



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM GEOFÍSICA

TESE DE DOUTORADO

**MODELAGEM ELETROMAGNÉTICA 2.5-D DE DADOS
GEOFÍSICOS ATRAVÉS DO MÉTODO DE DIFERENÇAS
FINITAS COM MALHAS NÃO-ESTRUTURADAS**

DIEGO DA COSTA MIRANDA

BELÉM
2014

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM GEOFÍSICA

DIEGO DA COSTA MIRANDA

MODELAGEM ELETROMAGNÉTICA 2.5-D DE DADOS GEOFÍSICOS
ATRAVÉS DO MÉTODO DE DIFERENÇAS FINITAS COM MALHAS
NÃO-ESTRUTURADAS

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Geofísica do Instituto de Geociências da Universidade Federal do Pará - UFPA, em cumprimento às exigências para obtenção do grau de Doutor em Geofísica.

Área de Concentração: Métodos Eletromagnéticos

Orientadores: Allen Quentin Howard Jr.
Cícero Roberto Teixeira Régis



Ministério da
**Ciência, Tecnologia
e Inovação**

BELÉM
2014

Dados Internacionais de Catalogação de Publicação (CIP)
(Biblioteca do Instituto de Geociências/UFPA)

Miranda, Diego da Costa, 1985-

Modelagem eletromagnética 2.5-D de dados geofísicos através do método de diferenças finitas com malhas não-estruturadas / Diego da Costa Miranda. – 2015.

124 f. : il. ; 30 cm

Inclui bibliografias

Orientadores: Allen Quentin Howard Jr., Cícero Roberto Teixeira Régis

Tese (Doutorado) – Universidade Federal do Pará, Instituto de Geociências, Programa de Pós-Graduação em Geofísica, Belém, 2014.

1. Geofísica. 2. Prospecção - Métodos geofísicos. 3. Diferenças finitas I. Título.

CDD 22. ed. 550

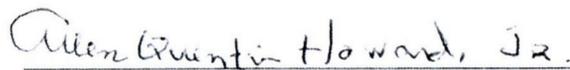
DIEGO DA COSTA MIRANDA

**MODELAGEM ELETROMAGNÉTICA 2.5-D DE DADOS GEOFÍSICOS
ATRAVÉS DO MÉTODO DE DIFERENÇAS FINITAS COM MALHAS
NÃO-ESTRUTURADAS**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Geofísica do Instituto de Geociências da Universidade Federal do Pará - UFPA, em cumprimento às exigências para obtenção do grau de Doutor em Geofísica.

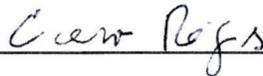
Data de Aprovação: 23/10/2014

Banca Examinadora:



Prof. Dr. Allen Quentin Howard Jr.

Laboratório de Engenharia e Exploração de Petróleo - UENF/LENEP



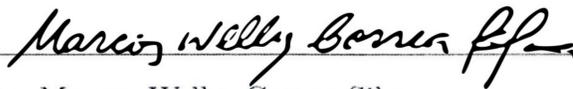
Prof. Dr. Cícero Roberto Teixeira Régis

Universidade Federal do Pará - UFPA



Dr. Emanuel José Capechi de Pinho

Petrobras



Prof. Dr. Marcos Welby Correa Silva

Universidade Federal do Pará - UFPA



Prof. Dr. Victor Cezar Tocantins de Souza

Universidade Federal do Pará - UFPA

*A minha esposa Tainã e
ao meu filho Arthur.*

AGRADECIMENTOS

Ao programa de Pós-Graduação em Geofísica da Universidade Federal do Pará, pelas condições oferecidas e ensinamentos.

Ao professor Allen Howard, pela orientação deste trabalho, por sua amizade, paciência, e por todo o apoio que me foi dado durante o período em que eu estive fora do país.

Ao professor Cícero Régis, pela sua orientação, ensinamentos e por sua amizade durante esses anos na Pós-Graduação.

Aos professores membros da banca, Marcos Welby Correa Silva, Victor Cezar Tocantins de Souza e Emanuel José Capechi de Pinho.

Aos meus amigos João Andrade e Saulo Martins, pelo companheirismo em todos os momentos.

A todos os meus outros amigos e colegas de trabalho, pelos momentos de estudo e descontração que tornam o trabalho na geofísica muito mais agradável.

A CAPES e a ANP pelo incentivo através da concessão de bolsas de estudo.

A todos os meus familiares, por torcerem pela conclusão desta etapa acadêmica.

Aos meus pais, Antonio Miranda e Maria Rosenila, por incentivarem e acreditarem na minha educação desde sempre.

RESUMO

Apresentamos a formulação eletromagnética em geometria 2.5-D aplicada à modelagem do marine controlled-source electromagnetic (mCSEM) através do método de Diferenças Finitas. Utilizamos a separação dos sinais primário e secundário para evitar problemas de singularidade devido à característica pontual da fonte eletromagnética, o dipolo elétrico. As componentes do campo eletromagnético são derivadas dos resultados obtidos para os potenciais vetor magnético e escalar elétrico, calculados em todo o domínio do problema, o qual deve ser completamente discretizado para o uso do método de Diferenças Finitas. A limitação imposta pelo uso de malhas estruturadas no delineamento das geometrias presentes nos modelos geológicos, serviu como motivação para introduzirmos o uso de malhas não-estruturadas em nossos problemas. Essas malhas são completamente adaptáveis aos modelos com que trabalhamos, promovendo um delineamento suave de suas estruturas, e podendo ser localmente refinadas apenas nas regiões de interesse. Apresentamos também o desenvolvimento do método RBF-DQ, que faz uso da técnica de aproximação de funções por meio de combinações lineares das *funções de base radial* (RBF) e da técnica de *quadraturas diferenciais* (DQ) para a aproximação das derivadas de nosso problema diferencial. Nossos resultados mostraram que o uso do método de Diferenças Finitas com malhas-não estruturadas pode ser aplicado nos problemas de modelagem geofísica, promovendo uma melhoria na qualidade dos dados modelados quando comparados com os resultados obtidos através das técnicas tradicionais de Diferenças Finitas.

Palavras-Chave: Geofísica Aplicada. Métodos Eletromagnéticos. Diferenças Finitas. Malha Não-estruturada. mCSEM.

ABSTRACT

We present a 2.5D electromagnetic formulation for modelling of the *marine controlled-source electromagnetic* (mCSEM) using a Finite Difference frequency domain (FDFD) method. The formulation is in terms of secondary fields thus removing the source point singularities. The components of the electromagnetic field are derived from the solution of the magnetic vector potential and electric scalar potential, evaluated in the entire problem domain that must be completely discretized for the use of the FDFD. Finite difference methods result in large sparse matrix equations that are efficiently solved by sparse matrix algebra preconditioned iterative methods. To overcome limitations imposed by structured grids in the traditional FDFD method, the new method is based upon unstructured grids allowing a better delineation of the geometries. These meshes are completely adaptable to the models we work with, promoting a smooth design of their structures, and may only be refined locally in regions of interest. We also present the development of RBF-DQ method, (radial basis function differential quadrature) which makes use of the technique of functions approximation by linear combinations of *radial basis functions* (RBF) and the technique of *differential quadrature* (DQ) for approximation of the derivatives. Our results show that the FDFD method with unstructured grids when applied to geophysical modeling problems, yield improved quality of modeled data in comparison with the results obtained by traditional techniques of FDFD method.

Keywords: Applied Geophysics. Electromagnetic Methods. Finite Difference Method. Unstructured Grids. mCSEM.

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1	Configuração do sistema de coordenadas Cartesianas.	20
Figura 2.2	Determinação da amplitude da zona de transição entre dois meios para o uso da função Butterworth.	33
Figura 2.3	$\omega/h_{i0} = 100$	33
Figura 2.4	$\omega/h_{i0} = 10$	34
Figura 2.5	$\omega/h_{i0} = 1$	34
Figura 2.6	$\omega/h_{i0} = 0.1$	34
Figura 2.7	Magnitudes do campo elétrico para vários valores de ω/h_{i0} . .	35
Figura 2.8	Multiplicação do filtro Kaiser $X(\omega)$ pelas componentes espectrais da função $\sigma(x)$ considerando diferentes amplitudes de banda para $X(\omega)$	37
Figura 2.9	Distribuição da função $\alpha(\mathbf{x})$ sem filtro e com o filtro Kaiser. .	38
Figura 2.10	Perfis da função $\sigma(x)$ próximos à zona de transição entre os meios definida para diferentes valores de n , que é a quantidade de pontos usados em cada direção na definição do grid uniforme utilizado na transformada de Fourier, cujo resultado é filtrado através da função Kaiser window. Os perfis sem filtragem e o definido através da função Butterworth também são mostrados para efeito de comparação. . . .	38
Figura 2.11	Distribuição da função $\alpha(\mathbf{x})$ sem filtro e com o filtro Kaiser para o modelo 2-D de geometria circular.	39
Figura 3.1	Indexação na vizinhança de um ponto para o grid 2-D não-uniforme.	41

Figura 3.2	Representação das superfícies equipotenciais em modelo com dois meios condutivos.	48
Figura 3.3	Comparação dos potenciais escalares analítico e numérico para o modelo com dois meios condutivos.	50
Figura 3.4	Solução do potencial elétrico secundário.	50
Figura 3.5	Desempenho do CG e do biCG. (a) Número de iterações por número de onda e (b) Resíduo por iteração.	51
Figura 3.6	Análise de desempenho dos pré-condicionadores.	54
Figura 3.7	Perfil de condutividade no grid não-uniforme.	56
Figura 3.8	Comparação da componente A_y do potencial vetor analítico (curva contínua) e numérico (curva tracejada).	58
Figura 3.9	Comparação da componente A_x do potencial vetor analítico (curva contínua) e numérico (curva tracejada).	59
Figura 3.10	Comparação do potencial scalar analítico (curva contínua) e numérico (curva tracejada).	60
Figura 3.11	Comparação do campo elétrico secundário analítico (curva contínua) e numérico (curva tracejada).	61
Figura 4.1	As malhas estruturadas tornam menos flexível a tarefa de delinear geometrias complexas.	62
Figura 4.2	Comparação das aproximações obtidas pelo método RBF quando aplicado com diferentes funções bases.	67
Figura 4.3	Derivadas numéricas e analítica da função $f(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + 0.5$ calculadas em (a) Grid Regular, e em (b) Grid Irregular, através dos métodos RBF-DQ e Diferenças Finitas Centrais.	71
Figura 4.4	Função gaussiana calculada para valores diferentes do parâmetro de suavidade ε	72

Figura 4.5	Qualidade da malha não-estruturada.	75
Figura 4.6	Exemplo de malha não-estruturada obtida com o algoritmo <i>Distmesh2d</i> e esquema de escolha de pontos de suporte para o cálculo das derivadas pelas RBF's.	76
Figura 4.7	Exemplo de grid não-estruturado com 132 nós, e distribuição dos coeficientes λ no operador de derivada desse grid. Os pontos azuis representam os valores não-nulos da matriz, os quais somam $nz = 924$, sendo o valor $132^2 = 17424$ o número total de elementos da matriz.	77
Figura 4.8	Descrição das etapas realizadas pelo algoritmo para o cálculo dos potenciais eletromagnéticos.	77
Figura 4.9	Função Peaks.	79
Figura 4.10	Comparação das derivadas de primeira ordem da função peaks obtidas com o método RBF-DQ e com diferenças centrais em grid estruturado e através de interpolação entre grids.	80
Figura 4.11	Comparação das derivadas de segunda ordem da função peaks obtidas com o método RBF-DQ e com diferenças centrais em grid estruturado e através de interpolação entre grids.	81
Figura 5.1	Modelo de condutividade para o problema DC em grid não-estruturado.	83
Figura 5.2	Representação das superfícies equipotenciais em modelo com cilindro condutivo em meio homogêneo, e a diferença relativa entre as soluções numérica e analítica do potencial elétrico total.	84
Figura 5.3	Comparação das soluções numérica e analítica do potencial elétrico total para o modelo com cilindro condutivo em meio homogêneo, considerando um valor fixo de $x = 290 m$	85

Figura 5.4	Solução numérica do potencial elétrico secundário para o modelo com cilindro condutivo em meio homogêneo vista por dois ângulos diferentes.	86
Figura 5.5	Modelo de condutividade para o problema do cilindro excitado por um DEH (seta dupla) em grid não-estruturado. A linha tracejada indica o local onde os campos foram tomados para comparação. . . .	87
Figura 5.6	Comparação das soluções numérica e analítica da componente E_y do campo elétrico secundário para o modelo com cilindro condutivo em meio homogêneo.	88
Figura 5.7	Modelos de condutividade para a comparação das soluções do campo elétrico calculadas nos grids estruturados e não-estruturados, para o problema do DEH próximo à superfície cilíndrica.	89
Figura 5.8	Soluções da componente E_y do campo elétrico total calculadas nos grids estruturado e não-estruturado, comparadas com a solução semi-analítica para DEH próximo à superfície cilíndrica.	90
Figura 5.9	Esquema de levantamento geofísico através do método mCSEM.	91
Figura 5.10	Esquema do modelo mCSEM com corpo resistivo 2-D.	92
Figura 5.11	Malhas usadas pelo método RBF-DQ e pelo método de Elementos Finitos respectivamente, para a modelagem do mCSEM 2.5-D. A malha não-estruturada (esquerda) é composta por 4.400 nós e a malha estruturada (direita) composta por 14.700 nós.	93
Figura 5.12	Comparação de magnitude e fase da componente E_y do campo elétrico secundário obtidos através do método RBF-DQ e do método de Elementos Finitos para modelo do mCSEM 2.5-D.	94

Figura 5.13 Modelos condutivos para o problema do mCSEM sem corpo bidimensional (esquerda) e corpo bidimensional (direita) em meio com mais de uma camada, plotados na malha não-estruturada.	95
Figura 5.14 Comparação de magnitude e fase da componente E_y do campo elétrico secundário obtidos através do método RBF-DQ para o modelo mCSEM 2.5-D em um meio estratificado.	95
Figura 5.15 Modelos condutivos para o problema do mCSEM 2.5-D com corpo retangular (esquerda) e corpo elíptico (direita), plotados na malha não-estruturada.	96
Figura 5.16 Comparação das magnitudes e fases da componente E_y do campo elétrico secundário obtidos através do método RBF-DQ para modelo do mCSEM 2.5-D considerando variação no formato do corpo resistivo a uma frequência de $0.25 Hz$ da fonte transmissora.	97
Figura 5.17 Comparação das magnitudes e fases da componente E_y do campo elétrico secundário obtidos através do método RBF-DQ para modelo do mCSEM 2.5-D considerando variação no formato do corpo resistivo a uma frequência de $1 Hz$ da fonte transmissora.	97
Figura 5.18 Modelos condutivos para o problema com batimetria, definidos nas malhas estruturadas (esquerda) e não-estruturada (direita).	99
Figura 5.19 Magnitudes do campo secundário E_y para modelos com e sem batimetria na malha estruturada (esquerda) e na malha não-estruturada (direita).	99
Figura 5.20 Fases do campo secundário E_y para modelos com e sem batimetria na malha estruturada (esquerda) e na malha não-estruturada (direita).	100
Figura 5.21 Variação do ângulo ϕ dos receptores ao longo do fundo oceânico para os modelos com malha estruturada (esquerda) e malha não-estruturada (direita).	101

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	15
2	METODOLOGIA TEÓRICA	20
2.1	FORMULAÇÃO ELETROMAGNÉTICA	21
2.2	POTENCIAIS PRIMÁRIOS	28
2.3	FUNÇÃO BUTTERWORTH E FILTRO KAISER	32
3	O MÉTODO DE DIFERENÇAS FINITAS COM MALHA ES- TRUTURADA	40
3.1	O MÉTODO DE DIFERENÇAS FINITAS CENTRAIS	40
3.2	SIMETRIZAÇÃO DAS MATRIZES	45
3.3	VALIDAÇÃO NUMÉRICA #1: FLUXO DE CORRENTE GALVÂNICA ENTRE DOIS MEIOS CONDUTIVOS	47
3.4	DESEMPENHO DO GRADIENTE CONJUGADO E BICONJUGADO	51
3.5	ANÁLISE DOS PRÉ-CONDICIONADORES	52
3.6	VALIDAÇÃO NUMÉRICA #2: DIPOLO ELÉTRICO PRÓXIMO À INTERFACE ENTRE DOIS MEIOS CONDUTIVOS	55
4	O MÉTODO DE DIFERENÇAS FINITAS COM MALHA NÃO- ESTRUTURADA	62
4.1	O MÉTODO DAS FUNÇÕES DE BASE RADIAL (RBF)	64
4.2	COMPARAÇÃO DE PRECISÃO DAS RBF's	66
4.3	APROXIMAÇÃO DAS DERIVADAS UTILIZANDO AS RBF's E QUADRATURA DIFERENCIAL (RBF-DQ)	68
4.4	ESCOLHA ADAPTATIVA DO PARÂMETRO DE SUAVIDADE	72

4.5	O MÉTODO RBF-DQ EM MALHA NÃO-ESTRUTURADA	74
5	RESULTADOS	82
5.1	VALIDAÇÃO NUMÉRICA #3: FLUXO DE CORRENTE GALVÂNICA PRÓXIMO A UMA SUPERFÍCIE CILÍNDRICA	83
5.2	VALIDAÇÃO NUMÉRICA #4: DIPOLO ELÉTRICO PRÓXIMO A UMA SUPERFÍCIE CILÍNDRICA	86
5.3	O MÉTODO mCSEM	91
5.4	MODELAGEM mCSEM: CORPO RESISTIVO 2-D	92
5.5	MODELAGEM mCSEM: BATIMETRIA	98
6	CONCLUSÕES E CONSIDERAÇÕES	103
	REFERÊNCIAS	106
	APÊNDICES	111
	APÊNDICE A Solução semi-analítica do potencial elétrico ϕ devido a um cilindro condutivo em meio à fluxo de corrente galvânica.	112
	APÊNDICE B Solução semi-analítica dos campos E e H de- vido a um cilindro condutivo excitado por um dipolo elétrico.	117

1 INTRODUÇÃO

A representação de campos e ondas em problemas físicos é geralmente feita com equações diferenciais parciais. Para um determinado problema, uma solução é obtida quando o campo ou onda, governada pela equação diferencial parcial, satisfaz um conjunto particular de condições de contorno que são definidas de acordo com a situação física dada.

Na maioria dos problemas geofísicos, devido à complexa geometria das condições de contorno, é impossível obtermos soluções analíticas, tornando-se necessário o uso de procedimentos numéricos que nos permitam obter soluções aproximadas desses problemas. As técnicas mais comumente usadas para a realização dessas tarefas são o método de Diferenças Finitas (FD), o método de Elementos Finitos (FE) e o método de Equações Integrais (EI) (SCHENKEL, 1991). Os dois primeiros métodos requerem uma completa discretização do domínio estudado, com um grau de refinamento suficiente para mapear as características nas quais temos interesse. Já no método de Equações Integrais, as operações são realizadas apenas nas regiões consideradas heterogeneidades dentro do domínio do problema. No entanto, em problemas com muitos contornos, esse método frequentemente fica em desvantagem em relação aos outros (XIONG; TRIPP, 1995), devido à grande quantidade de operações a serem realizadas, com matrizes bastante cheias, provenientes de uma formulação mais complexa.

Neste trabalho, avaliamos o uso do método de Diferenças Finitas no domínio da frequência (FDFD) para a modelagem da resposta do dipolo elétrico horizontal em ambientes de geometria 1-D e 2.5-D. Refinamos o grid de computação nas regiões de transição entre meios com diferentes propriedades físicas onde o campo eletromagnético varia mais rápido, e também próximo à fonte eletromagnética. Optamos

pelo dipolo elétrico horizontal por esse ser a fonte eletromagnética normalmente utilizada nos levantamentos do *marine controlled-source electromagnetics* (mCSEM), que é o método geofísico de exploração no qual temos interesse, por ser uma ferramenta bastante promissora e que vem sendo cada vez mais utilizada pela indústria. Embora outros tipos de fontes eletromagnéticas, como o dipolo elétrico vertical ou o dipolo magnético horizontal, e.g. EDWARDS (2005), possam ser usadas no mCSEM, o dipolo elétrico horizontal apresenta uma série de vantagens práticas e teóricas, sendo o tipo de fonte transmissora mais usada pela indústria atualmente (CONSTABLE; SRNKA, 2007).

O método de Diferenças Finitas é um método usado na resolução de equações diferenciais, nas quais as derivadas das funções são aproximadas por combinações lineares dos valores da própria função, tomados próximos à região onde se deseja a derivada. O método é normalmente associado ao uso de malhas computacionais estruturadas, o que facilita bastante sua implementação, podendo ser aplicado a uma grande variedade de problemas. Alguns exemplos de aplicações do método de Diferenças Finitas podem ser encontrados em NEWMAN; ALUMBAUGH (1995), ALUMBAUGH et al. (1996), CHAMPAGNE II; BERRYMAN; BUETTNER (2001), WEISS; NEWMAN (2002), ZHANG et al. (2005).

Por outro lado, em problemas com geometrias mais complexas, métodos como por exemplo o de Elementos Finitos, podem apresentar melhor desempenho, em grande parte devido à sua habilidade em utilizar malhas irregulares ou não-estruturadas, as quais se ajustam melhor à geometria dos problemas. O uso dos tradicionais grids estruturados oferece certas limitações na tarefa de delinear estruturas mais complexas, principalmente as que possuem geometrias curvilíneas, como é o caso dos domínios com os quais trabalhamos em geofísica. Em trabalhos, como por exemplo, WANG; PRZEKOWAS; LIU (2002) e FERNANDEZ; KULAS (2004), são apresentados problemas envolvendo o método de Diferenças Finitas nos quais a malha computacional é modificada para o melhor delineamento das geometrias. No primeiro, é utilizada uma malha estruturada cujo refinamento dos elementos pode

ser dado localmente em regiões específicas, entretanto, por ainda ser estruturada, esta ainda sofre alguma limitação na tarefa de delinear estruturas mais complexas. Já no segundo trabalho mencionado, o método de Diferenças Finitas é usado com uma malha de elementos triangulares não-estruturada na resolução de um problema de modelagem eletromagnética relativamente simples. Nele, as expressões para as derivadas de primeira e segunda ordem são dadas em termos dos valores nos nós da vizinhança de cada ponto da malha, aproximadas por um polinômio de segunda ordem ajustado nesses pontos.

Assim, apresentamos aqui o desenvolvimento do método de Diferenças Finitas associado à flexibilidade das malhas não-estruturadas na resolução de problemas geofísicos. Para isso, adotamos a teoria de aproximação de funções através das conhecidas *funções de base radial* como método de aproximação das derivadas presentes em nossos problemas. Através deste método, é possível construir operadores de derivadas de primeira e segunda ordem utilizando apenas a informação de distância entre pontos do grid, e alguma função teste, no caso, uma função de simetria radial. O procedimento baseia-se na estimativa dos coeficientes que aproximam as derivadas da função teste às combinações lineares dos valores da função teste original definidos em um conjunto de pontos irregularmente espalhados. Uma vez estimados, esses coeficientes podem ser usados na aproximação das derivadas de funções definidas nesse mesmo grid. Testamos esta metodologia em problemas caracterizados por geometrias curvas, avaliando a resposta desses meios quando excitados por uma fonte eletromagnética. Elaboramos soluções semi-analíticas para os problemas com modelos de geometria cilíndrica e as comparamos com as soluções numéricas obtidas através de nossa metodologia, o que constituiu uma etapa importante dentro desta pesquisa, uma vez que as soluções semi-analíticas para esses problemas são necessárias para a validação da metodologia que apresentamos.

Como já foi mencionado, devido à complexidade dos ambientes e às grandes dimensões dos domínios geológicos os quais queremos investigar, os sistemas lineares que surgem com o uso do método de Diferenças Finitas se tornam muito grandes,

o que pode tornar o trabalho de modelagem extremamente longo e dispendioso. O uso de grids não-uniformes e não-estruturados constitui em si uma estratégia para contornar este problema. Também é comum que as matrizes geradas com a utilização do método de Diferenças Finitas sejam esparsas, isto é, matrizes com grande quantidade de elementos cujo valor é zero, e seus elementos não nulos ocupam posições bem definidas e previamente conhecidas, o que nos permite criar formas de resolver o problema completo armazenando apenas as informações relevantes (os valores não nulos das matrizes esparsas), sendo esta também uma das estratégias usadas para a economia de memória computacional.

O uso de *métodos de gradientes* para a resolução de sistemas lineares também foi testado, uma vez que as matrizes do problema continuam a demandar um longo tempo de resolução, mesmo com o uso de malhas irregulares e aproveitamento da esparsidade das matrizes. Começamos com o método do *Gradiente Conjugado* (CG) aplicado na modelagem com grids estruturados, que tira vantagem da simetria complexa das matrizes de FD acelerando o processo de cálculo da solução. Entretanto, esse método não é viável quando queremos fazer uso de malhas irregulares, pois para esses problemas, não há garantia de simetria complexa das matrizes (HOWARD, 2011), requerendo por exemplo, o uso do método do *Gradiente Biconjugado* (biCG) SAAD (1996), que não necessita que as matrizes possuam simetria complexa, porém é mais lento que o CG.

Pré-condicionadores de matrizes também podem melhorar a convergência da solução do sistema. Avaliamos o desempenho de alguns pré-condicionadores, como o de *Jacobi* e a *decomposição LU*, no entanto, o uso de pré-condicionadores também pode destruir a simetria das matrizes, daí mais uma razão para o uso do biCG em nossos problemas. Há uma literatura muito extensa sobre pré-condicionadores e métodos iterativos, como por exemplo: BARRETT et al. (1994), SAAD (1996), GREENBAUM (1997) e CHEN (2005).

O bom condicionamento das matrizes as quais queremos resolver é determinante para a convergência da solução do sistema linear quando obtida através de métodos

iterativos. A aproximação não adequada das derivadas das equações diferenciais do problema é certamente um dos fatores que pode alterar o condicionamento das matrizes, afetando diretamente a convergência da sua solução. Por exemplo, em nossos modelos geológicos, é comum que a distribuição de propriedade física seja representada por funções descontínuas no espaço, devido à variação abrupta dessa propriedade física em determinada região, o que no ponto de vista numérico, pode gerar problemas na estimativa de suas derivadas nesse ponto. Para contornar essa dificuldade, testamos o uso da *função Butterworth* (OPPENHEIM; SHAFER, 1975) (também conhecida como *maximally flat magnitude filter*), da teoria de filtros eletrônicos, para a distribuição de condutividade, que produz zonas de transição ajustáveis, além de filtros que atuem nas componentes espectrais das funções descontínuas, tornando-as mais suaves nas regiões de transição entre duas propriedades físicas.

Diferentemente de outras formulações 2.5-D, a metodologia apresentada neste trabalho, pode ser facilmente estendida a problemas com geometrias 3-D, sem que sejam necessárias maiores modificações em sua formulação. A montagem dos operadores diferenciais, assim como das matrizes relacionadas aos campos e potenciais se dá da mesma maneira, independente da dimensão do problema, fazendo com que os procedimentos aqui descritos constituam uma etapa preparatória para a aplicação desta técnica à problemas mais abrangentes.

Começaremos mostrando o desenvolvimento matemático que usamos para a obtenção das equações diferenciais do campo eletromagnético em termos dos potenciais eletromagnéticos acoplados, as quais são as mesmas para os modelos 1-D e 2.5-D. Em seguida, apresentamos o desenvolvimento do método de Diferenças Finitas tanto para malhas estruturadas quanto para malhas não-estruturadas, comparando os resultados obtidos através das duas abordagens. Finalmente, apresentamos alguns exemplos de aplicação do método de Diferenças Finitas em problemas de modelagem geofísica, mais especificamente, problemas relacionados ao método mCSEM, o qual descreveremos brevemente no capítulo 5.

2 METODOLOGIA TEÓRICA

O desenvolvimento teórico de nosso problema tem como ponto de partida a identificação da simetria do campo gerado pelo transmissor e da estrutura do meio geológico o qual queremos investigar. Neste ponto, vale ressaltar que consideraremos inicialmente o sistema cartesiano de coordenadas, com o eixo x orientado na direção vertical, com sentido positivo para baixo, o eixo y no plano desta página com sentido positivo para a direita e o eixo z com direção perpendicular aos dois primeiros, com sentido positivo saindo do plano da página em direção ao leitor, como mostra a figura 2.1. Para o dipolo elétrico horizontal (DEH), temos um campo eletromagnético incidente de simetria esférica, constituindo uma fonte tridimensional. Para o problema 1-D, consideramos o modelo geológico constituído de uma ou mais camadas homogêneas e sequenciais, as quais dependem de apenas uma das coordenadas de nosso sistema de referência, neste caso, a coordenada x . Finalmente, temos a situação onde a estrutura geológica não depende da componente z de nosso sistema e o nosso perfil de condutividade terá dependência apenas em x e y , caracterizando um modelo 2-D. No entanto, o campo eletromagnético resultante possuirá dependência em x , y e z devido a natureza tridimensional do DEH, sendo essa a característica que define o problema 2.5-D.

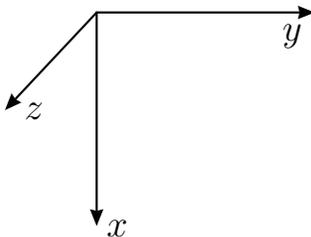


Figura 2.1: Configuração do sistema de coordenadas Cartesianas.

2.1 FORMULAÇÃO ELETROMAGNÉTICA

A formulação eletromagnética para as componentes dos campos \mathbf{E} e \mathbf{H} em nossos problemas geofísicos, tem como ponto de partida as equações de Maxwell no domínio da frequência (e.g. GIANZERO (1988) e RIJO (2004)). Assim, seguindo o desenvolvimento apresentado por HOWARD; CHEW (1992), as equações de Maxwell para uma variação temporal $e^{-i\omega t}$ no Sistema Internacional de unidades (SI) se reduzem a

$$\nabla \times \mathbf{H}(r) = (\sigma(r) - i\omega\varepsilon)\mathbf{E}(r) + \mathbf{J}_s(r) \quad (2.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(r) = i\omega\mu\mathbf{H}(r) \quad (2.2)$$

sendo σ a condutividade elétrica em S/m , ω a frequência angular, \mathbf{J}_s a densidade de corrente elétrica na fonte em A/m^2 , μ a permeabilidade magnética doravante considerada com o valor de $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} H/m$ e ε a permissividade elétrica do meio em F/m . Por praticidade, nas equações acima e nas próximas, r representará todas as coordenadas do ponto onde o campo é observado. Com isso definimos o número de onda $k(r)$ não-homogêneo como

$$k(r) = \sqrt{\omega^2\mu_0(\varepsilon + i\sigma(r)/\omega)}, \quad \text{Im}(k(r)) > 0. \quad (2.3)$$

Aqui, os campos elétrico e magnético são desacoplados através da introdução do potencial vetor magnético $\mathbf{A}(r)$. Definimos então o vetor indução magnética $\mathbf{B}(r)$ como sendo

$$\mathbf{B}(r) = \nabla \times \mathbf{A}(r) \quad (2.4)$$

Note que com essa definição, a divergência de $\mathbf{B}(r)$ é automaticamente zero. Das equações (2.2) e (2.4) segue-se que

$$\nabla \times (\mathbf{E}(r) - i\omega\mathbf{A}(r)) = 0 \quad (2.5)$$

Pelo motivo de $\nabla \times (\nabla\phi(r)) = 0$ ser uma identidade vetorial para qualquer campo escalar $\phi(r)$, a expressão para o campo elétrico $\mathbf{E}(r)$ torna-se

$$\mathbf{E}(r) = i\omega\mathbf{A}(r) - \nabla\phi(r) \quad (2.6)$$

Substituindo (2.4) e (2.6) em (2.1),

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A}(r) = \mu_0\mathbf{J}_s(r) + \mu_0(\sigma(r) - i\omega\varepsilon)\left(i\omega\mathbf{A}(r) - \nabla\phi(r)\right), \quad (2.7)$$

e aplicando a identidade vetorial $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2\mathbf{A}$ no lado esquerdo de (2.7), obtemos

$$\nabla^2\mathbf{A}(r) = -\mu_0\mathbf{J}_s(r) - i\omega\tilde{\sigma}(r)\mu_0\mathbf{A}(r) + \nabla\left(\nabla \cdot \mathbf{A}(r) + \mu_0\tilde{\sigma}(r)\phi(r)\right). \quad (2.8)$$

sendo $\tilde{\sigma}(r) = \sigma(r) - i\omega\varepsilon$. Nos problemas onde utiliza-se frequências baixas ($< 100 \text{ kHz}$), como é o nosso caso, temos $\tilde{\sigma}(r) \approx \sigma(r)$.

A definição do vetor indução magnética $\mathbf{B}(r)$ em função do potencial vetor $\mathbf{A}(r)$ gera uma arbitrariedade na escolha dos potenciais (\mathbf{A}, ϕ) , de tal forma que possibilita que uma série de potenciais distintos produza os mesmos campos eletromagnéticos. Em particular, é possível escolhermos os potenciais tal que eles satisfaçam a seguinte equação:

$$\nabla \cdot \mathbf{A}(r) + \mu_0\tilde{\sigma}(r)\phi(r) = 0 \quad (2.9)$$

Note que a equação acima aparece entre parênteses no terceiro termo do lado direito de (2.8). A equação (2.9) é conhecida como a *condição de calibre de Lorentz* ou simplesmente *calibre de Lorentz* (JIN, 1962; JACKSON, 1962). Assim, utilizando a condição de calibre em (2.8), temos

$$\left(\nabla^2 + k^2(r)\right)\mathbf{A}(r) + \mu_0\nabla\tilde{\sigma}(r)\phi(r) = -\mu_0\mathbf{J}_s(r), \quad (2.10)$$

que é a nossa primeira equação envolvendo os potenciais (\mathbf{A}, ϕ) .

Partindo-se agora do *Princípio da Conservação de Carga*, i.e.

$$\nabla \cdot \mathbf{J}(r) + i\omega\rho(r) = 0 \quad (2.11)$$

podemos explicitar que

$$\nabla \cdot \left(\tilde{\sigma}(r)\mathbf{E}(r) \right) - I = 0, \quad (2.12)$$

sendo $I = \nabla \cdot \mathbf{J}_s(r)$.

Para os problemas 2.5-D, os meios são independentes de uma das coordenadas. Aqui, escolhemos a coordenada z . A fonte gera corrente elétrica no plano xy . Assim, podemos reduzir o problema em uma série de problemas 2-D através da *transformada de Fourier* dos campos e dos potenciais em relação à variável z .

Por exemplo, o potencial vetor magnético é obtido através de

$$\mathbf{A}(r) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{A}(\mathbf{x}, K_z) e^{-iK_z z} dK_z. \quad (2.13)$$

Nas expressões a seguir, todos os campos e potenciais estão no espaço K_z . Os vetores $\mathbf{x} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{k}}$ são cartesianos e bidimensionais. Ao aplicarmos a transformada de Fourier em relação a z na equação (2.10), obtemos

$$\left(\nabla^2 + k^2(\mathbf{x}) - K_z^2 \right) \mathbf{A}(\mathbf{x}, K_z) + \mu_0 \nabla \tilde{\sigma}(\mathbf{x}) \phi(\mathbf{x}, K_z) = -\mu_0 \mathbf{J}_s(\mathbf{x}), \quad (2.14)$$

Para a viabilização do sistema linear envolvendo os potenciais, a segunda equação requerida pode ser obtida substituindo-se a expressão (2.6) na equação (2.12) e aplicando a transformada de Fourier no resultado. Isso nos dá

$$\nabla \cdot \left(\tilde{\sigma}(\mathbf{x}) \nabla \phi(\mathbf{x}, K_z) \right) - K_z^2 \tilde{\sigma}(\mathbf{x}) \phi(\mathbf{x}, K_z) - i\omega \nabla \cdot \left(\tilde{\sigma}(\mathbf{x}) \mathbf{A}(\mathbf{x}, K_z) \right) = I \quad (2.15)$$

Usando o calibre de Lorentz (2.9) no terceiro termo do lado esquerdo da equação

(2.15), produz

$$\nabla \cdot \left(\tilde{\sigma}(\mathbf{x}) \nabla \phi(\mathbf{x}, K_z) \right) + (k^2(\mathbf{x}) - K_z^2) \tilde{\sigma}(\mathbf{x}) \phi(\mathbf{x}, K_z) - i\omega \nabla \tilde{\sigma}(\mathbf{x}) \mathbf{A}(\mathbf{x}, K_z) = I \quad (2.16)$$

Diferentemente da equação 2.14, o primeiro termo do lado esquerdo da equação (2.16) contém um operador de derivada de primeira ordem, e portanto não conduzirá o nosso sistema à simetria necessária para a resolução através do método de gradiente conjugado. Como apontado por ALLERS; SEZGINER; DRUSKIN (1994), a chamada *transformação de Stefănescu* é capaz de mudar a equação do potencial elétrico para uma forma que contribua para essa simetria. Isso nos motiva a definir um novo potencial escalar $V(\mathbf{x})^1$ tal que:

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{V(\mathbf{x})}{\alpha(\mathbf{x})}, \quad (2.17)$$

sendo

$$\alpha(\mathbf{x}) = \sqrt{\tilde{\sigma}(\mathbf{x})}. \quad (2.18)$$

A substituição da transformação (2.17) na equação (2.16) nos dá, através de certa simplificação

$$\left(\nabla^2 + k^2(\mathbf{x}) - K_z^2 - \frac{\nabla^2 \alpha(\mathbf{x})}{\alpha(\mathbf{x})} \right) V(\mathbf{x}) - 2i\omega \nabla \alpha(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{I}{\alpha(\mathbf{x})}. \quad (2.19)$$

As equações (2.14) e (2.19) acoplam as componentes x e y do potencial vetor $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ ao potencial escalar $\phi(\mathbf{x})$ gerando um sistema simetrizável. Para entendermos melhor a estrutura desse sistema linear acoplado, podemos escrever as equações

¹A dependência em K_z dos campos e potenciais fica implícita a partir de agora com o uso apenas de \mathbf{x} em seus argumentos

(2.14) e (2.19) da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} \nabla^2 + k^2(\mathbf{x}) - K_z^2 & 0 & 2\mu_0\partial_x\alpha(\mathbf{x}) \\ 0 & \nabla^2 + k^2(\mathbf{x}) - K_z^2 & 2\mu_0\partial_y\alpha(\mathbf{x}) \\ -2i\omega\partial_x\alpha(\mathbf{x}) & -2i\omega\partial_y\alpha(\mathbf{x}) & \nabla^2 + k^2(\mathbf{x}) - K_z^2 - \frac{\nabla^2\alpha(\mathbf{x})}{\alpha(\mathbf{x})} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mu_0 J_{sx} \\ -\mu_0 J_{sy} \\ I/\alpha(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

Devido à característica singular dos termos fontes dos potenciais vetor e escalar, torna-se mais vantajoso resolver o sistema para os potenciais secundários. Temos então:

$$\mathbf{A}_s(\mathbf{x}) = \mathbf{A}(\mathbf{x}) - \mathbf{A}_0(\mathbf{x}). \quad (2.21)$$

$$V_s(\mathbf{x}) = V(\mathbf{x}) - V_0(\mathbf{x}). \quad (2.22)$$

O potencial vetor primário $\mathbf{A}_0(\mathbf{x})$ satisfaz a equação

$$\left(\nabla^2 + k_1^2 - K_z^2\right)\mathbf{A}_0(\mathbf{x}) = -\mu_0\mathbf{J}_s(\mathbf{x}), \quad (2.23)$$

e o potencial escalar primário $V_0(\mathbf{x})$ satisfaz

$$\left(\nabla^2 + k_1^2 - K_z^2\right)V_0(\mathbf{x}) = \frac{I}{\alpha(\mathbf{x})}, \quad (2.24)$$

sendo k_1 o número de onda do meio onde está localizada a fonte eletromagnética.

