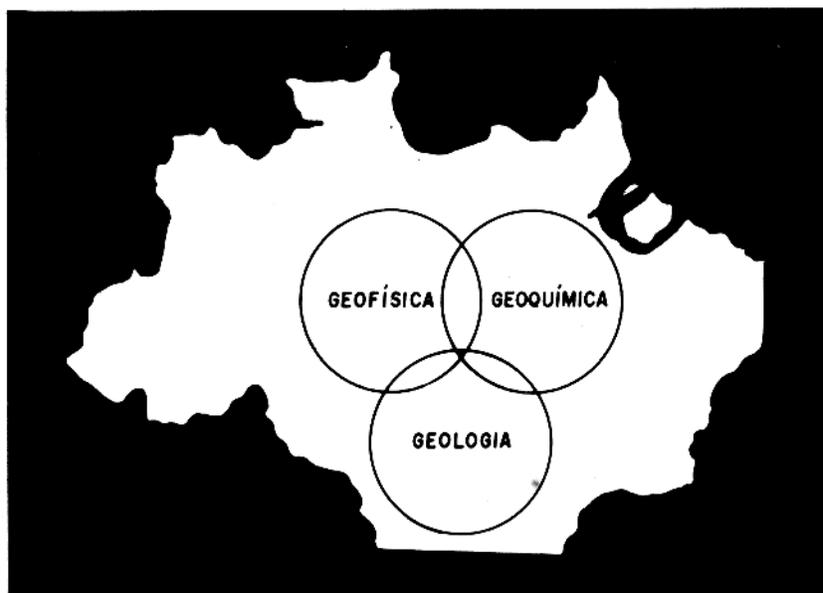


TESE DE MESTRADO

TRATAMENTO QUANTITATIVO DE ANOMALIAS  
DE POTENCIAL ESPONTÂNEO

SÔNIA DIAS CAVALCANTI GUERREIRO



NÚCLEO DE CIÊNCIAS GEOFÍSICAS E GEOLÓGICAS  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ  
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM CIÊNCIAS GEOFÍSICAS E GEOLÓGICAS

TRATAMENTO QUANTITATIVO DE ANOMALIAS  
DE POTENCIAL ESPONTÂNEO

por :

Sonia Dias Cavalcanti Guerreiro

TESE DE MESTRADO EM GEOFÍSICA

Aprovação da Banca Examinadora :

José Seixas Lourenço (José Seixas Lourenço)  
Orientador

Herberto Gomes Tocantins Maltez (Herberto Gomes Tocantins Maltez)

Augusto Cesar Bittencourt Pires (Augusto Cesar Bittencourt Pires)

Belém, Agosto de 1976

À Arlette e ao João

## RESUMO

A prospecção mineral por método de potencial espontâneo (SP) é extremamente simples e econômica tanto no que se refere à instrumentação utilizada, quanto em relação ao procedimento nos trabalhos de campo. Entretanto a interpretação de mapas de isopotenciais tem sido principalmente qualitativa.

O propósito deste trabalho é desenvolver uma metodologia que permita determinar os parâmetros do corpo causador da anomalia: localização, dimensões e intensidade e direção do vetor de polarização sem se limitar ao uso de perfis ou a ajustes com curvas teóricas.

Conhecendo-se na superfície do terreno a distribuição de potenciais decorrentes do processo de polarização espontânea é possível se obter as componentes do campo elétrico anômalo por filtragem, utilizando-se transformadas de Fourier, ou por um simples processo de diferenças finitas. Calcula-se então as integrais dos momentos do potencial e das componentes do campo elétrico, de forma tal que seja obtido um conjunto de tantas equações quanto forem os parâmetros do corpo que produz a anomalia.

A metodologia foi testada para os modelos mais característicos do processo de polarização espontânea, a saber o doublet e a linha de doublet, tendo sido obtidos resultados precisos para os parâmetros do corpo causador da anomalia.

## A B S T R A C T

The spontaneous potential method (SP) is extremely simple and economical for mineral prospecting as far as the instrumentation used and field work are concerned. However up to now, the interpretation of isopotential maps has been mainly qualitative.

The purpose of this work was to develop a methodology which allows the determination of the parameters of the causative body, namely: its location, dimensions and intensity and direction of the polarization vector, without using profiles or theoretical curve fittings.

The initial surface potential points were generated for a chosen model. From this artificial surface data, the components of the anomalous electric field were obtained by using a filtering process based on Fourier transforms or by a simple process of finite differences. Using the surface potentials, and the surface components of the electric field, the moment integrals were generated in such a way that a set of as many equations as the number of parameters of the causative body was obtained. By resolving these equations the parameters of the original body were determined.

The methodology was tested with bodies in the form of cylinders and steeply dipping sheets, respectively doublet and line of doublet models, and accurate results were obtained for the parameters of the causative body of the SP anomaly.

## ÍNDICE

INTRODUÇÃO . . . . .	1
Capítulo 1: INTERPRETAÇÃO DE ANOMALIAS DE POTENCIAL ESPONTÂNEO	
1.1. Revisão de Conceitos . . . . .	4
1.1.1. Origem do Potencial Espontâneo . . . . .	4
1.1.2. Procedimento de Campo e Correção de dados . . . . .	13
1.1.3. Métodos de Interpretação de Anomalias . . . . .	15
1.2. Obtenção do Potencial Espontâneo e das Componentes do Campo Elétrico . . . . .	17
1.2.1. Formulação . . . . .	17
1.2.2. Procedimento para a Obtenção das Componentes . . . . .	24
1.3. Métodos Propostos para o Tratamento Quantitativo de SP . . . . .	42
Capítulo 2: APLICAÇÃO DE INTEGRAIS ÀS ANOMALIAS DE SP	
2.1. Aplicação das Integrais Infinitas dos Momentos das Componentes do Campo Elétrico às Anomalias de SP . . . . .	45
2.1.1. Formulação . . . . .	45
2.1.2. Aplicação ao Modelo Doublet . . . . .	47
2.2. Aplicação das Integrais Finitas dos Momentos do Potencial e das Componentes do Campo Elétrico às Anomalias de SP . . . . .	54

2.2.1. Formulação . . . . .	54
2.2.2. Aplicação ao Modelo Doublet . . . . .	59
2.2.3. Aplicação ao Modelo Linha de Doublet . . . . .	76
2.3. Conclusões . . . . .	76
Formulário de Integrais . . . . .	88
AGRADECIMENTOS . . . . .	90
Apêndice A : Integrais Finitas das Anomalias de Po tencial Espontâneo. Modelo Doublet . . . . .	91
Apêndice B : Integrais Finitas das Anomalias de Po tencial Espontâneo. Modelo Linha de Doublet . . . . .	99
BIBLIOGRAFIA . . . . .	110

## INTRODUÇÃO

.1.

Em certas condições geológicas desenvolvem-se naturalmente potenciais elétricos no solo e nas rochas vizinhas a um corpo mineral eletricamente condutor. Este fenômeno é conhecido como polarização espontânea e frequentemente abreviado SP.

Fox (1830), trabalhando em minas na Cornuália, Inglaterra, foi o primeiro a descrever o fenômeno de polarização espontânea. Em 1882 Carl Barus introduziu eletrodos não polarizáveis de modo a medir as diferenças de potencial produzida por aquele fenômeno (Becker e Telford, 1965), mas foi com os trabalhos de Schlumberger a partir de 1913, que se tornou sistemático o uso dessas medidas em prospecção mineral por métodos geofísicos. Os corpos que regularmente apresentam anomalias de SP são em geral sulfetos, principalmente a pirita e a pirrotita, e ainda a calcopirita, calcocita e covelita. A grafita e a antracita, derivados do carvão, também costumam apresentar anomalias de potencial espontâneo.

A origem desse fenômeno ainda não está totalmente compreendida embora várias tenham sido as teorias propostas para explicá-lo. Entre elas a teoria de Sato e Mooney é a que melhor se ajusta à existência de potenciais espontâneos, embora não seja capaz de justificar a ocorrência de anomalias negativas maiores que 400mV.

A prospecção por método de polarização espontânea é extremamente simples e econômica, tanto no que se refere à ins

trumentação utilizada, quanto em relação ao procedimento nos trabalhos de campo. Entretanto a interpretação dos dados obtidos tem sido principalmente qualitativa supondo que, em geral, o corpo causador da anomalia encontra-se localizado aproximadamente abaixo do centro dos potenciais negativos.

A primeira tentativa de interpretação quantitativa data de 1928 com o trabalho de Petrowsky, onde o autor apresenta expressões matemáticas que traduzem a distribuição de potencial produzido na superfície do solo, por uma esfera condutora localizada em um ponto qualquer em sub-superfície. Outros autores como Heiland(1940), de Witte(1948), Yüngül(1950), Paul(1965), discutiram e expandiram os estudos de Petrowsky, mas na sua maioria esses métodos quantitativos se resumem a ajuste entre curvas teóricas e os dados de campo, procurando-se assim atribuir valores aos parâmetros que caracterizam o corpo anômalo.

O objetivo primordial deste trabalho é desenvolver uma metodologia que permita determinar os parâmetros do corpo causador da anomalia: localização, dimensões e intensidade e direção de polarização, sem se limitar ao uso de perfis ou a ajustes com curvas teóricas. A preocupação inicial foi descrever analiticamente a distribuição dos potenciais e do campo elétrico decorrentes do processo de polarização espontânea. Uma vez obtido esse campo e percebendo-se que as anomalias de SP são semelhantes a anomalias magnéticas ideais onde não existe magnetização induzida, buscou-se nos métodos de interpretação de anomalias magnéticas, subsídios para o tratamento quantitativo de anomalias de SP. Os estudos de Helbig(1963), Bhattacharyya(1967) e Lourenço(1972) haviam mostrado a possibilidade de se determi

nar o vetor magnetização por meio das integrais infinitas dos momentos das componentes do campo magnético anômalo, sem ser necessário usar modelos de interpretação. Por sua vez Leão (comunicação pessoal) trabalhando na determinação dos parâmetros dos corpos causadores de anomalias magnéticas, estava utilizando integrais finitas dos momentos das componentes.

No presente trabalho foram utilizadas tanto as integrais infinitas quanto as integrais finitas dos momentos das componentes do campo elétrico produzido por polarização espontânea. Além delas utilizou-se também as integrais do potencial. Para se verificar a eficácia de cada uma das metodologias propostas foram usados modelos, sendo assim possível se observar a precisão dos resultados obtidos.

A metodologia que utiliza integrais infinitas dos momentos foi testada com o modelo doublet e conduziu a resultados aceitáveis apenas em situações particulares, quando o modelo se achava localizado no centro da área utilizada para o cálculo dos momentos e a anomalia era desprezível além dos limites dessa mesma área.

A aplicação de integrais finitas apresenta o inconveniente de necessitar que seja escolhido um modelo para a interpretação. Entretanto uma vez adequada tal escolha, os resultados obtidos se mostram excelentes. Verificou-se ainda a validade de sua utilização quando são usadas componentes do campo elétrico obtidas do potencial através de transformada de Fourier. Igualmente os resultados foram muito bons. A discussão dessas metodologias se encontra no último capítulo deste trabalho.

## CAPÍTULO 1. INTERPRETAÇÃO DE ANOMALIAS DE POTENCIAL ESPONTÂNEO

### 1.1. Revisão de Conceitos

#### 1.1.1. Origem do Potencial Espontâneo

O fenômeno do desenvolvimento natural de um campo elétrico no solo e nas rochas vizinhas a um corpo geológico eletricamente condutor é conhecido como polarização espontânea. Também se conhece como produzido por polarização espontânea os potenciais elétricos determinados em sondagens em poços, mas nesse caso tais potenciais se desenvolvem devido à diferença na concentração de íons dissolvidos nas águas intersticiais das formações adjacentes. Esta última definição não será usada neste trabalho.

O potencial espontâneo, segundo a bibliografia a respeito, apresenta as generalizações abaixo, sintetizadas por Sato e Mooney (1960) com base em uma revisão de aproximadamente 150 trabalhos relativos ao fenômeno:

- os corpos que apresentam regularmente anomalias de SP são os constituídos por sulfetos principalmente pirita e pirrotita, e ainda: calcopirita, calcocita, covelita, embora a grafita e a antracita também apresentem fortes anomalias.
- tais corpos são bons condutores e a corrente elétrica é conduzida preferencialmente por fluxo de elétrons ao invés de íons.
- pelo menos parte do corpo se localiza numa zona de oxidação ativa.

- a anomalia de SP é predominantemente negativa na porção superior do corpo.
- o fenômeno da polarização espontânea é relativamente estável no tempo Takahashi(1952), Poldini(1938).

Várias teorias foram apresentadas sugerindo mecanismos capazes de sustentar o fluxo de corrente elétrica através do corpo condutor e das rochas encaixantes. A teoria de Sato e Mooney (1960) parece ser a que mais se ajusta aos dados observados do fenômeno de SP Becker(1965), Corwin(1973), Logn e Bolviken (1974), Dobrin (1976).

Entre os mecanismos anteriores a Sato-Mooney apenas dois têm apoio experimental: a teoria de cela de oxigênio de Schlumberger, e discutido por Poldini (1938,1939), pela qual o fluxo de corrente elétrica através o corpo mineral se deve à concentração de oxigênio dissolvido nas águas do solo e o mecanismo de gradiente de pH, discutido por Kelly(1945).

Pela teoria de Schlumberger é condição necessária a oxidação do corpo para haver produção de potencial espontâneo, assim sendo surge o problema de explicar porque a grafita, que não é sulfeto, e não se oxida, apresenta anomalia de SP, enquanto que a galena, que é um sulfeto e se oxida bastante, raramente apresenta anomalia.

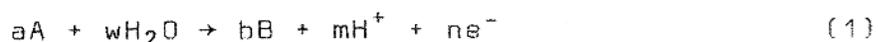
Por sua vez para Kelly o principal papel no fenômeno eletroquímico de SP cabe à diferença na acidez entre as águas em contato com o mineral, entretanto o gradiente de pH por si só não fornece um mecanismo para a transferência de e

létrons (Sato e Mooney 1960). Para que uma corrente elétrica se estabeleça no corpo mineral é necessário uma troca de elétrons entre o corpo e os íons nas soluções vizinhas. Estas reações devem aumentar o pH próximo à superfície e diminuir-lo em profundidade, mas tais reações são improváveis dentro da gama da variação dos valores de Eh e pH medidos na terra (Corwing-1973). Assim o gradiente de pH deve contribuir para o mecanismo de SP embora não deva ser encarado como o elemento principal deste mecanismo; excetuando-se possivelmente o caso da alunita (Corwing 1973).

De modo a tornar mais fácil a discussão da teoria de Sato e Mooney, convém recordar os conceitos de potencial de óxido-redução, pH, estabilidade e domínio de imunidade de minerais.

Uma reação de oxidação-redução é definida como uma reação química em que há troca de elétrons. A substância que "ganha" elétrons é denominada agente oxidante e a que "perde" elétrons é o agente redutor. Qualquer reação de oxidação-redução pode ser dividida em duas semi-celas que indicam o mecanismo pelo qual os elétrons foram transferidos do agente redutor ao oxidante. O potencial de oxidação-redução indica a tendência de uma substância a receber ou liberar elétrons para outra substância, de tal forma que quanto maior o potencial maior a tendência em tomar elétrons. É medido em volts e simbolizado por Eh quando medido em relação ao eletrodo de hidrogênio.

Uma reação eletroquímica em meio aquoso pode ser escrita:



onde A, H<sub>2</sub>O, B, H<sup>+</sup> e os elétrons e<sup>-</sup> são os reagentes, enquanto que a, w, b, m, n são respectivamente suas concentrações molares (Pourbaix-1949).

O Eh da reação acima é dado por

$$Eh = Eh^0 - \frac{0.059m}{n} pH + \frac{0.059}{n} \log \frac{(B)^b}{(A)^a} \text{ Volts, a } 25^\circ\text{C} \quad (2)$$

onde (A) e (B) são as atividades dos reagentes e Eh<sup>0</sup> é o potencial de oxidação padrão, medido para concentrações unitárias. Conhecidas as concentrações é possível expressar Eh em função de pH.

A reação (1) pode ser representada graficamente num diagrama Eh-pH; a fig (1) é um exemplo de um diagrama desse tipo para o sistema Cu-H<sub>2</sub>O a uma temperatura de 25°C.

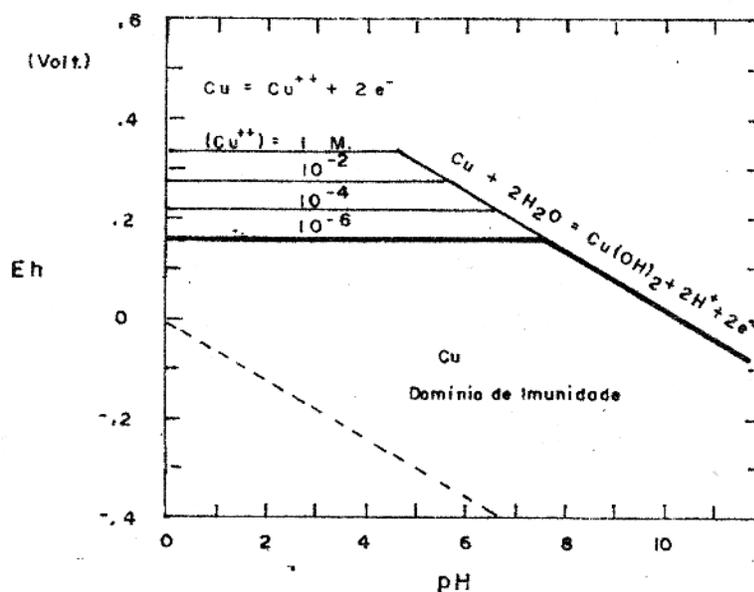


FIG. 1 - Exemplo de um diagrama Eh-pH, para o sistema Cu - H<sub>2</sub>O a 25°C.

Com base nesses diagramas Pourbaix (1949) define o domínio de imunidade de uma substância A como o conjunto de valores de Eh e pH, para os quais a concentração de qualquer produto da reação com A seja menor que  $10^{-6}$  M. Em outras palavras, a região de Eh-pH em que é desprezível a tendência de A reagir com qualquer outra substância. Dentro deste domínio o potencial de eletrodo do metal se iguala ao Eh da solução pois a atividade do íon metálico na solução será rapidamente ajustada sem produzir nela praticamente alguma alteração. A região do domínio de imunidade para o cobre está apresentada na figura 1.

A figura 2, sintetiza os resultados encontrados por Sato e Mooney para a variação de Eh e pH na natureza, tanto na zona de intemperismo quanto na zona primária.

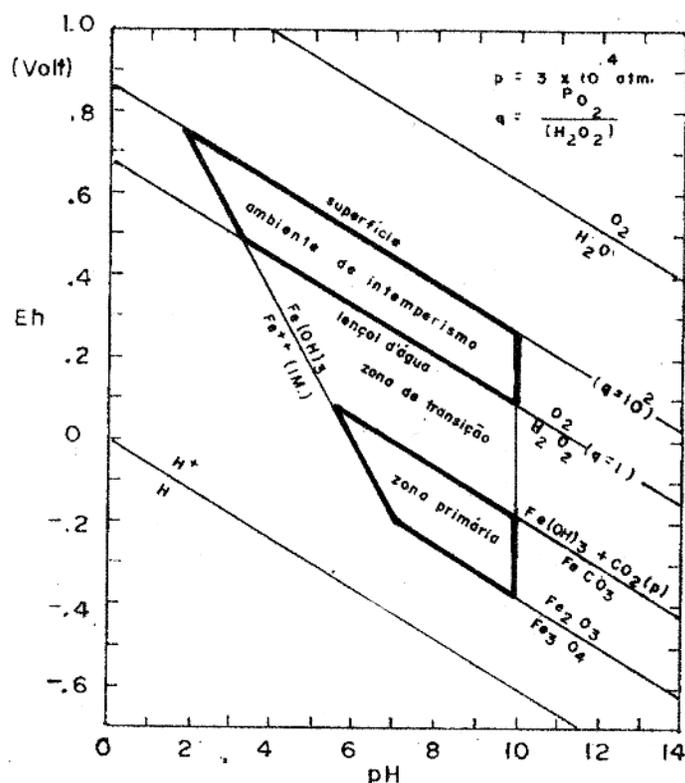


Figura 2 - Condições de Eh-pH deduzidas para o ambiente de intemperismo e a zona em profundidade (Sato e Mooney, 1960)

A figura 3 mostra um resumo dos domínios de imunidade de da grafita, calcocita, pirita, galena e suas posições em relação ao Eh-pH dos ambientes naturais. Esses domínios foram tomados por Sato e Mooney a partir de dados de campo e reações teóricas de oxidação que se ajustaram às observações.

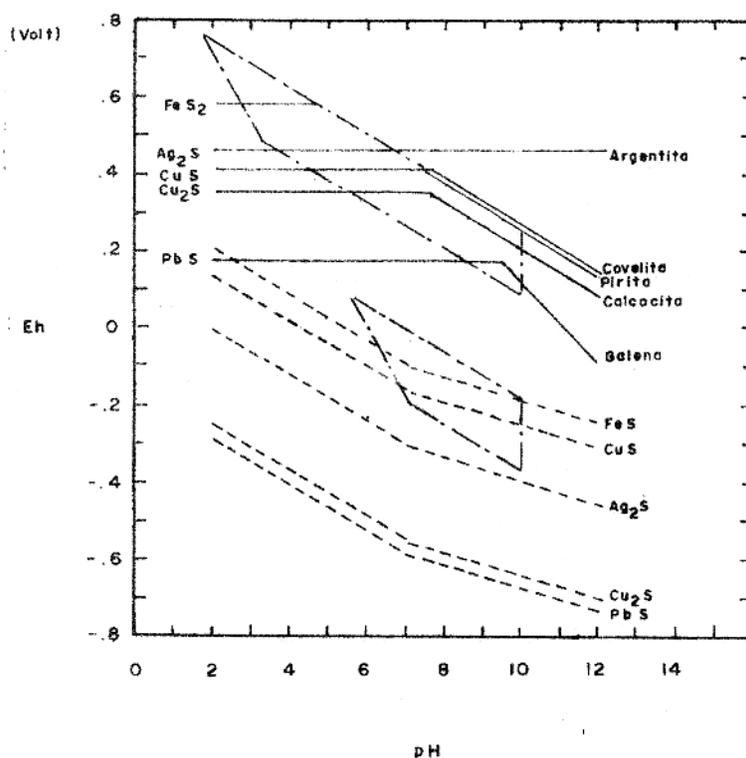


FIG. 3 - Limites experimentais para os domínios de imunidade de vários minerais. Linhas sólidas: limites superiores. Linhas pontilhadas: limites inferiores - Sato e Mooney (1960).

Pela figura 3 verifica-se que na zona em profundidade, aproximadamente todos os minerais de interesse são estáveis, enquanto que na zona de intemperismo, os minerais se oxidam, embora em grau variado; assim a pirita se oxida apenas em condições muito ácidas enquanto que a galena é instável em praticamente toda a zona de intemperismo.

O mecanismo de SP desenvolvido por Sato e Mooney

baseia-se nas observações de que o Eh em geral torna-se mais negativo com o aumento de profundidade. Sato (1960)-a. e que a maioria dos minerais que produzem SP são imunes às reações de oxidação-redução dentro dos valores de Eh-pH naturais, funcionando, conseqüentemente, como condutores inertes, que transferem elétrons dos agentes redutores em profundidade aos agentes oxidantes em superfície, estabelecendo assim uma corrente elétrica.

As regiões oxidantes e redutoras existem independentemente do corpo condutor, entretanto é indispensável que este esteja presente pois ele é o responsável pela condução de elétrons da zona primária à zona de intemperismo. A direção da corrente elétrica, do ponto de vista convencional, é da superfície à zona em profundidade. A transferência dos elétrons se dá por reações químicas na superfície do minério, de tal forma que os agentes oxidantes na zona de intemperismo vão sendo reduzidos pelos elétrons entregues pelo corpo, enquanto que os agentes redutores na zona primária vão sendo oxidados pela perda de elétrons para o corpo.

O excesso de carga negativa acumulada na superfície é equilibrada pelo movimento ascendente, através o meio aquoso das rochas vizinhas, dos íons positivos provenientes das zonas mais profundas e pelo movimento descendente dos íons negativos localizados mais à superfície. Esses fluxos por sua vez tenderão a equilibrar o excesso de carga positiva em profundidade (fig(4)).

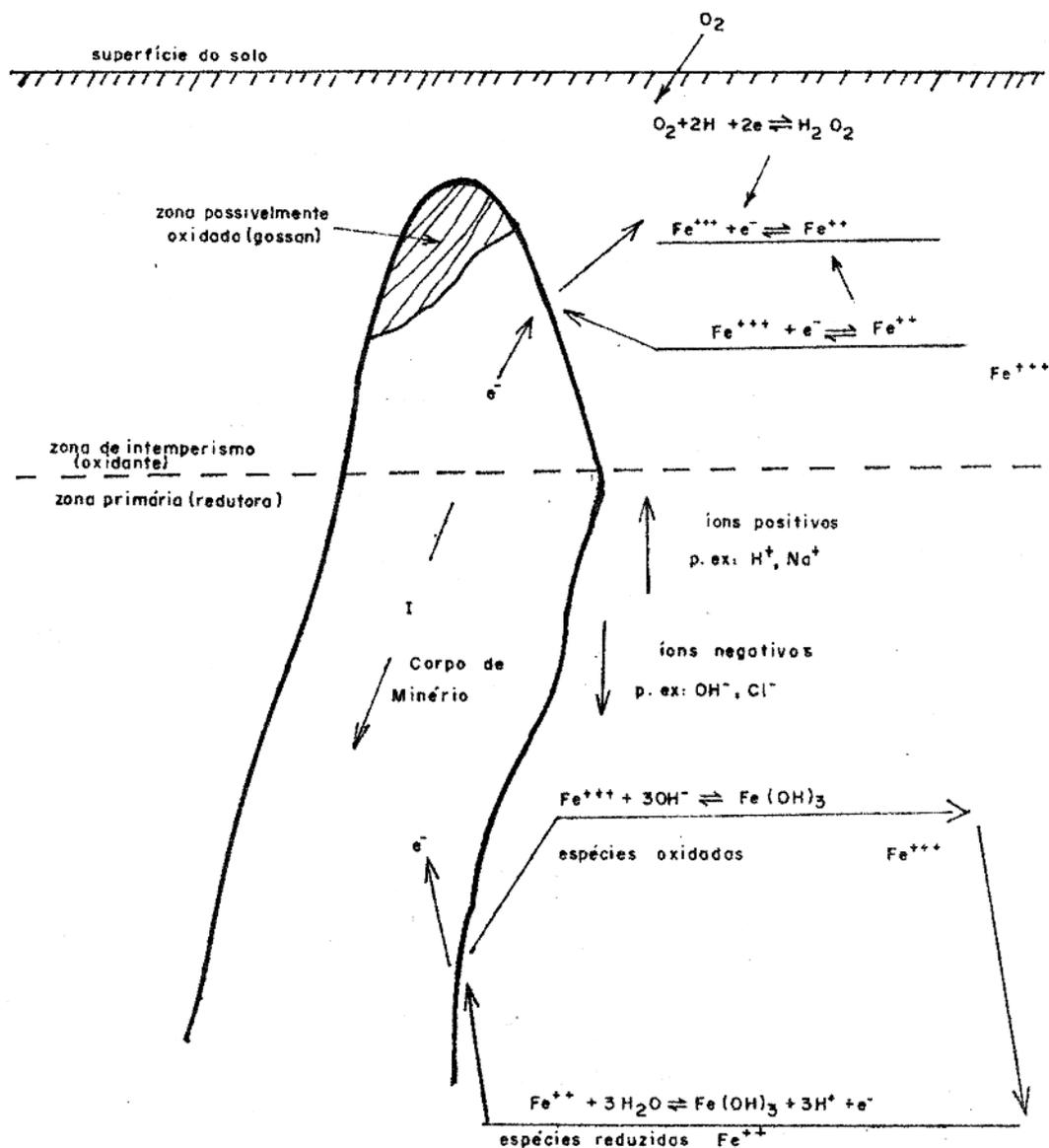


Figura 4 - Mecanismo de Oxidação-Redução do processo de polarização espontânea - Corwin (1973)

Sato e Mooney propõem a conversão do oxigênio a peróxido de hidrogênio na zona de intemperismo e reações de hidróxido férrico e ferroso na zona primária, como mecanismos que produzem a re-oxidação das espécies reduzidas a re-redução das espécies oxidadas, de modo que o fluxo de corrente elétrica seja mantido.

Admitindo-se  $E = -0,15v$  e  $ph = 8$  como valores médios desses parâmetros em profundidade e supondo-se ainda que o mineral, na zona de intemperismo, não reage quimicamente com a vizinhança, é possível estimar a máxima diferença de potencial disponível para os vários minerais.

A Fig. (5) resume essas diferenças e mostra que a grafita deve apresentar anomalias de potencial espontâneo, enquanto que a galena apenas em ambientes alcalinos e redutores.

Sato e Mooney entretanto não explicam a existência de potenciais negativos maiores que  $400mV$  associados a corpos de sulfeto, embora na prática potenciais de até  $-1000 mV$  sejam encontrados no campo (anomalia próxima a Hualgayoc, Peru (Gay, 1967)).

