UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E CIENTÍFICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICAS

GEORGE CHRIST CARAVEO

O PROCESSO DE (RE)CONSTRUÇÃO E GESTÃO DE ORGANIZAÇÕES MATEMÁTICAS E DIDÁTICAS NO ESTUDO DE FUNÇÕES LOGARÍTMICAS MEDIADO PELOS AMBIENTES PAPEL E LÁPIS E INFORMATIZADO

BELÉM – PARÁ
2014

GEORGE CHRIST CARAVEO

O PROCESSO DE (RE)CONSTRUÇÃO E GESTÃO DE ORGANIZAÇÕES MATEMÁTICAS E DIDÁTICAS NO ESTUDO DE FUNÇÕES LOGARÍTMICAS MEDIADO PELOS AMBIENTES PAPEL E LÁPIS E INFORMATIZADO

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas do Instituto de Educação Matemática e Científica da Universidade federal do Pará, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Educação em Ciências e Matemáticas – Área de Concentração em Educação Matemática – Linha de Pesquisa em Percepção Matemática, Processos e Raciocínios, Saberes e Valores.
Orientador: Prof. Dr. José Messildo Viana Nunes.
Coorientador: Prof. Dr. Reginaldo da Silva.

BELÉM – PARÁ
2014

Autorizo a reprodução e divulgação total ou parcial deste trabalho, por qualquer meio convencional ou eletrônico, para fins de estudo e pesquisa, desde que citada a fonte.

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da UFPA

Caraveo, George Christ, 1972-
O processo de (re)construção e gestão de organizações matemáticas e didáticas no estudo de funções logarítmicas mediado pelos ambientes papel e lápis e informatizado / George Christ Caraveo. – 2014.

Orientador: José Messildo Viana Nunes;
Coorientador: Reginaldo da Silva.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Pará, Instituto de Educação Matemática e Científica, Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas, Belém, 2014.

1. Matemática – estudo e ensino. 2. Matemática – ensino auxiliado por computador. 3. Professores de matemática – narrativas pessoais. 4. Álgebra – logaritmos. 5. Prática de ensino. I. Título.

CDD 22. ed. 510.7

GEORGE CHRIST CARAVEO DA SILVA

O PROCESSO DE (RE)CONSTRUÇÃO E GESTÃO DE ORGANIZAÇÕES MATEMÁTICAS E DIDÁTICAS NO ESTUDO DE FUNÇÕES LOGARÍTMICAS MEDIADO PELOS AMBIENTES PAPEL E LÁPIS E INFORMATIZADO

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas do Instituto de Educação Matemática e Científica da Universidade federal do Pará, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Educação em Ciências e Matemáticas – Área de Concentração em Educação Matemática – Linha de Pesquisa em Percepção Matemática, Processos e Raciocínios, Saberes e Valores.
Orientador: Prof. Dr. José Messildo Viana Nunes.
Coorientador: Prof. Dr. Reginaldo da Silva.

Orientador:____
Prof. Dr. José Messildo Viana Nunes (IEMCI/UFPA – Presidente da Banca)

Coorientador: ____
Prof. Dr. Reginaldo da Silva (IFPA – Membro Externo)

1º Examinador: ____
Prof. Dr. Renato Borges Guerra (IEMCI/UFPA – Membro Interno)

2º Examinador: ____
Prof. Dr. Saddo Ag Almouloud (PUC/SP – Membro Externo)

AVALIADO EM: _____/_____/_____ CONCEITO: ______________

DEDICATÓRIA

À minha esposa Lia, com amor, admiração e gratidão por sua compreensão, carinho, presença e incansável apoio ao longo do período de elaboração deste trabalho.

AGRADECIMENTOS

A Deus por me acompanhar sempre.

Aos meus amados pais, irmãos e familiares pelo apoio e confiança incondicionais.

Ao meu orientador, Prof. Dr. José Messildo Viana Nunes, pelo comprometimento, solicitude e sábias orientações.

Ao meu coorientador, Prof. Dr. Reginaldo da Silva, pelas diversas contribuições desde meu ingresso no PPGECM.

Ao Prof. Dr. Saddo Ag Almouloud, pelas contribuições que deram um caráter mais amplo a esta pesquisa.

Ao Prof. Dr. Renato Borges Guerra, pelo apoio e contribuições desde a apresentação de minha pesquisa no GEDIM.

Aos meus amigos Adevaldo Júnior, Jerley Dantas e Washington Rosário por compreenderem e apoiarem minha trajetória como pesquisador.

Aos meus amigos, com os quais ingressei no PPGECM, Alex Bruno, Aline Miranda, Dailson Evangelista, Guilherme Moura e Raquel Rêgo pelo valioso apoio ao longo de minha pesquisa.

À Nice pela dedicação para com minha família nesta jornada.

Aos meus alunos por serem os maiores motivadores de minha atividade docente e em especial aos sujeitos desta pesquisa.

RESUMO

Nesta pesquisa de cunho narrativo investiguei o processo de (re)construção e gestão de *Organizações Matemáticas* e D*idáticas* no estudo de funções logarítmicas mediado por dois ambientes. Este processo está, de acordo com a *Transposição Didática Interna*, dividido em dois momentos. No primeiro, caracterizado pela construção do “texto de saber”, no qual exponho os fatores que influenciaram na construção da *Organização Didática* de minha proposta e o segundo, marcado por colocar em ação estas *praxeologias*, construindo assim a *Organização Matemática* no qual reflito sobre a *Organização Didática* e busco reconstruí-la. Realizei um estudo relacionado a funções logarítmicas, com alunos do terceiro ano do Ensino Médio de uma escola particular, que consistiu no enfrentamento de uma *tarefa* em dois ambientes: o *papel e lápis e o informatizado*. Analisando os resultados obtidos percebi que o ambiente *informatizado*, ao proporcionar a interação dos estudantes com o modelo computacional das funções logarítmicas, promoveu por um lado, *condições* favoráveis ao aprendizado e por outro geraram restrições, problemas que indicaram a necessidade de (re)construções das O*rganizações Matemáticas* e *Didáticas*. A teoria que permitiu minha análise foi a *Teoria Antropológica do Didático*, mais precisamente em torno das noções de *Transposição Didática Interna*, *Praxeologias,* além de *Condições e Restrições*.

Palavras-chave: Informática Educativa. Funções Logarítmicas. Teoria Antropológica do Didático. Transposição Didática Interna. *Praxeologias*. *Condições* e Restrições.

ABSTRACT

The aim of this narrative research was to investigate the process of (re)construction and management of Mathematics and Didactic Organizations in the study of logarithmic functions seeked by two environments. This process is, according to the Internal Didactic Transposition, divided into two parts. In the first, characterized by the construction of the text Know, it is exposed the factors that influenced the construction of the Didactic Organization of my proposal; the second, scored by putting into action these Praxeologies , thus building Mathematics Organization in which I reflect on the Didactic Organization and seek to rebuild it. I conducted a study related to logarithmic functions , with students of the last year of high school from a private school , which consisted in facing a task in two environments : the paper and pencil and computerized . Analyzing the results I realized the computerized environment, by providing the interaction of students with the computational model of logarithmic functions, promoted on one hand, favorable conditions for learning and the other generated restrictions, problems that indicated the need to (re)constructions of Mathematics and Didactic Organizations. The theory that allowed my analysis were the Anthropological Theory of Didactics, more precisely around the notions of Internal Didactic Transposition, Praxeologies, Conditions and Restrictions.

Keywords: Educational Informatics. Logarithmic Functions. Anthropological Theory of Didactics. Internal Didactic Transposition. Praxeologies. Conditions and Restrictions.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Durante o processo seletivo para o curso de mestrado do Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas (PPGECM), do Instituto de Educação Matemática e Científica (IEMCI), da Universidade Federal do Pará (UFPA), apresentei um anteprojeto de pesquisa relacionado ao estudo de funções logarítmicas. Este objeto matemático sempre se mostrou fascinante a meus olhos, pois por um lado é de grande importância para o currículo matemático escolar e por outro é fonte de dificuldades em seu processo de ensino e aprendizagem, fato corroborado ao longo de minha experiência docente junto aos alunos, em discussões com colegas de área e por meio de minhas leituras de estudos científicos. Tais fontes de dificuldade são diversas como mostram os trabalhos de Karrer (1999), Ferrari (2001), Oliveira (2005), Ferreira (2006), Rossi (2010), Merichelli (2010), Soares (2011), Santos (2011), além de Cardoso e Franco (2012).

As bases legais dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) indicam que o Ensino Médio (EM) deve proporcionar a oportunidade de consolidar e aprofundar os conhecimentos adquiridos no Ensino Fundamental; aprimorar o educando como pessoa humana; possibilitar o prosseguimento de estudos; além de garantir a preparação básica para o trabalho e a cidadania (BRASIL, 2000, p. 9). No exercício pleno desta, encontrei na Matriz de Referência do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) (BRASIL, 2011, p. 1) a necessidade do fortalecimento do *eixo cognitivo* referente ao domínio de linguagens que compreende a utilização da linguagem matemática. Nesse sentido, destaco que o estudo de funções pode contribuir na formação matemática dos estudantes como afirma Eves (2008, p. 661).

> O conceito de função permeia grande parte da matemática e, desde as primeiras décadas do século XX, muitos matemáticos vêm advogando seu uso como princípio central e unificador na organização dos cursos elementares de matemática. O conceito parece representar um guia natural e efetivo para a seleção e desenvolvimento do material de textos de matemática. Enfim, é inquestionável que quanto antes se familiarize um estudante com o conceito de função, tanto melhor para sua formação matemática.

Chamo atenção para a contribuição que o estudo das funções proporciona na relação dos sujeitos com os fenômenos naturais presentes no mundo como indicam os Parâmetros Curriculares Nacionais.

> O estudo das funções permite ao aluno adquirir a linguagem algébrica como a linguagem das ciências, necessária para expressar a relação entre grandezas e modelar situações-problema, construindo modelos descritivos de fenômenos e permitindo várias conexões dentro e fora da própria matemática. (BRASIL, 2002, p. 121).

Nesse sentido, concluo que o estudo das funções logarítmicas ganha, particular importância, pois está associado a fenômenos naturais que possam relacionar duas grandezas em que uma varia em progressão geométrica enquanto que a outra, em progressão aritmética. Tais funções modelam inúmeros fenômenos naturais, científicos e sociais que relacionam: o tempo e a população de uma região, o nível e a intensidade sonora, o tempo e o montante no regime de capitalização de juros compostos, a intensidade de um terremoto e a energia liberada por ele, a magnitude de uma estrela e a distância de observação, dentre outros. A importância e aplicabilidade destas funções é salientada por Almouloud (2011, p. 193).

> A função logaritmo é uma das noções mais importantes dentre as que integram o currículo do Ensino Médio. Ela tem várias aplicações em diversas áreas de conhecimento tais como a física, a química, a economia, a astronomia, o que justifica sua manutenção nas propostas curriculares de vários países.

Entendo que o referido estudo também fortalece outro *eixo cognitivo* componente da Matriz de Referência do ENEM, o de compreensão de fenômenos (BRASIL, 2011, p. 1). O desenvolvimento e fortalecimento deste eixo ao longo da vida acadêmica dos alunos promove um cidadão que, por exemplo, ao tomar conhecimento de uma notícia sobre terremotos, em um telejornal ou outro veículo de comunicação, compreende que o aumento de um ponto de intensidade na escala Richter corresponde a um aumento dezenas de vezes maior na quantidade de energia liberada, ou seja, um aumento relativamente pequeno na intensidade do terremoto está relacionado a um aumento significativo em termos de energia. Mais ainda, se o estudo das funções logarítmicas proporcionar a compreensão da relação entre a graduação na escala Richter e a amplitude da destruição causada pelo terremoto, será mais difícil que se fique indiferente com as consequências provocadas por terremotos de diferentes intensidades. Deste modo, temos no estudo deste objeto matemático uma grande valia na promoção de uma melhor relação entre os cidadãos e o mundo no qual estão inseridos.

Para que o professor de matemática possa proporcionar aos alunos tais relações com o mundo, é necessário, ao longo do processo de estudo, propor *tarefas*[1] que ao serem realizadas contribuem para a apropriação e desenvolvimento de noções relacionadas à função, e em particular à função logarítmica. Eis alguns exemplos de *tarefas* presentes no currículo de matemática do Ensino Médio, de funções logarítmicas, que extraí de uma coleção de livros aprovada pelo Plano Nacional do Livro Didático[2] (PNLD) (BRASIL, 2012): construir o gráfico

---

[1] *Tarefa*s são expressas por um verbo. Por exemplo: determinar as raízes de um polinômio.

[2] Programa governamental de aquisição de livros didáticos que evidencia a importância dos mesmos para a educação brasileira.

de funções logarítmicas, confirmar características de funções logarítmicas a partir de seu gráfico e lei de formação, identificar funções logarítmicas crescentes e decrescentes a partir de seu gráfico e lei de formação, verificar a simetria entre os gráficos de funções exponenciais e logarítmicas, dentre outras (DANTE, 2011).

No enfrentamento destas *tarefas*, emergem muitas questões que podem ser exploradas no intuito de ampliar a compreensão dos alunos: O que ocorre com uma das grandezas quando a outra aumenta ou diminui e vice-versa? Qual a taxa de crescimento de uma das grandezas em relação à outra? Como se comporta o gráfico com a mudança de um parâmetro da lei de formação funcional? Quais os efeitos que tais mudanças acarretam em um determinado fenômeno? etc. E mais, quando a relação entre duas grandezas de um determinado fenômeno pode ser expressa algebricamente por uma função logarítmica, o uso de um computador, munido de um *software* educativo[3] gráfico, cria um ambiente de visualização e manipulação do gráfico da função logarítmica associada a uma lei de formação analítica que pode contribuir para a compreensão do fenômeno em questão.

Destaco que o uso de *softwares* educativos também é defendido pelos PCN de Matemática (BRASIL, 1998, pp. 117-118) ao recomendarem que, no estudo de função, não se faça uma abordagem excessivamente formal desse conceito e sim; propor situações que levem os alunos a construir noções algébricas pela observação de regularidades em tabelas e gráficos; a investigar padrões, tanto em sucessões numéricas como em representações geométricas e identificar suas estruturas, construindo a linguagem algébrica para descrevê-las simbolicamente; utilizar letras como variáveis para representar relações funcionais em situações-problema concretas; propor situações-problema sobre variação de grandezas para que o aluno possa desenvolver a noção de função; utilizar *software* educativo, que apresentam planilhas ou gráficos.

Considerando a importância das funções logarítmicas, as dificuldades em seu processo de ensino-aprendizagem e as potencialidades do uso de um *dispositivo informático*[4] no processo de estudo, elaborei uma proposta de ensino que partindo do ambiente *papel e lápis* visava a implementação do ambiente *informatizado* para tratar sobre funções logarítmicas na qual adotei

[3] É o conjunto de recursos informáticos desenvolvidos com o objetivo de serem usados em contextos de ensino-aprendizagem (ALMOULOUD, 2005, p. 52).
[4] É o complexo formado pelo *hardware e software*, que fazem o funcionamento do computador em seu sentido mais amplo (BALACHEFF, 1994, p. 364).

a perspectiva de Borba e Penteado (2010, p. 37) sobre o uso de *dispositivos informáticos*, quando dizem:

> As novas mídias, como os computadores com softwares gráficos e as calculadoras gráficas, permitem que o aluno experimente bastante, de modo semelhante ao que faz em aulas experimentais de biologia ou de física. Podem experimentar com gráficos de funções quadráticas do tipo $y = ax^2 + bx + c$, por exemplo, antes de conhecerem a sistematização de função quadrática.

Neste sentido, minha proposta visa introduzir o estudo de funções logarítmicas a partir da resolução de uma situação-problema constituída de uma expressão algébrica envolvendo logaritmo no ambiente *papel e lápis* e em seguida no ambiente *informatizado*. Inseri o *dispositivo informático* no processo de estudo para proporcionar a necessidade de transformar a referida expressão algébrica em uma função logarítmica na variável x e, por conseguinte promover a construção e a manipulação do gráfico de tal função, para posterior sistematização. Vislumbrei que o ambiente *informatizado* estabelecido pelo computador e *software* educativo gráfico contribuiria, em primeira instância, para a introdução do estudo das funções logarítmicas a partir do ambiente *papel e lápis* e em seguida para o avanço do estudo nos âmbitos algébrico e gráfico, além da compreensão da relação entre as duas grandezas envolvidas no fenômeno abordado pela situação-problema.

Ao ingressar no PPGECM passei a participar do Grupo de Estudos e Pesquisas em Didática das Matemáticas (GEDIM) onde estabeleci relações mais estreitas com elementos da Teoria Antropológica do Didático (TAD) de Chevallard (1992) tais como: Transposição Didática (TD), Organizações Matemáticas (OM), Organizações Didáticas (OD), *Condições* e *Restrições* etc.

Compreendi por meio da Transposição Didática as transformações as quais um saber sábio está submetido para adquirir *status* de saber ensinado, passando pelo saber a ensinar. Segundo Chevallard (1985) esses saberes adquirem características específicas em virtude das relações sociais em instituições desde a academia (ou a comunidade que institucionaliza o saber) até a sala de aula (saber adquirido pelo aluno). Portanto, quando o saber sábio torna-se saber a ensinar (dos relatórios de pesquisa para os livros didáticos, por exemplo) e este se torna saber ensinado há uma TD que deve salvaguardar as características deste saber, apesar da adequação de contexto. O processo da TD ocorre em duas etapas em relação ao sistema de ensino: a Transposição Didática Externa (TDE) na qual ocorrem as transformações do saber sábio ao saber a ser ensinado e a Transposição Didática Interna (TDI) que promove as transformações do saber a ser ensinado ao saber ensinado. De acordo com Chevallard (2009), o fenômeno da TDI subdivide-se em dois momentos, um caracterizado pela construção do "texto de saber" e outro ao colocar este texto em ação com os alunos. Deste modo, ao planejar e escrever minha proposta de estudo de introdução de funções logarítmicas mediada pelos ambientes *papel e lápis* e *informatizado* estive inserido no primeiro momento da TDI e ao implementar o processo de estudo no laboratório de informática da escola, no segundo.

Para Chevallard (1999, p.32), quando um tema matemático é eleito para estudo, se considera sucessivamente, a realidade matemática deste tema que se pode construir em um grupo de estudo chamada *praxeologia matemática* ou *organização matemática* (OM) e a maneira como essa realidade matemática pode ser construída nomeada *praxeologia didática* ou *organização didática* (OD). Deste modo a TDI tem particular importância em minha pesquisa, pois neste processo promovi transformações nas *praxeologias* de funções logarítmicas apresentadas nos livros didáticos (ambiente *papel e lápis*) para *praxeologias* que pudessem ser implementadas no *dispositivo informático* (ambiente *informatizado*), isto é, construí uma OD para em seguida coloca-la em ação junto a meus alunos de forma a construir uma OM. Ainda de acordo com o autor, o trabalho do estudo a ser feito é composto por descrever e analisar a OM que se pode construir em um grupo de estudo do tema eleito e descrever e analisar a OD que pode ser posta em prática no mesmo grupo.

Subsidiado pelo panorama exporto, apresento o objeto desta pesquisa: Investigar o processo de (re)construção e gestão de O*rganizações Matemáticas* e D*idáticas* no estudo de funções logarítmicas mediado pelos ambientes *papel e lápis* e *informatizado*, cujo objetivo é responder as seguintes questões:

– (Q1) Como as *condições* e *restrições* impostas pelo ambiente *informatizado* influenciam na (re)construção e gestão das *Organizações Matemáticas* e D*idáticas* de funções logarítmicas em relação ao ambiente *papel e lápis*?

– (Q2) Como as relações entre o ambiente *papel e lápis* e o ambiente *informatizado* influenciam na (re)construção e gestão das Organizações Matemáticas e Didáticas?

Para alcançar estas metas me vali do aporte teórico da TAD, mais precisamente das noções de *praxeologia matemática*, *praxeologia didática*, *condições* e *restrições* que subsidiaram minhas análises no fenômeno da *transposição didática interna* em seus dois momentos. O primeiro caracterizado pela construção do "texto de saber" de minha proposta de estudo de introdução de funções logarítmicas e o segundo momento, ao dirigir o processo de estudo em uma escola particular, localizada no centro de Belém do Pará, com cerca de 280 alunos do terceiro ano do Ensino Médio divididos em seis turmas, que tiveram duas sessões de estudo cada uma no laboratório de informática da escola.

A metodologia de pesquisa que utilizei neste trabalho foi a da pesquisa narrativa. Iniciei meus estudos acerca deste tipo de pesquisa por meio de Freitas e Fiorentini (2007) e a compreendo como uma maneira que o pesquisador dispõe para falar sobre o processo de aprendizagem situada em uma experiência. A narrativa ganha pertinência quando o professor ou pesquisador se coloca como ator da experiência e expõe sua percepção sobre a mudança de sentido, de aprendizado entre outros elementos subjacentes que não ficaram expostos na ação, mas que serão revelados pela narrativa.

Nesta pesquisa coaduno com Larrosa (1996) acerca do que seja uma experiência formativa, isto é, aquela que está relacionada aos acontecimentos aos quais atribuímos sentido em relação a nós mesmos e não aos acontecimentos visíveis aos participantes da experiência.

Deste modo, vejo minha pesquisa como uma experiência propícia para a narrativa. Fato sustentado pelas ideias de Freitas e Fiorentini (2007, p. 65).

> Experiências em sala de aula e em ambiente de pesquisa podem ilustrar o potencial da narrativa para o ensino e a aprendizagem da matemática. Nada mais natural do que adotar a narrativa para tentar dar sentido a uma experiência educativa ou a uma prática social. As salas de aula podem ser vistas como uma prática social complexa em que professores, alunos e por vezes pesquisadores estão tentando compreender e construir significados. É assim que alguns professores de matemática exploram, em sala de aula, experiências de contar e narrar ao outro, pois estas, além de formativas, podem, também, ajudar na aquisição significativa do conhecimento matemático.

Encontrei em Carter (1993) duas perspectivas no que diz respeito à narrativa. Uma como seres humanos onde refletimos, relatamos e representamos a experiência, produzindo sentido ao que somos, fazemos, pensamos, sentimos e dizemos e outra como pesquisadores na qual observamos um modo especial de interpretar e compreender a experiência humana, levando em consideração a perspectiva e interpretação de seus participantes. Tomei a segunda perspectiva como norteadora de meus escritos.

Estruturei esta pesquisa em quatro capítulos. No primeiro, de fundamentação teórica, trato das seguintes noções da TAD: *Organizações Matemáticas* e *Didáticas*, *Condições* e *Restrições*, além da *Transposição Didática Interna*, para dar suporte à análise de minha narrativa ao longo dos demais capítulos. O segundo capítulo tem como desenvolvimento metodológico a pesquisa bibliográfica e o dividi em dois tópicos. No primeiro, apresento três *modelos epistemológicos* dos logaritmos, dois dos quais estarão presentes nas *praxeologias* construídas nos ambientes *papel e lápis* e *informatizado* em minha pesquisa, no intento de perceber as relações entre esses modelos que são fontes de interferência na (re)construção e gestão das Organizações Matemáticas e Didáticas, além de um breve levantamento bibliográfico sobre pesquisas que abordaram estudos de funções ou funções logarítmicas mediados por *dispositivos informáticos*, nessas evidencio o *modelo epistemológico* empregado, assim como ressalto semelhanças e diferenças de minha pesquisa em relação aos trabalhos científicos consultados. No terceiro capítulo narro a elaboração e implementação de minha proposta de estudo da introdução de funções logarítmicas com alunos do terceiro ano do Ensino Médio e faço a análise do processo de TDI de acordo com o exposto. No último capítulo teço minhas considerações finais acerca das contribuições de minha pesquisa para a Educação Matemática, assim como perspectivas e desdobramentos.

1 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Há muitos modelos teóricos que podem ser articulados ou não, de acordo com a necessidade, no intuito de investigar os fatores que influenciam o ensino e a aprendizagem da matemática, além de permitir o estudo de *condições* que favoreçam sua aquisição pelos alunos. Dentre eles, encontra-se a *Teoria Antropológica do Didático* (TAD) proposta por Chevallard (1992) a partir de reflexões feitas sobre a *Transposição Didática* (TD), outro trabalho de sua autoria publicado em 1985. A TAD, segundo Chevallard (1992), insere a didática no campo da antropologia ao colocar a atividade matemática, e por conseguinte, o estudo da matemática, no campo das atividades humanas e de instituições sociais, tornando-se um modelo de análise das práticas docentes.

Elegi a TAD para modelar minhas análises visto que essa fornece noções que me possibilitaram discutir os fenômenos que vivenciei. A seguir apresento as noções da TAD que permearam a análise em minha pesquisa.