Subtraindo a equação (2.23) da equação (2.14) e a equação (2.24) da equação (2.19), obtemos respectivamente:

$$\left(\nabla^2 + k^2(\mathbf{x}) - K_z^2\right)\mathbf{A}_s(\mathbf{x}) + 2\mu_0\nabla\alpha(\mathbf{x})V_s(\mathbf{x}) = -\left(k^2(\mathbf{x}) - k_1^2\right)\mathbf{A}_0(\mathbf{x}) - 2\mu_0\nabla\alpha(\mathbf{x})V_0(\mathbf{x}) \quad (2.25)$$

e

$$\begin{aligned} \left(\nabla^2 + k^2(\mathbf{x}) - K_z^2 - \frac{\nabla^2 \alpha(\mathbf{x})}{\alpha(\mathbf{x})} \right) V_s(\mathbf{x}) - 2i\omega \nabla \alpha(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{A}_s(\mathbf{x}) &= 2i\omega \nabla \alpha(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{A}_0(\mathbf{x}) + \\ &+ \left(k^2(\mathbf{x}) - k_1^2 - \frac{\nabla^2 \alpha(\mathbf{x})}{\alpha(\mathbf{x})} \right) V_0(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (2.26)$$

Escrevendo as equações (2.25) e (2.26) na forma matricial, temos

$$\begin{bmatrix} \nabla^2 + k^2(\mathbf{x}) - K_z^2 & 0 & 2\mu_0 \partial_x \alpha(\mathbf{x}) \\ 0 & \nabla^2 + k^2(\mathbf{x}) - K_z^2 & 2\mu_0 \partial_y \alpha(\mathbf{x}) \\ -2i\omega \partial_x \alpha(\mathbf{x}) & -2i\omega \partial_y \alpha(\mathbf{x}) & \nabla^2 + k^2(\mathbf{x}) - K_z^2 - \frac{\nabla^2 \alpha(\mathbf{x})}{\alpha(\mathbf{x})} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{sx} \\ A_{sy} \\ V_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -S_x \\ -S_y \\ -S_V \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

Sendo

$$\begin{aligned} S_x &= (k^2(\mathbf{x}) - k_1^2) A_{0x} + 2\mu_0 \partial_x \alpha(\mathbf{x}) V_0(\mathbf{x}) \\ S_y &= (k^2(\mathbf{x}) - k_1^2) A_{0y} + 2\mu_0 \partial_y \alpha(\mathbf{x}) V_0(\mathbf{x}) \\ S_V &= -2i\omega \nabla \alpha \mathbf{A}_0 - \left(k^2(\mathbf{x}) - k_1^2 - \frac{\nabla^2 \alpha(\mathbf{x})}{\alpha(\mathbf{x})} \right) V_0(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (2.28)$$

Note que a matriz em (2.27) não é simétrica. Para simetrizá-la, faremos

$$\begin{aligned} A_{sx} &= e^{i\pi/4} \mu_0^{1/2} \tilde{A}_{sx} \\ A_{sy} &= e^{i\pi/4} \mu_0^{1/2} \tilde{A}_{sy} \\ V &= \omega^{1/2} \tilde{V} \end{aligned} \quad (2.29)$$

Resultando finalmente em

$$\begin{bmatrix} \nabla^2 + k^2(\mathbf{x}) - K_z^2 & 0 & \beta \partial_x \alpha(\mathbf{x}) \\ 0 & \nabla^2 + k^2(\mathbf{x}) - K_z^2 & \beta \partial_y \alpha(\mathbf{x}) \\ \beta \partial_x \alpha(\mathbf{x}) & \beta \partial_y \alpha(\mathbf{x}) & \nabla^2 + k^2(\mathbf{x}) - K_z^2 - \frac{\nabla^2 \alpha(\mathbf{x})}{\alpha(\mathbf{x})} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{A}_{sx} \\ \tilde{A}_{sy} \\ \tilde{V}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\tilde{S}_x \\ -\tilde{S}_y \\ -\tilde{S}_V \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

Sendo

$$\begin{aligned} \beta &= 2e^{-i\pi/4}(\omega\mu_0)^{1/2} \\ \tilde{S}_x &= e^{-i\pi/4}\mu_0^{-1/2}(k^2 - k_1^2)A_{0x} + 2\mu_0\partial_x\alpha(\mathbf{x})V_0(\mathbf{x}) \\ \tilde{S}_y &= e^{-i\pi/4}\mu_0^{-1/2}(k^2 - k_1^2)A_{0y} + 2\mu_0\partial_y\alpha(\mathbf{x})V_0(\mathbf{x}) \\ \tilde{S}_V &= \omega^{-1/2} \left[-2i\omega\nabla\alpha\mathbf{A}_0 - \left(k^2(\mathbf{x}) - k_1^2 - \frac{\nabla^2\alpha(\mathbf{x})}{\alpha(\mathbf{x})} \right) V_0(\mathbf{x}) \right] \end{aligned} \quad (2.31)$$

2.2 POTENCIAIS PRIMÁRIOS

No desenvolvimento das equações dos potenciais secundários, vimos que os termos fontes, localizados no lado direito das equações, dependem do valor dos potenciais primários vetor e escalar. Assim, tomando a equação que satisfaz o potencial vetor primário $\mathbf{A}_0(r)$

$$\left(\nabla^2 + k_1^2\right)\mathbf{A}_0(r) = -\mu_0\mathbf{J}_s(r), \quad (2.32)$$

onde a função fonte \mathbf{J}_s para um dipolo elétrico localizado em $x = x_t$ e alinhado à direção y , assume a seguinte forma

$$\mathbf{J}_s(r) = \hat{y}I_0 dl \delta(x - x_t)\delta(y)\delta(z). \quad (2.33)$$

sendo I_0 a corrente elétrica e dl o comprimento infinitesimal da fonte.

No entanto, notamos que o tratamento numérico envolvendo a expressão acima pode tornar-se muito complicado, devido às singularidades provocadas pelas deltas de Dirac que definem a função fonte. Desse modo, é conveniente encontrarmos uma representação analítica para o potencial vetor $\mathbf{A}_0(r)$, que nos permita abranger a característica singular do dipolo elétrico dentro da modelagem numérica.

Utilizamos a solução obtida através da superposição linear das soluções fundamentais para fontes pontuais, assim é possível expressarmos a solução da equação (2.32) como

$$\mathbf{A}_0(r) = \mu_0 \int \int \int_V \mathbf{J}'_s(r) G_0(r, r') dV' \quad (2.34)$$

sendo $G_0(r, r')$ a solução fundamental para a fonte pontual, também conhecida como *função de Green* (MORSE; FESHBACH, 1953), cuja forma em um subspaço homogêneo é dada por

$$G_0(r, r') = \frac{e^{ik|r-r'|}}{4\pi|r-r'|}, \quad (2.35)$$

que representa uma onda esférica propagando-se a partir de uma posição r' .

Substituindo (2.35) e (2.33) em (2.34), obtemos como potencial vetor primário

para o dipolo elétrico horizontal

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_0(r) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \int \int_V \mathbf{J}_s(r) \frac{e^{ik|r-r'|}}{|r-r'|} dV' = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-dl/2}^{dl/2} \hat{y} I_0 \frac{e^{ik|r-r'|}}{|r-r'|} dy' \\ &= \hat{y} \frac{\mu_0 I_0 dl}{4\pi} \frac{e^{ikR}}{R},\end{aligned}\tag{2.36}$$

com

$$R = |r - r'|\tag{2.37}$$

Utilizando a *identidade de Sommerfeld* (SOMMERFELD, 1909, 1949)

$$\frac{e^{ik_0 R}}{R} = i \int_0^\infty dk_\rho \frac{k_\rho}{k_z} J_0(k_\rho \rho) e^{ik_z |z|}, \quad \text{onde } k_z = \sqrt{k_0^2 - k_\rho^2}\tag{2.38}$$

podemos então expressar o potencial vetor $\mathbf{A}_0(r)$ em sua forma espectral

$$\mathbf{A}_0(r) = \frac{i\mu_0 I_0 dl \hat{y}}{4\pi} \int_0^\infty \frac{k_\rho}{k_z} J_0(k_\rho \rho) e^{ik_z |z-z'|} dk_\rho\tag{2.39}$$

com $\rho = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}$ e $k_z = \sqrt{k^2 - k_\rho^2}$, $Im(k_z) \geq 0$.

A interpretação física para a equação (2.39) é que uma onda esférica pode ser expandida como uma integral de ondas cilíndricas na direção ρ multiplicada por uma onda plana na direção z sobre todos os números de onda K_z (CHEW, 1995), o que corresponde melhor às condições de contorno do problema 2.5-D.

O mesmo procedimento pode ser feito para o potencial escalar $V_0(\mathbf{x})$, uma vez que o mesmo obedece à uma equação com estrutura semelhante a do potencial vetor $\mathbf{A}_0(\mathbf{x})$. Partindo da equação do potencial escalar primário

$$\left(\nabla^2 + k_1^2\right)v_0(x, y, z) = \frac{I}{\alpha(\mathbf{x})}\tag{2.40}$$

onde $v_0(x, y, z)$ é o potencial escalar no domínio (x, y, z) .

Para o potencial escalar, modificamos o termo fonte de forma a considerar o pequeno deslocamento causado pelo comprimento da fonte.

Sendo $I = \nabla \cdot \mathbf{J}_s \propto \mathbf{J}_s = I_0 \hat{y} \delta(x - x_t) \delta(z) (u(y + dl/2) - u(y - dl/2))$, onde a função $u(y)$ é definida como

$$u(y) = \begin{cases} 1, & y \geq 0 \\ 0 & y < 0 \end{cases}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_s = I_0 \delta(x - x_t) \delta(z) (\delta(y + dl/2) - \delta(y - dl/2)) \quad (2.41)$$

então

$$(\nabla^2 + k^2)v_0(x, y, z) = -\frac{I_0}{\alpha(\mathbf{x})} \delta(x - x_t) \delta(z) (\delta(y + dl/2) - \delta(y - dl/2)) \quad (2.42)$$

Sabendo que

$$(\nabla^2 + k^2) \frac{e^{ikR}}{4\pi R} = -\delta^{(3)}(r - r') \quad (2.43)$$

com

$$R = |r - r'| \quad R^\pm = \left[(x - x')^2 + (y \pm dl/2)^2 + (z - z')^2 \right]^{1/2},$$

e utilizando a solução através de superposição linear da solução fundamental, como em (2.34), temos

$$v_0(x, y, z) = \frac{I_0}{\alpha(\mathbf{x})} \left(\frac{e^{ikR^+}}{4\pi R^+} - \frac{e^{ikR^-}}{4\pi R^-} \right). \quad (2.44)$$

Aplicando transformada de Fourier

$$V_0(x, y, K_z) = \int_{-\infty}^{\infty} v_0(x, y, z) e^{-ik_z z} dz \quad (2.45)$$

e usando novamente a identidade de Sommerfeld (2.38) juntamente com a identidade $\frac{i\pi}{2} H_0^{(1)}(i\beta r) = K_0(\beta r)$ apresentada na p.375 em ABRAMOWITZ; STEGUN (1964), podemos escrever

$$G_0 = \frac{e^{ikR}}{4\pi R} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K_0(\gamma\rho)e^{ik_z|z-z'|}}{2\pi} \frac{dk_z}{2\pi} \quad \gamma = \sqrt{k_z^2 - k^2} \quad Re(\gamma) \geq 0. \quad (2.46)$$

Então

$$\int \frac{e^{ikR}}{4\pi R} e^{-iK_z z} dz = \frac{1}{2\pi} K_0(\gamma\rho). \quad (2.47)$$

Com isso, a equação

$$V_0(x, y, K_z) = \frac{I_0}{\alpha(\mathbf{x})} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{e^{ikR^+}}{4\pi R^+} - \frac{e^{ikR^-}}{4\pi R^-} \right) e^{-iK_z z} dz \quad (\text{Assumindo } z' = 0) \quad (2.48)$$

produz

$$V_0(x, y, K_z) = \frac{I_0}{2\pi\alpha(\mathbf{x})} (K_0(\gamma\rho^+) - K_0(\gamma\rho^-)) \quad (2.49)$$

onde

$$\rho^\pm = ((y \pm dl/2)^2 + (x - x_{tran})^2)^{1/2}.$$

E aplicando a simetrização (2.29), finalmente obtemos

$$\tilde{V}_0(x, y, k_z) = \frac{V_0(x, y, K_z)}{\omega^{1/2}\alpha(\mathbf{x})} = \frac{I_0}{2\pi\omega^{1/2}\alpha(\mathbf{x})} (K_0(\gamma\rho^+) - K_0(\gamma\rho^-)). \quad (2.50)$$

As expressões (2.39) e (2.50) são as equações necessárias para o cálculo do lado direito das equações diferenciais para os potenciais secundários.

2.3 FUNÇÃO BUTTERWORTH E FILTRO KAISER

Vimos que as equações diferenciais dos potenciais possuem derivadas de primeira e segunda ordem da propriedade física do meio, mais precisamente, da grandeza $\alpha(\mathbf{x}) = \tilde{\sigma}(\mathbf{x})^{1/2}$. A equação (2.26) mostra que é preciso calcular tanto o gradiente quanto o Laplaciano de $\alpha(\mathbf{x})$. Em virtude disso, os primeiros testes que realizamos nesta pesquisa foram direcionados ao cálculo das derivadas numéricas desses termos, através da formulação tradicional do método de diferenças finitas. Em nossos problemas, as regiões onde encontramos variações das propriedades físicas podem gerar grandes descontinuidades nas funções que representam essas propriedades. Percebemos que as estimativas das derivadas dessa funções ficaram pouco satisfatórias em nossos resultados preliminares. Desse modo, vimos a necessidade de tornar a função descontínua $\alpha(\mathbf{x})$ em uma função que possua uma zona de transição um pouco mais suave.

Uma maneira simples de se definir uma zona de transição contínua no problema de uma interface simples entre dois meios é através da função *Butterworth*, comumente utilizada na teoria de filtros eletrônicos (OPPENHEIM; SHAFER, 1975). A função Butterwoth pode ser definida como

$$\sigma_N(x) = \sigma_2 + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{1 + (x/x_0)^N} \quad (2.51)$$

Na equação acima, o expoente N é um número positivo que controla a amplitude da zona de transição, σ_1 é a condutividade do meio 1, σ_2 é a condutividade do meio 2 e x_0 é o ponto central da região de transição. Utilizando três segmentos de retas, cada um deles tangente à função em uma determinada região como mostra a figura 2.2, e aproximando a derivada da função (2.51) nessas regiões ao valor da função do segmento de reta correspondente nesse ponto, é possível obtermos uma medida da amplitude de transição, dada pela seguinte expressão

$$\omega = 4x_0/N \quad (2.52)$$

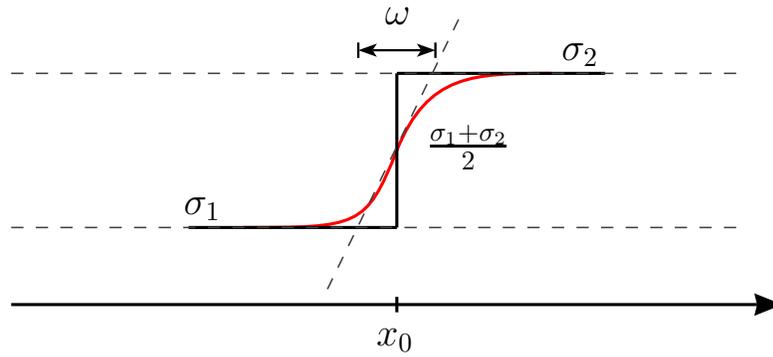


Figura 2.2: Determinação da amplitude da zona de transição entre dois meios para o uso da função Butterworth.

Com isso, testamos a sensibilidade da solução para o campo elétrico $E_y(y)$ no problema de dois meios heterogêneos quando variamos o parâmetro ω que define a taxa de suavidade da zona de transição entre os dois meios. Variamos ω em termos de h_{i0} , que é o espaçamento do grid computacional utilizado. As figuras abaixo mostram a função $\alpha(\mathbf{x})$ definida para várias amplitudes de transição assim como o resultado do cálculo numérico do valor absoluto do termo $\frac{\nabla^2 \alpha(\mathbf{x})}{\alpha(\mathbf{x})}$.

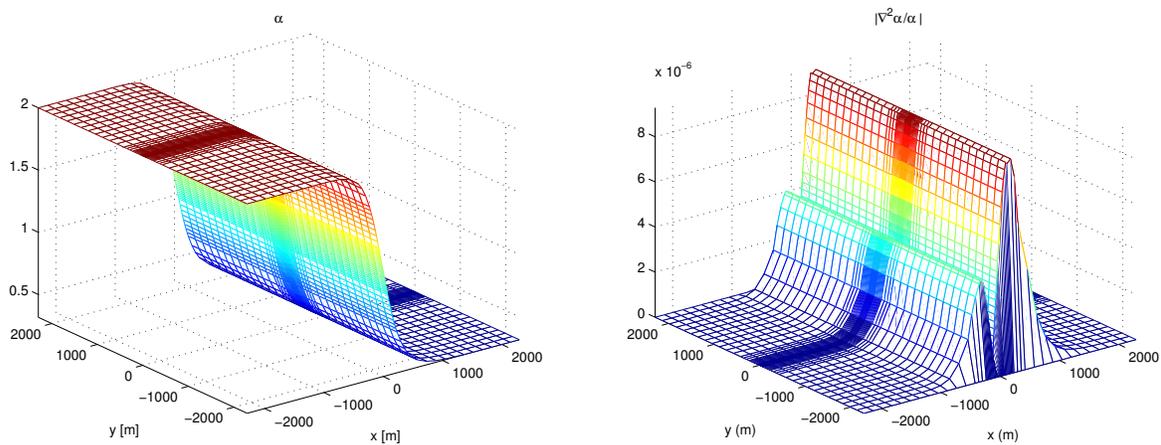


Figura 2.3: $\omega/h_{i0} = 100$

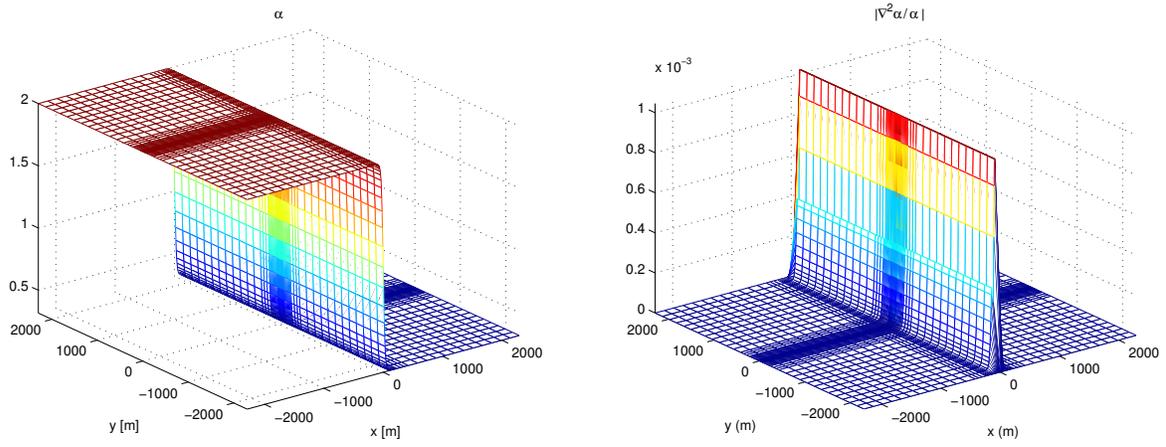


Figura 2.4: $\omega/h_{i0} = 10$

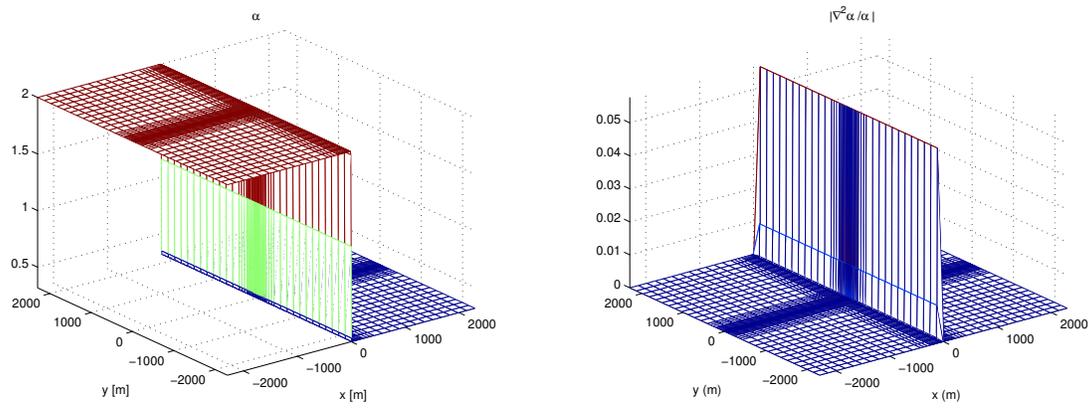


Figura 2.5: $\omega/h_{i0} = 1$

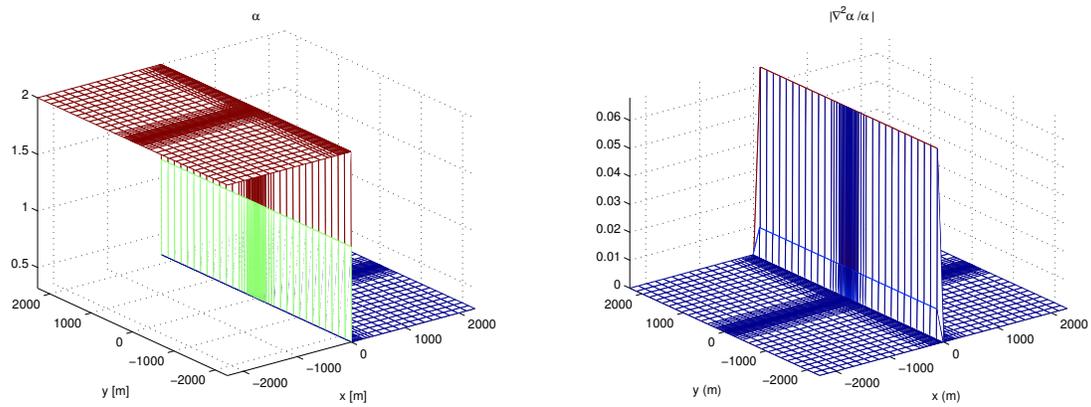


Figura 2.6: $\omega/h_{i0} = 0.1$

Abaixo, temos um resultado antecipado do cálculo da componente $E_y(y)$ do campo elétrico para cada valor de ω/h_{i0} mostrados nas figuras acima. Em cada modelo, posicionamos um dipolo elétrico a uma distância de 50 m da interface entre os meios, operando em uma frequência de 1 Hz.

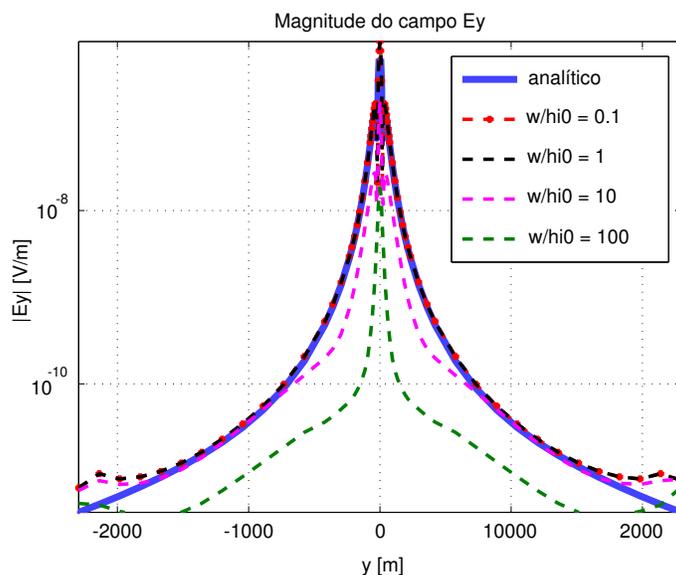


Figura 2.7: Magnitudes do campo elétrico para vários valores de ω/h_{i0}

Observando as figuras 2.3, 2.4, 2.5 e 2.6, assim como a figura 2.7, notamos que, para valores de ω maiores que o espaçamento do grid, a taxa de suavidade da zona de transição entre os meios faz com que o laplaciano da função $\alpha(\mathbf{x})$ seja mal calculado, levando a resultados muito distantes da solução esperada. Os resultados para $\omega/h_{i0} = 1$ e $\omega/h_{i0} = 0.1$ foram bastante satisfatórios e muito próximos um do outro, indicando quais os parâmetros ótimos para este modelo.

Os vários testes que realizamos, referentes à zona de transição entre os meios, nos mostraram que este é um fator importante dentro dos nossos problemas. O cálculo numérico das derivadas da função condutividade nestas regiões de transição é de extrema importância, uma vez que podemos associar esses termos como sendo os

“termos fontes”² para os potenciais secundários. A utilização da função Butterworth é um bom exemplo para testarmos a sensibilidade das respostas dos potenciais e dos campos elétricos em relação às variações dos parâmetros que definem a zona de transição e também dos parâmetros que definem o grid. No entanto, podemos perceber que, para modelos mais complexos, por exemplo, com mais de uma interface plana, ou com regiões de transição não-retilíneas, a função Butterworth (2.51) não pode ser aplicada.

Para contornar este problema, testamos então um outro procedimento, no qual modificamos as componentes espectrais da função $\alpha(\mathbf{x})$ no domínio da transformada de Fourier, através de sua multiplicação pela função *Kaiser window* (KUO; KAISER, 1966). A idéia é suprimir as componentes espectrais de maior frequência, as quais definem as regiões de menor raio de curvatura no domínio espacial, o que corresponde às descontinuidades na função $\alpha(\mathbf{x})$, afim de suavizá-las.

Começamos com a construção de um grid 2-D uniforme³ bastante refinado, com uma quantidade n de pontos em cada direção. Em seguida, definimos a função $\alpha(\mathbf{x})$ nesse grid uniforme e aplicamos a transformada de Fourier em cada uma das direções. O resultado é multiplicado pela função Kaiser (2.53), da qual temos controle dos parâmetros que definem a amplitude de banda da função (figura 2.8).

$$X(\omega) = \begin{cases} \frac{I_0\left(\pi\chi\sqrt{1-\left(\frac{2n}{N-1}-1\right)^2}\right)}{I_0(\pi\chi)}, & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{outro} \end{cases} \quad (2.53)$$

sendo:

N o número de abscissas e n o índice de ω ;

I_0 a função modificada de Bessel de ordem zero e de primeira espécie;

χ um número real arbitrário e não-negativo que determina a forma da função, isto é, determina a amplitude de banda do filtro Kaiser.

²De fato, quando o campo elétrico tem uma componente normal às interfaces entre os meios, cargas de polarização são produzidas, agindo como fonte para o campo secundário.

³O uso do grid uniforme simplifica a aplicação da transformada de Fourier.

É através da amplitude de banda que podemos regular quais componentes espectrais serão atenuadas. Em nossos problemas, o parâmetro responsável por esse controle varia entre os valores 0 e 1. Aplicamos a transformada inversa de Fourier, trazendo a função α de volta ao domínio espacial e por fim, interpolamos a função $\alpha(\mathbf{x})$ no grid que utilizaremos para o cálculo das derivadas de α .

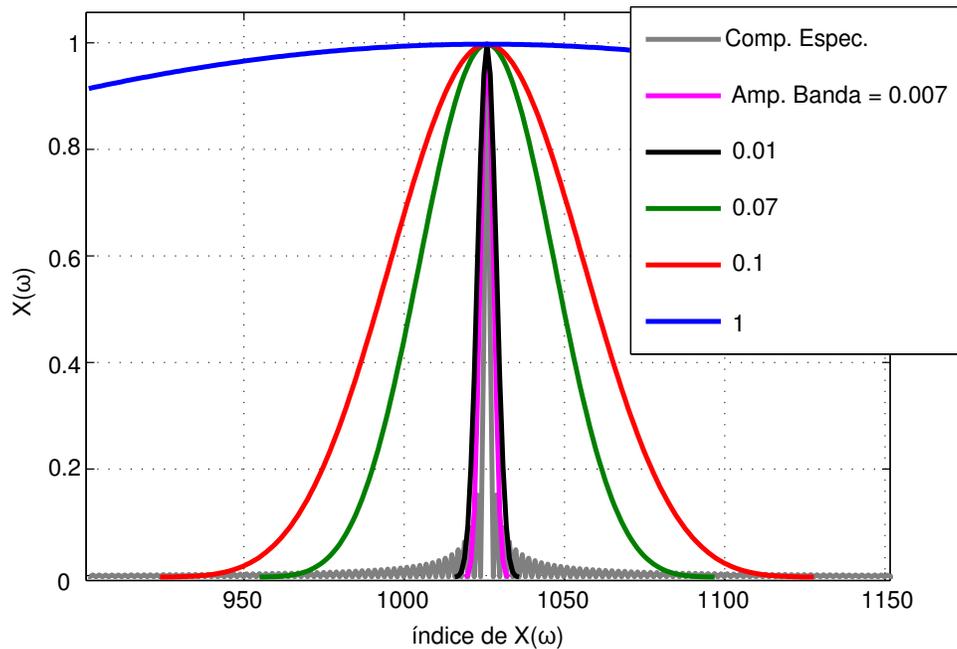


Figura 2.8: Multiplicação do filtro Kaiser $X(\omega)$ pelas componentes espectrais da função $\sigma(x)$ considerando diferentes amplitudes de banda para $X(\omega)$.

Realizando este procedimento para o modelo de dois meios com diferentes condutividades, obtemos por exemplo, a figura 2.9.

Os resultados obtidos para os potenciais elétricos e para a componente $E_y(y)$ quando utilizamos o filtro Kaiser foram iguais aos resultados quando utilizamos a função Butterworth no modelo constituído por dois meios. De fato, a suavização da zona de transição através do filtro Kaiser foi bastante aproximada da que obtemos com a função Butterworth, como mostra a figura 2.10.

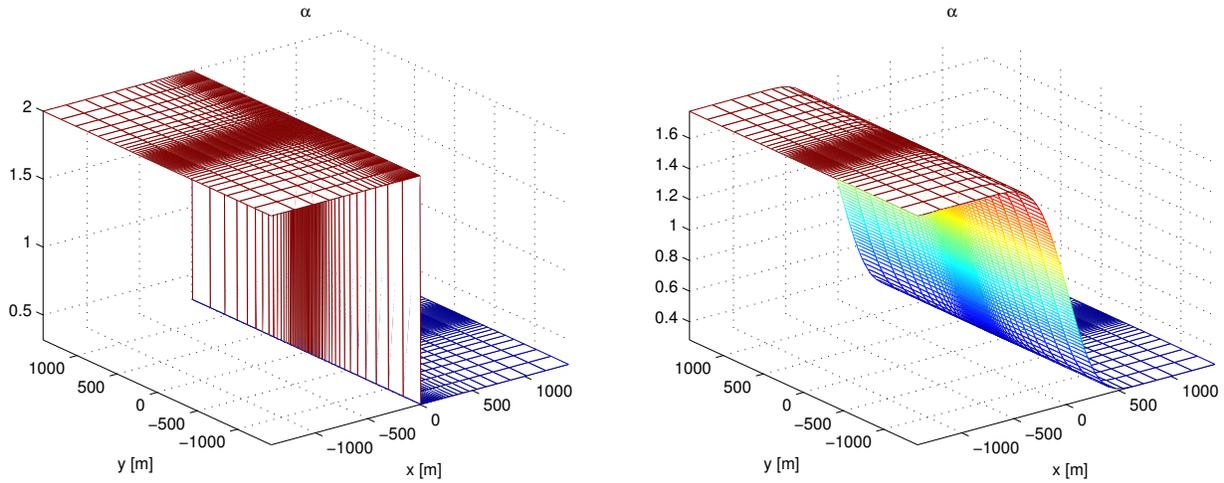


Figura 2.9: Distribuição da função $\alpha(\mathbf{x})$ sem filtro e com o filtro Kaiser.

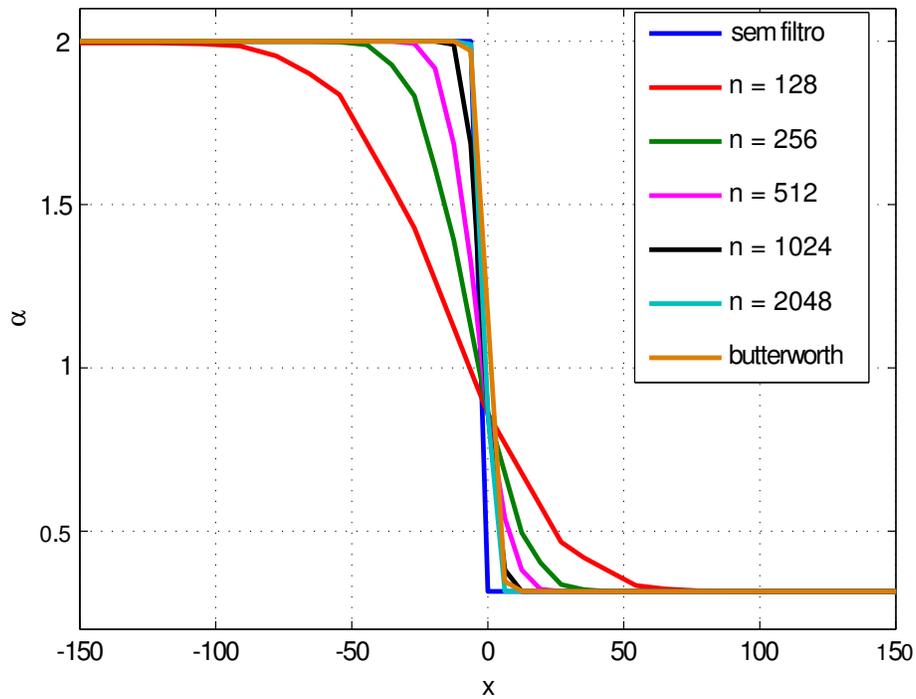


Figura 2.10: Perfis da função $\sigma(x)$ próximos à zona de transição entre os meios definida para diferentes valores de n , que é a quantidade de pontos usados em cada direção na definição do grid uniforme utilizado na transformada de Fourier, cujo resultado é filtrado através da função Kaiser window. Os perfis sem filtragem e o definido através da função Butterworth também são mostrados para efeito de comparação.

Dessa forma, testamos o filtro Kaiser em um modelo 2-D, como mostrado na figura 2.11, onde temos uma função com uma descontinuidade de geometria circular.