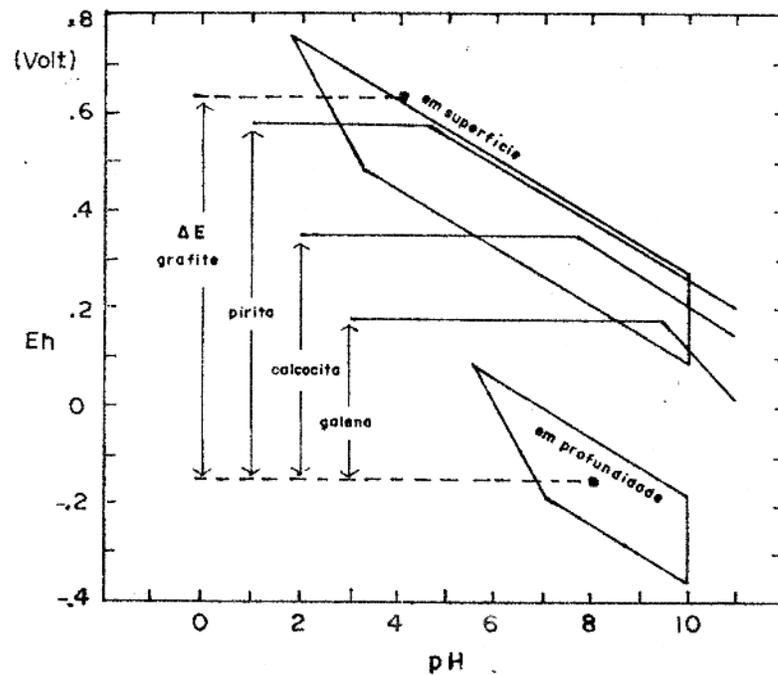


FIG. 5 - Máxima diferença de potencial disponível para vários minerais - Sato e Mooney (1960).

#### 1.1.2. Procedimento de campo e correção dos dados

O levantamento de potencial espontâneo além de ser bastante fácil é um dos mais econômicos entre os trabalhos de prospecção geofísica. O único equipamento necessário para as medidas são dois eletrodos não polarizáveis, que são colocados em

contacto com a superfície do solo, um voltímetro onde são lidas as diferenças de potencial entre os dois eletrodos e suficiente quantidade de fio isolante que faz o contacto entre os dois pontos. É conveniente a utilização de um carretel para melhor manuseio dos fios e uma reserva de água salgada para facilitar a passagem da corrente elétrica entre o solo e os eletrodos. Os voltímetros atualmente usados têm resolução de 1mV e suficientemente alta a impedância para evitar que polarize os elementos de medida.

O levantamento do potencial espontâneo pode ser efetuado por dois métodos. No primeiro um dos eletrodos é mantido fixo numa determinada estação base de referência, enquanto que o segundo é deslocado ao longo do perfil de trabalho, sendo a diferença de potencial entre eles medida em espaçamentos regulares. Outra forma do mesmo método é procurar, durante os trabalhos no campo, as equipotenciais, ou seja os pontos que acusam diferença de potencial nula entre os eletrodos de medida.

O segundo, denominado método do gradiente, consiste em determinar a diferença de potencial entre dois pontos sucessivos de um perfil de trabalho. Os dois eletrodos são deslocados simultaneamente e o quociente entre a diferença de potencial observada e o espaçamento dos pontos de medida é aproximadamente o valor do campo elétrico no ponto médio entre eles.

Os potenciais resultantes do fenômeno de polarização espontânea são quase sempre negativos e a ordem de grandeza de anomalias típicas varia de poucas centenas de mV nos pontos de máxima amplitude, centro negativo, a dezenas de mV nas bordas da

anomalia. No que se refere a correções que devem ser aplicadas aos dados obtidos em um levantamento de potencial espontâneo, deve-se ter sempre em mente que a prospecção no sentido de determinar corpos condutores pelo método de SP algumas vezes pode ser dificultada pela topografia, que contribui para a existência de valores negativos do potencial aproximadamente sobre as colinas do terreno. Esses centros anômalos se devem à ação eletrocapilar provocada pelo escoamento da água da chuva e são da ordem de 100 a 200mV mas em alguns casos podem atingir 2 Volts (Lasgargues-1957). Frequentemente podem ser facilmente determinados pois as curvas de anomalias produzidas por eletrofiltragem coincidem grosseiramente com as curvas topográficas. Entretanto nos casos em que o potencial medido se deve tanto à presença de corpos condutores em subsuperfície quanto à eletrofiltragem é muito difícil atribuir a cada fenômeno a parte que lhe é devida. Nesses casos é necessário o auxílio de uma sondagem vertical pois enquanto que o potencial produzido por corpos mineralizados aumenta em profundidade, o resultante de eletrofiltragem diminui.

Os potenciais telúricos, causados por correntes elétricas que percorrem o globo, atingem áreas maiores que a eletrofiltragem e podem variar em 100mV por quilometro ou mais, Yüngü (1950). Seus efeitos têm caráter regional e podem ser eliminados de modo semelhante às correções para o regional das anomalias gravimétricas.

### 1.1.3. Métodos de Interpretação das Anomalias.

A primeira tentativa de interpretação quantitativa

de anomalias de SP data de 1928, quando Petrowsky apresentou uma formulação analítica para a distribuição dos potenciais es pontâneos. O modelo considera a presença de uma esfera condutora localizada em um ponto desconhecido abaixo da superfície do solo. O método de interpretação dado por Petrowsky utiliza derivadas es paciais do potencial observado, e tem em vista a determinação do raio da esfera, da profundidade em que se encontra o centro da esfera e da projeção desse centro no plano horizontal. A obtenção desses parâmetros se faz através da interpretação de perfis em que são utilizadas as coordenadas dos pontos em que o campo elétrico é nulo, máximo e mínimo. Esses valores são usados em expressões deduzidas analiticamente e calculadas as incógnitas de sejadadas.

Outros autores, também utilizando corpos esféricos, discutiram e expandiram os trabalhos de Petrowsky. Heiland (1940) sugere a utilização da coordenada correspondente à metade do valor máximo das leituras de campo, no cálculo dos dados dos parâmetros da esfera; Witte (1948) utiliza os próprios valores do potencial medido, ao invés do campo elétrico como faz Petrowsky, e adota como parâmetro de auxílio na interpretação a metade da distância entre o valor máximo e o valor mínimo das leituras de potencial, conseguindo desta forma eliminar o inconveniente da determinação de  $V=0$  usada por Heiland. Yüngül (1950), além de uma outra metodologia para a interpretação, fornece também um método para a remoção dos efeitos regionais e topográficos. O método de Meiser (1962) consiste essencialmente no ajuste dos perfis observados a curvas calculadas teoricamente usando os modelos de esfera e placa.

Os corpos tabulares em que uma das dimensões horizontais é desprezível em relação às demais podem ser simulados por placas polarizadas. Outros autores, além de Meiser, apresentam curvas de interpretação para este modelo: Roy e Chowdhury (1959) e Paul (1965). Roy e Chowdhury baseiam-se na invariância da razão entre os valores máximos e mínimos de SP em relação ao quociente entre a profundidade do topo da placa e o comprimento da placa (distância entre a linha superior e inferior de polos). Paul preferiu o modelo da placa justificando ser um tanto difícil haver polarização inclinada num corpo esférico.

Roy (1963) sugere o processo de continuação analítica para a determinação da localização e profundidade do corpo anômalo.

Pelo levantamento de trabalhos publicados a respeito de potenciais, pode-se dizer que em sua maioria os métodos de interpretação das anomalias consiste no estudo dos perfis dos dados de campo. Esses métodos, em que variam de autor para autor o modelo e os parâmetros adotados para a interpretação, resumem-se a encontrar, por meio de diversos ábacos, a curva de melhor ajuste e então determinar as incógnitas procuradas: localização, profundidade e mergulho do corpo.

## 1.2. Obtenção do Potencial Espontâneo e das Componentes do Campo Elétrico.

### 1.2.1. Formulação.

De acordo com a teoria desenvolvida por Sato

e

Mooney a origem da polarização espontânea, deve-se fundamentalmente a uma variação com a profundidade, no potencial químico das soluções localizadas no solo e à presença de um corpo condutor que propicia o transporte dos elétrons, em excesso na zona em profundidade, à zona em superfície onde estão em deficit. A renovação constante na concentração dos íons das soluções vizinhas, através de reações onde as espécies reduzidas em superfície são re-oxidadas e as oxidadas em profundidade são re-reduzidas produz um processo permanente de transporte de elétrons que resulta numa distribuição de correntes estacionárias. Na figura 6 estão esboçadas essas correntes segundo o sentido convencional (movimento contrário ao dos elétrons).

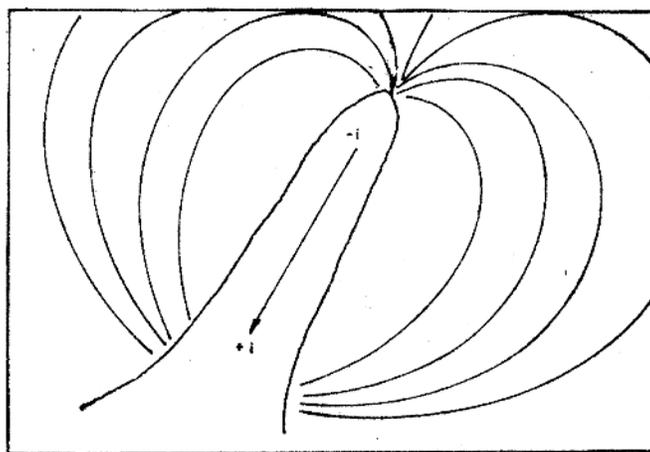


Figura 6 - Esquema da distribuição de correntes na vizinhança de um corpo condutor sujeito ao fenômeno de potencial espontâneo.

Seria absurdo pretender desenvolver uma teoria matemática para representar fenômeno tão complexo. Entretanto é válido

do procurar um modelo simplificado que contenha as principais características do fenômeno, de modo a se obter uma expressão analítica que descreva, em primeira aproximação, a distribuição de potenciais na superfície do solo. Dessa forma admite-se uma fonte de corrente  $i$  nos pontos do corpo onde ocorrem reações de oxidação das espécies e um sumidouro  $-i$  na zona mais superficial onde acontecem as reações de redução. O transporte das cargas elétricas é efetuado ao longo do corpo condutor, da fonte ao sumidouro de corrente, e separados de uma distância  $l$ .

A formulação será desenvolvida para a mais simples das distribuições que dão origem à polarização espontânea e que consiste na presença de uma fonte e um sumidouro pontual de corrente elétrica denominados polo positivo e negativo. Distribuições mais complexas são obtidas integrando-se adequadamente esse conjunto de fonte e sumidouro, conhecido por "doublet", conforme apêndice B e C.

Seja  $i$  uma fonte pontual de corrente elétrica, localizada num ponto F de um meio homogêneo, isotrópico, infinito de resistividade  $\rho$ . O potencial produzido por essa fonte e medido em um ponto P qualquer desse meio é expresso por:

$$V(\vec{r}) = \frac{\rho i}{4\pi} \frac{1}{R} \quad (1.1)$$

onde  $\vec{r}$  é o vetor posição do ponto P e  $R$  é o módulo do vetor  $\vec{R}$ , de origem no ponto F e extremidade em P.

O campo elétrico  $\vec{E}$  é encontrado por:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla V(\vec{r}) \quad (1.2)$$

donde

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho i}{4\pi} \frac{\vec{R}}{R^3} \quad (1.3)$$

Se além da fonte em F, houver um sumidouro de corrente elétrica localizado no ponto S, o potencial resultante da superposição dos potenciais de origem em F e S é obtido por:

$$V(\vec{r}) = \frac{\rho i}{4\pi} \left( \frac{1}{R_f} - \frac{1}{R_s} \right) \quad (1.4)$$

onde  $R_f$  e  $R_s$  indicam, respectivamente, a distância do ponto P à fonte em F e ao sumidouro em S. Usando-se a equação (1.2) atinge-se que o campo elétrico nesse último caso é dado por:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho i}{4\pi} \left( \frac{\vec{R}_f}{R_f^3} - \frac{\vec{R}_s}{R_s^3} \right) \quad (1.5)$$

sendo

$$\left. \begin{aligned} \vec{R}_f &= u_f \hat{x} + v_f \hat{y} + w_f \hat{z} \\ \vec{R}_s &= u_s \hat{x} + v_s \hat{y} + w_s \hat{z} \end{aligned} \right\} \quad (1.6)$$

em que  $\hat{x}$ ,  $\hat{y}$  e  $\hat{z}$  são os vetores unitários segundo os eixos coordenados OX, OY e OZ.

A equação (1.5) resume vetorialmente as expressões das três componentes do campo elétrico:

$$\left. \begin{aligned} E_x(\vec{r}) &= \frac{\rho i}{4\pi} \left( \frac{u_f}{R_f^3} - \frac{u_s}{R_s^3} \right) & (a) \\ E_y(\vec{r}) &= \frac{\rho i}{4\pi} \left( \frac{v_f}{R_f^3} - \frac{v_s}{R_s^3} \right) & (b) \\ E_z(\vec{r}) &= \frac{\rho i}{4\pi} \left( \frac{w_f}{R_f^3} - \frac{w_s}{R_s^3} \right) & (c) \end{aligned} \right\} \quad (1.7)$$

onde  $E_x$ ,  $E_y$ ,  $E_z$  são respectivamente as componentes horizontais

e vertical do campo elétrico devido à presença do doublet.

Entretanto se o meio (2) onde estão situados F e S é um semi-espaco homogêneo, isotrópico, separado do meio dielétrico (1), também homogêneo e isotrópico pela superfície  $z_0$ , tanto o potencial quanto o campo elétrico em P sofrerão influência da interface. As expressões obtidas para esses parâmetros, nessa nova situação, necessariamente devem satisfazer as condições abaixo:

- (a) o potencial é contínuo através a interface
- (b) a componente tangencial do campo elétrico é contínua através a interface.
- (c) a componente normal da densidade de corrente  $\vec{J}$  é também contínua através a interface.

Sendo  $\rho$  a resistividade do meio, a relação entre o valor densidade de corrente  $\vec{J}$  e o campo elétrico é expressa pela equação (1.8).

$$\vec{J}(\vec{r}) = \frac{1}{\rho} \vec{E}(\vec{r}) \quad (1.8)$$

As expressões para o potencial e o campo elétrico podem ser procuradas utilizando-se o método das imagens. Dessa forma a eliminação da superfície de discontinuidade é acompanhada pela presença das fontes em  $F'$  e  $S'$ , imagens de F e S, situadas numa posição simétrica a estas, conforme a figura 7.

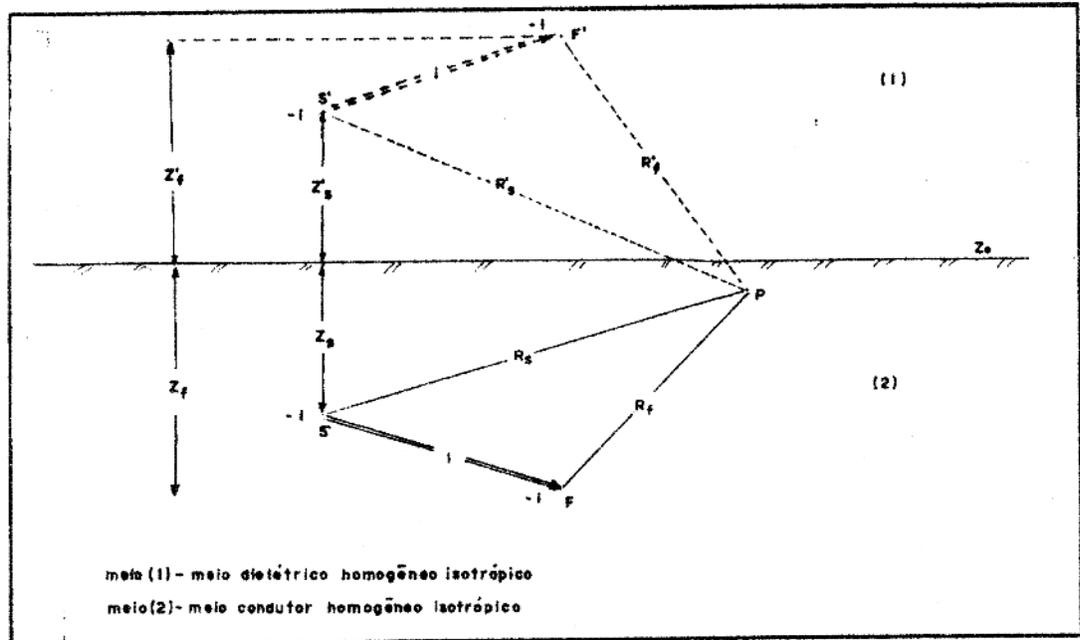


FIG. 7 - Esquema Geométrico para um doublet. Emprego do método das imagens.

O potencial total passa a ser escrito:

$$V_T(\vec{r}) = \frac{\rho i}{4\pi} \left( \frac{1}{R_f} + \frac{1}{R_s} + \frac{1}{R'_f} + \frac{1}{R'_s} \right) \quad (1.9)$$

e o campo elétrico:

$$\vec{E}_T(\vec{r}) = \frac{\rho i}{4\pi} \left( \frac{\vec{R}_f}{R_f^3} - \frac{\vec{R}_s}{R_s^3} + \frac{\vec{R}'_f}{R'^3_f} - \frac{\vec{R}'_s}{R'^3_s} \right) \quad (1.10)$$

As expressões (1.9) e (1.10) satisfazem as condições de contorno e por conseguinte, em vista da unicidade do potencial, são as expressões procuradas. É conveniente notar que as mesmas são válidas apenas no semi-espaco inferior a  $z_0$  e fora das fontes e sumidouros. Observe-se ainda que de acordo com a figura 7:

$$\left. \begin{aligned} u_f &= u'_f & u_s &= u'_s \\ v_f &= v'_f & v_s &= v'_s \end{aligned} \right\} \quad (1.11)$$

Para qualquer ponto  $P_0$  localizado na posição cor respondente à superfície  $z_0$ , a distância à fonte em  $F$  é idên tica à distância ao ponto imagem em  $F'$ , o mesmo acontecendo pa ra  $S$  e  $S'$ . Assim:

$$\left. \begin{aligned} |\vec{R}_f'| &= |\vec{R}_f| = R_f \\ |\vec{R}_s'| &= |\vec{R}_s| = R_s \end{aligned} \right\}$$

Utilizando esses resultados na equação (1.9) obtém se para o potencial medido em  $P_0$  :

$$V_T(\vec{r}_0) = \frac{\rho i}{2\pi} \left( \frac{1}{R_f} - \frac{1}{R_s} \right) \quad (1.12)$$

Desenvolvendo a expressão vetorial (1.10) em suas três equações escalares e utilizando-se a mesma racionalização acima encontra-se, de acordo com (1.11) que

$$\left. \begin{aligned} E_{Tx}(\vec{r}_0) &= \frac{\rho i}{2\pi} \left( \frac{u_f}{R_{f3}} - \frac{u_s}{R_{s3}} \right) \\ E_{Ty}(\vec{r}_0) &= \frac{\rho i}{2\pi} \left( \frac{v_f}{R_{f3}} - \frac{v_s}{R_{s3}} \right) \\ E_{Tz}(\vec{r}_0) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.13)$$

pois quando o ponto de observação está localizado na superfície  $z_0$

$$w_f = -w'_f \quad ; \quad w_s = -w'_s \quad (1.14)$$

As equações (1.12) e (1.13) referem-se à presença do doublet no meio (2) e à presença da interface no caso particular em que as medidas são tomadas na superfície  $z_0$ . Nessas circunstâncias é possível separar-se os dois efeitos notando-se que os valores numéricos do potencial e das componentes horizontais do campo elétrico são iguais ao dobro daqueles obtidos no caso do doublet, localizado na mesma situação em relação ao ponto  $P_0$ , mas sendo o meio (2) infinito, expressões (1.4), (1.7-a) e (1.7-b). Assim o potencial e as componentes devidos exclusivamente ao doublet localizado no meio (2), homogêneo, isotrópico, semi-infinito, quando tomados em relação à superfície  $z_0$ , são expressos por:

$$V(\vec{r}_0) = \frac{\rho i}{4\pi} \left( \frac{1}{R_f} - \frac{1}{R_s} \right) \quad (1.15)$$

$$\left. \begin{aligned} E_x(\vec{r}_0) &= \frac{\rho i}{4\pi} \left( \frac{u_f}{R_f^3} - \frac{u_s}{R_s^3} \right) \\ E_y(\vec{r}_0) &= \frac{\rho i}{4\pi} \left( \frac{v_f}{R_f^3} - \frac{v_s}{R_s^3} \right) \\ E_z(\vec{r}_0) &= \frac{\rho i}{4\pi} \left( \frac{w_f}{R_f^3} - \frac{w_s}{R_s^3} \right) \end{aligned} \right\} \quad (1.16)$$

em que a terceira das equações (1.16) foi obtida a partir de (1.15).

### 1.2.2. Procedimentos para a obtenção das Componentes.

Nos trabalhos práticos a determinação das componen

tes do campo elétrico resultante do fenômeno de polarização es pontânea tanto é feita diretamente pelo gradiente horizontal dos dados de campo (obtendo-se assim  $E_x$  e  $E_y$ ) quanto pelo emprego das transformadas de Fourier (que conduz à obtenção de  $E_x$ ,  $E_y$  e  $E_z$ ). Em qualquer uma das opções é necessário inicialmente o conhe cimento do potencial  $V$ , que é conseguido por levantamentos segun do os métodos convencionais. Admitindo-se que a anomalia observa da deve-se à presença de um corpo condutor em sub-superfície, os valores do potencial medidos na superfície do solo são divididos por 2 de modo a separar-se as contribuições do corpo e da inter face solo-ar.

Por meio do gradiente do potencial o valor da compo nente em cada ponto  $P_0$  é encontrado dividindo-se a diferença de potencial entre os pontos anterior e posterior a  $P_0$ , em um mes mo perfil, pela distância entre eles. Naturalmente a segunda com ponente horizontal em  $P_0$  será determinada por processo análogo, em perfil perpendicular ao primeiro.

A obtenção das componentes por transformadas de Fourier é discutida a seguir.

Lourenço (1972) demonstrou que, sendo nulo o rotacio nal do campo magnético e como as componentes satisfazem a equa ção de Laplace, é possível, a partir de uma das componentes, de terminar as demais utilizando-se de Séries de Fourier.

Conhecida a distribuição contínua do potencial  $V$ , expresso por (1.15) e que satisfaz a equação de Laplace, é fácil obter-se as componentes  $E_x$ ,  $E_y$  e  $E_z$  do campo elétrico  $\vec{E}$ , pro duzido por potencial espontâneo. De (1.2) tem-se:

$$\left. \begin{aligned} E_x &= -\frac{\partial V}{\partial x} \\ E_y &= -\frac{\partial V}{\partial y} \\ E_z &= -\frac{\partial V}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (1.17)$$

Essas componentes podem ser obtidas em função de  $V$ , pelo par de transformadas de Fourier:

$$\left. \begin{aligned} w(u,v) &= \iint_{-\infty}^{\infty} f(x,y) e^{-i2\pi(ux+vy)} dx dy \quad (a) \\ f(x,y) &= \iint_{-\infty}^{\infty} w(u,v) e^{i2\pi(ux+vy)} du dv \quad (b) \end{aligned} \right\} \quad (1.18)$$

onde  $x, y$  são coordenadas do domínio dos espaços e  $u$  e  $v$  indicam as frequências ou número de ondas, correspondentes respectivamente aos eixos  $OX$  e  $OY$ .

Aplicando-se a primeira das equações (1.18) a ambos os membros das expressões (1.17) obtém-se:

$$\left. \begin{aligned} W_x(u,v) &= -i2\pi u W V(u,v) \\ W_y(u,v) &= -i2\pi v W V(u,v) \\ W_z(u,v) &= -2\pi(u^2+v^2)^{1/2} W V(u,v) \end{aligned} \right\} \quad (1.19)$$

onde  $i$  é a unidade imaginária e  $W_x, W_y, W_z$  e  $WV$  expressam respectivamente as transformadas de Fourier das componentes  $E_x, E_y$  e  $E_z$  e do potencial  $V$ .

De (1.19) verifica-se que a relação entre  $V$  e as

componentes do campo elétrico reduz-se a uma simples multiplicação no domínio das frequências. Através a equação 1.18(b)  $E_x$ ,  $E_y$  e  $E_z$  são obtidas por meio das transformadas inversas de  $W_x$ ,  $W_y$  e  $W_z$ .

Na prática, entretanto, os dados são necessariamente obtidos numa amostragem finita e discreta de pontos, assim, admitindo-se que as medidas são tomadas em intervalos igualmente espaçados, da função contínua  $V(x,y,z)$  são conhecidos apenas os valores discretos:

$$V_{j,k} = V(j_s, k_s)$$

onde  $j = 0, 1, 2, \dots, M$

$k = 0, 1, 2, \dots, N$

em que  $M$  e  $N$  são respectivamente o número de pontos amostrados em  $O_x$  e  $O_y$ .

A solução da equação de Laplace para a função potencial em termos de uma expansão em série harmônica finita se expressa por:

$$V(x,y,z) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} W_{m,n} \exp\left(2\pi \left(\frac{m^2}{L_x^2} + \frac{n^2}{L_y^2}\right)^{1/2} z\right) \cdot \exp\left(i2\pi\left(\frac{mx}{L_x} + \frac{ny}{L_y}\right)\right) \quad (1.20)$$

em que  $L_x$  e  $L_y$  representam os comprimentos de onda fundamentais nas direções  $x$  e  $y$ .

$$L_x = M_s$$

$$L_y = N_s$$

sendo  $x = js$

$$y = ks$$

Os coeficientes  $WV_{m,n}$ , transformada de Fourier discreta do potencial, são obtidos a partir dos valores de  $V_{j,k}$  segundo a expressão abaixo

$$WV_{m,n} = \frac{1}{MN} \sum_{j=0}^{M-1} \sum_{k=0}^{N-1} V_{j,k} \exp(-i2\pi \left( \frac{jm}{M} + \frac{kn}{N} \right)) \quad (1.21)$$

onde  $m$  e  $n$  assumem os seguintes valores

$$m = -M/2, \dots, 0, \dots, M/2$$

$$n = -N/2, \dots, 0, \dots, N/2$$

Analogamente são obtidas por expansão finita de uma série harmônica as componentes  $Ex$ ,  $Ey$  e  $Ez$ :

$$\begin{Bmatrix} Ex(x,y,z) \\ Ey(x,y,z) \\ Ez(x,y,z) \end{Bmatrix} = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} \begin{Bmatrix} Wx_{m,n} \\ Wy_{m,n} \\ Wz_{m,n} \end{Bmatrix} \exp \left( 2\pi \left( \frac{m^2}{L_x^2} + \frac{n^2}{L_y^2} \right) \right) \cdot \exp \left( i2\pi \left( \frac{mx}{L_x} + \frac{ny}{L_y} \right) \right) \quad (1.22)$$

onde os coeficientes  $Wx_{m,n}$ ,  $Wy_{m,n}$  e  $Wz_{m,n}$  são as transformadas de Fourier discretas das componentes nas direções  $x, y$  e  $z$ . Intro

duzindo as expansões (1.20) e (1.22) em (1.17), derivando e comparando os termos, obtêm-se:

$$\left. \begin{aligned} W_{x_{m,n}} &= -i2\pi \frac{m}{L_x} W_{V_{m,n}} \\ W_{y_{m,n}} &= -i2\pi \frac{n}{L_y} W_{V_{m,n}} \\ W_{z_{m,n}} &= -2\pi \left( \frac{m^2}{L_x^2} + \frac{n^2}{L_y^2} \right)^{1/2} W_{V_{m,n}} \end{aligned} \right\} \quad (1.23)$$

As expressões a seguir são os filtros adequados para se obter  $W_{x_{m,n}}$  e  $W_{z_{m,n}}$  por meio de  $W_{V_{m,n}}$ :

$$\left. \begin{aligned} p_x &= -i2\pi \frac{m}{L_x} \\ p_y &= -i2\pi \frac{n}{L_y} \\ p_z &= -2\pi \left( \frac{m^2}{L_x^2} + \frac{n^2}{L_y^2} \right)^{1/2} \end{aligned} \right\} \quad (1.24)$$

Das expressões (1.22) são obtidas  $E_x$ ,  $E_y$  e  $E_z$  com o auxílio de (1.23).

O esquema abaixo sintetiza as operações executadas:



De modo a observar a eficácia do emprego das transformadas na obtenção das componentes, foram tomados os modelos doublet e linha de doublet, cujos desenvolvimentos analíticos encontram-se nos apêndices A e B. Os valores exatos das componentes foram comparados com aqueles determinados por transformada de Fourier discreta. Os coeficientes da expansão em série foram obtidos pelo algoritmo de Fast Fourier Transform, desenvolvido por Cooley e Tukey (1965).

Para sintetizar os resultados e facilitar as comparações foram traçados tanto os gráficos bidimensionais das componentes exatas, quanto os gráficos de  $E_x$ ,  $E_y$  e  $E_z$  obtidas por filtragem. As diferenças entre elas são apresentadas também sob a forma de mapas bidimensionais.

As figuras 8, 10, 12 e 17 representam respectivamente as componentes  $E_x$ ,  $E_y$ ,  $E_z$  e o potencial  $V$  gerados analiticamente, para o doublet de coordenadas  $(-2, -2, 4)$ , distância entre os polos 6 unidades, inclinação  $60^\circ$ , declinação  $30^\circ$  e  $10$  para o produto  $\pi$ . Por sua vez as figuras 9, 11 e 13 representam as componentes determinadas por filtragem, enquanto que as de número 14, 15 e 16 indicam as diferenças, para cada componente, entre os valores exatos e aqueles obtidos pelo emprego de transformadas de Fourier.

