

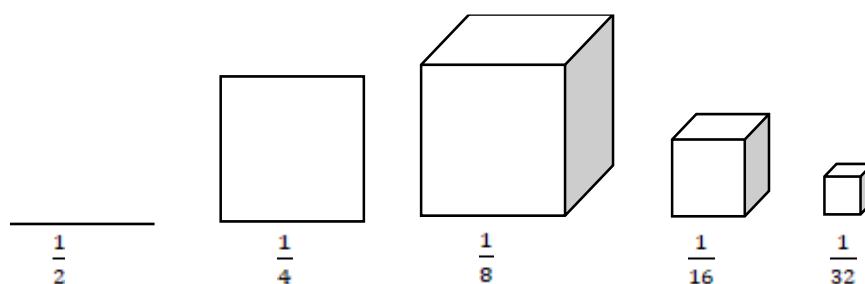
Figura 17: Volumes dos prismas



Fonte: Waldegg (1996, p.12)

Analogamente, Stevin (1585) exhibe grandezas geométricas que se associam a potências de números fracionários. Por exemplo, partimos agora de um segmento de longitude $\frac{1}{2}$ (figura 18) e construímos o quadrado correspondente que tenha área $(\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$, e o cubo volume é $(\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{8}$. Dividindo o cubo pela metade obtemos um prisma cujo volume é $(\frac{1}{2})^4 = \frac{1}{16}$, e assim sucessivamente para as potências seguintes (WALDEGG, 1996, p. 12, tradução nossa)

Figura 18: Volume dos cubos



Fonte: Waldegg (1996)

Com este método, Stevin quis mostrar que dado um número, sempre pode exibir uma grandeza que o represente, da mesma maneira que dada uma grandeza, sempre pode exibir um número associado a ela. (WALDEGG, 1996, p.12, tradução nossa)

Stevin (1585), como já destacamos, fundamenta a homogeneidade do domínio numérico e a natureza de seu “número aritmético”, a partir da identificação entre número e grandeza, sem deixar de acrescentar que qualquer número pode ser quadrado, cúbico, etc. “Assim como qualquer raiz é um número” (WALDEGG, 1996, p.13, tradução nossa).

De qualquer, modo, o importante é que as ações que são realizadas sobre as quantidades são as que sustentam as operações aritméticas que, por sua vez, constituem a essência do número, do mesmo modo que as ações de medir, comparar, dividir, transformar, etc., são as ações que dão sentido à quantidade. (WALDEGG, 1996).

Segundo Waldegg (1996), apoiado nas ideias de Stevin (1585) sustenta sua noção de número sobre a base de operações que seriam possíveis de se realizar sobre as matérias quantificáveis que não alteram sua quantidade total e, com isso, a conservação dessa matéria. Seguindo esse pensar, Waldegg (1996) afirma que Stevin (1585) transita através de três níveis de abstrações, que são:

Quadro 01: Os três níveis de abstração

NÍVEL	REFERENTE	AÇÃO	RESULTADO
Contexto empírico	Matéria	Ações concretas	Conservação da quantidade
Abstração empírica	Quantidade	Ações interiorizadas	Conservação de quantidade
Abstração simbólica	Numeral ⁵	Operações algébricas	Conservação do domínio numérico

Fonte: Waldegg (1996, p.14)

Esses níveis de abstrações estão fortemente imbricados, mas não são recorridos nas escolas do modo anunciado para a construção de um numeral, pois o princípio de operar com os “números” do mesmo modo que se operam com as quantidades, defendido por Stevin (1585), assenta-se claramente na identidade entre numeral e quantidade que é fortemente rejeitado pela matemática acadêmica atual, e conseqüentemente, é afastado das salas de aula o mais breve possível na escala do tempo escolar.

Isso é facilmente observado por meio da introdução dos conjuntos numéricos, como os naturais e os racionais, já nos primeiros anos da escola do ensino fundamental, mesmo que os alunos, inclusive os professores, não compreendam o que se quer dizer quando é afirmado que um dado numeral é “um número natural” e tampouco que um número independe da experiência empírica de quantificação no mundo concreto.

Por outro lado, o numeral decimal, por exemplo, tem uma estrutura que permite sua construção a partir de experiências empíricas de quantificação de unidades concretas. De outro modo, enquanto a adição dos números matemáticos $2 + 3$ é igual ao número matemático 5, por obedecer a uma regra, a tabuada, por exemplo, na adição dos numerais $2 + 3$ é igual ao numeral 5, por resultar de experiências empíricas de juntar a quantidade 2 à quantidade 3 e, assim, resultar na quantidade 5.

3.6 UM MODELO DE QUANTIFICAÇÃO DECIMAL – MQD

⁵ Numeral na perspectiva desse relatório de pesquisa

Assumimos, então, o suposto sobre os numerais decimais posicionais decorreram antes de situações de quantificações que, inspiradas nos três níveis de abstração (WALDEGG,1966), nos encaminham o seguinte processo de quantificação de unidades concretas como geradora de numerais decimais.

No nível do contexto empírico de quantificação de unidades concretas, em que a quantidade de unidades de um aglomerado quantificado permanece constante, corresponde aos princípios P1 e P2 e a ação N3, assim anunciados:

(P1) Identifica as unidades de grandezas a serem contadas com o numeral um;

(P2) São conhecidas 9 quantidades de unidades físicas identificadas com símbolos de numerais, de 1 até 9, além de considerar a ausência de unidades, no caso, representada pelo símbolo numeral zero.

(N3) Construir agrupamentos com $(9 + 1)$ unidades elementares, ditas de dezenas, sempre que possível, e replicar esse processo, se necessário, construindo novos agrupamentos com $(9 + 1)$ unidades dos agrupamentos mais recentes – denominadas de centenas, de milhares, etc., até que não seja mais possível construir novos tipos de agrupamentos.

Seguindo o segundo nível de abstração, por ação interiorizada, estrutura-se a quantidade total por quantidades de cada tipo de agrupamentos construídos para em seguida representá-la em um ábaco.

(N4) Ordenar as quantidades por tipos de agrupamentos obtidos, seguindo a ordem de suas construções, ou seja, partindo do mais simples, da esquerda para a direita, deixando vazio nessa ordenação os tipos de agrupamentos ausentes, por terem sido absorvidos no processo de construção de novo agrupamento.

(N5) Associar a cada quantidade de cada tipo de agrupamento, na ordem referida no item anterior, a mesma quantidade física de unidades simbólicas por meio de um ábaco.

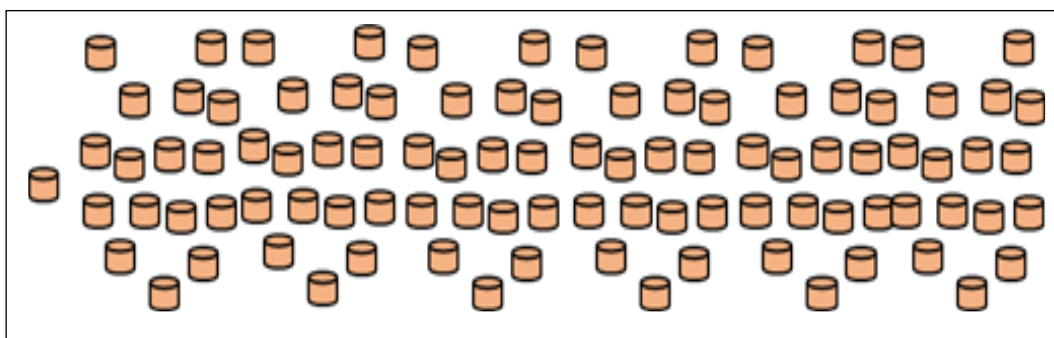
Finalmente, seguindo ao terceiro nível de abstração, constrói-se o numeral, bem como se opera com ele, a partir do espelhamento do ábaco por meio de símbolos numerais.

(N6) Escrever o numeral como imagem em um espelho do ábaco, usando os símbolos de cada quantidade de cada tipo de agrupamento, recorrendo ao símbolo

numeral zero para os tipos de agrupamentos ausentes e absorvidos no processo de quantificação.

Para exemplificar, tomamos um aglomerado de tampinhas (figura 19) que estamos interessados em quantificá-lo em acordo com o sistema de numeração decimal.

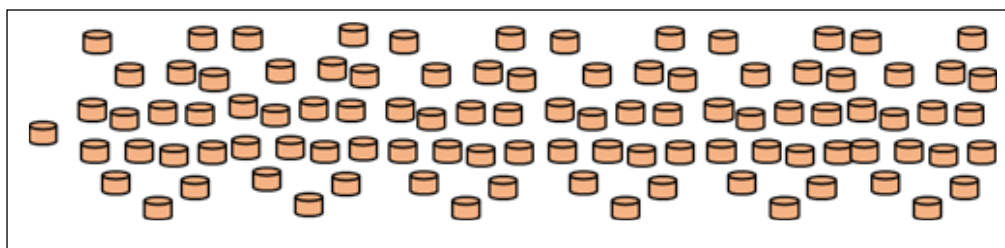
Figura 19: Aglomerados de tampinhas



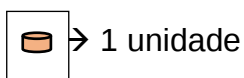
Fonte: Próprio autor (2020)

(P1) A partir do aglomerado físico de tampinhas, figura (20), identificamos uma tampinha com o numeral 1.

Figura 20: Aglomerados de tampinhas

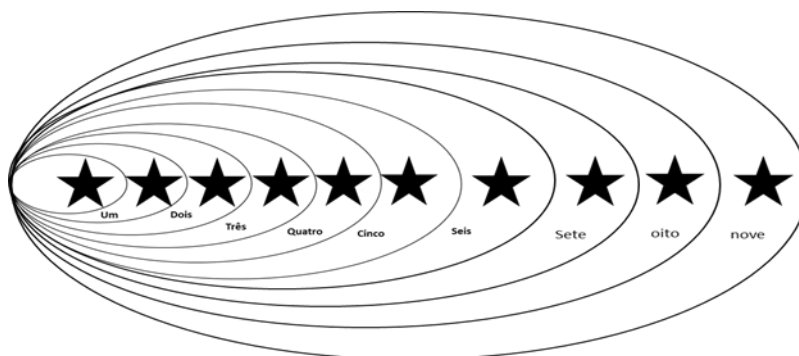


Fonte: Próprio autor (2020)



(P2) A partir das quantidades físicas finitas, conhecidas de 1 a 9, a contagem acontece da ação de manusear uma por uma delas, de 1 a 9 no sentido de inclusão, $1 + 1 = 2$, $2 + 1 = 3$, $3 + 1 = 4 \dots$ é possível contar quaisquer quantidades. Observamos esse processo na figura 21:

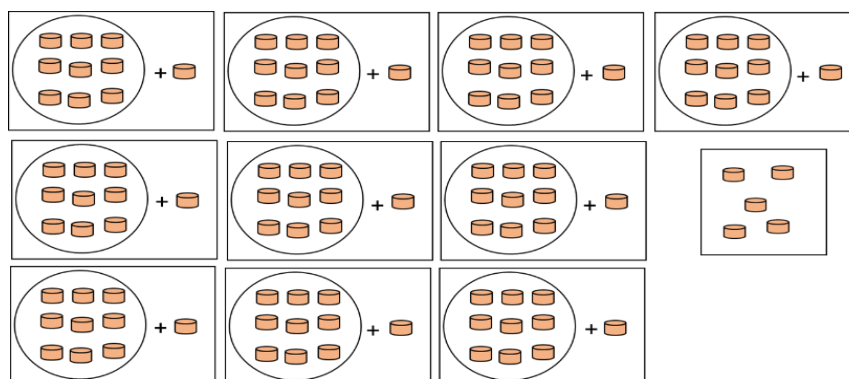
Figura 21: Contagem



Fonte: Próprio autor (2020)

(N3) A contagem natural agrupa até nove unidades simples que, adicionada de mais 1 unidade elementar, formam novos totais do mesmo tipo não conhecidos, que passam a se constituir um novo tipo de unidade, a qual será chamada de dezena, restando uma quantidade com total cinco.

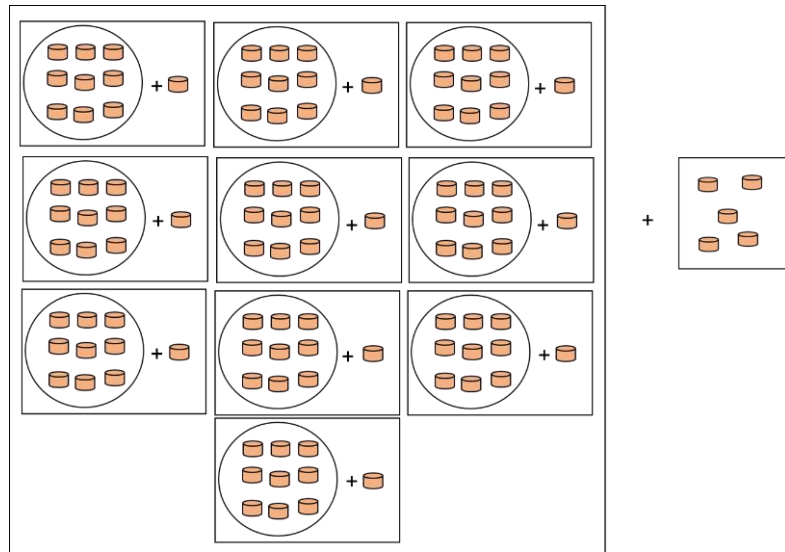
Figura 22: A nova unidade dezena



Fonte: Próprio autor (2020)

(N4) Quando reagrupados e ordenados as quantidades pela contagem, 9 dezenas + 1 dezena, passa a se constituir uma nova unidade, unidade superior a unidade anterior, a centena, então, o aglomerado passa a ser 1 unidade da ordem superior das dezenas, mais os resquícios das 5 unidades simples.

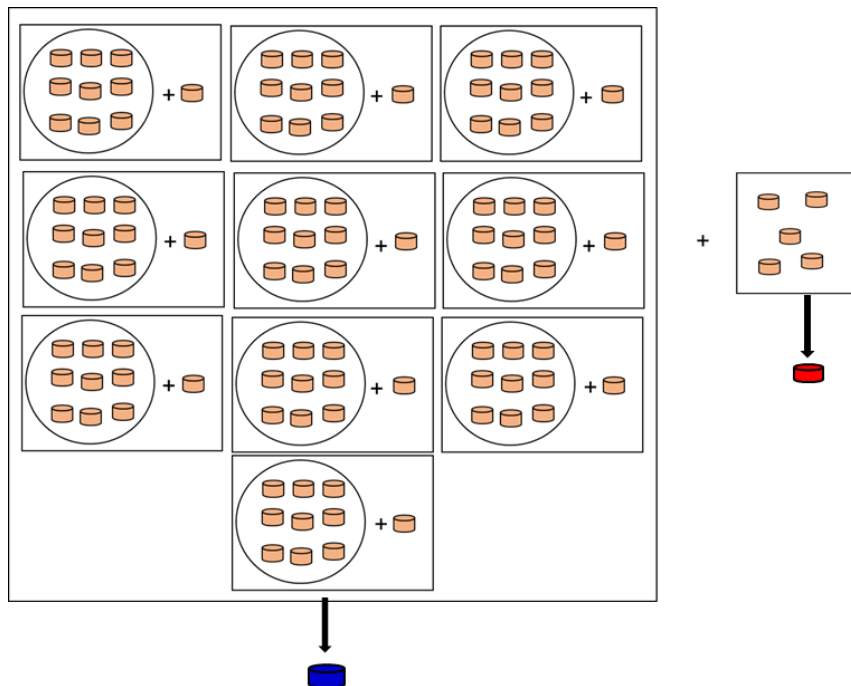
Figura 23: A nova unidade centena



Fonte: Próprio autor (2020)

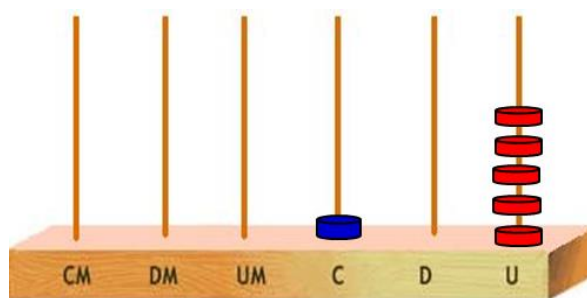
(N5) Com a quantificação obtida dos agrupamentos, obtivemos como resultado a unidade de centenas mais as 5 unidades simples, essas quantidades podem ser representadas no ábaco. Consideramos, que o agrupamento que resultou em centenas seja representado por uma tampinha na cor azul e as 5 unidades simples sejam representados por uma tampinha na cor vermelha.

Figura 24: A quantificação que será representada no ábaco



Fonte: Próprio autor (2020)

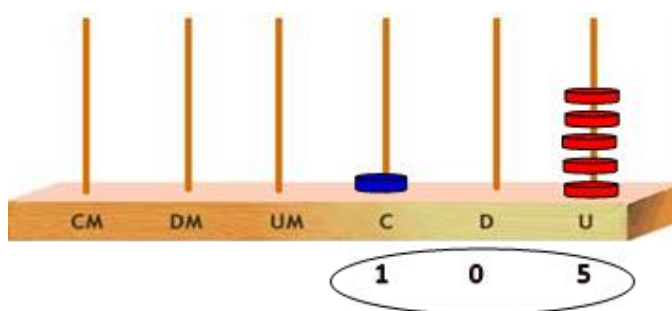
Figura 25: Representação das quantidades no ábaco



Fonte: Próprio autor (2020)

(N6) A representação das quantidades no ábaco tem registro simbólico, o numeral 105.

Figura 26: Representação do numeral no ábaco



Fonte: Próprio autor (2020)

Nesse caso, há a ausência de agrupamento de dezenas que foi representada pelo numeral 0 (zero). O símbolo numeral 1 para a quantidade de agrupamento centena, o símbolo numeral 0 para a ausência de agrupamento de dezena e 5 para a quantidade de agrupamentos simples, ou seja, o numeral 105.

Esse olhar não contraria a instituição matemática, mesmo que o seu interesse resida na construção do conceito de número natural, em particular, que um dado número admite diferentes representações, de modo que um numeral é tão somente representação desse número.

O modelo que apresentamos, com suporte de Stevin (1585), parece ser inquestionável no mundo dos números adjetivados que nos cerca, inclusive para outras ciências, por evidenciar os numerais como quantidades físicas e vice-versa, bem como mostrar a unidade numérica 1 como abstrações de diferentes unidades

físicas que levam a diferentes quantidades e, com isso, os diferentes numerais numéricos. Isso ajuda a encaminhá-los como representantes dos números naturais.

Supomos que esse modelo possa nos ajudar a revelar possíveis papéis e, que os sistemas de numeração decimal com as representações dos numerais possam ser assumidos em nossas escolas, considerando que a sociedade é usuária de números enquanto numerais e não como construções do pensamento matemático.

Além disso, os sistemas de numeração são dispositivos criados pela humanidade ao longo do tempo para construções de respostas às diferentes atividades humanas, desde as rotineiras, até as mais específicas, como das ciências aplicadas da economia, das engenharias e até da matemática, em particular, dos professores de matemática, inclusive em formação.

Um contraste a partir do MQD com as práticas de quantificação das civilizações Egípcia, Grega e Romana mostra o SND como evoluções desses sistemas de numeração, entre elas, a dispensabilidade do ábaco para operar como os numerais, visto que para o SND se operam com os numerais como se operam nos ábacos, pois os numerais são imagens simbólica do ábaco.

Esse estudo que encaminhou o MQD, subsidiou a construção do modelo praxeológico de referência MPR de modo a atender a direção de estudo no seu duplo papel na orientação $\mathcal{S}(FI, D, Qg)$, ora como pesquisador e ora como formador.

3.7 O MODELO PRAXEOLÓGICO DE REFERÊNCIA – MPR

Seguindo nosso pensar, que assume o pensar de Stevin (1585), no sentido da existência de um isomorfismo operatório entre numeral e quantidades físicas de unidades, de modo que se possa manipular ou operar com numerais do mesmo modo que se manipula ou opera com quantidades, o que inclui contá-las, podemos idealizar um modelo praxeológico de referência, ou simplesmente MPR, que possa permitir a construção de numerais posicionais a partir de situações de quantificações de aglomerados de unidades de grandezas físicas.

Para isso generalizamos o MQD, sobre a mesma compreensão, para uso também de agrupamentos não decimais. Nesses termos, o MPR é assim descrito:

- (P1) Identificar as unidades de grandezas a serem quantificadas com um numeral simples, que pode ser um;
- (P2) Conhecidas m quantidades de unidades identificadas com m símbolos numerais, além de considerar a ausência de unidades, no caso, representada pelo símbolo numeral zero;
- (N3) Construir agrupamentos com $(m + 1)$ unidades elementares, ditas de ordem superior um, sempre que possível, e replicar esse processo, se necessário, construindo novos agrupamentos com $(m + 1)$ unidades dos agrupamentos mais recentes denominadas de ordem superior dois, ordem superior três e assim por diante, de milhares, até que não seja mais possível construir novos tipos de agrupamentos;
- (N4) Ordenar as quantidades por tipos de agrupamentos obtidos, seguindo a ordem de suas construções, partindo do agrupamento mais simples de uma unidade simples, da esquerda para a direita, deixando vazio nessa ordenação, os tipos de agrupamentos ausentes, por terem sido absorvidos no processo de construção de novo agrupamento;
- (N5) Associar a cada quantidade de cada tipo de agrupamento, na ordem referida no item anterior, a mesma quantidade física de unidades simbólicas por meio de um ábaco;
- (N6) Escrever o numeral como imagem em um espelho do ábaco, usando os símbolos de cada quantidade de cada tipo de agrupamento, recorrendo ao símbolo numeral zero para os tipos de agrupamentos ausentes e absorvidos no processo de quantificação.

Quando $m = 9$, tem-se o sistema de numeração posicional decimal e quando $m = 59$ tem-se o sistema de numeração posicional sexagesimal dos babilônicos. Tomando diferentes valores para m , definem-se diferentes sistemas de numeração posicional, entre eles, alguns destacados por tecnologias associadas, por exemplo:

O sistema de numeração posicional binária é o sistema mais utilizado por máquinas, uma vez que os sistemas digitais trabalham internamente com dois estados (ligado/desligado, verdadeiro/falso, aberto/fechado). Esse sistema utiliza os símbolos: 0, 1, sendo cada símbolo designado por bit (binary digit).

O sistema octal foi muito utilizado no mundo da computação, como uma alternativa mais compacta do sistema binário, na programação em linguagem de máquina.

Atualmente, o sistema hexadecimal é um dos mais utilizado como alternativa viável ao sistema binário, Sistema de numeração muito utilizado na programação de microprocessadores, especialmente nos equipamentos de estudo e sistemas de desenvolvimento. (PINTO, 2013).

O extrato de texto apresenta algumas atividades singulares com o uso rotineiro de alguns sistemas de numerações tais como: binário, octal e hexadecimal, com fins específicos e atuais, demonstrando que vários sistemas de numeração se constituem em ferramentas de grandes funcionalidades nos dias de hoje.

A construção do MPR considerou a insuficiência de conhecimento matemático de professores, mas de modo a permitir que em situações de quantificação possa ser usado com diferentes tipos de agrupamentos (base) como proposto por Ripoll, Rangel e Giraldo (2015) para a desnaturalização dos numerais decimais, quando assim expressam:

Pensar em sistemas posicionais em outras bases pode ajudar a “passar a limpo” algumas das propriedades e dos procedimentos com que estamos tão acostumados a lidar na base 10, mas sobre os quais pouco refletimos. Isto é, realizar esses procedimentos em outras bases nos tira da “zona de conforto” que a base 10 proporciona, e nos força a pensar nas justificativas para cada um dos passos que executamos automaticamente e cujas validades são tomadas como certas. Esse exercício pode ajudar o professor a entender com mais clareza procedimentos que ensina usualmente aos alunos. Por exemplo, é justamente a estrutura dos sistemas de numeração posicional que sustenta os processos de decomposição e de agrupamento (como aqueles que são informalmente chamados de “vai um” e “pedir emprestado”) que constituem os algoritmos para as quatro operações elementares. Portanto, esses algoritmos valem em qualquer sistema de numeração posicional. Ao efetuarmos uma operação diretamente em outra base somos forçados a parar e refletir sobre esses procedimentos, com os quais operamos mecanicamente na base 10. (RIPOLL; RANGEL; GIRALDO, 2015, p.32)

O extrato de texto afirma que operar com outros sistemas posicionais leva à reflexão sobre os procedimentos operatórios com os numerais decimais, mas não encaminha quais situações podem prover essa reflexão.

É nesse sentido que o $\mathcal{S}(\text{FI}, \text{D}, \text{Qg})$ é recorrido, como provedor de situações capazes de criar condições para reflexões sobre os numerais posicionais e, portanto, tem como objeto de investigação, as condições que podem promover reflexões sobre os SND como SNP.

Sob essa compreensão, assumimos que as hipóteses relativas aos professores em formação, como o desconhecimento da estrutura do SND, a insuficiência de conhecimento matemático e, de modo mais inclusivo, uma vez que provem do nível mais externo à sala de aula, a naturalização dos numerais decimais como obstáculo ou dificuldade a aprendizagem do SND, não podem ser tomadas como verdadeiras a priori.

Nesse sentido, essas hipóteses serão postas à prova no processo de estudos e assim podem se constituir em condições para o funcionamento dos estudos a serem desenvolvidos pelos professores em formação, uma vez que “cada praxeologia produzida ou modificada deve surgir como uma extensão ou desenvolvimento de outra praxeologia anterior, ante as limitações dela para fornecer respostas às questões que surgem”. (SIERRA, 2006, p. 47, tradução nossa).

Desse modo, o MPR será sempre relativo e provisório, pois os questionamentos e suas respostas nunca serão esgotados de forma absoluta, mas devem favorecer o surgimento de situações que paulatinamente enfrentadas se completem, à medida que se constroem ou se modificam as respostas praxeológicas produzidas, que seguirão suscetíveis de serem retomadas a qualquer tempo.

3.8 A SITUAÇÃO PARA A EXISTÊNCIA E FUNCIONAMENTO DE $\mathcal{S}(\text{FI}, \text{D}, \text{Qg})$

A situação criada por D para funcionar como condição inicial para o desenvolvimento do $\mathcal{S}(\text{FI}, \text{D}, \text{Qg})$ com os professores em formação inicial, deve observar os princípios da dúvida e da ignorância metódicas.

Assim, foi elaborado questionamentos iniciais, aqui identificados como componentes da questão Qg, ou seja, $\text{Qg} = (\mathcal{Z}_1, \mathcal{Z}_2, \mathcal{Z}_3)$, a partir de um texto sobre uma situação hipotética em contexto idealizado a partir de práticas não rotineiras

que permitisse o enfrentamento de questionamentos sobre numerais não usuais, tendo em vista que o rotineiro reduziria o $\mathcal{S}(\text{FI}, \text{D}, \text{Qg})$ a uma simples tarefa rotineira que é sempre dotada de uma resposta pronta, como obra dos habitus associados à situação, no sentido dado por Bourdieu (2004), e, com isso, não atenderia aos requeridos princípios da dúvida e da ignorância metódicas.

A situação em contexto não usual envolvendo extraterrestre, com uso de numerais representados por letras do alfabeto, foi dotada de informações que poderiam ser abstraídas como os princípios P1 e P2, além de incluir uma correspondência particular entre um numeral extraterrestre e um numeral decimal que poderia funcionar como condição para encontrar a estrutura do SNP. Especificamente, o texto construído para a situação $\#(\text{FI}, \text{D}, \text{Qg})$ foi a que segue:

Pertenço a um povo parecido com os humanos. Possuo I boca, V olhos e Z membros como eles, mas me diferencio por possuir apenas A, ou seja, Z menos I, dedos em cada um desses membros, além de não possuir pelos, ou seja, O pelos em todo o corpo.

Em meu planeta nós cultivamos grãos e tubérculos como os terráqueos. Em particular, em nosso último ano solar AIOOO, que corresponde ao ano solar cristão da terra de 2000, obtive a seguinte produção:

Quadro 2: Representação de grãos ou tubérculos

PRODUTOS	PRODUÇÃO
<i>Feijão</i>	<i>AZOIO</i>
<i>Arroz</i>	<i>ZVAII</i>
<i>Mandioca</i>	<i>ZZAAV</i>

Fonte: Próprio autor (2020)

Em meu planeta usamos apenas os registros de representação V, A, Z, I e O para representar as quantidades.

As questões foram as seguintes:

A partir das informações fornecidas na situação descrita no texto, responda às seguintes questões:

21: *Qual seria uma provável aparência física desse povo?*

22: Como provavelmente chegaram à representação de quantidades do modo apresentado no texto?

23: Como ficaria representada a produção da tabela acima no sistema numérico usual dos terráqueos?

Em síntese, a situação geradora foi construída pela direção de estudo D a luz do MPR como condição para a existência e funcionamento do sistema didático $\mathcal{S}(\text{FI}, \text{D}, \text{Qg})$ em observância aos princípios da dúvida e da ignorância metódica, sob a restrição de se constituir também em um trajetória de formação docente e, portanto, como o coração do método de pesquisa para responder à questão de tese.

3.8.1 AS TAREFAS PARA EXECUÇÃO DO $\mathcal{S}(\text{FI}, \text{D}, \text{Qg})$

Para o funcionamento do sistema didático $\mathcal{S}(\text{FI}, \text{D}, \text{Qg})$ tornou-se necessário observar os pressupostos teóricos da TAD sobre a existência e funcionamento dos estudos e pesquisas necessárias para construir uma resposta à questão geradora desse percurso.

1 – A direção de estudo D, enquanto pesquisador, deve ratificar a observância dos princípios da dúvida e da ignorância metódicas, considerando como condição para o desenvolvimento do $\mathcal{S}(\text{FI}, \text{D}, \text{Qg})$, a observância das cinco tarefas que caracterizam uma verdadeira pesquisa (CHEVALLARD, 2013a).

2 – A direção de estudo D, sempre que possível e sem perder de vista as condições criadas ou modificadas pelos professores FI no interior do sistema didático $\mathcal{S}(\text{FI}, \text{D}, \text{Qg})$, deve criar ou modificar certas condições no sistema didático para avaliar as hipóteses investigadas pelo sistema didático $\mathcal{S}(\text{D}, \text{Q}_M)$, $\mathcal{S}(\text{D}, \text{Q}_N)$ e $\mathcal{S}(\text{D}, \text{Q}_T)$.

Nesse sentido, deve considerar as condições que realmente forem criadas ou modificadas para a ratificação ou retificação de resposta praxeológicas difundidas e defendidas pela classe $[\text{FI}, \text{D}]$, que possam permitir encontros dos professores FI com a estrutura do SNP.

3 – A direção de estudos deve cuidar para que as respostas praxeológicas devam ser posta à prova do sistema didático $\mathcal{S}(\text{FI}, \text{D}, \text{Qg})$, por meio de dialéticas das

mídias, entre elas, os professores FI e D, e do milieu M que até então fora construído, de modo a assegurar que nenhuma mídia seja “a primeira e única fala” (CHEVALLARD, 2009b, p.16).

4 – A direção de estudo D deve de gerenciar a economia praxeológica dos estudos e das investigações. Para isso, deve decidir com gestos didáticos, em concordância com os professores em formação FI, sobre a inclusão ou exclusão de obras para serem estudadas, bem como o grau de profundidade desses estudos, além de ratificar ou retificar questionamentos e respostas.

É por isso que foi exigido da direção de estudo D o conhecimento sobre um horizonte do saber estudado, nesse caso, um MPR sobre a estruturação de numerais posicionais a partir de um processo de quantificação. Daí, a necessidade de construção a priori do MPR pelo sistema didático $S(D, Q_M)$ como condição para prover gestos didáticos necessários e adequados de D no interior do sistema didático $\mathcal{S}(FI, D, Qg)$.

5 – Essa topogênese relativa à direção de estudo D exige que ela vença seus possíveis habitus professorais, em particular, o de não considerar obras não específicas de sua disciplina, mesmo que seja com a intencionalidade de reduzir o “gasto praxeológico” dos estudos e das investigações.

Os gastos praxeológicos são os esforços e/o tempo necessário de estudos e de investigações supostamente demandados, assim, por exemplo, reduzir o número de obras estudadas e ou as profundidades desses estudos, pode reduzir também, o tempo de relógio dos estudos investigativos, desde que não leve o sistema didático $\mathcal{S}(FI, D, Qg)$ a produzir respostas relativamente incompletas ou inadequadas para o funcionamento desse sistema didático.

6 – À topogênese relativa aos professores FI cabe o protagonismo dos estudos e investigações, encaminhando questionamentos e propondo respostas praxeológicas, além de proporem obras da literatura que dispuserem e que julguem necessárias para os estudos.

Assim, não somente os gestos didáticos de D condicionam o desenvolvimento do $\mathcal{S}(FI, D, Qg)$, mas, também, os gestos didáticos dos professores FI, pois ambos

irão determinar o “tamanho do gasto praxeológico” que terão implicações sobre o desenvolvimento da mesogênese e da cronogênese.

7 – A mesogênese que encaminha o meio M é construída pelo sistema didático $\mathcal{S}(FI, D, Qg)$ com as obras prontas ou produzidas para o estudo, entre elas as respostas praxeológicas e o modo como essas obras foram chamadas e estudadas para a investigação, inclusive os questionamentos formulados e reformulados pela classe $[FI, D]$ que foram úteis ou indispensáveis para o encontro de respostas praxeológicas adequadas para as questões de Qg e, em consonância, para as questões Q_M .

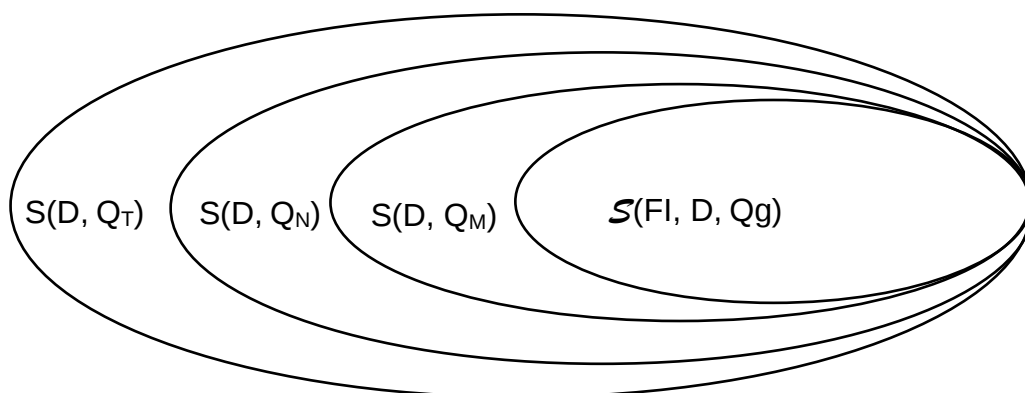
A dinâmica da construção dessa mesogênese, em consonância com a topogênese, pode afetar a cronogênese considerando a limitação da carga horária imposta pelo nível de (co)determinação didática da instituição formadora de professores, pois dilata o tempo didático e de relógio para a execução do $\mathcal{S}(FI, D, Qg)$. Cabe a direção de estudo D criar ou modificar certas condições, como gestos didáticos para atender a referida dilatação do tempo, para os estudos e pesquisas, necessários para o desenvolvimento do sistema didático $\mathcal{S}(FI, D, Qg)$.

As sessões de estudos e pesquisas para o enfrentamento de cada questionamento que compõe Qg foram objetos de análises, considerando que estas constituíram campo fértil de observações sobre o papel das condições criadas ou modificadas pela classe $[FI, D]$ para a produção de respostas praxeológicas adequadas dos professores em situações de quantificações.

As respostas praxeológicas às questões Qg são as condições para D poder construir respostas para os sistemas didáticos $S(D, Q_M)$ e, em consequência, aos sistemas $S(D, Q_N)$ e $S(D, Q_T)$ que, sinteticamente, podem assim ser representados.

3.8.2 SÍNTESE DO PROJETO DE DESENVOLVIMENTO DA PESQUISA DE TESE

Figura 27: Relações entre os sistemas didáticos do PEP da tese



Fonte: Próprio autor (2020)

O desenvolvimento do sistema didático sob as restrições impostas pelos níveis de (co)determinação didática, da disciplina, da pedagogia e da escola, em que ele estava inserido, segue no próximo capítulo dedicado às análises.

4. ANÁLISE PRAXEOLÓGICA E AS POSSÍVEIS TRAJETÓRIAS DE DIFUSÕES DOS SISTEMAS DIDÁTICOS

4.1. INTRODUÇÃO

Nas descrições e análises das seis sessões que seguem, cada professor em formação inicial FI foi representado por fi_k ($k = 1, \dots, 20$), enquanto o diretor de estudo e pesquisadora foi representado por D .

É importante destacar, para compreensão das análises apresentadas a seguir, que as falas integram o quinto gesto de uma verdadeira pesquisa que cita Chevallard (2013a) e que, como tal, constituem uma narrativa sobre o desenvolvimento das respostas apresentadas para serem validadas ou não pela classe $[FI, D]$. Desse modo, a ordem das falas não segue uma suposta temporalidade linear do desenvolvimento de uma dada resposta, produzida por um determinado grupo FI.

4.2. SESSÕES DO PEP

4.2.1 – SESSÃO (S1)

I. Encaminhamento do sistema didático $S_1(FI_1, \mathcal{Z}_1)$

O sistema didático principal $S_1(FI, D, \mathcal{Z}_1)$ foi instalado com a missão de pôr a prova os elementos de respostas de cada sistema didático auxiliar $S_k(FI_k, \mathcal{Z}_1)$, especificamente, para a realizar a tarefa H_5 de difusão e defesa dessas respostas que, de algum modo, envolvem as demais tarefas de pesquisa.

Assim, cada $S_k(FI_k, \mathcal{Z}_j)$ difundiu e defendeu sua resposta mediante ao sistema didático $S_k(FI, D, \mathcal{Z}_j)$ que teve o papel de ratificar, retificar ou rejeitar essas respostas frente aos questionamentos da classe $[FI, D]$.

I.1 Trajetória da difusão e defesa das respostas praxeológicas do $S_1(FI_1, \mathcal{Z}_1)$

O FI_1 , representado pela partição $FI_1 = \{fi_1, fi_2, fi_3, fi_4, fi_5\}$, frente à questão

2₁: *Qual seria a provável aparência física desse povo?* constituiu o sistema didático $S_1(FI_1, 2_1)$ para construir uma resposta.

Começaram contrastando os numerais dos Et's, pertencentes a um suposto sistema "alfabético", com os numerais decimais, que se constituem em uma resposta pronta $R_1^\diamond$.

FI₁: *Nosso é um sistema numérico e o deles é alfabético porque eles utilizam letras ao invés de números e ...*

Em seguida, contrastam os numerais dos Et's com numerais de uma segunda resposta pronta $R_2^\diamond$ denominada de sistema de numeração romano. Após analisarem e avaliarem os numerais romanos, afirmam que essa resposta pronta não caberia na situação, mas admitem relações com o sistema de numeração decimal.

FI₁: *Diferente do sistema romano eles chegam ao zero, no vazio, eles têm a representatividade do vazio como no caso, sem pelos dá pra fazer uma comparação com nosso sistema de numeração.*

FI₁ admitem que há distinção entre os numerais dos Et's e dos humanos e, inclusive, admitem que os Et's podem totalizar outras quantidades com totalidades maiores que quatro.

FI₁: *No sentido que nós utilizamos a numeração infinitamente 1,2,3 ... e aqui só para representar esses números mesmo, porque para representar o 3 a gente faz a subtração, nós não podíamos utilizar qualquer numeração para encontrar essas informações que foram pedidas porque no problema só aparecem essas 5, elas são limitada e se organizam neste sentido. E nós temos 10.*

FI₁: *No caso é possível fazer todas as organizações e que vai de 0 até 9, vai formando os demais números...*

Nesse contexto, o grupo FI₁ encaminhou uma nova questão:

Q₁: *Quais algarismos hindu-arábicos correspondem a cada letra?*

E instalou um sistema didático auxiliar:

$$S_1(FI_1, Q_1) \rightarrow R_3$$

A resposta R_3 para a questão Q_1 foi proposta por FI₁ a partir de identificação das letras O, I, V, A e Z com as totalidades de quantidades zero, um, dois, três e quatro, cujos respectivos algarismos hindu-arábicos são simbolicamente conhecidos, respectivamente, por 0, 1, 2, 3 e 4, tendo em conta a interpretação das totalidades

de quantidades de aspectos físicos que caracterizam a aparência dos Et's frente aos aspectos físicos da aparência dos humanos, como apontam as seguintes falas:

FI₁: *Primeira coisa que fizemos foi ler e seguir exatamente o texto, levamos em consideração que os Et's são parecidos com os humanos e que a primeira diferença notada foram os números de dedos e que não possuem pelos, são diferentes dos humanos, então fizemos que $I = 1$, eles têm uma boca, tem $V = 2$ (dois olhos), Z membros = 4, outra diferença $O = \emptyset$ pelos e A é $Z - I = 3$ (dedos) com essas informações fizemos a imagem de como seria esse ser.*

FI₁: *Quando peguei a questão, confesso que não li atentamente fui logo para conta matemática e a colega me chamou a atenção para eu fazer a leitura, porque desconsidereei a primeira informação deles, serem parecidos com os humanos, mas para obter as informações eu precisava conferir com as características humanas para eu ter noção, para saber o que significava 1 boca V olhos, Z membros a partir da leitura mesmo foi que comecei a perceber. Outra coisa que achei interessante é de ser limitada em V, A, Z, I, O.*

D: *Mas limitada em que sentido?*

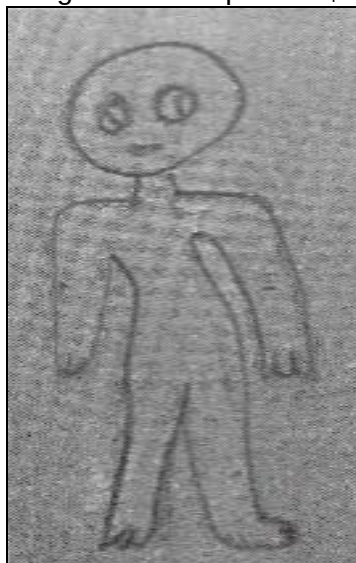
FI₁: *No sentido que nós utilizamos a numeração infinitamente 1,2,3 ... e aqui só para representar esses números mesmo, porque para representar o 3 a gente faz a subtração, nós não podíamos utilizar qualquer numeração para encontrar essas informações que foram pedidas porque no problema só aparecem essas 5, elas são limitada e se organizam neste sentido. E nós temos 10.*

FI₁: *No caso é possível fazer todas as organizações e que vai de 0 até 9, vai formando os demais números...*

FI₁: *Só foi possível chegar na numeração por causa das primeiras características apresentadas nos textos dos humanos, aqui fala O pelos, mas ele diz que não possuem pelos, então vimos que é zero, é vazio, no caso da boca só tem uma, a não ser que ele seja diferente já $Z - I = A$, foi possível por causa das informações fornecidas na situação, o A seria vazio não teríamos como identificar se não tivesse o Z.*

FI₁: *A questão 2 propõe: 2₂: Como provavelmente chegaram à representação de quantidades do modo apresentado no texto? A partir das informações apresentadas no texto fizemos as relações de características desse povo com os humanos relacionando as letras com os números, membros e órgãos que nós humanos temos. Foi o que acabamos de falar aqui, que foi a base para chegarmos nessa comparação.*

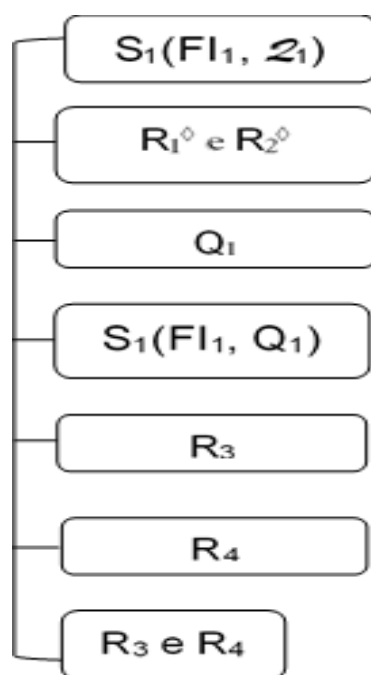
A resposta à questão 2₁ foi produzida a partir do consenso dos professores FI sobre R₃ e R₄, embora tomadas como provisórias pela classe [FI, D]. Essa resposta faz corresponder as totalidades de quantidades (um, dois, três e quatro), inclusive a ausência de totalidades de quantidades, a partir da relação de aparência entre os Et's e os humanos, cujo registro gráfico foi obtido com ajuda indispensável do texto da situação e se constituiu na resposta R₄ apresentada na figura 28.

Figura 28: Resposta R₄

Fonte: Arquivo de pesquisa (2020)

I.2. Síntese da sessão – Encontros e encaminhamentos $S_1(FI_1, Z_2)$

Em síntese, essa parte do percurso de estudo e pesquisa, referente ao sistema didático auxiliar $S_1(FI_1, Z_1)$, como um recorte desse percurso, constituiu uma trajetória que levou à resposta (R_3, R_4) como composição de R_3 e R_4 , por nós descrita, esquematicamente, do seguinte modo:

Figura 29: Trajetória do percurso do FI_1 

Fonte: Próprio autor (2020)

A resposta praxeológica de FI_1 para a questão 2_1 pôde, então, ser assim descrita:

I.3. Resposta praxeológica R_2 E R_3

1. Tarefa:

2_1 : Qual seria uma provável aparência física desse povo?

2. Técnica:

A técnica se assenta na similaridade entre as formas físicas dos Et's com os humanos encaminhadas pelo texto. Dessa similaridade é encontrada a relação entre as letras e os algarismos hindu-arábicos. A partir dessa relação e de noções de desenhos de humanóides é construída uma resposta para 2_1 .

3. Tecnologia:

O texto da situação assume o papel de tecnologia que encaminha e valida a resposta produzida pela técnica.

Quanto às observações realizadas a respeito do caminhar dos FI ao encontro do MPR, interpretamos que a construção e defesa da resposta R_3 e R_4 revela a classe $[FI, D]$ frente aos princípios P1 e P2 como objetos naturalizados.

Nossa compreensão decorre das relações que os FI estabelecem entre os símbolos e as totalidades de quantidades físicas para compor a construção e finalização da resposta da figura 29. Em particular, o princípio P1 pode ser observado quando fazem a relação das unidades físicas, como olho, boca e dedo, por exemplo, com o numeral I ou 1, para em seguida quantificá-las, por exemplo, dois olhos com o numeral V, uma boca com o numeral I ou 1, ou ainda, três dedos com o numeral A ou 3.

O princípio P2 é por nós julgado e evidenciado quando os FI relacionam os numerais O, I, V, A e Z com as totalidades de quantidades que conhecemos em nossa sociedade, com as denominações de zero, um, dois, três e quatro, e destacam a finitude dos símbolos ou algarismos que compõe os numerais. Além de reconhecerem que outros numerais podem ser construídos com os símbolos dos Et's para denotar outras totalidades de quantidades maiores.

Durante a defesa das respostas R_3 e R_4 houve participação relativamente tímida dos demais professores FI, pelo baixo número de questionamentos de forma explícita sobre essas respostas. Observamos que a construção de R_3 e R_4 foi encaminhada por $S_1(FI_1, \mathcal{Z}_1)$ considerando $\mathcal{Z}_2$ como evidencia FI_1 . Isso também foi observado na apresentação da defesa da resposta do FI_2 .

II. Encaminhamento do sistema didático $S_2(FI_2, \mathcal{Z}_1)$

O sistema didático auxiliar $S_2(FI_2, \mathcal{Z}_1)$ é constituído por $FI_2 = \{fi_6, fi_7, fi_8, fi_9, fi_{10}\}$ e frente à questão $\mathcal{Z}_1$, constituiu o sistema didático para construir uma resposta.

II.1 Trajetória da difusão e defesa das respostas praxeológicas do $S_2(FI_2, Q_2)$

Frente a falta de consenso no interior do FI_2 , o sistema didático se desdobrou em três sistemas didáticos auxiliares, entre eles, dois sistemas didáticos solitários, para responder à questão derivada

Q₂: Quais totalidades de quantidades são representada pelas letras (O, I, V, A e Z) no sistema de numeração dos Et's?

De outro modo, houve uma partição de $FI_2 = FI'_2 \cup FI''_2 \cup FI'''_2$ em que:

$$FI'_2 = \{fi_6, fi_7, fi_{10}\}; FI''_2 = \{fi_9\}; FI'''_2 = \{fi_8\}$$

Instituiu três sistemas didáticos auxiliares que são aqui representados por: (1) $S_2(FI'_2, Q_2) \rightarrow R_5 \rightarrow R_6$;

(2) $S_2(FI''_2, Q_2) \rightarrow R_7 \rightarrow R_8$;

(3) $S_2(FI'''_2, Q_2) \rightarrow R_9 \rightarrow R_{10}$

$S_2(FI'_2, Q_2)$ considerou, inicialmente, que o sistema numeração dos Et's poderia ser compreendido a partir do sistema de numeração romano $R^\diamond_2$, por conter as letras I e V.

Após avaliação dessa resposta frente ao texto da situação, ela foi descartada e traduziram as letras O, I, V, A, Z em numerais hindu-arábicos 0, 1, 2, 3 e 4 respectivamente, com ajuda indispensável do texto da situação, chegando a mesma conclusão a esse respeito que o grupo FI_1 . Como segue a fala:

FI₂: *Chegamos na mesma conclusão que o grupo anterior, fizemos primeiramente uma tradução do texto, mas nosso grupo não ficou fechado... não chegamos a um*

senso comum, então... [leu o texto] pertença a um povo parecido com os humanos / boca, V olhos, então nós substituímos as letras, porque para gente são letras como no algarismo romano que são representadas por 7 letras ... para gente.

O $S_2(FI'_2, Q_2)$, no entanto, frente à questão Q_2 põe em dúvida sua resposta, inclusive considerando uma noção possível de ano solar.

