



Programa de Pós-Graduação em Engenharia
de Recursos Naturais da Amazônia

**ANÁLISE DA CONVECÇÃO NATURAL NO ESCOAMENTO
LAMINAR EM CAVIDADES PARCIALMENTE PREENCHIDAS
COM MEIOS POROSOS UTILIZANDO TRANSFORMADAS
INTEGRAIS**

Sil Franciley dos Santos Quaresma

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Recursos Naturais da Amazônia, PRODERNA/ITEC, da Universidade Federal do Pará, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Engenharia de Recursos Naturais.

Orientadores: João Nazareno Nonato Quaresma
Emanuel Negrão Macêdo

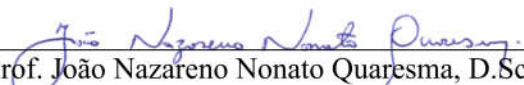
Belém
Abril de 2016

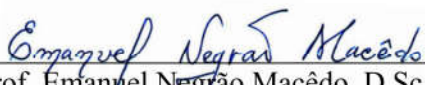
**ANÁLISE DA CONVECÇÃO NATURAL NO ESCOAMENTO LAMINAR EM
CAVIDADES PARCIALMENTE PREENCHIDAS COM MEIOS POROSOS
UTILIZANDO TRANSFORMADAS INTEGRAIS**

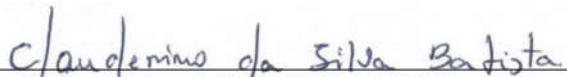
Sil Franciley dos Santos Quaresma

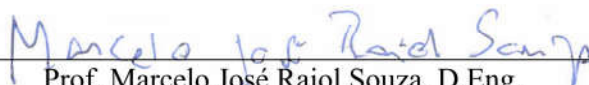
TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE RECURSOS NATURAIS DA AMAZÔNIA (PRODERNA/ITEC) DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM ENGENHARIA DE RECURSOS NATURAIS.

Examinada por:


Prof. João Nazareno Nonato Quaresma, D.Sc.
(PRODERNA/ITEC/UFPA-Orientador)


Prof. Emanuel Negrão Macêdo, D.Sc.
(PRODERNA/ITEC/UFPA-Coorientador)


Prof. Clauderino da Silva Batista, D.Eng.
(FEQ/ITEC/UFPA-Membro)


Prof. Marcelo José Raiol Souza, D.Eng.
(DTRN/CCNT/UEPA-Membro)


Prof. Renato Machado Cotta, Ph.D.
(PEM/COPPE/UFRJ-Membro)


Profa. Carolina Palma Naveira Cotta, D.Sc.
(PEM/COPPE/UFRJ-Membro)

BELÉM, PA - BRASIL

ABRIL DE 2016

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da UFPA

Quaresma, Sil Franciley dos Santos, 1979-

Análise da convecção natural no escoamento laminar em cavidades parcialmente preenchidas com meios porosos utilizando transformadas integrais / Sil Franciley dos Santos Quaresma. - 2016.

Orientador: João Nazareno Nonato Quaresma;

Coorientador: Emanuel Negrão Macêdo.

Tese (Doutorado) - Universidade Federal do Pará, Instituto de Tecnologia, Programa de Pós-graduação em Engenharia de Recursos Naturais da Amazônia, Belém, 2016.

1. Mecânica dos Fluidos. 2. Calor- Convecção natural.
3. Transformadas integrais. I. Título

CDD 22. ed. 620.106

Este trabalho é dedicado aos meus filhos e esposa e aos amigos e colegas que sempre apoiaram, incentivaram e de alguma forma contribuíram para a elaboração do mesmo.

AGRADECIMENTOS

Aos professores João Nazareno Nonato Quaresma e Emanuel Negrão Macêdo pela orientação prestada.

Aos meus pais (avós) pela criação e atenção: D. Ana Quaresma e Sr. Benedito Quaresma.

Às minhas tias, que as tenho como mães: Valéria, Arcangela e Sandra Maria.

Aos meus primos-irmãos.

Aos meus irmãos que foram grandes amigos.

Aos meus amigos que foram como irmãos: Edilson Magalhães, Kleber Bittencourt, Nelson Amorim, Clauderino Batista, Paulo Roberto e Carlos Célio.

Aos meus familiares, que de alguma forma contribuíram para a realização deste trabalho.

Aos professores do programa PRODERNA.

Aos colegas e amigos não nomeados, mas de forma alguma esquecidos.

Aos colegas do Laboratório de Simulação de Processos, Bruno e Josiel.

À minha esposa Silvane Soares que não poderia em um parágrafo descrever sua importância para a realização deste trabalho.

Ao meu filho Gustavo Quaresma, já no início de sua preparação para o vestibular, para qual desejo que possa alcançar um dia o doutoramento.

Ao meu filho Eduardo Quaresma de seis anos que é a alegria da família.

Aos professores avaliadores deste trabalho.

Ao CNPq pelo apoio financeiro.

Resumo da Tese apresentada ao PRODERNA/UFPA como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Engenharia de Recursos Naturais (D.Eng.)

**ANÁLISE DA CONVECÇÃO NATURAL NO ESCOAMENTO LAMINAR EM
CAVIDADES PARCIALMENTE PREENCHIDAS COM MEIOS POROSOS
UTILIZANDO TRANSFORMADAS INTEGRAIS**

Sil Franciley dos Santos Quaresma

Abril/2016

Orientadores: João Nazareno Nonato Quaresma

Emanuel Negrão Macêdo

Área de Concentração: Uso e Transformação de Recursos Naturais.

Fazendo uso da equação de Darcy e suas correções de Brinkman e Forchheimer foi avaliada a convecção natural em cavidades parcialmente preenchidas com meio poroso, utilizando para isso a técnica da Transformada Integral Generalizada – GITT. No primeiro momento foi analisado o problema do escoamento unidimensional em canal parcialmente preenchido com meio poroso, sem o efeito da convecção natural de forma a entender a metodologia de solução da técnica para problemas com interfaces fluido/poro. Foi usada a equação conhecida como Darcy-Brinkman-Forchheimer para descrever o perfil de velocidade no canal, utilizando-se da Técnica da Transformada Integral Generalizada – GITT para resolver o problema proposto. Na segunda etapa do trabalho utilizou-se da GITT para estudar o problema da convecção natural térmica em cavidade retangular parcialmente preenchida com meio poroso, com paredes laterais diferencialmente aquecidas, utilizando a formulação matemática de Darcy-Brinkman-Forchheimer modificada para descrever o escoamento no meio poroso e no meio fluido, através do uso de um parâmetro binário que ao encontrar-se no meio fluido transforma a equação de Darcy-Brinkman-Forchheimer na equação de Navier-Stokes. A equação da conservação da energia foi utilizada para descrever o perfil de temperatura na cavidade, sendo possível avaliar a influência dos diversos parâmetros que caracterizam esse tipo de problema, como por exemplo, a influência da permeabilidade da camada porosa

sobre o escoamento global e a transferência de calor global. Por fim foi realizado o estudo da convecção natural termosolutal em uma cavidade retangular parcialmente preenchida com meio poroso, que de forma resumida é a convecção natural derivada dos efeitos térmicos e de massa concorrentes entre si na formação do fluxo, foi utilizada a formulação de Darcy-Brinkman modificada para descrever o escoamento em toda a cavidade, que como já mencionado anteriormente assume a forma da equação de Navier-Stokes quando avaliada em meio totalmente fluido. A equação da conservação da energia foi utilizada para descrever o perfil de temperatura na cavidade e a equação da conservação das espécies foi utilizada para descrever o perfil de concentração. O estudo avalia também a eficiência da GITT em resolver sistemas de equações acopladas, com alto grau de não-linearidade envolvendo interface fluido/poro, foi usada a formulação Darcy-Brinkman-Forchheimer para descrever o perfil de velocidade no canal.

Palavras-Chave: GITT, convecção natural, transferência de calor e massa, meio poroso, Darcy-Brinkman-Forchheimer.

Abstract of Thesis presented to PRODERNA/UFPA as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Natural Resources Engineering (D.Eng.)

ANALYSIS OF NATURAL CONVECTION IN LAMINAR FLOW IN CAVITY ENCLOSURE PARTIALLY FILLED WITH A POROUS MEDIA THROUGH INTEGRAL TRANSFORM METHOD

Sil Franciley dos Santos Quaresma

April/2016

Advisors: João Nazareno Nonato Quaresma

Emanuel Negrão Macêdo

Research Area: Use and Transformation of Natural Resources.

A numerical study is performed to analyze the natural convection in a vertical rectangular enclosure that is partially filled with a porous medium, by the Generalized Integral Transform Technique (GITT). The first studies concerning flow transient in a channel partially filled with porous medium without the effect of natural convection in order to understand the technical solution or problems with interfaces. Two different formulations were studied: the two-domain approach and the single-domain approach. Subsequently a numerical study is performed to analyze the steady-state thermal natural convection fluid flow and heat transfer in a vertical rectangular enclosure that is partially filled with a porous medium. The flow is modeled using the Brinkman-Forchheimer extended Darcy and energy conservation equation was used to predict the heat transfer. The mathematical description of the problem is based on a one-domain formulation of the conservation equations. Finally it carried out the study of double diffusive natural convection, also nominated thermosolutal natural convection in partially porous enclosures. The validity of the so-called one-domain approach used in this case compared to existing results in the literature. A particular class of problems dealing with thermal and double diffusive natural convection mechanisms in partially porous enclosures is presented, and it is shown that this configuration exhibits specific features in terms of the heat and mass transfer characteristics.

Keywords: GITT, natural convection, heat and mass transfer, porous medium, Darcy-Brinkman-Forchheimer.

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO	1
1.1 – MOTIVAÇÃO E OBJETIVOS	1
1.2 – A TÉCNICA DA TRANSFORMADA INTEGRAL GENERALIZADA – GITT. 2	
1.3 – REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	4
1.4 – SÍNTESE DO TRABALHO	6
 CAPÍTULO 2 - MEIO POROSO	8
2.1 – ESCOAMENTO EM MEIOS POROSOS	8
2.2 – CONVECÇÃO NATURAL TÉRMICA EM CAVIDADE PARCIALMENTE PREENCHIDA POR MEIO POROSO	14
2.3 – CONVECÇÃO NATURAL TERMOSOLUTAL EM CAVIDADE PARCIALMENTE PREENCHIDA POR MEIO POROSO	16
 CAPÍTULO 3 - ESCOAMENTO EM CANAIS PARCIALMENTE PREENCHIDOS COM MEIO POROSO	17
3.1 – DEFINIÇÃO DO PROBLEMA	17
3.2 – ABORDAGEM DE DOMÍNIO DUPLO	18
3.3 – ABORDAGEM DE DOMÍNIO ÚNICO	26
3.4 – RESULTADOS	32
 CAPÍTULO 4 - CONVECÇÃO NATURAL TÉRMICA EM CAVIDADE RETANGULAR FECHADA PARCIALMENTE PREENCHIDA COM MEIO POROSO	39
4.1 – DEFINIÇÃO DO PROBLEMA	39
4.2 – FÓRMULAÇÃO MATEMÁTICA PARA CONVECÇÃO TÉRMICA EM CAVIDADE RETANGULAR	40
4.3 – SOLUÇÃO VIA GITT	46

4.4 – RESULTADOS	63
------------------------	----

CAPÍTULO 5 - CONVECÇÃO NATURAL TERMOSOLUTAL EM CAVIDADE RETANGULAR FECHADA PARCIALMENTE PREENCHIDA COM MEIO POROSO – FORMULAÇÃO DARCY- BRINKMAN	80
--	-----------

5.1 – DEFINIÇÃO DO PROBLEMA	80
-----------------------------------	----

5.2 – FORMULAÇÃO MATEMÁTICA PARA CONVECÇÃO TERMOSOLUTAL EM CAVIDADE RETANGULAR	81
--	----

5.3 – SOLUÇÃO VIA GITT	88
------------------------------	----

5.4 – RESULTADOS	99
------------------------	----

CAPÍTULO 6 - CONCLUSÕES E SUGESTÕES.....	123
---	------------

CAPÍTULO 7 - REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	125
--	------------

LISTA DE FIGURAS

Figura 2. 1	Escoamento em um canal fluido/poroso.....	10
Figura 2. 2	Três elementos de superfície mutuamente perpendiculares entre si de área dS , através da qual a energia é transportada por convecção pelo movimento do fluido com a velocidade v . Fonte: BIRD et al. (2002).....	14
Figura 2. 3	Esquemas de cavidades verticais parcialmente preenchidas com meio poroso. Fonte: BEJAN (2003).....	15
Figura 3. 1	Diagrama esquemático de um duto parcialmente preenchido por meio poroso. Fonte: elaborado pelo autor.....	17
Figura 3. 2	Esquema simplificação do problema.....	18
Figura 3. 3	Canais paralelos poro/fluido com camada interfacial não homogênea. Fonte: elaborado pelo autor.....	28
Figura 3. 4	Verificação numérica entres os resultados de Xiong (2001) para os perfis de velocidade e os resultados obtidos via GITT - 1Ω	33
Figura 3. 5	Verificação numérica – comparação entres os resultados de Xiong (2001) para os perfis de velocidade e os resultados obtidos via GITT - 2Ω	33
Figura 3. 6	Influência do número de Reynolds na velocidade de um duto parcialmente preenchido com meio poroso – $\varepsilon_\infty = 0,2$ $a = 0,1$ $\gamma = 100$	35
Figura 3. 7	Influência do número de Reynolds na velocidade de um duto parcialmente preenchido com meio poroso – $\varepsilon_\infty = 0,4$ $a = 0,4$ $\gamma = 1000$	35
Figura 3. 8	Influência da camada fluida a na velocidade de um duto parcialmente preenchido com meio poroso – $Re = 1000$ $\varepsilon_\infty = 0,4$ $\gamma = 1000$	36
Figura 4. 1	Desenho esquemático para o problema de convecção natural térmica em uma cavidade parcialmente preenchida com meio poroso. Fonte: elaborado pelo autor.....	39
Figura 4. 2	Função Corrente $Ra_T = 10^3$ $Pr = 0,71$ – Leal (1996)	64

Figura 4. 3	Função Corrente $Ra_T = 10^4$ $Pr = 0,71$ – Leal (1996).....	65
Figura 4. 4	Função Corrente $Ra_T = 10^5$ $Pr = 0,71$ – Leal (1996)	65
Figura 4. 5	Função Corrente $Ra_T = 10^5$ $Pr = 0,71$ – Leal (1996).....	65
Figura 4. 6	Perfil de temperatura $Ra_T = 10^3$ $Pr = 0,71$ – Leal (1996).....	66
Figura 4. 7	Perfil de temperatura $Ra_T = 10^4$ $Pr = 0,71$ – Leal (1996).....	66
Figura 4. 8	Perfil de temperatura $Ra_T = 10^5$ $Pr = 0,71$ – Leal (1996)	66
Figura 4. 9	Perfil de temperatura $Ra_T = 10^5$ $Pr = 0,71$ – Leal (1996)	67
Figura 4. 10	Função corrente Beckermann (1987) – $Ra_T = 3,028 \times 10^7$ $Pr = 6,97$ $Da = 7,354 \times 10^{-7}$ $C_F = 0,6124$ $R_k = 1,397$ $S = 0,5$	71
Figura 4. 11	Isotermas Beckermann (1987) – $Ra_T = 3,02 \times 10^7$ $Pr = 6,97$ $Da = 7,354 \times 10^{-7}$ $C_F = 0,6124$ $R_k = 1,397$ $S = 0,5$	72
Figura 4. 12	Perfil de temperatura Beckermann (1987) - $Ra_T = 3,02 \times 10^7$ $Pr = 6,97$ $Da = 7,354 \times 10^{-7}$ $C_F = 0,6124$ $R_k = 1,397$ $S = 0,5$	72
Figura 4. 13	Influência do número de Darcy - $Pr = 0,71$ $C_F = 0,5$ $Ra_T = 10^4$ $S = 0,5$	74
Figura 4. 14	Influência do número de Darcy - $Pr = 0,71$ $C_F = 0,5$ $Ra_T = 10^4$ $S = 0,5$	74
Figura 4. 15	Influência da espessura da camada fluida - $Pr = 0,71$ $C_F = 0,5$ $Da = 10^{-4}$ $Ra_T = 10^5$	75
Figura 4. 16	Influência da espessura da camada fluida - $Pr = 0,71$ $C_F = 0,5$ $Da = 10^{-4}$ $Ra_T = 10^5$	76
Figura 4. 17	Influência do número de Rayleigh - $Pr = 0,71$ $C_F = 0,5$ $Da = 10^{-4}$ $S = 0,9$	76
Figura 4. 18	Influência do número de Rayleigh - $Pr = 0,71$ $C_F = 0,5$ $Da = 10^{-4}$ $S = 0,5$	77
Figura 4. 19	Influência do número de Rayleigh - $Pr = 0,71$ $C_F = 0,5$ $Da = 10^{-4}$ $S = 0,9$	77
Figura 4. 20	Influência do número de C_F - $Pr = 0,71$ $Ra_T = 10^5$ $Da = 10^{-4}$ $S = 0,5$	78
Figura 4. 21	Influência do número de C_F - $Pr = 0,71$ $Ra_T = 10^5$ $Da = 10^{-4}$ $S = 0,5$	79
Figura 5. 1	Esquema para o problema de convecção natural termosolutal em uma cavidade parcialmente preenchida com meio poroso. Fonte	80

	:elaborado pelo autor.....	
Figura 5. 2	Função Corrente Leal (1996) - $Ra_T = 10^3$ $Pr = 0,71$ $A = 1$	100
Figura 5. 3	Função Corrente Leal (1996) - $Ra_T = 10^4$ $Pr = 0,71$ $A = 1$	100
Figura 5. 4	Função Corrente Leal (1996) - $Ra_T = 10^5$ $Pr = 0,71$ $A = 1$	100
Figura 5. 5	Função Corrente Leal (1996) - $Ra_T = 10^6$ $Pr = 0,71$ $A = 1$	101
Figura 5. 6	Isotermas Leal (1996) - $Ra_T = 10^3$ $Pr = 0,71$ $A = 1$	101
Figura 5. 7	Isotermas Leal (1996) - $Ra_T = 10^4$ $Pr = 0,71$ $A = 1$	101
Figura 5. 8	Isotermas Leal (1996) - $Ra_T = 10^5$ $Pr = 0,71$ $A = 1$	102
Figura 5. 9	Isotermas Leal (1996) - $Ra_T = 10^6$ $Pr = 0,71$ $A = 1$	102
Figura 5. 10	Verificação Neculae (2003) - $Ra_T = 10^6$ $Pr = 10$ $Da = 1$ $N = 10$ $x_p = 0,1$ $Le = 1$ $A = 0,2$	106
Figura 5. 11	Influência do número de Darcy Da - $Ra_T = 10^4$, $Pr = 10$, $Le =$ 100 , $N = 10$, $A = 2$, $x_p = 0,8$	108
Figura 5. 12	Influência do número de Darcy Da - $Ra_T = 10^4$, $Pr = 10$, $Le =$ 100 , $N = 10$, $A = 2$, $x_p = 0,8$	109
Figura 5. 13	Influência do número de Darcy Da na transferência de calor - $Ra_T = 10^4$, $Pr = 10$, $Le = 100$, $N = 10$, $A = 2$, $x_p = 0,8$	109
Figura 5. 14	Influência do número de Darcy Da - $Ra_T = 10^4$, $Pr = 10$, $Le =$ 100 , $N = 10$, $A = 2$, $x_p = 0,8$	110
Figura 5. 15	Influência do número de Darcy Da na transferência de massa - $Ra_T = 10^4$, $Pr = 10$, $Le = 100$, $N = 10$, $A = 2$, $x_p = 0,8$	111
Figura 5. 16	Influência da espessura da camada porosa x_p - $Ra_T = 10^4$, $Pr = 10$, $Le = 100$, $N = 10$, $A = 2$, $Da = 3.10^{-6}$	112
Figura 5. 17	Influência da espessura da camada porosa x_p - $Ra_T = 10^4$, $Pr = 10$, $Le = 100$, $N = 10$, $A = 2$, $Da = 3.10^{-6}$	113
Figura 5. 18	Influência da espessura da camada porosa de x_p na transferência de calor - $Ra_T = 10^4$, $Pr = 10$, $Le = 100$, $N = 10$, $A = 2$, $Da = 3.10^{-6}$	113
Figura 5. 19	Influência da espessura da camada porosa x_p - $Ra_T = 10^4$, $Pr = 10$, $Le = 100$, $N = 10$, $A = 2$, $Da = 3.10^{-6}$	114
Figura 5. 20	Influência da espessura da camada porosa de x_p na transferência de massa - $Ra_T = 10^4$, $Pr = 10$, $Le = 100$, $N = 10$, $A = 2$, $Da =$ 3.10^{-6}	115

Figura 5. 21	Influência do número de N - $Ra_T = 10^5$, $Pr = 10$, $Le = 1$, $Da = 10^{-3}$, $A = 2$, $x_p = 0,8$	115
Figura 5. 22	Influência do número de N na transferência de calor - $Ra_T = 10^5$, $Pr = 10$, $Le = 1$, $Da = 10^{-3}$, $A = 2$, $x_p = 0,8$	117
Figura 5. 23	Influência de N na transferência de calor - $Ra_T = 10^4$ $Pr = 10$ $Le = 100$ $A = 2$ $x_p = 0,1$	117
Figura 5. 24	Influência do número de N na transferência de massa- $Ra_T = 10^7$, $Pr = 10$, $Le = 1$, $Da = 10^{-3}$, $A = 2$, $x_p = 0,8$	118
Figura 5. 25	Influência de N na transferência de massa - $Ra_T = 10^4$ $Pr = 10$ $Le = 100$ $A = 2$ $x_p = 0,1$	119
Figura 5. 26	Influência do número de Le no campo de função corrente - $Ra_T = 10^4$, $Pr = 10$, $N = 10$, $Da = 10^{-9}$, $A = 2$, $x_p = 0,5$	119
Figura 5. 27	Influência do número de Le no perfil de temperatura - $Ra_T = 10^4$, $Pr = 10$, $N = 10$, $Da = 10^{-9}$, $A = 2$, $x_p = 0,5$	120
Figura 5. 28	Influência do número de Le na transferência de calor - $Ra_T = 10^4$, $Pr = 10$, $N = 10$, $Da = 10^{-3}$, $A = 2$, $x_p = 0,1$	120
Figura 5. 29	Influência do número de Le no perfil de concentração - $Ra_T = 10^4$, $Pr = 10$, $N = 10$, $Da = 10^{-9}$, $A = 2$, $x_p = 0,5$	121
Figura 5. 30	Influência do número de Le na transferência de massa - $Ra_T = 10^4$, $Pr = 10$, $N = 10$, $Da = 10^{-3}$, $A = 2$, $x_p = 0,1$	121

LISTA DE TABELAS

Tabela 3. 1	Grandezas relacionadas nos casos do estudo.....	34
Tabela 3. 2	Convergência da velocidade com parâmetros $Re = 10$; $a = 0,1$; $\varepsilon_\infty = 0,2$; $\gamma = 100$ – Domínio Único.....	37
Tabela 3. 3	Convergência da velocidade com parâmetros $Re = 10$; $a = 0,1$; $\varepsilon_\infty = 0,2$; $\gamma = 100$ – Domínio Único.....	37
Tabela 3. 4	Convergência da velocidade com parâmetros $Re = 10$; $a = 0,1$; $\varepsilon_\infty = 0,2$; $\gamma = 100$ – Domínio Único.....	37
Tabela 3. 5	Convergência da velocidade com parâmetros $Re = 10$; $a = 0,1$; $\varepsilon_\infty = 0,4$; $\gamma = 100$ – Domínio Duplo.....	38
Tabela 3. 6	Convergência da velocidade com parâmetros $Re = 10$; $a = 0,1$; $\varepsilon_\infty = 0,4$; $\gamma = 100$ – Domínio Duplo.....	38
Tabela 3. 7	Convergência da velocidade com parâmetros $Re = 10$; $a = 0,1$; $\varepsilon_\infty = 0,4$; $\gamma = 100$ – Domínio Duplo.....	38
Tabela 4. 1	Nusselt Médio Global – Leal (1996).....	67
Tabela 4. 2	Módulo de função corrente –Leal (1996), $Ra = 10^3$	68
Tabela 4. 3	Módulo de função corrente –Leal (1996), $Ra = 10^4$	68
Tabela 4. 4	Módulo de função corrente –Leal (1996), $Ra = 10^5$	68
Tabela 4. 5	Módulo de função corrente –Leal (1996), $Ra = 10^6$	69
Tabela 4. 6	Convergência do módulo da função corrente para $Ra = 10^3$ - Leal (1996).....	69
Tabela 4. 7	Convergência do módulo da função corrente para $Ra = 10^6$ - Leal (1996).....	70
Tabela 4. 8	Convergência do módulo da função corrente Beckermann (1987).....	73
Tabela 5. 1	Valores de Nusselt Médio – Leal (1996).....	102
Tabela 5. 2	Módulo de função corrente –Leal (1996), $Ra = 10^3$	103
Tabela 5. 3	Módulo de função corrente –Leal (1996), $Ra = 10^4$	103
Tabela 5. 4	Módulo de função corrente –Leal (1996), $Ra = 10^5$	103
Tabela 5. 5	Módulo de função corrente –Leal (1996), $Ra = 10^6$	104
Tabela 5. 6	Convergência do módulo da função corrente para $Ra = 10^3$ - Leal (1996).....	104

Tabela 5. 7	Convergência do módulo da função corrente para $Ra = 10^6$ - Leal (1996).....	105
Tabela 5. 8	Convergência do módulo da função corrente Neculae (2003).....	107

NOMENCLATURA

LETRAS LATINAS

A	Razão de aspecto da cavidade
a	Coordenada adimensional da interface
A_{2i}	Coeficiente definido pela eq. (3.56)
B	Coeficiente salto de tensão na interface eq (3.8)
B_{2i}	Coeficiente definido pela eq. (3.57)
C	Concentração adimensional,
c_F	Coeficiente de Forchheimer
c_p	Calor específico
D^*	Coeficiente definido pela eq. (3.10)
D	Difusividade mássica
Da	Número de Darcy
D_e	Diâmetro externo
d_p	Diâmetro do poro
e_s	Vetor direção
F	Coeficiente definido pela eq. (3.43)
$\tilde{F}_i$	Coeficiente de integração seminalítica definido pela eq. (3.71)
f^*	Coeficiente definido pela eq. (3.92)
F_i	Coeficiente de integração seminalítica definido pela eq. (4.127)
f_i^{**}	Coeficiente definido pela eq. (4.152)
g	Aceleração gravitacional
H	Altura da cavidade
h	coeficiente de transferência de calor por convecção
j	Fluxo mássico
k	Condutividade térmica
K	Permeabilidade do meio poroso
K_D	Coeficiente de massa convectivo
L	Comprimento da cavidade

Le	Número de Lewis
M_i	Integral de normalização
N_i	Norma de integração
N	Razão de flutuabilidade
N_m	Norma de integração
Nu	Número de Nusselt
NT	Número de termos de expansão de temperatura
NV	Número de termos de expansão de velocidade
P	Pressão dimensional
P^*	Pressão dimensional definida na eq. (4.2)
Pr	Número de Prandtl
$\dot{q}$	Fluxo de calor
r	Coordenada radial
R	Coordenada radial adimensional
Ra_T	Número de Rayleigh térmico
Ra_s	Número de Rayleigh solutal
R_D	Razão entre difusividades mássicas
R_e	Raio externo
Re_p	Reynolds baseado do diâmetro do poro
Re_D	Reynolds baseado no diâmetro do duto
R_i	Coordenada da interface
R_k	Razão entre condutividades térmicas
s	Espessura da camada fluida
S	Espessura da camada fluida adimensional
Sc	Número de Schmidt v/D
Sh	Número de Sherwood
t	Variável temporal
T	Temperatura adimensional,
$\tilde{T}_i$	Campo transformado de temperatura
u	Componente de velocidade na coordenada x
u_c	Velocidade crítica definida pela eq.(3.10)
U_D	Velocidade no meio poroso
U	Componente de velocidade adimensional radial

U^*	Componente da velocidade radial adimensionalizada modificada, eq. (3.90)
V	Velocidade média
w	Componente de velocidade na direção z
w_0	Coeficiente definido pela eq. (3.97)
w_I	Coeficiente definido pela eq. (3.98)
$\tilde{X}_i$	Autofunções normalizada
X_i	Autofunção, eq. (4.65) e eq. (5.88)
x	Coordenada adimensional horizontal
x_p^*	Espessura de camada porosa
x_p	Espessura de camada porosa adimensional
y	Coordenada adimensional vertical
z	Coordenada axial
Z	Coordenada adimensional axial

LETRAS GREGAS

ρ	Massa específica
ε	Porosidade
μ	Viscosidade dinâmica
δ	Camada de transição entre o meio fluido e o meio poroso
ζ	Parâmetro binário
τ	Coordenada adimensional de tempo
ν	Viscosidade cinemática
κ	Coeficiente de deslizamento eq. 2.4
σ	Coeficiente adimensional de deslizamento eq.2.5
α	Difusividade térmica
ψ_{i1}	Autofunção eq. (3.45)
ψ_{i2}	Autofunção eq. (3.46)
Ψ	Função corrente, adimensional
$\tilde{\Psi}$	Campo transformado da função corrente
γ	Fator de compactação, definido pela eq. (3.10)

ϕ_i	Autovalores eq. (3.45) e eq. (3.46)
v_i	Autovalores eq. (4.65) 3 eq. (5.88)
ξ_i	Autovalores eq. (3.112)
ζ_i	Autovalores eq. (4.75) e eq. (5.98)
η	Autovalores eq. (5.106)
v	Componente de velocidade na direção y
β_T	Coefficiente de expansão térmica
B_i	Autovalor, eq. (4.75)
B_C	Coefficiente de expansão solutal
θ	Temperatura adimensional
θ_H	Temperatura adimensional homogeneizada
ϕ	Concentração adimensional
Λ	Razão entre as viscosidades efetivas e do fluido
α_i	Autovalores, eq. (4.65)
Γ	Autofunção eq. (4,75) e eq. (5.98)
$\tilde{\Gamma}$	Autofunção eq.(4,82) e eq. (5.105)
Ω_m	Autofunção eq. (5.106)
γ_m	Autovalor eq. (5.106)

ÍNDICES

H	Homogêneo
P	Particular
0	Referência
1	Meio fluido
2	Meio poroso
f	Fluido
eff	Efetivo
m	Poro
int	Interface

SÍMBOLOS MATEMÁTICOS

∇	Gradiente
∇^2	Laplaciano
∇^4	Operador biarmônico
Σ	Somatório

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

1.1 – MOTIVAÇÃO E OBJETIVOS

A transferência de quantidade de momento e energia por convecção em configurações onde coexistem uma região fluida e uma região porosa ocorrem em numerosas situações práticas, como exemplo a solidificação em ligas binárias, onde a região dendrítica se separa da fase sólida (BECKERMANN *et al.* 1988; WORSTERS, 1992; AMBERG e HOMSY, 1993; CHEN *et al.*, 1994; ANDERSON e WORSTER, 1995; CHUNG e CHEN, 2000; LE BARS e WORSTER, 2006). Os processos de revestimento por imersão (DERYAGIN e LEVIS, 1964; ROSENBERG e BEITER, 1989; DISLICH, 1988), processos de secagem, isolamento térmico, coletores solares, reatores nucleares, extração de petróleo, células combustíveis e engenharia geotérmica. A característica em comum com estes processos é que em todos há uma interface entre a região sólida e a região fluida através da qual a transferência de momento, calor e massa se processa. Há uma extensa literatura disponível nesta área (BEJAN e NIELD, 2006; VAFAI e TIEN, 1981; LAGE, 1998; BEAVERS e JOSEPH, 1967; SAFFMAN, 1971; LEVY e SANCHEZ-PALENCIA, 1975; VAFAI e KIM, 1990; VAFAI e KIM, 1995, OCHOA-TAPIA e WHITAKER, 1995a; OCHOA-TAPIA e WHITAKER, 1995b).

O presente trabalho tem como objetivo estender a aplicação da Técnica da Transformada Integral Generalizada – GITT em problemas envolvendo os fenômenos de transferência de quantidade de momento, de calor e de massa em sistemas parcialmente preenchidos com meio poroso.

Para o estudo em sistemas unidirecionais foram usadas duas abordagens para descrever o perfil de velocidade – o domínio único - 1Ω , que usa a equação de Navier Stokes modificada para todo o domínio e o domínio duplo - 2Ω , onde uma equação diferente para cada camada é usada, na região porosa foi usada a equação de Darcy com suas extensões de Brinkman e Forchheimer e para a região fluida foi usada a equação de Navier Stokes, acopladas na interface através da continuidade do campo de velocidade e do fluxo. Diferentemente da maioria dos trabalhos encontrados na literatura, aqui, usou-se a equação de Darcy-Brinkman-Forchheimer em sua íntegra com porosidade variável

no espaço, os resultados obtidos a partir da aplicação da GITT também foram comparados aos resultados obtidos utilizando-se o Método das Linhas – MOL, mostrando excelentes resultados.

Para o estudo em sistemas multidirecionais foi utilizada a abordagem de domínio único - 1Ω . Usou-se a formulação Darcy-Brinkman-Forchheimer e a equação de conservação de energia, para descrever a convecção natural térmica provocada pelo gradiente da massa específica do fluido provocado pela diferença de temperatura entre as paredes de uma cavidade retangular fechada parcialmente preenchida com meio poroso.

Para o estudo da convecção natural termosolutal em uma cavidade retangular fechada, utilizou-se a extensão de Brinkman da equação de Darcy, a equação de conservação de energia e a equação de conservação de espécies, com uma abordagem de domínio único para descrever o movimento do fluido provocado pelo gradiente de massa específica advinda dos gradientes de temperatura e de concentração.

1.2 – A TÉCNICA DA TRANSFORMADA INTEGRAL GENERALIZADA – GITT

A Técnica da Transformada Integral Generalizada - GITT (COTTA, 1993; COTTA e MIKHAILOV, 1997; COTTA, 1998) é uma técnica matemática numérico-analítica derivada da Técnica da Transformada Integral Clássica – CITT (MIKHAILOV e ÖZISIK, 1984), desenvolvida, particularmente para aplicação em problemas lineares em difusão de calor e massa com o objetivo de minimizar o custo computacional e seus erros. O princípio da CITT consiste em encontrar problemas auxiliares de autovalores, que fornecem uma base para o desenvolvimento nas autofunções. Os problemas auxiliares permitem a transformação do sistema de equações diferenciais parciais (EDPs) original em um sistema dissociado em infinitas equações diferenciais ordinárias (EDOs), transformando o sistema de EDPs original em um sistema de equações diferenciais ordinárias. A CITT é, portanto, limitada a uma classe de problemas ditos “transformáveis”. Na Técnica da Transformada Integral Generalizada, não é necessário encontrar uma transformação integral exata do problema original. Assim depois de escolher o problema auxiliar, as fórmulas de transformação e inversão associadas ao problema são determinadas e a transformação integral é aplicada ao sistema original. O sistema transformado resultante é infinito e acoplado. Após o truncamento em uma ordem satisfatória, o sistema transformado é resolvido numericamente. Finalmente a

aplicação da fórmula da inversa permite a obtenção do potencial original. A Técnica da Transformada Integral Generalizada fornece, portanto uma solução híbrida numérico-analítica de problemas de convecção/difusão não abordados pela técnica clássica. A GITT é uma aproximação eficaz para a solução de problemas homogêneos ou não homogêneos, não linear em regime permanente ou transiente.