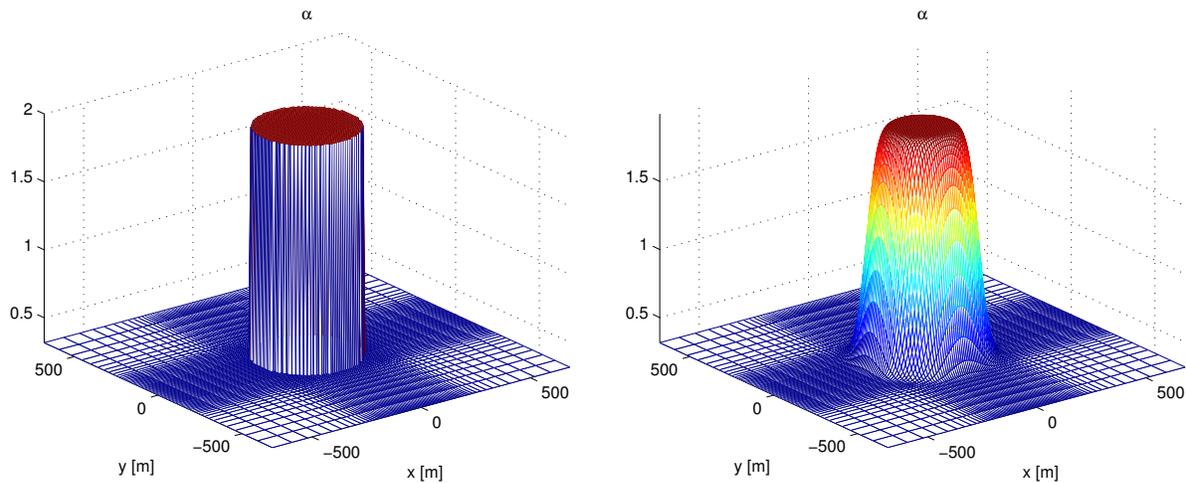


Figura 2.11: Distribuição da função $\alpha(\mathbf{x})$ sem filtro e com o filtro Kaiser para o modelo 2-D de geometria circular.

O resultado acima mostra que o procedimento através do uso do filtro Kaiser também é capaz de suavizar regiões descontínuas mesmo em configurações 2-D. Nos resultados que serão mostrados nos próximos capítulos, o tratamento das regiões de transição entre meios nas funções de distribuição da propriedade física, foi feito através da função Kaiser window.

3 O MÉTODO DE DIFERENÇAS FINITAS COM MALHA ESTRUTURADA

3.1 O MÉTODO DE DIFERENÇAS FINITAS CENTRAIS

Para validarmos a metodologia descrita na seção anterior, começamos com a formulação do método de Diferenças Finitas com malha estruturada e não-uniforme. A equação escalar genérica abaixo será utilizada para exemplificar o procedimento.

$$(\nabla^2 + k^2(\mathbf{x}))\psi(\mathbf{x}) = I(\mathbf{x}). \quad (3.1)$$

Na forma matricial temos,

$$\mathbf{A}x = b. \quad (3.2)$$

A matriz \mathbf{A} em (3.2) é simétrica e esparsa, e seu tamanho está diretamente relacionado à discretização do domínio que queremos investigar. Como em nossos problemas faremos uso de grids não-uniformes, nossa formulação também deve levar em conta variações no espaçamento entre pontos adjacentes do grid. No entanto, a utilização de grids não-uniformes faz com que a matriz \mathbf{A} perca sua simetria, impossibilitando o uso por exemplo do método do gradiente conjugado, como já mencionamos anteriormente. Felizmente, é possível reestabelecer essa simetria, através de algumas transformações matriciais que implementaremos mais adiante.

Partimos da discretização da equação (3.1), para isso, definimos $\psi_{ij} = \psi(y_i, x_j)$ nos pontos discretos (y_i, x_j) dados por

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= h_i^y + y_i \\ x_{j+1} &= h_j^x + x_j \end{aligned} \quad (3.3)$$

para $i = 1, 2, \dots, I_y$ e $j = 1, 2, \dots, I_x$. A figura 3.1 mostra a topologia 2-D na vizinhança de um ponto do grid não-uniforme.

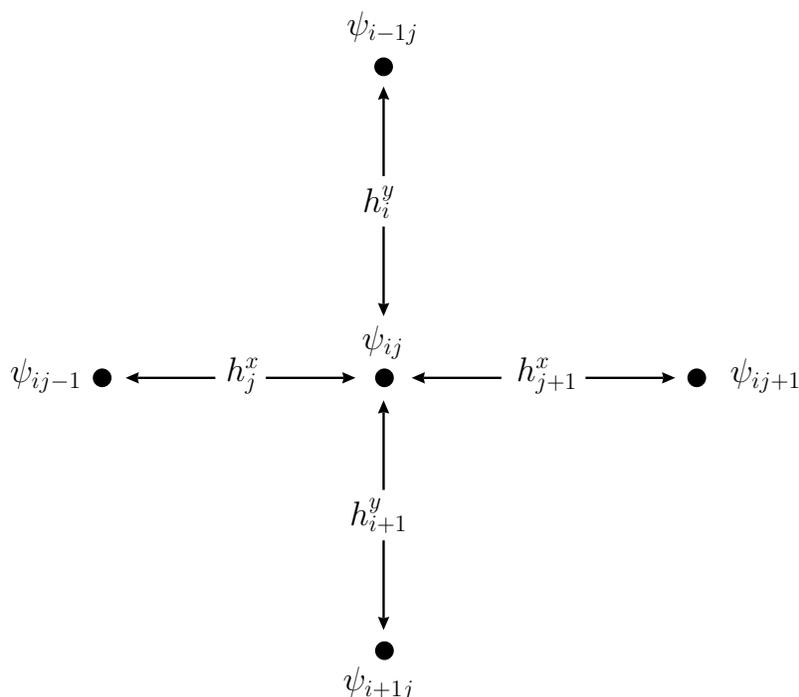


Figura 3.1: Indexação na vizinhança de um ponto para o grid 2-D não-uniforme.

Para determinarmos a aproximação do operador Laplaciano $\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ através de diferenças finitas considerando variações no espaçamento do grid, expandimos a função 1D $f(x)$ através da série de Taylor até a segunda ordem

$$\begin{aligned} f(x_{j-1}) &= f(x_j) - h_j^x f'(x_j) + \frac{(h_j^x)^2}{2} f''(x_j) + \dots, \\ f(x_{j+1}) &= f(x_j) + h_{j+1}^x f'(x_j) + \frac{(h_{j+1}^x)^2}{2} f''(x_j) + \dots, \end{aligned} \quad (3.4)$$

Resolvendo a equação (3.4) para $f''(x)$, obtemos:

$$f''(x_j) \approx \frac{2}{h_j^x(h_j^x + h_{j+1}^x)} f_{j-1} - \frac{2}{h_j^x h_{j+1}^x} f_j + \frac{2}{h_{j+1}^x(h_j^x + h_{j+1}^x)} f_{j+1} \quad (3.5)$$

Aplicando este resultado na expressão do operador Laplaciano, produz

$$\begin{aligned} \nabla^2 \psi_{ij} \approx & \frac{2}{h_j^x(h_j^x + h_{j+1}^x)} \psi_{ij-1} + \frac{2}{h_{j+1}^x(h_j^x + h_{j+1}^x)} \psi_{ij+1} + \frac{2}{h_i^y(h_i^y + h_{i+1}^y)} \psi_{i-1j} \\ & + \frac{2}{h_{i+1}^y(h_i^y + h_{i+1}^y)} \psi_{i+1j} - \left(\frac{2}{h_j^x h_{j+1}^x} + \frac{2}{h_i^y h_{i+1}^y} \right) \psi_{ij} \end{aligned} \quad (3.6)$$

Convertendo os índices (i, j) em um único índice através da seguinte regra

$$n = (i-1)I_x + j, \quad i = 1, 2, \dots, I_y, \quad j = 1, 2, \dots, I_x, \quad n = 1, 2, \dots, I_x I_y. \quad (3.7)$$

Com o índice composto n , os vetores x e b da equação (3.2) são assim definidos:

$$\begin{aligned} x_n &= \psi_{ij}, \\ b_n &= -i\omega\mu_0 J_s(y_i, x_j). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Dessa forma, basta agora organizarmos a matriz \mathbf{A} em termos da expressão do operador Laplaciano em diferenças finitas. Para isso, utilizaremos o procedimento descrito em ALLERS; SEZGINER; DRUSKIN (1994), onde define-se quatro submatrizes que por sua vez comporão a matriz esparsa \mathbf{A} .

Primeiro, definimos I_y matrizes diagonais $I_x \times I_x \mathbf{d}_i$, $i = 1, 2, \dots, I_y$

$$\mathbf{d}_i = \begin{pmatrix} \beta_1^i & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \beta_2^i & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \beta_{I_x}^i \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

sendo

$$\beta_j^i = k^2(x_j, y_i) - \frac{2}{h_j^x h_{j+1}^x} - \frac{2}{h_i^y h_{i+1}^y} \quad (3.10)$$

Em seguida, definimos a sub-matriz tridiagonal $I_x \times I_x$ \mathbf{t}

$$\mathbf{t} = \begin{pmatrix} 0 & \tau_2^+ & 0 & \dots & 0 \\ \tau_2^- & 0 & \tau_3^+ & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \tau_{I_x-1}^- & 0 & \tau_{I_x}^+ \\ 0 & \dots & 0 & \tau_{I_x}^- & 0 \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

sendo

$$\begin{aligned} \tau_j^+ &= \frac{2}{h_j^x (h_{j-1}^x + h_j^x)} \\ \tau_j^- &= \frac{2}{h_j^x (h_j^x + h_{j+1}^x)} \end{aligned} \quad (3.12)$$

E por último as matrizes diagonais $I_x \times I_x$ \mathbf{l}_i e \mathbf{r}_i , com $i = 1, 2, \dots, I_y$

$$\begin{aligned} \mathbf{l}_i &= \frac{2}{h_i^y (h_i^y + h_{i+1}^y)} \mathbf{I} & i = 2, 3, \dots, I_y \\ \mathbf{r}_i &= \frac{2}{h_{i+1}^y (h_i^y + h_{i+1}^y)} \mathbf{I} & i = 1, 2, \dots, I_y - 1 \end{aligned} \quad (3.13)$$

sendo \mathbf{I} a matriz identidade $I_x \times I_x$.

As matrizes \mathbf{d}_i , \mathbf{t} , \mathbf{l}_i e \mathbf{r}_i compõem a matriz \mathbf{A} da seguinte forma:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{d}_1 + \mathbf{t} & \mathbf{r}_1 & 0 & \dots & 0 \\ \mathbf{l}_2 & \mathbf{d}_2 + \mathbf{t} & \mathbf{r}_2 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{l}_3 & \mathbf{d}_3 + \mathbf{t} & \mathbf{r}_3 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \mathbf{l}_{I_y-1} & \mathbf{d}_{I_y-1} + \mathbf{t} & \mathbf{r}_{I_y-1} \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{l}_{I_y} & \mathbf{d}_{I_y} + \mathbf{t} \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

A matriz \mathbf{A} é composta de $I_x I_y \times I_x I_y$ matrizes representadas por uma matriz $I_y \times I_y$, na qual cada elemento também é uma matriz $I_x \times I_x$.

Retomando a equação matricial (2.30), notamos que para cada componente da diagonal principal da matriz, será atribuída uma expressão similar à que desenvolvemos para a matriz \mathbf{A} nesta seção. Podemos então representar a equação (2.30) na sua forma de diferenças finitas através da expressão

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 & 0 & \beta_x \\ 0 & \mathbf{A}_1 & \beta_y \\ \beta_x & \beta_y & \mathbf{A}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\tilde{S}_x \\ -\tilde{S}_y \\ -\tilde{S}_V \end{pmatrix}. \quad (3.15)$$

onde as matrizes \mathbf{A}_1 e \mathbf{A}_2 são de ordem $I_x I_y \times I_x I_y$ e possuem 5 diagonais não-nulas, e as matrizes β_x e β_y são diagonais e de ordem $I_x I_y \times I_x I_y$, e fazem o acoplamento dos potenciais vetor e escalar. Tomando ainda a equação (2.30) como referência, a diferença entre as matrizes \mathbf{A}_1 e \mathbf{A}_2 pode ser explicitada da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1 &= \mathbf{A} + k(\mathbf{x})^2 - K_z^2 \\ \mathbf{A}_2 &= \mathbf{A}_1 - \frac{\nabla^2 \alpha(\mathbf{x})}{\alpha(\mathbf{x})} \end{aligned} \quad (3.16)$$

3.2 SIMETRIZAÇÃO DAS MATRIZES

A formulação acima descrita não nos permite garantir que a matriz \mathbf{A} seja simétrica, uma vez que o uso de grids não-uniformes pode gerar uma matriz não simétrica. Dessa forma, para garantirmos a simetria de \mathbf{A} , precisamos determinar uma matriz diagonal S tal que

$$(S\mathbf{A})^T = S\mathbf{A}. \quad (3.17)$$

A equação (3.2) pode então ser escrita na forma

$$S\mathbf{A}x = S\mathbf{b}. \quad (3.18)$$

A solução das equações (3.2) e (3.18) são iguais, no entanto, devido $S\mathbf{A}$ ter simetria complexa, a equação (3.18) pode ser resolvida através do método do gradiente conjugado. Das equações (3.9) e (3.10) a simetria requerida em cada submatriz \mathbf{t} de \mathbf{A} é

$$(S^{(i)}\mathbf{t})_{nm} = \begin{cases} s_n^i \tau_{n-1}^- & \text{if } m = n - 1; \\ s_n^i \tau_{n+1}^+ & \text{if } m = n + 1; \\ 0 & \text{outro} \end{cases} \quad (3.19)$$

Na equação (3.19), $S^{(i)}$, $i = 1, 2, \dots, I_y$ é a *iésima* sub-matriz diagonal de S com elementos diagonais $s_1^i, s_2^i, \dots, s_{I_x}^i$. Para a equação (3.19), a simetria complexa implica em

$$(S^{(i)}\mathbf{t})_{nn-1} = (S^{(i)}\mathbf{t})_{n-1n} \quad (3.20)$$

ou

$$s_n^i \tau_{n-1}^- = s_{n-1}^i \tau_n^+ \quad (3.21)$$

A equação (3.21) é satisfeita pela escolha de

$$s_n^i = (h_n^x + h_{n+1}^x)c^{(i)} \quad (3.22)$$

para qualquer $c^{(i)}$ não nulo, onde $i = 1, 2, \dots, I_y$. Com isso

$$S^{(i)} = \begin{pmatrix} s_1^i & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s_2^i & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & s_{I_x}^i \end{pmatrix} \quad (3.23)$$

Para determinarmos os $c^{(i)}$'s, utilizamos a condição de simetria envolvendo as sub-matrizes \mathbf{l} e \mathbf{r}

$$S^{(i)}\mathbf{r}_i = S^{(i+1)}\mathbf{l}_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, I_y - 1, \quad (3.24)$$

desenvolvendo-a em

$$c^{(i)}(h_n^x + h_{n+1}^x) \frac{2}{h_{i+1}^y(h_i^y + h_{i+1}^y)} = c^{(i+1)}(h_n^x + h_{n+1}^x) \frac{2}{h_{i+1}^y(h_{i+1}^y + h_{i+2}^y)}. \quad (3.25)$$

Temos que a escolha

$$c^{(i)} = h_i^y + h_{i+1}^y \quad (3.26)$$

satisfaz a equação (3.25). Escrevendo explicitamente a matriz S , temos

$$S = \begin{pmatrix} S^{(1)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & S^{(2)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & S^{(I_y)} \end{pmatrix} \quad (3.27)$$

sendo

$$S^{(i)} = (h_i^y + h_{i+1}^y) \begin{pmatrix} h_1^x + h_2^x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & h_2^x + h_3^x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & h_{I_x}^x + h_{I_x+1}^x \end{pmatrix} \quad (3.28)$$

Assim, a matriz simétrica $S\mathbf{A}$ será:

$$\begin{pmatrix} S^{(1)}(\mathbf{d}_1 + \mathbf{t}) & S^{(1)}\mathbf{r}_1 & 0 & \cdots & 0 \\ S^{(2)}\mathbf{l}_2 & S^{(2)}(\mathbf{d}_2 + \mathbf{t}) & S^{(2)}\mathbf{r}_2 & \cdots & 0 \\ 0 & S^{(3)}\mathbf{l}_3 & S^{(3)}(\mathbf{d}_3 + \mathbf{t}) & S^{(3)}r_3 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & S^{(I_y-1)}\mathbf{l}_{I_y-1} & S^{(I_y-1)}(\mathbf{d}_{I_y-1} + \mathbf{t}) & S^{(I_y-1)}\mathbf{r}_{I_y-1} \\ 0 & 0 & \cdots & S^{(I_y)}\mathbf{l}_{I_y} & S^{(I_y)}(\mathbf{d}_{I_y} + \mathbf{t}) \end{pmatrix} \quad (3.29)$$

3.3 VALIDAÇÃO NUMÉRICA #1: FLUXO DE CORRENTE GALVÂNICA ENTRE DOIS MEIOS CONDUTIVOS

Utilizamos o método de Diferenças Finitas no domínio da frequência para modelar o fluxo de corrente elétrica entre dois meios com diferentes condutividades elétricas. Para isso, refinamos o grid não-uniforme na interface entre os dois meios, onde temos uma rápida variação do campo elétrico, o qual é gerado devido à corrente elétrica que flui entre dois eletrodos fontes colocados próximos e paralelamente à interface entre os meios. Com isso, sabendo que as linhas de fluxo de corrente são sempre perpendiculares às superfícies equipotenciais, a disposição dessas superfícies para este tipo de fonte indica que haverá corrente fluindo entre os dois meios, como mostra a figura 3.2. Aqui, nossa formulação $2\frac{1}{2}D$ é reduzida para um problema 1D, no qual consideraremos apenas o potencial escalar elétrico. Apesar da simplicidade deste exemplo, ele nos permite testar com certa facilidade e rapidez o desenvolvi-

mento que descrevemos no capítulo anterior, além de ser um problema com soluções analíticas bem documentadas.

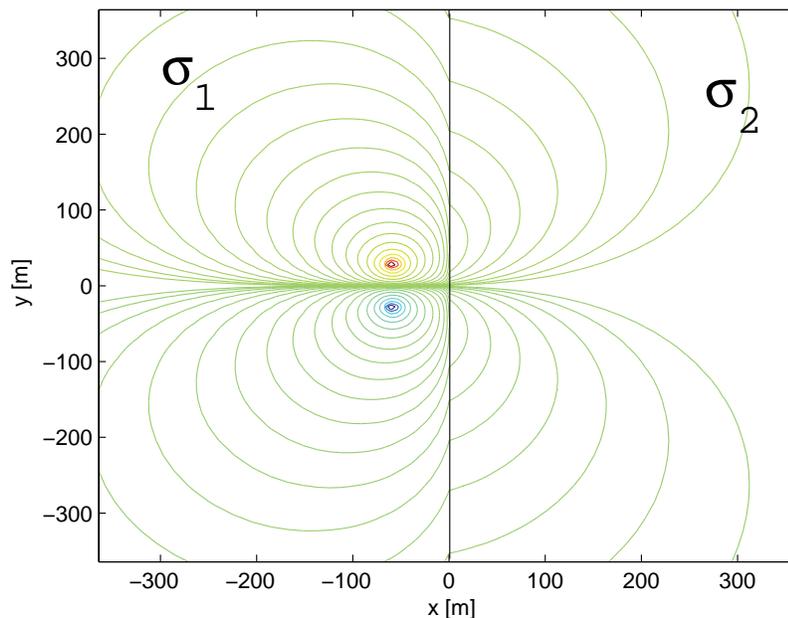


Figura 3.2: Representação das superfícies equipotenciais em modelo com dois meios condutivos.

Para validarmos o código, primeiro apresentamos a solução analítica para este problema. Partimos da expressão que representa o potencial elétrico gerado por um eletrodo pontual

$$\phi_0 = \frac{\mathcal{I}_0}{4\pi\sigma_0 R}, \quad R = [(x - x_t)^2 + y^2 + z^2] \quad (3.30)$$

A representação pela integral de Fourier de (3.30) é

$$\Phi_0 = \frac{\mathcal{I}_0}{4\pi^2\sigma_0} \int_{-\infty}^{+\infty} K_0(k_y \rho) e^{ik_y y} dk_y \quad (3.31)$$

sendo \mathcal{I}_0 a corrente elétrica na fonte, σ_0 a condutividade do meio onde o eletrodo está localizado, $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ e K_0 é a função de Bessel modificada de segunda espécie de ordem 0.

Para o meio não-homogêneo, temos

$$\Phi = \begin{cases} \Phi_0 + \Phi_s & \text{no meio onde está a fonte;} \\ \Phi_t & \text{no meio sem a fonte} \end{cases}$$

sendo

$$\Phi_s = k \int_{-\infty}^{+\infty} a_s(k_y) I_0(k_y \rho) e^{ik_y y} dk_y$$

$$\Phi_t = k \int_{-\infty}^{+\infty} a_t(k_y) K_0(k_y \rho) e^{ik_y y} dk_y$$

e

$$k = \frac{\mathcal{I}_0}{4\pi^2 \sigma_0}$$

$$a_s(k_y) = \frac{e^{-ik_y y} K_0 K_1 (1 - \lambda)}{I_1 K_0 + \lambda I_0 K_1}$$

$$a_t(k_y) = \frac{e^{-ik_y y}}{k_y x_t (I_1 K_0 + \lambda I_0 K_1)}$$

Nas expressões acima, I_n é a função de Bessel modificada de primeira espécie de ordem n , $\lambda = \sigma_2/\sigma_1$, onde σ_1 é a condutividade do meio com a fonte e σ_2 a condutividade do meio sem a fonte e x_t é a coordenada x da fonte (WAIT, 1982).

A figura 3.3 compara os resultados obtidos através dos procedimentos analítico e numérico. Os dois gráficos no topo mostram as partes real e imaginária dos resultados, onde podemos notar boa concordância entre as soluções. Os dois gráficos inferiores mostram respectivamente os valores absolutos das soluções e o erro relativo entre o resultado analítico e o numérico.

As partes imaginárias dos resultados são muito pequenas, como esperado, e podem ser ignoradas. Note no primeiro gráfico inferior que a solução numérica se torna pior quando próxima das bordas. Isso ocorre devido o método de Diferenças Finitas ser menos preciso nessa região, onde as derivadas não podem ser definidas

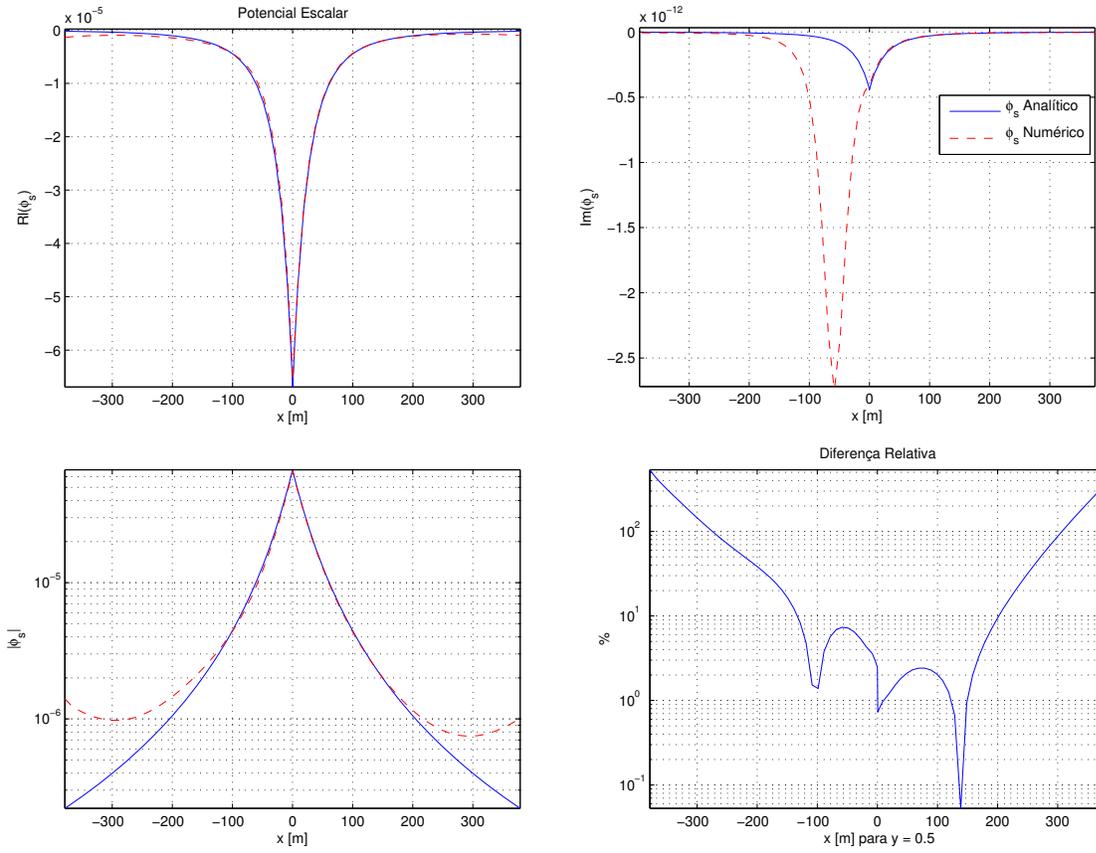


Figura 3.3: Comparação dos potenciais escalares analítico e numérico para o modelo com dois meios condutivos.

corretamente. O último gráfico confirma que as soluções analíticas e numérica são próximas, divergindo apenas nas bordas. Na figura 3.4, temos a solução numérica do potencial elétrico secundário em todo o domínio.

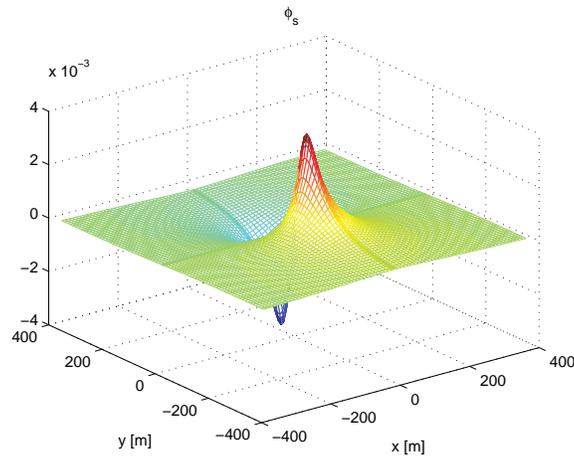


Figura 3.4: Solução do potencial elétrico secundário.

3.4 DESEMPENHO DO GRADIENTE CONJUGADO E BICONJUGADO

No exemplo acima, nós utilizamos o método do gradiente conjugado (SAAD, 1996) para resolvermos o sistema linear com o preconditionador de Jacobi, que é formado apenas pelo inverso da diagonal principal da matriz a ser resolvida. A discussão e análise mais detalhada do uso de pré-condicionadores serão feitas mais adiante.

Para este mesmo exemplo, nós testamos também o gradiente biconjugado (SAAD, 1996), com o mesmo preconditionador para compararmos seu desempenho com o do gradiente conjugado. Analisamos primariamente a quantidade de iterações que cada método levou para convergir em cada número de onda associado ao cálculo numérico da transformada inversa de Fourier do nosso problema. Como complemento, analisamos também como o resíduo em uma determinada iteração decai em cada método. O resíduo em cada iteração é calculado da seguinte maneira

$$Res = \|\mathbf{A}x - b\| \quad (3.32)$$

A figura 3.5 mostra o resultado deste exercício.

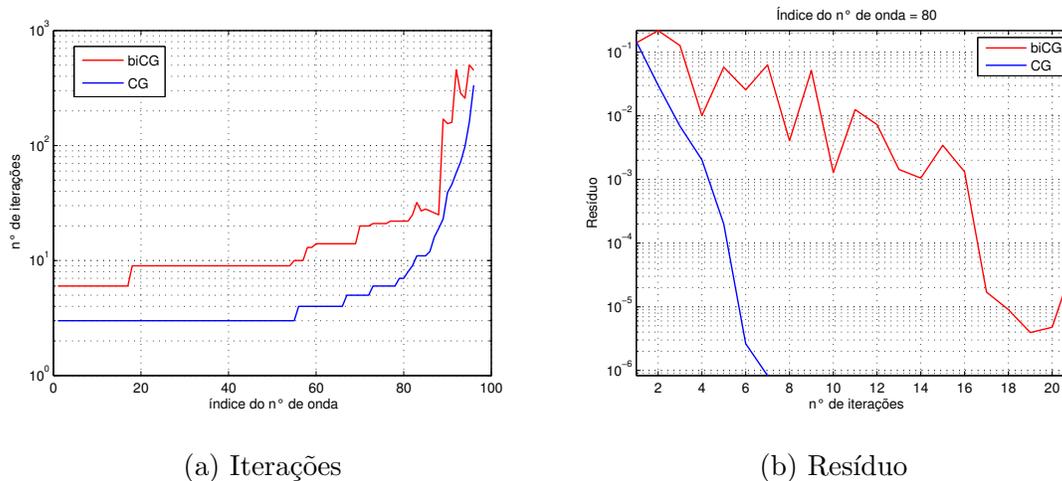


Figura 3.5: Desempenho do CG e do biCG. (a) Número de iterações por número de onda e (b) Resíduo por iteração.

Na figura 3.5(a), notamos que o gradiente biconjugado precisou de mais iterações

para convergir em todos os números de onda e a figura 3.5(b) mostra que o gradiente biconjugado precisou mais que o dobro de iterações para convergir em um determinado número de onda, confirmando que o gradiente biconjugado é mais lento que o gradiente conjugado, como esperávamos.

3.5 ANÁLISE DOS PRÉ-CONDICIONADORES

Definimos pré-condicionador como sendo qualquer forma implícita ou explícita de modificação de um sistema linear original, tornando-o mais fácil de ser resolvido através de um dado método iterativo (BENZI, 2002). Em geral, todos os métodos iterativos convergem rapidamente se a matriz de coeficientes \mathbf{A} no sistema $\mathbf{A}x = b$ for próxima da matriz identidade (GREENBAUM, 1997). Para que possamos ter uma boa taxa de convergência no uso de métodos iterativos, é necessário que a matriz de coeficientes \mathbf{A} possua *número de condição*¹ o menor possível. Se esse critério não for satisfeito, então é aconselhável que o sistema seja pré-condicionado antes de ser resolvido.

Para isso, consideremos a substituição do sistema linear original

$$\mathbf{A}x = b \tag{3.33}$$

pelo sistema modificado

$$M^{-1}\mathbf{A}x = M^{-1}b. \tag{3.34}$$

Um bom pré-condicionador M é uma matriz que, ao ser multiplicada à matriz \mathbf{A} produz um resultado que pode ser facilmente invertido e a sua definição pode ser

¹O *número de condição* da matriz de coeficientes mede a sensibilidade do sistema linear de gerar erros quando resolvido numericamente. Uma matriz com um número de condição pequeno é chamada de bem condicionada, enquanto as matrizes que possuem um número de condição elevado são denominadas mal condicionadas (CHENEY; KINCAID, 2008).

dada de tal forma que $M^{-1}\mathbf{A}$ ou $\mathbf{A}M^{-1}$ tenha melhor convergência que \mathbf{A} , no que diz respeito à precisão e ao tempo de processamento da solução.

No exemplo apresentado na seção 3.3, testamos três tipos de pré-condicionadores: o de Jacobi, a fatorização de Cholesky e a decomposição LU.

O pré-condicionador de **Jacobi** é a forma mais simples de pré-condicionamento que testamos, onde o pré-condicionador é definido como sendo a matriz quadrada cuja diagonal é igual à diagonal principal da matriz \mathbf{A} , e esses são os seus únicos valores não nulos.

$$M = \text{diag}(\mathbf{A}), \quad \text{assumindo que } A_{ii} \neq 0, \quad \forall i. \quad (3.35)$$

Na fatorização de **Cholesky**, consideramos a matriz M uma matriz hermitiana e positiva definida, daí podemos pré-condicionar simetricamente e resolver o seguinte sistema linear modificado

$$L^{-1}\mathbf{A}L^{-T}y = L^{-1}b, \quad x = L^{-T}y, \quad (3.36)$$

sendo $M = LL^T$, onde o superíndice T denota a matriz transposta. A matriz L pode ser a matriz triangular inferior de M ou qualquer outra matriz que satisfaça $M = LL^T$.

E na decomposição LU, o pré-condicionador M é definido como a fatorização LU da matriz \mathbf{A} , tal que

$$\mathbf{A} \approx M = LU \quad (3.37)$$

sendo L e U as matrizes triangulares inferior e superior respectivamente. Assumindo que M não é singular, então o sistema linear pré-condicionado a ser resolvido torna-se

$$(M^{-1}\mathbf{A})x = M^{-1}b. \quad (3.38)$$

Avaliamos o desempenho de cada pré-condicionador comparando o número de iterações, o erro, o tempo que foi gasto no cálculo da solução e o tempo total, que

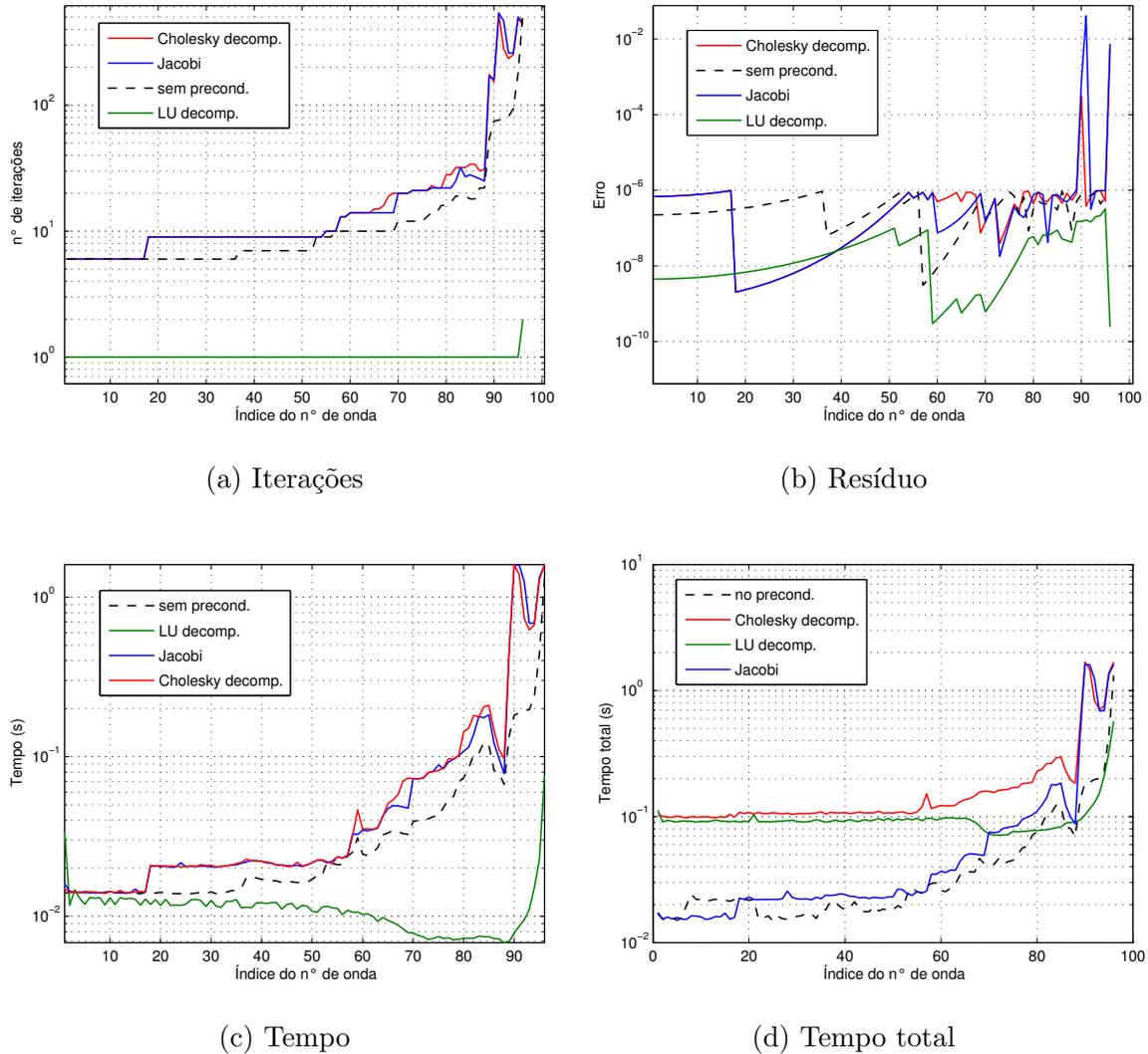


Figura 3.6: Análise de desempenho dos pré-condicionadores.

definimos como o tempo gasto para a “montagem” do pré-condicionador somado ao tempo de cálculo através do método do gradiente biconjugado, para cada número de onda do problema. A figura 3.6 mostra o resultado da análise de desempenho de cada pré-condicionador.