FI₂: *Só que tem uma parte que ele diz aqui: “Em meu planeta nós cultivamos grãos e tubérculos como os terráqueos. Em particular, em nosso último ano solar AIOOO, que corresponde ao ano solar cristão da terra de 2000, mas me deu uma curiosidade ... que AIOOO seria 31000, mas eu não sei se tem alguma coisa que antecede ... que diminui como nos algarismos romanos, por exemplo o IX é 9 porque $X - I = 10 - 1 = 9$, ... não sei ... mas faríamos $3 - 1$, então seria 2000, se diminuísse, mas ... posso ter voado ...*

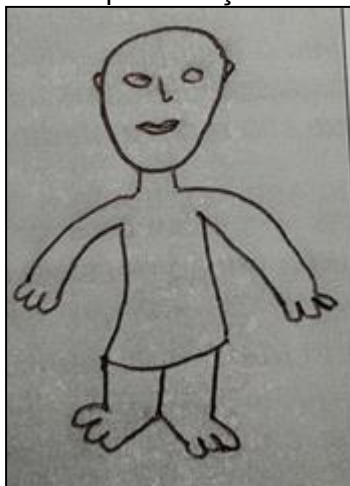
FI₂: *Tem a questão dos planetas que estão mais próximos do sol, O nosso planeta leva 365 dias para dar uma volta e existem outros planetas que estão próximo ao sol e pode ser que esses planetas deem a volta mais rápido porque estão mais próximos.*

FI₂: *Eles vão sempre iniciando e acrescentando, quando chega no 44 ele acrescenta mais um, eles vão sempre substituindo ... por exemplo, quando ele chega no IZZ vai sempre substituindo...*

Em tudo, pareceu que $S_2(FI'_2, Q_2)$ questionou se a resposta R_5 permitia encaminhar uma resposta para Q_2 . Essa nossa interpretação foi ratificada observando o interesse de $S_2(FI'_2, Q_2)$ em “decifrar” o sistema de numeração dos Et's, começando com a simples substituição das letras em AIOOO, por algarismos hindu-arábicos correspondente, para obter 31000. Mesmo após já terem interpretadas as totalidades de quantidades com numerais hindu-arábicos, sem sucesso, em relação com as letras usadas pelos Et's.

A partir da “tradução” de letras em algarismos hindu-arábico em suposta consonância com o descrito no texto, FI'_2 propôs a resposta R_5 que permitiu encaminhar a resposta R_6 (fig. 30), que identificamos aqui esquematicamente por:

$$S_2(FI'_2, Q_2) \rightarrow R_5 \rightarrow R_6$$

Figura 30: Representação do Et de FI'₂

Fonte: Arquivo de pesquisa (2020)

No entanto, a resposta R₅ não foi consenso em FI₂, como revelou FI₂ e, especificamente, a fala seguinte:

FI₂: *Eu partir do pressuposto que eles são só parecidos, e que parecidos não são iguais e assim fiz ... iniciei igual aos colegas: I = 1, V = 2, Z = 4, A = 3 e O = 0, então como eu não tenho a base de um texto, ou de outra coisa, identifiquei que dessa forma podemos organizar como nos números naturais.*

No caso, o sistema didático auxiliar S₂(FI''₂, Q₂) interpretou as letras em algarismos hindu – arábico de modo diferenciado dos sistemas didáticos anteriores, fazendo uma relação entre os números naturais e as letras tomadas em ordem de presença no alfabeto, que implicou na sequência A = 0, I = 1, O = 2, V = 3, Z = 4. Esta relação foi tomada como a resposta R₇ que deriva a resposta R₈.

A resposta R₇ é distinta da resposta R₅ e levou FI₂ ao desenho pictórico com três olhos, três dedos, sem pelos, uma boca e quatro membros.

R₇ → R₈

Figura 31: Resposta R₈

Fonte: Arquivo de pesquisa (2020)

No entanto, o sistema principal $S_1(FI, D, Z_1)$, como fez FI_2 quando questionou sua resposta R₇ a partir do confronto da resposta derivada R₈ com o texto da situação, no sentido de que a imagem dos Et's deveria ser parecida com os humanos e não com a R₈.

***FI₂:** Assim... o que nós, do próprio grupo dele, discutimos o ponto que ele fala ... “mas me diferencio por possuir apenas ...” ou seja, o que o diferenciou foi que ele citou as diferenças, foi apenas isso, ou seja, ele possui uma boca, que nós possuímos dois olhos, então foi a partir do texto ... somos parecidos com os humanos V olhos, 1 boca como os humanos e a palavra como pra mim significa igual o que os torna apenas parecidos e não iguais, apenas 3 dedos e não possui pelos, então a nossa discussão girou em torno dessa ideia, mas o colega fi_8 pensou diferente.*

De outro modo, o sistema didático auxiliar $S_2(FI''_2, Q_2)$ produziu a resposta R₉ que ratificou a resposta R₅, que é diferente de R₇, mas encaminhou uma resposta pictórica R₁₀ que consistia em uma figura não humana, mais precisamente, de um animal de quatro patas.

***FI₂:** Mas pode ser um animal de 4 patas ...*

Precisamente, a resposta R₁₀ proposta por FI_2 a partir de sua resposta R₉ é um animal (figura 32).

R₉ → R₁₀

Figura 32: Resposta R₁₀

Fonte: Arquivo da pesquisa (2020)

No entanto, FI₂ questiona:

FI₂: *É um povo parecido com os humanos, ... eles não são um povo.*

De onde deriva a questão.

D: Q₃: *Animais são um povo?*

Considerando que a figura do animal não estava de acordo com o texto da situação, pois um animal não poderia ser um povo. Esse entendimento foi ratificado por FI₅, após ele consultar na obra $\mathcal{O}_1$ site <https://pt.wikiquote.org/wiki/Povo> disponível no Google em 31/08/2018.

FI₂: *Professora no google diz que povo é uma coletividade de seres humanos.*

Após solicitação pelo diretor, a classe decidiu que a resposta R₁₀ devia ser rejeitada como indicam as falas seguintes:

D: *Então todos concordam que o animal deve ser desconsiderado do problema?*

FI: *Simmmmmm!!!*

Em sequência, a resposta R₇ foi novamente posta à prova e foi rejeitada por FI₃.

FI₂: *Eu até concordo como falei pra ele agora, da maneira como ele representou as letras, ele fez a substituição e “organizou” as letras em ordem alfabética A, I, O, V, Z, fez a substituição A = 0, I = 1, O = 2, V = 3 E Z = 4, mas se no problema A é dedos então no teu jeito A deveria ser sem dedos e no caso do O, o problema diz que é sem pelos, mas no teu caso O representa 2 pelos.*

A inconsistência entre R₇ e o descrito no texto da situação levou a resposta derivada R₁₀ ser rejeitada após a dialética intergrupo e intragrupo:

FI₁: *Da forma como ele desenhou não está como no texto, ele fez do jeito dele, mas no texto diz que o A = 3 e ele colocou o A = 0 e ele desenhou os dedos ali...*

FI₂: *Por que quando fi₉ organiza as letras e os números ele troca tudo, não está como o texto, ele terá que possui 3 no lugar do A!*

Nesse caso FI₂ assume que não tem mais como refutar contra os argumentos da classe.

FI₂: *Z – I é A?!! Ahhhh entendi! ... Entendi ... derrubou meu conceito!*

FI₂: *Professora estou sem argumentos!!!*

Assim, a resposta R₅ foi tomada como a resposta para a questão Q₂ e que, com indispensável ajuda do texto, encaminhou a resposta R₆ que em composição (R₅, R₆) encaminha a resposta à questão 2₁.

II.2 Síntese do sistema didático S₂(FI₂, 2₁)

A resposta praxeológica de FI₂ pode ser descrita do mesmo modo que a resposta praxeológica de FI₁, embora as construções dessas respostas tenham percursos de estudos, e com isso trajetórias, distintas.

De modo similar ao que ocorreu na apresentação de FI₁, os princípios P1 e P2 se fizeram presentes, P1 foi tomado pela classe de modo naturalizado e P2 com alguma estranheza quando compararam as totalidades de quantidades simples do sistema dos Et's com a do sistema de numeração usual.

Durante as apresentações de FI₂ houve movimentação de dialéticas, inter e intragrupos, que levaram a classe ao encontro com os objetos não matemáticos a partir do texto da situação, como são exemplificados nas falas seguintes:

FI₂ e FI₁: *Ano solar - Tem a questão dos planetas que estão mais próximos do sol, O nosso planeta leva 365 dias para dar uma volta e existem outros planetas que estão próximo ao sol e pode ser que esses planetas deem a volta mais rápido porque estão mais próximos, ou seja, ano solar.*

FI₁ e D: *Cultivo de grãos e tubérculos, plantas*

FI₁: *Ano solar cristão - A questão do ano solar cristão com a religião, ele passa por esse lado...*

FI₁: *Eles precisam para poder cultivar, precisam ter as mesmas condições.*

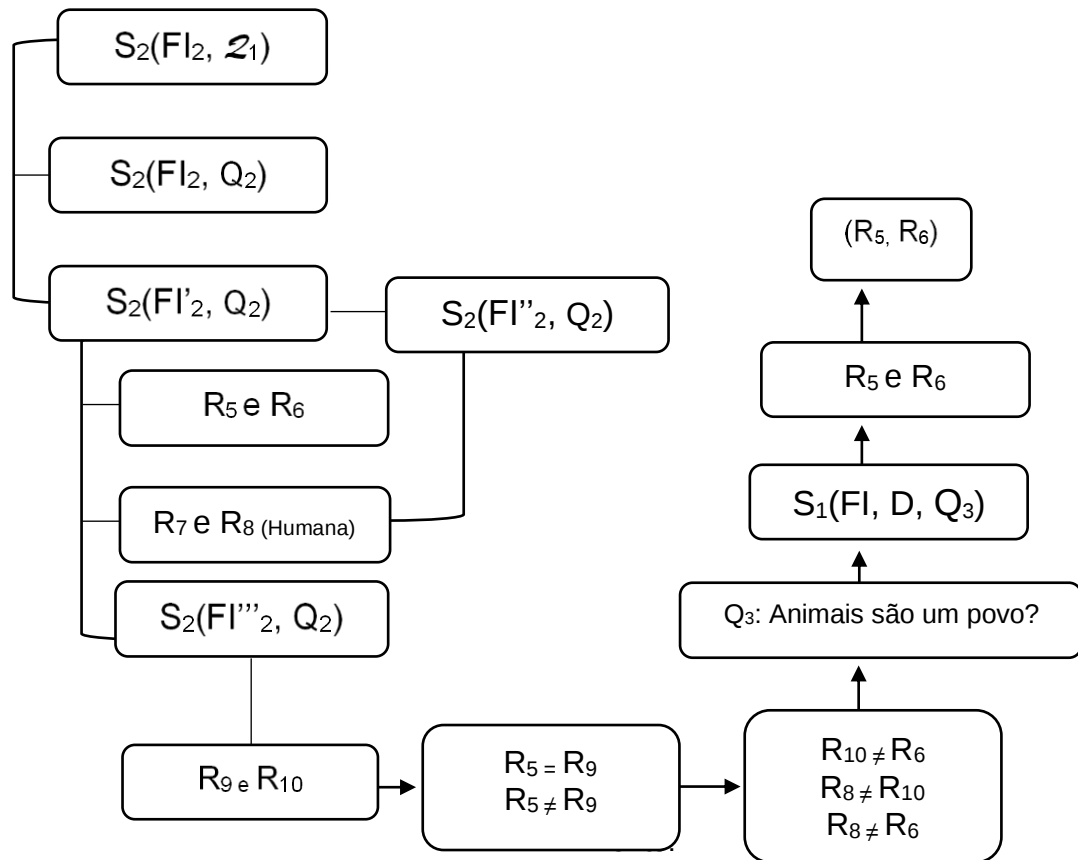
FI₃: *Membros - [...] os números precisam estar relacionados com as letras nós colocamos 2 membros superiores e inferiores 2 porque queríamos chegar no 2 do 2000, vimos que todos os colegas colocaram 4 membros, nós sabíamos que são 4 membros [...]*

Destacamos das discussões que o ano solar cristão passou a fazer parte do percurso de estudo como uma questão de diferença entre o tempo dos terráqueos e o tempo do Et's, em particular, manifestado por FI₄, quando em debate da apresentação do FI₂.

FI₄: Bem eu, professora fiz uma leitura diferente... “Em meu planeta nós cultivamos grãos e tubérculos como os terráqueos. Em particular, em nosso último ano solar AIOOO, que corresponde ao ano solar cristão da terra de 2000, obtivemos a seguinte produção ... o meu pensamento foi o seguinte eu fui atrás do que significa ano solar cristão, não encontrei, mas fui novamente no google e quando eu procurei ano solar eu encontrei, encontrei na perspectiva da Era Cristã, aquela contagem que começou em depois da morte de Cristo conhecida como era D. Quando começou os colegas começaram a questionar, eu tive outro pensamento, pensei o seguinte: a atividade frisa muito no ano solar cristão da terra de 2000, ou seja, para a gente pensar em 2000 e pensando neste ano lembro que foi um ano que marcou, tivemos muitas incertezas, que o mundo ia acabar, porque era o fechamento do milênio e o começo de uma nova contagem, esse foi meu entendimento, tal qual os dos grupos, ... Quando começou os questionamento na sala de A vem de Z menos 1, que equivale a esse 31000, que 1 é uma boca e o O é zero, eu comecei a pensar o seguinte, relacionar o ano solar cristão ao nosso, significa disser que o ano solar cristão tem 12 meses, essa data aqui tem algum marco de importância quando vou relacionar com a produção, se a gente fizer com essa contagem obedecendo essa ordem numérica aqui para produção vamos observar que neste ano eles produziram mais mandioca do que grãos, nós fizemos a conta não foi fi₂₃? Se a gente fizer a conta levando em consideração esse sistema de numeração para substituir vamos perceber que nesse ano especial eles produziram muito mais... Então fizemos o quadro...

A síntese aqui considerada encaminha a trajetória, ou recorte do percurso de estudo e investigação, que leva à resposta R₆ representada na figura 30 para a questão 2₁, e que é por nós interpretada esquematicamente do seguinte modo:

$$S_2(FI_2, 2_1) \rightarrow R_5 \rightarrow R_6$$

Figura 33: Trajetória do percurso do Fl_2 

Fonte: Próprio autor (2020)

Onde:

 Z_1 : Qual seria uma provável aparência física desse povo? Q_2 : Quais totalidades de quantidades são representadas pelas letras (O, I, V, A e Z) no sistema de numeração dos Et's? Q_3 : Animais são um povo?**III. Encaminhamento do sistema didático $S_3(Fl_3, Z_1)$**

O grupo $Fl_3 = \{fi_{11}, fi_{12}, fi_{13}, fi_{14}, fi_{15}\}$ institui o sistema didático $S_3(Fl_3, Z_1)$ para o enfrentamento da questão Z_1 .

Como ocorreu com os grupos anteriores, Fl_3 derivou uma questão de Z_1 , especificamente: Q_4 : *Quais algarismos árabes correspondem a cada quantidade?*

Fl₃ interpretou as letras do sistema de numeração dos Et's como numerais hindu-arábicos de modo similar ao interpretado pelos grupos anteriores, Fl₁ e Fl₂, mas houve posições intragrupos não consensuais, frente ao número de membros de um corpo humano, precisamente, o qual considerou as hipóteses de o corpo humano possuir dois e a de possuir quatro membros. Essas hipóteses levavam a diferentes respostas pictóricas.

III.1. Trajetória da difusão e defesa das respostas praxeológicas do S₃(Fl₃, 2₁)

A trajetória do sistema didático S₃(Fl₃, 2₁) derivou de dois sistemas didáticos auxiliares a partir da partição de Fl₃=Fl'₃ U Fl''₃, sendo Fl'₃ = {fi₁₁, fi₁₂, fi₁₃, fi₁₅} e Fl''₃ = {fi₁₄}, assim representados:

$$(1) S_3(Fl'_3, Q_4) \rightarrow R_{11} \rightarrow R_{12}$$

$$(2) S_3(Fl''_3, Q_4) \rightarrow R_{13} \rightarrow R_{14}$$

Os diálogos transcritos abaixo revelam o desdobramento do grupo Fl₃ para encontrar uma resposta.

Fl₃: *Vamos relacionar as letras I = 1, V = 2, consideramos somente dois membros Z = 2, 0 = 0 e Z - I = 2 - 1 = 1. Para a gente chegar aqui foi uma “viagem” relacionamos com o ano solar 2000, fizemos outra representação a partir da relação das letras com os números.*

O S₃(Fl'₃, Q₄) compreendeu o texto do mesmo modo que o grupo Fl₁, nesse caso, o corpo é formado por 4 membros, como mostra a fala seguinte:

Fl₃: *Bem eu não concordei com meu grupo, porque a minha teoria tem a mesma ideia do 1º grupo, mas como por democracia a maioria queria que fossem 2 membros, ... então ficou, eu fui vencida, mas continuo com a convicção que eles possuem 3 dedos, 1 boca, 2 olhos, 1 nariz, então como fui minoria eles representaram o Et assim ... com 1 dedo, 1 boca, ...*

O sistema didático auxiliar S₃(Fl'₃, Q₄), no entanto, queria assegurar a hipótese de dois membros considerando que justificaria o ano solar e que poderiam responder 2₂ a partir de sua resposta para 2₁ que relaciona os anos 2000 e 31000, como retrata a seguinte fala:

Fl₃: *Professora nós levamos em conta e nos preocupamos de saber o quanto valiam as letras, então como ele diz que o ano solar equivale a AIOOO que equivale o mesmo ano solar que o nosso 2000, então a gente sabia ... nossa colega do grupo propôs que fossem 4 membros, mas para gente chegar neste valor de 2000 aqui os*

números precisam estar relacionados com as letras nós colocamos 2 membros superiores e inferiores 2 porque queríamos chegar no 2 do 2000, vimos que todos os colegas colocaram 4 membros, nós sabíamos que são 4 membros, em um momento até pensamos em colocar, mas a gente se preocupou na representação mesmo no 2000, que a soma desses dois aqui $(1 + 1)$ daria 2.

FI₃: Acho que isso é um problema de linguagem matemática então...se ele diz que é parecido então pensamos que poderia ser com dois membros não que a gente não tenha pensado em colocar os 4 membros, mas focamos no 2000.

Nesse caminhar, a interpretação das letras para os algarismos hindu-arábicos levou à resposta R₁₁ em que a sequência O, I, V, A e Z foi “traduzida” por 0,1,2,1,2 que os levou à interpretação, a qual julgamos estranha, do registro AIOOO ser representado por 11000, como deixa clara as falas:

FI₃: O ano solar dele é AIOOO para fazer 2000 fizemos A vale 1, o I vale 1 e O vale 0 então fica assim 11000, então esse seria o 2000, mas pra gente representar o A nós fizemos uma comparação.

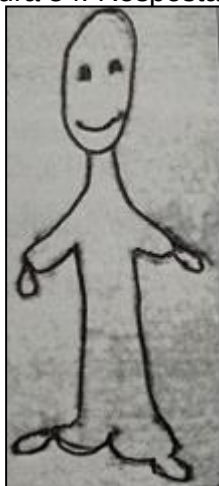
FI₃: Pela leitura do $A = Z - I$, consideramos isso ... por isso teríamos essa representação 11000.

Pareceu que o modo de pensar de FI₃ se deu assumindo que se $I = 1$ e $Z = 2$ (números de membros) então $A = 1$ o que o leva a interpretar AIOOO como 11000, desde que $2000 = (1+1)000 = (AI)000 = (II)000 = 11000$. De outro modo, FI₃ estava assumindo a hipótese da estrutura do sistema de numeração dos Et's, que seria um sistema de numeração aditivo com símbolos numerais usuais.

A partir da resposta R₁₁, o sistema $S_3(FI'_3, \mathcal{Z}_1)$ construiu a resposta R₁₂, esquematicamente assim representada:

$$S_3(FI'_3, \mathcal{Z}_1) \rightarrow S_3(FI'_3, Q_4) \rightarrow R_{11} \rightarrow R_{12}$$

Figura 34: Resposta R₁₂



Fonte: Arquivo da pesquisa (2020)

Podemos interpretar que o sistema $S_3(FI'_3, Q_4)$ assumiu que a estrutura de numeração dos Et's possuía características de um sistema de numeração aditivo e, com a hipótese de o corpo humano ter somente dois membros, permitiria relacionar a resposta R_{11} como o numeral 11000 e este com o numeral usual 2000.

Nos parece que houve a necessidade de assumirem a hipótese de que o corpo humano possuía dois membros para tornar possível fazer a relação que vislumbraram de um sistema de numeração do tipo romano híbrido com o sistema de numeração usual (SND).

FI₃: Professora nós consideramos dois membros, como uma estratégia ...

No entanto, essa resposta foi questionada em discussão intergrupos quando posta à prova.

FI₁: Mas não são parecidos com os humanos?

FI₁: Sim, mas nós consideramos só dois...

FI₁: Mas ... não pode!

D: Então vamos fazer o seguinte, alguém por favor consulte na internet Q₅: Quantos membros o corpo humano é formado?

FI₃: Pesquisando no google, O₂ o corpo humano é dividido em três partes fundamentais: cabeça, tronco e membros. Dessa maneira, a cabeça é formada pelo crânio e a face; o tronco é composto do tórax e do abdômen; e, por fim, os membros são classificados em superiores (braços, antebraços, ombros e mãos) e inferiores (quadril, coxas, pernas e pés)

D: Quantos membros são?

FI₃: Superiores e inferiores ...

FI₃: Nós consideramos 2 foi isso

FI₃: Eu tenho dois questionamentos: 1º) referente a representação com a questão dos membros, pela lógica não deveria ser assim, para representar ... não deveria por que a letra V representa um número e o Z representa outro número, o 2º questionamento é referente ao ano, pela lógica do nosso sistema numérico e da matemática não deveria fazer a operação porque deveria ter um parêntese, uma forma algébrica ...

As falas não acatam a resposta R_{11} por esta não estar em conformidade com o texto da situação. Isso levou a classe [FI, D] a instalar um breve sistema didático auxiliar $S_1(FI, D, Q_5)$, cuja resposta R_{15} indica que o corpo humano tem quatro membros.

FI₃: *Ok professora então precisamos corrigir a questão dos membros que realmente são 4...e a questão de 1+1000 realmente precisa ser revisto.*

FI₃: *Professora realmente se está amarrado no texto então os membros são 4 mesmo e não 2, então vamos mudar aqui.*

FI₃: *Professora estou questionando o 1 + 1000, isso ai é 1001 e não 2000 como eles estão falando...*

A fala que questiona 1 + 1000 faz a relação com o processo de quantificação de totalidades relacionando ao sistema de numeração usual, mas outros FI não têm a mesma clareza, podemos ver nas falas abaixo.

FI₃: *Professora só uma pergunta... o sistema que está no problema é decimal?*

FI₁: *Não, não, não é decimal. O sistema deles não é decimal*

FI₁: *Não!!! Não é decimal, não é porque 31000 quando terminar mais um ano ele vai passar para AIOOI e quando o for Z será maior número que ele tem então o O vai se mudar, passará a ser I ...*

D: *Lanço a pergunta para a turma, esse sistema é decimal?*

FI: *Não!!!*

FI₁: *Eu sei porque quer dizer que os meses vão até 44 dias, não tem 45, porque não tem o 5 então vai para 1 ano a contagem vá até 4 quando chega aqui no final AIOOO que o O representa 0 pra modificar, o que representa 1 ano ele vai cair, que é 1 e 1 ano deles representa 4 meses por que não tem números maiores que 4.*

FI₁: *Vamos ler o problema: Em meu planeta nós cultivamos grãos e tubérculos como os terráqueos. Em particular, em nosso último ano solar AIOOO, que corresponde ao ano solar cristão da terra de 2000, obtive a seguinte produção”, ou seja, as 3 produções são feita em 1ano correspondente ao ano de 2000 se a gente transformar o AIOOO e a gente descobrir quanto equivale esse número a gente vai ter uma ideia de produção anual deles então não tem o que argumentar se são infinitos, se são finitos.*

As interpretações dos FI os levaram a ratificar suas respostas anteriores sobre o modo de relacionar os numerais hindu-arábicos com as partes do corpo dos Et's, como expressa a fala.

FI₃: *A questão do 1 + 1000 tá errado, então nos equivocamos, então vai ficar assim AIOOO será 31000.*

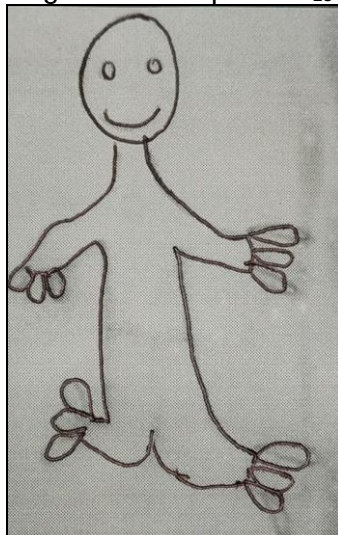
De outro modo, essa fala ratifica as respostas do sistema didático auxiliar $S_3(FI''_3, \mathcal{Z}_1)$ expresso na fala a seguir:

FI₃: *Bem eu não concordei com meu grupo, porque a minha teoria tem a mesma ideia do 1º grupo, mas como por democracia a maioria queria que fossem 2 membros, ... então ficou, eu fui vencida, mas continuo com a convicção que eles*

possuem 3 dedos, 1 boca, 2 olhos, 1 nariz, então como fui minoria eles representaram o Et assim ... com 1 dedo, 1 boca.

Esse sistema auxiliar produziu a resposta e, R_{13} e R_{14} ratificaram as respostas anteriores do tipo R_5 e R_6 , respectivamente, obtidas pelos grupos anteriores.

Figura 35: Resposta R_{15}



Fonte: Arquivo de pesquisa (2020)

O sistema didático principal $S_1(FI, D, Q_5)$ ratificou a resposta praxeológica de $S_3(FI''_3, \mathcal{Z}_1)$ como a resposta do sistema didático $S_3(FI_3, \mathcal{Z}_1)$. Essa resposta é do mesmo tipo ratificado pelos grupos anteriores, em particular, similar à resposta praxeológica de $S_1(FI_1, \mathcal{Z}_1)$, embora apresentassem distinções entre si quanto aos percursos de estudos e investigações.

III.2 Síntese da sessão – Encontros e encaminhamentos $S_3(FI_3, \mathcal{Z}_1)$

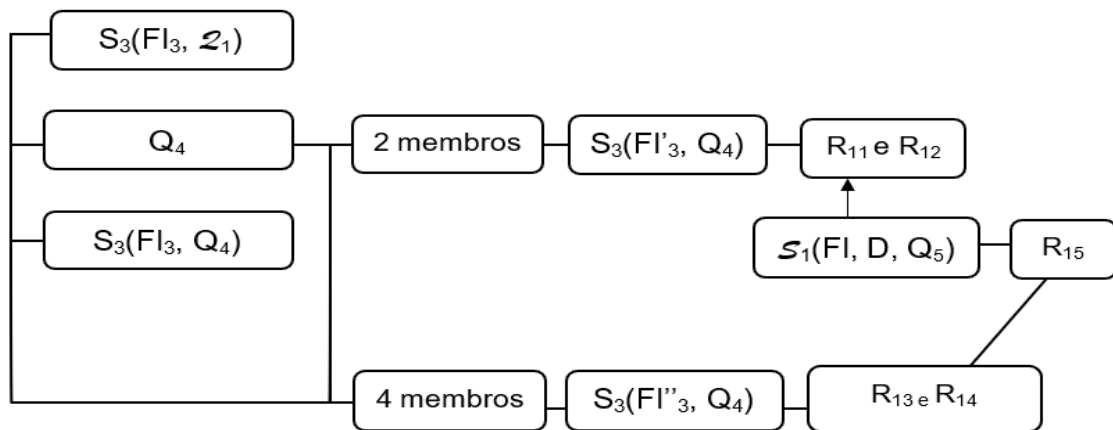
Os diálogos descritos revelaram a busca não anunciada de uma possível estrutura do sistema de numeração dos Et's e, em particular, que há o desconhecimento de FI sobre a estrutura de sistemas de numeração posicionais. O uso rotineiro de totalidades físicas por FI_3 na constituição corporal do Et por meio dos numerais hindu-arábicos demonstrou os princípios P1 e P2 como saberes naturalizados.

Em resumo, as dialéticas nos encaminharam às validações das hipóteses de naturalização (ITZCOVICH, 2010; TERIGI E WOLMAN, 2007) e de desconhecimento da estrutura do SND (RIPOLL, RANGEL E GIRALDO, 2016). Isso pôde ser observado nas dialéticas entre os membros de FI quando não esboçaram percepções sobre a complexidade que esse sistema é dotado. Pareceu que a naturalização embaçou a estrutura do SND deixando-a invisível para FI.

A trajetória obtida como um recorte do percurso, frente ao MER, em particular sobre P1 e P2, e das hipóteses teóricas de naturalização e desconhecimento da estrutura do SND, que leva à resposta (R_{13} , R_{14}) pode ser interpretada, esquematicamente, do seguinte modo:

$$S_3(FI''_3, \mathcal{Z}_1) \rightarrow S_3(FI''_3, Q_4) \rightarrow [S_1(FI, D, Q_5) \rightarrow R_{15}] \rightarrow R_{13} \rightarrow R_{14}$$

Figura 36: Trajetória do percurso do FI₃



Fonte: Próprio autor (2020)

IV. Encaminhamento do sistema didático $S_4(FI_4, \mathcal{Z}_1)$

IV.1 Trajetória da difusão e defesa das respostas praxeológicas do $S_4(FI_4, \mathcal{Z}_1)$

O sistema didático representado por $FI_4 = \{fi_{16}, fi_{17}, fi_{18}, fi_{19}, fi_{20}\}$, frente à questão $\mathcal{Z}_1$, constituiu o sistema didático $S_4(FI_4, \mathcal{Z}_1)$ para construir uma resposta.

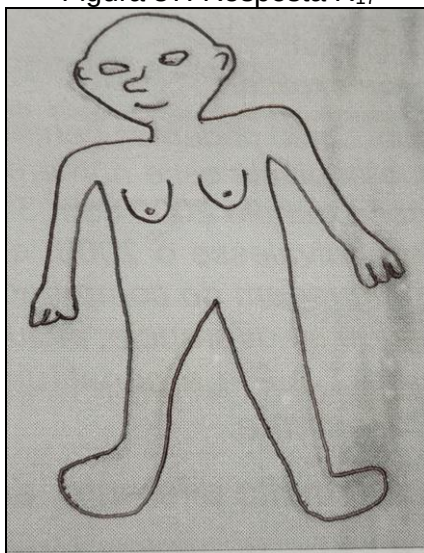
Esse sistema didático fez emergir a questão Q_6 : *Quais os algarismos hindu-árabicos correspondem cada letra?* E ratificou as respostas de cada grupo anterior

do tipo (R_3 , R_4) quando apresenta suas respostas R_{16} e R_{17} similar as respostas até então validadas pela classe [FI, D], embora destaque que pensou diferente.

$$R_{16} \rightarrow R_{17}$$

$$R_{16} = (O = 0; I = 1; V = 2; A = 3; Z = 4)$$

Figura 37: Resposta R_{17}



Fonte: Arquivo de pesquisa (2020)

$S_4(FI_4, \mathcal{Z}_1)$, em suas dialéticas fez emergir a questão Q_7 : *O que é ano solar cristão?* derivada do interesse desse sistema didático em validar a possível resposta à $\mathcal{Z}_1$ frente à necessidade de propor, a partir dela, respostas para as questões $\mathcal{Z}_2$ e $\mathcal{Z}_3$ que a seguem no texto da situação, como podemos depreender das seguintes dialéticas que observam os princípios da dúvida e ignorância metódica:

FI₄: *Bem eu, professora fiz uma leitura diferente... “Em meu planeta nós cultivamos grãos e tubérculos como os terráqueos. Em particular, em nosso último ano solar AIOOO, que corresponde ao ano solar cristão da terra de 2000, obtivemos a seguinte produção ... o meu pensamento foi o seguinte eu fui atrás do que significa ano solar cristão, não encontrei, mas fui novamente no Google e quando eu procurei ano solar eu encontrei, encontrei na perspectiva da Era Cristã, aquela contagem que começou depois da morte de Cristo, conhecida como era D.*

FI₄: *Quando os colegas começaram a questionar, eu tive outro pensamento. Pensei o seguinte: a atividade frisa muito no ano solar cristão da terra de 2000, ou seja, para a gente pensar em 2000 e, pensando neste ano, lembro que foi um ano que marcou, tivemos muitas incertezas, que o mundo ia acabar, porque era o fechamento do milênio e o começo de uma nova contagem, esse foi meu entendimento, tal qual os dos grupos, ... Quando começou os questionamento na sala de A vem de Z menos 1, que equivale a esse 31000, que 1 é uma boca e o O é*

zero, eu comecei a pensar o seguinte, relacionar o ano solar cristão ao nosso, significa dizer que o ano solar cristão tem 12 meses, essa data aqui tem algum marco de importância quando vou relacionar com a produção, se a gente fizer com essa contagem obedecendo essa ordem numérica aqui para produção, vamos observar que neste ano eles produziram mais mandioca do que grãos, nós fizemos a conta não foi fi_{23} ? Se a gente fizer a conta levando em consideração esse sistema de numeração para substituir vamos perceber que nesse ano especial eles produziram muito mais... Então fizemos o quadro...

D: Fizeram o quadro?

FI₄: Sim, mas não dá pra fazer

D: Não dá por que?

FI₄: Por que não dá

FI₄: Não tem como ... vou explicar

FI₄: Porque raciocinando ... não podemos pensar como sistema decimal, então eu não tenho como saber o que equivale esse número 31000 ... e como vamos supor se eu tivesse que equivaler por exemplo 2000 com 31000 no planeta dele ... só se fosse no SND e no planeta dele equivalesse o 2000, eu lembrei do sistema binário que tem outra representação, a linguagem do computador, por exemplo, que funciona através do sistema binário e daí que se diferencia, inclusive do nosso, por que o nosso a gente enxerga a constituição de 1 a 9 e a constituição do 0 para formar o nosso sistema decimal e o deles é outro sistema.

D: Já que você falou, que é muito diferente, então qual a diferença?

FI₄: Só se trabalha com 2 números, com duas representatividades que é o zero e o 1, zero e 1, zero e 1, aquilo dá uma representação para um determinado número, eu não tive tempo de pensar nesta representatividade, no funcionamento deste mecanismo, desse número não tenho condições [...] preciso pensar mais e pesquisar.

FI₃: Professora então tá tudo errado! Ah!!!!

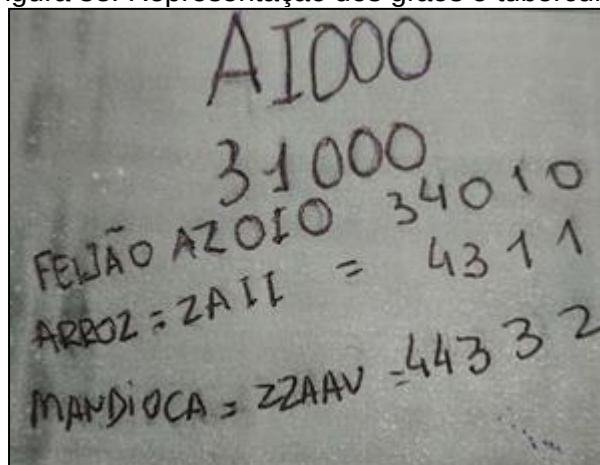
D: Não, não, não tem nada errado! Agora que vai começar.... porque ele percebeu que havia algo a mais, que para avançar precisa de novos elementos que o ajude a pensar e fortalecer seus argumentos para então, apresentar. Toda discussão até agora foi excelente, se não tivesse sido tão boa, ele chegaria aqui e apresentaria ideias superficiais e se dava por satisfeito. Vocês fizeram as substituições das produções? Então nos apresentem por favor.

FI₃: Quando nós fizemos apenas substituímos as letras pelos números....

D: Certo então faça isso porque em cima disso surgirão outras questões que nos levarão ao caminho das pedras...

FI₃: Então fica...

Figura 38: Representação dos grãos e tubérculos



Fonte: Arquivo de pesquisa (2020)

D: Verifiquem se está de acordo com de vocês ...

FI₄: Vejam só, 4 não necessariamente é 4 isso é um código... do que é o 4 ...

FI₃: Q₈: Então isso é sistema binário?

FI₄: Não, não. É outro

D: Então explica pra eles por que não é binário

FI₄: Porque binário são só dois 0 e 1, então por isso não é, é um sistema com 4 possibilidades, não é isso?

FI₁: Cinco, cinco possibilidades

FI₄: R₁₈: É um sistema quinário!

FI₁: Muito bom isso aí cara!

D: Pra gente encerrar, essa seria então a representação da produção desse povo né isso? sim ou não?

FI: Sim!!!

FI₁: É bom dá esse destaque!

D: Q₉: Então está representação que nos foi apresentada aqui são os mesmos da Terra?

FI: Não!!

D: Por que? O que os diferenciam?

FI₄: R₁₉: Um é sistema quinário, o outro é decimal

D: Quinário por que?

FI₂: Porque tem somente 5 representações

D: Então o que eles faziam com essas representações?

FI₃: Eles combinavam ordem

D: E o que é essa organização de ordens?

FI₁: Acho que é o tempo dessas produções

FI₁: Faziam a construção de outros números, pela subtração

D: O que é quantidade?

FI₁: Tipo assim ... a soma nesse caso envolveria as operações nós temos uma quantidade de numerações, e a partir delas se faz a construção de maiores quantidades.

D: E o que é isso?

FI₃: São os números?.... códigos?

D: Então o que são códigos?

FI₄: Como no sistema de algarismo romano ele trabalha o V representa o 5 o I representa o 1 então precisamos enxergar nisso para poder valer os números temos que encontrar....

D: Percebo que vcs precisam de algo a mais precisam pesquisar, obras significam todos os meios de pesquisas.

FI₄: Eu pensei que eu só vou conseguir responder isso se eu rever os sistemas binários.

O encontro com o sistema de numeração binário como condição necessária para responder às próximas questões do texto da situação postulado por $S_4(FI_4, Q_1)$ encaminhou à classe [FI, D] ao estudo da obra sobre sistema binário de numeração para o seguimento do processo de investigação.

D: Então vamos pesquisar algumas coisas? Dever de casa:

FI₃: Q₁₀: Precisamos pesquisar o que são numeros professora, que não são letras, de onde surgiu? porque são os números que estamos acostumados a usar...

D: Pois é, mas será que as letras não trazem nenhum sentido? É assim que vamos ver. Vamos pensar em 2 questões e discuti-las na próxima aula.

Q₁₁: Qual a relação das letras com os símbolos?

Q₁₂: Que relação o povo romano tem a ver com a representação dos Et's?

IV.2 Síntese da sessão – Encontros e encaminhamentos $S_4(FI_4, Q_6)$

Em resumo, $S_4(FI_4, Q_6)$ encontrou uma noção sobre ano solar cristão e, a partir dessa noção, levantou as hipóteses sobre a estrutura do sistema de numeração dos Et's frente à validação da resposta R_{16} . Especificamente, esse sistema observou, após uma série de questionamentos e respostas intergrupos, que a estrutura do sistema de numeração dos Et's podia ser do tipo do sistema de numeração binário e, então, chamou-o de sistema quinário por possuir cinco

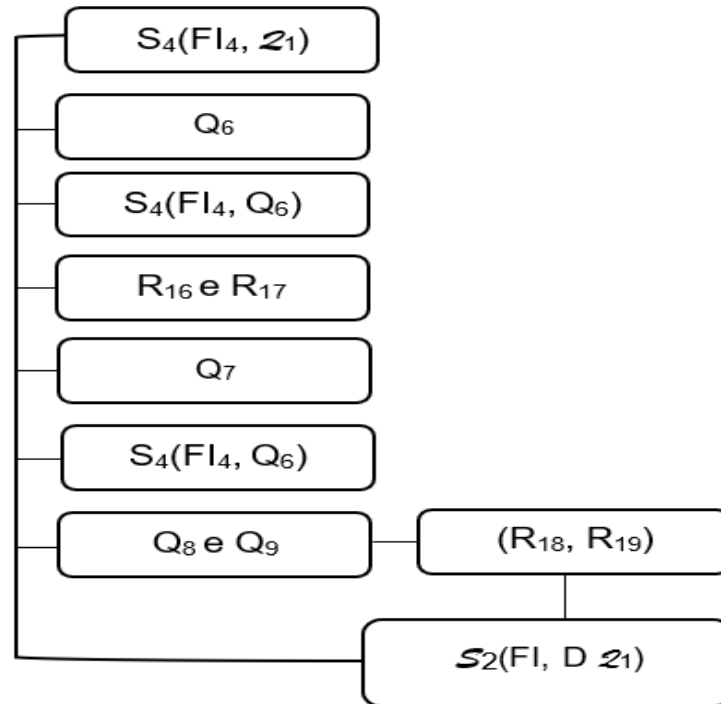
representações de quantidades que poderiam permitir representar quantidades maiores.

O princípio P1 se manifesta de forma naturalizada na resposta pictórica, mas o princípio P2 parece se fazer presente de forma objetiva, ainda que não seja explicitamente difundido intergrupos.

S₄(FI₄, Q₆) destaca, em concordância com o sistema didático principal, a necessidade de maiores investigações sobre o desdobramento de tal compreensão e, para isso, encaminha o seguimento do percurso de estudo de investigações para responder às demais questões propostas pela classe em vista de responder às questões constantes no texto da situação.

As hipóteses teóricas sobre a naturalização dos sistemas de numeração, a insuficiente formação matemática dos FI, bem como do desconhecimento da estrutura do SNP são observadas sem dificuldades, principalmente quando nenhuma referência é feita sobre os SNP, mas apenas sobre sistemas posicionais específicos, no caso, o binário e o decimal e de modo não questionado.

A trajetória obtida como um recorte do percurso, frente ao MPR, em particular sobre P1 e P2, e das hipóteses teóricas de naturalização e desconhecimento da estrutura do SND, que levou à resposta composta (R₁₈, R₁₉), que pode ser interpretada, esquematicamente, do seguinte modo:

Figura 39: Trajetória do percurso do FI_4 

Fonte: Próprio autor (2020)

4.2.1.1. A resposta $\mathcal{R}_1$ do sistema didático principal $\mathcal{S}_1(FI, D, \mathcal{Z}_1)$ para a questão $\mathcal{Z}_1$.

O percurso de estudo e investigação que derivou uma resposta $\mathcal{R}_1$ para a questão $\mathcal{Z}_1$ e apontou encaminhamentos para as demais questões que remetem ao texto da situação investigada, ela se desenvolveu em duas fases: uma intragrupo, realizada fora da sala de aula, sem participação do diretor de estudo, constituindo sistemas didáticos auxiliares $S_k(FI_k, \mathcal{Z}_1)$ e outra, no interior da sala de aula, reconstituindo o sistema didático principal $\mathcal{S}_1(FI, D, \mathcal{Z}_1)$ para a realização da tarefa de difusão e defesa das respostas construídas na primeira fase.

Essa segunda fase se desenvolveu a partir dos cinco gestos de uma verdadeira pesquisa, referida por Chevallard (2013a), considerando que foram observadas diferentes respostas, todas analisadas e avaliadas intergrupos, com ajuda do diretor de pesquisa, que lhes permitiu ratificar, retificar ou rejeitar essas respostas, sempre em observância dos princípios da dúvida e ignorância metódica.

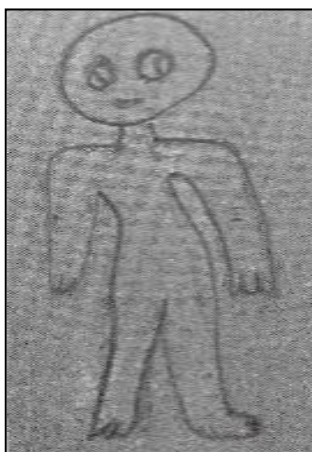
De outro modo, a difusão e defesa das respostas apresentadas por cada grupo, quando interpretadas como o gesto H_5 , pareceu envolver de modo espontâneo os demais gestos da pesquisa, H_1 , H_2 , H_3 e H_4 , pelo sistema didático principal $S_1(FI, D, Z_1)$, todos motivados claramente pela atitude dos FI em problematizar, por exemplo, quando os FI questionavam novos objetos encontrados por eles, como o sistema solar, o ano solar cristão e, principalmente, como em consequência, o sistema de numeração binário.

Além disso, os diálogos descritos nos levam observar a busca, não objetivamente anunciada por FI, por uma possível estrutura do sistema de numeração dos Et's. Isso fica evidente a partir da proposição do estudo do sistema binário por parte de um FI, que o tinha em seu equipamento praxeológico, o qual mobilizou discussões intergrupos sobre o registro de numeração binário, somente de 0 e 1, o que nas manifestações dos demais FI, pareceu ser desconhecido ou parcialmente conhecidos por eles, por ignorarem o sistema de numeração posicional como objeto de estudo.

De qualquer modo, os questionamentos que emergiram nos diferentes sistemas didáticos auxiliares, que compuseram o sistema didático principal $S_1(FI, D, Z_1)$, encaminharam os seguintes elementos da resposta R_1 :

1. A interpretação das letras como algarismos hindu-arábicos:
O = 0; I = 1; V = 2; A = 3; Z = 4
2. Figura de um humanoide, como o da figura 40.

Figura 40: Representação do Et por FI₁



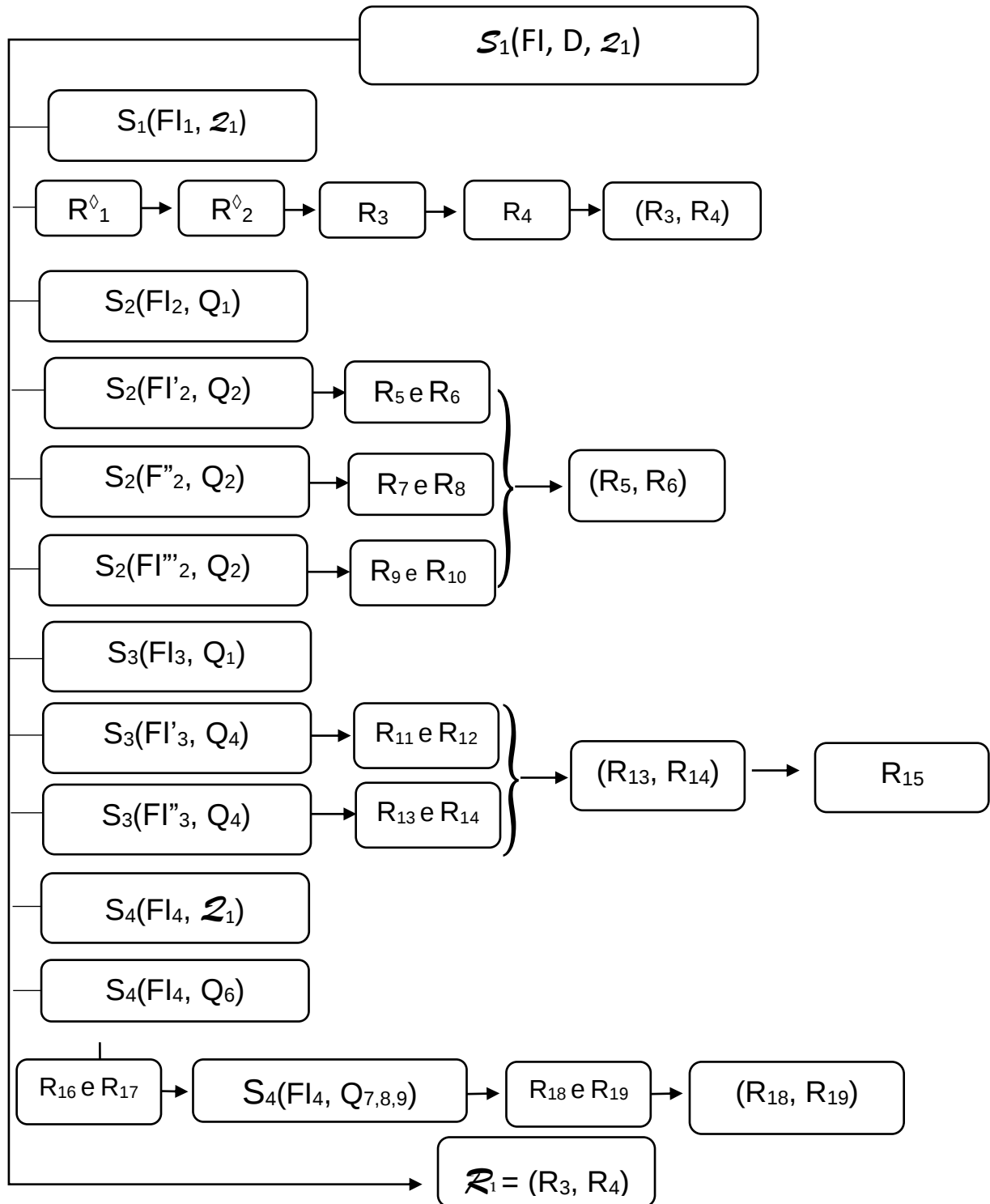
Fonte: Arquivo de pesquisa (2020)

Os números hindu-arábicos ganham importância por traduzir a quantidade das produções de feijão, de arroz, de mandioca, em numerais potencialmente similares aos numerais usuais e que, por isso, podem ter implicações diretas com a estrutura de um possível sistema de numeração dos Et's e que podem permitir estabelecer relações com outros sistemas de numerações, conhecidos ou não por FI, como o sistema binário e, em consequência, o sistema “quinário” proposto, assim denominado por eles.

As totalidades físicas identificadas por FI na constituição corporal dos Et's, com numerais hindu-arábicos, revelaram os princípios P1 e P2 como saberes pré-construídos, no sentido de serem aprendidos sem serem intencionalmente programados para serem ensinados, como saberes naturalizados que, como tais, apontam em direção à hipótese levantada pelos teóricos aqui considerados, por exemplo, Terigi e Wolman (2007), Ripoll, Rangel, Giraldo (2016) e Itzcovich (2010), sobre o sistema decimal ser um saber naturalizado. Isso valida os princípios P1 e P2, proposto do MER, pela direção de estudo, como dispositivo orientador para o diretor de estudo em seu propósito de responder à questão desta pesquisa.

Por conseguinte, podemos afirmar que os diálogos evidenciam o investimento da classe [FI, D] no enfrentamento da questão $\mathcal{Z}_1$ de diferentes modos, inclusive estabelecendo relações entre essa questão e as questões $\mathcal{Z}_2$ e $\mathcal{Z}_3$. Esse olhar mais abrangente permitiu não somente institucionalizar a resposta praxeológica (R_3 , R_4) como a resposta da questão $\mathcal{Z}_1$, como também encaminhar o encontro dessa classe com outro sistema de numeração, no caso, o sistema de numeração binário, que encaminha essa classe a [FI, D] um outro sistema de numeração, denominado por $S_4(FI_4, \mathcal{Z}_1)$ de sistema quinário, como um sistema de numeração similar ao sistema de numeração binário, que orientou o seguimento do percurso de estudos e investigações para responder às questões $\mathcal{Z}_2$ e $\mathcal{Z}_3$, a partir de questionamentos derivados do sistema principal $\mathcal{S}_1(FI, D, \mathcal{Z}_1)$. Como resumo da trajetória da sessão 1 segue a figura abaixo:

Figura 41: Trajetória da sessão 1



Fonte: Próprio autor (2020)

Onde:

 Z_1 : Qual seria a provável aparência física desse povo? Q_1 : Quais algarismos hindu-arábicos correspondem a cada letra?