1.1. AS ORGANIZAÇÕES MATEMÁTICAS E DIDÁTICAS

De acordo com Chevallard (1992), a TAD admite que toda atividade humana regularmente realizada em uma *instituição*[5] pode ser descrita com um modelo único, que é resumido com a palavra *praxeologia*. Este termo vem do grego: *práxis* e *logos* significam, respectivamente, prática e razão. Toda atividade humana e por conseguinte matemática realizada no seio de uma *instituição* vem acompanhada de um discurso mais ou menos desenvolvido, ou seja, um *logos* que a justifica, acompanha e lhe dá razão. A relação dialética entre *práxis* e *logos* caracterizada pela diferença e coexistência destes dois níveis permite modelar as atividades matemáticas por meio de *praxeologias* ou *organizações matemáticas*. Chevallard esclarece a estrutura de uma *praxeologia* como segue:

> A estrutura praxeológica mais simples (chamada de "pontual") consiste em um tipo de *tarefas T*, de uma *técnica* τ, maneira de como realizar as *tarefas t* do tipo *T*, de uma *tecnologia* θ, o discurso racional (logos) sobre a *técnica* (tekhnê), que é suposto para tornar τ inteligível como um meio para realizar as *tarefas* do tipo *T*, finalmente – por último, mas não menos importante – um componente teórico Θ, o qual governa (regula) a *tecnologia* θ em si (e, portanto, todos os componentes da

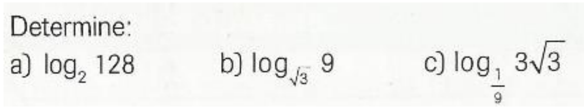
[5] Para Chevallard, uma instituição é um dispositivo social. Assim uma classe é uma instituição (incluindo duas posições essenciais que são a de professor e aluno), bem como a escola (de onde emergem outras posições) e além destas uma que as engloba, o sistema educacional, dentre outras.

> *praxeologia*). Tal *praxeologia pontual* (o "ponto" aqui é o tipo de *tarefas* T) é denotada por $[T / \tau / \theta / \Theta]$. (CHEVALLARD, 2009, tradução nossa)

As noções de *tarefa t* e de *tipos de tarefas T* compõem a raiz da noção de *praxeologia* e quando uma *tarefa t* forma parte de um *tipo de tarefas T*, escrevemos $t \in T$. Uma *tarefa* t e um *tipo de tarefas T* são expressos por um verbo, portanto: determinar o valor numérico de uma expressão algébrica, construir o gráfico de uma função, identificar a ordenada de um ponto pertencente ao gráfico etc. são *tarefas* (*ou tipos de tarefas*).

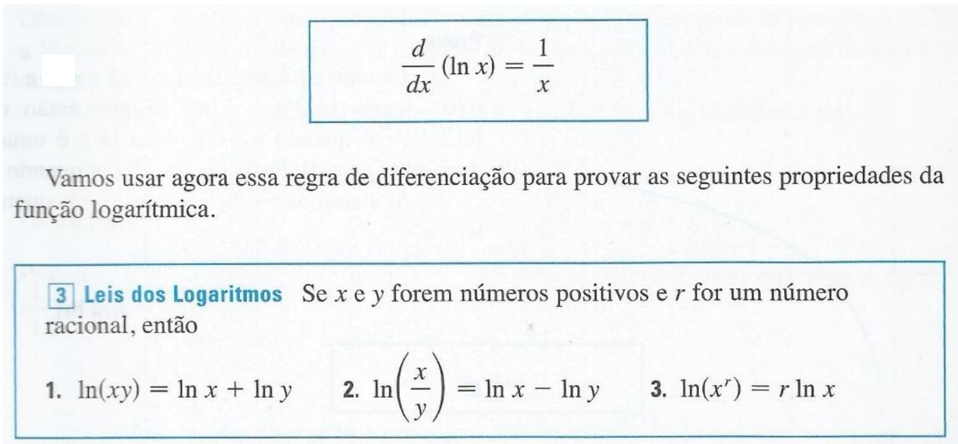
Apresento os exemplos de *tarefas* (*t* e *q*) extraídas de dois livros didáticos de matemática, a primeira do EM e a segunda, do Ensino Superior (ES) nas figuras 1 e 2.

Figura 1: *Tarefa t* relativa ao estudo de logaritmos de um livro do EM.


Determine:
a) $\log_2 128$ b) $\log_{\sqrt{3}} 9$ c) $\log_{\frac{1}{9}} 3\sqrt{3}$

Fonte: Dante (2011, p. 249).

Figura 2: *Tarefa q* relativa ao estudo de funções logarítmicas de um livro do ES.


$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$$

Vamos usar agora essa regra de diferenciação para provar as seguintes propriedades da função logarítmica.

3 Leis dos Logaritmos Se x e y forem números positivos e r for um número racional, então

1. $\ln(xy) = \ln x + \ln y$ **2.** $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$ **3.** $\ln(x^r) = r \ln x$

Fonte: Stewart (2006, p. 421).

As *tarefas* caracterizadas desta forma diferem-se do que chamamos *tarefas* na linguagem cotidiana, visto que estas estão desprovidas do "princípio antropológico" proposto por Chevallard (1999, p. 222). A noção de *tarefas* e *tipos de tarefas* pressupõe um *objeto*[6] relativamente preciso, então dos exemplos apresentados temos: determinar o valor do logaritmo de um número (*t*) e provar uma propriedade operatória das funções logarítmicas (*q*). Ao passo que determinar e provar são os chamados *gêneros de tarefas*, pois pedem um complemento.

[6] A primeira noção fundamental da TAD, proposta por Chevallard (2009, p. 1), é a de *objeto*, considerado uma entidade, material ou imaterial, que existe para ao menos um indivíduo. Deste modo, tudo é objeto, um numeral, um número, a ideia de amor, um conceito matemático, o símbolo ∞ etc.

Uma *praxeologia* relativa a um *tipo de tarefas T* requer, em princípio, uma maneira de realizar as *tarefas t* tais que $t \in T$. Uma determinada maneira de resolver a *tarefa* é chamada de *técnica* τ, portanto uma *praxeologia* relativa ao *tipo de tarefas T* requer, em princípio, pelo menos uma *técnica* relativa à *T*.

Observe na figura 3 a realização do item (b) da *tarefa t* proposta por Dante (2011) na figura 1:

Figura 3: Realização do item (b) da *tarefa t*.

b) $\log_{\sqrt{3}} 9 = x \Rightarrow \left(\sqrt{3}\right)^x = 9 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(3^{\frac{1}{2}}\right)^x = 3^2 \Rightarrow 3^{\frac{x}{2}} = 3^2 \Rightarrow \frac{x}{2} = 2 \Rightarrow x = 4$

Logo, $\log_{\sqrt{3}} 9 = 4$.

Fonte: Dante (2011, p. 249).

O enfrentamento da *tarefa t* consiste em igualar o logaritmo de 9 na base $\sqrt{3}$ a x, para em seguida aplicar a *técnica* da transformação de uma expressão logarítmica em uma expressão equivalente na forma de potência[7], isto é, transformar $\log_{\sqrt{3}} 9 = x$ na equação exponencial $\left(\sqrt{3}\right)^x = 9$. Posteriormente, o autor utiliza uma *técnica* de resolução de equações exponenciais que consiste em igualar as bases das potências $3^{\frac{x}{2}}$ e 3^2 para obter a igualdade entre os expoentes $\frac{x}{2}$ e 2, e desta forma $x = 4$ que é o valor de $\log_{\sqrt{3}} 9$. Esta é uma *técnica* comum nos livros de matemática para o EM e consiste, de modo geral, na articulação de duas *técnicas* que são: a aplicação da *técnica* da transformação de uma expressão logarítmica em uma expressão equivalente na forma de potência e em seguida a *técnica* de resolução de equações exponenciais.

Observe na figura 4 a realização do item (1) da *tarefa q* proposta por Stewart (2006) apresentada na figura 2:

[7] Preferi denominar esta *técnica* sem utilizar o termo "forma exponencial" no lugar de "forma de potência" porque as praxeologias matemáticas relativas aos logaritmos nem sempre recaem numa equação exponencial, o que ocorre, por exemplo, em $\log 2_x = 3$ que resulta em $x^3 = 2$.

Figura 4: Realização do item (1) da *tarefa q* relativa ao estudo de funções logarítmicas.

2 $$\boxed{\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}}$$

Prova

1. Seja $f(x) = \ln(ax)$, onde a é uma constante positiva. Então, usando a Equação 2 e a Regra da Cadeia, temos

$$f'(x) = \frac{1}{ax}\frac{d}{dx}(ax) = \frac{1}{ax} \cdot a = \frac{1}{x}$$

Portanto, $f(x)$ e $\ln x$ têm a mesma derivada, e diferem por uma constante:

$$\ln(ax) = \ln x + C$$

Fazendo $x = 1$ nessa equação, obtemos $\ln a = \ln 1 + C = 0 + C = C$. Assim

$$\ln(ax) = \ln x + \ln a$$

Se substituirmos agora a constante a por qualquer número y, temos

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y$$

Fonte: Stewart (2006, p. 421).

A partir da descrição feita pelo autor, identifiquei o uso de uma *técnica* que articula, de modo geral, *técnicas* de diferenciação e substituição de valores em uma expressão algébrica.

Nas resoluções das duas *tarefas* (item (b) da *tarefa t* e item (1) da *tarefa q*) percebemos, como orienta Chevallard (2009), que há pelo menos uma *técnica* associada à cada *praxeologia* apresentada.

Outra reflexão importante que exponho acerca das *técnicas* é que elas são componentes de *praxeologias* estabelecidas em uma dada instituição e podem não existir em outra, como é o caso da *técnica* de diferenciação apresentada por Stewart (2006) no enfrentamento de *q*, que vive em algumas disciplinas de cursos em instituições de Ensino Superior, tais como Matemática, Física, Engenharia etc., mas que foram extintas na maioria das instituições de EM no Brasil. No caso de Belém, por exemplo, estas *técnicas* deixaram de ser estudadas no início dos anos 2000, quando da extinção do EM por Áreas (ciências exatas e naturais, humanas e biológicas). Vale ressaltar que mesmo antes de sua extinção esta *técnica* estava presente apenas para os alunos que compunham as turmas de ciências exatas e naturais, além de turmas preparatórias para concursos militares. Em algumas destas últimas, as *técnicas* de diferenciação ainda sobrevivem.

Chevallard (2009) afirma que *tecnologia*, indicada geralmente por θ, é o discurso racional sobre a *técnica* τ. Este discurso tem como primeiro objetivo justificar racionalmente a *técnica* τ no intuito de assegurar-se de que esta permite realizar a *tarefa* do *tipo T*. O estilo de racionalidade posto em jogo depende da *instituição*[8] na qual a *tarefa* está sendo realizada tal qual vimos na prova de $\ln(x.y) = \ln x + \ln y$ (figura 4) que se utiliza de *tecnologia* residente no ES. Observe o estilo de racionalidade presente no EM, na realização da *tarefa* a seguir exposta na figura 5.

Figura 5: Estilo de racionalidade presente no Ensino Médio.

Vamos provar que esse fato vale para qualquer base e quaisquer dois números para os quais existam os logaritmos envolvidos. Ou seja, que se trata de uma propriedade:

$$\log_a (M \cdot N) = \log_a M + \log_a N$$

Demonstração:

Consideramos $\log_a (M \cdot N) = p$; $\log_a M = m$ e $\log_a N = n$.

Dessas igualdades, tiramos $a^p = M \cdot N$; $a^m = M$ e $a^n = N$. Então:

$$a^p = M \cdot N = a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

Se $a^p = a^{m+n}$, então $p = m + n$, ou seja, $\log_a (M \cdot N) = \log_a M + \log_a N$.

Fonte: Dante (2011, p. 253).

Uma *técnica* τ relativa a um tipo de *tarefas T* está sempre acompanhada de um vestígio de *tecnologia* θ e em numerosos casos, inclusive, alguns elementos tecnológicos estão integrados na *técnica*. A figura 6 mostra o enfrentamento da *tarefa* "determine $\log_{\frac{1}{9}} 3\sqrt{3}$" extraído de Dante (2011).

Figura 6: Enfrentamento de uma *tarefa*.

$$\log_{\frac{1}{9}} 3\sqrt{3} = \log_{3^{-2}} \left(3^1 \cdot 3^{\frac{1}{2}}\right) = \log_{3^{-2}} 3^{\frac{3}{2}}$$

$$\log_{3^{-2}} 3^{\frac{3}{2}} = x \Leftrightarrow (3^{-2})^x = 3^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3^{-2x} = 3^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow -2x = \frac{3}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{3}{4}$$

Portanto, $\log_{\frac{1}{9}} 3\sqrt{3} = -\frac{3}{4}$.

Fonte: Dante (2011, p. 249).

[8] A instituição permite e impõe a seus sujeitos, isto é, para as pessoas x que vem ocupar diferentes posições p disponíveis em I, o envolvimento de todos estabelece maneiras de fazer e de pensar próprios, isto é, praxeologias. (CHEVALLARD, 2009, p. 2, tradução nossa)

O autor utiliza uma *técnica* que articula a aplicação de algumas propriedades de potências para escrever o logaritmando e a base do logaritmo como potências de base 3, e a *técnica* da transformação de uma expressão logarítmica em uma expressão equivalente na forma de potência na obtenção de uma equação exponencial, que é resolvida em seguida. As *tecnologias* que justificam racionalmente a *técnica* são a definição e propriedades de potências, além da definição de logaritmo. Por outro lado, pode existir uma *técnica* canônica que em princípio seja a única conhecida e empregada na instituição a qual será conferido o status de *técnica autotecnológica*, isto é, o uso da *técnica* não requer justificação, porque é a boa maneira de atuar na instituição.

De acordo com Chevallard (2008), a *tecnologia* apresenta mais duas funções. Uma delas é a de explicar, ou tornar inteligível, de clarear a *técnica*. Consiste, portanto em expor porque a *técnica* é correta. Tradicionalmente a função tecnológica de justificação da *técnica* predomina por meio de uma exigência de demonstração sobre a função de explicação. A outra função da *tecnologia* corresponde à produção de *técnicas* e nota-se que há *tecnologias* em potencial à espera de *técnicas*, que não são *tecnologias* de alguma *técnica* ou que são de poucas *técnicas*.

Assim como a *técnica* é justificada-explicada-produzida pela *tecnologia*, o discurso tecnológico contém afirmações, mais ou menos explicitas que podem necessitar de um nível superior de justificação-explicação-produção, chamado de *teoria* Θ, que está para a *tecnologia* assim como esta está para a *técnica*. Esta regressão relacionada à justificação pode implicar em uma *teoria* de uma *teoria* e como ocorre em matéria de *técnica* e *tecnologia*, há um progresso teórico que visa tornar conjecturas em enunciados teóricos.

Infiro que as *tecnologias* da definição de potências e logaritmos, além de suas propriedades operatórias são justificadas por uma *teoria* que é a Análise Real. Esta mesma *teoria* justifica as *técnicas* de diferenciação utilizadas no enfrentamento da *tarefa* proposta por Stewart (2006) (Figura 4).

De acordo com a TAD, a descrição dos três níveis apresentados (*técnica*, *tecnologia* e *teoria*) é suficiente em geral para dar conta da atividade que se quer analisar.

Em relação a um tipo de *tarefas T* se encontram, em princípio, um tripé formado por ao menos uma *técnica* τ, por uma *tecnologia* θ de τ e por uma *teoria* Θ de θ constituintes de uma *Organização Matemática Pontual* (OMP) indicada por $[T/\tau/\theta/\Theta]$. O termo pontual qualifica a *praxeologia* em torno de um único tipo de *tarefas T*.

Sejam *t1* e *T*, respectivamente, uma *tarefa* e um tipo de *tarefas*, tais que $t1 \in T$ como segue:

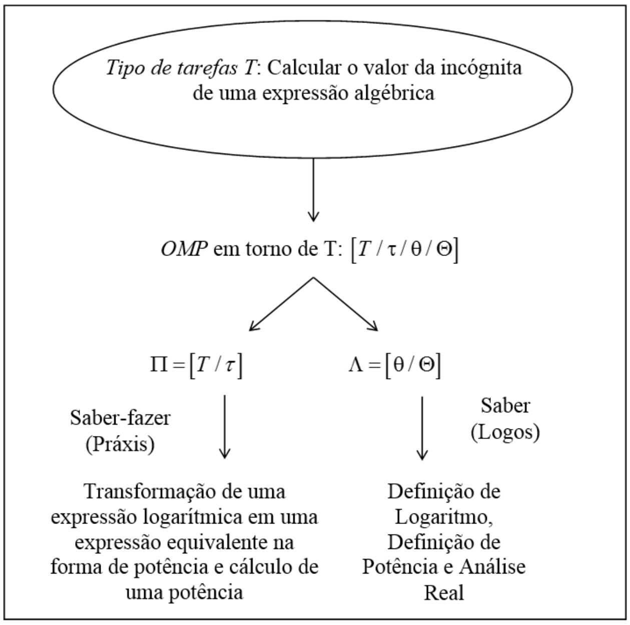
– *Tipo de tarefas T*: calcular o valor da incógnita de uma expressão algébrica;

– *Tarefa t1*: calcule o valor de $\frac{x}{y}$ na expressão $\log \frac{x}{y} = 2$;

Neste caso a *tarefa t1* pode ser realizada com a aplicação da *técnica* da transformação de uma expressão logarítmica em uma expressão equivalente na forma de potência e em seguida do cálculo de uma potência, portanto $\frac{x}{y} = 10^2 = 100$. Assim sendo a *tecnologia* que justifica o uso desta *técnica* é a definição de logaritmo e de potência e a *teoria* que regula esta *tecnologia* é a Análise Real.

Temos uma OMP em torno do tipo de *tarefas T* constituída pelo bloco $[T / \tau / \theta / \Theta]$, onde *T* é calcular o valor da incógnita de uma expressão algébrica, τ é uma técnica que articula as *técnicas* da transformação de uma expressão logarítmica em uma expressão equivalente na forma de potência e do cálculo de uma potência, a *tecnologia* θ é a definição de logaritmo e de potência e a *teoria* Θ é a Análise Real. Esta *organização praxeológica* é composta de um bloco *prático-técnico* $\Pi = [T / \tau]$ que constitui um *saber-fazer* e de um bloco *tecnológico-teórico* $\Lambda = [\theta / \Theta]$ que se identifica habitualmente como um *saber* como mostra a na figura 7.

Figura 7: *Organização Matemática Pontual* em torno do *Tipo de tarefas T.*



Fonte: Elaborada pelo autor.

De acordo com Chevallard (1999, p. 6), na realização de *tarefas* do *tipo T* de modo geral, em uma *instituição*, o predomínio do saber nunca é inesperado, porém se encontra raramente em *organizações pontuais*. Uma *teoria* Θ responde a várias *tecnologias* θ_j, cada uma das quais por sua vez justifica e torna inteligíveis várias *técnicas* τ_{ij}, correspondentes a outros tantos tipos de *tarefas* T_{ij}. As *organizações pontuais* vão combinar-se, em primeiro lugar, em *organizações locais*, $[T_i, \tau_i, \theta, \Theta]$, centradas sobre uma determinada *tecnologia* θ, e depois em *organizações regionais* $[T_{ij}, \tau_{ij}, \theta_j, \Theta]$, formadas ao redor de uma *teoria* Θ. Uma *organização global* é um complexo praxeológico obtido, $[T_{ijk}, \tau_{ijk}, \theta_{jk}, \Theta_k]$, em uma dada *instituição*, pela agregação de várias *organizações regionais* correspondentes a várias *teorias* Θ_k. A passagem de uma *praxeologia pontual* $[T, \tau, \theta, \Theta]$ a uma *praxeologia local* $[T_i, \tau_i, \theta, \Theta]$ é marcada por uma *tecnologia* θ, da mesma maneira que a passagem para uma *praxeologia regional* será marcada por uma *teoria* Θ. Nestes casos, a visibilidade do bloco do saber aumenta em detrimento do bloco do *saber-fazer*.

As *Praxeologias ou Organizações Didáticas*, segundo Chevallard (1999), são *organizações* que visam construir as OM e como tal são as respostas de como estudar um determinado *tema*. As OD são construídas numa determinada época e são balizadas por (re)construções presentes em documentos oficiais, nos livros didáticos etc. Estas (re)construções sofrem influências de *condições* e *restrições* de várias ordens e, submetido a elas, o problema do professor é fazer funcionar esta OD no intuito de solucionar *tarefas* propostas aos alunos, isto é, ensinar.

1.2. AS CONDIÇÕES E RESTRIÇÕES

De acordo com Chevallard (2002), no momento de estudo de um saber, são as *condições* e *restrições* que determinam o que pode acontecer e, de modo geral, não são identificadas imediatamente no *sistema didático*, tais como: o conhecimento dos professores e alunos, o tempo de estudo, os recursos utilizados, etc. Deste modo, Chevallard (2002) estabelece uma maneira de modelar as *condições* e *restrições* em conjunto com as OM e OD em um processo de estudo por meio dos *Níveis de Codeterminação Didática* (NCD).

O saber é situado por Chevallard (2002) numa escala hierárquica composta por nove NCD de interação mútua que vão dos mais gerais (níveis –3, –2, –1 e 0) aos mais específicos (níveis 1, 2, 3, 4 e 5) que são: *Civilização*, *Sociedade*, *Escola*, *Pedagogia*, *Disciplina*, *Domínio*, *Setor*, *Tema* e *Tópico*. A hierarquia dentre estes níveis é mostrada na figura 8.

Figura 8: Hierarquia dentre os NCD.

Civilização (Nível – 3)
$\downarrow \uparrow$
Sociedade (Nível – 2)
$\downarrow \uparrow$
Escola (Nível – 1)
$\downarrow \uparrow$
Pedagogia (Nível 0)
$\downarrow \uparrow$
Disciplina (Nível 1)
$\downarrow \uparrow$
Domínio (Nível 2)
$\downarrow \uparrow$
Setor (Nível 3)
$\downarrow \uparrow$
Tema (Nível 4)
$\downarrow \uparrow$
Tópico (Nível 5)

Fonte: Elaborada pelo autor.

Descrevo as características dos NCD a seguir:

Tópicos: *organizações pontuais* em torno de *tópicos* específicos, como prescrito por programas ou avaliações oficiais, ou como encontradas nas práticas dos contextos educacionais;

Temas: *organizações locais* em torno de *temas* específicos para as práticas educativas dos contextos, como prescrito pelos programas oficiais, descrito pelos professores, ou inferida a partir da observação de diversos *tópicos* dentro do *tema*;

Setor: *organizações regionais* em torno de um *setor* específico nas práticas dos contextos educacionais, como prescrito pelos programas oficiais, descrito pelos professores, ou inferido a partir da observação das práticas educativas sobre vários *temas* dentro do *setor*;

Domínio: *organizações globais* de *domínios* específicos nas práticas dos contextos educacionais, dentro de uma determinada *disciplina*, conforme prescrito pelos programas oficiais, descrito pelos professores, ou inferido a partir da observação de vários *setores*;

Disciplina: organizações de uma *disciplina* em *domínios* ou mais globalmente, com base nos programas oficiais outras evidências (incluindo observação e declarações dos professores);

Pedagogia: pedagogias nos contextos educacionais, como prescrito por escolas ou programas oficiais, observadas, ou descritas pelos professores (incluindo princípios de ensino que transcendem as várias disciplinas ensinadas, interações estabelecidas ou observadas entre as disciplinas, etc.);

Escola: *condições* e características das *instituições de ensino* específicas, por exemplo, em relação a funções, obrigações e autonomia dos professores;

Sociedade: *condições* e características das *sociedades* inteira, incluindo em particular, a maneira em que escolas são dirigidas, financiadas e organizadas sistemicamente; e

Civilização: maiores contextos culturais ou *civilizações*, seus princípios para a sociedade humana, em particular, como considera o papel e o significado da educação.

De acordo com Araya-Chacón (2008), a relação entre os NCD e as OM e OD materializa-se posteriormente ao nível disciplinar (nível 1) quando agregam *organizações praxeológicas de complexidade crescente* a partir dos *tópicos* (nível 5). Deste modo, uma OM *pontual* é construída em torno de um *tópico*, que é organizado em torno de um *tipo de tarefas*, como por exemplo: "calcular o valor numérico de uma função", "calcular o valor de uma incógnita de uma expressão algébrica", "calcular o logaritmo de um número" etc. As OM em torno de uma *tecnologia*, isto é, as OM *locais* que são um amálgama das OM *pontuais* e tem o estatuto de *tema* de estudo (nível 4), por exemplo: "Funções", "Expressões Algébricas", "Logaritmos" etc. Uma OM *regional* é composta em torno de uma *teoria*, por meio do agrupamento de OM *locais* e neste caso é um a organização mais ampla em torno do *setor* (nível 3), por exemplo: "Análise Real", "Álgebra Moderna", "Geometria Analítica" etc. Finalmente uma OM *global*, portanto, é identificável para um *domínio* de estudo (nível 2) tal qual a "Análise Matemática"[9], "Álgebra", "Geometria", etc. Neste sentido, a figura 9 ilustra as relações entre os NCD e as OM de *complexidade crescente*.

[9] Neste texto considero a Análise Matemática como um domínio que apresenta os setores: Análise Real que lida com números reais e funções reais de variáveis reais; Análise Complexa que investiga os números complexos e as funções complexas de variáveis complexas; Análise Funcional que estuda os espaços vetoriais e operadores lineares; Análise Numérica que preocupa-se com os algoritmos que usam aproximações numéricas em problemas de análise; Equações Diferenciais e a Teoria de Medidas de conjuntos.