Na figura 3.6(a), temos a comparação do número de iterações relacionado ao uso de cada pré-condicionador junto ao resultado sem o uso de pré-condicionador. Notamos uma grande aproximação no desempenho dos pré-condicionadores de Jacobi e Cholesky, no entanto, ambos precisaram de um maior número de iterações

para convergir do que o resultado sem pré-condicionador. Já a decomposição LU mostrou-se muito eficiente, precisando de muito menos iterações para convergir do que todos os outros pré-condicionadores. Para ser mais exato, em quase todos os números de onda, foi necessário não mais que uma iteração para a convergência. Quanto ao resíduo, mostrado na figura 3.6(b), observamos novamente uma maior eficiência da decomposição LU comparada às outras técnicas. A análise da figura 3.6(c) comprova que para este exemplo, a decomposição LU obteve melhor desempenho não só quanto à qualidade da convergência, mas também quanto ao tempo de processamento. Na figura 3.6(d), vemos no entanto que quando levamos em consideração o tempo gasto para a construção dos pré-condicionadores, a matriz sem pré-condicionador algum assim como a matriz com o pré-condicionador considerado o mais simples (o de Jacobi), tornam o cálculo mais rápido nos números de onda iniciais, cujos valores são menores. Para os números de onda de maior valor, observamos os pré-condicionadores de Cholesky e a decomposição LU tendo um melhor desempenho, sendo que a decomposição LU apresenta menor variação quanto ao tempo de processamento, e maior eficiência para ser construído quando aumentamos o número de onda.

3.6 VALIDAÇÃO NUMÉRICA #2: DIPOLO ELÉTRICO PRÓXIMO À INTERFACE ENTRE DOIS MEIOS CONDUTIVOS

Aqui mostraremos os resultados obtidos com a modelagem utilizando o dipolo elétrico horizontal em um modelo condutivo igual ao da seção anterior. Para a fonte direcionada ao longo do eixo positivo da componente y , devido à variação da condutividade entre os meios, campos elétricos serão excitados tanto na direção horizontal quanto na vertical. Comparamos então as componentes *in line* dos potenciais e campos elétricos analítico e numérico excitados numa região próxima e paralela à interface entre os meios. Neste exemplo, a formulação $2\frac{1}{2}$ D completa é utilizada,

apesar da natureza 1D do perfil condutivo do modelo como mostrado na figura 3.7. Esta mesma formulação também pode ser usada em problemas com múltiplas camadas.

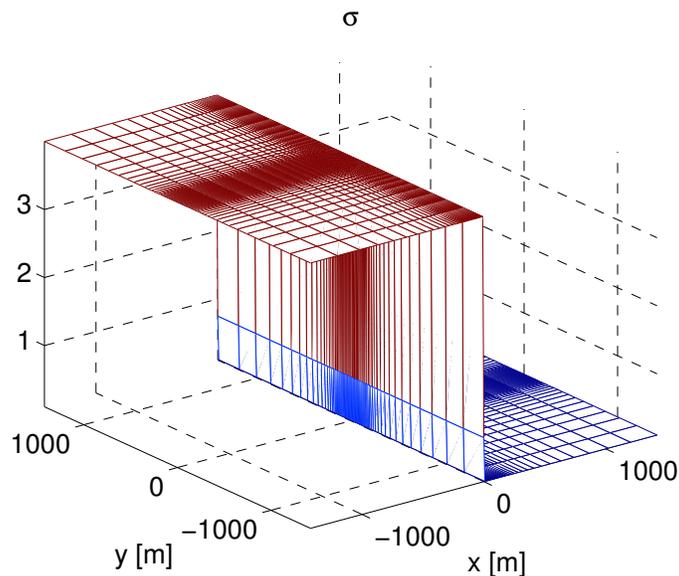


Figura 3.7: Perfil de condutividade no grid não-uniforme.

Consideramos um dipolo elétrico horizontal de comprimento $dl = 16.5m$ localizado em $z = 0$ e $x_t = -165$ e $y = 0$, com $I_0 = 1A$ e frequência $f = 1hz$ em um grid 2-D não-uniforme com maior refinamento próximo à interface.

Para a validação de nossos resultados, comparamos as soluções numéricas dos potenciais vetor e escalar secundários com suas equivalentes analíticas, cujo desenvolvimento pode ser encontrado por exemplo em HOWARD (2011), as quais são dadas pelas seguintes expressões

$$A_y(y) = \frac{i\mu_0 I_0 dl}{4\pi} \int_0^\infty \left[a_n^{(+)}(\lambda) e^{iu_n x} + a_n^{(-)}(\lambda) e^{-iu_n x} \right] J_0(\lambda \rho) \lambda d\lambda \quad (3.39)$$

$$A_x(y) = \frac{i\mu_0 I_0 dl}{4\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_0^\infty \left[b_n^{(+)}(\lambda) e^{iu_n x} + b_n^{(-)}(\lambda) e^{-iu_n x} - \frac{i u_n}{\lambda^2} a_n^{(+)}(\lambda) e^{iu_n x} + \frac{i u_n}{\lambda^2} a_n^{(-)}(\lambda) e^{-iu_n x} \right] J_0(\lambda \rho) \lambda d\lambda \quad (3.40)$$

e

$$\begin{aligned} \phi_s(y) = & \frac{-i\mu_0 I_0 dl}{4\pi} \int_0^\infty \left[k_{hn}^2 (a_n^{(+)} e^{iu_n x} + a_n^{(-)} e^{-iu_n x}) + iu_n \lambda^2 (b_n^{(+)} e^{iu_n x} - \right. \\ & \left. + b_n^{(-)} e^{-iu_n x}) \right] J_1(\lambda \rho) d\lambda \end{aligned} \quad (3.41)$$

onde

$$\begin{aligned} a_1^{(-)}(\lambda) &= \frac{(\eta_1 - \eta_2) e^{-iu_1 x}}{(\eta_1 + \eta_2) u_1} \\ a_1^{(+)}(\lambda) &= 0 \\ b_1^{(-)}(\lambda) &= \frac{i(K_1 - K_2) e^{-iu_1 x}}{\lambda^2 (K_1 + K_2)} \\ b_1^{(+)}(\lambda) &= 0 \end{aligned} \quad (3.42)$$

com

$$u_n = \sqrt{k_n^2 - \lambda^2}$$

e

$$\eta_j = \frac{u_j}{\omega \mu_0} \quad K_j = \frac{u_j}{\sigma_1}, \quad j = 1, 2$$

onde η_j é a admitância intrínseca em Ω^{-1} e K a impedância em Ω . A definição dos coeficientes a_n e b_n acima são restritas ao problema com apenas uma interface. As figuras abaixo mostram os resultados para os potenciais $A_s y(y)$, $A_s x(y)$ e $\phi_s(y)$.

As figuras 3.8, 3.9 e 3.10 mostram resultados numéricos que se aproximam dos resultados analíticos, como mostra o gráfico de diferença relativa entre as curvas. Neste procedimento numérico, utilizamos a decomposição LU para condicionarmos a matriz esparsa e utilizamos o gradiente biconjugado para a resolução do sistema linear. Para o cálculo numérico da transformada inversa de Fourier, utilizamos a integração no plano complexo (SILVA; REGIS; HOWARD, 2014; HOWARD; SILVA, 2014), que é adequada em problemas onde temos grandes espaçamentos horizontais entre transmissor e receptor, nos quais os integrandos são altamente oscilatórios.

Fizemos muitos testes utilizando este mesmo exemplo, nos quais variamos os parâmetros do grid, da integração numérica, da decomposição LU e do gradiente biconjugado, buscando o resultado mais otimizado possível.

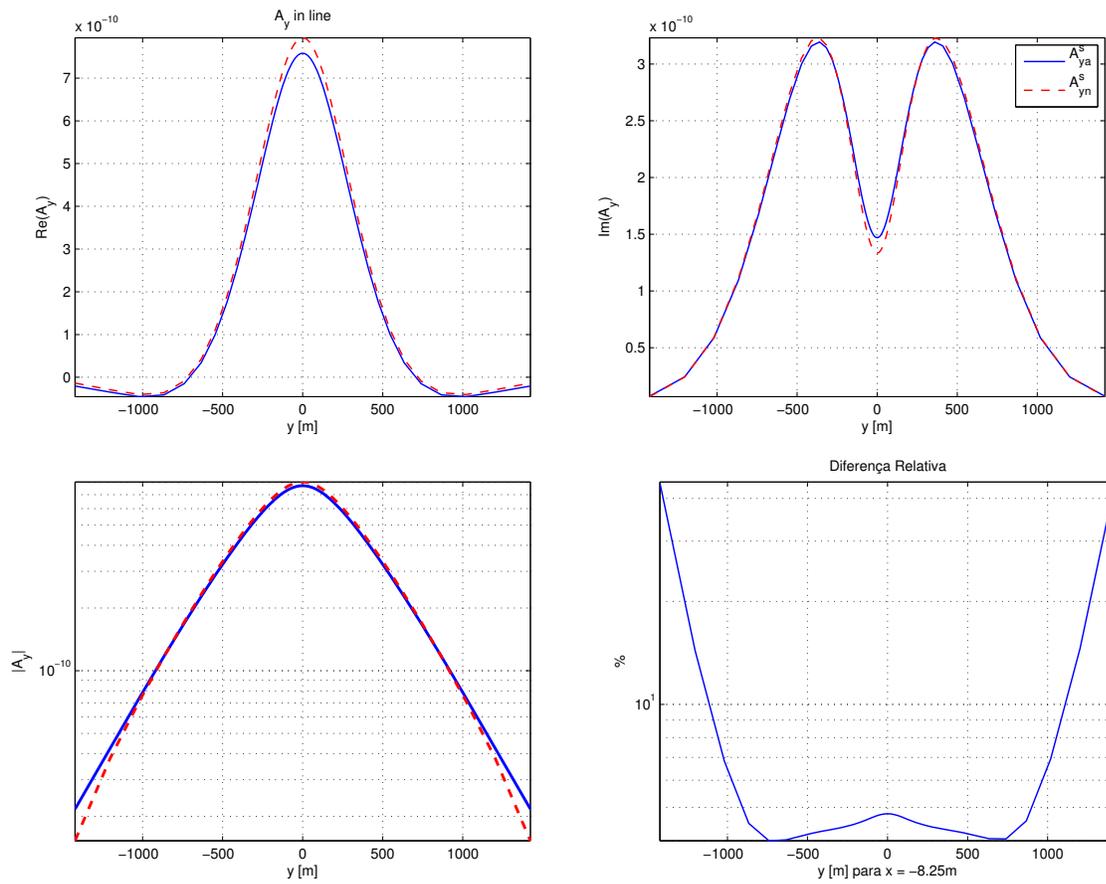


Figura 3.8: Comparação da componente A_y do potencial vetor analítico (curva contínua) e numérico (curva tracejada).

A decomposição LU mostrou-se o melhor preconditionador para este problema dentre os que foram testados. Variamos os valores de *drop tolerance*, que é uma medida que define a magnitude dos elementos que vão ser descartados na montagem das matrizes LU, e conseguimos bons resultados quando utilizamos valores próximos de 10^{-7} para esta medida.

Uma vez com os resultados dos potenciais vetor e escalar, a obtenção do campo

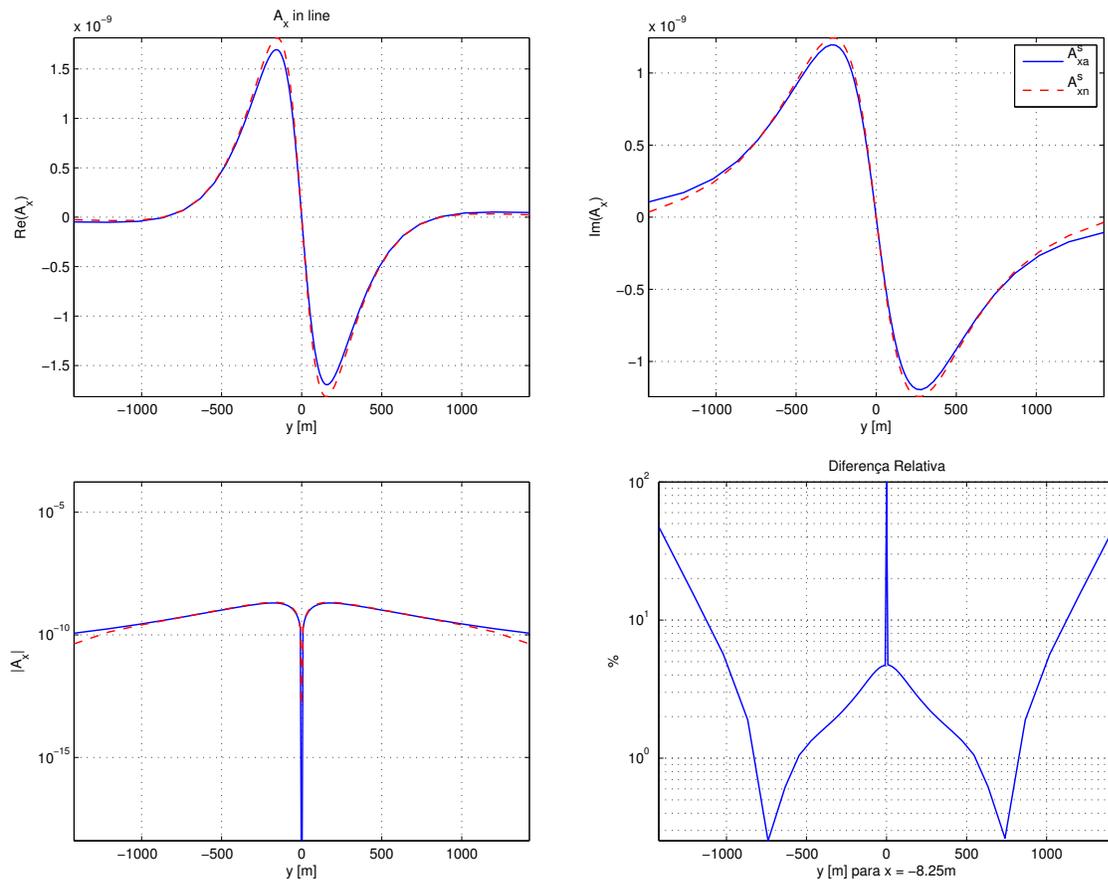


Figura 3.9: Comparação da componente A_x do potencial vetor analítico (curva contínua) e numérico (curva tracejada).

elétrico se dá através das equações (2.6) e (2.9) para a componente y

$$E_{sy}^{(s)}(y) = i\omega A_{sy}(y) + \frac{1}{\mu_0\sigma(\mathbf{x})} \frac{\partial\phi_s(y)}{\partial y}, \quad (3.43)$$

onde realizamos uma derivada numérica para o cálculo do termo $\frac{\partial\phi_s(y)}{\partial y}$.

O resultado numérico obtido para o campo elétrico E_y é comparado com a solução semi-analítica deste problema. O desenvolvimento de sua expressão pode ser encontrado novamente em HOWARD (2011).

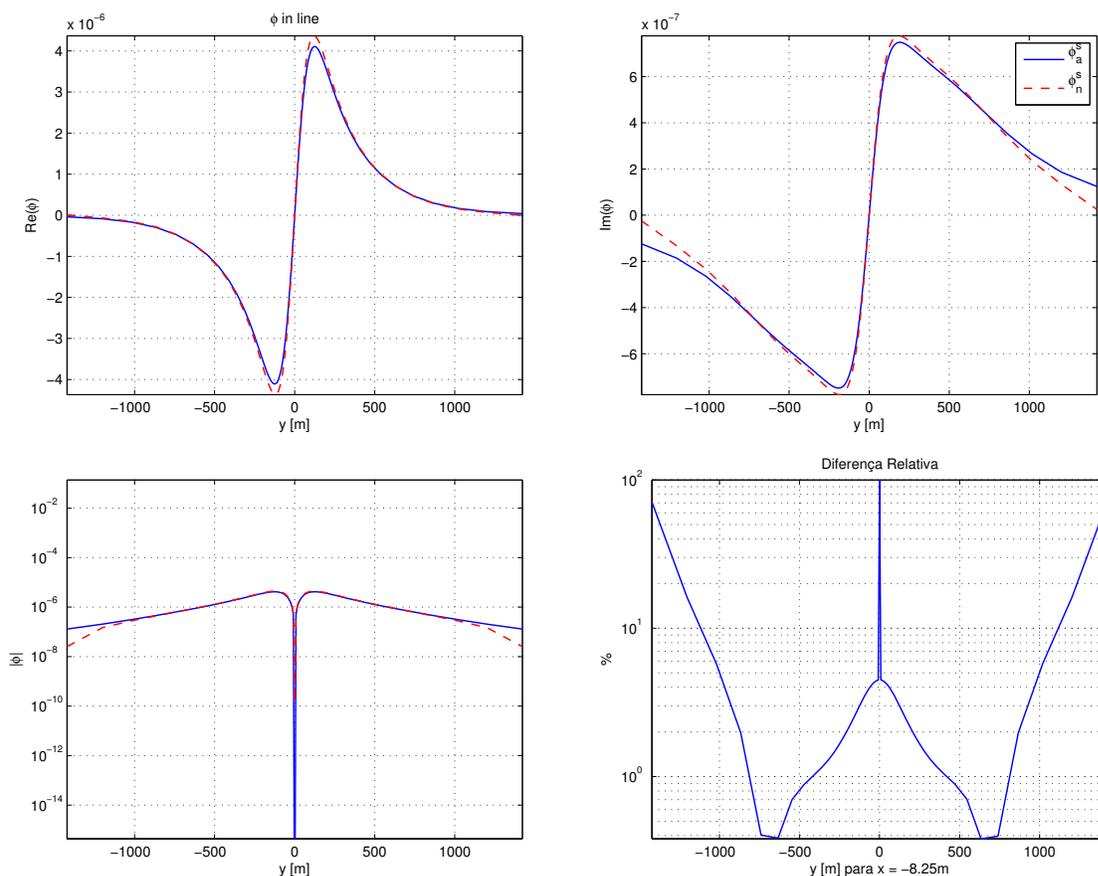


Figura 3.10: Comparação do potencial scalar analítico (curva contínua) e numérico (curva tracejada).

$$\begin{aligned}
 E_y(\mathbf{x}) = & \frac{\omega\mu_0 I_0 dl}{4\pi k_1^2} \left[\frac{-1}{\rho} \int_0^\infty [k_1^2 (a_1^{(+)} e^{iu_n x} + a_1^{(-)} e^{-iu_n x}) + \right. \\
 & + iu_n \lambda^2 (b_1^{(+)} e^{iu_n x} - b_1^{(-)} e^{-iu_n x})] J_1(\lambda\rho) d\lambda + \\
 & \left. + \int_0^\infty iu_n \lambda^2 (b_1^{(+)} e^{iu_n x} - b_1^{(-)} e^{-iu_n x}) J_0(\lambda\rho) \lambda d\lambda \right] \quad (3.44)
 \end{aligned}$$

onde os coeficientes a_n e b_n são os mesmos de (3.42).

A figura 3.11 mostra a comparação entre os resultados analítico e numérico para o campo elétrico. Nos dois gráficos do topo, temos as componentes reais e imaginárias das soluções, e os dois gráficos inferiores mostram a magnitude do campo elétrico e a diferença relativa entre os dois resultados. Notamos novamente que a solução é

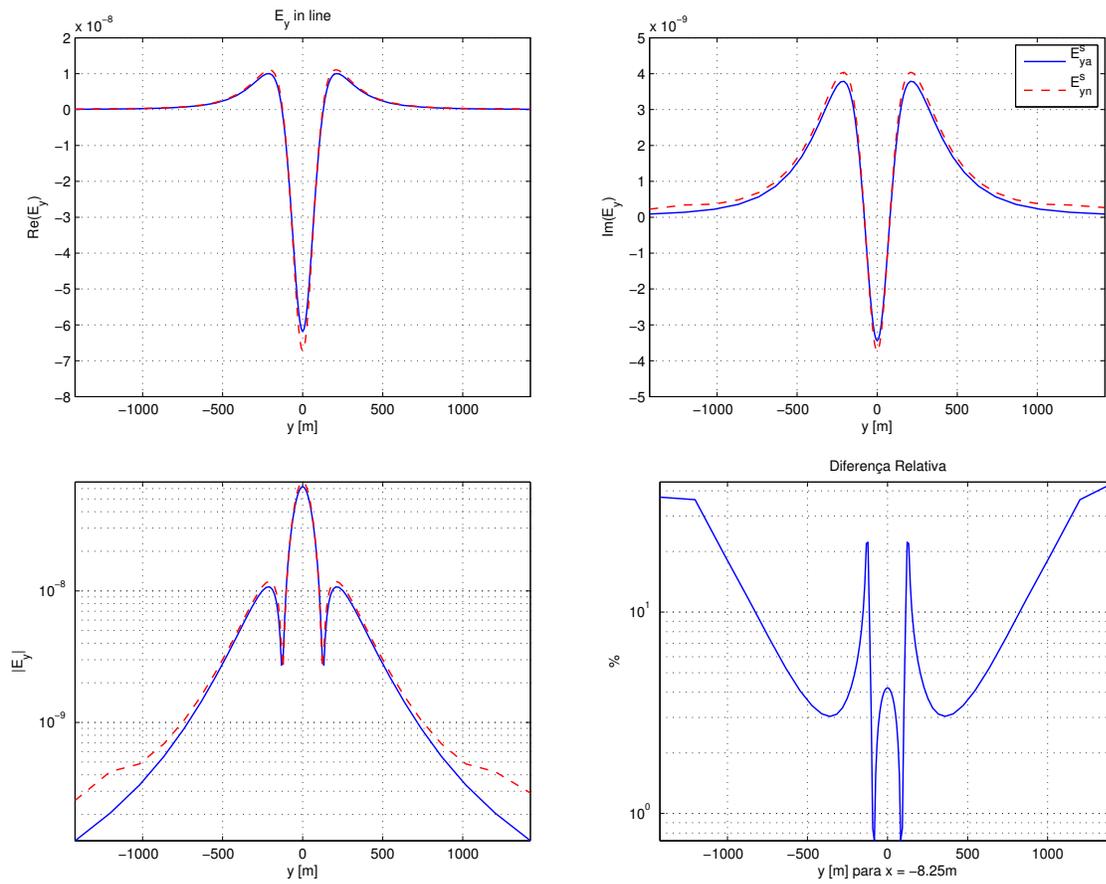


Figura 3.11: Comparação do campo elétrico secundário analítico (curva contínua) e numérico (curva tracejada).

menos precisa nas regiões próximas às bordas, devido à dificuldade de aproximação das derivadas e também devido à maior distância entre pontos do grid nessas regiões. Na região central, onde temos maior refinamento do grid, os resultados são mais precisos e podemos notar diferenças relativas menores que 5%.

4 O MÉTODO DE DIFERENÇAS FINITAS COM MALHA NÃO-ESTRUTURADA

O uso de malhas estruturadas ou cartesianas é bastante comum na resolução de equações diferenciais parciais pois facilitam o cálculo das derivadas numéricas e são extremamente fáceis de serem geradas (FRANKE; BORNER; SPITZER, 2004). No entanto, tais facilidades contrastam com uma séria limitação dessa técnica quando aplicada em problemas realísticos, que é o tratamento das regiões de fronteira de geometrias curvas. Ao utilizar a malha estruturada, o delineamento de qualquer geometria curvilínea fica limitada pelos *nós* do grid, isso faz com que a geometria seja aproximada por uma série de “degraus” (figura 4.1), o que inevitavelmente introduz erros na definição da geometria e também na solução do problema.

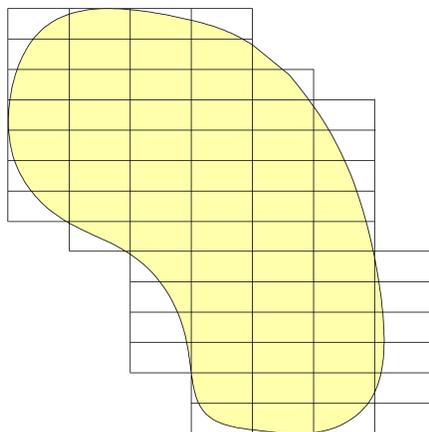


Figura 4.1: As malhas estruturadas tornam menos flexível a tarefa de delinear geometrias complexas.

O uso de malhas estruturadas também possui outra desvantagem, que está relacionada com o refinamento do grid. Não é possível confinar o refinamento do grid

em um determinado local. Ele é mantido mesmo em regiões desnecessárias, como pode ser observado em todas as malhas estruturadas do capítulo anterior, o que acaba desperdiçando consideravelmente recursos computacionais.

Métodos como o de Elementos Finitos e Equações Integrais são muito populares em áreas como Física e Engenharias por serem bastante flexíveis e versáteis, em parte devido à habilidade desses métodos em usar malhas adaptativas. No entanto, esses métodos sofrem sérias limitações em eficiência quando aplicados em problemas com grande número de variáveis (FERNANDEZ; KULAS, 2004). Malhas adaptativas são bastante apropriadas nos casos onde a solução calculada varia amplamente dentro do domínio do problema ou quando temos geometrias que não se ajustam no grid regular, que é o caso da maiorias dos problemas geofísicos.

Na literatura, podemos encontrar alguns problemas onde se utiliza o método de Diferenças Finitas com malhas adaptativas. Em WANG; PRZEKWAS; LIU (2002) é desenvolvido um método que utiliza um grid cartesiano adaptativo, isto é, um grid estruturado que adapta seu refinamento de acordo com a estrutura que se deseja delinear ou com a física do problema. Neste caso, o problema de refinamento em áreas desnecessárias é resolvido, mas o delineamento das geometrias continua limitado pelo padrão estruturado do grid.

Em FERNANDEZ; KULAS (2004) o método de Diferenças Finitas é usado com uma malha de elementos triangulares não-estruturada na resolução de um problema eletromagnético de geometria simples. Nele, as expressões para as derivadas de primeira e segunda ordem são dadas em termos dos valores nos nós da vizinhança de cada ponto do grid, aproximadas por um polinômio de segunda ordem ajustado nesses pontos. As expressões das derivadas são dadas a partir das derivadas do polinômio ajustado como uma combinação linear usando os coeficientes do próprio polinômio.

A flexibilidade dos grids não-estruturados e a facilidade de implementação do método de Diferenças finitas parece ser uma combinação bastante poderosa. O maior desafio no entanto, é a obtenção de expressões que possam aproximar satis-

fatoriamente as derivadas que surgem em nossos problemas.

Dentre os métodos baseados no ajuste de funções a partir do valor da função nos nós, destaca-se a técnica das Funções de Base Radial (com sigla em inglês RBF de *Radial Basis Functions*), cuja precisão e eficiência como interpolador são amplamente discutidas por exemplo em TOLSTYKH; SHIROBOKOV (2003), KANSA; CARLSON (1995), PIRET (2007), WRIGHT (2000) e HARDY (1971). Abaixo, faremos uma breve descrição desta técnica e mostraremos os resultados de alguns testes que fizemos afim de justificar o seu uso no cálculo das derivadas numéricas de nosso problema.

4.1 O MÉTODO DAS FUNÇÕES DE BASE RADIAL (RBF)

O método RBF é uma das ferramentas primárias na interpolação de dados multidimensionais espalhados. Sua forma simples e a precisão com que consegue aproximar funções tornaram o método particularmente popular (WRIGHT, 2000). O método RBF é uma versão generalizada do método Multiquádrico (MQ), desenvolvido por HARDY (1971) para a construção de uma função contínua que representasse a superfície de um determinado relevo a partir de medidas esparsas e irregularmente espalhadas de dados topográficos. A principal característica do método Multiquádrico é que o interpolador é uma combinação linear dos deslocamentos de uma função base, a qual depende apenas da distância Euclidiana do seu centro. Essa função base é portanto radialmente simétrica em relação ao seu centro, característica que dá nome ao método. A sua generalização é feita utilizando como função base outras funções radiais como por exemplo a quádrlica inversa, a multiquádrica inversa, a gaussiana, etc (PIRET, 2007). O método RBF é definido como se segue:

Tabela 1: Exemplos de funções radiais.

Tipo de função base	$\phi(\mathbf{r})(\mathbf{r} \geq \mathbf{0})$
Gaussiana	$e^{-\varepsilon^2 r^2}$
Quádrlica Inversa	$\frac{1}{1+(\varepsilon r)^2}$
Multiquádrlica Inversa	$\frac{1}{\sqrt{1+(\varepsilon r)^2}}$
Multiquádrlica	$\sqrt{1+(\varepsilon r)^2}$

Definição 4.1.1. (O método RBF) Dado um conjunto distinto de pontos $\{x_j\}_{j=1}^n$ e valores correspondentes $\{f_j\}_{j=1}^n$ nesses pontos, o interpolador RBF é definido por

$$s(x) = \sum_{j=1}^n \lambda_j \phi(\|x - x_j\|), \quad (4.1)$$

onde $\phi(r)$, $r \geq 0$ é uma função radial, n é o número de pontos vizinhos mais o ponto central, e $\|\cdot\|$ denota a norma Euclidiana. Os coeficientes λ_j são determinados através da condição $s(x_j) = f_j$, $j = 1, \dots, n$, sendo f_j o valor da função em cada um dos n pontos, o que leva ao seguinte sistema linear simétrico:

$$\begin{bmatrix} \phi(\|x_1 - x_1\|) & \phi(\|x_1 - x_2\|) & \cdots & \phi(\|x_1 - x_n\|) \\ \phi(\|x_2 - x_1\|) & \phi(\|x_2 - x_2\|) & \cdots & \phi(\|x_2 - x_n\|) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi(\|x_n - x_1\|) & \phi(\|x_n - x_2\|) & \cdots & \phi(\|x_n - x_n\|) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

De acordo com MICCHELLI (1986), a escolha adequada de $\phi(r)$ em (4.1) garante que a matriz em (4.2) seja incondicionalmente não-singular e assim o método RBF possua solução única. Alguns exemplos de $\phi(r)$ que levam a soluções únicas são dados na tabela 1. O parâmetro ε presente nas expressões das funções radiais é um parâmetro livre que controla o formato das funções, tornado-as mais ou menos suaves. Por hora, o assumiremos como um valor fixo, real e não-negativo

4.2 COMPARAÇÃO DE PRECISÃO DAS RBF's

Nesta seção, avaliamos o desempenho do método RBF na aproximação de uma função teste 1-D com alto grau de oscilação e irregularmente amostrada. Comparamos os resultados obtidos para cada uma das funções bases da tabela 1 e também com os resultados obtidos com o uso de uma função base linear e outra polinomial. A figura 4.2 mostra o resultado de nossa comparação. Na subfigura 4.2(a) temos a aproximação do interpolador linear, cuja função base na verdade é constituída por um polinômio de primeiro grau, sendo esse o tipo de interpolação mais simples que podemos ter. Nela observamos a grande dificuldade desse interpolador em aproximar a função, gerando uma diferença relativa à função teste bastante alta. A precisão da interpolação linear é bastante dependente da distribuição das abscissas dos pontos amostrados, sendo maior quando essas abscissas são regularmente espaçadas. Na subfigura 4.2(b) temos a aproximação do interpolador que usa uma função polinomial como função base. Apesar de não mostrarmos todos os testes feitos, experimentamos polinômios de vários graus na tentativa de ajuste da curva, no entanto esse tipo de interpolação mostrou-se completamente ineficiente quando o dado apresenta elevada oscilação. Testes realizados em dados mais suaves mostraram-se mais satisfatórios. Nas subfiguras 4.2(c),(d),(e) e (f) temos respectivamente as aproximações das RBF's com as funções bases multiquádrica, gaussiana, quádrlica inversa e multiquádrica inversa. Observamos que todas elas produziram resultados bastante aproximados, com precisão de algumas ordens de grandeza abaixo do que a dos dois primeiros resultados. No entanto, analisando o gráfico de diferença relativa das aproximações, notamos um desempenho consideravelmente superior do método quando utilizado com a função base gaussiana, produzindo um resultado bem mais aproximado que o das outras funções bases. Em virtude desses resultados, optamos pela função gaussiana como função base na formulação do método RBF associado ao nosso problema de equações diferenciais, o qual discutiremos adiante.

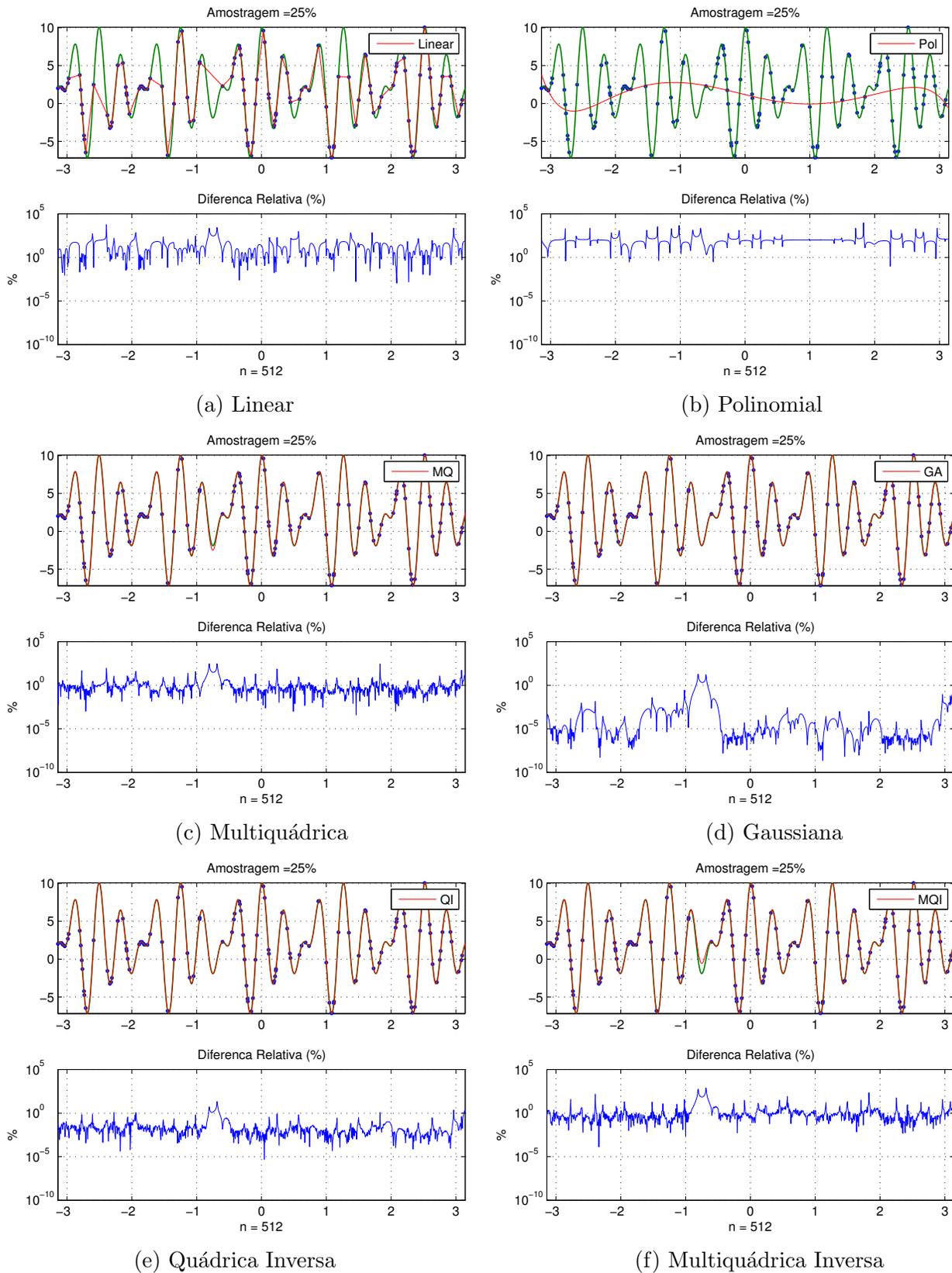


Figura 4.2: Comparação das aproximações obtidas pelo método RBF quando aplicado com diferentes funções bases.

4.3 APROXIMAÇÃO DAS DERIVADAS UTILIZANDO AS RBF's E QUADRATURA DIFERENCIAL (RBF-DQ)

A maneira mais conveniente de se calcular derivadas numéricas é aquela baseada na expansão em séries de Taylor, como por exemplo, o esquema de diferenças centrais (SPALDING, 1972), o qual utilizamos no capítulo anterior para definirmos os operadores de derivadas de primeira e segunda ordem. No entanto, quando a aplicação do método de Diferenças Finitas é estendido para a solução de problemas com derivadas de ordens maiores, o método fica facilmente comprometido tanto pelo mal condicionamento dos sistemas a serem resolvidos (FORNBERG, 1981) quanto pela diminuição da precisão dos cálculos (SQUIRE; TRAPP, 1998). Outras pesquisas abordam o uso de interpolação na estimativa dessas derivadas. Dentre essas formulações, temos por exemplo a interpolação polinomial (SLAZER, 1964) e a formulação através de polinômios de Hermite e Lagrange (CIARLET; RAVIAT, 1972; GASCA; MAEZTU, 1982). No entanto, esses métodos são usados apenas com grids estruturados, logo não seriam opções adequadas, uma vez que nossas simulações envolvem domínios irregulares, como já foi discutido.

Na seção anterior, vimos que as funções de base radial ou RBF's são bastante apropriadas em problemas de interpolação e podem ser adotadas eficientemente em esquemas de aproximação de funções. Agora, queremos explorar um outro tipo de aproximação, que é a aproximação das derivadas de uma função através do método RBF. Para isso, partiremos da abordagem proposta por WU; SHU (2002), na qual a aproximação das derivadas é dada por uma quadratura diferencial que usa funções de base radial como função teste (RBF-DQ). Este método nos dá a possibilidade de obtermos a derivada de dados que estejam irregularmente distribuídos ou espalhados, tal como numa malha não-estruturada.

