



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ  
INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM GEOFÍSICA

**HILTON FARIAS DA SILVA**

**MODELAGEM NUMÉRICA DE DADOS MCSEM 2.5-D**

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**

BELÉM-PARÁ

2012

**HILTON FARIAS DA SILVA**

**MODELAGEM NUMÉRICA DE DADOS MCSEM 2.5-D**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Geofísica do Instituto de Geociências da Universidade Federal do Pará – UFPA em cumprimento às exigências para obtenção do grau de Mestre em Geofísica.

Orientador: Marcos Welby Correa Silva

BELÉM-PARÁ

2012

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)  
Biblioteca Geólogo Raimundo Montenegro Garcia de Montalvão

---

- S586m Silva, Hilton Farias da  
Modelagem numérica de dados MCSEM 2.5-D. Hilton Farias da  
Silva; Orientador: Marcos Welby Correa Silva - 2012.  
63 fl.: il.  
Dissertação (mestrado em geofísica) - Universidade Federal do Pará,  
Instituto de Geociências, Programa de Pós-Graduação em Geofísica,  
Belém, 2012.
1. Geofísica aplicada. 2. Métodos eletromagnéticos. 3. Elementos  
finitos. 4. Marine controlled source electromagnetic (MCSEM). 5.  
Exploração de óleo. 6. Águas Profundas. I. Silva, Marcos Welby Correa,  
*orient.* II. Universidade Federal do Pará. III. Título.

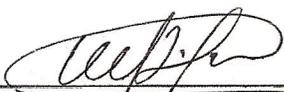
HILTON FARIAS DA SILVA

MODELAGEM NUMÉRICA DE DADOS MCSEM 2.5-D

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Geofísica do Instituto de Geociências da Universidade Federal do Pará - UFPA, em cumprimento às exigências para obtenção do grau de Mestre em Geofísica no Instituto de Geociências.

Data de Aprovação: 20/04/2012

Banca examinadora:

  
Prof. Marcos Welby Correa Silva - Orientador.  
Doutor (UFPA) em Geofísica

  
Prof. Victor Cezar Tocantins de Souza.  
Doutor (UFPA) em Geofísica

  
Prof. Paulo de Tarso Luiz Menezes.  
Doutor (UERJ) em Geofísica (PETROBRAS)

Dedico este trabalho a Deus, que nunca deixou faltar nada em minha vida.  
Dedico, também, aos meus amados pais, Francisco e Angela, que me amam e me ensinaram  
um caminho correto a seguir.  
Dedico, também, aos meus irmãos queridos, Wagner e Vanessa, e, finalmente, a minha  
companheira e esposa Adriana .

## AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, que me deu força para vencer este desafio.

Agradeço a toda minha família pelo carinho e incentivo. Especialmente, agradeço ao senhor Francisco Pedro e a dona Angela Maria, meus pais, pelo amor, carinho, dedicação, por tudo que vocês são e representam em minha. A minha esposa Adriana pelo carinho, compreensão e pelo apoio em momentos difíceis. Aos meus irmãos Wagner e Vanessa sempre presentes e me incentivando. Agradeço a estes por algo muito importante que é o Amor, que cada um deles sente por mim, que foi e tem sido um componente essencial na minha formação como pessoa.

Agradeço a toda comunidade do Programa de Pós Graduação em Geofísica – CPGF. À Benildes e à Bela, a todos os alunos da graduação e Pós, com os quais eu pude conviver, e aos professores, que participaram da minha formação.

Agradeço, bastante, ao professor Marcos Welby, por ter me orientado neste trabalho desde o início, pelos esclarecimentos, discussões, paciência, dedicação, pela motivação em momentos difíceis do trabalho e pela confiança depositada ao escolher o tema deste trabalho. Por sua amizade e dedicação como orientador.

Agradeço aos professores Cicero Régis e Victor Tocantins, os amigos Edelson, Edna, Diego, Valdelírio e Walleson, do Grupo EMMI.

Agradeço aos amigos, Marcelo Mesquita, Danilo, Fabrício, Danusa, Gilvana e Carolina Narjara, pelas muitas horas de estudo e pelos ótimos momentos de descontração e por todos estes anos de convivência.

Agradeço ao professor Allen Howard, pela participação no comitê de avaliação de dissertação e por todas as sugestões dadas para o melhoramento deste trabalho. Agradeço ao professor Paulo de Tarso, pela participação no banca examinadora de dissertação e ao professor Victor Tocantins pela participação no comitê e banca, e por todas as sugestões dadas para o melhoramento deste trabalho.

Agradeço pelo apoio financeiro da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de nível Superior – CAPES e ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico – CNPQ.

## RESUMO

Este trabalho trata da implementação da modelagem numérica de dados Marine Controlled Source Electromagnetic (MCSEM) 2.5-D aplicado a exploração de hidrocarbonetos em ambiente horizontalmente estratificado. Para elaborarmos a formulação matemática fizemos a decomposição dos campos em primário e secundário. O primeiro foi obtido utilizando os potenciais de Schelkunoff e o secundário usando o método dos elementos finitos. Este problema foi resolvido no domínio da frequência espacial. Encontrado o campo secundário utilizamos, mais uma vez, a transformada de Fourier para obter os campos secundários no domínio  $(x, y, z)$  então obtemos, finalmente, o campo total pela soma dos campos secundários e primário. A partir do campo total podemos avaliar a influência de um reservatório de hidrocarbonetos em um ambiente estratificado e inferir a extensão lateral.

Palavras chaves: Geofísica aplicada. Métodos eletromagnéticos. Elementos Finitos. Marine Controlled Source Electromagnetic (MCSEM). Exploração de óleo. Águas profundas.

## ABSTRACT

This work deals with the implementation of numerical 2.5-D Marine Controlled Source Electromagnetic (MCSEM) modeling applied to hydrocarbon exploration in stratified environment. In the mathematical formulation the fields were assumed to have two parts: the primary and the secondary ones. The first uses of Schelkunoff potentials in its formulation and they were employed in both  $(x, k_y, z; \omega)$  and  $(x, y, z; \omega)$  domains. The secondary fields are solved in the frequency domain space  $(x, k_y, z)$  by finite element method. With a Inverse Fourier transform, the secondary fields were taken in the domain  $(x, y, z)$ . From the total field, we can show the influence of an oil reservoir in a stratified environment and its sensitivity to the lateral extension of a hydrocarbon reservoir.

Key words: Applied geophysics. Electromagnetic methods. Finite Element Method. Marine Controlled Electromagnetic Source (MCSEM). Exploration of oil. Deep water.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

2.1	Ilustração do método MCSEM. . . . .	14
2.2	Modelo teórico para MCSEM que apresenta a fonte em uma camada limitada por um semi-espacos e um meio estratificação horizontalmente. . . . .	28
2.3	Esta figura ilustra a geometria dos levantamentos MCSEM . . . . .	35
3.1	Malha de elementos finitos utilizada na modelagem do MCSEM 2.5-D . . . . .	39
3.2	Parte real e imaginaria da componente do campo elétrico na direção $x$ nas posições $x=-2.5$ km e $x=2.5$ km utilizando um filtro de 19 abscisas. . . . .	45
3.3	Parte real e imaginária da componente do campo elétrico na direção $x$ nas posições $x=-2.5$ km e $x=2.5$ km utilizando um filtro de 81 abscisas . . . . .	46
3.4	Parte real e parte imaginária da componente do campo elétrico na direção $z$ nas posição $-2.5$ km e $2.5$ km. . . . .	47
3.5	Parte real e parte imaginária da componente do campo elétrico na direção $z$ nas posição $-2.5$ km e $2.5$ km. . . . .	48
3.6	Parte real e parte imaginária da componente do campo magnético na direção $y$ nas posição $-2.5$ km e $2.5$ km. . . . .	49
3.7	Parte real e parte imaginária da componente do campo magnético na direção $y$ nas posição $-2.5$ km e $2.5$ km. . . . .	50
4.1	Modelo 1-D sem a camada denominada reservatório . . . . .	52
4.2	Modelo 1-D que apresenta uma camada denominada reservatório . . . . .	53
4.3	Esta figura mostra a comparação entre as respostas 1-D, sem e com a presença de uma heterogeneidade, e a resposta 2.5-D . . . . .	54
4.4	Modelo com heterogeneidade 2-D. . . . .	55
4.5	Amplitude e fase da componente $E_x$ na frequência 0.125 Hz para as posições $-5$ km, $0$ km e $5$ km, respectivamente. A curva pontilhada em azul representa a resposta 1-D sem a presença do reservatório e a curva em vermelho representa a resposta 2.5-D . . . . .	56
4.6	Amplitude da componente $ E_x $ normalizada pela componente $ E_{xp} $ para os transmissores nas posições $-5$ km, $0$ km e $5$ km para uma frequência de 0.125 Hz . . . . .	57
4.7	Amplitude e fase da componente $E_x$ na frequência 0.25 Hz para as posições $-5$ km, $0$ km e $5$ km . . . . .	57

4.8	Amplitude da componente $ E_x $ normalizada pela componente $ E_{xp} $ para os transmissores nas posições -5 km, 0 km e 5 km para uma frequência de 0.25 Hz	58
4.9	Amplitude e fase da componente $E_x$ na frequência 0.5 Hz para as posições -5 km, 0 km e 5 km . . . . .	58
4.10	Amplitude da componente $ E_x $ normalizada pela componente $ E_{xp} $ para os transmissores nas posições -5 km, 0 km e 5 km para uma frequência de 0.5 Hz	59

## SUMÁRIO

1	<b>INTRODUÇÃO</b> . . . . .	11
1.1	OBJETIVOS . . . . .	11
1.2	DESCRIÇÃO DA DISSERTAÇÃO . . . . .	12
2	<b>MCSEM 1-D</b> . . . . .	13
2.1	INTRODUÇÃO . . . . .	13
2.2	EQUAÇÕES DE MAXWELL NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA . . . . .	13
2.2.1	<b>Potencial de Schelkunoff</b> . . . . .	16
2.2.2	<b>Modo TM</b> . . . . .	19
2.2.3	<b>Modo TE</b> . . . . .	24
2.2.4	<b>Campos Elétrico e Magnético 1-D</b> . . . . .	29
2.2.4.1	Componentes dos campos elétrico e magnético no domínio espacial . . . . .	29
2.2.4.2	Componentes do campos elétrico fonte . . . . .	32
2.3	O MCSEM 1D . . . . .	34
2.3.1	<b>Geometria do Levantamento MCSEM</b> . . . . .	34
3	<b>O MCSEM 2.5-D</b> . . . . .	36
3.1	INTRODUÇÃO . . . . .	36
3.2	FORMULAÇÃO MATEMÁTICA DO MCSEM 2.5-D . . . . .	36
3.2.1	<b>Solução Via Elementos Finitos</b> . . . . .	39
4	<b>RESULTADOS DO MCSEM 2.5-D</b> . . . . .	51
4.1	VALIDAÇÃO DO MÉTODO . . . . .	51
4.2	RESPOSTAS . . . . .	51
5	<b>CONCLUSÕES</b> . . . . .	60
	<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	62

# 1 INTRODUÇÃO

Os métodos geofísicos são baseados em estudo da propagação de campos no interior da terra entre estes, um dos mais estudados são os campos eletromagnéticos tanto aqueles gerados por fontes naturais como o método Magnetotelúrico (MT) ou artificiais, fonte controlada eletromagnética (CSEM).

Hoje os métodos EM são atrativos para a indústria de petróleo como uma ferramenta complementar aos métodos sísmicos. Dentre a variedade de métodos EM este trabalho irá tratar de um, que nos dias atuais firmou-se como técnica complementar a Sísmica na prospecção de hidrocarbonetos. Este método é o marinho de fonte eletromagnética controlada (MCSEM).

O MCSEM é uma técnica aplicada prospecção de hidrocarbonetos em regiões de águas profundas (EIDESMO et al.,2002). O principal motivo para o desenvolvimento desta técnica é diminuir os custos na exploração de hidrocarbonetos, já que a perfuração de um poço representa um grande gasto tornando-se necessário o desenvolvimentos de novas técnicas. A indústria do petróleo utiliza a Sísmica como principal método utilizado na detecção de reservatórios de hidrocarbones, mas este não é totalmente eficaz, pois falha sob certas condições (HESTHAMMER, 2005). A indústria tem utilizado o MCSEM para auxiliar a sísmica resolvendo as possíveis ambiguidades na interpretação dos dados de campo. Assim é necessário um desenvolvimento completo da modelagem direta dos dados MCSEM que é ponto de partida para a modelagem inversa.

Na literatura já encontramos alguns trabalhos referentes a modelagem do MCSEM 2.5-D como um algoritmo de elementos finito adaptativo (LI; KEY, 2007). Um outro trabalho relevante mostra que a batimetria afeta as medidas nas componentes elétrica e magnética com diferentes intensidades (LI; CONSTABLE, 2007). Além destes encontramos um algoritmo de elementos finitos 2.5-D adaptativo que utiliza computação em paralelo além de buscar uma melhor performance em relação ao tempo de processamento (KEY; OVALL, 2011).

## 1.1 OBJETIVOS

Neste trabalho, o objetivo buscado é implementar a modelagem numérica direta de dados MCSEM 2.5-D, em ambiente estratificado horizontalmente, via método dos elementos finitos (MEF) para um transmissor móvel.

## 1.2 DESCRIÇÃO DA DISSERTAÇÃO

Nesta secção apresentaremos uma descrição desta dissertação intitulada "A modelagem de dados MCSEM 2.5D".

**Capítulo 1-** No capítulo 1 apresentamos uma breve introdução a respeito do método MCSEM, e uma introdução sobre o método.

**Capítulo 2-** No capítulo 2 mostramos a formulação teórica do MCSEM tomando como ponto de partida as equações de Maxwell, em seguida falando sobre a decomposição dos campos eletromagnéticos em primário e secundário além de utilizamos os potenciais de Schelkunoff para auxiliar na obtenção dos campo primários.

**Capítulo 3-** Aqui apresentamos a formulação matemática do MCSEM via método de elementos finitos aplicado a um sistema de equações diferenciais.

**Capítulo 4-** Apresentaremos as respostas obtidas na modelagem numérica do MCSEM.

**Capítulo 5-** Aqui falaremos das conclusões e recomendações para trabalhos futuros.

## 2 MCSEM 1-D

### 2.1 INTRODUÇÃO

A modelagem numérica do MCSEM tem suas bases teóricas na teoria eletromagnética então para implementarmos tal modelagem nos partiremos das equações de Maxwell juntamente com as equações constitutivas para meios isotrópicos. Das grandezas; permissividade elétrica, permissividade magnética e condutividade elétrica, consideraremos as duas primeiras como constantes e iguais, respectivamente, a permissividade elétrica e magnética no vácuo enquanto que a última irá variar em duas dimensões. A ideia básica do MCSEM é utilizar a energia eletromagnética emitida pelo dipolo elétrico horizontal (DEH) para identificar corpos resistivos em ambientes condutivos possibilitando a detecção e caracterização direta de reservatórios de hidrocarbonetos.

Os levantamentos no método MCSEM são realizados para um transmissor móvel e vários receptores depositados no leito oceânico, o fato do DEH ser móvel implica em colocar, na modelagem numérica, um transmissor em diferentes posições e para cada uma destas são obtidas respostas diferentes nos receptores.

O MCSEM utiliza como fonte de energia eletromagnética um DEH móvel próximo ao fundo do mar e um conjunto de receptores fixos localizados no fundo do mar que medem a amplitude e fase do sinal que se propaga na lamina d'água e solo oceânico como mostra a Figura 2.1. A resposta que é medida nos receptores depende da resistividade das estruturas presentes no solo oceânico. A faixa de frequência do sinal eletromagnético emitido pelo DEH é de 0,01 a 10 Hz (ANDRÉIS, 2008).

### 2.2 EQUAÇÕES DE MAXWELL NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA

Tomamos como ponto de partida as equações de Maxwell para a elaborarmos da formulação matemática do MCSEM. Na literatura as equações de Maxwell são estabelecidas no domínio do tempo. Nesta dissertação utilizaremos as equações de Maxwell no domínio da frequência (STRATON, 1941).

Para obtermos as leis de Faraday e Ampère no domínio da frequência faremos uso da transformada de Fourier (WARD; HOHMANN, 1988), expressa na equação a seguir

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{f}(\mathbf{r}, t) e^{-i\omega t} dt \quad (2.1)$$

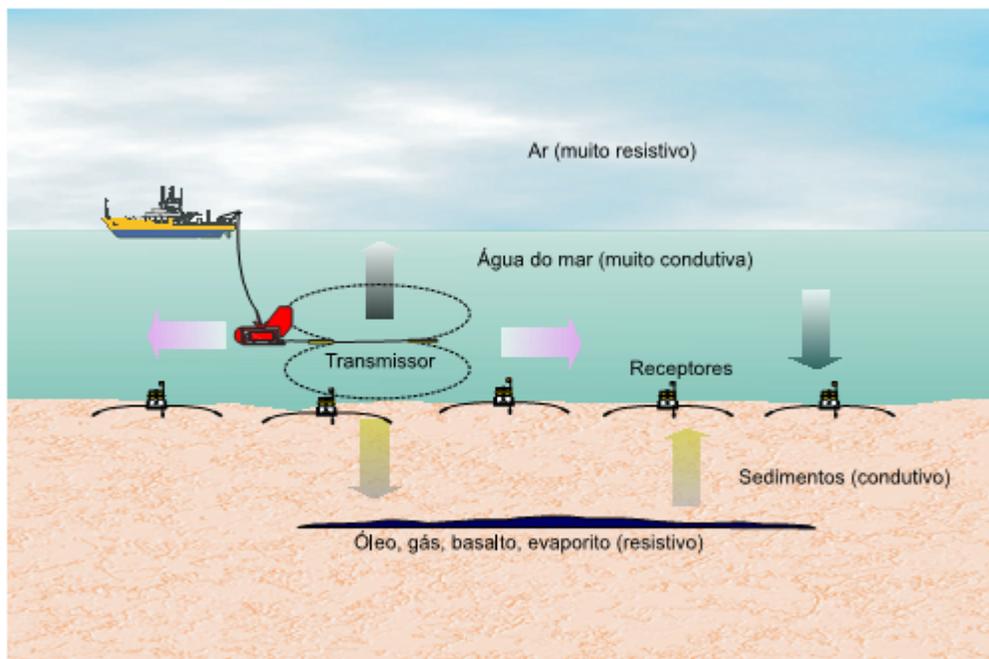
para obtermos

$$\nabla \times \mathbf{E} = -i\omega\mu\mathbf{H} - \mathbf{M} \quad (2.2)$$

e

$$\nabla \times \mathbf{H} = \sigma\mathbf{E} + \mathbf{J}, \quad (2.3)$$

que são as leis de Faraday e Ampère no domínio da frequência. Nas expressões (2.2) e (2.3)  $\mathbf{E}$  representa o campo elétrico,  $\mathbf{H}$  é o campo magnético,  $\mathbf{J}$  é a densidade de corrente elétrica,  $\mathbf{M}$  é a densidade de corrente magnética, introduzida aqui apenas como artifício matemático já que isto implica na existência de cargas magnéticas (WARD; HOHMANN, 1988), algo que não apresenta comprovação experimental,  $\sigma$  é a condutividade elétrica, e  $\mu$  permissividade magnética.



Fonte: Souza, (2007)

Figura 2.1. Ilustração do método MCSEM.

Os campos presentes em (2.2) e (2.3) existem devido a uma superposição de fontes elétricas e magnéticas, isto nos permite escrever

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_m + \mathbf{E}_e \quad (2.4)$$

e

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_m + \mathbf{H}_e. \quad (2.5)$$

O campo eletromagnético é formado pelos pares de funções vetoriais  $[\mathbf{E}_m, \mathbf{H}_m]$  e  $[\mathbf{E}_e, \mathbf{H}_e]$ . Para o par de  $[\mathbf{E}_m, \mathbf{H}_m]$  a densidade de corrente elétrica  $\mathbf{J}$  é zero e para  $[\mathbf{E}_e, \mathbf{H}_e]$  a densidade de corrente magnética  $\mathbf{M}$  é zero.

Então podemos desmembrar as equações (2.2) e (2.3) para fonte magnética

$$\nabla \times \mathbf{E}_m = -i\omega\mu\mathbf{H}_m - \mathbf{M}, \quad (2.6)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}_m = \sigma\mathbf{E}_m \quad (2.7)$$

e para fonte elétrica

$$\nabla \times \mathbf{E}_e = -i\omega\mu\mathbf{H}_e \quad (2.8)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}_e = \sigma\mathbf{E}_e + \mathbf{J}. \quad (2.9)$$

Definido os dois pares de equações que descrevem o problema do MCSEM o próximo passo é decompor os campos  $\mathbf{E}_e$ ,  $\mathbf{H}_e$  e  $\mathbf{E}_m$ ,  $\mathbf{H}_m$  em duas componentes uma para o campo primário e outra para o secundário, respectivamente,

$$\mathbf{E}_e = \mathbf{E}_e^p + \mathbf{E}_e^s, \quad (2.10)$$

$$\mathbf{E}_m = \mathbf{E}_m^p + \mathbf{E}_m^s, \quad (2.11)$$

$$\mathbf{H}_e = \mathbf{H}_e^p + \mathbf{H}_e^s, \quad (2.12)$$

$$\mathbf{H}_m = \mathbf{H}_m^p + \mathbf{H}_m^s, \quad (2.13)$$

e desmembrando a condutividade total  $\sigma$  em  $\sigma^p$  devido ao meio estratificado 1-D e  $\Delta\sigma$  devido ao contraste condutividade entre a heterogeneidade e modelo primário

$$\sigma = \sigma^p + \Delta\sigma \quad (2.14)$$

e considerando que não há variação na permeabilidade magnética, e que o campo primário é gerado pelas correntes nos transmissores além de satisfazer as equações para fonte elétrica

$$\nabla \times \mathbf{E}_e^p = -i\omega\mu\mathbf{H}_e^p, \quad (2.15)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}_e^p = \sigma^p\mathbf{E}_e^p + \mathbf{J} \quad (2.16)$$

e para fonte magnética

$$\nabla \times \mathbf{E}_m^p = -i\omega\mu\mathbf{H}_m^p - \mathbf{M} \quad (2.17)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}_m^p = \sigma^p\mathbf{E}_m^p. \quad (2.18)$$

O campo secundário tem como fonte as correntes dentro das heterogeneidades e depende do campo primário sendo expresso por

$$\nabla \times \mathbf{E}_e^s = -i\omega\mu\mathbf{H}_e^s \quad (2.19)$$

e

$$\nabla \times \mathbf{H}_e^s = \sigma\mathbf{E}_e^s + \Delta\sigma\mathbf{E}_e^p. \quad (2.20)$$

e para o análogo magnético

$$\nabla \times \mathbf{E}_m^s = -i\omega\mu\mathbf{H}_m^s \quad (2.21)$$

e

$$\nabla \times \mathbf{H}_m^s = \sigma\mathbf{E}_m^s + \Delta\sigma\mathbf{E}_m^p. \quad (2.22)$$

As expressões (2.15),(2.16),(2.17) e (2.18) para o campo primário serão resolvidos com o auxilio dos potenciais de Schelkunoff enquanto que as equações (2.19),(2.20),(2.21) e (2.22) para os campos secundários podem ser adicionadas e reunidas em um par lei de Ampère e Faraday

$$\nabla \times \mathbf{E}^s = -i\omega\mu\mathbf{H}^s \quad (2.23)$$

e

$$\nabla \times \mathbf{H}^s = \sigma\mathbf{E}^s + \Delta\sigma\mathbf{E}^p. \quad (2.24)$$

### 2.2.1 Potencial de Schelkunoff

Como foi dito na seção anterior utilizaremos os potenciais de Schelkunoff (WARD; HOHMANN, 1988) para resolvermos as equações diferenciais mostrando a relação entre os campos elétrico e magnético com os campos potenciais.