Q₂: Quais totalidades de quantidades são representadas pelas letras (O, I, V, A, Z) no sistema de numeração dos Et's?

Q₃: Animais são um povo?

Q₄: Quais algarismos arábicos correspondem a cada quantidade?

Q₅: Quantos membros o corpo humano é formado?

Q₆: Quais os algarismos hindu-arábicos correspondem cada letra?

Q₇: O que é ano solar cristão?

Q₈: Então isso é sistema binário?

Q₉: A representação que nos foi apresentada aqui são os mesmos da Terra?

Q₁₀: Precisamos pesquisar o que são números professora, que não são letras, de onde surgiu?

Q₁₁: Qual relação entre as letras e os símbolos?

Q₁₂: Que relação o povo romano tem a ver com a representação dos Et's?

4.2.2 – SESSÃO (S₂)

A sessão 2 foi iniciada pelo sistema didático $S_1 (FI_1, \mathbf{2}_2)$, cujo encaminhamento deu-se a seguir:

I. Encaminhamento do sistema didático $S_1 (FI_1, \mathbf{2}_2)$

A resposta $\mathcal{R}_1$ encontrada pelo sistema didático auxiliar $\mathcal{S}_1 (FI, D, \mathbf{2}_1)$ foi tomada como provisória até que se mostrasse consistente com as respostas $\mathcal{R}_2$ e $\mathcal{R}_3$ para as demais questões $\mathbf{2}_2$ e $\mathbf{2}_3$ que compõem a situação enfrentada e, em particular, pelo sistema didático solitário $\mathcal{S}_N (D, Q_N)$ instituído pelo sistema didático dessa pesquisa de tese $\mathcal{S}_T (D, Q_T)$.

Assim a partir de um novo sistema didático auxiliar $\mathcal{S}_2 (FI, D, \mathbf{2}_2/\mathbf{2}_3)$, em que foram tomadas as questões $\mathbf{2}_2$ e $\mathbf{2}_3$ por supostamente possuírem respostas estreitamente imbricadas, o PEP permaneceu em desenvolvimento com seu duplo

objetivo; de dispositivo metodológico dessa investigação empírica e de dispositivo de formação inicial de professores frente ao SND.

Ante esse duplo objetivo, a direção de estudo D observou que durante o desenvolvimento de $\mathcal{S}_1(\text{FI}, \text{D}, \mathcal{Z}_1)$ os FI recorreram a conhecimentos que podiam ser vistos como manifestações dos saberes presentes no MPR que ajuda a sua orientação sobre ações no desenvolvimento do PEP.

Esses conhecimentos chamaram atenção de D também por estarem relacionados à questão $\mathcal{Z}_2$ e, não menos importante por terem sido movimentados por FI como saberes socioculturais, inclusive como saberes práticos, pertencentes à instituição docente, e, portanto, movimentados em ações incorporadas em organizações de práticas de quantificação.

No sentido de evidenciá-los aos professores em formação FI, D encaminhou a condição em forma dos seguintes questionamentos. Especificamente:

Q₁₀: O Que é código, símbolos e quantidades?

Q₁₁: Qual a relação das letras nos símbolos?

Q₁₂: Que relação entre SNR e a representação dos Et's?

Buscar responder a essas questões, tornou-se então, para D, uma condição de objetivar o PEP no sentido do MPR e, com isso, responder à questão geradora Qg e, em simultaneidade, de promover um percurso de formação inicial aos FI, aqui entendido como a mudança de relações dos FI relativos aos numerais decimais, o que inclui minimizar sua naturalização e o insuficiente equipamento praxeológico dos FI verificados na primeira sessão do PEP.

Nessa sessão, as análises puseram em evidências a trajetória do PEP na perspectiva dos FI em busca de encontrar uma resposta para $\mathcal{Z}_2$. Nesse sentido, somente foi considerado nesta análise, e que resultou na trajetória, os grupos que buscaram responder as questões Q₁₀, Q₁₁ e Q₁₂ em relação às questões $\mathcal{Z}_2$ ou $\mathcal{Z}_3$ e, com isso, criaram condições para encaminharem uma resposta para a questão Qg. Desse modo, consideramos apenas os grupos FI₁, FI₂ e FI₅.

Novos professores em formação inicial passaram a fazer parte do desenvolvimento do PEP nesse seguimento, que resultou novos arranjos dos elementos dos grupos de FI, inclusive com nova partição em um número de partes maior que a partição anterior, mas com cinco professores em formação em cada grupo.

Assim, o sistema didático $S_2(FI, D, \mathcal{Z}_2)$ instituiu os cinco seguintes sistemas didáticos auxiliares:

$S_1(FI_1, \mathcal{Z}_2)$, onde $FI_1 = \{fi_1, fi_2, fi_3, fi_4, fi_5\}$;

$S_2(FI_2, \mathcal{Z}_2)$, onde $FI_2 = \{fi_6, fi_7, fi_8, fi_9, fi_{10}\}$;

$S_3(FI_3, \mathcal{Z}_2)$, onde $FI_3 = \{fi_{11}, fi_{12}, fi_{13}, fi_{14}, fi_{15}\}$;

$S_4(FI_4, \mathcal{Z}_2)$, onde $FI_4 = \{fi_{16}, fi_{17}, fi_{18}, fi_{19}, fi_{20}\}$;

$S_5(FI_5, \mathcal{Z}_2)$, onde $FI_5 = \{fi_{21}, fi_{22}, fi_{23}, fi_{24}, fi_{25}\}$.

Os grupos FI_1 , FI_2 e FI_3 mantiveram-se os mesmos já definidos anteriormente, enquanto FI_4 e FI_5 ganharam novos membros. Os sistemas didáticos constituíram a fase de investigação conduzida pelos FI sem ajuda de D para a produção de questionamentos e respostas que, em segunda fase, são por eles difundidas e defendidas frente ao sistema didático $S_2(FI, D, \mathcal{Z}_2)$.

I.1. Trajetória da difusão e defesa das respostas praxeológicas do $S_1(FI_1, \mathcal{Z}_2)$

O sistema $S_1(FI_1, \mathcal{Z}_2)$ iniciou considerando as questões Q_{10} , Q_{11} e Q_{12} , difundindo suas respostas R_{20} e R_{21} sobre as noções de quantidade e código que remetem à questão Q_{10} . Sobre a primeira noção, difundem que isso requer: identificação de unidades (P1), que há uma relação de correspondência um a um, e também pode ser considerada uma grandeza com quantidades finitas possíveis de serem contadas.

A fala a seguir mostra como o referido sistema encontra esse tipo de resposta a partir do acesso a uma obra $\mathcal{O}_3$ disponível na internet.

FI₁: Resposta R₂₀ – Com relação a quantidade, pesquisamos em $\mathcal{O}_3$: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Quantidade>, que é uma propriedade que existe de magnitude é tudo aquilo que pode ser medido ou contado. Por exemplo aqui tem 4 pincéis, aqui tem uma quantidade que pode se contar 1, 2, 3, 4, tem como contar, por exemplo, tem como definir a quantidade de pincéis, é possível saber a quantidade que tem de alunos em sala, a quantidade de cadernos que tem em sala, a quantidade de carteiras que tem em sala, que é contado isso significa que é possível saber a quantidade de coisas que existem.

A difusão admitiu o poder epistemológico da obra e da mídia, a internet, como garantia de legitimação das respostas apresentadas. A defesa se torna

indispensável, uma vez que a resposta é difundida por assertivas que, como tais, não são discutíveis. A fala a seguir demonstra outra asserção, segue:

FI₁: Resposta R₂₁ - *Vamos conceituar código então... é uma palavra utilizada para nomear um estilo de comunicação composta por símbolos, letras, números e até desenhos com objetivo de transmitir uma mensagem de forma oculta, privada ou íntima, podendo ser compreendida somente por pessoas que conhecem esse código. Então é uma linguagem que nem todos conhecem, depende de cada um que tenha o conhecimento, esse código tem que transmitir uma mensagem.*

Em seguida, esse sistema didático abstraiu, de algum modo, a noção de código para encaminhar os sistemas de numeração como códigos e, com isso difundir a resposta R₂₃, como segue:

FI₁: Resposta R₂₃ - *A última pergunta foi ... Qual a relação que os algarismos romanos tem com a atividade proposta do Et? A gente viu que o código romano, o código de numeração deles aparecem com 7 símbolos, né? o nosso são 5, né? A gente viu que desses 7, existem 3 que não se repetem, não podem se repetir quando estão juntos, porque se estiverem juntos já forma outro, por exemplo: V = 5, no código romano, o L = 50, D = 500 se colocar dois V serão 10 que vira X. Se colocar dois LL ficará 100 que é C não é isso? Se colocar 2 D será 1000 que é M.*

Essa compreensão de sistema de numeração como códigos obtidos por composição de símbolos, segundo regras de manipulação – como as do tipo que não admitem repetição de símbolos – para se referirem às quantidades, pareceu ter motivado o sistema S₁(FI₁, 2₂) ao investir na busca do conhecimento do código dos Et's. A fala supramencionada evidenciou o que afirmamos quando ele se referiu à relação de diferença entre os símbolos usados no SNR e o sistema de numeração dos Et's, com ajuda dos símbolos do SND.

A direção D interpretou que FI₁ buscou caracterizar o sistema dos Et's de modo a deixar menos incerto a distinção entre esse sistema e o SNR e, pareceu que também com o SND. Isso permitiu assegurar uma resposta para a questão Q₁₂.

Pareceu que havia o interesse de FI₁ difundir e defender o SNQ como possível resposta a questão 2₂, embora essa questão estivesse solicitando o provável processo de quantificação usado pelos Et's que os levaram ao sistema de numeração usado por eles. Essa questão não se confunde com a questão que demanda apenas identificar o sistema de numeração usado por eles. As falas, inclusive figuras, a seguir mostram essa difusão.

FI₁: Os Et's usam letras, os romanos também usam números com letras, que é o V, A Z, I, O os números romanos são letras na verdade, e os Et's não, são números...

Fl₁: Isso é parecido com o sistema quinário, acho que é isso, não sei bem dizer, me refiro a questão da posição que um determinado momento da casa tem que voltar e fazer

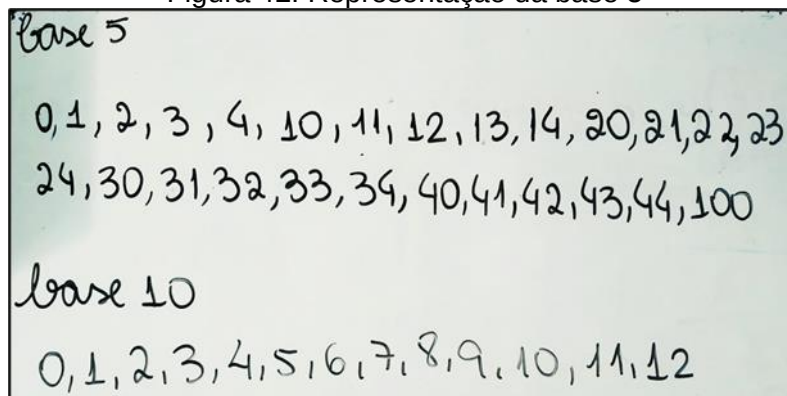
Fl₁: Eu lembrei do quinário... e que na base dez a gente pode fazer a combinação de números na base 5, o que estamos estudando, essa combinação se altera com a questão da posição.

A defesa de Fl₁ demandou o uso do quadro branco (figura 42) para evidenciar uma suposta relação entre o SND e o sistema quinário, daqui em diante representado por SNQ.

As falas encaminham uma resposta R₂₂, estreitamente relacionada a R₂₃, para a questão Q₁₁.

Fl₁: **Resposta R₂₂:** Essa é a base quinária ... Então vai ficar 0, 1, 2, 3, 4, a partir do 4 começa a combinação de posições 10, 11, 12, 13, 14, aí muda de novo ... fica 20, 21, 22, 23, 24, muda novamente ... 30, 31, 32, 33, 34, mais uma vez 40, 41, 42, 43, 44, enquanto que na base 10 fica: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, ... Então se a gente for comparar o quinário com sistema decimal de base 10 e base 5, eles vão mudar só a posição, mais o valor será o mesmo ... mesmo valor quantitativo. Só muda a posição mais o número é o mesmo 12 e 22 são termos correspondentes vão ter o mesmo valor quantitativo o que muda é a base. Esse é um processo de contagem.

Figura 42: Representação da base 5



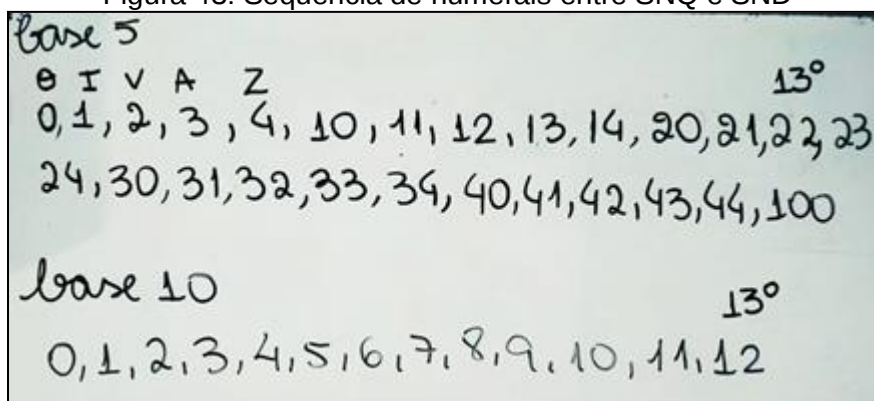
Fonte: Arquivo de pesquisa (2020)

Fl₁: Professora o que nós mostramos foi o estudo da base 5 e 10, a base 10 significa sistema de numeração decimal, por que é composta por 10 símbolos e a base 5 por é composta por 5 símbolos.

Fl₁: Então seria as letras sobre os números assim...

Fl₁: Então seriam iguais ... dessa forma

Figura 43: Sequência de numerais entre SNQ e SND



Fonte: Arquivo de pesquisa (2020)

A defesa da resposta R_{22} apresentada por Fl_1 ao $S_2(Fl, D, 2_2)$ assume o sistema de numeração dos Et's como um SNQ, por meio de uma relação unívoca entre a sequência dos numerais decimais (SND) e a sequência dos numerais quinários (SNQ), em que estes são obtidos segundo uma lógica de manipulação de símbolos/dígitos similar à manipulação dos dígitos do SND.

De qualquer modo, a estrutura do SNP não foi mencionada durante a apresentação, inclusive como uma orientação ou descrição de um processo de quantificação, como se faz presente no SND à quantificação por agrupamentos decimais de unidades.

Além disso, Fl_1 assumiu a relação unívoca entre SND e SNQ como um conhecimento protomatemático, ou seja, sem usar argumentos matemáticos e, sobretudo, sem argumentos sobre possíveis práticas de quantificação que permitissem estabelecer tal relação unívoca ou que há um mesmo tipo de estrutura nos registros dos numerais do SND e SNQ dada pelo SNP.

Talvez por isso, Fl_1 insistiu nas dialéticas intergrupos sobre comparações entre esses sistemas de numeração, sempre buscando relações mais efetivas entre eles que permitissem assegurar suas respostas, como exemplificam as falas a seguir:

Fl₁: Mas essa sequência dos números é só representativa, ou são essas mesmas?

Fl₂: Na decimal, não é essa que a gente usa? Pois é, então é isso sim...

Fl₃: Lembram da unidade, dezena e centena? U, D, C a unidade só suporta até 9 certo? Não pode ficar o 10, se virá 10 fica o zero nas unidades e o um vai para dezena, certo? No sistema de base quinário é a mesma coisa, e não vai passar de 4, certo? Então, essa representação sempre será usada esses valores de 0 a 4, não passa para o 5, e daí vai passar a ser igual os valores que a colega falou 10,11,12,

etc. Por isso que no ano solar cristão 2000 há essa diferença entre o ano 2000 e o ano 31000 - trinta e um mil por que se for olhar para base ... vamos perceber que é diferente, um fala de uma coisa o outro fala de outra coisa, ou melhor, de ano, os anos são diferentes porque as bases são diferentes. É isso que a colega estava tentando explicar a questão da posição, quando se fala da base quinária. É como se chegasse no limite máximo que é o 4.

A busca de uma razão que lhes permitissem explicar a diferença entre os registros 2000 (SND) e 31000 (SNQ), ou AIOOO para os Et's, foi tomada como critério de validação da relação unívoca.

Isso determinou em definitivo que o sistema dos Et's seria o SNQ. Para isso, alegou que a diferença entre as representações de numerais decorresse apenas da quantidade de símbolos que cada sistema de numeração usa.

Disso, podemos interpretar que nessa linha de pensamento os FI recorreram à noção de base de um sistema de numeração, especificamente, se usassem uma linguagem matemática escolar, teriam dito que uma base de um sistema de numeração é a cardinalidade de um conjunto finito de símbolos/dígitos usados para representar qualquer numeral desse sistema.

Embora essa compreensão sobre a base pudesse de algum modo parecer correta, ela é insuficiente para caracterizar SNQ em relação unívoca com SND. A relação construída por FI₁ usa o status cultural dos numerais decimais como registros sequenciais sobre quantidades sequenciais.

FI₁: *Agora eu entendi essa sequência ... eu estava na dúvida quando chegava no 4 se iria continuar 5, 6, 7, 8...*

Essa compreensão admite que os registros numéricos existem em potencialidade e que são obtidos sempre que se adiciona mais uma unidade ao registro antecessor; segundo regras intuitivas, independentemente de qualquer processo de quantificação por agrupamentos, como demandam os SNP.

I.2. Síntese da sessão

O sistema didático S₁(FI₁, Q₁₀, Q₁₁, Q₁₂) tomando os numerais como códigos R₂₁ compostos de símbolos R₂₂ encaminha uma R₂₃ sobre o possível sistema numérico usado pelos Et's. Esse sistema, em hipótese, seria o SNQ que poderia ser posto a partir de uma relação unívoca com o SND, como na forma apresentada na figura 44.

Figura 44: Relação unívoca entre SND e SNQ dos Et's

base 5													
θ	I	V	A	Z	IO	II	IV	IA	$\sqrt{\theta}$	13°			
10	1	2	3	4	10	11	12	13	14	20	21	22	23
24	30	31	32	33	34	40	41	42	43	44	100		

base 10													13°
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	

Fonte: Arquivo de pesquisa (2020)

A validação do sistema quinário SNQ como o sistema dos Et's pareceu ser de maior importância para FI₁ e também para todos os grupos. Para isso recorreram ao texto da situação como tecnologia para essa validação. No caso, fazer evidente que AIOOO do SNQ dos Et's corresponderia ao 2000 do SND dos terráqueos.

O interesse numa questão latente Q_L , no sentido de não ser anunciada por eles, mas presente em suas praxeologias em ato, ficou claro. A respeito dessa questão, assim anunciamos: **Q_L : Como mostrar que o sistema de numeração dos Et's é um sistema do tipo quinário?**

Nesse sentido, os professores construíram uma organização praxeológica R_{22} que permitia responder ao questionamento Q_L . Essa organização foi assim sintetizada:

I.3. Respostas praxeológicas

I.3.1 Resposta praxeológica R_{22}

1. Tarefa:

Qual é o numeral quinário (decimal) que corresponde a um dado numeral decimal (quinário)?

2. Técnica/Tecnologia:

Observamos que a parte técnica/tecnológica dessa praxeologia apresentada obedeceu ao discurso prático sustentado em noções pré-existentes que colhemos, de modo interpretativo, das observações da praxeologia em ato, como segue:

(1) A resposta praxeológica para a questão 2_1 encontrada na sessão anterior constituiu a base tecnológica, ou seja, os símbolos simples ou dígitos foram tomados em relação um a um ou injeção crescente. A sequência finita de registros de grandezas, no caso, O (pelos) com o zero, I (bocas) com o 1, V (olhos) com o 2, A (dedos) com o 3 e Z (membros) com o 4.

Assim, os registros foram postos em injeção crescente com a parte inicial da sequência de numerais decimais que as representam, por exemplo, de 0 a 9.

Essa nossa compreensão foi extraída quando Fl_1 fez a relação de injeção crescente entre $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ com $\{O, I, V, A, Z\}$. Estes elementos foram tomados por Fl_1 como numerais simples e sequenciais do SNQ dos Et's.

(2) Cada numeral do SNQ foi tomado como elemento de uma sequência de numerais em injeção com os numerais do SND, e formado por uma composição de dígitos/símbolos simples O, I, V, A, e Z, que puderam ser substituídos pelos correspondentes 0, 1, 2, 3 e 4, respectivamente, e seguiram a estrutura de escrita similar a dos numerais decimais com os algarismos hindu-arábicos.

(3) Cada numeral, então, entendido como uma composição de símbolos que se obtém ocupando as casas ou posições a serem preenchidas por esses símbolos, da direita para esquerda, do mesmo modo que se escreve os numerais do SND. Nesse sentido, há tipos de numerais que são portadores de apenas uma posição, de duas posições, três posições, e assim por diante.

Por exemplo, o numeral VZ é um numeral de duas posições. Todos os numerais pertencentes a esse tipo de numeral são compostos de duas posições que podem ser preenchidas por qualquer um dos símbolos simples que representam as totalidades de quantidades iniciais conhecidas – I, V, A, e Z – inclusive com repetições, ou ainda, pelo símbolo O.

Com esses princípios, Fl_1 usa a técnica de escrever sequencialmente e de modo crescente os numerais do SNQ a partir da sequência crescente dos numerais do SND.

(4) Em cada tipo de numeral, tomou-se as posições a serem preenchidas da esquerda para a direita, uma de cada vez. Para cada uma das posições, mantida as

demaís, se obteve uma sequência crescente de numerais preenchendo essa posição com a sequência crescente de símbolos simples.

Por exemplo, a primeira posição da direita para a esquerda do tipo de numeral de dois dígitos, mantida a segunda posição a esquerda, determinou as sequências crescentes IO, II, IV, IA, IZ seguida por VO, VI, VV, VA, VZ.

(5) Quando uma posição de um tipo de numeral se esgota, no sentido do crescimento, o novo numeral é obtido escrevendo na posição a esquerda da posição anterior, o símbolo consecutivo do símbolo presente na posição esgotada e reinicia-se a posição esgotada.

3. Encontros e encaminhamentos do $S_1(FI_1, Z_2)$

Assim, por exemplo, quando se esgotou a primeira posição de IO, II, IV, IA, IZ, se construiu nova sequência crescente tomando o sucessor de I que ocupa a segunda posição, que nesse caso é o V, e reinicia com o O até Z, novamente, na posição anterior esgotada, para obter essa nova sequência VO, VI, VV, VA, VZ.

O uso recorrente dos numerais decimais em práticas sociais, inclusive na escola, como objetos naturalizadas que associam “nomes” sequenciais a registros sequenciais de quantidades, como numa contagem, tornou o SND transparente, pois esses numerais estão “prontos” independentemente de qualquer processo de quantificação.

Essa noção é estendida pelos FI aos numerais do SNQ quando adotam os numerais quinários como escritas que seguem código (de conduta) da escrita dos numerais decimais.

No entanto, a cultura do uso dos numerais decimais revela, em contrastes, uma dificuldade para o uso dos numerais quinários. Eles não estão prontos e não têm nomes prontos, mesmo que admitam estranha oralidade. Por isso, a classe e, em particular, FI_1 recorre com frequência aos nomes dos numerais decimais e, com isso, gerou conflitos nas dialéticas.

A resposta praxeológica mostrou o SND como uma prática regada de escrever/falar numerais, que se aprende por imitação seguindo um modo algorítmico intuitivo, no sentido de recitar/escrever os numerais por nomes para em seguida escrevê-lo como composição de símbolos. Esse modo de pensar e fazer foi

estendido ao SNQ com dificuldades, pois se escrevia o numeral quinário usando o nome de um decimal.

Os FI buscaram encaminhar o SNQ a partir do ato cultural de contagem associado ao SND. De outro modo, uma vez conhecidos os nomes sequenciais de totalidades, relaciona-se à unidade física de uma grandeza o primeiro nome de totalidade – *um*, em nossa cultura, 1 – e quando acrescentamos mais uma unidade física, obtendo nova totalidade de quantidade, que tem um segundo nome – *dois*, em nossa cultura, 2 – e assim por diante.

A resposta praxeológica apresentada, embora tenha tido um considerável alcance, por responder a dois tipos de tarefas, de associar numerais quinários (decimais) aos numerais decimais (quinários), apresentou técnica limitada pela dificuldade de responder a determinadas situações em tempo razoável e com pouco esforço.

Precisamente, não conseguiu mostrar objetivamente, com os dados da situação, que o SNQ é o tipo de sistema adotado pelos Et's, pois a técnica usada se apresentou inadequada para exibir o correspondente numeral decimal de um numeral quinário, em particular, de mostrar que 2000 é o correspondente do AIOOO.

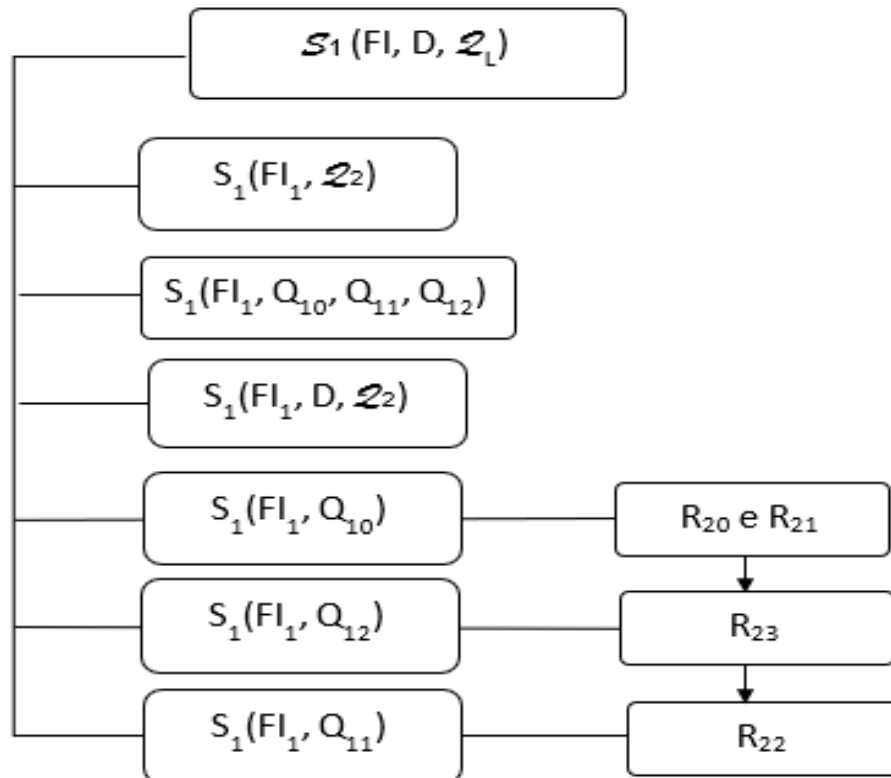
A limitação decorre da necessidade de escrever a sequência do SND (de 0 a 2000) acompanhada da sequência do SND correspondente para verificar se 2000 corresponderia a AIOOO. A dificuldade de escrever todos os numerais de 0 a 2000, pelo tempo e cuidado em evitar erros são desencorajadores. Assim, uma vez que não foi possível ratificar o texto da situação, permaneceu o status hipotético do SNQ como sistema de numeração dos Et's.

A noção de base adotada pelos professores em formação pode ter sido um obstáculo para eles irem ao encontro da noção de SNP como técnica de construção de numerais a partir de quantificação de grandezas e, com isso, encontrarem o SNQ como objeto estruturado de sucessivos agrupamentos de mesmas totalidades de quantidades.

De certo que as dialéticas intergrupos levaram à classe ao encontro de novas relações com os sistemas de numeração, o SND e o SNQ permanecem inquestionáveis como o SNP, o que reafirma Cenci, Becker e Mackedanz (2015) sobre a baixa relação dos professores dos anos iniciais com o saber matemático, em

particular, com os sistemas de numeração, além, de ratificar a hipótese de Ripoll, Rangel e Giraldo (2016), Sadovsky (2010) e de Itzcovich (2008) sobre a naturalização dos numerais decimais e, em consequência, sobre a invisibilidade do SND enquanto sistema estruturado por regras para produzir numerais segundo um processo de quantificação por agrupamentos sucessivos.

Figura 45: Trajetória do percurso do FI_1



Fonte: Próprio autor (2020)

II. Encaminhamento do sistema didático $S_2(FI_2, Z_2)$

O sistema $S_2(FI_2, Z_2)$ concentrou seus esforços em retificar a suposta resposta praxeológica dada por $S_1(FI_1, Z_2)$ à questão Z_2 . Nesse sentido, apresentaram duas respostas praxeológicas diferentes, R_{24} e R_{25} que foram submetidas à avaliação de $S_2(FI, D, Z_2)$.

II.1. Trajetória da difusão e defesa das respostas praxeológicas do $S_2(FI_2, Z_2)$

A busca de validação do SNQ como o tipo de sistema de numeração dos Et's foi difundida por FI_2 com a ajuda da resposta praxeológica R_{22} de $S_1(FI_1, \mathbf{2}_2)$ entre discordâncias no $S_2(FI, D, \mathbf{2}_2)$.

FI_2 : Resposta R_{24} – *Eu fiquei pensando muito nessas relações e cheguei quase na mesma conclusão que a colega do grupo um (FI_1), a respeito da representação que ela fez, fiz a mesma relação aqui... Só que o grupo um apresentou, a representação dos Et's, mas quando chega no 10 ela passa para nossa realidade, IO que seria representado pelo 10 pra gente...só que eu acredito ... na verdade... eu penso que, seria mais ou menos assim... o $OI = 1$, $OV = 2$, $OA = 3$ e $OZ = 4$, ai como o deles é quinário só vai até o 4 ... então quando chega aqui [...] fica mais ou menos como o grupo FI_1 fez... fica assim:*

Figura 46: Registro da relação entre letras e numerais

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12	
O	- 0
OI	- 1
OV	- 2
OA	- 3
OZ	- 4
IO	- 5
II	- 6
IV	- 7
IA	- 8
IZ	- 9

Fonte: Arquivo de pesquisa (2020)

FI_2 : *Isso quer dizer que a gente conta 1,2,3,4 só que quando chega no 5 é como se a gente chegasse no 9, então passa a ser $IO = 5$, a gente passa para o 10 e automaticamente o 1 vai pra frente e o 0 zero fica pra trás, fica como o grupo FI_1 fez...*

A resposta praxeológica R_{24} difundida, confundiu-se com a resposta praxeológica R_{22} do grupo FI_1 , nessa seção, com a diferença de usar letras em lugar dos numerais hindu-arábicos, mas isso não ficou claro para diferentes elementos de FI , que apontaram desconformidades entre essas respostas.

FI_2 : *Diferente da colega do grupo FI_1 , acho que não pula do 4 para o 10, mas que segue uma sequência, por que eu o trouxe para o nosso sistema, para tentar descobrir, então eu não acredito que o 10 seja IO, mas que ele segue a mesma sequência normal ... 1,2,3,4,5,6,7,8,9...*

O grupo FI_1 contra-argumentou com o propósito de melhor fazer entender a sua sequência, a estrutura apresentada e defendida por eles, como segue:

FI₁: *A gente estava conversando aqui, ... que por mais que a gente tenha colocado 10 na equivalência ... na verdade vale 5. Lá o sistema é o deles, e aqui, pra nós é o sistema decimal, lá no sistema quinário o 10 seria o IO e no nosso sistema seria o 5, que a gente chama de termos correspondentes, se a gente for fazer uma setinha ... até o 4 ... é igual, a partir do 5, do quinário, do 4 pula para o 10 que é o IO é a mesma posição.*

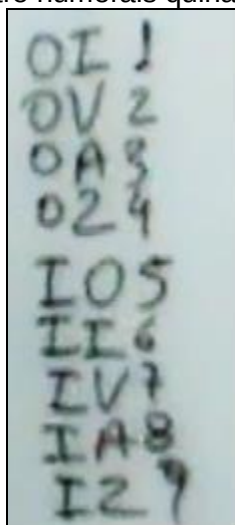
FI₁: *Mas para mim tá na sequência IO é 10, mas na minha sequência é 5...*

As falas parecem anunciar que os sistemas didáticos S_2 (FI₁, 2₂) e S_2 (FI₂, 2₂) estão em conformidades. Isso ficou evidente quando S_2 (FI₂, 2₂) tomou os numerais dos Et's no sentido cultural de nossa sociedade sobre o uso dos numerais decimais, em que funcionam como registros sucessivos para quantidades sucessivas, no sentido de se acrescentar mais uma unidade, que subsidia nosso processo cultural de contagem.

Essa compreensão de numerais como registros sucessivos para quantidades sucessivas também está presente na apresentação de S_1 (FI₁, 2₂), mas sem assumir a ideia do uso restrito dos símbolos/dígitos dos Et's, como foi evidenciado nas falas e figuras 47 e 48 seguintes:

FI₁: *O que muda é que tu estás colocando como eles representam as quantidades, eles representam através de símbolos e nós representamos nosso sistema numérico, pelos números.*

Figura 47: Relação entre numerais quinários e decimais simples



OI	1
OV	2
OA	3
OZ	4
IO	5
IL	6
IV	7
IA	8
IZ	9

Fonte: Arquivo da pesquisa

FI₂: *Então, depois do IZ que é o último, quando chega no 19 seria o 20, aí o segundo é o V, então seria VO, VI, VV, VA, VZ, qual seria o terceiro? o AO né?*

Figura 48: Relação entre numerais quinários e decimais de 1 a 15

OI 1	VO 10
OV 2	VE 11
OA 3	VV 12
OZ 4	VA 13
IO 5	VZ 14
II 6	AO 15
IV 7	
IA 8	
IZ 9	

Fonte: Arquivo de pesquisa (2020)

Fl₂: Sempre vai ter essa sequência, que quando chegar no último que é o 4, o seguinte é o zero (0).

Fl₄: O que eu não estou compreendendo é que o primeiro grupo colocou 20 e você colocou 10.

Fl₂: É porque eu acredito que o V representa o 2 por que a gente tem que ir no processo da contagem...

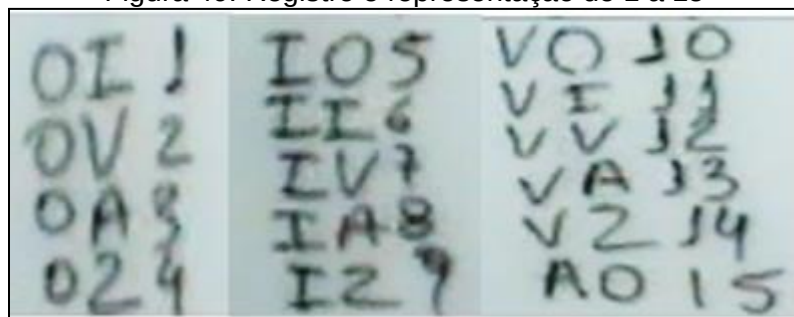
Fl₂: Na verdade ele não vai contar 1, 2, 3, 4, 10, 11, 12, 13, 14, 20...

Fl₂: A gente tem que trazer para o nosso, por exemplo ele tem 6 grãos de feijão ele não vai contar 1, 2, 3, 4, 10 ele vai conta 1, 2, 3, 4, 5, 6 ... grãos de feijão.

A defesa sofreu questionamentos sobre a resposta praxeológica difundida por apresentar dubiedade sobre a construção dos registros.

Fl₂: A representação deles é essa aqui OI, OV, AO, OZ, ..., mas, se fosse transferir para nossa seriam os números 1, 2, 3, 4, ... por isso que não faz sentido o ano deles, entendeu? Porque se a gente for fazer uma representação numérica, eu não cheguei até lá, mas cheguei no máximo até IAZ, fui fazendo as contas, a contagem parei no AO ai depois vinha o AI, mas sempre que chegasse no último ..., se tiver 3 como a colega do grupo 1 falou, unidade, dezena e centena também, sempre vai acrescentando e sempre voltando para o zero, quando chega no 9 vai para 10, quando chega no 19 vai para o 20, o 29 vai para o 30 ... e a mesma coisa aqui, sempre associando...

Figura 49: Registro e representação de 1 a 15



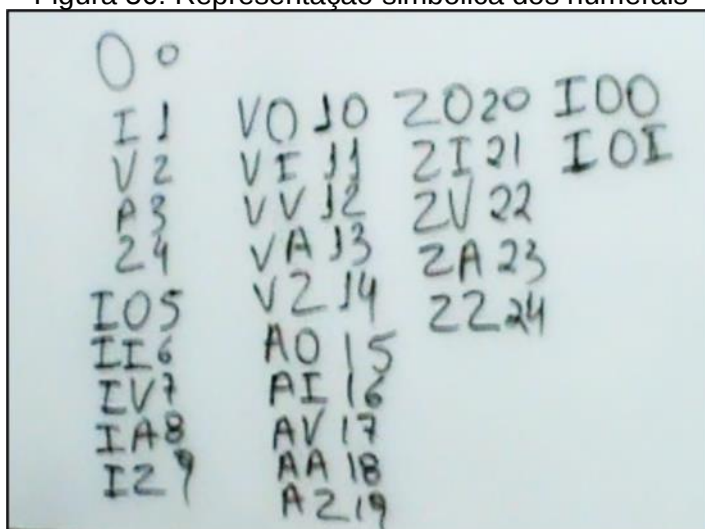
Fonte: Arquivo de pesquisa (2020)

As dificuldades foram assumidas e enfrentadas por FI₂ com o uso do quadro e recorrendo às respostas de Q₁₀, Q₁₁ e Q₁₂ para tomar a noção de numerais como símbolos e/ou códigos, como fizera FI₁.

É necessário fazer revelar, como se codificam os numerais. Para isso, insistem na mesma sistemática da resposta praxeológica de FI₁, mas com uso das letras usadas pelos Et's, como segue:

FI₂: *A respeito do que é símbolo, o símbolo deles é esse, na verdade o código deles é esse OI, OV, AO, OZ, IO, II, IV, IA, ... [...].*

Figura 50: Representação simbólica dos numerais



Fonte: Arquivo de pesquisa (2020)

[...] mas quando vamos decodificar o símbolo deles, na verdade o código deles, acredito que a sequência seria assim, usando os números que representam as letras, por exemplo quando chega o ZZ que é o último deles, e seria o 44, o nosso 44, mas quando chega no I acrescenta o OO, fica IOO, por que não tem uma outra sequência na frente, vai ter que iniciar novamente a contagem IOO, IOI, IOV, ...

FI₂: *Deixa-me explicar ... quando chega no 99?*

FI₂: *Vai para o 100, é como se fosse a última dezena, o 44 é a última, está entendendo.*

FI₄: *Mas aí colega se as letras representam, o I sendo 1 e o O como 00, na sequência que você está mostrando não seria o 25?*

FI₂: *Pra gente...*

FI₂: *Mas acredito que vocês estão presos na nossa relação, tanto é que, por isso o ano deles é AIOOO é o 31000 porque vocês estão associando somente o código deles só substituindo pelo nosso não levando em consideração a sequência numérica deles. É uma sequência...*

Fica evidente aqui que a dificuldade de compreensão do SNQ se encontra na técnica de conversão de numerais do SNQ em numerais do SND e vice-versa. A técnica estaria sendo compreendida como a substituição de letras (dígitos) por dígitos (letras). Essa compreensão sobre a técnica ignorava as sequências crescentes em correspondência unívoca entre SNQ e SND, além da necessidade de observar, em similaridades, a conduta de escrever dos numerais decimais.

Além disso, a limitação da técnica de correspondência entre o SNQ e o SND é posta por D quando FI₂ responde ao seguinte questionamento:

D: *Se você fosse fazer, você chegaria na relação 2000?*

FI₂: *Ah! professora ia demorar muito! O processo é longo...*

A falta de clareza dá correspondência entre 31000 a 2000, e mantém as dúvidas sobre o SNQ como o sistema de numeração dos Et's.

A defesa da resposta difundida não conseguiu tornar claro para FI o código presente no numeral quinário, poderíamos assim dizer. Então D, age indicando um caminho que lhe é claro a partir do MER como indispensável para responder **2₂**, além de oportunizar o encaminhamento de praxeologias de quantificação presentes na escola por meio de manipulação de materiais concretos.

D: *Vamos fazer o seguinte... vamos usar as tampas (de garrafa)?!*

FI₂: *É como se eles tivessem que contar as 10 tampas, eles iam contar por exemplo ... tirando o zero lógico, que é ausência, a primeira tampa seria I, segunda tampa o V, terceira tampa o A, quarta tampa o Z continuando ... quinta tampinha o IO, sexta tampinha o II, a sétima IV, a oitava IA, a nona tampinha IZ, décima tampinha VO, para gente tem 10 tampinha pra eles tem VO.*

Figura 51: Contagem com tampas plásticas



Fonte: Arquivo de pesquisa (2020)

FI₅: *Aí eu entendi, mas...*

FI₂: *Você não entendeu aqui no final, não é?*

FI₅: *Nessa relação que vocês nos trouxeram aqui a gente já sabe que o sistema deles é quinário, certo, então 24 vai para o 30 ..., mas se fosse representar como seria do 24 para 30?*

FI₂: *Aqui ia continuar... IOO = 25, IOI = 26, IOV = 27, IOA = 28, ai me perdi ... então continua até chegar em 30 quantidades.*

Figura 52: Registro de contagem

00			
I1	VO10	2020	IOO28
V2	VI11	2I21	IOI29
A3	VV12	2V22	IOV30
24	VA13	2A23	IOA
IO5	VZ14	2Z24	IOZ
II6	AO15		
IV7	AI16	IOO25	
IA8	AV17	IOI26	
IZ9	AA18	IOV27	
	AZ19		

Fonte: Arquivo de pesquisa (2020)

FI₁: *A dezena é 24 né? Então 48 é a centena? Mais se tu fizeres assim não vai dá!*

FI₁: *Pode ser....*

FI₄: *Não seria 24 é uma dezena com mais 24 uma centena vai dá 48 ... se a gente continuasse não daria ... não chegaria no AIOOO????*

FI₂: *Não! o AIOOO é trinta e um mil.... (31000)*

A estratégia falhou. A praxeologia com material concreto apresentada pelo sistema didático S₂(FI₂, Z₂) mantém a técnica de sequenciação que não encontrou

sustentação na contagem de material concreto e, com isso, as dúvidas sobre o SNQ como sistema numérico dos Et's permaneceu.

Entre as não conformidades apontadas pelos FI, por exemplo, era a de que a sequência de numerais devia ser contínua, sem saltos – noção pré-existente derivada da incorporação do uso cultural do SND, mas o difundido por FI₁ era uma sequência de numerais em que o sucessor do numeral 4 é o numeral 10 e não o numeral 5, como esperado.

Nesse contexto de dúvidas sobre o SNQ, que impedem o encontro de uma resposta praxeológica à questão $\mathbf{2}_2$, o sistema didático $S_2(FI_2, \mathbf{2}_2)$ apresenta outra resposta praxeológica R_{25} , difundida por um de seus membros.

Essa resposta, objetivou mostrar que AIOOO corresponde a 2000, como afirma o texto da situação, como critério de validação, partindo da resposta praxeológica da seção anterior $\mathbf{2}_1$ construída pelo sistema didático $S_1(FI, D, \mathbf{2}_1)$. A fala a seguir do FI₂, deixa clara a nossa interpretação.

FI₂: *Vou mostrar o que pesquisei, posso professora? Tudo que pesquisei aqui foi tirado de alguns artigos como:*

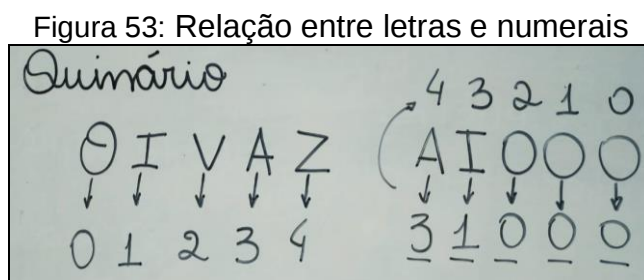
$\mathcal{O}_4$: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Codifica%C3%A7%C3%A3o>, e youtube,

$\mathcal{O}_5$: <https://www.youtube.com/watch?v=2pGkFn4Sgao>. Eu conseguir relacionar o que a colega fez com que eu pesquisei, assim...

FI₂: *A gente toma como princípio o sistema dos Et's que é o quinário e no meu ponto de vista é indiscutível tá, então temos: $O \rightarrow 0$, $I \rightarrow 1$, $V \rightarrow 2$, $A \rightarrow 3$, $Z \rightarrow 4$. A gente observa que é uma sequência são os números naturais, eu pesquisei na internet no site $\mathcal{O}_6$: <http://producao.virtual.ufpb.br/books/camyle/introducao-a-computacao-livro/livro/livro.chunked/ch0d3s03.html> e eu descobrir que tem uma fórmula, aí eu vou aplicar essa fórmula aqui e vocês vão ver se dá certo ou se não dá, tá bom então?*

Usando o quadro branco segue afirmando:

FI₂: *No caso a gente vai levar o princípio que eles colocaram aqui...*



Fonte: Arquivo de pesquisa (2020)

Fl2: Assim se representa o sistema quinário deles, então, essa operação que vou aplicar serve para qualquer sistema. Aqui eu vou pegar o algarismo (debaixo) e multiplicar pelo sistema quinário e vou elevar ele(base) a posição do número, que é o que fica em cima(expoente), e ai vamos ver se vai dar certo relacionando ao ano 2000.

Fl2: Então pego o algarismo, no caso o 3, eu multiplico por 5 que é do sistema quinário e elevo a posição, a posição do 3 que é o 4, e vou somar com o próximo número que é 1, ai eu pego o 1 e multiplico com 5 que é do sistema quinário e elevo a posição que é 3, mais, eu vou pegar o 0 multiplicar por 5 e elevar a 2, mais, 0 multiplica por 5 elevar a 1, mais, o último número, o zero multiplica por 5 e eleva por 0. Aí eu resolvo essas operações e vejo se ele associa com o número 2000.

Fl2: Aí vou pegar o 3 multiplicar pelo resultado da potência 5^4 vai dá 3.625 mais 1 vezes o resultado de 5^3 dá 125 os outros estão multiplicando por zero então eu corto por que tudo vai dá zero, então eu pego o 3 multiplico por 625 somo com 125 que vai dar 1875 + 125 que dá ano 2000. Fechou com relação ao que a gente estava falando.

Figura 54: Registro do processo de agrupamento sucessivo

$$\begin{array}{cccccc}
 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & \Rightarrow 2000 \\
 & \text{A} & \text{I} & \text{O} & \text{O} & \text{O} \\
 \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 & \hline
 3 \cdot 5^4 + 1 \cdot 5^3 + 0 \cdot 5^2 + 0 \cdot 5^1 + 0 \cdot 5^0 \\
 3625 + 125 \\
 1875 + 125 = 2000
 \end{array}$$

Fonte: Arquivo de pesquisa (2020)

Fl2: Então eu peguei aqui ... eu estava pensando se eu associar com essa fórmula que faz a transformação em base decimal com que a colega tá falando eu vou pegar o I e o O que são os próximos números então eu vou colocar aqui I e o 1, o O vale 0, então vou colocar aqui em cima para fazer uma relação então e vou pegar o 0 e o 1 na ordem, olha para ver, vai ficar 0,1,2,3,4 esse é o sistema de medidas.

Figura 55: Registro de comprovação de quantidades

Base 5

0 I V A Z IO₅ II IV IA VO 13°

10, 1, 2, 3, 4, 10, 11, 12, 13, 14, 20, 21, 22, 23

24, 30, 31, 32, 33, 34, 40, 41, 42, 43, 44, 100

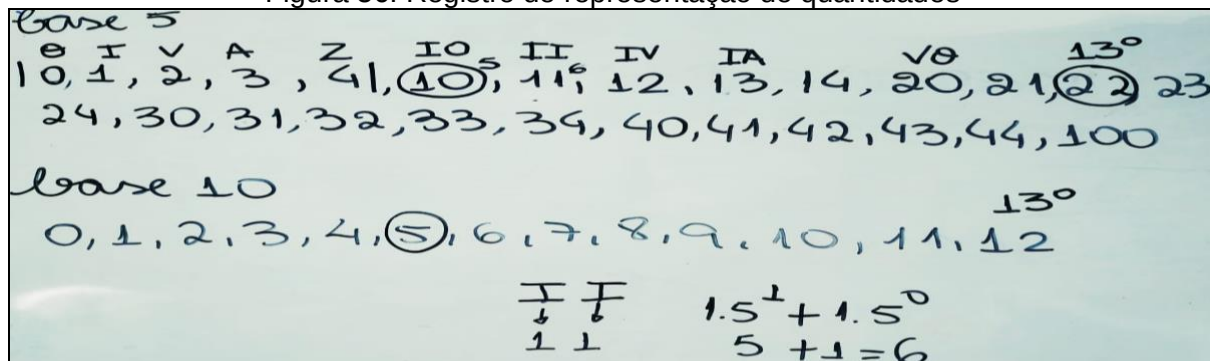
Fonte: Arquivo de pesquisa (2020)

Fl2: Ai vou colocar de novo na fórmula para ver qual o número que vai daqui, em seguida vou pegar o 1×5 do sistema quinário e elevar a 1, somo com o resultado de

0 x 5 elevar a 0, então isso vai da 5 mais o próximo número zero, vai dá 5 que é o próximo número depois do 4 é ...

Fl₂: Se eu pegar novamente isso daqui... eu pegar o II quanto vale? 1 e aqui 1, ai aqui em cima 1 posso associar 11 então vai ficar: $1 \times 5^1 + 1 \times 5^0$ aqui vai da 5 e aqui vai da 1, então vai da 6, que é o próximo número então vai ficar assim.