Definição 4.3.1. (RBF-DQ) Em SHU; YEO (2003) este método é chamado de *local RBF-DQ*, uma vez que ele escolhe um sub-grupo de pontos do domínio os quais atuarão como pontos de suporte para a aproximação em um determinado ponto. Assim, a formulação de aproximação das derivadas se dá através da definição abaixo.

$$\left. \frac{\partial^{(m)} f(x)}{\partial x^{(m)}} \right|_i = \sum_{j=1}^{N_L} \lambda_{ij}^{(m)} f(x_j), \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (4.3)$$

sendo N o número global de pontos do domínio e N_L o número de pontos locais usados como nós de suporte da aproximação. O índice i refere-se à numeração global dos pontos enquanto que o índice j refere-se à numeração local, m é o índice referente à ordem da derivada da aproximação e λ_{ij} são os coeficientes-peso, estimados da mesma maneira que os coeficientes λ_j , na definição 4.1.1.

Introduzindo as funções de base radial como função teste na expressão (4.3), temos a substituição do termo $f(x)$ por $\phi(r_j)$, sendo $r_j = \|x - x_j\|$ a norma Euclidiana das coordenadas cartesianas do sistema e $\phi(r_j)$ uma função de base radial. Assim, podemos montar um sistema como em (4.2), e os coeficientes λ_{ij} podem ser estimados por:

$$\begin{bmatrix} \lambda_{i1} \\ \lambda_{i2} \\ \vdots \\ \lambda_{iN_L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1(r_1) & \phi_1(r_2) & \cdots & \phi_1(r_{N_L}) \\ \phi_2(r_1) & \phi_2(r_2) & \cdots & \phi_2(r_{N_L}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \phi_{N_L}(r_1) & \phi_{N_L}(r_2) & \cdots & \phi_{N_L}(r_{N_L}) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial^{(m)} \phi(r_1)}{\partial x^{(m)}} \right|_i \\ \left. \frac{\partial^{(m)} \phi(r_2)}{\partial x^{(m)}} \right|_i \\ \vdots \\ \left. \frac{\partial^{(m)} \phi(r_{N_L})}{\partial x^{(m)}} \right|_i \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

com $i = 1, 2, \dots, N$.

Exemplo 4.3.1. Neste exemplo, queremos mostrar como o procedimento descrito acima pode ser aplicado na aproximação da derivada de uma função. Para isso, escolhemos a função de base radial gaussiana (GA) como função teste para a obtenção

dos coeficientes λ_{ij} da equação (4.4), cuja formulação é dada da seguinte maneira:

$$\phi(r_j) = e^{-\varepsilon^2 r_j^2} \quad (4.5)$$

onde r_j denota $\|x - x_j\|$ que é a norma Euclidiana das abscissas do sistema e ε é o parâmetro livre que mencionamos anteriormente, conhecido como *parâmetro de suavidade*.

A derivada da função teste, expressa por $\frac{\partial^{(m)}\phi(r_j)}{\partial x^{(m)}}$ na equação (4.4) pode ser substituída por

$$\frac{\partial\phi(r_j)}{\partial x} = -2\varepsilon^2(x - x_j)e^{-\varepsilon^2 r_j^2}, \quad (4.6)$$

que é a derivada da função gaussiana.

Substituindo as expressões (4.5) e (4.6) em (4.4), teremos então um sistema linear com N_L equações. A solução desse sistema nos dá os coeficientes λ_{ij} que relacionam a função base com sua derivada. Uma vez estimados, estes coeficientes podem ser usados diretamente na equação (4.3), que é a quadratura diferencial que dará a aproximação que queremos.

A figura 4.3 mostra o resultado da aplicação do procedimento descrito acima na aproximação da derivada de uma função $f(x)$ em comparação com o resultado obtido quando utilizamos o método tradicional de diferenças centrais no mesmo conjunto de dados, tomados em um grid 1-D. Na figura 4.3(a) temos as aproximações obtidas quando utilizamos um conjunto de abscissas as quais foram amostradas regularmente no domínio da função, e na figura 4.3(b) o resultado quando utilizamos abscissas irregularmente amostradas.

Como podíamos esperar, o resultado obtido com as RBF's é bem mais preciso que o obtido com diferenças centrais, principalmente quando temos uma distribuição irregular dos dados, onde o método de diferenças centrais da forma que utilizamos é completamente inapropriado. Uma das razões para isso é a ordem de precisão desses métodos. Através da análise da expansão em séries de Taylor que define a expressão

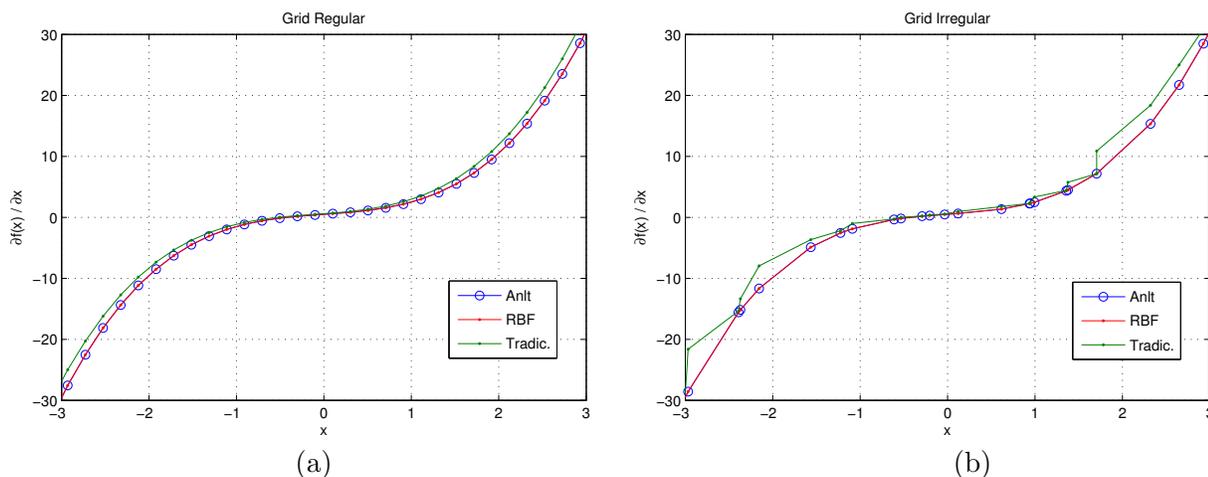


Figura 4.3: Derivadas numéricas e analítica da função $f(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + 0.5$ calculadas em (a) Grid Regular, e em (b) Grid Irregular, através dos métodos RBF-DQ e Diferenças Finitas Centrais.

de diferenças centrais, temos que esse método possui uma taxa de convergência $\mathcal{O}(\Delta x)^2$. Já o método RBF com a função gaussiana converge muito mais rápido, na forma $\mathcal{O}(e^{-const/\Delta x^2})$ (FORNBERG; FLYER, 2005). Além disso, as formas tradicionais de diferenças finitas são tipicamente obtidas através da diferenciação de interpoladores polinomiais, que é o procedimento subjacente quando utilizamos combinações lineares dos valores de uma função para aproximar sua derivada. Outro fator que influencia a precisão dos resultados é a quantidade de nós de suporte que utilizamos nas aproximações. Por sua definição, o método de diferenças centrais toma os pontos que estão imediatamente ao redor de onde queremos a derivada, somando assim dois nós de suporte no exemplo 1-D. Já no método RBF temos maior liberdade em escolher quantos nós vão ser usados na estimativa da derivada. No exemplo em questão, para o cálculo da derivada em cada ponto, utilizamos todos os outros nós do domínio, o que possibilitou uma aproximação com precisão bastante elevada. Um resultado interessante foi obtido quando fizemos a aproximação através das RBF's no grid regular alterando-se a quantidade de nós de suporte. Percebemos que a curva gerada aproximava-se cada vez mais da curva obtida com o método de diferenças centrais à medida que a quantidade de nós de suporte era

diminuída, e uma solução bastante aproximada quando utilizamos exatamente dois nós de suporte para o seu cálculo, o que remete à afirmação de que os métodos mais tradicionais de diferenciação numérica também são baseados em interpolações.

4.4 ESCOLHA ADAPTATIVA DO PARÂMETRO DE SUAVIDADE

Algumas das funções de base radial, incluindo a função gaussiana, possuem em suas definições o parâmetro ε , chamado de parâmetro de suavidade. O valor desse parâmetro influencia basicamente o formato das funções, alterando o seu grau de decaimento. Valores menores de ε correspondem a funções bases mais planas ou amplas. O limite onde temos $\varepsilon \rightarrow 0$ é chamado de “limite plano” (FASSHAUER; ZHANG, 2000), pois $\varepsilon = 0$ corresponde à uma função base constante.

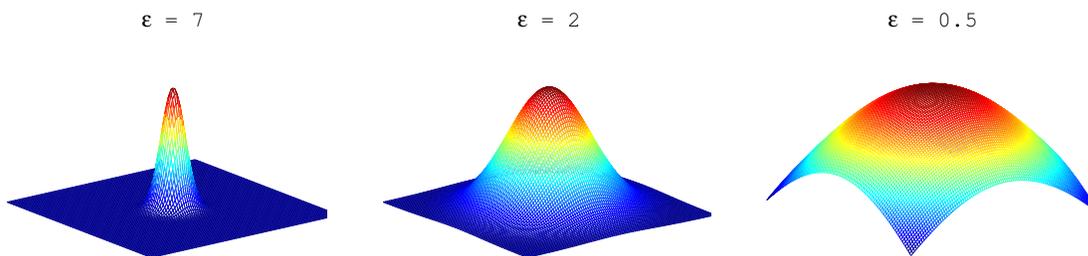


Figura 4.4: Função gaussiana calculada para valores diferentes do parâmetro de suavidade ε

Até aqui, assumimos para ε um valor real positivo, e apesar de o termos definido anteriormente como um parâmetro livre, a mudança desse parâmetro obviamente leva à uma aproximação diferente através das RBF's. Existe uma vasta literatura sobre a definição do parâmetro de suavidade, entretanto, em muitos trabalhos, o parâmetro é definido através de tentativa e erro ou alguma outra maneira *ad hoc*. Dentre as técnicas utilizadas na definição do parâmetro de suavidade, destaca-se aquela introduzida por TSENG; SHEN; YOUNG (2009), na qual é feita uma análise residual do método RBF-DQ para a decisão do parâmetro que otimiza a aproximação das derivadas no grid. No entanto, SHEN; TSENG; YOUNG (2012) afirmam que este método possui uma desvantagem, que é a de utilizar o mesmo parâmetro para

todas as derivadas e propõem uma maneira alternativa na escolha do parâmetro ε , na qual nos baseamos para a formulação de nosso problema.

Através dos resultados de nossos testes ou mesmo intuitivamente, podemos observar que o valor de um ε adequado está bastante relacionado com a distância entre os pontos onde as funções bases são definidas. Assim, a utilização de um mesmo ε seria inapropriada ou menos efetiva em um domínio onde temos distâncias irregulares entre esses pontos, como é o caso dos nós em uma malha não-estruturada.

Com isso, introduzimos em nosso problema uma maneira alternativa de se definir o parâmetro de suavidade, a qual considera a configuração de cada sub-grupo de nós utilizados na aproximação das derivadas, tornando a escolha de ε um processo adaptativo. Para demonstrar este procedimento, tomemos por exemplo um dado sub-grupo com N_L pontos do domínio global, onde teremos um sistema linear como em (4.4), com N_L equações e N_L coeficientes λ_{ij} a serem estimados. O valor de ε permanece constante dentro do domínio de cada sub-grupo, isto é, para cada ponto do domínio será relacionado um determinado ε e o método para se obtê-lo é através da característica da soma dos coeficientes λ_{ij} de cada sub-grupo de pontos. Para analisarmos essa característica, tomamos a expressão da quadratura diferencial da derivada de primeira ordem de uma função $f(x)$ como exemplo:

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = \sum_{j=1}^{N_L} \lambda_{ij} f(x_j) \quad (4.7)$$

Partindo das propriedades das derivadas, assumimos que para uma função teste de valor constante $f(x)$, a aproximação da derivada de primeira ordem acima deve definitivamente satisfazer $\frac{\partial f(x)}{\partial x} = 0$. Portanto, torna-se evidente que a soma dos coeficientes λ_{ij} deve satisfazer $\sum \lambda_{ij} = 0$. O resíduo da soma dos coeficientes é dado pela expressão

$$R(\varepsilon) = \left| \sum \lambda_{ij}^{(m)} \right| \quad (4.8)$$

Dessa forma, a determinação do parâmetro de suavidade que melhora a aproxi-

mação da derivada em cada subgrupo de pontos fica sujeita à minimização do resíduo acima, ficando em nosso critério apenas a escolha do intervalo de valores do qual ε será determinado.

Apesar de termos obtido bons resultados através do procedimento mostrado acima, outras técnicas mais elaboradas podem ser usadas na determinação do parâmetro de suavidade. A escolha do melhor ε para as aproximações de funções através das RBF's é um tema muito vasto e que ainda está em aberto, de acordo com as referências que consultamos sobre este assunto.

4.5 O MÉTODO RBF-DQ EM MALHA NÃO-ESTRUTURADA

A extensão do método RBF-DQ para problemas em duas dimensões requer antes de tudo a construção de uma malha computacional 2-D. Para isto, utilizamos o gerador de malhas não-estruturadas *Distmesh2D* apresentado por PERSSON (2005). Este gerador de malhas é constituído por um algoritmo muito eficiente, capaz de delinear geometrias especificadas por funções ou representações implícitas em duas ou três dimensões, proporcionando a estruturação de malhas de alta qualidade. O algoritmo produz um *output* com os valores das coordenadas de cada nó, assim como a informação de conectividade entre eles, compondo uma malha triangular com elementos o mais equiláteros possível, o que é uma propriedade bastante desejável dentro da nossa formulação. A partir dos dados de geração da malha, é definido um parâmetro q que mede a qualidade do grid, através da relação entre o raio do maior círculo inscrito (multiplicado por dois) e o menor círculo circunscrito em cada elemento triangular da malha. Mais explicitamente, se a , b e c são os lados de um triângulo, o seu parâmetro de qualidade q é dado por:

$$q = 2 \frac{r_{insc}}{r_{circ}} = \frac{(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}{abc} \quad (4.9)$$

Um triângulo equilátero possui $q = 1$, e um triângulo degenerado, com área zero, possui $q = 0$ (figura 4.5). Qualitativamente falando, se os triângulos da malha forem

estatisticamente de alta qualidade, o sistema matricial resultante provavelmente ficará melhor condicionado. Aumentamos a densidade de nós próximo às fronteiras dos meios em função da distância dos nós à fronteira. A fixação de pontos na malha também pode ser previamente definida, e os seus posicionamentos são fielmente garantidos pelo algoritmo.

Uma vez que a malha não-estruturada é estabelecida, e seguindo a metodologia das RBF's descrita nas seções anteriores para o problema 1-D, precisamos então ajustar uma superfície gerada por uma função radial em cada um dos pontos desse grid, tendo para isso ajuda de pontos vizinhos ao ponto onde queremos estimar as derivadas numéricas, como esquematizado na figura 4.6.

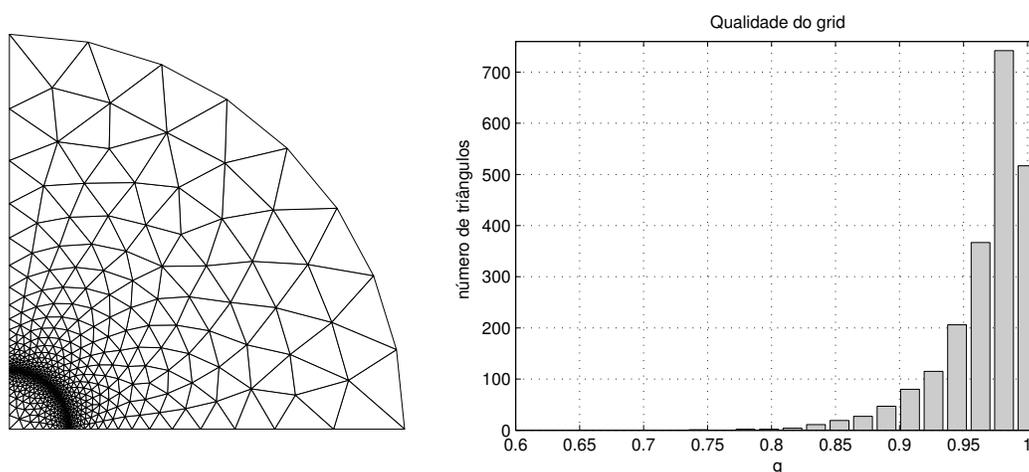


Figura 4.5: Qualidade da malha não-estruturada.

Como foi visto no capítulo 2, as equações que regem o comportamento dos campos e potenciais que queremos estudar possuem derivadas de primeira e segunda ordem. Dessa forma, queremos avaliar o desempenho do método RBF-DQ na aproximação dessas derivadas quando utilizamos o grid não-estruturado. Abaixo temos as expressões das derivadas de primeira e segunda ordem da função gaussiana $\phi(r) = e^{-\varepsilon^2 r^2}$, necessárias na resolução do sistema para a estimação dos coeficientes da quadratura diferencial que aproximará o valor dessas derivadas.

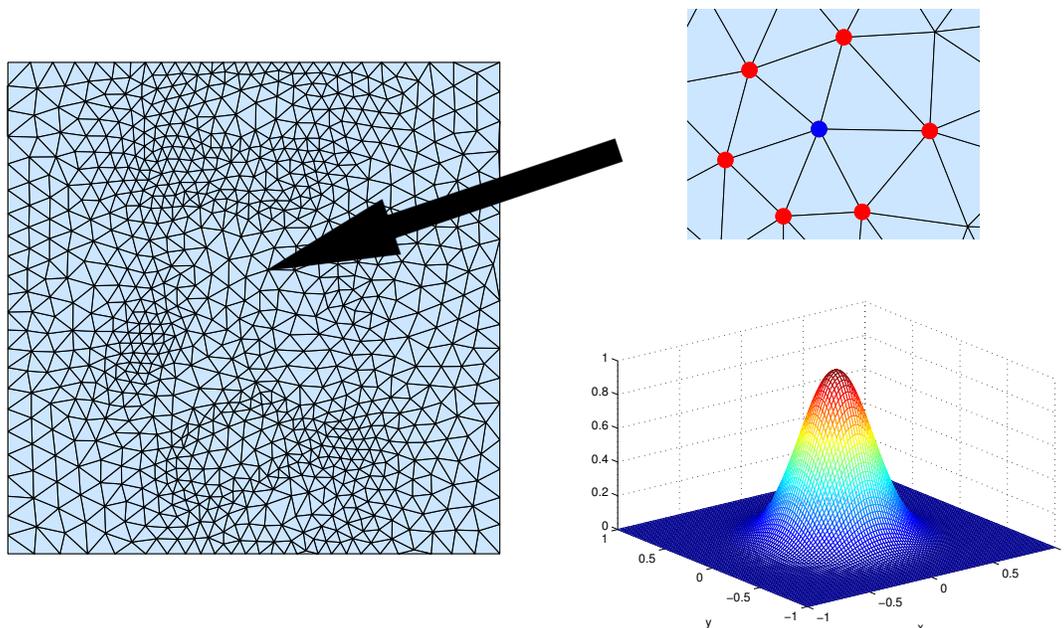


Figura 4.6: Exemplo de malha não-estruturada obtida com o algoritmo *Distmesh2d* e esquema de escolha de pontos de suporte para o cálculo das derivadas pelas RBF's.

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \phi(r)}{\partial x} &= -2\varepsilon^2(x - x_j)e^{-\varepsilon^2 r^2} \\
 \frac{\partial \phi(r)}{\partial y} &= -2\varepsilon^2(y - y_j)e^{-\varepsilon^2 r^2} \\
 \frac{\partial^2 \phi(r)}{\partial x^2} &= -2\varepsilon^2[1 - 2\varepsilon^2(x - x_j)^2]e^{-\varepsilon^2 r^2} \\
 \frac{\partial^2 \phi(r)}{\partial y^2} &= -2\varepsilon^2[1 - 2\varepsilon^2(y - y_j)^2]e^{-\varepsilon^2 r^2}
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

sendo $r = \sqrt{(x - x_j)^2 + (y - y_j)^2}$.

A expressão em quadratura diferencial da derivada de uma função, sugere que o valor dessa derivada é nada mais que a combinação linear dos valores dessa função em um determinado domínio, e essa combinação é estabelecida através apenas dos coeficientes da quadratura diferencial. Através disso, podemos montar os operadores de derivadas usando os valores desses coeficientes. Vale ressaltar que a determinação do operador em si não depende dos valores da função que queremos derivar e sim do tipo de função base e do grid que estamos utilizando. A figura 4.7 mostra como os coeficientes locais das quadraturas gaussianas são distribuídos na matriz global de

nós de um determinado grid, gerando o operador de derivada do método RBF-DQ.

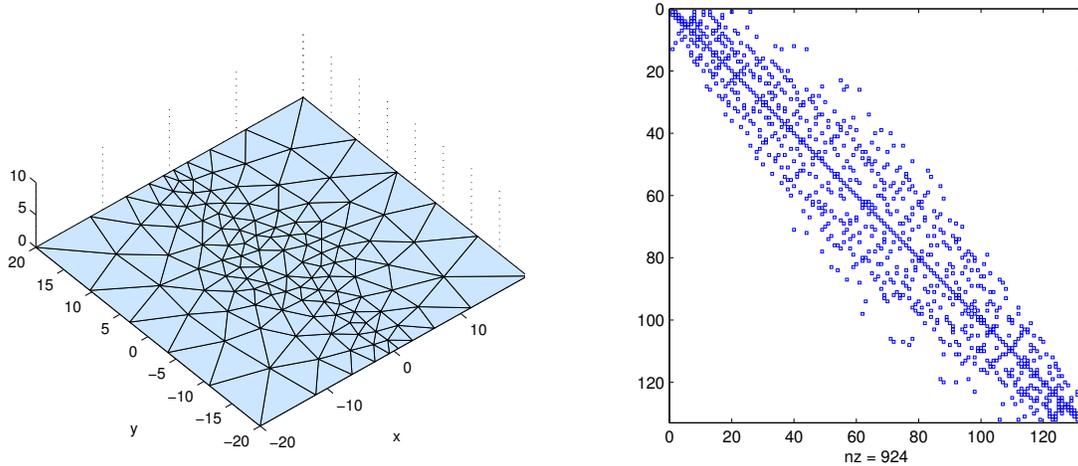


Figura 4.7: Exemplo de grid não-estruturado com 132 nós, e distribuição dos coeficientes λ no operador de derivada desse grid. Os pontos azuis representam os valores não-nulos da matriz, os quais somam $nz = 924$, sendo o valor $132^2 = 17424$ o número total de elementos da matriz.

Abaixo temos uma descrição das etapas que compõem o procedimento para o cálculo dos potenciais através da metodologia RBF-DQ.

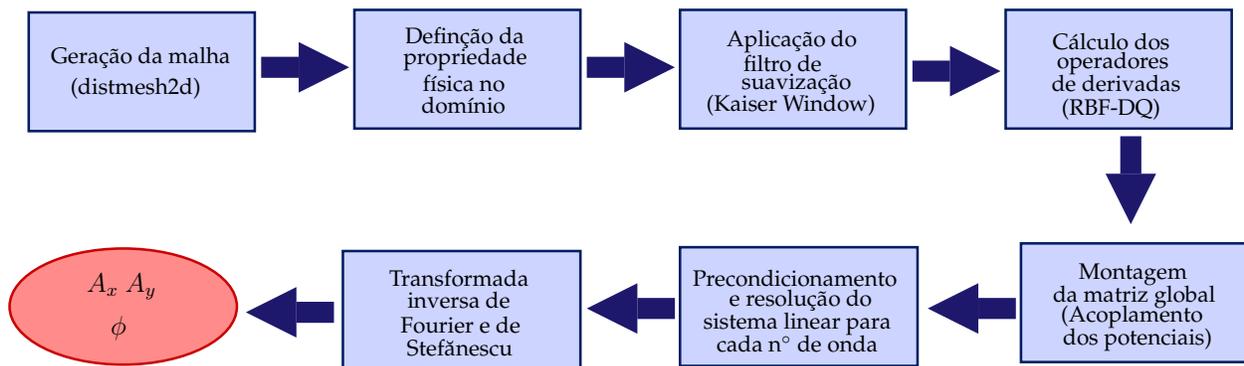


Figura 4.8: Descrição das etapas realizadas pelo algoritmo para o cálculo dos potenciais eletromagnéticos.

Exemplo 4.5.1. Para avaliarmos a performance do método RBF-DQ em malhas não-estruturadas, utilizamos a função *peaks* do MATLAB^{®1} (figura 4.9) e as expressões analíticas de suas derivadas de primeira e segunda ordem para compararmos com as aproximações por nós obtidas. Computamos as derivadas numéricas de primeira e segunda ordem utilizando o método RBF-DQ, o método tradicional de diferenças centrais, e também usando o procedimento onde interpolamos a função que queremos derivar para um grid uniforme e estruturado, e em seguida, utilizando as expressões de diferenças finitas centrais para as derivadas de primeira e segunda ordem, geramos as aproximações de suas derivadas, as quais são novamente interpoladas para o grid não-estruturado. Finalmente, comparamos cada um desses resultados com o seu correspondente analítico através da diferença absoluta entre eles.

A figura 4.10 mostra que, apesar de o método de diferenças centrais ter gerado resultados razoáveis, ele ainda é bem menos preciso que o obtido pelo método RBF-DQ no cálculo das derivadas de primeira ordem, como podemos constatar através da diferença absoluta das soluções. Já na figura 4.11, notamos que o resultado obtido através de diferenças centrais no cálculo da derivada de segunda ordem em grid estruturado, continua gerando um resultado aparentemente razoável, mas quando submetidos à interpolação para o grid não-estruturado, torna-se completamente comprometido e impreciso, enquanto o método RBF-DQ continua a gerar bons resultados, com diferença absoluta relevantemente superior que a dos outros.

Vários outros testes foram realizados afim de calibrarmos nossos algoritmos e avaliarmos sua estabilidade e precisão. Com respeito à estabilidade, podemos dizer que ela é uma questão a ser tratada com atenção quando se utiliza o método RBF-DQ. Apesar da não-singularidade das matrizes que geram os coeficientes ser garantida para as funções de base radial que apresentamos, não importa a dimensão

¹©2013 The MathWorks, Inc. MATLAB and Simulink are registered trademarks of The MathWorks, Inc. See www.mathworks.com/trademarks for a list of additional trademarks. Other product or brand names may be trademarks or registered trademarks of their respective holders.

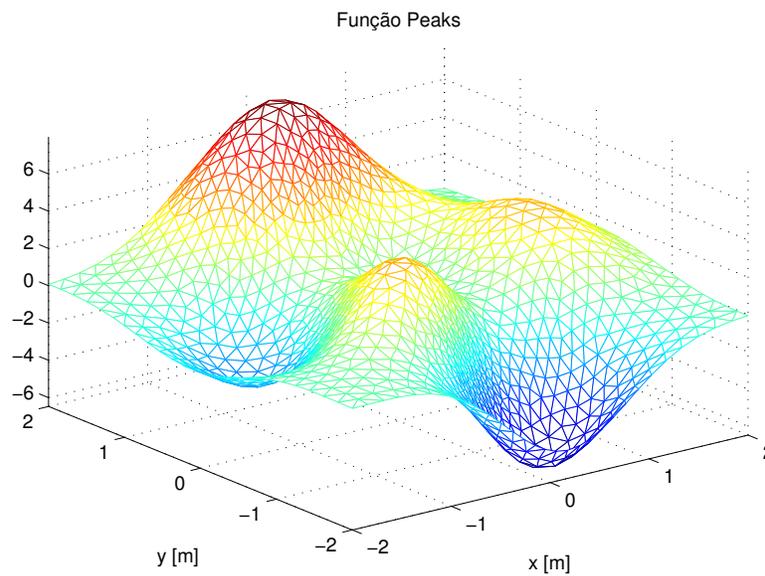


Figura 4.9: Função Peaks.

e nem como os nós estão espalhados, o número de condição dessas matrizes tende a aumentar conforme aumentamos o número de pontos utilizados nas quadraturas, dificultando, ou mesmo tornando impossível a estimativa dos coeficientes. A estabilidade do método também depende dos parâmetros de suavidade das funções. Parâmetros de suavidade com valores muito baixos tornam as funções radiais muito planas, fazendo com que os termos das quadraturas diferenciais fiquem linearmente dependentes e o sistema linear mal-condicionado.

O uso do método RBF-DQ também afeta diretamente o custo computacional. Como o método necessita da escolha de pontos de suporte para a aproximação das derivadas, é evidente que uma escolha mais densa desses pontos provocará um aumento do custo computacional, pois os sistemas a serem invertidos para cada subgrupo de nós ficarão não apenas maiores, mas também com um pior condicionamento. Por outro lado, o algoritmo do método é o mesmo para qualquer que seja a dimensão de nosso domínio, isto é, a complexidade do processo não aumenta com o aumento da dimensão, o que é uma vantagem bastante notável do método RBF-DQ usado em conjunto com as malhas não-estruturadas.

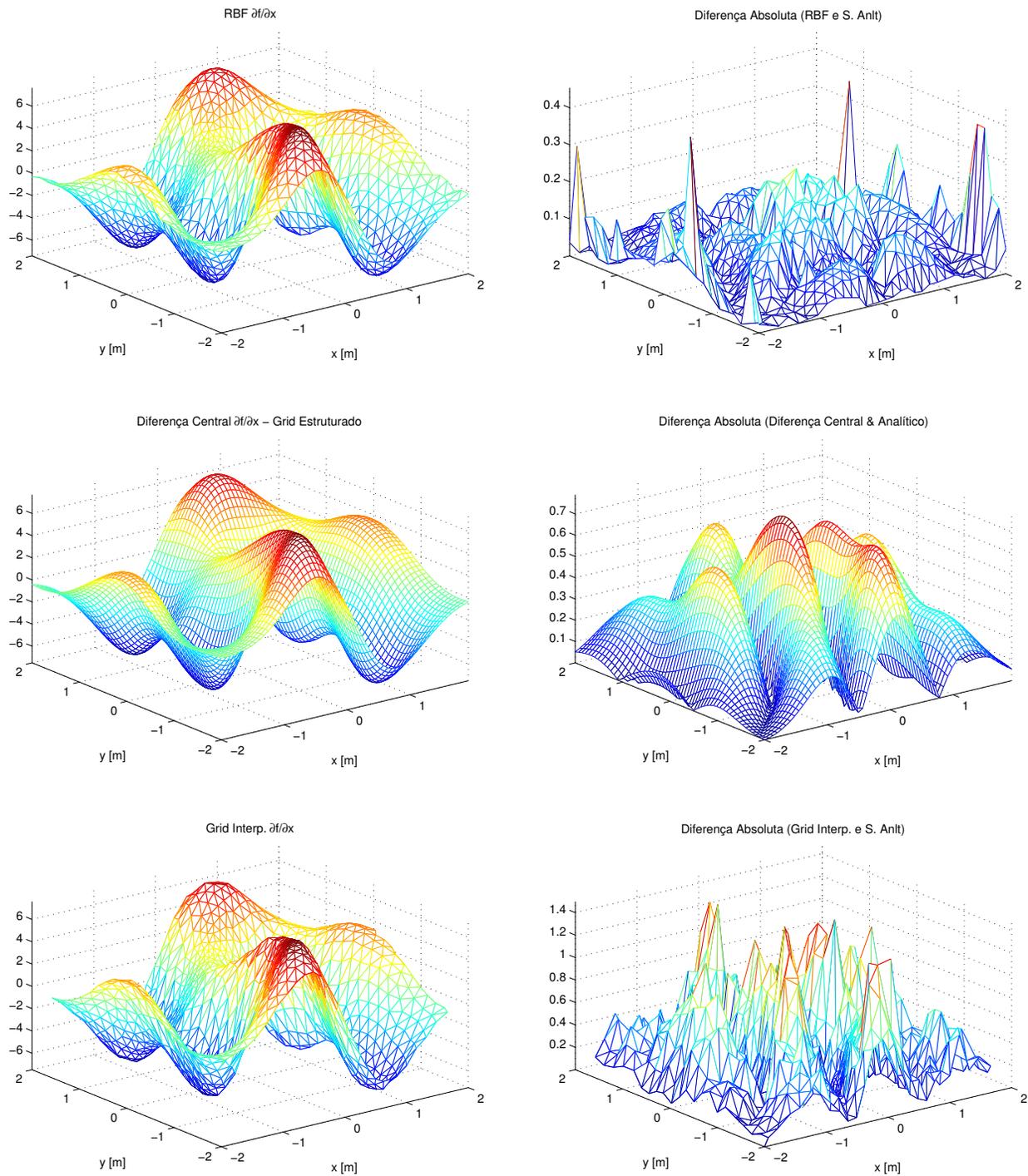


Figura 4.10: Comparação das derivadas de primeira ordem da função peaks obtidas com o método RBF-DQ e com diferenças centrais em grid estruturado e através de interpolação entre grids.

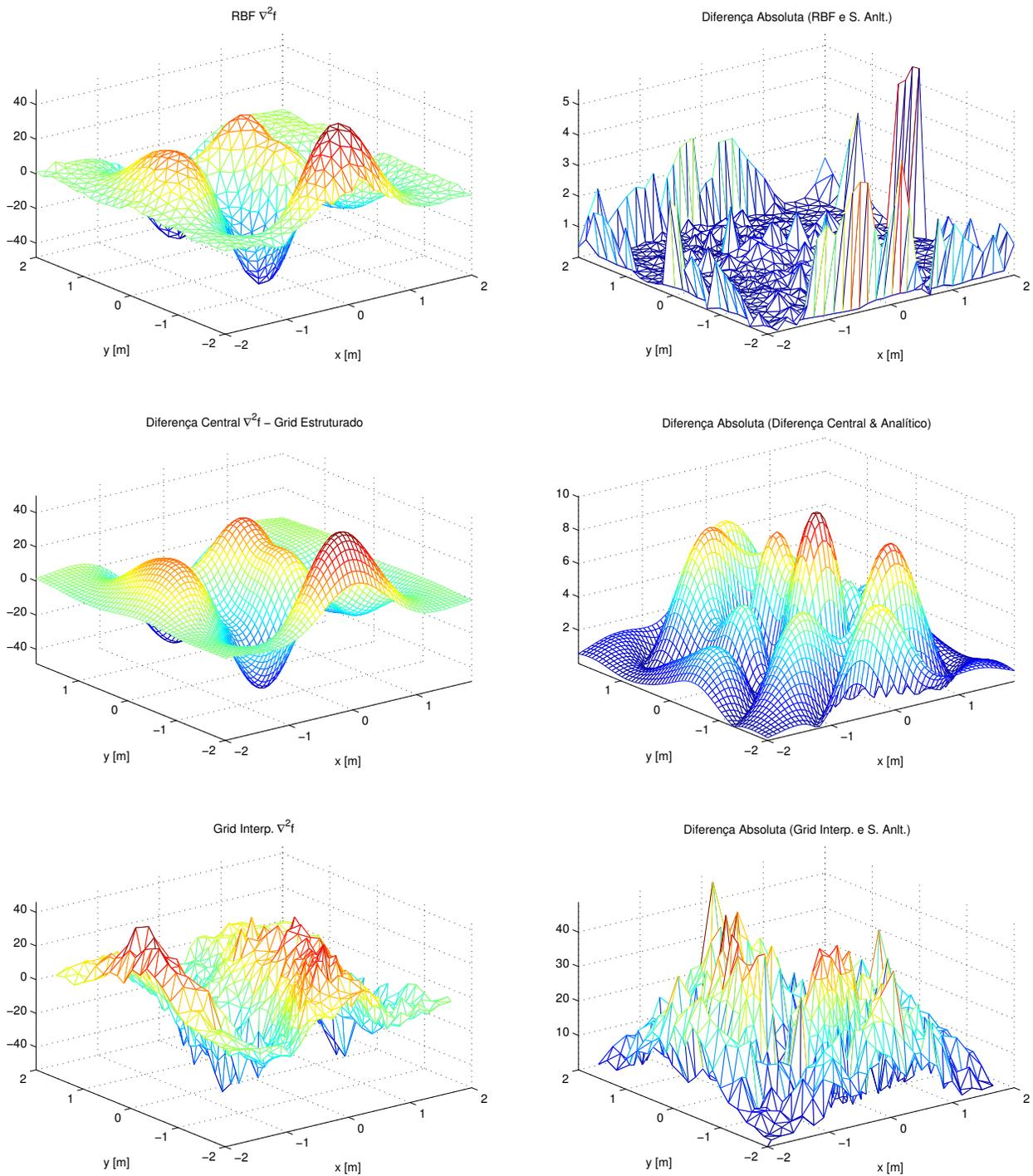


Figura 4.11: Comparação das derivadas de segunda ordem da função peaks obtidas com o método RBF-DQ e com diferenças centrais em grid estruturado e através de interpolação entre grids.