Tomando o divergente das expressões (2.15),(2.16),(2.17) e (2.18) obtemos

$$\nabla \cdot \mathbf{H}_e = 0, \quad (2.25)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E}_e = -\frac{\nabla \cdot \mathbf{J}_i}{\sigma}, \quad (2.26)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H}_m = -\frac{\nabla \cdot \mathbf{M}_i}{i\omega\mu} \quad (2.27)$$

e

$$\nabla \cdot \mathbf{E}_m = 0, \quad (2.28)$$

podemos escrever (2.25) e (2.28) como o rotacional de campos potenciais

$$\mathbf{E}_m = -\nabla \times \mathbf{F} \quad (2.29)$$

e

$$\mathbf{H}_e = \nabla \times \mathbf{A}, \quad (2.30)$$

onde o potencial (2.29) representa o modo TE (transversal elétrico) e o potencial (2.30) esta associado ao modo TM (transversal magnético).

Podemos escrever (2.18) como

$$\nabla \times (\mathbf{H}_m + \sigma \mathbf{F}) = 0, \quad (2.31)$$

então o termo  $\mathbf{H}_m + \sigma \mathbf{F}$  da expressão (2.31) pode ser escrito como um gradiente de uma função escalar

$$\mathbf{H}_m + \sigma \mathbf{F} = -\nabla U. \quad (2.32)$$

Com as expressões (2.29) e (2.32) e com

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = -i\omega\mu U$$

que representa o calibre de Lorentz podemos escrever (2.17) em termos do potencial vetor  $\mathbf{F}$  como

$$(\nabla^2 + k^2)\mathbf{F} = -\mathbf{M}_i, \quad (2.33)$$

que é a equação de Helmholtz associada ao modo TE e  $k$  representa o número de onda.

Podemos proceder do mesmo modo que fizemos para obter a equação de Helmholtz referente ao modo TE no caso do modo TM escrevendo (2.15) como

$$\nabla \times (\mathbf{E}_e + i\omega\mu\mathbf{A}) = 0, \quad (2.34)$$

então o termo  $\mathbf{E}_e + i\omega\mu\mathbf{A}$  da expressão (2.34) pode ser escrito como um gradiente de uma

função escalar arbitrária

$$\mathbf{E}_e + i\omega\mu\mathbf{A} = -\nabla V. \quad (2.35)$$

Com as expressões (2.30) e (2.35) e com

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = -\sigma V$$

que representa o calibre de Lorentz podemos escrever (2.16) em termos do potencial vetor  $\mathbf{A}$  como

$$(\nabla^2 + k^2)\mathbf{A} = -\mathbf{J}_i, \quad (2.36)$$

que é a equação de Helmholtz associada ao modo TM e  $k$  representa o número de onda.

Os campos elétrico e magnéticos totais podem ser recuperados através da substituição de (2.29) e (2.35) em (2.4) resultando em

$$\mathbf{E} = -\nabla \times \mathbf{F} - i\omega\mu\mathbf{A} + \frac{1}{\sigma}\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) \quad (2.37)$$

e por (2.30) e (2.32) em (2.5) resultando em

$$\mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A} - \sigma\mathbf{F} + \frac{1}{i\omega\mu}\nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}). \quad (2.38)$$

Considerando que os potenciais  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{F}$  possuem apenas as componentes na direção  $z$  como em (WARD; HOHMANN, 1988)

$$\mathbf{A} = A_z \mathbf{k} \quad \text{e} \quad \mathbf{F} = F_z \mathbf{k}.$$

Expandindo as expressões (2.37) e (2.38) obtemos as componentes dos campos  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{H}$  em função dos potenciais dadas a seguir:

$$E_x = \frac{1}{\eta} \frac{\partial^2 A_z}{\partial x \partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial y}, \quad (2.39)$$

$$E_y = \frac{1}{\eta} \frac{\partial^2 A_z}{\partial y \partial z} + \frac{\partial F_z}{\partial x}, \quad (2.40)$$

$$E_z = \frac{1}{\eta} \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) A_z, \quad (2.41)$$

$$H_x = \frac{1}{i\omega\mu} \frac{\partial^2 F_z}{\partial x \partial z} + \frac{\partial A_z}{\partial y}, \quad (2.42)$$

$$H_y = \frac{1}{i\omega\mu} \frac{\partial^2 F_z}{\partial y \partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \quad (2.43)$$

$$H_z = \frac{1}{i\omega\mu} \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) F_z. \quad (2.44)$$

Para separar as componentes dos campos nos modos TM e TE basta considerar, no caso do modo TM,  $\mathbf{F} = 0$  e, no caso do modo TE,  $\mathbf{A} = 0$ .

## 2.2.2 Modo TM

Como foi dito anteriormente o MCSEM utiliza como fonte um DEH, isso possibilita a redução da equação diferencial vetorial a uma equação diferencial escalar, adotaremos como sistema de coordenadas o sistema cartesiano e assumiremos que o DEH esta orientado na direção  $x$  e considerando o vetor densidade de corrente elétrica como

$$J_x = -I(\omega) ds_x \delta(x) \delta(y) \delta(z). \quad (2.45)$$

então a equação escalar diferencial de Helmholtz a ser resolvida para uma região com fonte é

$$(\nabla^2 + k^2)A_x = -I(\omega) ds_x \delta(x) \delta(y) \delta(z), \quad (2.46)$$

no domínio  $(x, y, z)$ . Para uma região livre de fonte temos

$$(\nabla^2 + k^2)A_x = 0.$$

O procedimento adotado por (RIJO, 2004) consiste de fazer uma transformada tripla de Fourier do domínio  $(x, y, z)$  para  $(k_x, k_y, k_z)$  resolver para  $\hat{\hat{A}}_x$  em seguida fazer a transformada inversa de Fourier do domínio  $(k_x, k_y, k_z)$  para  $(k_x, k_y, z)$  onde temos como solução

$$\hat{\hat{A}}_x(k_x, k_y, z) = \begin{cases} I(\omega) ds_x \frac{e^{u(z-z_t)}}{2u}, & 0 > h_t > z \quad \text{ou} \quad 0 < z < z_t, \\ I(\omega) ds_x \frac{e^{-u(z-z_t)}}{2u}, & 0 > z > h_t \quad \text{ou} \quad 0 < z_t < z, \end{cases} \quad (2.47)$$

onde  $u$  é a constante de propagação dada por  $u^2 = k_x^2 + k_y^2 - k^2$  de tal forma que  $Re(u) > 0$ ,  $ds_x$  é o momento de dipolo,  $I(\omega)$  é a corrente e  $h_t$  é a coordenada em  $z$  do DEH. A solução apresentada é para um meio homogêneo, ilimitado e isotrópico.

No caso do DEH o potencial  $\mathbf{A}$  apresenta apenas componente na direção  $x$ . Queremos determinar a componente do campo na direção  $z$  devido a presença de um dipolo elétrico.

Para isso escrevemos a componente do campo na direção  $z$  em função da componente na direção  $x$  do potencial  $\mathbf{A}$

$$E_z = \frac{1}{\eta} \frac{\partial^2 A_x}{\partial z \partial x} \quad (2.48)$$

que no domínio  $(k_x, k_y, z)$  é

$$\hat{E}_z = \frac{ik_x}{\eta} \frac{\partial \hat{A}_x}{\partial z} \quad (2.49)$$

Então

$$\hat{E}_z(k_x, k_y, z) = \begin{cases} I(\omega) ds_x \frac{ik_x}{2\eta} e^{u(z-h_1)}, & 0 > h_1 > z \quad \text{ou} \quad 0 < z < h_1, \\ -I(\omega) ds_x \frac{ik_x}{2\eta} e^{-u(z-h_1)}, & 0 > z > h_1 \quad \text{ou} \quad 0 < h_1 < z, \end{cases} \quad (2.50)$$

O potencial incidente

$$\hat{A}_z^{INC}(k_x, k_y, z) = \begin{cases} I(\omega) ds_x \frac{ik_x}{2(k_x^2 + k_y^2)} e^{u(z-h_1)}, & 0 > h_1 > z \quad \text{ou} \quad 0 < z < h_1, \\ -I(\omega) ds_x \frac{ik_x}{2(k_x^2 + k_y^2)} e^{-u(z-h_1)}, & 0 > z > h_1 \quad \text{ou} \quad 0 < h_1 < z, \end{cases} \quad (2.51)$$

Para o modelo teórico representado na Figura 2.2 o potencial em cada camada no domínio  $(k_x, k_y, z)$  será dado pelas somas das componentes diretas e refletidas. Desta forma teremos

$$\hat{A}_z^{(0)} = A_0 e^{u_0 z}, \quad z < 0 \quad (2.52)$$

$$\hat{A}_{z(-)}^{(1)} = A_1 \left( e^{u_1 z} + R_{TM}^{(1)-} e^{-u_1 z} - R_{TM}^{(1)+} e^{u_1(z-2h_2)} \right), \quad 0 < z < h_1 \quad (2.53)$$

$$\hat{A}_{z(+)}^{(1)} = A_1 \left( -e^{-u_1(z-2h_1)} + R_{TM}^{(1)-} e^{-u_1 z} - R_{TM}^{(1)+} e^{u_1(z-2h_2)} \right), \quad h_1 < z < H_1 \quad (2.54)$$

$$\hat{A}_z^{(j)} = A_j \left( e^{-u_j(z-z_{j-1})} + R_{TM}^{(j)} e^{u_j(z-z_j-H_j)} \right), \quad H_{j-1} < z < H_j \quad (2.55)$$

$$\hat{A}_z^{(j+1)} = A_{j+1} \left( e^{-u_{j+1}(z-z_j)} + R_{TM}^{(j+1)} e^{u_{j+1}(z-z_{j+1}-H_{j+1})} \right), \quad H_j < z < H_{j+1} \quad (2.56)$$

$$\hat{A}_z^{(N)} = A_N e^{-u_N(z-z_{N-1})}, \quad z > z_{N-1} \quad (2.57)$$

onde  $h_1$  representa a profundidade do transmissor em relação a origem e  $h_2$  é a distancia da base da camada onde se encontra o transmissor e os fatores  $R_{TM}^{(1)-}$ ,  $R_{TM}^{(1)+}$  e  $R_{TM}^{(j)}$  representam os coeficientes de reflexão nas interfaces superior e inferior na camada fonte e em uma camada qualquer, respectivamente. O potencial incidente  $A_1$  devido a presença de um DEH em um

espaço homogêneo, isotrópico e ilimitado é dado segundo (RIJO, 2004) por

$$A_1 = I(\omega) ds_x \frac{ik_x}{2(k_x^2 + k_y^2)} e^{-u_1 h_1} \quad (2.58)$$

Resta, agora, determinar os coeficientes de reflexão  $R_{TM}^{(1)-}$ ,  $R_{TM}^{(1)+}$  e  $R_{TM}^{(j)}$  e os coeficientes de transmissão  $A_0$ ,  $A_2$  e  $A_j$  para isto precisamos saber o comportamento desses potenciais na interface de dois meios de propriedades distintas para encontrar esse coeficientes utilizaremos a metodologia adota por (SANTOS, 2007) onde os coeficientes foram encontrados para um dipolo magnético horizontal.

Para determinarmos o coeficientes de reflexão  $R_{TM}^{(1)-}$  e  $R_{TM}^{(1)+}$  usaremos a expressão a seguir que representa a impedância de superfície na fronteira entre o Ar e o Mar

$$\hat{Z}_0 = - \frac{\hat{E}_{x,TM(-)}^{(1)} \Big|_{z=0}}{\hat{H}_{y,TM(-)}^{(1)} \Big|_{z=0}}. \quad (2.59)$$

e outra que representa a impedância de superfície na fronteira mar e sedimentos

$$\hat{Z}_2 = \frac{\hat{E}_{x,TM(+)}^{(1)} \Big|_{z=z_1}}{\hat{H}_{y,TM(+)}^{(1)} \Big|_{z=z_1}} \quad (2.60)$$

Definida a impedâncias em termos das componentes na direção  $x$  e  $y$  para as interfaces superior  $\hat{E}_{x,TM(-)}^{(1)} \Big|_{z=0}$ ,  $\hat{H}_{y,TM(-)}^{(1)} \Big|_{z=0}$  e inferior  $\hat{E}_{x,TM(+)}^{(1)} \Big|_{z=z_1}$ ,  $\hat{H}_{y,TM(+)}^{(1)} \Big|_{z=z_1}$  na fronteira que são dados pela expressão

$$\hat{E}_{x,TM(-)}^{(1)} \Big|_{z=0} = ik_x Z_1 A_1 \left( 1 - R_{TM}^{(1)-} - R_{TM}^{(1)+} e^{-2u_1 h_2} \right), \quad (2.61)$$

$$\hat{H}_{y,TM(-)}^{(1)} \Big|_{z=0} = -ik_x A_1 \left( 1 + R_{TM}^{(1)-} - R_{TM}^{(1)+} e^{-2u_1 h_2} \right), \quad (2.62)$$

$$\hat{E}_{x,TM(+)}^{(1)} \Big|_{z=z_1} = ik_x Z_1 A_1 \left( e^{-u_1(z_1-2h_1)} - R_{TM}^{(1)-} e^{-u_1 z_1} - R_{TM}^{(1)+} e^{u_1(z_1-2h_2)} \right) \quad (2.63)$$

$$\hat{H}_{y,TM(+)}^{(1)} \Big|_{z=z_1} = ik_x A_1 \left( e^{-u_1(z_1-2h_1)} - R_{TM}^{(1)-} e^{-u_1 z_1} + R_{TM}^{(1)+} e^{u_1(z_1-2h_2)} \right). \quad (2.64)$$

Então da substituição de (2.61) e (2.62) em (2.59) obtemos a seguinte equação

$$R_{TM}^{(1)-}(Z_1 + \hat{Z}_0) = (Z_1 - \hat{Z}_0) - (Z_1 - \hat{Z}_0) R_{TM}^{(1)+} e^{-2u_1 h_2} \quad (2.65)$$

e substituição de (2.63) e (2.64) em (2.60) obtemos

$$(Z_1 - \hat{Z}_2)e^{-u_1(z_1-2h_1)} - (Z_1 - \hat{Z}_2)R_{TM}^{(1)-}e^{-u_1z_1} = (Z_1 + \hat{Z}_2)R_{TM}^{(1)+}e^{u_1(z_1-2h_2)}. \quad (2.66)$$

As expressões (2.65) e (2.66) formam um sistema de equações do 1º grau que apresenta como solução os coeficientes de reflexão na camada onde esta situada a fonte, tais soluções são

$$R_{TM}^{(1)+} = \frac{(Z_1 + \hat{Z}_0)(Z_1 - \hat{Z}_2) - (Z_1 - \hat{Z}_0)(Z_1 - \hat{Z}_2)e^{-2u_1h_1}}{(Z_1 + \hat{Z}_0)(Z_1 + \hat{Z}_2) - (Z_1 - \hat{Z}_0)(Z_1 - \hat{Z}_2)e^{-2u_1H_1}} \quad (2.67)$$

e

$$R_{TM}^{(1)-} = \frac{(Z_1 - \hat{Z}_0)(Z_1 + \hat{Z}_2) - (Z_1 - \hat{Z}_0)(Z_1 - \hat{Z}_2)e^{-2u_1h_2}}{(Z_1 + \hat{Z}_0)(Z_1 + \hat{Z}_2) - (Z_1 - \hat{Z}_0)(Z_1 - \hat{Z}_2)e^{-2u_1H_1}} \quad (2.68)$$

Para determinarmos o coeficiente de reflexão em uma camada  $j$  utilizamos a impedância de superfície na interface  $j$  que é definida em função das componentes do campo acima da interface em consideração. A impedância na interface é dada por

$$\hat{Z}_{j+1} = \frac{\hat{E}_{x,TM}^{(j)} \Big|_{z=z_j}}{\hat{H}_{y,TM}^{(j)} \Big|_{z=z_j}} \quad (2.69)$$

As componentes dos campos elétrico na direção  $x$  e magnético na direção  $y$  na interface  $j$  são dados pelas expressões

$$\hat{E}_{x,TM}^{(j)} \Big|_{z=z_j} = -ik_x Z_j A_j e^{-u_j H_j} \left(1 - R_{TM}^{(j)}\right) \quad (2.70)$$

$$\hat{H}_{y,TM}^{(j)} \Big|_{z=z_j} = -ik_x A_j e^{-u_j H_j} \left(1 + R_{TM}^{(j)}\right) \quad (2.71)$$

Substituindo (2.70) e (2.71) em (2.69) obtemos o coeficiente de reflexão na camada  $j$  que é dado por

$$R_{TM}^{(j)} = \frac{Z_j - \hat{Z}_{j+1}}{Z_j + \hat{Z}_{j+1}} \quad (2.72)$$

Escrevemos os coeficientes de reflexão em termos da impedância de superfície e intrínseca do meio para tornar a expressão mais gerais e abrangendo as situações em que o substrato é um semi-espaco infinito ou um meio estratificado (camadas plano-paralelas). Para o caso do semi-espaco infinito consideramos  $\hat{Z}_2 = Z_2$  e caso o meio seja estratificado a impedância de

superfície será obtida por

$$\hat{Z}_{j+1} = Z_{j+1}\Delta_{j+1} \quad (2.73)$$

onde  $\delta_{j+1}$  representa um fator associado a estratificação do meio e é dado por

$$\Delta_{j+1} = \frac{\hat{Z}_{j+2} + Z_{j+1} \tanh[u_{j+1}H_{j+1}]}{Z_{j+1} + \hat{Z}_{j+2} \tanh[u_{j+1}H_{j+1}]}, \quad j = 2, \dots, N-1 \quad (2.74)$$

Na ultima camada as impedâncias de superfície e aparentes são

$$\hat{Z}_N = Z_N \quad (2.75)$$

A impedância intrínseca de cada camada é dada por

$$Z_j = \frac{u_j}{\eta_j} \quad (2.76)$$

como foi apresentada por (SANTOS, 2007), sendo que  $u_j^2 = k_x^2 + k_y^2 - k_j^2$  e  $k_j^2 = -\zeta\eta$ , onde  $N$  representa o número de camadas.

Para determinarmos os coeficientes de transmissão iremos explorar a continuidade dos campos potenciais, primeiro na interface Mar/substrato

$$\begin{aligned} \hat{A}_{z(+)}^{(1)} \Big|_{z=z_1} &= \hat{A}_z^{(2)} \Big|_{z=z_1} \\ \frac{1}{\eta_1} \frac{\partial \hat{A}_{z(+)}^{(1)}}{\partial z} \Big|_{z=z_1} &= \frac{1}{\eta_2} \frac{\partial \hat{A}_z^{(2)}}{\partial z} \Big|_{z=z_1} \end{aligned}$$

Destas expressões obtemos um sistema que resolvido para o coeficiente de transmissão  $\hat{A}_z^{(2)}$  obtemos

$$A_2 = \frac{-2Z_1 A_1 R_{TM}^{(1)+} e^{u_1(z_1-2h_2)}}{(Z_1 - Z_2) + (Z_1 + Z_2) R_{TM}^{(2)} e^{-2u_2 H_2}} \quad (2.77)$$

Na interface  $j$  de acordo com a expressão da continuidade dos campos potenciais

$$\hat{A}_z^{(j)} \Big|_{z=z_j} = \hat{A}_z^{(j+1)} \Big|_{z=z_j} \quad (2.78)$$

$$A_{j+1} = A_j \frac{(1 + R_{TM}^{(j)}) e^{-u_j H_j}}{(1 + R_{TM}^{(j+1)}) e^{-2u_{j+1} H_{j+1}}}. \quad (2.79)$$

De posse desses coeficientes de transmissão e reflexão podemos calcular as componentes dos campos elétrico e magnético para o modo TM.

### 2.2.3 Modo TE

No caso do DEH o potencial  $\mathbf{A}$  apresenta apenas componente na direção  $x$ . Queremos determinar a componente do campo na direção  $z$  devido a presença de um dipolo elétrico. Para isso escrevemos a componente do campo na direção  $z$  em função da componente na direção  $x$  do potencial  $\mathbf{A}$

$$H_z = -\frac{\partial A_x}{\partial y} \quad (2.80)$$

que no domínio  $(k_x, k_y, z)$  é

$$\hat{H}_z = -ik_y \hat{A}_x \quad (2.81)$$

$$\hat{H}_z(k_x, k_y, z) = \begin{cases} -I(\omega) ds_x \frac{ik_y}{2u} e^{u(z-h_1)}, & 0 > h_1 > z \quad \text{ou} \quad 0 < z < h_1, \\ -I(\omega) ds_x \frac{ik_y}{2u} e^{-u(z-h_1)}, & 0 > z > h_1 \quad \text{ou} \quad 0 < h_1 < z, \end{cases} \quad (2.82)$$

O potencial incidente

$$\hat{F}_z^{INC}(k_x, k_y, z) = \begin{cases} -I(\omega) ds_x \frac{ik_y}{2Y(k_x^2 + k_y^2)} e^{u(z-h_1)}, & 0 > h_1 > z \quad \text{ou} \quad 0 < z < h_0, \\ -I(\omega) ds_x \frac{ik_y}{2Y(k_x^2 + k_y^2)} e^{-u(z-h_1)}, & 0 > z > h_1 \quad \text{ou} \quad 0 < h_1 < z, \end{cases} \quad (2.83)$$

onde  $u$  é a constante de propagação dada por  $u^2 = k_x^2 + k_y^2 - k^2$  de tal forma que  $Re(u) > 0$ ,  $ds_x$  é o momento de dipolo,  $I(\omega)$  é a corrente e  $h_0$  é a profundidade do DEH. A solução apresentada é para um meio homogêneo, ilimitado e isotrópico.