O segundo conjunto de figuras (Fig. 18 a Fig. 27) diz respeito ao modelo linha de doublet. Esta com 8 unidades de extensão é paralela ao eixo  $Ox$  e tem como coordenadas do ponto médio da linha de polos negativos  $(1, 2, 4)$ . A inclinação é de  $60^\circ$ , distância entre os polos positivo e negativo é de 4 unidades, enquanto que o produto  $\pi$  é igual a 10.

Observando-se as figuras 8 a 27 é fácil verificar

que as componentes obtidas por transformadas de Fourier apresentam resultados bastante satisfatórios. Ajustam-se bem aos valores exatos no centro da área empregada para o cálculo dessas componentes. Entretanto nas bordas da grade os erros são muito grandes o que todavia é um efeito esperado, pois ocorre sempre que uma dada função é aproximada por uma soma parcial de uma série de Fourier. Existe, então, um erro considerável na vizinhança da descontinuidade, não importando quantos termos sejam usados na série. O efeito é conhecido como fenômeno de Gibbs.

As diferenças entre as componentes horizontais obtidas por transformadas de Fourier e os valores exatos são, assim, muito pequenas no centro da área, ampliando a intensidade em direção às bordas, em uma configuração caracterizada por sinais alternados, aproximadamente simétrica em relação aos eixos coordenados, conforme figuras 14, 15, 24 e 25. A disposição em sequência de isolinhas de sinais alternados se deve a um gradiente não regular da componente  $E_{\xi}$  segundo a direção  $\xi$ , onde  $\xi$  simboliza  $x$  ou  $y$ .

Por sua vez o padrão de erros dos valores da componente vertical obtidos por transformada de Fourier não apresenta aspectos de simetria em relação aos eixos coordenados e a faixa de erros é mais larga na região dos valores mínimos da componente.

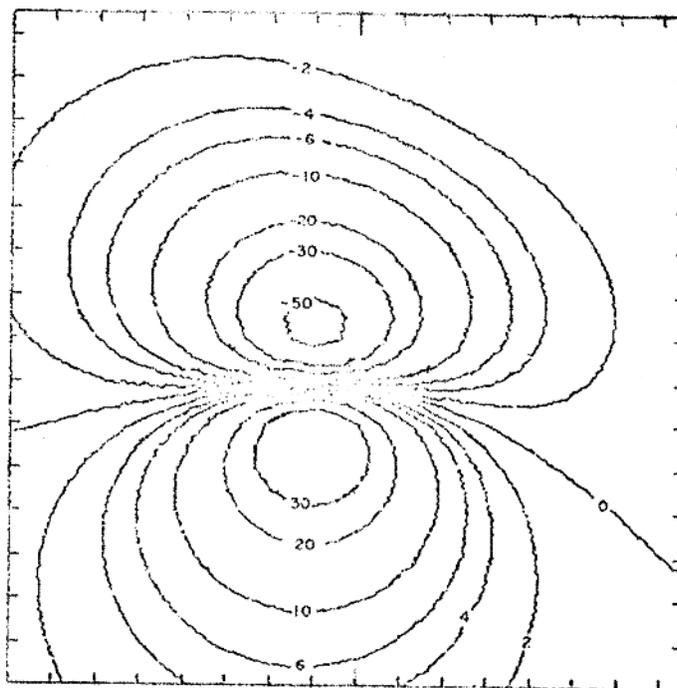


Figura 8 - Modelo Doublet - Componente exata  $E_x(x)$

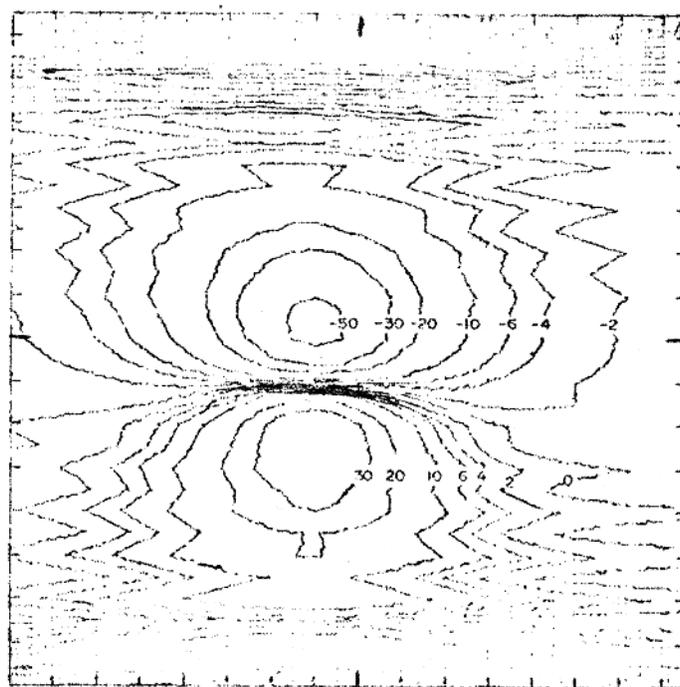


Figura 9 - Modelo Doublet - Componente  $E_x$  gerada por transformada de Fourier (x)

(x) Parâmetros do modelo:  $I=60$ ,  $D=30$ ,  $x_s=-2$ ,  $y_s=-2$ ,  $z_s=4$ ,  
 $\rho_i=10$ ,  $\ell=6$ .

Contornos traçados: -50, -30, -20, -10, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, 10, 20, 30.

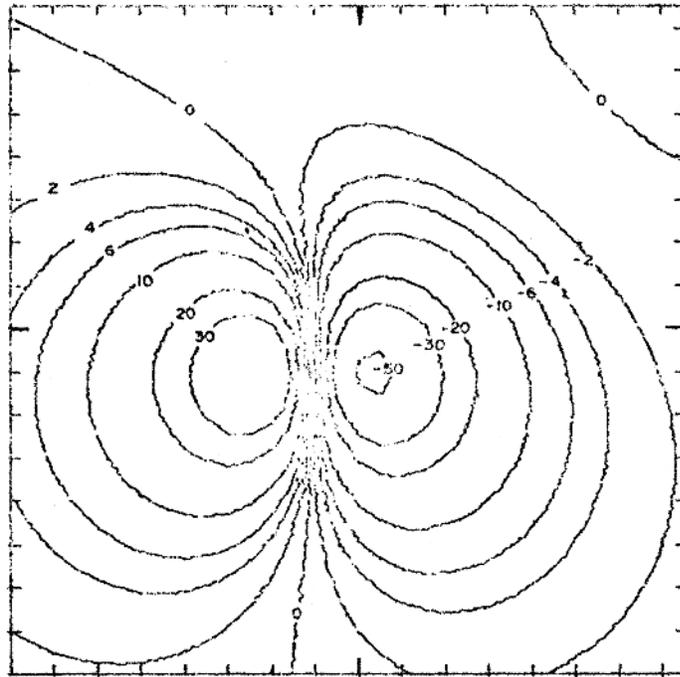


Figura 10 - Modelo Doublet - Componente exata  $E_y$  (x)

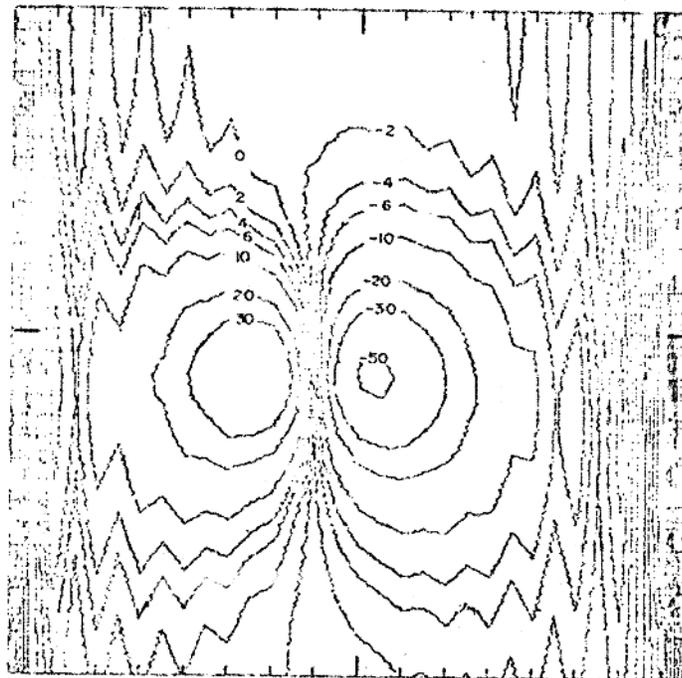


Figura 11 - Modelo Doublet - Componente  $E_y$  gerada por transformada de Fourier (x)

(x) Parâmetros do modelo:  $I=60$ ,  $D=30$ ,  $x_s=-2$ ,  $y_s=-2$ ,  $z_s=4$ ,  
 $\rho_i=10$ ,  $l=6$ .

Contornos traçados: -50, -30, -20, -10, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, 10, 20, 30.

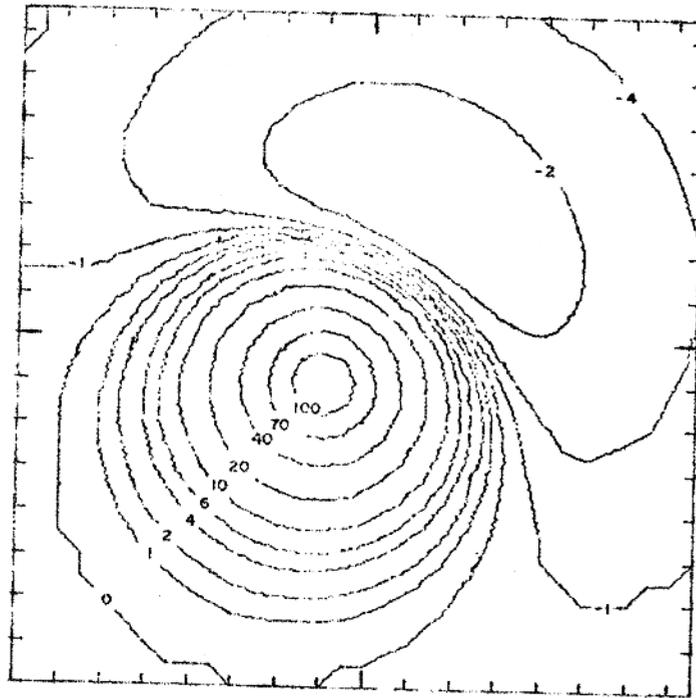


Figura 12 - Modelo Doublet - Componente exata  $E_z$  (x)

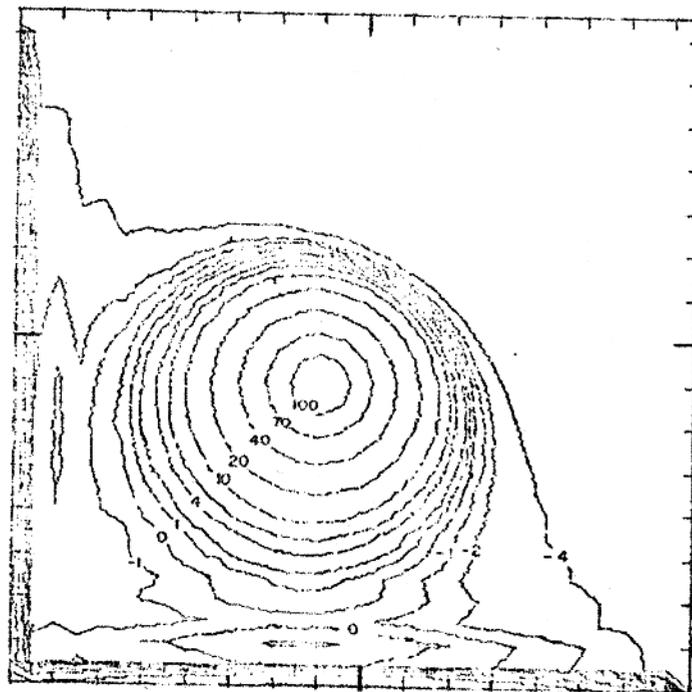


Figura 13 - Modelo Doublet - Componente  $E_z$  gerada por transformada de Fourier.(x)

(x) Parâmetros do modelo:  $I=60$ ,  $D=30$ ,  $x_s=-2$ ,  $y_s=-2$ ,  $z_s=4$ ,  $\rho_i=10$ ,  $l=6$ .

Contornos traçados: 100, 70, 40, 20, 10, 6, 4, 2, 1, 0, -1, -2, -4.

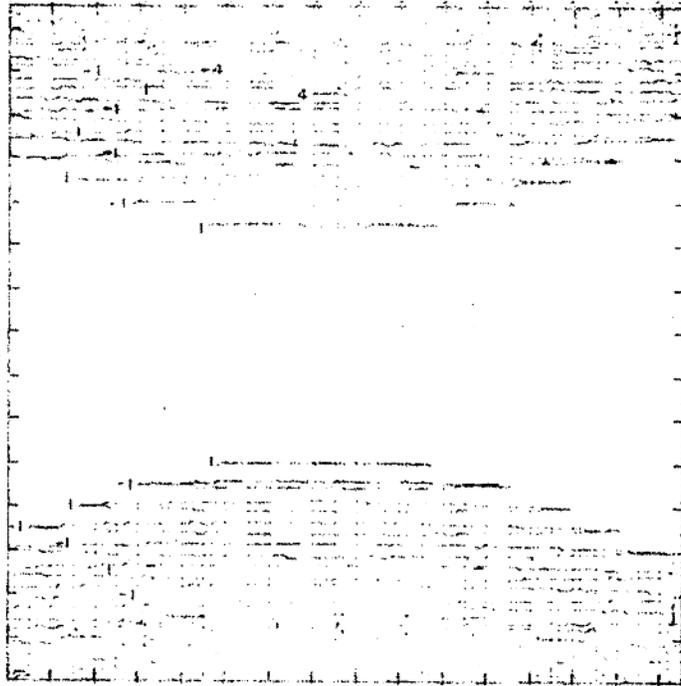


Figura 14 - Diferença entre os valores exatos de  $E_x$  e os obtidos por transformada de Fourier - Modelo Doublet(x)

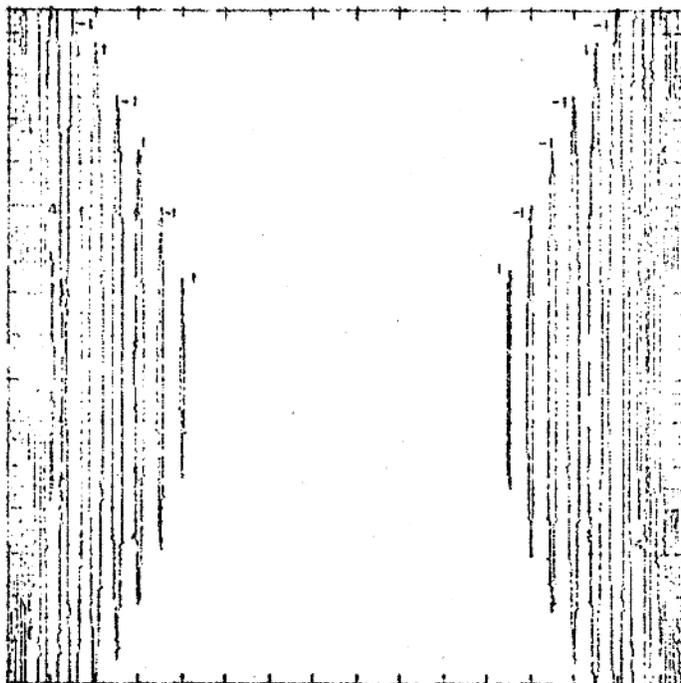


Figura 15 - Diferença entre os valores exatos de  $E_y$  e os obtidos por transformada de Fourier - Modelo Doublet (x)

(x) Parâmetros do modelo:  $I=60$ ,  $D=30$ ,  $x_s=-2$ ,  $y_s=-2$ ,  $z_s=4$ ,  
 $\rho_i=10$ ,  $\ell=8$ .

Contornos traçados: 15,7,4,1,-1,-4,-7.

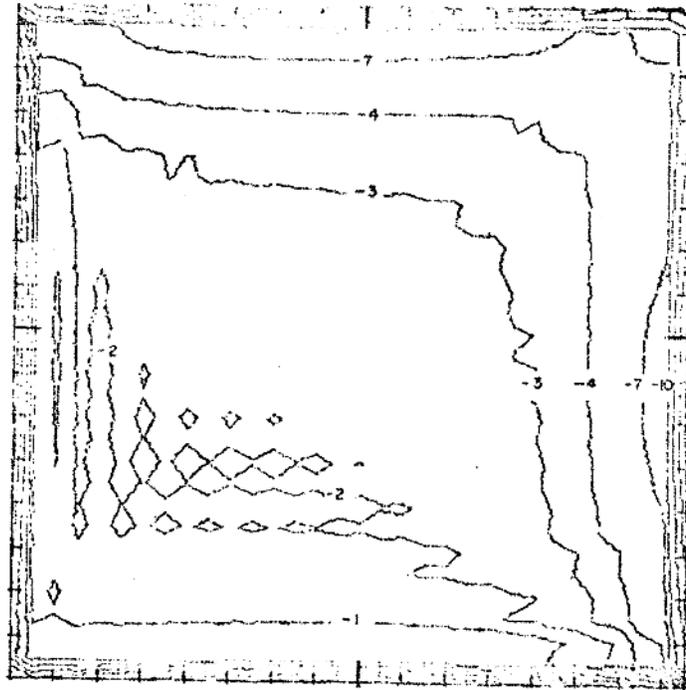


Figura 16 - Diferença entre os valores exatos de  $E_z$  e os obtidos por transformada de Fourier - modelo Doublet (\*)  
 Contornos traçados: 25,20,15,10,7,4,1,-1,-2,-3,-4,-7,-10,-15,-20,-25,-30.

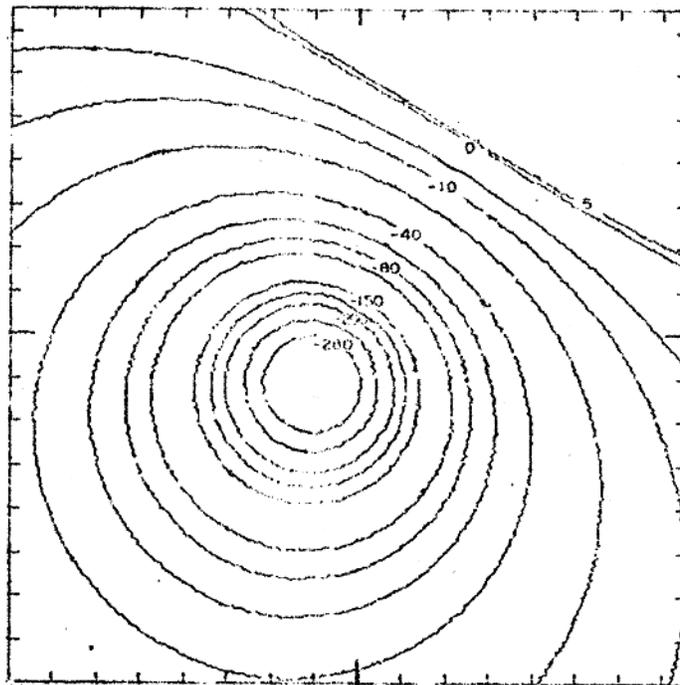


Figura 17 - Modelo Doublet - Valores exatos do potencial V (\*)  
 Contornos traçados: -280,-240,-200,-175,-150,-100,-80,-60,-40,-20,-10,-5,0,5.

(\*) Parâmetros do modelo:  $I=60$ ,  $D=30$ ,  $x_s=-2$ ,  $y_s=-2$ ,  $z_s=4$ ,  
 $\rho_i=10$ ,  $\ell=6$ .

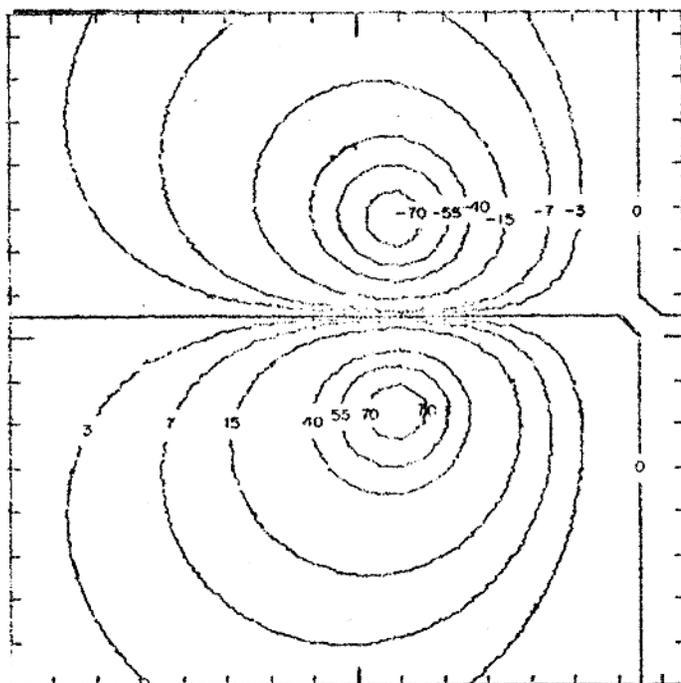


Figura 18 - Modelo Linha de Doublet - Componente exata  $E_x$  (\*)

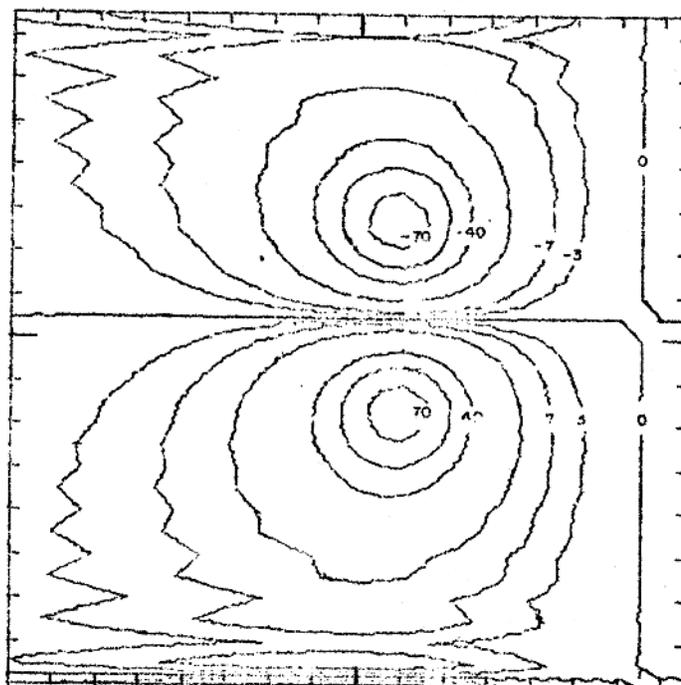


Figura 19 - Modelo Linha de Doublet - Componente  $E_x$  gerada por transformada de Fourier (\*)

(\*) Parâmetros do modelo:  $I=60$ ,  $E=3$ ,  $x_m=1$ ,  $y_s=2$ ,  $z_s=4$ ,  
 $\rho_i=10$ ,  $\ell=4$ .

Contornos traçados: -70, -55, -40, -15, -7, -3, 0, 3, 7, 15, 40, 55, 70.

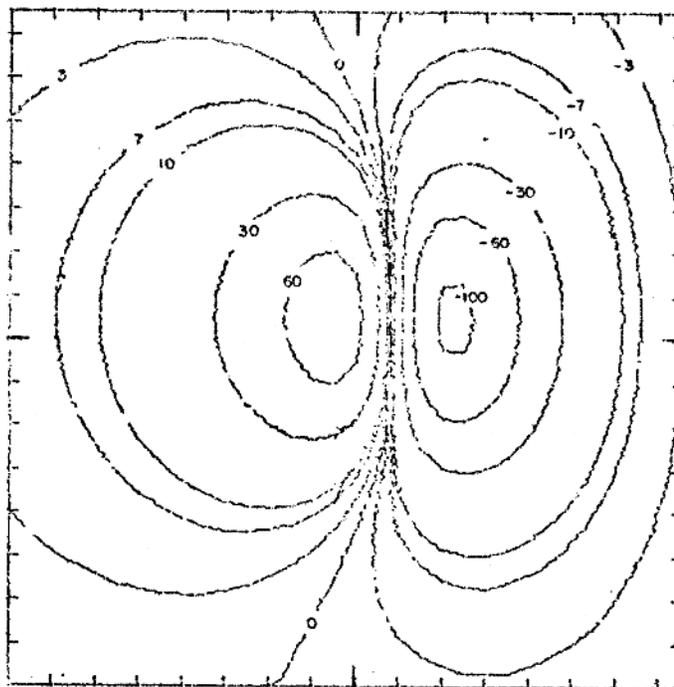


Figura 20 - Modelo Linha de Doublet - Componente exata  $E_y$  (x)

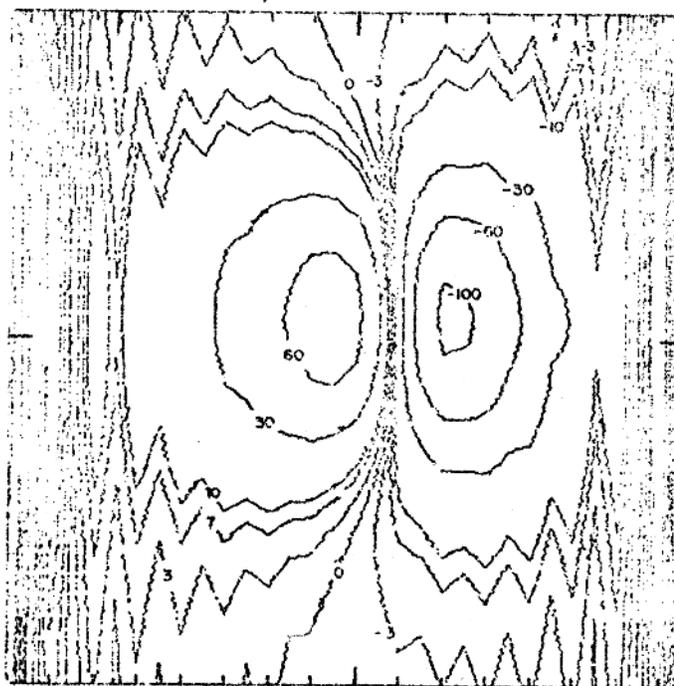


Figura 21 - Modelo Linha de Doublet - Componente  $E_y$  gerada por transformada de Fourier (x)

(x) Parâmetros do modelo:  $I=60$ ,  $E=3$ ,  $x_m=1$ ,  $y_s=2$ ,  $z_s=4$ ,  
 $\rho_i=10$ ,  $\ell=4$ .

Contornos traçados: 60,30,10,7,3,0,-3,-7,-10,-30,-60,-100.

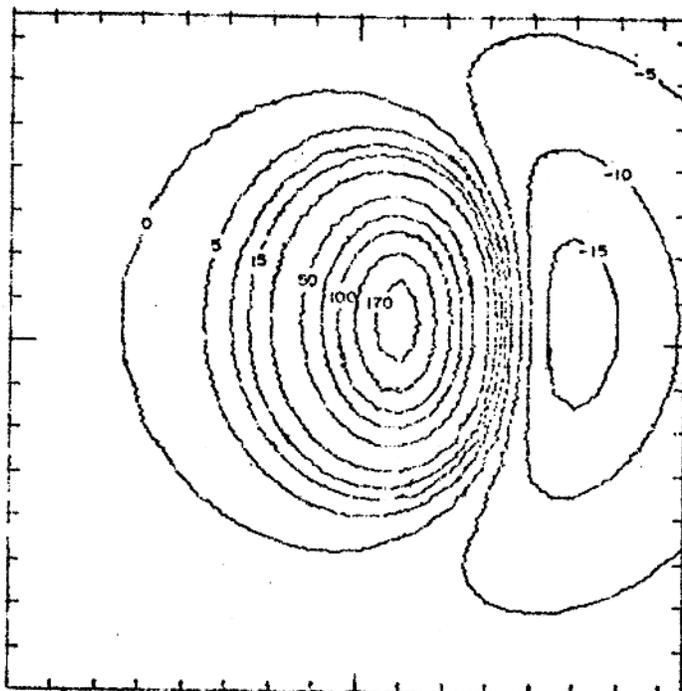


Figura 22 - Modelo Linha de Doublet - Componente exata  $E_z$  (\*)

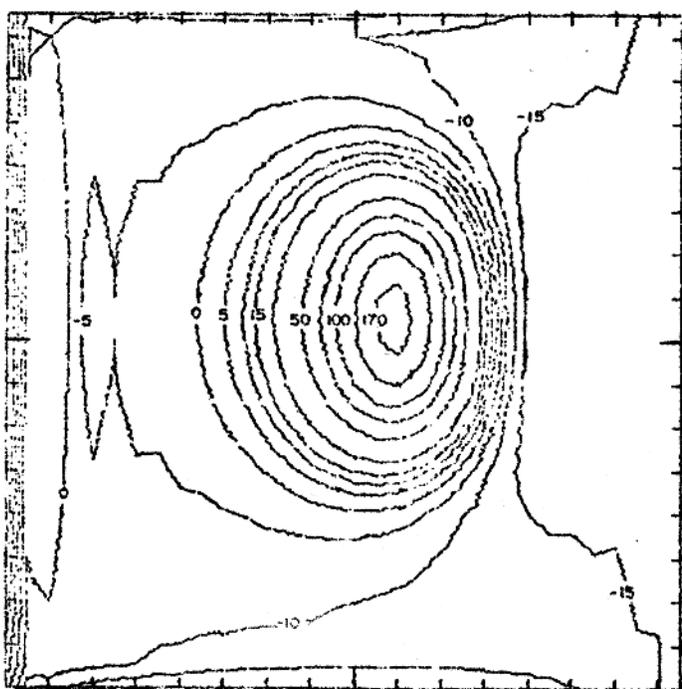


Figura 23 - Modelo Linha de Doublet - Componente  $E_z$  gerada por transformada de Fourier (\*)

(\*) Parâmetros do modelo:  $I=60$ ,  $E=3$ ,  $x_m=1$ ,  $y_s=2$ ,  $z_s=4$ ,  
 $\rho_i=10$ ,  $Z=4$ .