5 RESULTADOS

Neste capítulo, mostraremos os resultados obtidos através de nossa metodologia quando aplicada na resolução de problemas de modelagem geofísica caracterizados por geometrias curvilíneas. Os dois primeiros resultados servem para validarmos nossa técnica, onde estimamos a resposta eletromagnética de um modelo constituído por um corpo de simetria cilíndrica imerso em um background homogêneo, excitado por dois tipos de fontes eletromagnéticas. No caso mais simples, temos a solução do potencial elétrico gerado a partir da injeção de corrente galvânica próximo à superfície cilíndrica. Já no segundo caso, temos a resposta eletromagnética do meio quando excitado por um dipolo elétrico. Desenvolvemos as soluções semi-analíticas para esses dois problemas e as comparamos com os seus respectivos resultados numéricos. Em seguida, mostramos dois exemplos de aplicação da técnica desenvolvida neste trabalho em um problema de caráter mais realístico, mais especificamente, em um problema relacionado ao método geofísico *marine controlled-source electromagnetic* (mCSEM), onde modelamos os campos gerados a partir de seu uso. O mCSEM é um método geofísico que vem sendo cada vez mais utilizado na exploração e mapeamento de hidrocarbonetos em regiões oceânicas, e o desenvolvimento de técnicas que possam contribuir na melhoria dos procedimentos ligados ao seu uso é um dos interesses de nossa pesquisa. Uma descrição mais detalhada deste método é dada nas próximas seções deste capítulo.

5.1 VALIDAÇÃO NUMÉRICA #3: FLUXO DE CORRENTE GALVÂNICA PRÓXIMO A UMA SUPERFÍCIE CILÍNDRICA

Assim como na seção 3.3, mostraremos aqui a modelagem do potencial gerado pelo fluxo de corrente elétrica entre dois meios com diferentes condutividades, mas dessa vez utilizando o método RBF-DQ e considerando um modelo condutivo caracterizado por uma superfície de geometria cilíndrica, infinita na direção z , inserida em um meio homogêneo, como mostrado na figura 5.1. Refinamos o grid não-estruturado na interface entre o cilindro e o meio exterior onde o potencial elétrico secundário varia mais rapidamente. Essa variação é devida ao fluxo de corrente elétrica entre dois eletrodos colocados próximos à superfície do cilindro. Para este problema, utilizamos a formulação eletromagnética 2-D que é reduzida apenas para o potencial escalar elétrico, uma vez que no regime DC os termos ligados à indução eletromagnética são nulos.

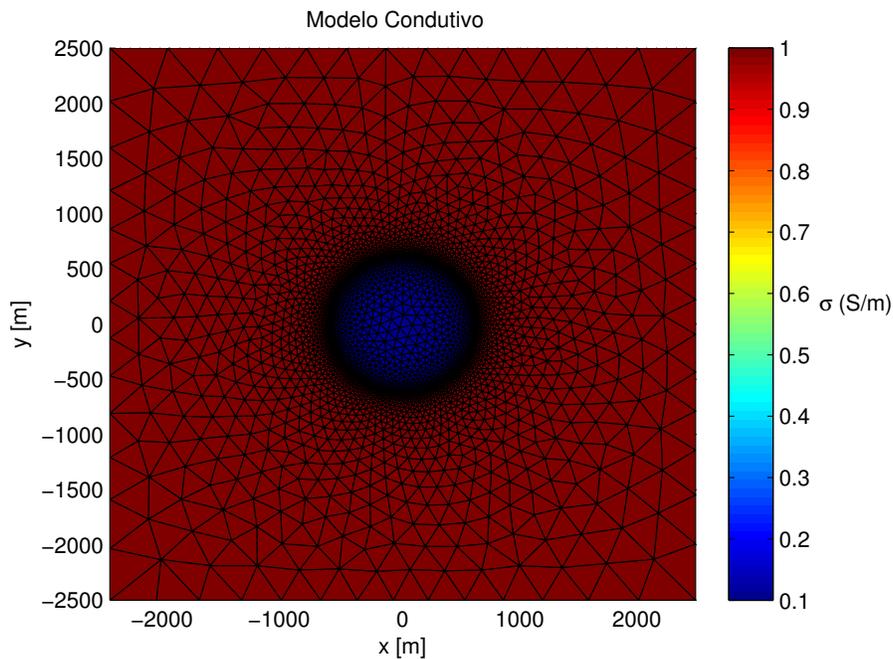


Figura 5.1: Modelo de condutividade para o problema DC em grid não-estruturado.

O desenvolvimento da solução semi-analítica para este problema é baseado nas equações de conservação da densidade de corrente elétrica $\mathbf{J}(\mathbf{x})$ e na Lei de Ohm, que relaciona a corrente de condução induzida e o campo eletrostático $\mathbf{E}(\mathbf{x})$. As equações para os potenciais elétricos primário, secundário e no interior do cilindro são dadas pelas expressões

$$\begin{aligned}\psi^{(0)}(\mathbf{x}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\phi} \int_{-\infty}^{\infty} a_n(K_z) I_n(|K_z|\rho_{<}) K_n(|K_z|\rho_{>}) e^{iK_z \frac{dK_z}{2\pi}}, \\ \psi^{(int)}(\mathbf{x}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\phi} \int_{-\infty}^{\infty} b_n(K_z) I_n(|K_z|\rho) e^{iK_z \frac{dK_z}{2\pi}}, \quad \rho \leq b, \\ \psi^{(s)}(\mathbf{x}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\phi} \int_{-\infty}^{\infty} c_n(K_z) K_n(|K_z|\rho) e^{iK_z \frac{dK_z}{2\pi}}, \quad \rho \geq b.\end{aligned}\tag{5.1}$$

Os coeficientes a_n , b_n e c_n , assim como o desenvolvimento completo dessas soluções podem ser encontradas no apêndice A desta tese, na descrição dada por HOWARD (2013a).

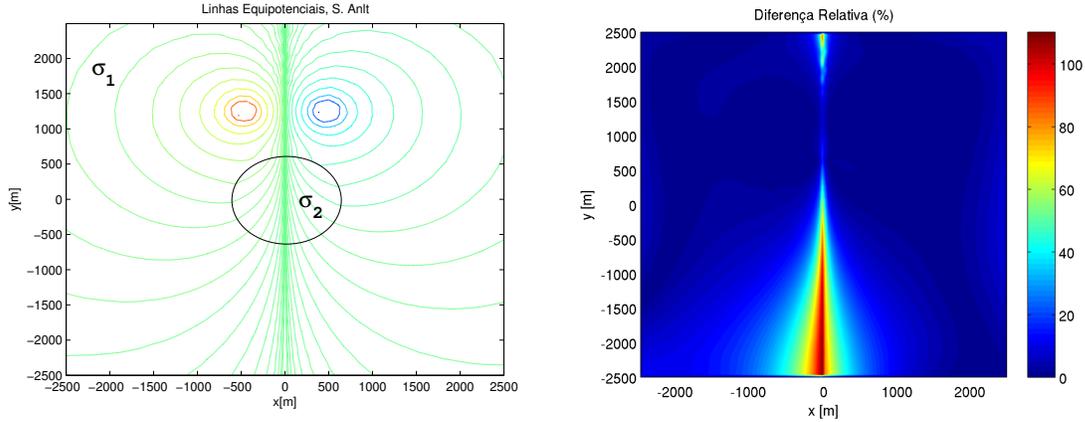


Figura 5.2: Representação das superfícies equipotenciais em modelo com cilindro condutivo em meio homogêneo, e a diferença relativa entre as soluções numérica e analítica do potencial elétrico total.

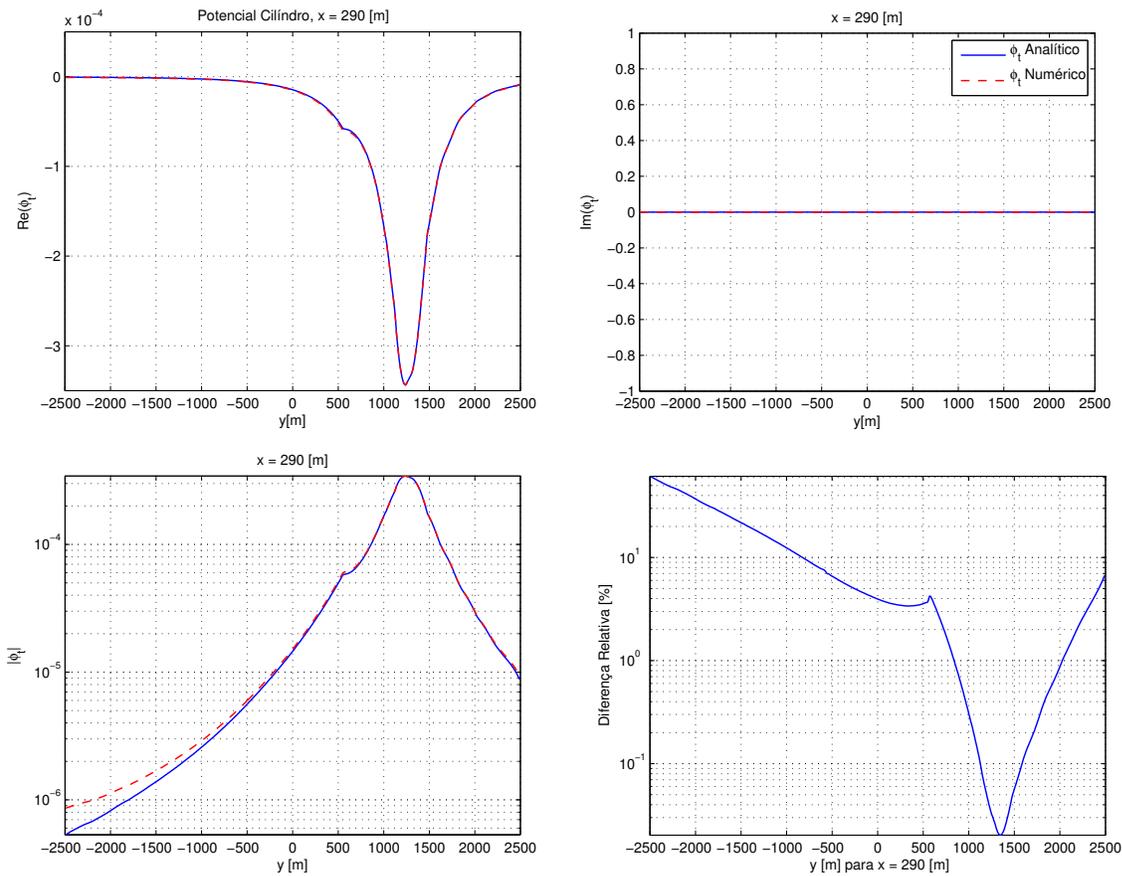


Figura 5.3: Comparação das soluções numérica e analítica do potencial elétrico total para o modelo com cilindro condutivo em meio homogêneo, considerando um valor fixo de $x = 290 \text{ m}$.

Através dos resultados da figura anterior, podemos analisar o desempenho do método RBF-DQ na resolução de equações parciais diferenciais, como as que aparecem na expressão do potencial elétrico escalar. A figura 5.3 compara a parte real das soluções numérica e semi-analítica assim como seus valores de magnitude, onde podemos notar um bom grau de concordância entre as soluções. A parte imaginária para este problema é nula. Assim como no método tradicional de Diferenças Finitas, a metodologia através das RBF's também possui um desempenho inferior quando a solução é calculada próximo dos limites do domínio, onde as derivadas são estimadas com menos precisão, devido à limitação imposta pelas bordas do grid, que prejudica na escolha dos pontos ao redor de onde se deseja a aproximação. O gráfico de dife-

rença relativa entre as soluções na figura 5.3 quantifica a aproximação entre ambas, indicando um desempenho bastante satisfatório do método. Na figura abaixo temos a solução numérica para o potencial secundário em todo o domínio do grid.

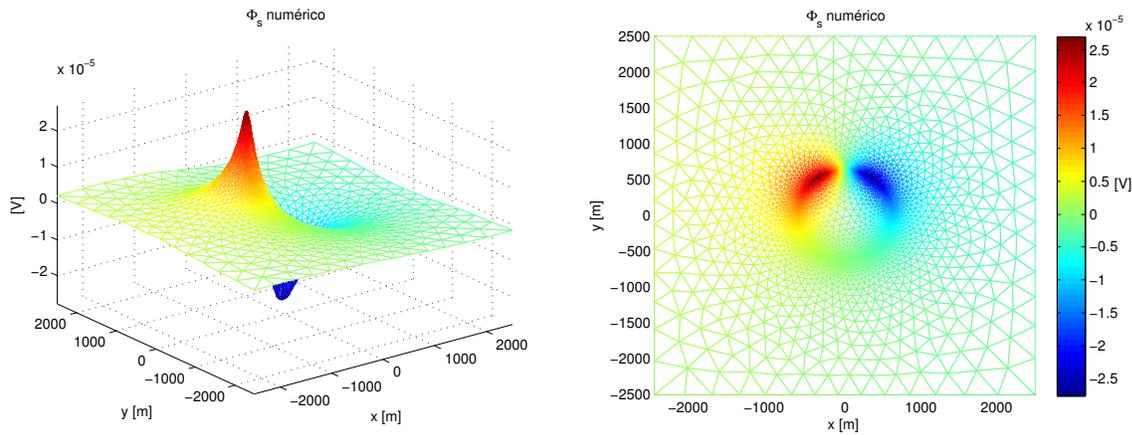


Figura 5.4: Solução numérica do potencial elétrico secundário para o modelo com cilindro condutivo em meio homogêneo vista por dois ângulos diferentes.

5.2 VALIDAÇÃO NUMÉRICA #4: DIPOLO ELÉTRICO PRÓXIMO A UMA SUPERFÍCIE CILÍNDRICA

Mostramos agora o resultado obtido com a modelagem utilizando o dipolo elétrico com o modelo condutivo do cilindro infinito em meio homogêneo. Posicionamos o dipolo próximo à superfície do cilindro, direcionado ao longo do eixo positivo y , o que excitará campos tanto nas direções horizontal quanto na vertical do grid. Comparamos as soluções numérica e analítica da componente *in line*¹ do campo elétrico E_y tomadas numa região paralela à direção do dipolo elétrico e também próxima

¹Chamamos de componente *in line* as medidas tomadas ao longo do eixo do dipolo elétrico, onde o campo é puramente radial.

ao cilindro. Este constitui um exemplo 2.5-D e a formulação eletromagnética completa é utilizada para a solução dos campos, isto é, teremos o acoplamento entre as componentes do vetor potencial magnético e o potencial escalar elétrico.

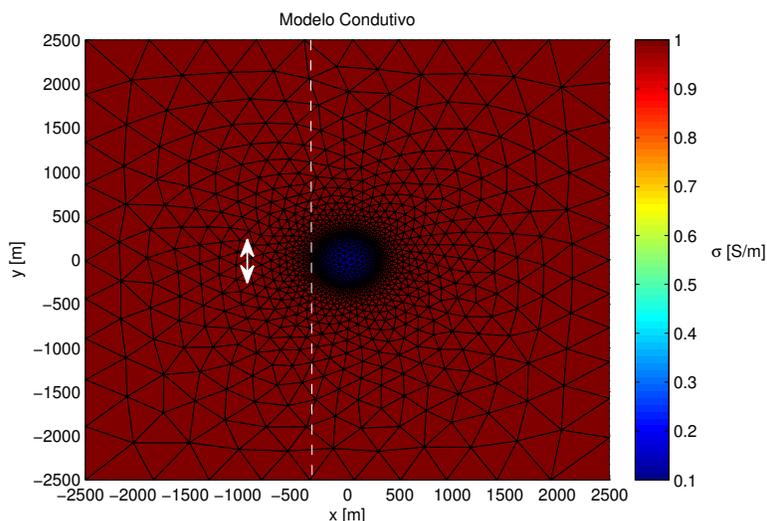


Figura 5.5: Modelo de condutividade para o problema do cilindro excitado por um DEH (seta dupla) em grid não-estruturado. A linha tracejada indica o local onde os campos foram tomados para comparação.

Neste exemplo, consideramos o modelo condutivo da figura acima, onde o raio do cilindro é de $300m$ e está localizado exatamente no centro do grid. A fonte eletromagnética opera na frequência de $1Hz$ e encontra-se aproximadamente a $1000m$ da superfície do cilindro. Para validação dos resultados, comparamos as soluções numéricas do campo elétrico secundário E_y ao longo do eixo y para um valor fixo de $x = -400m$, com a solução semi-analítica desse problema, cujo desenvolvimento é apresentado por HOWARD (2013b) e pode ser encontrado no apêndice B.

Assim como no procedimento numérico da seção 3.6, utilizamos a decomposição LU para o condicionamento da matriz esparsa que é gerada devido ao acoplamento dos potenciais calculados, e para a solução desses sistemas, adotamos, da mesma forma que anteriormente, o gradiente biconjugado, embora testes com outros *solvers*, em especial os que resolvem os sistemas de maneira direta, tenham indicado que é possível obtermos melhores resultados e de forma mais rápida, o

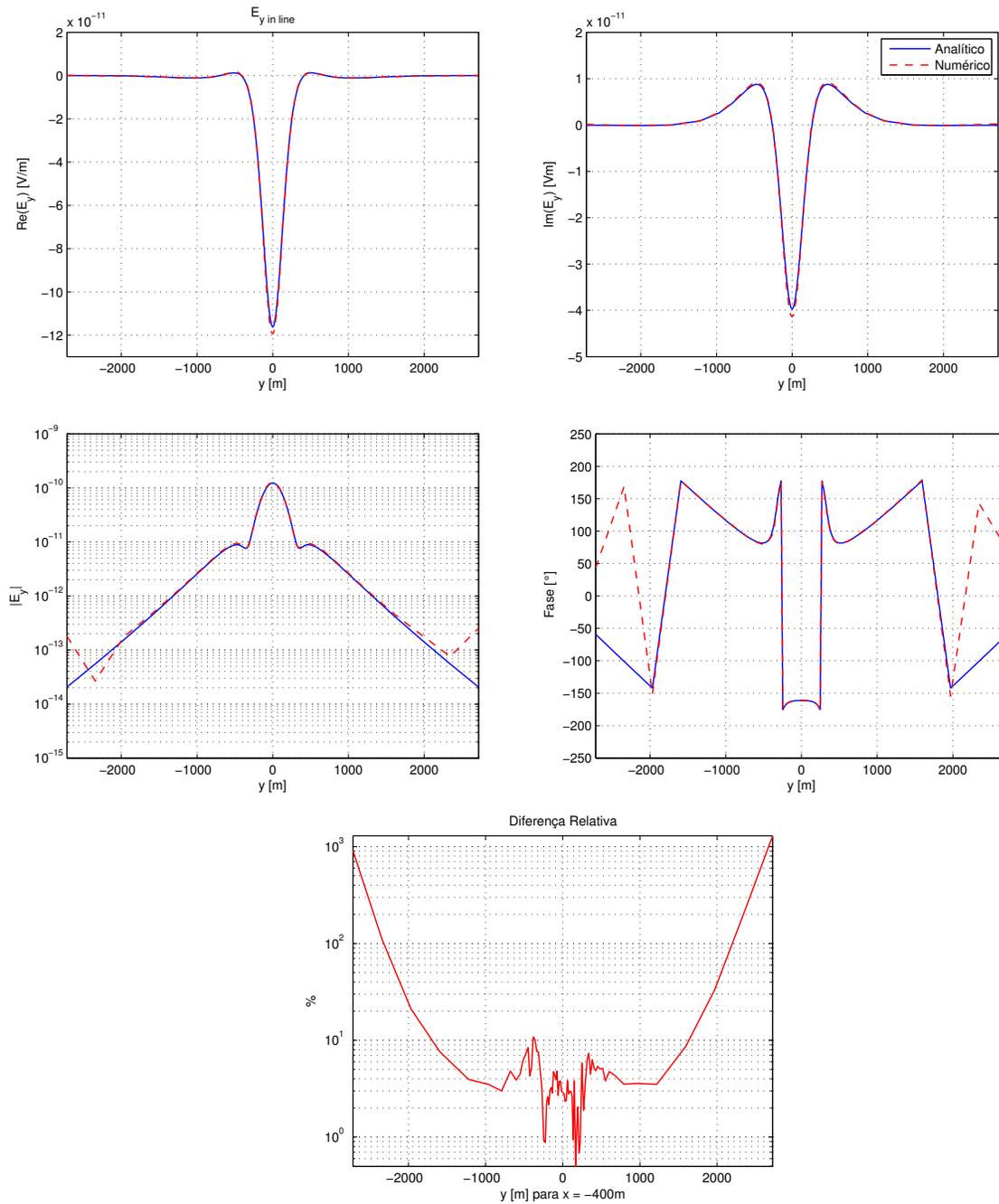


Figura 5.6: Comparação das soluções numérica e analítica da componente E_y do campo elétrico secundário para o modelo com cilindro condutivo em meio homogêneo.

que constitui um dos passos seguintes de nossa pesquisa. Comparamos novamente as componentes real e imaginária das soluções obtidas, assim como seus valores de magnitude, fase e diferença relativa entre ambas, como mostradas na figura 5.6. Ob-

servando a figura acima, notamos um elevado nível de concordância entre os gráficos de cada solução, exceto nas regiões próximas das bordas do domínio, devido às limitações em se aproximar as derivadas e pelo menor refinamento do grid nessas regiões. Adicionalmente, temos que, a formulação eletromagnética que utilizamos, nos dá as soluções numéricas dos potenciais escalar elétrico e vetor magnético, e para a obtenção do campo elétrico, precisamos associar esses dois potenciais através da expressão $E_y^{(s)}(y) = i\omega A_y^{(s)}(y) - \frac{\partial \phi_s(y)}{\partial y}$. Note que é necessário o cálculo da derivada do potencial escalar no segundo termo do lado direito da equação do campo E_y , e esse cálculo é feito numericamente pelas aproximações através do método RBF-DQ, utilizando o mesmo operador de primeira derivada já estimado para o cálculo dos potenciais. Vemos então que a tarefa de obtenção das componentes dos campos é mais delicada e suscetível aos erros de precisão provenientes das aproximações que adotamos, no entanto, obtivemos resultados bastante satisfatórios e consideravelmente superiores quando comparados com os obtidos através da técnica tradicional de diferenças finitas, como mostrado na figura 5.8, onde temos as soluções numéricas do campo E_y *in line* para um modelo semelhante ao descrito no exemplo anterior (figura 5.7), mas calculadas tanto no grid estruturado quanto no grid não-estruturado, plotadas juntamente com a solução semi-analítica deste problema.

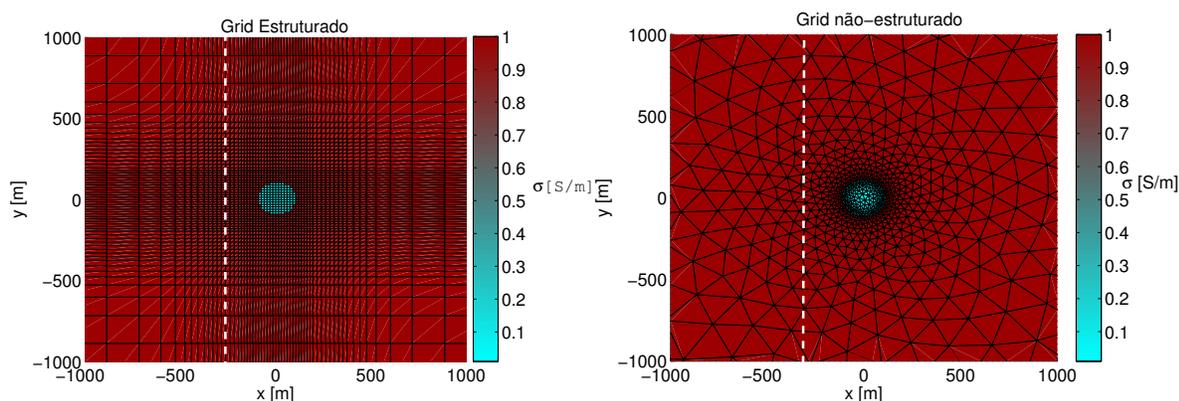


Figura 5.7: Modelos de condutividade para a comparação das soluções do campo elétrico calculadas nos grids estruturados e não-estruturados, para o problema do DEH próximo à superfície cilíndrica.

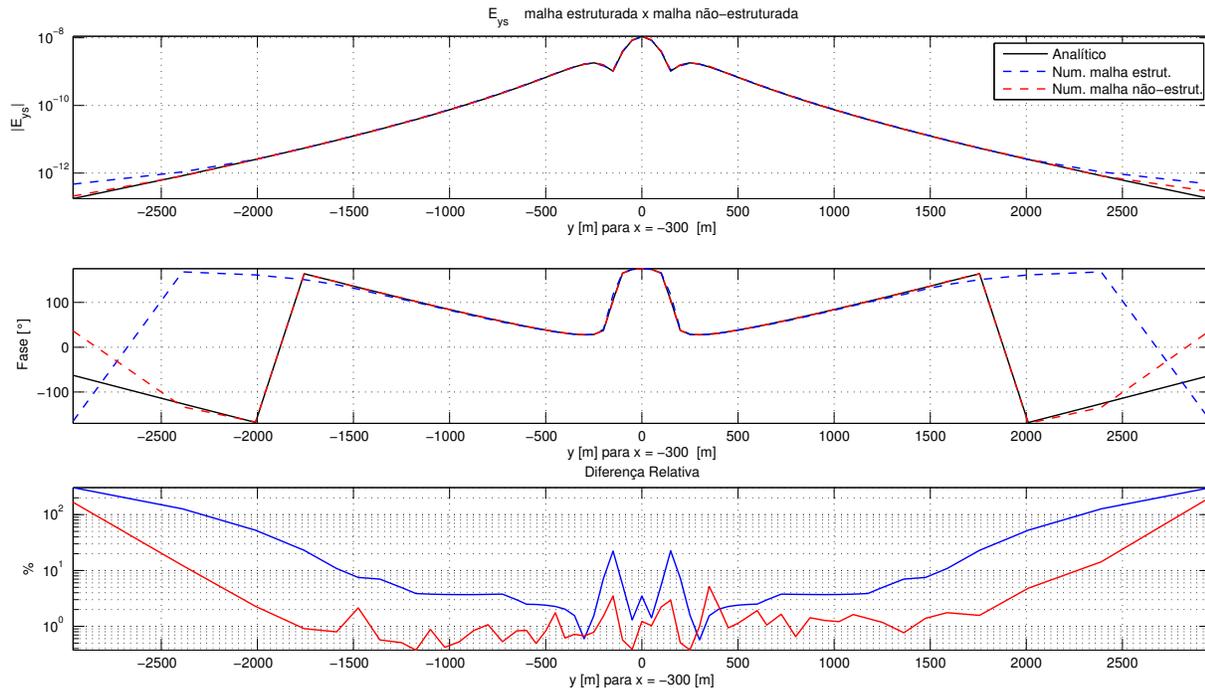


Figura 5.8: Soluções da componente E_y do campo elétrico total calculadas nos grids estruturado e não-estruturado, comparadas com a solução semi-analítica para DEH próximo à superfície cilíndrica.

Os resultados para o exemplo do dipolo elétrico em um meio 2-D são gerados através da resolução de um problema com um nível muito maior de complexidade, que depende do acoplamento de potenciais vetores e escalares, gerando um sistema linear extenso, com matrizes bastante esparsas cujo condicionamento é facilmente afetado pelos parâmetros do grid. No entanto, a implementação das malhas não-estruturadas aliada ao método RBF-DQ mostrou-se extremamente eficiente em sua tarefa, promovendo uma resolução com baixo custo computacional e bastante estável, dando-nos confiança para o aplicarmos em problemas mais práticos.

5.3 O MÉTODO mCSEM

Para exemplificarmos a aplicação de nossa metodologia em um problema geofísico real, apresentamos o mCSEM, que é o método de exploração geofísica no qual baseamos nossa pesquisa. Abaixo, é dada uma breve descrição e algumas referências sobre este método.

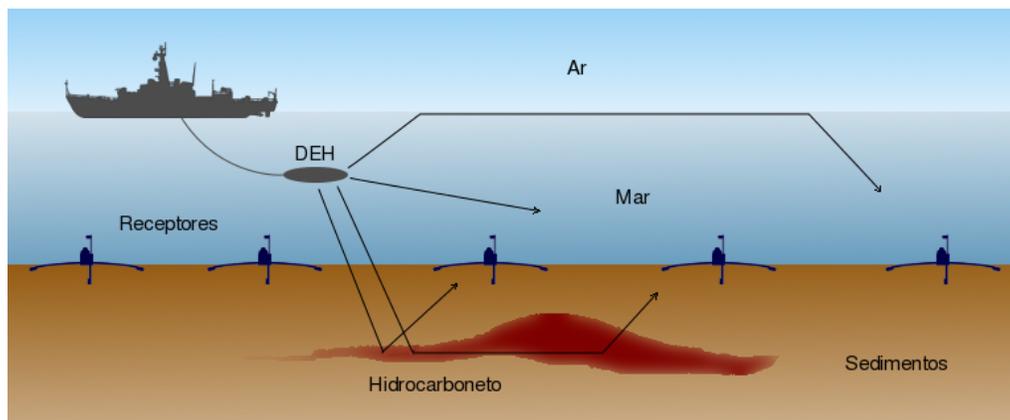


Figura 5.9: Esquema de levantamento geofísico através do método mCSEM.

O *marine controlled-source electromagnetic* (também conhecido como *Sea Bed Logging - SBL*), é uma técnica que pode ser utilizada na detecção e caracterização de hidrocarbonetos presentes em reservatórios localizados usualmente em regiões de águas profundas (EIDESMO et al., 2002). Consiste em uma fonte móvel do tipo dipolo elétrico horizontal, transportada próximo ao assoalho marinho no qual se encontra um arranjo de receptores de campos eletromagnéticos como mostra a figura 5.9. Outros tipos de fontes podem ser usadas, como o dipolo elétrico vertical ou o dipolo magnético horizontal, e.g. EDWARDS (2005), no entanto, o dipolo elétrico horizontal apresenta uma série de vantagens práticas e teóricas, sendo o tipo de fonte mais utilizada pela indústria atualmente (CONSTABLE; SRNKA, 2007). O dipolo transmissor emite um sinal de baixa frequência que se propaga tanto na água quanto nos sedimentos abaixo dela, sendo em seguida captado pelos receptores. A fase e a amplitude deste sinal dependem da condutividade elétrica do subsolo oceânico. A exploração através do mCSEM baseia-se no contraste de condutividade existente

entre o ambiente geológico marinho e os reservatórios saturados de hidrocarbonetos possivelmente presentes nesses locais.

Nos exemplos mostrados ao longo desta pesquisa, as configurações dos modelos condutivos, assim como a escolha das fontes eletromagnéticas e os regimes indutivos nos quais elas atuam, foram baseados nos procedimentos e nos ambientes relacionados ao mCSEM. Os dois exemplos a seguir, mostram como a utilização de malhas não-estruturadas pode contribuir na modelagem de certas características que podem estar presentes nos problemas envolvendo o mCSEM.

5.4 MODELAGEM mCSEM: CORPO RESISTIVO 2-D

Primeiramente, consideramos um modelo constituído por dois semi-espacos separados por uma interface plana, onde o meio superior representa o mar, de condutividade $3,33 S/m$, e o meio inferior representa os sedimentos sub-oceânicos, de condutividade $1 S/m$. Inserido nos sedimentos, temos a presença de um corpo bidimensional retangular, infinito na direção z representando um reservatório contendo hidrocarbonetos, a uma profundidade de $1000 m$ em relação ao fundo do oceano, e resistividade $0.01 S/m$, com dimensões conforme mostrados no esquema da figura 5.10.

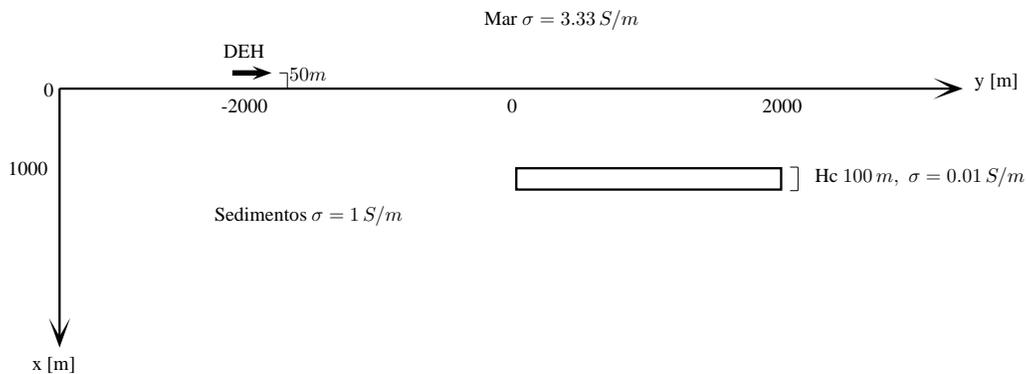


Figura 5.10: Esquema do modelo mCSEM com corpo resistivo 2-D.

Seguindo a configuração de modelo do mCSEM, temos um dipolo elétrico hori-

zontal a uma distância de 50 m do fundo oceânico operando numa frequência que normalmente varia de 0.25 Hz a 1 Hz . Consideramos o mar bastante profundo, de forma que os efeitos causados pela interação dos campos incidentes com a interface entre o mar e o ar possam ser desprezados. Em problemas onde temos a camada oceânica menos profunda, o resultado dessa interação é um campo que se difunde em direção ao fundo oceânico, excitando as estruturas ali presentes, principalmente nas regiões de maior offset, onde os dados obtidos podem apresentar bastante alterações. Este efeito é comumente chamado de *Airwave*, e sua intensidade depende da profundidade e da condutividade elétrica do oceano, assim como da frequência da fonte. Entretanto, em MIRANDA; REGIS (2012), é mostrado que em profundidades oceânicas superiores a 2000 m , a influência da *Airwave* nos levantamentos do mCSEM pode ser considerada desprezível, mesmo nos dados de maiores offsets.

A figura 5.11 apresenta duas malhas, as quais foram utilizadas para o cálculo da solução deste problema. A da esquerda é a malha não-estruturada, utilizada na solução obtida através do método RBF-DQ que queremos avaliar, e a da direita é a malha estruturada com elementos triangulares usada pelo método de elementos finitos, o qual também utilizamos para o cálculo da solução deste problema.

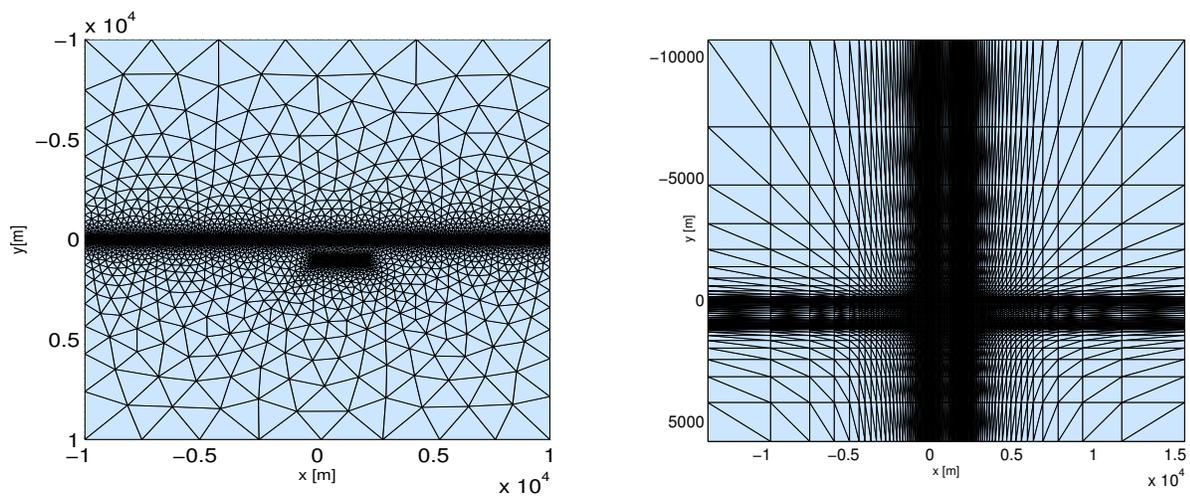


Figura 5.11: Malhas usadas pelo método RBF-DQ e pelo método de Elementos Finitos respectivamente, para a modelagem do mCSEM 2.5-D. A malha não-estruturada (esquerda) é composta por 4.400 nós e a malha estruturada (direita) composta por 14.700 nós.

Na figura 5.12 temos a comparação das soluções da componente *in line* do campo elétrico secundário E_y tomadas no fundo oceânico e calculadas através de dois métodos diferentes, o método RBF-DQ e o método de Elementos Finitos em malha estruturada e não-uniforme. Chamamos de background o resultado obtido para o modelo sem o corpo resistivo. Comparamos magnitude e fase das soluções, onde podemos observar boa concordância entre os resultados para o modelo com o corpo resistivo, indicando que o método RBF-DQ é adequado para a modelagem do mCSEM em tais condições. Os resultados do campo elétrico para esse modelo são bastante comuns na literatura e também são uma boa forma de validarmos o nosso código. Os resultados obtidos com o método de Elementos Finitos podem ser obtidos, por exemplo, através de LI; KEY (2007).