Para o nosso modelo teórico o potencial em cada camada no domínio  $(k_x, k_y, z)$  será dado pelas somas das componentes diretas e refletidas, vale ressaltar que os potenciais para o problema que esta sendo solucionado aqui na solução do espaço infinito, homogêneo e isotrópico. Desta forma teremos

$$\hat{F}_z^{(0)} = F_0 e^{u_0 z}, \quad z < 0 \quad (2.84)$$

$$\hat{F}_{z(-)}^{(1)} = F_1 \left( e^{u_1 z} + R_{TE}^{(1)-} e^{-u_1 z} + R_{TE}^{(1)+} e^{u_1(z-2h_2)} \right), \quad 0 < z < h_1 \quad (2.85)$$

$$\hat{F}_{z(+)}^{(1)} = F_1 \left( e^{-u_1(z-2h_1)} + R_{TE}^{(1)-} e^{-u_1 z} + R_{TE}^{(1)+} e^{u_1(z-2h_2)} \right), \quad h_1 < z < H_1 \quad (2.86)$$

$$\hat{F}_z^{(j)} = F_j \left( e^{-u_j(z-z_{j-1})} + R_{TE}^{(j)} e^{u_j(z-z_j-H_j)} \right), \quad H_{j-1} < z < H_j \quad (2.87)$$

$$\hat{F}_z^{(j+1)} = F_{j+1} \left( e^{-u_{j+1}(z-z_j)} + R_{TE}^{(j+1)} e^{u_{j+1}(z-z_{j+1}-H_{j+1})} \right), \quad H_j < z < H_{j+1} \quad (2.88)$$

$$\hat{F}_z^{(N)} = F_N e^{-u_N(z-z_{N-1})} \quad z > H_{N-1} \quad (2.89)$$

onde  $h_1$  representa a profundidade do transmissor em relação a origem e  $h_2$  é a distancia da base da camada onde se encontra o transmissor e os fatores  $R_{TE}^{(1)-}$ ,  $R_{TE}^{(1)+}$  e  $R_{TE}^{(j)}$  representam os coeficientes de reflexão nas interfaces superior e inferior na camada fonte e em uma camada qualquer, respectivamente. O potencial incidente  $A_1$  devido a presença de um DEH em um espaço homogêneo, isotrópico e ilimitado é dado segundo (RIJO, 2004) por

$$F_1 = -I(\omega) ds_x \frac{ik_y}{2Y_1(k_x^2 + k_y^2)} e^{-u_1 h_1} \quad (2.90)$$

Resta, agora, determinar os coeficientes de reflexão  $R_{TE}^{(1)-}$ ,  $R_{TE}^{(1)+}$  e  $R_{TE}^{(j)}$  e os coeficientes de transmissão  $F_0$ ,  $F_2$  e  $F_j$  para isto precisamos saber o comportamento desses potenciais na interface de dois meios de propriedades distintas para encontrar esse coeficientes utilizaremos a metodologia adota por (SANTOS, 2007) onde os coeficientes foram encontrados para um dipolo magnético horizontal.

Para determinarmos o coeficientes de reflexão  $R_{TE}^{(1)-}$  e  $R_{TE}^{(1)+}$  usaremos a expressão a seguir que representa a admitância de superfície na fronteira entre o Ar e o Mar

$$\hat{Y}_0 = - \frac{\hat{H}_{y,TE(-)}^{(1)} \Big|}{\hat{E}_{x,TE(-)}^{(1)} \Big|_{z=0}}. \quad (2.91)$$

e outra que representa a impedância de superfície na fronteira mar e sedimentos

$$\hat{Y}_2 = \frac{\hat{H}_{y,TE(+)}^{(1)} \Big|}{\hat{E}_{x,TE(+)}^{(1)} \Big|_{z=z_1}} \quad (2.92)$$

Definida a admitâncias em termos das componentes na direção  $x$  e  $y$  para as interfaces superior  $\hat{H}_{y,TE(-)}^{(1)} \Big|_{z=0}$ ,  $\hat{E}_{x,TE(-)}^{(1)} \Big|_{z=0}$  e inferior  $\hat{H}_{y,TE(+)}^{(1)} \Big|_{z=z_1}$ ,  $\hat{E}_{x,TE(+)}^{(1)} \Big|_{z=z_1}$  na fronteira que são

dados pela expressão

$$\hat{H}_{y,TE(-)}^{(1)} \Big|_{z=0} = ik_y Y_1 F_1 \left( 1 - R_{TE}^{(1)-} + R_{TE}^{(1)+} e^{-2u_1 h_2} \right), \quad (2.93)$$

$$\hat{E}_{x,TE(-)}^{(1)} \Big|_{z=0} = -ik_y F_1 \left( 1 + R_{TE}^{(1)-} + R_{TE}^{(1)+} e^{-2u_1 h_2} \right), \quad (2.94)$$

$$\hat{H}_{y,TE(+)}^{(1)} \Big|_{z=z_1} = -ik_y Y_1 F_1 \left( e^{-u_1(z_1-2h_1)} + R_{TE}^{(1)-} e^{-u_1 z_1} - R_{TE}^{(1)+} e^{u_1(z_1-2h_2)} \right) \quad (2.95)$$

$$\hat{E}_{x,TE(+)}^{(1)} \Big|_{z=z_1} = -ik_y F_1 \left( e^{-u_1(z_1-2h_1)} + R_{TE}^{(1)-} e^{-u_1 z_1} + R_{TE}^{(1)+} e^{u_1(z_1-2h_2)} \right). \quad (2.96)$$

Então da substituição de (2.62) e (2.61) em (2.91) obtemos a seguinte equação

$$(Y_1 + \hat{Y}_0) R_{TE}^{(1)-} = (Y_1 - \hat{Y}_0) + (Y_1 - \hat{Y}_0) R_{TE}^{(1)+} e^{-2u_1 h_2} \quad (2.97)$$

e substituição de (2.95) e (2.96) em (2.92) obtemos

$$(Y_1 + \hat{Y}_2) R_{TE}^{(1)+} e^{u_1(z_1-2h_2)} = (Y_1 - \hat{Y}_2) e^{-u_1(z_1-2h_1)} + (Y_1 - \hat{Y}_2) R_{TE}^{(1)-} e^{-u_1 z_1} \quad (2.98)$$

As expressões (2.97) e (2.98) formam um sistema de equações do 1º grau que apresenta como solução os coeficientes de reflexão na camada onde esta situada a fonte, tais soluções são

$$R_{TE}^{(1)+} = \frac{(Y_1 + \hat{Y}_0)(Y_1 - \hat{Y}_2) + (Y_1 - \hat{Y}_0)(Y_1 - \hat{Y}_2) e^{-2u_1 h_1}}{(Y_1 + \hat{Y}_0)(Y_1 + \hat{Y}_2) - (Y_1 - \hat{Y}_0)(Y_1 - \hat{Y}_2) e^{-2u_1 H_1}} \quad (2.99)$$

e

$$R_{TE}^{(1)-} = \frac{(Y_1 - \hat{Y}_0)(Y_1 + \hat{Y}_2) + (Y_1 - \hat{Y}_0)(Y_1 - \hat{Y}_2) e^{-2u_1 h_2}}{(Y_1 + \hat{Y}_0)(Y_1 + \hat{Y}_2) - (Y_1 - \hat{Y}_0)(Y_1 - \hat{Y}_2) e^{-2u_1 H_1}} \quad (2.100)$$

Para determinarmos o coeficiente de reflexão em uma camada  $j$  utilizamos a admitância de superfície na interface  $j$  que é definida em função das componentes do campo acima da interface em consideração. A admitância na interface é dada por

$$\hat{Y}_{j+1} = \frac{\hat{H}_{y,TE}^{(j)} \Big|}{\hat{E}_{x,TE}^{(j)} \Big|_{z=z_j}} \quad (2.101)$$

As componentes dos campos para elétrico na direção  $x$  e magnético na direção  $y$  na

camada  $j$  são dados pelas expressões

$$\hat{H}_{y,TE}^{(j)} \Big|_{z=z_j} = -ik_y Y_j F_j e^{-u_j H_j} (1 - R_{TE}^{(j)}) \quad (2.102)$$

$$\hat{E}_{x,TE}^{(j)} \Big|_{z=z_j} = -ik_y F_j e^{-u_j H_j} (1 + R_{TE}^{(j)}) . \quad (2.103)$$

Substituindo (2.102) e (2.103) em (2.101) obtemos o coeficiente de reflexão na camada  $j$  que é dado por

$$R_{TE}^{(j)} = \frac{Y_j - \hat{Y}_{j+1}}{Y_j + \hat{Y}_{j+1}} . \quad (2.104)$$

Escrevemos os coeficientes de reflexão em termos da admitância de superfície e intrínseca do meio para tornar a expressão mais gerais e abrangendo as situações em que o substrato é um semi-espaço infinito ou um meio estratificado (camadas plano-paralelas). Para o caso do semi-espaço infinito consideramos  $\hat{Y}_2 = Y_2$  e caso o meio seja estratificado a admitância de superfície será obtida por

$$\hat{Y}_{j+1} = Y_{j+1} \xi_{j+1} \quad (2.105)$$

onde  $\xi_{j+1}$  representa um fator associado a estratificação do meio e é dado por

$$\xi_{j+1} = \frac{\hat{Y}_{j+2} + Y_{j+1} \tanh[u_{j+1} H_{j+1}]}{Y_{j+1} + \hat{Y}_{j+2} \tanh[u_{j+1} H_{j+1}]}, \quad j = 2, \dots, N-1 \quad (2.106)$$

Na última camada as admitâncias de superfície e aparentes são

$$\hat{Y}_N = Y_N \quad (2.107)$$

A admitância intrínseca de cada camada é dada por

$$Y_j = \frac{u_j}{\zeta_j} \quad (2.108)$$

como foi apresentada por (SANTOS, 2007), sendo que  $u_j^2 = k_x^2 + k_y^2 - k_j^2$  e  $k_j^2 = -\zeta_j \eta$ , onde  $N$  representa o número de camadas.

Para determinarmos os coeficientes de transmissão iremos explorar a continuidade dos campos potenciais, primeiro na interface Mar/substrato

$$\hat{F}_{z(+)}^{(1)} \Big|_{z=z_1} = \hat{F}_z^{(2)} \Big|_{z=z_1}$$

$$\frac{1}{\zeta_1} \frac{\partial \hat{F}_{z(+)}^{(1)}}{\partial z} \Big|_{z=z_1} = \frac{1}{\zeta_2} \frac{\partial \hat{F}_z^{(2)}}{\partial z} \Big|_{z=z_1}$$

Destas expressões obtemos um sistema que resolvido para o coeficiente de transmissão  $\hat{F}_z^{(2)}$  obtemos

$$F_2 = \frac{2Y_1 F_1 R_{TE}^{(1)+} e^{u_1(h_1-h_2)}}{(Y_1 - Y_2) + (Y_1 + Y_2) R_{TE}^{(2)} e^{-2u_2 H_2}} \quad (2.109)$$

Na interface  $j$  de acordo com a expressão da continuidade dos campos potenciais

$$\hat{F}_z^{(j)} \Big|_{z=z_j} = \hat{F}_z^{(j+1)} \Big|_{z=z_j} \quad (2.110)$$

$$F_{j+1} = F_j \frac{(1 + R_{TE}^{(j)}) e^{-u_j H_j}}{(1 + R_{TE}^{(j+1)}) e^{-2u_{j+1} H_{j+1}}}. \quad (2.111)$$

De posse desses coeficientes de transmissão e reflexão podemos calcular as componentes dos campos elétrico e magnético para o modo TE.

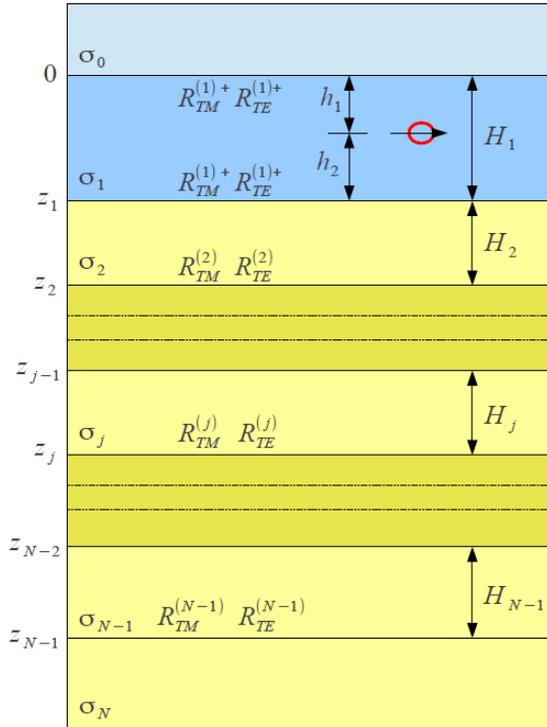


Figura 2.2. Modelo teórico para MCSEM que apresenta a fonte em uma camada limitada por um semi-espaço e um meio estratificação horizontalmente.

### 2.2.4 Campos Elétrico e Magnético 1-D

Definido os potenciais em cada camada e a relação dos potenciais com os campos  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{H}$  através das equações (2.39), (2.40), (2.41), (2.42), (2.43) e (2.44) iremos apresentar as expressões para estes campos.

Na modelagem do MCSEM 2.5-D além de apresentarmos os campos no domínio  $(x, y, z)$  precisaremos dos campos elétricos no domínio  $(x, k_y, z)$  que serão utilizados como fonte na solução do problema de elementos finitos 2-D no próximo capítulo.

Como os levantamentos MCSEM os receptores estão dispostos no fundo do mar, ou seja, estão na região compreendida entre as posições  $h_1 < z < H_1$  os campos 1-D no domínio  $(x, y, z)$  serão apresentados apenas nestas regiões.

#### 2.2.4.1 Componentes dos campos elétrico e magnético no domínio espacial

O campo  $E_x$  é dado pela expressão (2.39), como os potenciais estão no domínio  $(k_x, k_y, z)$  precisamos fazer uma transformada inversa de Fourier dupla, como o integrando apresenta uma simetria circular podemos substituir a transformada de Fourier pela de Hankel

$$E_{x,(+)}^{(1)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \hat{E}_{x,(+)}^{(1)}(k_r) J_0(k_r r) k_r dk_r \quad (2.112)$$

por meio da identidade, também utilizada por (RIJO, 2004; SANTOS, 2007; WARD; HOHMANN, 1988), que relaciona a transformada inversa Dupla de Fourier a transformada de Hankel,

$$\int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty f(k_x, k_y) e^{i(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y = 2\pi \int_0^\infty f(k_r) J_0(k_r r) k_r dk_r,$$

e fazendo a mudança de variável através de  $k_r^2 = k_x^2 + k_y^2$  e de  $r^2 = x^2 + y^2$

$$\begin{aligned} \hat{E}_{x,(+)}^{(1)} &= \frac{I(\omega) ds_x \rho_1}{2(k_x^2 + k_y^2)} K_{x, TM(+)}^{\prime(1)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \\ &+ \frac{I(\omega) ds_x \zeta}{2} \frac{1}{k_r^2} K_{x, TE(+)}^{(1)} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \end{aligned} \quad (2.113)$$

onde

$$K_{x, TM(+)}^{\prime(1)} = u_1 \left( e^{-u_1(z-h_1)} - R_{TM}^{(1)-} e^{-u_1(z+h_1)} - R_{TM}^{(1)+} e^{u_1(z-h_1-2h_2)} \right) \quad (2.114)$$

e

$$K_{x, TE(+)}^{(1)} = \frac{1}{u_1} \left( e^{-u_1(z-h_1)} + R_{TE}^{(1)-} e^{-u_1(z+h_1)} + R_{TE}^{(1)+} e^{u_1(z-h_1-2h_2)} \right) \quad (2.115)$$

Em seguida utilizando as identidades

$$\frac{\partial^2 J_0(k_r r)}{\partial x^2} = - \left( \frac{1}{r} - \frac{2x^2}{r^3} \right) k_r J_1(k_r r) - \frac{x^2}{r^2} k_r^2 J_0(k_r r)$$

e

$$\frac{\partial^2 J_0(k_r r)}{\partial y^2} = - \left( \frac{1}{r} - \frac{2y^2}{r^3} \right) k_r J_1(k_r r) - \frac{y^2}{r^2} k_r^2 J_0(k_r r)$$

chegamos finalmente a expressão

$$\begin{aligned} E_{x, TM(+)}^{(1)} &= - \frac{I(\omega) ds_x \rho_1}{4\pi} \left( \frac{1}{r} - \frac{2x^2}{r^3} \right) \int_0^\infty K_{x, TM(+)}^{\prime(1)} J_1(k_r r) dk_r + \\ &\quad - \frac{I(\omega) ds_x \rho_1}{4\pi} \frac{x^2}{r^2} \int_0^\infty K_{x, TM(+)}^{\prime(1)} J_0(k_r r) k_r dk_r \\ &\quad - \frac{I(\omega) ds_x \zeta}{4\pi} \left( \frac{1}{r} - \frac{2y^2}{r^3} \right) \int_0^\infty K_{x, TE(+)}^{(1)} J_1(k_r r) dk_r + \\ &\quad - \frac{I(\omega) ds_x \zeta}{4\pi} \frac{y^2}{r^2} \int_0^\infty K_{x, TE(+)}^{(1)} J_0(k_r r) k_r dk_r \end{aligned} \quad (2.116)$$

que representa a componente do campo elétrico na direção  $x$ .

Procedendo de modo similar ao realizado para obter a componente do campo elétrico na direção  $x$  podemos obter as demais componentes dos campos elétrico e magnético.

Para a componente do campo elétrico na direção  $y$  utilizamos a identidade

$$\frac{\partial^2 J_0(k_r r)}{\partial x \partial y} = \frac{2xy}{r^3} k_r J_1(k_r r) - \frac{xy}{r^2} k_r^2 J_0(k_r r)$$

obtemos

$$\begin{aligned} E_{y, (+)}^{(1)} &= \frac{I(\omega) ds_x \rho_1}{4\pi} \frac{2xy}{r^3} \int_0^\infty K_{y, TM(+)}^{\prime(1)} J_1(k_r r) dk_r + \\ &\quad - \frac{I(\omega) ds_x \rho_1}{4\pi} \frac{xy}{r^2} \int_0^\infty K_{y, TM(+)}^{\prime(1)} J_0(k_r r) k_r dk_r + \\ &\quad + \frac{I(\omega) ds_x \rho_1}{4\pi} \frac{2xy}{r^3} \int_0^\infty K_{y, TM(+)}^{\prime(1)} J_1(k_r r) dk_r + \\ &\quad - \frac{I(\omega) ds_x \rho_1}{4\pi} \frac{xy}{r^2} \int_0^\infty K_{y, TM(+)}^{\prime(1)} J_0(k_r r) k_r dk_r \end{aligned} \quad (2.117)$$

onde

$$K_{y, TM(+)}^{\prime(1)} = u_1 \left( e^{-u_1(z-h_1)} - R_{TM}^{(1)-} e^{-u_1(z+h_1)} - R_{TM}^{(1)+} e^{u_1(z-h_1-2h_2)} \right) \quad (2.118)$$

e

$$K'_{y, TM(+)}{}^{(1)} = u_1 \left( e^{-u_1(z-h_1)} - R_{TM}^{(1)-} e^{-u_1(z+h_1)} - R_{TM}^{(1)+} e^{u_1(z-h_1-2h_2)} \right) \quad (2.119)$$

Para a componente do campo elétrico na direção  $z$  utilizamos a identidade

$$\frac{\partial J_0(k_r r)}{\partial x} = -\frac{x}{r} k_r J_1(k_r r)$$

obtemos

$$E'_{z, TM(+)}{}^{(1)} = -\frac{I(\omega) ds_x \rho_1}{4\pi} \frac{x}{r} \int_0^\infty K'_{z, TM(+)}{}^{(1)} J_1(k_r r) k_r^2 dk_r \quad (2.120)$$

onde

$$K'_{z, TM(+)}{}^{(1)} = -e^{-u_1(z-h_1)} + R_{TM}^{(1)-} e^{-u_1(z+h_1)} - R_{TM}^{(1)+} e^{u_1(z-h_1-2h_2)} \quad (2.121)$$

Para a componente do campo magnético na direção  $x$  utilizamos a identidade da componente do campo elétrico na direção  $y$  então obtemos

$$\begin{aligned} H'_{x, (+)}{}^{(1)} &= \frac{I(\omega) ds_x}{4\pi} \frac{2xy}{r^3} \int_0^\infty K'_{x, TM(+)}{}^{(1)} J_1(k_r r) dk_r + \\ &\quad - \frac{I(\omega) ds_x}{4\pi} \frac{xy}{r^2} \int_0^\infty K'_{x, TM(+)}{}^{(1)} J_0(k_r r) k_r dk_r + \\ &\quad + \frac{I(\omega) ds_x}{4\pi} \frac{2xy}{r^3} \int_0^\infty K'_{x, TE(+)}{}^{(1)} J_1(k_r r) dk_r + \\ &\quad + \frac{I(\omega) ds_x}{4\pi} \frac{xy}{r^2} \int_0^\infty K'_{x, TE(+)}{}^{(1)} J_0(k_r r) k_r dk_r \end{aligned} \quad (2.122)$$

onde

$$K'_{x, TM(+)}{}^{(1)} = \left( -e^{-u_1(z-h_1)} + R_{TM}^{(1)-} e^{-u_1(z+h_1)} - R_{TM}^{(1)+} e^{u_1(z-h_1-2h_2)} \right) \quad (2.123)$$

e

$$K'_{x, TE(+)}{}^{(1)} = \left( -e^{-u_1(z-h_1)} - R_{TE}^{(1)-} e^{-u_1(z+h_1)} + R_{TE}^{(1)+} e^{u_1(z-h_1-2h_2)} \right) \quad (2.124)$$

Para a componente do campo magnético na direção  $y$  utilizamos a identidade da componente do campo elétrico na direção  $x$  então obtemos

$$\begin{aligned} H'_{y, (+)}{}^{(1)} &= \frac{I(\omega) ds_x}{4\pi} \left( \frac{1}{r} - \frac{2x^2}{r^3} \right) \int_0^\infty K'_{y, TM(+)}{}^{(1)} J_1(k_r r) dk_r + \\ &\quad + \frac{I(\omega) ds_x}{4\pi} \frac{x^2}{r^2} \int_0^\infty K'_{y, TM(+)}{}^{(1)} J_0(k_r r) k_r dk_r \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{I(\omega)ds_x}{4\pi} \left( \frac{1}{r} - \frac{2y^2}{r^3} \right) \int_0^\infty K_{y,TE(+)}^{(1)} J_1(k_r r) dk_r + \\
& + \frac{I(\omega)ds_x y^2}{4\pi r^2} \int_0^\infty K_{y,TE(+)}^{(1)} J_0(k_r r) k_r dk_r
\end{aligned} \tag{2.125}$$

onde

$$K_{y,TM(+)}^{(1)} = \left( -e^{-u_1(z-h_1)} + R_{TM}^{(1)-} e^{-u_1(z+h_1)} - R_{TM}^{(1)+} e^{u_1(z-h_1-2h_2)} \right) \tag{2.126}$$

e

$$K_{y,TE(+)}^{(1)} = \left( -e^{-u_1(z-h_1)} - R_{TE}^{(1)-} e^{-u_1(z+h_1)} + R_{TE}^{(1)+} e^{u_1(z-h_1-2h_2)} \right) \tag{2.127}$$

Para a componente do campo magnético na direção  $z$  utilizamos a identidade

$$\frac{\partial J_0(k_r r)}{\partial y} = -\frac{y}{r} k_r J_1(k_r r)$$

obtemos

$$H_{z,(+)}^{(1)} = \frac{I(\omega)ds_x y}{4\pi r} \int_0^\infty K_{z,TE(+)}^{(1)} J_1(k_r r) k_r^2 dk_r \tag{2.128}$$

Para a implementação das integrais desta secção utilizamos a técnica filtros digitais lineares descrita em (ALMEIDA, 2002). O filtro utilizado para implementar numericamente a transformada de Hankel apresenta 61 abscissas.