Figura 9: Relações entre os NCD e as OM.

Disciplina (Nível 1) → Matemática
↓ ↑
Domínio (Nível 2) → OM *global* em torno da "Álgebra" ou "Geometria" etc.
↓ ↑
Setor (Nível 3) → OM *regional* em torno de uma *teoria*.
↓ ↑
Tema (Nível 4) → OM *local* em torno de uma *tecnologia*.
↓ ↑
Tópico (Nível 5) → OM *pontual* em torno de um *tipo de tarefas*.

Fonte: Elaborada pelo autor.

As OD são organizações transmissoras que dependem das OM que serão transmitidas. Assim, ocorre um "isomorfismo" didático-matemático que reverbera nos NCD, isto é, cada nível impõe *condições* e *restrições* específicas que determinam o que é possível ser feito para estudar um *tópico* considerado. Deste modo, por exemplo, na construção da OD referente ao *tópico* calcular o valor numérico de uma função emerge do *tema* Funções componente do *setor* Análise Real referente ao *domínio* Análise Matemática da *disciplina* Matemática deve-se considerar as *condições* e *restrições* impostas pelos NCD superiores e inferiores sobre a OM correspondente.

1.3. A TRANSPOSIÇÃO DIDÁTICA INTERNA

Quando dirigi o processo de estudo de funções logarítmicas com meus alunos, estava em jogo um saber que havia sofrido minha intervenção e de outros atores caracterizando o fenômeno da *Transposição Didática*. Este fenômeno foi introduzido, em 1975, pelo sociólogo Michel Verret e discutido sob outro prisma, em 1985, por Chevallard em seu livro *La Transposition Didactique, Du savoir savant au savoir enseigné*[10]. Este trabalho mostra as transformações sofridas por um *saber* quando passa do campo científico para o campo escolar.

Para Chevallard (1985), há distinções entre os saberes e para tanto se deve considerar a existência de um *saber sábio* culturalmente instituído em atividades acadêmicas e originado nas universidades e espaços relacionados ou em práticas sociais instituídas em comunidades. Geralmente é veiculado no meio acadêmico-científico, apresenta linguagem voltada para os elementos teóricos envolvidos e para análise metodologicamente sustentada no contexto de

[10] A Transposição Didática, do saber sábio ao saber ensinado (tradução nossa).

pesquisa. Devido a essas características, o *saber sábio* não é adequado, em sua forma original, ao processo de ensino e aprendizagem desenvolvido na escola. Daí o motivo pelo qual o autor destaca a existência de um *saber a ensinar*, que é ligado a uma abordagem didática e que tem por finalidade organizar pedagogicamente e apresentar aos estudantes determinado *saber* por meio de livros didáticos e materiais semelhantes, nos quais sua apresentação é feita de maneira distinta daquela encontrada nos originais e está submetido às matrizes curriculares, matrizes de referência e nos conteúdos programáticos das disciplinas em âmbito escolar dentre outros. Esta etapa é denominada de Transposição Didática Externa (TDE) e ocorre fora dos sistemas de ensino sob influência da *noosfera* que, conforme Chevallard (1985) é o conjunto das fontes de influências que atuam na seleção dos conteúdos que vão compor os programas escolares e que determinar todo o funcionamento didático e da qual fazem parte cientistas, pesquisadores, professores, especialistas, políticos, autores de livros e outros agentes da educação.

Chevallard (1985) enfatiza, da mesma maneira, a existência do que chama de *saber ensinado* que tem por base o *saber a ensinar* e ocorre na sala de aula e demais ambientes de ensino-aprendizagem tais como biblioteca e, no caso desta pesquisa, laboratório de informática. O *saber ensinado* é resultado da atuação do professor em relação aos grupos de alunos no âmbito de um *sistema didático*[11], isto é, é permeado pela prática docente e suas especificidades. Chevallard (2009) identifica esta etapa como fenômeno da Transposição Didática Interna (TDI) e subdivide-a em dois momentos: o primeiro caracterizado pela construção do “texto de saber” e o segundo por colocar as *praxeologias* deste texto em ação na sala de aula por meio de um *sistema didático*, isto é, na construção das OM a partir das OD.

Em minha pesquisa, o primeiro momento da TDI consistiu na elaboração de minha proposta, ou seja, na construção da OD para a introdução das funções logarítmicas a partir de uma situação-problema envolvendo uma expressão logarítmica. Neste momento estive subordinado a muitas *condições* e *restrições* oriundas de todos os NCD. Apesar de ter certa liberdade para construir a OD foi necessário, por exemplo, considerar o NCD *Civilização* localizando a proposta no Brasil e, no nível de *sociedade*, obedecer ao Ministério da Educação no que tange a presença, importância e abordagem do objeto matemático na programação do ensino básico, mais particularmente no EM, além de lançar um olhar para a evolução tecnológica educacional atual. No nível da *escola*, adequei a proposta às exigências dos

[11] Segundo D’amore (2007, p. 232), estes três elementos (aluno, saber e professor) entram em contato entre si, física ou metaforicamente, no momento da ação didática e são perceptíveis três relações: professor – aluno, que é uma relação pedagógica; aluno – saber que é do âmbito das concepções culturais, da escola e de saber; professor – saber, onde está em jogo a epistemologia do professor.

processos seletivos para o ingresso dos alunos em instituições de nível superior, inclusive as do ENEM haja vista os anseios das famílias, alunos e da escola a qual eu estava inserido. Em termos de *pedagogia* levei em consideração como as funções logarítmicas são postas nos livros didáticos e às orientações dadas pelos documentos oficiais para o ensino de tal objeto matemático.

Considerei, ainda na construção da OD, algumas *condições* oferecidas em nível escolar: o estudo seria mediado por dois ambientes – o *papel e lápis* e o informatizado – uma vez que os alunos conheciam e haviam manipulado o *Winplot*[12] em anos letivos anteriores, tinham interesse e facilidade no manuseio dos computadores e possuíam grande disposição para o estudo em grupos, além da existência e disponibilidade do laboratório de informática da escola. Estas foram portanto, algumas das *condições* e *restrições* que marcaram o primeiro momento da TDI em minha pesquisa.

No segundo momento da TDI, o *sistema didático* foi conformado por mim (professor), os alunos e o *saber* (logaritmos e em seguida funções logarítmicas) que foi estudado em dois ambientes: o *papel e lápis* e o *informatizado*. Ressalto que estes ambientes estavam presentes simultaneamente no laboratório de informática por meio dos cadernos (e canetas) dos alunos e dos computadores munidos do *Winplot* e neles ocorreram as interações dos alunos com o saber das seguintes formas: quando os alunos resolveram uma situação-problema em seus cadernos considero que interagiram com o *saber* no ambiente *papel e lápis*, e por outro lado, quando a resolveram por meio do computador executando um *software* educativo digo que a interação com o saber ocorreu no ambiente *informatizado*.

De modo geral, o processo de estudo de funções logarítmicas que estabeleci com meus alunos do terceiro ano do Ensino Médio no laboratório de informática, no segundo momento do fenômeno da TDI, teve por objetivo colocar em prática as *praxeologias* presentes no "texto de saber" construído por mim no primeiro momento da TDI. Neste momento, houve a construção de duas OM distintas que me fizeram refletir sobre a necessidade da reconstrução das OD e foram balizadas por *condições* e *restrições* oriundas da relação entre os ambientes *papel e lápis* e *informatizado* que mobiliaram *técnicas* e *modelos epistemológicos* diferentes para os logaritmos.

[12] É um *software* de plotagem que pode desenhar e animar curvas e superfícies.

2 LOGARITMOS

Apresento neste capítulo dois tópicos referentes a meus estudos acerca dos logaritmos. No primeiro, apresento três *modelos epistemológicos* do logaritmo a partir do estudo das coleções aprovadas pelo Plano Nacional do Livro Didático (BRASIL, 2012), em particular da obra de Dante (2011), além dos trabalhos de Stewart (2006), Eves (2008), Lima (2010), Almouloud (2011) e Boyer (2012). No segundo, faço uma exposição de pesquisas correlatas no que tange ao estudo de funções e mais particularmente ao estudo das funções logarítmicas mediado por *dispositivos informáticos*. Descrevi brevemente os trabalhos de Karrer (1999), Benedetti (2003), Ferreira (2006), Rossi (2010) e Santos (2011).

2.1. MODELOS EPISTEMOLÓGICOS DO LOGARITMO

O estudo da introdução de funções logarítmicas proposto em minha intervenção com os alunos levou em conta a necessidade da realização de *tarefas* relativas ao cálculo do valor de uma incógnita presente em uma expressão logarítmica e da obtenção da ordenada de um ponto a partir de sua abscissa no gráfico. Durante a realização destas *tarefas*, no ambiente *papel e lápis* e no *informatizado*, refleti sobre como o logaritmo presente na lei de formação de uma função é calculado para cada ambiente. Esta necessidade me proporcionou um estudo acerca dos *modelos epistemológicos* de logaritmos presentes nestes dois ambientes. Exponho três *modelos epistemológicos* denominados, por mim, de Logaritmo como Expoente (MELCE), Logaritmo como Série (MELCS) e Logaritmo como Área (MELCA). Nestes modelos encontrei diferentes maneiras de calcular o logaritmo de um número real, porém utilizei apenas os dois primeiros ao analisar os dados obtidos em minha pesquisa em virtude dos ambientes *papel e lápis* e *informatizado*. A presença de dois *modelos epistemológicos* distintos associados aos ambientes *papel e lápis* e *informatizado* contribuiu para minha análise dos dados obtidos na construção das OM com os sujeitos de minha pesquisa, além de subsidiarem a reconstrução do "texto de saber" no que tange às OD.

2.1.1. MODELO EPISTEMOLÓGICO LOGARITMO COMO EXPOENTE (MELCE)

O MELCE figura como dominante nos livros didáticos de matemática para o EM de circulação no Brasil e dentre eles, os livros das coleções aprovadas no PNLD 2012. A seguir faço uma breve exposição de como os logaritmos são apresentados nestas coleções e no material didático utilizado pelos sujeitos da pesquisa (SILVA, 2012) no intuito de subsidiar uma análise praxeológica que caracterize o MELCE a partir de um dos autores aprovados pelo PNLD 2012 e do material didático em questão.

As coleções analisadas foram Matemática – Contexto e Aplicações (DANTE, 2011), Conexões com a Matemática (BARROSO, 2010), Matemática (PAIVA, 2012), Matemática – Ciência e Aplicações (IEZZI et al., 2010), Matemática – Ciência, Linguagem e *Tecnologia* (Ribeiro, 2011), Matemática – Ensino Médio (SMOLE, 2010) e Matemática – Novo Olhar (SOUZA, 2010), além do material didático intitulado Matemática para o Vestibular (SILVA, 2012) utilizado pelos sujeitos da pesquisa na escola.

Estas obras abordam os logaritmos em seus volumes 1 sempre após o estudo das potências e das funções exponenciais. Ao apresentarem os logaritmos, estes autores partem da definição e suas consequências para em seguida abordarem as propriedades operatórias e mudanças de base. Posteriormente são apresentadas as funções logarítmicas, seus gráficos, equações e inequações logarítmicas. O material didático Matemática para o Vestibular (SILVA, 2012) apresenta o logaritmo da maneira análoga ao exposto nas coleções analisadas à exceção das equações logarítmicas que não foram apresentadas em destaque e das inequações logarítmicas que figuram juntamente com as inequações do 1º e 2º graus, modulares e exponenciais em um capítulo à parte.

O livro escolhido para a análise praxeológica é de autoria de Dante (2011) que além de figurar entre as obras apontadas pelo PNLD foi utilizado como livro-texto dos sujeitos de minha pesquisa quando cursaram o 2º ano do EM.

Dante (2011) inicia o capítulo apresentando a *tarefa:* resolver uma equação exponencial oriunda de uma situação-problema, exposta na figura 10.

Figura 10: *Tarefa* introdutória do MELCE.

Segundo o Banco Mundial, a previsão do crescimento demográfico na América Latina, no período de 2004 a 2020, é de 1,2% ao ano, aproximadamente. Em quantos anos a população da América Latina vai dobrar se a taxa de crescimento continuar a mesma?

Nessas condições, podemos organizar o seguinte quadro:

Tempo	População
Início	P_0
1 ano	$P_1 = P_0 \cdot 1{,}012$
2 anos	$P_2 = (P_0 \cdot 1{,}012)1{,}012 = P_0(1{,}012)^2$
3 anos	$P_3 = P_0(1{,}012)^3$
⋮	⋮
x anos	$P_x = P_0(1{,}012)^x$

Fique atento

$100\% + 1{,}2\% = 101{,}2\% = \dfrac{101{,}2}{100} = 1{,}012$

América Latina: divisão política

Fonte: Adaptado de SIMIELLI, M. E. *Geoatlas*. São Paulo: Ática, 2009.

Supondo que a população dobrará após **x** anos, temos:

$$P_x = 2P_0$$

Daí:

$$\cancel{P_0}(1{,}012)^x = 2\cancel{P_0} \Leftrightarrow (1{,}012)^x = 2$$

Não é possível resolver essa equação usando os conhecimentos adquiridos até aqui.

Com o objetivo de transformar uma equação exponencial como essa numa igualdade entre potências de mesma base, vamos desenvolver a noção de *logaritmo*.

Fonte: Dante (2011, p. 248).

Por meio desta *tarefa* o autor encaminha ao estudo dos logaritmos devido a impossibilidade de aplicação da *técnica* de transformação da equação em uma igualdade de potências de mesma base, para tanto afirma que no intuito de utilizar esta *técnica* vai desenvolver a noção de logaritmo. Porém, constatei que apesar de anunciar o uso da *técnica* de transformação da equação em uma igualdade de potências de mesma base, ao enfrentar esta *tarefa* posteriormente foram aplicadas outras *técnicas* características das *praxeologias* do MELCE como mostra a figura 11.

Figura 11: Enfrentamento da *tarefa* introdutória do MELCE.

Resolução:

População do ano-base = P_0

População após um ano = $P_0(1{,}012) = P_1$

População após dois anos = $P_0(1{,}012)^2 = P_2$

$\vdots$

População após **x** anos = $P_0(1{,}012)^x = P_x$

Supondo que a população dobrará em relação ao ano-base após **x** anos, temos:

$P_x = 2P_0 \Rightarrow \cancel{P_0}(1{,}012)^x = 2\cancel{P_0} \Rightarrow (1{,}012)^x = 2$

Aplicando logaritmos, temos:

$\log(1{,}012)^x = \log 2 \Rightarrow x \cdot \log 1{,}012 = \log 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{\log 2}{\log 1{,}012} \simeq \dfrac{0{,}30103}{0{,}00518} \simeq 58$

A população dobrará em 58 anos, aproximadamente.

Fonte: Dante (2011, p. 262).

Considero que apesar do discurso de que, na realização da *tarefa* apresentada, o estudo de logaritmos permitiria o uso de uma *técnica* estudada anteriormente, o que ocorre é a construção de uma *praxeologia* que introduz novas *técnicas* que em determinadas *tarefas*, articulam-se com *técnicas* tomadas como rotineiras pelo autor, tais como: resolução de equações, resolução de inequações, cálculo de potências, aplicação de propriedades de potências, promoção da mudança de incógnita em uma equação, substituição dos valores de uma ou mais incógnitas em uma expressão algébrica, dentre outra que considerei transparentes por fugirem do escopo desta pesquisa.

A definição de logaritmo é declarada após a proposição da *tarefa*: A que número x se deve elevar o número 2 para se obter 8? Isto é, calcular o valor do expoente x na equação $2^x = 8$. Em seguida é aplicada a *técnica* da igualdade entre potências de mesma base obtendo-se $2^x = 2^3$ e $x = 3$. Então o valor 3 é denominado logaritmo do número 8 na base 2 e é representado por $\log_2 8 = 3$. Assim é estabelecida a relação entre logaritmo e o expoente de uma potência, neste caso $\log_2 8 = 3 \Leftrightarrow 2^3 = 8$, ou ainda, $2^{\log_2 8} = 8$. Deste modo, o autor caracteriza o logaritmo de 8 na base 2 como sendo o expoente que se deve dar à base 2 para obter 8 e evidencia esta relação conforme mostra a Figura 12.

Figura 12: Evidência da relação entre logaritmo e expoente, característica do MELCE.

Fique atento

Perceba que o logaritmo é um expoente.

Fonte: Dante (2011, p. 249).

Em seguida esta definição é formalizada como mostra a figura 13.

Figura 13: Definição de logaritmo no MELCE.

Dados os números reais positivos **a** e **b**, com $a \neq 1$, se $b = a^c$, então o expoente **c** chama-se logaritmo de **b** na base **a**, ou seja, $\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$, com **a** e **b** positivos e $a \neq 1$.

Fonte: Dante (2011, p. 249).

A equivalência entre o logaritmo e o expoente de uma potência também é evidenciada pelo autor de acordo com a Figura 14[13].

Figura 14: Equivalência entre as formas logarítmica e exponencial no MELCE.

Forma logarítmica	Forma exponencial
$\log_a b = c \begin{cases} \mathbf{c}: \text{logaritmo} \\ \mathbf{a}: \text{base do logaritmo} \\ \mathbf{b}: \text{logaritimando} \end{cases}$	$a^c = b \begin{cases} \mathbf{p}: \text{potência} \\ \mathbf{a}: \text{base da potência} \\ \mathbf{c}: \text{expoente} \end{cases}$

Fonte: Dante (2011, p. 249).

O *modelo epistemológico* que denomino MELCE é caracterizado por *praxeologias* cujas *técnicas* tornam-se inteligíveis pela *tecnologia* da definição de logaritmo de um número real dentre outras e é importante ressaltar que a maioria das *técnicas* estabelecidas ao longo do estudo dos logaritmos são articulações entre as *técnicas* apresentadas neste capítulo e *técnicas* estudadas nos capítulos anteriores do livro didático.

Classifiquei as *tarefas* presentes em Dante (2011) em 18 tipos. Estes *tipos* foram eleitos por mim em função das *técnicas* utilizadas no enfrentamento de suas *tarefas*, pois considerei que *tarefas* pertencentes ao mesmo tipo são enfrentadas com as mesmas *técnicas*, formando assim os blocos praxeológicos. A seguir apresento os dezoito *tipos de tarefas* encontrados em Dante (2011) com algumas *tarefas* os exemplificando:

a) *Tipo de tarefas T1*: É composto por *tarefas* que são realizadas pela *técnica* da transformação de uma expressão logarítmica em uma expressão equivalente na forma de potência. Neste caso, a *tecnologia* que torna a *técnica* inteligível é a definição de logaritmo.

Exemplo de *tarefa* do *tipo T1*:

t1. Escrever um logaritmo em forma de potência;

[13] Há um erro tipográfico na forma exponencial, pois onde se lê p, deve-se ler b.

Figura 15: *Tarefa* proposta 2.

Usando potência, determine o equivalente a cada logaritmo:

a) $\log_2 7 = x$ b) $m = \log_p r$ c) $\log 0,1 = -1$

Fonte: Dante (2011, p. 250).

b) *Tipo de tarefas T2*: É composto por *tarefas* que são realizadas por uma *técnica* que articula as *técnicas* da transformação de uma expressão logarítmica em uma expressão equivalente na forma de potência e da resolução de equação exponencial.

Apresento, na Figura 16, o enfrentamento de uma *tarefa* pertencente ao *tipo T2* extraído de Dante (2011).

Figura 16: Enfrentamento de uma *tarefa* pertencente ao *tipo T2*.

Determine:

a) $\log_2 128$

Resolução:

a) Representando por **x** o valor procurado, temos:

$\log_2 128 = x \overset{\text{def.}}{\Rightarrow} 2^x = 128 = 2^x = 2^7 \Rightarrow x = 7$

Portanto, $\log_2 128 = 7$.

Fonte: Dante (2011, p. 249).

De fato, a *técnica* utilizada consiste na aplicação da *técnica* da transformação de uma expressão logarítmica em uma expressão equivalente na forma de potência, fato destacado pelo autor, obtendo assim uma equação exponencial para em seguida aplicar a *técnica* de resolução deste tipo de equação. As *tecnologias* que tornam esta *técnica* inteligível são as definições de logaritmo e potências, além das propriedades das potências.

Observo que o bloco *prático-técnico* deixa evidente ligação do MELCE com as potências. Daí a necessidade de se propor o estudo dos logaritmos e funções logarítmicas após o estudo de potências e funções exponenciais como aconteceu em todas as coleções analisadas.

c) *Tipo de tarefas T3*: É composto por *tarefas* que são realizadas por uma *técnica* que articula as *técnicas* da transformação de uma expressão logarítmica em uma expressão equivalente na forma de potência e vice-versa e do cálculo de potências.

As *tecnologias* que tornam inteligível esta *técnica* são as definições de logaritmo e potência.

Exemplo de *tarefa* do *tipo T3*:

t5. Calcular o valor de uma potência e escrevê-la em forma de logaritmo;

Figura 17: *Tarefa* proposta 1.

Calcule cada potência e depois escreva o logaritmo correspondente:

a) 2^3 b) 7^2 c) 10^3 d) 3^{-1} e) $7^{\frac{1}{2}}$

Fonte: Dante (2011, p. 250).

t10. Calcular o logaritmando de um logaritmo utilizando a calculadora;

Figura 18: *Tarefa* proposta 42.

Com o auxílio de uma calculadora, calcule utilizando as teclas das quatro operações fundamentais, a tecla log e a 10^x (caso não tenha uma calculadora à disposição, indique o roteiro para efetuar o cálculo):

c) **x** tal que $\log x = 1{,}35$

f) **x** tal que $\log x = -1{,}155$

Fique atento

Em **g** e **h** calculamos log x e depois **x**.

Fonte: Dante (2011, p. 261).

A *tarefa t10* apresenta uma peculiaridade em relação às demais *tarefas* pertencentes ao *tipo T3*, pois é necessário fazer uso da calculadora. O uso deste *dispositivo informático* impõe *condições* e *restrições* que balizarão a construção da *praxeologia*. Como é permitido apenas o uso das teclas <log> e <10^x> é necessário aplicar a *técnica* da transformação de uma expressão logarítmica em uma expressão equivalente na forma de potência, obtendo-se no item (c), por exemplo, a potência $x = 10^{1,35}$. Para calcular o valor desta potência utiliza-se a tecla $<10^x>$ da calculadora. Neste caso, considero que foi aplicada uma *técnica* para o cálculo do valor de uma potência característica do *dispositivo informático* cuja *tecnologia* não está explícita.

d) *Tipo de tarefas T4*: É composto por *tarefas* que são realizadas por uma *técnica* que articula as *técnicas* da transformação de uma expressão logarítmica em uma expressão equivalente na forma de potência e da resolução de equações.

As *tecnologias* que tornam inteligível estas *técnicas* são a definições de logaritmo e o princípio de equivalência entre igualdades.

Exemplo de *tarefas* do *tipo T4*:

t11. Calcular a base de um logaritmo;

Figura 19: *Tarefa* resolvida 2.

Sabe-se que $\log_a 25 = 2$. Calcule **a**.

Fonte: Dante (2011, p. 145).

e) *Tipo de tarefas T5*: É composto por *tarefas* que são realizadas por uma *técnica* que articula as *técnicas* da logaritmização e da resolução de equações.

A *técnica* que denominei logaritmização afirma que $\log_a x = \log_a y \Leftrightarrow x = y$, com $x > 0$, $y > 0$, $a > 0$ e $a \neq 1$.

Apresento o enfrentamento da *tarefa* proposta 16 (item d) (DANTE, 2011, p. 252) do *tipo T5* no intuito de esclarecer a articulação mencionada: Calcule o valor de x em $\log_{\frac{1}{5}}(x-1) = \log_{\frac{1}{5}} 3$.

Pela *técnica* da logaritmização temos que $x > 1$ e que $\log_{\frac{1}{5}}(x-1) = \log_{\frac{1}{5}} 3 \Leftrightarrow x - 1 = 3$, pela *técnica* de resolução de equações vem que $x = 4$ que é maior do que 1 e, portanto, o valor de x é 4.

As *tecnologias* que tornam esta *técnica* inteligível são a definição de logaritmo e o princípio de equivalência entre igualdades.

Exemplo de *tarefa* do *tipo T5*:

t13. Calcular o valor de uma incógnita em uma igualdade entre logaritmos;

Figura 20: *Tarefa* proposta 16.

Calcule o valor de **x**:

a) $\log_6 x = \log_6 8$

b) $\log_3 8^x = \log_3 16$

c) $\log x^2 = \log x$

d) $\log_{\frac{1}{5}}(x - 1) = \log_{\frac{1}{5}} 3$

Fonte: Dante (2011, p. 252).

f) *Tipo de tarefas T6*: É composto por *tarefas* que são realizadas por uma *técnica* que articula as *técnicas* da condição de existência do logaritmo e da resolução de inequações.

Esta *técnica* torna-se inteligível pela *tecnologia* da definição de logaritmo e do princípio de equivalência entre desigualdades.

Exemplo de *tarefa* do *tipo T6*:

t14. Determinar os valores reais de uma incógnita presente em uma expressão que compõe o logaritmando de um logaritmo;

Figura 21: *Tarefa* proposta 11.