Contornos traçados: 170,135,100,75,50,25,15,10,5,0,-5,-10,-15.

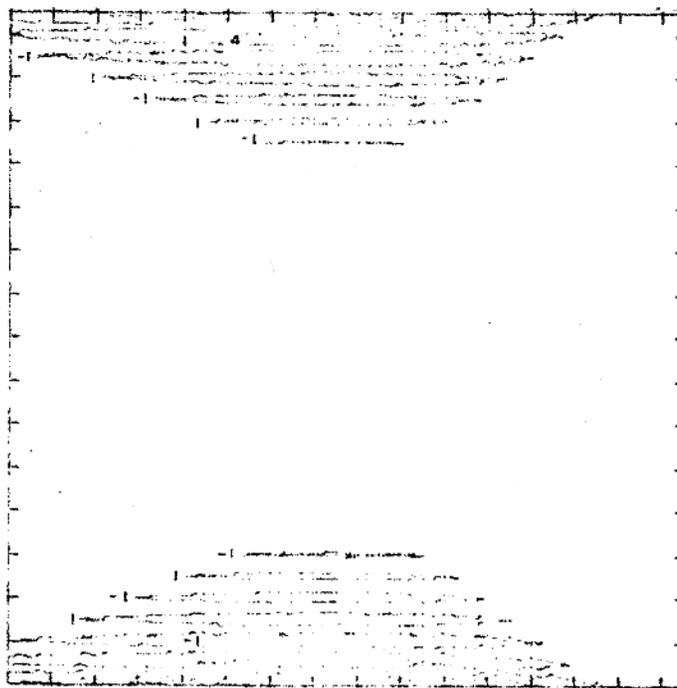


Figura 24 - Diferença entre os valores exatos de  $E_x$  e os obtidos por transformada de Fourier - modelo Linha de Doublet(\*)

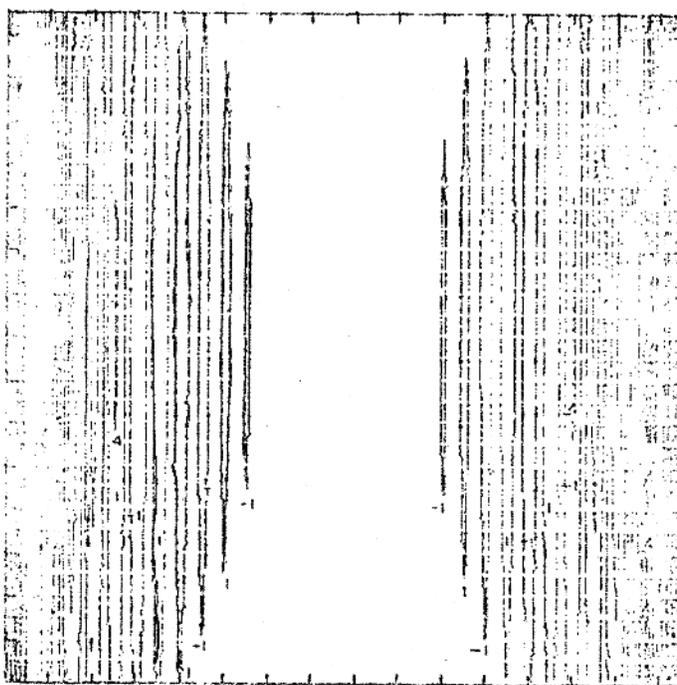


Figura 25 - Diferença entre os valores exatos de  $E_y$  e os obtidos por transformada de Fourier - modelo Linha de Doublet (\*)

(\*) Parâmetros de modelo:  $I=60$ ,  $E=3$ ,  $x_m=1$ ,  $y_s=2$ ,  $z_s=4$ ,  
 $\rho_i=10$ ,  $l=4$ .

Contornos traçados: 15,7,4,1,-1,-4,-7.

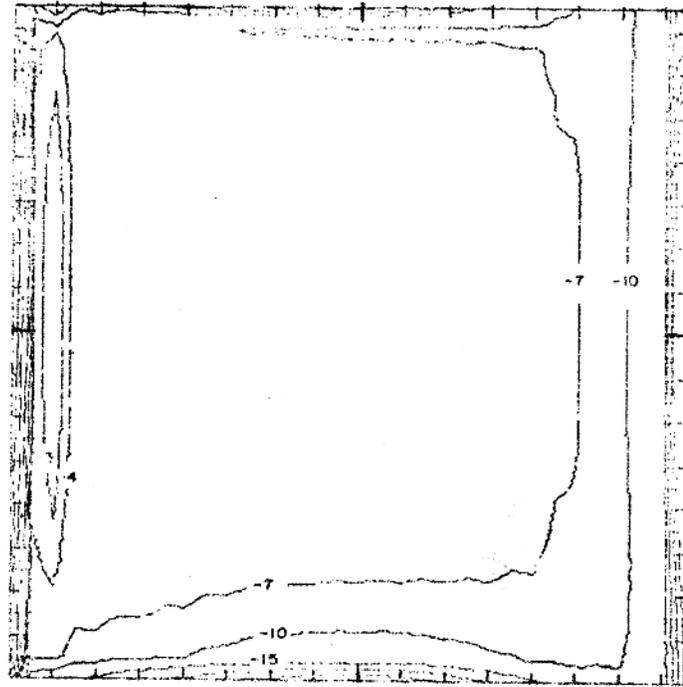


Figura 26 - Diferença entre os valores exatos de  $E_z$  e os obtidos por transformada de Fourier - modelo Linha de Doublet (\*)  
Contornos traçados: 25,20,15,10,7,4,1,-1,-2,-3,-4,-7,-10,-15,-20,-25,-30.

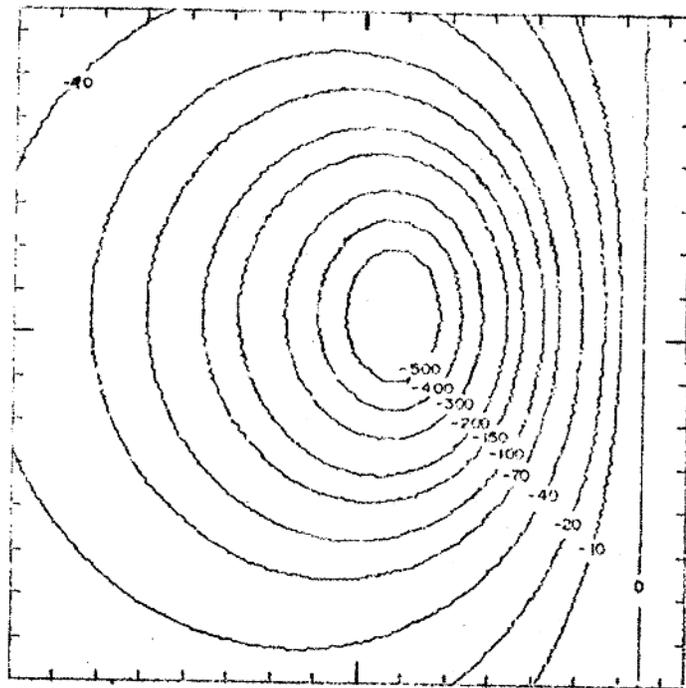


Figura 27 - Modelo Linha de Doublet - Valores exatos do potencial.  
Contornos traçados: -500,-400,-300,-200,-150,-100,-70,-40,-20,-10,0. (\*)

(\*) Parâmetros do modelo:  $I=60$ ,  $E=3$ ,  $x_m=1$ ,  $y_s=2$ ,  $z_s=4$ ,  
 $\rho_i=10$ ,  $\ell=4$ .

### 1.3. Métodos Propostos para o Tratamento Quantitativo de SP.

As anomalias produzidas por polarização espontânea são comparáveis às anomalias magnéticas originárias de uma situação ideal em que haja apenas magnetização remanente. Por conseguinte justifica-se a discussão abaixo sobre tratamento quantitativo de dados magnéticos.

Helbig(1963), Bhattacharya(1967), Lourenço(1972) sugeriram a utilização de integrais infinitas dos momentos das componentes do campo magnético, na interpretação de anomalias magnéticas. Assim se  $x, y, z$  são as coordenadas de posição do ponto de medida e  $H_x, H_y$  e  $H_z$  respectivamente as componentes horizontais e vertical do campo magnético total, é possível, admitindo-se uma magnetização homogênea do corpo causador da anomalia, determinar-se os parâmetros do vetor magnetização: inclinação  $I$ , declinação  $D$  e intensidade  $M_T$  por meio das equações abaixo

$$\left. \begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x H_x dx dy &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y H_y dx dy = -2\pi\gamma M_T \\ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x H_z dx dy &= -2\pi\alpha M_T \\ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y H_z dx dy &= -2\pi\beta M_T \end{aligned} \right\} \quad (1.25)$$

onde  $M_T$  é obtido por

$$\vec{M}_T = \iiint \vec{m} \cdot dt \quad (1.26)$$

em que  $\vec{m}$  é o momento de magnetização e  $dt$  o elemento de vo

lume.  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  são os cossenos diretores do vetor magnetização:

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \cos I. \cos D \\ \beta &= \cos I. \sen D \\ \gamma &= \sen D \end{aligned} \right\} \quad (1.27)$$

A utilização das equações (1.25) permite a obtenção da inclinação, declinação e intensidade de magnetização do corpo causador da anomalia sem ser necessário pressupor nenhum modelo. As informações procuradas são obtidas a partir dos valores das componentes magnéticas do campo anômalo, conhecidas sobre um plano horizontal.

Na prática, entretanto, surge a dificuldade de a integral ser calculada numa área finita. Lourenço(1972) atinge as expressões (1.28) abaixo, determinando numericamente as integrais (1.25), admitindo que a anomalia está totalmente contida na área de trabalho, isto é, que a anomalia se torna desprezível nas bordas da área. A integral numérica infinita reduz-se a:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N x_m H_{x_{m,n}} &= \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N y_n H_{y_{m,n}} = -2\pi \gamma M_T \\ \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N x_m H_{z_{m,n}} &= -2\pi \alpha M_T \\ \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N y_n H_{z_{m,n}} &= -2\pi \beta M_T \end{aligned} \right\} \quad (1.28)$$

em que, sendo o espaçamento entre os pontos de medida regular e unitário, M e N são as dimensões da área.

Leão (comunicação pessoal) trabalhando na obtenção dos parâmetros da magnetização de corpos que produzem anomalias magnéticas, utiliza integrais finitas dos momentos das componentes do campo magnético. Naturalmente essa sistemática tem o inconveniente de depender da escolha do modelo utilizado na interpretação, mas por outro lado possibilita obter um sistema de tantas equações quanto forem as incógnitas do problema.

Adotando-se os mesmos procedimentos no caso da polarização espontânea, ou seja, tratando quantitativamente os dados por meio de integrais infinitas e finitas das componentes e dos momentos das componentes do campo elétrico, são deduzidas, no capítulo seguinte, expressões que relacionam essas integrais aos parâmetros procurados.

CAPÍTULO 2: APLICAÇÃO DE INTEGRAIS ÀS ANOMALIAS DE SP

2.1. Aplicação das Integrais Infinitas dos Momentos das Componentes do campo elétrico às anomalias de SP.

2.1.1. Formulação

Pode-se demonstrar que as integrais dos momentos das componentes do campo elétrico de uma anomalia de potencial espontâneo, quando calculadas em uma superfície infinita (apêndice C) são expressas por

$$\left. \begin{aligned} \iint_{-\infty}^{\infty} x E_x dx dy &= \iint_{-\infty}^{\infty} y E_y dx dy = -2\pi \gamma P_T \\ \iint_{-\infty}^{\infty} x E_z dx dy &= -2\pi \alpha P_T \\ \iint_{-\infty}^{\infty} y E_z dx dy &= -2\pi \beta P_T \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

onde  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  são os cossenos diretores do vetor polarização  $P_T^{\rightarrow}$ , este obtido por uma integral de volume, em que por hipótese o corpo causador da anomalia está homogeneamente polarizado.

Uma análise das equações (2.1) mostra a grande vantagem dessas expressões nos métodos de interpretação, pois, sem ser necessário pressupor um modelo, atinge-se a uma relação entre as componentes do campo elétrico e o vetor polarização. Desse modo conhecidas essas componentes é possível a determinação de inclinação, declinação e intensidade da polarização.

Admitindo-se, que a anomalia é desprezível fora de uma área  $M \times N$  e levando-se em conta que os dados são discretos, as integrais (2.1) podem ser aproximadas pelas expressões numéricas:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N x_m E_{x_{m,n}} &= \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N y_n E_{y_{m,n}} = -2\pi \gamma P_T \\ \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N x_m E_{z_{m,n}} &= -2\pi \alpha P_T \\ \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N y_n E_{z_{m,n}} &= -2\pi \beta P_T \end{aligned} \right\} (2.2)$$

onde admite-se que a origem do sistema de coordenadas está localizada no centro da área de trabalho.

Denominando

$$\left. \begin{aligned} S_{xx} &= \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N x_m E_{x_{m,n}} \\ S_{yy} &= \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N y_n E_{y_{m,n}} \\ S_{xz} &= \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N x_m E_{z_{m,n}} \\ S_{yz} &= \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N y_n E_{z_{m,n}} \end{aligned} \right\} (2.3)$$

atinge-se que:

$$\left. \begin{aligned} S_{xx} = S_{yy} = -2\pi \gamma P_T &= -2\pi \operatorname{sen} I \cdot P_T \\ S_{xz} = -2\pi \alpha P_T &= -2\pi \cos I \cdot \cos D \cdot P_T \\ S_{yz} = -2\pi \beta P_T &= -2\pi \cos I \cdot \operatorname{sen} D \cdot P_T \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

consequentemente:

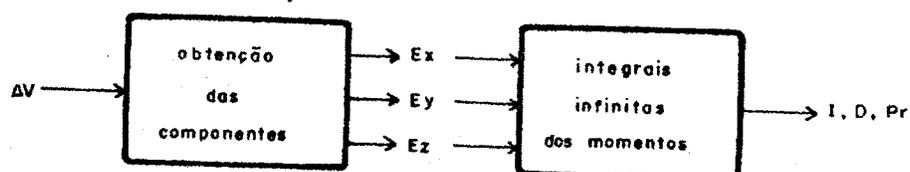
$$P_T = \frac{(S_{xx}^2 + S_{xz}^2 + S_{yz}^2)^{1/2}}{2} \quad (2.5)$$

$$I = \operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{S_{xx}}{2\pi P_T} \quad (2.6)$$

$$D = \operatorname{arctg} \frac{S_{yz}}{S_{xz}} \quad (2.7)$$

### 2.1.2. Aplicação ao Modelo Doublet

A vantagem de prescindir de um modelo de interpretação e a extrema simplicidade das equações sugerem a aplicação das integrais infinitas dos momentos a anomalias de SP. Para se usar essa metodologia é necessário conhecer a distribuição do potencial produzido por fenômeno de polarização espontânea, de modo a se obter as componentes. O processo está resumido no esquema abaixo



Com o intuito de simular os dados de campo foi utilizado o modelo doublet por ser o mais simples. Os valores do potencial e das componentes foram gerados por meio das equações próprias do modelo, expressões (1.15) e (1.16) e usados como dados de entrada para o cálculo da direção e intensidade do vetor polarização. Assim tornou-se possível testar a precisão da resposta obtida comparando-se os resultados aos dados exatos, utilizados para gerar a anomalia.

A anomalia teórica foi construída atribuindo-se valores aos sete parâmetros que caracterizam o doublet: coordenadas do polo negativo  $x_s$ ,  $y_s$ ,  $z_s$ ; distância entre os polos  $\ell$ ; inclinação  $I$ ; declinação  $D$  e intensidade de polarização  $P_T$ . A partir desses valores calculou-se em cada ponto de uma rede quadrada de  $32 \times 32$ , o potencial e as componentes do campo elétrico. Todos os resultados apresentados foram obtidos por programas executados num computador IBM 1130. As listagens desses mesmos programas se encontram no apêndice D.

O emprego das integrais infinitas dos momentos foi testado para diversos doublets localizados em diferentes posições. Alguns dos resultados foram organizados em quadros de modo a facilitar a análise dos mesmos. O quadro 1 refere-se a doublets de inclinação e declinação respectivamente de  $75^\circ$  e  $0^\circ$  enquanto que a intensidade de polarização é de 4.775. O objetivo foi verificar a influência das coordenadas  $x_s$ ,  $y_s$  e  $z_s$  na determinação das variáveis procuradas. Deve-se observar que para o cálculo dos momentos foi tomada uma grade com número ímpar de pontos em ambas as direções, conforme exige a simetria dos limites de integração.

QUADRO 1: Direção e intensidade do vetor polarização determinadas em uma área de  $31 \times 31$ .

Valores exatos:  $I=75^\circ$ ;

$D=0^\circ$

$P_T=4,775$

$x_s, y_s$	$z_s$	I	D	$P_T$
0,0	2	71,61	0,01	0,24
2,0		62,40	0,00	0,29
0,2		71,21	0,01	0,16
-2,0		85,74	0,05	0,19
0,-2		72,12	0,01	0,37
0,0	4	74,11	0,00	0,29
2,0		69,89	0,00	0,32
0,2		73,62	0,01	0,20
-2,0		79,58	0,01	0,24
0,-2		74,72	0,01	0,43

No caso mais geral a anomalia não deve apresentar simetria em relação aos eixos coordenados. Por este motivo foi estudado o doublet de inclinação  $60^\circ$ , declinação  $30^\circ$ , distância entre os polos 6; polarização 4.775 e profundidade do polo negativo 4. Os dados relativos a este exemplo estão contidos no quadro 2.

QUADRO 2: Direção e intensidade do vetor polarização determinadas em uma área de 31x31.

Valores Exatos

 $I = 60^\circ$  $D = 30^\circ$  $P_T = 4.775$ 

$x_s, y_s, z_s$	I	D	$P_T$
0,0,4	69,54	30,12	2,24
2,0,4	79,70	73,50	2,24
0,2,4	72,05	12,43	2,21
-2,0,4	56,39	18,23	2,28
0,-2,4	61,27	53,24	2,36
2,2,4	85,04	58,78	2,21
-2,2,4	57,86	6,51	2,26
-2,-2,4	51,29	37,10	2,40
2,-2,4	67,16	82,51	2,36

O QUADRO 3 refere-se a grades de diversas dimensões em que os doublets usados nos testes diferem apenas nas coordenadas horizontais do polo negativo, a saber (0,0) e (-2,-2). Os demais parâmetros são os mesmos: a profundidade do polo negativo é de 4 unidades, enquanto que a inclinação, declinação e intensidade do vetor polarização são respectivamente  $60^\circ$ ,  $30^\circ$  e 4.775. As integrais dos momentos foram obtidas para uma grade de 65x65 pontos. Foram pesquisados os parâmetros do vetor polarização para malhas quadradas de diferentes dimensões, para se estudar a influência de área de trabalho na determinação da polarização.

QUADRO 3: Direção e intensidade do vetor polarização.

Valores exatos:  $I = 60^\circ$        $D = 30^\circ$        $P_T = 4.775$ 

$x_s, y_s, z_s$	Dimensões	I	D	$P_T$
0,0,4	65x65	64,11	30,02	3,45
	31x31	69,54	30,12	2,24
	25x25	71,87	30,18	1,80
	21x21	73,93	30,24	1,45
	17x17	76,47	30,29	1,04
	13x13	79,74	30,31	0,62
	9x9	82,52	30,25	0,24
-2,-2,4	65x65	56,65	33,43	3,54
	31x31	51,29	37,10	2,39
	25x25	48,41	38,44	1,97
	21x21	45,49	39,52	1,62
	17x17	41,21	40,71	1,20
	13x13	34,94	41,89	0,73
	9x9	26,45	42,86	0,27

Os quadros 1,2 e 3 dizem respeito à influência da profundidade da posição do doublet e da largura da área de trabalho no cálculo da inclinação, declinação e intensidade do vetor polarização. Os resultados são discutidos a seguir.

De acordo com o Quadro 1 conclui-se que tanto melhor

os valores obtidos para a inclinação e declinação, quanto mais profunda for a localização de doublet.

Em relação à influência da posição do doublet, a declinação obtida no Quadro 1 apresenta bons resultados em qualquer posição  $x_s, y_s$ . Isto no entanto se deve à simetria em relação a  $O_x$  apresentada pela componente  $E_z$  do doublet utilizado nos testes, (Fig. 13). Uma vez que a declinação é obtida pelo quociente entre  $S_{yz}$  e  $S_{xz}$ , equação (2.7), e como para qualquer doublet contido no plano  $XZ$ ,  $S_{yz}$  é nulo, naturalmente encontra-se um valor nulo para a declinação. Mesmo um deslocamento no doublet paralelamente a  $O_y$  continua apresentando uma declinação praticamente nula pois o quociente  $S_{yz}/S_{xz}$  mantém uma ordem de grandeza de  $10^{-4}$ .

Quanto à inclinação apresentar erro menor que 5% quando o doublet se desloca sobre  $O_y$  e erros maiores ao se deslocar sobre  $O_x$ , quadro 1, explica-se pelo fato de se ter determinado esse parâmetro, utilizando-se o momento da componente  $E_x$  em relação a  $x$ , equação (2.16). A componente  $E_x$  para o doublet de coordenadas de posição (0,0,4) é aproximadamente simétrica em relação a  $O_y$  (Fig.9), conseqüentemente um deslocamento segundo este eixo praticamente não altera o resultado. Caso fosse utilizada a componente  $E_y$ , os deslocamentos sobre  $O_x$  não influenciariam significativamente no cálculo da inclinação.

Em relação ao quadro 2 os valores obtidos para a inclinação e declinação são melhores quando o polo negativo se encontra verticalmente abaixo da origem.

Finalmente um estudo do quadro 3 mostra que a medi

da que se aumenta a área usada para os cálculos, tanto melhores os resultados, inclusive para a intensidade de polarização. Isto era de se esperar pois quanto maior a área, mais a integral calculada numericamente (2.2) se aproxima dos resultados analíticos obtidos para integrais infinitas (2.1).

O modelo doublet elétrico não apresentou resultados comparáveis ao dipolo magnético usado por Lourenço (1972), pelo fato de que não apresenta centro de simetria em relação ao plano horizontal de medida. Para essa metodologia de interpretação, situações em que o centro de simetria está localizado abaixo da origem fornecem os melhores resultados.

Em resumo conclui-se que a aplicação das integrais infinitas dos momentos das componentes do campo elétrico, à interpretação de anomalias de potencial espontâneo, de modo que os resultados sejam aceitáveis, depende, fundamentalmente, de se localizar a origem acima do corpo causador da anomalia e de serem adequadas as dimensões da área de trabalho utilizada para os cálculos.

Uma vez que as restrições acima limitam o emprego da metodologia mesmo ao mais simples dos modelos de potencial espontâneo, que é o doublet, não foram efetuados estudos semelhantes com modelos mais complexos. Ao invés disto procurou-se verificar a eficácia da utilização de integrais finitas, o que é feito no item seguinte.

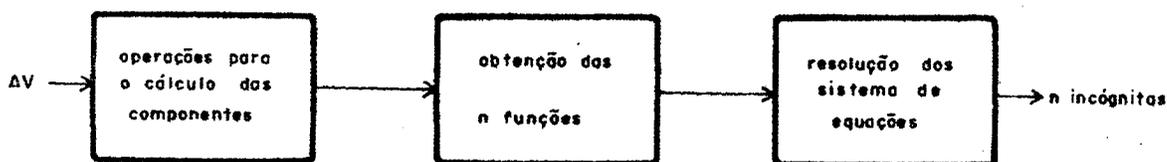
## 2.2. Aplicação das Integrais finitas dos momentos do potencial e das componentes do campo elétrico às anomalias de SP.

Como foi visto na seção anterior o método de interpretação utilizando as integrais infinitas dos momentos não a apresentou, na maioria das vezes, resultados satisfatórios. Assim recorreu-se às integrais finitas dos momentos das componentes.

### 2.2.1. Formulação

O método aqui apresentado para a interpretação de anomalias de potencial espontâneo pode ser dividido em três etapas:

- 1.<sup>a</sup> Etapa: obtenção das componentes do campo elétrico.
- 2.<sup>a</sup> Etapa: obtenção das  $n$  funções que relacionam as  $n$  incógnitas.
- 3.<sup>a</sup> Etapa: resolução do sistema de  $n$  equações e  $n$  incógnitas.



- 1.<sup>a</sup> Etapa: Obtenção das componentes do campo elétrico.

A primeira etapa já foi desenvolvida e discutida no capítulo 1. Como foi dito então, uma vez obtidos os valores para o potencial, as componentes do campo elétrico podem ser encontradas tanto a partir dos dados de campo quanto por trans

formadas de Fourier.

2.<sup>a</sup> Etapa: Obtenção das  $n$  funções que relacionam as  $n$  incógnitas.

A segunda etapa depende fundamentalmente de modelo escolhido. Na interpretação de anomalias de potencial espontâneo resolveu-se utilizar além das componentes do campo, como feito no caso magnético, também o potencial, uma vez que este é o dado originalmente medido nos trabalhos práticos.

Sendo o potencial e as componentes do campo elétrico dependentes dos parâmetros procurados, as integrais de  $V$ ,  $E_x$ ,  $E_y$  e  $E_z$  bem como de seus momentos em relação a  $x$  e  $y$  são funções daqueles parâmetros. Desse modo são obtidas facilmente expressões relacionadas às incógnitas procuradas e cuja forma geral é indicada por:

$$F_T = \int_{-x}^x \int_{-y}^y T \, dx dy \quad (2.8)$$

$$F_{\xi T} = \int_{-x}^x \int_{-y}^y \xi T \, dx dy \quad (2.9)$$

Nas equações (2.8) e (2.9)  $T$  representa uma das funções  $V, E_x, E_y$  ou  $E_z$  enquanto que  $\xi$  simboliza as coordenadas de posição  $x$  ou  $y$ .

Na prática as integrais (2.8) e (2.9) são calculadas numericamente através de somatórios, portanto o que se obtém são expressões do tipo

$$S_T = \sum_{j=-M/2}^{M/2} \sum_{k=-N/2}^{N/2} \quad (2.10)$$

$$S_{nt} = \sum_{j=-M/2}^{M/2} \sum_{k=-N/2}^{N/2} nT(j,k) \quad (2.11)$$

em que foi considerado um espaçamento uniforme e unitário entre os pontos de medida e  $T$  representa  $V$ ,  $E_x$ ,  $E_y$  ou  $E_z$  e  $n$   $i$  ou  $j$ . Dessa forma há uma diferença entre o valor real da integral e o valor calculado por métodos numéricos expressa por

$$\Delta F_1 = F_V - S_V \quad ; \quad \Delta F_2 = F_{xV} - S_{xV} \quad ; \quad \Delta F_3 = F_{yy} - S_{yy} \quad (2.12)$$

$$\Delta F_4 = F_x - S_x \quad ; \quad \Delta F_5 = F_{xx} - S_{xx} \quad ; \quad \Delta F_6 = F_{yx} - S_{yx} \quad (2.13)$$

$$\Delta F_7 = F_y - S_y \quad ; \quad \Delta F_8 = F_{xy} - S_{xy} \quad ; \quad \Delta F_9 = F_{yy} - S_{yy} \quad (2.14)$$

$$\Delta F_{10} = F_z - S_z \quad ; \quad \Delta F_{11} = F_{xz} - S_{xz} \quad ; \quad \Delta F_{12} = F_{yz} - S_{yz} \quad (2.15)$$

que nada mais são que o erro absoluto da avaliação numérica das funções.

Nos trabalhos de campo as medidas do potencial são sempre relativas a um determinado ponto base, conseqüentemente os valores obtidos em cada ponto diferem do valor real por uma constante  $V_0$ , dificilmente determinada com exatidão. Por este motivo não deve ser usada em trabalhos práticos a integral numérica do potencial na área de interesse. Entretanto é válida a utilização dos momentos do potencial, desde que seja tomado um número ímpar de pontos em  $O_x$  e  $O_y$  de forma tal que a origem,

ponto (0,0), esteja localizada precisamente no centro da malha.

Assim

$$V_{\text{real}} = V_{\text{medido}} + V_0 \quad (2.16)$$

e a integral do momento em relação a  $x$ :

$$\int_{-x}^x \int_{-y}^y x V_{\text{real}} dx dy = \int_{-x}^x \int_{-y}^y x V_{\text{medido}} dx dy + V_0 \int_{-x}^x \int_{-y}^y x dx dy \quad (2.17)$$

o último termo do segundo membro é nulo pois a função a ser integrada é ímpar e os limites de integração são simétricos. Da mesma forma a integral do momento do potencial em relação a  $y$  é independente da constante  $V_0$ .

3.<sup>a</sup> Etapa: Resolução do sistema de  $n$  equações e  $n$  incógnitas.

Tanto para o modelo doublet quanto para a linha de doublet usados neste trabalho, o número de variáveis é 7, portanto são necessárias pelo menos 7 equações para a determinação dessas incógnitas.