#### 2.2.4.2 Componentes do campos elétrico fonte

A fonte de campo eletromagnético para MCSEM é de natureza elétrico e como o sinal emitido se propaga em três dimensões a fonte será descrita em termos das três componentes do campo elétrico nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$ . O termo (fonte) esta sendo utilizado aqui porque estas componentes do campo elétrico representam o termo fonte do par de equações diferenciais a ser resolvido no problema 2-D.

Por razões que serão discutidas no próximo capítulo estas componentes do campo elétrico que serão utilizadas como fonte devem ser calculadas do domínio da frequência espacial ou seja  $(x, k_y, z)$ , além disso devem ser calculadas para qualquer camada abaixo da camada onde esta situado o DEH.

Começaremos mostrando a componente do campo elétrico na direção  $x$  para uma camada  $j$ . Para obtermos tal componente partimos da componente no domínio  $(k_x, k_y, z)$  que é dado por

$$\hat{E}_x^{(j)} = \frac{I(\omega)ds_x \rho_j}{2} K_{x,TM}^{(j)f} - \frac{I(\omega)ds_x \zeta}{2} K_{x,TE}^{(j)f} \tag{2.129}$$

onde

$$K'_{x, TM}{}^{(j)f} = \frac{k_x^2 A_j u_j}{k_x^2 + k_y^2} \left( e^{-u_j(z-z_{j-1})} - R_{TM}^{(j)} e^{u_j(z-z_j-H_j)} \right) \quad (2.130)$$

e

$$K_{x, TE}{}^{(j)f} = \frac{k_y^2}{(k_x^2 + k_y^2)} F_j \left( e^{-u_j(z-z_{j-1})} + R_{TE}^{(j)} e^{u_j(z-z_j-H_j)} \right). \quad (2.131)$$

Para obtermos as componentes do campo no domínio desejado devemos utilizar a transformada inversa de Fourier cosseno ou seno dependendo da função ser par ou ímpar, respectivamente. Como a transformada é realizada de  $k_x$  para  $x$  e componente em questão apresentar uma dependência quadrática em relação a  $k_x$  concluímos que se trata de uma função par podendo desta forma justificar o uso da transformada cosseno

$$\hat{E}_{x, TM}{}^{(j)} = \frac{I(\omega) ds_x \rho_j}{2\pi} \int_0^\infty K'_{x, TM}{}^{(j)f} \cos(k_x x) dk_x - \frac{I(\omega) ds_x \zeta}{2\pi} \int_0^\infty K_{x, TE}{}^{(j)f} \cos(k_x x) dk_x. \quad (2.132)$$

As componentes do campo elétrico nas direções  $y$  e  $z$  se analisadas para  $k_x$  conclui-se que se trata de funções ímpares por isso utilizamos a transformada seno.

Para a componente na direção  $y$  temos no domínio  $(k_x, k_y, z)$  a expressão

$$\hat{E}_{y, TM}{}^{(j)} = \frac{I(\omega) ds_x \rho_j}{2} K'_{y, TM}{}^{(j)f} + \frac{I(\omega) ds_x \zeta}{2} K_{y, TE}{}^{(j)f} \quad (2.133)$$

onde

$$K'_{y, TM}{}^{(j)f} = \frac{k_x k_y A_j u_j}{k_x^2 + k_y^2} \left( e^{-u_j(z-z_{j-1})} - R_{TM}^{(j)} e^{u_j(z-z_j-H_j)} \right) \quad (2.134)$$

e

$$K_{y, TE}{}^{(j)f} = \frac{k_x k_y}{(k_x^2 + k_y^2)} F_j \left( e^{-u_j(z-z_{j-1})} + R_{TE}^{(j)} e^{u_j(z-z_j-H_j)} \right) \quad (2.135)$$

A componente na direção  $y$  do campo elétrico é

$$\hat{E}_y{}^{(j)} = \frac{I(\omega) ds_x \rho_j}{2\pi} \int_0^\infty K'_{y, TM}{}^{(j)f} \sin(k_x x) dk_x + \frac{I(\omega) ds_x \zeta}{2\pi} \int_0^\infty K_{y, TE}{}^{(j)f} \sin(k_x x) dk_x \quad (2.136)$$

Para a componente na direção  $z$  temos no domínio  $(k_x, k_y, z)$  a expressão

$$\hat{E}_{z, TM}{}^{(j)} = \frac{I(\omega) ds_x \rho_j}{2} K_{z, TM}{}^{(j)f} \quad (2.137)$$

onde

$$K_{z, TM}{}^{(j)f} = i k_x A_j \left( e^{-u_j(z-z_{j-1})} + R_{TM}^{(j)} e^{u_j(z-z_j-H_j)} \right) \quad (2.138)$$

A componente na direção  $z$  do campo elétrico é

$$\hat{E}_{z, TM}^{(j)} = \frac{I(\omega) ds_x \rho_j}{2\pi} \int_0^\infty K_{z, TM}^{(j)f} \sin(k_x x) dk_x \quad (2.139)$$

### 2.3 O MCSEM 1D

Como modelo teórico para o MCSEM podemos considerar uma camada limitada por dois semi-espacos, sendo que o DEH encontra-se localizado em uma camada logo abaixo do semi-espaco superior. A espessura  $h_1$  e condutividade  $\sigma_1$  é referente a camada onde esta situada a fonte, o semi-espaco superior apresenta condutividade  $\sigma_0$  e o inferior é constituído por camadas plano-paralelas. O semi-espaco superior representa o ar, a camada onde encontra-se o DEH representa o mar e o meio abaixo da camada onde esta a fonte constitui os sedimentos abaixo do solo oceânico de acordo com a Figura 2.2.

No fluxo de energia eletromagnética transmissor ao receptor ocorre das seguintes formas: A energia se propaga diretamente do transmissor ao receptor através da lâmina de água, também temos que considerar a energia que flui do transmissor até a interface ar-mar onde parte é transmitida e o restante é refletido retornando através da lâmina d'água ao receptor, a fonte emite energia que se propaga nos sedimentos abaixo do solo oceânico e como o meio é composto de varias camadas ocorrem sucessivas reflexões e transmissões até que a energia seja totalmente atenuada, as reflexões sucessivas nas diversas camadas são medidas no receptor. Havendo um possível reservatório a energia se propaga em um meio estratificado e atingindo um reservatório de hidrocarbonetos ocorre uma reflexão que é medida nos receptores, a presença deste reservatório gera um contraste nas medidas feitas nos receptores possibilitando sua detecção.

Na secção anterior desenvolvemos a teoria EM para o MCSEM, baseado no modelo teórico da (Fig.2.2). Em uma situação em que temos, o modelo teórico acrescido de uma camada (reservatório) com uma determinada espessura teremos um modelo estratificado de subsolo oceânico com uma variação unidimensional da resistividade. O modelo teórico sem a camada reservatório denominaremos de modelo NOHC ou de referencia e com o reservatório denominaremos de modelo HC como usada em (SOUZA, 2007).

#### 2.3.1 Geometria do Levantamento MCSEM

Quando se fala em geometria dos levantamentos do método MCSEM estamos nos referindo a disposição geométrica dos transmissores e receptores de energia EM como mostra a Figura

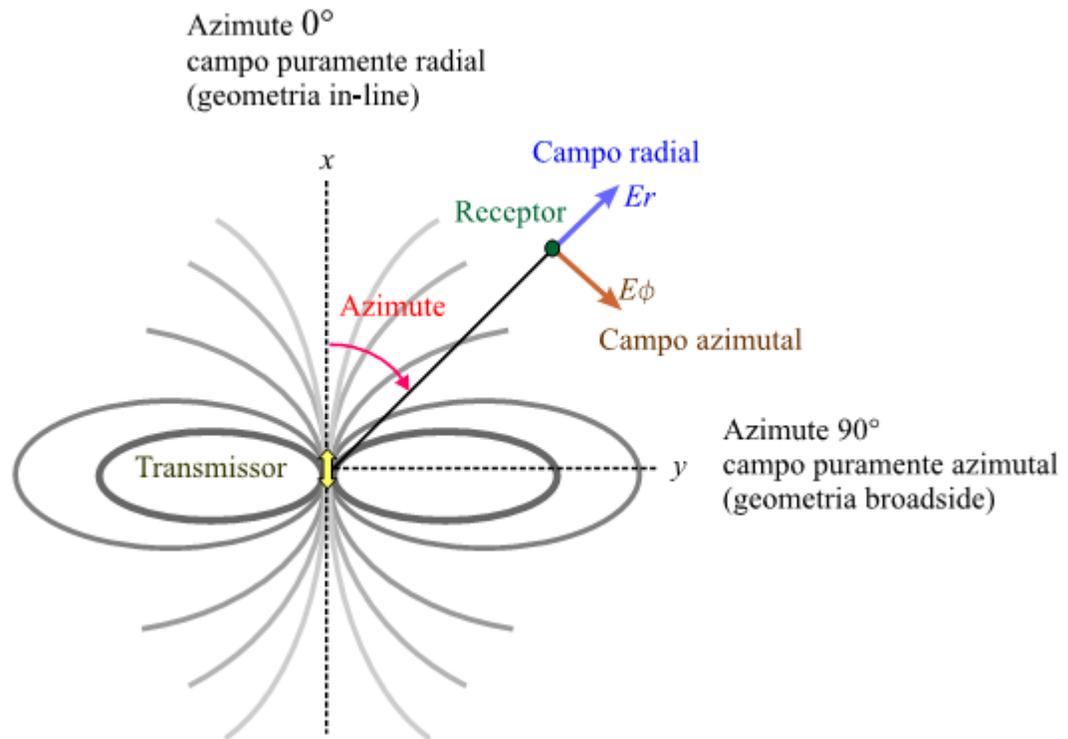


Figura 2.3. Esta figura ilustra a geometria dos levantamentos MCSEM

Fonte: Souza, (2007)

2.3. Se consideramos o sistema cartesiano de coordenadas e colocarmos o DEH (transmissor) alinhado com o eixo  $x$  e dispormos os receptores ao longo deste eixo, ou seja, para o caso em que o azimute for  $0^\circ$ , temos a geometria *in-line* onde o campo medido será puramente radial. Uma outra configuração utilizada é colocar o transmissor na direção do eixo  $x$  e os receptores no na direção do eixo  $y$ , ou seja, considerando o azimute igual a  $90^\circ$ , temos a geometria *broadside* onde o campo medido será azimutal. Isto nos mostra que se estivermos medindo o campo  $E_x$  na configuração in-line teremos um campo radial e se medirmos na configuração broadside teremos um campo azimutal.

### 3 O MCSEM 2.5-D

#### 3.1 INTRODUÇÃO

A modelagem do MCSEM consiste de um problema que em sua essência é 3-D visto que a fonte emite um sinal que se propaga em três dimensões. Para o MCSEM 2.5-D consideramos que as propriedades físicas do meio não variam em uma determinada direção o que possibilita a decomposição do problema de natureza 3-D em uma serie de problemas mais simples 2-D com uma fonte 3-D.

Sabemos que o MCSEM expressa nos campos medidos a influência de variações na condutividade e que a esta varia tridimensionalmente. Nesta dissertação consideramos que a condutividade varia apenas no plano  $x - z$ , ou seja, existe apenas uma variação bidimensional na condutividade com isto iremos decompor o problema 3-D em uma série de problemas 2-D. Para executar tal tarefa utilizaremos a transformada de Fourier na direção em que as propriedades não variam, aqui consideramos a direção  $y$  no sistema de coordenadas cartesianas.

A transformada de Fourier irá gerar uma série de problemas bidimensionais que serão resolvidos numericamente pelo método dos elementos finitos. As soluções encontradas estarão no domínio  $(x, k_y, z)$  que representa o domínio da frequência espacial para  $y$ , encontrada a solução nesse domínio é necessário transformar a solução que se encontra no domínio da frequência espacial para o domínio  $(x, y, z)$  por meio da transformada inversa de Fourier. A transformada inversa foram implementas via técnica dos filtros digitais lineares (ALMEIDA, 2002). Neste capítulo apresentaremos a formulação matemática do MCSEM 2.5-D utilizando o método dos elementos finitos.

#### 3.2 FORMULAÇÃO MATEMÁTICA DO MCSEM 2.5-D

Como dissemos podemos explorar a bidimensionalidade decompondo o problema tridimensional em uma sequência de problemas bidimensionais que são mais simples de ser resolvidos numericamente. Para isso utilizaremos a transformada de Fourier

$$\hat{F}(x, k_y, z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y, z) e^{-ik_y y} dy. \quad (3.1)$$

considerando que as propriedades física não variam na direção ao longo do eixo cartesiano  $y$ .

As expressões para o campo secundário são dadas pelas equações (2.23) e (2.24), expan-

dindo os rotacionais, em coordenadas cartesianas, e em seguida fazendo a transformada de Fourier através de (3.1) em (2.23) chegamos a

$$ik_y \hat{E}_z^s - \frac{\partial}{\partial z} \hat{E}_y^s = -i\omega\mu \hat{H}_x^s, \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \hat{E}_x^s - \frac{\partial}{\partial x} \hat{E}_z^s = -i\omega\mu \hat{H}_y^s \quad (3.3)$$

e

$$\frac{\partial}{\partial x} \hat{E}_y^s - ik_y \hat{E}_x^s = -i\omega\mu \hat{H}_z^s, \quad (3.4)$$

e para a transformada em (2.24) temos

$$ik_y \hat{H}_z^s - \frac{\partial}{\partial z} \hat{H}_y^s = \sigma \hat{E}_x^s + \Delta\sigma \hat{E}_x^p, \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \hat{H}_x^s - \frac{\partial}{\partial x} \hat{H}_z^s = \sigma \hat{E}_y^s + \Delta\sigma \hat{E}_y^p \quad (3.6)$$

e

$$\frac{\partial}{\partial x} \hat{H}_y^s - ik_y \hat{H}_x^s = \sigma \hat{E}_z^s + \Delta\sigma \hat{E}_z^p. \quad (3.7)$$

As componentes do campo  $\hat{E}_y^s$  e  $\hat{H}_y^s$  são linearmente independentes enquanto que as componentes  $\hat{E}_x^s$ ,  $\hat{E}_z^s$ ,  $\hat{H}_x^s$  e  $\hat{H}_z^s$  linearmente dependentes das componentes do campo na direção  $y$  então estas podem ser escritas em função das componentes  $\hat{E}_y^s$  e  $\hat{H}_y^s$  e do campo primário no domínio  $(x, k_y, z)$ .

Começaremos fazendo a substituição de (3.4) em (3.5) para obtermos a componente na direção  $x$  do campo elétrico que é:

$$\hat{E}_x^s = -\frac{ik_y}{u^2} \frac{\partial}{\partial x} \hat{E}_y^s - \frac{i\omega\mu}{u^2} \frac{\partial}{\partial z} \hat{H}_y^s - \frac{i\omega\mu}{u^2} \Delta\sigma \hat{E}_x^p, \quad (3.8)$$

agora, substituindo (3.2) em (3.7) teremos a componente na direção  $z$  do campo elétrico mostrada a seguir

$$\hat{E}_z^s = -\frac{ik_y}{u^2} \frac{\partial}{\partial z} \hat{E}_y^s + \frac{i\omega\mu}{u^2} \frac{\partial}{\partial x} \hat{H}_y^s - \frac{i\omega\mu}{u^2} \Delta\sigma \hat{E}_z^p, \quad (3.9)$$

utilizaremos (3.9) em (3.7) para obtermos a componente do campo magnético na direção  $x$ , resultando em

$$\hat{H}_x^s = \frac{\sigma}{u^2} \frac{\partial}{\partial z} \hat{E}_y^s - \frac{ik_y}{u^2} \frac{\partial}{\partial x} \hat{H}_y^s + \frac{ik_y}{u^2} \Delta\sigma \hat{E}_z^p, \quad (3.10)$$

e substituindo (3.8) em (3.4) chegamos a expressão para a componente do campo magnético

na direção  $z$  como pode ser visto a seguir

$$\hat{H}_z^s = -\frac{\sigma}{u^2} \frac{\partial}{\partial x} \hat{E}_y^s - \frac{ik_y}{u^2} \frac{\partial}{\partial z} \hat{H}_y^s - \frac{ik_y}{u^2} \Delta\sigma \hat{E}_x^p \quad (3.11)$$

sendo que a variável  $u$  que aparece nas componentes dos campos, elétrico e magnético, nas direções  $x$  e  $z$  representa a constante de propagação da onda no domínio  $(x, k_y, z)$  que é dada por

$$u = \sqrt{k_y^2 + i\omega\mu\sigma}.$$

O próximo passo é montar um sistema de equações diferenciais nas variáveis  $\hat{E}_y^s$  e  $\hat{H}_y^s$ . Sabemos que os campos elétrico e magnético apresentam três componentes nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$  e as componentes nas direções  $x$  e  $z$  foram escritas como função dos campos nas direções  $y$  e dos campos primários, então fazendo a substituição de (3.8) e (3.9) em (3.3) obteremos a primeira expressão do sistema de equações diferenciais que é

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{i\omega\mu}{u^2} \frac{\partial \hat{H}_y^s}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{i\omega\mu}{u^2} \frac{\partial \hat{H}_y^s}{\partial z} \right) + i\omega\mu \hat{H}_y^s + ik_y \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{u^2} \frac{\partial \hat{E}_y^s}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{u^2} \frac{\partial \hat{E}_y^s}{\partial x} \right) \right] = \\ + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{i\omega\mu}{u^2} \Delta\sigma \hat{E}_x^p \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{i\omega\mu}{u^2} \Delta\sigma \hat{E}_z^p \right) \end{aligned} \quad (3.12)$$

e substituindo (3.10) e (3.11) em (3.6)

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\sigma}{u^2} \frac{\partial \hat{E}_y^s}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\sigma}{u^2} \frac{\partial \hat{E}_y^s}{\partial z} \right) + \sigma \hat{E}_y^s - ik_y \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{u^2} \frac{\partial \hat{H}_y^s}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{u^2} \frac{\partial \hat{H}_y^s}{\partial x} \right) \right] = \\ + ik_y \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{u^2} \Delta\sigma \hat{E}_x^p \right) - \Delta\sigma \hat{E}_y^p + ik_y \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{u^2} \Delta\sigma \hat{E}_z^p \right) \end{aligned} \quad (3.13)$$

onde o termo entre colchetes nas expressões (3.12) e (3.13) representa o acoplamento entre os modos TM e TE, este sistema de equações diferenciais é semelhante ao resolvido por (SILVA, 2005) via MEF apresentando também o acoplamento entre os modos TE e TM e apresentando como diferença a fonte utilizada. Estas duas últimas expressões formam o nosso sistema de equações diferenciais a derivadas parciais que queremos resolver. Para resolvermos o sistema de equações diferenciais formado pelas expressões (3.12) e (3.13) utilizaremos o método dos elementos finitos.

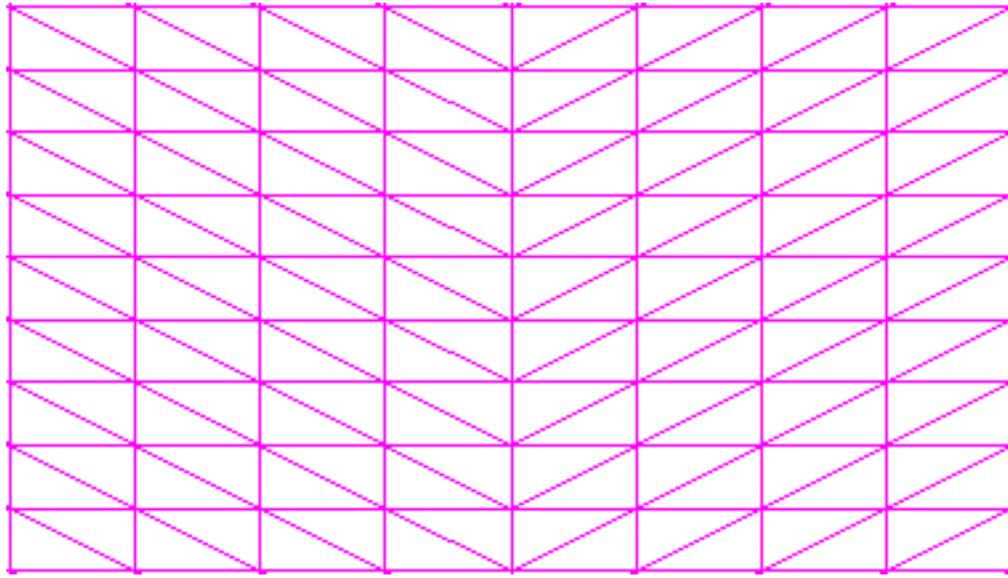


Figura 3.1. Malha de elementos finitos utilizada na modelagem do MCSEM 2.5-D

### 3.2.1 Solução Via Elementos Finitos

O primeiro passo em uma análise de elementos finitos é dividir o domínio em um número  $m$  de elementos, os elementos terão forma triangular como podemos ver na Figura 3.1. Os nós da malha recebem uma numeração que esta associada a cada posição do grid 2-D. Localmente cada nó é numerado de 1 a 3, globalmente esta associado a numeração do grid (BECKER et. al.,1981).

Considerando um elemento qualquer ( $e$ ) então iremos aproximar a solução do sistema de equações diferenciais  $s$  por uma função linear bidimensional  $\tilde{s}$  que é dada por

$$\tilde{s}^{(e)}(x, z) = \alpha_1^{(e)} + \alpha_2^{(e)}x + \alpha_3^{(e)}z. \quad (3.14)$$

que representa o plano que passa pelos três nós.