Determine os valores reais de **x** para os quais existe:

a) $\log_2 (x - 3)$

b) $\log_{\frac{1}{3}} (x^2 - 7x + 10)$

Fonte: Dante (2011, p. 251).

g) *Tipo de tarefas T7*: É composto por *tarefas* que são realizadas por uma *técnica* que articula as *técnicas* da transformação de uma expressão logarítmica em uma expressão equivalente na forma de potência, cálculo de potências, além das propriedades de potências.

Esta *técnica* torna-se inteligível pela *tecnologia* das definições de logaritmos e potências.

Exemplo de *tarefa* do *tipo T7*:

t17. Calcular o valor de expressões numéricas envolvendo logaritmos;

Figura 22: *Tarefa* proposta 15.

Calcule o valor das expressões:

e) $10^{3 \cdot \log_{10} 2}$

f) $2^{1 + \log_2 3}$

c) $2^{\log_2 6 \cdot \log_6 10}$

g) $2^{2 + 3\log_2 5}$

d) $3^{\log_2 7 \cdot \log_3 2}$

h) $2^{3 - 2\log_2 6}$

Fonte: Dante (2011, p. 252).

h) *Tipo de tarefas T8*: É composto por *tarefas* que são realizadas pela aplicação da *técnica* das propriedades operatórias dos logaritmos. Esta *técnica* torna-se inteligível pela *tecnologia* da definição de logaritmo e das propriedades das potências.

Exemplo de *tarefa* do *tipo T8*:

t18. Determinar o desenvolvimento logarítmico de uma expressão envolvendo logaritmo;

Figura 23: *Tarefa* resolvida 10.

Determine o desenvolvimento logarítmico da expressão $\log \left(\frac{a\sqrt{b}}{c^3} \right)$.

Fonte: Dante (2011, p. 257).

i) *Tipo de tarefas T9*: É composto por *tarefas* que são realizadas pela aplicação da *técnica* de mudança de base. Esta *técnica* torna-se inteligível pela *tecnologia* da definição de logaritmo.

Exemplo de *tarefa* do *tipo T9*:

t24. Escrever um logaritmo mudando sua base;

Figura 24: *Tarefa* proposta 18.

Escreva:
a) $\log_5 8$ usando logaritmos na base 4;

Fonte: Dante (2011, p. 256).

j) *Tipo de tarefas T10*: É composto por *tarefas* que são realizadas por uma *técnica* que articula as *técnicas* de mudança de base e da transformação de uma expressão logarítmica em uma expressão equivalente na forma de potência. Esta *técnica* torna-se inteligível pela *tecnologia* das definições de logaritmos.

Exemplo de *tarefa* do *tipo T10*:

t27. Calcular o valor de um logaritmo a partir de outro(s) de base diferente;

Figura 25: *Tarefa* proposta 33.

Se $\log_b a = m$, calcule $\log_a b$.

Fonte: Dante (2011, p. 258).

k) *Tipo de tarefas T11*: É composto por *tarefas* que são realizadas por uma *técnica* que articula as *técnicas* de mudança de base e propriedades operatórias dos logaritmos. Esta *técnica* torna-se inteligível pela *tecnologia* da definição de logaritmo e propriedades das potências.

Exemplo de *tarefa* do *tipo T11*:

t29. Calcular o logaritmo de um número em função de logaritmos de outros números;

Figura 26: *Tarefa* proposta 47.

Dados $\log 2 = 0{,}30$, $\log 3 = 0{,}48$ e $\log 5 = 0{,}70$, calcule, com aproximação de duas casas decimais e usando mudança de base, os logaritmos:

c) $\log_8 9$

Fonte: Dante (2011, p. 261).

l) *Tipo de tarefas T12*: É composto por *tarefas* que são realizadas por uma *técnica* que articula as *técnicas* de mudança de base, da transformação de uma expressão logarítmica em uma expressão equivalente na forma de potência e das propriedades operatórias dos logaritmos. Esta *técnica* torna-se inteligível pela *tecnologia* da definição de logaritmo e propriedades das potências.

Exemplo de *tarefa* do *tipo T12*:

t30. Calcular o valor de um logaritmo a partir de outro(s) de base diferente;

Figura 27: *Tarefa* resolvida 15.

Dado $\log_b a = 6$, calcule $\log_a b^3$.

Fonte: Dante (2011, p. 257).

m) *Tipo de tarefas T13*: É composto por *tarefas* que são realizadas por uma *técnica* que articula as *técnicas* da transformação de uma expressão logarítmica em uma expressão equivalente na forma de potência e da transformação de um cologaritmo em um logaritmo. Esta *técnica* torna-se inteligível pelas *tecnologias* das definições de logaritmo e cologaritmo.

Exemplo de *tarefas* do *tipo T13*:

t33. Calcular o valor de um cologaritmo;

Figura 28: *Tarefa* proposta 39.

Pela definição de cologaritmo, calcule:

a) $\text{colog}_2\, 8$ c) $\text{colog}_{10}\, 0{,}001$

b) $\text{colog}_3 \left(\frac{1}{81}\right)$ d) $\text{colog}_2\, 2\sqrt{2}$

Fonte: Dante (2011, p. 259).

n) *Tipo de tarefas T14*: É composto por *tarefas* que são realizadas por uma *técnica* que articula as *técnicas* da transformação de uma expressão logarítmica em uma expressão equivalente na forma de potência e propriedades operatórias dos logaritmos. Esta *técnica* torna-se inteligível pela *tecnologia* da definição de logaritmo e das propriedades das potências.

Exemplo de *tarefas* do *tipo T14*:

t35. Calcular o número de algarismos de uma potência a partir de logaritmos conhecidos;

Figura 29: *Tarefa* resolvida 19.

Sabendo que log 2 = 0,301 calcule o número de algarismos da potência 5^{100}.

Fonte: Dante (2011, p. 260).

o) *Tipo de tarefas T15*: É composto por *tarefas* que são realizadas por uma *técnica* que articula as *técnicas* de logaritmização e propriedades operatórias dos logaritmos. Esta *técnica* torna-se inteligível pela *tecnologia* da definição de logaritmo e das propriedades das potências.

Exemplo de *tarefa* do *tipo T15*:

t39. Resolver equações exponenciais utilizando logaritmos;

Figura 30: *Tarefa* resolvida 20.

Resolva a equação $3^x = 5$.

Fonte: Dante (2011, p. 261).

p) *Tipo de tarefas T16*: É composto por *tarefas* que são realizadas por uma *técnica* que articula as *técnicas* de substituição de valores de parâmetros de uma expressão algébrica, logaritmização e propriedades operatórias dos logaritmos. Esta *técnica* torna-se inteligível pela *tecnologia* das expressões algébricas, definição de logaritmo e propriedades de potências.

Exemplo de *tarefa* do *tipo T16*:

t40. Resolver equações exponenciais oriundas de situações-problema utilizando logaritmos;

Figura 31: *Tarefa* resolvida 23.

Sabemos que o número de bactérias numa cultura, depois de um tempo **t**, é dado por $N = N_0 \cdot e^{rt}$, em que $\mathbf{N_0}$ é o número inicial (quando t = 0) e **r** é a taxa de crescimento relativo. Em quanto tempo o número de bactérias dobrará se a taxa de crescimento contínuo é de 5% ao minuto?

Fonte: Dante (2011, p. 262).

q) *Tipo de tarefas T17*: É composto por *tarefas* que são realizadas por uma *técnica* que articula as *técnicas* de mudança de incógnita, resolução de equações do 2º grau, logaritmização e propriedades operatórias de logaritmos. Esta *técnica* torna-se inteligível pela *tecnologia* do princípio de equivalência entre expressões algébricas, fórmula resolutiva de uma equação do 2º grau e a definição de logaritmo.

Exemplo de *tarefa* do *tipo T17*:

t41. Resolver equações exponenciais utilizando logaritmos;

Figura 32: *Tarefa* resolvida 21.

Dados log 2 = 0,30; log 3 = 0,48 e log 5 = 0,70, resolva a equação $5^{2x} - 7 \cdot 5^{x} + 12 = 0$.

Fonte: Dante (2011, p. 261).

r) *Tipo de tarefas T18*: É composto por *tarefas* que são realizadas por uma *técnica* que articula as *técnicas* de substituição de valores de parâmetros de uma expressão algébrica, da transformação de uma expressão logarítmica em uma expressão equivalente na forma de potência e das propriedades operatórias dos logaritmos. Esta *técnica* torna-se inteligível pela *tecnologia* das expressões algébricas e definição de logaritmo.

Exemplo de *tarefas* do *tipo T18*:

t42. Calcular o valor de um logaritmo oriundo de uma situação-problema;

Figura 33: *Tarefa* proposta 53.

O pH de uma solução é o logaritmo decimal do inverso da concentração de H_3O^+. Qual é o pH de uma solução cuja concentração de H_3O^+ é $4{,}5 \cdot 10^{-5}$ mol/ℓ?

Fonte: Dante (2011, p. 261).

No Quadro 1, apresento os dezoito *tipos de tarefas* encontrados em Dante (2011). Este quadro é particularmente importante pois caracteriza o MELCE ao relacionar as *tarefas*, *técnicas*, *tecnologias* e *teoria* para cada tipo de *tarefa*.

Quadro 1: *Praxeologias* características do MELCE extraídas de Dante (2011).

Tipos de *Tarefas*	*Tarefas*	*Técnicas*	*Tecnologia*	Teoria
T1	*t1 e t2.*	Transformação de uma expressão logarítmica em uma expressão equivalente na forma de potência.	Definição de logaritmo.	Análise Real.
T2	*t3 e t4.*	Transformação de uma expressão logarítmica em uma expressão equivalente na forma de potência e resolução de equação exponencial.	Definição de logaritmo, definição de potência e propriedades de potências.	Análise Real.

Tipos de *Tarefas*	*Tarefas*	*Técnicas*	*Tecnologia*	Teoria
T3	*t5, t6, t7, t8, t9 e t10.*	Transformação de uma expressão logarítmica em uma expressão equivalente na forma de potência e cálculo de potências.	Definição de logaritmo e potências.	Análise Real.
T4	*t11 e t12.*	Transformação de uma expressão logarítmica em uma expressão equivalente na forma de potência e resolução de equações.	Definição de logaritmo e o princípio de equivalência entre igualdades.	Análise Real.
T5	*t13.*	Logaritmização e resolução de equações.	Definição de logaritmo e o princípio de equivalência entre igualdades.	Análise Real.
T6	*t14, t15 e t16.*	Condição de existência do logaritmo e resolução de inequações.	Definição de logaritmo e do princípio de equivalência entre desigualdades.	Análise Real.
T7	*t17.*	Transformação de uma expressão logarítmica em uma expressão equivalente na forma de potência e propriedades de potências.	Definição de logaritmo e potência.	Análise Real.
T8	*t18, t19, t20, t21, t22 e t23.*	Propriedades operatórias dos logaritmos.	Definição de logaritmo e propriedades de potências.	Análise Real.
T9	*t24, t25 e t26.*	Mudança de base.	Definição de logaritmo.	Análise Real.
T10	*t27 e t28.*	Mudança de base e transformação de uma expressão logarítmica em uma expressão equivalente na forma de potência.	Definição de logaritmo.	Análise Real.
T11	*t29.*	Mudança de base e propriedades operatórias dos logaritmos.	Definição de logaritmo e propriedades de potências.	Análise Real.
T12	*t30, t31 e t32.*	Mudança de base, transformação de uma expressão logarítmica em uma expressão equivalente na forma de potência e propriedades operatórias dos logaritmos.	Definição de logaritmo e propriedades de potências.	Análise Real.

Tipos de *Tarefas*	*Tarefas*	*Técnicas*	*Tecnologia*	Teoria
T13	*t33 e t34.*	Transformação de uma expressão logarítmica em uma expressão equivalente na forma de potência e da transformação de um cologaritmo em logaritmo.	Definição de logaritmo e cologaritmo.	Análise Real.
T14	*t35, t36, t37 e t38.*	Transformação de uma expressão logarítmica em uma expressão equivalente na forma de potência e propriedades operatórias dos logaritmos.	Definição de logaritmo e as propriedades de potências.	Análise Real.
T15	*t39.*	Logaritmização e propriedades operatórias dos logaritmos.	Definição de logaritmo e as propriedades de potências.	Análise Real.
T16	*t40.*	Substituição de valores de parâmetros de uma expressão algébrica, logaritmização e propriedades operatórias dos logaritmos.	Definição de logaritmo, expressões algébricas e propriedades de potências.	Análise Real.
T17	*t41.*	Mudança de incógnita, resolução de equações do 2º grau, logaritmização e propriedades operatórias de logaritmos.	Definição de logaritmo, princípio de equivalência entre expressões algébricas e fórmula resolutiva de uma equação do 2º grau.	Análise Real.
T18	*t42.*	Substituição de valores de parâmetros de uma expressão algébrica, transformação de uma expressão logarítmica em uma expressão equivalente na forma de potência e propriedade dos logaritmos.	Definição de logaritmo e expressões algébricas.	Análise Real.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Entendo que as *praxeologias* que modelam o estudo de logaritmos em Dante (2011) caracterizam o MELCE, pois apresentam blocos *prático-técnicos* $\Pi i = [Ti / \tau i]$ marcados por *técnicas* próprias deste estudo de logaritmos articuladas com *técnicas* estudadas anteriormente, isto é, o *saber-fazer* na realização destas *tarefas* pressupõe duas instâncias: a primeira, e anterior ao estudo de logaritmos, requer o conhecimento de *técnicas* relativas, em grande parte, ao estudo de potências e equações exponenciais caracterizando a necessidade do estudo de tais objetos antecipadamente e a segunda, que requer ênfase na definição de logaritmo como expoente. A presença desta definição como *tecnologia* em todos os blocos *tecnológico-teórico*s $\Lambda i = [\theta i / \Theta]$ dos dezoito *tipos de tarefas* encontrados garante que o saber requerido nas *praxeologias* estabelecidas exige, mesmo que não exclusivamente, o uso da definição de logaritmo tal qual foi apresentada em Dante (2011).

2.1.2. MODELO EPISTEMOLÓGICO LOGARITMO COMO SÉRIE (MELCS)

O MELCS diferencia-se do MELCE em vários pontos, dentre os quais a possibilidade de sua implementação em *dispositivos informáticos,* a maneira como o cálculo do logaritmo de um número real é feito e por não figurar nos livros didáticos de matemática para o EM.

De acordo com Boyer (2012, p. 269) uma das fórmulas de aproximação para logaritmos, conhecida como "Série de Mercator", foi apresentada por Nicolaus Mercator (1620-1687) em sua obra intitulada Logarithmotechnia (1668) como segue na figura 34:

Figura 34: Série de Mercator para o cálculo aproximado do logaritmo natural de 1 + x.

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x} = \int_0^x \left(1 - x + x^2 - x^3 + \cdots\right) dx = \ln(1+x)$$
$$= \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots.$$

Fonte: Boyer (2012, p. 269).

Ou de forma equivalente

Equação 1: Série de Mercator para ln (1 + x) como somatório.

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$$

Fonte: Elaborada pelo autor.

Esta série converge para $-1 < x \leq 1$ e substituindo-se x por $-x$, como mostra Eves (2008), segue-se uma série que converge para $-1 \leq x < 1$.

Figura 35: Série para o cálculo aproximado do logaritmo natural de 1 – x.

$$\ln(1 - x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \ldots$$

Fonte: Eves (2008, p. 213).

Eves (2008) mostra ainda que uma série cujos termos são as diferenças dos termos correspondentes de duas séries dadas converge para todos os valores de x para os quais ambas as séries convergem, portanto para $-1 < x < 1$ tem-se que:

Figura 36: Série para o cálculo aproximado do logaritmo natural de (1 + x)/(1 – x).

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \ln(1+x) - \ln(1-x)$$

$$= 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \ldots\right)$$

Fonte: Eves (2008, p.413).

Fazendo-se $x = 1/(2N+1)$, observamos que $-1 < x < 1$, para todo N positivo, e $x = (1+x)/(1-x) = (N+1)/N$. Substituindo na equação apresentada na figura 3, obtemos

Figura 37: Série para o cálculo aproximado do logaritmo natural de N + 1.

$$\ln(N+1) = \ln N + 2\left[\frac{1}{2N+1} + \frac{1}{3(2N+1)^3} + \frac{1}{5(2N+1)^5} + \ldots\right]$$

Fonte: Eves (2008, p.413).

Esta série converge, e bastante rapidamente, para todos os valores positivos de N configurando uma maneira de calcular o logaritmo de um número real positivo que difere da apresentada no MELCE. A figura 38 mostra uma *tarefa* apresentada por Eves (2008).

Figura 38: *Tarefa t(a)* sobre o cálculo de logaritmo proposta por Eves (2008).

(a) Fazendo $N = 1$, calcule ln 2 até a quarta casa decimal.

Fonte: Eves (2008, p. 413)

A figura 39 mostra a realização desta *tarefa* utilizando a equação 1 e o resultado apresentado na figura 37.

Figura 39: Realização da *tarefa t(a)*.

Fazendo $x = 0$ na equação $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$ tem-se que $\ln 1 = 0$.

Para calcular ln 2, basta fazer $N = 1$ na equação

$$\ln(N+1) = \ln N + 2\left[\frac{1}{2N+1} + \frac{1}{3(2N+1)^3} + \frac{1}{5(2N+1)^5} + \ldots\right], \text{ daí vem}$$

$$\ln(1+1) = \ln 1 + 2\left[\frac{1}{2.1+1} + \frac{1}{3(2.1+1)^3} + \frac{1}{5(2.1+1)^5} + \ldots\right] \text{ e então}$$

$$\ln 2 = 2\left[\frac{1}{3} + \frac{1}{81} + \frac{1}{1215} + \frac{1}{15309} + \frac{1}{177147} + \ldots\right].$$

Calculando ln 2 temos

$$\ln 2 = 2\left[\frac{1}{3}\right] = 0,666666667$$

$$\ln 2 = 2\left[\frac{1}{3} + \frac{1}{81}\right] = 0,691358025$$

$$\ln 2 = 2\left[\frac{1}{3} + \frac{1}{81} + \frac{1}{1215}\right] = 0,693004115$$

$$\ln 2 = 2\left[\frac{1}{3} + \frac{1}{81} + \frac{1}{1215} + \frac{1}{15309}\right] = 0,693134757$$

$$\ln 2 = 2\left[\frac{1}{3} + \frac{1}{81} + \frac{1}{1215} + \frac{1}{15309} + \frac{1}{177147} + \ldots\right] = 0,693146047$$

Portanto o valor solicitado com quatro casas decimais é $\ln 2 = 0,6931$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Esta *tarefa* remete ao uso de *técnicas* do MELCS, pois exige que se faça $N = 1$ impedindo a utilização de *técnicas* do MELCE por exemplo. A *técnica* que apliquei pra a realização da *tarefa (a)* consistiu na substituição do valor numérico de N e do cálculo o valor da expressão ln 2 com um número cada vez maior de parcelas. Esta *técnica* também alcança as *tarefas* apresentadas por Eves (2008) mostradas na figura 40.

Figura 40: *Tarefas t(b)* e *t(c)* sobre o cálculo de logaritmo propostas por Eves (2008).

(b) Calcule ln 3 até a quarta casa decimal.

(c) Calcule ln 4 até a quarta casa decimal.

Fonte: Eves (2008, p. 413).

O Quadro 2 a seguir apresenta a OMP em torno do tipo de *tarefas T1* apresentado por Eves (2008).

Quadro 2: OMP em torno de *T1*.

Tipo de Tarefas	*Tarefas*	*Técnicas*	*Tecnologia*	*Teoria*
T1	*t(a), t(b)* e *t(c).*	Valor numérico da série.	Definição de logaritmo como série.	Análise Real.

Fonte: Elaborada pelo autor.

O MELCS compõe *praxeologias* distintas das apresentadas no MELCE devido a definição de logaritmo ser apresentada como série e não como expoente. Chamo atenção para duas situações que emergem desta diferença: a primeira diz respeito às *técnicas* associadas ao estudo de potências que são necessárias nas articulações promovidas pelo MELCE e que aqui não se fizeram presentes, e a segunda ao processo de cálculos realizados por *dispositivos informáticos* que requer um modelo epistemológico que possa ser implementado pelas linguagens de programação, o que indica a possibilidade e facilidade de implementação do MELCE nestes dispositivos.

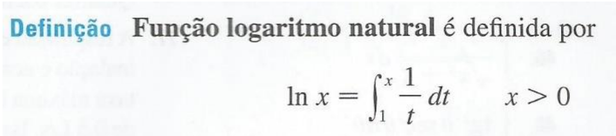
2.1.3. MODELO EPISTEMOLÓGICO LOGARITMO COMO ÁREA (MELCA)

Este *modelo epistemológico* é apresentado em livros de cálculo diferencial e integral e define o logaritmo como uma integral para em seguida apresentar a função exponencial como sua inversa. Deste modo, não são utilizadas as definições de logaritmo apresentadas anteriormente e nem as *técnicas* relacionadas aos estudos de potências e equações exponenciais, além de definir a função exponencial posteriormente à função logarítmica de modo oposto ao que ocorre nos livros de matemática do EM, como afirma Stewart (2006).

> Em vez de começar com a^x e definir $\log_a x$ como sua inversa, vamos definir ln x como uma integral e a partir daí definir a função exponencial como sua função inversa. Nesta secção você deve ter em mente que nós não usaremos nenhuma definição anterior e resultados relacionados com funções exponenciais e logarítmicas. (STEWART, p. 420, 2006)

O logaritmo natural definido como uma integral é mostrado na figura 41.

Figura 41: Definição de logaritmo no MELCA.



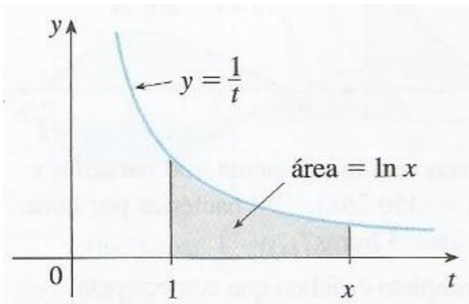
Definição **Função logaritmo natural** é definida por

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt \qquad x > 0$$

Fonte: Stewart (2006, p.420).

A função $\frac{1}{t}$ é contínua para valores reais tais que $t > 0$ e consequentemente sua integral sempre existe, isto é, assim como nas outras definições de logaritmo deve-se ter $x > 0$. Se $x > 1$, então ln x pode ser interpretada geometricamente como a área sob a hipérbole $\frac{1}{t}$ de $t = 1$ até $t = x$ como mostra a figura 42.

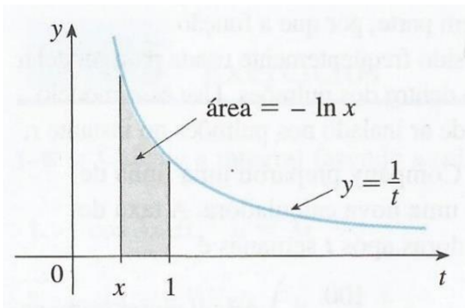
Figura 42: Interpretação geométrica de ln x.



Fonte: Stewart (2006, p. 420).

Para $x = 1$, temos que $\ln 1 = \int_1^x \frac{1}{t}dt = 0$ e para $0 < x < 1$ temos $\ln 1 = \int_1^x \frac{1}{t}dt = -\int_x^1 \frac{1}{t}dt < 0$, logo o ln x é o oposto do valor da área, como mostra a figura 43.

Figura 43: Interpretação geométrica de ln x.



Fonte: Stewart (2006, p. 420).

Segue na figura 44, uma *tarefa* proposta por Stewart (2006).

Figura 44: *Tarefa t(a)* sobre o cálculo de logaritmo extraída de Stewart (2006).

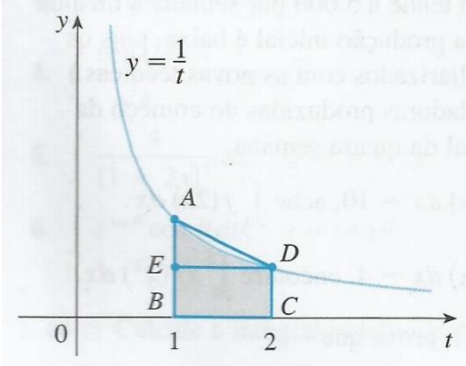
(a) Comparando as áreas, mostre que $\frac{1}{2} < \ln 2 < \frac{3}{4}$.

Fonte: Stewart (2006, p.420).

A realização da *tarefa t(a)* é mostrada por Stewart (2006) na figura 45.

Figura 45: Realização da *tarefa* (a) apresentada por Stewart (2006).

(a) Podemos interpretar ln 2 como a área sob a curva $y = 1/t$ de 1 até 2. Da Figura vemos que essa área é maior que a área do retângulo $BCDE$ e menor que a área do trapezóide $ABCD$.



Assim, temos

$$\frac{1}{2} \cdot 1 < \ln 2 < 1 \cdot \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\right)$$

$$\frac{1}{2} < \ln 2 < \frac{3}{4}$$

Fonte: Stewart (2006, pp. 420-421).

Esta *praxeologia* evidencia a utilização de uma *técnica* que articula o cálculo de área do retângulo e do trapézio a do cálculo do valor numérico de uma função, cujas *tecnologias* são áreas de figuras planas, funções e a definição de logaritmo como a área sob a hipérbole. As *teorias* observadas foram Geometria Euclidiana Plana e Análise Real.