A aplicação da Técnica da Transformada Integral Generalizada (GITT) resume-se nas seguintes etapas:

- a) Definição do problema auxiliar, com base no problema homogêneo que inclua os termos difusivos do problema original.
- b) Solução do problema auxiliar e obtenção dos autovalores, autofunções e normas.
- c) Desenvolvimento do par transformada-inversa.
- d) Transformação Integral do problema diferencial parcial num sistema diferencial ordinário acoplado.
- e) Truncamento do sistema diferencial ordinário infinito e solução numérica do sistema diferencial resultante para obtenção dos campos transformados.
- f) Obtenção do potencial original, fazendo-se uso da fórmula analítica de inversão.

A ideia básica na técnica é relaxar a necessidade de se encontrar uma transformação integral exata do problema, ou seja, que resulte num sistema diferencial ordinário. Dessa forma pode-se escolher um problema de autovalor auxiliar que seja o mais característico possível do problema original. Desenvolve-se então o par transformada-inversa e efetua-se a transformação integral do problema diferencial parcial, chegando-se a um sistema diferencial ordinário acoplado e infinito. Após o seu truncamento numa ordem suficientemente grande para a precisão requerida, o sistema diferencial ordinário é resolvido numericamente por algoritmos bem estabelecidos, com controle global de erro, através de subrotinas numéricas científicas contidas na biblioteca IMSL (IMSL, 2010). A fórmula de inversão é então empregada para fornecer a representação analítica do potencial original nas demais variáveis independentes, eliminadas pela transformação integral. Dessa forma, a tarefa numérica utilizada por este método nos problemas propostos, ocorrerá sempre em uma única variável independente.

1.3 – REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

O interesse na convecção natural em meios porosos tem sido motivado por uma ampla gama de aplicações, incluindo sistemas geotérmicos, a produção de petróleo, armazenamento de resíduos nucleares, poluição de água subterrânea, isolamentos, solidificação e revestimento de materiais.

Pesquisas dedicadas à convecção natural em camadas porosas datam desde meados da década de 70. Uma revisão sobre o assunto foi realizada por TIEN e HONG (1985), SUN (1973), NIELD (1977) e SOMERTON e CATTON (1982) realizaram estudos de estabilidade em sistemas convectivos em caso em que uma camada fluida horizontal é sobreposta sobre uma camada porosa, este mesmo estudo também foi realizado por XIONG (2001). De interesse relacionado é a investigação numérica realizada por POULIKAKOS e BEJAN (1983), que considerando uma cavidade vertical retangular fechada com camadas verticais com varias permeabilidades porosas. Tong e SUBRAMANIAN (1983) e LAURIAT e MESGUICH (1984) investigaram a convecção natural em cavidades retangulares verticais fechadas que são verticalmente divididas em uma camada fluida e uma camada porosa, sendo os dois separados por uma parede impermeável. BECKERMANN *et al.*(1987) estudaram a convecção natural e a transferência de energia em uma cavidade retangular vertical fechada, parcialmente preenchida com uma camada de um meio poroso saturado com fluido.

A dupla difusão convectiva ou convecção termosolutal tem seus primeiros trabalhos relacionados ao meio fluido (TURNER, 1968) ou meio poroso (NIELD, 1968) nos quais estudam os problemas concernentes as configurações físicas herdadas de trabalhos de convecção clássica de Rayleigh-Bernard – onde apresenta uma camada horizontal submetida a gradientes de temperatura e concentração colineares à gravidade. Estudaram a convecção termosolutal e um fluido binário (ou um meio poroso saturado por um fluido binário) usando o modelo de Darcy em uma cavidade submetida a gradientes horizontais de temperatura e concentração (TREVISAN e BEJAN, 1987; BERNARD *et al.*, 1989, LEE e HYUN, 1990; HAN e KUEHN, 1991). Outros autores interessados no efeito de anisotropia do meio poroso (BENNACER *et al.*, 2001b) e a influência das extensões a lei de Darcy (Darcy-Brinkman, Darcy-Forchheimer, Darcy-Brinkman-Forchheimer) a fim de identificar a importância de cada termo (GOYEAU *et al.* 1996; NITHIARASU *et al.*, 1996; KARIMI-FARD *et al.*, 1997), estes autores concluíram que o efeito inercial é insignificante na dupla difusão convectiva para uma

gama de parâmetros considerados, podendo dessa forma estudar a convecção termosolutal a partir da correção de Brinkman da lei de Darcy. Três trabalhos, onde uma camada porosa é submetida a gradientes cruzados de temperatura e concentração merecem destaque (MOHAMAD e BENNACER, 2001; BENNACER *et al.*, 2001a; MOHAMAD e BENNACER, 2002). GOBIN *et al.* (2005) estudaram a convecção natural impulsionada por forças de empuxo, térmica e de soluto combinadas em um fluido binário em uma cavidade retangular parcialmente preenchida com uma camada porosa vertical.

A Técnica da Transformada Integral Generalizada (GITT) já foi utilizada com sucesso em várias classes de problemas presentes na mecânica dos fluidos e na transferência de calor e massa. COTTA (1993) fez uma compilação dos diversos problemas que já foram tratados com o auxílio da GITT nas últimas duas décadas. Lima (1995) aplicou a técnica às equações de Navier-Stokes para escoamento turbulento em canais retangulares; PÉREZ GUERRERO e COTTA (1996) estudaram o problema do escoamento sobre um degrau, através da solução das equações de Navier-Stokes em formulação de função corrente apenas, e obtiveram resultados para uma ampla faixa de números de Reynolds; LEAL (1996) estudou o problema de convecção natural em cavidades retangulares, tanto para regime permanente quanto transiente; QUARESMA (1997) resolveu o problema do escoamento permanente em uma cavidade retangular tridimensional; MACHADO (1998) investigou o problema de convecção natural em cavidade retangular com propriedades variáveis, BAOHUA e COTTA (1993) aplicaram a GITT na solução de híbrida de convecção natural em estado estacionário em cavidades porosas com geração interna de calor. ALVES e COTTA (2000) usaram a GITT para estudar o escoamento e a transferência de energia em uma cavidade retangular totalmente preenchida por meio poroso, usando o modelo de Darcy. Utilizando a metodologia da GITT para resolver problemas que envolvem interfaces merecem destaque os trabalhos de HIRATA *et al.* (2007) avaliando a estabilidade da convecção natural em geometrias que considera uma camada de fluido superposta a uma camada porosa e o trabalho de KNUPP *et al.* (2012) que estudou principalmente a transferência de energia em canais conjugados utilizando a abordagem de domínio único para descrever o perfil de temperatura e escoamento no canal.

O presente trabalho diferente da maioria dos trabalhos encontrados na literatura, que usam o modelo de Darcy para avaliar o escoamento no meio poroso, faz uso da equação Darcy-Brinkman-Forchheimer para avaliar o escoamento em geometrias onde

coexistem um meio fluido e um meio poroso. Também foi usada a Técnica da Transformada Integral Generalizada – GITT, para descrever a convecção natural térmica e solutal em cavidades parcialmente preenchidas com meio poroso, avaliando os efeitos de todos os termos constituintes da equação e suas implicações no escoamento, na transferência de energia e de massa no domínio estudado.

1.4 – SÍNTESE DO TRABALHO

O presente capítulo destina-se a situar as motivações e objetivos do presente trabalho, além de apresentar uma revisão da Técnica da Transformada Integral Generalizada.

O capítulo 2 devota-se ao estabelecimento das equações que governam os problemas a serem abordados, neste capítulo é feita uma revisão bibliográfica sobre o escoamento em meios porosos.

O capítulo 3 consiste no estudo do problema de escoamento unidimensional e transiente, apresentando as abordagens de solução de domínio único - 1Ω e domínio duplo - 2Ω para resolver as equações do momento, mostrando os resultados obtidos a partir do uso da Técnica da Transformada Integral Generalizada bem como as comparações com outros trabalhos já existentes na literatura e com o método das linhas – MOL.

O capítulo 4 aborda o problema de convecção natural puramente térmica em uma cavidade retangular fechada parcialmente preenchida com meio poroso, com as paredes aquecidas e resfriadas verticalmente. Para a modelagem do problema proposto foi usada a formulação Darcy-Brinkman-Forchheimer e usada a Técnica da Transformada Integral Generalizada para a solução do problema proposto. Foram avaliados parâmetros do número de Darcy, número de Rayleigh e coeficiente de Forchheimer e a influência destes na função corrente e no perfil de temperatura na cavidade.

O capítulo 5 apresenta o problema de dupla convecção natural ou convecção termosolutal em uma cavidade retangular fechada parcialmente preenchida com meio poroso, com aquecimento e resfriamento laterais e diferentes concentrações nas paredes, a Técnica da Transformada Integral Generalizada foi usada para a solução do problema proposto. Foi estudado o comportamento do escoamento através de linhas de corrente da função corrente de velocidade, de isothermas de temperatura e de isolinhas de

concentração para diferentes números de Darcy e diferentes espessuras de camada porosa.

No capítulo 6 são apresentadas as principais conclusões a cerca dos estudos realizados neste trabalho em geometrias parcialmente preenchidas com meio poroso e sua solução pelo uso da GITT, além de sugestões para o prosseguimento das pesquisas futuras.

O capítulo 7 apresenta as referências bibliográficas.

CAPÍTULO 2

MEIO POROSO

2.1 – ESCOAMENTO EM MEIOS POROSOS

A equação de Darcy descreve o perfil de velocidade em meios porosos devido à queda de pressão no meio poroso. Equação de Darcy é linear, quando a velocidade média do escoamento V é suficientemente pequena, o que significa que o número de Reynolds do fluxo na região porosa Re_p é da ordem da unidade ou menor. A equação generalizada é escrita da seguinte forma

$$\bar{\nabla}P = -\frac{\mu}{K}\bar{V} \quad (2.1)$$

Onde ∇P é o gradiente de pressão na direção do escoamento μ é a viscosidade dinâmica do fluido. O coeficiente K chamado de permeabilidade é independente da natureza do fluido, mas depende da geometria do meio. A permeabilidade representa a facilidade com a qual o fluido passa através de um material poroso.

Com o aumento do número de Reynolds observa-se um desvio da relação de linearidade apresentada pela equação de Darcy, a equação 2.1 foi modificada com a adição de um termo não linear em sua equação constitutiva. Forchheimer foi o primeiro a sugerir uma relação não linear, adicionando um termo de arrasto quadrático que proporciona um ajuste melhor com dados experimentais. Assim, nova equação chamada de equação de Forchheimer, que inclui um termo quadrático de arrasto foi desenvolvida (DUPUIT, 1863; FORCHHEIMER, 1901) e lê-se da seguinte forma:

$$\bar{\nabla}P = -\frac{\mu}{K}\bar{V} - c_F K^{-1/2} \rho_f |\bar{V}| \bar{V} \quad (2.2)$$

Onde c_F é a constante adimensional conhecido como coeficiente de Forchheimer, trata-se de um termo de inercia ao movimento, o último termo da equação 2.2, refere-se ao termo conhecido como o termo de Forchheimer.

Subsequentemente, BRINKMAN (1947) sugeriu uma extensão para a lei de Darcy para materiais de alta permeabilidade, adicionou um termo inercial à equação de

Darcy, que só é válido quando a porosidade é suficientemente elevada (BEJAN e NIELD, 2006).

$$\vec{\nabla}P = -\frac{\mu}{K}\vec{V} + \mu_{eff}\vec{\nabla}^2\vec{V} \quad (2.3)$$

Temos agora dois termos viscosos. O primeiro é o termo Darcy usual e o segundo é análogo ao termo Laplaciano que aparece na equação de Navier Stokes para fluidos newtonianos (BEJAN e NIELD, 2006), μ_{eff} é a viscosidade efetiva de Brinkman, que deve ser determinada experimentalmente.

O problema subjacente da modelagem em sistemas parcialmente preenchidos com meio poroso situa-se no acoplamento entre as equações de conservação em ambas as regiões e consequentemente na definição das condições de fronteira adequadas na interface fluido/porosa. Uma descrição precisa da convecção natural devido ao gradiente de temperatura ou gradiente de espécies envolvidas nos processos acima mencionados depende da relevância do modelo de transporte de movimento na interface. Devido ao seu interesse teórico e prático, esta questão tem sido objeto de uma intensa atividade de pesquisa revista no domínio dos transportes em meios porosos (KAVIANY,1995; BEJAN e NIELD, 2006).

BEAVERS e JOSEPH (1967) foram os primeiros a provar que, quando fluidos viscosos fluem na interface de um meio poroso, os efeitos de cisalhamentos viscosos penetrarão além da superfície permeável, para formar o que é em suma uma camada limite de velocidade. Eles propuseram a utilização de uma condição limite de deslizamento na interface dada por:

$$\left. \frac{\partial v}{\partial y} \right|_{y=int} = \frac{\kappa}{\sqrt{K}}(v_{int} - U_D) \quad (2.4)$$

Onde v_{int} é a velocidade de escorregamento do fluido na interface, U_D é velocidade de filtração no meio poroso, K é a permeabilidade do meio poroso e κ é o coeficiente de deslizamento empírico, é também um coeficiente adimensional que depende da estrutura do material poroso na região de interface, e que deve ser determinado experimentalmente. BEAVERS e JOSEPH (1967) realizaram uma série de experimentos e observaram que a velocidade de deslizamento na interface difere da velocidade Darcy U_D da camada porosa, como mostrado na Figura 2.1. Beavers e Joseph encontraram boa concordância entre a solução analítica e as medidas experimentais com ajuste de α em 0,1 a 0,4, segundo a natureza da camada porosa. Este parâmetro é fortemente dependente da estrutura e da posição da interface porosa

(BEAVERS *et al.*, 1970; TAYLOR ,1971; RICHARDSON, 1971, LARSON e HIGSON,1986; LARSON e HIGSON, 1987), mas não da natureza do fluido (BEAVERS *et al.*, 1974).

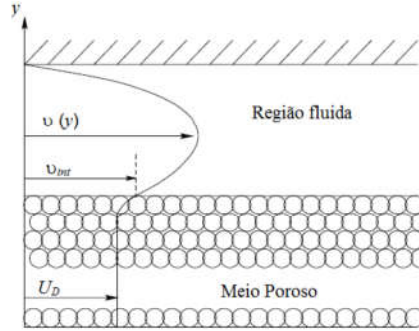


Figura 2. 1 - Escoamento em um canal fluido/poroso.

Fonte: GOYEAU *et al.* (2003).

JONES (1973) propôs uma generalização da condição de Beavers e Joseph para fluxos multidirecionais, assumindo o fenômeno de deslizamento de Darcy devido às tensões de cisalhamento na interface, em vez da velocidade de cisalhamento simplesmente.

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \frac{\sigma}{\sqrt{K}} (v - U_D) \quad (2.5)$$

σ é um coeficiente adimensional de deslizamento que depende das propriedades estruturais da interface, u e v são as componentes da velocidade nas direções x e y respectivamente.

Da mesma maneira, OCHOA-TAPIA e WHITAKER (1995a) propuseram uma condição de interface híbrida, em que um salto na tensão de cisalhamento na região de interface foi assumido e comparado com os dados experimentais. Quando a região porosa é isotrópica, e a permeabilidade é suficientemente pequena para negligenciar os efeitos inerciais as condições de transferência de momento na interface podem ser escritas da seguinte forma:

$$u = u_m \quad (2.6)$$

$$v = v_m \quad (2.7)$$

$$\omega = \omega_m \quad (2.8)$$

$$P = P_m \quad (2.9)$$

$$\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial u_m}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x} = \pm \frac{\beta}{\sqrt{K}} u \quad (2.10)$$

$$\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \omega_m}{\partial z} - \frac{\partial \omega}{\partial z} = \pm \frac{\beta}{\sqrt{K}} \omega \quad (2.11)$$

O sinal positivo é utilizado quando a região puramente fluida está acima da interface porosa, enquanto o sinal negativo indica o inverso. Símbolo β foi introduzido como coeficiente constante que representa a distribuição de momentum na interface e depende da maneira pela qual a estrutura do material poroso varia na camada de transição (sólido/fluido). A determinação de β deve ser experimental, entretanto há trabalhos para determinação teórica de β (OCHOA-TAPIA e WHITAKER 1995a). OCHOA-TAPIA e WHITAKER (1995b) concluiu que as condições de interface mostradas em eq.(2.6-2.11) apresentam boa concordância com os dados experimentais de BEAVERS e JOSEPH (1967).

Uma solução alternativa a condição de deslizamento consiste em utilizar a correção de Brinkman-Forchheimer à lei de Darcy (FORCHHEIMER, 1901; BRINKMAN, 1947) proposto por OCHOA-TAPIA e WHITAKER (1995a, 1995b). Neste caso, as equações de conservação de quantidade de movimento das duas regiões são da mesma ordem. É possível derivar uma equação Brinkman-Forchheimer através de médias formais. Em trabalhos anteriores de VAFAI e TIEN (1981) e VAFAI e TIEN (1982), HSU e CHANG (1990) obtiveram a equação que pode ser escrita da seguinte forma para a camada porosa:

$$\rho_f \left[\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon} \vec{V} \cdot \nabla \left(\frac{\vec{V}}{\varepsilon} \right) \right] = -\vec{\nabla} P + \frac{\mu}{\varepsilon} \vec{\nabla}^2 \vec{V} - \frac{\mu}{K} \vec{V} - \frac{c_f \rho_f \varepsilon}{K^{1/2}} |\vec{V}| \vec{V} \quad (2.12)$$

Vários autores estudaram o fluxo na interface entre um meio poroso e uma região líquida livre. Em seu trabalho, VAFAI e KIM (1990) utilizaram a equação de Darcy-Brinkman-Forchheimer para descrever o perfil de velocidade no meio poroso, enquanto que para a região livre foi utilizada a equação de Navier Stokes, para as condições interfaciais foram empregadas as continuidade de velocidade e de fluxo. Esse modelo é bem aceito e amplamente utilizados na literatura. XIONG (2001) resolveu este problema em regime permanente utilizando o método das diferenças finitas. ALAZMI e VAFAI (2001) estudaram o perfil de velocidade de uma camada fluida localizada entre um meio poroso na parte de cima e uma barreira sólida em baixo considerando diferentes condições interfaciais

Do ponto de vista de modelagem, duas abordagens diferentes são geralmente propostas para trabalhar com o problema de acoplamento na interface: a aproximação de domínio duplo - 2Ω e a aproximação de domínio único - 1Ω (GOYEAU *et al.*, 2003).

Na aproximação de domínio duplo, as regiões de fluido e região porosa são modeladas separadamente, as equações de conservação das duas regiões são então acopladas por condições limites apropriadas na interface, o escoamento no interior da camada porosa é descrito pela lei de DARCY (1856) e suas extensões e no interior da camada fluida é descrito pela equação de Navier Stokes as quais são devidamente acopladas. Tanto o fluido livre e a região porosa são extrapolados sobre a região de interface, resultando em mudança de algumas variáveis de fluxo através da interface.

$$\rho_f \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = -\varepsilon \vec{\nabla} P + \mu_f \vec{\nabla}^2 \vec{V} - \frac{\varepsilon \mu_f}{K} \vec{V} - \frac{c_F \rho_f \varepsilon^2}{K^{1/2}} |\vec{V}| \vec{V}, \text{ Região Poroza} \quad (2.13)$$

$$\frac{\mu_f}{\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=y^+ \text{ int}} - \mu_f \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{y=y^- \text{ int}} = \frac{\beta \mu_f}{K^{1/2}} u \Big|_{y=y \text{ int}}, \text{ Interface} \quad (2.14)$$

$$\rho_f \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = -\vec{\nabla} P + \mu_f \vec{\nabla}^2 \vec{V}, \text{ Região fluida} \quad (2.15)$$

A permeabilidade K e o coeficiente de Forchheimer c_F , são calculados a partir de dados experimentais medidos por ERGUN (1952) para o escoamento de fluido em uma coluna com empacotamento poroso.

$$K = \frac{\varepsilon^3 dp^2}{150(1-\varepsilon)^2} \quad (2.16)$$

$$c_F = \frac{1,75}{\sqrt{150} \varepsilon^{5/2}} \quad (2.17)$$

Na abordagem de domínio único a região composta é tratada como um meio contínuo. Esta descrição consiste em combinar as equações de conservação das duas regiões em um sistema único de equações para todo o domínio (ARQUIS e CALTAGIRONE. 1984; BECKERMANN *et al.* 1988). A transição da região de fluido para o meio poroso é realizado pela variação espacial de certas propriedades efetivas, tais como permeabilidade e número de Darcy - Da . Esta representação permite evitar escrever explicitamente as condições limites na interface. Então a equação de conservação da quantidade de momento para o modelo de domínio único é na realidade uma equação de Navier-Stokes modificada, a contribuição da difusão viscosa do meio poroso é naturalmente incluída. Enfim, esta representação permite calcular as variáveis

espaciais das propriedades do meio poroso mais facilmente que o modelo de domínio duplo. A equação abaixo representa este modelo, válido para todo o domínio:

$$\rho_f \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = -\varepsilon(y) \vec{\nabla} P + \mu_f \vec{\nabla}^2 \vec{V} - \frac{\varepsilon \mu_f}{K(y)} \vec{V} - \frac{\varepsilon^2 \rho_f c_F}{\sqrt{K(y)}} \vec{V}^2 \quad (2.18)$$

Onde, ε é a porosidade local do domínio. No canal líquido (região de fluido), $\varepsilon = 1$ e a permeabilidade tende a infinito, então o termo de Darcy tende a infinito e a equação (2.18) equivale à equação de Navier Stokes. Esta formulação evita explicitar a condição de interface fluido/poro e tem sido extensivamente usada em cálculos numéricos que tratam de convecção térmica natural (BECKERMANN *et al.*, 1988; TURKI *et al.*, 1990; LEBRETON e CALTAGIRONE, 1991; ETTEFAGH e VAFAI, 1991, KUZNETSOV, 1999 e MING-XIONG, 2001; MERCIER *et al.*, 2002) ou dupla difusão convectiva (GOBIN *et al.*, 1998; GOYEAU *et al.*, 1999). A abordagem de domínio único é especialmente benéfica para os problemas associados à solidificação de ligas binárias. Em geral, durante a solidificação de uma liga binária, o domínio computacional consiste em três regiões, a saber, o sólido, as duas fases (*mushy*) e as regiões de líquido (fundido). Em problemas de solidificação as interfaces sólido/*mushy* e *mushy*/líquido não são fixas, as interfaces se movem, com o tempo sua forma geométrica muda. Se a abordagem de domínio único é utilizada para obter a solução numérica para o problema de solidificação, não há necessidade de controlar explicitamente a forma geométrica das três regiões, bem como as posições das interfaces sólido/*mushy* e *mushy*/líquido. A abordagem de domínio único foi utilizada com sucesso por BECKERMANN e VISKANTA (1988), BENNON e INCROPERA (1987), SCHNEIDER e BECKERMANN (1995), YOO e VISKANTA (1992), VOLLER e PRAKASH (1987), KIM e VAFAI (1990), HUANG e VAFAI (1993), KIM e CHOI (1996), HADIM (1994). XIONG, M. (2001), mostrou limitações na aproximação de domínio único. Estas limitações resultam das premissas que estão implícitas nesta formulação uma vez que a abordagem de domínio único é utilizada para modelar o fluxo de um fluido na região de interface entre a região porosa e a região fluida. Mostrando que a abordagem de domínio único resulta na correta correspondência da tensão na interface poro/fluido apenas se o coeficiente ajustável na representação para o excesso de tensão β for igual à zero, e também quando a viscosidade efetiva do meio poroso for igual à viscosidade do fluido.

2.2 – CONVECÇÃO NATURAL TÉRMICA EM CAVIDADE PARCIALMENTE PREENCHIDA POR MEIO POROSO

A transferência de calor através da condução se dá pelo transporte de energia através de um meio em virtude dos movimentos moleculares.

A energia pode também ser transportada pelo movimento do fluido. Na Figura 2.1 são mostrados três elementos de fluido mutuamente perpendiculares de área dS no ponto P , onde $\mathbf{v}$ é a velocidade do fluido $\mathbf{v}$ (BIRD *et al.*, 2002).

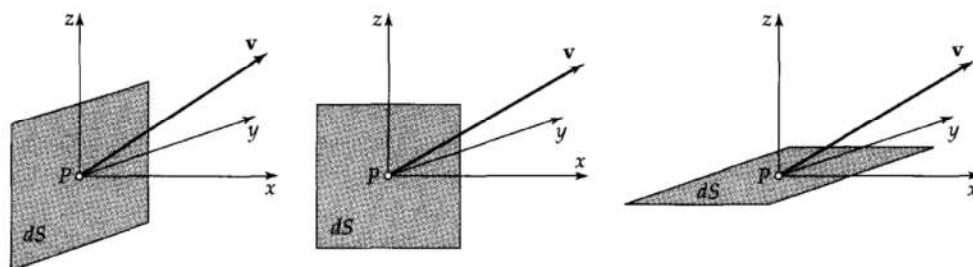


Figura 2. 2 - Três elementos de superfície mutuamente perpendiculares entre si de área dS , através da qual a energia é transportada por convecção pelo movimento do fluido com a velocidade $\mathbf{v}$. Fonte: BIRD *et al.* (2002).

O modo convectivo de transferência de calor envolve o fluxo de fluido juntamente com a condução, ou difusão, e é geralmente dividido em dois processos básicos. Se o movimento do fluido surge a partir de um agente externo, por exemplo uma ventoinha, um ventilador, o vento, ou o movimento do próprio objeto aquecido, o processo é designado por convecção forçada. Se, por outro lado, não existe tal fluxo induzido externamente e o fluxo surge "naturalmente" a partir do efeito de uma diferença de massa específica, que resulta a partir de uma diferença de temperatura ou concentração em campo, tal como a gravidade, o processo é designado convecção natural.

Dessa forma a convecção térmica natural é um fenômeno provocado por um gradiente de massa específica num fluido imerso em um campo de gravidade, a partir de uma diferença de temperatura. As aplicações em engenharia deste fenômeno são importantes, por exemplo, na migração de umidade através do ar contido em isolamentos fibrosos, instalações de armazenamento de grãos, e a dispersão de contaminantes químicos através do solo saturado, isolamentos de edifícios industriais,

descontaminação de águas subterrâneas, processo de secagem térmica, solidificação e criogenia.

Vários autores usaram a equação de Brinkman para calcular o fluxo em uma cavidade retangular lateralmente aquecida, parcialmente preenchida por fluido e parcialmente preenchida por um meio poroso saturado. Na maioria destes estudos o meio poroso forma uma camada vertical onde a interface pode ser impermeável ao fluido ou impermeável. SATHE *et al.* (1987) apresentaram resultados experimentais para uma cavidade vertical dividida em dois, com uma partição impermeável delimitando o meio poroso, que concordaram com os cálculos feitos por TONG e SUBRAMANIAN (1986). SATHE e TONG (1989) compararam estes resultados com cálculos realizados por SATHE *et al.* (1988) para o mesmo problema, com uma interface permeável e com os resultados para cavidade completamente e parcialmente preenchida com meio poroso. Experimentos feitos por SATHE e TONG (1988) confirmaram que, em uma cavidade parcialmente preenchida com meio poroso pode reduzir a transferência de calor mais do que em uma cavidade totalmente preenchida. BECKERMANN *et al.* (1988), realizaram cálculos e experimentos para as seguintes configurações de cavidade parcialmente preenchida por meio poroso.

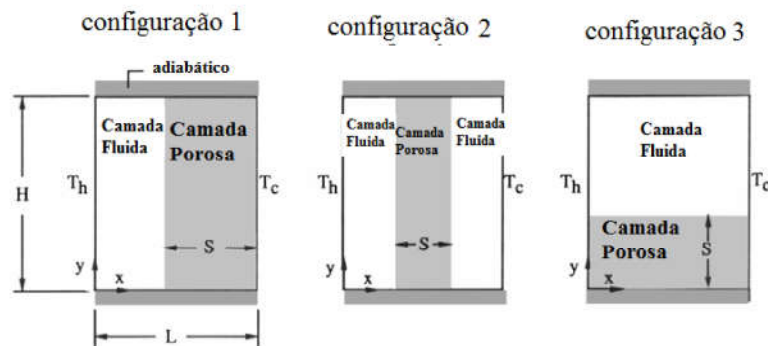


Figura 2. 3 - Esquemas de cavidades verticais parcialmente preenchidas com meio poroso. Fonte: BEJAN (2003).

Onde T_h e T_c são as temperaturas nas paredes laterais, o topo e a base são adiabáticos, S é a espessura da camada porosa, H e L são respectivamente a altura e o comprimento característicos da cavidade retangular.

O problema de convecção natural em uma cavidade parcialmente porosa tem sido estudado ainda por GOBIN e GOYEAU (2005) e BECKERMANN (1987) e as descrições matemáticas deste problema foram baseadas em formulações de domínio

único e domínio duplo das equações de conservação respectivamente, uma excelente e abrangente revisão foi dada por NIELD e BEJAN (2006).

2.3 – CONVECÇÃO NATURAL TERMOSOLUTAL EM CAVIDADE PARCIALMENTE PREENCHIDA POR MEIO POROSO

A variação local da massa específica pode ser originada de um gradiente de temperatura, também conhecido como convecção térmica, assim como no caso de um fluido multicomponente, por um gradiente de concentração. Quando estes fatores estão associados este fenômeno é conhecido como convecção termosolutal ou dupla difusão convectiva.

GOYEAU *et al.* (1996), GOBIN *et al.* (1998) e GOYEAU e GOBIN (1999b) realizaram estudos em problemas envolvendo convecção termosolutal, e mostraram que a presença da camada porosa altera radicalmente a forma de transferência de calor e massa. Historicamente, os primeiros trabalhos referentes à convecção termosolutal são de TURNER (1968) em meio fluido e de BEJAN (1968) em meio poroso onde abordaram as configurações físicas herdadas dos trabalhos envolvendo convecção de Rayleigh - Benard: de uma camada de fluido horizontal submetida a gradientes de temperatura e concentração colineares a gravidade. Mais recentemente, um número de trabalho como os realizados por MOHAMAD e BENNACER (2001), BENNACER *et al.* (2001) e MOHAMAD e BENNACER (2002) tratam o caso de meio poroso submetido a gradientes cruzados de temperatura e concentração, além destes Trevisan e BEJAN (1987), BERNAD *et al.* (1989), LEE e HYUN (1990), HAN e KUEN (1991), estudaram uma cavidade vertical preenchida com um meio poroso saturado e um fluido binário, submetida a gradientes horizontais de temperatura e concentração.

PÉREZ GUERREIRO *et al.* (1992), foi bem sucedido nos estudos de escoamento em cavidades retangulares fechadas, ao resolverem o clássico problema de escoamento em cavidade com tampa deslizante, usando a formulação da velocidade em função corrente e resolvendo via Técnica da Transformada Integral Generalizada, Leal e PÉREZ GUERRERO (1999) estudaram a convecção natural puramente térmica em cavidades fechadas inclinadas usando a GITT. O estudo avaliou diferentes ângulos de inclinação para o problema para diferentes números de Rayleigh, LEAL *et al.* (2000) estudaram a convecção natural transiente e estacionaria em cavidades retangulares.

CAPÍTULO 3

ESCOAMENTO EM CANAIS PARCIALMENTE PREENCHIDOS COM MEIO POROSO

3.1 – DEFINIÇÃO DO PROBLEMA

A configuração geométrica considerada neste problema é apresentada na figura 3.1. O problema consiste de um fluido newtoniano incompressível escoando no interior de um cilindro parcialmente preenchido com um meio poroso saturado em regime transiente, com fluxo hidrodinâmico completamente desenvolvido na direção axial e variável na direção radial, propriedades físicas variáveis com a coordenada espacial r .

O sistema tem larga aplicação em engenharia tais como resfriamento eletrônico, refrigeração, processos de secagem, isolamento térmico, transporte poroso, coletores solares, reatores nucleares, extração de petróleo, célula combustível e engenharia geotérmica. Na configuração proposta foram desprezadas forças de campo como a gravidade e magnetismo. Neste trabalho, duas formulações foram utilizadas para solucionar o problema proposto, a formulação utilizando domínio duplo (2Ω) e outra utilizando domínio único (1Ω).

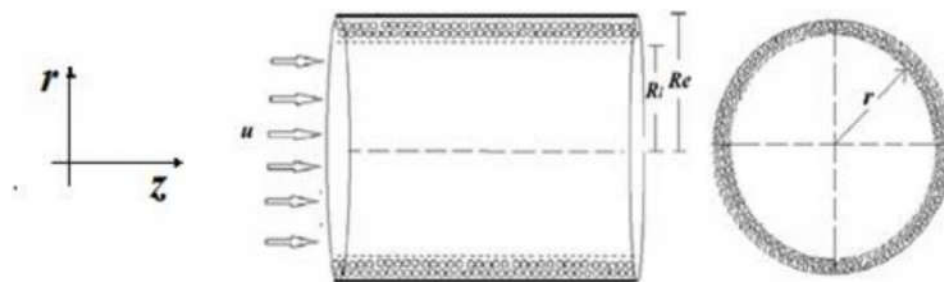


Figura 3. 1 - Diagrama esquemático de um duto parcialmente preenchido por meio poroso. Fonte: elaborado pelo autor

De forma simplificada a figura 3.2, mostra um canal composto cuja parte central é preenchido com um fluido homogêneo (região fluida) e cuja parte periférica é

preenchido com um meio poroso e um fluido saturado homogêneo. Devido à simetria do problema apenas metade do canal é exibido na figura 3.2.



Figura 3. 2 - Esquema simplificação do problema.

Fonte: elaborado pelo autor

3.2 – ABORDAGEM DE DOMÍNIO DUPLO

Os estudos deste tipo de problema gradualmente progrediram de modelos simples para modelos complexos. Inicialmente, a simples equação de Darcy foi usada para descrever o fluxo de fluido em um meio poroso. Entretanto, para altas velocidades de fluxos verificou-se que há um desvio da clássica correlação linear entre o gradiente de pressão e a velocidade de filtração, que é dada pela equação de Darcy. A então chamada equação de Darcy-Forchheimer, que inclui um termo de arraste quadrático para explicar o desvio da linearidade, foi introduzida. O desenvolvimento de um modelo feito por Brinkman foi estimulado pela necessidade de impor uma condição de contorno de não deslizamento na parede sólida (NIELD e BEJAN, 1999). Recentemente tornou-se muito popular a utilização da equação Darcy-Brinkman-Forchheimer, que leva em conta ambos os efeitos de inercia e os efeitos viscosos próximos aos contornos. Tal modelo é bem aceito e largamente aplicado na literatura.