Escrevendo a função (3.14) para cada nó teremos

$$\tilde{s}_1^{(e)} = \alpha_1^{(e)} + \alpha_2^{(e)}x_1 + \alpha_3^{(e)}z_1, \quad (3.15)$$

$$\tilde{s}_2^{(e)} = \alpha_1^{(e)} + \alpha_2^{(e)}x_2 + \alpha_3^{(e)}z_2, \quad (3.16)$$

e

$$\tilde{s}_3^{(e)} = \alpha_1^{(e)} + \alpha_2^{(e)}x_3 + \alpha_3^{(e)}z_3. \quad (3.17)$$

As expressões (3.15), (3.16) e (3.17) formam um sistema de equações lineares que será

resolvido para as variáveis  $\alpha_1^{(e)}$ ,  $\alpha_2^{(e)}$  e  $\alpha_3^{(e)}$  cuja solução é:

$$\alpha_1^{(e)} = \frac{s_1^{(e)} a_1 + s_2^{(e)} a_2 + s_3^{(e)} a_3}{2\Delta^{(e)}}, \quad (3.18)$$

$$\alpha_2^{(e)} = \frac{s_1^{(e)} b_1 + s_2^{(e)} b_2 + s_3^{(e)} b_3}{2\Delta^{(e)}}, \quad (3.19)$$

e

$$\alpha_3^{(e)} = \frac{s_1^{(e)} c_1 + s_2^{(e)} c_2 + s_3^{(e)} c_3}{2\Delta^{(e)}}, \quad (3.20)$$

onde  $\Delta^{(e)}$  representa a área do elemento, onde as variáveis  $a$ ,  $b$  e  $c$  são dadas por

$$\begin{aligned} a_1 &= x_2 z_3 - x_3 z_2, & b_1 &= z_2 - z_3, & c_1 &= x_3 - x_2, \\ a_2 &= x_3 z_1 - x_1 z_3, & b_2 &= z_3 - z_1, & c_2 &= x_1 - x_3, \\ a_3 &= x_1 z_2 - x_2 z_1, & b_3 &= z_1 - z_2, & c_3 &= x_2 - x_1. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Quando substituimos (3.18), (3.19) e (3.20) em (3.14) obtemos

$$\tilde{s}^{(e)} = \Psi_1^{(e)} \tilde{s}_1^{(e)} + \Psi_2^{(e)} \tilde{s}_2^{(e)} + \Psi_3^{(e)} \tilde{s}_3^{(e)}, \quad (3.22)$$

sendo  $\Psi^{(e)}$  denominado de função base e representado pela expressão a seguir:

$$\Psi_i^{(e)} = \frac{a_i + b_i x + c_i z}{2\Delta^{(e)}} \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.23)$$

Muitos problemas que são descritos por equações diferenciais não apresentam solução analítica (SILVA, 2005), em virtude dessa dificuldade, alguns métodos que buscam aproximar a solução desses tipos de problemas tem sido desenvolvidos.

A solução do sistema de equações diferenciais é dado em termos de  $E_y$  e  $H_y$  e estas serão aproximadas em cada elemento por uma combinação de funções lineares de acordo com as expressões

$$\tilde{E}_y^{(e)} = \sum_{j=1}^3 \Psi_j^{(e)} E_{yj} \quad (3.24)$$

$$\tilde{H}_y^{(e)} = \sum_{j=1}^3 \Psi_j^{(e)} H_{yj} \quad (3.25)$$

Esta aproximação gera um resíduo  $r$ , então podemos escrever (3.12) e (3.13) como

$$-\frac{\partial}{\partial z} \left( \alpha \frac{\partial \tilde{H}_y^{(e)}}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( \alpha \frac{\partial \tilde{H}_y^{(e)}}{\partial x} \right) + \beta \tilde{H}_y^{(e)} - \left[ \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda \frac{\partial \tilde{E}_y^{(e)}}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial \tilde{E}_y^{(e)}}{\partial z} \right) \right] - f^{TM} = r_{TM} \quad (3.26)$$

$$-\frac{\partial}{\partial z} \left( \delta \frac{\partial \tilde{E}_y^{(e)}}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( \delta \frac{\partial \tilde{E}_y^{(e)}}{\partial x} \right) + \epsilon \tilde{E}_y^{(e)} + \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda \frac{\partial \tilde{H}_y^{(e)}}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial \tilde{H}_y^{(e)}}{\partial z} \right) - f^{TE} = r_{TE} \quad (3.27)$$

O método de Galerkin (RIJO, 2002) consiste de aproximar a solução de uma equação diferencial escrevendo a solução aproximada por meio de uma combinação linear de funções bases que são ortogonais ao resíduo gerado pela aproximação da função, na expressão a seguir mostramos o produto interno entre as funções bases e o resíduo

$$\langle \Psi_i^{(e)}, r \rangle = \int \int_{\Omega^e} \Psi_i^{(e)} r dx dz = 0. \quad (3.28)$$

Aplicando o método de galerkin em (3.26) temos

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^3 \int \int_{\Omega^e} \Psi_i^{(e)} \left[ -\frac{\partial}{\partial z} \left( \alpha \frac{\partial \tilde{H}_y^{(e)}}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( \alpha \frac{\partial \tilde{H}_y^{(e)}}{\partial x} \right) + \beta \tilde{H}_y^{(e)} \right] dx dz + \\ & + \sum_{i=1}^3 \int \int_{\Omega^e} \Psi_i^{(e)} \left[ - \left[ \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda \frac{\partial \tilde{E}_y^{(e)}}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial \tilde{E}_y^{(e)}}{\partial z} \right) \right] - f^{TM} \right] dx dz = 0. \end{aligned} \quad (3.29)$$

e também em (3.27) obtemos

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^3 \int \int_{\Omega^e} \Psi_i^{(e)} \left[ -\frac{\partial}{\partial z} \left( \delta \frac{\partial \tilde{E}_y^{(e)}}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( \delta \frac{\partial \tilde{E}_y^{(e)}}{\partial x} \right) + \epsilon \tilde{E}_y^{(e)} \right] dx dz + \\ & + \sum_{i=1}^3 \int \int_{\Omega^e} \Psi_i^{(e)} \left[ \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda \frac{\partial \tilde{H}_y^{(e)}}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial \tilde{H}_y^{(e)}}{\partial z} \right) - f^{TE} \right] dx dz = 0. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Substituindo (3.24) e (3.25) nas expressões (3.29) e (3.30) e utilizando a integração por partes e aplicando o teorema de Green obtemos a contribuição na fronteira dos elementos, na fronteira de cada elemento as contribuições das integrais de linha são canceladas indicando a continuidade dos campos devendo ser calculada somente na borda do domínio, mas como a componente  $E_y^s$  decai exponencialmente com a distancia podemos aplicar as condições de

contorno homogênea de Diritchlet e chegaremos finalmente as expressões

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1,j=1}^3 \int \int_{\Omega^e} H_{yj}^{(e)} \alpha \left[ \frac{\partial \Psi_i^{(e)}}{\partial z} \frac{\partial \Psi_j^{(e)}}{\partial z} + \frac{\partial \Psi_i^{(e)}}{\partial x} \frac{\partial \Psi_j^{(e)}}{\partial x} + d \Psi_i^{(e)} \Psi_j^{(e)} \right] dx dz + \\ & - \sum_{i=1,j=1}^3 \int \int_{\Omega^e} E_{yj}^{(e)} \lambda \left[ \frac{\partial \Psi_i^{(e)}}{\partial x} \frac{\partial \Psi_j^{(e)}}{\partial z} - \frac{\partial \Psi_i^{(e)}}{\partial z} \frac{\partial \Psi_j^{(e)}}{\partial x} \right] dx dz = \int \int_{\Omega^e} \Psi_i^{(e)} f^{TM(e)} dx dz. \end{aligned} \quad (3.31)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1,j=1}^3 \int \int_{\Omega^e} E_{yj}^{(e)} \delta \left[ \frac{\partial \Psi_i^{(e)}}{\partial z} \frac{\partial \Psi_j^{(e)}}{\partial z} + \frac{\partial \Psi_i^{(e)}}{\partial x} \frac{\partial \Psi_j^{(e)}}{\partial x} + d \Psi_i^{(e)} \Psi_j^{(e)} \right] dx dz + \\ & + \sum_{i=1,j=1}^3 \int \int_{\Omega^e} H_{yj}^{(e)} \lambda \left[ \frac{\partial \Psi_i^{(e)}}{\partial x} \frac{\partial \Psi_j^{(e)}}{\partial z} - \frac{\partial \Psi_i^{(e)}}{\partial z} \frac{\partial \Psi_j^{(e)}}{\partial x} \right] dx dz = \int \int_{\Omega^e} \Psi_i^{(e)} f^{TE(e)} dx dz. \end{aligned} \quad (3.32)$$

onde  $\alpha = \frac{i\omega\mu}{u^2}$ ,  $\delta = \frac{\sigma}{u^2}$ ,  $\lambda = \frac{ik_y}{u^2}$  e  $d = u^2$ .

Escrevendo as matrizes que compõem o sistema teremos

$$K_{ij}^{TM(e)} = \frac{i\omega\mu}{u^2} \int \int_{\Omega^e} \left[ \frac{\partial \Psi_i^{(e)}}{\partial z} \frac{\partial \Psi_j^{(e)}}{\partial z} + \frac{\partial \Psi_i^{(e)}}{\partial x} \frac{\partial \Psi_j^{(e)}}{\partial x} + u^2 \Psi_i^{(e)} \Psi_j^{(e)} \right] dx dz \quad (3.33)$$

$$K_{ij}^{TE(e)} = \frac{\sigma}{u^2} \int \int_{\Omega^e} \left[ \frac{\partial \Psi_i^{(e)}}{\partial z} \frac{\partial \Psi_j^{(e)}}{\partial z} + \frac{\partial \Psi_i^{(e)}}{\partial x} \frac{\partial \Psi_j^{(e)}}{\partial x} + u^2 \Psi_i^{(e)} \Psi_j^{(e)} \right] dx dz \quad (3.34)$$

$$K_{ij}^{AC(e)} = \frac{ik_y}{u^2} \int \int_{\Omega^e} \left[ \frac{\partial \Psi_i^{(e)}}{\partial x} \frac{\partial \Psi_j^{(e)}}{\partial z} - \frac{\partial \Psi_i^{(e)}}{\partial z} \frac{\partial \Psi_j^{(e)}}{\partial x} \right] dx dz \quad (3.35)$$

onde esta ultima matriz resulta do acoplamento entre as variáveis do problema.

O vetor fonte para os modos TM e TE são dados por

$$f^{TM(e)} = -\frac{i\omega\mu}{u^2} \Delta\sigma \int \int_{\Omega^e} E_{xj}^{p(e)} \frac{\partial \Psi_i^{(e)}}{\partial z} \Psi_j^{(e)} dx dz - \frac{i\omega\mu}{u^2} \Delta\sigma \int \int_{\Omega^e} E_{zj}^{p(e)} \frac{\partial \Psi_i^{(e)}}{\partial x} \Psi_j^{(e)} dx dz. \quad (3.36)$$

$$\begin{aligned} f^{TE(e)} = & -\frac{ik_y}{u^2} \Delta\sigma \int \int_{\Omega^e} E_{xj}^{p(e)} \frac{\partial \Psi_i^{(e)}}{\partial x} \Psi_j^{(e)} dx dz - \frac{ik_y}{u^2} \Delta\sigma \int \int_{\Omega^e} E_{zj}^{p(e)} \frac{\partial \Psi_i^{(e)}}{\partial z} \Psi_j^{(e)} dx dz + \\ & -\Delta\sigma \int \int_{\Omega^e} E_{yj}^{p(e)} \Psi_i^{(e)} \Psi_j^{(e)} dx dz, \end{aligned} \quad (3.37)$$

Obtemos um sistema linear local ou seja, um sistema formado para cada elemento do

domínio, que é do tipo

$$\begin{bmatrix} K_{ij}^{TM(e)} & -K_{ij}^{AC(e)} \\ K_{ij}^{AC(e)} & K_{ij}^{TE(e)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{yj}^{(e)} \\ E_{yj}^{(e)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_j^{TM(e)} \\ F_j^{TE(e)} \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

Para montarmos essas matrizes faremos uso da identidade (RIJO,2002)

$$\int \int_{\Omega^e} \Psi_i^a \Psi_j^b \Psi_k^c dx dz = \frac{2a!b!c!\Delta}{(a+b+c+2)!}$$

onde  $\Delta$  representa a área do elemento.

A matriz a seguir corresponde ao modo TM

$$\mathbf{K}^{TM(e)} = \frac{i\omega\mu}{4u^2\Delta^{(e)}} \begin{bmatrix} b_1^2 + c_1^2 & b_1b_2 + c_1c_2 & b_1b_3 + c_1c_3 \\ b_2b_1 + c_2c_1 & b_2^2 + c_2^2 & b_2b_3 + c_2c_3 \\ b_3b_1 + c_3c_1 & b_3b_2 + c_3c_2 & b_3^2 + c_3^2 \end{bmatrix} + \frac{i\omega\mu\Delta^{(e)}}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

e para o modo TE temos

$$\mathbf{K}^{TE(e)} = \frac{\sigma}{4u^2\Delta^{(e)}} \begin{bmatrix} b_1^2 + c_1^2 & b_1b_2 + c_1c_2 & b_1b_3 + c_1c_3 \\ b_2b_1 + c_2c_1 & b_2^2 + c_2^2 & b_2b_3 + c_2c_3 \\ b_3b_1 + c_3c_1 & b_3b_2 + c_3c_2 & b_3^2 + c_3^2 \end{bmatrix} + \frac{\sigma\Delta^{(e)}}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

A matriz de acoplamento é dada por

$$\mathbf{K}^{AC(e)} = \frac{ik_y}{4u^2\Delta^{(e)}} \begin{bmatrix} b_1c_1 - c_1b_1 & b_1c_2 - c_1b_2 & b_1c_3 - c_1b_3 \\ b_2c_1 - c_2b_1 & b_2c_2 - c_2b_2 & b_2c_3 - c_2b_3 \\ b_3c_1 - c_3b_1 & b_3c_2 - c_3b_2 & b_3c_3 - c_3b_3 \end{bmatrix}$$

As matrizes  $\mathbf{K}^{TM(e)}$ ,  $\mathbf{K}^{TE(e)}$  e  $\mathbf{K}^{AC(e)}$ , que são de ordem 3, compõem uma matriz denominada matriz local de ordem 6 que esta expressa em no lado esquerdo de (3.38).

O vetor fonte para os modos TM e TE são, respectivamente

$$F_j^{TM(e)} = -\frac{i\omega\mu}{6u^2}\Delta\sigma c_i \sum_j \tilde{E}_{xj} + \frac{i\omega\mu}{6u^2}\Delta\sigma b_i \sum_j \tilde{E}_{zj} \quad (3.39)$$

e

$$F_j^{TE(e)} = -\frac{ik_y}{6u^2} \Delta \sigma b_i \sum_j \tilde{E}_{xj} - \frac{i\omega\mu}{6u^2} \Delta \sigma c_i \sum_j \tilde{E}_{zj} + \frac{\Delta \sigma \Delta^{(e)}}{12} \begin{bmatrix} 2\tilde{E}_{y1} + \tilde{E}_{y2} + \tilde{E}_{y3} \\ \tilde{E}_{y1} + 2\tilde{E}_{y2} + \tilde{E}_{y3} \\ \tilde{E}_{y1} + \tilde{E}_{y2} + 2\tilde{E}_{y3} \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

Agora temos um sistema de equações matriciais que descrevem o problema em cada elemento do domínio, agora precisamos reunir estes sistemas locais em um único sistema formando assim um sistema linear global dado por

$$\mathbf{G}(x, k_y, z) \mathbf{s}(x, k_y, z) = \mathbf{f}(x, k_y, z) \quad (3.41)$$

onde  $\mathbf{G}$  é denominado matriz global que é simétrica formada por matrizes locais de ordem 6, o vetor  $\mathbf{s}$  é um vetor que representa a solução do problema a ser resolvido e  $\mathbf{f}$  representa o vetor fonte global, para maiores detalhes do processo de montagem deste sistema linear ver (JIM, 2002; ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 2000).

Para resolver o sistema em (3.41) utilizamos o método do gradiente biconjugado já que a matriz global é simétrica (SOUZA, 2007). A solução encontrada nos fornece os campos  $\hat{E}_y^s$  e  $\hat{H}_y^s$  no domínio  $(x, k_y, z)$ , de posse desses campos podemos obter as componentes  $\hat{E}_x$  e  $\hat{E}_z$  por meio de derivada numérica, em seguida aplica-se a transformada inversa de Fourier Cosseno ou Seno para obtermos as componentes do campo no domínio  $(x, y, z)$ .

Para aplicarmos a transformada de Fourier Cosseno ou Seno precisamos verificar se estes campos apresentam característica de função par ou impar. Para fazer tal verificação plotamos as componentes em questão para  $k_y$  negativo e positivo para duas posições em  $x$ , uma negativa e outra positiva. Caso as componentes apresentem mesma resposta tanto para  $k_y$  positivo como negativo tal componente sera considerada uma função par caso contrario impar. Nas figuras de (3.2) a (3.7) as curvas em vermelho, que esta associada a  $k_y$  negativo, e preto, que esta associada a  $k_y$  positivo correspondem a parte real das componentes dos campos elétrico nas direções  $x$  e  $z$  e magnético na direção  $y$  enquanto que as curvas em verde esta associada a  $k_y$  positivo e azul esta associada a  $k_y$  negativo são referentes a parte imaginária. Como podemos observar as curvas em preto e azul coincidem, ou seja, a parte real destas componentes apresenta comportamento par, e o mesmo é observado para as curvas em azul e verde, que se referem a parte imaginaria das componentes do campo, então concluímos que as três componentes apresentam características de funções pares, então podemos utilizar a transformada de Fourier Cosseno para recuperarmos as componentes no domínio  $(x, y, z)$ .

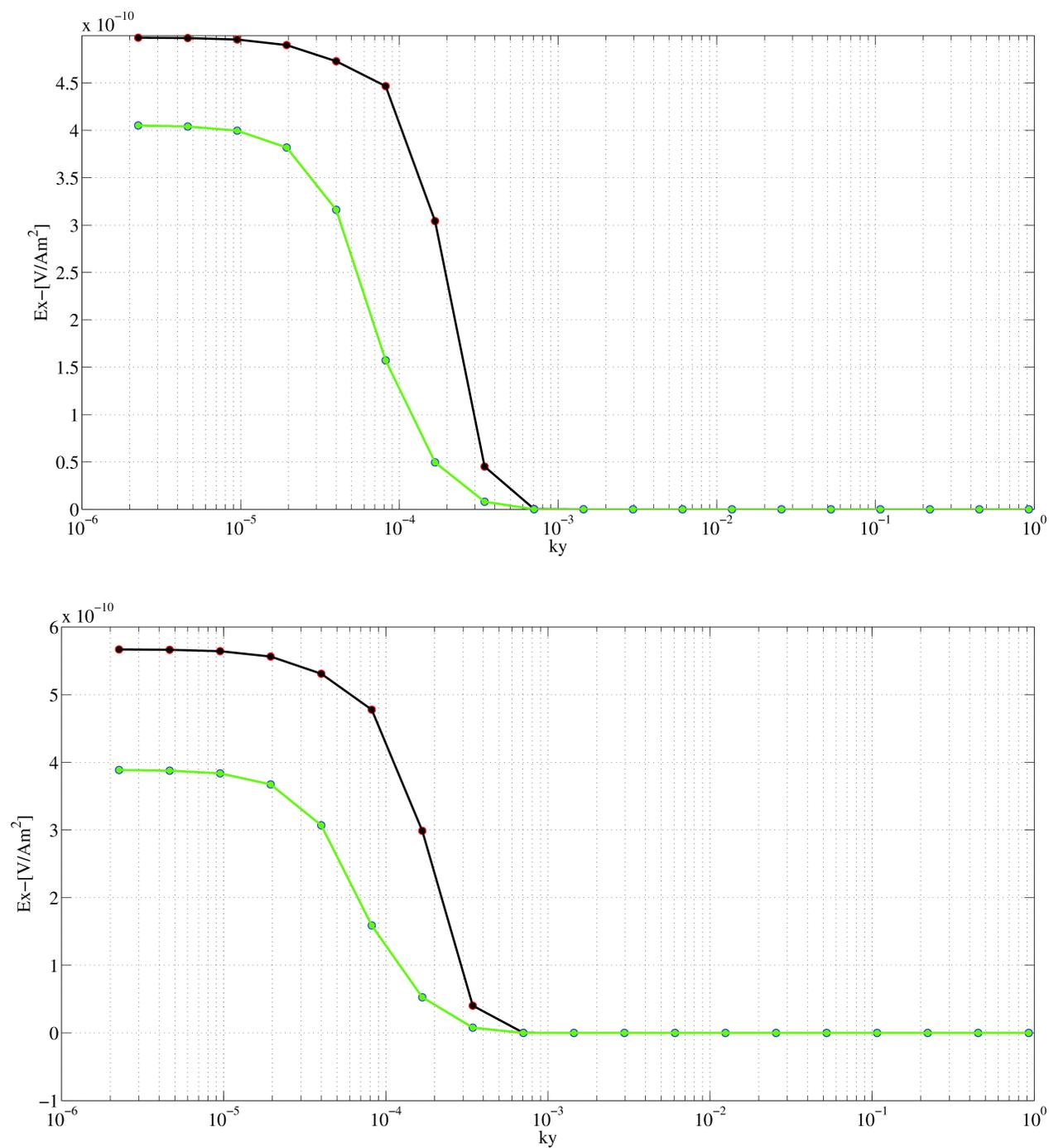


Figura 3.2. Parte real e imaginaria da componente do campo elétrico na direção  $x$  nas posições  $x=-2.5$  km e  $x=2.5$  km utilizando um filtro de 19 abscisas.