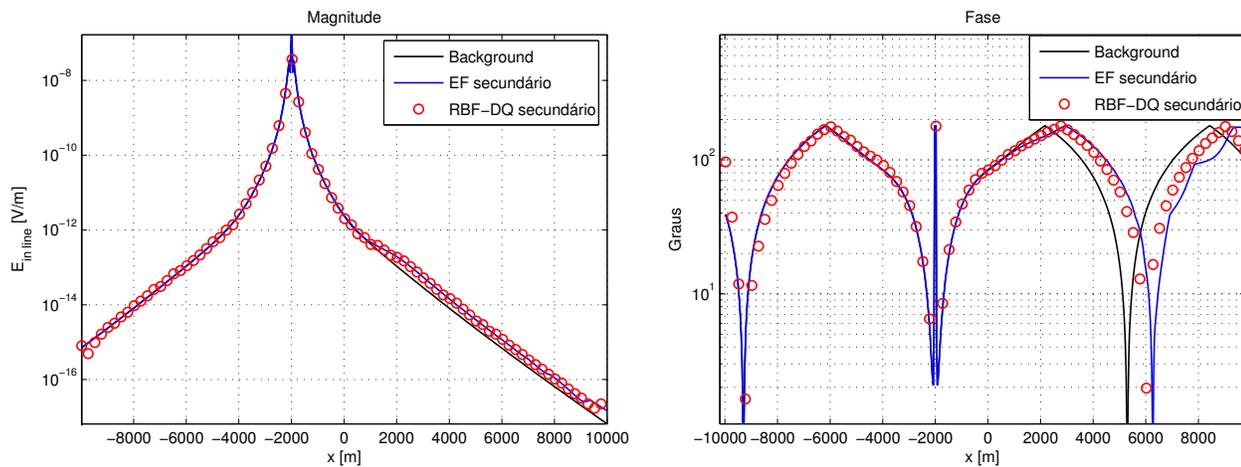


Figura 5.12: Comparação de magnitude e fase da componente E_y do campo elétrico secundário obtidos através do método RBF-DQ e do método de Elementos Finitos para modelo do mCSEM 2.5-D.

Adicionalmente, apresentamos os resultados para o campo elétrico quando utilizamos um modelo composto por mais de uma camada, como mostrado na figura 5.13. Neste exemplo, testamos a sensibilidade do método RBF-DQ para um corpo resistivo localizado em um meio de camadas, sendo uma delas com resistividade igual ao do corpo. A fonte eletromagnética permaneceu com as mesmas configurações do exemplo anterior. As figuras a seguir mostram os modelos condutivos usados e os

resultados para magnitude e fase do campo elétrico secundário nas diferentes configurações de modelo, sendo o modelo de background constituído apenas de dois meios eletricamente heterogêneos e sem o corpo bidimensional.

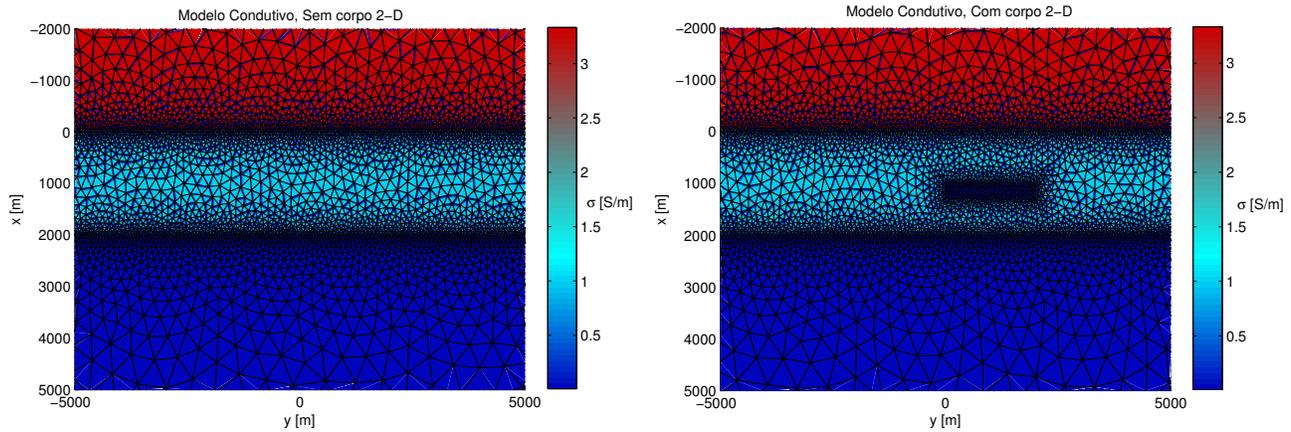


Figura 5.13: Modelos condutivos para o problema do mCSEM sem corpo bidimensional (esquerda) e corpo bidimensional (direita) em meio com mais de uma camada, plotados na malha não-estruturada.

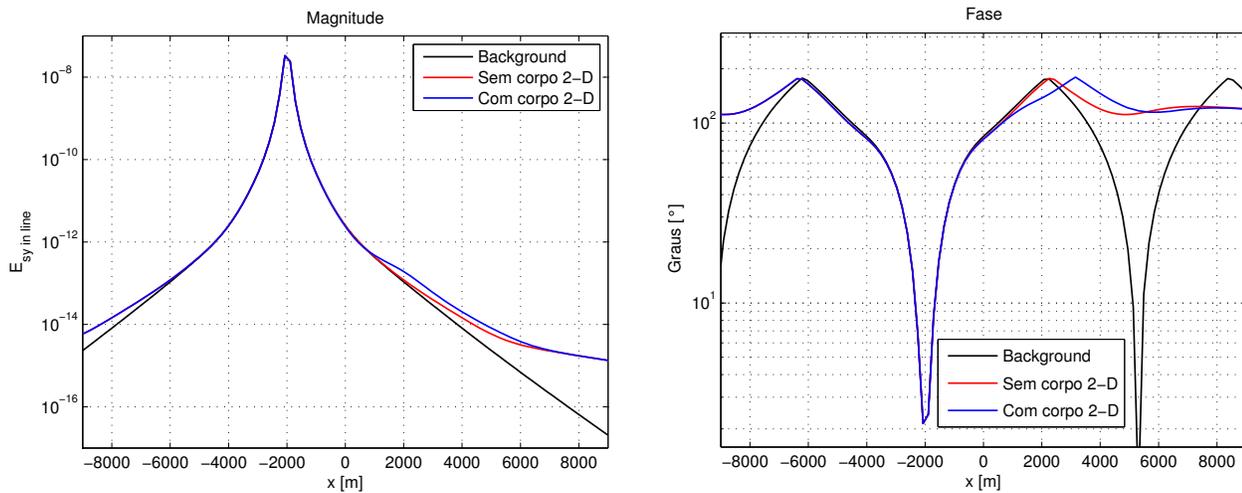


Figura 5.14: Comparação de magnitude e fase da componente E_y do campo elétrico secundário obtidos através do método RBF-DQ para o modelo mCSEM 2.5-D em um meio estratificado.

Ainda considerando o modelo para mCSEM com corpo resistivo 2-D, avaliamos agora a influência do formato deste corpo na solução do campo elétrico. Para isso,

utilizamos os modelos condutivos da figura 5.15, onde temos a mudança no formato do reservatório de um modelo para o outro, passando de um corpo retangular para um corpo elíptico, ambos com dimensões aproximadas. A representação de reservatórios de hidrocarbonetos através de geometrias retangulares parece pouco realista, além de promover possíveis alterações nos campos, fazendo com que distoem das respostas obtidas no procedimento exploratório. O uso das malhas não-estruturadas torna possível o delineamento mais curvilíneo dos reservatórios, o que pode gerar uma melhora na qualidade dos dados modelados.

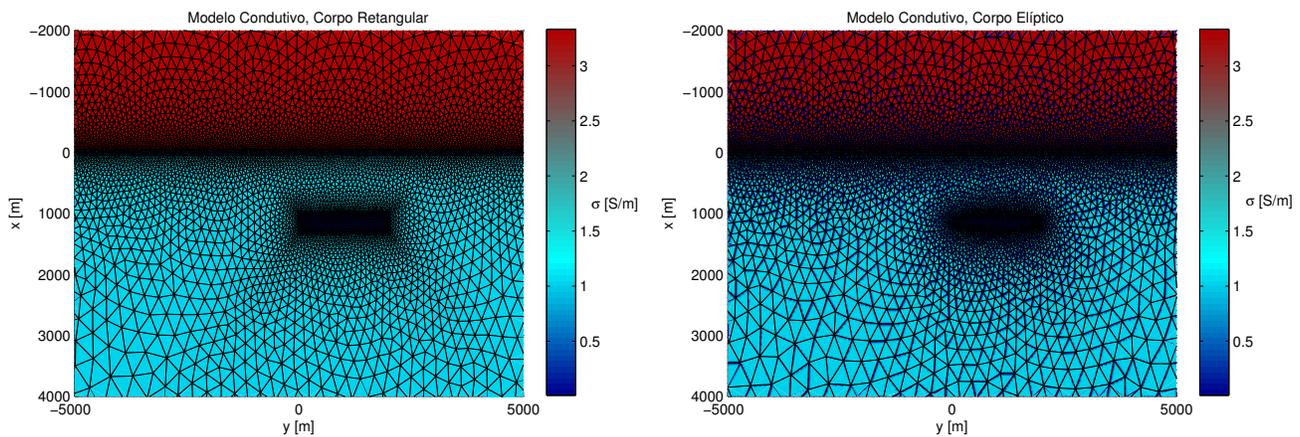


Figura 5.15: Modelos condutivos para o problema do mCSEM 2.5-D com corpo retangular (esquerda) e corpo elíptico (direita), plotados na malha não-estruturada.

A figura 5.16 mostra os resultados obtidos para os modelos com corpo retangular e corpo elíptico, os quais encontram-se a 1000 m abaixo de fundo oceânico. Os dois corpos possuem uma largura máxima de 2000 m e altura máxima de 300 m (para o corpo elíptico, esses valores correspondem respectivamente aos eixos maior e menor da elipse). Nesta primeira situação, consideramos um dipolo elétrico operando a uma frequência de 0.25 Hz posicionado a 50 m acima do fundo oceânico na coordenada $y = -2000\text{ m}$. Como referência, é mostrado também o resultado para o modelo de background, caracterizado pela ausência do reservatório. No gráfico de magnitude, podemos notar uma leve discrepância entre as curvas correspondentes aos corpos retangular e elíptico exatamente na região onde os receptores encontram-

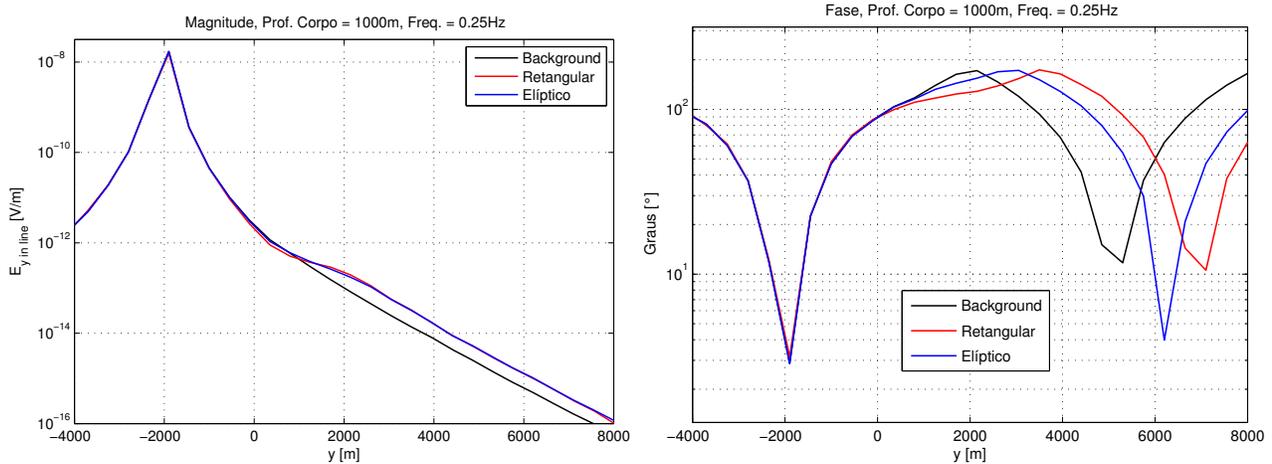


Figura 5.16: Comparação das magnitudes e fases da componente E_y do campo elétrico secundário obtidos através do método RBF-DQ para modelo do mCSEM 2.5-D considerando variação no formato do corpo resistivo a uma frequência de 0.25 Hz da fonte transmissora.

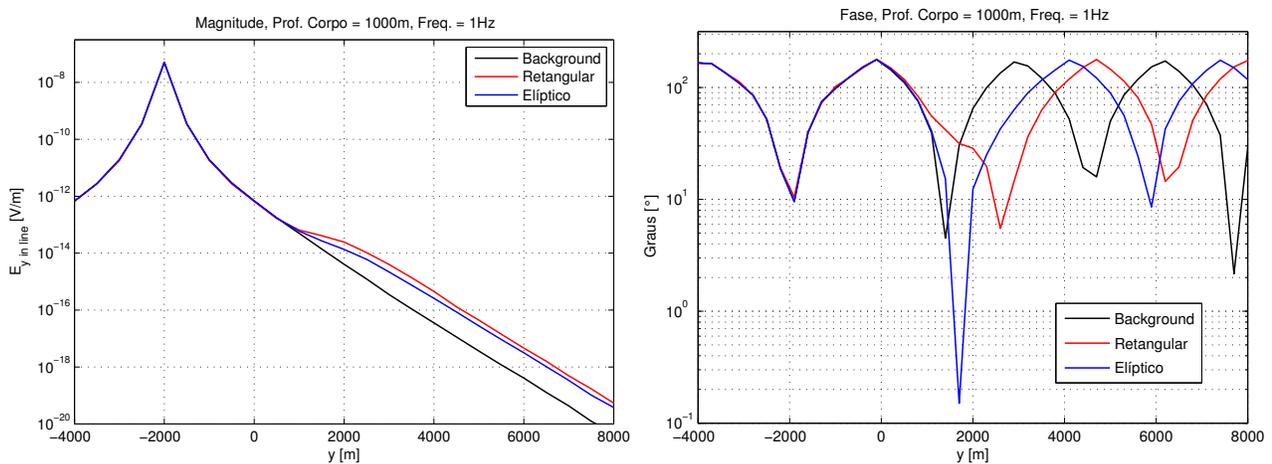


Figura 5.17: Comparação das magnitudes e fases da componente E_y do campo elétrico secundário obtidos através do método RBF-DQ para modelo do mCSEM 2.5-D considerando variação no formato do corpo resistivo a uma frequência de 1 Hz da fonte transmissora.

se sobre o corpo resistivo. Entretanto, essa diferença parece ser pouco relevante quando comparada aos resultados do gráfico de fase, onde a diferença entre as curvas desses modelos é bastante notável. Já a figura 5.17 mostra os resultados para esses mesmos modelos, mas com a fonte transmissora operando a uma frequência de 1 Hz . Nesse exemplo, podemos observar diferenças bastante relevantes entre as curvas dos modelos, tanto no gráfico de magnitude quanto no de fase. No gráfico de magnitude, temos uma maior amplitude do campo relacionado ao modelo com

corpo retangular em comparação com as outras curvas, e no gráfico de fase, podemos observar uma diferença mais marcante entre as curvas, quando comparadas com as do exemplo anterior, quando usamos a frequência de 0.25 Hz . Isso indica que aproximações mais grosseiras no formato dos corpos pode causar perda de informação relevante no procedimento de modelagem.

5.5 MODELAGEM mCSEM: BATIMETRIA

A variação da topografia do fundo oceânico é algo que afeta bastante os dados obtidos com levantamentos usando o mCSEM, devido ao grande contraste entre as condutividades da água do mar e dos sedimentos abaixo dela. Modelamos a resposta do campo elétrico em modelo batimétrico 2-D usando nossa metodologia com malha não-estruturada e comparamos os resultados com os obtidos utilizando a técnica tradicional de diferenças finitas com malha estruturada. O nível de influência dos efeitos da batimetria depende de vários fatores, como por exemplo, a frequência de transmissão da fonte eletromagnética, a condutividade dos sedimentos sub-oceânicos, a geometria entre fonte e receptor, e naturalmente, o grau de suavidade dessa batimetria (LI; CONSTABLE, 2007). Entretanto, queremos avaliar aqui apenas os possíveis efeitos que podem ocorrer com o uso de malhas não-estruturadas no delineamento das estruturas batimétricas. Para isso usamos os modelos simplificados da figura 5.18 para obtenção das soluções do campo elétrico secundário, que mostram como definimos a superfície batimétrica em termos da condutividade elétrica nos grids estruturado e não-estruturado respectivamente. Consideramos uma elevação de 400 m do fundo oceânico entre 0 e 1000 m na direção y , e posicionamos o dipolo elétrico a uma distância de 100 m acima do fundo oceânico, em $y = -500 \text{ m}$. As figuras 5.19 e 5.20 mostram os resultados da modelagem da componente E_y do campo secundário *in line* para o modelo do grid estruturado e não-estruturado. Consideramos a solução do campo E_y secundário em modelo sem batimetria como referência, caracterizado por uma interface plana entre mar e sedimentos ao longo

da coordenada $x = 0$, a qual é plotada também em cada gráfico de 5.19 e 5.20.

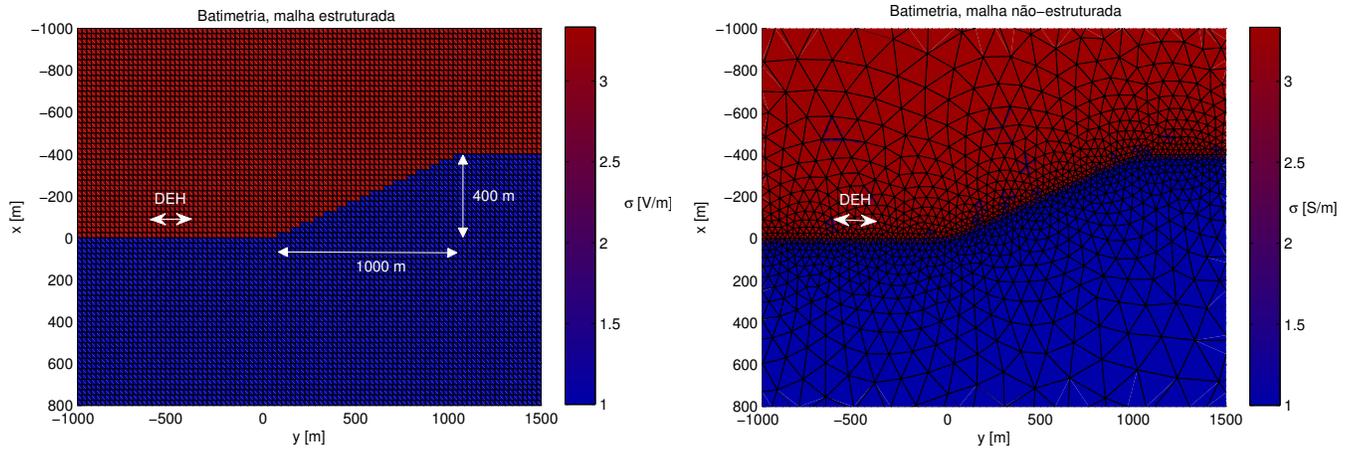


Figura 5.18: Modelos condutivos para o problema com batimetria, definidos nas malhas estruturadas (esquerda) e não-estruturada (direita).

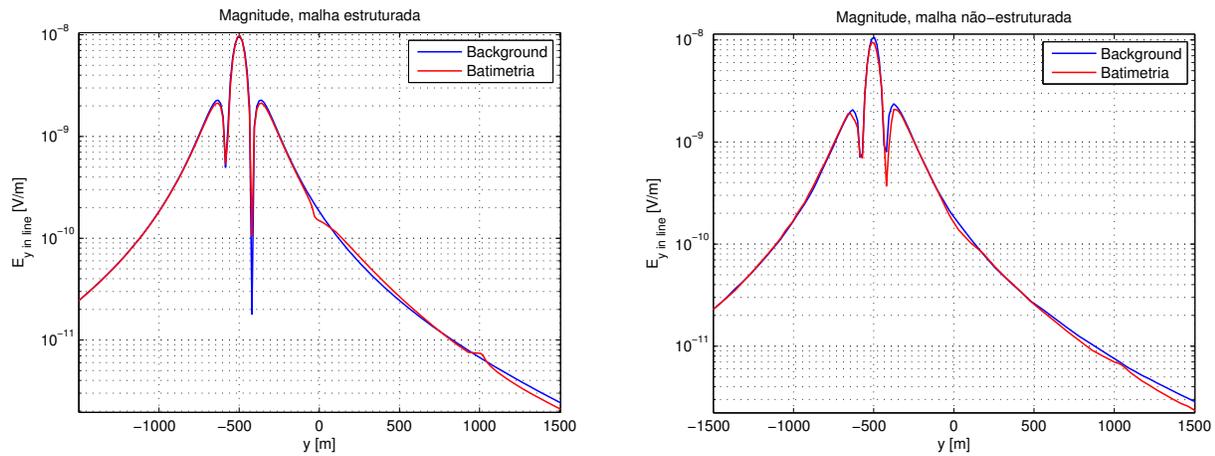


Figura 5.19: Magnitudes do campo secundário E_y para modelos com e sem batimetria na malha estruturada (esquerda) e na malha não-estruturada (direita).

Na figura 5.19, temos a comparação das magnitudes dos campos calculados para os modelos descritos nos dois tipos de malhas. Observando as curvas dos modelos batimétricos, podemos notar que a influência da batimetria se dá com maior intensidade nas regiões onde temos mudança na inclinação do fundo oceânico. Nesses pontos, observamos uma considerável variação da magnitude nos dois modelos, entretanto, essa variação é substancialmente maior e mais aguda na curva referente

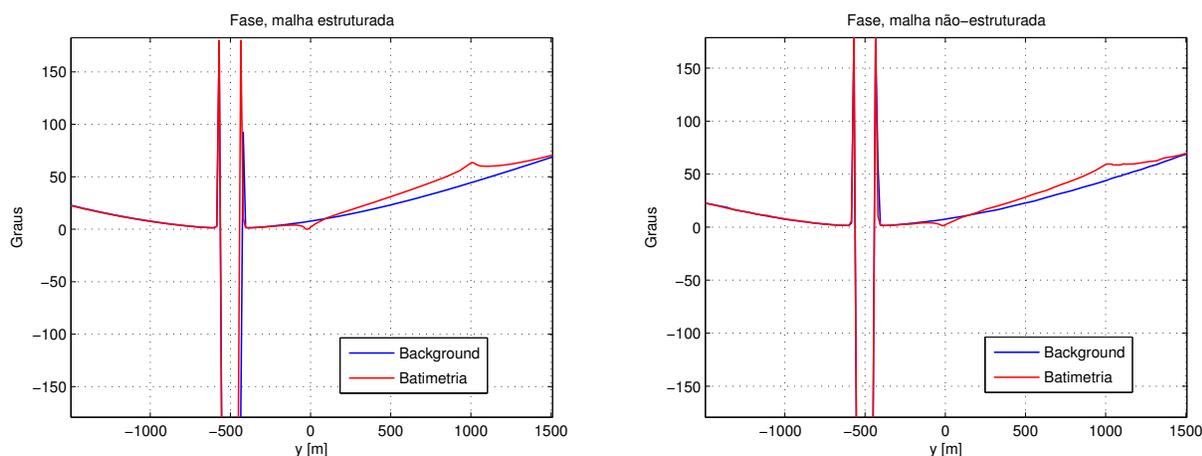


Figura 5.20: Fases do campo secundário E_y para modelos com e sem batimetria na malha estruturada (esquerda) e na malha não-estruturada (direita).

à malha estruturada, enquanto que na curva referente à malha não-estruturada, como podíamos esperar, essa transição é mais suave e em nenhum ponto ultrapassa o valor de magnitude da curva de referência, o que é bastante coerente, pois as soluções mostradas foram tomadas nas mesmas abscissas, fazendo com que pontos posicionados sobre a inclinação estejam mais distantes da fonte transmissora do que os pontos sobre o fundo plano. Já a figura 5.20 faz o mesmo tipo de comparação que a figura anterior, mas considerando a fase desses campos. Os resultados nos mostram que, apesar de ser bastante distinguível o efeito da batimetria, não há diferenças relevantes nas fases desses campos que possam ser atribuídas ao uso de grids diferentes.

Um aspecto importante que deve ser levado em conta é que, nos levantamentos do mCSEM, os receptores encontram-se depositados no fundo do oceano, e portanto, estão sujeitos à inclinação causada pela batimetria local. Se um receptor encontra-se numa região sem batimetria, ele medirá as componentes horizontais do campo elétrico. Mas se ele estiver na região com batimetria, ele medirá as componentes do campo elétrico ao longo da inclinação ($E_{||}$). Em outras palavras, os receptores que se encontram sobre a região com batimetria medirão componentes verticais desse campo. Dessa forma, a componente horizontal medida pelo receptor em modelo

com batimetria é dada por

$$E_{||} = E_y \cos\phi + E_x \sen\phi, \quad (5.2)$$

sendo ϕ o ângulo de inclinação do receptor com respeito ao eixo y . Então, a componente horizontal medida pelos receptores em modelos com batimetria, não representa necessariamente a componente E_y , uma vez que o resultado sofre influência da componente E_x , e esta também sofre influência da batimetria.

Temos ainda que, na malha estruturada, os receptores sobre a região com batimetria vão apresentar exatamente o mesmo ângulo de inclinação, uma vez que a inclinação se dá de forma abrupta e imediata para todos os pontos dessa região. Já na malha não-estruturada, o valor de ϕ varia gradualmente, seguindo a inclinação mais suavizada e não abrupta da batimetria, o que também justifica a característica mais suave do efeito da batimetria nesses modelos. A figura 5.21 mostra a variação do ângulo ϕ dos receptores ao longo do fundo oceânico para os modelos utilizados nesta seção.

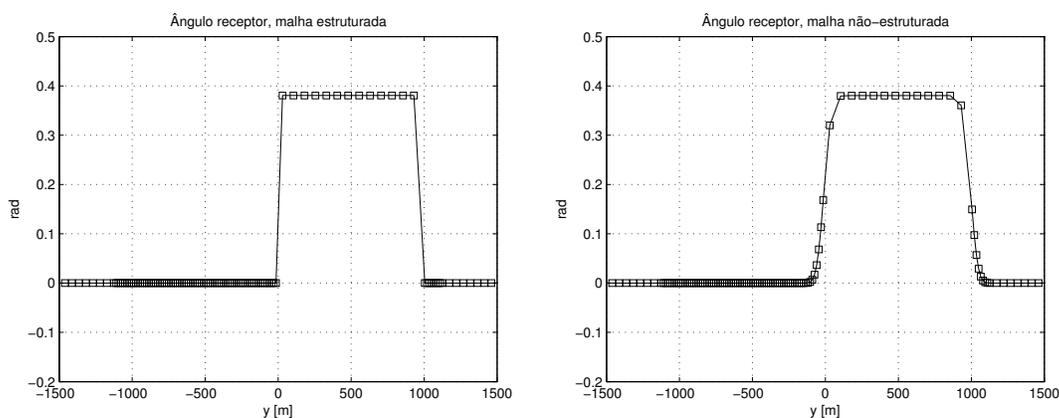


Figura 5.21: Variação do ângulo ϕ dos receptores ao longo do fundo oceânico para os modelos com malha estruturada (esquerda) e malha não-estruturada (direita).

Os nossos resultados mostraram que as diferenças observadas nas curvas dos campos devido à utilização dos dois tipo de malhas aumentam de acordo com o aumento do ângulo de inclinação da batimetria e portanto devem ser levadas em

consideração na interpretação dos dados modelados, principalmente em situações onde a batimetria é mais acentuada.

6 CONCLUSÕES E CONSIDERAÇÕES

Neste trabalho, apresentamos o desenvolvimento utilizado para a modelagem numérica das componentes do campo elétrico gerado por uma fonte transmissora do tipo dipolo elétrico em ambientes condutivos. Partimos da definição dos potenciais vetor magnético e escalar elétrico, e utilizando a separação dos sinais primário e secundário e as suas transformadas de Fourier relativas à direção onde a propriedade física do meio é invariante, obtivemos as equações diferenciais parciais que governam o comportamento dos campos no modelo 2.5-D.

Utilizamos o método de Diferenças Finitas para a estimativa dos potenciais, assim como dos campos os quais queremos avaliar, sendo necessária para isso uma completa discretização do domínio estudado, o que resulta em grandes sistemas lineares esparsos e acoplados. Testamos o uso de métodos iterativos para a resolução desses sistemas, passando primeiramente pelo método do gradiente conjugado, e em seguida pelo método do gradiente biconjugado que mostrou-se mais adequado em nossos problemas.

O pré-condicionamento das matrizes dos sistemas contribuiu para uma melhor convergência das soluções. Dentre os pré-condicionadores testados, a decomposição LU mostrou o melhor desempenho. A eficiência de um determinado pré-condicionador pode variar bastante de um problema para outro, e isso precisou ser tratado com atenção dentro da nossa pesquisa. O ajuste adequado dos parâmetros de construção dos pré-condicionadores é de extrema importância para o uso de métodos iterativos, o que foi constatado nos exemplos que executamos, diminuindo drasticamente a quantidade de iterações para a convergência das soluções.

O método tradicional de Diferenças Finitas, o qual faz uso de malhas estruturadas, mostrou certa limitação quando aplicado em problemas de geometrias mais

complexas, mais precisamente na tarefa de delineamento de estruturas irregulares e curvilíneas. Em virtude disso, introduzimos o uso das malhas não-estruturadas, que aliado à implementação relativamente simples do método de Diferenças Finitas, promoveu uma significativa melhora na qualidade dos nossos resultados. A utilização da técnica de aproximação de funções através do uso de funções de base radial junto à técnica de quadraturas diferenciais, mostrou-se extremamente eficaz na estimativa das derivadas numéricas dentro do nosso problema. Avaliamos a eficiência deste procedimento através dos resultados obtidos quando o utilizamos junto à nossa formulação eletromagnética, na resolução de problemas de modelagem geofísica. Analisamos a componente horizontal *in line* da resposta do campo elétrico em modelos condutivos de geometria cilíndrica e a comparamos com as soluções semi-analíticas que desenvolvemos para estes problemas. Os resultados mostraram-se bastante satisfatórios e superiores aos obtidos com o procedimento através de malhas estruturadas.

Por fim, avaliamos o desempenho de nosso método em problemas voltados à modelagem do mCSEM. Nossos exemplos mostraram que a mudança na discretização dos domínios pode afetar a resposta adquirida nos receptores. O uso das malhas não-estruturadas permitiu um delineamento menos grosseiro das estruturas presentes nos modelos do mCSEM, promovendo mudanças significativas nos campos observados. Esses resultados indicam que o método que apresentamos para a modelagem eletromagnética nesses ambientes, pode melhorar a qualidade dos dados coletados, contribuindo na sua interpretação.

Alguns desenvolvimentos que podem seguir a partir desta pesquisa incluem a utilização de modelos condutivos mais complexos, como os utilizados na modelagem do mCSEM em meios com várias camadas sedimentares, heterogeneidades irregulares, presença da *Airwave* com a utilização de modelos contendo a camada de ar, e ainda anisotropia e inversão. Para a inclusão da *Airwave*, e ao mesmo tempo reduzir a quantidade de pontos requeridos no grid, uma possível extensão seria a implementação de alguma forma de condição de fronteira absorvente, repre-

sentadas por exemplo pelas “*Absorbing Boundary Conditions*” e pelas “*Perfectly Matched Layers*” (CHEW; JIN; MICHIELSEN, 1997). Podemos citar também a extensão para problemas tridimensionais, para a qual se tornam necessárias algumas mudanças na formulação eletromagnética que apresentamos, como por exemplo, a ausência da transformada de Fourier dos potenciais auxiliares. Entretanto, essa abordagem pode facilmente ser incorporada pela nossa metodologia de estimativa de derivadas associada às malhas não-estruturadas.

REFERÊNCIAS

- ABRAMOWITZ, M.; STEGUN, I. A. **Handbook of Mathematical Functions:** with formulas, graphs, and mathematical tables. [S.l.]: Courier Dover Publications, 1964. p.375.
- ALLERS, A.; SEZGINER, A.; DRUSKIN, V. L. Solution of 2.5 dimensional problems using the Lanczos Decomposition. **Radio Science**, [S.l.], v.29, n.4, p.955–963, 1994.
- ALUMBAUGH, D. L.; NEWMAN, G. A.; PREVOST, L.; SHADID, J. N. Three-dimensional wideband electromagnetic modeling on massively parallel computers. **Radio Science**, [S.l.], v.43, p.1–23, 1996.
- BARRETT, R.; BERRY, M.; CHAN, T. F.; DEMMEL, J.; DONATO, J.; DONGARRA, J.; EIJKHOUT, V.; POZO, R.; ROMINE, C.; VORST, H. Van der. **Templates for the Solution of Linear Systems:** building blocks for iterative methods. 2nd.ed. Philadelphia, PA.: SIAM, 1994.
- BENZI, M. Preconditioning Techniques for Large Linear Systems: a survey. **Journal of Computational Physics**, [S.l.], v.182, p.418–477, 2002.
- CHAMPAGNE II, N. J.; BERRYMAN, J. G.; BUETTNER, H. M. FDFD: a 3d finite-difference frequency-domain code for electromagnetic induction tomography. **Journal of Computational Physics**, [S.l.], v.170, p.830–848, 2001.
- CHEN, K. **Matrix Preconditioning Techniques and Applications.** New York.
- CHENEY, W.; KINCAID, D. **Numerical Mathematics and Computing.** 6th.ed. [S.l.]: Brooks/Cole: Cengage Learning, 2008. 763p.
- CHEW, W. C. **Waves and Fields in Inhomogeneous Media.** New York: IEEE Press, 1995.
- CHEW, W. C.; JIN, J. M.; MICHIELSSEN, E. Complex Coordinate Stretching as a generalized Absorbing Boundary Condition. **Microwave and Optical Technology letters**, [S.l.], v.15, p.6, 1997.
- CIARLET, P. G.; RAVIAT, P. A. General Lagrange and Hermite Interpolation in R_n with Applications to Finite Element Methods. **Archive for Rational Mechanics and Analysis**, [S.l.], v.46, p.177–199, 1972.

- CONSTABLE, S.; SRNKA, L. J. An introduction to marine controlled-source electromagnetic methods for hydrocarbon exploration. **Geophysics**, [S.l.], v.72, p.WA3–WA12, 2007.
- EDWARDS, R. N. Marine controlled source electromagnetics: principles, methodologies, future commercial applications: surveys in geophysics. **Surveys in Geophysics**, [S.l.], v.26, p.675–700, 2005.
- EIDESMO, T.; ELLINGSRUND, S.; MACGREGOR, L. M.; CONSTABLE, S.; SINHA, M. C.; JOHANSEN, S.; KONG, F. N.; WESTERDAHL, H. Sea Bed Logging (SBL), a new method for remote and direct identification of hydrocarbon filled layers in deepwater areas. **First Break**, [S.l.], v.20, p.144–152, 2002.
- FASSHAUER, G. E.; ZHANG, J. G. **On Choosing “Optimal” Shape Parameters for RBF Approximation**. [S.l.]: Illinois Institute of Technology, 2000.
- FERNANDEZ, F. A.; KULAS, L. **A simple finite difference approach using unstructured meshes from fem mesh generators**. 2004.
- FORNBERG, B. Numerical Differentiation of Analytic Functions. **ACM Transactions on Mathematical Software**, [S.l.], v.7, p.512–526, 1981.
- FORNBERG, B.; FLYER, N. Accuracy of radial basis function interpolation and derivative approximations on 1-D infinite grids. **Advances in Computational Mathematics**, [S.l.], v.23, p.5–20, 2005.
- FRANKE, A.; BORNER, R.; SPITZER, K. **2d Finite Element Modelling Of Plane-wave Diffusive Time-harmonic Electromagnetic Fields Using Adaptive Unstructured Grid**. 2004.
- GASCA, M.; MAEZTU, J. I. On Lagrange and Hermite Interpolation in Rk. **Numerische Mathematik**, [S.l.], v.39, p.1–14, 1982.
- GIANZERO, S. Effect of Sonde Eccentricity. **IEEE Trans. on Geoscience Electronics**, **GE-16**, [S.l.], v.4, p.332–39, 1988.
- GREENBAUM, A. **Iterative Methods for Solving Linear Systems**. Philadelphia, PA: SIAM, 1997.
- HARDY, L. R. Multiquadric Equations of Topography and other irregular surfaces. **Journal of Geophysical Research**, [S.l.], v.76, p.1905–1915, 1971.
- HOWARD, A. Q. **Electromagnetic Methods in Applied Geophysics**. [S.l.: s.n.], 2011. Universidade Federal do Pará.
- HOWARD, A. Q. **Galvanic Resistivity Model for Cylindrical Anomaly**. [S.l.]: Universidade Federal do Pará, 2013.