Para a região puramente fluida temos o escoamento descrito a partir da equação de Navier Stokes

$$\rho_f \frac{\partial V}{\partial t} = -\nabla P + \mu_f \nabla^2 V \quad 0 < r < R_i \quad (3.1)$$

Decompondo-se em na direção radial

$$\rho_f \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial z} + \mu_f \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) \right] \quad 0 < r < R_i \quad (3.2)$$

A equação de Darcy-Brinkman-Forchheimer para descrever o escoamento em meio poroso:

$$\frac{\rho_f}{\varepsilon} \frac{\partial V}{\partial t} = -\nabla P + \frac{\mu}{\varepsilon} \nabla^2 V - \frac{\mu}{K} V - \frac{c_F \rho_f \varepsilon}{K^{1/2}} |V| V \quad R_i < r < R_e \quad (3.3)$$

Decompondo a equação na direção radial temos o seguinte:

$$\frac{\rho_f}{\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\mu}{\varepsilon} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) \right] - \frac{\mu}{K} u - \frac{c_F \rho_f \varepsilon}{K^{1/2}} u^2 \quad R_i < r < R_e \quad (3.4)$$

Condições de contorno:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = 0 \text{ em } r = 0 \quad (3.5)$$

$$u = 0 \text{ em } r = R_e \quad (3.6)$$

Condições de interface para o acoplamento das equações:

$$u|_{r=R_i^-} = u|_{r=R_i^+} \quad (3.7)$$

$$\frac{\mu_f}{\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=R_i^+} - \mu_f \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=R_i^-} = \frac{\beta \mu_f}{K^{1/2}} u \Big|_{r=R_i} \quad (3.8)$$

Condição inicial:

$$u = 0 \text{ em } t = 0 \quad (3.9)$$

Os parâmetros adimensionais utilizados para adimensionalizar o problema proposto são:

$$\begin{aligned} R &= \frac{r}{R_e}; \tau = \frac{vt}{R_e^2}; U = \frac{u}{u_c}; Da = \frac{K}{R_e^2}; a = \frac{R_i}{R_e} \\ u_c &= \frac{GR_e^2}{\mu_F}, Re_p = \frac{u_c d_p}{\nu_F}, \gamma = \frac{R_e}{d_p}, D^* = \frac{\beta}{Da} \\ \mu_{eff} &= \frac{\mu_F}{\varepsilon}, \Omega = \frac{\mu_{eff}}{\mu_f}, G = -\frac{\partial P}{\partial z}, \nu_f = \frac{\mu_f}{\rho_f} \end{aligned} \quad (3.10) \quad a-m$$

Introduzindo as equações (3.10 *a-m*) nas equações (3.2), (3.4-3.9), tem-se as equações para o escoamento no canal na forma adimensionalizada.

Para a região fluida:

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} = 1 + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial U}{\partial R} \right), \quad 0 < R < a \quad (3.11)$$

Para a região Porosa:

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} = \varepsilon + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial U}{\partial R} \right) - \frac{\varepsilon}{Da} U - Re_p \gamma \frac{\varepsilon^2 c_F}{Da^{1/2}} U^2, \quad a < R < 1 \quad (3.12)$$

Condição inicial:

$$U = 0 \text{ em } \tau = 0 \quad (3.13)$$

Condições de contorno:

$$\frac{\partial U}{\partial R} = 0 \text{ em } R = 0 \quad (3.14)$$

$$U = 0 \text{ em } R = 1 \quad (3.15)$$

Condições de interface para o acoplamento das equações:

$$U|_{R=a-} = U|_{R=a_i^+} \quad (3.16)$$

$$\Omega \frac{\partial u}{\partial R} \Big|_{R=a_i^+} - \frac{\partial u}{\partial R} \Big|_{R=a_i^-} = D^* u \Big|_{R=a} \quad (3.17)$$

3.2.1 SOLUÇÃO VIA GITT

A ideia de aplicação da transformada integral ao problema consiste em integrar-se cada EDP original em uma das direções coordenadas para obter-se um sistema diferencial ordinário em função apenas do tempo. Este sistema de EDOs é então resolvido através de subrotinas disponíveis em bibliotecas matemáticas bem estabelecidas, com controle global de erro.

Tal transformação é possível ao considerar-se que a velocidade pode ser expressa como expansões em autofunções, as quais são obtidas de problemas auxiliares associados às equações 3.11 e 3.12, com a finalidade de explorar suas propriedades de ortogonalidade.

Para um melhor entendimento da metodologia de solução o problema foi dividido em duas velocidades, U_1 e U_2 , as equações (3.11-3.17) são escritas da seguinte forma:

$$U_1 = U_2 = 0 \text{ em } \tau = 0 \quad (3.18)$$

$$\frac{\partial U_1}{\partial \tau} = 1 + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial U_1}{\partial R} \right), \quad 0 < R < a \quad (3.19)$$

$$\frac{\partial U_2}{\partial \tau} = \varepsilon + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial U_2}{\partial R} \right) - \frac{\varepsilon}{Da} U_2 - Re_p \gamma \frac{\varepsilon^2 c_F}{Da^{1/2}} U_2^2, \quad a < R < 1 \quad (3.20)$$

$$\frac{\partial U_1}{\partial R} = 0 \text{ em } R = 0 \quad (3.21)$$

$$U_2 = 0 \text{ em } R = 1 \quad (3.22)$$

$$U_1 = U_2, \text{ em } R = a \quad (3.23)$$

$$\Omega \frac{\partial U_2}{\partial R} - \frac{\partial U_1}{\partial R} = D^* U_2, \text{ em } R = a \quad (3.24)$$

Para resolver o problema, é necessário utilizar um filtro para reduzir a influência das não homogeneidades na EDP e nas condições de contorno. A solução pode ser dividida em duas partes para U_p (solução particular) e U_H (solução homogênea) como se segue:

$$U_1 = U_{p1} + U_{1H}(R, \tau) \quad (3.25)$$

$$U_2 = U_{p2} + U_{2H}(R, \tau) \quad (3.26)$$

Formulação do problema particular

$$1 + \frac{1}{R} \frac{d}{dR} \left(R \frac{dU_{p1}}{dR} \right) = 0 \quad (3.27)$$

$$\varepsilon_0 + \frac{1}{R} \frac{d}{dR} \left(R \frac{dU_{p2}}{dR} \right) = 0 \quad (3.28)$$

$$\frac{dU_{p1}}{dR} = 0, \text{ em } R = 0 \quad (3.29)$$

$$U_{p1} = U_{p2}, \text{ em } R = a \quad (3.30)$$

$$\Omega \frac{dU_{p2}}{dR} - \frac{dU_{p1}}{dR} = D^* U_{p2}, \text{ em } R = a \quad (3.31)$$

$$U_{p2} = 0, \text{ em } R = 1 \quad (3.32)$$

A solução do problema particular é:

$$U_{p1} = \frac{(a-R)(a+R)\Omega + a(-a(2+aD^*) + D^*R^2)\ln a + \Omega(1-a^2+2a^2\ln a)\varepsilon_0}{4(\Omega - aD^*\ln a)} \quad (3.33)$$

$$U_{p2} = \frac{2a^2\ln R + (-(-1+R^2)(\Omega - aD^*\ln a) + a(C - a^2D^* + 2a\Omega)\ln R)\varepsilon_0}{4(\Omega - aD^*\ln a)} \quad (3.34)$$

Formulação para o problema homogêneo (U_H)

$$\frac{\partial U_{1H}}{\partial \tau} = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial U_{1H}}{\partial R} \right), \quad 0 < R < a \quad (3.35)$$

$$\frac{\partial U_{2H}}{\partial \tau} = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial U_{2H}}{\partial R} \right) + F(\tau, R), \quad a < R < 1 \quad (3.36)$$

$$U_{1H} = -U_{p1}(R), \quad \tau = 0 \quad (3.37)$$

$$U_{2H} = -U_{p2}(R), \quad \tau = 0 \quad (3.38)$$

$$\frac{\partial U_{1H}}{\partial R} = 0, \quad R = 0 \quad (3.39)$$

$$U_{1H} = U_{2H}, \quad R = a \quad (3.40)$$

$$\Omega \frac{\partial U_{2H}}{\partial R} - \frac{\partial U_{1H}}{\partial R} = D^* U_{2H}, \quad R = a \quad (3.41)$$

$$U_{2H} = 0, \quad R = 1 \quad (3.42)$$

$$F(\tau, R) = \Delta \varepsilon - \frac{\varepsilon}{Da} (U_{2H} + U_{p2}) - q (U_{2H} + U_{p2})^2 \quad (3.43)$$

$$\Delta \varepsilon = \varepsilon(R) - \varepsilon_0$$

$$q = Re_p \gamma \frac{\varepsilon^2 c_F}{Da^{1/2}} \quad (3.44)$$

3.2.1.1 PROBLEMA DE AUTOVALOR

Seguindo a metodologia GITT, inicialmente, propõe-se o seguinte problema auxiliar para resolver o problema homogêneo:

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dR} \left(R \frac{d\psi_{1i}}{dR} \right) + \phi_i^2 \psi_{1i} = 0, \quad 0 < R < a, \quad \text{para } i = 1, 2, 3, \dots \quad (3.45)$$

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dR} \left(R \frac{d\psi_{2i}}{dR} \right) + \phi_i^2 \psi_{2i} = 0, \quad a < R < 1, \quad \text{para } i = 1, 2, 3, \dots \quad (3.46)$$

Condições de contorno

$$\frac{d\psi_{1i}}{dR} = 0, \quad \text{em } R = 0, \quad \text{para } i = 1, 2, 3, \dots \quad (3.47)$$

$$\psi_{2i} = 0 \quad \text{em } R = 1, \quad \text{para } i = 1, 2, 3, \dots \quad (3.48)$$

Interface

$$\psi_{1i} = \psi_{2i}, \quad \text{em } R = a, \quad \text{para } i = 1, 2, 3, \dots \quad (3.49)$$

$$\Omega \frac{d\psi_{2i}}{dR} = \frac{d\psi_{1i}}{dR}, \quad R = a, \quad \text{para } i = 1, 2, 3, \dots \quad (3.50)$$

Onde ψ_i e ϕ_i são, respectivamente as autofunções e autovalores que satisfazem a propriedade de ortogonalidade.

$$\int_0^a R \psi_{1i} \psi_{1j} dR + \int_a^1 R \psi_{2i} \psi_{2j} dR = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ N_i & \text{se } i = j \end{cases}, \quad \text{para } i = 1, 2, 3, \dots \text{ e } j = 1, 2, 3, \dots \quad (3.51)$$

E N_i é a norma ou integral de normalização

As equações 3.45 e 3.46 podem ser resolvidas analiticamente e sua solução encontra-se em Özisik (2012):

$$\psi_{1i} = J_0(\phi_i R), \text{ para } i = 1, 2, 3, \dots \quad (3.52)$$

$$\frac{d\psi_{1i}}{dR} = \phi_i J_1(\phi_i R), \quad 0 < R < a, \text{ para } i = 1, 2, 3, \dots \quad (3.53)$$

$$\psi_{2i} = A_{2i} J_0(\phi_i R) + B_{2i} Y_0(\phi_i R), \text{ para } i = 1, 2, 3, \dots \quad (3.54)$$

$$\frac{d\psi_{2i}}{dR} = A_{2i} \phi_i J_1(\phi_i R) - B_{2i} \phi_i Y_1(\phi_i R), \quad a < R < 1, \text{ para } i = 1, 2, 3, \dots \quad (3.55)$$

Os coeficientes A_{2i} e B_{2i} são calculados da seguinte forma:

$$A_{2i} = \frac{J_0(\phi_i a) Y_1(\phi_i a) - \frac{1}{\Omega} J_1(\phi_i R) Y_0(\phi_i a)}{J_0(\phi_i a) Y_1(\phi_i a) - J_1(\phi_i a) Y_0(\phi_i a)}, \text{ para } i = 1, 2, 3, \dots \quad (3.56)$$

$$B_{2i} = \frac{\frac{1}{\Omega} J_0(\phi_i a) J_1(\phi_i R) - J_1(\phi_i a) J_0(\phi_i a)}{J_0(\phi_i a) Y_1(\phi_i a) - J_1(\phi_i a) Y_0(\phi_i a)}, \text{ para } i = 1, 2, 3, \dots \quad (3.57)$$

Os autovalores ϕ_i são dados pela solução da seguinte equação transcendental:

$$\det \begin{bmatrix} J_0(\phi_i a) & -J_0(\phi_i a) & -Y_0(\phi_i a) \\ \frac{1}{\Omega} J_1(\phi_i R) & -J_1(\phi_i a) & -Y_1(\phi_i a) \\ 0 & J_0(\phi_i) & Y_0(\phi_i) \end{bmatrix} = 0, \text{ para } i = 1, 2, 3, \dots \quad (3.58)$$

$$N_i = \int_0^a R \psi_{1i}^2 dR + \int_a^1 R \psi_{2i}^2 dR, \text{ para } i = 1, 2, 3, \dots \quad (3.59)$$

A Autofunção normalizada poder ser escrito da seguinte forma

$$\tilde{\psi}_i = \frac{\psi_i}{\sqrt{N_i}}, \text{ para } i = 1, 2, 3, \dots \quad (3.60)$$

3.2.1.2 DETERMINAÇÃO DO PAR TRANSFORMADA-INVERSA

Após a escolha de problema auxiliar adequado para a solução do sistema de equações diferenciais parciais, o próximo passo na aplicação da Técnica de Transformação Integral Generalizada é a determinação do par transformação integral – fórmula de inversão.

Transformada

$$\tilde{U}_{Hi}(\tau) = \int_0^a R\tilde{\psi}_{1i}(R)U_{H1}(\tau, R)dR + \int_a^1 R\tilde{\psi}_{2i}(R)U_{H2}(\tau, R)dR \quad (3.61)$$

Inversa

$$U_{nH}(\tau, R) = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\psi}_{ni}(R)\tilde{U}_{Hi}(\tau), \quad n=1,2 \quad (3.62)$$

Para $0 < R < a$

$$U_{1H}(\tau, R) = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\psi}_{1i}(R)\tilde{U}_{Hi}(\tau) \quad (3.63)$$

Para $a < R < 1$

$$U_{2H}(\tau, R) = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\psi}_{2i}(R)\tilde{U}_{Hi}(\tau) \quad (3.64)$$

3.2.1.3 TRANSFORMAÇÃO INTEGRAL DO PROBLEMA

Seguindo o formalismo da Técnica da Transformada Integral Generalizada, faz-se uso do operador $\int_0^a R\tilde{\psi}_{1i}dR$ multiplicando a equação (3.35) e o operador $\int_a^1 R\tilde{\psi}_{2i}(R)dR$ multiplicando a equação (3.36).

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} \int_0^a R\tilde{\psi}_{1i}(R)U_{H1}(\tau, R)dR &= -\phi_i^2 \int_0^a R\tilde{\psi}_{1i}(R)U_{H1}(\tau, R)dR \\ &+ \left[R\tilde{\psi}_{1i}(R) \frac{\partial U_{H1}(\tau, R)}{\partial R} - R \frac{\partial \tilde{\psi}_{1i}(R)}{\partial R} U_{H1}(\tau, R) \right]_{R=a} \end{aligned} \quad (3.65)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} \int_a^1 R\tilde{\psi}_{2i}(R)U_{H2}(\tau, R)dR &= -\phi_i^2 \int_a^1 R\tilde{\psi}_{2i}(R)U_{H2}(\tau, R)dR \\ &+ \left[R \frac{\partial \tilde{\psi}_{2i}(R)}{\partial R} U_{H2}(\tau, R) - R\tilde{\psi}_{2i}(R) \frac{\partial U_{H2}(\tau, R)}{\partial R} \right]_{R=a} + \int_a^1 R\psi_{2i}F(\tau, R)dR \end{aligned} \quad (3.66)$$

Retomando a equação transformada chegamos ao sistema diferencial ordinário infinito e acoplado para o potencial transformado.

$$\frac{d\tilde{U}_{Hi}(\tau)}{d\tau} = -\phi_i^2 \tilde{U}_{Hi}(\tau) + A_i(\tau) + B_i(\tau) + F_i^*(\tau) \quad (3.67)$$

$$\tilde{U}_{Hi}(0) = -C_i \quad (3.68)$$

Os coeficientes obtidos a partir da transformação integral da equação original são dados por:

$$A_i(\tau) = a\tilde{\psi}_{1i}(a) \frac{\partial U_{H1}(\tau, R)}{\partial R} \Big|_{R=a} - a \frac{\partial \tilde{\psi}_{1i}}{\partial R} \Big|_{R=a} U_{H1}(\tau, a) \quad (3.69)$$

$$B_i(\tau) = a \frac{\partial \tilde{\psi}_{2i}}{\partial R} \Big|_{R=a} U_{H2}(\tau, a) - a \frac{\partial U_{H2}(\tau, R)}{\partial R} \Big|_{R=a} \tilde{\psi}_{2i}(a) \quad (3.70)$$

$$F_i^*(\tau) = \int_a^1 R\psi_{2i}(R)F(\tau, R)dR \quad (3.71)$$

$$C_i = \int_0^a R\psi_{1i}(R)U_{p1}(R)dR + \int_a^1 R\psi_{2i}(R)U_{p2}(R)dR \quad (3.72)$$

O cálculo de C_i é realizado numericamente a partir da subrotina QDAG da biblioteca IMSL (2010).

O cálculo de $F_i^*(\tau)$ foi realizado pela integração semianalítica que consiste na aproximação linear de $F(\tau, R)$ da seguinte forma:

$$F_i^*(\tau) = \sum_{k=1}^{Nk} \int_{x_{k-1}}^{x_k} R\psi_{2i}(R)F(\tau, R)dR \quad (3.73)$$

Onde

$$F(\tau, R) = \alpha_k R + \varphi_k \quad (3.74)$$

$$F_i^*(\tau) = \sum_{k=1}^{Nk} \left[\alpha_k \int_{x_{k-1}}^{x_k} R^2 \psi_{2i}(R)dR + \varphi_k \int_{x_{k-1}}^{x_k} R^2 \psi_{2i}(R)dR \right] \quad (3.75)$$

$$\alpha_k = \frac{F_k - F_{k-1}}{x_k - x_{k-1}} \quad (3.76)$$

$$\varphi_k = F_k - \alpha_k x_k \quad (3.77)$$

3.2.1.4 ALGORITMO COMPUTACIONAL ABORDAGEM 2Ω

A Equação 3.67 representa um sistema infinito de equações diferenciais ordinárias, acoplado e não linear para os potenciais transformados $\tilde{U}_{Hi}(\tau)$. Para obtenção de solução numérica, a expansão do potencial $U_H(\tau, R)$ é truncada para uma dada ordem N suficientemente grande a fim de garantir a exatidão desejada. Na forma vetorial, o sistema truncado de ordem N é reescrito como:

$$\underline{y}'(t) + \underline{A}(t)\underline{y}(t) = \underline{g}(t) \quad t > 0 \quad (3.78)$$

$$\underline{y}(0) = \underline{y}_i \quad (3.79)$$

Onde

$$\ddot{A}(t) = \phi_i^2 \quad (3.80)$$

$$\underline{g}(t) = \{A_i(\tau) + B_i(\tau) + \tilde{F}_i(\tau)\}^T \quad (3.81)$$

$$\underline{y}_i = \{y_1, y_2, y_3, \dots, y_N\}^T = -C_i \quad (3.82)$$

A solução numérica do problema de valor inicial é então obtida através da subrotina IVPAG, que resolve sistemas de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem com alto grau de rigidez "*stiffness*", com controle automático de erro.

O vetor solução é dado por

$$y(t) = \{\tilde{U}_{H1}(\tau), \tilde{U}_{H2}(\tau), \tilde{U}_{H3}(\tau), \dots, \tilde{U}_{HN}(\tau)\}^T \quad (3.83)$$

$$y(t) = \{\tilde{U}_{WH1}(\tau), \dots, \tilde{U}_{WHN}(\tau); \tilde{U}_{ZH1}(\tau), \dots, \tilde{U}_{ZHN}(\tau)\} \quad (3.84)$$

Esta subrotina encontra-se disponível na biblioteca IMSL (2010) e seu algoritmo é baseado no método de GEAR para problemas "*stiff*".

3.3 – ABORDAGEM DE DOMÍNIO ÚNICO

Nesta abordagem, a camada porosa é considerada como um pseudofluido e a região composta é tratada como um contínua. A transição a partir do fluido para o meio poroso é obtida através de uma variação espacial das propriedades, tais como a permeabilidade e número de Darcy da equação de Darcy-Brinkman-Forchheimer (Arquis e Caltagirone, 1984; Beckermann *et al.*, 1987; Beckermann *et al.*, 1988). A abordagem de domínio único tem a vantagem de simplificar o procedimento numérico, porque as condições de contorno na interface não são escritas explicitamente.

$$\rho_f \frac{\partial V}{\partial t} = -\varepsilon \nabla P + \mu_f \nabla^2 V - \frac{\varepsilon \mu_f}{K} V - \frac{\varepsilon^2 \rho_f c_F}{\sqrt{K}} V^2, \quad 0 < R < R_e \quad (3.85)$$

Decompondo-se na direção radial:

$$\rho_f \frac{\partial u}{\partial t} = -\varepsilon \frac{\partial P}{\partial z} + \mu_f \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) - \frac{\varepsilon \mu_f}{K} u - \frac{\varepsilon^2 \rho_f c_F}{\sqrt{K}} u^2, \quad 0 < R < R_e \quad (3.86)$$

Condição inicial:

$$u = 0 \text{ em } t = 0 \quad (3.87)$$

Condições de contorno:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = 0 \text{ em } r = 0 \quad (3.88)$$

$$u = 0 \text{ em } r = R_e \quad (3.89)$$

Os parâmetros adimensionais utilizados para adimensionalizar o problema proposto são:

$$\begin{aligned}
 R &= \frac{r}{R_e}; \tau = \frac{vt}{R_e}; u_c = \frac{GR_e^2}{\mu_F}; Re_D = \frac{\rho u_c^* D_e}{\mu_F}; U^* = \frac{u}{u_c^*} \\
 \gamma &= \frac{R_e}{d_p}; \Omega = \frac{\mu_{eff}}{\mu_f}; Da = \frac{k}{R_e^2}; U = \frac{u}{u_c}; v_f = \frac{\mu_f}{\rho_f}, a = \frac{R_f}{R_e} \\
 G &= -\frac{\partial P}{\partial z}; \mu_{eff} = \frac{\mu_f}{\rho_f}, P_z = \frac{(-\partial P / \partial z) D_e^2}{16 \mu_F u_c^*}; U^* = 4 P_z U
 \end{aligned} \tag{3.90} \quad a-o$$

Introduzindo as equações (3.90 a-o) nas equações 3.86 a 3.89, têm-se as equações na forma adimensionalizada para o cálculo .

$$\frac{\partial U^*}{\partial \tau} = 4\varepsilon P_z + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial U^*}{\partial R} \right) - w_0 U^* - w_1 U^{*2}, \quad 0 < R < 1 \tag{3.91}$$

$$\frac{\partial U^*}{\partial \tau} = 4\varepsilon P_z + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial U^*}{\partial R} \right) + f^*(\tau, R), \quad 0 < R < 1 \tag{3.92}$$

Onde o termo $f^*(R, \tau)$ engloba os termos de Darcy e Forchheimer

Condição inicial

$$U^* = 0 \text{ em } \tau = 0 \tag{3.93}$$

Condições de contorno

$$\frac{\partial U^*}{\partial R} = 0 \text{ em } R = 0 \tag{3.94}$$

$$U^* = 0 \text{ em } R = 1 \tag{3.95}$$

Onde

$$f^*(\tau, R) = -\frac{\varepsilon}{Da} U^* - \frac{\varepsilon^2 c_F Re_D}{2\sqrt{Da}} U^{*2} \tag{3.96}$$

$$w_0 = \frac{\varepsilon}{Da} = \frac{150(1-\varepsilon)^2 \gamma^2}{\varepsilon^2} \tag{3.97}$$

$$w_1 = \frac{\varepsilon^2 c_F Re_D}{2\sqrt{Da}} = \frac{Re_D}{2} (150\varepsilon)^{1/2} c_F (1-\varepsilon) \gamma \tag{3.98}$$

Para a solução dos sistemas de equações usou-se a formulação de uma função para suavizar a brusca mudança da porosidade entre as duas regiões. Foi formulada uma equação de $\varepsilon(r)$ para esse estudo a partir de um melhor ajuste próximo a interface. Considerou-se assim uma zona não homogênea de espessura δ na região porosa onde deve ser feita essa suavização, como mostrado na figura 3.3.

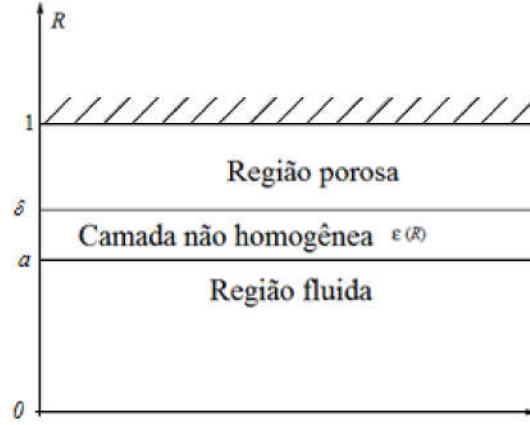


Figura 3.3 - Canais paralelos poro/fluido com camada interfacial não homogênea. Fonte: elaborado pelo autor

Para a região fluida homogênea a porosidade é:

$$\varepsilon = 1 \quad (3.99)$$

Para a região porosa, usa-se a equação apresentada por Nield e Bejan (2006).

$$\varepsilon = \varepsilon_{\infty} \left\{ 1 + b \exp[-c\gamma(1-R)] \right\} \quad (3.100)$$

Onde:

ε_{∞} é a porosidade de referência avaliada no seio do meio poroso, onde não existem influências da parede.

γ é um fator de compactação, definido entre os parâmetros adimensionais

b e c são constantes empíricas

Para a região de transição usou-se a equação adquirida a partir de um melhor ajuste próximo a interface para ε .

3.3.1 SOLUÇÃO VIA GITT

Novamente, é necessário utilizar um filtro para reduzir o peso das não homogeneidades na EDP e nas condições de contorno. A solução pode ser dividida em duas partes para $U_p^*(R)$ (solução particular) e $U_H^*(\tau, R)$ (solução homogênea) como se segue:

$$U^*(\tau, R) = U_p^*(R) + U_H^*(\tau, R) \quad (3.101)$$

Formulação Para o problema particular (U_p^*)

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dR} \left(R \frac{dU_p^*}{dR} \right) + 4\varepsilon_0 P_z = 0, \text{ em } 0 < R < 1 \quad (3.102)$$

Condições de contorno

$$\frac{dU_p^*}{dR} = 0 \text{ em } R = 0 \quad (3.103)$$

$$U_p^* = 0 \text{ em } R = 1 \quad (3.104)$$

A solução para o problema particular é dado por:

$$U_p^*(R) = \varepsilon_0 P_z (1 - R^2) \quad (3.105)$$

Formulação para o problema homogêneo U_H^*

$$\frac{\partial U_H^*}{\partial \tau} = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial U_H^*}{\partial R} \right) + f^{**}(\tau, R) \quad (3.106)$$

Condição inicial

$$U_H^* = -U_p^*(R) \text{ em } \tau = 0 \quad (3.107)$$

Condições de contorno

$$\frac{\partial U_H^*}{\partial R} = 0 \text{ em } R = 0 \quad (3.108)$$

$$U_H^* = 0 \text{ em } R = 1 \quad (3.109)$$

Onde:

$$f^{**}(\tau, R) = 4\Delta\varepsilon(R)P_z + f^*(\tau, R) \quad (3.110)$$

$$\Delta\varepsilon(R) = \varepsilon(R) - \varepsilon_0 \quad (3.111)$$

3.3.1.1 PROBLEMA DE AUTOVALOR

Seguindo a metodologia GITT, propõe-se o seguinte problema auxiliar para resolver o problema homogêneo:

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dR} \left(R \frac{d\psi_i}{dR} \right) + \xi_i^2 \psi_i = 0, \quad 0 < R < 1, \text{ para } i = 1, 2, 3, \dots \quad (3.112)$$

Condições de contorno

$$\frac{d\psi_i}{dR} = 0, \text{ em } R = 0, \text{ para } i = 1, 2, 3, \dots \quad (3.113)$$

$$\psi_i = 0 \text{ em } R = 1, \text{ para } i = 1, 2, 3, \dots \quad (3.114)$$

Onde ψ_i e ξ_i são, respectivamente as autofunções e autovalores que satisfazem a propriedade de ortogonalidade.

$$\int_0^1 R \psi_i \psi_j dR = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ N_i & \text{se } i = j \end{cases}, \text{ para } i = 1, 2, 3, \dots \text{ e } j = 1, 2, 3, \dots \quad (3.115)$$

E N_i é a norma ou integral de normalização

A equação (3.112) pode ser resolvida analiticamente e sua solução encontra-se em Özisik (2012):

$$\psi_i = J_0(\xi_i R), \text{ para } i = 1, 2, 3, \dots \quad (3.116)$$

Os autovalores ξ_i são dados pela solução da seguinte equação transcendental:

$$J_0(\xi_i) = 0, \text{ para } i = 1, 2, 3, \dots \quad (3.117)$$

O valor da norma é dado pela equação

$$N_i = \frac{1}{2} J_1^2(\xi_i), \text{ para } i = 1, 2, 3, \dots \quad (3.118)$$

A autofunção normalizada é ser escrito da seguinte forma

$$\tilde{\psi}_i = \frac{\psi_i}{\sqrt{N_i}}, \text{ para } i = 1, 2, 3, \dots \quad (3.119)$$

3.3.1.2 DETERMINAÇÃO DO PAR TRANSFORMADA-INVERSA

Após a escolha de problema auxiliar adequado para a solução do sistema de equações diferenciais parciais o próximo passo é a determinação do par transformada-inversa.

Transformada

$$\tilde{U}_{Hi}^*(\tau) = \int_0^1 R \tilde{\psi}_i(R) U_H^*(\tau, R) dR \quad (3.120)$$

Inversa

$$U_H^*(\tau, R) = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\psi}_i(R) \tilde{U}_{Hi}^*(\tau) \quad (3.121)$$

3.3.1.3 TRANSFORMAÇÃO INTEGRAL DO PROBLEMA

Seguindo o formalismo da Técnica da Transformada Integral Generalizada, faz uso do operador $\int_0^1 R \tilde{\psi}_i dR$ multiplicando a equação (3.106).

$$\int_0^1 R\psi_i(R) \left\{ \frac{\partial U_H^*}{\partial \tau} = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial U_H^*}{\partial R} \right) + f^{**}(\tau, R) \right\} dR \quad (3.122)$$

O potencial transformado é dado pela seguinte equação

$$\frac{d\tilde{U}_H^*(\tau)}{d\tau} = -\xi_i^2 \tilde{U}_H^*(\tau) + \tilde{f}(\tau) \quad (3.123)$$

$$\tilde{U}_H^*(0) = -\int_0^1 R\tilde{\psi}_i U_p^*(R) dR = C_i^* \quad (3.124)$$

$$C_i^* = -4\varepsilon_0 P_z J_1(\xi_i) / (\xi_i^3 \sqrt{N_i}) \quad (3.125)$$

$$\tilde{f}_i(\tau) = \int_a^1 R\psi_i(R) f^{**}(\tau, R) dR \quad (3.126)$$

O cálculo de $\tilde{f}_i(\tau)$ é realizado pela integração semianalítica a partir da aproximação linear da função $f^{**}(\tau, R)$, como segue:

$$\tilde{f}_i(\tau) = \sum_{k=1}^{Nk} \int_{x_{k-1}}^{x_k} R\tilde{\psi}_i(R) f^{**}(\tau, R) dR \quad (3.127)$$

$$f^{**}(\tau, R) = \alpha_k R + \varphi_k \quad (3.128)$$

$$\tilde{f}_i(\tau) = \sum_{k=1}^{Nk} \left[\alpha_k \int_{x_{k-1}}^{x_k} R^2 \tilde{\psi}_i(R) dR + \varphi_k \int_{x_{k-1}}^{x_k} R\tilde{\psi}_i(R) dR \right] \quad (3.129)$$

3.3.1.4 ALGORITMO COMPUTACIONAL - ABORDAGEM 1Ω

A Equação 3.123 representa um sistema infinito de equações diferenciais ordinárias, acoplado e não linear para os potenciais transformados $\tilde{U}_H^*(\tau)$. Para obtenção de solução numérica, a expansão do potencial $\tilde{U}_H^*(\tau)$ é truncada para uma dada ordem N suficientemente alta a fim de garantir a exatidão desejada.

Na forma vetorial, o sistema truncado de ordem N é reescrito como:

$$\underline{\ddot{y}}'(t) + \underline{\ddot{A}}(t) \underline{\ddot{y}}(t) = \underline{\ddot{g}}(t) \quad t > 0 \quad (3.130)$$

$$\underline{\ddot{y}}(0) = \underline{\ddot{y}}_i \quad (3.131)$$

Onde

$$\underline{\ddot{A}}(t) = \xi_i^2 \quad (3.132)$$

$$\underline{\ddot{g}}(t) = \{\tilde{f}_i(\tau)\}^T \quad (3.133)$$

$$\underline{y}_i = \{y_1, y_2, y_3, \dots, y_N\}^T = C_i^* \quad (3.134)$$

A solução numérica do problema de valor inicial é então obtida através da subrotina IVPAG, que resolve sistemas de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem com alto grau de rigidez "*stiffness*", com controle automático de erro.

O vetor solução é dado por

$$y(t) = \{\tilde{U}_{H1}^*(\tau), \tilde{U}_{H2}^*(\tau), \tilde{U}_{H3}^*(\tau), \dots, \tilde{U}_{HN}^*(\tau)\}^T \quad (3.135)$$

3.4 – RESULTADOS

Um código em Fortran 2003 foi desenvolvido e implementado em um computador, com processador Intel Core i7. Foram estudados os efeitos da porosidade sobre o escoamento no canal paralelo parcialmente preenchido com meio poroso bem como o número de Reynolds e a espessura da camada porosa. Os coeficientes das EDOs foram calculados numericamente através da subrotina QDAG da biblioteca IMSL (2010). Para as soluções numéricas dos sistemas diferenciais ordinários de primeira ordem equações (3.67) e (3.123) para o domínio duplo e domínio único respectivamente foi utilizada a subrotina IVPAG da biblioteca IMSL (2010) com um erro relativo global de 10^{-12} .

3.4.1 VERIFICAÇÃO NUMÉRICA

Para verificação numérica foram utilizados os resultados obtidos por Xiong (2001), onde simula o escoamento em um duto circular parcialmente preenchido com meio poroso saturado, fazendo o uso da equação de Darcy-Brinkman-Forchheimer. Nas figuras 3.4 e 3.5 mostram os resultados obtidos por Xiong (2001) utilizando o método das diferenças finitas para discretizar as equações do momento usando o método de iteração de Newton para resolver o sistema algébrico resultante. Estes resultados são utilizados como referências para a verificação numérica do problema via GITT, são comparados aos resultados utilizando a abordagem de domínio único - 1Ω e domínio duplo - 2Ω nas figuras 3.4 e 3.5 respectivamente. Uma boa concordância entre os resultados obtidos a partir do método da GITT e os obtidos por Xiong (2001) pode ser observada.

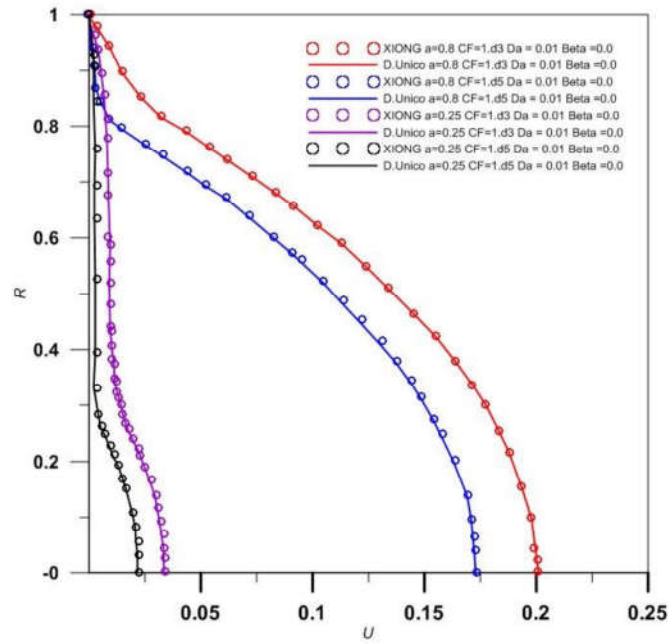


Figura 3. 4 - Verificação numérica entre os resultados de Xiong (2001) para os perfis de velocidade e os resultados obtidos via GITT - 1Ω .