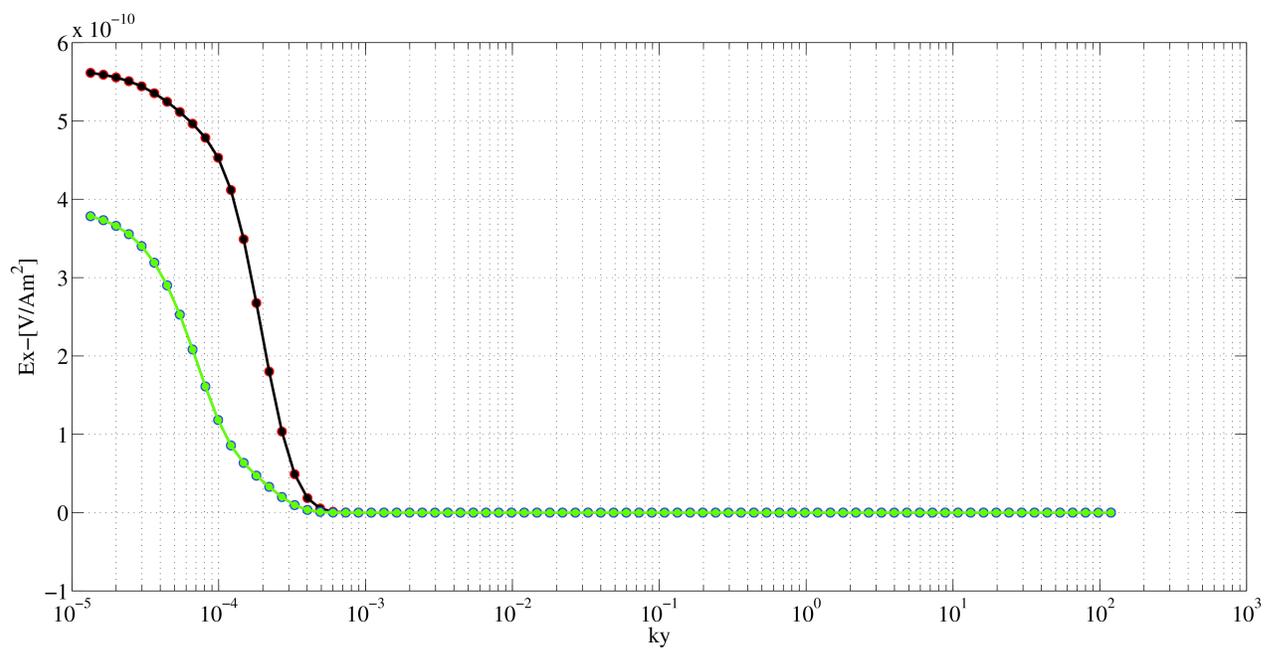
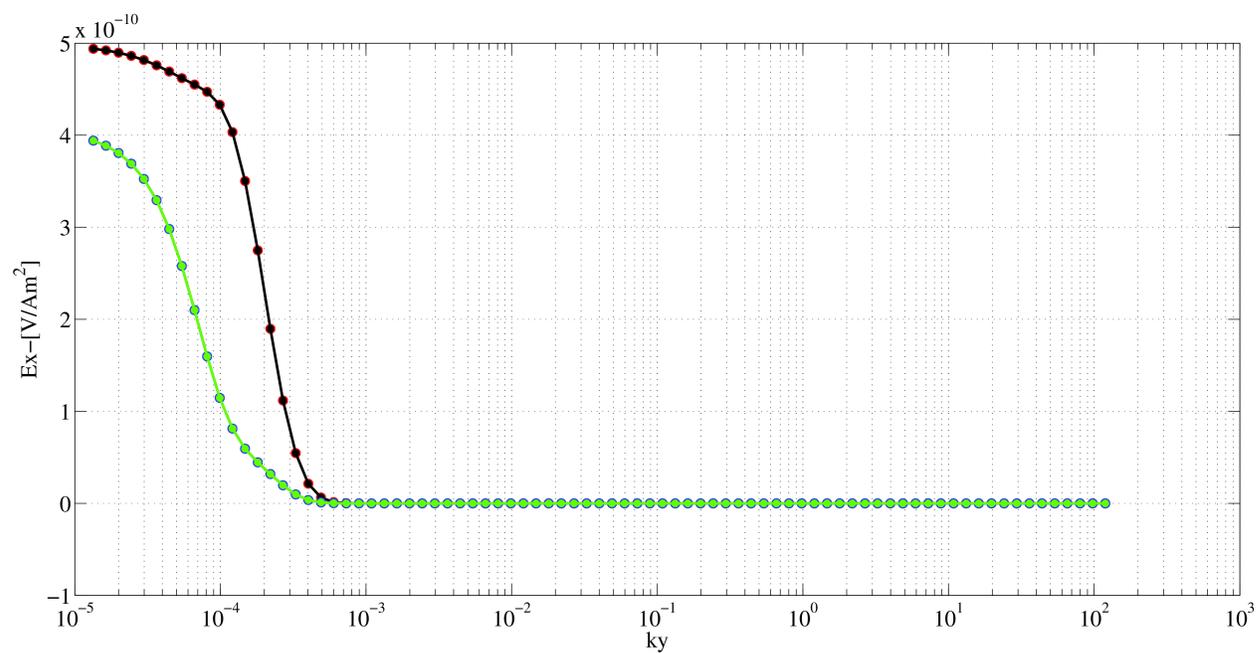


Figura 3.3. Parte real e imaginária da componente do campo elétrico na direção  $x$  nas posições  $x=-2.5 \text{ km}$  e  $x=2.5 \text{ km}$  utilizando um filtro de 81 abscisas

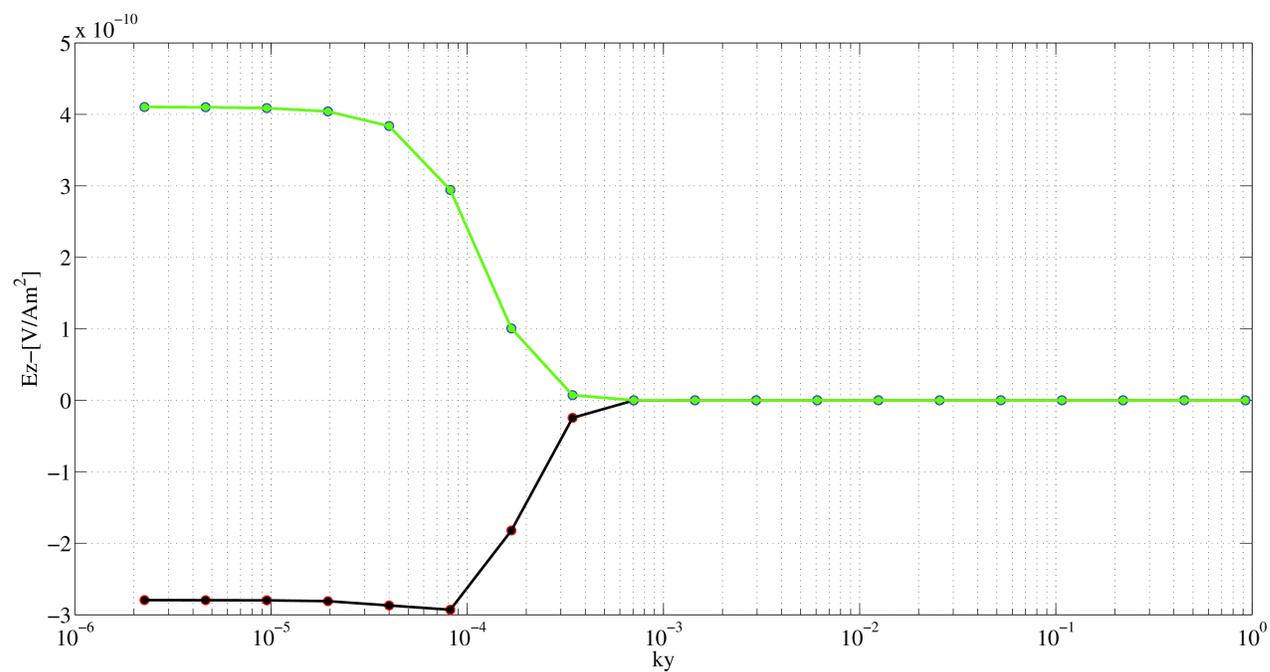
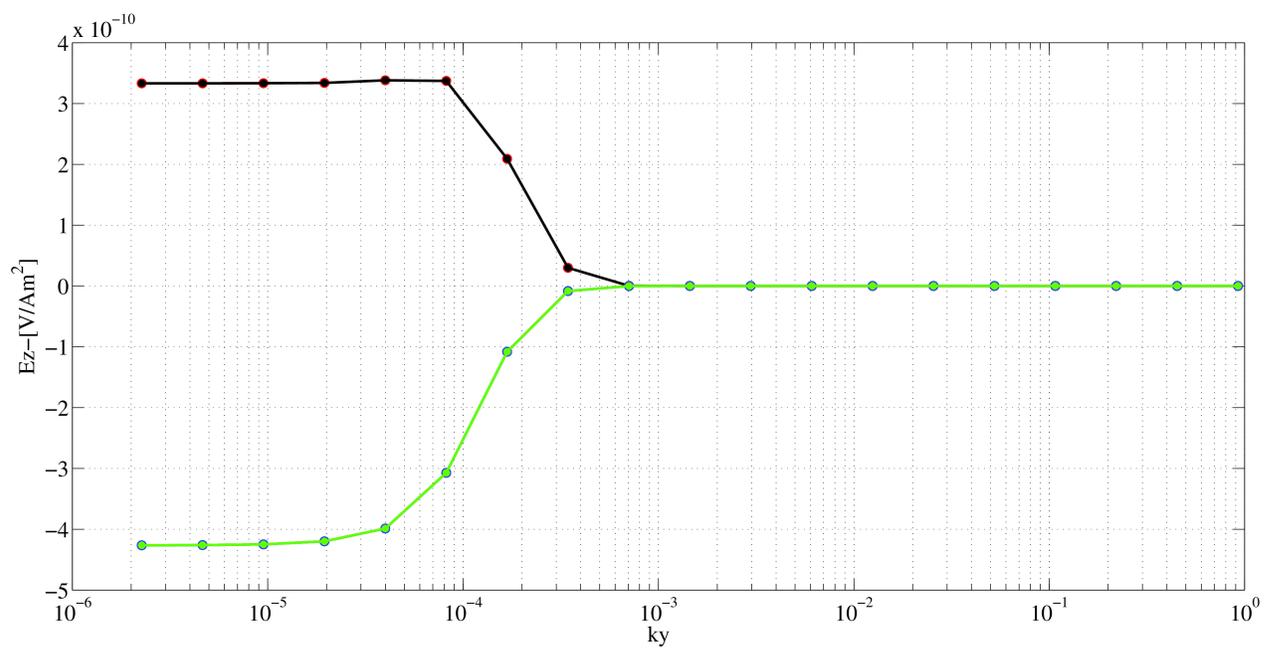


Figura 3.4. Parte real e parte imaginária da componente do campo elétrico na direção  $z$  nas posição  $-2.5$  km e  $2.5$  km.

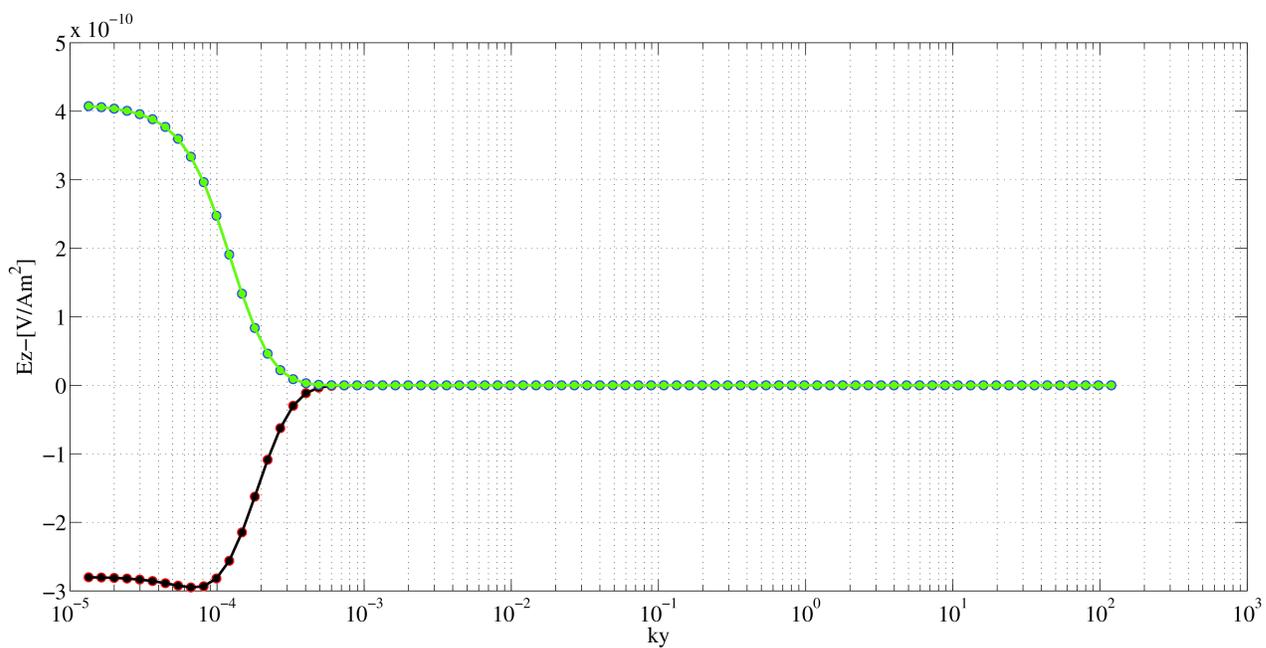
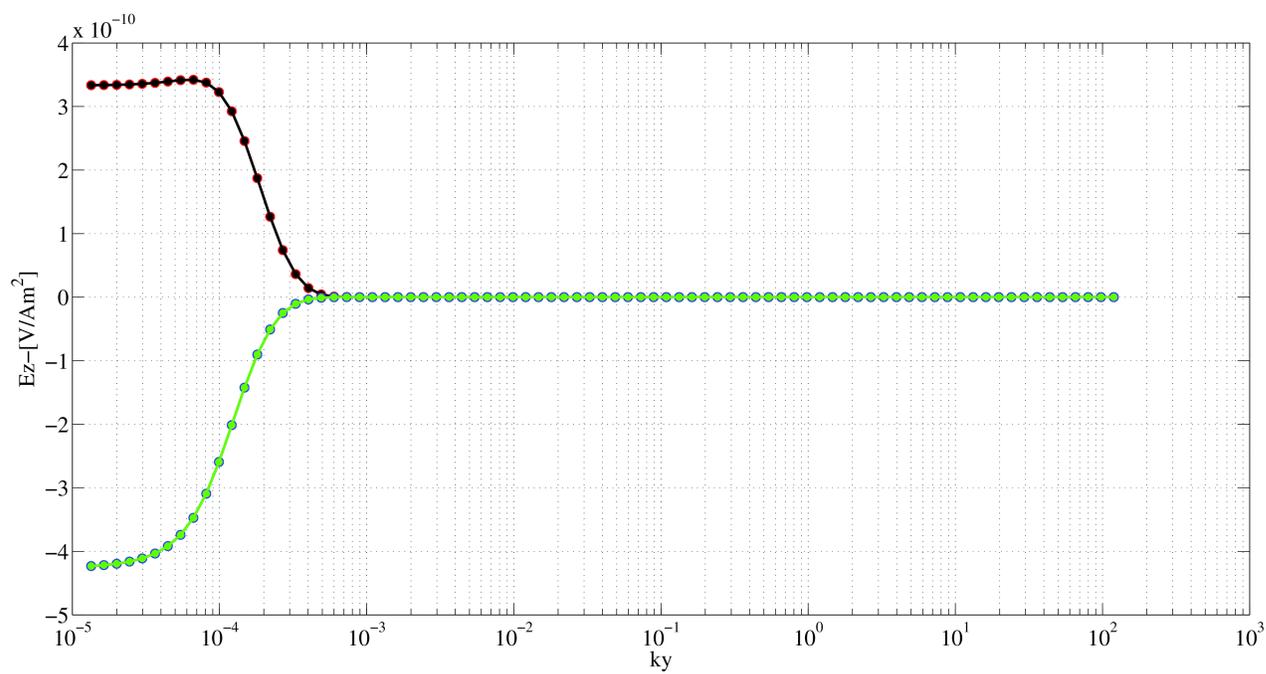


Figura 3.5. Parte real e parte imaginária da componente do campo elétrico na direção  $z$  nas posições  $-2.5$  km e  $2.5$  km.

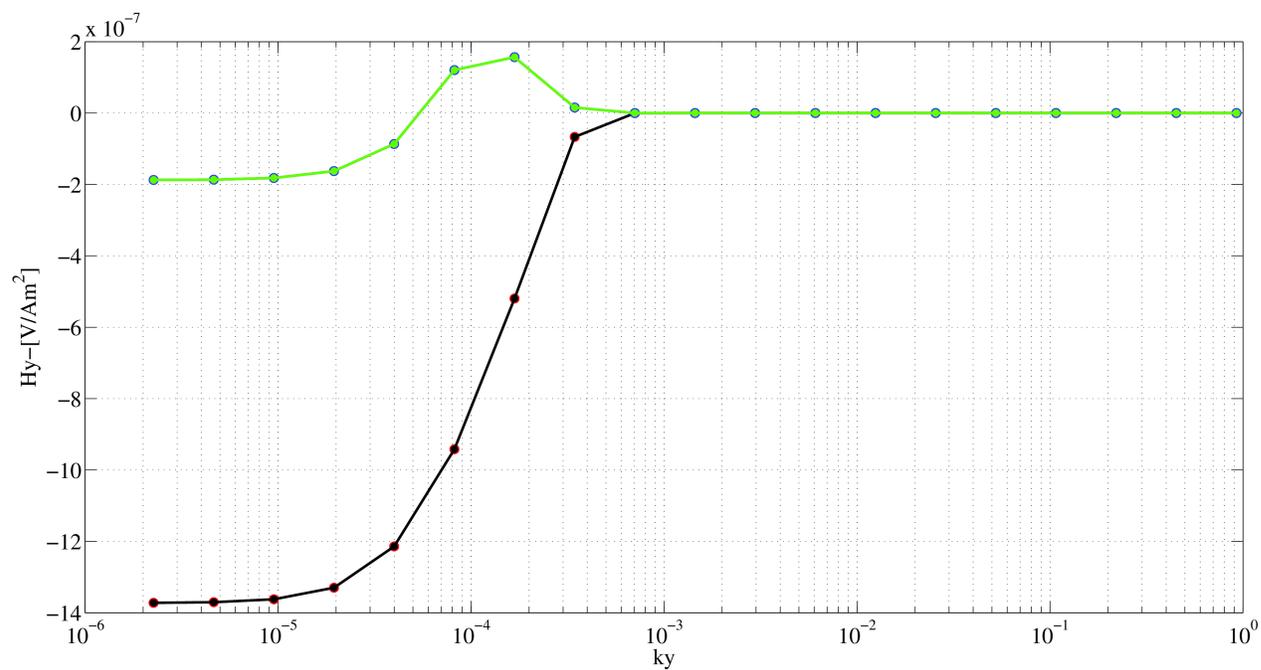
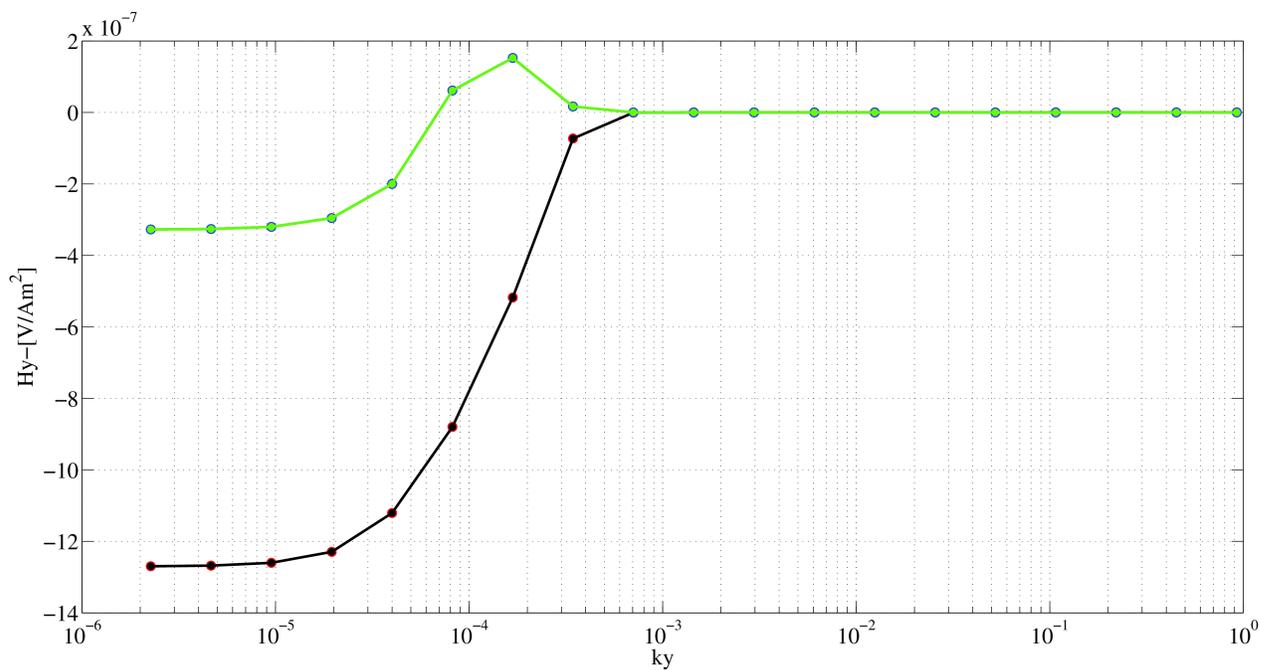


Figura 3.6. Parte real e parte imaginária da componente do campo magnético na direção  $y$  nas posições -2.5 km e 2.5 km.