- HOWARD, A. Q. **Electric Dipole Tensor Scattering from a Finitely Conducting Cylinder**. [S.l.]: Universidade Federal do Pará, 2013.
- HOWARD, A. Q.; CHEW, W. Electromagnetic Borehole Fields in a Layered, Dipping Bed Environment with Invasion. **Geophysics**, [S.l.], v.57, p.451–465, 1992.
- HOWARD, A. Q.; SILVA, V. da. Complex plane integration in the modelling of electromagnetic fields in layered media: part 2. pole location. **Journal of Geophysics and Engineering**, [S.l.], v.11, p.1–12, 2014.
- JACKSON, J. D. **Classical Electrodynamics**. New York: John Wiley & Sons, 1962. 179-183p.
- JIN, J.-M. **Theory and Computation of Electromagnetic Fields**. [S.l.]: Wiley, 1962.
- KANSA, E. J.; CARLSON, R. E. Radial basis function: a class of grid-free scattered data approximations. **Comput. Fluid Dynamics**, [S.l.], v.3, p.479–496, 1995.
- KUO, F. F.; KAISER, J. F. **System Analysis by Digital Computer**. New York: Wiley, 1966.
- LI, Y.; CONSTABLE, S. 2D marine controlled-source electromagnetic modeling: part 2 — the effect of bathymetry. **Geophysics**, [S.l.], v.72, p.WA63–WA71, 2007.
- LI, Y.; KEY, K. 2D marine controlled-source electromagnetic modeling: part 1 — an adaptive finite-element algorithm. **Geophysics**, [S.l.], v.72, p.WA51–WA62, 2007.
- MICCHELLI, C. A. Interpolation of scattered data: distance matrices and conditionally positive definite functions. **Constructive Approximation**, [S.l.], v.2, p.11–22, 1986.
- MIRANDA, D. C.; REGIS, C. Analysis of time domain mCSEM data in the presence of resistive layers. **Revista Brasileira de Geofísica**, [S.l.], v.30, p.301–310, 2012.
- MORSE, P. M.; FESHBACH, H. **Methods of Theoretical Physics**. New York: McGraw-Hill, 1953.
- NEWMAN, G. A.; ALUMBAUGH, D. L. Frequency-domain modelling of airborne electromagnetic responses using staggered finite differences. **Geophysical Prospecting**, [S.l.], v.43, p.1021–1041, 1995.
- OPPENHEIM, A. V.; SHAFER, R. W. **Digital Signal Processing**. New Jersey: Prentice Hall, 1975. 219-220p.

- PERSSON, P. O. **Mesh Generation for Implicit Geometries**. 2005. Tese (Doutorado em Ciência da Computação) — Massachusetts Institute of Technology.
- PIRET, C. **Analytical and Numerical Advances in Radial Basis Functions**. 2007. Tese (Doutorado em Ciência da Computação) — University of Colorado.
- RIJO, L. **Electrical Geophysics: 2d-3d earth modeling**. Notas de aula. Universidade Federal do Pará.
- SAAD, Y. **Iterative Methods for Sparse Linear Systems**. Philadelphia, PA: SIAM, 1996.
- SCHENKEL, C. J. **The Electrical Resistivity Method in Cased Boreholes**. 1991. Tese (Doutorado em Ciência da Computação) — University of California.
- SHEN, L. H.; TSENG, K. H.; YOUNG, D. L. Evaluation of Multi-Order Derivatives by Local Radial Basis Function Differential Quadrature Method. **Journal of Mechanics**, [S.l.], v.29, p.67–78, 2012.
- SHU, C. H.; YEO, K. S. Local Radial Basis Differential Quadrature Method and its Application to Solve Two-Dimensional Incompressible Navier-Stokes Equations. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, [S.l.], v.192, p.941–954, 2003.
- SILVA, V. da; REGIS, C.; HOWARD, A. Q. Complex plane integration in the modelling of electromagnetic fields in layered media: part 1. application to a very large loop. **Journal of Geophysics and Engineering**, [S.l.], v.11, p.1–12, 2014.
- SLAZER, H. E. Divided Differences for Functions of Two Variables for Irregularly Spaced Argument. **Numerische Mathematik**, [S.l.], v.6, p.68–77, 1964.
- SOMMERFELD, A. Über die Ausbreitung der Wellen in der drahtlosen Telegraphie. **Ann. Phys.**, [S.l.], n.28, p.665–737, 1909.
- SOMMERFELD, A. **Partial Differential Equations in Physics**. New York: Academic Press, 1949.
- SPALDING, D. B. A Novel Finite Difference Formulation for Differential Expressions Involving Both First and Second Derivatives. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, [S.l.], v.4, p.551–559, 1972.
- SQUIRE, W.; TRAPP, G. **Using Complex Variables to Estimate Derivatives of Real Functions**. 1998.
- TOLSTYKH, A. I.; SHIROBOKOV, D. A. On using radial basis functions in a “finite difference mode” with applications to elasticity problems. **Computational Mechanics**, [S.l.], v.33, p.68–79, 2003.

- TSENG, K. H.; SHEN, L. H.; YOUNG, D. L. **Evaluating Accurate Differential Derivative by Local Differential Quadrature**. Yilan, Taiwan, 2009.
- WAIT, J. R. **Geo-electromagnetism**. New York: Academic Press, 1982.
- WANG, Z. J.; PRZEKWAS, A. J.; LIU, Y. A FV-TD electromagnetic solver using adaptive Cartesian grids. **Computer Physics Communications**, [S.l.], v.148, p.17–29, 2002.
- WEISS, C. J.; NEWMAN, G. A. Electromagnetic induction in a fully 3D anisotropic earth. **Geophysics**, [S.l.], v.67, p.1104–1114, 2002.
- WRIGHT, G. B. **Radial Basis Function Interpolation**: numerical and analytical developments. 2000. Tese (Doutorado em Ciência da Computação) — University of Colorado.
- WU, Y. L.; SHU, C. Development of RBF-DQ Method for Derivative Approximation and its Application to Simulate Natural Convection in Concentric Annuli. **Computational Mechanics**, [S.l.], v.29, p.477–485, 2002.
- XIONG, Z.; TRIPP, A. C. Electromagnetic scattering of large structures in layered earths using integral equations. **Radio Science**, [S.l.], v.30, p.921–929, 1995.
- ZHANG, K. K. Q.; SHOTORBAN, B.; MINKOWYCZ, W. J.; MASHAYEK, F. **A Compact Finite Difference Method on Staggered Grid for Navier-Stokes Flows**. University of Illinois.

APÊNDICES

APÊNDICE A

Solução semi-analítica do potencial elétrico ϕ devido a um cilindro condutivo em meio à fluxo de corrente galvânica.

A formulação para a modelagem D.C. de corrente galvânica em meio resistivo é baseada em duas equações, a da conservação da densidade de corrente $\mathbf{J}(\mathbf{x})$, em unidade de A/m²

$$\nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{x}) = 0, \quad (1)$$

e a outra é a Lei de Ohm, que relaciona a corrente de condução induzida $\mathbf{J}(\mathbf{x})$ e o campo elétrico estático $\mathbf{E}(\mathbf{x})$, em volts/m

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}) = \sigma(\mathbf{x}) \mathbf{E}(\mathbf{x}). \quad (2)$$

Na equação (2), $\sigma(\mathbf{x})$ é a condutividade elétrica, em unidades de S/m para um meio isotrópico. Para um fluxo de corrente D.C., o campo elétrico pode ser computado pelo potencial escalar $\psi(\mathbf{x})$ através da relação

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = -\nabla\psi(\mathbf{x}). \quad (3)$$

Combinando estas três equações, e notando que a corrente total no meio é dado pela soma das correntes induzida e da fonte, resulta nas seguintes equações

$$\nabla \cdot (\sigma(\mathbf{x}) \nabla\psi(\mathbf{x})) = \nabla \cdot \mathbf{J}_s(\mathbf{x}). \quad (4)$$

Partindo do desenvolvimento do potencial primário de um eletrodo de corrente

pontual, com corrente I_0 ampéres e localizado na origem do domínio formado por um meio condutivo homogêneo de condutividade constante σ_2 . Pela conservação de corrente e pela simetria esférica, temos que a corrente do eletrodo fluirá radialmente com amplitude

$$J_r = \frac{I_0}{4\pi r^2}, \quad (5)$$

sendo r a coordenada radial esférica. Desse modo, temos que o potencial primário associado $\phi_0(\mathbf{x})$ é

$$\psi^{(0)}(\mathbf{x}) = \frac{I_0}{4\pi \sigma_2 r}. \quad (6)$$

Na prática, este tipo de medida é tipicamente usada para o cálculo da resistividade aparente ρ_a . Na modelagem resistívia galvânica, tradicionalmente usa-se a resistividade ao invés da sua inversa, a condutividade. Usa-se também dois eletrodos, uma para injeção e outro para recepção de corrente. Por superposição, o potencial incidente $\psi_i(\mathbf{x})$ é então dado por

$$\psi^{(i)}(\mathbf{x}) = \psi^{(0)}(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}3a/2) - \psi^{(0)}(\mathbf{x} + \hat{\mathbf{x}}3a/2). \quad (7)$$

Na equação (7), $\hat{\mathbf{x}}$ é o vetor unitário que aponta para a direção positiva de x e os eletrodos de injeção e recepção estão separados a uma distância $3a$ no eixo x . Uma maneira comum de realizar medida de resistividade é através do arranjo Wenner. Um cálculo simples da diferença de voltagem no arranjo Wenner $V(\mathbf{x}) = \psi^{(i)}(\mathbf{x} + \hat{\mathbf{x}}a) - \psi^{(i)}(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}a)$, determina

$$V(\mathbf{x}) = \frac{\rho_2 I_0}{4\pi a}. \quad (8)$$

A resistividade aparente é definida como $\rho_a = V/I_0$, e para o arranjo Wenner fica

$$\rho_a = 4\pi a \frac{V}{I_0}. \quad (9)$$

Se o meio for homogêneo, a resistividade aparente é igual a resistividade do meio. Para meios não-homogêneos, é comum normalizar a resistividade aparente pela resistividade onde encontra-se a fonte, o que ajuda na interpretação dos dados medidos em campo. Note que, se a resistividade é medida na superfície do meio, então o fator 4π na equação (9) se torna 2π .

O problema agora resume-se em computar a resistividade aparente sobre uma anomalia cilíndrica de raio b , e resistividade ρ_1 localizada na origem dos eixos de coordenadas, com o eixo do cilindro alinhado à direção z . Devido às propriedades do meio cilíndrico serem independentes de z , a simetria 2.5-D pode ser obtida usando a transformada de Fourier na coordenada z .

As condições de fronteira são aplicadas na superfície do cilindro, que nas coordenadas cilíndricas (ρ, ϕ, z) é definida como $\rho = b$, sendo $\rho = (x^2 + y^2)^{1/2}$ e $\phi = \arctan(y/x)$. É conveniente o uso da representação Fourier-Bessel do potencial primário, a qual é dada por

$$\psi^{(0)}(\mathbf{x}) = \frac{I_0}{4\pi^2\sigma_2} \int_{-\infty}^{\infty} K_0(|K_z|\rho) e^{iK_z(z-z_T)} dK_z. \quad (10)$$

sendo K_0 a função de Bessel modificada de segunda espécie e de ordem 0 (ABRAMOWITZ; STEGUN, 1964), e z_T a coordenada z dos eletrodos de corrente. Para eletrodos do arranjo Wenner, usando as equações (7) e (10) obtemos

$$\psi^{(i)}(\mathbf{x}) = \frac{I_0}{4\pi^2\sigma_2} \int_{-\infty}^{\infty} [K_0(|K_z|r_1) - K_0(|K_z|r_2)] e^{iK_z(z-z_T)} dK_z, \quad (11)$$

sendo

$$\begin{aligned} r_1 &= ((x - 3a/2)^2 + y^2)^{1/2}, \\ r_2 &= ((x + 3a/2)^2 + y^2)^{1/2}. \end{aligned} \quad (12)$$

A equação (10) para o potencial primário $\psi^{(0)}(\mathbf{x})$ pode ser expandida usando o teorema da adição para funções de Bessel modificadas (ABRAMOWITZ; STEGUN, 1964), para obtermos a forma desejada

$$\psi^{(0)}(\mathbf{x}) = \frac{I_0}{4\pi^2\sigma_2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in(\phi-\phi_T)} \int_{-\infty}^{\infty} I_n(|K_z|\rho_{<}) K_n(|K_z|\rho_{>}) e^{iK_z(z-z_T)} dK_z. \quad (13)$$

Na equação (13), I_n e K_n são respectivamente as funções de Bessel modificadas de ordem n de primera e segunda espécies, sendo

$$\begin{aligned} \rho_{<} &= \min(\rho, \rho_T), \\ \rho_{>} &= \max(\rho, \rho_T), \end{aligned} \quad (14)$$

e (ρ_T, ϕ_T, z_T) a posição do eletrodo fonte. A representação para $\psi^{(0)}(\mathbf{x})$ como dada pela equação (13) satisfazem as condições de fronteira na superfície do cilindro $\rho = b$. Desse modo, os potenciais primários, secundário e no interior do cilindro, são definidos através de

$$\begin{aligned} \psi^{(0)}(\mathbf{x}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\phi} \int_{-\infty}^{\infty} a_n(K_z) I_n(|K_z|\rho_{<}) K_n(|K_z|\rho_{>}) e^{iK_z \frac{dK_z}{2\pi}}, \\ \psi^{(int)}(\mathbf{x}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\phi} \int_{-\infty}^{\infty} b_n(K_z) I_n(|K_z|\rho) e^{iK_z \frac{dK_z}{2\pi}}, \quad \rho \leq b, \\ \psi^{(s)}(\mathbf{x}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\phi} \int_{-\infty}^{\infty} c_n(K_z) K_n(|K_z|\rho) e^{iK_z \frac{dK_z}{2\pi}}, \quad \rho \geq b, \end{aligned} \quad (15)$$

onde os coeficientes $b_n(K_z)$ e $c_n(K_z)$ são determinados através das condições de fronteira na superfície do cilindro e o coeficiente do potencial primário $a_n(K_z)$ é dado por

$$a_n(K_z) = \frac{I_0}{2\pi\sigma_2} e^{-i(n\phi_T + K_z z_T)}. \quad (16)$$

As condições de fronteira na superfície do cilindro requerem que a componente

tangencial do campo elétrico E_z e a corrente normal J_ρ sejam contínuas. A ortogonalidade com respeito às bases $e^{in\phi}$ e $e^{iK_z z}$ dos três potenciais definidos na equação (15) permite uma correspondência entre seus termos, resultando na solução

$$\begin{aligned} b_n(K_z) &= a_n(K_z)K_n(\Omega_T)\left[1 + \frac{K_n(\Omega)I'_n(\Omega)}{\Delta}\right], \\ c_n(K_z) &= a_n(K_z)K_n(\Omega_T)\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)I_n(\Omega)I'_n(\Omega)}{\Delta}, \end{aligned} \quad (17)$$

Na equação (17), o determinante Δ é

$$\Delta = \sigma_2 I_n(\Omega) K'_n(\Omega) - \sigma_1 I'_n(\Omega) K_n(\Omega), \quad (18)$$

e os argumentos da função de Bessel são

$$\begin{aligned} \Omega &= |K_z| b, \\ \Omega_T &= |K_z| \rho_T. \end{aligned} \quad (19)$$

APÊNDICE B

Solução semi-analítica dos campos \mathbf{E} e \mathbf{H} devido a um cilindro condutivo excitado por um dipolo elétrico.

As equações de Maxwell em termos dos rotacionais para uma variação temporal $e^{-i\omega t}$ são dadas por

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{x}) &= (\sigma - i\omega\epsilon)\mathbf{E}(\mathbf{x}) + \mathbf{J}_s(\mathbf{x}), \\ \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{x}) &= i\omega\mu_0 \mathbf{H}(\mathbf{x}).\end{aligned}\tag{20}$$

Consideramos que a permeabilidade magnética μ possui o seu valor no vácuo μ_0 . A geometria cilíndrica do problema sugere o uso da transformada de Fourier para a componente genérica $A(\rho, \phi, z)$

$$A(\rho, \phi, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\phi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{A}_n(K, \rho) e^{iKz} \frac{dK}{2\pi}.\tag{21}$$

Nesta representação, as equações de Maxwell (20) tornam-se, em coordenadas cilíndricas

$$\begin{aligned}\frac{in}{\rho} \tilde{E}_{nz} - iK \tilde{E}_{n\phi} &= i\omega\mu_0 \tilde{H}_{n\rho}, \\ iK \tilde{E}_{n\rho} - \frac{\partial \tilde{E}_{nz}}{\partial \rho} &= i\omega\mu_0 \tilde{H}_{n\phi}, \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho \tilde{E}_{n\phi})}{\partial \rho} - \frac{in}{\rho} \tilde{E}_{n\rho} &= i\omega\mu_0 \tilde{H}_{nz}, \\ \frac{in}{\rho} \tilde{H}_{nz} - iK \tilde{H}_{n\phi} &= \tilde{\sigma} \tilde{E}_{n\rho} + \tilde{J}_{n\rho}, \\ iK \tilde{H}_{n\rho} - \frac{\partial \tilde{H}_{nz}}{\partial \rho} &= \tilde{\sigma} \tilde{E}_{n\phi} + \tilde{J}_{n\phi}, \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho \tilde{H}_{n\phi})}{\partial \rho} - \frac{in}{\rho} \tilde{H}_{n\rho} &= \tilde{\sigma} \tilde{E}_{nz} + \tilde{J}_{nz}.\end{aligned}\tag{22}$$

A equação (22) define a condutividade complexa como $\tilde{\sigma} = \sigma - i\omega\epsilon$. É conveniente representar os campos do dipolo elétrico em coordenadas cilíndricas em termos das componentes axiais $E_z(\rho, \phi, z)$ and $H_z(\rho, \phi, z)$. Com isso, utilizamos as seis equações em (22) para resolver para as componentes ϕ e ρ em termos da fonte e da componente z dos campos, para obter

$$\begin{aligned}\tilde{E}_{n\phi} &= \frac{1}{\gamma^2} \left[-i\omega\mu_0 \left(\frac{\partial \tilde{H}_{nz}}{\partial \rho} + \tilde{J}_{n\phi} \right) - \frac{nK}{\rho} \tilde{E}_{nz} \right], \\ \tilde{E}_{n\rho} &= \frac{1}{\gamma^2} \left[i\omega\mu_0 \left(\frac{in}{\rho} \tilde{H}_{nz} - \tilde{J}_{n\rho} \right) + iK \frac{\partial \tilde{E}_{nz}}{\partial \rho} \right], \\ \tilde{H}_{n\phi} &= \frac{-1}{\gamma^2} \left[iK \left(\frac{-in}{\rho} \tilde{H}_{nz} + \tilde{J}_{n\rho} \right) + \tilde{\sigma} \frac{\partial \tilde{E}_{nz}}{\partial \rho} \right], \\ \tilde{H}_{n\rho} &= \frac{1}{\gamma^2} \left[iK \left(\frac{\partial \tilde{H}_{nz}}{\partial \rho} + \tilde{J}_{n\phi} \right) + \frac{in\tilde{\sigma}}{\rho} \tilde{E}_{nz} \right].\end{aligned}\tag{23}$$

A equação (23) introduz a notação

$$\gamma = (k^2 - K^2)^{1/2}, \quad \text{Im}(\gamma) \geq 0\tag{24}$$

sendo $k = (i\omega\mu_0\tilde{\sigma})^{1/2}$, $\text{Rl}(k) \geq 0$, o número de onda intrínseco para o regime quasi-estático. Complementarmente às relações (23), o sistema acoplado (22) determina

$$\begin{aligned}w \frac{d}{dw} \left(w \frac{d\tilde{E}_{nz}}{dw} \right) + (w^2 - n^2)\tilde{E}_{nz} &= \frac{-1}{\tilde{\sigma}} \left[w^2 \tilde{J}_{nz} + \frac{iKw}{\gamma} \frac{d}{dw} (w\tilde{J}_{n\rho}) - \frac{nKw}{\gamma} \tilde{J}_{n\phi} \right], \\ w \frac{d}{dw} \left(w \frac{d\tilde{H}_{nz}}{dw} \right) + (w^2 - n^2)\tilde{H}_{nz} &= \frac{-w}{\tilde{\sigma}} \left[\frac{d}{dw} (w\tilde{J}_{n\phi}) - in\tilde{J}_{n\rho} - \frac{nKw}{\gamma} \tilde{J}_{n\phi} \right].\end{aligned}\tag{25}$$

Note que os termos do lado esquerdo das duas equações diferenciais ordinárias de segunda ordem em (25) são soluções das equações de Bessel de ordem n para a variável radial independente $w = \gamma\rho$. Os termos do lados direito são conhecidos como as fontes de corrente dos dipolos. O próximo passo é resolver estas equações para cada uma das três fontes dipolares independentes J_ρ , J_ϕ e J_z para um dipolo localizado no ponto (ρ_T, ϕ_T, z_T) . As densidades de corrente do dipolo para uma corrente I_0 Amperes e comprimento infinitesimal $d\ell$ são definidas como

$$\begin{aligned}
 J_\rho &= I_0 d\ell \delta(z - z_T) \delta(\phi - \phi_T) \delta(\rho - \rho_T) / \rho, \\
 J_\phi &= I_0 d\ell \delta(z - z_T) \delta(\phi - \phi_T) \delta(\rho - \rho_T) / \rho, \\
 J_z &= I_0 d\ell \delta(z - z_T) \delta(\phi - \phi_T) \delta(\rho - \rho_T) / \rho.
 \end{aligned} \tag{26}$$

A equação (26) $\delta(z - z_T)$ é a delta de Dirac. A análise de Fourier dos campos da fonte determina

$$\begin{aligned}
 \tilde{J}_{n\rho} &= \frac{I_0 d\ell}{2\pi} e^{-in\phi_T} e^{-iKz_T} \delta(\rho - \rho_T) / \rho, \\
 \tilde{J}_{n\phi} &= \frac{I_0 d\ell}{2\pi} e^{-in\phi_T} e^{-iKz_T} \delta(\rho - \rho_T) / \rho, \\
 \tilde{J}_{nz} &= \frac{I_0 d\ell}{2\pi} e^{-in\phi_T} e^{-iKz_T} \delta(\rho - \rho_T) / \rho.
 \end{aligned} \tag{27}$$

Agora, vamos determinar as componentes axiais dos campos para todas as três polarizações da fonte. O caso mais simples para a solução da equação (25) é para o dipolo orientado na direção z . Neste caso, a forma apropriada da solução é

$$\begin{aligned}
 \tilde{E}_{nz} &= A_n J_n(\gamma\rho), \quad \rho < \rho_T, \\
 \tilde{E}_{nz} &= B_n H_n^{(1)}(\gamma\rho), \quad \rho \geq \rho_T, \\
 \tilde{H}_{nz} &= 0.
 \end{aligned} \tag{28}$$

para os coeficientes ainda incógnitos A_n e B_n . As condições de contorno da fonte são que os campos da fonte são contínuos quando $\rho = \rho_T$ e as derivadas $\frac{d}{d\rho}$ satisfazem essas condições. Para isso, multiplicamos os dois lados das duas equações em (25) por

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{w_T - \epsilon}^{w_T + \epsilon} \frac{dw}{w}, \tag{29}$$

e realizamos a integração seguida pelo limite. Aqui, $w_T = \gamma\rho_T$. Usando o Wronskiano para J_n e $H_n^{(1)}$, temos a determinação das componentes z dos campos do dipolo alinhado à direção z , dadas por

$$\begin{aligned}
 \tilde{E}_{nz}^{(0,z)} &= \frac{-\omega\mu_0\gamma^2}{4k^2} I_0 d\ell e^{-in\phi_T} e^{-iKz_T} J_n(\gamma\rho_{<}) H_n^{(1)}(\gamma\rho_{>}), \\
 \tilde{H}_{nz}^{(0,z)} &= 0.
 \end{aligned} \tag{30}$$

Note a adição dos superíndices nos campos da fonte para denotar a direção do dipolo. As outras polarizações da fonte são mais difíceis de se obter, pois elas envolvem derivadas da função delta de Dirac. A derivadas são interpretadas através de integração por partes, i.e., para $\epsilon > 0$ e assumindo $f(x')$ contínua em $x' = x$,

$$\int_{x-\epsilon}^{x+\epsilon} f(x') \delta'(x') dx' = -f(x). \quad (31)$$

Usando a propriedade (31), e procedendo similarmente ao caso do dipolo na direção z , notando que agora $\tilde{H}_{nz} \neq 0$, temos os resultados para o dipolo direcionado em ϕ

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{nz}^{(0,\phi)} &= \frac{\omega\mu_0 n K}{4k^2 \rho_T} I_0 d\ell e^{-in\phi_T} e^{-iKz_T} J_n(\gamma\rho_{<}) H_n^{(1)}(\gamma\rho_{>}), \\ \tilde{H}_{nz}^{(0,\phi)} &= \frac{-i\gamma}{4} I_0 d\ell e^{-in\phi_T} e^{-iKz_T} J_n(\gamma\rho_{<}) H_n^{(1)'}(\gamma\rho_{>}), \quad \rho < \rho_T, \\ &= \frac{-i\gamma}{4} I_0 d\ell e^{-in\phi_T} e^{-iKz_T} J_n'(\gamma\rho_{<}) H_n^{(1)}(\gamma\rho_{>}), \quad \rho > \rho_T. \end{aligned} \quad (32)$$

Uma análise similar determina as expressões para o dipolo na direção ρ , i.e.,

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{nz}^{(0,\rho)} &= \frac{i\omega\mu_0 K \gamma}{4k^2} I_0 d\ell e^{-in\phi_T} e^{-iKz_T} J_n(\gamma\rho_{<}) H_n^{(1)'}(\gamma\rho_{>}), \quad \rho < \rho_T, \\ &= \frac{i\omega\mu_0 K \gamma}{4k^2} I_0 d\ell e^{-in\phi_T} e^{-iKz_T} J_n'(\gamma\rho_{<}) H_n^{(1)}(\gamma\rho_{>}), \quad \rho > \rho_T, \\ \tilde{H}_{nz}^{(0,\rho)} &= \frac{n}{4\rho_T} I_0 d\ell e^{-in\phi_T} e^{-iKz_T} J_n(\gamma\rho_{<}) H_n^{(1)}(\gamma\rho_{>}). \end{aligned} \quad (33)$$

Dada as representações dos campos da fonte para $\tilde{\mathcal{E}}_{nz}^{(0,q)}$, $\tilde{\mathcal{H}}_{nz}^{(0,q)}$ onde

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{nz}^{(0,q)} &= \mathcal{E}_{nz}^{(0,q)} J_n(\gamma_2 a), \\ \tilde{H}_{nz}^{(0,q)} &= \mathcal{H}_{nz}^{(0,q)} J_n(\gamma_2 a), \end{aligned} \quad (34)$$

e onde $q = \rho, \phi, z$ designa a orientação da fonte, vamos resolver para as quatro amplitudes $\tilde{\mathcal{E}}_{nz}^{(i,q)}$, $\tilde{\mathcal{H}}_{nz}^{(i,q)}$, $\tilde{\mathcal{E}}_{nz}^{(s,q)}$, $\tilde{\mathcal{H}}_{nz}^{(s,q)}$, para respectivamente as amplitudes interna e secundária dos campos, para um cilindro circular condutivo. Quando o dipolo está fora do cilindro, a continuidade dos campos tangenciais $\tilde{E}_{nz}^{(t,q)}$, $\tilde{H}_{nz}^{(t,q)}$, $\tilde{E}_{n\phi}^{(t,q)}$, $\tilde{H}_{n\phi}^{(t,q)}$ na superfície do cilindro fornece as quatro equações

$$\begin{aligned}
 \mathcal{E}_{nz}^{(0,q)} J_n(\gamma_2 a) + \mathcal{E}_{nz}^{(s,q)} H_n^{(1)}(\gamma_2 a) &= \mathcal{E}_{nz}^{(i,q)} J_n(\gamma_1 a), \\
 \mathcal{H}_{nz}^{(0,q)} J_n(\gamma_2 a) + \mathcal{H}_{nz}^{(s,q)} H_n^{(1)}(\gamma_2 a) &= \mathcal{H}_{nz}^{(i,q)} J_n(\gamma_1 a), \\
 \frac{1}{\gamma_2} [-i\omega\mu_0\gamma_2(\mathcal{H}_{nz}^{(0,q)} J_n'(\gamma_2 a) + \mathcal{H}_{nz}^{(s,q)} H_n^{(1)' }(\gamma_2 a)) - \\
 \frac{nK}{a}(\mathcal{E}_{nz}^{(0,q)} J_n(\gamma_2 a) + \mathcal{E}_{nz}^{(s,q)} H_n^{(1)}(\gamma_2 a))] &= \\
 \frac{1}{\gamma_1} [-i\omega\mu_0\gamma_1\mathcal{H}_{nz}^{(i,q)} J_n'(\gamma_1 a) - \frac{nK}{a}\mathcal{E}_{nz}^{(i,q)} J_n^{(1)}(\gamma_1 a)], \\
 \frac{1}{\gamma_2} [-\frac{nK}{a}(\mathcal{H}_{nz}^{(0,q)} J_n(\gamma_2 a) + \mathcal{H}_{nz}^{(s,q)} H_n^{(1)}(\gamma_2 a)) - \\
 \tilde{\sigma}_2 \gamma_2(\mathcal{E}_{nz}^{(0,q)} J_n'(\gamma_2 a) + \mathcal{E}_{nz}^{(s,q)} H_n^{(1)' }(\gamma_2 a))] &= \\
 \frac{1}{\gamma_1} [-\frac{nK}{a}(\mathcal{H}_{nz}^{(i,q)} J_n(\gamma_1 a) - \tilde{\sigma}_1 \gamma_1 \mathcal{E}_{nz}^{(i,q)} J_n^{(1)' }(\gamma_1 a))].
 \end{aligned} \tag{35}$$

Reescrevendo como equação matricial, nos dá

$$\sum_{j=1}^4 A_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1, 2, 3, 4, \tag{36}$$

para os coeficientes

$$\begin{aligned}
 x_1 &= \mathcal{E}_{nz}^{(s,q)}, \\
 x_2 &= \mathcal{H}_{nz}^{(s,q)}, \\
 x_3 &= \mathcal{E}_{nz}^{(i,q)}, \\
 x_4 &= \mathcal{H}_{nz}^{(i,q)},
 \end{aligned} \tag{37}$$

onde a matriz de coeficientes é

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} H_n^{(1)}(\Omega_2) & 0 & -J_n(\Omega_1) & 0 \\ 0 & H_n^{(1)}(\Omega_2) & 0 & -J_n(\Omega_1) \\ \frac{-nK}{\gamma_2^2 a} H_n^{(1)}(\Omega_2) & \frac{-i\omega\mu_0}{\gamma_2} H_n^{(1)' }(\Omega_2) & \frac{nK}{\gamma_1^2 a} J_n(\Omega_1) & \frac{i\omega\mu_0}{\gamma_1} J_n'(\Omega_1) \\ \frac{-\tilde{\sigma}_2}{\gamma_2} H_n^{(1)' }(\Omega_2) & \frac{-nK}{\gamma_2^2 a} H_n^{(1)}(\Omega_2) & \frac{\tilde{\sigma}_1}{\gamma_1} J_n'(\Omega_1) & \frac{nK}{\gamma_1^2 a} J_n(\Omega_1) \end{bmatrix} \tag{38}$$

e os termos do lado direito são

$$\begin{aligned}
 b_1 &= -\mathcal{E}_{nz}^{(0,q)} J_n(\Omega_2), \\
 b_2 &= -\mathcal{H}_{nz}^{(0,q)} J_n(\Omega_2), \\
 b_3 &= \frac{i\omega\mu_0}{\gamma_2} \mathcal{H}_{nz}^{(0,q)} J_n'(\Omega_2) + \frac{nK}{\gamma_2^2 a} \mathcal{E}_{nz}^{(0,q)} J_n(\Omega_2), \\
 b_4 &= \frac{nK}{\gamma_2^2 a} \mathcal{H}_{nz}^{(0,q)} J_n(\Omega_2) + \frac{\tilde{\sigma}_2}{\gamma_2} \mathcal{E}_{nz}^{(0,q)} J_n'(\Omega_2).
 \end{aligned} \tag{39}$$

A solução formal da equação matricial (36) para as amplitudes de campo externo é dada por

$$\begin{aligned}
 \mathcal{E}_{nz}^{(s,q)} &= N_1/(\Delta A_{24}), \\
 \mathcal{H}_{nz}^{(s,q)} &= N_2/(\Delta A_{13}), \\
 N_1 &= (A_{24}A_{42} - A_{22}A_{44})(b_3A_{13}A_{24} - b_1A_{24}A_{33} - b_2A_{13}A_{34}) - \\
 &\quad (A_{24}A_{32} - A_{22}A_{34})(b_4A_{13}A_{24} - b_1A_{24}A_{43} - b_2A_{13}A_{44}), \\
 N_2 &= (A_{13}A_{31} - A_{11}A_{33})(b_4A_{13}A_{24} - b_1A_{24}A_{43} - b_2A_{13}A_{44}) - \\
 &\quad (A_{13}A_{41} - A_{11}A_{43})(b_3A_{13}A_{24} - b_1A_{24}A_{33} - b_2A_{13}A_{34}),
 \end{aligned} \tag{40}$$

e o determinante $\Delta = \det(A)$ é dado por

$$\begin{aligned}
 \Delta &= (nKa)^2(1/\Omega_2^2 - 1/\Omega_1^2)^2 J_n^2(\Omega_1) H_n^{(1)2}(\Omega_2) - \\
 &\quad (J_n(\Omega_1) H_n^{(1)'}(\Omega_2)/\Omega_2 - H_n^{(1)}(\Omega_2) J_n'(\Omega_1)/\Omega_1) \\
 &\quad ((k_2a)^2 J_n(\Omega_1) H_n^{(1)'}(\Omega_2)/\Omega_2 - (k_1a)^2 H_n^{(1)}(\Omega_2) J_n'(\Omega_1)/\Omega_1),
 \end{aligned} \tag{41}$$

os argumentos da função são definidos como

$$\Omega_j = \gamma_j a, \quad j = 1, 2. \tag{42}$$

Para completar, os coeficientes do campo axial interno para $\rho < a$ são

$$\begin{aligned}
 \mathcal{E}_{nz}^{(i,q)} &= (\mathcal{E}_{nz}^{(0,q)} J_n(\Omega_2) + \mathcal{E}_{nz}^{(s,q)} H_n^{(1)}(\Omega_2))/J_n(\Omega_1), \\
 \mathcal{H}_{nz}^{(i,q)} &= (\mathcal{H}_{nz}^{(0,q)} J_n(\Omega_2) + \mathcal{H}_{nz}^{(s,q)} H_n^{(1)}(\Omega_2))/J_n(\Omega_1).
 \end{aligned} \tag{43}$$

Os resultados explícitos para os coeficientes não-axiais externos são

$$\begin{bmatrix} \tilde{E}_{n\phi}^{(s,q)}(K, \rho) \\ \tilde{E}_{n\rho}^{(s,q)}(K, \rho) \\ \tilde{H}_{n\phi}^{(s,q)}(K, \rho) \\ \tilde{H}_{n\rho}^{(s,q)}(K, \rho) \end{bmatrix} = B^{(s)} \begin{bmatrix} H_n^{(1)}(\gamma_2 \rho) \\ H_n^{(1)'}(\gamma_2 \rho) \end{bmatrix}, \quad (44)$$

sendo

$$B^{(s)} = \begin{bmatrix} \frac{-nK}{\gamma_2^2 \rho} \mathcal{E}_{nz}^{s,q} & \frac{-i\omega\mu_0}{\gamma_2} \mathcal{H}_{nz}^{s,q} \\ \frac{-\omega\mu_0 n}{\gamma_2^2 \rho} \mathcal{H}_{nz}^{s,q} & \frac{iK}{\gamma_2} \mathcal{E}_{nz}^{s,q} \\ \frac{-nK}{\gamma_2^2 \rho} \mathcal{H}_{nz}^{s,q} & \frac{-\tilde{\sigma}_2}{\gamma_2} \mathcal{E}_{nz}^{s,q} \\ \frac{i n \tilde{\sigma}_2}{\gamma_2^2 \rho} \mathcal{E}_{nz}^{s,q} & \frac{iK}{\gamma_2} \mathcal{H}_{nz}^{s,q} \end{bmatrix} e^{-in\phi_T} e^{-iKz_T}. \quad (45)$$

Similarmente, os campos não-axiais internos são dados por

$$\begin{bmatrix} \tilde{E}_{n\phi}^{(i,q)}(K, \rho) \\ \tilde{E}_{n\rho}^{(i,q)}(K, \rho) \\ \tilde{H}_{n\phi}^{(i,q)}(K, \rho) \\ \tilde{H}_{n\rho}^{(i,q)}(K, \rho) \end{bmatrix} = B^{(i)} \begin{bmatrix} J_n(\gamma_1 \rho) \\ J_n'(\gamma_1 \rho) \end{bmatrix}, \quad (46)$$

sendo

$$B^{(i)} = \begin{bmatrix} \frac{-nK}{\gamma_1^2 \rho} \mathcal{E}_{nz}^{(i,q)} & \frac{-i\omega\mu_0}{\gamma_1} \mathcal{H}_{nz}^{(i,q)} \\ \frac{-\omega\mu_0 n}{\gamma_1^2 \rho} \mathcal{H}_{nz}^{(i,q)} & \frac{iK}{\gamma_1} \mathcal{E}_{nz}^{(i,q)} \\ \frac{-nK}{\gamma_1^2 \rho} \mathcal{H}_{nz}^{(i,q)} & \frac{-\tilde{\sigma}_1}{\gamma_1} \mathcal{E}_{nz}^{(i,q)} \\ \frac{i n \tilde{\sigma}_1}{\gamma_1^2 \rho} \mathcal{E}_{nz}^{(i,q)} & \frac{iK}{\gamma_1} \mathcal{H}_{nz}^{(i,q)} \end{bmatrix} e^{-in\phi_T} e^{-iKz_T}. \quad (47)$$

Assim temos, por exemplo, através da equação (21)

$$E_\rho^{(s,q)}(\rho, \phi, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\phi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{E}_{n\rho}^{(s,q)}(K, \rho) e^{iKz} \frac{dK}{2\pi}, \quad (48)$$

e similarmente para as outras componentes.