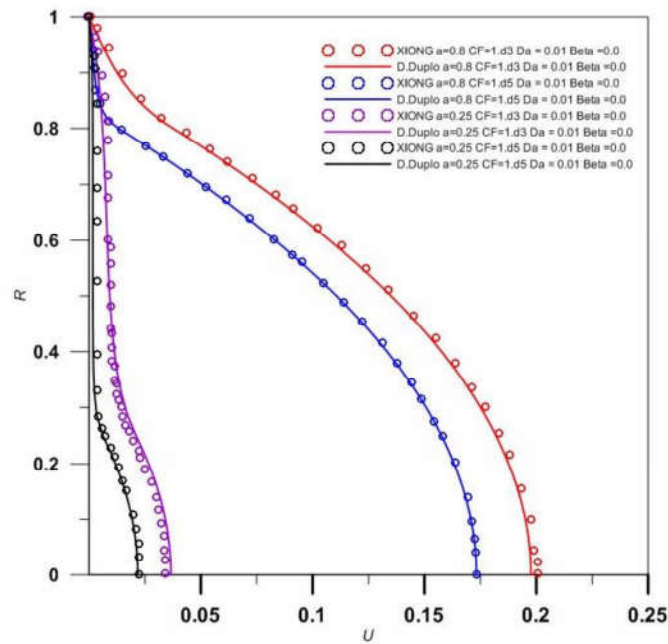


Figura 3. 5 - Verificação numérica – comparação entre os resultados de Xiong (2001) para os perfis de velocidade e os resultados obtidos via GITT - 2Ω

As figuras 3.4 e 3.5 mostram a distribuição de velocidades entre o centro do duto e a parede, para valores de interface de $a = 0,25$ e $a = 0,8$; coeficiente de Forchheimer $C_F = 10^3$ e $C_F = 10^5$; número de Darcy $Da = 0,01$ e coeficiente de salto de tensão na interface $\beta = 0$. A região de fluido apresenta um perfil parabólico característica do fluxo em duto livre, nesta região coeficiente Brinkman tem grande influência, ao passo que para a região porosa este coeficiente é quase insignificante. O gráfico se destina a verificar a concordância entre os resultados obtidos via GITT, uma vez que os resultados de Xiong podem ser entendidos como uma condição limite do problema geral abordado neste trabalho.

3.4.2 RESULTADOS NUMÉRICOS

As figuras 3.6 a 3.13 mostram os resultados do perfil de velocidade de duto anular parcialmente preenchido com meio poroso obtidos pelo método GITT e comparados com os resultados obtidos pelo método das linhas. Para todos os casos a porosidade foi considerada variável com a coordenada espacial de acordo com a equação (3.100).

Foram utilizadas as seguintes parametrizações, com suas ordens de grandeza constantes na tabela 3.1.

Tabela 3. 1 - Grandezas relacionadas nos casos do estudo.

Re	ε_∞	a	Γ
10	0,2	0,1	100
1000	0,2	0,1	100
10	0,4	0,4	1000
1000	0,4	0,8	1000
1000	0,4	0,4	1000

3.4.2.1 INFLUÊNCIA DE REYNOLDS

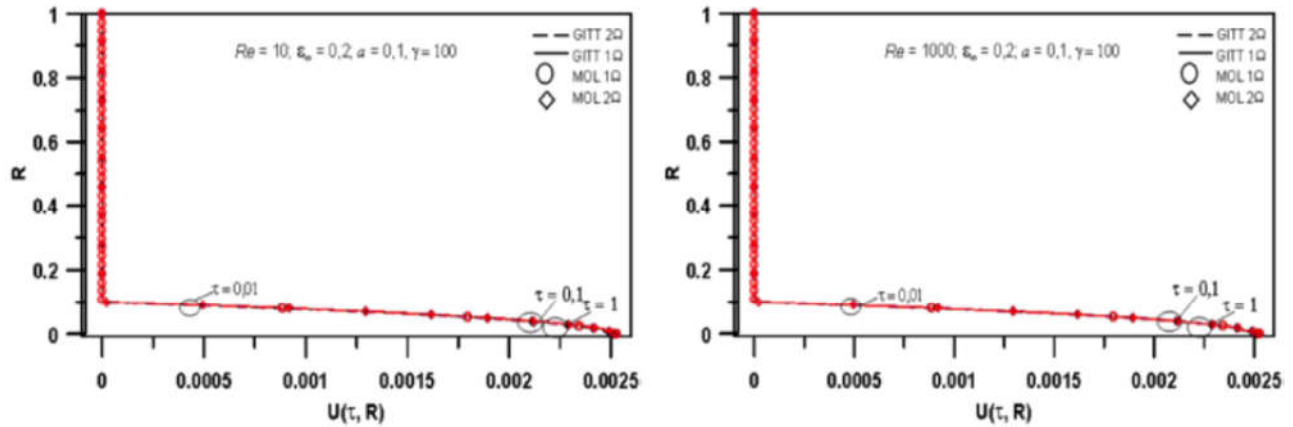


Figura 3. 6 - Influência do número de Reynolds na velocidade de um duto parcialmente preenchido com meio poroso $-\varepsilon_{\infty} = 0,2$ $\alpha = 0,1$ $\gamma = 100$

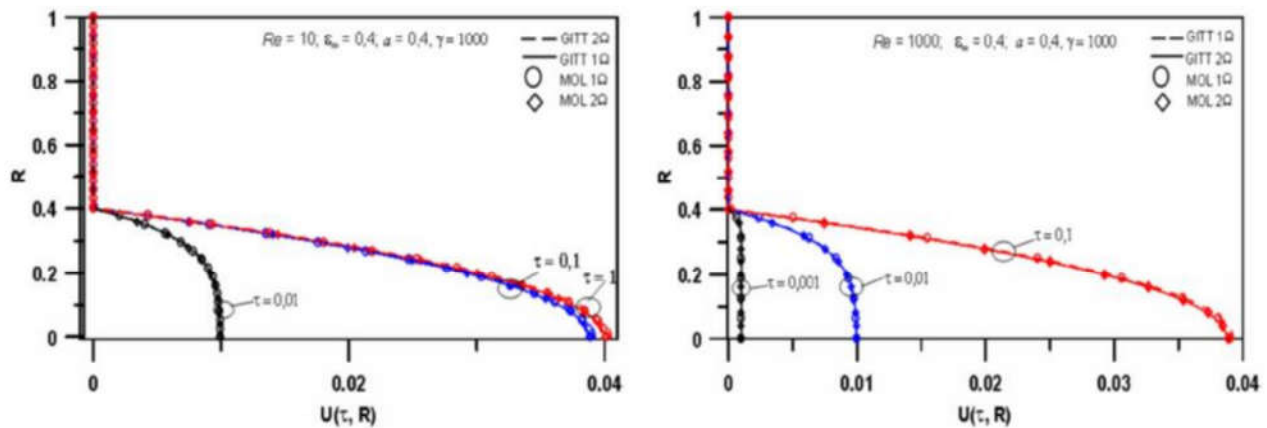


Figura 3. 7 - Influência do número de Reynolds na velocidade de um duto parcialmente preenchido com meio poroso $-\varepsilon_{\infty} = 0,4$ $\alpha = 0,4$ $\gamma = 1000$

O número de Reynolds influencia o coeficiente que representa o termo Forchheimer para a região porosa, este termo apenas tem influência na vizinhança da interface, somente tendo relevância para escoamentos com altas velocidades, desta forma para pequenas espessuras de camada fluida α o número de Reynolds não tem nenhuma influência visível no perfil de velocidade. Em casos onde a espessura da camada fluida é considerável o termo de inércia de Forchheimer passa a ser significativo o que provoca um atraso na evolução da velocidade com o tempo à medida que Reynolds aumenta. Para espessura da camada fluida de 0,4 o aumento do número de

Reynolds mostra uma mudança no ângulo de inclinação na interface, onde os efeitos inerciais do termo de Forchheimer ressaltam a não linearidade da equação.

3.4.2.2 INFLUÊNCIA DA ESPESSURA DA CAMADA FLUIDA A

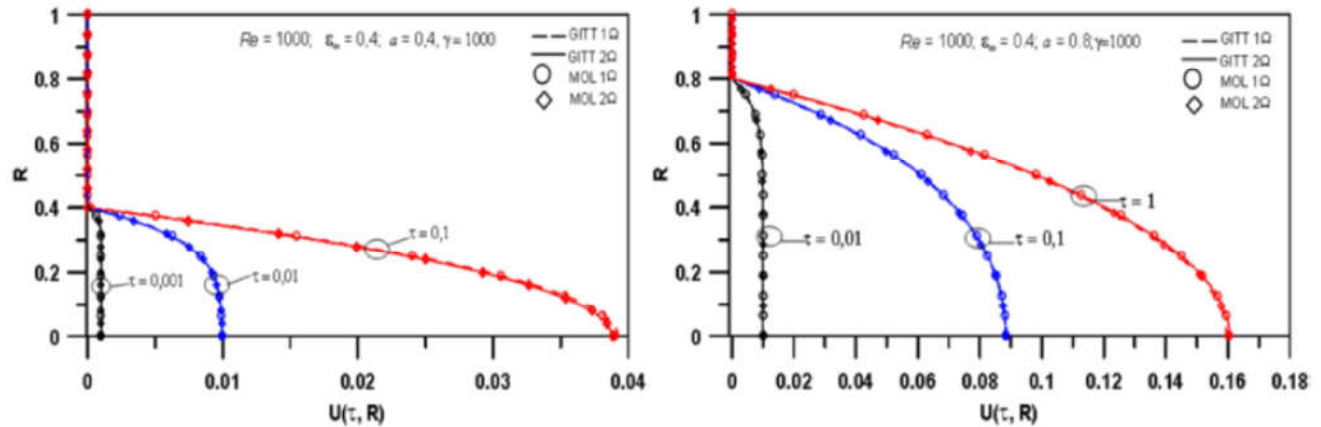


Figura 3. 8 - Influência da camada fluida a na velocidade de um duto parcialmente preenchido com meio poroso – $Re = 1000$, $\varepsilon_\infty = 0,4$, $\gamma = 1000$

Como seria de se esperar com o aumento de a de 0,4 para 0,8, a espessura da camada porosa diminui, e a velocidade apresenta um aumento. Quando a tende para zero, temos um duto completamente preenchido pelo meio poroso. Quando a tende para a unidade temos um duto totalmente livre. Com o aumento da velocidade temos também o aumento do termo de inercia de Forchheimer, proporcionando maiores tensões próximas à interface.

3.4.3. ANÁLISE DE CONVERGÊNCIA

As tabelas de 3.2 a 3.4 mostram o comportamento de convergência para o perfil de velocidade encontrada usando a abordagem de domínio único, pode-se notar que para a obtenção da convergência em 4 dígitos nas posições mostradas para o tempo adimensional $\tau = 0,001$ e $\tau = 0,01$ foram necessários 60 termos na série de expansão GITT e para $\tau = 0,1$ foram necessários para a convergência já informada 180 termos.

As tabelas de 3.5 a 3.7 mostram o comportamento de convergência para o perfil de velocidade encontrada usando a abordagem de domínio duplo. Para a obtenção da convergência em 4 dígitos nas posições mostradas para o tempo adimensional $\tau = 0,001$ são necessários 80 termos e para $\tau = 0,01$ e $\tau = 0,1$ foram necessários 180 termos na serie de truncamento.

Tabela 3. 2 - Convergência da velocidade com parâmetros $Re = 10$; $a = 0,1$; $\varepsilon_\infty = 0,2$; $\gamma = 100$ – Domínio Único

$\tau=0.001$											
R	N=20	N=40	N=60	N=80	N=100	N=120	N=140	N=160	N=180	N=200	N=250
0.0	0,0055	0,0012	0,0010	0,0010	0,0010	0,0010	0,0010	0,0010	0,0010	0,0010	0,0010
0.1	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0.2	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0.3	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0.4	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0.5	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0.6	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0.7	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0.8	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0.9	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
1.0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

Tabela 3. 3 - Convergência da velocidade com parâmetros $Re = 10$; $a = 0,1$; $\varepsilon_\infty = 0,2$; $\gamma = 100$ – Domínio Único

$\tau=0.01$											
R	N=20	N=40	N=60	N=80	N=100	N=120	N=140	N=160	N=180	N=200	N=250
0.0	0,0079	0,0027	0,0025	0,0025	0,0025	0,0025	0,0025	0,0025	0,0025	0,0025	0,0025
0.1	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001
0.2	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0.3	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0.4	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0.5	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0.6	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0.7	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0.8	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0.9	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
1.0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

Tabela 3. 4 - Convergência da velocidade com parâmetros $Re = 10$; $a = 0,1$; $\varepsilon_\infty = 0,2$; $\gamma = 100$ – Domínio Único

$\tau=0.1$											
R	N=20	N=40	N=60	N=80	N=100	N=120	N=140	N=160	N=180	N=200	N=250
0.0	-0,0004	0,0015	0,0020	0,0022	0,0023	0,0023	0,0024	0,0024	0,0025	0,0025	0,0025
0.1	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0.2	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0.3	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0.4	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0.5	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0.6	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0.7	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0.8	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0.9	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
1.0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

Tabela 3. 5 - Convergência da velocidade com parâmetros $Re = 10$; $a = 0,1$; $\varepsilon_\infty = 0,4$; $\gamma = 100$ – Domínio Duplo

[illegible]

Tabela 3. 6 - Convergência da velocidade com parâmetros $Re = 10$; $a = 0,1$; $\varepsilon_\infty = 0,4$; $\gamma = 100$ – Domínio Duplo

[illegible]

Tabela 3. 7 - Convergência da velocidade com parâmetros $Re = 10$; $a = 0,1$; $\varepsilon_w = 0,4$; $\gamma = 100$ – Domínio Duplo

[illegible]

CAPÍTULO 4

CONVECÇÃO NATURAL TÉRMICA EM CAVIDADE RETANGULAR FECHADA PARCIALMENTE PREENCHIDA COM MEIO POROSO

Nesta etapa do trabalho utiliza a formulação Darcy-Brinkman-Forchheimer para estudar o fenômeno de convecção natural no interior de uma cavidade fechada, bidimensional, parcialmente preenchida por meio poroso, em condições adiabáticas e impermeáveis no topo e na base, com paredes laterais diferencialmente aquecidas, submetendo a cavidade a um gradiente de temperatura.

4.1 – DEFINIÇÃO DO PROBLEMA

A formulação física a ser abordada e o sistema de coordenadas são mostrados na figura 4.1. A extensão horizontal da camada de fluido é S , enquanto que as dimensões totais da cavidade retangular são H e L . Supõe-se que o fluxo é laminar e permanente, incompressível e bidimensional. As propriedades termofísicas do fluido são consideradas constantes, exceto para a massa específica no termo flutuabilidade na equação da quantidade de movimento. O meio poroso é considerado homogêneo e isotrópico e é saturado com um fluido que está em equilíbrio termodinâmico local com a matriz sólida.

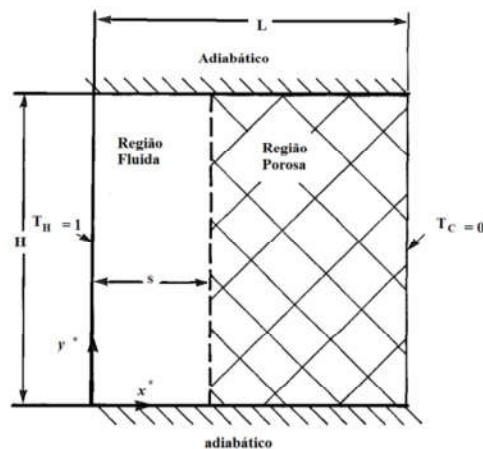


Figura 4. 1 - Desenho esquemático para o problema de convecção natural térmica em uma cavidade parcialmente preenchida com meio poroso. Fonte: elaborado pelo autor

4.2 – FÓRMULAÇÃO MATEMÁTICA PARA CONVECÇÃO TÉRMICA EM CAVIDADE RETANGULAR

As seguintes considerações devem ser admitidas:

a) A direção normal à figura é muito menor que as outras duas dimensões da cavidade. O problema é então assumido bidimensional;

b) O fluido binário é newtoniano e o escoamento é incompressível e em regime laminar;

c) A massa específica do fluido é submetida à aproximação de Boussinesq: a massa específica varia apenas linearmente com a temperatura;

$$\rho(T) = \rho_f [1 - \beta_T (T - T_0)] \quad (3.136)$$

Onde β_T é o coeficiente de expansão térmica.

d) Admite-se a camada porosa saturada por um fluido binário que ocupa o restante da cavidade. É dessa forma homogênea, isotrópica e a fase sólida está em equilíbrio térmico com o fluido;

e) Admite-se a interface poro/fluido fixa;

f) As propriedades físicas da matriz sólida são consideradas constantes;

g) Levam-se em conta os efeitos convectivos, os efeitos de Soret e Dufour são desprezados;

h) Utiliza-se a abordagem de domínio único para a solução do problema proposto.

4.2.1 DEFININDO AS EQUAÇÕES DO PROBLEMA

Levando em conta as hipóteses previamente estabelecidas as equações válidas para a cavidade retangular são escritas a seguir.

Equação da Continuidade

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{U} = 0 \quad 0 < x < L; \quad 0 < y < H \quad (4.1)$$

Equação de conservação do momento – Darcy-Brinkman-Forchheimer

Para $0 < x < L; \quad 0 < y < H$

$$\rho_f \left[\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon^2} (\vec{U} \cdot \vec{\nabla}) \vec{U} \right] = -\vec{\nabla} P^* + \rho_f [\beta_r (T - T_c)] \vec{g} \vec{e}_s + \mu_{eff} \vec{\nabla}^2 \vec{U} - \frac{\mu}{K} \vec{U} - \frac{c_F \rho_f}{K^{1/2}} |\vec{U}| \vec{U} \quad (4.2)$$

Equação da conservação da energia

$$(\rho c)_m \frac{\partial T}{\partial t} + (\rho c)_f \vec{U} \cdot \vec{\nabla} T = \vec{\nabla} \cdot (k_{eff} \vec{\nabla} T) \quad 0 < x < L; \quad 0 < y < H \quad (4.3)$$

Regime permanente

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} = 0; \quad \frac{\partial T}{\partial t} = 0$$

Para se obter um sistema de equações adimensionalizadas das equações (4.2 e 4.3), utilizamos os seguintes grupos de adimensionalização.

$$x = \frac{x^*}{L}; y = \frac{y^*}{L}; S = \frac{s}{L}; \vec{V} = \frac{\vec{U} L}{\alpha}; \theta = \frac{T - T_c}{T_H - T_c}; P = \frac{P^*}{\rho_f \left(\frac{\alpha}{L} \right)^2} \quad (4.4) \quad \text{a-f}$$

Os parâmetros característicos do problema estudado são:

Razão de aspecto

$$A = \frac{H}{L} \quad (4.5)$$

Número de Prandtl

$$\text{Pr} = \frac{\nu}{\alpha} \quad (4.6)$$

Número de Darcy

$$Da = \frac{K}{L^2} \quad (4.7)$$

Número de Rayleigh térmico

$$Ra_T = \frac{g \beta_r (T_H - T_c) L^3}{\alpha \nu} \quad (4.8)$$

Número de Nusselt médio:

$$\bar{Nu} = \frac{\dot{q}}{k \Delta T / L} = -\frac{1}{A} \int_0^A \left[\frac{\partial \theta}{\partial x} - \text{Pr}(u \theta) \right] dz \quad (4.9)$$

As equações de conservação em sua forma adimensional são escritas da seguinte forma:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0 \quad (4.10)$$

$$\frac{1}{Pr} \vec{V} \cdot \vec{\nabla} V = -\frac{1}{Pr} \vec{\nabla} P + Ra_T \theta + \Lambda \vec{\nabla}^2 \vec{V} - \frac{1}{Da} \vec{V} - \frac{C_F}{Pr \sqrt{Da}} |\vec{V}| \vec{V} \quad (4.11)$$

$$\vec{V} \cdot \vec{\nabla} \theta = \vec{\nabla} \cdot (R_k \vec{\nabla} \theta) \quad (4.12)$$

Em que

$$\Lambda = \frac{\mu_{eff}}{\mu} = 1 \quad (4.13)$$

$$R_k = \frac{k_{eff}}{k} = 1 \quad (4.14)$$

Coefficiente Inercial, derivado do coeficiente de Forchheimer, calculado a partir de dados experimentais medidos por Ergun (1952) para o escoamento de fluido em uma coluna com empacotamento poroso.

$$C_F = \frac{1,75}{\sqrt{150}} \varepsilon^{-3/2} \quad (4.15)$$

O operador associado

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (4.16)$$

Condições de contorno:

Em $x = 0$

$$\vec{V} = 0 \quad (4.17)$$

$$\theta = 1 \quad (4.18)$$

Em $x = 1$

$$\vec{V} = 0 \quad (4.19)$$

$$\theta = 0 \quad (4.20)$$

Em $y = 0$

$$\vec{V} = 0 \quad (4.21)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = 0 \quad (4.22)$$

Em $y = A$

$$\vec{V} = 0 \quad (4.23)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = 0 \quad (4.24)$$

Decompondo-se as equações (4.10 a 4.12) nas direções x e y têm-se:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (4.25)$$

Para a equação da quantidade de movimento na direção x : Para $0 < x < 1$ e $0 < y < 1$

$$\frac{1}{\text{Pr}} \left[u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right] = -\frac{1}{\text{Pr}} \frac{\partial P}{\partial x} + \Lambda \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \frac{u}{Da} - \frac{C_F}{\text{Pr} \sqrt{Da}} |u| u \quad (4.26)$$

Para a equação da quantidade de movimento na direção y : Para $0 < x < 1$ e $0 < y < 1$

$$\frac{1}{\text{Pr}} \left[u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right] = -\frac{1}{\text{Pr}} \frac{\partial P}{\partial y} + \Lambda \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - \frac{v}{Da} - \frac{C_F}{\text{Pr} \sqrt{Da}} |u| v + Ra_T \theta \quad (4.27)$$

Ao invés de resolver separadamente a equação da quantidade de movimento para cada camada (porosa e livre), introduziu-se o parâmetro binário ς , onde:

$$\varsigma = \begin{cases} 1 & \text{para a camada porosa } 0 < \varepsilon < 1 \\ 0 & \text{para a camada fluida } \varepsilon = 1 \end{cases}$$

Dessa forma as equações (4.26 e 4.27) para o perfil de velocidade tomam a seguinte forma, definidas para todo o domínio a ser estudado:

Na direção x :

$$(1 - \varsigma) \left[u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right] = -\frac{\partial P}{\partial x} + \text{Pr} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \varsigma \left(\frac{\text{Pr}}{Da} + \frac{C_F}{\sqrt{Da}} |u| \right) u \quad (4.28)$$

Na direção y :

$$(1 - \varsigma) \left[u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right] = -\frac{\partial P}{\partial y} + \text{Pr} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - \varsigma \left(\frac{\text{Pr}}{Da} + \frac{C_F}{\sqrt{Da}} |u| \right) v + Ra_T \text{Pr} \theta \quad (4.29)$$

Onde

$$|u| = \sqrt{u^2 + v^2} \quad (4.30)$$

Ou seja, para $x > S$ sigma (ς) tem valor igual a 1 a equação da conservação da quantidade de momento torna-se a equação de Darcy- Brinkman-Forchheimer. Para $x < S$, o valor de sigma (ς) é 0, a permeabilidade assume valores elevados e $Da \rightarrow \infty$ (na pratica $Da = 1$), o termo de Darcy e de Forchheimer são desprezados e então a equação do movimento assume a forma da equação de Navier-Stokes. Combinando as equações que governam momento para as duas regiões. O meio fluido e o meio poroso são tratados como um único meio e suas propriedades dependem da localização na cavidade.

Para a temperatura temos a seguinte equação adimensionalizada como:

$$u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\left[\varsigma (R_k - 1) + 1 \right] \frac{\partial \theta}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\left[\varsigma (R_k - 1) + 1 \right] \frac{\partial \theta}{\partial y} \right] \quad (4.31)$$

Número de Nusselt

$$\bar{Nu} = \frac{\dot{q}}{k \Delta T / L} = -\frac{1}{A} \int_0^A \left[\varsigma (R_k - 1) + 1 \right] \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=0}^{x=1} dy \quad (4.32)$$

A convecção natural térmica é um problema governado pelas equações de continuidade, quantidade de movimento e energia acopladas, isto é, o campo de velocidade depende da distribuição de temperatura que por sua vez, é influenciada pelo campo de velocidade.

Para a solução da equação do momento utilizou-se a correlação de função corrente. Com o intuito de eliminarmos o gradiente de pressão da equação da quantidade de movimento diferenciou-se a equação (4.28) em y e a equação (4.29) em x e subtrai-se uma da outra.

Para $0 < x < 1$ e $0 < y < 1$

$$\begin{aligned} (1-\varsigma) & \left[\frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} + v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + u \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + v \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) \right] \\ & - \frac{d}{dx} (1-\varsigma) \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = - \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} + \text{Pr} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} - \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} - \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} \right) \\ & - \varsigma \left(\frac{\text{Pr}}{Da} + \frac{C_F}{\sqrt{Da}} |u| \right) \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \varsigma \frac{C_F}{\sqrt{Da}} \left(u \frac{\partial |u|}{\partial y} - v \frac{\partial |u|}{\partial x} \right) - \text{Pr} \frac{d}{dx} \left(\frac{\varsigma}{Da} \right) v \\ & - C_F |u| \frac{d}{dx} \left(\frac{\varsigma}{\sqrt{Da}} \right) v - Ra_r \text{Pr} \frac{\partial \theta}{\partial x} \end{aligned} \quad (4.33)$$

Em termos de função corrente têm-se:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad (4.34)$$

$$v = - \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (4.35)$$

$$(1-\varsigma) \left[\frac{\partial \psi}{\partial y} \left(\frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial x \partial y^2} \right) - \frac{\partial \psi}{\partial x} \left(\frac{\partial^3 \psi}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} \right) \right] + \frac{d}{dx} (1-\varsigma) \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right)$$

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = & -\frac{\varsigma C_f}{\sqrt{Da}} \left[\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) \sqrt{\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2} \right. \\
& \left. + \frac{\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}}{\sqrt{\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2}} \right] + \text{Pr} \left(\frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \psi}{\partial y^4} \right)
\end{aligned} \quad (4.36)$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{\varsigma \text{Pr}}{Da} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) - \left(\text{Pr} \frac{d}{dx} \left(\frac{\varsigma}{Da} \right) \right) \frac{\partial \psi}{\partial x} - \left(C_f \frac{d}{dx} \left(\frac{\varsigma}{\sqrt{Da}} \right) \sqrt{\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2} \right) \frac{\partial \psi}{\partial x} \\
& - Ra_r \text{Pr} \frac{\partial \theta}{\partial x}
\end{aligned}$$

Para a equação que descreve o perfil de temperatura na cavidade retangular têm-se:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \theta}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial y} = & \left[\varsigma (R_k - 1) + 1 \right] \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \left[\varsigma (R_k - 1) + 1 \right] \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \\
& + \frac{\partial}{\partial x} \left[\varsigma (R_k - 1) + 1 \right] \frac{\partial \theta}{\partial x}
\end{aligned} \quad (4.37)$$

Condições de contorno

Em $x = 0$

$$\psi = 0 \quad (4.38)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \quad (4.39)$$

$$\theta = 1 \quad (4.40)$$

Em $x = 1$

$$\psi = 0 \quad (4.41)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \quad (4.42)$$

$$\theta = 0 \quad (4.43)$$

Em $y = 0$

$$\psi = 0 \quad (4.44)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = 0 \quad (4.45)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = 0 \quad (4.46)$$

Em $y = 1$

$$\psi = 0 \quad (4.47)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = 0 \quad (4.48)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = 0 \quad (4.49)$$

4.3 – SOLUÇÃO VIA GITT

Seguindo a metodologia da Transformada Integral Generalizada, precisamos definir os problemas auxiliares que permitirão encontrar as autofunções e os autovalores.

4.3.1 PROBLEMAS AUXILIARES

Com o propósito de fazer coincidir as condições de contorno da direção escolhida no problema principal a ser eliminada através da transformação integral, na direção "x", com as condições de contorno do problema de autovalor a ser proposto. Deve-se homogeneizar as condições de contorno do problema original. Com este proposito desenvolveu-se o seguinte filtro para o campo de temperatura

Filtro para o campo de temperatura

$$\theta = 1 - x + \theta_H \quad (4.50)$$

O sistema final homogêneo é então escrito da seguinte forma:

Problema homogêneo (filtrado) para a função corrente.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \psi}{\partial y^4} = \frac{(1-\varsigma)}{\text{Pr}} \left[\frac{\partial \psi}{\partial y} \left(\frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial x \partial y^2} \right) - \frac{\partial \psi}{\partial x} \left(\frac{\partial^3 \psi}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} \right) \right] \\ + \frac{1}{\text{Pr}} \frac{d}{dx} (1-\varsigma) \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right) + \frac{\varsigma}{Da} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) \\ + \frac{\varsigma C_F}{\text{Pr} \sqrt{Da}} \left[\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) \sqrt{\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}}{\sqrt{\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2}} \Bigg] \\
& + \left(\frac{d}{dx} \left(\frac{\zeta}{Da} \right) \right) \frac{\partial \psi}{\partial x} + \left(\frac{C_F}{Pr} \frac{d}{dx} \left(\frac{\zeta}{\sqrt{Da}} \right) \right) \sqrt{\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2} \frac{\partial \psi}{\partial x} + Ra_T \frac{\partial \theta_H}{\partial x} - Ra_T
\end{aligned} \tag{4.51}$$

Problema homogêneo (filtrado) para o campo de temperatura.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \theta_H}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \theta_H}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y} = & \left[\zeta (R_k - 1) + 1 \right] \frac{\partial^2 \theta_H}{\partial x^2} + \left[\zeta (R_k - 1) + 1 \right] \frac{\partial^2 \theta_H}{\partial y^2} \\
& + \frac{\partial}{\partial x} \left[\zeta (R_k - 1) + 1 \right] \frac{\partial \theta_H}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left[\zeta (R_k - 1) + 1 \right]
\end{aligned} \tag{4.52}$$

As novas condições de contorno agora homogeneizadas são:

Em $x = 0$

$$\psi = 0 \tag{4.53}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \tag{4.54}$$

$$\theta_H = 0 \tag{4.55}$$

Em $x = 1$

$$\psi = 0 \tag{4.56}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \tag{4.57}$$

$$\theta_H = 0 \tag{4.58}$$

Em $y = 0$

$$\psi = 0 \tag{4.59}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = 0 \tag{4.60}$$

$$\frac{\partial \theta_H}{\partial y} = 0 \tag{4.61}$$

Em $y = 1$

$$\psi = 0 \tag{4.62}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = 0 \tag{4.63}$$

$$\frac{\partial \theta_H}{\partial y} = 0 \quad (4.64)$$

Uma vez escolhida a direção a ser eliminada através da transformação integral, direção "x", a etapa seguinte é a obtenção das autofunções para a expansão das variáveis dependentes $\psi(x,y)$, $\theta_H(x,y)$. Para a função corrente é proposto então um problema de autovalor do tipo biarmônico, já empregado na solução das equações de Navier Stokes por Perez Guerreiro (1991).

$$\frac{d^4 X_i}{dx^4} = t_i^4 X_i; \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (4.65)$$

Condições de contorno

$$X_i(0) = 0 \quad (4.66)$$

$$\frac{dX_i(0)}{dx} = 0 \quad (4.67)$$

$$X_i(1) = 0 \quad (4.68)$$

$$\frac{dX_i(1)}{dx} = 0 \quad (4.69)$$

Onde X_i e t_i são as autofunções e autovalores, respectivamente e satisfazem a seguinte propriedade de ortogonalidade.

$$\int_0^1 X_i(x) X_j(x) dx = \begin{cases} 0, & \text{se } i \neq j \\ M_i, & \text{se } i = j \end{cases} \quad (4.70)$$

e M_i é a norma ou integral de normalização

A solução analítica para o problema de autovalor (eq.4.65) é dado por:

$$X_i = \begin{cases} \frac{\cos\left[t_i\left(x - \frac{1}{2}\right)\right]}{\cos\left(\frac{t_i}{2}\right)} - \frac{\cosh\left[t_i\left(x - \frac{1}{2}\right)\right]}{\cosh\left(\frac{t_i}{2}\right)}, & i = 1, 3, 5, \dots \\ \frac{\sen\left[t_i\left(x - \frac{1}{2}\right)\right]}{\sen\left(\frac{t_i}{2}\right)} - \frac{\sen h\left[t_i\left(x - \frac{1}{2}\right)\right]}{\sen h\left(\frac{t_i}{2}\right)}, & i = 2, 4, 6, \dots \end{cases} \quad (4.71)$$

E os autovalores são encontrados a partir das seguintes equações transcendentais:

$$tgh\left(\frac{t_i}{2}\right) = \begin{cases} -tg\left(\frac{t_i}{2}\right), & i = 1, 3, 5, \dots \\ tg\left(\frac{t_i}{2}\right), & i = 2, 4, 6, \dots \end{cases} \quad (4.72)$$

E a norma é definida como:

$$M_i = \int_0^1 X_i^2(x) dx = 1, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5, 6... \quad (4.73)$$

A autofunção normalizada poder ser escrita da seguinte forma:

$$\tilde{X}_i = \frac{X_i}{\sqrt{M_i}} \quad (4.74)$$

Para o campo de temperatura, o problema auxiliar está associado ao clássico operador difusivo de segunda ordem, que dá origem a um problema tipo Sturm-Liouville como:

$$\frac{d^2 \Gamma_i}{dx^2} + \zeta_i^2 \Gamma_i = 0, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5, ... \quad (4.75)$$

Condições de contorno

$$\Gamma_i(0) = 0 \quad (4.76)$$

$$\Gamma_i(1) = 0 \quad (4.77)$$

Onde Γ_i e ζ_i são, respectivamente, as autofunções e autovalores que satisfazem a seguinte propriedade de ortogonalidade:

$$\int_0^1 \Gamma_i(x) \Gamma_j(x) dx = \begin{cases} 0, & \text{se } i \neq j \\ N_i, & \text{se } i = j \end{cases} \quad (4.78)$$

Onde N_i é a norma ou integral de normalização para o campo de temperatura.

A equação (4.75) pode ser resolvida analiticamente e sua solução é como mostrada em Özisik (1980), desta forma.

$$\Gamma_i(x) = \text{sen}(\zeta_i x), \quad i = 1, 2, 3, 4, 5, ... \quad (4.79)$$

Os autovalores são dados por:

$$\zeta_i = i\pi, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5, ... \quad (4.80)$$

A norma é definida como

$$N_i = \int_0^1 \Gamma_i^2(x) dx = \frac{1}{2} \quad (4.81)$$

A autofunção normalizada poder ser escrito da seguinte forma:

$$\tilde{\Gamma}_i(x) = \frac{\Gamma_i(x)}{\sqrt{N_i}} \quad (4.82)$$

4.3.2 PARES TRANSFORMADA-INVERSA

Para o uso da GITT o potencial pode ser representado como uma expansão do potencial original em autofunções provenientes da solução do problema auxiliar como já mostrado anteriormente. A partir dessa proposição obtém-se o par, transformada-inversa.