Figura 56: Registro de representação de quantidades



Fonte: Arquivo de pesquisa (2020)

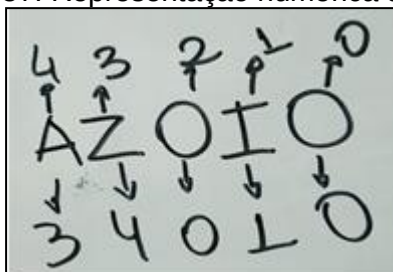
Fl₂: O seguinte seria 7, 8, 9 se eu for resolvendo II, IV, IA... ai vai formando tudinho então relativamente isso aqui tem tudo a ver com que elas estão fazendo basta substituir essas letras a essa fórmula que descobrir na internet, ai a gente vai associar eles ai a gente vai dá sequências a esses números que são os números naturais olha 5, 6, 7, 8, 9, entendeu?

Fl₁: Isso ai comprova que o A é 3, o I é 1 ...

Fl₂: Eu fiz para ver se tinha coerência. Estava certo porque simplesmente quando joguei a fórmula, neste fato AIOOO, eu queria saber se a fórmula que estava relacionado, daria 2000. Então bateu. O ET era normal tinha dois olhos, rsrs ... E usando o quadro continua

Fl₂: Então para finalizar, eu peguei o feijão AZOIO, quando eu peguei o A é 3, Z é 4, O é 0, I é 1 e O é 0 e então, e associei com o sistema quinário, representado aqui em cima, então vai ficar da direita para esquerda nesse sentido 0, 1, 2, 3, 4 que é a fórmula,

Figura 57: Representação numérica do feijão



Fonte: Arquivo de pesquisa (2020)

Fl₂: Então eu pego o algarismo no caso é o ...

Figura 58: Registro da mudança de base do quinário para decimal

$$3 \cdot 5^4 + 4 \cdot 5^3 + 0 \cdot 5^2 + 1 \cdot 5^1 + 0 \cdot 5^0$$

Fonte: Arquivo de pesquisa (2020)

FI₂: Então vai ficar $3 \times 625 + 4 \times 25 + eu corto (0 \times 5^2) + 1 \times 5^1 + 0 \times 5$, então vai ficar 2380 ... tá aqui essa é a resposta do feijão da produção do feijão pra mim isso é que tem coerência.

FI₁: Então essa é a representação decimal e o trinta e um mil, o sistema ... a representação quinária?

FI₄: Se você quiser ir descobrindo é só seguir o raciocínio e jogando na fórmula vai aparecer toda sequência numérica dos números naturais.

Figura 59: Registro das transformações numéricas

base 5

0 I V A Z IO II IV IA VO 13°

10, 1, 2, 3, 4, 10, 11, 12, 13, 14, 20, 21, 22, 23

24, 30, 31, 32, 33, 34, 40, 41, 42, 43, 44, 100

base 10

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12

13°

4 3 2 1 0

A Z O I O

3 4 0 1 0

$3 \cdot 5^4 + 4 \cdot 5^3 + 0 \cdot 5^2 + 1 \cdot 5^1 + 0 \cdot 5^0$

$3 \cdot 625 + 4 \cdot 125 + 5$

$1375 + 500 + 5 = 2380$

Fonte: Arquivo de pesquisa (2020)

FI₁: Se substituir vai dar a mesma sequência que apareceu ai do lado?

FI₂: Não, só dá até 5 ao meu ver, porque se jogava as letras e tinha que dá um número, por que desse número?

FI₃: Porque é sequência...

As falas não deixam dúvidas para D que essa resposta praxeológica R₂₅ tem o papel de validar as outras respostas praxeológicas apresentas anteriormente nessa seção. Ela parece validar o SNQ como o tipo de sistema de numeração usado pelos Et's por atender o critério de validade assumido pelos professores em formação (FI),

precisamente, por fazer corresponder 2000 ao AIOOO. Isso foi mostrado pela fórmula assumindo em definitivo a resposta praxeológica $\mathcal{R}_1$ como válida para a questão $\mathcal{Q}_1$.

No entanto, para D, a validação das respostas praxeológicas R_{22} e R_{24} pela resposta praxeológica R_{25} precisa ser objeto de estudo, pois a resposta para $\mathcal{Q}_2$ não foi ainda encontrada, embora se possa dizer que uma resposta para a questão $\mathcal{Q}_3$ fora encaminhada pelo grupo Fl_2 usando R_{25} .

D: Agora vai ficar interessante essa, discussão entre você e ele porque vocês, como grupo, vão se reunir e vão desmistificar a forma como você fez e como ele fez. Vão chegar num ponto de interseção, porque as duas ideias estão imbricadas.

Mas, a reação de Fl_2 encaminha a compreensão de a fórmula ser validada apenas empiricamente, no caso, “transformando” 31000 em 2000 e, não menos importante, transformar os numerais sequenciais das respostas praxeológicas R_{22} e R_{24} na sequência dos naturais.

Fl_2 : Mas essa fórmula eu não tirei da minha cabeça...tirei da internet!

$\mathcal{O}_7$: <http://wwwp.fc.unesp.br/~mauri/TN/SistNum.pdf>

Mas a fala seguinte adiciona:

Fl_1 : Esse é o desenvolvimento de uma notação posicional

Que é prontamente incentivada por D:

D: Alguém quer falar?

Então a resposta R_{25} começa ser questionada.

Fl_1 : Eu entendi que ele utiliza uma fórmula, ele associa com a relação do sistema quinário então isso significa que isso tem um limite de numeração para trabalhar com essa fórmula porque ele utiliza 01234 e se tiver uma outra letra para representar uma quantidade?

Fl : Mas estamos trabalhando com o sistema é quinário.... tem que olhar a base...

Fl_2 : Não é pra usar outras quantidades...

Fl_2 : O sistema quinário é finito não é para trabalhar em outra base

Fl_2 : Mas é exatamente isso é finito...

O que o Fl_2 quis dizer é que a base é finita e como quinário não se pode acrescentar mais nenhuma letra. A fala seguinte de outro grupo demonstrou esse entendimento:

Fl_1 : Agora se fosse a base fosse 2, tinha que representar somente com os 0 e 1, é finito, e teria que resolver o que tivesse apenas com eles dois.

E vai mais longe sobre correspondência entre 31000 e 2000.

FI₁: *Também tem o método da divisão... você fez ...? é a mesma coisa, dá o mesmo resultado.*

FI₂: *Eu vi esse método (da fórmula), foi o primeiro, aí eu vi e fiz a primeira associação. Como eu vi que dava para transformar o 2000 então eu resolvi*

FI₁: *Esse método é para transformar o sistema quinário para decimal, qualquer sistema para o decimal. O método da divisão transforma o decimal para o quinário através do método das divisões sucessivas.*

Nesse contexto, o sistema didático $S_2(FI_2, Z_2)$ assumiu as respostas R_{22} , R_{24} e R_{25} , até então difundidas, como válidas e definitivas por responder à questão latente Q_L e encaminhou uma resposta para a questão da situação em texto Z_3 .

No entanto, D em observação, não compartilhada com os professores FI, sobre a questão Z_2 , demandou uma resposta do tipo prático-metodológica em que foi necessário considerar o propósito do PEP como trajetória de formação docente, destacando aos professores FI que as praxeologias apresentadas estão a nível de conhecimento somente deles, mesmo que em estado ainda inicial.

Assim, encaminhou a continuidade do PEP sob a condição de construir respostas, utilizando possíveis argumentos para o ensino, como expresso na fala seguinte.

D: *Agora precisamos construir a prática, porque isto aqui está no nosso nível. Agora precisamos fazer como ensinaremos para as crianças. Precisamos entender como isso pode funcionar com crianças. Na próxima aula(sessão) precisamos deixar claro o que é cada coisa, as noções básicas.*

II.2. Síntese da sessão – Encontros e encaminhamentos do $S_2(FI_2, Z_2)$

Nesse estágio do desenvolvimento do PEP, a noção de base como um conjunto finito vai se impondo, fazendo emergir o princípio P2 proposto no MER, bem como os gestos (N3) e (N5) do MPR quando são tomados em ações para a quantificação de material concreto.

A praxeologia de quantificação de material concreto recorrida, embora tenha falhado em seu objetivo, apresentou características do MER considerado pela direção de estudo, tomando aglomerados de unidades físicas, as tampas de

garrafas, e por meio da fórmula da divisão sucessiva, embora ainda incipiente para ser notada, encaminhou a construção de numerais do SNQ.

A resposta praxeológica de quantificação foi abandonada e outras respostas praxeológicas, no caso, R_{24} e R_{25} , foram difundidas e validadas por produzirem respostas à questão latente Q_L , considerando a conversão de AIOOO em 2000.

Notamos que há uma dependência ecológica, no sentido de integração de saberes, entre as repostas praxeológicas até então construídas e visitadas pelos professores em formação que destacamos aqui como segue:

$$(\wp_1, \mathfrak{R}_1) \rightarrow R_{25} \rightarrow (R_{22}|R_{24})$$

A resposta praxeológica $\wp_1$ é a praxeologia matemática, cuja técnica é dada pela fórmula $a = \sum_{k=0}^N r_k \beta^k$, segundo Teorema 1.1 da representação posicional de base β (RIPOLL; RANGEL; GIRALDO, 2016, p.25) para responder à tarefa de transformar qualquer numeral, em uma dada base (b), no numeral decimal correspondente.

Essa praxeologia combinada com a praxeologia $\mathfrak{R}_1$ permitiu a construção da praxeologia R_{25} – cuja tarefa é de $\wp_1$ com técnica de $\wp_1$ mais $\mathfrak{R}_1$ – que validou as praxeologias R_{22} e R_{24} e $\mathfrak{Z}_3$.

A resposta praxeológica R_{24} é similar a resposta R_{22} , trocando-se os numerais hindu-arábicos destas pelas letras correspondentes usadas pelos Et's. Por isso, a sua constituição em termos de tarefa e técnica.

As falas demonstraram um vasto mundo de saberes que precisariam ser explorados, em particular, os que remetem aos métodos ou procedimentos algorítmicos de transformações de numerais em uma dada base em numerais decimais e vice-versa. Mas, esses algoritmos foram prontamente tomados como indiscutíveis e sequer apresentados.

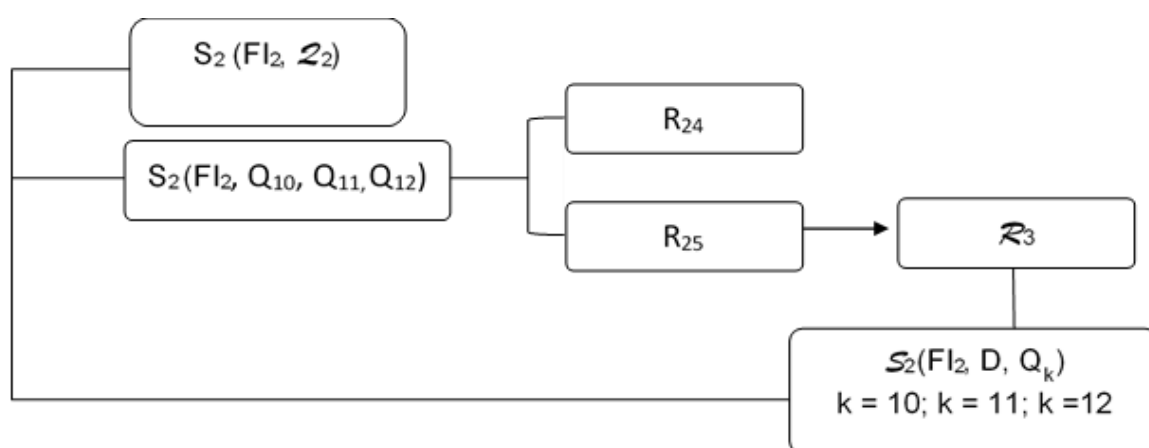
Esse gesto custou caro aos professores em formação e passou despercebido pelo diretor de estudo que, nesse caso, não observou o princípio da ignorância metódica, ou seja, que tudo deve ser investigado, mesmo que seja de conhecimento de alguns participantes da comunidade de estudo.

Esses métodos poderiam ser investigados, por exemplo, como modelos matemáticos das práticas de quantificação de grandezas físicas portadoras de unidades discretas, como tampas de garrafas, por exemplo, que deram origem ao sistema de numeração decimal, ou seja, a praxeologia de quantificação como fundamento para o SND.

No entanto, embora para D estivesse claro que uma resposta para $\mathcal{Z}_2$ ainda não fora construída considerou em consonância com isso, naquele momento cronológico do PEP, que era necessário encaminhar as praxeologias de quantificação, orientadas pelo MER, como trajetória para a compreensão do SNP, frente ao percurso de formação docente a partir de tarefas que podem viver nas escolas como as práticas docentes que envolvem materiais manipulativos.

A condição imposta nesse momento cronológico do PEP torna-se uma restrição aos FI no seguimento do PEP, considerando a possível falta de recursos praxeológicos matemáticos que esses FI podem apresentar para a compreensão de respostas prontas e de técnicas por eles recorridas e que, em geral, precisam ser adequadas aos equipamentos praxeológicos de professores e crianças dos anos iniciais.

Figura 60: Trajetória do percurso de FI_2



Fonte: Próprio autor (2020)

V. Encaminhamento do sistema didático $S_5(FI_5, \mathcal{Z}_2)$

O sistema didático auxiliar $S_5(FI_5, \mathcal{Z}_2)$ seguiu a dinâmica recomendada pela direção de estudo D e encaminhou a difusão de suas respostas praxeológicas com

manipulação de materiais concretos com propósito de revelar em definitivo que as praxeologias anteriores respondiam à questão latente Q_L , mas sem claras preocupações com as questões Q_{10} , Q_{11} e Q_{12} .

V.1. Trajetória da difusão e defesa das respostas praxeológicas do $S_5(FI_5, 2_2)$

A trajetória foi extraída desse momento cronológico que marcou a difusão e defesa de respostas do sistema didático auxiliar $S_5(FI_5, 2_2)$ que aconteceu em meio as intervenções dos demais grupos do sistema didático $S_2(FI, D, 2_2)$, com falas e gestos dos diferentes grupos de professores formadores, começando com o grupo FI_5 :

FI₅: Retomando a questão de quantificar de outros povos, eu estava pensando sobre o processo evolutivo. Há um processo de aquisição de conhecimento de uma comunidade que, na verdade, esse tipo de comunicação é parecido com o sistema de comunicação que a gente enxerga hoje, a internet [...].

A apresentação continuou sem maiores cuidados sobre a história dos sistemas de numeração, destacando o suposto papel revolucionário do zero proposto pelos árabes que teriam notados de certos locais vazios...

FI₅: [...] eles notaram algo revolucionário, algo reformador, que se chama zero. O zero é o cara, a ausência, por que tanto o sistema do povo egípcio como o do povo romano não tinham a percepção da ausência, do zero. Que o zero vem e devasta.... Nessa perspectiva, do zero, lá na representação dos Et's, eles falam da ausência de pelos e eles tem um símbolo para a ausência o "O", sei lá ... é algo que dá uma volta continua ... infinita. Ele representa a ausência e isso fala próximo do nosso sistema, porque também temos uma representatividade de ausência, só que o nosso sistema é decimal, nossa casa vai até dez, quando a gente trabalha com casas, casa decimais, por isso vamos trabalhar com casas quinais, ... sistemas quinais, porque vai até 5.

Interpretamos que FI_5 usa a expressão casa para se referir à cardinalidade do conjunto de símbolos ou dígitos usados pelo sistema de numeração. Em seguimento, tomou doze tampinhas de refrigerantes, dentre uma grande quantidade disponibilizada por D, e assim se expressa:

FI₅: Nosso sistema decimal se representa assim... começamos pelo nosso sistema decimal: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e 10 ... vamos lembrar o amarradinho?! A gente separa o amarradinho (dez tampinhas), rrsrrsr, o amarradinho mais essas duas tampinhas formam doze.

Figura 61: Amarradinho de dez mais duas tampinhas



Fonte: Arquivo de pesquisa (2020)

Continuando, **FI**₅ apresenta como seria no SNQ:

FI₅: Resposta **R**₂₆: Agora vamos trabalhar no sistema quinal, em que a base não é 10. Então fica: 1 tampinha, 2 tampinhas, 3 tampinhas, 4 tampinhas e 5 tampinhas e fecha um amarradinho (figura 62)

Figura 62: Amarradinho ou grupo com 5 tampinhas



Fonte: Arquivo de pesquisa (2020)

FI₅: Fechou um amarradinho com 5 tampinhas [...] e agora a gente conta de novo ... 5, mais 1 tampinha, 6, mais uma, 7 tampinhas.

Figura 63: Representação da contagem com grupo de 5 tampinhas



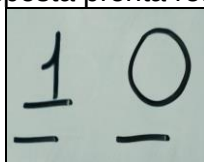
Fonte: Arquivo de pesquisa (2020)

FI₅: [...] então ficamos com um amarradinho, formado por cinco unidades com mais duas unidades formei o sete, diferente de lá... que é outro sistema, mas eu formei também amarradinhos. A partir daí eu pulei a casa, ele é posicional, essa questão de ser posicional é crucial, pois ele precisa tomar a posição das casas e é preciso enxergar a posição das casas, por exemplo:

Abandonando as tampinhas, FI₅ vai ao quadro branco (Figura 64) e escreve 1 0 e fala o seguinte:

FI₅: O nosso sistema vai até o 9, chegou no 10 e pula e assim forma o 10, o 1 representa dez coisas o 0 a ausência e desse jeito forma o 10.

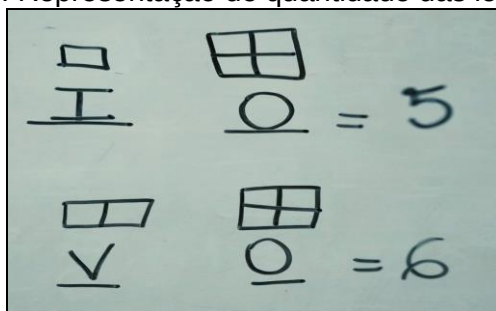
Figura 64: Resposta pronta referente ao SND



Fonte: Arquivo de pesquisa (2020)

Ainda no quadro branco, FI₅ afirmou que no sistema de base cinco é diferente, ele escreve a representação de quantidade das letras assim, I = 1, V = 2, A = 3, Z = 4. Ele faz dois traços (Figura 65) e pergunta: até quanto poderia suportar o traço da direita? Como não houve resposta, ele faz uma relação com o SND afirmando que só poderia ir até nove e pergunta novamente e, no sistema quineral, esse sistema vai até quanto?

Figura 65: Representação de quantidade das letras na base 5



Fonte: Arquivo de pesquisa (2020)

Fl₁: 4

Fl₅: Até o 4... certo, e quando forma 5 que forma o amarradinho, pulo de casa, e aqui que não tenho nada eu coloco a ausência, a mesma ideia do zero, ausência mais o quê? O que representa um na outra casa ... que é o que?

Seguindo, Fl₅ continuou no quadro branco e escreveu o IO

Fl₅: IO, quanto vale isso aqui?

Fl₄: 10

Fl₅: Nãoooooo

Fl₁: 4...

Fl₅: Nãooooooooooooo

Fl₃: é 5 ...

Fl₅: 5... e vai bater lá na fórmula, que o grupo Fl₂ apresentou. Se a gente fizer e remexer e fazer cálculos ... a gente vai bater lá lá na fórmula que o outro grupo apresentou.

Fl₅: E é isso aí ... e a gente segue na próxima ... e vou deixar para próxima aula, tem outras coisas sim, mais vou deixar pra próxima aula, vou trazer o material dourado para apresentar como se fosse para as crianças, e aí a gente desenvolve e segue os números ... eu cheguei no cinco, eu vou parar porque depois disso eu encontrei dificuldade eu não consegui enxergar ...

As falas da comunidade de estudo evidenciam, para D, dificuldade em compreender a “tradução” de um numeral do sistema decimal para um numeral do sistema de numeração quinário, ou seja, de uma numeração para outra. Essa nossa compreensão é apreendida quando D assim se manifestou:

D: Você encontrou uma dificuldade, não conseguiu enxergar como resolver, mas pode ser que alguém da classe possa ajudar.

Então, Fl₅ voltou ao quadro e escreveu IO, afirmou:

Fl₅: Agora preciso de ajuda...você concordam comigo que o IO é igual a 5? Que é o 5 ... e o 6? seria V e ausência? Sim ou não? vou escrever aqui no quadro essa representação VO = 6.

Fl₁: Não!

FI₅: Não? Porque não?

FI₁: Porque seria ausência com o próximo

FI₅: Qual seria o próximo?

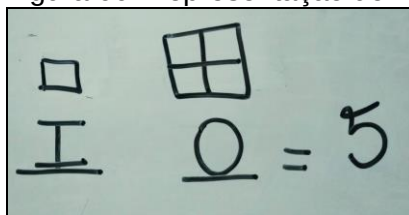
FI₁: O “I”

FI₅: O “I” já tem

FI₁: Pois é, mas você não substituiu a ausência por 1. Aí não seria o caso ... Sem ouvir FI₁

FI₅: Olhem aqui para o quadro branco ... o IO forma um completo (Figura 66).

Figura 66: Representação do IO

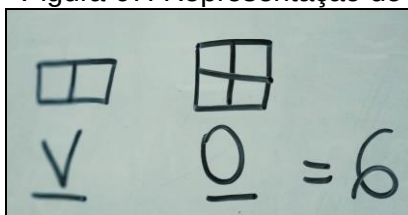


Fonte: Arquivo de pesquisa (2020)

FI₅: Aqui é o “I”, isso significa que tem um desse completo... aqui na ausência, o O significa que tem um completo, por exemplo, quatro fechado, ou seja, fechou uma casa aqui com 4 e tem mais uma casa aqui, referindo o desenho representativo de 4 + 1 (Figura 67).

FI₅: Então, agora como vou representar o completo mais esses dois pedaços? (figura 67). Vou representar dois, que pra mim é o V.

Figura 67: Representação do VO



Fonte: Arquivo de pesquisa (2020)

FI₅: Aqui eu represento dois, que pra mim é o V.... pois é aqui vai entrar a discórdia. É um problema... por isso disse que seria bom parar aqui ... por que vai ter discórdia.

As falas e gestos no quadro de FI₅ revelaram à D, que contou com MPR para lhe orientar, uma comunidade de estudo que não assumiu a manipulação das tampinhas, mas apenas de representações no quadro. Isso, talvez, poderia dificultar a percepção da comunidade sobre o processo de quantificação como um algoritmo estruturado por regras.

D: O que vai desmistificar isso aí é o uso do material concreto, quando vocês começarem usar, esperamos que comecem a relacionar com que vocês estão falando e, assim, vamos trabalhando essas dificuldades que a classe está enfrentando. Vamos pensar o seguinte ... se vocês fossem lá atrás... como vocês acham que os povos conseguiram enxergar essas coisas? Como foi que os povos conseguiram chegar onde vocês conseguiram chegar?

Esses questionamentos dispararam para comunidade de estudo muitas respostas prontas.

FI₂: Contando...

FI₁: Contando pedras, contando ovelhas...

FI₃: Pela necessidade professora!

FI₅: Daí a necessidade de se ter os códigos, fazer os registros.

FI₅: um grupo disse que o símbolo foi o primeiro elemento e que veio depois o código, eu vejo o contrário, tem o código e a simbologia, a simbologia pode representar uma coisa que já existe, existe um código e o símbolo pode representar, um código ou vários códigos.

FI₁: Podemos falar sobre os Et's que eles usam códigos e simbolos estou levando para questão dos simbolos e o que eles fazem na plantação do milho, eles querem nos dizer alguma coisa, o que é realmente eles querem dizer com aquilo? Será que eles querem se comunicar com a gente ou só passar uma mensagem? Ou só pra dizer olha nós estamos aqui, o que é realmente?

A divagação da comunidade de estudo leva a D o necessário e indispensável estudo de obras e, então, assim se manifesta:

D: Nós precisamos ler mais sobre isso

A fala da direção de estudo funcionou como um estímulo para a comunidade de estudo que declarou sua falta de conhecimento necessário para responder à questão latente e $\mathcal{Z}_2$, de forma a validar as respostas praxeológicas R_{22} e R_{24} em consonância com a resposta R_{25} sobre o uso da fórmula.

FI₅: Eu estava falando sobre isso, porque ele chegou até o 10, essa foi a visão dele, quando chega no 10 ... eu fiquei questionando e o 11? E o 11? Eu ainda não consigo, estou bem limitado mesmo, eu não conseguir fazer uma pesquisa aprofundada, é complexo mesmo, eu vi até a fórmula e a transformação que o **FI₂** apresentou aqui, mas foi com o número binário, mas não consegui ir adiante porque é um mergulho mesmos! Até pesquisei os maias, mas não consegui encontrar essa representação, pra mim tá muito obscuro mesmo, não consegui pegar esse número, visualizar ele ... para formar, o número dezessete por exemplo, ainda não consegui.

Essa declaração incentivou novas manifestações, inclusive da direção de estudo.

D: Então precisamos pesquisar mais e trazer novas informações que venham construir uma compreensão, nós precisamos deixar claro algumas coisas como, por

exemplo, de base. O grupo FI₅ falou em base decimal, base quinaría na aula passada, então, eu pergunto pra vocês, está claro o que é base? Existe alguma relação dessa base com que ele está falando lá como sistema posicional? Onde estão envolvidos? Qual relação entre eles?

FI₁: Não!

D: *Estão vendo! Não podemos ser superficiais, vou perguntar novamente símbolo, numeral, códigos, número e algarismos são as mesmas coisas?*

FI₄: *Isso tem que ficar claro professora*

Essa sessão foi encerrada sem uma resposta praxeológica para a questão 2₂, portanto, como encaminhamento para a continuidade do PEP em nova sessão.

V.2. Síntese da sessão – Encontros e encaminhamentos S₅(FI₅, 2₂)

A resposta praxeológica R₂₆ difundida por S₅(FI₅, 2₂) não foi validada por S₂(FI, D, 2₂), por inconsistência com as respostas anteriores R₂₂ e R₂₄, inclusive com a expressa manifestação de S₅(FI₅, 2₂) sobre o seu encontrado com a complexidade do processo de quantificação, que culminou no encaminhamento de mais estudos para a construção de uma nova resposta.

A resposta praxeológica R₂₆ foi desenvolvida com técnica que articulou gestos sobre a quantificação (de tampinhas) para construção de um registro numérico para a quantidade (de tampinhas). Houve inabilidades de manipulação adequada do material concreto, resultando na fuga dessa manipulação com auxílio do quadro branco.

No caso observado, optou-se pelo uso dominante do quadro com uso de desenhos em busca de fazer valer a lógica prática de escritura de numerais sequenciais, a sequência de quinários seguindo a sequência de decimais, proposto pelas respostas R₂₂ e R₂₄, ambas validadas por R₂₅, mas com a técnica de agrupamentos, chamados em práticas escolares de amarradinhos.

Essa compreensão ignorou as praxeologias R₂₂ e R₂₄ por não demandarem de quantificações para a construção de um numeral, pois não permitem as sincronias necessárias para a construção de um numeral como descritivo do processo de quantificação.

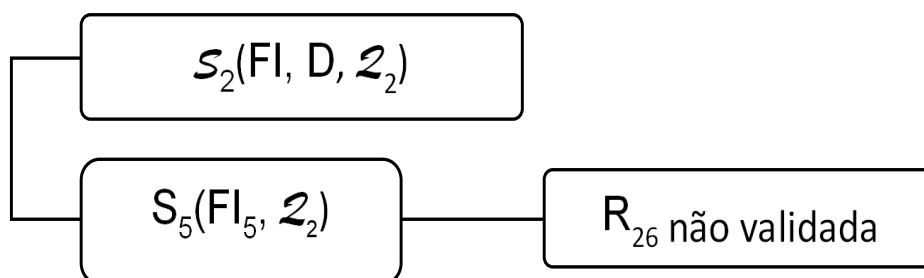
Portanto, consideramos compreensível que tenha ocorrido o encontro da comunidade de estudo com um paradoxo quando a praxeologia R₂₆ foi usada para a

construção do numeral quinário para a quantidade de seis tampinhas. Nesse caso, seis tampinhas foram interpretadas como um “amarradinho” de quatro tampinhas mais duas tapinhas e que produziu o registro VO (20). Este registro não estava em conformidade com o registro II (11) produzidos por R_{24} (R_{22}) para a mesma quantidade e mesmo sistema de numeração.

Assim, a apresentação da resposta de $S_2(FI_2, \mathcal{Z}_2)$ perante ao sistema didático $S_2(FI, D, \mathcal{Z}_2)$ evidenciou para a direção de estudo D que ainda não havia uma resposta à questão $\mathcal{Z}_2$ com uso de materiais concretos, inclusive como um fundamento prático que pudesse explicar a “mágica” da fórmula que transforma todo numeral quinário em um numeral decimal.

Esquemáticamente, a trajetória da difusão e defesa de FI_5 pode ser assim representada:

Figura 68: Trajetória do percurso do FI_5



Fonte: Próprio autor (2020)

4.2.2.1 Encontros e encaminhamentos de $S_2(FI, D, \mathcal{Z}_2)$

Para D pareceu que houve uma devolução da comunidade de estudo frente à questão latente, pois a fórmula transformava um numeral quinário em um numeral decimal como se fossem gestos realizados por um mágico. Além disso, a fórmula era um conhecimento de matemáticos e como tal era inquestionável.

Isso foi interpretado por D considerando o interesse da comunidade de estudo em encontrar ou construir outro modo de alcançar um numeral quinário, em particular, como uma prática acessível para professores e alunos dos anos iniciais,

que não detém conhecimentos matemáticos em profundidades dos cursos dos matemáticos.

A falta de conhecimentos matemáticos da comunidade de estudo, em particular, sobre fórmulas como modelos matemáticos, não lhes permitiram investigar a fórmula recorrida pela praxeologia R_{26} como um modelo matemático de um processo de quantificação que produz um numeral.

Isso pareceu se evidenciar quando os FI recorreram, notadamente, a seus equipamentos praxeológicos usando apenas numerais decimais e numerais binários, sem qualquer manifestação segura sobre a noção de base que permitisse referenciar a estrutura de um SNP, embora o mencionasse.

As falas e gestos nas difusões das respostas praxeológicas mostraram que a comunidade de estudo desconhece a funcionalidade da base, bem como a de posição num numeral posicional. Isso evidencia a falta das noções fundadoras da quantificação, no caso, a clareza dos princípios P1 e P2, como os postos no MER que orienta D.

Esses princípios encerram que a quantificação acontece quando se tem clareza, a priori, de que a grandeza a ser quantificada pode ser decomposta em aglomerados com quantidade finita e fixa de unidades (base), e que determinarão novas unidades (novas posições), que permitam a contagem por registros de representação das unidades anteriores (posição anterior) que excedam a esses aglomerados (dígitos/símbolos).

De outro modo, P1 e P2 ainda não haviam sido encontrados, permaneciam naturalizados pelo uso sociocultural da contagem com auxílio dos numerais decimais falados e escritos segundo uma lógica prática. Essa lógica prática foi revelada nessa seção pelas respostas praxeológicas R_{22} e R_{24} e validada de modo não questionado pela resposta praxeológica R_{25} , obtida com ajuda da resposta R_1 .

Assim, a complexidade do processo de quantificação esteve embaçada pelo uso naturalizado dos números decimais, pois estes funcionaram nas empirias como nomes de quantidade que permitiam que a comunidade de estudo quando, frente a uma quantidade a expressassem em um numeral pelo uso exclusivo do processo de contagem.

Nesse sentido, a escolha da situação envolvendo a quantificação em um sistema do tipo SNQ atingiu seu propósito de evidenciar essa naturalização, pois nos SNP não decimais, os nomes de totalidades de quantidades não estão prontos. O que dificulta ou torna impossível a quantificação pelo simples e exclusivo uso do processo de contagem.

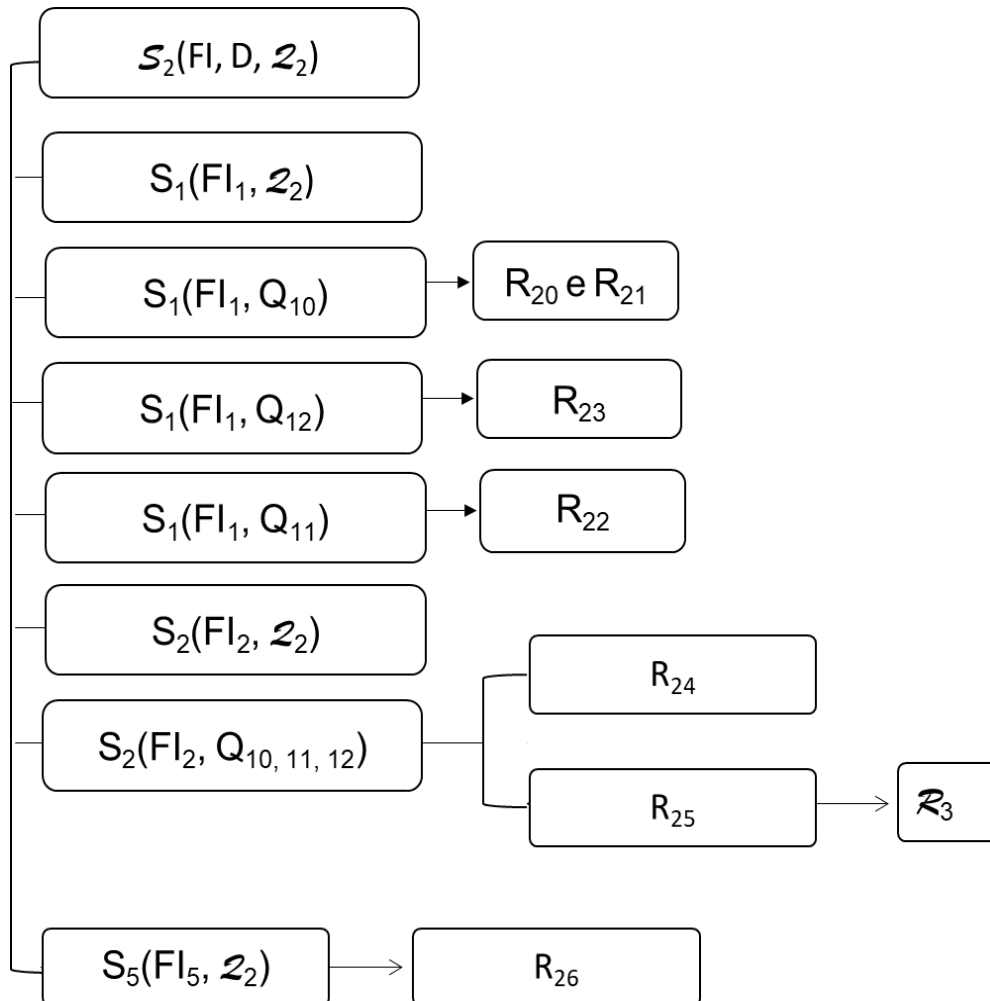
É importante assim destacar que o modelo matemático recorrido para a praxeologia R_{25} constitui um conhecimento sobre a prática de quantificação com numeração posicional que permitiu encaminhar uma resposta à questão 2_3 , e se questionado poderia encaminhar uma resposta à questão 2_2 .

De qualquer modo, é preciso ter em conta que existe uma distância entre o conhecimento da prática e o conhecimento sobre a prática, no caso, o modelo matemático. Nesse sentido, o MPR ganha maior relevância para orientar D e a necessária desnaturalização de P1 e P2, bem como do desenvolvimento dos estágios N3, N4 e N5 como condição a ser imposta por ele para a construção de numerais a partir de quantificações de grandezas físicas em vista do reconhecimento da classe à insuficiência do saber matemático e de mais encontros de situações que os façam ir ao encontro do conhecimento em definitivo da estrutura do SNQ.

Para a direção D, encontrar uma resposta à questão 2_2 passa por encontrar uma resposta à questão latente Q_L e, para isso, os cinco diferentes sistemas didáticos auxiliares de modo colaborativo partem em busca de novas respostas a serem submetidas à apreciação do sistema didático $S_2(FI, D, 2_2)$ na próxima sessão.

Esquemáticamente a trajetória da sessão 2 pode ser assim representada:

Figura 69: Trajetória do percurso do $S_2(FI, D, \mathcal{Z}_2)$



Fonte: Próprio autor (2020)

4.2.3 – SESSÃO (S3)

V.1 Encaminhamento do sistema didático $S_5(FI_5, \mathcal{Z}_2)$

A trajetória até aqui apresentada sobre o desenvolvimento do sistema didático $S_2(FI, D, \mathcal{Z}_2)$ é marcada pela mobilização de praxeologias envolvendo numerais quinários que são tomados segundo uma lógica prática de manipulação dos numerais decimais não questionada.

Essa lógica prática, por sua naturalização parecia manter os numerais quinários como um “código” a ser decifrado, pois responder à $\mathcal{Z}_2$ e seria “sinônimo” de encontrar as regras que estruturam o SNP, em consequência, encontrar os

sistemas decimais e quinários como exemplares desse sistema geral de numeração posicional.

Além disso, a direção de estudo D notou que a praxeologia R_{26} traduzia um dado numeral quinário em um numeral decimal correspondente, mas não respondia à $\mathcal{Z}_2$, pois não apresentou as regras de construção dos numerais quinários por meio de processos de quantificação de materiais concretos.

Nesse sentido, a direção D , sem explicitar sua intenção aos professores FI , encaminhou na seção anterior uma condição que foi prontamente assumida pela comunidade de estudo, considerando que eles estavam em curso de formação de professores para os anos iniciais. Essa condição, especificamente, recomendou a busca de explicação do processo de numeração quinário por meio de quantificações de materiais concretos, no sentido do uso de praxeologias escolares com materiais manipulativos.

Desse modo, esta seção aconteceu em regime de continuidade da sessão anterior, começando com a difusão e defesa de novas respostas do grupo FI_5 que encerrara a seção anterior.

V.2. Trajetória da difusão e defesa das respostas praxeológicas do $S_5(FI_5, \mathcal{Z}_2)$

O grupo FI_5 manifestou na última sessão a necessidade de ampliar o tempo para pensar em quais técnicas poderiam usar, de tal modo que os levassem a responder $\mathcal{Z}_2$ ou pelo menos, construir respostas provisórias. Eles assumiram que explicar a tradução de $AIOOO$ em 2000 era necessário, talvez indispensável, pois a fórmula produzia a tradução a partir de um complexo de cálculos envolvendo potências que não estão ao alcance dos estudantes dos anos iniciais.

Assim, o ponto inicial foi uma tradução no sentido de dedução, com olhar no aspecto posicional do numeral. Nesse sentido depreendemos essa compreensão da difusão do grupo FI_5 , que novamente recorre à praxeologia com ábaco com a técnica de agrupamentos de quatro, sustentados na suposta técnica de agrupamento usada na numeração decimal.

FI₅: *A gente vai por dedução, o número 2000 equivale a AIOOO, então, olhe só, quando ele colocou 2000, isso aqui dá pra perceber que eles também trabalham com a posição e que tem muita diferença. É importante a gente perceber a posição, que ele é um sistema quinquenal e posicional. A posição que os algarismos ficam*

vai interferir na numeração. Então no estudo da posição deu pra enxergar a comparação entre 2000 com 31000 e bate, para esse número 2000 = AIOOO, então ele é posicional e a posição interfere.

FI₅: Eu estive pensando neste período (entre a seção anterior esta) ... e deu pra enxergar algumas coisas ... quando representamos os números em um quadro, separados por casas, essas casas podem ser ocupadas por dígitos, quando falamos em casa decimal, na verdade seriam casas quinquenais! Nesse caso, a casa só pode suportar 4 coisas, que vai de 0 a 4, quando vai pra 5 não cabe mais na casa ... se fosse o sistema decimal poderia colocar mais coisas, no caso até 10 coisas.

FI₅: Se a gente pega o ábaco, é interessante isso aqui, pegando três bolinhas, quantas cabem na unidade de ordem superior 2? quantos cabem? Até onde enche essa casa? Até 4, certo? Então vou colocar 4 bolinhas, vamos começar do zero, até quanto enche a casa?

FI₁: 4

FI₅: Certo

FI₃: O meu, parte da direita...

FI₅: Não! não pode! Mantém o mesmo princípio, da esquerda para direita... então aqui só cabe 4, se fosse no sistema decimal caberia 9.

Figura 70: Representação do processo de numeração no ábaco



Fonte: Arquivo de pesquisa (2020)

FI₅: Posso colocar quantos então...

FI₁: 4

FI₅: Posso colocar outra bolinha?

FI₄: Não!!!

FI₅: Então, vai contra o sistema, porque não suporta, a casa só suporta 4, então tiro da unidade de ordem dois e vou para a unidade de ordem 3, isso quer dizer que na unidade de ordem dois chegou no 5, por isso tiro e vou para a próxima, no caso a unidade de ordem três e represento com uma outra bolinha, com outra cor, no caso vermelha, coloco mais uma bolinha na unidade de ordem três, quanto fica?

Essa compreensão difundida por FI₅ pode ser vista como uma versão das respostas praxeológica R₂₂ e R₂₄ com uso do ábaco, mas que não convenceu a todos sobre o processo de quantificação com a base quinária.

A explicação do processo de numeração com ábaco representando numerais em suposta relação com a quantificação de unidades, presentes no próprio ábaco, sob a restrição imposta por R₂₂ sobre cada “casa” suportar até o máximo de quatro unidades, gerou conflitos entre os professores FI.

FI₂: *Porque a gente tem que zerar e reiniciar de novo, eu não queria ir para o nosso sistema decimal, mas foi preciso, porque todos estamos acostumados com o SD, pra gente entender por exemplo o 100, se na casa da centena vai ficar só 1, 0 na dezena e 0 na unidade, entendeu? Se for 1000 vai ficar só o 1 na unidade de milhar, 0,0 e 0 é a mesma coisa, pra eu começar 1001, 1002, 1003, aí vou mudando.*

D: *Qual entendimento a classe teve quando o FI₅ explicou?*

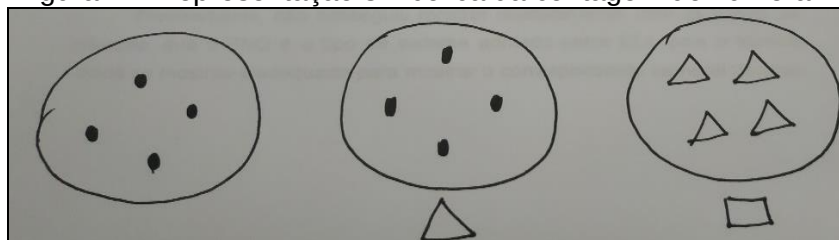
FI₁: *Nenhuma!*

FI₅: *É só fazer uma relação com as casas, igual ao SND, lembra?*

Para esclarecer melhor sua prática, FI₅ voltou à praxeologia do quadro branco e dispensa o uso do material concreto a ser quantificado. Nesse caso, o ábaco é tomado como instrumento que permite representar hipotéticos aglomerados de unidades.

FI₅: *Podemos fazer assim um círculo com bolinhas ... então o que vai representar esse círculo? Com 4 bolinhas? Mesmo seria um círculo com 4 triângulos.*

Figura 71: Representação simbólica da contagem do numeral 4



Fonte: Arquivo de pesquisa (2020)

Sem êxito, com a ilustração no quadro branco FI₅ tentou, novamente, agora utilizando a praxeologia do processo multiplicativo, tentar esclarecer sua apresentação pelo processo de agrupamento sucessivo. Notamos que esse grupo se assegurou e se fundamentou no SND, ou seja, agrupamento de potência de 10, como está explicitado nas falas de FI₅.

FI₅: *Vamos voltar para casa decimal... na casa decimal eu só posso ir até onde com as unidades simples? 9, certo? Isso significa que nas unidades simples o número é multiplicado por 10, certo?*

FI: Sim!

FI₅: Só que nesse caso específico ao invés multiplicar por dez, a gente multiplica por cinco.

FI₅ não convencido de sua resposta retornou ao material concreto, palitos de picolé, e tentou responder uma tarefa (implicitamente posta) que pode ser assim anunciada:

T: Como quantificar palitos de picolé?

Para responder, FI₅ usou uma técnica de agrupamentos de 10 e trocas de unidades, ou seja, a cada 9 unidades de palitos de picolés acrescentou mais uma unidade formando um grupo (que ele chama de amarradinho) e passando para outra “casa” e assim repetindo aos demais agrupamentos.

FI₅: O 10 vai pra outra casa, só que é de 10 em 10, mas na casa só suporta 9 de 10, vamos chegar no máximo aqui, 90 que fica 99, depois que eu chegar aqui como é que fica? como faço pra ir pra outra casa?

FI₁: Pega os amarradinhos só que agora é de 10 em 10

FI₅: Então vai ficar 10 em 10, então temos 10 + 10 não são 20? assim sucessivamente, até chegar no 90, vamos lá?!

FI: 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90...

FI₅: No 90 + 10 é 100, então amarramos, vamos voltar pra cá que é a casa das centenas, mas esse que é nosso universo... universo decimal ... Agora vamos fazer os amarradinhos de 4, quando ultrapassa 4, vai mudar de casa formando quanto? 10 não é? 1,2,3,4, se colocar mais 1 agora formam quantos?

FI₃: 4 né?

FI: Não! É 5

FI₅: Quando contamos 4 mais 1, a gente faz amarradinho com 5, no nosso sistema, quando agrupamos de 10 em 10 também não faz um amarradinho? Aqui amarradinho de 10, lá amarradinho de 5.

FI₄: Não entendi! Pra fazer os amarradinhos de 10, porque tinha que ser 9?

FI₅: Como é decimal tem que suportar até 9.

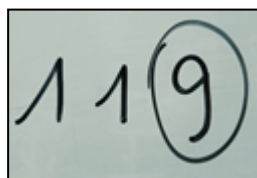
FI₂: Eu posso fazer a representatividade do sistema decimal, calcular as unidades, dezenas, centenas ... milhares, vai seguindo a ordem, na sequência, já no quinário poderíamos fazer a mesma coisa, mas usando outras letras para as unidades, dezenas... aí a gente vai entender que é a mesma sequência.... sem essa representatividade fica difícil entender.

A praxeologia utilizada dos palitos de picolés gerou embaraços na classe que confirmou a falta do saber prático de quantificação, ou seja, FI₅ não conseguiu fazer, nem tão pouco explicitar a quantificação do material concreto. O debate seguiu se

sustentando na resposta praxeológica R_{22} ou R_{24} que não exigiu quantificações de grandezas.

FI₂: Não sei se vão entender ... olhem esse número que vou colocar aqui no quadro branco, o 119, olhem somente para o numeral 9...

Figura 72: Representação do numeral 119 no quadro branco

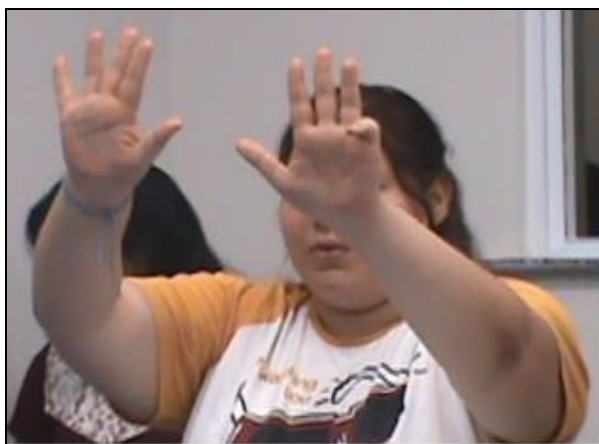


Fonte: Arquivo de pesquisa (2020)

FI₂: É o 10 nas unidades? Não! não é. É o 9, porque é o último número do sistema decimal, entenderam? Então, é por isso que, o grupo FI₅ coloca 4, ao invés de 5, como se passasse pra 10, então o próximo, ele vai passar pra próxima casa no caso dezenas, entenderam?! Por isso que o FI₅ afirma que é o 4 e não o 5 entenderam?

FI₂: Professora posso falar? Eu estava fazendo uma pesquisa e vi uma contagem com as mãos assim 9,8,7,6,5,4,3,2,1,0. Não sei se tem alguma coisa a ver, mas ... começa no zero em uma mão e o último dedo da segunda mão que suponho que pode ou não ser, o 5 ... Vamos contar pela mão direita na ordem decrescente começando pelo 9 e vai até o 0.

Figura 73: Representação da contagem com os dedos das mãos



Fonte: Arquivo de pesquisa (2020)

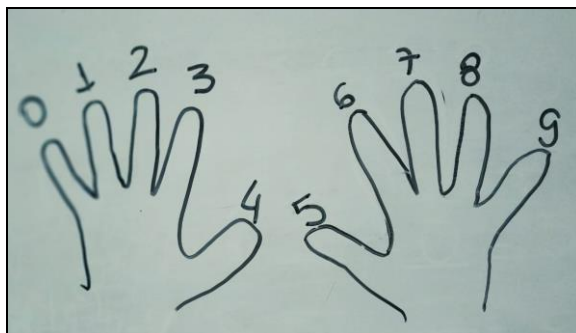
D: Tem alguma relação? Vocês entenderam?

FI₂: No caso dos Et's eles contariam assim 0,1,2,3,4 e 5. Será?!!!

FI₃: Mas esses Et's têm 4 dedos...

FI₂: Pera lá, aqui só cabem nove ... isso é sistema decimal, mas quantos dedos tem os Et's? vou fazer um desenho no quadro...

Figura 74: Representação simbólica da contagem com os dedos das mãos

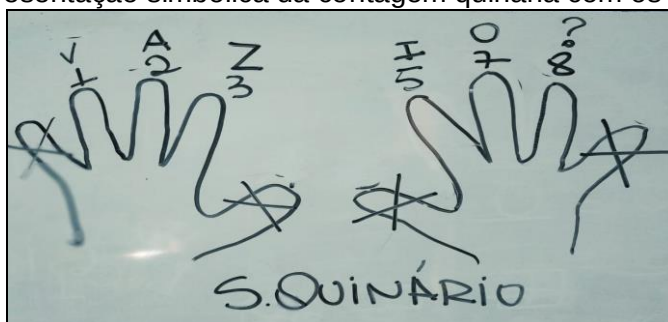


Fonte: Arquivo de pesquisa (2020)

Fl: 3!!!!!!!

Fl₂: Então no sistema quinário contaríamos 0, 1, 2, 3, 4 em uma mão e 5, 6, 7, 8, 9 na outra mão. Vimos que na atividade que nos foi proposta, a primeira questão diz que o Et poderia ter 3 dedos, então eu tirei o dedo mindinho e o polegar e considerei os outros...

Figura 75: Representação simbólica da contagem quinária com os dedos das mãos



Fonte: Arquivo de pesquisa (2020)

Fl₂: Quando eu pensei assim eu associei a primeira atividade, associando a primeira atividade que o Et tem três dedos, penso que eles podem ter várias formas para ter os 3 dedos, entendeu por isso tirei o polegar e o mindinho, ou seja, tem várias formas para agrupar três dedos, eu pensando também poderia deixar o 2, 3, 4 e 7, 8 e 9 por exemplo...