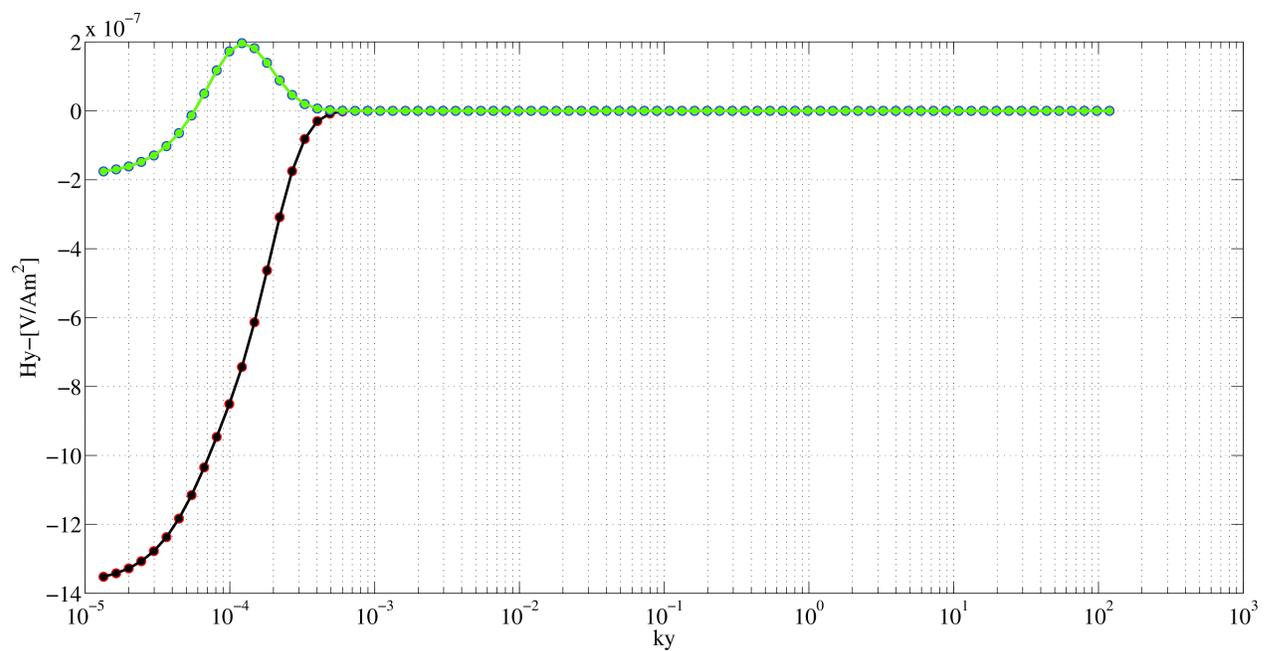
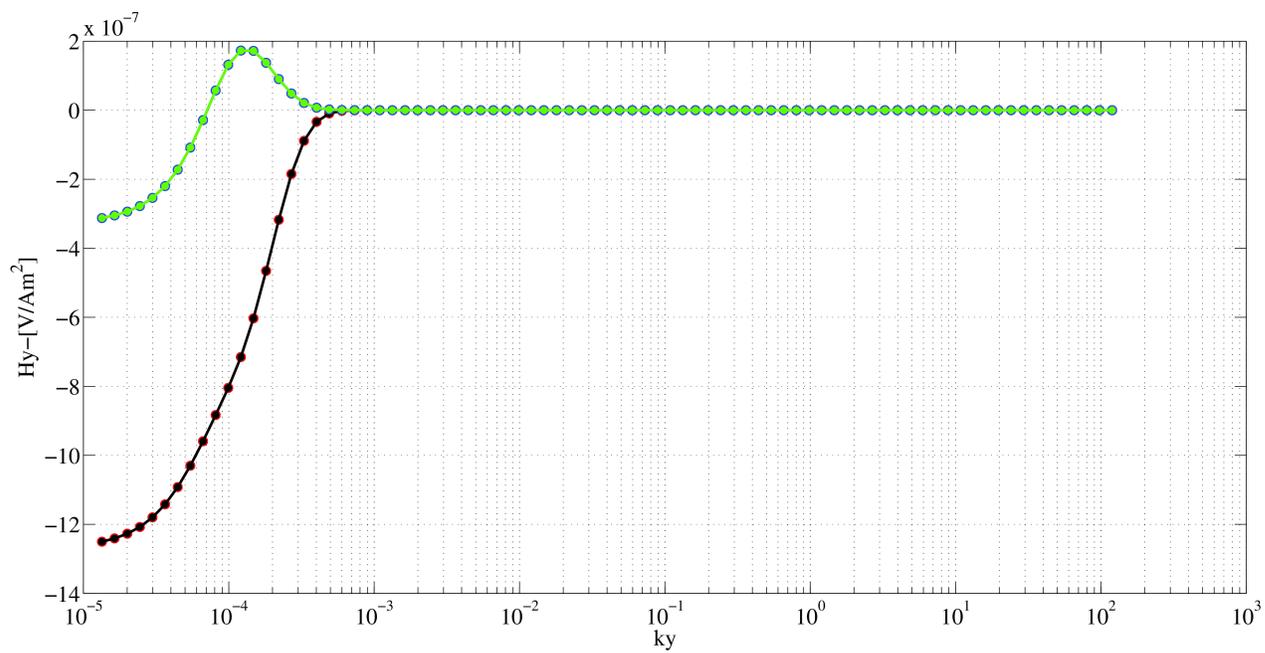


Figura 3.7. Parte real e parte imaginária da componente do campo magnético na direção  $y$  nas posição  $-2.5$  km e  $2.5$  km.

## 4 RESULTADOS DO MCSEM 2.5-D

### 4.1 VALIDAÇÃO DO MÉTODO

Para validar o código desenvolvido neste trabalho para o MCSEM 2.5-D, escolhemos fazer uma comparação entre as respostas do código 1-D (sem a presença de um reservatório e com a presença do mesmo) com a resposta 2.5-D.

O modelo sem reservatório apresenta três camadas limitadas por dois semi-espacos. O semi-espaço superior foi modelado com resistividade  $10^6\Omega.m$  e o semi-espaço inferior com  $5\Omega.m$ . As três camadas apresentam resistividade de  $0.3\Omega.m$ ,  $1\Omega.m$  e  $3\Omega.m$  e suas espessuras são, respectivamente, de  $1000m$ ,  $500m$  e  $500m$  como podemos ver na Figura 4.1. Para o modelo 1-D com reservatório precisamos apenas acrescentar uma camada de  $100\Omega.m$  de resistividade e  $100m$  de espessura entre o semi-espaço e a camada com resistividade de  $3\Omega.m$  como podemos ver na Figura 4.2.

Podemos considerar os modelos apresentados nas Figuras 4.1 e 4.2, respectivamente, como livre da influencia de uma reservatório e com a maior influencia possível uma vez que este pode ser entendido como um reservatório 2-D com extensão lateral no infinito, portando podemos usar as respostas 1-D para validar a resposta do problema 2.5-D.

Com um reservatório finito, como o apresentado na Figura 4.4, esperamos que a curva correspondente ao problema 2.5-D esteja situada entre as curvas geradas pelos modelos das Figuras 4.1 e 4.2. Ao observarmos a Figura 4.3; onde a curva em azul corresponde a resposta sem a presença de um reservatório, a curva em preto corresponde ao modelo 1-D com reservatório e a curva em vermelho ao reservatório finito 2-D, observamos que a curva em vermelho esta compreendida entre as curvas em preto e azul como era esperado para validarmos o código do MCSEM 2.5-D.

### 4.2 RESPOSTAS

Neste capitulo apresentaremos as respostas da modelagem numérica do MCSEM 2.5-D em ambiente estratificado com camadas plano-paralelas. O modelo proposto aqui consiste de um espaço composto de 3 camadas plano-paralelas limitadas por dois semi-espacos, o primeiro semi-espaço corresponde ao Ar e foi modelada com resistividade de  $10^6\Omega.m$ , em seguida temos uma camada com espessura de  $1000m$  e resistividade de  $0.3\Omega.m$  representando o Mar, na sequencia encontramos duas camadas que representam os sedimentos com espessuras de  $500m$  e resistividades de  $1\Omega.m$  e  $3\Omega.m$ , respectivamente e por ultimo encontramos um semi-espaço

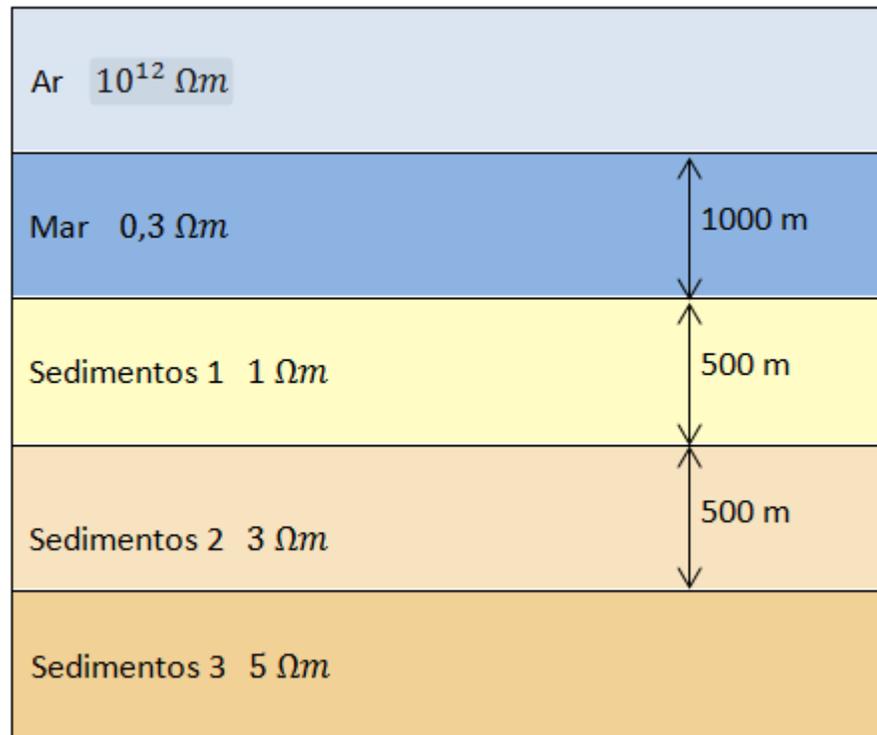


Figura 4.1. Modelo 1-D sem a camada denominada reservatório

infinito com resistividade de  $5\Omega.m$  onde esta situado uma heterogeneidade 2-D com  $100m$  de espessura e  $10\text{ km}$  de extensão lateral representando um reservatório de hidrocarbonetos. O DEH transmissor esta situado a  $950\text{ m}$  de profundidade na camada que corresponde ao Mar e foram utilizados as frequências  $0.125\text{ Hz}$ ,  $0.25\text{ Hz}$ ,  $0.5\text{ Hz}$  para o transmissor nas posições  $-5\text{ km}$ ,  $0\text{ km}$  e  $5\text{ km}$  que corresponde a borda esquerda, centro e borda direita da heterogeneidade. Analisaremos o efeito da mudança na frequência do sinal emitido pela fonte na identificação da extensão lateral da heterogeneidade.

As repostas de um levantamento MCSEM podem ser divididas em três regiões, para off-set pequenos onde ha um predomínio da influencia da energia emitida pela fonte, para off-set intermediário onde influencia principal é dado pela heterogeneidade e para grandes off-set a influencia é dada pela Air-wave (SOUZA, 2007).

Na figura 4.5 observamos que, para o transmissor na posição  $-5\text{ km}$  que corresponde a borda esquerda da heterogeneidade, o contraste entre as componentes do campo primário 1-D (NOHC) e o campo total 2.5-D (HC) ocorre apenas na curva a direita do transmissor. Para o transmissor na posição  $0\text{ km}$  que corresponde ao ponto médio da extensão lateral da heterogeneidade, observamos que a anomalia esta presente a direita e esquerda do transmissor. Para o transmissor na posição  $5\text{ km}$  que corresponde a borda direita da heterogeneidade, observamos

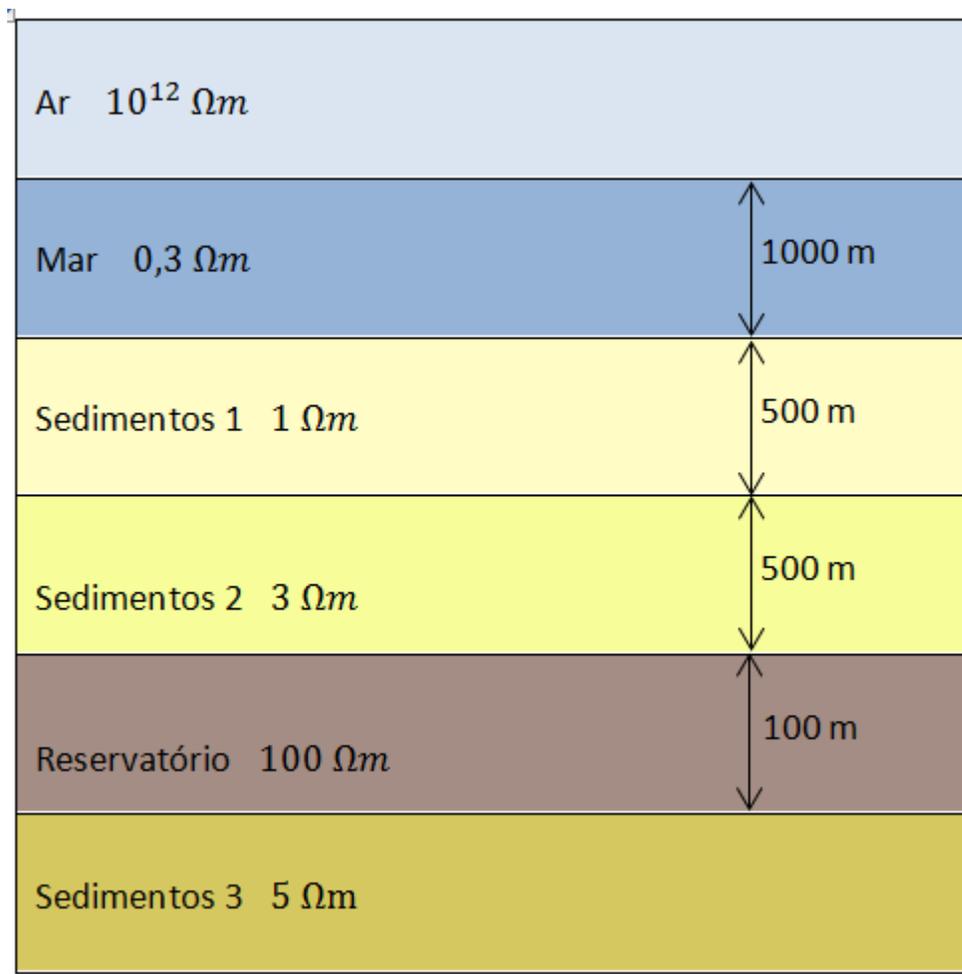


Figura 4.2. Modelo 1-D que apresenta uma camada denominada reservatório

que o contraste gerado pela heterogeneidade está situado a esquerda do transmissor.

Observamos que, tanto para a amplitude da componente  $E_x$  do campo como para a fase, o contraste gerado pela heterogeneidade 2-D depende da posição da fonte. A variação gerada para a fonte na posição -5 km para amplitude é mais evidente entre as posições 1 km e 15 km, já para a fase esta mais explícito entre -2.5 km e 16 km. Na borda do corpo temos um pico na amplitude e a diferença de fase entre os modelos com e sem reservatório é de cerca de 50 graus. Para o transmissor posicionado em 0 km observamos que o contraste na amplitude da componente  $E_x$  ocorre entre as posições -15 km e -3 km, e 3 km e 15 km, e para a fase desta componente a variação se dá entre as posições -20 km e -3 km, e 3 km e 20 km. Nas bordas do corpo as diferenças na amplitude não são observadas, enquanto que pode-se observar facilmente que a fase apresenta picos nas bordas das heterogeneidades, o contraste na fase é da ordem de 80 graus. Para o transmissor na posição 5 km a diferença na

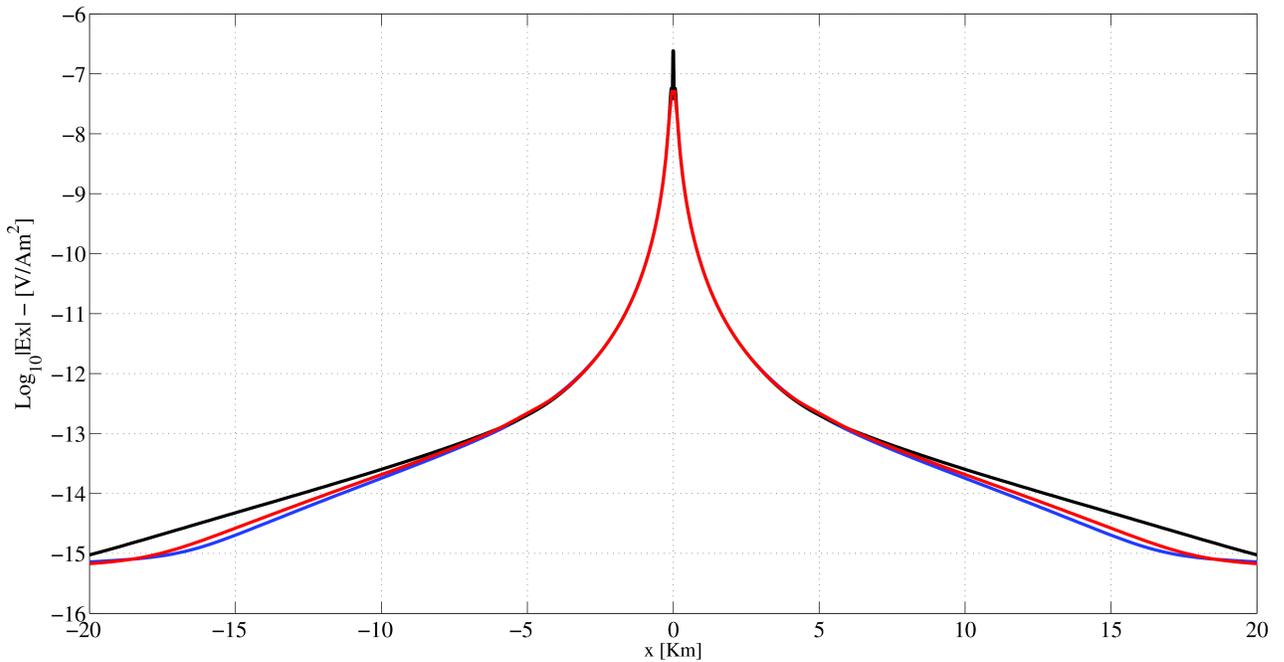


Figura 4.3. Esta figura mostra a comparação entre as respostas 1-D, sem e com a presença de uma heterogeneidade, e a resposta 2.5-D

amplitude entre os modelos de referencia e com reservatório ocorre a esquerda da borda do reservatório entre as posições -15 km e -1 km, para a fase observamos que o contraste esta presente entre as posições -16 km e 2.5 km. A amplitude apresenta um pico que coincide com a coordenada da borda direita da heterogeneidade e já é possível observar que ha uma grande simetria como podemos observar na Figura 4.5.

A Figura 4.6 nos mostra o quanto a amplitude da componente  $E_x$  é maior que a correspondente ao modelo de referencia para as posições -5 km, 0 km e 5 km, aqui observamos que alguns picos coincidem com as bordas do corpo anômalo. Para o transmissor na posição -5 km o valor alcançado na outra borda é por volta de 1,7. Para o transmissor na posição 0 km os picos localizados nas bordas da heterogeneidade alcançaram um valor próximo a 1,3 e para o transmissor na posição 5 km o valor também é próximo de 1.7. Com isto observamos que as resposta para posições simétricas apresentam mesma ordem de grandeza caracterizando a simetria na resposta em relação ao eixo- $x$ .

A Figura 4.7 quando comparada com a Figura 4.5 observamos que o contraste na amplitude e fase da componente  $E_x$  fica mais visível devido ao aumento da frequência do sinal emitido pela fonte. Isto fica mais evidente quando observamos a Figura 4.8 em que curva

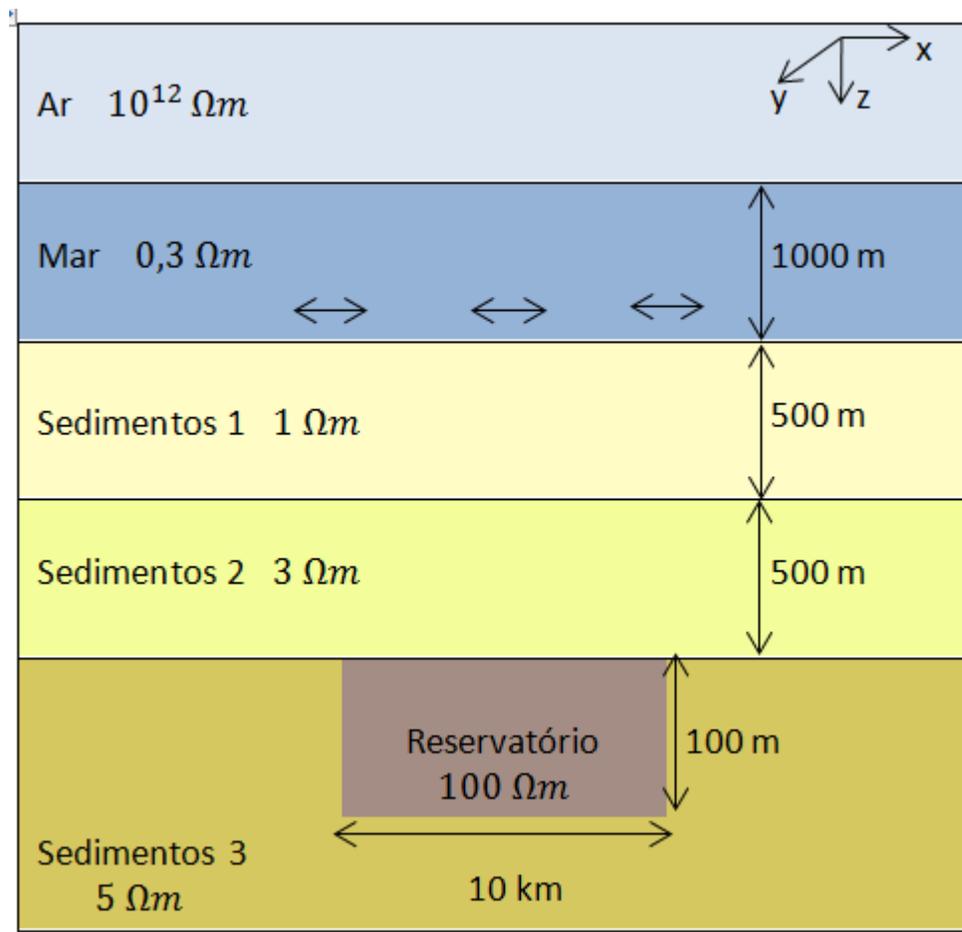


Figura 4.4. Modelo com heterogeneidade 2-D.

para o transmissor na posição -5 km gera uma anomalia de aproximadamente 3 na outra borda da heterogeneidade, para a curva gerada pelo transmissor na posição 0 km a anomalia atinge aproximadamente o valor 1.7 nas bordas e para o transmissor na posição 5 km o valor atingido é aproximadamente 3 como foi observado para o transmissor situado na posição simétrica a esta. Comparando as respostas das Figuras 4.8 e 4.6 observamos que para o transmissor na posição -5 km houve um aumento de aproximadamente 43 % na anomalia localizada na outra borda do corpo, para o transmissor situado na posição 0 km o aumento da anomalia nas bordas do corpo é de aproximadamente 31% e para a fonte na posição 5 km temos um aumento de aproximadamente 43 %.

Nas curvas correspondentes a fase normalizada, Figuras 4.6, 4.8 e 4.10 observamos que nas bordas da heterogeneidade as curvas apresentam um máximo que aumenta com o aumento da frequência, sendo importante na determinação da extensão lateral de um reservatório de hidrocarboneto.

Ao compararmos a Figura 4.9 com a Figura 4.7 observamos que o contraste na amplitude e fase da componente  $E_x$  ficou mais visível em relação as curvas correspondentes nas Figuras 4.7 e 4.5. Isto fica mais evidente quando observamos a Figura 4.10, neste a curva referente ao transmissor na posição -5 km produz uma anomalia de aproximadamente 6 na outra borda da heterogeneidade, para a curva gerada pelo transmissor na posição 0 km a anomalia atinge aproximadamente o valor 2 nas bordas e para o transmissor na posição 5 km o valor atingido é aproximadamente 6. Comparando as respostas das Figuras 4.10 e 4.8 observamos que para o transmissor na posição -5 km houve um aumento de aproximadamente 50 % na anomalia localizada na outra borda do corpo, para o transmissor situado na posição 0 km o aumento da anomalia nas bordas do corpo é de aproximadamente 15% e para a fonte na posição 5 km temos uma aumento de aproximadamente 50 %.