Para o campo de função corrente tem-se:

$$\tilde{\psi}_i(y) = \int_0^1 \tilde{X}_i(x) \psi(x, y) dx \quad \text{transformada} \quad (4.83)$$

$$\psi(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{X}_i(x) \tilde{\psi}_i(y) \quad \text{inversa} \quad (4.84)$$

Para o campo de temperatura, sempre considerando o potencial homogeneizado $\theta_H(x, y)$ (filtrado), o par transformada-inversa é representado por:

$$\tilde{\theta}_{Hi}(y) = \int_0^1 \tilde{\Gamma}_i(x) \theta_H(x, y) dx \quad \text{transformada} \quad (4.85)$$

$$\theta_H(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\Gamma}_i(x) \tilde{\theta}_{Hi}(y) \quad \text{inversa} \quad (4.86)$$

4.3.3 TRANSFORMAÇÃO INTEGRAL DA FUNÇÃO CORRENTE

A fim de se obter uma equação diferencial ordinária – EDO para a solução do problema original homogêneo é necessário realizar a transformação integral do problema original multiplicando-se a equação (4.51) (função corrente) por $\int_0^1 \tilde{X}_i(x) dx$ resultando em:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \tilde{X}_i \frac{\partial^4 \psi}{\partial y^4} dx &= - \int_0^1 \tilde{X}_i \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} dx - 2 \int_0^1 \tilde{X}_i \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^2 \partial y^2} dx \\ &+ \frac{1}{Da} \int_0^1 \tilde{X}_i \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) dx + \int_0^1 \tilde{X}_i \frac{d}{dx} \left(\frac{\varsigma}{Da} \right) \frac{\partial \psi}{\partial x} dx \\ &+ \frac{1}{Pr} \int_0^1 \tilde{X}_i \left((1-\varsigma) \left[\frac{\partial \psi}{\partial y} \left(\frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial x \partial y^2} \right) - \frac{\partial \psi}{\partial x} \left(\frac{\partial^3 \psi}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} \right) \right] \right) dx \\ &+ \frac{1}{Pr} \int_0^1 \tilde{X}_i \left(\frac{d}{dx} (1-\varsigma) \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right) \right) dx \end{aligned} \quad (4.87)$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{C_F}{\text{Pr} \sqrt{Da}} \int_s^1 \tilde{X}_i \left[\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) \sqrt{\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2} \right. \\
& + \left. \frac{\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}}{\sqrt{\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2}} \right] dx \\
& + \frac{C_F}{\text{Pr}} \int_0^1 \tilde{X}_i \left[\left(\frac{d}{dx} \left(\frac{\varsigma}{\sqrt{Da}} \right) \sqrt{\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2} \right) \frac{\partial \psi}{\partial x} \right] dx \\
& + Ra_T \int_0^1 \tilde{X}_i \left(\frac{\partial \theta_H}{\partial x} \right) dx - Ra_T \int_0^1 \tilde{X}_i(x) dx
\end{aligned}$$

Os termos não transformáveis desta equação são obtidos pela substituição das fórmulas inversas.

$$\int_0^1 \tilde{X}_i \frac{\partial^4 \psi}{\partial y^4} dx = \frac{d^4 \tilde{\psi}_i}{dy^4} \quad (4.88)$$

$$\int_0^1 \tilde{X}_i \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} dx = \iota_i^4 \tilde{\psi}_i \quad (4.89)$$

$$\int_0^1 \tilde{X}_i \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^2 \partial y^2} dx = \sum_{j=1}^{\infty} A_{ij} \frac{d^2 \tilde{\psi}_j}{dy^2} \quad (4.90)$$

$$\int_s^1 \tilde{X}_i \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} dx = \sum_{j=1}^{\infty} B_{ij}^* \tilde{\psi}_j \quad (4.91)$$

$$\int_s^1 \tilde{X}_i \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} dx = \sum_{j=1}^{\infty} C_{ij}^* \frac{d^2 \tilde{\psi}_j}{dy^2} \quad (4.92)$$

$$\int_0^1 \tilde{X}_i \frac{d}{dx} \left(\frac{\varsigma}{Da} \right) \frac{\partial \psi}{\partial x} dx = \sum_{j=1}^{\infty} B_{ij}^{**} \tilde{\psi}_j \quad (4.93)$$

$$\int_0^s \tilde{X}_i \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} dx = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} D_{ijk}^* \frac{d \tilde{\psi}_j}{dy} \tilde{\psi}_k \quad (4.94)$$

$$\int_0^s \tilde{X}_i \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^3 \psi}{\partial x \partial y^2} dx = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} E_{ijk}^* \frac{d \tilde{\psi}_j}{dy} \frac{d^2 \tilde{\psi}_k}{dy^2} \quad (4.95)$$

$$\int_0^s \tilde{X}_i \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^2 \partial y} dx = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} F_{ijk}^* \tilde{\psi}_j \frac{d \tilde{\psi}_k}{dy} \quad (4.96)$$

$$\int_0^s \tilde{X}_i \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} dx = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} E_{ijk}^* \frac{d^3 \tilde{\psi}_j}{dy^3} \tilde{\psi}_k \quad (4.97)$$

$$\int_0^1 \tilde{X}_i \frac{d}{dx} (1-\varsigma) \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} dx = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} D_{ijk}^{**} \frac{d \tilde{\psi}_j}{dy} \tilde{\psi}_k \quad (4.98)$$

$$\int_0^1 \tilde{X}_i \left(\frac{d}{dx} (1-\varsigma) \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right) dx = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} F_{ijk}^{**} \tilde{\psi}_j \frac{d \tilde{\psi}_k}{dy} \quad (4.99)$$

$$G_i^* = \int_s^1 \tilde{X}_i \left(\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) \sqrt{\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2} + \frac{\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}}{\sqrt{\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2}} \right) dx \quad (4.100)$$

$$G_i^{**} = \int_0^1 \tilde{X}_i \left(\frac{d}{dx} \left(\frac{\varsigma}{\sqrt{Da}} \right) \sqrt{\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2} \right) \frac{\partial \psi}{\partial x} dx \quad (4.101)$$

$$\int_0^1 \tilde{X}_i \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) dx = \sum_{j=1}^{\infty} H_{ij}^* \tilde{\theta}_{Hj} \quad (4.102)$$

$$\int_0^1 \tilde{X}_i(x) dx = I_i^* \quad (4.103)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^4 \tilde{\psi}_i}{dy^4} = & -t_i^4 \tilde{\psi}_i - 2 \sum_{j=1}^{\infty} A_{ij} \frac{d^2 \tilde{\psi}_i}{dy^2} + \frac{1}{Da} \sum_{j=1}^{\infty} \left(B_{ij}^* \tilde{\psi}_j + C_{ij}^* \frac{d^2 \tilde{\psi}_j}{dy^2} \right) + \sum_{j=1}^{\infty} B_{ij}^{**} \tilde{\psi}_j \\ & + \frac{1}{Pr} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left(D_{ijk}^* \frac{d \tilde{\psi}_j}{dy} \tilde{\psi}_k + E_{ijk}^* \frac{d \tilde{\psi}_j}{dy} \frac{d^2 \tilde{\psi}_k}{dy^2} - F_{ijk}^* \tilde{\psi}_j \frac{d \tilde{\psi}_k}{dy} - E_{ijk}^* \frac{d^3 \tilde{\psi}_j}{dy^3} \tilde{\psi}_k \right) \\ & + \frac{1}{Pr} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left(D_{ijk}^{**} \frac{d \tilde{\psi}_j}{dy} \tilde{\psi}_k - F_{ijk}^{**} \tilde{\psi}_j \frac{d \tilde{\psi}_k}{dy} \right) + \frac{C_F}{Pr} \left(\frac{G_i^*}{\sqrt{Da}} + G_i^{**} \right) + Ra_T \sum_{j=1}^{\infty} H_{ij}^* \tilde{\theta}_{Hj} \\ & - Ra_T I_i^* \end{aligned} \quad (4.104)$$

Os coeficientes obtidos a partir da transformação integral da equação original da função corrente são definidos pelas seguintes integrais

$$A_{ij} = \int_0^1 \tilde{X}_i \tilde{X}_j^* dx \quad (4.105)$$

$$B_{ij}^* = \int_s^1 \tilde{X}_i \tilde{X}_j^* dx \quad (4.106)$$

$$C_{ij}^* = \int_S \tilde{X}_i \tilde{X}_j dx \quad (4.107)$$

$$B_{ij}^{**} = \int_0^1 \tilde{X}_i \tilde{X}_j' \frac{d}{dx} \left(\frac{\varsigma}{Da} \right) dx \quad (4.108)$$

$$D_{ijk}^* = \int_0^S \tilde{X}_i \tilde{X}_j \tilde{X}_k^* dx \quad (4.109)$$

$$D_{ijk}^{**} = \int_0^1 \frac{d}{dx} (1 - \varsigma) \tilde{X}_i \tilde{X}_j \tilde{X}_k^* dx \quad (4.110)$$

$$E_{ijk}^* = \int_0^S \tilde{X}_i \tilde{X}_j \tilde{X}_k' dx \quad (4.111)$$

$$F_{ijk}^* = \int_0^S \tilde{X}_i \tilde{X}_j' \tilde{X}_k^* dx \quad (4.112)$$

$$F_{ijk}^{**} = \int_0^1 \frac{d}{dx} (1 - \varsigma) \tilde{X}_i \tilde{X}_j' \tilde{X}_k^* dx \quad (4.113)$$

$$G_i^* = \int_S \tilde{X}_i \left[\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) \sqrt{\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2} + \frac{\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}}{\sqrt{\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2}} \right] dx \quad (4.114)$$

$$G_i^{**} = \int_0^1 \tilde{X}_i \left(\frac{d}{dx} \left(\frac{\varsigma}{\sqrt{Da}} \right) \sqrt{\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2} \right) \frac{\partial \psi}{\partial x} dx \quad (4.115)$$

$$H_{ij}^* = \int_0^1 \tilde{X}_i \tilde{\Gamma}_j' dx \quad (4.116)$$

$$I_i^* = \int_0^1 \tilde{X}_i dx \quad (4.117)$$

Manipulando os coeficientes para obtenção de outros mais simples:

$$B_{ij} = C_{ij}^* = \int_S \tilde{X}_i \tilde{X}_j dx \quad (4.118)$$

Cálculo de C_{ij}

$$B_{ij}^{**} = \int_0^1 \tilde{X}_i \tilde{X}_j' \frac{d}{dx} \left(\frac{\varsigma}{Da} \right) dx$$

Integrando por partes

$$\begin{aligned}
u &= \tilde{X}_i \tilde{X}_j' \therefore du = (\tilde{X}_i' \tilde{X}_j' + \tilde{X}_i \tilde{X}_j'') \\
dv &= \frac{d}{dx} \left(\frac{\varsigma}{Da} \right) dx \therefore v = \frac{\varsigma}{Da} \\
\int_0^1 \tilde{X}_i \tilde{X}_j' \frac{d}{dx} \left(\frac{\varsigma}{Da} \right) dx &= \left[\frac{\varsigma}{Da} \tilde{X}_i \tilde{X}_j' \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{\varsigma}{Da} (\tilde{X}_i' \tilde{X}_j' + \tilde{X}_i \tilde{X}_j'') dx \\
B_{ij}^{**} &= -\frac{1}{Da} \int_S \tilde{X}_i \tilde{X}_j'' dx - \frac{1}{Da} \int_S \tilde{X}_i' \tilde{X}_j' dx
\end{aligned}$$

Lembrando-se que

$$B_{ij}^* = \int_S \tilde{X}_i \tilde{X}_j^* dx$$

Então

$$-\frac{C_{ij}}{Da} = B_{ij}^{**} + \frac{B_{ij}^*}{Da} = -\frac{1}{Da} \int_S \tilde{X}_i' \tilde{X}_j' dx \quad (4.119)$$

Para o cálculo de D_{ij} temos:

$$D_{ijk} = E_{ijk}^* = \int_0^S \tilde{X}_i \tilde{X}_j \tilde{X}_k' dx \quad (4.120)$$

Manipulando D_{ijk}^* e D_{ijk}^{**} e integrando por partes

$$\begin{aligned}
D_{ijk}^{**} &= \int_0^1 \frac{d}{dx} (1-\varsigma) \tilde{X}_i \tilde{X}_j \tilde{X}_k' dx \\
u &= \tilde{X}_i \tilde{X}_j \tilde{X}_k^* \therefore du = (\tilde{X}_i' \tilde{X}_j \tilde{X}_k^* + \tilde{X}_i \tilde{X}_j' \tilde{X}_k^* + \tilde{X}_i \tilde{X}_j \tilde{X}_k'') \\
dv &= \frac{d}{dx} (1-\varsigma) \therefore v = 1-\varsigma \\
D_{ijk}^{**} &= \left[(1-\varsigma) \tilde{X}_i \tilde{X}_j \tilde{X}_k' \right]_0^1 - \int_0^1 (1-\varsigma) (\tilde{X}_i' \tilde{X}_j \tilde{X}_k^* + \tilde{X}_i \tilde{X}_j' \tilde{X}_k^* + \tilde{X}_i \tilde{X}_j \tilde{X}_k'') \\
D_{ijk}^{**} &= -\int_0^S \tilde{X}_i \tilde{X}_j \tilde{X}_k'' dx - \int_0^S \tilde{X}_i \tilde{X}_j \tilde{X}_k'' dx - \int_0^S \tilde{X}_i' \tilde{X}_j \tilde{X}_k'' dx \\
D_{ijk}^* + D_{ijk}^{**} &= \int_0^S \tilde{X}_i \tilde{X}_j \tilde{X}_k'' dx - \int_0^S \tilde{X}_i \tilde{X}_j' \tilde{X}_k'' dx - \int_0^S \tilde{X}_i \tilde{X}_j \tilde{X}_k'' dx - \int_0^S \tilde{X}_i' \tilde{X}_j \tilde{X}_k'' dx \\
D_{ijk}^* + D_{ijk}^{**} &= -\int_0^S \tilde{X}_i \tilde{X}_j \tilde{X}_k'' dx - \int_0^S \tilde{X}_i' \tilde{X}_j \tilde{X}_k'' dx = -F_{ijk}^* - F_{jik}^*
\end{aligned}$$

Da mesma forma manipulando os coeficientes F_{ijk}^* e F_{ijk}^{**}

Integrando por partes

$$\begin{aligned}
F_{ijk}^{**} &= \int_0^1 \frac{d}{dx} (1-\varsigma) \tilde{X}_i \tilde{X}_j \tilde{X}_k' dx \\
u &= \tilde{X}_i \tilde{X}_j \tilde{X}_k^* \therefore du = \tilde{X}_i \tilde{X}_j \tilde{X}_k' + \tilde{X}_i \tilde{X}_j' \tilde{X}_k^* + \tilde{X}_i \tilde{X}_j \tilde{X}_k'' \\
dv &= \frac{d}{dx} (1-\varsigma) \therefore v = (1-\varsigma)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{ijk}^{**} &= \left[(1-\varsigma) \tilde{X}_i \tilde{X}_j' \tilde{X}_k' \right]_0^1 - \int_0^1 (1-\varsigma) \left(\tilde{X}_i' \tilde{X}_j' \tilde{X}_k' + \tilde{X}_i \tilde{X}_j'' \tilde{X}_k' + \tilde{X}_i \tilde{X}_j' \tilde{X}_k'' \right) dx \\
F_{ijk}^{**} &= - \int_0^S \tilde{X}_i' \tilde{X}_j' \tilde{X}_k' dx - \int_0^S \tilde{X}_i \tilde{X}_j'' \tilde{X}_k' dx - \int_0^S \tilde{X}_i \tilde{X}_j' \tilde{X}_k'' dx \\
F_{ijk}^* + F_{ijk}^{**} &= \int_0^S \tilde{X}_i \tilde{X}_j' \tilde{X}_k'' dx - \int_0^S \tilde{X}_i' \tilde{X}_j' \tilde{X}_k' dx - \int_0^S \tilde{X}_i \tilde{X}_j'' \tilde{X}_k' dx - \int_0^S \tilde{X}_i \tilde{X}_j' \tilde{X}_k'' dx \\
F_{ijk}^* + F_{ijk}^{**} &= - \int_0^S \tilde{X}_i' \tilde{X}_j' \tilde{X}_k' dx - \int_0^S \tilde{X}_i \tilde{X}_j'' \tilde{X}_k' dx = -F_{ijk}^{***} - F_{ikj}^*
\end{aligned}$$

Para os coeficientes G_{ijk}^* e G_{ijk}^{**}

$$G_i^{**} = \int_0^1 \frac{d}{dx} \left(\frac{\varsigma}{\sqrt{Da}} \tilde{X}_i \right) \sqrt{\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2} \frac{\partial \psi}{\partial x} dx$$

A partir da derivação da seguinte equação

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\varsigma}{\sqrt{Da}} \tilde{X}_i \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{\varsigma}{\sqrt{Da}} \right) \tilde{X}_i + \frac{\varsigma}{\sqrt{Da}} \tilde{X}_i'$$

Obtêm-se

$$\begin{aligned}
G_i^{**} &= \int_0^1 \frac{d}{dx} \left(\frac{\varsigma}{\sqrt{Da}} \tilde{X}_i \right) \sqrt{\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2} \frac{\partial \psi}{\partial x} dx \\
&- \int_0^1 \frac{\varsigma}{\sqrt{Da}} \tilde{X}_i' \sqrt{\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2} \frac{\partial \psi}{\partial x} dx
\end{aligned}$$

Integrando por partes

$$\begin{aligned}
u &= \sqrt{\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2} \frac{\partial \psi}{\partial x} \\
du &= \left(\frac{\frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}}{\sqrt{\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2}} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \sqrt{\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right) \\
dv &= \frac{d}{dx} \left(\frac{\varsigma}{\sqrt{Da}} \tilde{X}_i \right) \therefore v = \frac{\varsigma}{\sqrt{Da}} \tilde{X}_i
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_i^{**} &= \left[\frac{\varsigma}{\sqrt{Da}} \tilde{X}_i \sqrt{\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right]_0^1 \\
&- \int_0^1 \frac{\varsigma}{\sqrt{Da}} \tilde{X}_i \frac{\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}}{\sqrt{\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2}} dx \\
&- \int_0^1 \frac{\varsigma}{\sqrt{Da}} \tilde{X}_i \sqrt{\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} dx \\
&- \int_0^1 \frac{\varsigma}{\sqrt{Da}} \tilde{X}_i \sqrt{\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2} \frac{\partial \psi}{\partial x} dx \\
&\tilde{X}_i \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\tilde{X}_i \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) - \tilde{X}_i \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \\
G_i^{**} &= - \int_0^1 \frac{\varsigma}{\sqrt{Da}} \tilde{X}_i \frac{\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}}{\sqrt{\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2}} dx \\
&- \int_0^1 \frac{\varsigma}{\sqrt{Da}} \tilde{X}_i \sqrt{\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} dx \\
&- \int_0^1 \frac{\varsigma}{\sqrt{Da}} \frac{\partial}{\partial x} \left(\tilde{X}_i \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \sqrt{\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2} dx \\
&+ \int_0^1 \frac{\varsigma}{\sqrt{Da}} \tilde{X}_i \sqrt{\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} dx \\
G_i^{**} &= - \int_0^1 \frac{\varsigma}{\sqrt{Da}} \tilde{X}_i \frac{\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}}{\sqrt{\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2}} dx \\
&- \int_0^1 \frac{\varsigma}{\sqrt{Da}} \frac{\partial}{\partial x} \left(\tilde{X}_i \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \sqrt{\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2} dx
\end{aligned}$$

$$G_i^{**} = -\frac{1}{\sqrt{Da}} \int_s^1 \tilde{X}_i \frac{\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}}{\sqrt{\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2}} dx$$

$$- \frac{1}{\sqrt{Da}} \int_s^1 \frac{\partial}{\partial x} \left(\tilde{X}_i \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \sqrt{\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2} dx$$

Integrando este último termo por partes novamente

$$\int_s^1 \frac{\partial}{\partial x} \left(\tilde{X}_i \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \sqrt{\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2} dx$$

$$u = \sqrt{\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2} \therefore du = \frac{\frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}}{\sqrt{\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2}}$$

$$dv = \frac{\partial}{\partial x} \left(\tilde{X}_i \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \therefore v = \tilde{X}_i \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

$$G_i^{**} = -\frac{1}{\sqrt{Da}} \int_s^1 \tilde{X}_i \frac{\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}}{\sqrt{\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2}} dx$$

$$- \frac{1}{\sqrt{Da}} \left[\tilde{X}_i \frac{\partial \psi}{\partial x} \sqrt{\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2} \right]_s^1$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{Da}} \int_s^1 \tilde{X}_i \frac{\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}}{\sqrt{\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2}} dx$$

$$G_i^{**} = \frac{1}{\sqrt{Da}} \left[\tilde{X}_i \frac{\partial \psi}{\partial x} \sqrt{\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2} \right]_s$$

$$F_i = \frac{G_i^*}{\sqrt{Da}} + G_i^{**} = \frac{1}{\sqrt{Da}} \left\{ \left[\tilde{X}_i \frac{\partial \psi}{\partial x} \sqrt{\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2} \right]_s \right.$$

$$+ \int_s^1 \tilde{X}_i \left[\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) \cdot \sqrt{\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2} \right. \\ \left. + \frac{\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}}{\sqrt{\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2}} dx \right]$$

Logo a equação (4.104) torna-se a EDO:

$$\begin{aligned} \frac{d^4 \tilde{\psi}_i}{dy^4} = & -t_i^4 \tilde{\psi}_i - 2 \sum_{j=1}^{\infty} A_{ij} \frac{d^2 \tilde{\psi}_i}{dy^2} + \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{Da} C_{ij}^* \frac{d^2 \tilde{\psi}_j}{dy^2} + \frac{1}{Da} B_{ij}^* \tilde{\psi}_j + B_{ij}^{**} \tilde{\psi}_j \right) \\ & + \frac{1}{Pr} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left(- (F_{ijk}^* + F_{jik}^*) \frac{d \tilde{\psi}_j}{dy} \tilde{\psi}_k + E_{ijk}^* \frac{d \tilde{\psi}_j}{dy} \frac{d^2 \tilde{\psi}_k}{dy^2} + (F_{ijk}^{***} + F_{ikj}^*) \tilde{\psi}_j \frac{d \tilde{\psi}_k}{dy} \right. \\ & \left. - E_{ijk}^* \frac{d^3 \tilde{\psi}_j}{dy^3} \tilde{\psi}_k \right) + \frac{C_F}{Pr} \left(\frac{G_i^*}{\sqrt{Da}} + G_i^{**} \right) + Ra_T \sum_{j=1}^{\infty} H_{ij}^* \tilde{\theta}_{Hj} - Ra_T I_i^* \end{aligned} \quad (4.121)$$

Dessa forma temos os seguintes novos coeficientes para a equação diferencial ordinária:

$$A_{ij} = \int_0^1 \tilde{X}_i \tilde{X}_j^* dx \quad (4.122)$$

$$B_{ij} = \int_S^1 \tilde{X}_i \tilde{X}_j dx \quad (4.123)$$

$$C_{ij} = \int_S^1 \tilde{X}_i^1 \tilde{X}_j^1 dx \quad (4.124)$$

$$D_{ijk} = \int_0^S \tilde{X}_i \tilde{X}_j \tilde{X}_k' dx \quad (4.125)$$

$$E_{ijk} = \int_0^S \tilde{X}_i' (\tilde{X}_j \tilde{X}_k^* - \tilde{X}_j' \tilde{X}_k') dx \quad (4.126)$$

$$\begin{aligned}
F_i = \frac{1}{\sqrt{Da}} & \left\{ \left[\tilde{X}_i \frac{\partial \psi}{\partial x} \sqrt{\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2} \right]_s \right. \\
& + \int_s^1 \tilde{X}_i \left[\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) \sqrt{\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2} \right. \\
& \left. \left. + \frac{\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}}{\sqrt{\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2}} dx \right] \right\}
\end{aligned} \tag{4.127}$$

$$G_{ij} = \int_0^1 \tilde{X}_i \tilde{\Gamma}'_j dx \tag{4.128}$$

$$H_i = \int_0^1 \tilde{X}_i dx \tag{4.129}$$

Os coeficientes A_{ij} , B_{ij} , C_{ij} , D_{ijk} , E_{ijk} , G_{ij} e H_i , são encontrados a partir da subrotina QDAG do pacote computacional IMSL (2010) o coeficiente F_i é calculado a partir de integração semianalítica, da mesma forma como já demonstrado anteriormente.

4.3.4 TRANSFORMAÇÃO INTEGRAL DO CAMPO DE TEMPERATURA

Da mesma forma a fim de se obter uma EDO do problema original homogêneo de temperatura multiplica-se a equação (4.52) por $\int_0^1 \tilde{\Gamma}_i dx$.

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \tilde{\Gamma}_i \left(\frac{\partial^2 \theta_H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta_H}{\partial y^2} \right) dx &= \int_0^1 \frac{\tilde{\Gamma}_i}{[\zeta(R_k - 1) + 1]} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \theta_H}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \theta_H}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) dx \\
&\quad - \int_0^1 \frac{\tilde{\Gamma}_i}{[\zeta(R_k - 1) + 1]} \frac{\partial}{\partial x} [\zeta(R_k - 1) + 1] \frac{\partial \theta_H}{\partial x} dx \\
&\quad + \int_0^1 \frac{\tilde{\Gamma}_i}{[\zeta(R_k - 1) + 1]} \frac{\partial}{\partial x} [\zeta(R_k - 1) + 1] dx
\end{aligned} \tag{4.130}$$

Utilizando as fórmulas inversas nos termos não transformáveis, obtêm-se:

$$\int_0^1 \frac{\tilde{\Gamma}_i}{[\zeta(R_k-1)+1]} \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \theta_H}{\partial x} dx = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} I_{ijk} \tilde{\theta}_{Hj} \frac{d\tilde{\psi}_k}{dy} \quad (4.131)$$

$$\int_0^1 \frac{\tilde{\Gamma}_i}{[\zeta(R_k-1)+1]} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \theta_H}{\partial y} dx = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} J_{ijk} \frac{d\tilde{\theta}_{Hj}}{dy} \tilde{\psi}_k \quad (4.132)$$

$$\int_0^1 \frac{\tilde{\Gamma}_i}{[\zeta(R_k-1)+1]} \frac{\partial \psi}{\partial y} dx = \sum_{j=1}^{\infty} K_{ij} \frac{d\tilde{\psi}_j}{dy} \quad (4.133)$$

$$\int_0^1 \frac{\tilde{\Gamma}_i}{[\zeta(R_k-1)+1]} \frac{\partial}{\partial x} [\zeta(R_k-1)+1] \frac{\partial \theta_H}{\partial x} dx = \sum_{j=1}^{\infty} L_{ij} \tilde{\theta}_{Hj} \quad (4.134)$$

Os coeficientes obtidos analiticamente são definidos pelas integrais:

$$I_{ijk} = \int_0^1 \frac{\tilde{\Gamma}_i \tilde{\Gamma}_j' \tilde{X}_k}{[\zeta(R_k-1)+1]} dx \quad (4.135)$$

$$J_{ijk} = \int_0^1 \frac{\tilde{\Gamma}_i \tilde{\Gamma}_j \tilde{X}_k'}{[\zeta(R_k-1)+1]} dx \quad (4.136)$$

$$K_{ij} = \int_0^1 \frac{\tilde{\Gamma}_i \tilde{X}_j}{[\zeta(R_k-1)+1]} dx \quad (4.137)$$

$$L_{ij} = \int_0^1 \frac{\tilde{\Gamma}_i}{[\zeta(R_k-1)+1]} \frac{\partial}{\partial x} [\zeta(R_k-1)+1] \tilde{\Gamma}_j' dx \quad (4.138)$$

$$O_i = \int_0^1 \frac{\tilde{\Gamma}_i}{[\zeta(R_k-1)+1]} \frac{\partial}{\partial x} [\zeta(R_k-1)+1] dx \quad (4.139)$$

Manipulando o coeficiente L_{ij}

$$L_{ij} = \int_0^1 \tilde{\Gamma}_i \tilde{\Gamma}_j' \frac{\frac{\partial}{\partial x} [\zeta(R_k-1)+1]}{[\zeta(R_k-1)+1]} dx$$

Integrando-se por partes

$$u = \tilde{\Gamma}_i \tilde{\Gamma}_j' \therefore du = (\tilde{\Gamma}_i' \tilde{\Gamma}_j' + \tilde{\Gamma}_i \tilde{\Gamma}_j'')$$

$$dv = \frac{\frac{\partial}{\partial x} [\zeta(R_k-1)+1]}{[\zeta(R_k-1)+1]} dx \therefore v = \ln [\zeta(R_k-1)+1]$$

$$L_{ij} = [\tilde{\Gamma}_i \tilde{\Gamma}_j' \ln [\zeta(R_k-1)+1]]_0^1 - \int_0^1 \ln [\zeta(R_k-1)+1] (\tilde{\Gamma}_i' \tilde{\Gamma}_j' + \tilde{\Gamma}_i \tilde{\Gamma}_j'') dx$$

$$L_{ij} = -\ln(R_k) \int_S^1 (\tilde{\Gamma}_i \tilde{\Gamma}_j') dx = -\ln(R_k) [\tilde{\Gamma}_i \tilde{\Gamma}_j']_S^1$$

$$L_{ij} = \ln(R_k) \tilde{\Gamma}_i(S) \tilde{\Gamma}_j'(S) \quad (4.140)$$

O mesmo para O_i

$$O_i = \int_0^1 \frac{\tilde{\Gamma}_i}{[\varphi(R_k - 1) + 1]} \frac{\partial}{\partial x} [\varphi(R_k - 1) + 1] dx$$

Integrando-se por partes

$$\begin{aligned} u &= \frac{\tilde{\Gamma}_i}{[\varphi(R_k - 1) + 1]} \therefore \\ du &= \left(\frac{\tilde{\Gamma}_i'}{[\varphi(R_k - 1) + 1]} - \frac{\tilde{\Gamma}_i}{[\varphi(R_k - 1) + 1]^2} \frac{\partial}{\partial x} [\varphi(R_k - 1) + 1] \right) dx \\ dv &= \frac{\partial}{\partial x} [\varphi(R_k - 1) + 1] dx \therefore v = [\varphi(R_k - 1) + 1] \\ O_i &= [\tilde{\Gamma}_i]_0^1 - \int_0^1 \tilde{\Gamma}_i' dx - \int_0^1 \frac{\tilde{\Gamma}_i}{[\varphi(R_k - 1) + 1]} \frac{\partial}{\partial x} [\varphi(R_k - 1) + 1] dx \\ O_i &= - \int_0^1 \frac{\tilde{\Gamma}_i}{[\varphi(R_k - 1) + 1]} \frac{\partial}{\partial x} [\varphi(R_k - 1) + 1] \end{aligned}$$

Realizando nova integração por partes

$$\begin{aligned} u &= \tilde{\Gamma}_i \therefore du = \tilde{\Gamma}_i' dx \\ dv &= \frac{\partial}{\partial x} [\varphi(R_k - 1) + 1] dx \\ v &= \ln[\varphi(R_k - 1) + 1] \\ O_i &= [\tilde{\Gamma}_i \ln[\varphi(R_k - 1) + 1]]_0^1 - \int_0^1 \ln[\varphi(R_k - 1) + 1] \tilde{\Gamma}_i' dx \\ O_i &= - \int_0^S \ln[1] \tilde{\Gamma}_i' dx - \int_S^1 \ln R_k \tilde{\Gamma}_i' dx \\ O_i &= \ln R_k [\tilde{\Gamma}_i]_S^1 = \tilde{\Gamma}_i(S) \end{aligned} \quad (4.141)$$

Substituindo os coeficientes (4.122-4.129) na equação (4.121) e (4.135-4.141) na equação (4.130) obtêm-se as EDOs para a função corrente e para o campo de temperatura respectivamente. Reescrevendo-as define-se o seguinte sistema acoplado:

$$\begin{aligned} \frac{d^4 \tilde{\psi}_i}{dy^4} = & -t_i^4 \tilde{\psi}_i + \sum_{j=1}^{\infty} \left[-2A_{ij} \frac{d^2 \tilde{\psi}_i}{dy^2} + \frac{1}{Da} \left(B_{ij} \frac{d^2 \tilde{\psi}_j}{dy^2} - C_{ij} \tilde{\psi}_j \right) \right] \\ & + \frac{1}{Pr} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left(D_{ijk} \frac{d\tilde{\psi}_j}{dy} \frac{d^2 \tilde{\psi}_k}{dy^2} - E_{ijk} \frac{d\tilde{\psi}_j}{dy} \tilde{\psi}_k - D_{ijk} \frac{d^3 \tilde{\psi}_j}{dy^3} \tilde{\psi}_k \right) \end{aligned} \quad (4.142)$$

$$\begin{aligned} & + \frac{C_F}{Pr \sqrt{Da}} F_i + Ra_T \sum_{j=1}^{\infty} G_{ij} \tilde{\theta}_{Hj} - Ra_T H_i \\ \frac{d^2 \tilde{\theta}_{Hi}}{dy^2} = & \zeta_i \tilde{\theta}_{Hi} + \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left(I_{ijk} \tilde{\theta}_{Hj} \frac{d\psi_k}{dy} - J_{ijk} \frac{d\tilde{\theta}_{Hj}}{dy} \psi_k \right) \\ & - \sum_{j=1}^{\infty} K_{ij} \frac{d\psi_j}{dy} - \sum_{j=1}^{\infty} L_{ij} \tilde{\theta}_{Hj} + O_i \end{aligned} \quad (4.143)$$

Condições de Contorno

Em $y = 0$

$$\tilde{\psi}_i(0) = 0 \quad (4.144)$$

$$\frac{d\tilde{\psi}_i(0)}{dy} = 0 \quad (4.145)$$

$$\frac{d\tilde{\theta}_{Hi}(0)}{dy} = 0 \quad (4.146)$$

Em $y = 1$

$$\tilde{\psi}_i(1) = 0 \quad (4.147)$$

$$\frac{d\psi_i(1)}{dy} = 0 \quad (4.148)$$

$$\frac{d\tilde{\theta}_{Hi}(1)}{dy} = 0 \quad (4.149)$$

4.3.5 NÚMERO DE NUSSELT MÉDIO

O número de Nusselt médio global pode ser calculado integrando-se em todo o domínio a derivada da temperatura avaliada em umas das paredes.

Para Nusselt avaliado na parede esquerda tem-se:

$$\begin{aligned}
 \bar{Nu}_l &= \frac{hL}{k} = -\frac{1}{A} \int_0^A [\zeta(R_k - 1) + 1] \left. \frac{\partial \theta}{\partial x} \right|_{x=0} dy \\
 \bar{Nu}_l &= -\int_0^1 \left. \frac{\partial \theta}{\partial x} \right|_{x=0} dy \\
 \left. \frac{\partial \theta}{\partial x} \right|_{x=0} &= -1 + \sum_{i=1}^{\infty} \left. \frac{d\tilde{\Gamma}_i}{dx} \right|_{x=0} \tilde{\theta}_{Hi}(y) \\
 \left. \frac{d\tilde{\Gamma}_i}{dx} \right|_{x=0} &= \sqrt{2}\zeta_i \\
 \bar{Nu}_l &= 1 - \sqrt{2} \sum_{i=1}^{\infty} \zeta_i g_i^*
 \end{aligned} \tag{4.150}$$

Para Nusselt avaliado na parede direita temos:

$$\begin{aligned}
 \bar{Nu}_r &= \frac{hL}{k} = -\frac{1}{A} \int_0^A [\zeta(R_k - 1) + 1] \left. \frac{\partial \theta}{\partial x} \right|_{x=1} dy \\
 \bar{Nu}_r &= -\int_0^1 \left. \frac{\partial \theta}{\partial x} \right|_{x=1} dy \\
 \left. \frac{\partial \theta}{\partial x} \right|_{x=1} &= -1 + \sum_{i=1}^{\infty} \left. \frac{d\tilde{\Gamma}_i}{dx} \right|_{x=1} \tilde{\theta}_{Hi}(y) \\
 \left. \frac{d\tilde{\Gamma}_i}{dx} \right|_{x=1} &= \sqrt{2}\zeta_i (-1)^i \\
 \bar{Nu}_r &= 1 - \sqrt{2} \sum_{i=1}^{\infty} \zeta_i (-1)^i g_i^*
 \end{aligned} \tag{4.151}$$

$$g_i^* = \int_0^1 \tilde{\theta}_{Hi}(y) dy \tag{4.152}$$

4.4 – RESULTADOS

Para a solução do sistema diferencial ordinário de quarta ordem foi utilizada a subrotina BVPFD da biblioteca IMSL (2010), onde um erro relativo de 10^{-4} foi prescrito.