O Quadro 3 a seguir apresenta a OMP em torno do *tipo de tarefas T1* apresentado por Stewart (2006).

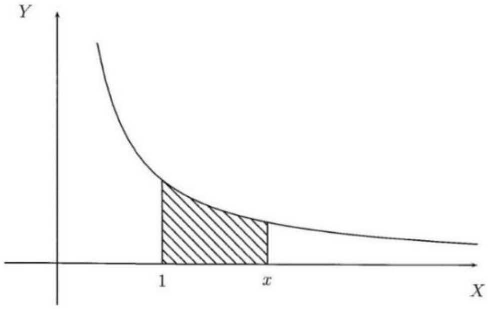
Quadro 3: OMP em torno de *T1*.

Tipo de Tarefas	*Tarefas*	*Técnicas*	*Tecnologia*	*Teoria*
T1	*t(a).*	Áreas do retângulo e do trapézio e Valor numérico de uma função.	Definição de logaritmo como área, Área de figuras planas e Funções.	Geometria Euclidiana Plana e Análise Real.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Encontrei em Lima (2010) o aparecimento do logaritmo anteriormente ao estudo das funções exponenciais e também sua apresentação de forma geométrica, como alerta o autor, como a área de uma faixa de hipérbole dado por $\ln x = \text{Área}\left(H_1^x\right)$ como mostra a figura 46.

Figura 46: O ln x definido como a área da faixa hachurada da hipérbole.



Fonte: Lima (2010, p. 58)

A figura 47 mostra uma *tarefa* sobre o cálculo de logaritmo obtida em Lima (2010).

Figura 47: *Tarefa q* resolvida sobre o cálculo de logaritmo no MELCA.

Exemplo. Calculemos um valor aproximado para $\ln 2$. Subdividamos o intervalo $[1, 2]$ em dez partes iguais, por meio dos pontos de subdivisão.

$$1 \quad 1,1 \quad 1,2 \quad 1,3 \quad 1,4 \quad 1,5 \quad 1,6 \quad 1,7 \quad 1,8 \quad 1,9 \quad 2.$$

Os valores de $1/x$ quando x assume os onze valores acima são:

$$1 \quad 0,909 \quad 0,833 \quad 0,769 \quad 0,714 \quad 0,666 \quad 0,625 \quad 0,588 \quad 0,555 \quad 0,526 \quad 0,500$$

Uma aproximação inferior para $\ln 2$ será fornecida pela área do polígono retangular inscrito na faixa H_1^2, formado por dez retângulos cujas bases medem $0,1$ e cujas alturas são os dez últimos valores de $1/x$ na lista acima. A área desse polígono retangular será portanto igual a $0,6685$. Obtemos assim $0,6685$ como um valor aproximado (por falta) de $\ln 2$.

Para ter uma aproximação por excesso do valor $\ln 2$, consideraremos os dez trapézios circunscritos à faixa H_1^2, determinados pela mesma subdivisão. A soma das dez áreas desses trapézios será igual a $0,6935$, como o leitor facilmente constatará.

Podemos então afirmar que $\ln 2$ é um número compreendido entre $0,6685$ e $0,6935$. Em outros termos:

$$0,6685 < \ln 2 < 0,6935$$

Comprovando que as aproximações trapezoidais são melhores do que as retangulares, informamos que o valor de $\ln 2$, com quatro algarismos decimais exatos, é $0,6931$.

O leitor fica convidado a calcular a área do polígono trapezoidal tangente relativo à mesma subdivisão e verificar que sua área fornece uma aproximação (por falta) ainda melhor para $\ln 2$.

Fonte: Lima (2010, pp. 58-60)

A mesma articulação presente na realização da *tarefa t(a)* da figura 45 foi utilizada por Lima (2010) no enfrentamento da *tarefa q* anterior. Deste modo, concluí que o MELCA presente no livro de cálculo diferencial e integral escrito por Stewart (2006) e no proposto por Lima (2010) difere do MELCE apresentado nas coleções de livros didáticos que analisei. Fato corroborado por Almouloud (2011) que apresenta ferramentas teóricas da *didática da matemática* para responder questões relacionadas à *transposição didática* do logaritmo. Ao apresentar um estudo da *transposição didática* nos livros didáticos brasileiros e franceses e africanos de língua francesa afirma que:

> Do ponto de vista da *transposição didática*, há uma diferença notável entre as abordagens propostas nos livros didáticos brasileiros analisados, e as propostas da maioria dos livros didáticos franceses e da África de língua francesa. (ALMOULOUD, 2011, p. 199)

Nas propostas internacionais estudadas por Almouloud (2011), o logaritmo natural é definido, assim como em Stewart (2006) por $ln\ t = \int_1^t \frac{dx}{x}$, o que corresponde a área da faixa de hipérbole apresentada por Lima (2010), isto é, o logaritmo é apresentado tal qual no MELCS.

Pelo exposto, concluo que as praxeologias estabelecidas no estudo dos logaritmos balizadas pelo MELCE, MELCS e MELCA são diferentes tanto no que se refere ao *bloco prático-técnico* quanto ao *tecnológico-teórico* impondo *condições* e *restrições* ao estudo do logaritmo oriundas dos NCD tais como: *Civilização*, *Sociedade*, *Escola* e *Pedagogia*. No EM, por exemplo, é necessário o estudo prévio de potências e equações exponenciais para garantir o estudo dos logaritmos enquanto que no curso de cálculo diferencial e integral (ES) as *praxeologias* prévias são outras.

Ressalto que o MELCE caracterizado em minha pesquisa pode ser utilizado como modelo de referência para a análise de *praxeologias* associadas ao estudo de logaritmos no EM, pois permite a compreensão das relações entre os estudos de potências e equações exponenciais e dos logaritmos que vão desde a construção de *praxeologias* prévias oriundas das potências e equações exponenciais necessárias ao estudo dos logaritmos, até as articulações entre as *técnicas* oriundas dos dois estudos, dentre outras.

2.2. PESQUISAS CORRELATAS

Neste estudo, investiguei pesquisas correlatas à minha no que tange o estudo de logaritmos, funções e funções logarítmicas que se utilizam de *dispositivos informáticos* como mediador do estudo no intuito de estabelecer similaridades e diferenças que pudessem nortear e indicar aspectos relevantes em meu trabalho. Seguem breves descrições dos trabalhos e Karrer (1999), Benedetti (2003), Ferreira (2006), Rossi (2010) e Santos (2011).

Karrer (1999) apresenta uma proposta por meio de uma sequência didática para o ensino de logaritmos, utilizando os ambientes *papel e lápis* e o *informatizado* configurado pela calculadora. Este trabalho teve por objetivo investigar se esta sequência favoreceria a construção do conceito de logaritmo. Karrer (1999) adotou o MELCE, haja vista que a mesma partiu de situações-problema exponenciais e o logaritmo foi introduzido como ferramenta necessária para o prosseguimento do estudo, fato ressaltado pela autora. A pesquisadora trabalhou com um grupo experimental e um de referência, para ambos foi aplicado um pré-teste antes da introdução do conceito de logaritmo e após o pós-teste a atividade mediada pelo *dispositivo informático* calculadora favoreceu a construção do conceito de logaritmo pelo grupo experimental. Karrer (1999) mostrou ter refletido sobre o uso da calculadora no momento da construção de seu "texto de saber" (fichas) quando propõe atividades que gradativamente foram impondo a necessidade do uso deste dispositivo, assim como a reconstrução deste texto após o segundo momento da TDI quando refletiu acerca da produção dos alunos (OM), tal qual em meu trabalho. Porém, o fator que motivou esta reconstrução nem sempre foi oriundo do uso do *dispositivo informático* como ocorreu em minha pesquisa.

Rossi (2010), pautada na Engenharia Didática, construiu uma sequência didática, utilizando recursos no intuito de tornar o ensino de logaritmos mais significativo para os estudantes do EM, facilitando a construção do conceito de logaritmo e de função logarítmica, incluindo formas de representação, estudo de propriedades e aplicações a fenômenos abordados por outras ciências, como modelos biológicos, escalas para mensuração de grandezas químicas, físicas e geológicas. A sequência se valeu de folhas de atividades elaboradas com a preocupação de fazer com que o estudante tivesse o máximo de autonomia possível para resolvê-las, além de aulas expositivas, atividades com o uso do computador e da calculadora. Rossi (2010) se utilizou do MELCE em seu trabalho. Nesta pesquisa, o computador foi utilizado em dois momentos distintos. No primeiro para introduzir as funções logarítmicas como inversas das funções exponenciais por meio do *software Graphmatica*[14] e no segundo utilizando um *software* de planilha eletrônica para obter o valor de $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. A sequência foi aplicada para 42 estudantes de duas salas de primeira série do Ensino Médio, em 15 aulas de 50 minutos cada.

Os resultados foram obtidos através da análise das atividades resolvidas pelos estudantes e também de observações da autora durante a aplicação da sequência. De acordo com esses resultados, Rossi (2010) considerou que os objetivos foram alcançados, pois as atividades foram desenvolvidas com sucesso e a análise *a posteriori* mostrou que a sequência aplicada contribuiu para que o aprendizado dos estudantes ocorresse de forma significativa no sentido de um melhor entendimento dos conceitos e suas aplicações. Rossi (2010) também revelou ter posto em jogo o uso do computador e da calculadora na construção de seu "texto de saber" (denominados folhas de atividades) e apesar de incentivar seu uso por outros professores que poderiam propor adaptações de acordo com as *condições* e *restrições* impostas pela instituição em que o material seria utilizado, não mostrou reconstrução do "texto de saber" em virtude do uso do *dispositivo informático*.

O trabalho de Santos (2011) teve como objetivo elaborar, aplicar e analisar uma sequência didática para o estudo da função logarítmica propiciando atividades que contemplassem a coordenação de diversos registros, utilizando o *software GeoGebra*[15] e a calculadora. A pesquisadora aponta que, durante a aplicação da sequência didática proposta, os alunos apresentaram dificuldades em fazer a conversão do gráfico para a expressão algébrica representativa da função e em linguagem natural. Os relatos dos participantes da pesquisa indicaram que o *software* contribuiu para a visualização e compreensão do comportamento gráfico das funções logarítmicas estudadas. As análises dos resultados mostraram que o emprego da sequência didática utilizando o *GeoGebra* e a calculadora contribuiu para a compreensão de conceitos como domínio e imagem por meio do teste de hipóteses, assim como o uso da calculadora contribuiu para o desenvolvimento de processos de investigação, mudança de representação, generalização e abstração. Neste trabalho os alunos destacaram a importância da visualização do gráfico da função por meio do *software*, além da possibilidade de

[14] É um *software* de plotagem que pode desenhar curvas.

[15] É um *software* de geometria dinâmica que permite a construção de objetos geométricos e apresenta em sua interface duas janelas de visualização, uma algébrica e outra geométrica onde os objetos construídos são expostos tanto algebricamente quanto geometricamente.

manipulação de outras funções de modo dinâmico. O *modelo epistemológico* adotado na pesquisa de Santos foi o MELCE.

Ferreira (2006) verifica a utilização de uma sequência didática com problemas que privilegiam situações reais no intento do incentivo à pesquisa e atividades relacionadas ao surgimento dos logaritmos, contribuindo para a construção e compreensão deste conceito pelos alunos. A metodologia utilizada segue os princípios da Engenharia Didática, e as atividades da sequência foram elaboradas visando a participação de alunos da 1ª série do EM. Nesse trabalho, foram analisadas as produções de vinte e sete alunos, organizados em trios. A autora inferiu a partir de sua análise, que as atividades da sequência contribuíram para a aquisição do conceito de logaritmo, possibilitando aos alunos utilizarem-se desse conceito para o entendimento de fenômenos do mundo real. Os resultados obtidos também revelam que as aulas realizadas no laboratório de informática, com auxílio do *software Winplot*, facilitaram a construção dos gráficos, permitindo o desenvolvimento de competências para a interpretação dos mesmos, bem como a compreensão da função logarítmica como inversa da função exponencial, o que mostrou o uso do MELCE.

A pesquisa conduzida por Benedetti (2003) investigou a potencialidade do *software* gráfico *Graphmatica* na coordenação das representações múltiplas de funções. Benetti destaca a relevância de sua investigação tanto no objeto matemático de estudo, quanto na emergência de *softwares* gráficos gratuitos. Os sujeitos da pesquisa coordenaram as representações de funções, especialmente a gráfica, a algébrica e a tabular, de maneira que suas ações foram condicionadas pelo que o autor chama de *design* do *software* e que nesta pesquisa é denominado de *interface do software*, incluindo sua capacidade de representar muitas funções e seus comandos zoom e barras de rolagem. Foram feitos entrelaçamentos entre o *software*, escrita e calculadora que permitiram a atuação dos alunos em processos de experimentação que foram caracterizados pela construção de conjecturas, confirmações e refutações, simultaneamente à interligação entre as diversas representações de funções. Em suas conclusões, Benedetti defende o uso das potencialidades que um ambiente com várias mídias pode proporcionar aos estudantes e professores no estudo de funções. As *condições* e *restrições* impostas pelo *Graphmatica* foram um fator importante no trabalho de Benedetti (2003) e, apesar não abordar especificamente as funções logarítmicas, mostraram a necessidade de se considerar as mídias a serem utilizadas no *sistema didático* no momento da construção do “texto de saber” e estabelecer relações entre elas no intuito da construção das OD.

As pesquisas investigadas indicaram que o estudo de funções, e particularmente o estudo de logaritmos e funções logarítmicas é fonte de dificuldades apesar de sua importância, além de mostrarem a potencialidade dos *dispositivos informáticos* tanto na construção de gráficos e em sua interpretação quanto em sua aplicação na compreensão de fenômenos. Essas características coadunam com a minha pesquisa e outro ponto de convergência relaciona-se ao primeiro momento da TDI, que corresponde a construção das OD, pois foi marcado pela reflexão acerca das *condições* e *restrições* impostas pelos NCD e da *interface do software*. De modo geral, o segundo momento da TDI, o de construção das OM, permitiu uma reflexão que implicou na reconstrução das OD. Nestas *organizações* o MELCE mostrou-se o *modelo epistemológico* dominante assim como ocorre nos livros didáticos de matemática do EM.

Apesar destas pesquisas se assemelharem a minha no que tange a presença dos elementos mencionados, o foco das mesmas não está na investigação no processo de (re)construção e gestão das OM e OD no estudo de funções logarítmicas mediado pelos ambientes *papel e lápis* e *informatizado* e apesar dos pesquisadores apontarem a necessidade de reflexão no ato da construção das OD acerca do objeto matemático de estudo e do uso dos *dispositivos informáticos,* tais *condições* e *restrições* não foram discutidas como em minha pesquisa. Outro ponto de destaque de meu trabalho é a influência da relação entre o ambiente *papel e lápis* e o ambiente *informatizado* (re)construção e gestão destas *organizações*.

3 DESCRIÇÃO E ANÁLISE DOS DADOS

Neste capítulo narro e analiso as construções da OD e OM referentes a minha proposta, assim como a reconstrução da OD em virtude das reflexões que me foram proporcionadas ao longo do fenômeno da TDI em seus dois momentos. No primeiro, caracterizado pela construção do "texto de saber", reflito sobre o estudo da introdução das funções logarítmicas sujeito às *condições* e *restrições* oriundas de vários NCD e dos *dispositivo informático*. No segundo momento, da implementação da OD, dirijo o processo de estudo junto a meus alunos no intuito de construir a OM pautando este processo nos ambientes *papel e lápis* e *informatizado*. A análise dos dados obtidos foi subsidiada pela TAD, mais precisamente pelo fenômeno da TDI, das noções de OD e OM, *condições* e *restrições*, além dos *modelos epistemológicos* apresentados por mim, o MELCE e o MELCS.

3.1. A CONSTRUÇÃO DA OD: O PRIMEIRO MOMENTO DA TDI

A grande importância das funções logarítmicas para o currículo da matemática escolar foi motivo de inspiração para a construção de minha proposta de estudo deste objeto. Esta importância é constituída de muitos fatores dentre os quais se destacam sua contribuição para o desenvolvimento da linguagem algébrica necessária para expressar a relação entre grandezas e modelagem de situações-problema, construindo modelos descritivos de fenômenos, além de suas várias aplicações dentro e fora da matemática, permitindo uma melhor relação dos estudantes com o mundo. Infiro que estas *condições* e *restrições* são oriundas dos NCD mais gerais (*civilização* e *sociedade*), pois são determinadas pelos maiores contextos culturais e seus princípios para nossa sociedade, haja vista que os documentos oficiais tais como leis de diretrizes e bases, PCN, matriz de referência do ENEM – as funções logarítmicas são estudadas neste nível de ensino – apregoam uma formação em busca da cidadania pautada na leitura, representação e ação sobre a realidade.

No primeiro momento da TDI, tendo em mente a importância e as potencialidades do estudo de funções logarítmicas, construí a OD me valendo de livros didáticos de publicação nacional e do material didático escrito e publicado por mim em 2012 e utilizado pelos alunos, fato que acarretou na utilização do MELCE, que é o modelo epistemológico de logaritmo dominante no Brasil – indicando a ação de *condições* e *restrições* em nível de *sociedade*, pois a determinação deste modelo epistemológico para o EM foi feita pela *noosfera*.

Outro componente presente em minhas reflexões ao elaborar a proposta foram as *praxeologias matemáticas* em torno dos *tipos de tarefas* de funções logarítmicas exigidas para o ingresso de meus alunos em instituições de ES, inclusive as do ENEM haja vista que atualmente esta é uma exigência latente da escola, alunos e famílias, isto é, *condições* e *restrições* dos níveis de *codeterminação sociedade* e *escola*.

Outras *condições* e *restrições* dos níveis *escola* e *pedagogia* que permearam minhas reflexões acerca da construção da OD está associada ao uso de tecnologias. A escola na qual realizei o estudo implantou seus dois laboratórios de informática em 1993[16] e tem acompanhado as mudanças tecnológicas desde então, sendo uma das escolas pioneiras, em Belém, no uso de *softwares* educativos desde a Educação Infantil até o Ensino Médio. O que implicou, ao longo dos anos, na formação de alunos habituados ao uso do laboratório de informática nas variadas séries e disciplinas, de tal modo que os alunos não apresentam dificuldades no uso de computadores em suas aulas, além de preferirem o estudo em grupo – fato corroborado por minhas práticas nesta *instituição*.

Estes fatores, aliado às potencialidades e recomendações de utilização de computadores pelos documentos oficiais – *condições* e *restrições* do NCD *sociedade* – também permearam a construção de minha proposta baseada na criação de um ambiente de visualização e manipulação do gráfico da função logarítmica associada a uma lei de formação analítica, fato que pode contribuir para a compreensão de fenômenos diversos. Compreendo que ao considerar o uso dos *dispositivos informáticos* sofri influência dos NCD *sociedade*, por conta das orientações que incentivam o uso de tal tecnologia, além dos NCD *escola* e *pedagogia* estabelecidos pela instituição.

Este estudo foi realizado com meus alunos do terceiro ano do EM de uma escola particular de Belém. Foram cerca de 280 sujeitos divididos em seis turmas que foram levados ao laboratório de informática em dois encontros. Gostaria de salientar que estes sujeitos haviam sido meus alunos, dois anos antes, no primeiro ano do EM e na época utilizamos um material didático de matemática escrito por mim (SILVA, 2012). Na construção deste material procurei o auxílio de livros didáticos de matemática publicados no Brasil e em minha experiência como docente para estabelecer uma proposta que abordasse as *praxeologias matemáticas* desta série

[16] Neste ano fui contratado pela escola para exercer a função de professor de matemática na 8ª série do ensino fundamental, porém com o compromisso de ministrar aulas de informática básica aos alunos uma vez por semana para aprenderem a utilizar os computadores. Nesta época fizemos um planejamento de tal modo que após a familiarização com o hardware e softwares, os alunos passassem a ter aulas de diversas disciplinas mediadas por computador.

em consonância com o tempo didático disponível e as exigências do Programa de Ingresso Seriado[17] (Prise) da Universidade do Estado do Pará (UEPA). Considero este fato importante porque garante que as *praxeologias matemáticas* desenvolvidas no estudo dos logaritmos e funções logarítmicas foram frutos do MELCE, inclusive no terceiro ano do EM quando da revisão dos conteúdos programáticos do primeiro ano do EM incluindo o estudo dos logaritmos.

Durante as aulas de funções, no primeiro ano do EM, utilizei o *Winplot* para plotar gráficos de diversas funções a partir de suas leis de formação. De modo geral, o processo consistia em apresentar a lei de formação de uma função para que os alunos pudessem escrever alguns pares ordenados pertencentes ao gráfico, em seguida o plotavam com o auxílio do *Winplot* para confirmar que os pares encontrados apresentavam uma característica comum. Após este estudo, utilizamos o *Winplot* na construção dos gráficos das funções do 1º grau, 2º grau, modular, exponenciais e logarítmicas sempre partindo da lei de formação. Deste modo, os valores sugeridos, tanto por mim quanto pelos alunos, para as abscissas e consequentemente calculados para as ordenadas dos pares ordenados em questão eram valores, em geral, inteiros e que eram plotados nos nós[18] da malha quadriculada do *Winplot*. Portanto, excluídos os alunos que ingressaram na escola no segundo e terceiros anos do EM, posso dizer que os sujeitos da pesquisa conheciam o *Winplot* e o utilizavam relativamente bem na construção de gráficos de funções. Lembro que em algumas ocasiões os alunos discutiam como enfrentar *tarefas* de construção de gráficos utilizando outros *softwares* gráficos como o *Graphmatica* por exemplo. Considerei estas *condições* e *restrições* dos NCD *escola* e *pedagogia* na construção da OD devido a facilidade de implementação da proposta haja vista o conhecimento de muitas ferramentas do Winplot pela maioria dos alunos, além do estudo prévio de gráficos de funções nos ambientes *papel e lápis* e *informatizado*.

Neste estudo foram utilizados o *Winplot* e o *Graphmatica* que são *softwares* gráficos que apresentam *interfaces*[19] simples apesar de possuir vários recursos, tais como plotar pontos, traçar gráficos de retas e curvas, dentre outros. Ambos os *softwares* são gratuitos e as versões

[17] O PRISE é um programa de ingresso da Universidade do Estado do Pará que é dividido em três etapas realizadas ao final de cada série do EM.

[18] São os encontros das linhas horizontais e verticais que compõem a malha quadriculada apresentada pelo *software*.

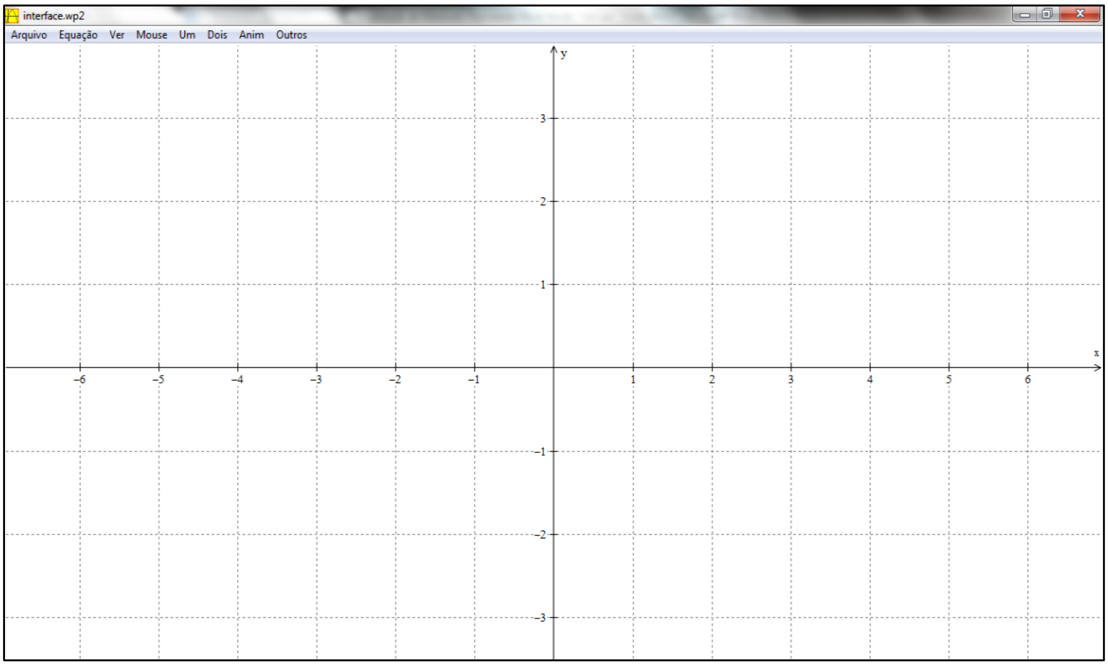
[19] É, por vezes, onde ocorre a visualização e manipulação direta das entidades abstratas dando comportamentos sugestivos de suas propriedades e de uma referência específica para os conceitos envolvidos (BALACHEFF, 1994).

utilizadas foram *Winplot* 1.32 e *Graphmatica* 2.2, ambas em português do Brasil, disponíveis para download em http://math.exeter.edu/rparris/winplot.html e http://www8.pair.com/ksoft/, respectivamente.