O método de resolução do sistema de equações é baseado no trabalho de Nelder e Mead (1964), didaticamente tratado por Himmelblau (1970). Consiste em minimizar uma função de  $n$  variáveis. Para tal é construído um poliedro de  $n+1$  vértices no espaço das  $n$  incógnitas. A função é estudada em cada vértice e o ponto que apresentar o máximo valor é substituído por outro correspondente a um menor valor da função, encontrado

por processos de reflexão, expansão e contração em relação ao cen  
tróide do poliedro ou ainda por uma redução total do poliedro.

A procura do vértice de menor valor da função con  
tinua até que para um poliedro suficientemente pequeno a dife  
rença entre o valor da função no centróide e em cada vértice  
seja menor que uma tolerância, determinada a priori, de acordo  
com a precisão exigida no problema. As coordenadas do ponto  
correspondente ao valor mínimo da função são as soluções procura  
das. O sistema está resumido no fluxograma apresentado no apên  
dice D.

A função objetivo a ser minimizada na resolução do  
sistema de equações é dada pela soma dos quadrados dos erros  
absolutos entre as integrais exatas e as numéricas, equações  
(2.12) a (2.15), ou seja:

$$SOM = \sum_{i=1}^n (\Delta F_i) \quad (2.18)$$

Entretanto de modo a atribuir a mesma importância  
a  $\Delta F_i$  de ordens de grandeza diferentes, recorreu-se a um fator  
ponderante  $W_i$ . Assim preferiu-se utilizar o parâmetro dado pela  
equação abaixo.

$$\sigma = \sum_{i=1}^n [\Delta F_i \cdot W_i]^2 \quad (2.19)$$

onde  $W_i$ , nos testes efetuados expressou-se por

$$W_i = \frac{C}{S_i} \quad (2.20)$$

sendo  $C$  um valor constante e  $S_i$  o somatório relativo àquele  $\Delta F_i$  particular. Naturalmente que para expressar o peso por (2.20) é necessário que  $S_i$  seja diferente de zero.

Quando  $\sigma$  atingir o mínimo conveniente, conforme a precisão estipulada, significa que foram encontradas soluções cujos valores reproduzem satisfatoriamente os valores anômalos observados.

### 2.2.2. Aplicação ao Modelos Doublet.

Como já foi dito a utilização das integrais finitas dos momentos depende do modelo a ser utilizado, uma vez que as funções que relacionam esses momentos às incógnitas do problema são específicas para cada caso.

O doublet elétrico é o modelo adequado à situação em que o corpo causador da anomalia tem a forma alongada grosseiramente se assemelhando a um cilindro. O polo negativo corresponde ao ponto onde o corpo reage entregando elétrons ao meio circundante, enquanto que o polo positivo representa o local onde o corpo está recebendo elétrons da vizinhança. A distância entre esses dois pontos determina a extensão do doublet.

Para este modelo, conforme discutido no apêndice A, sete são os parâmetros que o determinam completamente: inclinação  $I$ , declinação  $D$ , coordenadas da posição do polo negativo  $(x_s, y_s, z_s)$ , a distância  $l$  entre os polos e  $\rho$ , que representa o produto de  $\rho$ , resistividade média do meio onde se encon

tra o doublet, pela corrente  $i$  produzida nos polos. Significa então que são necessárias sete equações para se determinar o corpo causador da anomalia, quando se admite que ele pode ser representado por este modelo.

Como anteriormente foi feito no item 2.1.2. simulou-se uma anomalia por meio de valores atribuídos aos parâmetros do doublet. Assim foram obtidos o potencial e as componentes do campo elétrico nos pontos de uma grade regular  $M \times N$  e, posteriormente, as integrais dos momentos dessas funções. A partir delas efetuou-se o processo inverso, ou seja, utilizou-se as integrais finitas dos momentos do potencial e das componentes de modo a se obter os parâmetros do corpo causador da anomalia. A precisão das respostas obtidas pode ser apreciada quando comparada com os valores exatos.

Conhecidos o potencial e as componentes foi efetuada a segunda etapa do método proposto que consiste em tomar um certo número de funções, de modo a tornar possível a resolução do sistema. Essas funções, generalizadas na forma das equações (2.8) e (2.9) são deduzidas no apêndice A. Usou-se um número maior de equações que incógnitas para se tornar mais fácil a convergência do sistema.

A última etapa a ser executada para a determinação dos parâmetros característicos do corpo causador da anomalia, na sistemática apresentada nesta seção, é resolver o sistema de equações.

Para a resolução do mesmo a construção do poliedro de  $n+1$  vértices foi realizada atribuindo-se valores, denomina

dos de aproximações iniciais, às coordenadas de um dos vértices. Os demais pontos são determinados por equações para construção de poliedros regulares, encontradas na geometria analítica. A dimensão do lado do poliedro inicial, denominada passo na resolução do sistema, variou de 0,5 a 20 nos testes executados. Não é necessário pelo método de Nelder e Mead, método dos poliedros flexíveis, que o poliedro inicial seja regular, entretanto, assim foi feito por comodidade. Uma vez calculados os valores iniciais das funções em cada vértice do poliedro inicia-se efetivamente a procura dos parâmetros que determinam o doublet em questão. Foram usados, respectivamente, os valores 1,2 e 0.5 para os coeficientes de reflexão, expansão e contração de poliedro, conforme sugerem Nelder e Mead. O sistema foi dado como resolvido quando as dimensões do poliedro atingiram o valor previamente escolhido de  $10^{-6}$  e a soma dos quadrados da diferença entre as funções e as integrais numéricas, equação (2.19), o valor de  $10^{-3}$ . Esses valores foram denominados tolerância do poliedro e tolerância da função.

Nos testes apresentados foi usado o valor 10 para a constante, numerador do peso  $W_1$ , da equação (2.20).

O tempo gasto na resolução do sistema, variou de cerca de meia hora a duas horas no computador IBM 1130, o que traduzido em número de iterações corresponde em média a 13 iterações/segundo.

O quadro 4 na página 65, sintetiza alguns dos resultados obtidos para os parâmetros do doublet, cujos valores exatos estão indicados na linha apropriada. As coordenadas em

pregadas em todos os casos, foram geradas em uma grade de 32x32 pontos. Desta grade foram tomadas as áreas de 31x31, 25x25, 21x21, conservando-se a origem sempre na mesma posição. O objetivo foi verificar a influência da dimensão da malha nos cálculos dos momentos. As aproximações iniciais aos parâmetros do doublet variaram de teste para teste.

O teste 1 foi executado com nove funções onde foram utilizadas as integrais das três componentes e dos momentos dessas componentes. Do segundo teste ao sexto a componente  $E_z$  e seus respectivos momentos foram substituídos pelas funções, que utilizam o potencial. Os dois últimos testes foram efetuados com oito funções:  $F_x$ ,  $F_{xx}$ ,  $F_{yx}$ ,  $F_y$ ,  $F_{xy}$ ,  $F_{yy}$ ,  $F_{xv}$ ,  $F_{yv}$ .

Observando-se os testes 2, 3 e 5 do quadro 4, verifica-se que os valores obtidos para os parâmetros do doublet não diferem muito entre si quando a área é reduzida. Da mesma forma comparando-se o teste 1 ao 2, encontra-se que os resultados não foram influenciados pelo conjunto de funções tomadas. Além disto a metodologia não apresentou exigências quanto à localização da origem sobre o corpo causador da anomalia conforme se pode comprovar pelos testes efetuados. De modo a evitar um tempo indefinido de processamento procurou-se limitar o número máximo de iterações em 2500. Para isto em torno das 1500 iterações, era verificado se o curso de resolução do sistema de equações mostrava uma tendência clara à convergência. Se tal não fosse o caso o processo era suspenso e um novo teste tinha lugar com diferentes aproximações iniciais.

Em dois testes com o modelo doublet ocorreu que após 1500 iterações  $\sigma$  não havia atingido sequer o valor de  $10^{-1}$ , estando os parâmetros do doublet muito afastados dos valores exatos. Nestas circunstâncias foram interrompidos os testes e com novas aproximações iniciais reiniciado o processo.

Os resultados apresentados no quadro 4 se situam, na maioria dos casos dentro de um erro de 5%. As maiores variações se encontram nos parâmetros  $\rho_i$  e  $\ell$ . No entanto é interessante observar que o valor encontrado para a intensidade de polarização resultante do produto entre eles é dada pela expressão

$$p = \frac{\rho_i}{4\pi} \ell$$

conforme a equação (C.30) do apêndice C é aproximadamente o mesmo em todos os casos.

Na última linha do quadro estão indicados as médias aritméticas dos valores obtidos nos diferentes testes para cada parâmetro. A observação das mesmas mostra que o erro máximo é da ordem de 1,5% constituindo assim, os valores médios, uma solução para o sistema de equações, dentro da precisão requerida.

De modo a acompanhar o curso da resolução do sistema de equações foi traçado em gráfico o erro relativo de cada coordenada do vetor incógnita. Nesses gráficos o eixo das ordenadas refere-se aos erros percentuais plotados de cinco em cinco iterações enquanto que o das abcissas às iterações executadas. Para dar um caráter mais suave às curvas obtidas foi tomada para cada parâmetro a média móvel de cinco pontos entre os valores encontrados. Os gráficos dos testes 3, 4, 5 e 6 estão representa

QUADRO 4 : Parâmetros obtidos para o doublet sendo utilizadas as componentes exatas do campo elétrico.

TESTE	DIMENSÕES DA MALHA	NÚMERO DE ITERAÇÕES	PARÂMETROS DO DOUBLET VALORES EXATOS	I	0	x <sub>s</sub>	y <sub>s</sub>	z <sub>s</sub>	ρ <sub>i</sub>	ℓ	P <sub>T</sub>
1	31x31	1783	Aproximações	70	20	0	-1	3	14	7	4,77
			Resultados	60,03	30,00	-1,98	-1,98	4,05	10,21	5,87	
2	31x31	1143	Aproximações	70	20	0	-1	3	14	7	4,77
			Resultados	60,01	30,01	-1,98	-1,99	4,05	10,21	5,87	
3	25x25	280	Aproximações	70	20	0	-1	3	14	7	4,77
			Resultados	60,02	30,51	-2,01	-1,98	4,01	10,01	5,94	
4	25x25	1553	Aproximações	70	20	0	-3	5	13	5	4,76
			Resultados	60,06	30,08	-1,97	-1,98	4,08	10,40	5,75	
5	21x21	791	Aproximações	70	20	0	-1	3	14	7	4,76
			Resultados	60,05	30,02	-1,99	-1,99	4,03	10,16	5,89	
6	21x21	1572	Aproximações	50	35	0	-3,5	6	12	2	4,77
			Resultados	59,95	29,75	-1,99	-2,01	4,01	10,01	6,00	
7	31x31	1307	Aproximações	70	20	0	-1	3	14	7	4,72
			Resultados	59,99	30,08	-1,87	-1,92	4,22	11,31	5,24	
8	31x31	1651	Aproximações	70	20	0	-1	3	8	7	4,84
			Resultados	60,02	29,90	-2,13	-2,08	3,82	8,99	6,77	
VALORES MÉDIOS				60,01	30,04	-1,99	-1,99	4,03	10,16	5,91	4,77

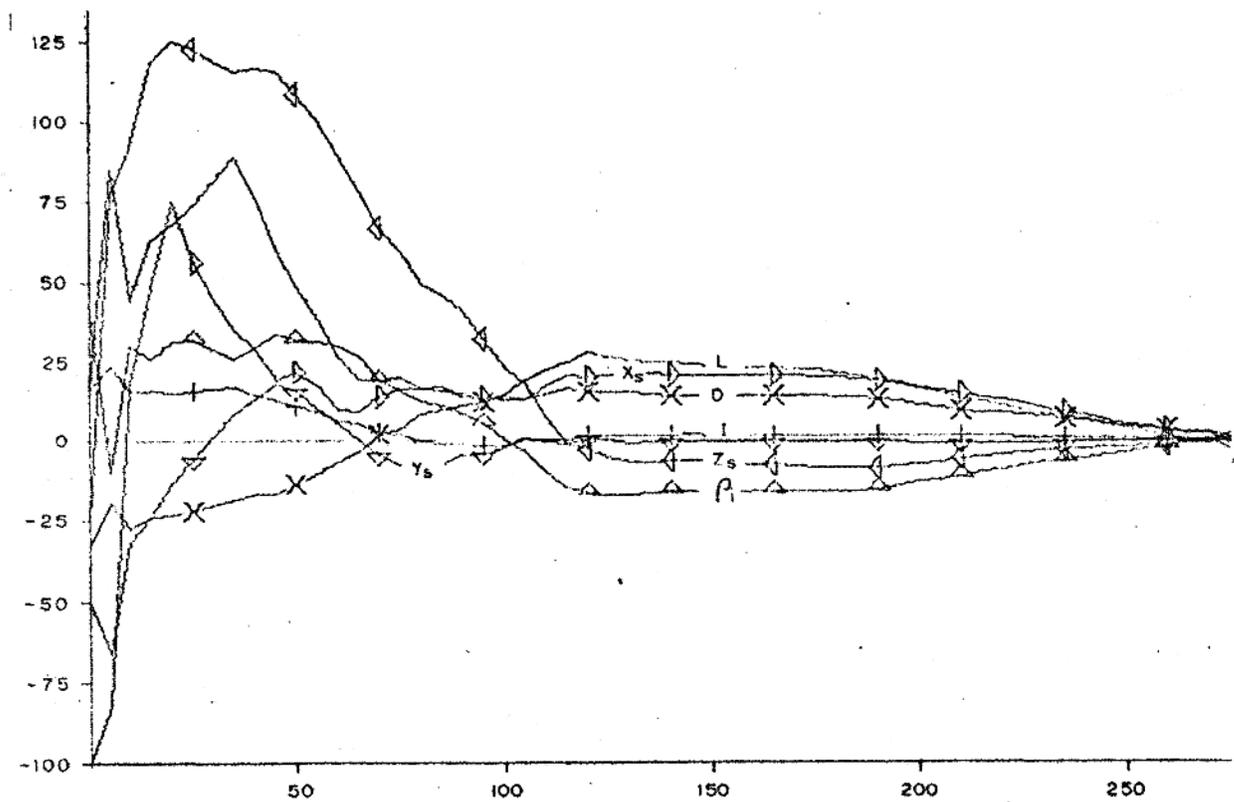


Figura 28 - Gráfico do processo de convergência do teste 3, Quadro 4.

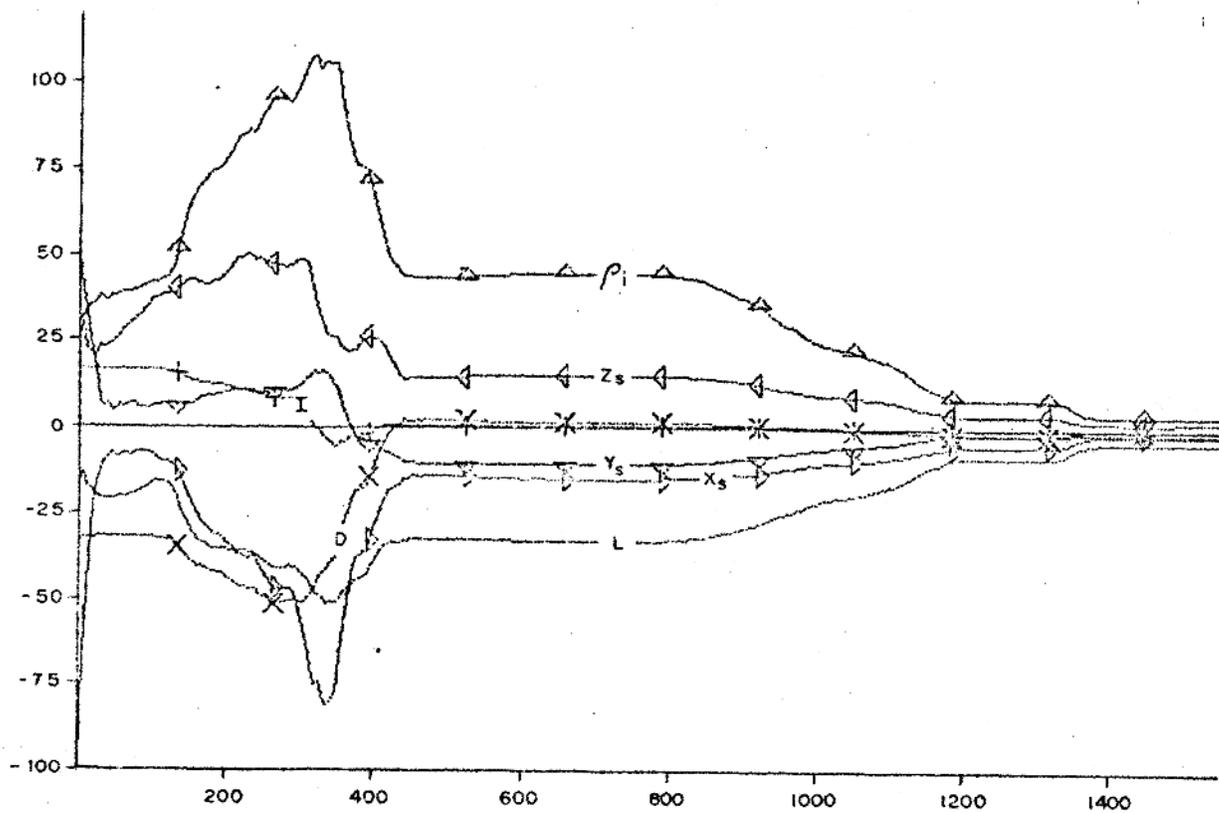


Figura 29 - Gráfico do processo de convergência do teste 4, Quadro 4.

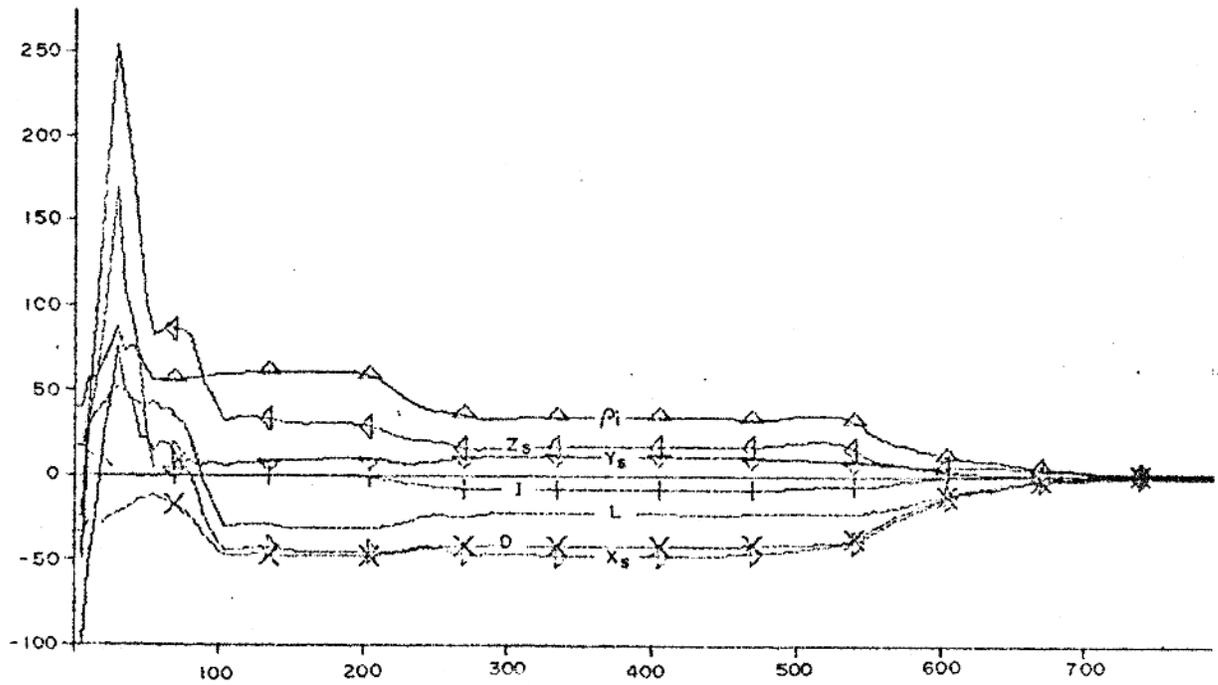


Figura 30 - Gráfico do processo de convergência do teste 5,Quadro 4.

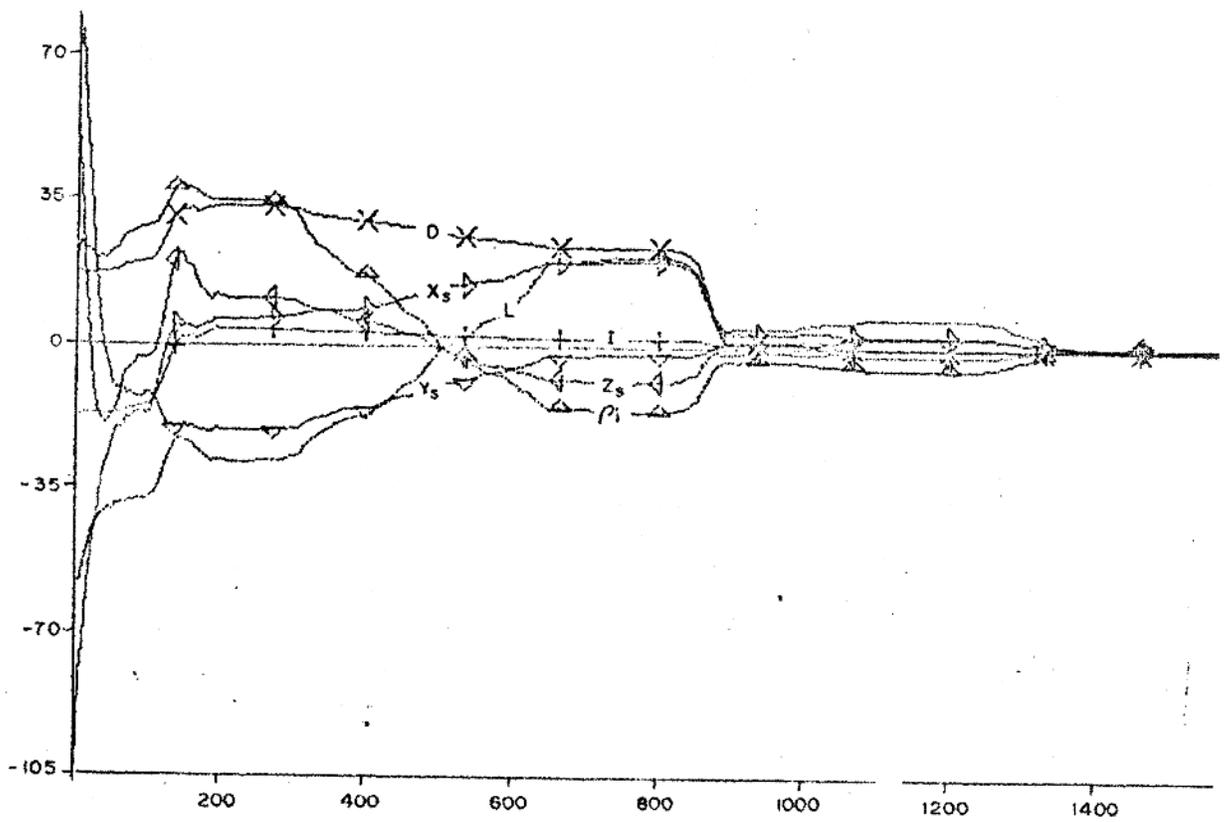


Figura 31 - Gráfico do processo de convergência do teste 6,Quadro 4.

dos, a título de ilustração, respectivamente nas figuras 28, 29, 30 e 31.

Uma vez verificado que a metodologia apresenta resultados excelentes quando são utilizados o potencial e as componentes exatas do campo elétrico o passo seguinte é verificar o comportamento dessa metodologia ao se empregar componentes obtidas por transformadas de Fourier.

Em princípio é facultativo tomar qualquer conjunto de sete funções entre as doze disponíveis, conforme equações (2.8) e (2.9). Entretanto essas funções apresentam certas características ao serem utilizadas no cálculo dos momentos, e que serão discutidas a seguir.

Em relação às componentes horizontais obtidas por transformadas de Fourier, observa-se, conforme foi mostrado na seção 1.2.2, que elas se ajustam bem às componentes exatas, com exceção dos pontos localizados nas bordas da área empregada para os cálculos, devido isto ao fenômeno de Gibbs.

O quadro 5 na página 71 mostra o erro relativo do cálculo numérico das integrais finitas dos momentos das componentes horizontais encontradas por transformadas de Fourier. As componentes foram geradas em uma área de 32x32. Dessa grade foram usados 31x31 pontos para o cálculo dos momentos segundo as expressões (2.10) e (2.11), em seguida as mesmas operações foram efetuadas para uma área menor onde se utilizou 25x25 pontos. Os resultados obtidos mostram que a diferença entre as integrais dos momentos que utilizam componentes originadas de transformadas e que utilizam componentes exatas é de 5% a 10% para a primeira malha. Entretanto essas diferenças são da ordem de 0,5% quando se reduz a área a 25x25 pontos. O fato de o padrão de erros ser aproximadamente simétrico em relação aos eixos coordenados com sequência de isolinhas de sinais alternados, Fig. 14 e 15, contribui de modo a não haver grandes diferenças entre os cálculos dos momentos executados com componentes horizontais exatas e aqueles efetuados com componentes obtidas por transfor

madras de Fourier, se forem eliminadas as bordas da área. Assim  $E_x$  e  $E_y$  geradas por processos de filtragem são válidas em 80 % da área utilizada para a obtenção dessas componentes. Portanto se a área de trabalho é reduzida de 20% é indiferente tomar com ponentes geradas analiticamente ou por transformadas.

Por sua vez os cálculos dos momentos efetuados com a componente vertical gerada por transformada de Fourier não se ajustaram aos valores exatos conforme se pode observar pelo quadro 6 na página 72 . Este mostra o erro relativo dos momen tos da componente vertical, obtidos por (2.10) e (2.11), para doublets localizadas em três posições diferentes. As componen tes foram geradas numa área de 32x32 pontos. Sem se deslocar a origem, os momentos foram calculados usando-se 31x31, 17x17 e 9x9 pontos da malha original.

Verifica-se que para essa componente é necessário uma redução de cerca de 2/3 nas dimensões da área usada para os cálculos dos momentos, de modo a tornar as diferenças da ordem de 1%, o que foi atingido com uma grade muito maior para as componentes horizontais. Para isto contribui o fato de os erros das componentes verticais obtidas por transformadas apresenta rem uma distribuição assimétrica e sem regiões alternadas de máximos e mínimos em relação aos valores exatos.

Para contornar o problema da utilização da componen te vertical, que na prática é necessariamente obtida por pro cessos de filtragem, foram usadas as integrais dos momentos do potencial.

Em vista das considerações acima foram utilizadas as

QUADRO 5: Erro relativo dos momentos das componentes horizontais geradas por transformadas de Fourier.

Parâmetros do doublet teste:  $I=60^\circ$ ,  $D=30^\circ$ ,  $\rho_i=10$ ,  $\ell=6$ .

$x_s, y_s, z_s$	DIMENSÕES DA ÁREA	MOMENTOS	INTEGRAIS NUMÉRICAS		ERRO RELATIVO
			COMP. EXATAS	COMP. TRANSFORM	
0,0,4	31x31	$S_x$	- 0,259	- 0,231	-10,73
		$S_{xx}$	-13,167	-12,438	- 5,54
		$S_{yx}$	- 0,165	- 0,148	-10,13
	25x25	$S_y$	- 0,148	- 0,132	-10,72
		$S_{xy}$	- 0,162	- 0,145	-10,12
		$S_{yy}$	-12,843	-12,440	- 3,14
-2,0,2	31x31	$S_x$	- 0,267	- 0,268	0,28
		$S_{xx}$	-10,757	-10,807	0,46
		$S_{yx}$	- 0,156	- 0,157	0,21
	25x25	$S_y$	- 0,153	- 0,154	0,27
		$S_{xy}$	- 0,152	- 0,153	0,21
		$S_{yy}$	-10,470	-10,497	0,25
-2,-2,4	31x31	$S_x$	- 0,365	- 0,327	-10,35
		$S_{xx}$	-15,406	-14,400	- 6,53
		$S_{yx}$	- 0,046	- 0,042	- 9,95
	25x25	$S_y$	- 0,173	- 0,155	-10,57
		$S_{xy}$	- 0,046	- 0,042	- 9,98
		$S_{yy}$	-16,164	-15,685	- 2,97
-2,-2,4	31x31	$S_x$	- 0,443	- 0,444	0,23
		$S_{xx}$	-13,229	-13,299	0,53
		$S_{yx}$	- 0,047	- 0,048	0,18
	25x25	$S_y$	- 0,190	- 0,191	0,26
		$S_{xy}$	- 0,048	- 0,049	0,17
		$S_{yy}$	-14,116	-14,148	0,23
-2,-2,4	31x31	$S_x$	- 0,33	- 0,30	-10,40
		$S_{xx}$	-11,76	-10,83	- 7,93
		$S_{yx}$	0,28	0,25	- 9,57
	25x25	$S_y$	- 0,22	- 0,20	-10,23
		$S_{xy}$	0,28	0,25	- 9,52
		$S_{yy}$	-11,75	-11,14	- 5,21
-2,-2,4	31x31	$S_x$	- 0,390	- 0,391	0,29
		$S_{xx}$	- 9,292	- 9,345	0,57
		$S_{yx}$	0,325	0,327	0,42
	25x25	$S_y$	- 0,276	- 0,277	0,33
		$S_{xy}$	0,325	0,326	0,45
		$S_{yy}$	- 9,285	- 9,316	0,33

QUADRO 6 : Erro relativo dos momentos da componente vertical gerada por transformadas de Fourier.