Um código em Fortran 2003 foi desenvolvido e implementado em um computador, com processador Intel Core i7. Foram estudados neste trabalho a influência do número de Darcy, a influência da espessura da camada fluida S , a influência do número de Rayleigh e a influência do coeficiente de inercia C_F .

4.4.1 VERIFICAÇÃO NUMÉRICA

A verificação numérica foi realizada sobre uma variedade de parâmetros para a convecção natural puramente térmica em meio fluido, baseados nos resultados de Leal (1996) e apresentados nas figuras 4.2 a 4.9 à esquerda os resultados de Leal (1996) para as isolinhas de função corrente e temperatura e a direita os obtidos neste trabalho. Para o trabalho atual é um caso extremo onde os parâmetros são $C_F = 0$, $S = 1$, $Pr = 0,71$ e $A = 1$. A tabela 4.1 mostra os resultados de número de Nusselt médio global para diversos números de Rayleigh, mostrando excelente concordância entre os resultados encontrados neste trabalho e os de Leal (1996). Também são apresentados os resultados para função corrente com resultados experimental e numérico e para o perfil de temperatura com resultados numéricos para a formulação de Darcy – Brinkman – Forchameir, avaliados perante os resultados de Beckermann *et al.* (1987) e mostrados nas figura 4.10 e 4.11 respectivamente. A figura 4.12 mostra o perfil de temperatura localmente em y a partir de resultados experimentais e numéricos obtidos por Beckermann *et al.* (1987) em uma cavidade retangular parcialmente preenchida com meio poroso, para uma espessura da camada fluida S igual a 0,5. Comparados aos resultados encontrados neste trabalho a partir da solução via GITT, pode-se notar boa concordância para coordenadas de y acima de 0,5.

4.4.1.1 VERIFICAÇÃO FUNÇÃO CORRENTE – LEAL (1996)

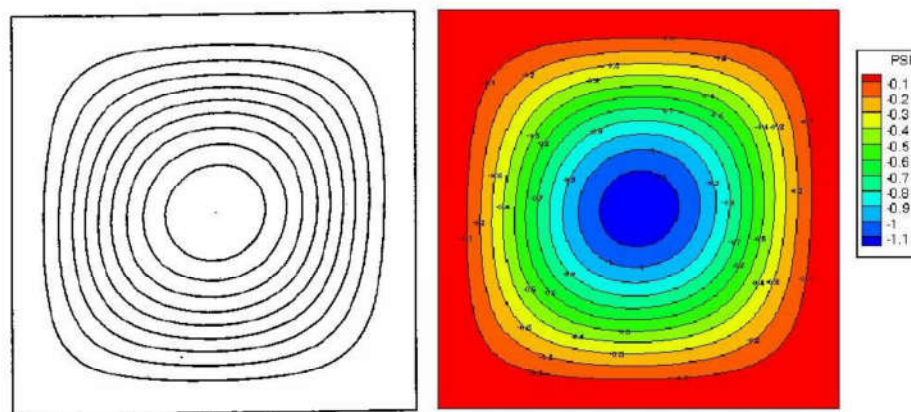


Figura 4. 2 - Função Corrente $Ra_T = 10^3$ $Pr = 0,71$ – Leal (1996)

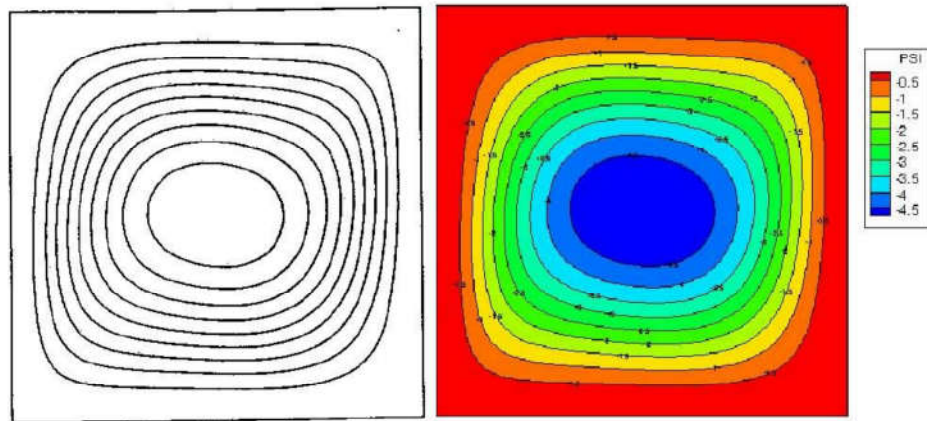


Figura 4. 3 - Função Corrente $Ra_T = 10^4$ $Pr = 0,71$ – Leal (1996)

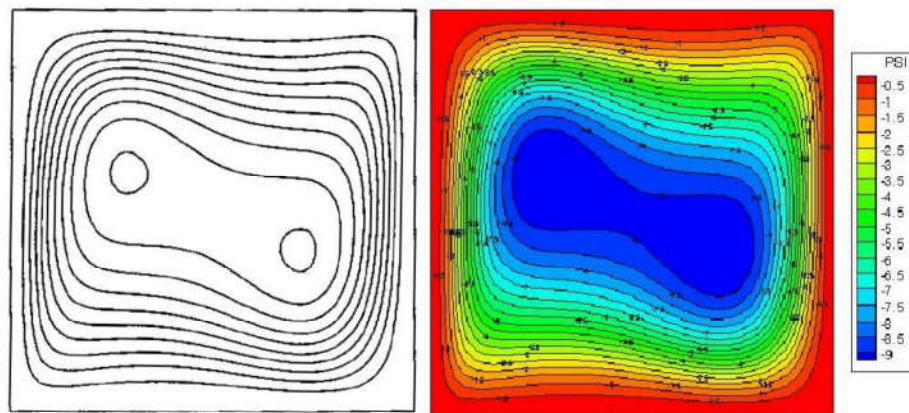


Figura 4. 4 - Função Corrente $Ra_T = 10^5$ $Pr = 0,71$ – Leal (1996)

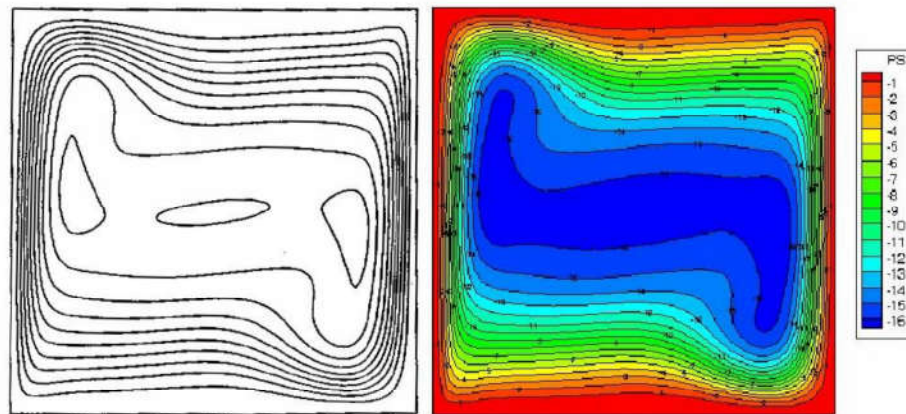


Figura 4. 5 - Função Corrente $Ra_T = 10^5$ $Pr = 0,71$ – Leal (1996)

4.4.1.2 VERIFICAÇÃO PERFIL DE TEMPERATURA - LEAL (1996)

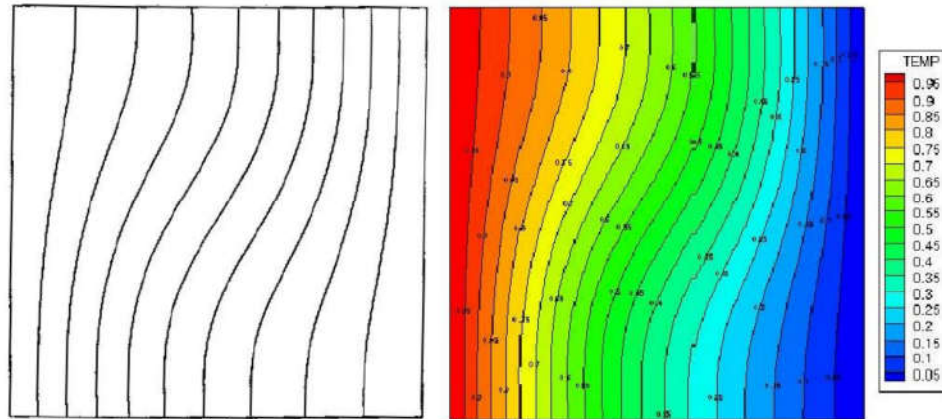


Figura 4. 6 – Perfil de temperatura $Ra_T = 10^3$ $Pr = 0,71$ – Leal (1996)

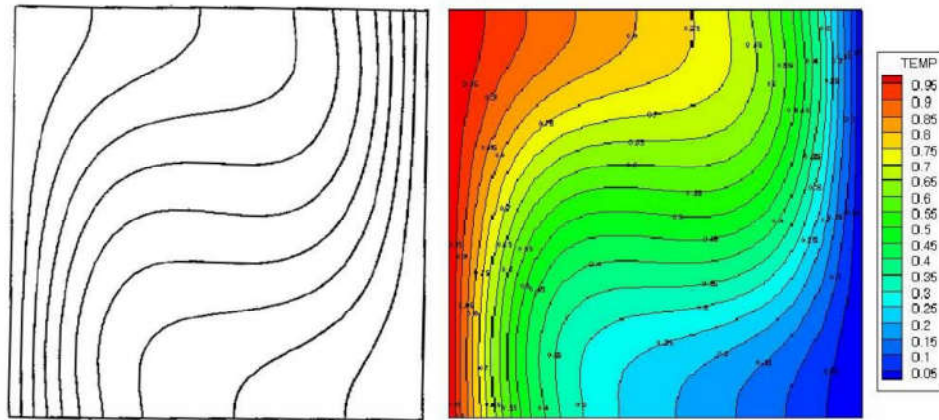


Figura 4. 7 - Perfil de temperatura $Ra_T = 10^4$ $Pr = 0,71$ – Leal (1996)

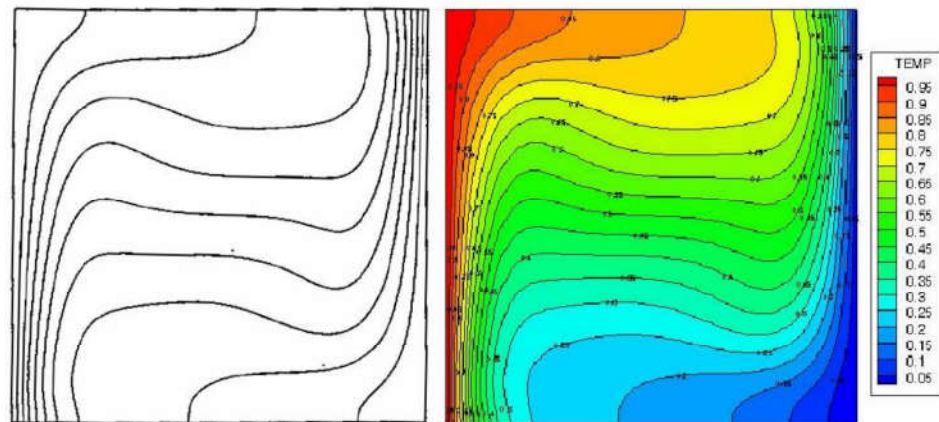


Figura 4. 8 - Perfil de temperatura $Ra_T = 10^5$ $Pr = 0,71$ – Leal (1996)

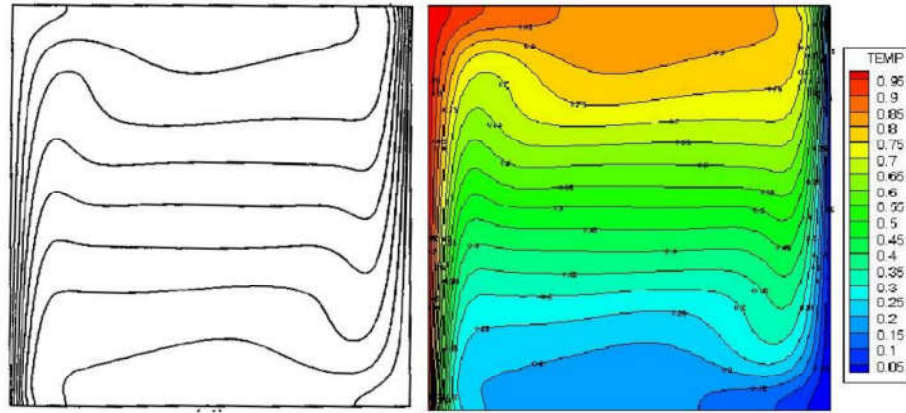


Figura 4. 9 - Perfil de temperatura $Ra_T = 10^5$ $Pr = 0,71$ – Leal (1996)

A tabela 4.1 mostra a concordância entre os números de Nusselt encontrados por Leal (1987) para diversos Rayleigh e os encontrados neste trabalho usando a formulação Darcy-Brinkman-Forchheimer, para uma cavidade retangular fechada parcialmente preenchida por meio poroso. Neste caso extremo foram usados como parâmetros $C_F = 0$, $S = 1$, $Pr = 0,71$ e $A = 1$, os resultados como podem ser vistos são comparados com o caso de convecção natural térmica em uma cavidade totalmente preenchida por fluido. Os resultados apresentam excelentes concordâncias com a referência bibliográfica adotada de Leal (1996).

Tabela 4. 1 - Nusselt Médio Global – Leal (1996)

Ra_T	$\bar{Nu}$ – Leal (1996)	$\bar{Nu}$ – Presente Trabalho
$Ra_T = 10^3$	1,118	1,118
$Ra_T = 10^4$	2,245	2,245
$Ra_T = 10^5$	4,522	4,522
$Ra_T = 10^6$	8,825	8,820

As tabelas (4.2 – 4.5) mostram uma comparação entre os resultados obtidos por Leal (1996) e o atual trabalho para os módulos de função corrente para os números de Rayleigh 10^3 , 10^4 , 10^5 , 10^6 em várias posições na cavidade, como pode ser visto uma boa concordância pode ser alcançada para um número de 30 termos na série de expansão.

Tabela 4. 2 - Módulo de função corrente –Leal (1996), $Ra = 10^3$

$Ra_T - 10^3$	$ \psi $ – Leal (1996)	$ \psi $ – Presente Trabalho
$x = 0,1$ $y = 0,1$	$3,598.10^{-2}$	$3,59810^{-2}$
$x = 0,1$ $y = 0,5$	0,1856	0.1856
$x = 0,1$ $y = 0,9$	$2,516.10^{-2}$	$2,516.10^{-02}$

Tabela 4. 3 - Módulo de função corrente –Leal (1996), $Ra = 10^4$

$Ra_T - 10^4$	$ \psi $ – Leal (1996)	$ \psi $ – Presente Trabalho
$x = 0,1$ $y = 0,1$	0,3323	0,3324
$x = 0,1$ $y = 0,5$	1,260	1,260
$x = 0,1$ $y = 0,9$	0,1718	0,1718

Tabela 4. 4 - Módulo de função corrente –Leal (1996), $Ra = 10^5$

$Ra_T - 10^5$	$ \psi $ – Leal (1996)	$ \psi $ – Presente Trabalho
$x = 0,1$ $y = 0,1$	1,699	1,699
$x = 0,1$ $y = 0,5$	5,365	5,365
$x = 0,1$ $y = 0,9$	1,215	1,215

Tabela 4. 5 - Módulo de função corrente –Leal (1996), $Ra = 10^6$

$Ra_T - 10^6$	$ \psi $ – Leal (1996)	$ \psi $ – Presente Trabalho
$x = 0,1$ $y = 0,1$	4,606	4,6212
$x = 0,1$ $y = 0,5$	15,32	15,31
$x = 0,1$ $y = 0,9$	7,280	7,270

As tabelas (4.6 – 4.7) mostram o comportamento da convergência para a função corrente para os números de Rayleigh 10^3 e 10^6 respectivamente em uma cavidade retangular totalmente fluida, pode-se notar que a convergência não é uniforme em toda a cavidade, apresentando uma convergência mais rápida para o plano horizontal médio da cavidade ($y = 1/2$). A convergência também é maior para números de Rayleigh mais baixos garantindo uma convergência no quarto dígito significativo. Para altos valores de Rayleigh, os termos convectivos e de inércia, atuam como termos fonte para bases difusivas propostas para as expansões, o que acaba por retardar o processo de convergência como um todo, foi garantida uma convergência neste caso para o segundo dígito significativo.

Tabela 4. 6 - Convergência do módulo da função corrente para $Ra = 10^3$ - Leal (1996)

$Ra = 10^3; Pr = 0,71$			
$NV = NT$	$x = 0,1$ $y = 0,125$	$x = 0,1$ $y = 0,5$	$x = 0,1$ $y = 0,945$
5	0,37332E-01	0,18353E+00	0,12387E-01
10	0,36771E-01	0,18564E+00	0,12781E-01
15	0,36772E-01	0,18564E+00	0,12781E-01
20	0,36778E-01	0,18561E+00	0,12791E-01
25	0,36778E-01	0,18561E+00	0,12790E-01
30	0,36777E-01	0,18562E+00	0,12787E-01
$NV = NT$	$x = 0,5$ $y = 0,125$	$x = 0,5$ $y = 0,5$	$x = 0,5$ $y = 0,945$
5	0,25735E+00	0,11756E+01	0,61148E-01
10	0,25696E+00	0,11747E+01	0,61054E-01

15	0,25693E+00	0,11746E+01	0,61074E-01
20	0,25693E+00	0,11746E+01	0,61071E-01
25	0,25693E+00	0,11746E+01	0,61068E-01
30	0,25693E+00	0,11746E+01	0,61068E-01
<i>NV = NT</i>	<i>x = 0,9</i> <i>y = 0,125</i>	<i>x = 0,9</i> <i>y = 0,5</i>	<i>x = 0,9</i> <i>y = 0,945</i>
5	0,49650E-01	0,18353E+00	0,88203E-02
10	0,51336E-01	0,18564E+00	0,84489E-02
15	0,51341E-01	0,18564E+00	0,84483E-02
20	0,51323E-01	0,18561E+00	0,84648E-02
25	0,51325E-01	0,18561E+00	0,84628E-02
30	0,51327E-01	0,18562E+00	0,8460E-02

Tabela 4. 7 - Convergência do módulo da função corrente para $Ra = 10^6$ - Leal (1996)

<i>Ra = 10⁶; Pr = 0,71</i>			
<i>NV = NT</i>	<i>x = 0,1</i> <i>y = 0,125</i>	<i>x = 0,1</i> <i>y = 0,5</i>	<i>x = 0,1</i> <i>y = 0,945</i>
5	0,19994E+02	0,18043E+02	0,32877E+01
10	0,57485E+01	0,15760E+02	0,25184E+01
15	0,92605E+01	0,15282E+02	0,21273E+01
20	0,92773E+01	0,15237E+02	0,19056E+01
25	0,919E+01	0,1530E+02	0,20211E+01
30	0,918E+01	0,153E+02	0,20826E+01
<i>NV = NT</i>	<i>x = 0,5</i> <i>y = 0,125</i>	<i>x = 0,5</i> <i>y = 0,5</i>	<i>x = 0,5</i> <i>y = 0,945</i>
5	0,35850E+01	0,32446E+02	0,23639E+01
10	0,53577E+01	0,16899E+02	0,11280E+01
15	0,44557E+01	0,16177E+02	0,96544E+00
20	0,47E+01	0,163E+02	0,10151E+01
25	0,47E+01	0,164E+02	0,10740E+01
30	0,47E+01	0,164E+02	0,10604E+01
<i>NV = NT</i>	<i>x = 0,9</i> <i>y = 0,125</i>	<i>x = 0,9</i> <i>y = 0,5</i>	<i>x = 0,9</i> <i>y = 0,945</i>
5	0,66063E+01	0,18043E+02	0,83947E+01
10	0,63439E+01	0,15760E+02	0,97072E+00
15	0,60741E+01	0,15282E+02	0,38114E+01
20	0,57878E+01	0,1524E+02	0,34816E+01
25	0,59123E+01	0,153E+02	0,340E+01
30	0,59770E+01	0,153E+02	0,341E+01

4.4.1.3 VERIFICAÇÃO FUNÇÃO CORRENTE - BECKERMANN (1987)

A tabela 4.8, mostra a comportamento da convergência para o caso estudado por Beckermann (1987), pode-se notar tanto com a análise da tabela como nas figuras (4.10 - 4.12) que a convergência é prejudicada para valores de x próximos à parede aquecida e valores de y próximos à base, devido aos elevados efeitos convectivos já explicados anteriormente. Para valores de y próximos ao topo a convergência se deu com 2 dígitos significativos. Para coordenadas maiores que x igual a 0,5 onde se verifica a existência do meio poroso a convergência é sempre alcançada para 2 e 3 dígitos significativos. O caso foi avaliado para os seguintes parâmetros: $Ra_T = 3,028 \cdot 10^7$; $Pr = 6,97$ $Da = 7,354 \cdot 10^{-7}$ $C_F = 0,6124$ $R_k = 1,397$ $S = 0,5$.

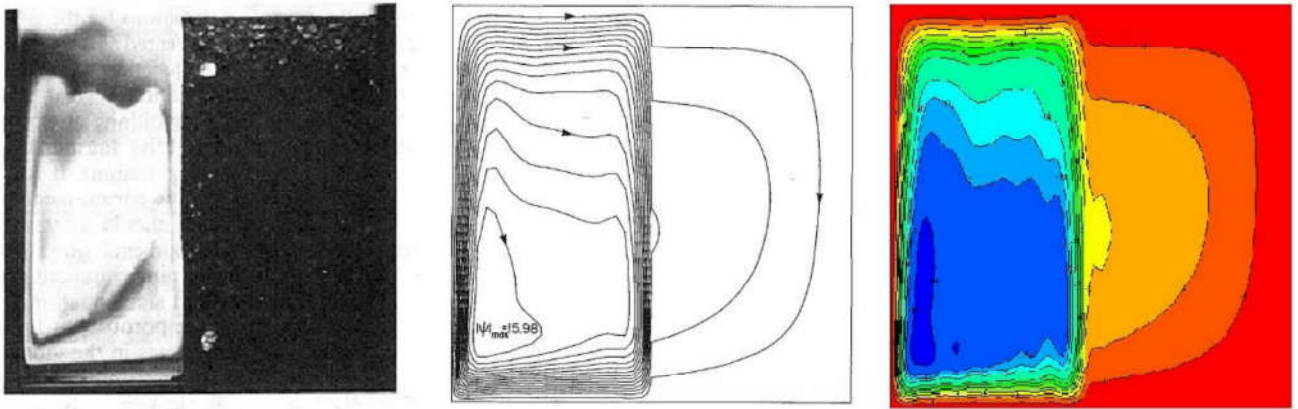


Figura 4. 10 - Função corrente Beckermann (1987) – $Ra_T = 3,028 \times 10^7$ $Pr = 6,97$ $Da = 7,354 \times 10^{-7}$ $C_F = 0,6124$ $R_k = 1,397$ $S = 0,5$

Na figura 4.10 os resultados de função corrente obtidos neste trabalho encontra-se a direita, a esquerdas são os resultados experimentais e ao centro os resultados numéricos obtidos por Beckermann (1987).

4.4.1.4 TEMPERATURA - BECKERMANN (1987)

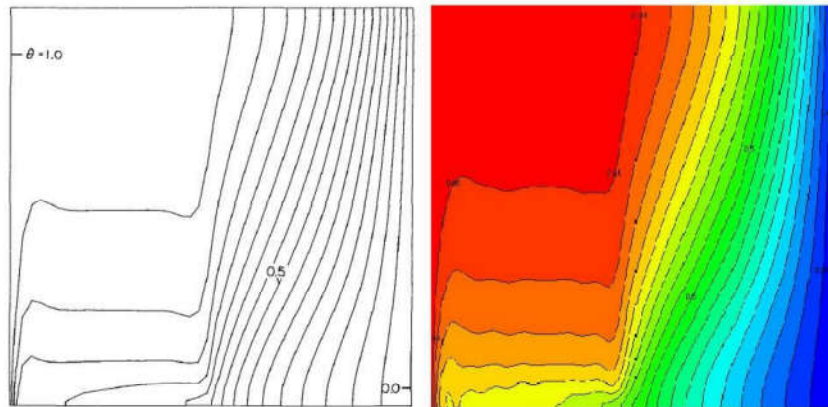


Figura 4. 11 - Isotermas Beckermann (1987) – $Ra_T = 3,02 \times 10^7$ $Pr = 6,97$ $Da = 7,354 \times 10^{-7}$ $C_F = 0,6124$ $R_k = 1,397$ $S = 0,5$

A figura 4.11 mostram a esquerda os resultados de temperatura obtidos por Beckermann (1987) e a direita os resultados obtidos neste trabalho para os parâmetros $Ra_T = 3,02 \times 10^7$ $Pr = 6,97$ $Da = 7,354 \times 10^{-7}$ $C_F = 0,6124$ $R_k = 1,397$ $S = 0,5$

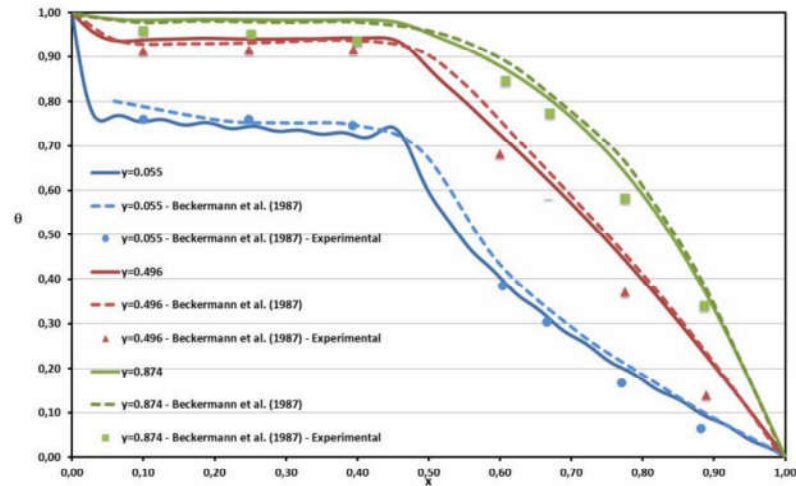


Figura 4. 12 - Perfil de temperatura Beckermann (1987) - $Ra_T = 3,02 \times 10^7$ $Pr = 6,97$ $Da = 7,354 \times 10^{-7}$ $C_F = 0,6124$ $R_k = 1,397$ $S = 0,5$

Vale ressaltar que para o caso avaliado por Beckermann (1987) no qual o número de Rayleigh é da ordem de 10^7 , a convergência necessita de um número de termos de truncamento elevado, onde o custo computacional é relativamente alto. Para 30 termos na série o tempo computacional foi de 208.810s. No entanto para os casos

estudados neste trabalho onde o Ra_T é da ordem de 10^4 a convergência é garantida mesmo com baixos números de termos na série de expansão, em torno de 20 termos.

Tabela 4. 8 - Convergência do módulo da função corrente Beckermann (1987)

$Ra_T = 3,02 \times 10^7$ $Pr = 6,97$ $Da = 7,354 \times 10^{-7}$ $C_F = 0,6124$ $R_k = 1,397$ $S = 0,5$			
$NV = NT$	$x = 0,1$ $y = 0,055$	$x = 0,1$ $y = 0,5$	$x = 0,1$ $y = 0,875$
5	6.0112	9.3279	5.8432
10	10.245	13.791	8.8821
20	9.4708	12.991	7.7
30	8.2871	13.727	7.7
$NV = NT$	$x = 0,5$ $y = 0,055$	$x = 0,5$ $y = 0,5$	$x = 0,5$ $y = 0,875$
5	1.3136	2.783	1.2
10	1.1319	3.0425	1.2
20	1.0	3.1	1.2
30	1.0	3.1	1.2
$NV = NT$	$x = 0,9$ $y = 0,055$	$x = 0,9$ $y = 0,5$	$x = 0,9$ $y = 0,875$
5	0.15162	0.91496	0.53641
10	0.21779	1.0201	0.7
20	0.23	1.1	0.7
30	0.23	1.1	0.7

4.4.2 RESULTADOS NUMÉRICOS

4.4.2.1 INFLUÊNCIA DE Da NA FUNÇÃO CORRENTE

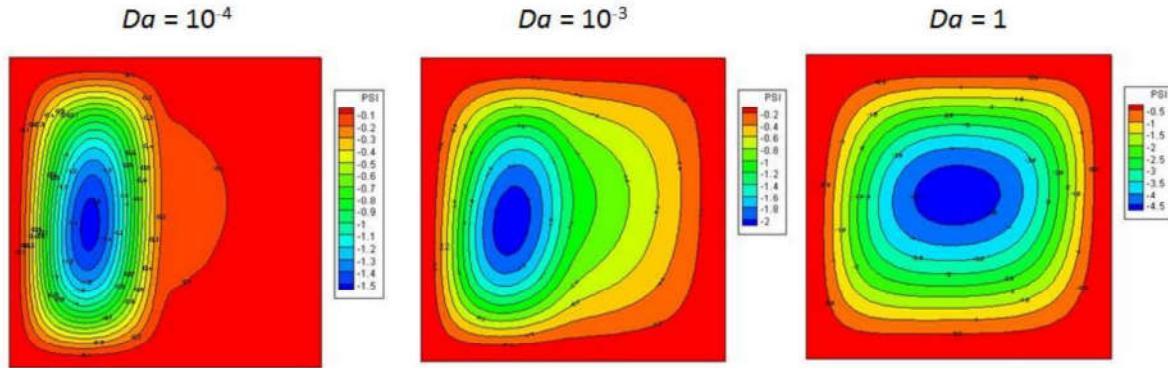


Figura 4. 13 - Influência do número de Darcy - $Pr = 0,71$ $C_F = 0,5$ $Ra_T = 10^4$ $S = 0,5$

Pode ser verificado a partir da visualização do perfil das linhas de função corrente figura (4.13), que com o aumento da permeabilidade (isto é, do número de Darcy) o fluxo penetra progressivamente na camada porosa. Para baixos valores de Da o fluxo está totalmente confinado à região fluida, enquanto que, quando o número de Da é igual à unidade o poro oferece uma resistência muito menor ao fluxo e a convecção natural ocorre em toda a cavidade, neste caso a função corrente apresenta o mesmo comportamento da convecção natural térmica em fluidos como já mostrado anteriormente por Leal (1996). Quando o número de Darcy tende ao infinito (na prática $Da = 1$), o meio poroso é equivalente ao meio fluido.

4.4.2.2 INFLUÊNCIA DE Da NO PERFIL DE TEMPERATURA

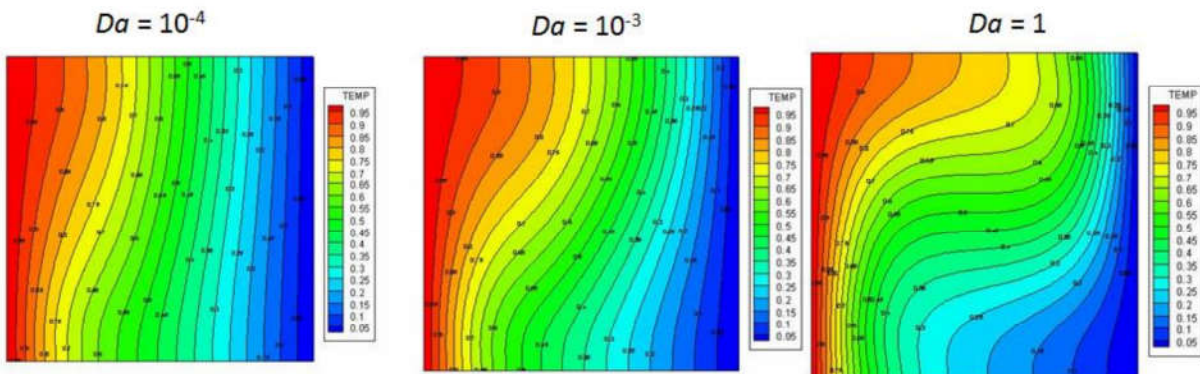


Figura 4. 14 - Influência do número de Darcy - $Pr = 0,71$ $C_F = 0,5$ $Ra_T = 10^4$ $S = 0,5$

Avaliando a figura (4.14) pode-se verificar que as isotérmicas na camada porosa são verticais e quase igualmente espaçadas, indicando que a transferência de calor se dá principalmente por condução. Na camada de fluido, existe uma estratificação térmica na região central com camadas térmicas ao longo da parede aquecida e a interface porosa/fluido, indicando forte convecção natural. Para elevados valores de Darcy as isotermas mostram que o fluido é termicamente estratificado em toda a cavidade e que existem camadas térmicas de diferentes espessuras para as paredes aquecida e resfriada. Em outras palavras, à medida que Da aumenta, o fluido penetrante provoca transferência de calor no meio poroso, calor este transferido convectivamente.

4.4.2.3 INFLUÊNCIA DE S NA FUNÇÃO CORRENTE

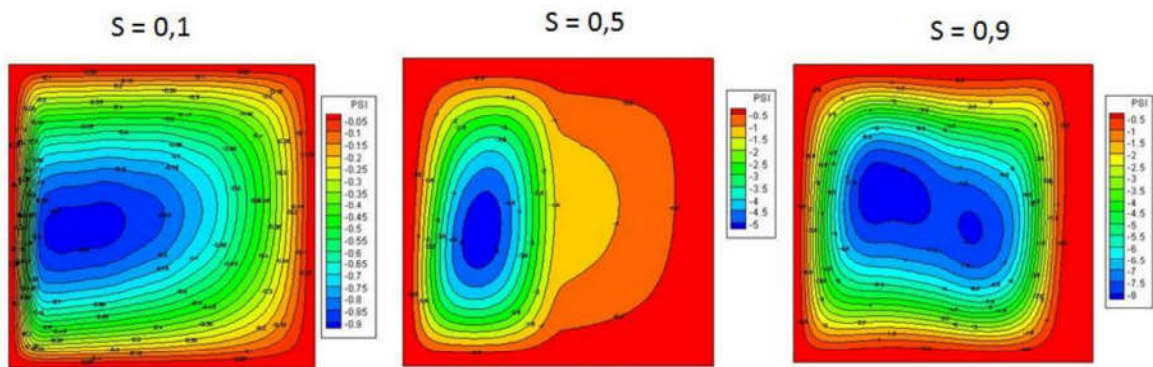


Figura 4. 15 - Influência da espessura da camada fluida - $Pr = 0,71$ $C_F = 0,5$ $Da = 10^{-4}$ $Ra_T = 10^5$

A figura (4.15) é mostra que com o aumento da espessura da camada fluida S , tem-se um aumento do módulo de função corrente passando de $|\psi|_{\max} = 0,9$ para $S = 0,1$ quando quase todo o domínio é poroso e $|\psi|_{\max} = 8,0$ para $S = 0,9$ quando o domínio é 90% fluido, devido ao fato de que a área onde ocorre a convecção natural é aumentada. Visualizando a função corrente podemos notar que a penetração do fluxo aumenta no meio poroso com o aumento de S , para um determinado número de Darcy e Rayleigh. Para $S = 1$ corresponde à cavidade totalmente preenchida por fluido. Quando $S = 0,9$ pode-se notar a formação de dois núcleos de convecção direcionando-se para as paredes laterais para dar espaço a um terceiro núcleo o que é característico de convecção natural térmica.