O ambiente *informatizado* (A_w) foi conformado pelo *dispositivo informático* composto por computadores executando o *software* educativo gráfico *Winplot* na plataforma *Windows*[20]. Posteriormente, por sugestão de um grupo de alunos, foi configurado um novo *dispositivo informático* pela execução do *software* gráfico *Graphmatica* nos mesmos computadores conformando assim um segundo ambiente *informatizado* (A_g).

A *interface* do *Winplot* é composta por uma barra de *menus* e uma janela gráfica como mostra a figura 48.

Figura 48: A *interface* do *Winplot*.

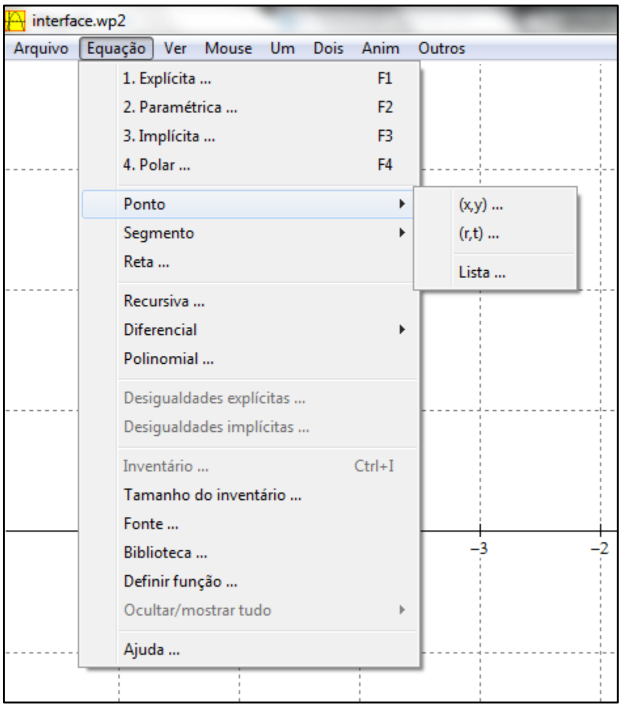


Fonte: Captura da *interface* do *software* feita pelo autor.

A janela gráfica do *Winplot* é composta de um sistema ortogonal cartesiano onde são traçadas as representações gráficas a partir de representações algébricas de objetos matemáticos tais como funções do 1º grau, 2º grau, modulares, exponenciais, logarítmicas, trigonométricas dentre outras. Para interagir com este ambiente *informatizado* o usuário conta com o apoio de *menus* que por sua vez apresentam subdivisões como mostra a figura 49.

[20] Sistema operacional desenvolvido pela Microsoft.

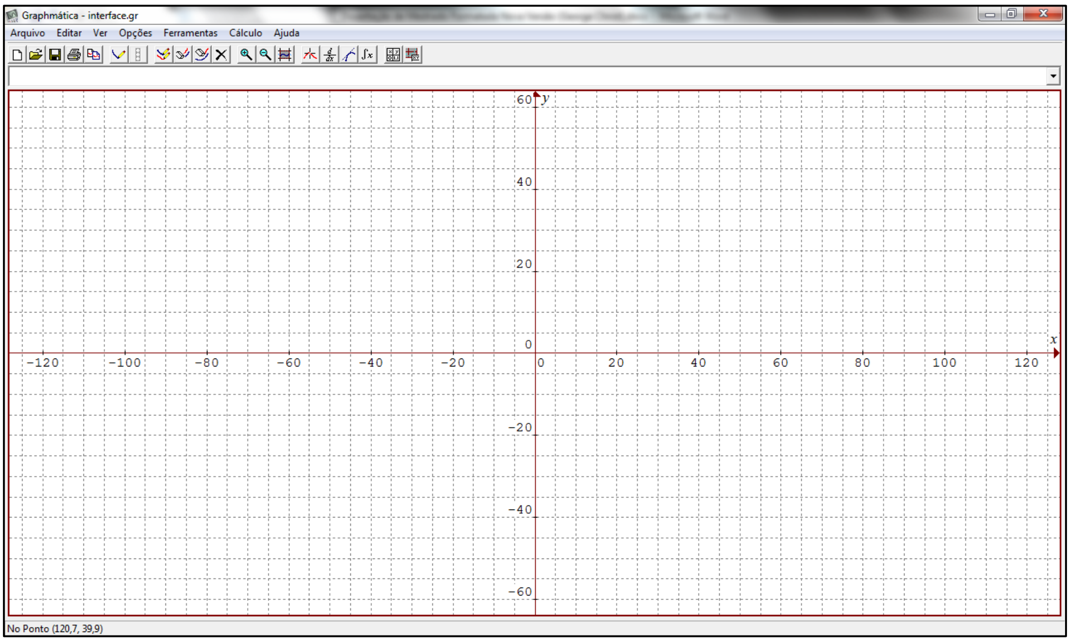
Figura 49: A barra de *menus* do *Winplot*.



Fonte: Captura da *interface* do *software* feita pelo autor.

Estes recursos permitem que este *software* gráfico possa ser utilizado em diversos níveis de ensino o que ocorre também com o *Graphmatica* cuja *interface* apresenta alguns botões, além da janela gráfica e da barra de *menus* como mostra a figura 50.

Figura 50: A *interface* do *Graphmatica*.



Fonte: Captura da *interface* do *software* feita pelo autor.

De modo geral, a *interface* dos *softwares* impõe *condições* e *restrições* ao estudo de funções em virtude das opções são oferecidas por meio destes botões, janelas e/ou *menus*. A aplicação de *técnicas* no enfrentamento de *tarefas* dependerá diretamente destas *condições* e *restrições*. Portanto, a escolha de uma *técnica* na resolução de uma *tarefa* está subordinada a *interface* do *software* que configura o *dispositivo informático*, então é possível que no enfrentamento de uma *tarefa* no ambiente *papel e lápis* seja utilizada uma *técnica* que não esteja disponível no ambiente *informatizado* e vice-versa. Em virtude disso, o saber matemático em jogo pode ser diferente nos dois ambientes como apresentarei nesta pesquisa.

Ao construir a OD elegi *tarefas* que correspondem ao cálculo do valor numérico de uma expressão algébrica emergente de uma situação-problema, a este *tipo de tarefas* denominei *T*. As *tarefas* t_1, t_2 e t_3 do mesmo tipo *T* foram escolhidas para que pudessem ser enfrentadas no A_{pl} e posteriormente no ambiente *informatizado* A_w. Desta forma, a mudança de ambiente no enfrentamento das mesmas *tarefas* incorreria no aspecto gráfico das funções logarítmicas em virtude das *condições* e *restrições* imposta pelo ambiente *informatizado* configurado pelo *Winplot* e a partir de construídos os gráficos passaríamos ao estudo deste objeto matemático.

Ressalto que o ato de construir uma OD visando o uso de *dispositivos informáticos* requer que o professor tenha conhecimento de, pelo menos, algumas *condições* e *restrições* oriundas do NCD *escola* relacionadas ao *hardware* e *software* componentes do dispositivo, tais como: se o *software* é livre ou não, pois a escola pode não dispor de recursos financeiros para a aquisição do mesmo; se o *software* pode ser executado na plataforma[21] adotada pela escola, se o hardware apresenta configurações mínimas para executar o *software* pretendido, além de permitir que sejam construídas as OM desejadas a partir das *tarefas* propostas.

Em resposta ao exposto anteriormente apresento a OD de estudo para introdução de funções logarítmicas mediada por dois ambientes com base em *praxeologias* construídas anteriormente nos estudos de funções e logaritmos tanto no primeiro ano do EM quanto no estudo de revisão proporcionado no terceiro ano, além de habilidades relacionadas ao uso do *dispositivo informático* que media o estudo. Estas habilidades são balizadas por *condições e restrições* impostas pelo *dispositivo informático*, tais como utilizar as ferramentas oferecidas

[21] O uso de sistemas operacionais tais como Windows, Linux, IOS caracterizam uma plataforma e softwares produzidos para uma plataforma específica não podem ser executados em outras plataformas. De todo modo, existem softwares multiplataforma.

pelo dispositivo para traçar um gráfico, “aproximar” sua visualização, plotar um dos pontos do gráfico etc.

Ressalto a importância do uso do *dispositivo informático* pelo dinamismo na plotagem de gráficos de funções a partir da lei de formação, além da possibilidade de manipulação dos gráficos construídos. O conjunto plotagem-manipulação, neste sentido, apresenta grande potencialidade para o estudo das mais diversas funções. Deste modo os NCD *sociedade, escola e pedagogia* ofereceram *condições* para que o computador fizesse parte do processo de estudo em minha proposta.

Apresento as *tarefas* t_1, t_2 e t_3 componentes da OD que elaborei no intuito de abordar o *tipo de tarefas T* mencionado anteriormente.

Tarefa t_1: As indicações R_1 e R_2, na escala Richter, de dois terremotos estão relacionadas pela fórmula $R_1 - R_2 = log_{10}\left(\frac{M_1}{M_2}\right)$, em que M_1 e M_2 medem a energia liberada pelos terremotos sob a forma de ondas que se propagam pela crosta terrestre. Houve dois terremotos: um correspondente a $R_1 = 8$ e outro correspondente a $R_2 = 6$. Determine a razão $\frac{M_1}{M_2}$.

Subtarefas de t1:

a) O que acontece com a grandeza $R_1 - R_2$ quando $\frac{M_1}{M_2}$ aumenta?

b) O que acontece com a grandeza $R_1 - R_2$ quando $\frac{M_1}{M_2}$ diminui?

c) Classifique esta função logarítmica em crescente ou decrescente.

d) Observe no gráfico a variação da grandeza $\frac{M_1}{M_2}$ de uma em uma unidade e verifique se a correspondente da variação da grandeza $R_1 - R_2$ é maior ou menor. Qual o significado desta variação para o fenômeno em questão?

e) Se houvesse a troca da base do logaritmo de 10 para 2 o que aconteceria com a variação entre as grandezas $R_1 - R_2$ e $\frac{M_1}{M_2}$? E se a troca fosse para $\frac{1}{2}$?

Tarefa t_2: No dia 06 de junho de 2000, um terremoto atingiu a cidade de Ankara, na Turquia, com registro de 5,9 na escala Richter e outro terremoto atingiu o oeste do Japão, com registro de 5,8 na escala Richter.

Considere que m_1 e m_2 medem a energia liberada em forma de ondas que se propagam pela crosta terrestre por terremotos com registros, na escala Richter, r_1 e r_2, respectivamente.

Sabe-se que estes valores estão relacionados pela fórmula $R_1 - R_2 = log_{10}\left(\frac{M_1}{M_2}\right)$. Considerando-se que r_1 seja o registro do terremoto da Turquia e r_2 o registro do terremoto do Japão, determine $\frac{m_1}{m_2}$.

Subtarefas de t2:

a) O que acontece com a grandeza $R_1 - R_2$ quando $\frac{M_1}{M_2}$ aumenta?

b) O que acontece com a grandeza $R_1 - R_2$ quando $\frac{M_1}{M_2}$ diminui?

c) Classifique esta função logarítmica em crescente ou decrescente.

d) Observe no gráfico variação da grandeza $\frac{M_1}{M_2}$ de uma em uma unidade e verifique se a correspondente da variação da grandeza $R_1 - R_2$ é maior ou menor. Qual o significado desta variação para o fenômeno em questão?

e) Se houvesse a troca da base do logaritmo de 10 para 2 o que aconteceria com a variação entre as grandezas $R_1 - R_2$ e $\frac{M_1}{M_2}$? E se a troca fosse para $\frac{1}{2}$?

Tarefa t_3: Suponha que o nível sonoro β e a intensidade I de um som estejam relacionados pela equação logarítmica $\beta = 120 + 10 log_{10} I$, em que β é medido em decibéis e I, em *watts* por metro quadrado. Seja I_1 a intensidade correspondente ao nível sonoro de 80 decibéis de um cruzamento de duas avenidas movimentadas, e I_2 a intensidade correspondente ao nível sonoro de 60 decibéis do interior de um automóvel com ar-condicionado. Determine a razão $\frac{I_1}{I_2}$.

Subtarefas de t3:

a) O que acontece com a grandeza β quando I aumenta?

b) O que acontece com a grandeza β quando I diminui?

c) Classifique esta função logarítmica em crescente ou decrescente.

d) Observe no gráfico a variação da grandeza I de uma em uma unidade e verifique se a correspondente da variação da grandeza β é maior ou menor. Qual o significado desta variação para o fenômeno em questão?

e) Se houvesse a troca da base do logaritmo de 10 para 2 o que aconteceria com a variação entre as grandezas β e I? E se a troca fosse para $\frac{1}{2}$?

Estas *tarefas* foram enfrentadas no A_{pl} e em seguida no A_w conformado pelo *Winplot*. A presença do ambiente *informatizado* para a realização destas *tarefas* implicou no aparecimento de uma função logarítmica escrita na forma $y = f(x)$ em busca da solução da *tarefa* pelas *condições* e *restrições* do *Winplot* foi necessário construir seu gráfico. O segundo passo da proposta foi enfrentar as *subtarefas* para cada uma das *tarefas* t1, t2 e t3, no intuito de estabelecer a compreensão da variação destas grandezas por intermédio do gráfico.

Neste primeiro momento da TDI, caracterizado pela construção do "texto de saber", construí uma OD que partindo de uma expressão algébrica que pudesse ser escrita como uma função logarítmica na forma analítica no ambiente *papel e lápis* para então introduzir sua forma gráfica por meio do ambiente *informatizado* trazendo à tona as *tarefas* enfrentadas na construção de gráficos de funções, isto é, a partir de uma solução algébrica os alunos encontrariam uma solução gráfica contribuindo assim com a compreensão de fenômenos representados de diferentes maneiras, além de abordar amplas reflexões por meio do enfrentamento das *subtarefas* propostas.

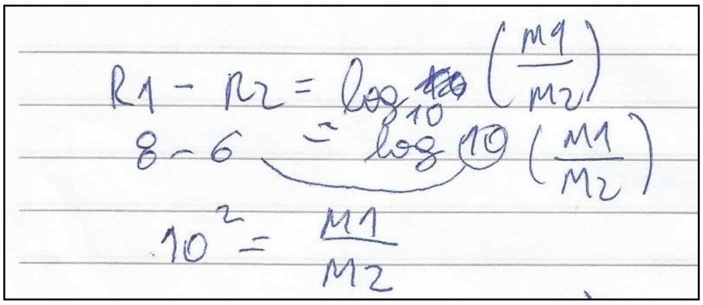
3.2. A CONSTRUÇÃO DAS OM E AS REFLEXÕES DESENCADEADAS: O SEGUNDO MOMENTO DA TDI

Com a OD construída passei a sua implementação com meus alunos. Esta investida foi dividida em dois encontros no laboratório de informática da escola e os sujeitos da pesquisa trabalharam em duplas. No primeiro encontro foram enfrentadas as *tarefas* t_1, t_2 e t_3 e no outro suas *subtarefas*. De acordo com Chevallard (2009), ao estabelecer este *sistema didático*, experimentei o segundo momento do fenômeno da TDI, que é o de construção das OM previstas na OD.

Nesta pesquisa disponho-me a apresentar a análise do enfrentamento da *tarefa* t_1 nos ambientes A_{pl}, A_w e A_g e seus desdobramentos, pois estes dados foram suficientes para responder minha questão de pesquisa.

De modo geral, os alunos enfrentaram a *tarefa* t_1 no ambiente *papel e lápis* por meio da aplicação de uma *técnica*, indicada por mim de τ_{pl}, que articula as *técnicas* da substituição de valores $R_1 = 8$ e $R_2 = 6$, *técnica* da transformação de uma expressão logarítmica em uma expressão equivalente na forma de potência e do cálculo de uma potência. A figura 51 mostra a realização da *tarefa t1* por uma dupla de alunos.

Figura 51: Realização da *tarefa* t_1 em A_{pl} por sujeitos da pesquisa.



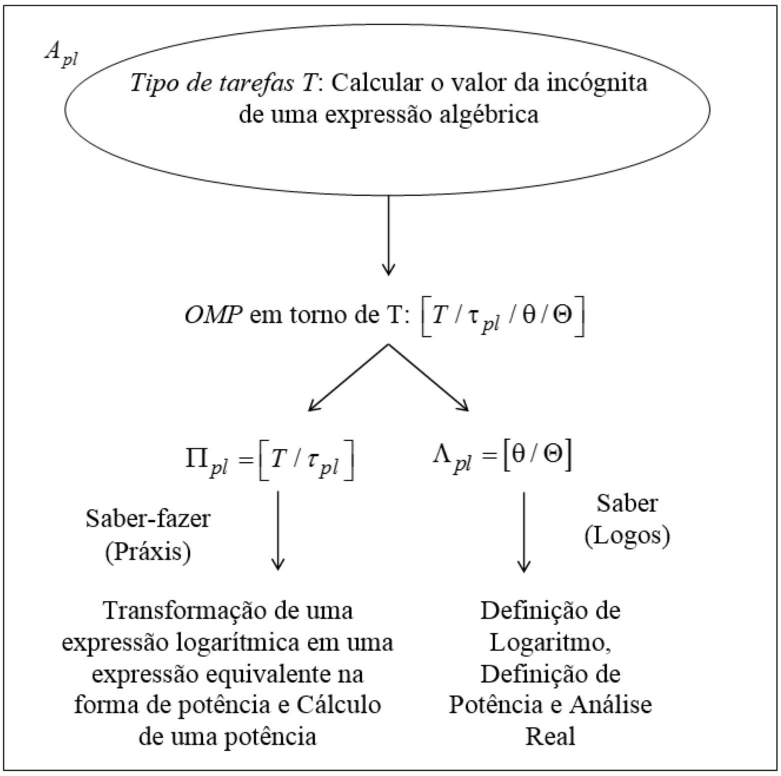
Fonte: Fragmento da OM construída pelos sujeitos da pesquisa.

A *tecnologia* θ que torna a *técnica* τ_{pl} inteligível é a definição de logaritmo do MELCE apresentado nesta dissertação, além da definição de potência. A *teoria* Θ que regula a *tecnologia* θ é a Análise Real. Portanto, o *componente tecnológico-teórico* da *praxeologia* $\Lambda_{pl} = [\theta / \Theta]$ configura como o principal saber em jogo no ambiente A_{pl} como sendo a definição de logaritmo do MELCE, apesar da presença de operações matemáticas fundamentais e potenciação.

O enfrentamento da *tarefa* t_1 em A_{pl} caracterizou uma OMP em torno do *tipo de tarefas* T correspondente ao cálculo do valor de uma incógnita de uma expressão algébrica. Esta *praxeologia* é dada por $\left[T/\tau_{pl}/\theta/\Theta\right]$, onde τ_{pl} é essencialmente a *técnica* da transformação de uma expressão logarítmica em uma expressão equivalente na forma de potência do MELCE, cujo bloco *prático-técnico* é $\Pi_{pl}=\left[T/\tau_{pl}\right]$.

Apresento a OMP em A_{pl} no quadro 4.

Quadro 4: *Organização Matemática Pontual* em torno do *tipo de tarefas T* em A_{pl}.

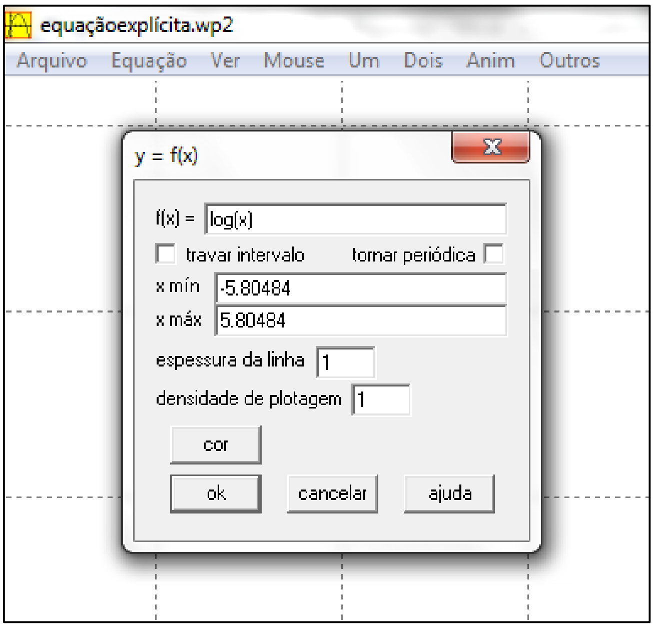


Fonte: Elaborado pelo autor.

De acordo com a OD construída no primeiro momento da TDI, propus aos alunos que enfrentassem a *tarefa* t_1 no ambiente *informatizado* A_w no intuito de introduzir o estudo gráfico das funções logarítmicas. Percebi durante o enfrentamento da *tarefa*, que de posse da solução de t_1 obtida em A_{pl}, os alunos esperavam encontrá-la em A_w, fato comprovado após a realização da *tarefa* no segundo ambiente.

As *condições* e *restrições* impostas pelo ambiente *informatizado* A_w provocaram uma mudança praxeológica na realização da *tarefa* t_1, pois este ambiente impôs uma *restrição* que impediu o uso da *técnica* τ_{pl} , porém estabeleceu a *condição* de traçar o gráfico de funções do tipo y = f(x) a partir da lei de formação (equação explícita) conforme mostra a figura 52.

Figura 52: Ferramenta Equação Explícita em A_w.



Fonte: Captura da *interface* do *software* feita pelo autor.

Neste ambiente, a *tarefa* de construir o gráfico de uma função pode ser enfrentada por meio da ferramenta *Equação Explícita*, acessada na barra de *menus*, onde o usuário digita a expressão algébrica correspondente a $y = f(x)$ e o *Winplot* traça o gráfico.

Comprovei que a impossibilidade da aplicação da *técnica* τ_{pl} no ambiente A_w fez com que o enfrentamento da *tarefa* t_1 fosse realizado por meio de uma articulação entre três *tarefas* consideradas rotineiras pelos alunos, que foram:

Primeira *tarefa* (t_2) – Transformar a expressão algébrica em uma função do tipo y = f(x);

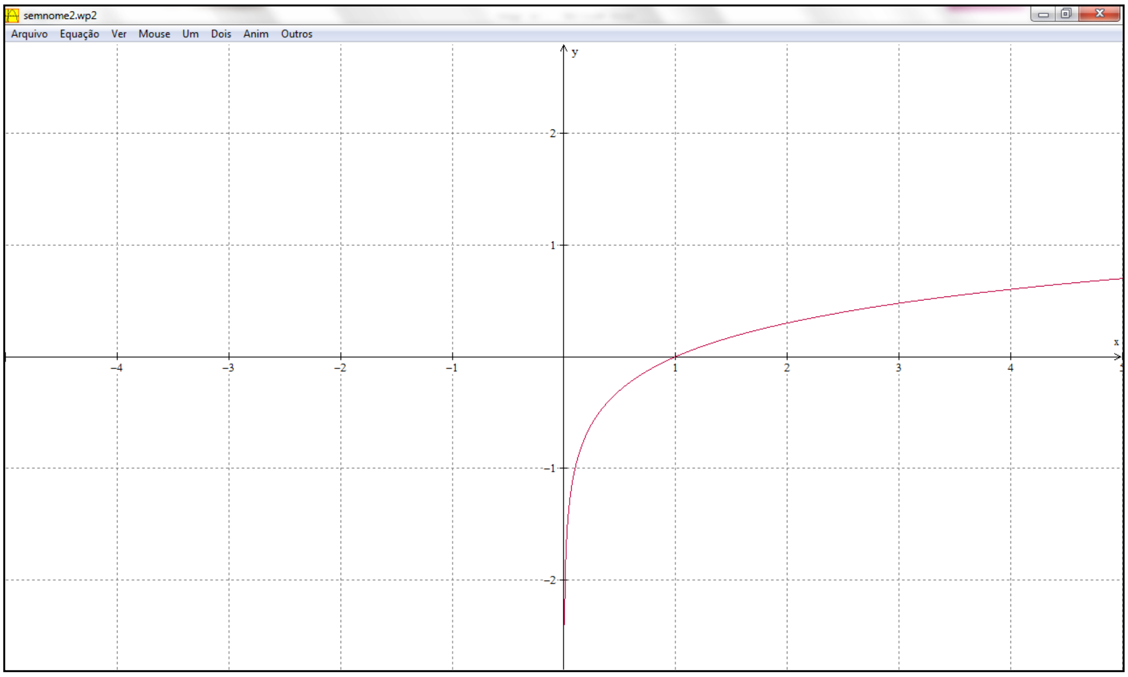
Segunda *tarefa* (t_3) – Construir o gráfico de uma função

Terceira *tarefa* (t_4) – Determinar uma coordenada de um ponto pertencente ao gráfico de uma função a partir da outra.