Parâmetros de doublet teste:  $I=60^\circ$ ,  $D=30^\circ$ ,  $\rho_i=10$ ,  $\ell=6$ .

$x_s, y_s, z_s$	DIMENSÕES DA ÁREA	MOMENTOS	INTEGRAIS NUMÉRICAS		ERRO RELATIVO
			$E_z$ EXATA	$E_z$ FILTRADA	
0,0,4	31x31	$S_z$	1 278,65	120,59	-90,6
		$S_{xz}$	- 4 249,71	- 8 045,40	89,3
		$S_{yz}$	- 2 465,10	- 4 663,79	89,2
	17x17	$S_z$	1 601,69	1 376,29	-14,1
		$S_{xz}$	- 1 327,43	- 1 413,69	6,5
		$S_{yz}$	- 775,47	824,98	6,4
	9x9	$S_z$	1 198,38	1 145,20	- 4,4
		$S_{xz}$	- 171,61	- 176,27	2,7
		$S_{yz}$	- 100,06	- 102,74	2,6
-2,0,2	31x31	$S_z$	1 387,27	91,14	-93,4
		$S_{xz}$	- 9 505,50	-14 954,36	57,3
		$S_{yz}$	- 3 266,13	- 5 781,63	77,0
	17x17	$S_z$	2 025,54	1 774,55	-12,4
		$S_{xz}$	- 7 182,21	- 7 319,44	1,9
		$S_{yz}$	- 1 344,42	- 1 403,15	4,3
	9x9	$S_z$	1 953,58	1 894,25	- 3,0
		$S_{xz}$	- 3 706,40	- 3 713,88	0,20
		$S_{yz}$	- 237,09	- 240,27	1,3
-2,2,4	31x31	$S_z$	1,22	0,05	-95,98
		$S_{xz}$	- 7,52	- 12,31	63,72
		$S_{yz}$	- 5,68	- 8,89	56,39
	17x17	$S_z$	1,43	1,21	-15,33
		$S_{xz}$	- 4,33	- 4,44	2,46
		$S_{yz}$	- 3,73	- 3,80	1,90
	9x9	$S_z$	0,87	0,81	- 6,87
		$S_{xz}$	- 1,18	- 1,19	0,18
		$S_{yz}$	- 1,103	- 1,102	- 0,09

seguintes funções nas operações de determinação dos parâmetros do doublet:  $F_v$ ,  $F_{xv}$ ,  $F_{yv}$ ,  $F_x$ ,  $F_{xx}$ ,  $F_{yx}$ ,  $F_y$ ,  $F_{xy}$ ,  $F_{yy}$ , respectivamente dadas pelas equações: (A,9), (A,13), (A,15), (A,19), (A,23), (A,27), (A,31), (A,34), (A,36).

O quadro 7 mostra os valores obtidos para os parâmetros do modelo quando são tomadas as componentes horizontais geradas por transformadas de Fourier. As observações feitas anteriormente para o quadro 4 são confirmadas: a redução da área utilizada para os cálculos não influenciou muito nos resultados; novamente os parâmetros que mais se afastaram dos valores exatos foram  $\rho$  e  $l$  embora o produto  $\rho$  e  $l$  se mantivesse aproximadamente o mesmo em todos os testes. O quinto teste foi efetuado utilizando-se apenas oito funções,  $F_V$  dada pela expressão (A.9) do apêndice A foi suprimida. Os demais utilizaram nove funções.

Comparando-se o terceiro e o sexto testes do quadro 4 com, respectivamente, os testes 1 e 4 do quadro 7 verifica-se que embora a precisão dos resultados quando são utilizadas transformadas de Fourier seja inferior à obtida se são tomadas as componentes exatas, a diferença entre elas não chega a ser significativa.

Novamente ocorreu que em alguns testes a convergência do sistema se fazia demorar tendo sido efetuadas cerca de 1500 iterações sem que os valores dos parâmetros mostrassem tendência clara de se aproximar dos valores exatos. Como anteriormente em tal situação foi suspenso o processo e iniciado outro teste com novas aproximações iniciais.

Da mesma forma que para os testes com componentes exatas foram traçados gráficos que indicam o curso da resolução do sistema de equações. Os gráficos das figuras 32 e 33 são relativos respectivamente aos testes 3 e 5 do quadro 7.

QUADRO 7 : Parâmetros obtidos para o doublet sendo utilizadas as componentes do campo elétrico geradas por transformadas de Fourier.

TESTE	DIMENSÕES DA MALHA	NÚMERO DE ITERAÇÕES	PARÂMETROS DO DOUBLET	I	D	$x_s$	$y_s$	$z_s$	$\rho_1$	$\ell$	$P_T$
			VALORES EXATOS	60°	30°	-2	-2	4	10	6	4,77
1	25x25	507	Aproximações	70	20	0	-1	3	14	7	4,73
			Resultados	60,17	29,96	-1,85	-1,92	4,26	11,58	5,13	
2	25x25	1647	Aproximações	70	20	1	-1	3	8	7	4,78
			Resultados	60,08	29,90	-1,99	-2,00	4,01	10,06	5,97	
3	21x21	1120	Aproximações	70	20	0	-1	3	8	7	4,77
			Resultados	60,00	39,86	-2,01	-2,01	3,98	9,89	6,07	
4	21x21	2500	Aproximações	50	35	0	-3,5	6	12	2	4,67
			Resultados	60,02	30,02	-1,85	-1,90	4,30	11,95	4,92	
5	25x25	2500	Aproximações	70	20	1	-1	3	8	7	4,85
			Resultados	60,18	29,78	-2,02	-2,02	3,99	9,80	6,22	
VALORES MÉDIOS				60,09	29,90	1,94	1,97	4,11	10,69	5,66	4,76

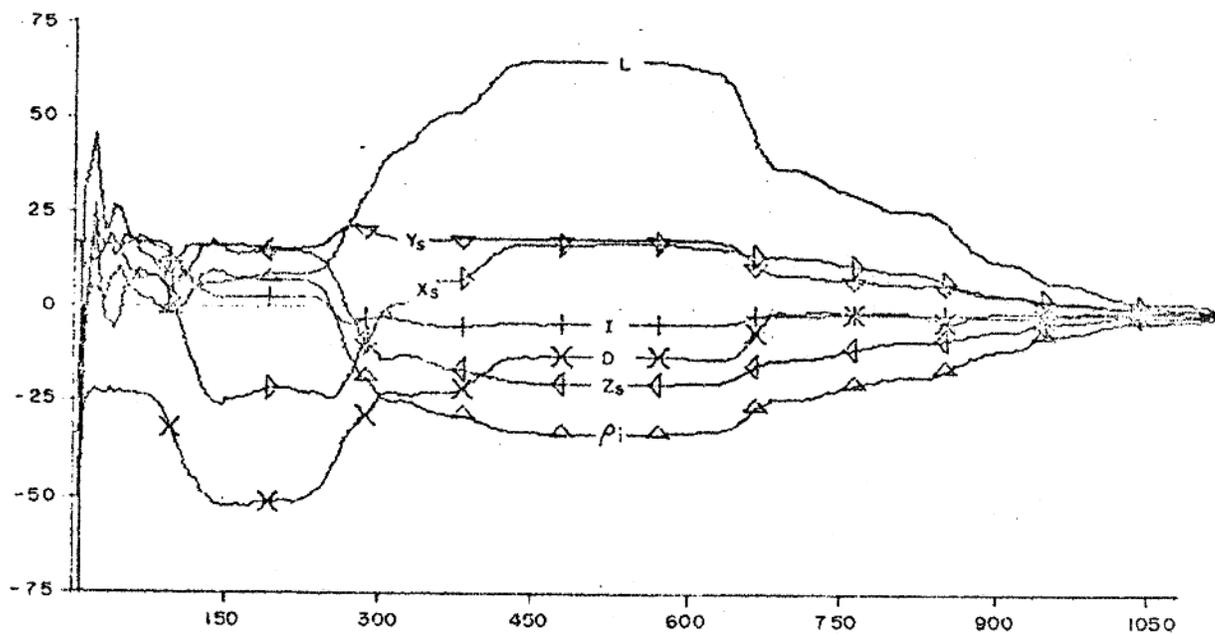


Figura 32 - Gráfico do processo de convergência do teste 3,Quadro 7.

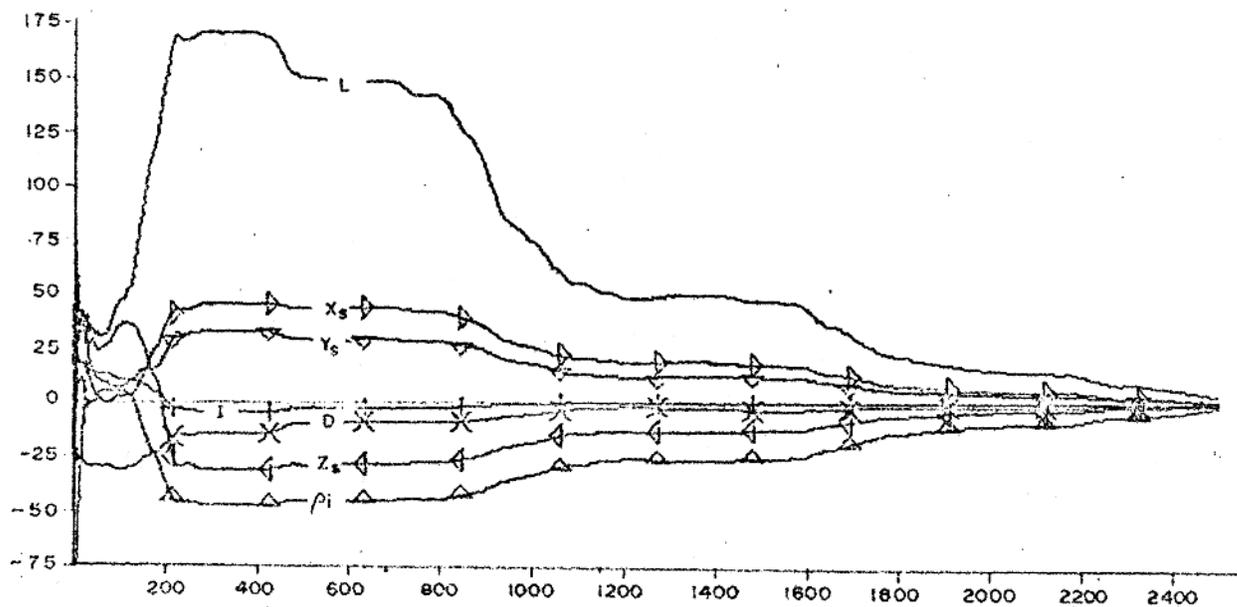


Figura 33 - Gráfico do processo de convergência do teste 5,Quadro 7.

Na última linha do quadro 7 são apresentadas as médias aritméticas para cada parâmetro, calculadas a partir dos resultados obtidos nos diferentes testes. Os valores encontrados para essa média apresentam erro menor que 5% podendo ser usados como uma solução adequada à determinação dos parâmetros do corpo causador da anomalia.

### 2.2.3. Aplicação ao Modelo Linha de Doublet.

Muitas vezes o corpo causador da anomalia tem extensão lateral apreciável e não se ajusta à representação pelo modelo doublet. Quando uma das dimensões horizontais é desprezível em comparação com as demais, o corpo pode ser geometricamente esquematizado por uma placa. Nesse caso em termos de potencial espontâneo é mais adequada a utilização do modelo linha de doublet. As expressões para este modelo são deduzidas no apêndice B.

A linha de doublet discutida nesse apêndice foi construída paralelamente a um dos eixos coordenados. Assim conhecido o strike da linha, que corresponde ao da placa, restam, então, sete parâmetros para determinar completamente este modelo. Esses parâmetros são: ângulo de mergulho  $I$ , extensão horizontal da linha  $2E$ , coordenadas do ponto médio da linha de polos negativos:  $x_m$ ,  $y_s$ ,  $z_s$ , o produto  $\rho_i$  e a distância entre os polos positivos e negativos:  $l$ .

Sendo sete as incógnitas serão necessárias pelo menos sete equações para ser possível resolver o sistema. Nos

testes foram empregadas oito a nove funções.

Mais uma vez foi necessário gerar anomalias a partir de valores atribuídos aos parâmetros do modelo. As integrais dos momentos do potencial e das componentes do campo elétrico calculados ponto a ponto serviram como dados de entrada para a determinação dos parâmetros da linha de doublet, e desse modo a precisão dos resultados pode ser avaliada.

Da mesma forma que no item anterior a metodologia foi primeiramente testada usando-se as componentes exatas. Os resultados estão apresentados no quadro 8 da página 79. Em todos os testes usou-se 31x31 pontos para as dimensões da malha.

Na resolução do sistema de equações manteve-se respectivamente  $10^{-3}$  e  $10^{-6}$  para a tolerância da função e a tolerância do poliedro. Os coeficientes de reflexão, expansão e contração do poliedro assumiram os mesmos valores de 1, 2 e 0,5 usados anteriormente. A função a ser minimizada foi também ponderada pelo fator  $W_i$  calculado segundo (2.20), à constante  $C$  foi atribuído o valor 10. Os testes 1, 2 e 3 executados com as seguintes funções:  $F_v$ ,  $F_{xv}$ ,  $F_{yv}$ ,  $F_x$ ,  $F_{xx}$ ,  $F_{yx}$ ,  $F_y$ ,  $F_{xy}$ ,  $F_{yy}$ , respectivamente dadas pelas equações (B.19), (B.24), (B.25), (B.28), (B.31), (B.33), (B.35), (B.37), (B.40), deduzidas no apêndice B. Para o teste 4 não foi utilizada  $F_v$ .

Tendo em vista que as funções empregadas na linha de doublet são mais extensas, exigindo um número maior de operações que o modelo doublet, dispendeu-se mais tempo nos cálculos para a resolução do sistema de equações. No computador IBM 1130,

onde foram executados os programas, levou-se cerca de duas a quatro horas, o que traduzido em número de iterações corresponde a aproximadamente 8 iterações/segundo.

Os resultados que apresentaram menor precisão foram os obtidos para os parâmetros  $\rho_i$  e  $l$ , como ocorreu com o doublet, e ainda  $E$  que apresenta a metade da dimensão da linha de doublet. Entretanto a polarização, para o modelo ora discutido e dada pela expressão abaixo, manteve-se aproximadamente constante.

$$P = \frac{\rho_i}{4\pi} l \cdot 2E$$

Os valores médios para cada parâmetro, calculados a partir dos resultados de cada teste estão indicados na última linha do quadro. A observação dos mesmos mostra que as diferenças entre as médias e os valores exatos são no máximo de 7,5%.

Os processos de convergência dos testes 2 e 3 estão respectivamente representados nos gráficos das figuras 34 e 35.

QUADRO 8 : Parâmetros obtidos para a linha de doublet sendo utilizadas as componentes exatas do campo elétrico.

TESTE	NÚMERO DE ITERAÇÕES	PARÂMETROS DO MODELO	I	E	X <sub>M</sub>	Y <sub>s</sub>	Z <sub>s</sub>	p <sub>1</sub>	ℓ	P <sub>T</sub>
1	662	VALORES EXATOS	60°	3	1	2	4	10	4	19,10
		Aproximações	50	4	-1	3	5	8	3	19,07
2	992	Resultados	60,06	2,91	0,99	2,05	4,15	11,13	3,70	19,08
		Aproximações	80	3,5	2	0	6	11	6	
3	992	Resultados	59,94	3,12	1,00	1,96	3,91	9,15	4,20	19,04
		Aproximações	50	6	1	3	6	8	3	
4	797	Resultados	60,00	3,02	1,00	2,00	4,01	9,93	3,99	19,16
		Aproximações	50	6	1	3	6	8	3	
VALORES MÉDIOS			60,04	2,94	1,00	2,03	4,09	10,75	3,83	19,26

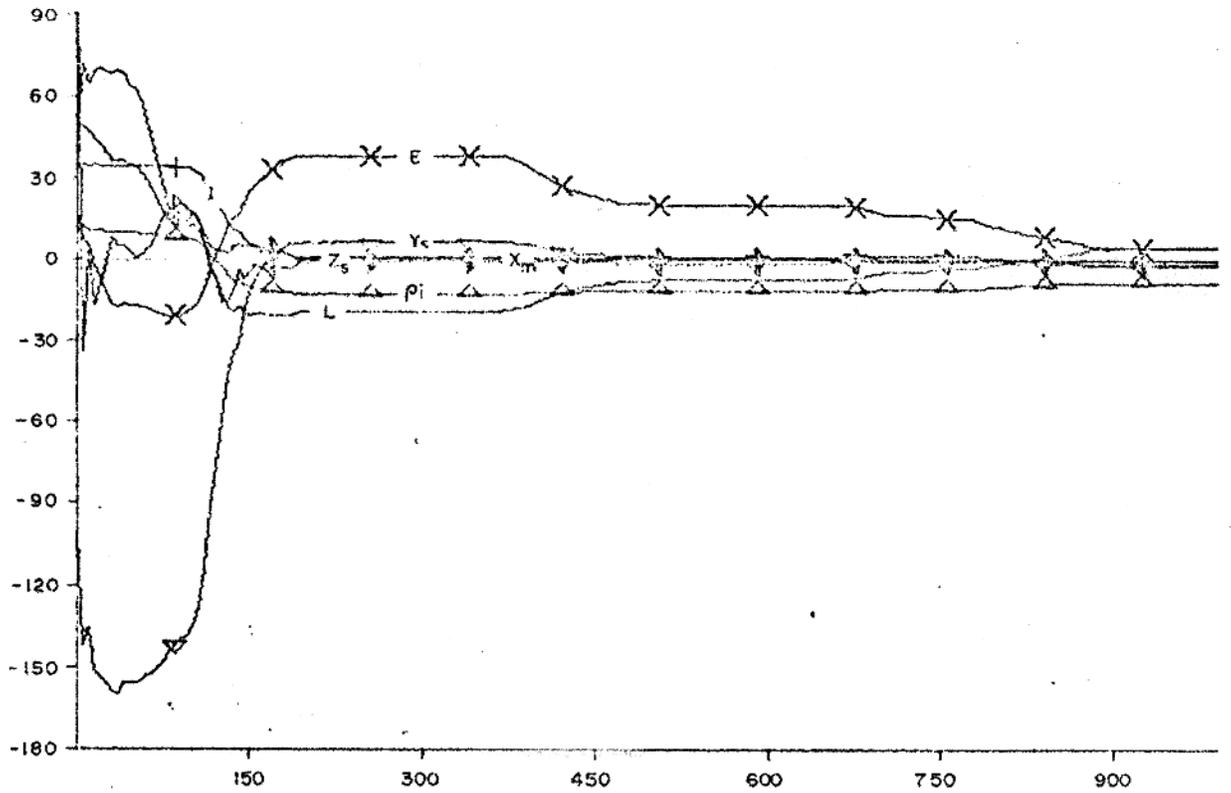


Figura 34 - Gráfico do processo de convergência do teste 2,Quadro 8.

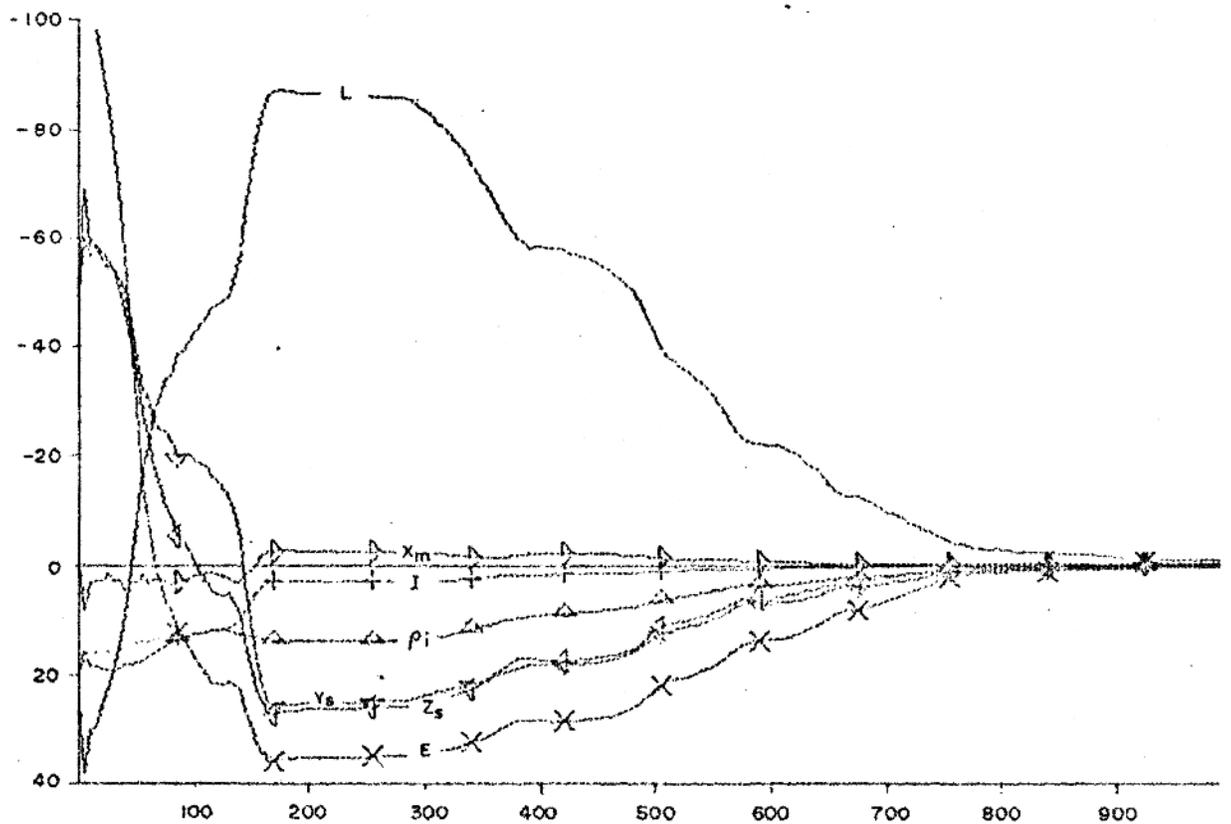


Figura 35 - Gráfico do processo de convergência do teste 3,Quadro 8.

O quadro 9 a seguir apresenta alguns dos resultados encontrados quando são utilizadas as componentes determinadas por transformada de Fourier. Em todos os testes os momentos foram obtidos em uma grade de 25x25 pontos tendo sido as componentes geradas em uma área de 32x32 pontos.

Novamente não foram usadas as funções que contêm  $E_z$ . Os testes 1 e 2 foram executados com as nove funções restantes enquanto que para o terceiro e o quarto teste empregou-se apenas oito,  $F_y$  foi suprimida. Com exceção das aproximações iniciais os parâmetros relativos à execução do sistema: tolerâncias, coeficientes de reflexão, expansão e contração, foram os mesmos das situações anteriores.

De acordo com os resultados os parâmetros de posição do modelo:  $I$ ,  $x_s$ ,  $y_s$ ,  $z_s$  em geral foram obtidos com erros menores que 5%. Os parâmetros que determinam a intensidade do vetor polarização:  $\rho_i$ ,  $l$  e  $E$  apresentaram comportamento mais instável em relação aos erros que variaram de 0,2% a cerca de 30%.

A linha inferior do quadro 9 apresenta os valores médios dos resultados obtidos para cada parâmetro nos diversos testes executados. Observa-se que as médias apresentam erros menores que 4%, constituindo uma solução satisfatória para o sistema de equações.

Os processos de convergência dos testes 1 e 2 estão representados nas figuras 36 e 37. É necessário acrescentar ainda que foi mais difícil a convergência no caso do modelo tratado nesta seção. O número de testes em que  $\sigma$ , parâmetro

QUADRO 9 : Parâmetros para a linha de doublet sendo utilizadas as componentes do campo elétrico geradas por transformada de Fourier.

TESTE	NÚMERO DE ITERAÇÕES	PARÂMETROS DO MODELO	I	E	$x_M$	$y_s$	$z_s$	$\rho_i$	$\ell$	PT
1	2360	VALORES EXATOS	60°	3	1	2	4	10	4	19,00
		Aproximações	50	4	-1	3	5	8	3	18,95
2	650	Resultados	60,15	3,15	1,00	2,00	4,00	9,70	3,90	
		Aproximações	70	2	1,5	1,5	3	14	5	19,01
3	1625	Resultados	60,17	3,12	1,00	2,03	4,07	10,14	3,78	
		Aproximações	70	5	0	4,5	3	6	5	19,01
4	2500	Resultados	60,54	3,09	0,99	2,18	4,46	13,67	2,83	
		Aproximações	70	2	1,5	1,5	3	14	5	19,12
VALORES MÉDIOS			60,08	3,10	0,99	2,01	4,04	10,36	3,86	19,02

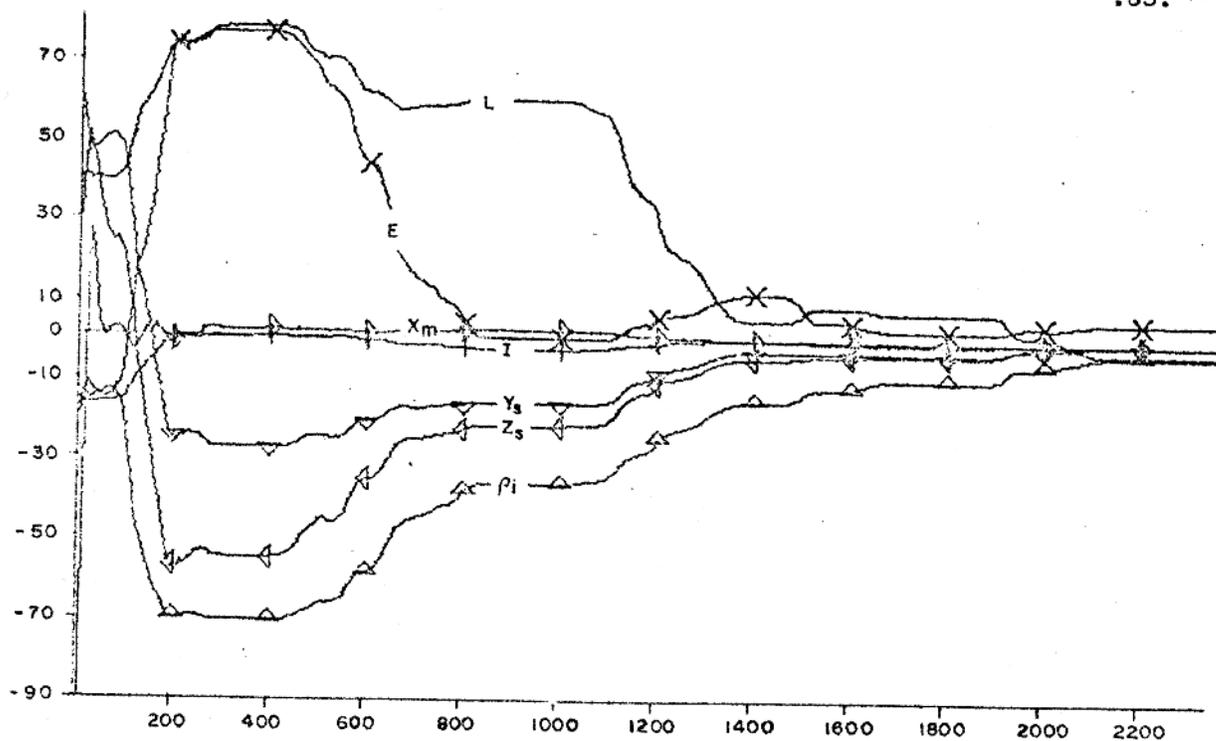


Figura 36 - Gráfico do processo de convergência do teste 1, Quadro 9.

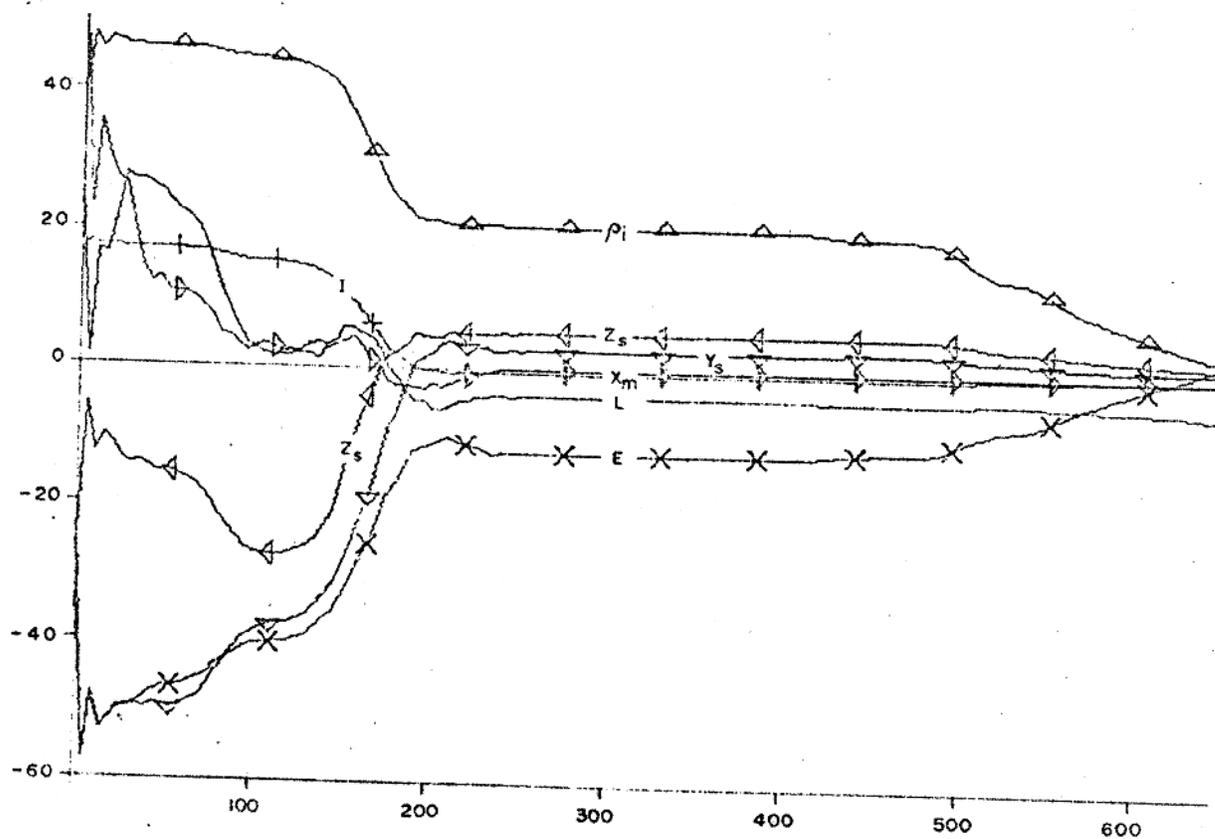


Figura 37 - Gráfico do processo de convergência do teste 2, Quadro 9.

de decisão expresso por (2.19), não atingiu, dentro do número de iterações estipulado, o valor de  $10^{-3}$  previamente estabelecido, foi maior que para o modelo doublet. Todavia apesar dessa dificuldade os resultados obtidos para a linha de doublet são muito bons, tanto trabalhando-se com as componentes exatas quanto com as componentes geradas por transformada de Fourier.