4.4.2.4 INFLUÊNCIA DE S NO PERFIL DE TEMPERATURA

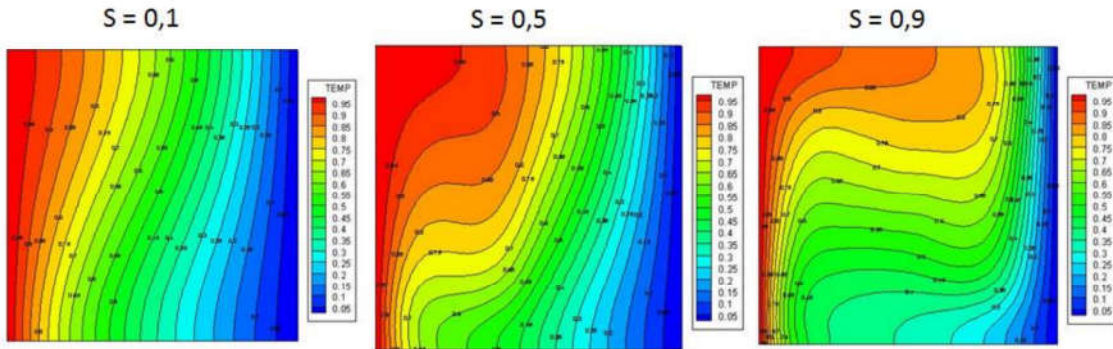


Figura 4. 16 - Influência da espessura da camada fluida - $Pr = 0,71$ $C_F = 0,5$ $Da = 10^{-4}$ $Ra_T = 10^5$

A figura (4.16) mostra que para S pequenos, onde a cavidade é quase que totalmente preenchida pelo meio poroso as isotermais apresentam linhas quase paralelas às paredes aquecida e resfriada, o que indica a predominância dos efeitos condutivos entre as paredes. À medida que S aumenta a transferência de calor por convecção é aumentada, pode se verificar que as linhas de isotermais são distorcidas progressivamente, até que para $S = 0,9$ o perfil de temperatura torna-se estratificado com diferentes espessuras de camadas térmicas. No centro da cavidade a temperatura varia somente com a coordenada y .

4.4.2.5 INFLUÊNCIA DO NÚMERO DE RAYLEIGH NA FUNÇÃO CORRENTE

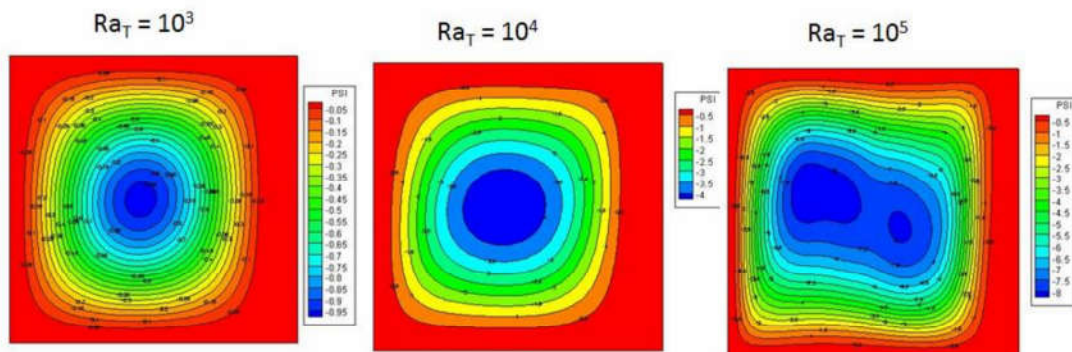


Figura 4. 17 - Influência do número de Rayleigh - $Pr = 0,71$ $C_F = 0,5$ $Da = 10^{-4}$ $S = 0,9$

Na figura (4.17) pode-se observar o comportamento das isolinhas de função corrente para os 3 casos seleccionados. Nota-se que para $Ra_T = 10^3$, o escoamento caracteriza-se pelo aparecimento de um núcleo primário central com rotação no sentido horário. À medida que Ra_T aumenta, este núcleo tende a tomar uma forma elíptica. Para $Ra_T = 10^5$ o núcleo central apresenta-se subdividido em dois núcleos de convecção.

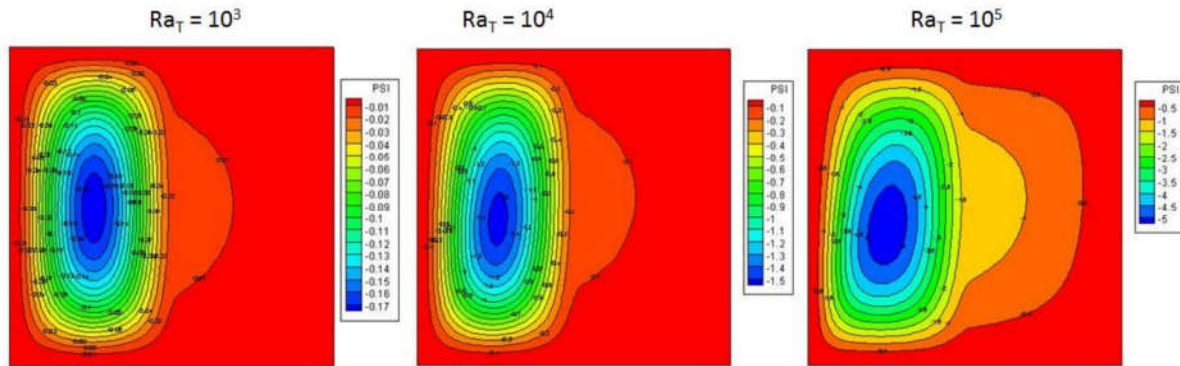


Figura 4.18 - Influência do número de Rayleigh - $Pr = 0,71$ $C_F = 0,5$ $Da = 10^{-4}$ $S = 0,5$

A figura (4.18) mostra os efeitos de Ra_T no campo de função corrente da mesma forma como apresentado na figura (4.17), no entanto para um valor de S igual a 0,5, ou seja, 50% do domínio é preenchido por meio poroso e 50% por fluido, a medida que o número de Rayleigh aumenta uma maior penetração do escoamento no meio poroso, como pode ser vista.

4.4.2.6 INFLUÊNCIA DO NÚMERO DE RAYLEIGH NO PERFIL DE TEMPERATURA

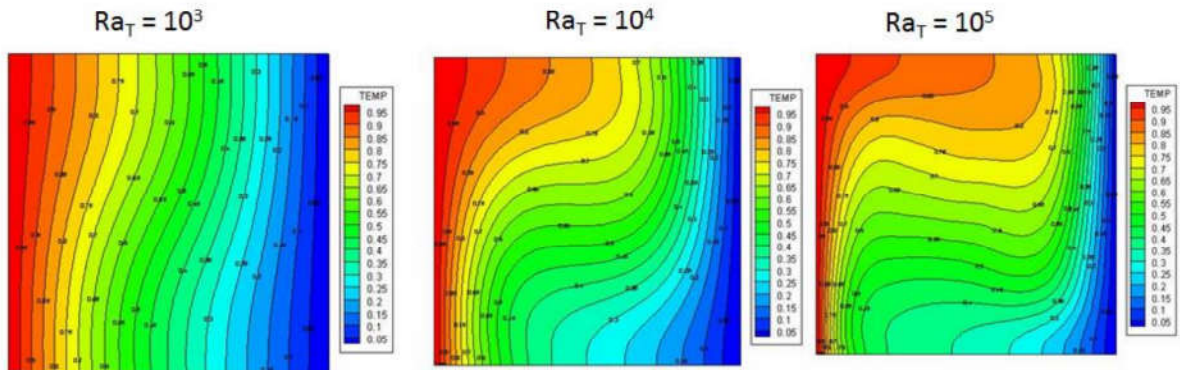


Figura 4.19 - Influência do número de Rayleigh - $Pr = 0,71$ $C_F = 0,5$ $Da = 10^{-4}$ $S = 0,9$

O número de Rayleigh é um parâmetro associado com os fluxos conduzidos por empuxo (também conhecidos como convecção livre ou convecção natural), isso se deve a um gradiente de massa específica do fluido provocado por um gradiente térmico ou de concentração. Quando o número de Rayleigh térmico Ra_T é baixo ($<10^2$), a transferência de calor se dá predominantemente na forma de condução; quando número de Rayleigh térmico apresenta valores elevados ($>10^6$) para um determinado fluido a transferência de calor se processa predominantemente na forma de convecção.

A figura (4.19) mostra isolinhas de temperatura. Para $Ra_T = 10^3$ pode-se observar isoterma paralelas as paredes laterais, o que indica predominância de efeitos condutivos. Com o aumento de Ra_T as isotermas, progressivamente tendem a apresentar distorções e os efeitos convectivos ficam mais aparentes, em $Ra_T = 10^5$ vemos que as isotermas no centro apresentam-se totalmente estratificadas.

4.4.2.7 INFLUÊNCIA DO COEFICIENTE INERCIAL - C_F NA FUNÇÃO CORRENTE

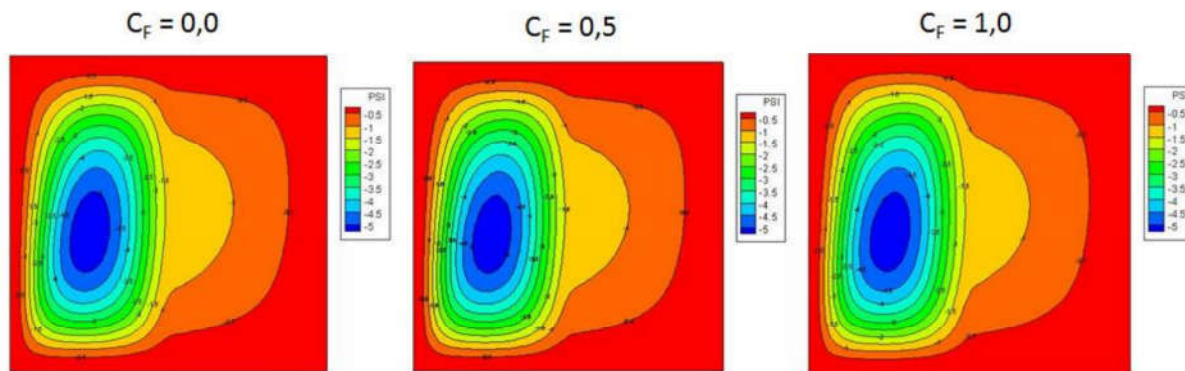


Figura 4. 20 - Influência do número de C_F - $Pr = 0,71$ $Ra_T = 10^5$ $Da = 10^{-4}$ $S = 0,5$

4.4.2.8 INFLUÊNCIA DO COEFICIENTE INERCIAL - C_F NO PERFIL DE TEMPERATURA

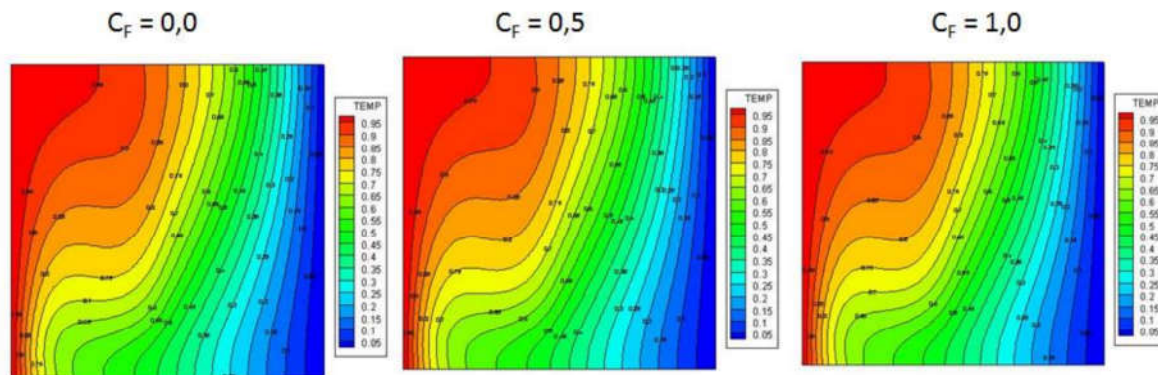


Figura 4. 21 - Influência do número de C_F - $Pr = 0,71$ $Ra_T = 10^5$ $Da = 10^{-4}$ $S = 0,5$

O coeficiente de Forchheimer tem influência principalmente próxima à interface para escoamentos com alta velocidade. Para os casos estudados neste capítulo nenhuma mudança global no perfil de função corrente e temperatura foi notada como se pode ver nas figuras (4.20) e (4.21) devido a baixa velocidade de fluxo na cavidade.

CAPÍTULO 5

CONVECÇÃO NATURAL TERMOSOLUTAL EM CAVIDADE RETANGULAR FECHADA PARCIALMENTE PREENCHIDA COM MEIO POROSO – FORMULAÇÃO DARCY- BRINKMAN

Esta etapa do trabalho utiliza a formulação Darcy-Brinkman para estudar o fenômeno de convecção natural termosolutal no interior de uma cavidade retangular fechada, parcialmente preenchida por meio poroso, em condições adiabáticas e impermeáveis no topo e na base, com paredes laterais diferencialmente aquecidas e submetidas a um gradiente de concentração.

5.1 – DEFINIÇÃO DO PROBLEMA

Considerando uma cavidade retangular e bidimensional, de altura H e espessura L parcialmente preenchida por uma camada porosa vertical e de espessura x_p^* . A variação deste parâmetro permite abordar os limites correspondentes a cavidade inteiramente fluida ($x_p^* = 0$), ou inteiramente porosa ($x_p^* = L$).

As condições limites de Dirichlet para a temperatura e concentração são impostas em suas paredes verticais, as paredes horizontais são adiabáticas e impermeáveis. Esta configuração considerada para este estudo está representada na figura 5.1.

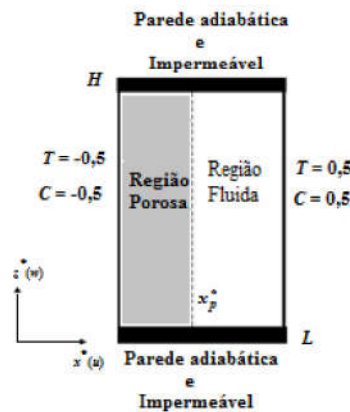


Figura 5. 1 - Esquema para o problema de convecção natural termosolutal em uma cavidade parcialmente preenchida com meio poroso. Fonte :elaborado pelo autor

5.2 – FORMULAÇÃO MATEMÁTICA PARA CONVECÇÃO TERMOSOLUTAL EM CAVIDADE RETANGULAR

As seguintes considerações devem ser admitidas:

i) A direção normal à figura é muito menor que as outras duas dimensões da cavidade. O problema é então assumido bidimensional;

j) O fluido binário é newtoniano e o escoamento é incompressível e em regime laminar;

k) A massa específica do fluido é submetida à aproximação de Boussinesq: a massa específica varia linearmente com a temperatura e a concentração;

$$\rho(T, C) = \rho_f [1 - \beta_T (T - T_0) - \beta_C (C - C_0)] \quad (5.1)$$

Onde $\beta_T > 0$ e $\beta_C < 0$ são os coeficientes de expansão térmica e solutal.

l) Admite-se a camada porosa saturada por um fluido binário que ocupa o restante da cavidade. É dessa forma homogênea, isotrópica e a fase sólida está em equilíbrio térmico com o fluido;

m) A partição é permeável

n) Admite-se a interface poro/fluido fixa;

o) As propriedades físicas da matriz sólida são consideradas constantes;

p) Levando em conta os efeitos convectivos, os efeitos de Soret e Dufour são desprezados;

q) Utiliza-se a abordagem de domínio único para a solução do problema proposto.

5.2.1 DEFININDO AS EQUAÇÕES DO PROBLEMA

Para estudar o problema proposto foi escolhida a abordagem de domínio único, escrevendo uma equação do tipo Navier Stokes, incluindo o termo de Darcy e o termo de correção de Brinkman, que leva em conta as forças viscosas exercidas pelo fluido no meio poroso (BRINKMAN, 1947). Esta equação é válida em todo domínio da cavidade, as condições de acoplamento da interface são verificadas de maneira implícita.

Levando em conta as hipóteses previamente estabelecidas as equações válidas para camada porosa da cavidade são escritas a seguir.

Equação da Continuidade:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{U} = 0 \quad 0 < x^* < L; \quad 0 < y^* < H \quad (5.2)$$

Equação da conservação do momento em, $0 < x^* < L; \quad 0 < z^* < H$:

$$\begin{aligned} \rho_f \left[\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon^2} (\vec{U} \cdot \vec{\nabla}^*) \vec{U} \right] = & -\nabla^* P^* + \rho_f [1 - \beta_T (T - T_0) - \beta_c (C - C_0)] \vec{g} e_s \\ & + \mu_{eff} \nabla^{*2} \vec{U} - \frac{\mu}{K} \vec{U} - \frac{c_f \rho_f}{K^{1/2}} |\vec{U}| \vec{U} \end{aligned} \quad (5.3)$$

Equação da conservação de energia:

$$(\rho c)_m \frac{\partial T}{\partial t} + (\rho c)_f \vec{U} \cdot \vec{\nabla}^* T = \nabla^* \cdot (k_{eff} \nabla^* T) \quad 0 < x^* < L; \quad 0 < z^* < H \quad (5.4)$$

Equação da conservação das espécies

$$\varepsilon \frac{\partial C}{\partial t} + \vec{U} \cdot \vec{\nabla}^* C = \nabla^* \cdot (D_{eff} \nabla^* C) \quad 0 < x^* < L; \quad 0 < z^* < H \quad (5.5)$$

e

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} = 0; \quad \frac{\partial C}{\partial t} = 0; \quad \frac{\partial T}{\partial t} = 0; \quad \frac{c_f \rho_f}{K^{1/2}} |\vec{U}| \vec{U} = 0$$

O coeficiente ε é a porosidade do meio considerada constante (meio poroso homogêneo). Para um meio poroso isotrópico, a permeabilidade do meio K é uma quantidade escalar e constante. μ , k e D representam a viscosidade dinâmica, a condutividade térmica e a difusividade mássica respectivamente. Os índices m , f e eff são referentes ao meio poroso, à região fluida e aos valores efetivos das propriedades do meio poroso.

As equações da camada fluida são obtidas facilmente pelo limite de $\varepsilon \rightarrow 1$, $K \rightarrow \infty$, $\mu_{eff} \rightarrow \mu_f$, $k_{eff} \rightarrow k_f$, $D_{eff} \rightarrow D_f$.

O termo de inércia $\frac{1}{\varepsilon^2} (\vec{U} \cdot \vec{\nabla}^*) \vec{U}$ na equação dinâmica foi apresentado na formulação: este termo pode ser desprezado no meio poroso devido às baixas velocidades, sua presença na equação (5.3) permite recuperar a equação completa de Navier-Stokes na região fluida, esta é a razão pela qual a porosidade da matriz sólida ε a qual aparece no termo inércia é definida como 1. O termo de Forchheimer pode ser desprezado conforme foi visto nos resultados apresentados no capítulo IV e apresentados por GOYEAU *et al.* (1996); NITHIARASU *et al.*, (1996); KARIMI-

FARD *et al.*, (1997) onde estes autores concluíram que o efeito inercial é insignificante na dupla difusão convectiva.

As propriedades efetivas do meio poroso (índice *eff*) são normalmente funções complexas da porosidade e tortuosidade da matriz sólida, bem como, da velocidade de fluido local. Neste trabalho, por uma questão de simplicidade, as propriedades dos fluidos correspondentes são utilizadas ao longo do estudo, por isso que as razões dos coeficientes efetivos de transporte pelas propriedades do fluido são iguais a 1 e a viscosidade efetiva no termo de Brinkman também é tomado igual à viscosidade do fluido $\mu_{eff} = \mu$.

Para se obter um sistema de equações adimensionalizadas das equações (5.2 a 5.5), utilizamos os seguintes grupos de adimensionalização.

$$x = \frac{x^*}{H}; z = \frac{z^*}{H}; x_p = \frac{x_p^*}{L}; \bar{V} = \frac{\bar{U}H}{\alpha}; \theta = \frac{T - T_C}{T_H - T_C}; \phi = \frac{C - C_C}{C_H - C_C}; P = \frac{P^*}{\rho_f \left(\frac{\alpha}{H} \right)^2} \quad (5.6)$$

Os parâmetros característicos do problema estudado são:

Razão de aspecto

$$A = \frac{H}{L} \quad (5.7)$$

Número de Prandtl

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha} \quad (5.8)$$

Número de Lewis

$$Le = \frac{\alpha}{D} = \frac{Sc}{Pr} \quad (5.9)$$

Número de Darcy

$$Da = \frac{K}{H^2} \quad (5.10)$$

Número de Rayleigh térmico

$$Ra_T = \frac{g \beta_T \Delta T H^3}{\alpha \nu} \quad (5.11)$$

Número de Rayleigh solutal

$$Ra_s = N Le Ra_T \quad (5.12)$$

Razão de flutuabilidade

$$N = \frac{\beta_c \Delta C}{\beta_T \Delta T} = \frac{Ra_S}{Ra_T} \quad (5.13)$$

Cada um desses parâmetros influenciam no movimento do fluido. Variando os valores de Rayleigh térmico ou solutal, modifica-se as forças de empuxo, ou flutuabilidade.

Número de Nusselt médio:

$$\bar{Nu} = \frac{\dot{q}}{k \Delta T / H} = \frac{hL}{k} = \int_0^1 \left[\frac{\partial \theta}{\partial x} - \text{Pr}(u\theta) \right] dz \quad (5.14)$$

Número de Sherwood médio:

$$\bar{Sh} = \frac{J}{D \Delta C / H} = \frac{K_c L}{D} = \int_0^1 \frac{\partial \phi}{\partial x} - \text{Sc}(u\phi) dz \quad (5.15)$$

Os operadores

$$\vec{\nabla} = H \vec{\nabla}^* ; \vec{\nabla}^2 = H^2 \vec{\nabla}^{*2} \quad (5.16)$$

As equações de conservação em sua forma adimensional são escritas da seguinte forma:

Equação da Continuidade:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0 \quad 0 < x < 0,5; \quad 0 < z < 1 \quad (5.17)$$

Equação da conservação do momento em $0 < x < 0,5; \quad 0 < z < 1$:

$$\frac{1}{\text{Pr}} \vec{V} \cdot \vec{\nabla} \vec{V} = -\frac{1}{\text{Pr}} \vec{\nabla} P + Ra_T (\theta + N\phi) \vec{e}_s - \frac{1}{Da} \vec{V} + \Lambda \vec{\nabla}^2 \vec{V} \quad (5.18)$$

Equação da conservação de energia em $0 < x < 0,5; \quad 0 < z < 1$:

$$\vec{V} \cdot \vec{\nabla} \theta = R_k \vec{\nabla}^2 \theta \quad (5.19)$$

Equação da conservação das espécies em $0 < x < 0,5; \quad 0 < z < 1$:

$$\vec{V} \cdot \vec{\nabla} \phi = \frac{1}{Le} R_D \vec{\nabla}^2 \phi \quad (5.20)$$

As relações:

$$\Lambda = \frac{\mu_{eff}}{\mu} = 1 \quad (5.21)$$

$$R_k = \frac{k_{eff}}{k} = 1 \quad (5.22)$$

$$R_D = \frac{D_{eff}}{D} = 1 \quad (5.23)$$

O operador associado

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (5.24)$$

Condições de contorno

Em $x = 0$

$$V = 0 \quad (5.25)$$

$$\theta = -0,5 \quad (5.26)$$

$$\phi = -0,5 \quad (5.27)$$

Em $x = 0,5$

$$V = 0 \quad (5.28)$$

$$\theta = 0,5 \quad (5.29)$$

$$\phi = 0,5 \quad (5.30)$$

Em $z = 0$

$$V = 0 \quad (5.31)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial z} = 0 \quad (5.32)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad (5.33)$$

Em $z = 1$

$$V = 0 \quad (5.34)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial z} = 0 \quad (5.35)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad (5.36)$$

Decompondo-se as equações (5.17 a 5.20) nas direções x e z temos em $0 < x < 0,5$; $0 < z < 1$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (5.37)$$

Para a equação do momento na direção x : em $0 < x < 0,5$; $0 < z < 1$

$$\frac{1}{\text{Pr}} \left[u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right] = -\frac{1}{\text{Pr}} \frac{\partial P}{\partial x} + \Lambda \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) - \frac{u}{Da} \quad (5.38)$$

Para a equação do momento na direção z em $0 < x < 0,5$; $0 < z < 1$:

$$\frac{1}{\text{Pr}} \left[u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right] = -\frac{1}{\text{Pr}} \frac{\partial P}{\partial z} + \Lambda \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) - \frac{w}{Da} + Ra_T (\theta + N\phi) \quad (5.39)$$

Ao invés de resolver separadamente a equação da função corrente para cada região (porosa e livre), introduziu-se o parâmetro binário ς , onde:

$$\varsigma = \begin{cases} 1 & \text{para a camada porosa } 0 < x < x_p \\ 0 & \text{para a camada fluida } x > x_p \end{cases} \quad (5.40)$$

Dessa forma as equações para descrever o perfil de velocidade tomam a seguinte forma:

Para a equação do momento na direção x :

$$\frac{(1-\varsigma)}{\text{Pr}} \left[u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right] = -\frac{1}{\text{Pr}} \frac{\partial P}{\partial x} + \Lambda \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) - \varsigma \frac{u}{Da} \quad (5.41)$$

Para a equação do momento na direção z :

$$\frac{(1-\varsigma)}{\text{Pr}} \left[u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right] = -\frac{1}{\text{Pr}} \frac{\partial P}{\partial z} + \Lambda \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) - \varsigma \frac{w}{Da} + Ra_T (\theta + N\phi) \quad (5.42)$$

Ou seja, para $x < x_p$, sigma tem valor igual a 1 a equação da conservação do momento se reduz a equação de Darcy corrigida pelo termo de Brinkman.

Para $x > x_p$, o valor de sigma (ς) é 0, a permeabilidade assume valores elevados e $Da \rightarrow \infty$ (na pratica $Da = 1$), o termo de Darcy é desprezado e então a equação de conservação do momento assume a forma da equação de Navier-Stokes.

Para o perfil de temperatura adimensionalizada temos nas direções x e z :

$$u \frac{\partial \theta}{\partial x} + w \frac{\partial \theta}{\partial z} = R_k \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right) \quad (5.43)$$

Da mesma forma para a equação que descreve o perfil de concentração na cavidade nas direções x e z :

$$u \frac{\partial \phi}{\partial x} + w \frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{1}{Le} R_D \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right) \quad (5.44)$$

Para a solução do sistema diferencial parcial (5.41 e 5.42), segue-se o procedimento onde as equações da quantidade de movimento são expressas em termos de função corrente. Diferenciando-se a equação (5.41) em z e a equação (5.42) em x e subtraindo-se uma da outra têm-se:

$$\begin{aligned}
& \frac{(1-\varsigma)}{\text{Pr}} \left[\frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial z} + w \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} + u \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial z} + w \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \right) \right] + \frac{1}{\text{Pr}} \frac{\partial}{\partial x} [1-\varsigma] \left[u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} - \left(u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] \\
& = -\frac{1}{\text{Pr}} \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial z} + \frac{1}{\text{Pr}} \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial z} - \frac{\varsigma}{Da} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} [1-\varsigma] (u-w) \\
& + \Lambda \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial z} + \frac{\partial^3 u}{\partial z^3} - \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial z^2} \right) - Ra_T \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} + N \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)
\end{aligned} \tag{5.45}$$

Definindo a função corrente

$$u = -\frac{\partial \psi}{\partial z} \tag{5.46}$$

$$w = \frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{5.47}$$

Com as devidas substituições na equação (5.45) temos a equação do momento em termos de função corrente para o problema proposto.

$$\begin{aligned}
& \frac{(1-\varsigma)}{\text{Pr}} \left[\frac{\partial \psi}{\partial z} \left(\frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial x \partial z^2} \right) - \frac{\partial \psi}{\partial x} \left(\frac{\partial^3 \psi}{\partial x^2 \partial z} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial z^3} \right) \right] + \\
& \frac{1}{\text{Pr}} \frac{d}{dx} (1-\varsigma) \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} \right) = -\Lambda \left(\frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4 \psi}{\partial z^4} \right) + \\
& \frac{\varsigma}{Da} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) + \frac{d}{dx} \left[\left(\frac{\varsigma}{Da} \right) \right] \frac{\partial \psi}{\partial x} - Ra_T \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} + N \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)
\end{aligned} \tag{5.48}$$

Para as equações que descrevem os perfis de temperatura e concentração na cavidade temos respectivamente em substituição as equações (5.43 e 5.44):

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \theta}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial z} = -R_k \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right) \tag{5.49}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial z} = -\frac{1}{Le} R_D \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right) \tag{5.50}$$

Condições de contorno

Em $x = 0$

$$\psi = 0 \tag{5.51}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \tag{5.52}$$

$$\theta = -0,5 \tag{5.53}$$

$$\phi = -0,5 \tag{5.54}$$

Em $x = 0,5$

$$\psi = 0 \quad (5.55)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \quad (5.56)$$

$$\theta = 0,5 \quad (5.57)$$

$$\phi = 0,5 \quad (5.58)$$

Em $z = 0$

$$\psi = 0 \quad (5.59)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = 0 \quad (5.60)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial z} = 0 \quad (5.61)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad (5.62)$$

Em $z = 1$

$$\psi = 0 \quad (5.63)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = 0 \quad (5.64)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial z} = 0 \quad (5.65)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad (5.66)$$

5.3 – SOLUÇÃO VIA GITT

Seguindo a metodologia da Transformada Integral Generalizada, faz-se necessário definir os problemas auxiliares que permitirão encontrar as autofunções e os autovalores.

5.3.1 PROBLEMAS AUXILIARES

Com o propósito de fazer coincidir as condições de contorno da direção escolhida no problema principal a ser eliminada através da transformação integral, direção "x", com as condições de contorno do problema de autovalor a ser proposto, deve-se homogeneizar as condições de contorno (5.53-5.54, e 5.57-5.58). Com este

proposito desenvolveu-se os seguintes filtros para o campo de temperatura e de concentração:

Filtro para o campo de temperatura

$$\theta(x, z) = Ax - \frac{1}{2} + \theta_H(x, z) \quad (5.67)$$

Filtro para o campo de concentração

$$\phi(x, z) = Ax - \frac{1}{2} + \phi_H(x, z) \quad (5.68)$$

Substituindo as equações (5.67 e 5.68) nas equações (5.48 a 5.50), obtém-se um novo sistema de equações diferenciais parciais em função de $\theta_H(x, z)$ e $\phi_H(x, z)$ com condições de contorno homogêneas. O sistema final homogêneo é então escrito da seguinte forma:

Problema homogêneo para a função corrente.

$$\begin{aligned} & \frac{(1-\varsigma)}{\text{Pr}} \left[\frac{\partial \psi}{\partial z} \left(\frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial x \partial z^2} \right) - \frac{\partial \psi}{\partial x} \left(\frac{\partial^3 \psi}{\partial x^2 \partial z} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial z^3} \right) \right] \\ & + \frac{1}{\text{Pr}} \frac{d}{dx} (1-\varsigma) \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} \right) = -\Lambda \left(\frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4 \psi}{\partial z^4} \right) \\ & + \frac{\varsigma}{Da} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) + \frac{d}{dx} \left[\left(\frac{\varsigma}{Da} \right) \right] \frac{\partial \psi}{\partial x} - Ra_T \left(\frac{\partial \theta_H}{\partial x} + N \frac{\partial \phi_H}{\partial x} \right) - Ra_T A(1+N) \end{aligned} \quad (5.69)$$

Problema homogêneo para o campo de temperatura.

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \theta_H}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \theta_H}{\partial z} + A \frac{\partial \psi}{\partial z} = -R_k \left(\frac{\partial^2 \theta_H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta_H}{\partial z^2} \right) \quad (5.70)$$

Problema homogêneo para o campo de concentração.

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \phi_H}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \phi_H}{\partial z} + A \frac{\partial \psi}{\partial z} = -\frac{1}{Le} R_D \left(\frac{\partial^2 \phi_H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_H}{\partial z^2} \right) \quad (5.71)$$

Condições de contorno homogêneas

Em $x = 0$

$$\psi = 0 \quad (5.72)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \quad (5.73)$$

$$\theta_H = 0 \quad (5.74)$$

$$\phi_H = 0 \quad (5.75)$$

Em $x = 0,5$

$$\psi = 0 \quad (5.76)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \quad (5.77)$$

$$\theta_H = 0 \quad (5.78)$$

$$\phi_H = 0 \quad (5.79)$$

Em $z = 0$

$$\psi = 0 \quad (5.80)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = 0 \quad (5.81)$$

$$\frac{\partial \theta_H}{\partial z} = 0 \quad (5.82)$$

$$\frac{\partial \phi_H}{\partial z} = 0 \quad (5.83)$$

Em $z = 1$

$$\psi = 0 \quad (5.84)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = 0 \quad (5.85)$$

$$\frac{\partial \theta_H}{\partial z} = 0 \quad (5.86)$$

$$\frac{\partial \phi_H}{\partial z} = 0 \quad (5.87)$$

Uma vez escolhida a direção a ser eliminada através da transformação integral, direção "x", a etapa seguinte é a obtenção das autofunções para a expansão das variáveis dependentes $\psi(x,z)$, $\theta_H(x,z)$ e $\phi_H(x,z)$. Para a função corrente é proposto então um problema de autovalor do tipo biarmônico, previamente discutido.

$$\frac{d^4 X_i}{dx^4} = \lambda_i^4 X_i; \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (5.88)$$

Condições de contorno

$$X_i(0) = 0 \quad (5.89)$$

$$\frac{dX_i(0)}{dx} = 0 \quad (5.90)$$

$$X_i(0,5) = 0 \quad (5.91)$$

$$\frac{dX_i(0,5)}{dx} = 0 \quad (5.92)$$

Onde X_i e t_i são as autofunções e autovalores, respectivamente e satisfazem a seguinte propriedade de ortogonalidade.

$$\int_0^{1/2} X_i(x) X_j(x) dx = \begin{cases} 0, & \text{se } i \neq j \\ L_i, & \text{se } i = j \end{cases} \quad (5.93)$$

e L_i é a norma ou integração de normalização

A solução analítica para o problema de autovalor equação (5.88) é dado por:

$$X_i = \begin{cases} \frac{\cos\left[t_i\left(x - \frac{1}{2A}\right)\right]}{\cos\left(\frac{t_i}{2A}\right)} - \frac{\cosh\left[t_i\left(x - \frac{1}{2A}\right)\right]}{\cosh\left(\frac{t_i}{2A}\right)}, & i = 1, 3, 5, \dots \\ \frac{\operatorname{sen}\left[t_i\left(x - \frac{1}{2A}\right)\right]}{\operatorname{sen}\left(\frac{t_i}{2A}\right)} - \frac{\operatorname{senh}\left[t_i\left(x - \frac{1}{2A}\right)\right]}{\operatorname{senh}\left(\frac{t_i}{2A}\right)}, & i = 2, 4, 6, \dots \end{cases} \quad (5.94)$$

E os autovalores são encontrados a partir das seguintes equações transcendentais:

$$\operatorname{tgh}\left(\frac{t_i}{2A}\right) = \begin{cases} -\operatorname{tg}\left(\frac{t_i}{2A}\right), & i = 1, 3, 5, \dots \\ \operatorname{tg}\left(\frac{t_i}{2A}\right), & i = 2, 4, 6, \dots \end{cases} \quad (5.95)$$

A norma é definida como:

$$L_i = \int_0^{1/2} X_i^2(x) dx = \frac{1}{A}, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots \quad (5.96)$$

A autofunção normalizada é escrita da seguinte forma:

$$\tilde{X}_i = \frac{X_i}{\sqrt{L_i}} = \sqrt{A} X_i \quad (5.97)$$

Para o campo de temperatura, o problema auxiliar está associado ao clássico operador difusivo de segunda ordem, que dá origem a um problema tipo Sturm-Liouville como:

$$\frac{d^2 \Gamma_k}{dx^2} + \zeta_k^2 \Gamma_k = 0, \quad k = 1, 2, 3, 4, 5, \dots \quad (5.98)$$

Condições de contorno

$$\Gamma_k(0) = 0 \quad (5.99)$$

$$\Gamma_k(0,5) = 0 \quad (5.100)$$

Onde Γ_k e ζ_k são, respectivamente, as autofunções e autovalores que satisfazem a seguinte propriedade de ortogonalidade:

$$\int_0^{1/4} \Gamma_k(x) \Gamma_l(x) dx = \begin{cases} 0, & \text{se } k \neq l \\ M_k, & \text{se } k = l \end{cases} \quad (5.101)$$

Onde M_k é a norma ou integral de normalização para o campo de temperatura.