O enfrentamento de t_1 no ambiente *informatizado* A_w por meio desta articulação foi feito por realizado por meio de uma técnica que denominei τ_w e é exposto a seguir:

Para realizar t_2, os alunos aplicaram a *técnica* da mudança de variável – indicada por τ_2 – ao fazerem $y = R_1 - R_2$ e $x = \dfrac{M_1}{M_2}$ na expressão $R_1 - R_2 = log_{10}\left(\dfrac{M_1}{M_2}\right)$ para obter a função logarítmica $y = log_{10}(x)$. O segundo passo da articulação foi enfrentar a *tarefa t₃* de construção do gráfico da função $y = log_{10}(x)$ que no ambiente A_w ocorreu por meio da utilização da ferramenta *Equação Explícita*. Esta *técnica* – indicada por τ_3 – foi aplicada quando os alunos digitaram $log(x)$ na janela $y = f(x) =$ na obtenção do gráfico mostrado na figura 53.

Figura 53: Janela gráfica de A_w mostrando $y = log_{10}(x)$.

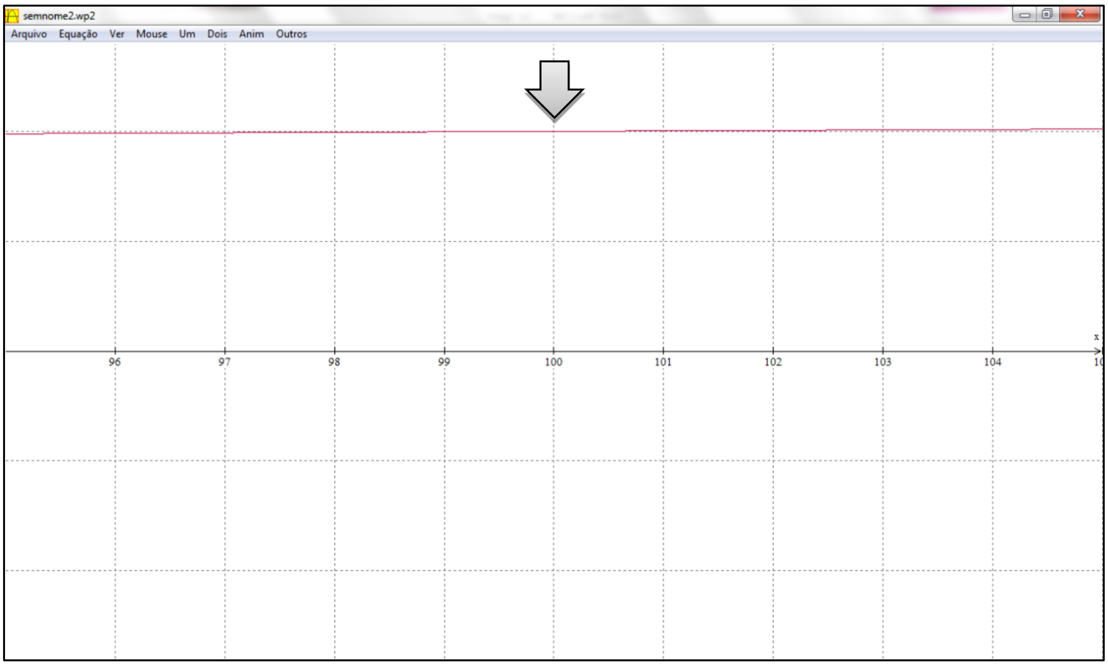


Fonte: Captura da *interface* do *software* feita pelo autor.

No terceiro passo da articulação, os alunos iniciaram a realização da *tarefa* t_4 correspondente a consulta do gráfico para obter *x*, a partir de um valor de *y*. Como $y = R_1 - R_2 = 8 - 6 = 2$, os alunos aplicaram a *técnica* da obtenção de uma coordenada de um ponto do gráfico – indicada τ_4 – para determinar o valor de $x = \dfrac{M_1}{M_2}$.

Ao iniciar o enfrentamento de t_4, a *interface* do *dispositivo informático* mostrava o gráfico de $y = log_{10}(x)$ conforme a figura 53. Como o ponto cuja ordenada é $y = 2$ não era mostrado na janela gráfica os alunos utilizaram as teclas de setas do teclado para deslocar a visualização do gráfico para as proximidades do ponto e valendo-se dessa *condição* acompanharam a reta pontilhada horizontal de equação $y = 2$ até que ela “encontrasse” o gráfico da função no ponto pretendido. Deste modo, obtiveram a visualização mostrada na figura 54.

Figura 54: Gráfico de $y = log_{10}(x)$ nas proximidades do ponto cuja ordenada é 2.

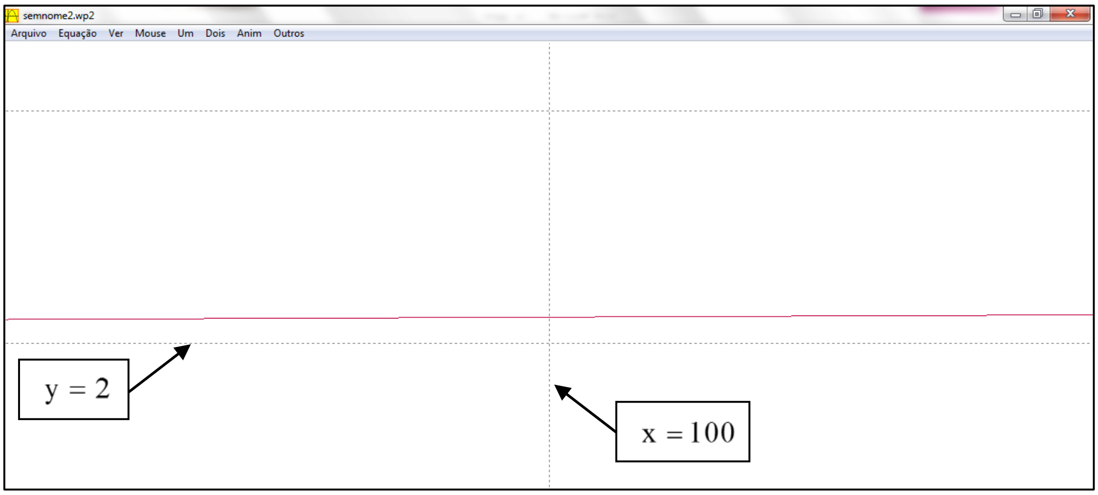


Fonte: Captura da *interface* do *software* feita pelo autor.

Diante desta imagem, a maioria dos grupos de estudo havia se convencido de que a *tarefa* t_1 havia sido realizada pela articulação proposta, indicando que a abscissa procurada era 100 como haviam calculado no ambiente A_{pl} ($10^2 = 100$). Deste modo, afirmo que havia uma expectativa dos alunos em relação ao valor 100 calculado em A_{pl} e em função da conclusão obtida pela maioria dos grupos de estudo. Deste modo, concluo que a proposta de introdução do estudo do gráfico das funções logarítmicas foi bem sucedida e a partir daí poderíamos explorar as *subtarefas* de t_1 em busca de respostas às questões apresentadas na OD.

Como a *interface* do *Winplot* não mostrava claramente o valor 100 da abscissa, um pequeno grupo de alunos alegou que a reta pontilhada horizontal $(y = 2)$ aparentemente determinava vários pontos no gráfico. Fato que motivou a utilização da *condição* de ampliação ou redução da visualização do gráfico, nas proximidades de um ponto, utilizando as teclas <pg up> para zoom in (aproximar) e <pg down> para zoom out (afastar). Os alunos aproximaram a visualização do gráfico com o intuito de obter o ponto em questão. Entretanto, depararam-se com a situação exposta na figura 55.

Figura 55: Gráfico de $y = log_{10}(x)$ nas proximidades do ponto de ordenada 2.

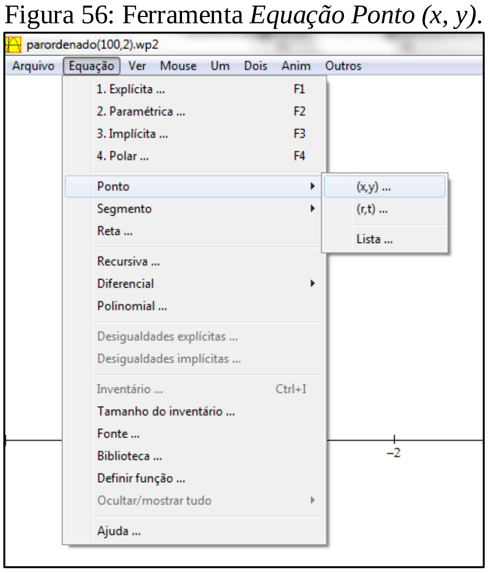


Fonte: Captura da *interface* do *software* feita pelo autor.

Os alunos concluíram que o gráfico não passava pelo ponto de coordenadas (100, 2) como estavam conjecturando, ficaram confusos e questionaram: "Como encontramos a resposta $10^2 = 100$ no caderno e o gráfico gerado no computador não confirma esta resposta?". Esta *restrição* imposta pelo *dispositivo informático* está relacionada a dois fatores: o desalinhamento entre o gráfico e o sistema ortogonal cartesiano que é um efeito colateral da *transposição informática* apresentada por Balacheff (1994) – que consiste na transposição do saber a ensinar para um modelo computacional que permite sua manipulação num dispositivo informático – e o diferente *modelo epistemológico* de logaritmos utilizado por *dispositivos informáticos*.

O gráfico da função e o sistema de eixos coordenados não estão alinhados, fato que constatei posteriormente quando plotei, no mesmo *dispositivo informático*, o par ordenado (100, 2) por meio da ferramenta *Equação Ponto (x, y)* mostrada na figura 56.

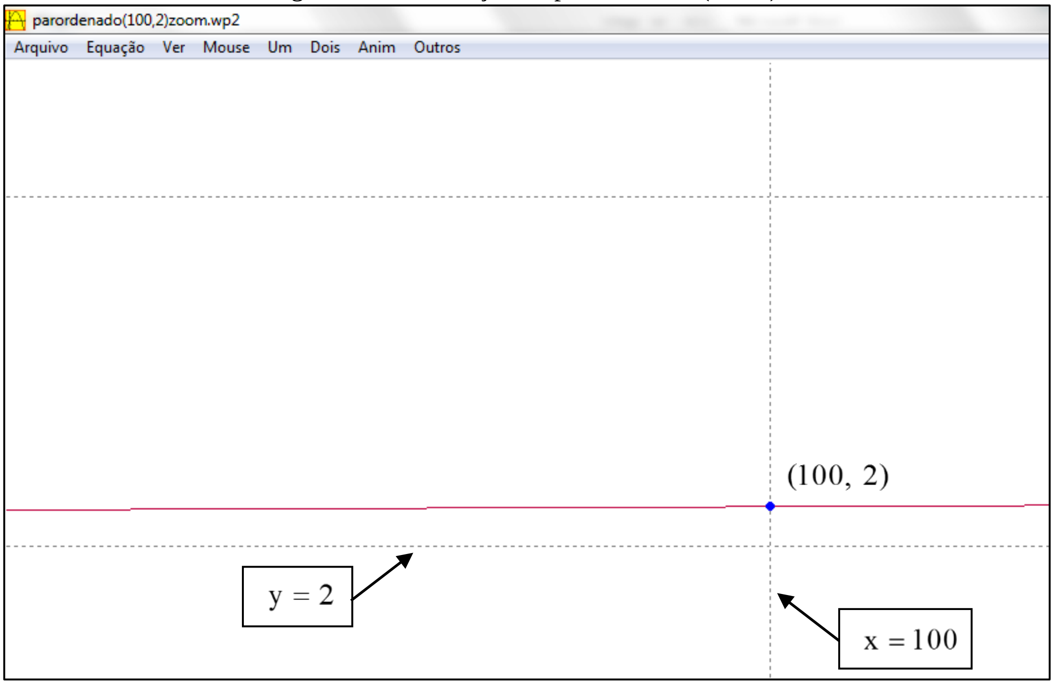
Figura 56: Ferramenta *Equação Ponto (x, y)*.



Fonte: Captura da *interface* do *software* feita pelo autor.

Ao plotar o par ordenado (100, 2) a *interface* do *dispositivo informático* confirmou que o gráfico e o sistema ortogonal cartesiano não estavam alinhados conforme mostra a figura 57.

Figura 57: Localização do par ordenado (100,2).

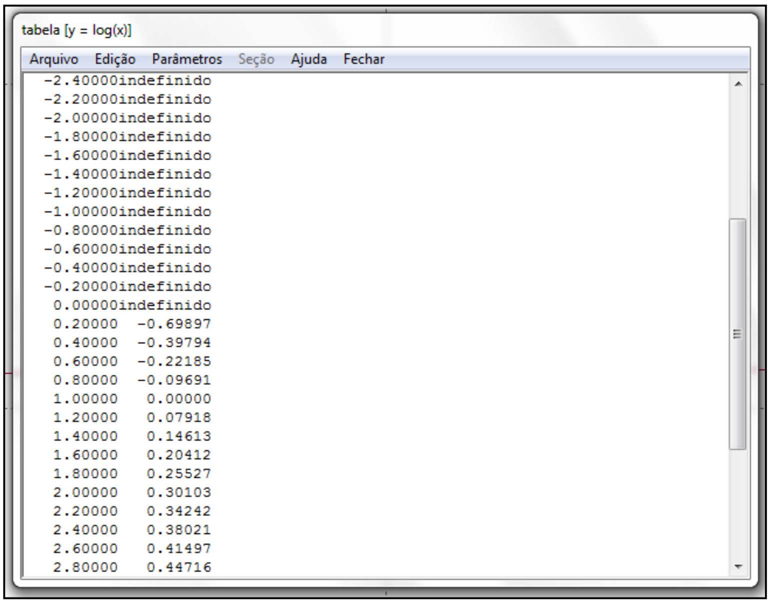


Fonte: Captura da *interface* do *software* feita pelo autor.

O par ordenado (100, 2) está localizado sobre o gráfico mostrando que o sistema de eixos não se encontra alinhado com o mesmo, pois para o sistema de eixos o par (100, 2) encontra-se em uma posição diferente conforme indicado na figura. Portanto o *dispositivo informático* indica que há dois pontos distintos, um no gráfico e um no sistema de eixos coordenados, representados pelo mesmo par ordenado (100, 2). Este fato contradiz a relação biunívoca entre par ordenado e ponto proposta pelo sistema ortogonal cartesiano, isto é, não houve vigilância epistemológica entre os modelos matemáticos dentro e fora do *dispositivo informático* uma vez que a epistemologia do sistema ortogonal cartesiano não foi mantida no modelo computacional.

Desta feita, alguns alunos julgaram que se tratava de uma espécie de ilusão de ótica e sugeriram utilizar outra *condição* do *dispositivo informático* que permite ver a tabela de pontos que compõe o gráfico para esclarecer esta dúvida como mostra a figura 58.

Figura 58: Tabela apresentada pelo *Winplot* para $y = log_{10}(x)$.

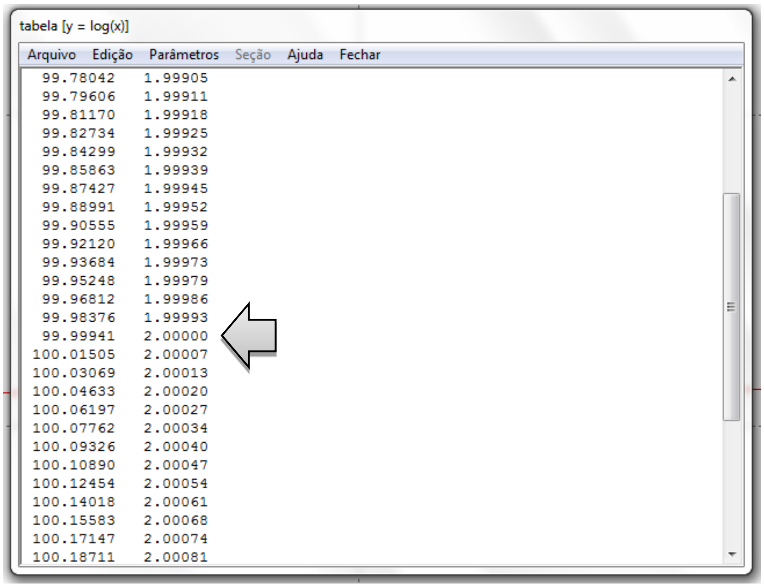


-2.40000	indefinido
-2.20000	indefinido
-2.00000	indefinido
-1.80000	indefinido
-1.60000	indefinido
-1.40000	indefinido
-1.20000	indefinido
-1.00000	indefinido
-0.80000	indefinido
-0.60000	indefinido
-0.40000	indefinido
-0.20000	indefinido
0.00000	indefinido
0.20000	-0.69897
0.40000	-0.39794
0.60000	-0.22185
0.80000	-0.09691
1.00000	0.00000
1.20000	0.07918
1.40000	0.14613
1.60000	0.20412
1.80000	0.25527
2.00000	0.30103
2.20000	0.34242
2.40000	0.38021
2.60000	0.41497
2.80000	0.44716

Fonte: Captura da *interface* do *software* feita pelo autor.

Os alunos perceberam, inspecionando a tabela, que os valores de x mostrados variavam de -5 a 5, correspondendo aos valores da primeira visualização do gráfico, antes da aproximação e do deslocamento da visualização para a direita (figura 53). Aparentemente estávamos diante de uma nova *restrição*, porém foi encontrada uma solução que consistiu em apontar a visualização da janela gráfica do *Winplot* para as proximidades da abscissa igual a 100, para então traçar o gráfico e visualizar a tabela mostrada na figura 59. Portanto, não estávamos diante de uma *restrição* haja vista que, segundo Chevallard (2009), esta é imutável para o professor.

Figura 59: Tabela de valores nas proximidades de y=2 em $y = log_{10}(x)$.



99.78042	1.99905
99.79606	1.99911
99.81170	1.99918
99.82734	1.99925
99.84299	1.99932
99.85863	1.99939
99.87427	1.99945
99.88991	1.99952
99.90555	1.99959
99.92120	1.99966
99.93684	1.99973
99.95248	1.99979
99.96812	1.99986
99.98376	1.99993
99.99941	2.00000
100.01505	2.00007
100.03069	2.00013
100.04633	2.00020
100.06197	2.00027
100.07762	2.00034
100.09326	2.00040
100.10890	2.00047
100.12454	2.00054
100.14018	2.00061
100.15583	2.00068
100.17147	2.00074
100.18711	2.00081

Fonte: Captura da *interface* do *software* feita pelo autor.

A ordenada 2 está relacionada à abscissa 9,99941, isto é, segundo o *Winplot*, o par ordenado $(99,99941;\ 2)$ pertence ao gráfico da função logarítmica $y = log_{10}(x)$. De modo geral, os alunos concluíram que 99,99941 é aproximadamente 100 e deram por resolvida a *tarefa* indicando a mesma resposta obtida no A_{pl}.

Apesar dos alunos considerarem a tarefa t_1 resolvida surgiram duas novas perguntas: Por que na tabela o valor da abscissa não é 100 como encontrado no ambiente *papel e lápis*? O que ocasionou esta diferença tanto na tabela quanto no gráfico?

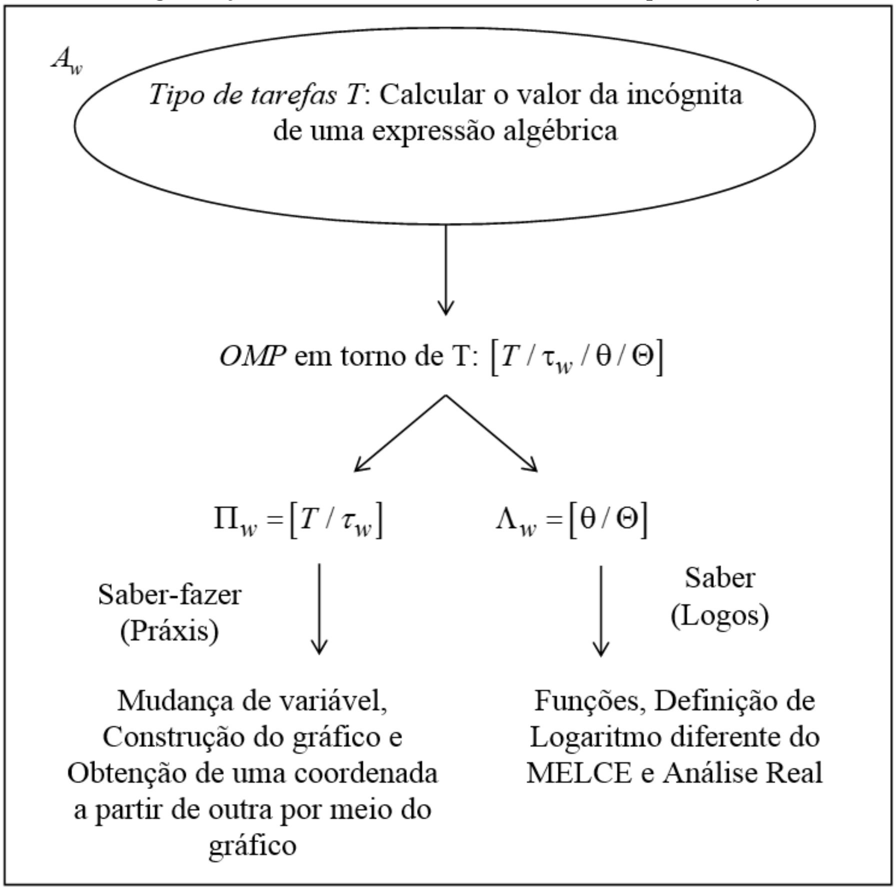
De acordo com Chevallard (2008, p. 3) a prova de uma declaração deve estar sujeita a jurisdição de um *milieu*[22] adequado, como no caso da igualdade $3\sqrt{5} = \sqrt{45}$ que deve ser rejeitada no *milieu informatizado* conformado por uma calculadora, porém pode ser provada no *milieu papel e lápis*. Em nosso caso, supomos que $99,99941 = 100$ porque confrontamos os resultados obtidos em A_{pl} e A_w, porém se não tivéssemos uma primeira resposta oriunda de A_{pl}, provavelmente ficaríamos com a resposta obtida em A_w.

A diferença entre 99,99941 e 100 é justificada pelo uso de dois *modelos epistemológicos* diferentes de logaritmo: o MELCE que permeou a *praxeologia* no ambiente *papel e lápis* A_{pl} e outro modelo que permita o cálculo do logaritmo com uma determinada aproximação por meio de iterações em ambientes *informatizados* como o MELCS, por exemplo. Em virtude do ocorrido, exponho a necessidade da reconstrução de meu "texto de saber" para implementar o cálculo do logaritmo de um número segundo o MELCS no intuito de prever e esclarecer a ocorrência de diferenças como esta obtidas nos ambientes *papel e lápis* e *informatizado*.

A realização da *tarefa* t_1 no ambiente *informatizado* A_w provocou uma (re)construção das *organizações matemáticas* e *didáticas* em relação ao ambiente A_{pl}. Apresento, no quadro 5, a *praxeologia* em torno do tipo de *tarefas* T desenvolvida em A_w.

[22] É onde ocorrem as interações do aluno. É o sistema antagonista no qual ele age e que permite analisar as relações entre os alunos e os saberes e as situações e por outro lado, as relações entre os próprios conhecimentos e as situações. Nesta pesquisa os milieux são tratados como os ambientes papel e lápis e ambiente informatizado.

Quadro 5: *Organização Matemática Pontual* em torno do *tipo de tarefas T* em A_w.

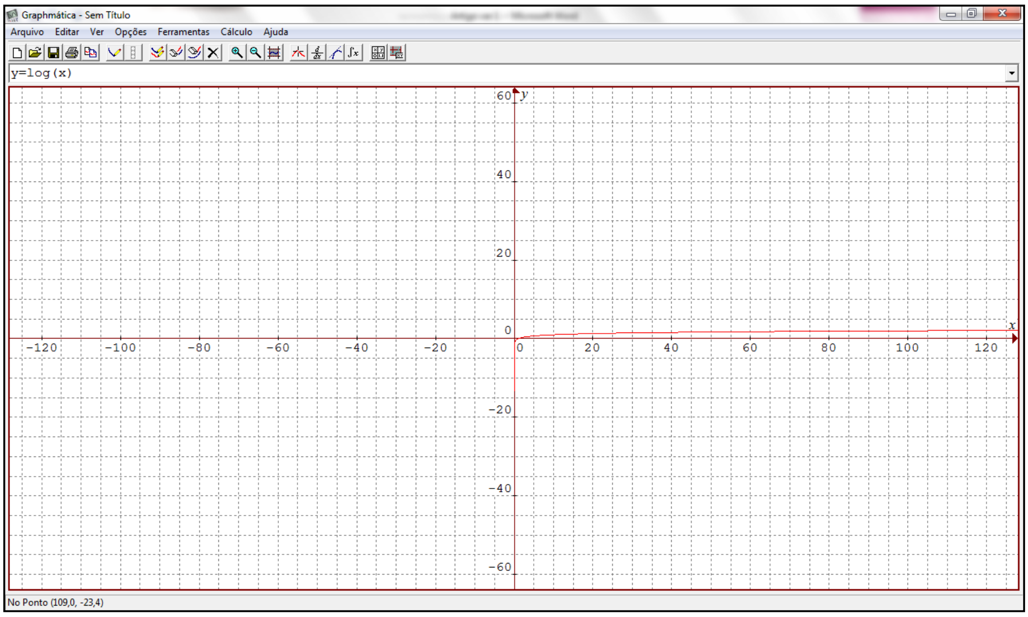


Fonte: Elaborado pelo autor.