### 2.3. Conclusões

Duas metodologias foram apresentadas neste trabalho para a interpretação quantitativa de anomalias de potencial es pontâneo. A primeira utiliza as integrais infinitas dos momentos das componentes do campo elétrico de modo a obter os parâmetros do vetor de polarização do corpo causador da anomalia. A grande vantagem do método é prescindir de modelo de interpretação. Entretanto os resultados confiáveis limitam-se a situações particulares em que a área de trabalho tem dimensões suficientemente grandes para que a anomalia seja desprezível além das bor das e, ainda, que o centro da área, ou seja a origem do sistema de coordenadas, esteja localizado sobre o corpo causador da ano malia.

Por outro lado o emprego de integrais finitas dos momentos do potencial e das componentes, embora sujeito a modelos de interpretação, no que se refere à forma do corpo, apresentou resultados muito bons quando se fez a escolha adequada da mesma. Por meio desta segunda metodologia é possível determinar-se di mensões, localização e inclinação do corpo que produz a anomalia.

A redução nas dimensões da área onde se localiza a anomalia pouco influenciou nas respostas obtidas pela resolução do sistema de equações e os parâmetros foram determinados com a proximadamente o mesmo grau de precisão para malhas de diferentes tamanhos. Do ponto de vista prático isto é vantajoso por permitir a interpretação de anomalias de SP em áreas pequenas.

De modo geral os valores obtidos para as variáveis do modelo apresentaram pequena diferença dos valores exatos, in

dependentemente de terem sido usadas as componentes geradas analiticamente ou as obtidas por transformadas de Fourier. Este é um resultado importante pois na realidade se dispõe apenas dos dados do potencial, sendo necessário, portanto, a obtenção das componentes do campo elétrico.

No caso prático a aplicação da metodologia que emprega integrais finitas deve seguir as etapas indicadas. A distribuição de potencial é obtida pelos dados de campo e, posteriormente, em uma grade regular, são calculadas as componentes horizontais do campo elétrico por processos de diferença finitas ou por transformadas de Fourier. De posse do potencial e das componentes horizontais são calculadas numericamente as integrais dos momentos dessas funções. Estes resultados, utilizados no programa de resolução do sistema de equações, servem de padrão de comparação para as funções construídas com os parâmetros do corpo causador da anomalia, as quais dependem do modelo empregado. Quando os valores dessas funções estão suficientemente próximos das integrais calculadas numericamente, admite-se que foi atingida a solução procurada. As aproximações iniciais é conveniente atribuir valores que se acredite próximos dos valores dos parâmetros do corpo de modo a facilitar a convergência do sistema. Por fim é aconselhável se tomar um certo número de aproximações iniciais e se aceitar como solução a média dos resultados encontrados para cada parâmetro, diminuindo desse modo as flutuações em torno dos valores exatos.

A qualidade dos resultados obtidos juntamente com o processamento automático do método, após ter sido escolhido o modelo de forma adequada, faz do emprego das integrais finitas

dos momentos de potencial e das componentes do campo elétrico produzido por polarização espontânea, um método fácil e eficiente na interpretação de anomalias de SP, fornecendo maior número de informações e de forma mais precisa que os demais métodos empregados até então.

FORMULÁRIO DE INTEGRAIS

$$\int \frac{1}{R} du = \ln(R + u) \quad (\text{F.1})$$

$$\int \frac{1}{R^3} du = \frac{u}{(v^2 + w^2) R} \quad (\text{F.2})$$

$$\int \frac{u}{R^3} du = -\frac{1}{R} \quad (\text{F.3})$$

$$\iint \frac{1}{R} du dv = v \ln(R+u) + u \ln(R+v) - w \operatorname{arctg} \frac{u \cdot v}{w R} \quad (\text{F.4})$$

$$\iint \frac{u}{R} du dv = \frac{1}{2} \{ vR + (u^2 + w^2) \cdot \ln(R+v) \} \quad (\text{F.5})$$

$$\iint \frac{1}{R^3} du dv = \frac{1}{w} \operatorname{arctg} \frac{uv}{wR} \quad (\text{F.6})$$

$$\iint \frac{u}{R^3} du dv = -\ln(R+v) \quad (\text{F.7})$$

$$\iint \frac{u^2}{R^3} du dv = v \ln(R+u) - w \operatorname{arctg} \frac{uv}{wR} \quad (\text{F.8})$$

$$\iint \frac{u \cdot v}{R^3} du dv = -R \quad (\text{F.9})$$

$$\iint \ln(R+u) \, dudv = uv \ln(R+u) + \frac{u^2-w^2}{2} \ln(R+v) + uw \operatorname{arctg} \frac{v}{w} - uw \operatorname{arctg} \frac{uv}{wR} - uv - \frac{vR}{2} \quad (\text{F.10})$$

$$\iint u \cdot \ln(R+u) \, dudv = \frac{1}{4} \left\{ v(2u^2 + \frac{v^2}{3} + w^3) \cdot \ln(R+u) + \frac{4u^3}{3} \cdot \ln(R+v) + 2u^2w \operatorname{arctg} \frac{v}{w} - 2w(u^2 + \frac{w^2}{3}) \operatorname{arctg} \frac{uv}{wR} - 2u^2v - \frac{uvR}{3} \right\} \quad (\text{F.11})$$

$$\iint v \cdot \ln(R+u) \, dudv = \frac{u(v^2+w^2)}{2} \ln(R+u) - \frac{R^3}{3} + \frac{Ru^2}{2} - \frac{uv^2}{4} \quad (\text{F.12})$$

$$\iint \frac{uv}{(v^2+w^2)R} \, dudv = \frac{u}{2} \ln \frac{R-u}{R+u} + R \quad (\text{F.13})$$

$$\iint \frac{u^2v}{(v^2+w^2)R} \, dudv = \frac{1}{4} \left\{ u^2 \ln(R-u) - R^2 \ln(R+u) + uR \right\} \quad (\text{F.14})$$

$$\iint \frac{uv^2}{(v^2+w^2)R} \, dudv = \frac{u^2-w^2}{2} \cdot \ln(R+v) + w^2 \ln \sqrt{u^2+w^2} - uw \operatorname{arctg} \frac{uv}{wR} + \frac{vR}{2} \quad (\text{F.15})$$

AGRADECIMENTOS

Gostaria de expressar minha gratidão ao Dr. José Seixas Lourenço pela orientação deste trabalho, bem como aos outros membros da Comissão de Tese, Dr. Augusto Cesar Bittencourt Pires e Dr. Herberto Gomes Tocantins Maltez.

Agradeço ainda ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico e à Financiadora de Estudos e Projetos.

APENDICE A : Integrais Finitas das Anomalias de Potencial Es pontâneo. Modelo Doublet.

Seja o doublet formado por uma fonte pontual de corrente  $i$ , polo positivo, situado no ponto  $F$  e um sumidouro  $-i$ , polo negativo localizado em  $S$ , de modo tal que  $F$  e  $S$  pertencem ao meio de resistividade  $\rho$ , conforme a fig.A1. Nesse caso são válidas as expressões.

$$\left. \begin{aligned} x_f &= x_s + \ell \cdot \cos l \cdot \cos D. \\ y_f &= y_s + \ell \cdot \cos l \cdot \sin D. \\ z_f &= z_s + \ell \cdot \sin l. \end{aligned} \right\} \quad (A.1)$$

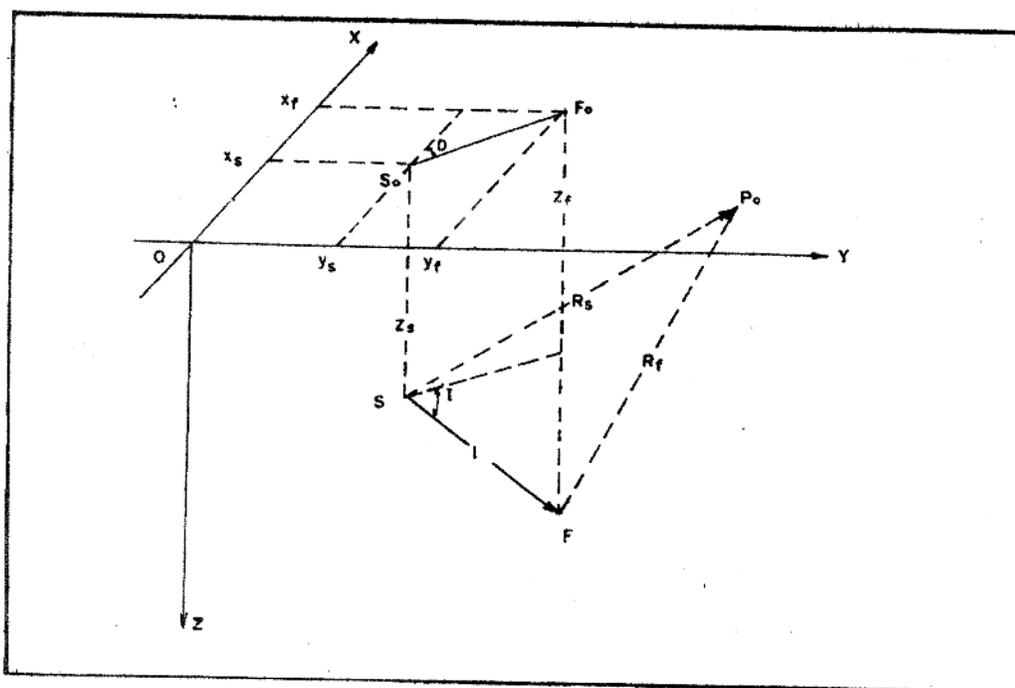


Fig. A1 - Esquema de um doublet.

Os pontos  $S_0$  e  $F_0$  representam respectivamente as projeções de  $S$  e  $F$  no plano  $XOY$  que corresponde à superfície do solo. Os vetores  $\vec{R}_s$  e  $\vec{R}_f$  representam as distâncias  $\overline{PS}$  e  $\overline{PF}$ , onde  $P$  é o ponto de observação de coordenadas  $(x, y, z)$

$$|\vec{R}_f| = \left( (x - x_f)^2 + (y - y_f)^2 + (z - z_f)^2 \right)^{1/2} = R_f$$

$$|\vec{R}_s| = \left( (x - x_s)^2 + (y - y_s)^2 + (z - z_s)^2 \right)^{1/2} = R_s$$

De modo a condensar as equações apresentadas a seguir, serão usadas as notações abaixo:

$$\left. \begin{aligned} u_f &= x - x_f ; v_f = y - y_f ; w_f = z - z_f \\ u_s &= x - x_s ; v_s = y - y_s ; w_s = z - z_s \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.2})$$

portanto

$$\left. \begin{aligned} R_f &= (u_f^2 + v_f^2 + w_f^2)^{1/2} \\ R_s &= (u_s^2 + v_s^2 + w_s^2)^{1/2} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.3})$$

A expressão do potencial será dada por (1,2,12)

$$v(\vec{r}) = \frac{\rho i}{4\pi} \left( \frac{1}{R_f} - \frac{1}{R_s} \right) \quad (\text{A.4})$$

e as componentes do campo elétrico por

$$\left. \begin{aligned} E_x(\vec{r}) &= \frac{\rho i}{4\pi} \left( \frac{u_f}{R_f^3} - \frac{u_s}{R_s^3} \right) \\ E_y(\vec{r}) &= \frac{\rho i}{4\pi} \left( \frac{v_f}{R_f^3} - \frac{v_s}{R_s^3} \right) \\ E_z(\vec{r}) &= \frac{\rho i}{4\pi} \left( \frac{w_f}{R_f^3} - \frac{w_s}{R_s^3} \right) \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.5})$$

Seja a área de trabalho de dimensões  $2A \times 2B$

#### Integrais Finitas do Potencial e dos Momentos do Potencial

$$F_V = \int_{-A}^A \int_{-B}^B V \, dx dy = \frac{\rho i}{4\pi} \int_{-A}^A \int_{-B}^B \left( \frac{1}{R_f} - \frac{1}{R_s} \right) dx dy \quad (\text{A.6})$$

por uma mudança na variável de integração em que são utilizadas as expressões de A.2

$$F_V = \frac{\rho i}{4\pi} \left( \int_{u_1}^{u_2} \int_{v_1}^{v_2} \frac{1}{R_f} du_f \cdot dv_f - \int_{u_3}^{u_4} \int_{v_3}^{v_4} \frac{1}{R_s} du_s dv_s \right) \quad (\text{A.7})$$

onde

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= - (A + x_f); & u_2 &= A - x_f \\ u_3 &= - (A + x_s); & u_4 &= A - x_s \\ v_1 &= - (B + y_f); & v_2 &= B - y_f \\ v_3 &= - (B + y_s); & v_4 &= B - y_s \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.8})$$

são os novos limites de integração. As integrais de (A.7), respectivamente denominadas  $T_{v_1}$  e  $T_{v_2}$  são resolvidas segundo (F.4) do formulário; assim:

$$F_v = \frac{\rho i}{4\pi} (T_{v_1} - T_{v_2}) \quad (\text{A.9})$$

onde:

$$T_{v_1} = \left\{ v_f \cdot \ln(R_f + u_f) + u_f \cdot \ln(R_f + v_f) - w_f \cdot \text{arctg} \frac{u_f \cdot v_f}{w_f \cdot R_f} \right\} \Bigg|_{u_1}^{u_2} \Bigg|_{v_1}^{v_2}$$

$$T_{v_2} = \left\{ v_s \cdot \ln(R_s + u_s) + u_s \cdot \ln(R_s + v_s) - w_s \cdot \text{arctg} \frac{u_s \cdot v_s}{w_s \cdot R_s} \right\} \Bigg|_{u_3}^{u_4} \Bigg|_{v_3}^{v_4} \quad (\text{A.10})$$

$$F_{xv} = \int_{-A}^A \int_{-B}^B x V \, dx dy = \frac{\rho i}{4\pi} \left\{ \int_{-A}^A \int_{-B}^B \left( \frac{x}{R_f} - \frac{x}{R_s} \right) dx dy \right\} \quad (\text{A.11})$$

usando-se (A.2) para uma mudança adequada na variável de integração, escreve-se:

$$\begin{aligned} F_{xv} = \frac{\rho i}{4\pi} \left\{ \int_{u_1}^{u_2} \int_{v_1}^{v_2} \frac{u_f}{R_f} du_f \cdot dv_f + x_f \cdot \int_{u_1}^{u_2} \int_{v_1}^{v_2} \frac{1}{R_f} du_f \cdot dv_f - \right. \\ \left. - \int_{u_3}^{u_4} \int_{v_3}^{v_4} \frac{u_s}{R_s} du_s \cdot dv_s - x_s \int_{u_3}^{u_4} \int_{v_3}^{v_4} \frac{1}{R_s} du_s \cdot dv_s \right\} \quad (\text{A.12}) \end{aligned}$$

a primeira e a terceira integral de (A.12) respectivamente  $T_{xv_1}$  e  $T_{xv_2}$  são resolvidas de acordo com (F.5) do formulário, as demais já foram deduzidas, assim:

$$F_{xv} = \frac{\rho i}{4\pi} ( T_{xv_1} - T_{xv_2} + x_f \cdot T_{v_1} - x_s \cdot T_{v_2} ) \quad (A.13)$$

onde  $T_{v_1}$  e  $T_{v_2}$  são dadas em (A.10) e:

$$\left. \begin{aligned} T_{xv_1} &= \frac{1}{2} \left\{ v_f \cdot R_f + (u_f^2 + w_f^2) \cdot \ln(R_f + v_f) \right\} \left\{ \begin{array}{l} u_2 \\ u_1 \end{array} \middle| \begin{array}{l} v_2 \\ v_1 \end{array} \right\} \\ T_{xv_2} &= \frac{1}{2} \left\{ v_s \cdot R_s + (u_s^2 + w_s^2) \cdot \ln(R_s + v_s) \right\} \left\{ \begin{array}{l} u_4 \\ u_3 \end{array} \middle| \begin{array}{l} v_4 \\ v_3 \end{array} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (A.14)$$

Analogamente se obtém que

$$F_{yv} = \int_{-A}^A \int_{-B}^B yV \, dx dy = \frac{\rho i}{4\pi} \left\{ T_{yv_1} - T_{yv_2} + y_f \cdot T_{v_1} - y_s \cdot T_{v_2} \right\} \quad (A.15)$$

onde

$$\left. \begin{aligned} T_{yv_1} &= \frac{1}{2} \left\{ u_f \cdot R_f + (v_f^2 + w_f^2) \cdot \ln(R_f + u_f) \right\} \left\{ \begin{array}{l} u_2 \\ u_1 \end{array} \middle| \begin{array}{l} v_2 \\ v_1 \end{array} \right\} \\ T_{yv_2} &= \frac{1}{2} \left\{ u_s \cdot R_s + (v_s^2 + w_s^2) \cdot \ln(R_s + u_s) \right\} \left\{ \begin{array}{l} u_4 \\ u_3 \end{array} \middle| \begin{array}{l} v_4 \\ v_3 \end{array} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (A.16)$$

Integrais da Componente  $E_x$  e dos Momentos de  $E_y$

$$F_x = \int_{-A}^A \int_{-B}^B E_x \, dx dy = \frac{\rho i}{4\pi} \int_{-A}^A \int_{-B}^B \left( \frac{u_f}{R_f^3} - \frac{u_s}{R_s^3} \right) \, dx dy \quad (A.17)$$

usando (A.2) obtém-se

$$F_x = \frac{\rho i}{4\pi} \left\{ \int_{u_1}^{u_2} \int_{v_1}^{v_2} \frac{u_f}{R_f^3} \, du_f \cdot dv_f - \int_{u_3}^{u_4} \int_{v_3}^{v_4} \frac{u_s}{R_s^3} \, du_s \cdot dv_s \right\} \quad (A.18)$$

denominando as integrais do 2º membro de (A.18) respectivamente de  $T_{x_1}$  e  $T_{x_2}$ , e verificando que são resolvidas por (F.7) do formulário, tem-se

$$F_x = \frac{\rho i}{4\pi} ( T_{x_1} - T_{x_2} ) \quad (A.19)$$

$$\left. \begin{aligned} T_{x_1} &= - \left\{ \ln (R_f + v_f) \right\} \left| \begin{array}{l} u_2 \\ u_1 \end{array} \right| \left. \begin{array}{l} v_2 \\ v_1 \end{array} \right\} \\ T_{x_2} &= - \left\{ \ln (R_s + v_s) \right\} \left| \begin{array}{l} u_4 \\ u_3 \end{array} \right| \left. \begin{array}{l} v_4 \\ v_3 \end{array} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.20})$$

$$F_{xx} = \int_{-A}^A \int_{-B}^B x E_x dx dy = \frac{\rho i}{4\pi} \int_{-A}^A \int_{-B}^B \left( \frac{x \cdot u_f}{R_f^3} - \frac{x \cdot u_s}{R_s^3} \right) dx dy \quad (\text{A.21})$$

usando-se (A.2) têm-se

$$\begin{aligned} F_{xx} &= \frac{\rho i}{4\pi} \left\{ \int_{u_1}^{u_2} \int_{v_1}^{v_2} \frac{u_f^2}{R_f^3} du_f \cdot dv_f + x_f \int_{u_1}^{u_2} \int_{v_1}^{v_2} \frac{u_f}{R_f^3} du_f \cdot dv_f - \right. \\ &\quad \left. - \int_{u_3}^{u_4} \int_{v_3}^{v_4} \frac{u_s^2}{R_s^3} du_s \cdot dv_s - x_s \int_{u_3}^{u_4} \int_{v_3}^{v_4} \frac{u_s}{R_s^3} du_s \cdot dv_s \right\} \quad (\text{A.22}) \end{aligned}$$

a primeira e a terceira integrais  $T_{xx_1}$  e  $T_{xx_2}$  são resolvidas segundo (F.8) no formulário, conseqüentemente:

$$F_{xx} = \frac{\rho i}{4\pi} (T_{xx_1} - T_{xx_2} + x_f T_{x_1} - x_s T_{x_2}) \quad (\text{A.23})$$

onde  $T_{x_1}$  e  $T_{x_2}$  foram calculadas em (A.20) e

$$\begin{aligned} T_{xx_1} &= \left\{ v_f \cdot \ln (R_f + u_f) - w_f \cdot \text{are tg} \frac{u_f \cdot v_f}{w_f \cdot R_f} \right\} \left| \begin{array}{l} u_2 \\ u_1 \end{array} \right| \left. \begin{array}{l} v_2 \\ v_1 \end{array} \right\} \\ T_{xx_2} &= \left\{ v_s \cdot \ln (R_s + u_s) - w_s \cdot \text{are tg} \frac{u_s \cdot v_s}{w_s \cdot R_s} \right\} \left| \begin{array}{l} u_4 \\ u_3 \end{array} \right| \left. \begin{array}{l} v_4 \\ v_3 \end{array} \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

$$F_{yx} = \int_{-A}^A \int_{-B}^B y E_x dx dy = \frac{\rho i}{4\pi} \int_{-A}^A \int_{-B}^B \left( \frac{y \cdot u_f}{R_f^3} - \frac{y \cdot u_s}{R_s^3} \right) dx dy \quad (\text{A.25})$$

usando (A.2) obtêm-se

$$\begin{aligned} F_{yx} &= \frac{\rho i}{4\pi} \left\{ \int_{u_1}^{u_2} \int_{v_1}^{v_2} \frac{u_f \cdot v_f}{R_f^3} du_f \cdot dv_f + y_f \cdot \int_{u_1}^{u_2} \int_{v_1}^{v_2} \frac{u_f}{R_f^3} du_f \cdot dv_f - \right. \\ &\quad \left. - \int_{u_3}^{u_4} \int_{v_3}^{v_4} \frac{u_s \cdot v_s}{R_s^3} du_s \cdot dv_s - y_s \int_{u_3}^{u_4} \int_{v_3}^{v_4} \frac{u_s}{R_s^3} du_s \cdot dv_s \right\} \quad (\text{A.26}) \end{aligned}$$

a primeira e a terceira integrais, respectivamente denomina das  $T_{yx1}$  e  $T_{yx2}$  são resolvidas segundo (F.9) do formulário, assim:

$$F_{yx} = \frac{\rho i}{4\pi} (T_{yx1} - T_{yx2} + y_f \cdot T_{x1} - y_x \cdot T_{x2}) \quad (\text{A.27})$$

onde  $T_{x1}$  e  $T_{x2}$  são obtidas de (A.20) e

$$\begin{aligned} T_{yx1} &= - \left\{ R_f \right\} \left| \begin{array}{l} u_2 \\ u_1 \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} v_2 \\ v_1 \end{array} \right. \\ T_{yx2} &= - \left\{ R_s \right\} \left| \begin{array}{l} u_4 \\ u_3 \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} v_4 \\ v_3 \end{array} \right. \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

Integrais da Componente  $E_y$  e dos Momentos de  $E_y$ .

$$F_y = \int_{-A}^A \int_{-B}^B E_y dx dy = \frac{\rho i}{4\pi} \int_{-A}^A \int_{-B}^B \left( \frac{v_f}{R_f^3} - \frac{v_s}{R_s^3} \right) dx dy \quad (\text{A.29})$$

usando-se (A.2):

$$F_y = \frac{\rho i}{4\pi} \left\{ \int_{u_1}^{u_2} \int_{v_1}^{v_2} \frac{v_f}{R_f^3} du_f \cdot dv_f - \int_{u_1}^{u_2} \int_{v_1}^{v_2} \frac{v_s}{R_s^3} du_s \cdot dv_s \right\} \quad (\text{A.30})$$

resolvendo (A.30) de modo análogo a (A.18) obtém-se:

$$F_y = \frac{\rho i}{4\pi} (T_{y1} - T_{y2}) \quad (\text{A.31})$$

onde:

$$\begin{aligned} T_{y1} &= - \left\{ \ln (R_f + u_f) \right\} \left| \begin{array}{l} u_2 \\ u_1 \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} v_2 \\ v_1 \end{array} \right. \\ T_{y2} &= - \left\{ \ln (R_s + u_s) \right\} \left| \begin{array}{l} u_4 \\ u_3 \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} v_4 \\ v_3 \end{array} \right. \end{aligned} \quad (\text{A.32})$$

$$T_{xy} = \int_{-A}^A \int_{-B}^B x E_y dx dy = \frac{\rho i}{4\pi} \int_{-A}^A \int_{-B}^B \left( \frac{x \cdot v_f}{R_f^3} - \frac{x \cdot v_s}{R_s^3} \right) dx dy \quad (\text{A.33})$$

resolvendo-se (A.33) análogamente a (A.25) obtém-se

$$T_{xy} = \frac{\rho i}{4\pi} (T_{yx1} - T_{yx2} + x_f \cdot T_{y1} - x_s \cdot T_{y2}) \quad (\text{A.34})$$

onde  $T_{yx1}$  e  $T_{yx2}$  são dadas por (A.28) e  $T_{y1}$  e  $T_{y2}$  por (A.32)

$$T_{YY} = \int_{-A}^A \int_{-B}^B y E y dx dy = \frac{\rho i}{4\pi} \int_{-A}^A \int_{-B}^B \left( \frac{y \cdot v_f}{R_f^3} - \frac{y \cdot v_s}{R_s^3} \right) dx dy \quad (A.35)$$

é resolvido de modo análogo a (A.22)

$$T_{YY} = \frac{\rho i}{4\pi} (T_{YY1} - T_{YY2} + y_f \cdot T_{Y1} - y_s \cdot T_{Y2}) \quad (A.36)$$

onde  $T_{Y1}$  e  $T_{Y2}$  são dadas por (A.32) e:

$$T_{YY1} = \left\{ u_f \cdot \ln(R_f + v_f) - w_f \cdot \text{arc tg} \frac{u_f \cdot v_f}{w_f \cdot R_f} \right\} \left| \begin{array}{l} u_2 \\ u_1 \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} v_2 \\ v_1 \end{array} \right. \quad (A.37)$$

$$T_{YY2} = \left\{ u_s \cdot \ln(R_s + v_s) - w_s \cdot \text{arc tg} \frac{u_s \cdot v_s}{w_s \cdot R_s} \right\} \left| \begin{array}{l} u_4 \\ u_3 \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} v_4 \\ v_3 \end{array} \right.$$

Integrais da Componente Ez e dos Momentos de Ez.

$$F_Z = \int_{-A}^A \int_{-B}^B E z dx dy = \frac{\rho i}{4\pi} \int_{-A}^A \int_{-B}^B \left( \frac{w_f}{R_f^3} - \frac{w_s}{R_s^3} \right) dx dy \quad (A.38)$$

por meio de (A.2) obtêm-se

$$F_Z = \frac{\rho i}{4\pi} \left\{ w_f \cdot \int_{u_1}^{u_2} \int_{v_1}^{v_2} \frac{1}{R_f^3} du_f \cdot dv_f - w_s \cdot \int_{u_3}^{u_4} \int_{v_3}^{v_4} \frac{1}{R_s^3} du_s \cdot dv_s \right\} \quad (A.39)$$

as integrais são resolvidas segundo (F.6), assim:

$$F_Z = \frac{\rho i}{4\pi} (w_f \cdot T_{Z1} - w_s \cdot T_{Z2}) \quad (A.40)$$

onde

$$T_{Z1} = \left\{ \frac{1}{w_f} \text{arc tg} \frac{u_f \cdot v_f}{w_f \cdot R_f} \right\} \left| \begin{array}{l} u_2 \\ u_1 \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} v_2 \\ v_1 \end{array} \right. \quad (A.41)$$

$$T_{Z2} = \left\{ \frac{1}{w_s} \text{arc tg} \frac{u_s \cdot v_s}{w_s \cdot R_s} \right\} \left| \begin{array}{l} u_4 \\ u_3 \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} v_4 \\ v_3 \end{array} \right.$$

quanto aos momentos:

$$F_{XZ} = \int_{-A}^A \int_{-B}^B x E z dx dy = \frac{\rho i}{4\pi} \int_{-A}^A \int_{-B}^B \left( \frac{x \cdot w_f}{R_f^3} - \frac{x \cdot w_s}{R_s^3} \right) dx dy \quad (A.42)$$

após uma mudança adequada na variável de integração, por meio de (A.2), escreve-se:

$$F_{xz} = \frac{\rho i}{4\pi} \left\{ w_f \cdot (T_{x_1} + x_f \cdot T_{z_1}) - w_s (T_{x_2} + x_s \cdot T_{z_2}) \right\} \quad (\text{A.43})$$

onde  $T_{x_1}$  e  $T_{x_2}$  são dadas por (A.20) enquanto que  $T_{z_1}$  e  $T_{z_2}$  por (A.41)

$$F_{yz} = \int_{-A}^A \int_{-B}^B yEz \, dx dy = \frac{\rho i}{4\pi} \int_{-A}^A \int_{-B}^B \left( \frac{y \cdot w_f}{R_f^3} - \frac{y \cdot w_s}{R_f^3} \right) dx dy \quad (\text{A.44})$$

usando-se (A.2) para uma mudança na variável de integração a resolução de (A.44) é dada por:

$$F_{yz} = \frac{\rho i}{4\pi} \left\{ w_f \cdot (T_{y_1} + y_f \cdot T_{z_1}) - w_s \cdot (T_{y_2} + y_s \cdot T_{z_2}) \right\} \quad (\text{A.45})$$

em que  $T_{y_1}$  e  $T_{y_2}$  são calculadas em (A.32) e  $T_{z_1}$  e  $T_{z_2}$  em (A.41)

APÊNDICE B : INTEGRAIS FINITAS DAS ANOMALIAS DE POTENCIAL ESPON  
TÂNEO. MODELO LINHA DE DOUBLET.