Fl₂: Professora o que está sendo proposto mudaria o sistema, porque cada um ocupa uma posição, por isso acho que não pode, cada um tem um valor...

Fl₅: Quando ela representa os dígitos professora ... os dedos nesse caso representam dígitos, o zero, por exemplo, ela colocou como um dígito no sistema decimal, quantos dígitos nós temos? Quantos maneiras de se escrever os números? quanto dígitos? Quais posições podem assumir?

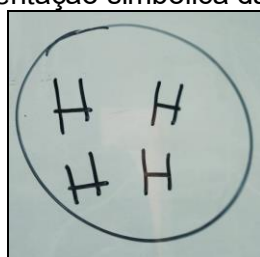
Fl₅: No nosso sistema temos 10 dígitos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, então são 10 dígitos, mas quando se trata de quantidades são 9.

Fl₅: E no sistema quinário são quantos dígitos?

Fl: 5!!!!

FI₃: Professora entendo que os números apresentados são uma representação nossa, então o que os Et's usam são letras, essas letras representam uma quantidade que são os números, quando usamos as bolinhas do ábaco foi pra fugir um pouco da questão dos números, um pouco porque a gente "tá ligado" nestes números, e essas bolinhas poderiam ser qualquer coisa, pauzinhos, triângulos, ... qualquer coisa. Nesse caso, como a colega FI₁₀ fez poderia representar os dedos por H, I, V, A e Z, começando do dedo mindinho até o polegar, no caso seria uma representação numérica e alfabética, números e letras. Poderia ser representada por 0, 1, 2, 3, 4 e o H poderia ser o 0, então o dedo mindinho seria a ausência com a simbologia diferente. Assim como, eu também poderia representar ao invés da mão, poderia fazer 4 H's representando o sistema quinário, em desenhos ficaria assim, mas me perdi! Me ajudem!

Figura 76: Representação simbólica da contagem dos H's



Fonte: Arquivo de pesquisa (2020)

D: Isso forma o quê?

FI₂: Forma o sistema quinário, eu estava tentando fazer aqui contando de 5 em 5.

FI₃: Você tá tentando dizer que esses 4 H's é o sistema quinário, é isso?

FI₃: Mas acho que esqueceu o outro H!

FI₃: Então, a figura que fiz seriam 5 H's invés de 4 H's?

FI₃: Não sei! Rsr rsrs

Os professores FI, estavam "perdidos", então, a direção de estudo D interveio para ratificar a condição imposta.

D: Gostaria que nós parássemos um pouco neste momento para pensar sobre nossas práticas em sala de aula, como seria explicar esse assunto SND para os anos iniciais do ensino fundamental. Porque, se eu não sei pra mim como vou saber para os outros? Como eu vou chegar na resposta de forma concreta, se eu pedisse pra vocês fazerem usando o algoritmo, não tenho dúvida que fariam, mas eu quero que vocês façam é diferente, quero uma transposição, do algoritmo para o concreto.

Nesse contexto, uma nova resposta com uso de ábaco é encaminhada.

FI₂: Professora posso tentar mostrar como fiz? Vou tentar mostrar no ábaco (figura 77), vamos começar pela unidade, se nosso sistema fosse o quinário certo?! Vamos contar 1, 2, 3, 4, ele passar para o pino seguinte, quando for 5 então, ele vai zerar as unidades não vai? Vamos contar de novo: 1, 2, 3, 4, então ele vai ficar 4 e vou usar uma bolinha de outra cor, encheu de novo e a gente tira e começa de novo, e passa

para o próximo pino, toda vez que a gente contar de 4 em 4, no 5 zera e começa de novo.

Figura 77: Representação do processo de contagem quinária no ábaco



Fonte: Arquivo de pesquisa (2020)

FI₄: *Esse aglomerado de bolinhas representa qual número?*

FI₃: *5*

FI₂: *Não é o 4!*

FI₂: *Porque no máximo vai até 4, vou fazer de novo, então 1, 2, 3, 4 até 4 passa para outra casa eu coloco essa bolinha amarela e retiro as 4 azuis e ele vai zerar.*

FI₃: *Esse aí então vai ser 5?*

FI₂: *Isso, 5 porque o sistema é quinário, de novo 1, 2, 3, 4 encheu então, vai de novo, para a casa que estava, agora fica dois de 5, então de novo 1, 2, 3, 4 encheu vai para outra casa.*

FI₃: *Então a dezena vai ser de 5 em 5 é isso?*

FI₂: *Vai ser sim, de 5 em 5*

FI₁: *Então porque não enche?*

FI₂: *Porque estamos explicando para crianças e tem que ser devagar, passo a passo.*

FI₂: *Se eu fico confusa, a criança também vai ficar confusa! Porque tu vais encher aí?*

FI₂: *É só você pensar que a ausência é o zero, quando completa, esse é o sistema quinário ... Aqui completou o sistema quinário, então enche de novo com 1, 2, 3, 4, 5 ... enche de novo, assim vai mais um, vai encher, vai mais um, vai novamente encher, então a gente esvazia de novo, e vai contando até completar, ... mas daqui em diante eu me perdi rsrsrsrs.*

Figura 78: Representação quantitativa das bolinhas na UOS2



Fonte: Arquivo de pesquisa (2020)

Fl₂: *Quando chega no pino das centenas eu acho que some esse, some o outro...*

Figura 79: Representação quantitativa das bolinhas na US



Fonte: Arquivo de pesquisa (2020)

Fl₅: *Some esse, some o outro também ...*

Fl₂: *Então a gente começa de novo, é isso?*

Fl: *É!!! 1, 2, 3, 4.*

Fl₂: *Mas a gente não sabe como falar o outro, a outra casa, aí a gente se perde...*

Figura 80: Representação quantitativa das bolinhas na UOS1



Fonte: Arquivo de pesquisa (2020)

FI₂: *Mas a gente não consegue, depois do terceiro ... o que devo falar!!!*

D: *Bem vou ajudar, unidades simples (US), quando sai da unidade simples passa a ser unidade de ordem superior 1 (UOS1) em relação as unidades simples, em seguida passam a ser a unidade de ordem superior 2 (UOS2) e assim por diante.*

FI₂: *Gostaria que vocês me ajudassem agora, se eu já completei aqui (unidade de ordem superior 3) e aqui (unidade simples) então eu volto pra lá? Aí eu comecei a me perder...*

O uso do ábaco de modo independente da estratégia de quantificação da grandeza física a partir de agrupamentos de unidades, leva os FI ao encontro de dificuldades, particularmente, de denominação das “casas”, representadas pelos pinos do dispositivo e, sobretudo, de como manipular as “bolinhas coloridas” que justificasse de modo claro a recorrência a nova bolinha de cor distinta em um pino seguinte.

De outro modo, estava claro para a direção *D* de estudo que os professores FI não detinham os conhecimentos relativos ao uso do ábaco como dispositivo de quantificação, mesmo que eventualmente pudessem representar um numeral nesse dispositivo.

D: *Então você tem dificuldade de fazer no ábaco? Então qual a sugestão de vocês para resolver este impasse? Será que o que estamos discutindo tem a ver com o 2000 do problema e com três, um, zero, zero?*

FI₃: *A senhora tocou na questão do dois mil, fazendo dessa forma ... não dá para chegar.*

Despistando as limitações, as praxeologias com uso do ábaco foram dominantes no fazer dos FI. Talvez essa escolha tenha sido oriunda de suas relações pessoais com o ábaco para a representação de numerais. Embora com dificuldades, essas relações finalmente se mostraram úteis, como mostrou FI₂.

FI₂: No ábaco a gente representaria o treze na base quinária, com duas bolinhas azuis na UOS1 e 3 bolinhas vermelhas nas US.

Figura 81 Representação do numeral treze na base quinária



Fonte: Arquivo de pesquisa (2020)

FI₁: Quero ver o registro....

FI₂: Tá aqui no ábaco!

FI₄: Olha acho que entendi, as duas bolinhas azuis são de 5, não são?

Aqui fica evidente, para a direção de estudo *D*, a mobilização dos passos N3 do MPR realizada pelos FI, uma vez que reconheceram a estruturação da grandeza física por agrupamentos de unidades como argumento de justificativa da construção da representação no ábaco, que constituiu o passo N4 do MPR.

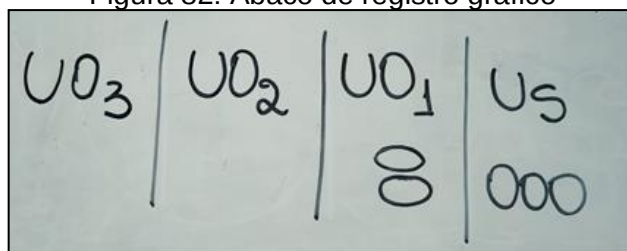
FI₂: Temos duas bolinhas azuis, que representam $5 + 5$ e três vermelhas que é $1 + 1 + 1$.

FI₂: Como represento professora no quadro???? Não sei!!

D: Certo vou ajudar, faça um quadro e escreva: UOS, UOS1, UOS2, UOS3, UOS4, agora registre o que você fez.

FI₂: No caso do treze, tem duas bolinhas na UOS1 e três UOS assim.

Figura 82: Ábaco de registro gráfico



Fonte: Arquivo de pesquisa (2020)

FI₂: Isso não é registro, não!!!!!! Coloca número!!!

FI₄: Número?! Não seria símbolos?!

FI₅: No sistema decimal é treze e essa representação não é decimal é quinário.

D: O que você registrou no quadro?

FI₁: O treze

FI₂: *Pra mim foi apenas duas bolinhas e ...*

FI₃: *Pra mim é vinte e três...* [realidade concreta, mudança de relação não ocorre sem custo, ver Chevallard, 2009a sobre relação com objeto]

FI₅: *No sistema decimal é treze e essa representação não é decimal é quinária.*

Aqui, a direção de estudo observou o passo N5 do MPR, que consistia em converter a representação do ábaco em numeral, bem como encaminhou a compreensão sobre uma mesma quantidade, associada às representações no ábaco e numéricas diferentes, pois cada pino ou casa, indica um tipo de unidade, os quais são definidas no processo de quantificação, a partir da estruturação física do aglomerado de unidades simples em unidades superiores, como descrevem os passos P1, P2, N3 do MPR.

Embora os professores FI não conheçam o MPR, o PEP parece encaminhá-los ao seu encontro e, não menos importante, da necessidade do processo de quantificação de uma grandeza para o encontro dos numerais posicionais.

FI₂: *Professora se eu souber o significado eu vou saber como trabalhar com as crianças, ou seja, na contagem eu vou saber quantificar o número de alunos na sala de aula por exemplo.*

FI₁: *Professora voltando para os Et's achei que tá faltando quantificar. O grupo FI₂ quando mostrou, não revelou a quantificação, é isso que tá faltando colocar no quadro*

FI₅: *Posso ir lá?*

FI: *Pode!!*

FI₅: *Então voltando para representação dos Et's qual é o código lá mesmo?*

FI: *O=0, I=1, V=2, A=3, Z=4*

FI₅: *Pronto, então vamos colocar lá...o número era 13, certo? então vai fica 3 US e 2 UO1, posso colocar no símbolo deles lá fica VA*

Figura 83: Representação do numeral 13

UO ₃	UO ₂	UO ₁	US
		8	000
		2	3
		V	A

Fonte: Arquivo de pesquisa (2020)

Essa dialética nos leva ao encontro do que alerta Chevallard (2018), a mudança de relação dos sujeitos a um dado objeto institucional pode ser conflituoso,

em particular quando o objeto é sensível para esses sujeitos. A sensibilidade parte dos professores FI aos numerais decimais e decorre de suas relações com esses objetos por meio de práticas naturalizadas no seio da sociedade e da cultura, inclusive escolar. Isso é observado em parte, senão em totalidade, dos FI e sua relação com os numerais decimais.

FI₅: *Agora não entendi!! Confundi um pouco, porque na realidade onde está esses dois a cada um vale a 5 como é que a criança vai entender que isso equivale a 10?*

FI₃: *Por que a unidade de ordem superior equivale a 2 de 5, ou seja, 5 + 5.*

FI₅: *São as duas partes, as maiores barrinhas de 5 que se juntam...*

FI₅: *Conseguimos mostrar a representação de quantidades quinárias.*

FI₁: *De numerais do que foi quantificado*

FI₃: *Não tá certo a gente chamar 23 no quinário, porque 23 é decimal...*

FI₁: *Mais é 2 UOS 3 e 3 US...*

A naturalização dos numerais decimais pela cultura de seus usos produz conflitos, por exemplo, quando do uso de denominações a eles associadas para outros tipos de numerais. Especificamente, em lugar das denominações, unidades de primeira, de segunda, de terceira ordem, por exemplo, usam unidades simples, dezenas, centenas, que acabam funcionando como dificuldades, senão obstáculos, para a leitura do ábaco e do numeral associado e sua interpretação sobre a grandeza física quantificada.

Depreendemos das observações, que as quantidades são portadoras de nomes instituídos pela cultura da civilização ocidental em nossa sociedade e, com isso, na escola. Essas denominações são assumidas como próprias de seu sistema cultural de representação numérica decimal. Portanto, escrever o numeral quinário 23 para a quantidade treze parece estranho e produz conflitos pessoais com a representação numérica.

Embora as respostas praxeológicas R₂₂ e R₂₄ tenham falhado como tecnologia para a produção de uma nova resposta praxeológica para a questão 2₂, elas ainda se fizeram presentes, adicionando mais dificuldades e conflitos entre os professores em formação, os FI.

FI₃: *Vou fazer o vinte e cinco (25) ...*

FI₃: *Vou tentar mostrar aqui no ábaco ... a gente sabe que na US cabe 4 + 1 e pula para UOS2 fica 1 bolinha azul que vale 5, 2 bolinhas azuis que vale 10, 3 bolinhas*

azuis que vale 15 e 4 bolinhas azuis que vale 20 é isso? Então ficam 4 bolinhas azuis, não pode ter mais uma bolinha azul, se eu colocar mais 1 bolinha azul passa para próxima, vou colocar 1 bolinha amarela que equivale UOS 3, então o amarelo é o bloco de 25, então fica 1 UOS2, 0 UOS1, 0 US

FI₂: Professora o vinte e cinco é do sistema quinário? Mais não tem o cinco?

Esse embate foi induzido pela resposta praxeológica R₂₄, pois mostrou que um numeral quinário não apresentou o símbolo ou dígito 5 em sua composição. O numeral 25 não existe no sistema quinário. Entretanto, a quantidade associada ao numeral decimal 25 é representada no sistema quinário pelo numeral 100, como demonstram os grupos de professores FI₃ e FI₅.

FI₅: 4 unidades na base superior quanto seria?

FI: 100!

A direção de estudo D observou que esses conflitos precisam ser eliminados. Para isso, novas tarefas de quantificações com diferentes agrupamentos podem se fazer necessárias.

V.3. Síntese da sessão – Encontros e encaminhamentos

O início da trajetória dessa seção mostra os professores em formação manipulando as respostas praxeológicas R₂₂ e R₂₄ com o uso do material concreto, o ábaco, mas sem sucesso na construção de uma resposta, talvez por apresentarem como explicação do processo de numeração a partir do ábaco como representação de numerais em suposta relação com a quantificação de unidades presentes no próprio ábaco, mas sob a restrição imposta por R₂₂ sobre cada “casa” suportar até o máximo de quatro unidades, isso gerou conflitos entre os FI. Diante disso, eles recorreram à quantificação utilizando outro material manipulativo, os palitos de picolés, que também gerou desavenças e embaraços durante o processo, particularmente pela ausência do saber prático de quantificação.

Essa ausência de conhecimento é revelada quando os professores recorreram às respostas praxeológicas R₂₄ ou R₂₅ como tecnologia da prática de quantificação, ignorando que essas respostas não exigem quantificações de grandezas.

A direção de estudo D, apoiada no MPR levou os professores FI a refletirem sobre as práticas em sala de aula nos anos iniciais do ensino fundamental,

solicitando que os mesmos recorressem ao uso de materiais concretos como uma transposição do algoritmo matemático.

O incentivo de levá-los a pensar sobre as práticas foi ignorado, o uso do ábaco permaneceu como recurso principal, de modo independente, como estratégia de quantificação da grandeza física. Apesar das dificuldades, particularmente no que diz respeito à denominação das “casas”, representadas pelos pinos do dispositivo e, sobretudo, de como manipular as “bolinhas coloridas” que justificassem, com clareza, a recorrência a cada nova bolinha de cor distinta em um pino seguinte.

Nesse sentido, a direção *D* de estudo concluiu que os FI não detinham os conhecimentos relativos ao uso do ábaco como dispositivo de quantificação, mesmo que eventualmente pudesse representar um numeral em um ábaco. Embora com dificuldades, as relações dos professores FI com o ábaco se mostraram útil, evidenciando para *D* a mobilização dos passos N3 do MPR pelos professores em formação, uma vez que eles começaram a reconhecer a estruturação da grandeza física por agrupamentos de unidades como argumento de justificativa da construção da representação no ábaco. Isso constituiu o passo N4 do MPR.

Seguindo as ações dos FI, a direção de estudo *D* observa o passo N5 do MPR, que consiste em converter a representação do ábaco em numeral, bem como a de encaminhar a compreensão sobre uma mesma quantidade e ter associada, representações no ábaco e numéricas diferentes, pois cada pino ou casa indica um tipo de unidade, os quais são definidas no processo de quantificação a partir da estruturação física do aglomerado de unidades simples em unidades superiores, como descrevem os passos P1, P2, N3 do MPR.

As observações colhidas no desenvolvimento do PEP funcionam como evidência de que os professores FI caminham ao encontro do MPR e, não menos importante, da necessidade do processo de quantificação de uma grandeza para o encontro dos numerais posicionais. No entanto, como alerta Chevallard (2018), a mudança de relação dos professores a respeito dos numerais decimais se mantinha conflituosa, evidenciando-os como objetos sensíveis para eles.

A sensibilidade por parte dos professores em formação aos numerais decimais talvez possa decorrer de práticas naturalizadas com numerais decimais

que foram por eles incorporadas em seus universos cognitivos e em seus equipamentos praxeológicos de modo não discutível ou intocável.

A sensibilidade aos numerais decimais foi observada a partir da presença de conflitos, quando do uso de denominações a eles associadas para outros tipos de numerais. Especificamente, quando os FI usam, em lugar das denominações unidades de primeira ordem, de segunda, de terceira ordem, por exemplo, os termos de unidades simples, dezenas, centenas. Isso os levou ao encontro de dificuldades, senão obstáculos, pelo conflito de significados nas leituras do ábaco e dos numerais associados às interpretações sobre as quantidades das grandezas físicas.

Além disso, as repostas praxeológicas parciais funcionaram como condições sobre o desenvolvimento do PEP, inclusive gerando conflitos entre os FI. Especificamente, por exemplo, houve conflitos induzidos pela resposta praxeológica R_{22} e R_{24} que mostrou que um numeral quinário não apresenta o símbolo ou dígito 5 em sua composição. Sob essa “regra de composição de numerais”, o numeral 25 não existe no sistema quinário. Isso levou parte dos professores a questionar a existência de um numeral quinário para essa quantidade ou numeral 25.

A direção de estudo D assumiu o papel de prover condições que contornassem esses conflitos, sem esquecer a formação dos professores no sentido do encontro da prática de quantificação esboçada nessa sessão, com fortes conformidades com o MPR, para isso novas tarefas de quantificações com diferentes agrupamentos se fazem necessárias.

4.2.4 – SESSÃO (S4)

1.1. Encaminhamento do sistema didático $S_1(FI_1, Z_2)$

Esta sessão aconteceu em continuidade da sessão anterior, devido ao sistema didático $S_2(FI, D, Z_2)$ considerar que ainda não havia uma resposta praxeológica satisfatória para os professores FI.

Motivados pela direção de estudo D , os professores FI destacaram novos conhecimentos encontrados durante o desenvolvimento dos sistemas didáticos auxiliares, inclusive dos sistemas didáticos solitários, instituídos por eles para a construção das respostas praxeológicas que foram difundidas e defendidas nessa sessão.

O propósito dos professores FI seguiu em encontrar uma resposta praxeológica para a questão $\mathcal{Z}_2$ que pudesse ser julgada satisfatória para o sistema didático $\mathcal{S}_2(\text{FI}, \text{D}, \mathcal{Z}_2)$, ou seja, uma resposta capaz de deixar mais clara a tradução de uma quantidade, vista como um numeral decimal pelos professores FI em um numeral quinário, e vice-versa, frente às respostas praxeológicas construídas por eles, no caso, R_{22} , R_{24} e R_{26} , que encaminharam esse propósito na sessão dois.

As difusões e defesas das respostas praxeológicas foram majoritariamente coordenadas pelo sistema didático $\mathcal{S}_1(\text{FI}_1, \mathcal{Z}_2)$, por supostamente, deter conhecimentos até então não dominados por grande parte dos professores FI.

1.2. Trajetória da difusão e defesa das respostas praxeológicas $\mathcal{S}_1(\text{FI}_1, \mathcal{Z}_2)$

A direção de estudo D encaminha o processo de difusão e defesa.

D: Gostaria que vocês compartilhassem o que foi discutido na aula passada.

Os professores em formação FI, manifestaram-se, destacando encontros e reencontros com praxeologias que foram recorridas em seus estudos e julgaram com potencialidades para o ensino de sistemas de numeração.

FI₂: Na aula passada discutimos sobre a diferença entre sistema decimal e sistema quinário, o que diferencia um do outro, não só, mas também, a maneira de expressá-los, pois nós estávamos confundindo muito um e outro, mas agora nós conseguimos fazer essa diferenciação.

FI₅: Aprendemos a usar alguns instrumentos, recursos didáticos como: ábaco, palitos de picolé, material dourado para representar os sistemas, as ordens da contagem e a representatividade de cada um.

FI₂: Aprendemos que o material dourado não representa só o 1, 10, 100, mas que tem como fazer a leitura do material dourado no sistema quinário.

FI₄: Que através do quadro valor lugar, o quadro que dá as posições de unidades, unidade superior 1, unidade superior 2, possibilitou fazer arrumação e a organização dos sistemas e dos números.

O sistema didático $\mathcal{S}_1(\text{FI}_1, \mathcal{Z}_2)$ tomou a iniciativa de encaminhar a difusão e defesa das respostas praxeológicas.

FI₁: A senhora deixou uma atividade pra gente fazer, utilizando algum tipo de material concreto tínhamos que fazer contagens de alguns números na base quinária, poderia ser no ábaco, palitinhos de picolé, ... passar para o sistema decimal e fazer o registro, e na próxima aula a gente deveria apresentar para a classe e discutir.

D: Então podemos começar?

Fl₁: Sim professora, vamos tentar explicar, mas vamos precisar da ajuda de vocês para interagir conosco, nos ajudando. Vamos tentar explicar, mas é difícil passar isso pra vocês. Então na última aula a professora pediu para gente representar o sistema quinário utilizando materiais, então utilizamos palitos de picolé, vamos mostrar a passagem do quinário para o decimal, vice e versa, fazendo, chegamos à conclusão que é possível fazer isso em qualquer sistema, quaternário, binário, por exemplo, fizemos até uma tabela para ajudar a entender.

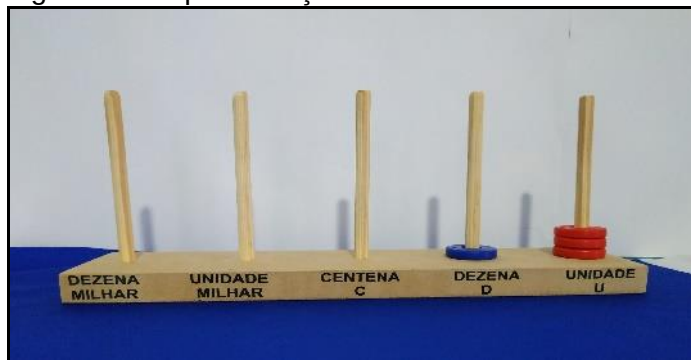
Figura 84: Respostas prontas referente as bases 10, 5, 4 e 3

Base 10 Sistema Decimal	base 5 Sistema Quinário	base 4 Sistema Quaternário	base 3 Sistema ternário
0	0	0	0
1	1	1	1
2	2	2	2
3	3	3	10
4	4	10	11
5	10	11	12
6	11	12	20
7	12	13	21
8	13	20	22

Fonte: Arquivo de pesquisa (2020)

Fl₁: Vamos representar o numeral vinte e quatro no quinário, vocês lembram que o Fl₂ apresentou usando o ábaco? Ele usou o número treze não foi? Eu fiquei com dúvida na apresentação dele, porque pra mim no sistema quinário é o numeral treze, e é representado por uma bolinha azul e três vermelhas.

Figura 85: Representação do numeral treze no ábaco



Fonte: Arquivo de pesquisa (2020)

Fl₁: O numeral quinário é composto por quantos algarismos? Ele tem uma sequência finita de quantos algarismos?

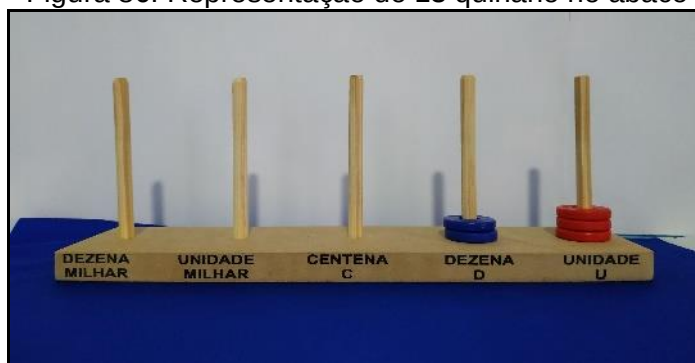
Observa-se que o grupo FI₁ buscou evidenciar que o sistema de numeração dispõe de um número finito de algarismos que identificam quantidades conhecidas. Podemos interpretar as afirmativas nesse sentido como o encontro com o princípio P2.

FI₂: 4.

FI₁: Não de 5! só que ele é expresso por quantidades representadas por 0, 1, 2, 3, 4. Nós chamamos de base 5 por que esse sistema vai se agrupar de 5 em 5, o sistema decimal de 10 em 10, o binário de 2 em 2. O uso de 5 algarismos surge pela contagem 1,2,3,4, quando chega na quantidade 5, se tira, por que completa o sistema de unidade simples e passa a ser unidade de ordem superior 1.

FI₁: A professora pediu pra representar o número treze no quinário e a colega apresentou (sessão anterior) o treze quinário assim: 2 bolinhas azuis, mais 3 bolinhas vermelhas.

Figura 86: Representação do 13 quinário no ábaco

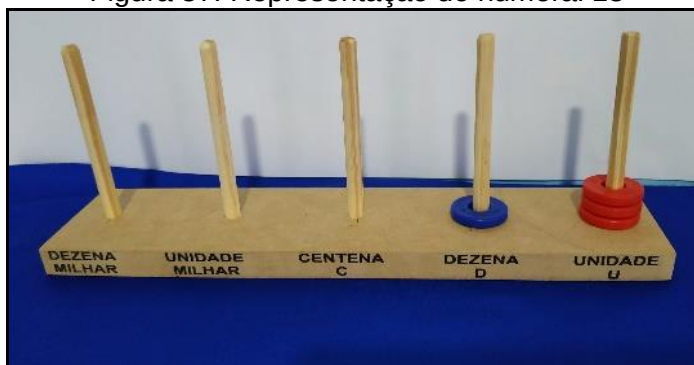


Fonte: Arquivo de pesquisa (2020)

Realizando a praxeologia representação numérica no ábaco – **RNA (R₂₇)**, cuja tarefa consiste em expressar numericamente a representação de um numeral em um ábaco, e vice-versa, FI₁ contesta.

FI₁: Só que pra gente esse número é o vinte e três quinário (23). O número treze quinário pra gente é 1 bolinha azul e 3 bolinhas vermelhas.

Figura 87: Representação do numeral 13



Fonte: Arquivo de pesquisa (2020)

FI₁: Mas, se a gente quisesse transformar esse número, o treze quinário para o decimal? vocês teriam alguma ideia, de como faríamos? E como ficaria? Já sabemos que cada pino só suporta até 4 unidades de bolinhas, então, a bolinha azul não representa 5 unidades? e no pino das unidades temos 3 bolinhas vermelhas que representa $1+1+1$, então para descobri o número dele no decimal basta a gente somar o 5 mais 3 que dá, quanto?

FI₁: $5+3$ é 8. Esse seria um número ... onde?

FI₃: Quinário

FI₁: Não!!!! no decimal, no quinário é 1 bolinha azul e 3 vermelhas, isso quer dizer que, passando para o decimal é $5 + 3$, vocês vão entender melhor quando a gente fizer nos palitos. Se ele tem 5 quantidades mais 3 então fica 8, se eu coloco mais uma bolinha azul, a gente fica com 2 bolinhas azuis mais 3 bolinhas vermelhas, é o vinte e três quinário, e no sistema decimal como ficaria?

FI₂: Pra mim o 23 está no decimal

FI₁: Não, ele tá no quinário pra gente. No sistema decimal é treze. Acho que você tá confundindo!

FI₃: Acho que você tá trocando os nomes...

D: Se manifestem! Se não concordam digam o porquê! É importante a manifestação de vocês para que todos construam as ideias e cheguem a uma conclusão.

FI₅: Gostaria de saber se essa é a visão do grupo?

FI₁: Sim, é difícil explicar... nós entendemos para nós ... mais passar para os outros é difícil!

Os professores **FI₁**, anunciam um tipo de **problema didático de formação de professores, nesse caso, “O que e como ensinar sistema de numeração para professores em formação inicial para atuarem nas séries iniciais?”**

Essa questão se mostrou problemática para os professores FI, em particular, por assumirem que as respostas a essa questão devem considerar também a condição restritiva dos saberes disponíveis aos alunos dos anos iniciais.

Assim, a difusão e defesa de FI_1 encontrou dificuldades, que podemos interpretar como decorrentes de condições criadas por eles, e imbricadas entre si, tais como:

1 – Das escolhas de saberes. Em lugar de uma praxeologia de construção de um numeral como abstração de uma praxeologia de quantificação, eles preferiram tomar as praxeologias de “tradução de numerais”, no caso, R_{22} , R_{24} e R_{26} que não demandam quantificação de grandezas.

2 – Do uso dos materiais concretos, como ábaco, palitos de picolé, tampas plásticas de refrigerantes e material dourado. Esses materiais, ou representações expressas por eles no quadro branco, foram recorridos para construir uma resposta praxeológica R_{28} que pode ser vista como interpretação das respostas praxeológicas R_{26} , sob compreensão da estrutura de escrita de numerais encaminhada por R_{22}/R_{24} , a partir da resposta praxeológica $RNA(R_{27})$. Esta se ocupa de responder sobre a representação de um numeral posicional em um ábaco e, vice-versa, sobre a representação de um registro no ábaco por um numeral.

Para essas respostas praxeológicas, não é necessária a manipulação de materiais concretos ou a quantificação de grandezas. Assim, em vez de tomarem um aglomerado físico de unidades de uma dada grandeza, preferem tomar repetidas vezes, em suas discussões, a “versão” numérica da grandeza, entendida por FI como numeral para então encontrarem um aglomerado estruturado por tipos de agrupamento/amarradinhos, que são tomados pelos professores FI como expressão de um numeral decimal.

FI₁: Escolham um número ...

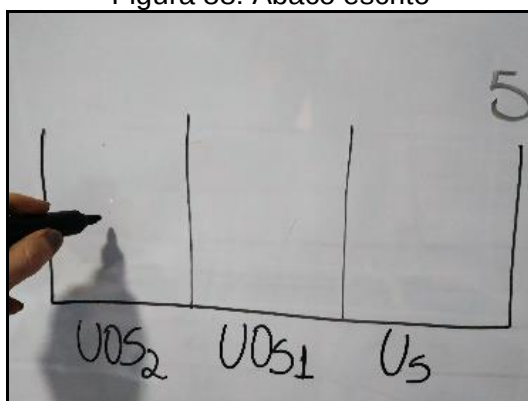
FI₃: Trinta e três

FI₁: Qual sistema?

FI₃: Quinário depois para o decimal.

FI₁: Tá então... vou escrever no quadro...

Figura 88: Ábaco escrito



Fonte: Arquivo de pesquisa (2020)

A coordenação do estudo FI₁ tomou o ábaco escrito, que estava no quadro branco, mas foi contestado.

FI₃: Professora confisca o pilot (trata-se da caneta de escrever no quadro magnético) por favor, pra ver se o grupo sai do quadro.

FI₁: Professora vamos usar o pilot pra registrar as quantidades no quadro valor lugar...

FI₁: Então vou representar o trinta e três na base 5, então vamos contar 1, 2, 3, 4 palitinhos, até aqui é unidade simples, quando eu coloco mais 1, fico com cinco palitinhos, então vira um amarradinho que representa ordem superior 1.

E seguiu fazendo amarradinhos do mesmo tipo até atingir o total de três amarradinhos.

Figura 89: Aglomerado estruturado de três amarradinhos



Fonte: Arquivo de pesquisa (2020)

Ainda acrescentou três unidades para encontrar aglomerado estruturado por amarradinhos; 3 amarradinhos de 5 palitinhos mais 3 palitinhos (figura 90).

Figura 90: Aglomerado estruturado de amarradinhos e unidades



Fonte: Arquivo de pesquisa (2020)

D: Quantos tem até agora?

Fl₁: Quinze professora, tem quinze na nossa contagem decimal, mas pra ela, na representação dela, 5 já fechou uma unidade de ordem superior 1.

Fl₃: Eu entendi, mas não entendi fechar quinze unidades, como se fosse trinta...

Fl₁: Eu tenho que ter trinta e três palitinhos, estou contando no sistema de numeração decimal mas, preciso contar no sistema quinário, vou fazer nos palitos e vou representar no quadro.

Fl₁: Vou fazer uma sequência de contagem vou começar a partir do 1...

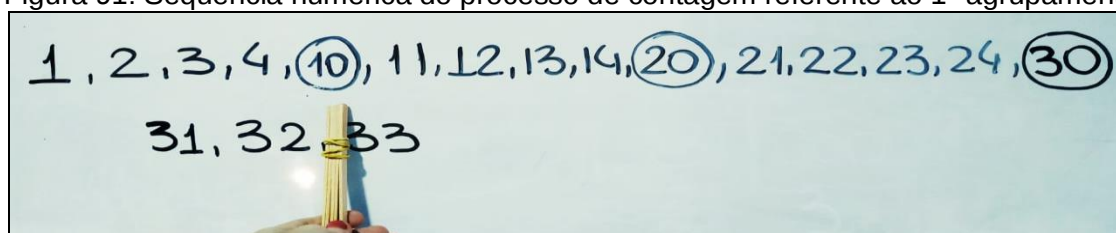
1, 2, 3, 4, 10 (fechou um grupo), 11, 12, 13, 14, 20, (fechou outro), 21, 22, 23, 24, 30 (fechou outro grupo) ...

Fl₃: Agora conta ...

Fl₁: Continuo ... 31, 32, 33 que são as 3 unidades que faltam, se eu for contar de cinco em cinco vai ficar assim...

Fl₁ mostra na sequência, os numerais correspondentes ao primeiro amarradinho de 5 unidades. Toma 1, 2, 3, 4 e quando chega em 5 assinala o 10 para fechar o amarradinho.

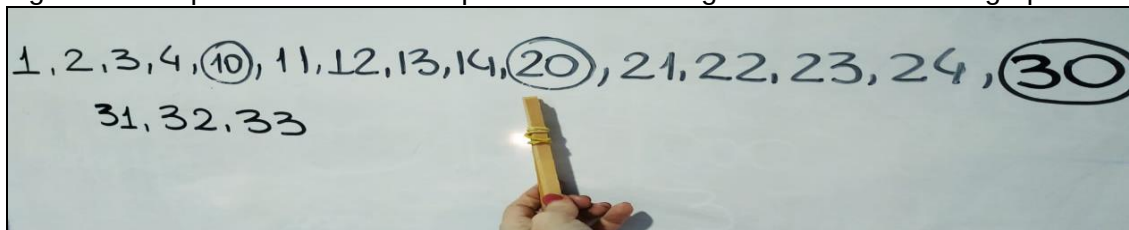
Figura 91: Sequência numérica do processo de contagem referente ao 1º agrupamento



Fonte: Arquivo de pesquisa (2020)

E de modo análogo, toma outro amarradinho correspondente a 11, 12, 13, 14 e 20.

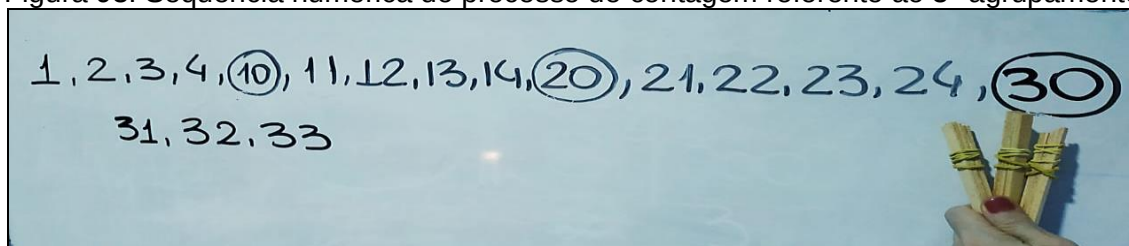
Figura 92: Sequência numérica do processo de contagem referente ao 2º agrupamento



Fonte: Arquivo de pesquisa (2020)

FI₁ continua 21, 22, 23, 24 e 30 como o terceiro amarradinho.

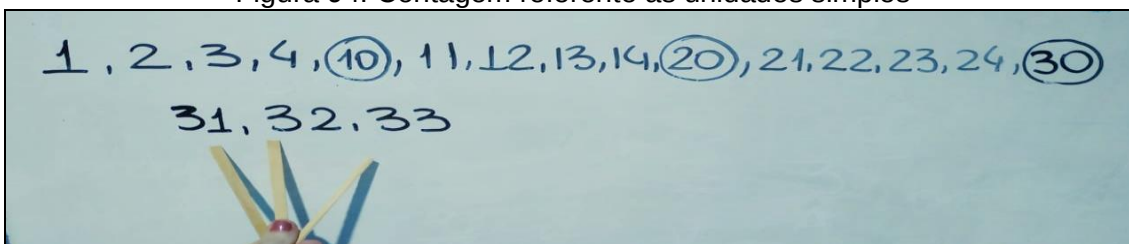
Figura 93: Sequência numérica do processo de contagem referente ao 3º agrupamento



Fonte: Arquivo de pesquisa (2020)

Em seguida conta 31, 32 e 33 para representar os três palitinhos restantes.

Figura 94: Contagem referente as unidades simples



Fonte: Arquivo de pesquisa (2020)

FI₃: Entendi o que você quis dizer, mas eu acredito que tanto o sistema quinário, quaternário, ternário, podem ter a sequência 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e 10, mas vai chegar num ponto, como vimos no ábaco, que quando chegar em certa quantidade ele vai pular para outra casa...

As dificuldades em mostrar um numeral quinário como uma organização de amarradinhos a partir das respostas praxeológicas R₂₂/R₂₄ e R₂₆ se evidenciaram quando se pensou no ábaco como instrumento de quantificação.

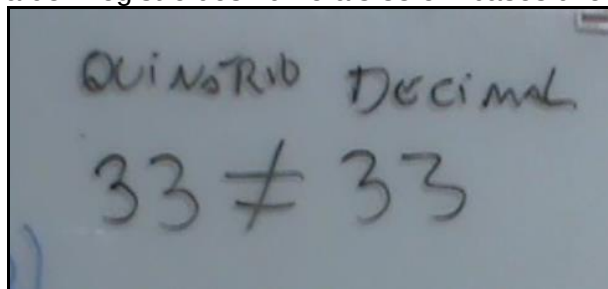
A movimentação de quantidades de anilhas entre as posições do ábaco não aparece na técnica empregada por FI₁. Entretanto, parece que as mobilizações de

quantidades de anilhas entre as posições do ábaco estão presentes na memória didática dos professores FI, afinal, um agrupamento de dez unidades simples se torna uma dezena, disseram suas professoras quando alunos dos anos iniciais.

A resposta praxeológica R₂₈ difundida e defendida por FI₁ respondeu a tarefa de encontrar um aglomerado estruturado por tipos de amarradinhos/ agrupamentos de unidades, de uma grandeza, que correspondia aos dígitos e posições de numeral relativo a uma dada base. Essa resposta se mostrou útil para novos encontros com os numerais, como a clareza de que um numeral pode representar quantitativos diferentes, se as bases ou agrupamentos forem diferentes.

FI₅: Professora o 33 quinário é diferente 33 decimal.

Figura 95: Registro dos numerais 33 em bases diferentes



Fonte: Arquivo de pesquisa (2020)

FI₂: A gente sabe que é diferente, mas por que é diferente? Como? Pra mim essa representação 33 é decimal, eu acredito, assim fica decimal, porque fica uma casa com 3 dezenas e outra de 3 unidades que representa o trinta e três.

Um terceiro aspecto sobre as dificuldades se evidencia, especificamente, sobre a linguagem considerada como reservada às práticas numéricas decimais.

3 – A forte influência cultural do uso dos numerais decimais como reclamadores para si das denominações das quantidades. Assim, a quantidade trinta e três é o numeral decimal 33 e, vice-versa, o numeral decimal 33 é a quantidade trinta e três.

FI₅: É uma questão de linguagem, por exemplo, precisamos entender a diferença entre os números, como no caso do trinta e três, a gente tem que entender as relações entre quinário e decimal, porque estamos usando a mesma forma de se expressar, a mesma escrita, os mesmos algarismos, para expressar uma mesma quantidade. Há um diálogo entre os dois sistemas, por isso que os Et's representam de maneira diferente da nossa. Eu fiz uma pesquisa no site:

0₈: http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/cadernospde/pdebusca/producoes_pde/2010/2010_uenp_mat_artigo_veronica_ortiz_de_oliveira.pdf que nos mostra

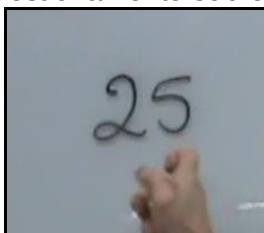
como caminhou, como se chegou no sistema decimal, no sistema posicional, porque tem alguns povos, civilizações que não enxergam posicionalmente os números, como nos romanos, foi por soma, foi uma outra maneira, pra se chegar nisso foi um processo evolutivo, para se chegar nessa evolução foi preciso muitas discussões, na civilização árabe, indiana, os chineses dentre outros até os hindus que chegaram neste ponto

FI₅: Professora penso que foi na questão da linguagem que o colega explicou e a colega não conseguiu se expressar, da linguagem quinária para o decimal, no caso do trinta e três, são três dezenas e três que são três unidades, agora no quinário não pode ser trinta e três eu falaria 3 na unidade superior 1 e 3 na unidade simples.

Embora uma nova dificuldade seja anunciada pelos professores FI, em particular sobre o uso dos dígitos hindu-arábico em numerais não decimais, para eles ficou claro que a interpretação quantitativa (portadora de denominação de um numeral decimal) de um numeral não decimal pode ser diferente, dependendo da base do sistema de numeração.

D: Certo, se todos entenderam então, o que é que é isso aqui?

Figura 96: Questionamento sobre o numeral 25



Fonte: Arquivo de pesquisa (2020)

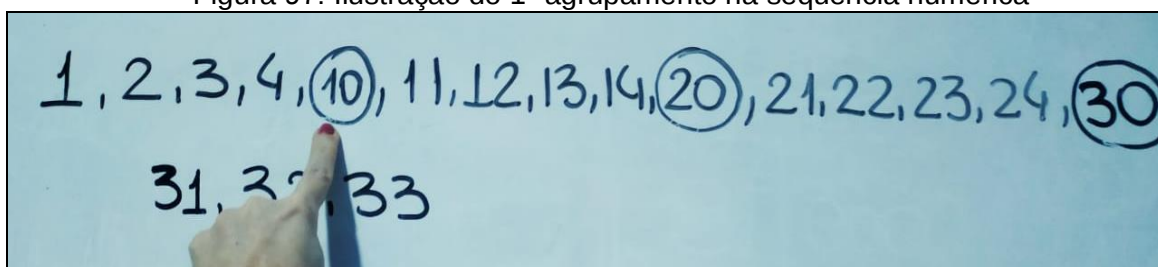
FI₁: Mas, qual é o sistema, professora?

FI₅: Depende do sistema professora. Como seria o sete no quinário?

D: Calma a turma! Precisamos ter calma, porque estamos desconstruindo o que sabemos e construindo novos saberes, precisamos ter calma. A colega pediu para você mostrar o sete no quinário, mostre por favor.

FI₁: Vou contar nos palitinhos 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7, temos sete palitinhos. Vamos contar até 5, fica então 1, 2, 3, 4, 5, fechou um amarradinho, representa 1 UOS1 que fica no lugar do 10, mas que é 5 e 2 US.

Figura 97: Ilustração do 1º agrupamento na sequência numérica

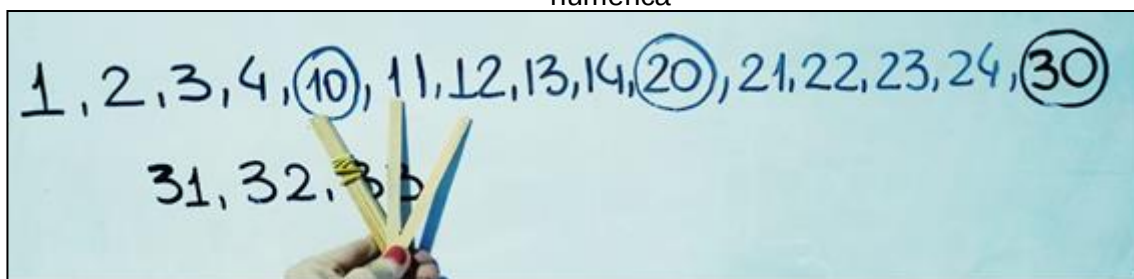


Fonte: Arquivo de pesquisa (2020)

FI₂: Não entendi!

FI₁: Vamos olhar a sequência, então vai ficar um grupo de 5, quando chega no 10, o 11 é o 6, o 12 é o 7, então número doze será o que representa o sete.

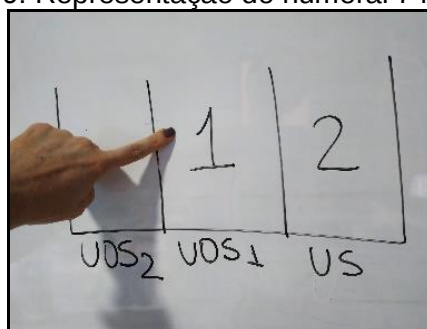
Figura 98: Ilustração do 1º agrupamento e as duas unidades restantes na sequência numérica



Fonte: Arquivo de pesquisa (2020)

FI₁: Representando no quadro fica assim 1UOS1 e 2US

Figura 99: Representação do numeral 7 na base 5



Fonte: Arquivo de pesquisa (2020)

FI₁: Aí tá decimal, né?

FI₂: Não!!!! no quinário

FI₅: Esse número não é o número doze!

FI₂: É o sete

FI₅: É isso!

Observou-se que o uso de agrupamentos de palitinhos de picolé foi obtido a partir da resposta praxeológica R_{22}/R_{24} , especificamente, pela enumeração dos numerais quinários gerados por R_{22} . Na sequência, o sétimo termo, que corresponde ao numeral decimal 7, é o numeral quinário 12. Seguindo a enumeração dos termos da sequência dos numerais quinários obteve-se uma interpretação para os amarradinhos contando (usando os numerais decimais) de 5 em 5.

Essa técnica de “tradução” de numeral decimal em numeral quinário e, daí construir sua representação quantitativa por amarradinhos, pareceu simples, nesse caso.

FI₁: Se nós continuássemos na sequência, nós chegaríamos no que o problema fala a respeito do ano 31000 (trinta e um mil) ser correspondente a 2000.

No entanto, nesse caso, a técnica se mostrou complexa aos professores. Primeiro por se tornar exaustiva e até inviável, pois exige enumerar os dois mil primeiros termos da sequência dos numerais quinários a partir da resposta praxeológica R_{22}/R_{24} . Segundo, pela dificuldade de enumerar os amarradinhos de amarradinhos nessa sequência, até esgotar os dois mil primeiros termos da sequência.

FI₅: Vamos tentar então: na US é zero, na UOS1 é 0, na UOS2 é 0 na UOS3 é 1 e na UOS4 é 3. Que número é esse aqui 31000?

Figura 100: Relação entre letras e numerais

	5.4	5.3	5.2	5.1	
			US ₂	US ₁	US
2000 =	A	I	0	0	0
	3	1	0	0	0

Fonte: Arquivo de pesquisa (2020)

FI₁: Trinta e um mil

FI₅: Não!!!

FI₂: Ah foi mal, porque é quinário!

Fl₅: Vocês deveriam dizer: depende da base que o número está, na verdade eu deveria ter perguntado que número é esse na base 5, que é o quinário. Que número é esse?

Fl₁: A gente fez a relação do sistema dos Et's com nosso sistema e a partir disso, depois da pergunta da colega nos fez ver que a quantidade é a mesma e o que muda é a representação, cada sistema tem uma representação de acordo com o sistema.

Fl₅: Equivale a dois mil porque ele já nos disse no problema, dá pra trabalhar isso aqui, se a gente trabalhar de casa em casa, aí sim tem que ter paciência pra chegar lá, já fiz e realmente chega. Posso professora?

D: Claro! a vontade, por favor...

Fl₅: Agora o desafio ... é usar o material, vamos usar o ábaco

Fl₅: Vamos contar: 5, 10, 15, 20 estou conversando no decimal, no sistema quinário só posso contar 4 e na US pode suportar até 4, qual seria a próxima? Da pra colocar mais um aqui US? Não, né. Posso colocar mais um aqui na UOS1?

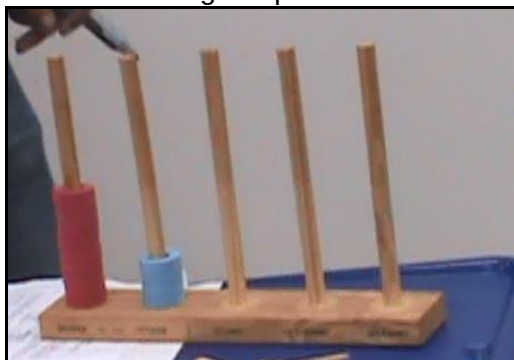
Figura 101: Processo de contagem quinária na unidade simples no ábaco



Fonte: Arquivo de pesquisa (2020)

Fl₅: Não né?! mas posso colocar uma unidade na UOS2 e isso seria o vinte e cinco no sistema quinário. Só que aqui é um aglomerado de 5 em 5 na UOS1 e na UOS2 seria aglomerado de 25 em 25, então seria 25, 25, 25 e 25 que seria 100. Com esses números posso trabalhar até quanto? cento e vinte e quatro quando, vai para próximo, a UOS3 passa a ser de 125 de 125 então ficaria como? $125 + 125 = 250$ com $+ 125 = 375$ com $+ 125 = 500$.