A OM construída em A_w desta maneira difere daquela estabelecida em A_{pl} por apresentar diferenças tanto nos blocos *prático-técnicos* quanto nos blocos *tecnológico-teóricos*. De fato, as *técnicas* utilizadas assim como suas *tecnologias* são diferentes e apesar da definição de logaritmo figurar nas duas OM há uma diferença de modelos epistemológicos no A_{pl} e A_w.

Ainda no intuito de realizar a *tarefa* t_1, uma dupla de alunos sugeriu lançar mão do *Graphmatica*, que passa a configurar o ambiente *informatizado* A_g. Assim como em A_w, esta *tarefa* foi realizada por meio da articulação entre t_2, t_3 e t_4 e após a realização de t_2 e t_3, foi obtido o gráfico mostrado na figura 60.

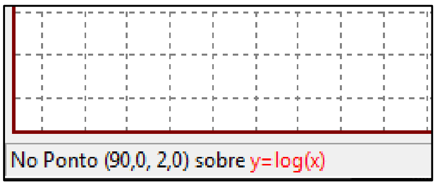
Figura 60: Gráfico de $y = log_{10}(x)$ mostrado no *Graphmatica*.



Fonte: Captura da *interface* do *software* feita pelo autor.

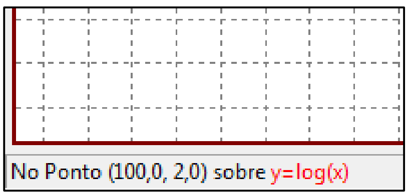
Como no gráfico mostrado não foi possível perceber a abscissa relacionada à ordenada 2, os alunos valeram-se de uma condição do ambiente A_g que mostrava as coordenadas de um ponto ao posicionar o ponteiro do *mouse* sobre o gráfico da função $y = log_{10}(x)$. Deslizaram o ponteiro do mouse sobre o gráfico até que a ordenada do ponto mostrado fosse 2 e então obtiveram os resultados mostrados nas figuras 61 e 62.

Figura 61: Par ordenado (90,2) sobre $y = log_{10}(x)$ mostrado em A_g.



Fonte: Captura da *interface* do *software* feita pelo autor.

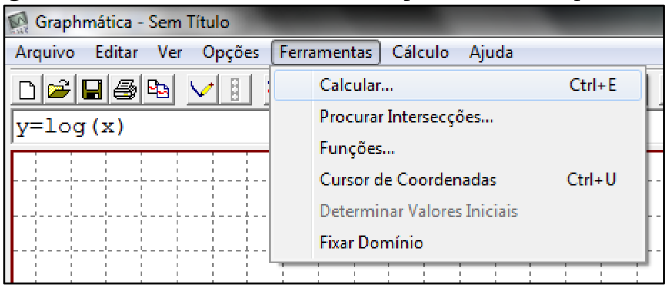
Figura 62: Par ordenado (100,2) sobre $y = log_{10}(x)$ mostrado em A_g.



Fonte: Captura da *interface* do *software* feita pelo autor.

Estes resultados indicam que há dois pares ordenados no gráfico cuja ordenada é 2, contrariando o fato de que a função logarítmica $y = log_{10}(x)$ é injetora. Tal fato é outro efeito colateral do fenômeno da *transposição informática* justificado pelo uso de um modelo epistemológico diferente do MELCE pelo *Graphmatica* e pela apresentação do valor decimal do logaritmo em sua forma arredondada. Apesar do ocorrido, os alunos resolveram utilizar a ferramenta *Calcular Ponto*, mostrada na figura 63, pois esta *condição* imposta pelo *Graphmatica* permite o cálculo de x dado y e vice-versa.

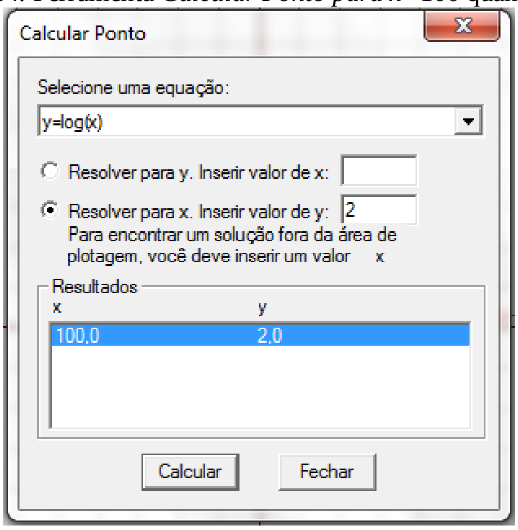
Figura 63: Ferramenta *Calcular Ponto* presente no *Graphmatica*.



Fonte: Captura da *interface* do *software* feita pelo autor.

O uso desta ferramenta permitiu que os alunos encontrassem o valor 100 como abscissa que se relaciona com a ordenada 2 (figura 64).

Figura 64: Ferramenta *Calcular Ponto para x*=100 quando y=2.



Fonte: Captura da *interface* do *software* feita pelo autor.

A ferramenta calcular ponto, neste caso, indicou o mesmo valor obtido no ambiente *papel e lápis*, pois o *Graphmatica* obtém um valor decimal para o logaritmando x, a exemplo do *Winplot*, porém apresenta este valor decimal arredondado para 100.

Desta feita, ao investigar o processo de (re)construção e gestão de o*rganizações matemáticas* e d*idáticas* no estudo de funções logarítmicas mediado pelos ambientes *papel e lápis* e *informatizado comprovei que* os enfrentamentos da *tarefa* t_1 nos ambientes A_{pl} e A_w indicaram que $\Pi_{pl} \neq \Pi_w$ e $\Lambda_{pl} \neq \Lambda_w$, isto é, blocos *prático-técnico*s diferentes entre si, assim como os blocos *tecnológico-teórico*, ou ainda, o "*saber-fazer*" e o "*saber*" em jogo nas duas situações são diferentes, o que permitiu a obtenção de respostas às questões propostas nesta pesquisa.

As *condições* e *restrições* impostas pelo ambiente *informatizado* influenciaram na (re)construção e gestão das o*rganizações matemáticas* e *didáticas* de funções logarítmicas em relação ao ambiente *papel e lápis* tanto no primeiro momento da TDI quanto no segundo, pois tais *condições* e *restrições* permearam tanto o trabalho de construção da OD quanto na construção e reconstrução das OM. Essas *condições* e *restrições* são oriundas de vários *níveis de codeterminação didática*, além de serem impostas pela *interface* dos *dispositivos informáticos* impedindo ou proporcionando o uso de determinadas *técnicas* no enfrentamento de *tarefas*.

As relações entre o ambiente *papel e lápis* e o ambiente *informatizado* influenciaram na (re)construção e gestão das *organizações matemáticas* e *didáticas*, pois a mudança do primeiro para o segundo ambiente implicou na mobilização de conhecimentos práticos e matemáticos diferentes, isto é, *praxeologias* diferentes. Estas relações encontram-se essencialmente, mas não em sua totalidade, na diferença entre os modelos epistemológicos utilizados nos ambientes, visto que o MELCE esteve presente no *papel e lápis* enquanto que no *informatizado* atuou um modelo epistemológico de logaritmo que permitiu seu cálculo por meio dos computadores como o MELCS, por exemplo.

A *condições* e *restrições*, assim como a diferença de modelos epistemológicos nos ambientes *papel e lápis* e *informatizado* me proporcionaram reflexões que possibilitaram a reconstrução da OD de minha proposta.

Após a construção das diferentes OM por meio dos ambientes *papel e lápis* e *informatizado* no segundo momento da TDI compreendi a necessidade da reconstrução de meu “texto de saber” no intuito de aprimorar minha proposta de estudo.

Nesta reconstrução, proponho acrescentar o estudo da definição de logaritmo do MELCS à proposta original, pois além de caracterizar uma forma de calcular o logaritmo de um número diferente da apresentada no MELCE, encaminha para a necessidade de estudo de critérios de arredondamento de números decimais. Estes implementos no “texto de saber” proporcionam uma visão mais ampla em relação ao estudo dos logaritmos apresentado atualmente no EM, além de discutir a necessidade de arredondamento de números decimais em função de uma aproximação que seja conveniente e quais os problemas, no âmbito dos ambientes *papel e lápis* e *informatizado*, que podem ser desencadeados a partir da mesma. As *restrições* do âmbito da *interface* do *software* educativo no que tange ao arredondamento de um número decimal ocasionaram efeitos colaterais da *transposição informática* como mostraram as figuras 61 e 62 e o trabalho com *tarefas* que permitam a compreensão do MELCS associado ao arredondamento contribuem para justificar, pelo menos parcialmente, o que ocorre nos *dispositivos informáticos*.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O processo de estudo de funções logarítmicas apresenta grande importância para o currículo escolar, para a formação matemática e na construção de modelos descritivos de fenômenos que permitem várias conexões dentro e fora da matemática contribuindo para o exercício da cidadania, porém estudos apontam para dificuldades emergentes deste processo.

Os ambientes *informatizados* que permitem a visualização e manipulação de modelos matemáticos computacionais podem contribuir com o processo de estudo dos mais variados objetos matemático e inclusive das funções logarítmicas por meio da relação entre suas expressões analíticas e gráficos, dentre outras.

Ao investigar do processo de (re)construção e gestão de *organizações matemáticas* e *didáticas* no estudo de funções logarítmicas mediado pelos ambientes *papel e lápis* e *informatizado* desde a elaboração de minha proposta até sua implementação com meus alunos e pelo exposto neste trabalho, concluo que alcancei os objetivos desta pesquisa ao responder às questões:

– Como as *condições* e *restrições* impostas pelo ambiente *informatizado* influenciam na (re)construção e gestão das *Organizações Matemáticas* e D*idáticas* de funções logarítmicas em relação ao ambiente *papel e lápis*?

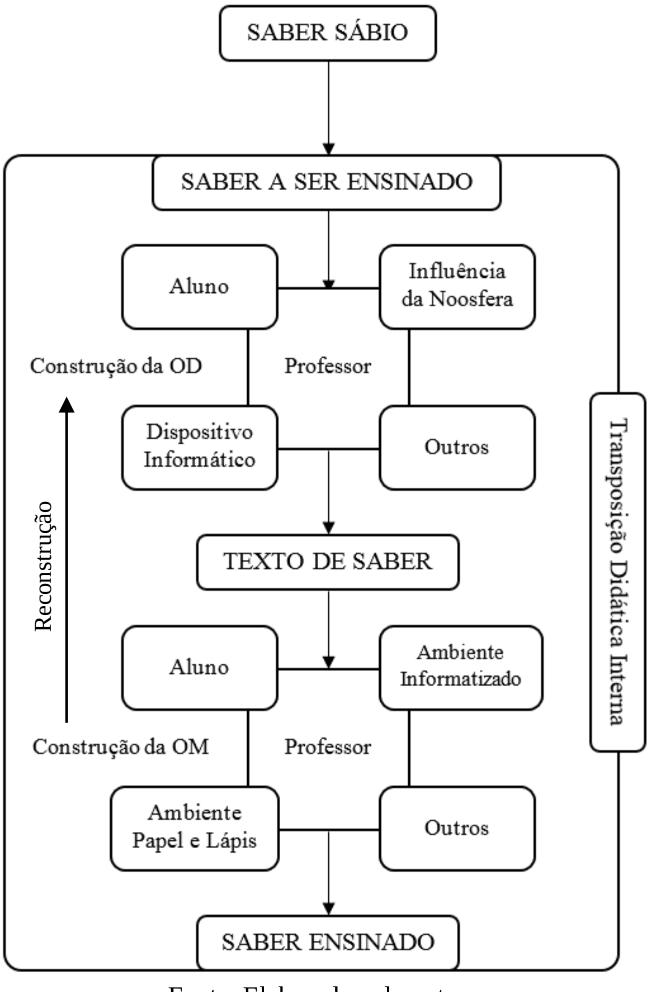
– Como as relações entre o ambiente *papel e lápis* e o ambiente *informatizado* influenciam na (re)construção e gestão das organizações matemáticas e didáticas?

O primeiro momento da TDI caracterizado pela construção do "texto de saber" foi marcado por *condições* e *restrições* oriundas de vários *níveis de codeterminação didática* tal como civilização, sociedade, escola etc. A importância e as potencialidade das funções logarítmicas, as dificuldades encontradas em seu processo de estudo, as *praxeologias matemáticas* em torno dos *tipos de tarefas* destas funções requeridas pela escola, alunos e famílias em virtude dos processos seletivos para ingresso nas instituições de nível superior, o uso de computadores e outras tecnologias fortemente recomendados pelos documentos oficiais, além da utilização de livros didáticos de matemática publicados no Brasil que promovem o estudo do MELCE foram alguns fatores que permearam a construção da OD de minha proposta, assim como, a facilidade e interesse no uso do Winplot e Graphmatica, a preferência do estudo em grupos, o hábito de utilização do laboratório de informática em suas aulas e o estudo prévio de funções e potências por parte dos alunos envolvidos nesta pesquisa.

O segundo momento da TDI caracterizado pela implementação da proposta e a construção das OM com os alunos no laboratório de informática também foi marcado pela influência de *condições* e *restrições* impostas por vários NCD e pelo ambiente *informatizado*, além das diferenças epistemológicas entre o ambiente *papel e lápis* e o *informatizado* de modo a atender o objetivo de minha de pesquisa. A influência de *condições* e *restrições* impostas pelos ambientes *informatizado*s A_w e A_g foram determinantes na construção das OM diferentes das OM construídas no ambiente *papel e lápis* A_{pl} e apesar do cuidado que tive no primeiro momento da TDI percebi a necessidade de reconstrução da OD no intuito de facilitar o estudo em oportunidades posteriores. Nesta reconstrução, além do MELCE, proponho o estudo do cálculo do logaritmo de um número pelo MELCS, além de critérios de arredondamento que proporcionam um estudo mais amplo e condizente com o sistema didático mediado por computador.

De acordo com o exposto nesta dissertação, o quadro 6 mostra o fenômeno da TDI em seus dois momentos e as influências que sofri em cada um deles.

Quadro 6: Esquema dos dois momentos da TDI.



Fonte: Elaborado pelo autor.

A pertinência do cunho narrativo de minha pesquisa foi garantida por minha presença no processo de construção e reconstrução das *organizações matemáticas* e *didáticas* expondo minha percepção sobre a mudança de sentido, de aprendizado e de elementos subjacentes que não ficaram expostos na elaboração e condução da experiência realizada no laboratório de informática da escola. Aproveito este cunho narrativo autobiográfico, para revelar que houve mudanças em meu *Equipamento Praxeológico*[23] em função da experiência vivida ao elaborar e implementar minha proposta de estudo de introdução de funções logarítmicas mediada pelos ambientes pelos ambientes *papel e lápis* e *informatizado*.

Em vinte anos de experiência como professor de matemática em instituições públicas e particulares de ensino nunca havia experimentado nada igual no que tange ao uso de computadores em processos de estudo, pois apesar de acumular certa experiência no uso do *Winplot* e *Graphmatica*, nunca havia questionado o *modelo epistemológico* utilizado por tais softwares gráficos. Considero que os *modelos epistemológicos* MELCS e MELCA foram fundamentais para a compreensão da diferença entre as soluções 99,99941 e 100 encontradas nos ambientes *papel e lápis* e *informatizado*. Fato que permitiu a reconstrução das OD de meu "texto de saber" no sentido de proporcionar *praxeologias* aos alunos que não estão presentes nos currículos oficiais para o EM, mas que se mostraram essenciais para a manipulação dos modelos computacionais.

Em função dos avanços tecnológicos e programas governamentais para a implementação de salas de informática nas escolas, a presença de *dispositivos informáticos* em processos de estudos tende a ser cada vez maior e o desenvolvimento de *praxeologias* adequadas ao enfrentamento de *tarefas* em ambientes *informatizado*s torna-se necessário. Infiro que pesquisas como esta tendem a exercer pressão para mudanças no currículo de matemática frente ao uso de *tecnologias*, isto é, exercem influência em outros *níveis superiores de codeterminação didática* (civilização, sociedade, escola etc.) que podem vir a interferir efetivamente em futuros trabalhos docentes de professores.

Os três modelos epistemológicos MELCS, MELCA e MELCE que caracterizei nesta pesquisa proporcionam diferentes maneiras de calcular o logaritmo de um número e daí eclodem *praxeologias matemáticas* que são diferenciadas tanto em relação aos blocos *prático-técnicos* quanto *tecnológico-teóricos*, tais diferenças me permitiram conjecturar a criação de

[23] Mistura de praxeologias e de elementos praxeológicos que a pessoa possui e que pode utilizar em um dado momento sob certas condições e restrições. (Chevallard, 2009)

um *software* educativo que mantivesse a epistemologia do logaritmo de interesse do professor no intuito de evitar o choque ou coadunação entre os modelos epistemológicos. Por exemplo, se meu intuito fosse tornar rotineiras *tarefas* que se valem da *técnica* da aplicação definição de logaritmo presente no ambiente *papel e lápis* (MELCE) poderia utilizar o *software* para este propósito sem a necessidade da reconstrução da OD como visto nesta pesquisa. Esta transposição do saber a ensinar para um modelo computacional que permitirá sua manipulação num dispositivo informático, garantindo assim coerência epistemológica requerida no fenômeno da *transposição informática* de Balacheff (1994).

O modelo epistemológico MELCE, apresentado nesta pesquisa, pode ser utilizado como modelo de análise de atividades relativas ao estudo de logaritmos e funções logarítmicas em virtude de estar presente na maioria dos livros didáticos de matemática de circulação nacional e por ter sido caracterizado neste trabalho por meio de diversos *tipos de tarefas*. Outra contribuição desta investigação foi a comprovação da necessidade do estudo prévio de potências e funções exponenciais para então estudar logaritmo de acordo com o MELCE, o que não ocorre no MELCS e MELCA.

Outro desdobramento de minha pesquisa indica a possibilidade da investigação acerca do modelo epistemológico computacional utilizado pelos *dispositivos informáticos* permitindo o estabelecimento de relações mais precisas com os modelos epistemológicos conhecidos, o que permitiria maior controle epistemológico tanto para professores nos dois momentos da *transposição didática interna* quanto no processo da *transposição informática*.

Destaco a necessidade da criação de um modelo epistemológico alternativo para o logaritmo que caracterize um estudo que atenda às *condições* e *restrições* oriundas dos diversos *níveis de codeterminação* e adequado ao uso de *dispositivos informáticos* dada sua capacidade e importância atualmente nos processos de estudo.

De modo geral, os ambientes *informatizado*s de aprendizagem são o resultado de uma construção que é o lugar de novas transformações dos objetos de ensino, fato que lança novas questões de pesquisa que pretendo responder dando prosseguimento em minha carreira como pesquisador.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, S. A. Informática e Educação Matemática. Revista de Matemática Aplicada, Ano I, Nº 1, São Caetano do Sul: 2005

ALMOULOUD, S. A. As Transformações do Saber Científico ao Saber Ensinado, O Caso do Logaritmo. P.20, 2011.

ARAYA-CHACÓN,
BALACHEFF. N. La Transposition Informatique. Note sur un Nouveau Problème pour la Didactique. In Artigue M. et al. (org.) : Vingt Ans de Didactique des Mathématiques en France. Recherches en Didactique des Mathématiques, v. Especial. La Pensée Sauvage Editions, p.364-370, 1994.

BORBA, M. C.; PENTEADO. M. G. P. Informática e Educação Matemática. 4ª Edição. Belo Horizonte, MG: Autêntica Editora, 2010.

BOSCH, M.; FONSECA C.; GASCÓN, J. Incompletitud de las Organizaciones Matemáticas Locales en las instituciones escolares, Recherches en Didactique des Mathématiques, p.205-250, 2004.

BOYER, C. B.; MERZBACH, U. C. História da Matemática. 2012.

BRASIL, Ministério da Educação e dos Desportos. Parâmetros curriculares nacionais: Ensino Médio. Parte I – Bases Legais, Distrito Federal, 2000. 109p.

BRASIL, Ministério da Educação e dos Desportos. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+): Ciências da Natureza, Matemática e suas *Tecnologias*, Ensino Médio. Brasília, Distrito Federal, 2002. 141p.

BRASIL, Ministério da Educação e Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. Matriz de Referência para o ENEM 2009. Brasília, Distrito Federal, 2011. 19p.

BRASIL, Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. Guia de Livros Didáticos - PNLD 2012: Matemática, Ensino Médio. Brasília, Distrito Federal, 2011. 108p.

CARDOSO, E. R.; FRANCO, V. S. Construindo as Funções Logarítmicas e Exponenciais por meio do *GeoGebra*. Actas de la Conferencia Latinoamericana de *GeoGebra*. Uruguay: [s.n.]. 2012. p. 7.

CARTER, K. The place of story in the study of teaching and teacher education. *Educational Researcher*,Washington, v. 22, n. 1, p. 5-12, 1993.

CHEVALLARD, Y. La transposition didactique: du savoir savant au savoir enseigné. Grenoble: La Pensée Sauvage, 1985.

CHEVALLARD, Y. La Transposición Didáctica: Del Saber Sabio Al Saber Enseñado. 3ª Ed. 2ª Reimp. Buenos Aires, ARG: Aique Grupo Editor, 1991.

CHEVALLARD, Y. Concepts fondamentaux da la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. In: ______ Recherches en Didactique des Mathématiques. Genoble: La Pensée Sauvage-Éditions, v. 12.1, 1992. p. 73-112.

CHEVALLARD, Y. L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. In: ______ Recherches en Didactique des Mathématiques. Genoble: Le Pensée Sauvage-Éditions, v. 19.2, 1999. p. 221-265.

CHEVALLARD, Y. Organiser l'étude: 3. Ecologie & regulátion. 2002. Disponível em < http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Organiser_l_etude_3.pdf >. Acessado em 20 de abr. 2010.

CHEVALLARD, Y. Un concept en émergence : la dialectique des médias et des milieux. Dans G. Gueudet & Y. Matheron (Éds), *Actes du Séminaire national de didactique des mathématiques.* p.344-366, 2008.

CHEVALLARD. Y. La notion de PER: problèmes et avancées. Toulouse, 2009. Disponível em < http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=161>. Acessado em 20 de abr. 2010.

CHEVALLARD. Y. La TAD face au professeur de mathématiques, Toulouse, 29 de abril, 2009a , Disponível em <http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=161>. Acessado em 8 de out. 2009.

D'AMORE, Bruno. Elementos de Didática da Matemática. Tradução: Maria Cristina Bonomi. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2007.

EVES, H. Introdução à História da Matemática, tradução: Hygino H. Domingues. 3ª Reimpressão. Campinas, SP: Unicamp, 2008.

FERRARI, M. Una Visión Socioepistemológica. Estudio de la Función Logaritmo. Dissertação (Mestrado em Ciencias en la Especialidad de Matemática Educativa) - Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México, p. 286, 2001.

FERREIRA, R. L. Uma Sequência de Ensino para o Estudo de Logaritmos usando a Engenharia Didática. Dissertação (Mestrado Profissionalizante em Ensino de Física e de Matemática) - Centro Universitário Franciscano, Santa Maria, p. 151, 2006.

FREITAS, M. T. M.; FIORENTINI, D. As possibilidades formativas e investigativas da narrativa em educação matemática. Horizontes, Revista Semestral do Programa de Pós-Graduação *Stricto Sensu* em Educação da Universidade São Francisco. v. 25, n. 1, p. 63-71, jan./jun. 2007. Disponível em: <http://www.saofrancisco.edu.br/itatiba/mestrado/educacao/uploadAddress/edicao_completa%5B11019%5D.pdf#page=63> . Acesso em: 01 jun. 2011.

KARRER, M. Logaritmos: proposta de uma sequência de ensino utilizando a calculadora. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, p. 238, 1999.

LARROSA, J. Literatura, experiência e formação. In: COSTA, M. V. (Org.). *Caminhos investigativos*: novos olhares na pesquisa em educação. Porto Alegre: Mediação, 1996.

LIMA, E. L. Logaritmos. Coleção do Professor de Matemática, 1. 4ª Edição. Rio de Janeiro, RJ: SBM, 2010.

MERICHELLI, M. A. J. O Ensino dos Logaritmos através da Resolução de Problemas. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) - Universidade Cruzeiro do Sul, São Paulo, p. 162, 2010.

OLIVEIRA, A. J. D. O Ensino dos Logaritmos a partir de uma Perspectiva Histórica. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Naturais e Matemática) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, p. 123, 2005.

ROSSI, P.R.S. O Logaritmo no Ensino Médio: construindo uma aprendizagem significativa através de uma sequência didática. 2010. 219 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Exatas) – Universidade Federal de São Carlos, São Paulo. 2010.

SANTOS, A. T. C. D. O Ensino da Função Logarítmica por meio de uma Sequência Didática ao Explorar suas Representações com o uso do *Software GeoGebra*. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, p. 200, 2011.

SILVA, G.C.C. Matemática para o Vestibular, Vol 1, Belém: Edição do Autor, 2012.

SOARES, E. C. Uma Investigação Histórica sobre os Logaritmos com Sugestões Didáticas para a Sala de Aula. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Natuais e Matemática) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, p. 142, 2011.