Seja  $F_1 F_2$  uma linha horizontal homogênea contínua de fontes de corrente elétrica de densidade  $i$ , paralela ao eixo  $Ox$ , localizada a uma profundidade  $Z_1$ , comprimento  $2E$  e cujo ponto médio tem coordenadas horizontais  $x_m, y_1$ . Seja ainda uma linha homogênea horizontal contínua  $S_1 S_2$  de sumidouros de corrente, de densidade  $-i$ , também paralela a  $Ox$ , localizada a uma profundidade  $Z_s$ , de mesmas dimensões que a linha de fontes e tendo por coordenadas horizontais do ponto médio  $x_m, y_2$ . As fontes e sumidouros estão afastados de uma distância  $\ell$ . Ambas as linhas estão imersas num meio homogêneo, isotrópico de resistividade  $\rho$ . limitado superiormente por um semi-espaco dielétrico, homogêneo e isotrópico. As premissas acima estão esquematizadas na figura B1.

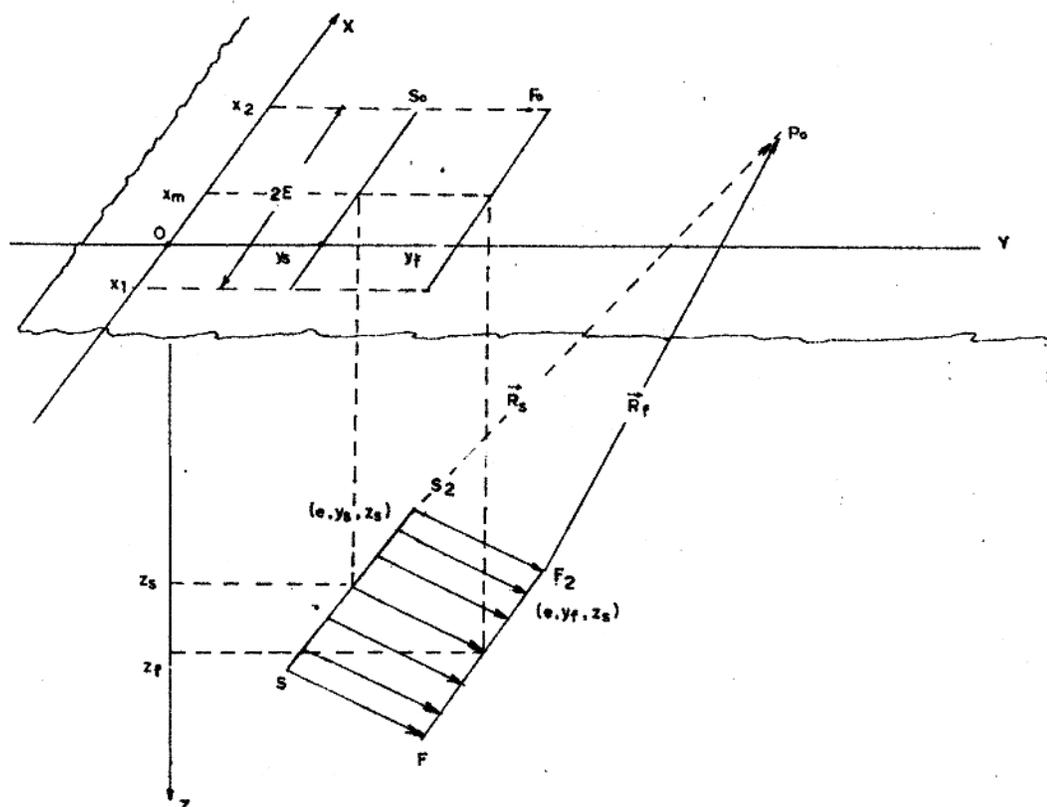


Fig. B1. Esquema do Modelo Linha de Doublet

As linhas  $S_0$  e  $F_0$  desenhadas no plano  $xy$ , que representa a superfície do solo, são respectivamente as projeções horizontais das linhas  $S_1 S_2$  e  $F_1 F_2$ . A figura geométrica de vértices em  $S_1, S_2, F_1$  e  $F_2$  representa uma placa condutora inclinada de um ângulo  $I$  em relação ao plano horizontal e em termos de potencial espontâneo é representada por uma linha de doublet.

Os vetores  $\vec{R}_1, \vec{R}_2$  representados na figura B1 representam respectivamente a distância de um elemento da linha de fontes ao ponto de observação  $P_0$ , localizado na superfície  $Z_0$  e de um elemento da linha de sumidouros ao mesmo ponto  $P_0$ . Assim

$$\left. \begin{aligned} R_1 - |\vec{R}_1| &= \{(x-l)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2\}^{1/2} \\ R_2 - |\vec{R}_2| &= \{(x-l)^2 + (y-y_2)^2 + (z-z_2)^2\}^{1/2} \end{aligned} \right\} \quad (B.1)$$

onde, de acordo com a figura B2, que representa o plano  $yz$  que contém um elemento da linha de doublet:

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= y_2 + l \cos I \\ z_1 &= z_2 + l \sin I \end{aligned} \right\} \quad (B.2)$$

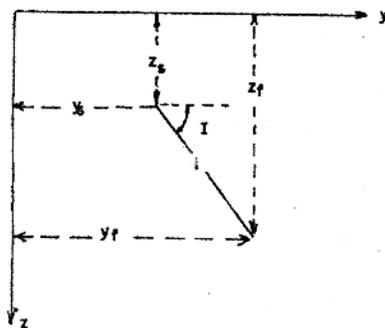


Fig. B2. Perfil da linha de doublet da figura B1 segundo o plano  $yz$ .

De modo a condensar as expressões matemáticas usadas a seguir, serão empregadas as seguintes variáveis

$$\left. \begin{aligned} u &= x - e; & v_1 &= y - y_1 & ; & w_1 &= z - z_1 \\ & & v_2 &= y - y_2 & & w_2 &= z - z_2 \end{aligned} \right\} \quad (\text{B.3})$$

As expressões (B.1) são então escritas:

$$\left. \begin{aligned} R_1 &= (u^2 + v_1^2 + w_1^2)^{1/2} \\ R_2 &= (u^2 + v_2^2 + w_2^2)^{1/2} \end{aligned} \right\} \quad (\text{B.4})$$

O potencial e as componentes do campo elétrico do modelo linha de doublet são encontrados integrando-se, ao longo de uma linha, as expressões correspondentes para um doublet.

$$V(\vec{r}) = \int_{x_1}^{x_2} V_d(\vec{r}) \, dx$$

$$V(\vec{r}) = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\rho l}{4\pi} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \, dx \quad (\text{B.5})$$

mutando-se a variável de integração de  $x$  para  $u$  na equação (B.5) por meio de (B.3)

$$V(\vec{r}) = \int_{u_2}^{u_1} \frac{\rho l}{4\pi} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \, du$$

onde  $u_1$  e  $u_2$  são os novos limites de integração e que de acordo a figura B1:

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= x - x_1 & \cdot & \cdot & u_1 &= x - (x_m + E) \\ u_2 &= x - x_2 & \cdot & \cdot & u_2 &= x - (x_m - E) \end{aligned} \right\} \quad (\text{B.7})$$

Usando-se a integral (F.1) do formulário o resultado de (B.6) é

$$V(\vec{r}) = \frac{\rho i}{4\pi} \ln(R_{11}+u_1) - \ln(R_{21}+u_2) - \ln(R_{12}+u_1) + \ln(R_{22}+u_2) \quad (\text{B.8})$$

onde

$$\left. \begin{aligned} R_{11} &= (u_1^2 + v_1^2 + w_1^2)^{1/2} \\ R_{21} &= (u_2^2 + v_1^2 + w_1^2)^{1/2} \\ R_{12} &= (u_1^2 + v_2^2 + w_2^2)^{1/2} \\ R_{22} &= (u_2^2 + v_2^2 + w_2^2)^{1/2} \end{aligned} \right\} \quad (\text{B.9})$$

$$Ex(\vec{r}) = \int_{x_1}^{x_2} Ex_d(\vec{r}) \, dx$$

onde  $Ex_d$  é a componente do doublet segundo o eixo  $Ox$ .

$$Ex(\vec{r}) = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\rho i}{4\pi} \left( \frac{u}{R_1^3} - \frac{u}{R_2^3} \right) \, dx \quad (\text{B.10})$$

mudando-se a variável de integração e usando-se (B.7)

$$Ex(\vec{r}) = \int_{u_2}^{u_1} \frac{\rho i}{4\pi} \left( \frac{u}{R_1^3} - \frac{u}{R_2^3} \right) \, du \quad (\text{B.11})$$

considerando-se que o meio onde está localizado o modelo é homogêneo e isotrópico e com o auxílio da integral (F.3) do formulário obtém-se

$$Ex(\vec{r}) = -\frac{\rho i}{4\pi} \left\{ \frac{1}{R_{11}} - \frac{1}{R_{21}} - \frac{1}{R_{12}} + \frac{1}{R_{22}} \right\} \quad (\text{B.12})$$

Sendo  $Ey_d$  a componente do doublet segundo a direção  $Oy$ , tem-se para a componente  $Ey$  do modelo linha de doublet:

$$E_y(\vec{r}) = \int_{x_1}^{x_2} E_{y_d}(\vec{r}) \, dx$$

$$E_y(\vec{r}) = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\rho l}{4\pi} \left( \frac{v_1}{R_1^3} - \frac{v_2}{R_2^3} \right) \, dx \quad (B.13)$$

mudando-se a variável de integração e usando-se (B.7) e (B.9) tem-se:

$$E_y(\vec{r}) = \frac{\rho l}{4\pi} \left\{ \frac{u_1 \cdot v_1}{(v_1^2 + w_1^2) R_{11}} - \frac{u_2 \cdot v_1}{(v_1^2 + w_1^2) R_{21}} - \frac{u_1 \cdot v_2}{(v_2^2 + w_2^2) R_{12}} + \frac{u_2 \cdot v_2}{(u_2^2 + w_2^2) R_{22}} \right\} \quad (B.14)$$

analogamente à integração desenvolvida para a componente  $Ey$  obtém-se para  $Ez$ :

$$E_z(\vec{r}) = \frac{\rho l}{4} \left\{ \frac{w_1}{(v_1^2 + w_1^2)} \left( \frac{u_1}{R_{11}} - \frac{u_2}{R_{21}} \right) - \frac{w_2}{(v_2^2 + w_2^2)} \left( \frac{u_1}{R_{12}} - \frac{u_2}{R_{22}} \right) \right\} \quad (B.15)$$

Cálculo das integrais finitas dos momentos do potencial e das componentes do campo elétrico do modelo linha de doublet, em uma área  $2A \times 2B$

$$F_v = \int_{-B}^A \int_{-B}^B V(\vec{r}) \, dx \, dy =$$

$$= \frac{\rho l}{4\pi} \int_{-A}^A \int_{-B}^B \left\{ \ln(R_{11} + u_1) - \ln(R_{21} + u_2) - \ln(R_{12} + u_1) + \ln(R_{22} + u_2) \right\} \, dx \, dy \quad (B.16)$$

Por uma mudança adequada na variável de integração as quatro integrais do segundo membro da equação (B.16), respectivamente denominados  $Tv_1$ ,  $Tv_2$ ,  $Tv_3$  e  $Tv_4$ , são resolvidas segundo a expressão (F.10) do formulário de integrais, assim:

$$Fv = \frac{\rho i}{4\pi} (Tv_{11} - Tv_{21} - Tv_{12} + Tv_{22}) \quad (B.17)$$

onde

$$Tv_{ij} = \left\{ u_i v_j \ln(R_{ij} + u_i) + \frac{u_i^2 - w_i^2}{2} \cdot \ln(R_{ij} + v_j) - \frac{v_j \cdot R_{ij}}{2} + u_i w_j \left( \arctg \frac{v_j}{w_j} - \arctg \frac{u_i \cdot v_j}{w_j \cdot R_{ij}} \right) - u_i v_j \right\} \Big|_{a_i}^{b_i} \Big|_{c_j}^{d_j} \quad (B.18)$$

em que  $i=1,2$  ;  $j=1,2$

em que os novos limites de integração são:

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= -A - x_m + E & ; & & c_1 &= -B - y_1 \\ b_1 &= A - x_m + E & ; & & d_1 &= B - y_1 \\ a_2 &= -A - x_m - E & ; & & c_2 &= -B - y_2 \\ b_2 &= A - x_m - E & ; & & d_2 &= B - y_2 \end{aligned} \right\} \quad (B.19)$$

$$F_{xv} = \int_{-A}^A \int_{-B}^B x V(r) dx dy \quad (B.20)$$

A expressão (B.20) por uma mudança adequada na variável de integração, tendo sido usadas as expressões (B.7) e (B.9) produz

$$F_{xv} = \frac{\rho i}{4\pi} \left\{ \iint (u_1 \cdot \ln(R_{11} + u_1) + (x_m - E) \ln(R_{11} + u_1)) du_1 dv_1 - \iint (u_2 \cdot \ln(R_{21} + u_2) - (x_m + E) \cdot \ln(R_{21} + u_2)) du_2 dv_1 - \iint (u_1 \cdot \ln(R_{12} + u_1) - (x_m - E) \ln(R_{12} + u_1)) du_1 dv_2 + \iint (u_2 \cdot \ln(R_{22} + u_2) + (x_m - E) \ln(R_{22} + u_2)) du_2 dv_2 \right\} \quad (B.21)$$

O primeiro, terceiro, quinto e sétimo termos do segundo membro, respectivamente  $T_{xv_{11}}$ ,  $T_{xv_{21}}$ ,  $T_{xv_{12}}$  e  $T_{xv_{22}}$  se resolvem segundo a expressão (F<sub>11</sub>) do formulário, as demais já foram resolvidas quando se deduziu F<sub>v</sub>, assim:

$$F_{xv} = \frac{\rho i}{4\pi} \left( T_{xv_{11}} - T_{xv_{21}} - T_{xv_{12}} + T_{xv_{22}} + (x_m - E) (T_{v_{11}} - T_{v_{12}}) - (x_m + E) (T_{v_{21}} - T_{v_{22}}) \right) \quad (B.22)$$

onde  $T_{v_{11}}$ ,  $T_{v_{12}}$ ,  $T_{v_{21}}$  e  $T_{v_{22}}$  são dadas por (B.18) e:

$$T_{xv_{ij}} = \frac{1}{4} \left\{ v_j \left( 2u_i^2 + \frac{v_j^2}{3} + w_j^2 \right) \cdot \ln(R_{ij} + u_i) + \frac{4u_i^3}{3} \cdot \ln(R_{ij} + v_j) - \frac{u_i v_j R_{ij}}{3} + 2u_i^2 \cdot w_j \operatorname{arctg} \frac{v_j}{w_j} - 2w_j \left( u_i^2 + \frac{w_j^2}{3} \right) \operatorname{arctg} \frac{u_i v_j}{w_j R_{ij}} - 2 u_i^2 v_j \right\} \left| \begin{array}{c} b_i \\ a_i \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} d_j \\ c_j \end{array} \right| \quad (B.23)$$

em que:

$$i = 1, 2$$

$$j = 1, 2$$

$$F_{yv} = \int_{-A}^A \int_{-B}^B y V dx dy \quad (B.24)$$

mudando a variável de integração, usando-se (B.7) e (B.9) o resultado de (B.24) é:

$$F_{yv} = \frac{\rho i}{4\pi} \left( T_{yv11} - T_{yv21} - T_{yv12} + T_{yv22} + y_1 (T_{v11} - T_{v21}) - y_2 (T_{v12} - T_{v22}) \right) \quad (B.25)$$

onde  $T_{v11}$ ,  $T_{v21}$ ,  $T_{v12}$  e  $T_{v22}$  são dadas por (B.18) e:

$$T_{yv_{ij}} = \left\{ \frac{u_i (v_j^2 + w_j^2)}{2} \cdot \ln(R_{ij} + u_i) - \frac{R_{ij}^3}{3} + \frac{R_{ij} u_i^2}{2} - \frac{u_i v_j^3}{4} \right\} \begin{matrix} b_i \\ a_i \end{matrix} \begin{matrix} d_j \\ c_j \end{matrix} \quad (B.26)$$

$$i = 1, 2 ; \quad j = 1, 2$$

$$F_x = \int_{-A}^A \int_{-B}^B E_x dx dy \quad (B.27)$$

substituindo-se em (B.27)  $E_x$  pelo seu valor obtido em (B.12) e com o auxílio de (B.7), (B.9) e da fórmula (F.4) obtém-se que:

$$F_x = \frac{\rho i}{4\pi} \left( T_{x11} - T_{x12} - T_{x21} + T_{x22} \right) \quad (B.28)$$

onde

$$T_{ij} = \left\{ v_j \cdot \ln(R_{ij} + u_i) + u_i \ln(R_{ij} + v_j) - w_j \arctg \frac{u_i v_j}{w_j R_{ij}} \right\} \begin{matrix} b_i \\ a_i \end{matrix} \begin{matrix} d_j \\ c_j \end{matrix} \quad (B.29)$$

$$i = 1, 2 \quad e \quad j = 1, 2$$

$$F_{xx} = \int_{-A}^A \int_{-B}^B x E_x(\vec{r}) \, dx dy \quad (B.30)$$

Com as mesmas substituições utilizadas para resolver (B.27) e com auxílio de (F.5) obtém-se para (B.30) que

$$F_{xx} = -\frac{\rho i}{4\pi} \left( T_{xx11} - T_{xx21} - T_{xx12} + T_{xx22} + (x_m - E) (T_{x11} - T_{x21}) - (x_m + E) (T_{x12} - T_{x22}) \right) \quad (B.31)$$

onde  $T_{x11}$ ,  $T_{x21}$ ,  $T_{x12}$ ,  $T_{x22}$  são obtidas por (B.29) e

$$T_{xx_{ij}} = \frac{1}{2} \left\{ v_j R_{ij} + (u_i^2 + w_j^2) \cdot \ln(R_{ij} + v_j) \right\} \begin{matrix} b_i & d_i \\ a_i & c_i \end{matrix} \quad (B.32)$$

$$i = 1, 2$$

e

$$j = 1, 2$$

$$F_{yx} = \int_{-A}^A \int_{-B}^B y E_x(\vec{r}) \, dx dy \quad (B.33)$$

Resolvendo-se (B.33) de modo análogo ao das expressões anteriores, por meio de (F.5) tem-se:

$$F_{yx} = -\frac{\rho i}{4\pi} \left( T_{yx11} - T_{yx21} - T_{yx12} + T_{yx22} + y_1 (T_{x11} - T_{x21}) - y_2 (T_{x12} - T_{x22}) \right) \quad (B.34)$$

onde

$$T_{yx_{ij}} = \frac{1}{2} \left\{ u_i R_{ij} + (v_j^2 + w_j^2) \cdot \ln(R_{ij} + u_i) \right\} \begin{matrix} b_i & d_j \\ a_i & c_j \end{matrix} \quad (B.35)$$

$$F_y = \int_{-A}^A \int_{-B}^B E_y(\vec{r}) \, dx \, dy \quad (\text{B.36})$$

Substituindo-se em (B.35)  $E_y$  pelo seu valor obtido em (B.13) e com o auxílio de (B.7) e (B.9) e da integral (F.13) do formulário atinge-se:

$$F_y = \frac{\rho_1}{4\pi} (T_{y11} - T_{y21} - T_{y12} + T_{y22}) \quad (\text{B.37})$$

onde

$$T_{y_{ij}} = \left\{ \frac{u_i}{2} \cdot \ln \frac{R_{1j} - u_i}{R_{1j} + u_i} + R_{1j} \right\} \Big|_{a_i}^{b_i} \Big|_{c_j}^{d_j} \quad (\text{B.38})$$

em que  $i = 1, 2$  e  $j = 1, 2$

$$F_{xy} = \int_{-A}^A \int_{-B}^B x E_y(\vec{r}) \, dx \, dy \quad (\text{B.39})$$

Utilizando-se as mesmas substituições efetuadas no cálculo de (B.35) por meio de (F.14) obtém-se para (B.38) que:

$$F_{xy} = \frac{\rho_1}{4\pi} \left( T_{xy_{11}} - T_{xy_{21}} - T_{xy_{12}} + T_{xy_{22}} + (x_m - E)(T_{y_{11}} - T_{y_{12}}) - (x_m + E)(T_{y_{21}} - T_{y_{22}}) \right) \quad (\text{B.40})$$

onde  $T_{y11}$ ,  $T_{y21}$ ,  $T_{y12}$  e  $T_{y22}$  são dados por (B.37) e

$$T_{xy_{ij}} = \frac{1}{4} \left\{ u_i^2 \cdot \ln(R_{1j} - u_i) + R_{1j}^2 \cdot \ln(R_{1j} + u_i) + u_i^2 R_{1j} \right\} \Big|_{a_i}^{b_i} \Big|_{c_j}^{d_j} \quad (\text{B.41})$$

$$F_{yy} = \int_{-A}^A \int_{-B}^B y E_y(\vec{r}) dx dy \quad (\text{B.42})$$

Com resolução análoga a das expressões anteriores obtém-se

$$F_{yy} = \frac{\rho i}{4\pi} \left( T_{yy11} - T_{yy21} - T_{yy12} + T_{yy22} + y_1(T_{y11} - T_{y21}) - y_2(T_{y12} - T_{y22}) \right) \quad (\text{B.43})$$

onde  $T_{y11}$ ,  $T_{y12}$ ,  $T_{y21}$ ,  $T_{y22}$  são dadas por (B.38) e

$$T_{yy_{ij}} = \left\{ \frac{u_i^2 - w_i^2}{2} \cdot \ln(R_{ij} + v_i) + w_j^2 \cdot \ln(u_i^2 + w_j^2)^{1/2} - u_i \cdot w_j \operatorname{arctg} \frac{u_i \cdot v_j}{w_j \cdot R_{ij}} + \frac{v_j R_{ij}}{2} \right\} \begin{array}{l} b_i \\ a_i \end{array} \begin{array}{l} d_j \\ c_j \end{array} \quad (\text{B.44})$$

em que  $i = 1, 2$

$j = 1, 2$

BIBLIOGRAFIA

- .BECKER, A., e TELFORD, W.M., 1965, Spontaneous polarization studies: Geophysical Prospecting, v. 13, n° 12, p. 173-188.
- .BHATTACHARYYA, B.K., 1967, Some general properties of potential fields in space and frequency domain: a review: Geoexploration, v.5, p. 127-143.
- .COOLEY, J.M. e TUKEY, J.W., 1965, An algorithm for the machine calculation of complex Fourier Series: Math, of Computation V. 19, n° 90, p.297-301.
- .CORWIN, R., 1973, Offshore application of self-potential prospecting. Ph.D. Thesis, University of California, Berkeley
- .de WITTE, L., 1948, A new method of interpretation of self potential field data: v. XIII, n° 4, p. 600-608.
- .DOBRIN, M.B., 1976, Introduction to geophysical prospecting, Mc Graw-Hill, New York, 3ª edição, 630 p.
- .GARRELS, R.M. e CHRIST, C.L., 1965, Solutions, minerals and equilibria: Harper and Row, New York, 450p.
- .GAY, S.P., Jr., 1967, A 1800 milivolt self-potential anomaly near Hualgayoc, Peru: Geophysical Prospecting, v. 15, n° 2, p.236 245.
- .HEILAND, C.A., 1940, Geophysical exploration: Prentice - Hall New York, 1013 p.
- .HELBIG, K., 1963, Some integrals of magnetic anomalies and their relation to the parameters of the disturbing body: Z. Geophysik, v. 29, p. 83-96.

- .HIMMELBLAU, D.M., 1970, Applied non linear programming: Mc Graw Hill, New York.
- .JAKOSKY, J.J., 1950, Exploration geophysics (2.<sup>a</sup> edição): Trija Publishing Co., Newport Beach, California, 1195p.
- .KELLER, G.V. e FRISCHKNECHT, F.C., 1966, Electrical methods in geophysical prospecting: Pergamon Press, Oxford, 519p.
- .KELLY, S.F., 1945, Discussion on paper by Rao, M.B.R, spontaneous polarization surveys near Guddadarangavvanahalli, Chitaldrug, Mysore State, India: Transactions, American Institute of Mining and Metallurgical Engineers, v. 164, p. 107-116.
- .KRAUSKOPF, K.B., 1967, Introduction to geochemistry: Mc Graw-Hill New York, 721 p.
- .KRUGER, F.C. e LACY, W.C., 1949, Geological explanation of geophysical anomalies near Cerro de Pasco, Peru: Economic Geology, v. 44, n<sup>o</sup> 6.
- .LASFARGUES, P., 1957, Prospection électrique par courants continus: Masson & Cie.
- .LEÃO, J.W.D., 1976, Interpretação de anomalias magnéticas usando integrais finitas dos momentos das componentes. Tese de Mes trado, Universidade Federal do Pará, Belém.
- .LOGN, O. e BOLVIKEN, B., 1974, Self potentials at the Joma pyrite deposit, Norway, v.12, n<sup>o</sup> 1, p. 11-28.
- .LOURENÇO, J.S., 1972, Analysis of three - component magnetic data: Ph.D. Thesis, University of California, Berkeley, USA
- .MEISER, P., 1962, A method for quantitative interpretation of selfpotential measurements: Geophysical Prospecting, v. X, n<sup>o</sup> 2, p. 203-218.

- .NELDER, J.A. e MEAD, R., 1964, A simplex method for function minimization: Computer Journal v. 7, p. 308-313.
- .PARASNIS, D.S., 1966, Mining geophysics: Elsevier, New York , 356 p.
- .PAUL, M.K., 1965, Direct interpretation of self - potential anomalies caused by inclined sheets of infinite horizontal extensions: Geophysics, v.30, n° 3, p.418-423.
- .PETROWSKY, A., 1928, The problem of a hidden polarized sphere : Philosophical Magazine, v. 5, n° 28, p. 334-353: n° 31, p. 914-933..
- .POLDINI, E., 1938, 1939, Geophysical exploration by spontaneous polarization methods: The Mining Magazine, v.59, p. 278-282, 347-352; v. 60, p. 22-27; 90-94.
- .POUBAIX, M.J.N., 1949, Thermodynamics of dilute aqueous solutions: Edward Arnold & Co., Londres, 136 p.
- .ROY, A., 1963, New interpretation techniques for telluric and some direct current fields: Geophysics, v. 28, n° 2, p. 250-261.
- .ROY, A., e CHOWDHURI, D.K., 1959, Interpretation of self potential data for tabular bodies: Journal os Science and Engineering Research, v. III, parte I, p. 35-54.
- .SATO, M., 1960, a., Oxidation of sulfide ore bodies, I, Geochemical Environments in terms of Eh and pH: Economic Geology, v. 55, p. 928-961.
- .SATO, M., 1960, b., Oxidation of sulfide ore bodies, II, Oxidation Mechanisms of Sulfide Menrals at 25° C: Economic Geology, v. 55, p. 1201-1231.

- .SATO M. e MOONEY, H.M., 1960, The electrochemical mechanism of sulfide self-potentials: Geophysics, v. 25, n° 1, p.226-249.
- .TAKAHASHI,M., 1952, Relation between the S.P. and weather in metallic deposits: Geophysical Exploration v.2, p. 39-40.
- .YUNGUL, S., 1950, Interpretation of spontaneous polarization anomalies caused by spherical orebodies: Geophysics, v. 15 , n° 2, p. 237-246.

## AGRADECIMENTOS

A autora deseja agradecer ao professor Dr. José Seixas Lourenço pela orientação dedicada e conselhos prestimosos em todas as etapas deste trabalho. Agradece também aos outros membros da Comissão de Tese: Dr. Augusto Cesar Bittencourt Pires e ao Dr. Herberto Gomes Tocantins Maltez por suas críticas e sugestões. Aos colegas Jorge Wilson Delgado Leão e João Batista Correa da Silva pelas discussões valiosas, amizade e colaboração principalmente durante os trabalhos de processamento de dados.

Agradecimentos se devem ainda à sra. Denise Melo Vieira e ao desenhista Paulo Sérgio Cecim Abraão pela ajuda na confecção gráfica e preparação deste trabalho.

Finalmente a autora deseja agradecer à Financiadora de Estudos e Projetos e ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico pelo apoio financeiro à pesquisa.