Figura 102: Processo de contagem quinária da US até UOS3 no ábaco



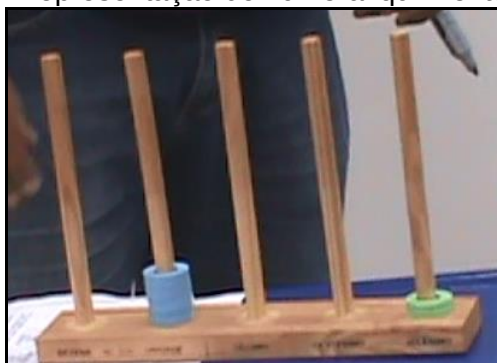
Fonte: Arquivo de pesquisa (2020)

FI₅: E eu tenho ausência na US, ausência UOS1, ausência UOS2, quantas ausências? 3. Seria só isso aqui ... até aí na UOS3 é quinhentos e passa para o próximo?

FI₂: Aí seria 625, né?

FI₅: Até aqui é quinhentos. Se eu quisesse fazer quinhentos e 1 como seria?

Figura 103: Representação do numeral quinhentos no ábaco



Fonte: Arquivo de pesquisa (2020)

FI₅: E o quinhentos e trinta?

FI₂: Seriam 4 azuis na UOS4 que corresponde a 500, 1 na 3ª casa UOS3 que equivale a 25, e 1 na 2ª casa UOS2 e a ausência na US.

FI₅: Tá começando a complicar! Pra gente não ficar batendo cabeça vamos partir para próximo, a gente parte para potência, sempre a gente eleva ... a potência é tudo!!! Para pular para o 500 elevado ao quadrado? Fica como?

Figura 104: Representação do numeral quinhentos na forma de potência

$$500^2 =$$

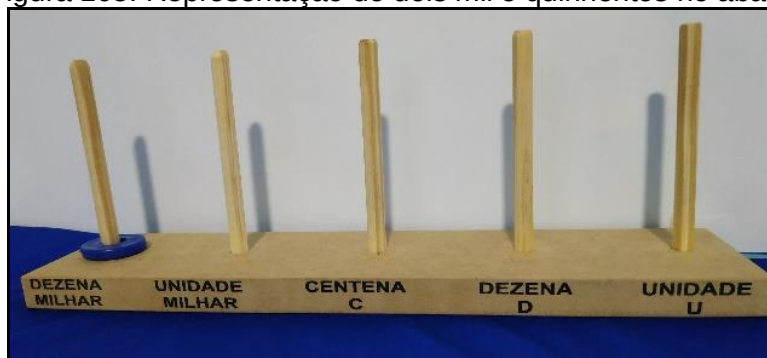
$$2500 = 5 \times 5$$

$$2500$$

Fonte: Arquivo de pesquisa (2020)

FI₅: *Que equivale a 2500*

Figura 105: Representação do dois mil e quinhentos no ábaco



Fonte: Arquivo de pesquisa (2020)

FI₅: *Quando chegar no 500, pode chegar no máximo quanto?*

FI₅: *O próximo não é 2500, então você pode chegar UOS4 até 2449, quando chegar em 2500 aí você passar pra próxima casa. Olha o número, aqui é 2500 a gente já chegou na casa né? isso aqui é 2500, mas quanto ele falou que era 31000? Concordamos que é 1 (UOS4), 0 (UOS3), 0 (UOS2), 0 (UOS1), 0 (US) equivale a 2500, no quinário?*

Figura 106: Relação entre 31000 e o 10000

	5.4	5.3	5.2	5.1	
			US ₂	US ₁	US
2000 =	A	I	0	0	0
	3	1	0	0	0
	1	0	0	0	0

Fonte: Arquivo de pesquisa (2020)

FI: *Sim!!*

O insucesso quanto à formação de aglomerados ficou evidente. O numeral decimal não tem correspondente 10000 e tampouco 2500 é uma potência de 5 ou um agrupamento pertencente a estrutura quantitativa do sistema quinário.

Essa situação de insucesso encaminhou os professores FI ao uso da resposta praxeológica R₂₈ que converteu um numeral quinário, ou em outra base, em numeral decimal com ajuda do ábaco. Este como a expressão concreta da fórmula recorrida pela resposta praxeológica R₂₆.

Fl₄: Três, um, zero, zero, zero

Fl₅: Pois é, mas se isso é 500 e na UOS4 o máximo vai até 625... E quanto que ele falou?

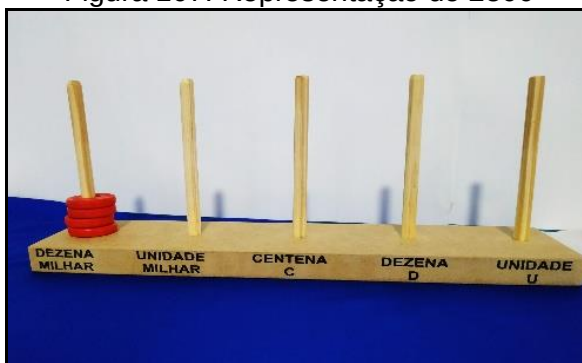
Fl₃: Esse aqui é quinhentos né, então quando você falou que aqui era 500 você falou que $125 + 125 + 125 + 125$ daria seiscentos, não quinhentos!

Fl₅: Poxa é mesmo! Foi um erro de cálculo!

A difusão encaminha arranjos no ábaco seguindo a estrutura de escrita do numeral, segundo a R_{22} , mas assumindo que em cada posição ou casa corresponde a um pino, na mesma sequência do numeral, cada pino corresponde a uma potência. Isso explica o fato de cada potência ser usada no máximo quatro vezes, como faz Fl₃.

Fl₃: Na UOS3 é 500 ($125 + 125 + 125 + 125$), UOS2 é 100 ($25 + 25 + 25 + 25$) e UOS1 é 20 ($5 + 5 + 5 + 5$) ... na UOS4 é $625 + 625 + 625$ dá 2500.

Figura 107: Representação do 2500



Fonte: Arquivo de pesquisa (2020)

Fl₅: Quero só concluir ... um modo de representar a potência

Fl₅: $625 + 625 + 625$ que dá quanto?

Fl: 1875

Fl₅: 1875 mais 1, o amarelinho (125) dá quanto?

Fl: Dois mil

Figura 108: Representação de $1875 + 125$ 

Fonte: Arquivo de pesquisa (2020)

FI₅: Observando o sistema quinário, eu fiz com a potência para o sistema decimal e funciona bacana, zera mesmo!! É um macete para zerar legal!

FI₅: Próximo amarradinho $5^4 = 625$ e assim vai até a necessidade de cada um.

D: Nós então conseguimos mostrar a transformação de base do quinário para o decimal, ficou claro essa passagem? E ao contrário? O exemplo utilizado, 7 na base 5 ficou claro? E o contrário?

FI₁: Ficou claro com o uso do material professora

D: Então deu pra responder a 2ª questão?

A resposta praxeológica para a questão $\mathcal{Z}_2$ não foi apresentada, uma vez que não foi descrito como os Et's construíram seu sistema de numeração e, em particular, como obter um numeral quinário a partir de um dado aglomerado de unidades materiais, mesmo que entendida como um numeral decimal. Entretanto, os professores FI afirmaram que a resposta praxeológica R_{28} atendia a essa questão.

FI₂: Sim já mostramos!

A validade da resposta praxeológica R_{28} pareceu ser sustentada por sua capacidade de encaminhar representações com materiais concretos, como palitos de picolé, material dourado dentre outros. Essa foi uma condição imposta pela direção de estudo que pareceu atendida. Além disso, aparentou responder satisfatoriamente à questão $\mathcal{Z}_3$.

FI₁: A gente pode mostrar o quadro da atividade que fala do feijão, da mandioca?... a gente conseguiu!

D: E os demais grupos, conseguiram?

FI₃: Não...

FI₂: Nós temos uma representação, mas fizemos de acordo com as informações dos Et's dois olhos ... seguimos essa representação, não fizemos transformando para nosso sistema decimal

FI₂: Professora ...vou mostrar...

Figura 109: Representação do feijão no ábaco escrito

UOS ₄	UOS ₃	UOS ₂	UOS ₁	US
3	4	0	1	0
$1875 + 500 + 0 + 5 + 0$ $= 2380$				

Fonte: Arquivo de pesquisa (2020)

D: Vocês entenderam alguma coisa? Existe alguma relação com o que o **FI₁** apresentou?

FI: Simmmmm

FI₂: Vou mostrar...

Figura 110: Representação da quantidade da produção de feijão no ábaco escrito

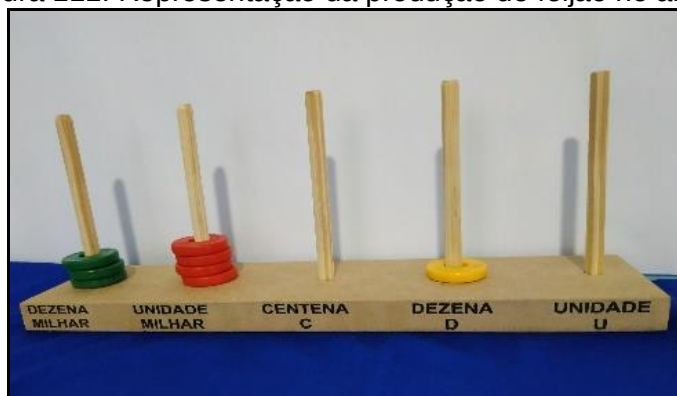
625	125	25	5	
UOS ₄	UOS ₃	UOS ₂	UOS ₁	US
3	4	0	1	0

Fonte: Arquivo de pesquisa (2020)

FI₂: Bem a representação ficaria assim: 625 na UOS₄, 125 na UOS₃, 25 na UOS₂, 5 na UOS₁ e 0 na US. Essa representação é do feijão passando para nosso sistema cada casa representa uma quantidade, então fizemos a multiplicação $3 \times 625 + 4 \times 125 + 0 \times 25 + 1 \times 5 + 0 \times 0 = 2380$ (AZOIO) e agora vamos mostrar no ábaco.

FI₂: No ábaco, fica assim: 0 na US, 1 na UOS₁, 0 na UOS₂, 4 na UOS₃ e 3 na UOS₄.

Figura 111: Representação da produção de feijão no ábaco



Fonte: Arquivo de pesquisa (2020)

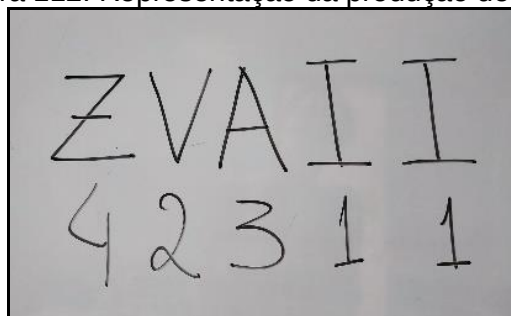
As difusões apresentadas seguiam a resposta praxeológica R_{29} , além de variações dos tipos de ábacos usados, escrito, físico, com material dourado, foi substituída a representação quantitativa com materiais concretos, como os agrupamentos de palitinhos, por exemplo, pelas operações com números decimais, como cálculo de potências, produtos e adição, conforme os registros nos ábacos, tudo em conformidade à resposta praxeológica R_{26} , como mostrou a fala FI_2 .

A direção de estudo insistiu que as repostas apresentadas deveriam ser trabalhadas pelos sistemas didáticos, quando assim apontou:

D: Não ficou claro não... vamos para outro grupo.

FI₃: Professora no nosso grupo a produção do arroz que é ZVAII, vai ficar 42311 que foi o que fizemos, eu peguei uma sequência de 4, 3, 2, 1, 0, não sei explicar porque, mas fiz assim... coloquei em cima do número 42311 ficou assim:

Figura 112: Representação da produção de arroz



Fonte: Arquivo de pesquisa (2020)

FI₃: Fiz utilizando aquela fórmula que o outro grupo havia apresentado outro dia, então ficou assim: $4 \times 5^4 + 2 \times 5^3 + 3 \times 5^2 + 1 \times 5^1 + 1 \times 5^0$ que vai da 2831 que é o valor do arroz.

Figura 113: Representação da produção de arroz pela fórmula

Handwritten mathematical formula for rice production using powers of 5:

$$\begin{array}{cccccc}
 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\
 & 4 & 2 & 3 & 1 & 1 \\
 & 4 \times 5^4 & 2 \times 5^3 & 3 \times 5^2 & 1 \times 5^1 & 1 \times 5^0 \\
 \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \\
 2500 & + & 250 & + & 75 & + & 5 & + & 0
 \end{array}$$

The sum is bracketed and equals 2831.

Fonte: Arquivo de pesquisa (2020)

FI₂: Usando o ábaco ... posso fazer direto?

D: Se todos souberem inclusive vocês ...

FI₂: Vai ficar assim: a $US=1$, $UOS1=1$, $UOS2=3$, $UOS3=2$ e $UOS4=4$, vocês concordam?

Figura 114: Representação da produção de arroz no ábaco



Fonte: Arquivo de pesquisa (2020)

FI: Simmm

Os professores FI não encaminharam uma resposta praxeológica satisfatória para a direção de estudo, o sistema didático $\mathcal{S}$ (FI, D, $\mathcal{Z}_2$) encontrou um novo saber.

FI₁: A gente fez a relação do sistema dos Et's com nosso sistema e a partir disso, depois da pergunta da colega nos fez ver que a quantidade é a mesma e o que muda é a representação, cada sistema tem uma representação de acordo com o sistema.

Isso evidenciou, mais uma vez, a mudança de relação dos professores FI com os numerais. Isso ratifica em definitivo o PEP em andamento como uma resposta praxeológica ao problema de formação docente considerado nesta pesquisa.

I.3 Síntese da sessão

Os sistemas didáticos auxiliares concentraram seus esforços para construir uma resposta praxeológica para as questões $\mathcal{Z}_2$ e, conseqüente, à $\mathcal{Z}_3$ que pudessem ser explicadas a partir do uso de materiais concretos recorrentes nas salas de aula dos anos iniciais.

O esforço foi compartilhado por eles de modo que pudemos considerar duas respostas praxeológicas, R_{28} e R_{29} , em que a segunda é uma modificação da primeira e foram postas à prova ao sistema didático $\mathcal{S}_2(\mathbf{FI}, \mathbf{D}, \mathcal{Z}_2)$. Essas respostas podem ser basicamente assim descritas:

I.4 Respostas praxeológicas

I.4.1 Resposta praxeológica R_{28}

1. Tarefa:

Construir o aglomerado estruturado de unidades de um material concreto que corresponda a um numeral posicional (supostamente não decimal).

2. Técnica:

1- Praxeologia R_{27} – RNA

- ✓ *Tarefa:* Representar o numeral posicional em um ábaco.
- ✓ *Técnica:* Autotecnológica

2- Praxeologia R_{30} – RAA

- ✓ *Tarefa:* Representar o quantitativo descrito em um ábaco por um aglomerado estruturado por agrupamentos/amarradinhos de unidades físicas de materiais concretos, segundo uma dada base.
- ✓ *Técnicas:*
 1. Tomar uma unidade do material concreto para cada anilha presente no primeiro pino ou casa do ábaco, tomado da direita para à esquerda desse ábaco.
 2. Para os demais pinos ou casa do ábaco, juntar para cada um deles, tantos agrupamentos/amarradinhos quanto o número de anilhas presentes nele, tendo cada agrupamento/amarradinho uma quantidade de unidades do material concreto, correspondente ao número decimal,

calculado pela potência da base com expoente decimal, correspondente à respectiva posição do pino ou casa desse ábaco.

3. Tecnologia/ Teoria:

Integração das respostas praxeológicas que tratam da representação de numerais em ábaco R₂₈ com a resposta praxeológica R₂₆, que trata da conversão de um numeral não decimal em um numeral decimal, em observância das respostas praxeológicas R₂₂/R₂₄, além de saberes práticos culturais de manipulação de materiais concretos, disponíveis para as salas de aula dos anos iniciais.

I.4.2 Resposta praxeológica R₂₉

1. Tarefa:

Calcular o numeral decimal correspondente ao numeral escrito em uma base não decimal.

2. Técnica:

1- Praxeologia RNA - R₂₇

- ✓ *Tarefa:* Representar o numeral posicional em um ábaco.
- ✓ *Técnica:* autotecnológica

2- Praxeologia RND – R₃₁

- ✓ *Tarefa:* Calcular o numeral decimal a partir de representação de um numeral não decimal em um ábaco.
- ✓ *Técnica:*

1. Tomar o numeral decimal correspondente ao total de anilhas presentes no primeiro pino ou casa do ábaco, tomada da direita para à esquerda.
2. No mesmo sentido, adicionar o numeral obtido no item (1) aos demais numerais decimais obtidos dos produtos entre os numerais decimais correspondentes às quantidades de anilhas presentes em cada pino ou casa e as potências decimais da base em que o expoente é igual ao numeral decimal relativo à posição do pino ou casa no ábaco.

3. Tecnologia/ Teoria:

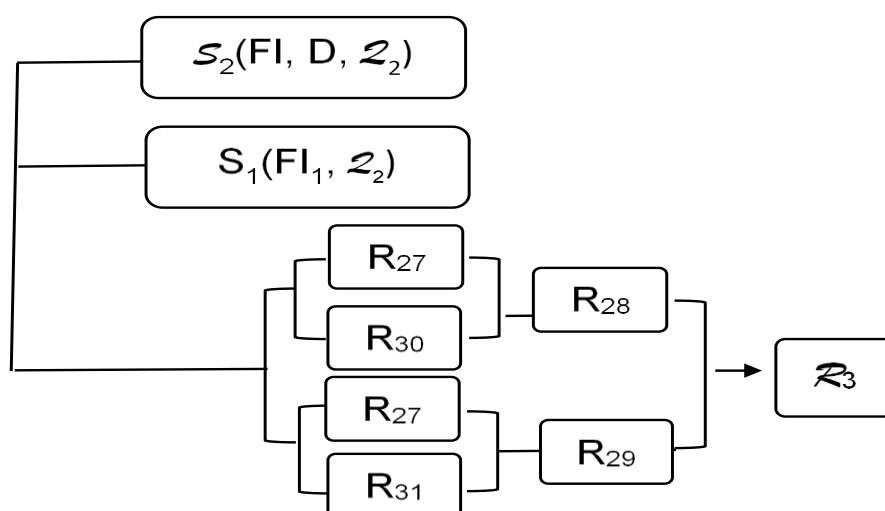
Integração do saber prático sobre a representação de um numeral em um ábaco com a resposta praxeológica RND sobre a representação numérica decimal

de um estado de um ábaco com fundamento na reposta praxeológica R_{26} , com observância das respostas praxeológicas R_{22}/R_{24} .

As situações de numeração criadas no desenvolvimento dessa sessão com o uso dessas respostas praxeológicas mostraram que os numerais decimais são objetos sensíveis (CHEVALLARD, 2009a) para parte expressiva dos professores em formação FI, considerando os conflitos que emergiram nas situações que eram usados em suas formas escrita ou falada em referência a outros numerais não decimais.

Esquemáticamente, a trajetória referente à sessão 3 e 4 foi assim representada:

Figura 115: Percurso do $S_2(FI, D, \mathcal{Z}_2)$



Fonte: Arquivo de pesquisa (2020)

4.2.4.1. Encontros e encaminhamentos

Os professores FI, consideraram a condição imposta pela direção de estudo **D** sobre a necessidade de usar material concreto em suas respostas praxeológicas, mas admitiram que essas respostas podiam estar restritas ao uso de um ábaco, em suas diferentes representações, inclusive na forma escrita, embora com restrições de alguns professores **FI** por não os considerarem material concreto.

Assim, tomaram repetidas vezes, em suas discussões, um numeral, supostamente não decimal, para então encontrarem um aglomerado estruturado por

meio de amarradinhos com ajuda de ábacos, tomados pelos professores como um numeral decimal.

As difusões e defesas das respostas praxeológicas foram marcadas por dificuldades e com novos encontros com conhecimentos, todos sob condições criadas no desenvolvimento do PEP que extrapolaram essa sessão, mas que estão imbricados entre si, e para além da imposição sobre o uso de material concreto, como o uso de respostas parciais até então encontradas no desenvolvimento do PEP.

Entre as dificuldades observadas, não necessariamente encontradas na ordem cronológica do PEP, destacamos:

1 – Em se tratando das escolhas de saberes, em lugar de buscar uma resposta praxeológica sobre a construção de um numeral para o questionamento ***Q_N do tipo “como construir um numeral posicional a partir de aglomerados de unidades físicas?”*** os professores FI preferiram, em sentido contrário, tomar as praxeologias de “tradução de numerais”, no caso, como as respostas praxeológicas R₂₅, R₂₆ e R₂₈, encaminhadas por eles na sessão dois, que não demandaram quantificação de grandezas. Talvez por eles não terem encontrado o questionamento Q_N, até então;

2 – Com o uso dos materiais concretos como, por exemplo, o ábaco em suas diferentes versões, o físico, o escrito, o de papel ou quadro valor lugar, além de palitinhos, tampas de refrigerantes e material dourado. As manipulações de palitinhos e tampinhas concretos foram feitas por meio da resposta praxeológica RNA(R₂₇) que se ocupou da representação de um numeral em um ábaco.

Isso ficou evidenciado pelo frequente abandono do uso desses materiais nas realizações das praxeologias. No lugar deles, foram tomadas as representações no quadro branco, as quais mostraram insegurança para interpretar os numerais por meio da interpretação da praxeologia R₂₆, com uso do ábaco e sob a compreensão da estrutura de escrita de numerais encaminhados por R₂₂/R₂₄.

3 – Com as complexidades do suposto processo de quantificação com o uso de ábacos, os professores FI, mostraram os numerais quinários como aglomerados estruturados por meio de amarradinhos a partir das respostas praxeológicas R₂₆ e R₂₂/R₂₄, tomando o ábaco como instrumento de quantificação.

No caso do texto, especificamente, o que afirma que 31000 corresponde ao decimal 2000, a técnica se mostrou complexa aos professores, primeiro por se tornar exaustiva e até inviável, pois exigia enumerar os dois mil primeiros termos da sequência dos numerais quinários e, segundo, pela dificuldade de enumerar os amarradinhos de amarradinhos nessa sequência, até esgotar os dois mil primeiros termos da sequência.

Nesses casos, as mobilizações de quantidades de unidades (anilhas, por exemplo) entre os pinos ou casas do ábaco não apareceram claramente na técnica empregada por FI e quando isso aconteceu, conflitava as mobilizações de anilhas entre as posições do ábaco, presentes em um pino com o preconizado pelas respostas praxeológicas R_{22}/R_{24} . Isso ficou evidenciado quando não conseguiram encontrar os agrupamentos do sistema quinário por mobilização de unidades de materiais concretos, no caso, os agrupamentos 5, 25, 125, 625.

Os professores assumiram as orientações de R_{22}/R_{24} e, com isso, realizaram operações no ábaco em que cada pino ou casa admitia o máximo de quatro anilhas em cada pino. Assim, obtiveram, 5, 20 (4×5), 100 (4×25), 500 (4×125), que os impossibilitou de encontrarem o numeral quinário 31000 a partir da estruturação por agrupamentos de um quantitativo correspondente ao numeral decimal 2000. O numeral quinário encontrado por eles a partir de um quantitativo correspondente a 2000 foi 4×500 , o que corresponde ao numeral quinário 10000.

Essa situação experimentada pelos professores FI, demonstrou que eles desconheciam a estrutura dos numerais decimais, embora conhecessem os termos que se referiam às posições que compõem um numeral decimal, como unidades, dezenas, centenas, etc. Mas, a dependência entre as noções desses agrupamentos não foi apresentada para os decimais e não foi estendida, se assim podemos falar, para os numerais em outras bases.

4 – Com o uso escrito por extenso e falado na língua materna relativo aos numerais não decimais, nesse sentido, as relações dos professores FI com os numerais decimais pareceram encaminhar dificuldades, senão obstáculos, para a compreensão desses numerais.

A linguagem parecia reservada às práticas com numéricas decimais. De outro modo, a forte influência cultural do uso dos numerais decimais reclamava para si as

denominações das quantidades. Assim, a quantidade trinta e três é o numeral decimal 33 e este é a quantidade 33. Isso impedia, já que soava estranho para eles, falar um numeral não decimal ou seus componentes posicionais com as mesmas denominações de numerais decimais.

As dificuldades pareciam ter levado os professores FI a restringirem suas difusões e defesas às respostas praxeológicas R_{28} e R_{29} , que se ocupavam de encontrar um aglomerado estruturado de unidades de uma grandeza, identificada com um numeral decimal, com ajuda ou não de tipos de amarradinhos, mas sobretudo, a partir do uso de um ábaco com os pinos e anilhas interpretados como dígitos em posições do numeral relativo a uma dada base.

A respeito dessas dificuldades, os professores FI afirmaram que as respostas praxeológicas R_{28} e R_{29} atendiam ao objetivo do sistema didático $S_2(FI, D, Z_2)$. Nesse sentido, esse sistema didático validou as respostas praxeológicas R_{28} e R_{29} por parecerem sustentar suas capacidades de encaminhar representações de numerais não decimais por meio de numerais decimais e, ainda, como aglomerados de unidades materiais, como palitinhos, tampinhas e material dourado, sobretudo, com o uso de um ábaco.

Essas respostas ratificaram a resposta R_3 à questão Z_3 e se mostraram úteis aos professores FI no sentido de proverem novos encontros com seus conhecimentos. Entre os novos encontros observados, não necessariamente encontrados na ordem cronológica dessa sessão do PEP, destacamos:

- 1 – A noção de numerais ganhou novos contornos para os professores FI, particularmente, quando declararam que passaram a ter a clareza de que um numeral pode representar quantidades, se as bases ou agrupamentos forem diferentes, além de que para uma mesma quantidade pode ser associada numerais diferentes, dependendo da base do sistema de numeração;
- 2 – Com diferenças entre sistema decimal e sistema quinário, particularmente com a maneira de expressá-los, pois antes se confundiam com eles e agora conseguiam fazer a diferenciação;
- 3 – Com materiais manipulativos como os ábacos, os palitos, as tampinhas e o material dourado para representar os sistemas, as ordens da contagem e a representatividade de cada um, o material dourado não precisava representar só 1,

10, 100, mas que há modos de se fazer leituras com esse material no sistema quinário. Além desses, os professores FI afirmaram que por meio do quadro valor lugar, o quadro que dá as posições de unidades, unidade superior 1, unidade superior 2, possibilitava fazer arrumação e organização dos sistemas e dos números;

4 – Com o princípio P2, foi observado que o sistema didático $S_1(FI_1, \mathcal{Z}_2)$ tomou a iniciativa de encaminhar a difusão e defesa das respostas praxeológicas evidenciando que os sistemas de numeração dispunham de um número finito de algarismos que identificavam quantidades conhecidas, o que mostrava o segundo princípio constante no MPR como orientador da direção de estudo D;

5 – Com o ***problema didático da formação inicial de professores, nesse caso, o que de sistema de numeração e como ensiná-lo com materiais concretos para professores em formação inicial, ou alunos, das nas séries iniciais?*** Foi observado que a condição imposta pela direção de estudo D sobre o uso de materiais concretos levou os professores ao encontro da dificuldade em construir organizações para o estudo e ou para o ensino de sistemas de numeração com materiais concretos. Isso evidenciou o encontro com essa problemática de formação.

As dificuldades e encontros, todos imbricados entre si no processo de desenvolvimento do PEP, evidenciaram, em definitivo, que houve mudanças nas relações dos professores FI com saberes teóricos e práticos, que incluíram as noções de numerais, de materiais concretos e das praxeologias com eles em consonância com os saberes praxeológicos até então desenvolvidos. Isso ratifica, em definitivo, o PEP em andamento como uma resposta praxeológica ao problema de formação docente considerado nesta pesquisa.

No entanto, para a direção de estudo D, a resposta praxeológica para a questão $\mathcal{Z}_2$ não foi apresentada, uma vez que não foi descrito como os Et's construíram seu sistema de numeração e, em particular, como obtiveram um numeral quinário a partir de um aglomerado de unidades materiais, mesmo que entendido como um numeral decimal.

A direção de estudo D observou que vários grupos de professores FI utilizaram apenas um ábaco, às vezes o ábaco escrito, além de insistirem em tarefas

envolvendo apenas o sistema binário. Sob essas observações, consideramos que as respostas praxeológicas que recorriam apenas aos ábacos, e que não diversificavam as bases, poderiam estar funcionando como obstáculos ao encontro dos professores com a respostas praxeológicas à questão $\mathcal{Z}_2$.

Assim, para a continuidade do PEP, a direção de estudo D encaminhou aos professores FI novas condições para a construção de respostas praxeológicas, especificamente, com uso de agrupamentos em bases diferentes e com materiais diversos, tampinhas, palitos de picolé, etc., e, sobretudo, sem uso de um ábaco.

4.2.5 – SESSÃO (S5)

II.1 Encaminhamento do sistema didático $\mathcal{S}_2(FI, D, \mathcal{Z}_2)$

A sessão 5 dá seguimento às sessões 2, 3 e 4 e apresenta a trajetória final do percurso construído pelo sistema didático $\mathcal{S}_2(FI, D, \mathcal{Z}_2)$. Nessa sessão, foram concentrados os esforços da classe $[FI, D]$ em responder à questão $\mathcal{Z}_2$ de modo a ser aceita frente às condições criadas pela direção de estudo D, como as que exigiam as práticas de manipulações de unidades de materiais concretos, mais especificamente, a construção de uma resposta ao *problema didático de formação de professores*, nesse caso, **“O que e como ensinar sistema de numeração para professores em formação inicial para atuarem nas séries iniciais?”**

As manipulações de unidades de materiais concretos foram impostas por D, enquanto pesquisador, como condição para validar ou não o MPR como dispositivo de orientação didática para a desnaturalização dos numerais decimais e, enquanto formador, para validar ou não o PEP orientado por esse MPR, também como condição para prover trajetórias de formação inicial de professores relativo aos sistemas de numeração, no sentido de promover mudanças de relações caracterizadas por meio de aquisições de saberes e práticas com esse objeto de ensino.

Assim, os professores FI em seus sistemas didáticos auxiliares desenvolveram novas respostas praxeológicas à questão $\mathcal{Z}_2$ sujeitas às condições impostas pela direção de estudo D, que foram difundidas e defendidas nessa sessão.

O desenvolvimento dessa sessão mostrou o encontro dos professores FI com o processo de quantificação de unidades no desenvolvimento do PEP e, com isso, ratificou esse PEP como uma resposta praxeológica ao problema de formação docente relativo ao sistema de numeração, inclusive decimal, além de permitirem à direção de estudo, elementos de respostas de validação do MPR como um dispositivo didático para a desnaturalização dos numerais, entre eles, os numerais decimais.

II.2. Trajetória da difusão e defesa das respostas praxeológicas $S_2(FI, D, 2_2)$

Seguindo seus propósitos, a direção de estudo D orientou os professores FI a escolherem um material concreto, exceto os ábacos físicos e que realizassem suas praxeologias com diferentes bases ou agrupamentos.

O sistema didático $S_1(FI_1, 2_2)$ deu início à sessão de difusão e defesa.

FI₁: Escolham um número e a base pra gente mostrar

FI₂: 7 na base 2, como ter 7 na base 2?

Figura 116: Sete unidades de fichas plásticas



Fonte: Arquivo de pesquisa (2020)

FI₁: Sim, vamos agrupar de dois em dois, precisamos saber como representar, certo? Então separamos as fichas de duas em duas, teremos 3 grupos de 2 e uma ficha.

Figura 117: Primeiros agrupamentos: de duas unidades tampinhas



Fonte: Arquivo de pesquisa (2020)

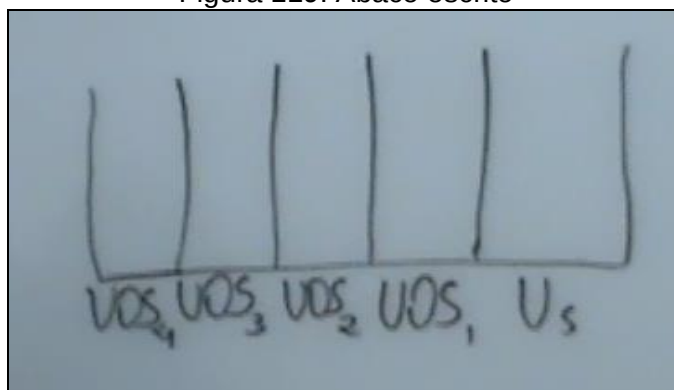
Figura 118: 2º agrupamento: dois agrupamentos do agrupamento anterior imediato



Fonte: Arquivo de pesquisa (2020)

FI₁: Qual o algarismo corresponde isso? Por conta da linguagem, temos que pensar como poderíamos falar, porque, como o colega falou na aula passada, temos que ter cuidado para não usar a nossa linguagem, dos terráqueos, ou seja, o decimal, mas eles quando falam o número é diferente da gente por causa da posição e da base que os numerais ocupam. A gente vai usar aquele quadro de unidades: unidade simples, unidade de ordem superior 1, unidade de ordem superior 2, unidade de ordem superior 3, unidade de ordem superior 4... Eu vou demonstrar utilizando o método da contagem, na base 2.

Figura 119: Ábaco escrito



Fonte: Arquivo de pesquisa (2020)

FI₁: Vamos utilizar este outro quadro aqui para ajudar. O sete na base 2, como podemos representar?

Figura 120: Quadro de unidades

10 BASE	BASE 2
	0,1
0	0
1	1
2	10
3	11
4	100
5	101
6	110
7	111

Fonte: Arquivo de pesquisa (2020)

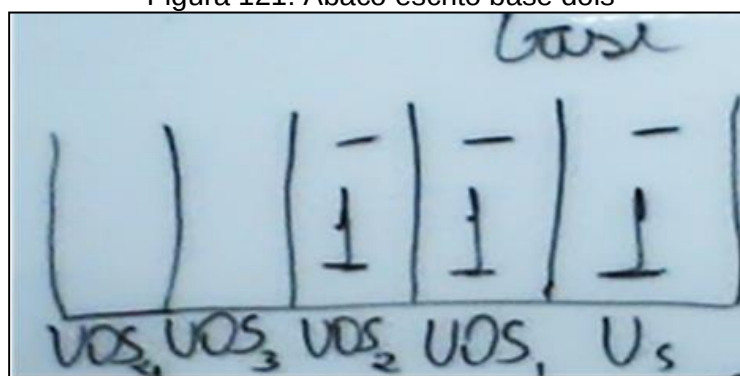
FI₂: Não entendi nada! Você ta tentando fazer como no ábaco

D: Você se prendeu na técnica do ábaco.

O sistema didático S₁(FI₁, 2₂) defendeu sua resposta.

FI₁: Vou registrar aqui no quadro os valores respectivos ao 7 na base 2 então fica 1, 1 e 1 o valor quantitativo suportável de cada unidade é duas tampinhas estamos fazendo igual como o FI₅ fez na aula passada.

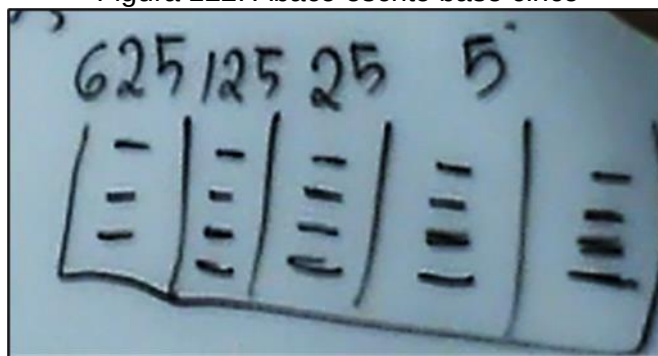
Figura 121: Ábaco escrito base dois



Fonte: Arquivo de pesquisa (2020)

FI₁: Então vamos lá, vou usar o quadro pra mostrar, então fica 1 US, 1 UOS1, 1 UOS2 Concordam? Lembram que o colega FI₅ explicou sobre o registro, usando o quinário? Ele explicou quantas unidades suporta em cada unidade. Vamos lembrar no caso do quinário só suporta 4 de 4, porque quando forma 5 passa para outra unidade de ordem superior, no caso a seguinte, porque agrupou, então vou registrar aqui no quadro vai ficar 5, 25, 125 e 625.

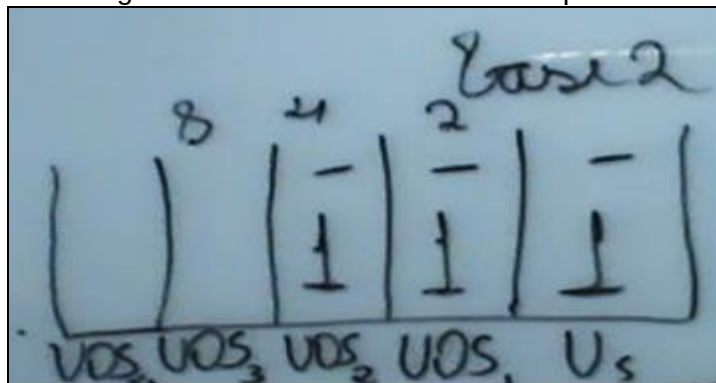
Figura 122: Ábaco escrito base cinco



Fonte: Arquivo de pesquisa (2020)

FI₁: Então como fica na base 2? Só um tracinho em cada unidade de ordem, por que se for 2 passa para a próxima, só pode ter 1 em cada, pois se tiver 2 passa para o próximo, 1 é o que suporta. Certo? então cada tracinho desses, formam dois agrupamentos, então fica 1 na US, se tiver 2 passa para próxima a UOS1 que também só pode ter 2 se tiver mais passa para próxima que é a UOS2 e quanto vale essa?

Figura 123: Registro do numeral 7 na base 2 no quadro de unidades



Fonte: Arquivo de pesquisa (2020)

FI₁ continuou com argumentos confusos, inclusive recorreu à base 3 para se fazer entender. No entanto, o sistema didático $S_2(FI, D, 2_2)$ rejeitou sua resposta praxeológica.

FI₂: Não, não entendi, vocês só explicaram os números no quadro e na prática?

D: Fizeram pelo algoritmo...

FI₂: Entendo que na nossa cabeça tá claro essa questão, mas quando se trata de ensinar para as crianças usando material concreto ... não conseguiram ... e acho que é esse o propósito da professora.

A direção de estudo alerta que o propósito é do curso de formação e encaminha que FI₁ faça usando o material concreto, antes abandonado por ele.

D: Não meu exatamente, mas do curso de vocês. Bem façam o agrupamento novamente usando as tampinhas.

O desenvolvimento da estruturação das sete tampinhas em tipos de agrupamentos foi realizado com dificuldades (passo N3/MPR). Ficou evidente em definitivo que a passagem do primeiro agrupamento para o segundo agrupamento não fazia parte do equipamento praxeológico do sistema didático $S_1(FI_1, Z_2)$. A passagem para o segundo agrupamento foi realizada com ajuda da direção de estudo.

FI₁: *São 7 tampinhas, vou juntar, ou melhor agrupar de dois em dois, porque estamos fazendo na base 2.*

Figura 124: 1º Agrupamento – 2 unidades de tampinhas



Fonte: Arquivo de pesquisa (2020)

FI₁: *Esse que sobrou, é a US?!*

FI: *Sim*

FI₁: *Tá, e agora? Agrupa de novo, professora?*

D: *Sim*

FI₁: *Então vai ficar assim? [dúvida], eu junto de novo? Duas de duas, sobra 1 de novo, então fica 1 agrupamento de 4 e 1 agrupamento de 2, então fica 1 na US, 1 na UOS1 e 1 na UOS2.*

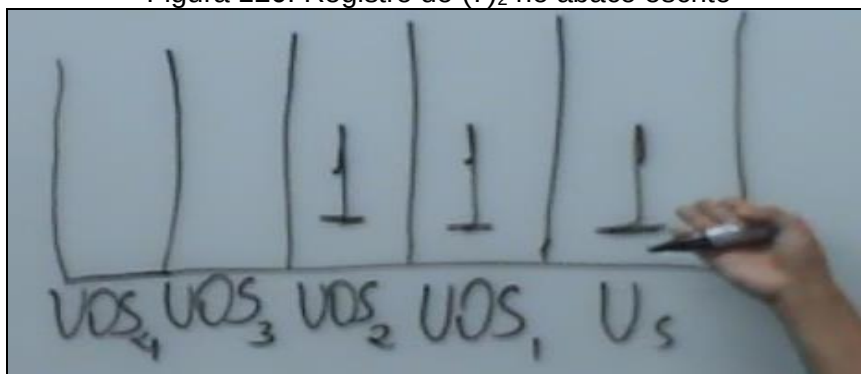
Figura 125: 2º Agrupamento de 2 de 2 de tampinhas



Fonte: Arquivo de pesquisa (2020)

FI₁ então registra no ábaco escrito as quantidades por tipos agrupamentos obtidos. (passos N4/ N5/MPR).

Figura 126: Registro do $(7)_2$ no ábaco escrito



Fonte: Arquivo de pesquisa (2020)

Esse momento cronológico da sessão evidenciou o primeiro encontro do sistema didático $S_2(FI, D, Z_2)$ com o estruturado pelo MPR.

FI₁: Entendi!!!! Quero fazer de novo!

Esse primeiro encontro despertou o interesse do sistema didático $S_2(FI, D, Z_2)$ que, então, decidiu conhecê-lo melhor.

FI₃: Faz no palitinho!

FI₁: Vou fazer, usando o número 7, então pego 7 palitos vou agrupar de 2 em 2 sobrou 1, faço os amarradinhos então fico com 3 amarradinhos e 1 que é a unidade simples.

Figura 127: Registro do agrupamento de palitos de picolé na base 2



Fonte: Arquivo de pesquisa (2020)

FI₁: Agora grupo de novo, pego 2 amarradinhos e junto, faço um novo amarradinho, sobra 1 de novo e sobra também um amarradinho que é o agrupamento de 2 então fica 1,1,1!

Figura 128: Quantitativo estruturado por tipo de agrupamentos – passos N3/MPR



Fonte: Arquivo de pesquisa (2020)

FI₄: Vamos escolher outro número, mas na base 2, o 12 por exemplo

FI₁: Tá, então vamos separar 12 palitos contando ... 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12, pronto. Já temos 12 palitinhos. Vamos, agora, agrupar de dois em dois: dois, dois, dois, dois, dois acabou, sobrou alguém? Não! então na unidade simples é ausência.

FI₁: Tem alguma unidade simples? Não, né? então agora a gente vai reagrupar amarrando de dois em dois, ficamos com 6 amarradinhos de 2. Então fazendo o registro no quadro vai ficar o 0 na US.

Figura 129: Amarradinhos de 2 unidades de palitinhos



Fonte: Arquivo de pesquisa (2020)

FI₄: Colega porque quando você registrou no quadro, você colocou zero?

FI₁: Porque não sobrou! Quando elas juntaram e fez o par, então não sobrou nenhum palito.

FI₃: Professora não será porque a base dois só pode o 0 e o 1 e ela registrou o 0(zero) porque só pode ser ou o 0 ou o 1 no resto, nesse caso foi agrupando de dois em dois e todos foram agrupados. É isso né?

FI₁: Posso responder professora? É isso! Agora vamos agrupar de novo, de dois em dois, então vai ficar 2 grupos de 2 não sobrou nada de novo, ou seja, UOS1 também é ausência ou melhor o zero. Vai ficar de 2 em 2, sobra um, pode?

Figura 130: 2º agrupamento de 2 de 2 palitinhos



Fonte: Arquivo de pesquisa (2020)

D: Não é essa pergunta... pode?

FI₁: Formou mais um grupo ...

D: Por quê?

FI₅: Porque cada casa só suporta 2 é quanto cabe cada uma na primeira casa? Só cabe 1 coisa, na segunda cabe 2 coisas que equivale a 4 coisas ...

FI₂: Professora não dá pra fazer mais um agrupamento?

D: Quantos agrupamentos tem?

FI₂: 3

FI₁: Fizemos o 1º agrupamento com 2, formam 6 grupos de 2, não sobrou nada, fizemos o 2º agrupamento de 2 de 2 (3 grupos de 2 grupos) não sobrou nada, então fizemos o 3º agrupamento 2 de 2 de 2 (1 grupo de 4 agrupamento de 2) sobrou um agrupamento de 2 de 2.

Figura 131: Quantitativo total estruturado por tipos de amarradinhos - passos N3/ /MPR



Fonte: Arquivo de pesquisa (2020)

FI₂: Então tem 1 agrupamento com uma unidade ... não tem que dobrar o valor porque a base é dois? 2, 4, 8, 16?

FI₁: Só são 12

FI₄: Colega troca a base pra ver se melhora, faça na base 4

FI₁: A contagem agora é de 4 em 4 e o número é 22. Vamos separar e amarrar, ficou então 5 grupos de 4 sobrando 2, que é a unidade simples.

Figura 132: 1º agrupamento amarradinhos de 4 palitinhos - passos P1/P2/MPR



Fonte: Arquivo de pesquisa (2020)

FI₁: Então, reagrupando teremos 1 grupo de 4 de 4 sobrando 1 grupo de 4. Fica então 1 unidade simples, 1 unidade de ordem superior 1 e 1 de ordem superior 2.

Figura 133: 2º agrupamento de 4 de 4 palitinhos - passos N3/N4/ N5/MPR



Fonte: Arquivo de pesquisa (2020)

Figura 134: Representação no ábaco escrito

256	64	16	4	
		1	1	2
UOS ₄	UOS ₃	UOS ₂	UOS ₁	US

Fonte: Arquivo de pesquisa (2020)

A direção de estudo D observou que essa resposta praxeológica construída foi a resposta $\mathcal{R}_2$ à questão $\mathcal{Q}_2$. Essa resposta foi simbolicamente aprovada pelo sistema didático $\mathcal{S}_2(FI, D, \mathcal{Q}_2)$ no momento cronológico do PEP em que o encontro dos professores FI com essa resposta foi manifestado como o encontro do sentido ou razão de ser do PEP em desenvolvimento. As falas do sistema didático auxiliar evidenciaram essa compreensão.

FI₁: *Penso que o propósito aqui é de se construir conhecimentos, em nenhum momento a professora trouxe uma resposta pronta e, quando a gente trazia as respostas, depois de muitas discussões surgiam outras perguntas e novas respostas, sempre com o propósito de transformar o aluno num investigador. Acho que tudo que estamos fazendo é tentando decifrar um código matemático, tipo quando a gente tenta entender por exemplo, a conta de luz, de água buscamos interpretar essas informações, explorar esse tipo de atividade tem que ser desde os anos iniciais e assim construir um aluno crítico.*

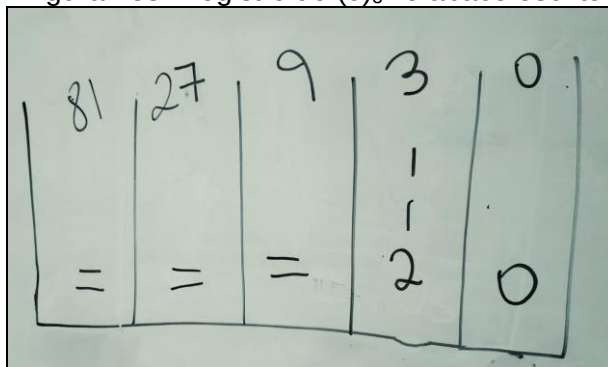
As difusões e defesas dos demais sistemas auxiliares ratificaram essas observações e com o diferencial de que a insegurança dos professores FI na passagem do primeiro agrupamento para o segundo agrupamento foi eliminada.

D: *Vamos ver o próximo grupo*

FI₄: *Professora vamos primeiramente continuar a contagem usando o material, vamos fazer 6 na base 3.*

FI₂: *Para explicar para uma turma do 1º ao 5º ano teremos que usar algum material, vamos escolher os palitos de picolé. Quando a gente junta três palitinhos formamos um grupo de palitinhos, como são 6 palitinhos vamos colocar na ordem, no quadro, vamos contar 1,2,3 pode juntar 4? Não, então o que a gente faz? junta 3 e passa 1 (!) pra lá. Repetindo o processo por ter sobrado ainda 3, então ele conta novamente 1,2,3, e, então, não pode ficar na unidade simples e passa pra lá mais 1 (!), então ficam duas unidades na ordem superior 1 e o “nada”, representado por zero, na unidade simples. Fica 20, mas se colocasse mais uma unidade na UOS1? Então passaria para outra unidade de ordem superior 2.*

Figura 135: Registro do $(6)_3$ no ábaco escrito



Fonte: Arquivo de pesquisa (2020)

FI₂: *Entenderam?*

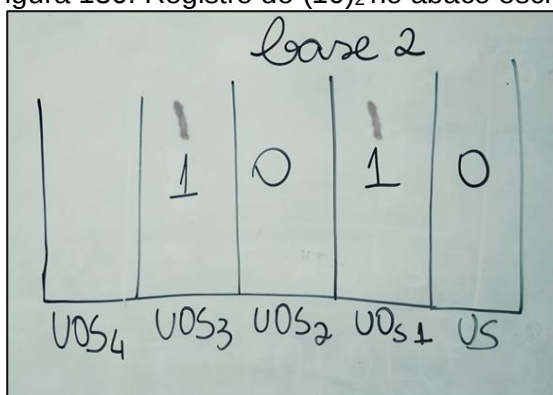
FI: Simmmmmmm.

D: Então façam 10 na base 2

FI₂: Agora temos 10 palitinhos, o agrupamento não é mais de 3, mas é de 2, só podemos colocar em cada ordem até 2 palitos.

FI₂ recorreu ao ábaco escrito no quadro branco, privilegiando esse registro em detrimento das unidades de palitinhos, completando a tarefa de encontrar o numeral quinário (1010) a partir do numeral decimal 10. Não houve, assim, a presença da dinâmica de arranjos dos amarradinhos/agrupamentos. Isso gerou contestação entre os membros do sistema didático $S_2(FI, D, Z_2)$.

Figura 136: Registro do $(10)_2$ no ábaco escrito



Fonte: Arquivo de pesquisa (2020)

D: Vocês entenderam o que ele fez? Vocês estão satisfeitos com a explicação?

FI₁: A senhora ficou satisfeita?