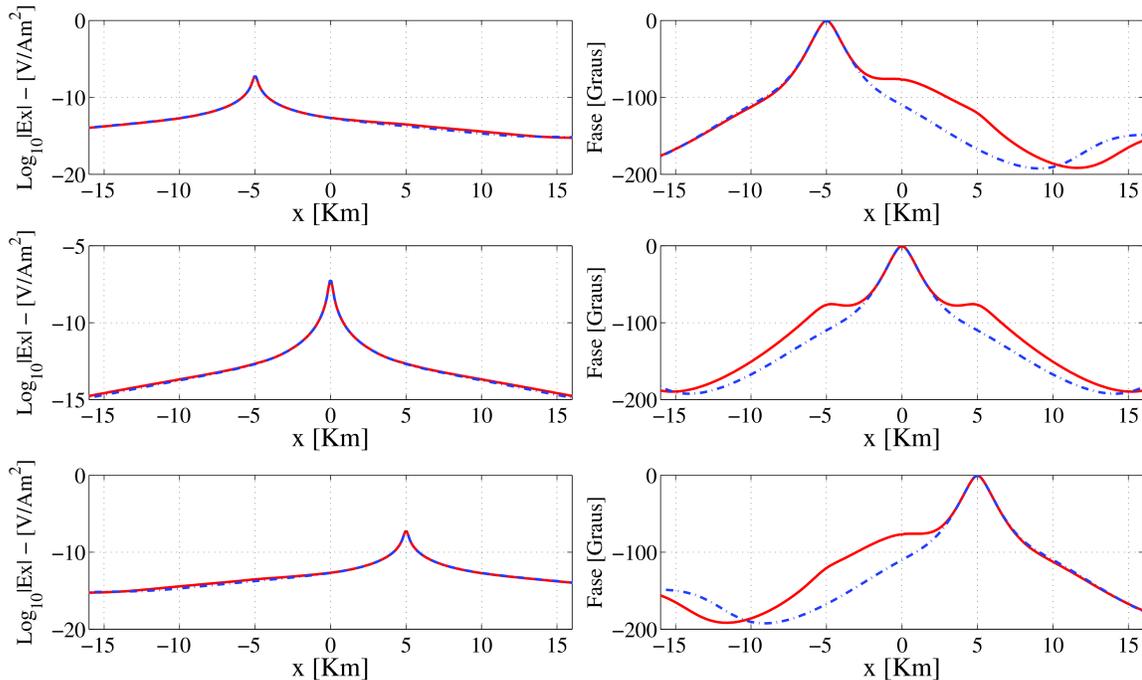


Figura 4.5. Amplitude e fase da componente  $E_x$  na frequência 0.125 Hz para as posições -5 km, 0 km e 5 km, respectivamente. A curva pontilhada em azul representa a resposta 1-D sem a presença do reservatório e a curva em vermelho representa a resposta 2.5-D

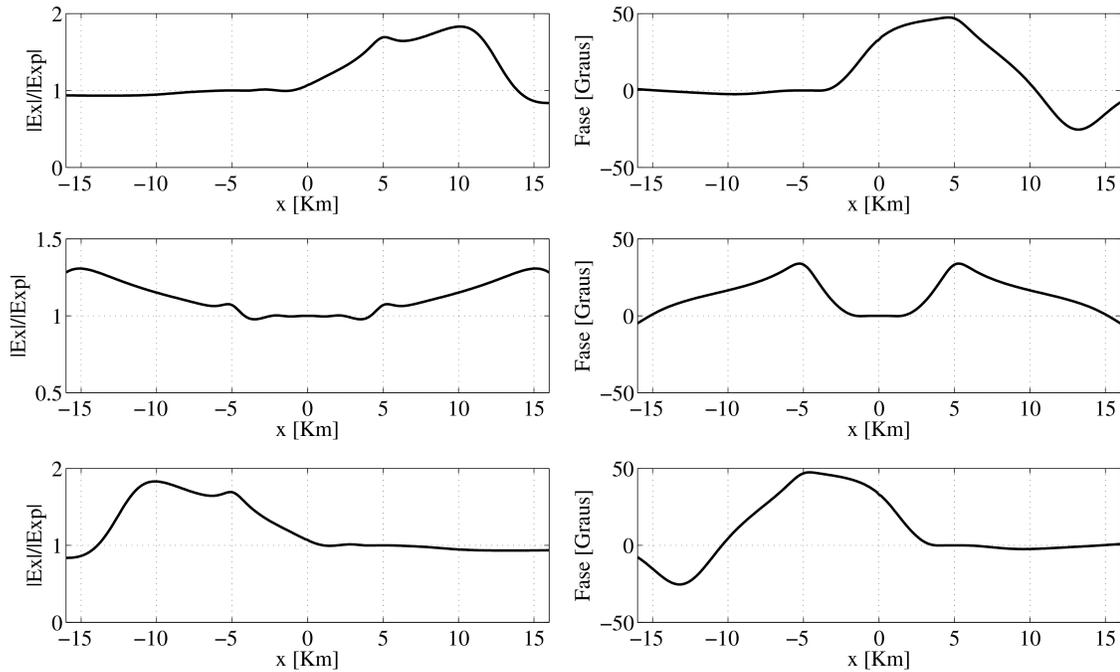


Figura 4.6. Amplitude da componente  $|E_x|$  normalizada pela componente  $|E_{xp}|$  para os transmissores nas posições -5 km, 0 km e 5 km para uma frequência de 0.125 Hz

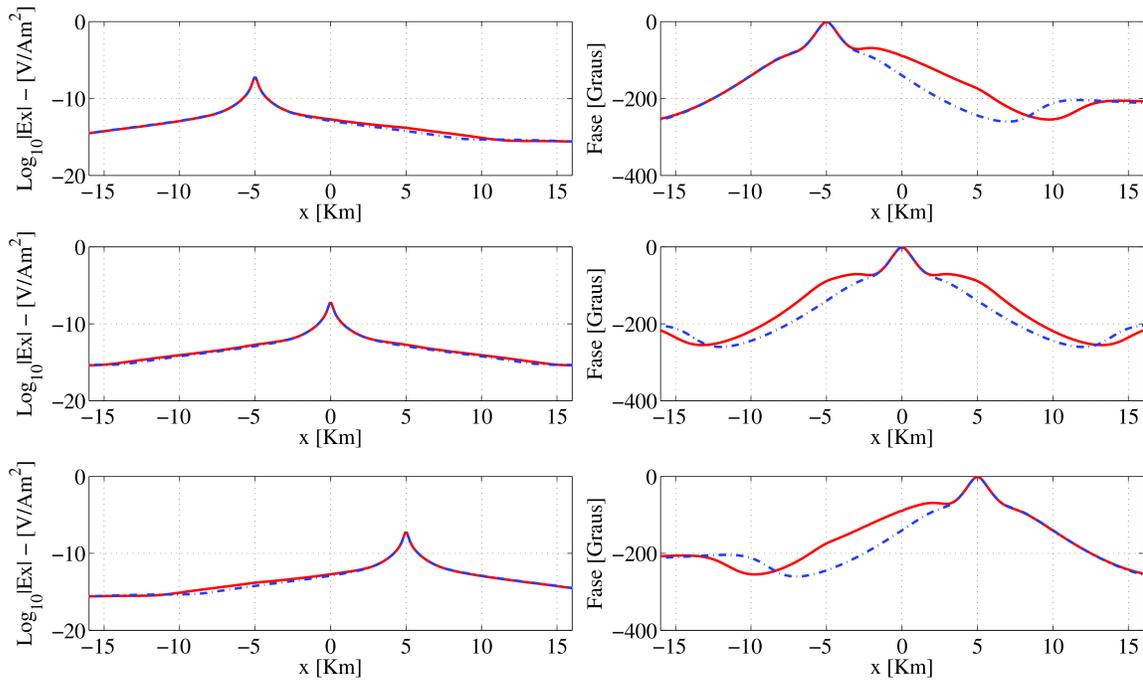


Figura 4.7. Amplitude e fase da componente  $E_x$  na frequência 0.25 Hz para as posições -5 km, 0 km e 5 km

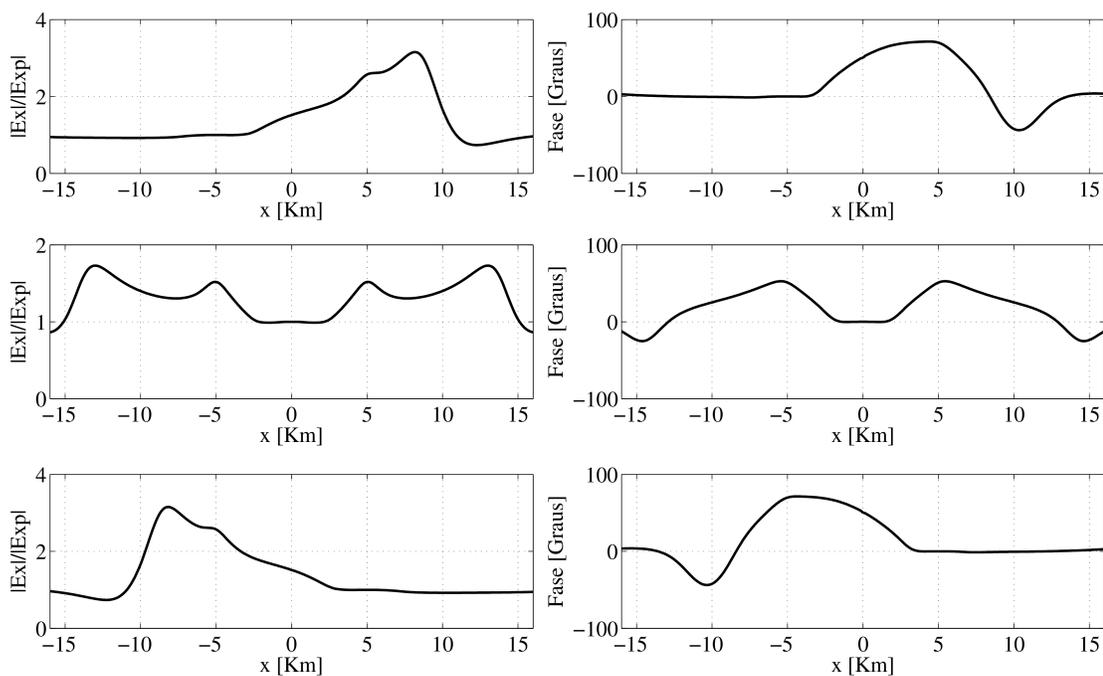


Figura 4.8. Amplitude da componente  $|E_x|$  normalizada pela componente  $|E_{xp}|$  para os transmissores nas posições -5 km, 0 km e 5 km para uma frequência de 0.25 Hz

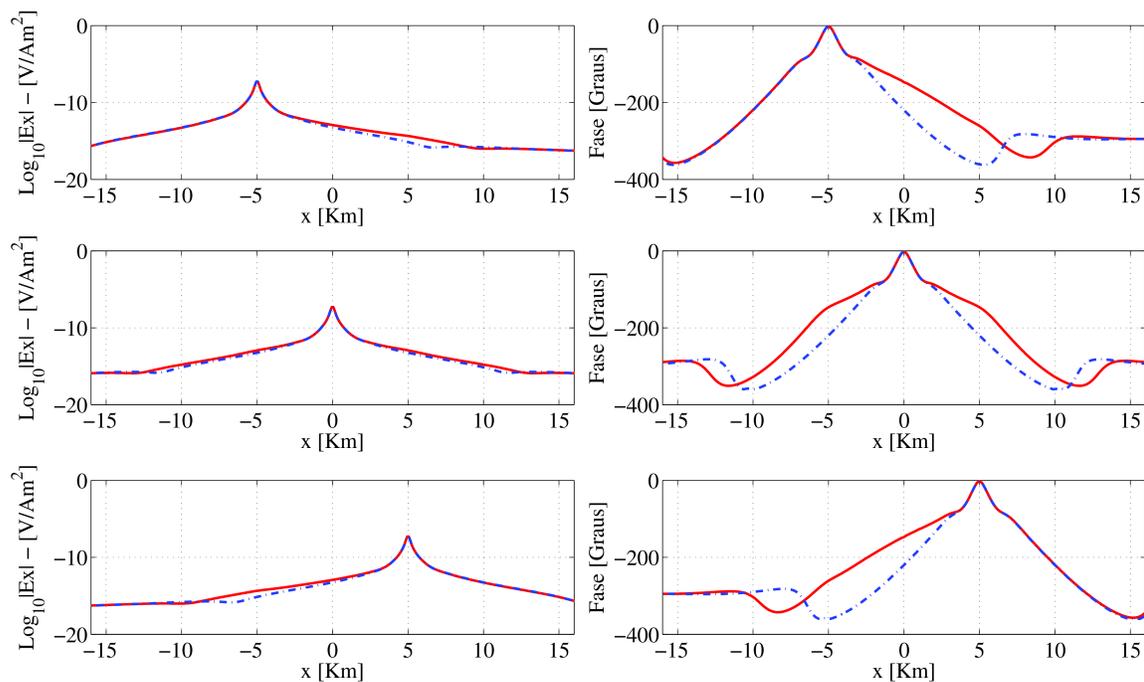


Figura 4.9. Amplitude e fase da componente  $E_x$  na frequência 0.5 Hz para as posições -5 km, 0 km e 5 km

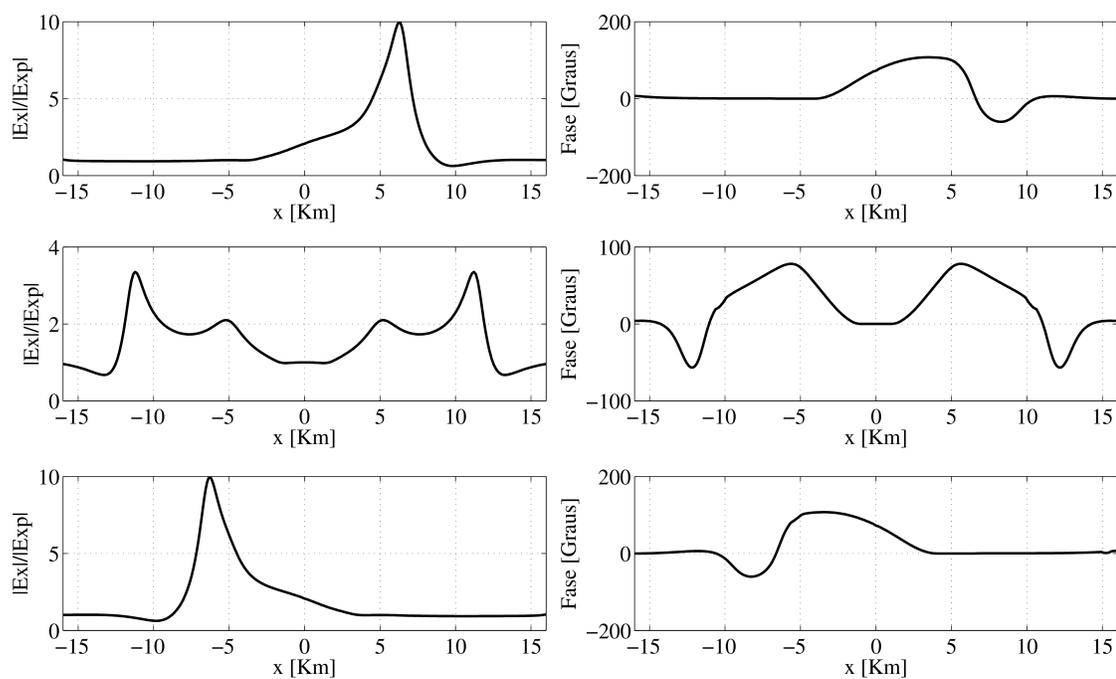


Figura 4.10. Amplitude da componente  $|E_x|$  normalizada pela componente  $|E_{xp}|$  para os transmissores nas posições -5 km, 0 km e 5 km para uma frequência de 0.5 Hz

## 5 CONCLUSÕES

Esta dissertação tratou da modelagem numérica de dados MCSEM 2.5-D em ambiente estratificado com camadas plano-paralelas. Para resolvermos o problema do MCSEM 2.5-D fizemos a decomposição dos campos eletromagnéticos em primário e secundário. O campo secundário foi resolvido por meio do método dos elementos finitos 2-D no domínio  $(x, k_y, z)$  e em seguida foi aplicado a Transformada Fourier cosseno para obter as componentes do campo elétrico nas direções  $x$  e  $z$ , e campo magnético na direção  $y$  para a configuração geométrica In-Line. Para resolvermos o campo primário utilizamos os potenciais de Schelkunoff no domínio  $(k_x, k_y, z)$  e depois fazendo a transformada para  $(x, y, z)$ . O problema 2-D utiliza como fonte o campo primário no domínio  $(x, k_y, z)$  então calculamos os campos primários neste domínio para qualquer camada do meio estratificado com camadas plano-paralelas.

Considerando a simetria do problema podemos reduzir um problema 3-D a um problema 2-D com o auxílio da transformada espacial de Fourier.

No decorrer da elaboração da formulação matemática nos deparamos com dois tipos de transformadas, a de Fourier e de Hankel. Para resolvermos numericamente estas transformadas utilizamos Filtros digitais. Na transformada de Fourier utilizamos filtros com 30 e 19 abcissas respectivamente para a transformada do domínio  $(k_x, k_y, z)$  para  $(x, k_y, z)$  e do domínio  $(x, k_y, z)$  para  $(x, y, z)$ . Na transformada de Hankel, utilizada para obter o campo 1-D em ambiente estratificado no domínio  $(x, y, z)$ , usamos um filtro com 61 abcissas. Finalmente, com os campos secundário e primário no domínio  $(x, y, z)$  podemos somá-los e obter o campo total.

Propomos um modelo estratificado para MCSEM 2.5-D e apresentamos as resposta de amplitude e fase da componente do campo elétrico na direção  $x$  para os modelos de referencia e com reservatório de hidrocarbonetos nas frequências 0.125 Hz, 0.25 Hz, e 0.5 Hz para o transmissor em três posições diferentes, nas bordas esquerda e direita e centro da heterogeneidade que correspondem, respectivamente, as posições -5 Km, 5 Km e 0 Km ao longo do eixo dos  $x$ .

Observamos que com o aumento da frequência o contraste entre as respostas para o modelo de referencia e o modelo com reservatório ficam mais evidente, ou seja, ocorre um aumento no contraste. Com o aumento da frequência constatamos que a amplitude nas curvas diminui tornando-as mais fechadas.

Nas curvas que mostram a amplitude total das componentes dos campos elétrico e mag-

nético normalizadas pelo campo primário observamos que nas bordas ou bem próximo da heterogeneidade apresentaram picos que foram aumentando com o aumento da frequência, isto possibilitou a determinação da extensão lateral do reservatório reduzindo os riscos exploratórios da prospecção de hidrocarbonetos.

Como recomendação para trabalhos posteriores citamos a implementação de uma malha não estruturada cujo desafio consiste de implementar numericamente a derivada, desenvolvimento de um algoritmo de paralelização do programa MCSEM 2.5-D já que este demanda um grande esforço computacional, investigar os efeitos da anisotropia e implementar um bom algoritmo de inversão para MCSEM 2.5-D. Existe uma grande necessidade de entender método MCSEM e este trabalho visa contribuir para o desenvolvimento e elucidação de alguns questionamentos.

## REFERÊNCIAS

- ALMEIDA, F. L. *Filtros otimizados para as transformadas seno, co-seno e de Hankel  $J_0$ ,  $J_1$  e  $J_2$* . 2002. 110 f. Dissertação (mestrado em geofísica) – Centro de Geociências, Universidade Federal do Pará, 2002.
- ANDRÉIS, D.; MACGREGOR, L. Controlled-source electromagnetic sounding in shallow water: principles and applications. *Geophysics*, v.73, p. F20-F32. 2008.
- BECKER, E. B.; CAREY, G. F.; ODEN, J. T. *Finite elements: an introduction*. New Jersey: Prentice-Hall, 1981.
- EIDESMO, T. et al. Sea bed Logging (SBL), a new method for remote and direct identification of hydrocarbon filled layers in deepwater areas. *First Break*, v.20, p. 144-152. 2002.
- HESTHAMMER, J.; and BOULAENKO, M.; The offShore EM challenge. *EAGE First Break*, 23: p. 59-66. 2005.
- JIM, J. *The Finite element method in electromagnetics*. John Wiley e Sons, INC, 2002.
- KEY, K. ; OVAL, J A parallel goal-oriented adaptive finite element method for 2.5-D electromagnetic modelling *Geophysical J. Int.*, 186; p. 137-154. 2011.
- LI, Y. ; CONSTABLE, S. 2D marine controlled-source electromagnetic modeling: Part 2-The effect of bathymetry *Geophysics*, n.72; p. WA63-WA71. 2007.
- LI, Y. ; KEY, K. 2D marine controlled-source electromagnetic modeling: Part 1-An adaptive finite-element algorithm *Geophysics*, n.72; p. WA51-WA62. 2007.
- RIJO, L. *Electrical geophysics: 1-D earth direct modeling*. (Notas de aula do curso de Pós-Graduação em Geofísica da UFPA). 2004
- RIJO, L. *Electrical geophysics: Multidimensional earth*. (Notas de aula do curso de Pós-Graduação em Geofísica da UFPA). 2002
- SANTOS, W. G. D. *Arranjos coplanar e coaxial nas sondas de perfilagem de poço: Ferramentas triaxiais em reservatórios laminados*. 2007. 70 f. Dissertação (mestrado em geofísica) – Programa de Pós-graduação em Geofísica, Instituto de Geociências, Universidade Federal do Pará, 2007.
- SILVA, M. W. C. *Influencia de estruturas geológicas bidimensionais no campo eletromagnético na presença do eletrojato equatorial*. 2005. 112 f. Tese (doutorado) – Curso de Pós-graduação em Geofísica, Instituto de Geociências, Universidade Federal do Pará, 2005.

SOUZA, V. C. T. *Modelagem numérica de dados MCSEM usando computação paralela*. . 2007. 110 f. Tese (doutorado) – Curso de Pós-graduação em Geofísica, Instituto de Geociências, Universidade Federal do Pará, 2007.

STRATTON, J. A. *Electromagnetic theory*. New York; London: MacGraw-Hill Book Company, 1941.

WARD, S. H.; HOHMANN, G. W. Electromagnetic theory for geophysical applications. In: NABIGHIAN, M.N. *Electromagnetic methods in applied geophysics:theory*. Tulsa: SEG, 1987. v.1. (Investigations in Geophysics, 3).

ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L. *The finite element method*. Oxford: Butterworth Heinemann, Volume 1: the basis. 2000.