D: Ele explicou direitinho, mas vocês entenderam? Só que... imaginem vocês com sete anos de idade, oito...certo? entenderiam o que ele fez aqui?

FI₂: Professora, eu com 23 anos, não entendi, kkkkkkk

D: O que você não entendeu? Ele fez que fez e não fez? Vocês concordam comigo? Ele fez que fez, mas não fez! Por quê? Porque ele tem que usar o material ... (desmonta o arranjo dos palitos, espalhando na mesa). A criança ... só vai entender manipulando os palitinhos, ... enquanto você tiver tentando no quadro ... a gente precisar caminhar para o concreto, fazer o uso de materiais.

FI₂: Professora, para tentar fazer compreender, a gente montou um teatrinho, para representar a passagem de uma unidade para outra. Nós somos as unidades que vai da US até a de UOS3. Vamos usar 10 palitos de picolé, qual ordem vocês querem?

D: Na base 2

FI₁: Não pode mudar de base, não, professora?

FI₂: Eu sou a unidade simples, vamos contar dez palitinhos na base 2. Sendo que toda vez que inteirar 2 palitinhos na minha mão, eu não posso ficar com dois eu tenho que passar para ordem seguinte, que será representado pela colega ao lado

que representa a UOS1, que também não poderá ficar com dois palitinhos na mão, então, assim sucessivamente. Toda vez que inteirar dois, ninguém pode ficar com dois palitinhos na mão. Entenderam?

O sistema didático auxiliar $S_2(FI_2, 2_2)$ deixou clara a presença do princípio P1, quando definiu as unidades contadas e, do princípio P2, quando destacou o limite até dois.

FI₁: Sim, mas o que é sucessivamente?

FI₂: É o que passa

FI₂: Nós vamos passando de um em um, e assim sucessivamente

FI₂: Vamos lá, vamos contar... eu sou a unidade simples ... são 10 palitinhos, pego 1, pego mais 1, eu posso ficar com dois?

FI₁: Não!!!

FI₂: Eu sou a unidade simples e vou amarrar os dois palitinhos em seguida passo os 2 palitos que formam um grupo, para a colega que representa a unidade de ordem superior 1.

FI₅: Por que **FI₂** não pode ficar com dois?

FI₂: Porque é agrupamento de base dois

FI₄: E qual é a representação da base 2?

FI₂: 0 e 1

FI₄: E porque não pode ficar com 2?

FI₂: Porque quando fica dois na unidade simples, eles se juntam e formam um grupo com 2 palitinhos.

FI₅: Quer dizer que a unidade simples vai ter dois?

FI₂: Ele, a unidade simples, começa com um palito...

FI₂: Foi... aí que eu falei (unidade simples falando), vou pegar mais um, forma dois e juntos formam um amarradinho, um grupo, aí passei pra ela, pra unidade de ordem superior 1.

FI₂: Eu, a unidade de ordem superior 1, posso ficar um amarradinho?

FI₃: Não tem um agrupamento aí ...

FI₂: Vou perguntar de novo... Eu, a unidade de ordem superior 1, posso ficar com um agrupamento de dois? Ou seja, com um grupinho, eu posso?

FI₁: Pode

FI₂: Novamente ... eu, a unidade simples pego um palitinho, posso pegar outro palitinho?

FI: Não.

FI₂: Então, eu amarro e formo um novo grupo de dois e passo para a unidade de ordem superior 1.

FI₂: Eu unidade de ordem superior 1 posso ficar com os dois amarradinhos? Ou seja, os dois grupos?

FI₁: Não!!

FI₂: Então o que é que eu faço?

FI: Passa

FI₂: Eu a unidade de ordem superior 1, junto os dois grupos de amarradinhos de palitinhos e passo para unidade de ordem superior 2.

D: Dois grupos de dois ...

FI₂: Então faltam 6

FI₂: Começa de novo ... eu unidade simples, pego 1 palitinho dos seis, pego mais 1, não posso ficar, amarro e passo para a unidade de ordem superior 1.

FI₂: Faltam quantos?

FI: 4

FI₂: Começo de novo ... 1 palitinho pego mais 1, não posso então amarro formo 1 grupo, passo para a unidade de ordem superior 1

FI₂: Eu unidade de ordem superior 1 posso pegar mais um amarradinho? Lembrando que já tenho 1...

FI₃: Não!!!

FI₂: O que eu faço?...

FI₁: Agrupa.

FI₂: Vou agrupar os 2 amarradinhos e passar para a unidade de ordem superior 2.

FI₂: Eu, unidade de ordem superior 2, posso ficar com os dois amarradinhos? Posso ficar com dois?

FI₅: Não.

FI₂: Então, o que eu faço?

D: Amarra...

FI₅: Passa para ordem superior (enrolando os dois arranjos de palitos com a liga e, em seguida, entregando pra colega que representa a UOS3)

FI₂: E, aí? Ainda tem dois palitinhos...

FI₂: Eu, unidade simples, pego 1 palitinho novamente depois pego o último... posso ficar com dois?

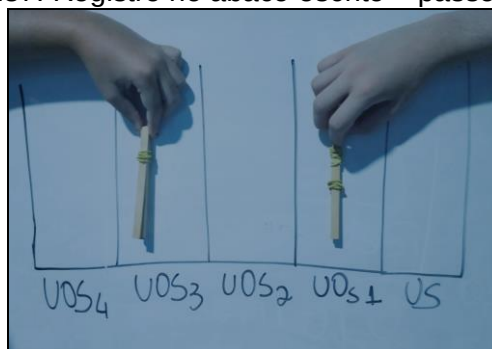
FI: Não!

FI₂: Organizo aqui o grupinho de 2 e passo pra unidade de ordem superior 1. Ela pode ficar com um?

FI: Pode!!!!

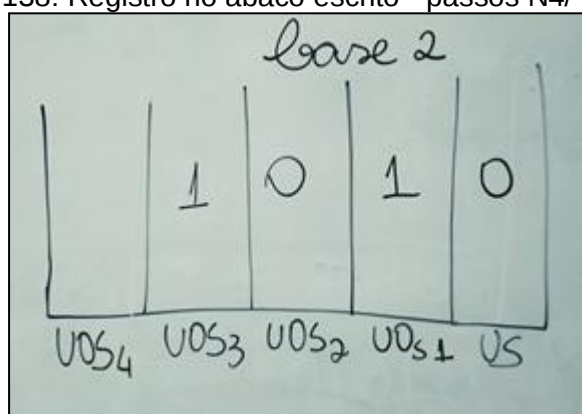
FI₂: Então fica assim ... em palitinhos e em números.

Figura 137: Registro no ábaco escrito – passo N3/MPR



Fonte: Arquivo de pesquisa (2020)

Figura 138: Registro no ábaco escrito - passos N4/ N5/MPR



Fonte: Arquivo de pesquisa (2020)

A difusão bem realizada por $S_2(FI_2, \mathbb{Z}_2)$ não deixou dúvida em relação à direção de estudo D, sobre a realização de uma resposta praxeológica do tipo desejada $R^\forall$, pois pareceu que ela atendia ao proposto do MPR. Todos os passos N3, N4 e N5, além dos princípios P1 e P2, estiveram objetivamente presentes, mesmo que não declarados pelos professores FI.

Nesse momento cronológico do PEP houve o encontro dos professores FI com os sistemas de numeração posicionais e, em particular, com o sistema de numeração decimal ao que o sistema didático auxiliar $S_1(FI_1, \mathbb{Z}_2)$ assim observou:

FI₁: Professora, tenho uma pergunta pra senhora?

D: Pode fazer.

FI₁: Não é porque...a gente tá dando essa linguagem de unidade simples, unidade de ordem superior, sendo que a gente pode chamar ... usar o sistema ..., usar a dezena do sistema decimal, a centena do sistema decimal...(quinzenal?), sendo que não tem essa linguagem, não tem um nome específico, para o sistema quinário, para a base dois, então quer dizer que a gente também pode usar, na base 10 a unidade de ordem superior, simples, de ordem superior, na base dez, também, a

gente pode, não precisa usar o termo dezena, centena, a gente pode também utilizar essa linguagem na base 10? ou não existe, a gente pra tratar de outro sistema na base cinco, base dois, a gente só tem que usar essa linguagem na base dois...?

A dialética que seguiu levou os professores FI ao encontro de noções teóricas, como de número e de numeral, de numeral como código e, inclusive, ao encontro do papel das unidades no processo de organização da estrutura do aglomerado inicial de unidades da grandeza quantificada.

D: *Vou fazer uma pergunta pra vocês ... Por que, que a gente convencionou unidade simples, unidades de ordens superiores, um, dois, três e quatro e assim por diante...? Por que fizemos isso?*

FI₄: *Pra organizar.*

D: *Porque não tinha uma nomenclatura pra usar. Aí, no sistema de numeração decimal existe?*

FI: *Existe!*

D: *Já foi convencionado?*

FI: *Já!*

Os sistemas didáticos alertaram, então, para as noções de código, algarismos, numeral e número.

FI₅: *Professora, só uma dúvida, na base 2, assim como surgiu esse código aí, essa representação, se assim compararmos ao nosso código, ele não seria ele mesmo, certo? seria um número menor? Quero dizer que o número dez, no sistema binário, ou melhor na base dois, que o grupo estava representando, gerou o código 1010, que é a representação do sistema binário, no nosso, sistema decimal já é outra representação, um outro número. É contraditório, confuso, muitas vezes ... qualquer número que seja, na base decimal, dá um número diferente em outra base.*

FI₁: *Qual é a base?*

FI₅: *O dez, na base dois. O dez na base 2, dá outro número.*

FI₁: *A quantidade é igual. Qualquer valor...*

FI₅: *Não, pois é, o código é diferente, mas a quantidade representa dez, mas o dez, o dez na base decimal é dez, e o dez na base dois não é dez.*

D: *O que é, então?*

FI₅: *Mas com esse código, com nosso próprio código, na base dois.*

FI: *Não existe isso.*

D: *Você está falando de duas coisas: decimal (10) e base dois, contagem 0,1, certo? Decimal: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Ok, então, quando você sai da base dez, do número dez, o nome tá dizendo, dez. E vai pra base dois, o que acontece? Não surgem novos agrupamentos? E esse agrupamento, ele tá gerando, o quê? novas...*

FI: *Unidades e ordens*

D: Entendeu? gera novas ordens. Se você pegar o dez e passar pra base três, vai gerar o quê? Outro código e vai gerar outras ordens. Entendeu como é que é? Ele vai se modificando.

FI₅: Tem relação com o conceito de número, numeral e algarismo, porque, no caso, por exemplo, eu posso escrever 6 ... é um numeral, é diferente de número...

FI₁: Número, que é diferente de algarismo.

D: Se o numeral é diferente de número, então mostra, vai para o quadro branco e mostra pode usar como exemplo a representação do 10 na base 2.

FI₁: Pois é, esse código 1010, cada um deles... o (0) zero e o 1 ..., nós temos dois algarismos diferentes, o zero (0) e o 1, são dois algarismos, mas que representa um número, que nesse caso aí, ... representa o quê?

FI₁: É o dez....na base dez.

FI₁: É o dez, então, tem 2 algarismos, então é um número

D: E quem é o numeral?

FI₁: O numeral é a forma como se escreve esse número.

FI₂: O numeral é a quantidade, né?

FI₅: Não, o numeral é isso tudo. Assim como, por exemplo, para escrever a palavra, seis eu uso as letras "s", "e", "i", ... que o compõe, isso tudo é o numeral.

Os encontros mais estreitos com as noções teóricas de número, de numeral, de código, além da clareza da estrutura do SNP e, em particular, do SND foram fortemente evidenciados nas demais difusões e defesas de outras respostas praxeológicas de outros sistemas didáticos auxiliares que colaboraram com a ratificação das observações da direção de estudo D sobre a presença dos passos do MPR nessas respostas praxeológicas, como mostrou a difusão e a defesa do sistema didático S₄(FI₄, 2₂).

FI₄: Boa noite, professora vamos fazer o 27 na base 4. Vamos pegar 27 palitos, contem comigo: um, dois, três, quatro, cinco, seis, sete, oito, nove, dez, onze, doze, treze, catorze, quinze, dezesseis, dezessete, dezoito, dezenove, vinte, vinte e um, vinte e dois, vinte e três, vinte e quatro, vinte e cinco, vinte e seis, vinte e sete, pronto.

Figura 139: Aglomerado Inicial: (27) palitos de picolé



Fonte: Arquivo de pesquisa (2020)

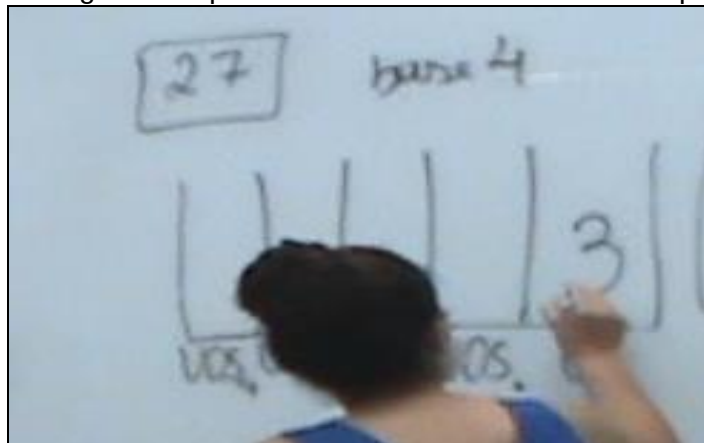
Fl₄: Vamos fazer amarradinhos de quatro, ou melhor vamos agrupar de 4 em 4, vamos lá: um, dois, três quatro, um amarradinho, o 1º agrupamento, de novo, um, dois, três, quatro, 2 amarradinhos esse é o 2º agrupamento, vamos de novo, um, dois, três, quatro, 3 amarradinhos é o 3º agrupamento, de novo, um, dois, três, quatro, 4 amarradinhos, é o 4º agrupamento, mais uma vez, um, dois, três quatro, 5 amarradinhos, 5º agrupamento, de novo, um, dois, três quatro, 6 amarradinhos, 6º agrupamentos, mais esse, um, dois, três quatro, então sobra um, dois, três, três unidades. Vou registrar no quadro.

Figura 140: 1º Agrupamento 4 unidades de palitos



Fonte: Arquivo de pesquisa (2020)

Figura 141: Registro da quantidade unidades de unidade simples



Fonte: Arquivo de pesquisa (2020)

Fl₄: Agora vamos agrupar 4 de 4, então temos somente 1 agrupamento de 4 de 4, então sobram quantos? 2 agrupamentos de 4 unidades.

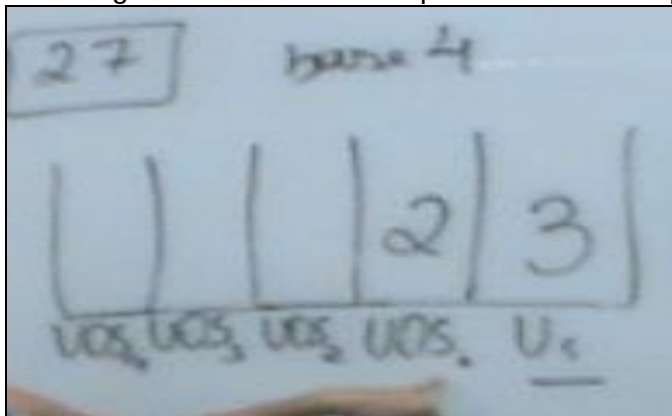
Figura 142: 2º Agrupamento - 4 de 4 palitos de picolé



Fonte: Arquivo de pesquisa (2020)

Fl₄: Vou registrar novamente, agora vai ficar 3US e 2 na UOS1.

Figura 143: Registro das unidades simples e de ordem superior 1

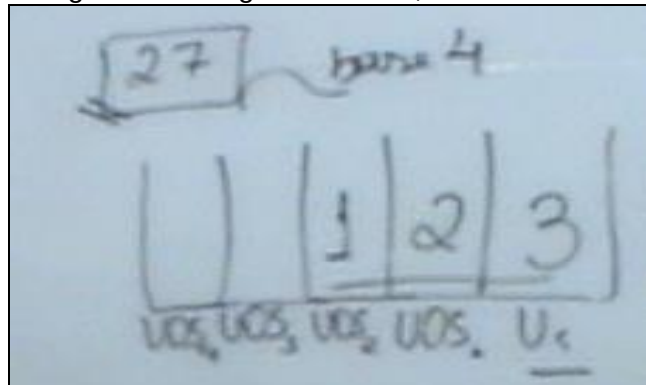


Fonte: Arquivo de pesquisa (2020)

Fl₃: Não está faltando alguma coisa? um grupo de ... o agrupamento grandão? É o que? um grupo de...? Esse lá vai ser o quê? Esse grupo grandão... é o quê? Um grupo na ordem superior...

Fl₄: É o 1 na UOS2.

Figura 144: Registro das US, UOS1 e UOS2



Fonte: Arquivo de pesquisa (2020)

FI4: Transformada a base (de dez para 4), ele (o numeral 27) vira uma unidade de ordem superior 2...duas unidades de ordem superior 1 e 3 unidades simples.

Os sistemas didáticos auxiliares $S_3(FI_3, \mathcal{Z}_2)$ e $S_5(FI_5, \mathcal{Z}_2)$ foram omitidos por não acrescentarem novos aspectos sobre as respostas praxeológicas difundidas e defendidas por outros sistemas didáticos auxiliares, embora tenham colaborado para demonstrar o excelente conhecimento da prática de quantificação alcançado pelos professores FI.

Uma resposta praxeológica $\mathcal{R}_2$ foi finalmente aprovada por unanimidade pelo sistema didático $S_2(FI, D, \mathcal{Z}_2)$ para a questão $\mathcal{Z}_2$, que incluiu Q_N para a direção de estudo D, e consistiu basicamente do conhecimento da prática de quantificação por agrupamentos sucessivos. Essa resposta à questão $\mathcal{Z}_2$, ratificou de certo modo as respostas praxeológicas difundidas nas sessões anteriores e encaminhou a base praxeológica para a construção de organizações praxeológicas para o ensino do SNP e, em particular, o SND, sem a necessidade de conhecimentos matemáticos além dos primeiros passos do processo de contagem, portanto, ao alcance dos alunos e professores dos anos iniciais.

II.3. Síntese da sessão – Encontros e novos encaminhamentos do $S_2(FI, D, \mathcal{Z}_2)$

A sessão foi iniciada com a tentativa de ratificar uma resposta praxeológica com apelo ao ábaco escrito que foi rechaçada pelo sistema didático $S_2(FI, D, \mathcal{Z}_2)$. Esse tipo de resposta recorria ao ábaco escrito do mesmo modo que se recorre a um ábaco físico em R_{28} e, portanto, relegava um papel coadjuvante e secundário às unidades físicas que eram, na verdade, organizadas obedecendo as respostas praxeológicas R_{22} , R_{24} e, sobretudo, R_{26} que demandava o conhecimento de operações aritméticas complexas, como combinações de potências de um número. Isso violava as restrições impostas pela direção de estudo D sobre a construção de resposta praxeológica a serem difundidas nessa sessão.

Com orientação inicial da direção de estudo uma nova resposta praxeológica foi encaminhada de modo a atender às restrições impostas, em particular, sobre o uso obrigatório de unidades materiais que são disponíveis nas salas de aula dos anos iniciais, como tampinhas, palitinhos, por exemplo.

Essa resposta foi consolidada e validada pelo sistema didático $S_2(FI, D, \mathcal{Z}_2)$ por responder à questão $\mathcal{Z}_2$ e validar R_{28} de modo independente dos cálculos de potências, como desejado pelos professores FI para tornar possível o ensino de SNP e, em particular, o SND aos professores e alunos dos anos iniciais.

A resposta praxeológica $\mathcal{R}_2$ pôde ser descrita nos seguintes termos:

II.4. Resposta praxeológica: $R_{32} = \mathcal{R}_2$

1. Tarefa:

Construir um numeral correspondente a um dado aglomerado de unidades físicas de uma grandeza, considerando que são conhecidos um número finito k de quantidades básicas, entendidas como os k primeiros numerais $(1, \dots, k)$.

2. Técnica:

A técnica foi descrita por meio dos seis gestos do MPR em duas etapas:

✓ 1ª Etapa: Definições:

G1(P2) – Defina o limite de contagem L (base)

G2(P1) – Defina as unidades UOS a contar (agrupamentos), como posições de um ábaco escrito.

✓ 2ª Etapa: Processo iterativo – Começando com as unidades simples, faça:

G3(N3) – Construa agrupamentos de ordem superior as existentes, construindo agrupamentos de L unidades de agrupamentos de ordem imediata inferior.

G4(N4/ N5) – Registre em um ábaco escrito a quantidade das unidades de ordem imediatamente inferior que restaram.

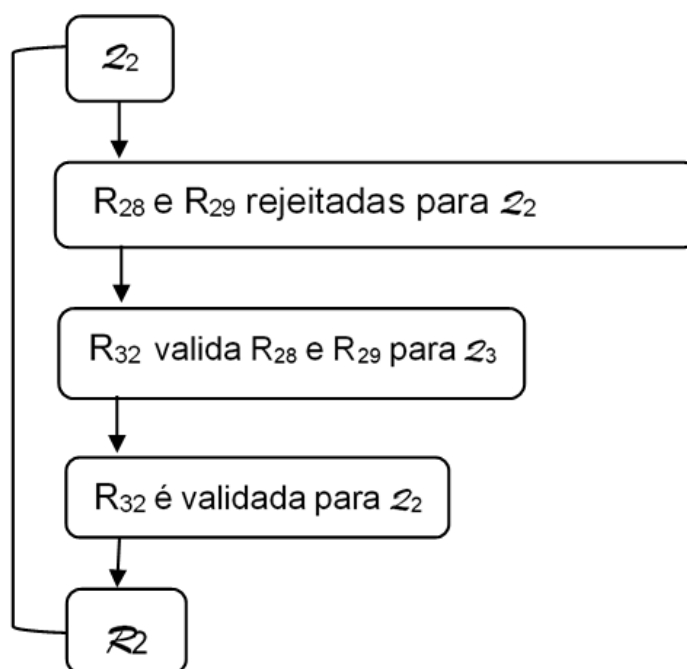
Se a quantidade de novos agrupamentos de maior ordem formados, for inferior ao limite de contagem L , registre essa quantidade na posição correspondente do ábaco e finalize destacando o MPR registrado no ábaco escrito. Caso contrário, retorne ao gesto G3.

3. Tecnologia/teoria:

Saber prático sobre quantificação de unidades físicas de uma grandeza como resposta à infinitude de nomes de quantidades necessária para o processo de contagem.

Esquemáticamente, a trajetória dessa sessão foi assim representada:

Figura 145: Trajetória da sessão 5



Fonte: Próprio autor (2020)

4.2.5.1. Encontros e encaminhamentos

O desenvolvimento da sessão cinco mostrou o encontro dos professores FI com os passos do processo de quantificação de unidades previsto pelo MPR, o qual orientou a direção de estudo D no desenvolvimento PEP.

A direção de estudo D encaminhou o PEP seguindo a orientação dada pelo MPR e, para isso, criou condições sobre o desenvolvimento dos estudos para a reconstrução de uma resposta praxeológica que se mostrasse desejável para o sistema didático $S_2(FI, D, S_2)$.

Inicialmente, a direção de estudo D criou a condição que exigia que os professores FI usassem materiais concretos, geralmente presentes em sala de aula, excluindo os ábacos físicos, e diferentes tipos de agrupamentos para construir suas respostas praxeológicas.

A condição imposta sobre o desenvolvimento das praxeologias sem uso de ábacos como instrumento indispensável, tinha como objetivo para a direção de estudo D, a não recorrência dos professores FI à resposta praxeológica R_{28} ,

difundida e aprovada na sessão anterior, que claramente dispensava quantificação de unidades concretas, embora R_{28} pudesse ser mostrada, mas não executada, por meio de manipulações de materiais concretos.

A condição sobre o uso de diferentes agrupamentos ou bases tinha como objetivo, para a direção de estudo D, fazer os professores FI observarem e incorporarem a regularidade do processo de quantificação de unidades concretas a serem construídos por eles.

No entanto, a resposta praxeológica R_{28} se mostrou dominante entre os professores FI quando eles insistiram em recorrer ao ábaco escrito no quadro branco, frente à restrição ao ábaco físico, em detrimento das unidades concretas. Isso os afastava da dinâmica de manipulação de unidades concretas em agrupamentos, exigida pelo processo de quantificação.

Embora essa compreensão não estivesse clara para eles, o uso do ábaco no sentido de R_{26} , preconizado por R_{28} , gerou contestações entre os membros do sistema didático $\mathcal{S}_2(FI, D, \mathcal{Z}_2)$ e exigiu da direção de estudo D reformular as condições antes criadas. Para isso, encaminhou nova condição em forma de um problema didático básico da profissão docente para as séries iniciais: *O que ensinar de sistema de numeração e como ensiná-lo para as crianças dos anos iniciais?*

Essa problemática inclui as condições até então criadas pela direção de estudo D com sentido para o uso de materiais concretos. As atividades a serem desenvolvidas deveriam considerar que, para o ensino de crianças dos anos iniciais, os fatos de elas ainda não conhecerem cálculos complexos sobre combinações de potências e tampouco a noção de base. Portanto, essa ausência de conhecimentos aritméticos deveria ser suprida por meio da manipulação de unidades de materiais concretos a partir do processo de contagem.

Essa condição criada pela direção de estudo começou se mostrar efetiva por levar os professores FI ao encontro, em definitivo, de suas dificuldades frente ao processo de quantificação de unidades concretas a partir de agrupamentos dessas unidades.

Ficou evidenciado que a passagem do primeiro agrupamento para o segundo agrupamento, assim como entre os diferentes agrupamentos de ordens sucessivas,

não fazia parte do equipamento praxeológico dos professores FI. Isso ratificava as observações realizadas pela direção de estudo D durante a sessão anterior quando os professores FI tentaram mostrar, com insucesso, que o numeral 2000 correspondia ao numeral quinário 31000, usando anilhas em um ábaco físico.

De outro modo, ficara evidenciado na sessão anterior que os algoritmos e fórmulas matemáticas de conversões de numerais não decimais em um numeral decimal, embora seja efetiva para tal tarefa, e que foi recorrida em R_{26}/R_{28} , não assegurou o encontro dos professores FI com a estrutura dos SNP.

Essa dificuldade enfrentada pelos professores FI foi inicialmente removida com ajuda, e não com o ensino, da direção de estudo D, apenas sobre a passagem do primeiro agrupamento para o segundo agrupamento. As demais passagens entre os agrupamentos sucessivos, os professores FI agiram em situações por meio de analogias que se mostraram efetivas no enfrentamento dessas situações. Pode-se dizer que houve, assim, o primeiro encontro dos professores FI com o processo de quantificação de unidades por agrupamento.

Esse encontro despertou interesses no sistema didático $S_2(FI, D, \mathbb{Z}_2)$, afinal o processo permitia “traduzir” um numeral decimal, tomado como um aglomerado de unidades, em um numeral não decimal. Isso a resposta praxeológica R_{28} não se mostrou capaz de realizar. Então, decidiram conhecer melhor esse processo de quantificação, usando o processo com diferentes agrupamentos para diferentes quantidades decimais. Isso atendia, sem imposições, a condição criada pela direção de estudo sobre o uso de diferentes agrupamentos.

O processo de quantificação de unidades por agrupamentos fora simbolicamente aprovado pelo sistema didático $S_2(FI, D, \mathbb{Z}_2)$ quando este assumiu que houve o seu encontro com o sentido ou razão de ser do PEP em desenvolvimento. Isso foi evidenciado quando o sistema didático afirmou que, *“o propósito aqui é de se construir conhecimentos, em nenhum momento a professora trouxe uma resposta pronta e, quando a gente trazia as respostas, depois de muitas discussões surgiam outras perguntas e novas respostas, sempre com o propósito de transformar o aluno num investigador. Acho que tudo que estamos fazendo é tentando decifrar um código matemático, tipo quando a gente tenta entender por exemplo, a conta de luz, de água buscamos interpretar essas informações, explorar*

esse tipo de atividade tem que ser desde os anos iniciais e assim construir um aluno crítico”.

Para a direção de estudo D, enquanto investigadora, ficou evidenciado que as condições criadas por ela sobre o desenvolvimento do PEP cumpriram seu objetivo, inclusive como dispositivo de formação, considerando diferentes novos encontros com diferentes noções e práticas, entre elas, por exemplo, as práticas de manipulação de materiais concretos que possibilitaram novos encontros com as noções de numerais.

Os professores FI passaram a olhar para os numerais como códigos que exigiam antes conhecer a base para, então, decifrá-los enquanto quantidades de unidades. E o modo de decifrá-los revelava a estrutura dos numerais posicionais, inclusive dos numerais decimais. Além disso, a direção de estudo observou que as atividades de quantificação de unidades realizadas pelos sistemas didáticos auxiliares evidenciaram os princípios P1 e P2 do MPR. O primeiro era evidenciado quando os professores FI definiam as unidades a serem contadas (tipos de agrupamentos, inclusive de unidades simples) e, o segundo, quando eles destacavam o limite numérico da contagem (base) dessas unidades.

A direção de estudo D também observou que o desenrolar do processo em diferentes quantificações de unidades concretas realizadas pelos professores FI deixava evidenciar esse processo como uma resposta praxeológica do tipo desejada $R^\forall$ para o seu percurso de estudo investigativo de sua pesquisa, considerando que, além dos princípios P1 e P2, os professores FI realizavam em situações de quantificação os gestos N3 e N4 do MPR que nunca fora anunciado a eles. Podemos dizer que os professores FI encontraram em definitivo o saber autotecnológico para a tarefa de construção de numerais posicionais, a partir de quantificações de aglomerados de unidades.

Para a direção de estudo, foi evidenciada a validação do MPR como um dispositivo didático de orientação de percursos de estudos investigativos para a formação de professores dos anos iniciais, não detentores de conhecimentos matemáticos específicos, relativo aos sistemas de numeração e, em particular, ao sistema decimal.

Finalmente, podemos dizer que uma resposta praxeológica $\mathcal{R}_2$ foi aprovada para a questão ***Q_N: Como construir um numeral posicional a partir de aglomerados de unidades físicas?*** formulada pela direção de estudo D. Essa resposta ratificou as respostas praxeológicas difundidas nas sessões anteriores, mostrou suas limitações ao recorrer ao uso de fórmulas, mesmo que disfarçadas em ábacos, e encaminhou nova práxis que se põe como base praxeológica para a construção de organizações praxeológicas para o ensino do SNP e, em particular, o SND, sem a necessidade de conhecimentos matemáticos, além dos primeiros passos do processo de contagem, portanto, ao alcance dos alunos e professores dos anos iniciais.

Em seguimento do PEP, emergem questionamentos imediatos sobre organizações para o ensino de SNP nos primeiros anos escolares de modo a responder a problemática de formação de professores para anos iniciais relativo ao SND: *Quais são as tarefas necessárias para o ensino do processo de quantificação por agrupamentos sucessivos aos alunos dos anos iniciais? Qual o impacto ecológico sobre o currículo de matemática dos anos iniciais com a inclusão do processo de quantificação de unidades por agrupamentos sucessivos como método de construção de numerais, considerando sua relação direta com processos computacionais?*

5. FINALMENTE CAMINHANDO PARA NOVAS TRAJETÓRIAS

5.1 INTRODUÇÃO

Encerramos este relatório de tese fazendo um resgate em forma de artigo sobre a problemática enfrentada, os meios teóricos e metodológicos usados, bem como dos achados nas análises que permitiram encaminhar uma resposta à questão de tese de modo satisfatório, além de encaminhar pesquisas futuras que derivam dos resultados aqui encontrados.

O artigo que completa esse relatório de tese também completa uma trilogia iniciada com dois outros artigos. O primeiro sob o título “Atividade de estudos e investigação sobre o sistema de numeração posicional na formação de professores dos anos iniciais” publicado em 2019 (FERREIRA; GUERRA, 2019), no volume 21 da revista “Educação Matemática e Pesquisa - EMP” e o segundo publicado sob o título “Formação inicial de professores que ensinam matemática e o sistema de numeração decimal” publicado em 2020, no volume 6 da revista “Revista de Estudos e Pesquisas sobre Ensino Tecnológico – Educitec” (FERREIRA; GUERRA, 2020).

5.2 A TESE EM FORMA DE QUESTÃO: Q_T

Não há dúvidas no seio de diferentes sociedades que o ensino de sistema de numeração decimal, ou simplesmente SND, seja necessário e indispensável nas escolas, considerando que os numerais decimais, independente de tornar possível diferentes práticas rotineiras do dia a dia, também tornam possível práticas das ciências aplicadas que se mostram cada vez mais indispensáveis para o funcionamento de diferentes atividades humanas e, entre eles, como conhecimento fundamental para o desenvolvimento da matemática escolar.

No entanto, o ensino sobre SND tem sido questionado por diferentes pesquisadores, como destaca o estudo de Cenci, Becker e Mackedanz (2015) em um estudo que considera, aproximadamente, duzentos trabalhos desenvolvidos no

período de 2008 a 2015, sobre a formação de professores para séries iniciais relativo ao SND.

Nas análises, o estudo aponta um predominante uso da epistemologia genética nas pesquisas com foco sobre metodologias de ensino que assumem, em geral, o saber matemático a ser ensinado como inquestionável. Seguindo essa linha, destacamos os trabalhos de Garcia (2006) e Bathelt (2000) por apontarem a necessidade de enfrentamento do desafio em desenvolver conhecimentos específicos para o ensino da matemática que não sejam definidos apenas pelos conteúdos matemáticos, mas também pela prática docente dos professores (como uma espécie de condição) para que os saberes possam ser aprendidos pelos alunos.

O estudo de Cenci, Becker e Mackedanz (2015) destaca ainda que Carvalho (2004) afirma que os conteúdos matemáticos aprendidos nos cursos de formação de professores para as séries iniciais pouco contribuem para as práticas pedagógicas, pois os acadêmicos carregariam, desde a educação básica, uma didática de reprodução de modelos. De outro modo, o estudo de conteúdos matemáticos não asseguraria a quebra dos condicionamentos da cultura das práticas escolares sobre as práticas docentes.

Como se estivesse encaminhando um possível modo de encontrar uma resposta à problemática destacada por Carvalho (2004), Cenci, Becker e Mackedanz (2015), seguindo Garcia (2006) e Bathelt (2000), afirmam que é necessária a integração de conhecimentos de práticas docentes como parte integrante dos conhecimentos matemáticos que permitam aos professores fazerem com que os alunos aprendam de modo satisfatório os conhecimentos matemáticos e, em particular, o SND.

Parece que a integração entre o pedagógico e o matemático é a solução para a problemática do ensino e aprendizagem da matemática e, em particular, do SND. Embora o estudo não mencione, a integração entre o pedagógico e o matemático pode evitar que a cultura corrente das práticas de ensino dos numerais decimais que vivem nas escolas elementares condicione as práticas dos docentes nas salas de aula com o SND, tornando-o invisível em sua estrutura.

No entanto, nem os anunciadores da problemática de integração e tampouco Cenci, Becker e Mackedanz (2015) encaminham como fazer essa integração entre conhecimentos das práticas docentes e conteúdos matemáticos de modo que os professores se sintam seguros e, em consequência, os alunos aprendam.

Um enfrentamento à problemática de integração entre o pedagógico e o matemático foi proposto por Schulman (1986) quando afirmou que, para o ensino não bastava o conhecimento do conteúdo matemático, o que é “considerado classicamente como o conteúdo de ensino da matemática, transparente, inquestionável e independente da forma de ensinar” (BOSCH; GASCÓN, 2001, p. 10, tradução nossa), mas que era preciso também o conhecimento pedagógico do conteúdo, ou seja, os conhecimentos necessários ou indispensáveis do professor, relativos à aprendizagem dos alunos sobre um conteúdo específico e, em particular, “o conhecimento que tem o professor sobre as dificuldades típicas dos alunos em cada tópico matemático concreto e do modo de prevê-las e remediá-las” (BOSCH; GASCÓN, 2001, p.13, tradução nossa).

Entretanto, Schoenfeld (2000) aponta a existência de dificuldades para delimitar a noção de conhecimento pedagógico de conteúdo do modo que permita ser reconhecido, acessado e organizado frente ao conhecimento do conteúdo, de modo a integrá-los em uma organização didática para ser ensinada.

No entanto, seguindo Schulman (1986), uma resposta a essa problemática é encaminhada no estudo de Ripoll, Rangel e Giraldo (2016). Para isso, esse estudo toma a noção de conhecimento de conteúdo do modo proposto por Klein (2009, 2010, 2011), como as organizações de conteúdo matemático escolar fundamentadas por meio da matemática acadêmica e, com a legitimidade epistemológica da instituição matemática, assume-as como a condição suficiente para o professor vencer a insegurança e a difícil tarefa de replanejamento do conteúdo para o ensino.

No entanto, o estudo não menciona como encontrar o conhecimento pedagógico do conteúdo relativo a um inquestionável saber matemático, mas tão somente a integração deles, no caso, o conteúdo replanejado para o ensino. Embora o estudo não recorra à TAD como referencial teórico, o modo não claro que refere ao replanejamento de conteúdo, permite que possa ser interpretado, nesse contexto

teórico, como o conhecimento didático alcançado pelo professor por meio de uma ordinária transposição didática interna, no momento que é somente seu nesse processo, aquele que antecede a sala de aula, em que ele escreve o texto de sua aula em suposta dialética com hipotéticos alunos ideais, fazendo dinâmicas cognitivas que evocam e invocam dinâmicas praxeológicas para fins de ensino de uma organização praxeológica.

Esse processo torna invisíveis gestos didáticos do professor, necessários ou indispensáveis, para a construção da organização de saberes relativos ao SND para serem ensinados, de modo que os alunos aprendam, pois podem ficar no impenetrável universo cognitivo desse professor. Isso, em consequência ou por premissa cultural escolar, corrobora para esconder a complexidade que envolve a construção dessa organização didática tanto quanto a banaliza os gestos didáticos dos professores para o ensino do SND.

Em síntese, o estudo de Ripoll, Rangel e Giraldo (2016) se concentra no conteúdo matemático de modo independente das práticas de ensino e de aprendizagem sobre o SND. Mas, assume que as práticas de ensino e de aprendizagem são dependentes do conhecimento do conteúdo do professor. Assim, as práticas que envolvem a quantificação de materiais concretos somente serão possíveis se puderem ser vistas como aplicações do conhecimento do conteúdo, nesse caso, dos conjuntos numéricos da matemática.

Nesses termos, a contagem de um aglomerado de cadeiras é tomada como uma aplicação da noção matemática de números naturais, mesmo que essa noção numérica tenha emergido em momento cronológico posterior na história da construção social do conhecimento e, não menos importante, como abstração de práticas de quantificações.

Outra linha de investigação que considera a problemática da integração entre o matemático e o didático é a do programa epistemológico da didática da matemática. Nessa linha, essa problemática emerge como consequência do seu princípio básico de investigação sobre o ensino e aprendizagem da matemática que considera que o conhecimento matemático para ser ensinado precisa sofrer transformações que permitam ser ensinável e, em consequência, aprendido.

Sob essa compreensão, a integração entre o pedagógico e o matemático é tratada como parte da problemática de formação do professor em relação aos conhecimentos a serem ensinados, tomando para isso a compreensão do pedagógico como a do didático, ou seja, da ajuda ao estudo de um conhecimento.

Nesse contexto, a problemática de formação ganha diferentes encaminhamentos, entre eles, a teoria das situações didáticas, ou TSD, de Brousseau (1998), a teoria da transposição didática de Chevallard (1985), ou TTD, de Chevallard (1985) e, de forma mais alargada, a Teoria Antropológica do Didático, ou TAD, de Chevallard (1999), mas todos em consonâncias entre si.

A linha teórica da TAD encaminhou vasto campo de investigação sobre a formação de professores de matemática relativo ao um dado conhecimento da matemática a ser ensinada que, de modo indispensável, considera a construção de organizações didáticas, como bem apresenta a obra de Bosch, M., Gascón, J., Ruiz Olarría, A. *et al* (2010).

Nessa linha teórica, o princípio básico de questionar as organizações didáticas é condição inicial para fazer revelar problemáticas relativas ao ensino e aprendizagem e, nesse caso, questionar as organizações didáticas sobre os numerais decimais, quer dizer questionar enquanto produto de uma atividade de transposição didática, aqui entendida como o trabalho de transformações e adaptações de saberes relativos aos números decimais para ser ensinado, tendo em conta suas relações com os outros conhecimentos matemáticos e não matemáticos, inclusive não disciplinares, que podem contribuir para uma organização didática que atendam às necessidades do ensino e, em consequência, da aprendizagem.

Assim, nesse contexto teórico ganha relevância a gênese histórica e epistemológica do conteúdo matemático por poder encaminhar condições que esbocem a razão ou sentido da produção e da difusão do conhecimento matemático a ser ensinado e, ainda, fazer revelar outros conhecimentos necessários, que nem sempre estão claros, que foram e podem continuar sendo indispensáveis para o funcionamento das práticas de ensino relativos ao SND.

Além disso, os conhecimentos da atualidade, inclusive os das práticas docentes, que são recorridos para as reconstruções dos conhecimentos ensinados,

pois estes podem condicionar de modo, não raro, restritivo ao ensino e a aprendizagem dos numerais decimais para as classes dos anos iniciais das instituições do ensino fundamental.

Sobre esse pensar, as práticas docentes em sala de aula se constituem em recriações de conteúdos matemáticos para situações de ensino de modo a atender uma intencionalidade didática, mas sem perder de vista que essa recriação está condicionada pela disciplina matemática e, sobretudo, por níveis mais externos da sala de aula, como a pedagogia, a escola, a sociedade e a civilização em que o ensino está inserido.

Seguindo essa linha de pensamento, ao questionar quais são os supostos conteúdos matemáticos da escolar pertinentes para o ensino dos numerais decimais, foi observado que a gênese histórica e epistemológica dos numerais decimais independe da gênese histórica e epistemológica dos números matemáticos, muito embora os numerais decimais sejam vistos pelos matemáticos como representantes dos seus números racionais.

Além disso, observa-se que os numerais decimais funcionam, e continuam funcionando, como dispositivo social que torna possível diferentes práticas de diferentes atividades humanas de modo eficiente e eficaz, independentemente de serem objetos do ensino da matemática escolar.

Nesses termos, pode-se supor, em hipótese, que há uma naturalização dos numerais decimais que impedem sua compreensão na escola como produtos de uma prática regrada de quantificação de unidades de uma grandeza que, como tal, é dotada de uma estrutura que pode ser vista em descrição dessa prática que, em abstração, leva ao encontro da estrutura dos numerais decimais (SND) e, de modo mais geral, ao encontro da estrutura dos numerais posicionais (SNP).

A hipótese de naturalização dos numerais decimais é compartilhada por diferentes estudos, entre eles, os de Terigi e Wolman (2007), Itzcovich (2008) Sadovsky (2010) e de Ripoll, Rangel e Giraldo (2016). Este último estudo refere à naturalização de modo indireto, quando assim afirma:

Realizar esses procedimentos em outras bases tira-nos da “zona de conforto” que a base 10 proporciona, e nos força a pensar nas justificativas para cada um dos passos que executamos automaticamente cujas validades são tomadas como certas. Esse exercício pode ajudar o professor

a entender com mais clareza procedimentos que ensina usualmente aos alunos. (RIPOLL; RANGEL; GIRALDO, 2016, p. 32).

A afirmativa se refere a uma hipótese de desnaturalização dos numerais decimais usando numerais posicionais não decimais na formação docente. Isto retiraria a “zona de conforto” em que a ação depende de uma reflexão espontânea, com passos automatizados que na ação são tomados como os passos certos.

Mais precisamente, a afirmativa faz referências aos numerais decimais e as operações entre eles, como práticas que se aprendem por meio de uma lógica prática dos *habitus* matemáticos da escola e da sociedade, ou seja, a aprendizagem se dá por imitação, vendo e fazendo o que se viu fazer (BOURDIEU, 2004).

De outro modo, os numerais decimais são objetos do conhecimento social que são acessados pelos agentes sociais de modo quase transparente, inclusive na escola, onde são tomados como um saber paramatemático (CHEVALLARD, 2005), no sentido de que são usados de modo inquestionável e indispensável, mas que jamais são objetivamente ensinados. São conhecimentos institucionalizados por nossa civilização, cultura e sociedade que nela se tornaram transparente e isso poderia impedir que sua estruturação, dada pelo SND, não seja, ou não se faça, visível na escola.

Ripoll, Rangel e Giraldo (2016), Cenci, Becker e Mackedanz (2015) e Sadovsky (2010), por exemplo, apontam que o desconhecimento da estrutura do SND pode decorrer da naturalização e, alertam também, sobre a insuficiente formação matemática dos professores que atuam nos anos iniciais do fundamental, particularmente, por conta dos cursos de formação darem pouca ênfase na formação matemática.

A respeito do pensar da TAD, então, a problemática da integração do pedagógico e do matemático aqui se reduz ao problema de formação docente para a mudança de relação com um dado saber (CHEVALLARD, 2018), especificamente aqui, dos professores em formação inicial com os numerais decimais, mas sob as hipóteses (1) de naturalização dos numerais decimais; (2) do desconhecimento da estrutura dos numerais decimais e, não menos importante, da (3) insuficiente formação matemática provida pelos cursos de formações.

Assim, frente à gênese histórica e epistemológica dos numerais decimais que revelam esses numerais como independentes dos números matemáticos, e sim como constituintes elementares de suas gêneses e, considerando ainda, as hipóteses em simultaneidade aqui levantadas, formulamos a tese ***Q_T: A quantificação de unidades de grandezas discretas, desnaturaliza os numerais decimais?***

No contexto da TAD são encontrados diferentes estudos, por exemplo, de Terigi e Wolman (2007), Itzcovich (2008), Sadovsky (2010) e Garcia e Sierra (2015) que, talvez por influência da instituição matemática, concentram seus esforços sobre a noção de número, mesmo quando se referem aos numerais, ou ainda, sobre a razão de ser dos sistemas de numeração, que se afastam de nossos interesses por residirem sobre a noção de numeral enquanto produto de um dispositivo social de quantificação, no caso, o SNP que, em consequência, leva ao SND.

A metodologia recorrida para esse tipo de problemática, posto que envolve a formação de professores relativa a um dado saber no seio de uma pesquisa sobre organizações praxeológicas, foi proposta por Chevallard (2009) sob a denominação de percurso de estudos e pesquisas ou simplesmente PEP.

5.3 O PEP DESENVOLVIDO NESSA PESQUISA

O PEP para responder a questão de tese Q_T institui o sistema didático $S(D, Q_T)$ que derivou a questão Q_N : ***Como construir um numeral a partir de aglomerados de unidades físicas?*** Resultou, assim, o sistema didático $S(D, Q_N)$ para criar condições para responder Q_N e, em consequência, como condição para responder Q_T , sob a restrição de construir uma trajetória de formação de professores em formação inicial para os anos iniciais que os fizessem ver suas mudanças de relações com os numerais decimais.

O sistema didático $S(D, Q_N)$ sob as condições e restrições impostas derivou a questão Q_M : ***As práticas de quantificação de unidades de uma grandeza por agrupamento iterativos, ou seja, as que consideram agrupamentos de agrupamentos de mesma natureza, revela a estrutura dos numerais posicionais?*** Essa questão deu origem ao sistema didático $S(D, Q_M)$.

Em consonância com as condições e restrições postas, $S(D, Q_M)$ concebeu um percurso de estudo e pesquisa com participação dos professores em formação inicial, com base na engenharia didática reversa (SILVA, 2019) que admite que um saber matemático escolar também pode ser produto de um saber prático. Isso se coaduna com os numerais decimais por estes terem emergidos historicamente e epistemologicamente das práticas de quantificação de unidades de grandezas discretas. (LENDÍNEZ; GARCÍA; SIERRA, 2017).

A questão Q_M derivou de Q_N sob a compreensão de que as práticas de quantificação atendem as hipóteses em simultaneidade, já que não dependem de conhecimentos matemáticos e, portanto, estão ao alcance de quem possui baixo conhecimento matemático, inclusive professores e alunos dos anos iniciais. Além disso, as práticas de quantificação permitiriam que professores em formação inicial FI questionassem os numerais e, com isso, mudassem suas relações com o SNP.

5.4 A CONCEPÇÃO DO PROJETO

A resposta à questão Q_M foi construída com os professores em formação inicial a partir de seus encontros, não planejados a priori, a partir de situações de quantificação para produção de numerais, por meio de um PEP representado pelo sistema didático $\mathcal{S}(FI, D, Qg)$, em que Qg se refere a uma situação inicial geradora desse sistema didático.

Nessas situações, foram observados os gestos didáticos, em particular, dos que marcaram as tarefas de difusões e defesas de suas respostas e questionamentos, além dos estudos de diferentes obras (BOSCH; CHEVALLARD; GARCÍA; MONAGHAN, 2019) que permitiram ao pesquisador validar, com segurança, as hipóteses postas, além de fazer com que os professores, em formação inicial, vissem os numerais decimais como numerais posicionais dotados de uma estrutura que lhes é similar.

Para criar condições de existência e funcionamento do $S(FI, D, Qg)$, no sentido da engenharia didática reversa, foi engendrado por D estudos para a construção de um modelo epistemológico de referência (MER) como condição para

a construção do modelo praxeológico de referência (MPR) relativo aos elementos constituintes dessa questão Q_M .

As obras que sustentaram a construção de um MPR que orientou a prática como produtora de saber estão longe de serem encontradas na instituição da matemática acadêmica, pois é notório o domínio do pensamento de Klein (2009, 2010, 2011) sobre os sujeitos dessa instituição, como bem demonstra a obra de Ripoll, Rangel e Giraldo (2016), embora essa obra recorra a argumentos da instituição da educação, de acordo com Schulman (1986), o que justifica sua finalidade de ser destinada à formação de professores.

Entre as obras que poderiam ser de importância para a epistemologia e história dos números matemáticos, mas não referenciadas pela instituição da matemática acadêmica nos estudos dos números, foram encontrados os estudos de Stevin (1585). Esse estudo assume que se operam com numerais como se operam com as quantidades, relacionando o suposto abstrato com o concreto.

Isso atendeu às hipóteses da questão Q_N e se constituiu na base para a construção de um modelo praxeológico de referência (MPR) que atende às condições iniciais impostas ao sistema $S(D, Q_N)$, ou seja, insuficiência de conhecimentos matemáticos requeridos e quantificação de aglomerados de unidades por agrupamentos de mesma natureza como enfrentamento do desconhecimento da estrutura do SND por sua naturalização.

5.5 O MODELO PRAXEOLÓGICO DE REFERÊNCIA

O MPR construído pela direção desta pesquisa foi o seguinte, frente a um aglomerado de unidades físicas e as seguintes condições iniciais:

- P1) A unidade física é representada por um único símbolo, que pode ser 1.
- P2) Existe uma quantidade finita de quantidades sucessivas representadas de modo unívoco por símbolos, que podem ser 1, 2, ..., k.
- N3) Estructure o aglomerado de unidades físicas por meio de unidades de tipos agrupamentos iterativos (agrupamentos de k unidades do agrupamento anteriormente obtido) até não ser possível construir um novo tipo de agrupamento.

Para isso, repita os passos seguintes ciclicamente até esgotar o procedimento de construir agrupamentos.

Na iteração atual, dita i , tome os agrupamentos formados na iteração imediatamente anterior, dita $(i - 1)$, e verifique se é possível formar novo(s) agrupamento(s) de k unidades desses agrupamentos. Caso afirmativo, gere quantos forem possíveis agrupamentos contendo k unidades dos agrupamentos gerados na iteração anterior $(i - 1)$, e reserve os eventualmente restantes.

Caso contrário, tome as unidades desses agrupamentos gerados na iteração $(i - 1)$ como o restante da iteração i e pare o processo iterativo.

N4) Represente em ábaco as unidades restantes de cada iteração.

Faça corresponder univocamente cada “casa” ou “pino” de um de ábaco, iniciando pela direita do ábaco, a uma iteração realizada. Então, cada casa ou pino, represente com tantas anilhas quanto for a quantidade de agrupamentos restante da iteração que lhe corresponde.

N5) Registre com lápis e papel.

Na ordem das casas do ábaco, da direita para a esquerda, registre com lápis e papel as quantidades de anilhas presente em cada ‘casa’ do ábaco, por meio dos símbolos que lhes correspondem, tendo o cuidado de registrar as ‘casas’ ou pinos vazios correspondentes a iterações realizadas, com o símbolo que representa a ausência de unidades restantes, que pode ser o zero.

Esse MPR teve duplo papel na execução do projeto do sistema didático $\mathcal{S}(\text{FI}, \text{D}, \text{Qg})$:

(1) Primeiro, relativo aos topos de D como *formador*. Nesse caso, o MPR funcionou para a direção de estudo D como orientador de seus gestos didáticos criando ou modificando condições de modo a levar os professores FI a mudar suas relações com os numerais posicionais.

(2) Segundo, e em consonância com o primeiro, foi relativo aos topos de D enquanto *pesquisador*. Nesse caso, o MPR foi a base de orientação para a construção de uma situação didática, representada por uma questão geradora Qg como condição inicial para o desenvolvimento da engenharia didática reversa do PEP e de seus gestos

didáticos para criar as condições necessárias de modo a prover respostas à sua pesquisa e consequente responder a questão da tese.

A engenharia didática reversa do PEP se inseriu no conjunto dos modelos de situações sem considerar, a priori, possíveis variáveis didáticas relacionadas a ação didática em andamento, mas admitiu que os resultados encontrados em seu desenvolvimento pudessem ser submetidos às experiências em situações mais complexas e sob hipóteses mais profundas.

Assim, embora o PEP estivesse a serviço da pesquisa, ele permitiu o exercício de seu duplo papel, colocando a pesquisa em andamento a seu serviço, como a geração de situações didáticas como objetivos que, direta ou indiretamente, criaram e modificaram condições para a existência e o funcionamento dos sistemas didáticos que os constituíram.

5.6 A SITUAÇÃO COMO CONDIÇÃO INICIAL PARA A EXECUÇÃO DO $S(FI; D; Qg)$

A situação criada por D funcionou como condição inicial para o desenvolvimento do PEP com os professores em formação inicial observando dos princípios da dúvida e da ignorância metódica.

No texto da situação foi tomado um contexto não rotineiro que permitisse o enfrentamento de questionamentos sobre numerais não usuais, ainda que hipotético, tendo em vista que o rotineiro reduziria o PEP a uma simples tarefa rotineira que é dotado de uma resposta pronta, como obra dos habitus associados a uma situação, no sentido dado por Bourdieu (2004), e, com isso, não atenderia ao propósito dessa metodologia de pesquisa.

A situação em contexto não usual envolvendo extraterrestre, com uso de numerais representados por letras do alfabeto, foi dotada de informações que poderiam ser abstraídas nos princípios P1 e P2, além de uma correspondência particular entre um numeral extraterrestre e um numeral decimal que poderia funcionar como condição para reconstruir o MPR. Especificamente, a situação construída foi a que segue:

Pertenço a um povo parecido com os humanos. Possuo I boca, V olhos e Z membros como eles, mas me diferencio por possuir apenas A, ou seja, Z menos I, dedos em cada um desses membros, além de não possuir pelos, ou seja, O pelos em todo o corpo.

Em meu planeta nós cultivamos grãos e tubérculos como os terráqueos. Em particular, em nosso último ano solar AIOOO, que corresponde ao ano solar cristão da terra de 2000, obtive a seguinte produção:

Quadro 3: Representação de grãos ou tubérculos

PRODUTOS	PRODUÇÃO
<i>Feijão</i>	<i>AZOIO</i>
<i>Arroz</i>	<i>ZVAII</i>
<i>Mandioca</i>	<i>ZZAAV</i>

Fonte: Próprio autor (2020)

Em meu planeta usamos apenas os registros de representação V, A, Z, I e O para representar as quantidades.

As questões foram as seguintes:

A partir das informações fornecidas na situação descrita no texto, responda às seguintes questões:

2₁: Qual seria uma provável aparência física desse povo?

2₂: Como provavelmente chegaram à representação de quantidades do modo apresentado no texto?

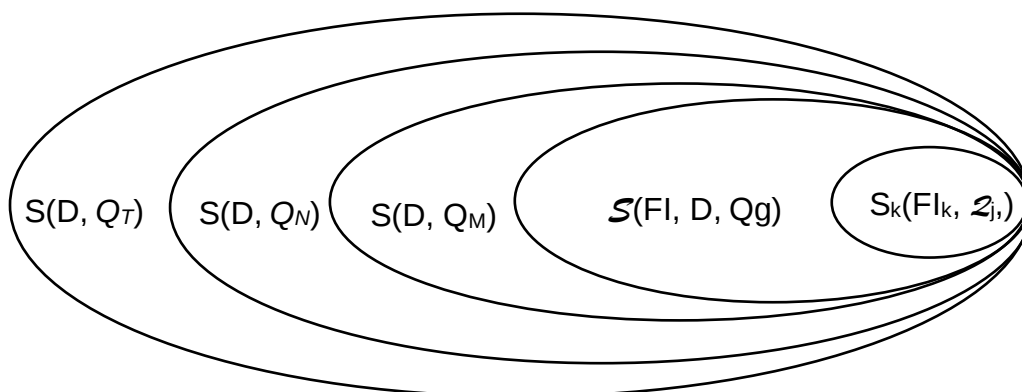
2₃: Como ficaria representada a produção da tabela acima no sistema numérico usual dos terráqueos?

Em síntese, a situação geradora foi construída pela direção de estudo D a luz do MPR como condição para a observação dos princípios da dúvida e da ignorância metódica necessários para o desenvolvimento do PEP no sentido da engenharia didática reversa, com os professores em formação inicial FI sob a restrição de se constituir também em uma trajetória de formação docente e, portanto, como o coração do PEP no sentido de método de pesquisa para responder à questão da tese.

Assim, a questão Q_M , derivada da questão de tese Q_N , foi o desafio da direção de estudo de D, com a concepção e execução do seu projeto de estudo e

investigação $\mathcal{S}(FI, D, Qg)$ como condição para a existência e funcionamento do sistema didático $S(D, Q_N)$ para o encontro de uma resposta à questão Q_T . O esquema a seguir, representa as relações entre esses sistemas didáticos:

Figura 146: Relações entre os sistemas didáticos



Fonte: Próprio autor (2020)

Em que a questão Qg é a tripla de questionamentos que determinam a situação, ou seja, $Qg = (Q_1, Q_2, Q_3)$.

5.7 A EXECUÇÃO DO PROJETO

Nas análises realizadas no capítulo anterior foi destacado o sistema didático $\mathcal{S}(FI, D, Qg)$ ao encontro da resposta $Rg = (R_1, R_2, R_3)$ com ajuda de suas entidades “moleculares”, os sistemas didáticos auxiliares $S_k(FI_k, Q_i)$, pois estes, em suas interrelações, constituíram o coração do desenvolvimento do sistema didático mais inclusivo $S(D, Q_M)$.

Nessas análises são referenciados os encontros de novos conhecimentos pelos professores em formação inicial FI sobre a estruturação dos numerais posicionais que inclui os numerais decimais, bem como as condições criadas e modificadas pela classe $[FI, D]$ e pela direção de estudo D, enquanto pesquisadora, que proveram esses encontros.

A execução do projeto, ou seja, o funcionamento de $\mathcal{S}(FI, D, Qg)$ observou os pressupostos teóricos da TAD do modo a seguir: o que preconiza Chevallard (2009) sobre um PEP como metodologia de pesquisa, ou seja, a direção de estudo D,

sempre que possível e sem perder de vista as condições criadas ou modificadas pelos professores FI no interior do sistema didático $\mathcal{S}(FI, D, Qg)$, criou e modificou certas condições nesse sistema didático, em alguns momentos das difusões e defesas de respostas praxeológicas relativas a esses questionamentos, para a avaliação das hipóteses investigadas pelo sistema didático $S(D, Q_M)$.

Nesses termos, a análise considerou condições que realmente foram criadas ou modificadas sob as restrições existentes nem sempre conhecidas, para a ratificação ou modificação das respostas praxeológicas difundidas e defendidas pelos sistemas didáticos auxiliares $S_k(FI_k, Q_i)$ que poderiam permitir levar os professores FI ao encontro da estrutura do SND como um SNP.

Mais precisamente, o sistemas didáticos $\mathcal{S}(FI, D, Qg)$ foi encaminhado com ajuda de sistemas didáticos auxiliares $S_k(FI_k, Q_i)$ que não foram totalmente livres em relação ao pesquisador D, pois foram deliberadamente "perturbados" por ele quando criou ou modificou condições para avaliação das hipóteses investigativas, mas sem perder vista a condição restritiva institucional sobre o caráter formador para os professores FI da disciplina que comportou esse sistema didático. Nesse caso, D foi frequentemente formador, mas geralmente, um formador a serviço do pesquisador.

Um dos papéis dos topos da direção de estudos D, foi encaminhar suas obrigações e deveres no gerenciamento da economia praxeológica dos estudos e das investigações. Para isso, teve que decidir com gestos didáticos em concordância com os professores em formação FI sobre a inclusão ou exclusão das obras estudadas, inclusive sobre o grau de profundidade desses estudos, bem como a ratificação ou retificação de questionamentos e respostas.

Por isso, foi exigido da direção de estudo D o conhecimento sobre um horizonte do saber estudado, nesse caso, o conhecimento de um modelo praxeológico sobre a estruturação de numerais posicionais a partir de um processo de quantificação. Daí, a construção a priori do MPR pelo sistema didático $S(D, Q_M)$ como condição para prover gestos didáticos de D no interior do sistema didático $\mathcal{S}(FI, D, Qg)$.

Nesse sentido, a topogênese necessária à engenharia didática reversa do PEP foi afetada pela direção de estudo D, principalmente quando buscou vencer seus habitus professorais, em particular, os de encaminhar artificialmente os estudos, subestimando as obras não específicas de sua disciplina, com a intencionalidade, por exemplo, de reduzir o "gasto praxeológico" dos estudos e das investigações.

Os gastos praxeológicos aqui referidos são os esforços e o tempo necessário de estudos e de investigações, assim, por exemplo, reduzir o número de obras estudadas e ou as profundidades desses estudos, reduzem também o tempo de relógio dos estudos investigativos, o que certamente poderia levar o sistema didático $\mathcal{S}(FI, D, Qg)$ às respostas praxeológicas relativamente incompletas, senão inadequadas.

Por outro lado, a topogênese relativa aos sistemas didáticos auxiliares $S_k(FI_k, Q_i)$, e dos professores FI, coube ao protagonismo dos estudos e investigações, encaminhamentos e questionamentos, propondo respostas praxeológicas, além de proporem obras da literatura que eles dispusessem e que julgassem necessárias para os estudos.

Assim, não somente os gestos didáticos de D condicionaram o desenvolvimento do $\mathcal{S}(FI, D, Qg)$, mas também, os gestos didáticos dos professores FI, pois ambos determinaram o "tamanho do gasto praxeológico" que implicou no desenvolvimento da mesogênese e, claro, da cronogênese.

A mesogênese construída pelo sistema didático $\mathcal{S}(FI, D, Qg)$ inclui os seus sistemas auxiliares, com as obras prontas ou produzidas para o estudo, entre elas as respostas praxeológicas e o modo como essas obras foram chamadas e estudadas à investigação, o que inclui os questionamentos formulados e reformulados por esses sistemas didáticos auxiliares, que foram úteis ou indispensáveis para o encontro de respostas praxeológicas adequadas para as questões de Qg.

As respostas praxeológicas difundidas pelos sistemas didáticos auxiliares $S_k(FI_k, Q_i)$, validadas em seus interiores, foram posta à prova do sistema didático $\mathcal{S}(FI, D, Qg)$, por meio das dialéticas das mídias, entre elas, os professores FI e D, e

o milieuo M , até então construído, de modo a assegurar que nenhuma mídia fosse “a primeira e única fala” (CHEVALLARD, 2009b, p.16).

Esse trabalho com o milieuo M , em geral, demandou estudos de diferentes obras O_j , nem sempre conhecidas dos professores FI , principalmente quando o sistema didático $\mathcal{S}(FI, D, Qg)$ questionou os sistemas didáticos auxiliares $S_k(FI_k, Q_j)$ sobre suas respostas praxeológicas.

A dinâmica da construção dessa mesogênese, em consonância com a topogênese, poderia ter implicado em uma cronogênese que conflitaria com a condição de carga horária imposta pelo nível de (co)determinação didática da instituição formadora de professores. Esta atribui tempo de relógio limitado para a disciplina em que o sistema didático $\mathcal{S}(FI, D, Qg)$ foi desenvolvido.

A condição da cronogênese que dilatava o tempo didático e de relógio para a execução do projeto por $\mathcal{S}(FI, D, Qg)$, exclusivamente em sala de aula, foi modificada com a inserção da instituição de sistemas didáticos auxiliares $S_k(FI_k, Q_j)$ para seu desenvolvimento.

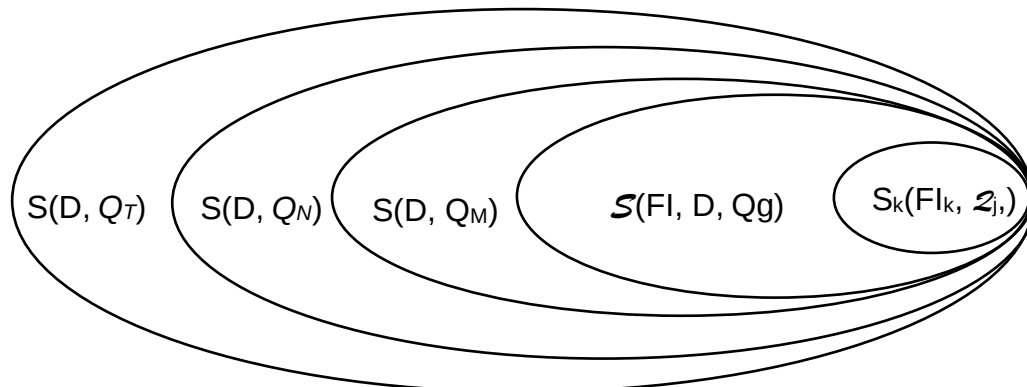
A direção de estudo D , enquanto pesquisadora, com propósito de ratificar a observância dos princípios da dúvida e da ignorância metódicas, considerou para o desenvolvimento do $\mathcal{S}(FI, D, Qg)$, a observância das cinco tarefas que caracterizam uma verdadeira pesquisa (CHEVALLARD, 2013a).

Essas tarefas que envolveram a busca das respostas que vivem na instituição docente, os estudos de obras, estudos de respostas prontas, análises de respostas prontas e a produção de respostas foram encaminhadas por D aos sistemas didáticos auxiliares $S_k(FI_k, Q_j)$ e reeditadas durante a realização da tarefa de difusão e defesa das repostas praxeológicas no seio do sistema didático $\mathcal{S}(FI, D, Qg)$. Estas constituíram as sessões analisadas em busca das condições que proveram as respostas ao sistema didático $S(D, Q_M)$ e, em consequência, aos sistemas $S(D, Q_N)$ e $S(D, Q_T)$.

5.8 SÍNTESES

5.8.1 DO DESENVOLVIMENTO DO PEP

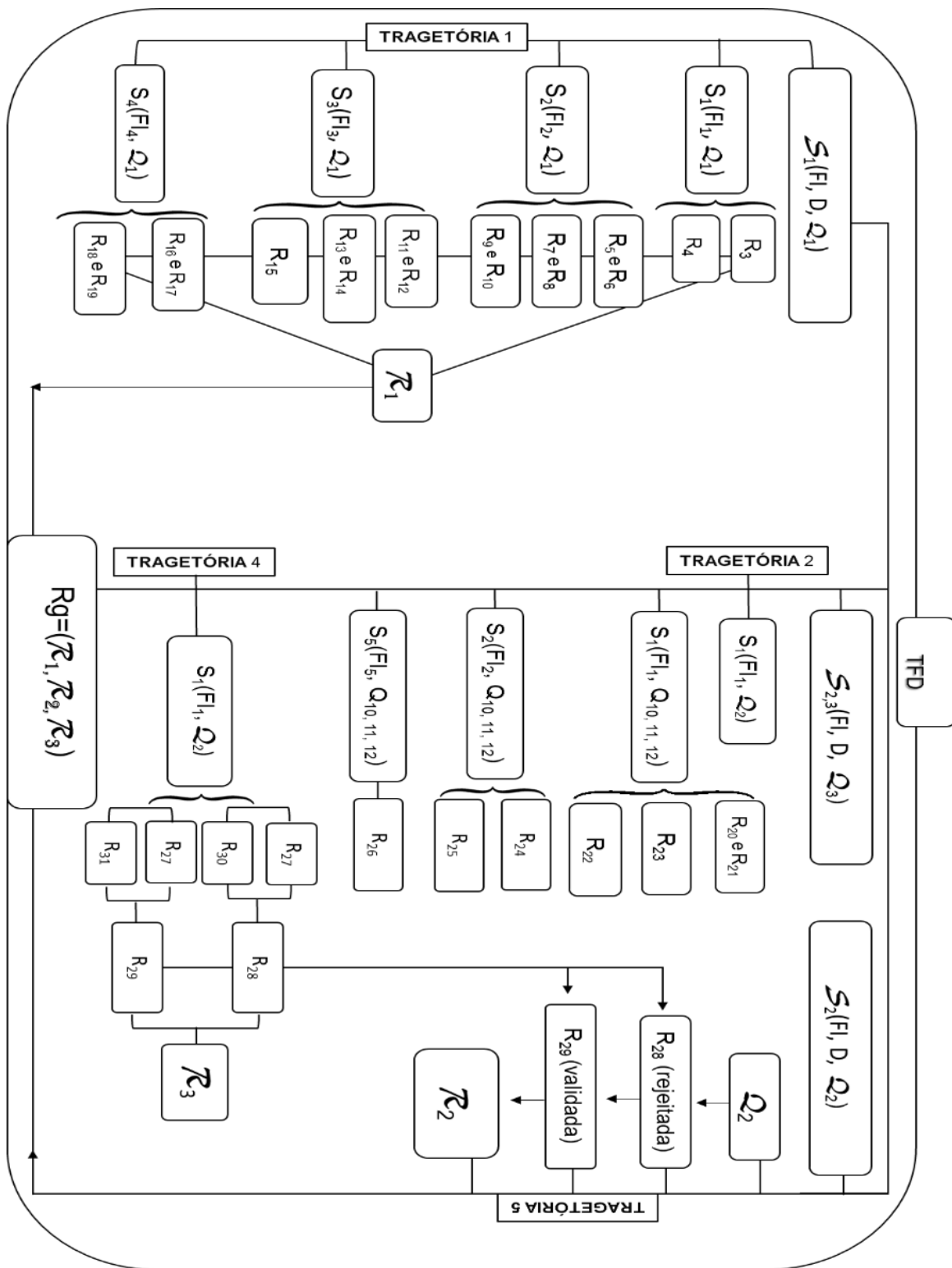
Figura 147: Relações entre os sistemas didáticos



Fonte: Próprio autor (2020)

5.8.2 DO DESENVOLVIMENTO DA TRAJETÓRIA DE FORMAÇÃO DOCENTE (TFD)

Figura 148: Trajetória de Formação Docente



5.9 ENCONTROS NESTA PESQUISA

Do ponto de vista de D, enquanto formador, foram observados que o MPR e a situação Qg propostas funcionaram de acordo com o desejado e, portanto, foram considerados válidos como dispositivos didáticos para ajuda à orientação de percursos de estudos e pesquisas, com propósito de formação de professores relativo aos sistemas de numeração.

A situação Qg criada sob a compreensão do MPR permitiu a devolução ou apropriação pelos professores em formação FI das questões problemáticas postas, além de prover condições para a direção de estudos encaminhar a criação de situações que deram razão ao funcionamento dos diferentes sistemas didáticos auxiliares, necessários para o desenvolvimento de um PEP.

A mobilização de conhecimentos em situações de quantificações, com uso de registros escritos não usuais e com estranhamentos, sem dúvida, colaborou para a emersão de questionamentos que contribuíram para observância dos princípios da ignorância e da dúvida metódica, tão necessários para um verdadeiro PEP acontecer.

De outro modo, a empiria do PEP evidenciou o potencial da situação criada em um contexto estranho aos professores em formação como provedora de condições para a criação do ambiente crítico de argumentações necessárias para o desenvolvimento de atitudes de protagonismo questionador dos professores sobre os numerais e, em particular, sobre o processo de numeração a partir da quantificação.

Essa atitude se evidenciou, sobretudo, com o encaminhamento do $\mathcal{S}$ (FI, D, Qg) para produção de uma resposta denominada de sistema quinário. Isso proporcionou a expansão das compreensões que permitiriam a leitura do quadro de produção agrícola dos Et's. Isso exigiu, sob as condições didática-pedagógicas postas, encontrar objetivamente a estrutura do SNP.

É importante destacar o caráter pluridisciplinar da metodologia do PEP quando, de modo explícito, os professores se manifestaram sobre a mobilização de conhecimentos de diferentes naturezas, inclusive culturais, e como ambiente de questionamento de mundo, (CHEVALLARD, 2004, 2009, 2013) que podem fazer

uma efetiva mudança de rota no ensino tradicional para evitar que o ensino e a aprendizagem permaneçam centrados nos professores.

FI₁: *Não é porque...a gente tá dando essa linguagem de unidade simples, unidade de ordem superior, sendo que a gente pode chamar ... usar o sistema ..., usar a dezena do sistema decimal, a centena do sistema decimal...(quinzenal?), sendo que não tem essa linguagem, não tem um nome específico, para o sistema quinário, para a base dois, então quer dizer que a gente também pode usar, na base 10 a unidade de ordem superior, simples, de ordem superior, na base dez, também, a gente pode, não precisa usar o termo dezena, centena, a gente pode também utilizar essa linguagem na base 10? ou não existe, a gente pra tratar de outro sistema na base cinco, base dois, a gente só tem que usar essa linguagem na base dois...?*

O convívio dos professores em formação durante o desenvolvimento do PEP permitiu questionamentos sobre os conhecimentos matemáticos em relação a outros conhecimentos que vivem na escola e na sociedade em simultaneidade, que os levou ao encontro de novos olhares sobre os elementos dos sistemas de numeração, inclusive sobre as práticas de ensino por eles já vivenciadas.

FI₂: *O mais interessante é que, como o FI₅ falou, nós estamos tão acostumados a trabalhar só naquele sistema decimal que parece assim, que não existe outro. Quando você vai fazer a pesquisa, você vê que existe outro sistema que pode te levar a um outro método de cálculo, de primeiro, tanto é que eu acho que nosso maior bloqueio foi, sair da visão do decimal pra trabalhar uma outra visão completamente diferente.*

Considerando que PEP levou os professores em formação inicial ao encontro de novos olhares e de novos conhecimentos sobre os sistemas de numerações, inclusive com a proposição e validação por eles do sistema de numeração quinário (SNQ) dos Et's como um sistema posicional, fazendo-os ver suas mudanças de relação para com o SNP e, em consequência, com o SND, pode-se dizer que o percurso de estudo se constituiu para eles em uma trajetória de formação docente sobre sistemas de numeração.

FI₁: *Durante as aulas a gente se pôs um pouco no lugar da criança, a gente teve que aprender outros sistemas, para poder ver como nós vamos ensinar sistema decimal para elas.*

A trajetória aqui apresentada não é a única, pois cada professor em formação realizou suas próprias dinâmicas cognitivas que, em consequência, pode levar a outras trajetórias que podem diferir em muito da trajetória apresentada. Além disso, mesmo que todos buscassem uma resposta para as questões impostas na situação inicial, as dinâmicas cognitivas do pesquisador atentaram em encontrar respostas à

sua pesquisa, enquanto os professores se detinham às respostas relacionadas entre si sobre sistemas de numeração.

Do ponto de vista do diretor de estudo D, enquanto pesquisador, foi observado que no desenvolvimento do PEP, paulatinamente, foram confirmadas as hipóteses de naturalização dos numerais decimais, desconhecimento da estruturas dos numerais decimais e a insuficiente formação matemática dos professores, manifestadas principalmente quando frente às situações que exigiram cálculos aritméticos e usos da fórmula de mudança de base, bem como sobre a manipulação do ábaco para descrever as operações para quantificação.

Nossa conclusão se depreende das dificuldades reveladas pelos gestos dos professores em formação quando ficaram frente às práticas de quantificação para numeração. Eles não conseguiam evidenciar o numeral como derivado de um processo de quantificação, mas somente interpretar os numerais como uma quantidade. Isso evidenciou em definitivo o desconhecimento sobre a estrutura do SNP e, em particular do SND.

Além disso, os professores em formação FI não faziam relação objetiva entre o sistema posicional quinário com o sistema binário, manifestadamente conhecido por eles e, tampouco, com o sistema decimal, enquanto objetos portadores da estrutura do SNP.

O SND foi um objeto não discutido durante todo o desenvolvimento do PEP, embora diferentes situações permitissem discuti-los por meio do uso dos numerais decimais. Isso caracterizou em definitivo os numerais decimais como um objeto cultural que, como tal, não é discutido, não raro, por ser indiscutível.

De outro modo, o conhecimento dos professores em formação FI sobre os numerais decimais e os numerais binários não se constituíram em condição suficiente para o encontro deles com o SNP e, em consequência, com o SND, enquanto portadores de uma estrutura. No entanto, foi observando a lógica prática de escrever os numerais decimais que se aprende por imitação e inscritas na cultura das práticas sociais, inclusive na escola, com paralelos com os numerais binários, e não a de construí-los segundo uma estrutura regrada, que permitiram aos

professores em formação FI os primeiros passos para o encontro da estrutura do SNP e, com isso, observar o SND como um caso em particular.

Esse encontro, no entanto, somente aconteceu a partir de condições postas pela direção de estudo D, enquanto pesquisador-formador, com questionamentos sobre a noção de códigos, de símbolos ou ainda impondo restrições sobre as construções de respostas praxeológicas pelos professores em formação FI, inicialmente com a exigência de uso de materiais concretos e, posteriormente, restringindo o uso de ábacos físicos, pois este parecia funcionar como obstáculos ao encontro dos professores FI como processo de agrupamentos iterativos.

Nesse sentido, destaca-se a importância da condição criada pela direção de estudo D para a construção em definitivo pelos professores FI de uma resposta à questão 2_2 , considerando que esta ratifica a resposta a questão 2_3 e, sobretudo, porque encaminha em definitivo as respostas das demais questões Q_M , Q_N e Q_T . Essa condição foi o demandar dos professores em formação FI o enfrentamento do ***problema didático da formação inicial de professores, nesse caso, o que de sistema de numeração e como ensiná-lo com materiais concretos para professores em formação inicial, ou alunos, dos anos iniciais?***

Essas condições criadas pela direção de estudo D em conjunção com as respostas praxeológicas criadas pelos professores em formação FI se mostraram úteis, senão indispensáveis, para que esses professores encontrassem a resposta praxeológica apresentada na sessão 5 que se revelou em acordo com MPR.

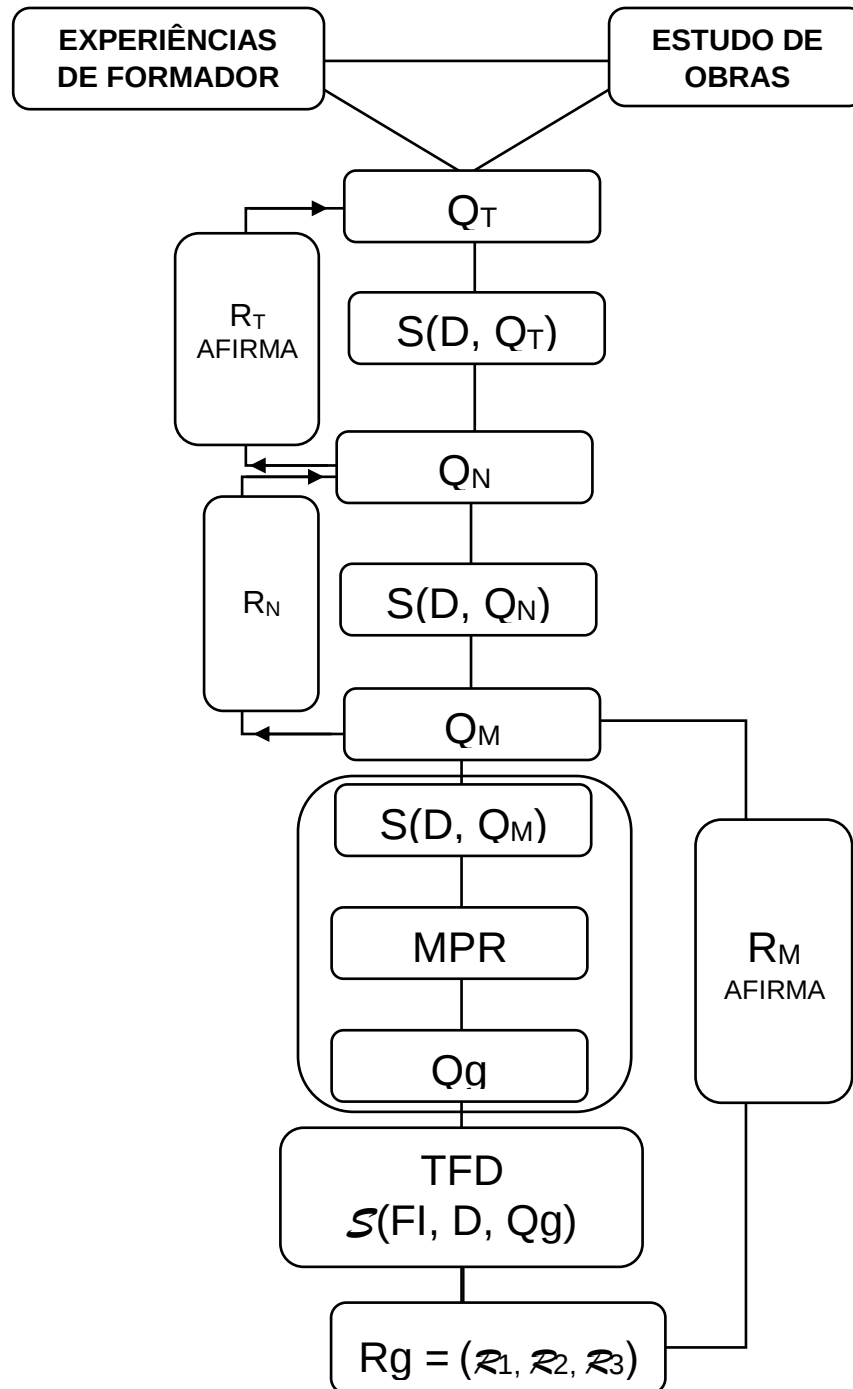
Os encontros do sistema didático $\mathcal{S}(FI, D, Qg)$ que confirmaram as hipóteses em simultaneidade sobre os professores em formação FI e o encontro deles frente a situação Qg , com ajuda de D sob orientação do MPR, ratificam a hipótese sobre o processo de quantificação de unidades discretas se constituir em condição suficiente para a desnaturalização do SND pelo encontro do SNP.

De outro modo, a resposta praxeológica construída pelos sistema didático $\mathcal{S}(FI, D, Qg)$, sob as condições criadas por seus membros, inclusive sobre as hipóteses impostas em simultaneidade, por ir ao encontro do MPR permite encaminhá-la como uma resposta praxeológica que afirma o questionado na

questão Q_M por desnaturalizar os numerais posicionais por meio do conhecimento de sua estrutura.

A resposta validada para Q_M encaminha uma resposta possível para Q_N que, em consequência, e observando as hipóteses e condições iniciais postas, asseguram uma resposta afirmativa à questão Q_T .

Figura 149: Estrutura da tese



Fonte: Próprio autor (2020)

5.10 ENCAMINHAMENTOS FUTUROS

A pesquisa não se encerra sobre os encontros aqui apontados, pois encaminha novos questionamentos que permitem dizer que o PEP, em sentido, amplo, permanece aberto. Entre esses questionamentos, destacamos pelo menos três mais imediatos: (1) Qual a sequência de tarefas envolvendo quantificações de unidades de materiais concretos que devem ser criadas para que alunos dos anos iniciais encontrem o SNP? (2) Quais os impactos que devem sofrer as organizações didáticas para o ensino dos numerais decimais nos anos iniciais do fundamental frente ao MPR? E, não menos importante, qual o impacto do uso do MPR sobre o currículo para a formação matemática de professores para os anos iniciais?

São pequenas questões, mas que carecem de grandes esforços para encontrar respostas praxeológicas adequadas e que, portanto, somente um PEP com professores em formação inicial e continuada, além de seus formadores, pode oportunizar.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALMEIDA, F. M. M. B. **Sistemas de Numeração Precursores do Sistema Indo-Árabe**. Ed. Livraria da Física, São Paulo, 2011.

ALMEIDA, F. M. M. B. **Sistemas de Numeração Precursores do Sistema Indo-Árabe**. Dissertação (mestrado) - Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, 2007

ARAYA, A.; MATHERON, Y. **Una problemática de la memoria: proposiciones y ejemplos para su estudio antropológico en didáctica de las matemáticas**. In: RUIZ-HIGUERAS, L.; ESTEPA, A.; GARCÍA, F. J. Sociedad, escuela y matemáticas. Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo didáctico (TAD). Jaén: Servicio de publicaciones de la Universidad de Jaén, p. 261-278, 2006.

BARQUERO, B. **Ecología de la modelización matemática en la enseñanza universitaria de las matemáticas**. Manuscrito de Tesis Doctoral. Universitat Autònoma de Barcelona, 2009.

BATHELT, R. E. **A Psicologia do Número. Educação**. (UFSM), vol. 25, no. 1, pp. 97-112. Ano 2000.

BOSCH, M.; GASCÓN, J. **Las prácticas docentes del profesor de matemáticas. XIème École d'Été de Didactique des Mathématiques**, de 2001.

BOSCH, M, CHEVALLARD, Y, GARCÍA, F, MONAGHAN, J. **Working with the Anthropological Theory of the Didactic in Mathematics Education. A Comprehensive Casebook**, 2019.

BOSCH, M; CHEVALLARD, Y; CIRADE G. & C. LADAGE (Eds.) **Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d'action** (pp. 49-85), Montpellier, Francia: IUFM de l'Académie de Montpellier. 2010. Disponível em: <http://www.atd-tad.org/documentos/bosch-m-gascon-j-2010-fundamentacionantropologica-de-las-organizaciones-didacticas-de-los-talleres-de-practicas-matematicas-a-los-recorridos-de-estudio-e-investig/>. Acessado em janeiro de 2020.

BOSCH, M.; GASCÓN, J. **Fundamentos antropológicos das organizações didáticas: das "oficinas de práticas matemáticas" às "rotas de estudo e pesquisa"**. In: BRONNER, A.; LARGUIER, M. ARTAUD, M. BOSCH, M.; CHEVALLARD, Y, CIRADE LADAGE, G. C. (ed.) *Diffusor los Mathematiques (et les autres savoirs) comme d'outils de connaissance et acção*. Montpellier, França: IUFM de l'Académie de Montpellier, 2010.p. 49-85.

BOURDIEU, P. **Coisas ditas**. Tradução Cássia R. da Silveira e Denise Moreno Pegorin; Ed.Brasiliense, 2004.

BOURDIEU, P. y WACQUANT L. **Una invitación a la sociología reflexiva**. 1a ed. Buenos Aires: Siglo XXI Editores Argentina, 2005.

BRASIL. **Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental**. Parâmetros curriculares nacionais: Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BROUSSEAU, G. **Théorie des situations didactiques: Didactique des mathématiques** 1970–1990 (N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland and V. Warfield, Eds.). Grenoble: La Pensée Sauvage, Éditions 1998.

CARVALHO, M. **Pedagogia e os Conteúdos Matemáticos: a Formação do Professor dos Anos Iniciais e Educação Infantil**. Anais do IX ENEM, (Belo Horizonte-MG), 2007.

CENCI, D.; BECKER, M. L. R.; MACKEDANZ, L. F. **Produções Acadêmicas sobre o ensino do sistema de numeração decimal: O Estado da Arte**. Revista de Divulgação. Científica em Ciências Exatas e Tecnológicas PORANDU Vol. 1, n. 1, p.29-41, 2015.

CHARLOT, B. **O sujeito e a relação com o saber**. In: BARBOSA, Raquel Lazzari Leite (Org.). Formação de educadores: desafios e perspectivas. São Paulo: Editora UNESP, 2003. p.23-33.

CHEVALLARD, Y. **Les processus de transposition didactique et leur théorisation**. 1994 Disponível em: http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=114 . Acessado em: 20 março de 2019

CHEVALLARD, Yves. **Intégration et viabilité des objets informatiques dans l'enseignement des mathématiques Le problème de l'ingénierie didactique**. Janyvier 1992. Contribution à l'ouvrage dirigé par B. Cornu, L'ordinateur pour enseigner les mathématiques, PUF, p. 183-203. 1992. Disponível em: http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Integration_et_viability_des_objets_informatiques.pdf. Acesso em: 15 Janeiro. 2019.

CHEVALLARD, Y. **El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico**. Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol 19, nº 2, pp. 221-266, 1999.

CHEVALLARD, Y. **La place des mathématiques vivantes dans l'éducation secondaire: transposition didactique des mathématiques et nouvelle épistémologie scolaire**. 3e Université d'été Animath, Saint-Flour (Cantal), 22 al 27 août, 2004.

CHEVALLARD, Y. **La Transposición Didáctica: del saber sabio al saber enseñado**. 2ª ed. 3. reimp. Buenos Aires: Aique Grupo Editor, 2005

CHEVALLARD, Y. **La notion d'ingénierie didactique, un concept à refonder: questionnement et éléments de réponse à partir de la TAD**, 2009b. Disponível em: <http://yves.chevallard.free.fr/>. Acessado em 24 junho 2019.

CHEVALLARD, Y. **La notion de PER: problèmes et avancées**, 2009c. Disponível em <http://yves.chevallard.free.fr/>. Acessado em 03 junho 2019.

CHEVALLARD, Y. **La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné. Grenoble: La Pensée Sauvage**. [Traducción en español de Claudia Gilman. La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado. 3ª ed. Buenos Aires: Aique], 2009d.

CHEVALLARD, Y. **La matemática en la escuela: Por una revolución epistemológica y didáctica**, Buenos Aires. Libros del Zorzal, 2013a

CHEVALLARD, Y. **Enseñar Matemáticas en la Sociedad de Mañana: Alegato a Favor de un Contraparadigma Emergente**, p. 168, 2013c

CHEVALLARD, Y. **Éléments de didactique du développement durable – Leçon 1: Enquête codisciplinaire & EDD**, 2013b.

CHEVALLARD, Y. **Praxeological Issues in the Development, Reception and Use of ATD: Some Remarks**, 2016. Disponível em: http://www.atd-tad.org/wp-content/uploads/2016/03/Chevallard_TAD-5_TexteCoference_EN.pdf. Acessado em 20 maio 2019.

CHEVALLARD, Y. **A teoria antropológica do didático face ao professor de matemática**. In (Organização): Almouloud, S. A., Farias, L., M., S., F., Henriques, A. Ed. CRV Ltda. A teoria antropológica do didático: Princípios e Fundamentos, 2018.

DEDEKIND, R. **Qué son y para qué sirven los números?** Traducción de la sexta edición. Por J. Bares y J. Climent. Disponível em: <https://www.uv.es/jkliment/Documentos/Dedekind.pc.pdf> . Acessado em 21 de julho de 2019.

CURI, E. **Formação de professores polivalentes: uma análise dos conhecimentos para ensinar matemática e das crenças e atitudes que interferem na constituição desses conhecimentos**. Tese de Doutorado. PUC/SP. São Paulo. 2004.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. Ed. Unicamp. 1ª edição, 1997.

FERNANDES V. M. J. **Revelações na Formação Inicial de Professores para Ensinar Matemática nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental**, in Anais do XI ENEM. Curitiba-PR, 2013.

FERREIRA, R. S. R.; NUNES, J. M. V; GUERRA, R. B. Atividade de estudos e investigação sobre o sistema de numeração posicional na formação de professores dos anos iniciais. **Educação Matemática Pesquisa: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática**, [S.l.], v. 21, n. 5, nov. 2019.

ISSN 1983-3156. Disponível em: <<https://revistas.pucsp.br/emp/article/view/45546>>. Acessado em: 10 setembro 2020. doi: <https://doi.org/10.23925/1983-3156.2019v21i5p274-288>.

FERREIRA, R. S. DO R.; GUERRA, R. B. Formação inicial de professores que ensinam matemática e o sistema de numeração decimal. **Revista de Estudos e Pesquisas sobre Ensino Tecnológico (EDUCITEC)**, v. 6, Ed. Especial, e118720, 2020. Disponível em: <https://sistemascmc.ifam.edu.br/educitec/index.php/educitec/article/view/1187/497>. Acessado em 10 setembro de 2020.

GARCÍA, F. J. **La modelización como herramienta de articulación de la matemática escolar. De la proporcionalidad a las relaciones funcionales.** Manuscrito de Tesis Doctoral. Universidad de Jaén, 2005.

GARCIA, M. F. **Os Saberes de Professores de Educação Infantil em Relação à Construção Numérica: Formação de Professores em um Grupo Cooperativo.** Dissertação de Mestrado, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, Programa de Pós-Graduação Profissional em Ensino de Matemática, São Paulo, SP, Brasil, 2006.

GARCÍA, F.J., SIERRA, T. A. *Modelos epistemológicos de referência na análise da atividade matemática em livros didáticos: o caso dos números na creche.* Em Fernández, Ceneida ; Molina, Marta ; Planas, Núria (Eds.), Pesquisa em Educação Matemática XIX (pp. 299-307). Alicante, Espanha: Universidade de Alicante, 2015.

GODINO, J. D (Diretor), CID E.; BATANERO C. **Matemáticas para maestros.** Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Granada, 2004. Disponível em, <http://www.ugr.es/local/jgodino/>. Acessado em 13 de agosto de 2019.

GUERRA, R.B; SANTOS S, F, H. **As operações com frações e o princípio da contagem** boletim de Educação Matemática, vol. 21, núm. 31, pp. 41-54 Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho Rio Claro, Brasil, 2008.

LADAGE, C; CHEVALLARD, Y. La pédagogie de l'enquête dans l'éducation au développement durable. In: COLLOQUE INTERNATIONAL: ÉDUCATION AU DÉVELOPPEMENT DURABLE ET À LA BIODIVERSITÉ. 2010, IUT de Provence. **Anais [...].** IUT de Provence, 2010. Disponível em: http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/YC_CL_-_Colloque_EDD_biodiversite_Digne_20-22_octobre_20_.pdf . Acessado em 22 julho 2019 .

LENDÍNEZ, E.M., GARCIA, F.J., & SIERRA, T.A.. La enseñanza del número en la escuela infantil: Un estudio exploratorio del logos de la profesión. *REDIMAT*, 6(1), 33-55. doi: 10.17583/redimat.2017.

LIMA, E. L. **Medida e forma em geometria.** Rio de Janeiro. SBM 1991

ITZCOVICH, H. (Coord). **La matemática escolar: las prácticas de enseñanza en el aula**. Ciudad de Buenos Aires: Aique Educación, 2008.

IFRAH, G. **Os Números. História de uma grande invenção**. São Paulo: Globo, 1985.

KLEIN, F. **Matemática de um Ponto de Vista Superior**. Volume I. Parte I Aritmética. SPM, Lisboa, 2009.

KLEIN, F. **Matemática de um Ponto de Vista Superior**. Volume I. Parte II Álgebra. SPM, Lisboa, 2010.

KLEIN, F. **Matemática de um Ponto de Vista Superior**. Volume I. Parte III Análise. SPM, Lisboa, 2011.

KLEIN, J. **Greek Mathematical Thought and the Origin of Álgebra**. Trad. Eva Brann. New York: Dover Publications, 1968.

PERELMAN, Y. **Aritmética Recreativa**, 2013. Disponível em: <http://www.librosmaravillosos.com/aritmeticarecreativa/index.html#capitulo01>. Acessado em: 22 de junho 2019.

PINTO, Pedro. Sistemas de numeração: Decimal, Binário, Octal e Hexadecimal. 03 de janeiro de 2013. Disponível em: < <https://pplware.sapo.pt/high-tech/sistemas-de-numerao-decimal-binrio-octal-e-hexadecimal/> > Acesso em: <12/08/2019.>

RIPOLL, C. RANGEL L., GIRALDO V. **Livro do professor de Matemática na Educação Básica: Números naturais**. Rio de Janeiro. Ed. SBM, 2016

RODRIGUES, A. E. A. **Sistemas de numeração: evolução histórica, fundamentos e sugestões para o ensino**. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Oeste do Pará, Instituto de Ciências da Educação, Programa. – Santarém, 2013.

ROQUE, T. **História da Matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas**. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

RUIZ-MUNZÓN, N. **La introducción del álgebra elemental y su desarrollo hacia la modelización funcional**. Manuscrito de Tesis Doctoral. Universitat Autònoma de Barcelona, 2010.

RUIZ, A.; SIERRA, T.; BOSCH, M. Y.; GASCÓN, J. **Las Matemáticas para la Enseñanza en una Formación del Profesorado Basada en el Estudio de Cuestiones**. Bolema, Rio Claro, v. 28, n. 48, p. 319-340, abr. 2014

SADOVSKY, P. **La enseñanza de la matemática en la formación docente para la escuela primaria**. 1a ed. - Buenos Aires: Ministerio de Educación de la Nación, v. 2, 128, 2010.

SEIFE, C. **Os números (não) mentem: Como a matemática pode ser usada para enganar você**. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Ltda, 2012.

SERRANO, L. **La modelización matemática en los estudios universitarios de economía y empresa: análisis ecológico y propuesta didáctica**. Manuscrito de Tesis Doctoral. Universitat Ramon Llull, 2013.

SHULMAN, L. **Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching**. Educational Researcher, v. 15, p. 4-14, 1986.

SCHOENFELD, A. H. Models of the Teaching Process, **Journal of Mathematical Behavior**, V.18(3), p. 243-261, 2000.

SILVA, M. C. **A Matemática na Índia Medieval**. In: História da Matemática. Lisboa: Universidade Aberta do Brasil, 2000

SILVA, R. L. **Engenharia didática reversa como um dispositivo de formação docente para a Educação do campo** / Renata Lourinho da Silva. — 2019.

SIERRA, T.A. **Lo matemático en el diseño y análisis de organizaciones didácticas: los sistemas de numeración y la medida de magnitudes**. Manuscrito de Tesis Doctoral. Universidad Complutense de Madrid, 2006.

STEVIN, S. **La Disme**. Edição. Paris: ACL- Editions, 1585

SODRÉ, G. **Modelagem matemática escolar: uma organização praxeológica complexa**. Tese de Doutorado. Universidade Federal do Pará, Instituto de Educação Matemática e Científica, Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas. Belém, 2019.

TERIGE, F e WOLFMAN S. **Sistema de numeración: consideraciones acerca de su enseñanza**. Revista iberoamericana de educación. N.º 43, pp. 59-83, ano 2007. Disponível em: <https://rieoei.org/historico/documentos/rie43a03.pdf> Acessado em 06 agosto 2019.

VASQUEZ, L., N. **Un ejercicio de transposición Didáctica en Torno Al Concepto de Número Natural en el Preescolar y el Primer Grado De Educación Básica**. Tese de doutorado, 2010. Disponível em: http://bibliotecadigital.udea.edu.co/bitstream/10495/7097/1/NormaVasquez_2010_numeronatural.pdf. Acessado em 20 de julho de 2019.

WALDEGG, G. **La contribución de Simon Stevin a la construcción del concepto de Numero**. Educación Matemática, 08(02), pp. 5-17, 1996.

OUTRAS FONTES POR MEIO ELETRÔNICO

Sistemas de numeração como funcionam e como são estruturados os números. disponível em: <http://wwwp.fc.unesp.br/~mauri/TN/SistNum.pdf> Consultado em: 10 de novembro de 2019.

ℳ₁: Disponível em: <https://pt.wikiquote.org/wiki/Povo>. Acessado em 20 de agosto de 2018

ℳ₂: Disponível em: <https://www.todamateria.com.br/membros-do-corpo-humano/> Acessado em 31 de agosto de 2018.

ℳ₃: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Quantidade> Acessado em 15 de agosto de 2018

ℳ₄: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Codifica%C3%A7%C3%A3o>. Acessado em 03 de setembro de 2018

ℳ₅: <https://www.youtube.com/watch?v=2pGkFn4Sgao>. Acessado em 07 de agosto de 2018

ℳ₆: <http://producao.virtual.ufpb.br/books/camyle/introducao-a-computacao-livro/livro/livro.chunked/ch0d3s03.html>. Acessado em 11 de setembro de 2018

ℳ₇: <http://wwwp.fc.unesp.br/~mauri/TN/SistNum.pdf>. Acessado em 10 de setembro de 2018

ℳ₈: http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/cadernospde/pdebusca/producoes_pde/2010/2010_uenp_mat_artigo_veronica_ortiz_de_oliveira.pdf. Acessado em 12 de setembro de 2018.