A equação (5.98) pode ser resolvida analiticamente e sua solução é como mostrado em Özisik (1980), da seguinte forma.

$$\Gamma_k(x) = \text{sen}(\zeta_k x), \quad k = 1, 2, 3, 4, 5, \dots \quad (5.102)$$

Os autovalores são dados por:

$$\zeta_k = k\pi A, \quad k = 1, 2, 3, 4, 5, \dots \quad (5.103)$$

A norma é definida como

$$M_k = \int_0^{1/4} \Gamma_k^2(x) dx = \frac{1}{2A} \quad (5.104)$$

A autofunção normalizada poder ser escrito da seguinte forma:

$$\tilde{\Gamma}_k(x) = \frac{\Gamma_k(x)}{\sqrt{M_k}} = \sqrt{2A} \Gamma_k(x) \quad (5.105)$$

Para o campo de concentração, da mesma forma com a qual resolvemos o problema de autovalor para o campo de temperatura têm-se:

$$\frac{d^2 \Omega_n}{dx^2} + \eta_n^2 \Omega_n = 0, \quad n = 1, 2, 3, 4, 5, \dots \quad (5.106)$$

Condições de contorno

$$\Omega_n(0) = 0 \quad (5.107)$$

$$\Omega_n(0,5) = 0 \quad (5.108)$$

Onde Ω_n e η_n são, respectivamente, as autofunções e autovalores que satisfazem a seguinte propriedade de ortogonalidade:

$$\int_0^{1/4} \Omega_n(x) \Omega_o(x) dx = \begin{cases} 0, & \text{se } n \neq o \\ Q_n, & \text{se } n = o \end{cases} \quad (5.109)$$

Onde Q_n é a norma ou integral de normalização para o campo de concentração.

A equação (5.106) pode ser resolvida analiticamente da seguinte forma

$$\Omega_n(x) = \text{sen}(\eta_n x), \quad n = 1, 2, 3, 4, 5, \dots \quad (5.110)$$

Os autovalores são dados por:

$$\eta_n = n\pi A, \quad n = 1, 2, 3, 4, 5, \dots \quad (5.111)$$

A norma é definida como:

$$\mathcal{Q}_n = \int_0^{1/A} \Omega_n^2(x) dx = \frac{1}{2A} \quad (5.112)$$

A autofunção normalizada poder ser escrito da seguinte forma:

$$\tilde{\Omega}_n(x) = \frac{\Omega_n(x)}{\sqrt{\mathcal{Q}_n}} = \sqrt{2A} \Omega_n(x) \quad (5.113)$$

5.3.2 PARES TRANSFORMADA-INVERSA

Para o campo de função corrente tem-se:

$$\tilde{\psi}_i(z) = \int_0^{1/A} \tilde{X}_i(x) \psi(x, z) dx \quad \text{transformada} \quad (5.114)$$

$$\psi(x, z) = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{X}_i(x) \tilde{\psi}_i(z) \quad \text{inversa} \quad (5.115)$$

Para o campo de temperatura (sempre considerando o potencial homogeneizado):

$$\tilde{\theta}_{Hk}(z) = \int_0^{1/A} \tilde{\Gamma}_k(x) \theta_H(x, z) dx \quad \text{transformada} \quad (5.116)$$

$$\theta_H(x, z) = \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\Gamma}_k(x) \tilde{\theta}_{Hk}(z) \quad \text{inversa} \quad (5.117)$$

Para o campo de concentração homogeneizado $\phi_H(x, z)$.

$$\tilde{\phi}_{Hn}(z) = \int_0^{1/A} \tilde{\Omega}_n(x) \phi_H(x, z) dx \quad \text{transformada} \quad (5.118)$$

$$\phi_H(x, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\Omega}_n(x) \tilde{\phi}_{Hn}(z) \quad \text{inversa} \quad (5.119)$$

5.3.3 TRANSFORMAÇÃO INTEGRAL

A fim de se obter uma equação diferencial ordinária – EDO para a solução do problema original, após a devida solução desta EDO e a aplicação da fórmula de inversão, é necessário realizar a transformação integral do problema original multiplicando-se a equação (5.69) por $\int_0^{1/A} \tilde{X}_i(x) dx$ resultando em:

$$\begin{aligned}
& \underbrace{\int_0^{1/A} \tilde{X}_i(x) \frac{\partial^4 \psi}{\partial z^4} dx}_{T_1} = -2 \underbrace{\int_0^{1/A} \tilde{X}_i(x) \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^2 \partial z^2} dx}_{T_2} - \underbrace{\int_0^{1/A} \tilde{X}_i(x) \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} dx}_{T_3} \\
& - \underbrace{\frac{1}{\text{Pr} \Lambda} \int_0^{1/A} \tilde{X}_i(x) (1-\varsigma) \left[\frac{\partial \psi}{\partial z} \left(\frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial x \partial z^2} \right) - \frac{\partial \psi}{\partial x} \left(\frac{\partial^3 \psi}{\partial x^2 \partial z} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial z^3} \right) \right] dx}_{T_6} \\
& - \underbrace{\frac{1}{\text{Pr} \Lambda} \int_0^{1/A} \tilde{X}_i(x) \frac{\partial}{\partial x} (1-\varsigma) \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} \right) dx}_{T_7} \\
& + \underbrace{\frac{1}{\Lambda} \int_0^{1/A} \tilde{X}_i(x) \frac{\varsigma}{Da} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) dx}_{T_4} + \underbrace{\frac{1}{\Lambda} \int_0^{1/A} \tilde{X}_i(x) \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{\varsigma}{Da} \right) \right] \frac{\partial \psi}{\partial x} dx}_{T_5} \\
& - \underbrace{\frac{Ra_T}{\Lambda} \int_0^{1/A} \tilde{X}_i(x) \frac{\partial \theta_H}{\partial x} dx}_{T_8} - \underbrace{\frac{Ra_T N}{\Lambda} \int_0^{1/A} \tilde{X}_i(x) \frac{\partial \phi_H}{\partial x} dx}_{T_9} - \underbrace{\frac{Ra_T A(1+N)}{\Lambda} \int_0^{1/A} \tilde{X}_i(x) dx}_{T_{10}}
\end{aligned} \tag{5.120}$$

Os termos não transformáveis desta equação são estimados pela substituição das fórmulas inversas, os termos T_1 a T_{10} são então manipulados resultando na EDO desejada.

$$\begin{aligned}
T_1 &= \int_0^{1/A} \tilde{X}_i(x) \frac{\partial^4 \psi}{\partial z^4} dx = \frac{d^4 \tilde{\psi}_i}{dz^4} \\
T_2 &= -2 \int_0^{1/A} \tilde{X}_i(x) \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^2 \partial z^2} dx = -2 \sum_{j=1}^{\infty} A_{ij} \frac{d^2 \tilde{\psi}_j}{dz^2} \\
T_3 &= - \int_0^{1/A} \tilde{X}_i(x) \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} dx = -\alpha_i^4 \tilde{\psi}_i \\
T_4 &= \frac{1}{\Lambda} \int_0^{1/A} \tilde{X}_i(x) \frac{\varsigma}{Da} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) dx = \frac{1}{\Lambda} \sum_{j=1}^{\infty} \left[\left(\int_0^{1/A} \frac{\varsigma}{Da} X_i X_j dx \right) \tilde{\psi}_j + \frac{1}{Da} B_{ij} \frac{d^2 \tilde{\psi}_j}{dz^2} \right] \\
T_5 &= \frac{1}{\Lambda} \int_0^{1/A} \tilde{X}_i(x) \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{\varsigma}{Da} \right) \right] \frac{\partial \psi}{\partial x} dx = \frac{1}{\Lambda} \sum_{j=1}^{\infty} \left(- \int_0^{1/A} \left(\frac{\varsigma}{Da} X_i X_j dx \right) \tilde{\psi}_j - \frac{1}{Da} C_{ij} \tilde{\psi}_j \right)
\end{aligned}$$

Fazendo $T_4 + T_5$ e fazendo $\varsigma = 1$ na equação resultante válida para a região porosa temos

$$\begin{aligned}
T_4 + T_5 &= \frac{1}{Da \Lambda} \sum_{j=1}^{\infty} \left(B_{ij} \frac{d^2 \tilde{\psi}_j}{dz^2} - C_{ij} \tilde{\psi}_j \right) \\
T_6 &= - \frac{1}{\text{Pr} \Lambda} \int_0^{1/A} \tilde{X}_i(x) (1-\varsigma) \left[\frac{\partial \psi}{\partial z} \left(\frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial x \partial z^2} \right) - \frac{\partial \psi}{\partial x} \left(\frac{\partial^3 \psi}{\partial x^2 \partial z} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial z^3} \right) \right] dx \\
T_7 &= - \frac{1}{\text{Pr} \Lambda} \int_0^{1/A} \tilde{X}_i(x) \frac{\partial}{\partial x} [1-\varsigma] \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} \right) dx
\end{aligned}$$

Integrando por partes

$$\begin{aligned}
u &= \tilde{X}_i(x) \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} \right) \\
du &= \left[X_i'(x) \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} \right] + \tilde{X}_i \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^2 \partial z} \right) \\
dv &= \frac{\partial}{\partial x} [1 - \varsigma] \\
v &= [1 - \varsigma]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_7 &= \frac{1}{\text{Pr} \Lambda} \int_0^{1/A} (1 - \varsigma) X_i'(x) \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} \right) dx \\
&+ \frac{1}{\text{Pr} \Lambda} \int_0^{1/A} (1 - \varsigma) \tilde{X}_i(x) \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^2 \partial z} \right) dx
\end{aligned}$$

Fazendo $T_6 + T_7$

$$\begin{aligned}
T_6 + T_7 &= -\frac{1}{\text{Pr} \Lambda} \int_0^{1/A} (1 - \varsigma) \left[\tilde{X}_i \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial^3 \psi}{\partial x \partial z^2} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^3 \psi}{\partial z^3} \right) \right. \\
&\quad \left. - \tilde{X}_i' \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} \right) \right] dx
\end{aligned}$$

Substituindo as fórmulas de inversão e fazendo $\varsigma = 0$ na equação resultante válida para a região fluida tem-se.

$$\begin{aligned}
T_6 + T_7 &= -\frac{1}{\text{Pr} \Lambda} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left(D_{ijk} \frac{d\tilde{\psi}_j}{dz} \frac{d^2 \tilde{\psi}_j}{dz^2} - D_{ijk} \frac{d^3 \tilde{\psi}_j}{dz^3} \tilde{\psi}_k - E_{ijk} \frac{d\tilde{\psi}_j}{dz} \tilde{\psi}_k \right) \\
T_8 &= -\frac{Ra_T}{\Lambda} \int_0^{1/A} \tilde{X}_i(x) \frac{\partial \theta_H}{\partial x} dx = -\frac{Ra_T}{\Lambda} \sum_{j=1}^{\infty} F_{ij} \tilde{\theta}_{Hj} \\
T_9 &= -\frac{Ra_T N}{\Lambda} \int_0^{1/A} \tilde{X}_i(x) \frac{\partial \theta_H}{\partial x} dx = -\frac{Ra_T N}{\Lambda} \sum_{j=1}^{\infty} G_{ij} \tilde{\phi}_{Hj} \\
T_{10} &= -\frac{Ra_T A(1+N)}{\Lambda} \int_0^{1/A} \tilde{X}_i(x) dx = -\frac{Ra_T A(1+N)}{\Lambda} H_i
\end{aligned}$$

Substituindo os T_l a T_{10} na equação transformada obtêm-se os coeficientes da EDO.

$$A_{ij} = \int_0^{1/A} \tilde{X}_i \tilde{X}_j' dx = A \int_0^{1/A} X_i X_j' dx \quad (5.121)$$

$$B_{ij} = \int_0^{x_p} \tilde{X}_i \tilde{X}_j dx = A \int_0^{x_p} X_i X_j dx \quad (5.122)$$

$$C_{ij} = \int_0^{x_p} \tilde{X}_i' \tilde{X}_j' dx = A \int_0^{x_p} X_i' X_j' dx \quad (5.123)$$

$$D_{ijk} = \int_{x_p}^{1/A} \tilde{X}_i \tilde{X}_j \tilde{X}_k' dx = A\sqrt{A} \int_{x_p}^{1/A} X_i X_j X_k' dx \quad (5.124)$$

$$E_{ijk} = \int_{x_p}^{1/A} \tilde{X}_i' (\tilde{X}_j \tilde{X}_k'' - \tilde{X}_j' \tilde{X}_k') dx = A\sqrt{A} \int_{x_p}^{1/A} X_i' (X_j X_k'' - X_j' X_k') dx \quad (5.125)$$

$$F_{ijk} = \int_0^{1/A} \tilde{X}_i \tilde{\Gamma}_j dx = A\sqrt{2} \int_0^{1/A} X_i \Gamma_j dx \quad (5.126)$$

$$G_{ij} = \int_0^{1/A} \tilde{X}_i \tilde{\Omega}_j dx = A\sqrt{2} \int_0^{1/A} X_i \Omega_j dx \quad (5.127)$$

$$H_{ij} = \int_0^{1/A} \tilde{X}_i dx = \sqrt{A} \int_0^{1/A} X_i dx \quad (5.128)$$

Da mesma forma para as equações (5.70 e 5.71), multiplicando-se respectivamente por $\int_0^{1/A} \tilde{\Gamma}_i dx$ e $\int_0^{1/A} \tilde{\Omega}_i dx$, para obter-se as EDOs para o perfil de temperatura e concentração baseadas em expansões a partir da solução do problema auxiliar:

Transformação integral para o campo de temperatura

$$\frac{1}{R_k} \int_0^{1/A} \tilde{\Gamma}_i(x) \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \theta_H}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \theta_H}{\partial z} + A \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) dx = - \int_0^{1/A} \tilde{\Gamma}_i(x) \left(\frac{\partial^2 \theta_H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta_H}{\partial z^2} \right) dx \quad (5.129)$$

Utilizando as fórmulas inversas nos termos não transformáveis, temos:

$$\int_0^{1/A} \tilde{\Gamma}_i \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \theta_H}{\partial x} dx = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} I_{ijk} \tilde{\theta}_{Hj} \frac{d\tilde{\psi}_k}{dz} \quad (5.130)$$

$$\int_0^{1/A} \tilde{\Gamma}_i \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \theta_H}{\partial z} dx = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} J_{ijk} \frac{d\tilde{\theta}_{Hj}}{dz} \tilde{\psi}_k \quad (5.131)$$

$$\int_0^{1/A} \tilde{\Gamma}_i \frac{\partial \psi}{\partial z} dx = \sum_{j=1}^{\infty} K_{ij} \frac{d\tilde{\psi}_j}{dz} \quad (5.132)$$

E os coeficientes obtidos analiticamente, são definidos pelas integrais:

$$I_{ijk} = \int_0^{1/A} \tilde{\Gamma}_i \tilde{\Gamma}_j' \tilde{X}_k dx = 2A\sqrt{A} \int_0^{1/A} \Gamma_i \Gamma_j' X_k dx \quad (5.133)$$

$$J_{ijk} = \int_0^{1/A} \tilde{\Gamma}_i \tilde{\Gamma}_j \tilde{X}_k' dx = 2A\sqrt{A} \int_0^{1/A} \Gamma_i \Gamma_j X_k' dx \quad (5.134)$$

$$K_{ij} = \int_0^{1/A} \tilde{\Gamma}_i \tilde{X}_j dx = A\sqrt{2} \int_0^{1/A} \Gamma_i X_j dx \quad (5.135)$$

Para o campo de concentração temos a seguinte transformação

$$\frac{Le}{R_D} \int_0^{1/A} \tilde{\Omega}_i(x) \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \phi_H}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \phi_H}{\partial z} + A \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) dx = - \int_0^{1/A} \tilde{\Omega}_i(x) \left(\frac{\partial^2 \phi_H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_H}{\partial z^2} \right) dx \quad (5.136)$$

Utilizando as fórmulas inversas nos termos não transformáveis, temos:

$$\int_0^{1/A} \tilde{\Omega}_i(x) \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \phi_H}{\partial x} dx = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} L_{ijk} \tilde{\phi}_{Hj} \frac{d\tilde{\psi}_k}{dz} \quad (5.137)$$

$$\int_0^{1/A} \tilde{\Omega}_i(x) \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \phi_H}{\partial z} dx = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} M_{ijk} \frac{d\tilde{\phi}_{Hj}}{dz} \psi_k \quad (5.138)$$

$$\int_0^{1/A} \tilde{\Omega}_i(x) \frac{\partial \psi}{\partial z} dx = \sum_{j=1}^{\infty} N_{ij} \frac{d\psi_j}{dz} \quad (5.139)$$

Os coeficientes obtidos são:

$$L_{ijk} = \int_0^{1/A} \tilde{\Omega}_i \tilde{\Omega}_j' \tilde{X}_k dx = 2A\sqrt{A} \int_0^{1/A} \Omega_i \Omega_j' X_k dx \quad (5.140)$$

$$M_{ijk} = \int_0^{1/A} \tilde{\Omega}_i \tilde{\Omega}_j \tilde{X}_k' dx = 2A\sqrt{A} \int_0^{1/A} \Omega_i \Omega_j X_k' dx \quad (5.141)$$

$$N_{ij} = \int_0^{1/A} \tilde{\Omega}_i \tilde{X}_j dx = A\sqrt{2} \int_0^{1/A} \Omega_i X_j dx \quad (5.142)$$

Substituindo os termos T_l a T_{l0} , e as equações (5.133-5.135) e (5.140-5.142), respectivamente nas equações (5.120), (5.129) e (5.136) e reescrevendo-as, define-se o seguinte sistema acoplado:

$$\begin{aligned} \frac{d^4 \tilde{\psi}_i}{dz^4} = & -t_i^4 \tilde{\psi}_i - 2 \sum_{j=1}^{\infty} A_{ij} \frac{d^2 \tilde{\psi}_j}{dz^2} + \frac{1}{Da\Lambda} \sum_{j=1}^{\infty} \left(B_{ij} \frac{d^2 \tilde{\psi}_j}{dz^2} - C_{ij} \tilde{\psi}_j \right) \\ & - \frac{1}{Pr\Lambda} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left(D_{ijk} \frac{d\tilde{\psi}_j}{dz} \frac{d^2 \tilde{\psi}_k}{dz^2} - D_{ijk} \frac{d^3 \tilde{\psi}_j}{dz^3} \tilde{\psi}_k - E_{ijk} \frac{d\tilde{\psi}_j}{dz} \tilde{\psi}_k \right) \\ & - \frac{Ra_T}{\Lambda} \left(\sum_{j=1}^{\infty} F_{ij} \tilde{\theta}_{Hj} - N \sum_{j=1}^{\infty} G_{ij} \tilde{\phi}_{Hj} \right) - \frac{Ra_T A(1+N)}{\Lambda} H_i \end{aligned} \quad (5.143)$$

$$\frac{d^2 \tilde{\theta}_{Hi}}{dz^2} = \zeta_i^2 \tilde{\theta}_{Hi} - \frac{1}{R_k} \left[\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left(I_{ijk} \tilde{\theta}_{Hj} \frac{d\tilde{\psi}_k}{dz} - J_{ijk} \frac{d\tilde{\theta}_{Hj}}{dz} \tilde{\psi}_k \right) \right] - \frac{A}{R_k} \sum_{j=1}^{\infty} K_{ij} \frac{d\tilde{\psi}_j}{dz} \quad (5.144)$$

$$\frac{d^2 \tilde{\phi}_{Hi}}{dz^2} = \eta_i^2 \tilde{\phi}_{Hi} - \frac{Le}{R_D} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left(L_{ijk} \tilde{\phi}_{Hj} \frac{d\tilde{\psi}_k}{dz} - M_{ijk} \frac{d\tilde{\phi}_{Hj}}{dz} \tilde{\psi}_k \right) - A \frac{Le}{R_D} \sum_{j=1}^{\infty} N_{ij} \frac{d\tilde{\psi}_j}{dz} \quad (5.145)$$

Para $i = 1, 2, 3, \dots$

Condições de contorno

$$\psi(0) = 0 \quad (5.146)$$

$$\frac{d\tilde{\psi}_i(0)}{dz} = 0 \quad (5.147)$$

$$\frac{d\tilde{\theta}_{Hi}(0)}{dz} = 0 \quad (5.148)$$

$$\frac{d\tilde{\phi}_{Hi}(0)}{dz} = 0 \quad (5.149)$$

$$\tilde{\psi}_i(1) = 0 \quad (5.150)$$

$$\frac{d\tilde{\psi}_i(1)}{dz} = 0 \quad (5.151)$$

$$\frac{d\tilde{\theta}_{Hi}(1)}{dz} = 0 \quad (5.152)$$

$$\frac{d\tilde{\phi}_{Hi}(1)}{dz} = 0 \quad (5.153)$$

Dessa forma o problema diferencial parcial foi transformado num sistema infinito de equações diferenciais ordinárias acopladas, de quarta ordem e não linear, com condições de contorno homogêneas em dois pontos.

Cálculo do Número de Nusselt médio

Para Nusselt avaliado na parede esquerda temos

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left[\frac{\partial \theta}{\partial x} - \text{Pr}(u\theta) \right] dz \\ \bar{Nu}_l = - \int_0^1 \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=0} dz \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=0} = A + \frac{d\Gamma_i}{dx} \Big|_{x=0} \tilde{\theta}_{Hi}(z) \\ \frac{d\tilde{\Gamma}_i}{dx} \Big|_{x=0} = \sqrt{2A}\zeta_i \\ \bar{Nu}_l = -A - \sqrt{2A} \sum_{i=1}^{\infty} \zeta_i g_i^{**} \end{aligned} \quad (5.154)$$

$$g_i^{**} = \int_0^1 \tilde{\theta}_{Hi}(z) dz \quad (5.155)$$

Cálculo do Sherwood médio

Para Sherwood avaliado na parede esquerda temos

$$\begin{aligned} \bar{Sh} = \int_0^1 \left[\frac{\partial \phi}{\partial x} - \text{Pr}(u\phi) \right] dz \\ \bar{Sh}_l = - \int_0^1 \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_{x=0} dz \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_{x=0} &= A + \left. \frac{d\tilde{\Omega}_i}{dx} \right|_{x=0} \tilde{\phi}_{Hi}(z) \\
\left. \frac{d\tilde{\Omega}_i}{dx} \right|_{x=0} &= \sqrt{2A}\eta_i \\
\bar{S}h_i &= -A - \sqrt{2A} \sum_{i=1}^{\infty} \eta_i h_i^{**}
\end{aligned} \tag{5.156}$$

$$h_i^{**} = \int_0^1 \tilde{\phi}_{Hi}(z) dz \tag{5.157}$$

5.4 – RESULTADOS

Para a solução do sistema diferencial ordinário de quarta ordem foi utilizada a subrotina BVPFD da biblioteca IMSL (2010), onde um erro relativo de 10^{-4} foi prescrito.

Um código em Fortran 2003 foi desenvolvido e implementado em um computador, com processador Intel Core i7. Foram estudados neste trabalho a influência do número de Darcy, a influência da espessura da camada porosa x_p , a influência da razão de fluatibilidade N e a influência do número de Lewis, no escoamento, na transferência de calor e na transferência de massa.

5.4.1 VERIFICAÇÃO NUMÉRICA

A mesma verificação numérica realizada para a fomulação Darcy-Brinkman-Forchheimer no capítulo IV foi utilizada para verificação da formulação de Darcy-Brinkman deste capítulo os resutados de Leal (1996) para a função corrente e temperatura são apresentados nas figuras 5.2 a 5.9, novamente o número de Nusselt médio global foi avaliado e mostrado na tabela (5.1). Nas tabelas (5.2-5.5) são mostrados os valores do módulo de função corrente máxima para as coordenadas x e y mostradas na referida tabela, mostrando excelente concordância entre os resultados encontrados neste trabalho e os de Leal (1996), para convecção natural puramente térmica. Para a verificação da solução para a convecção natural termosolutal foi utilizado o resultado de função corrente de Neculae (2003) e apresentado na figura (5.10) para $Ra_T = 10^6$ $Pr = 10$ $Da = 1$ $N = 10$ $x_p = 0,1$ $Le = 1$ $A = 0,2$ mostrando boa concordância entre estes resultados e os econtrados neste trabalho.

5.4.1.1 VERIFICAÇÃO FUNÇÃO CORRENTE – LEAL (1996)

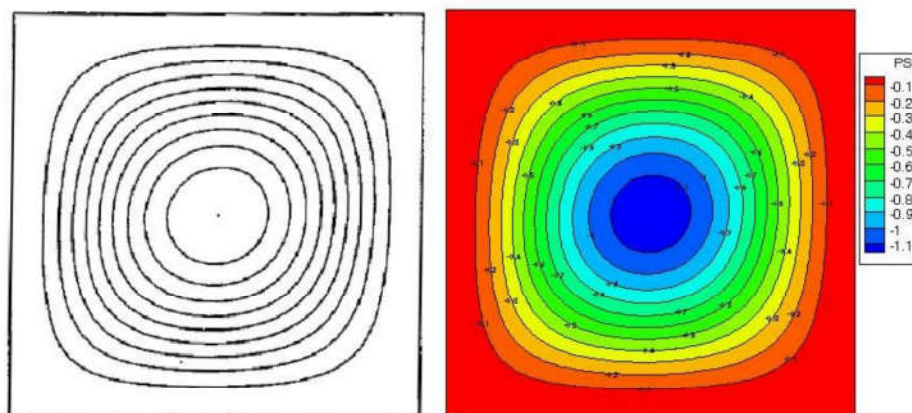


Figura 5. 2 - Função Corrente Leal (1996) - $Ra_T = 10^3$ $Pr = 0,71$ $A = 1$

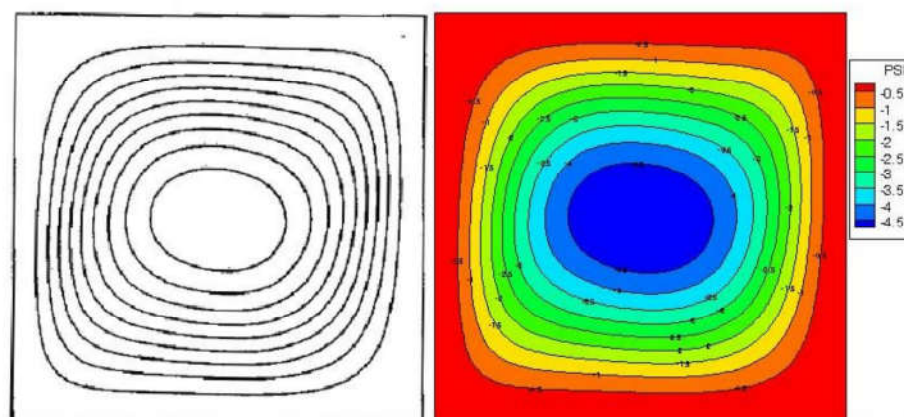


Figura 5. 3 - Função Corrente Leal (1996) - $Ra_T = 10^4$ $Pr = 0,71$ $A = 1$

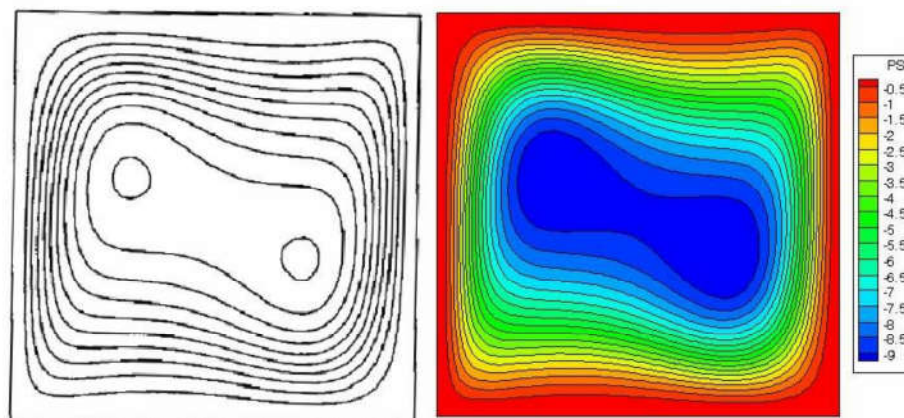


Figura 5. 4 - Função Corrente Leal (1996) - $Ra_T = 10^5$ $Pr = 0,71$ $A = 1$

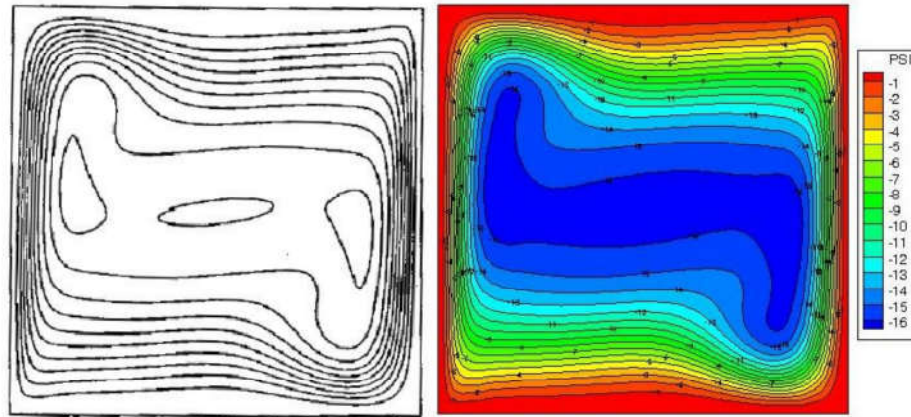


Figura 5. 5 - Função Corrente Leal (1996) - $Ra_T = 10^6$ $Pr = 0,71$ $A = 1$

5.4.1.2 VERIFICAÇÃO PERFIL DE TEMPERATURA – LEAL (1996)

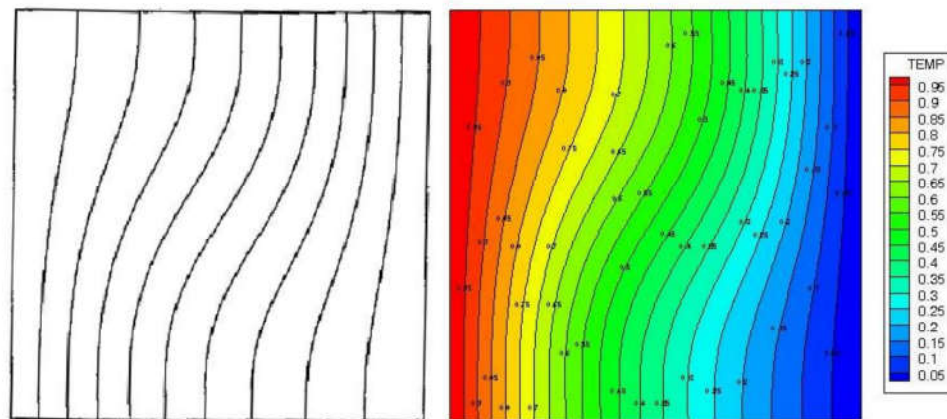


Figura 5. 6 - Isotermas Leal (1996) - $Ra_T = 10^3$ $Pr = 0,71$ $A = 1$

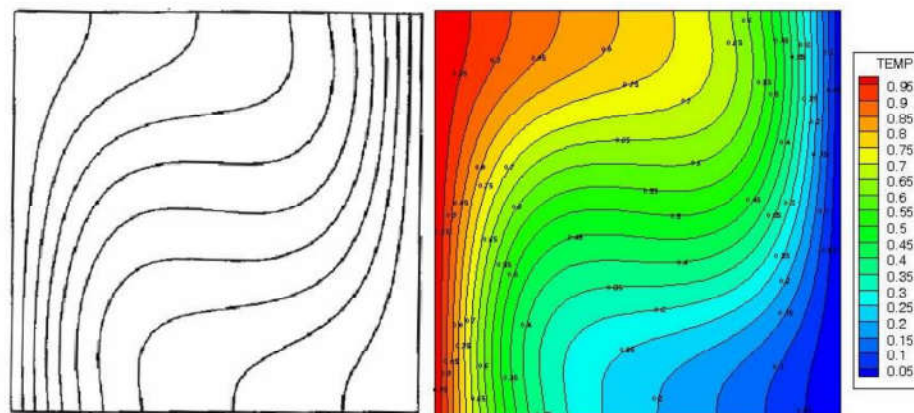


Figura 5. 7 - Isotermas Leal (1996) - $Ra_T = 10^4$ $Pr = 0,71$ $A = 1$

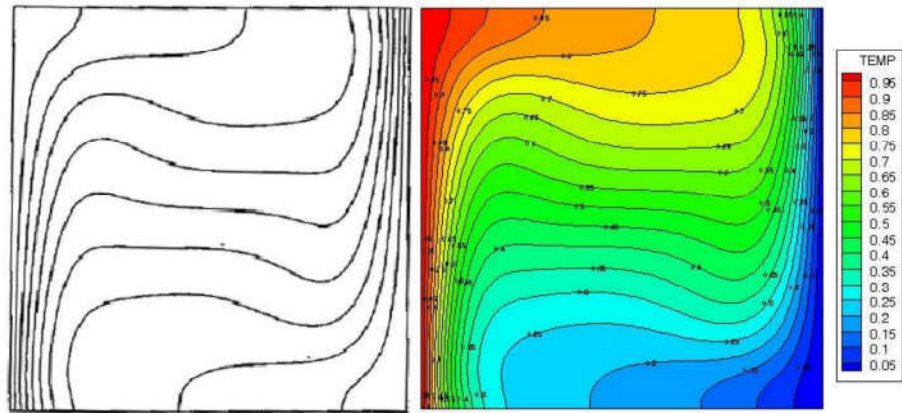


Figura 5. 8 - Isotermas Leal (1996) - $Ra_T = 10^5$ $Pr = 0,71$ $A = 1$

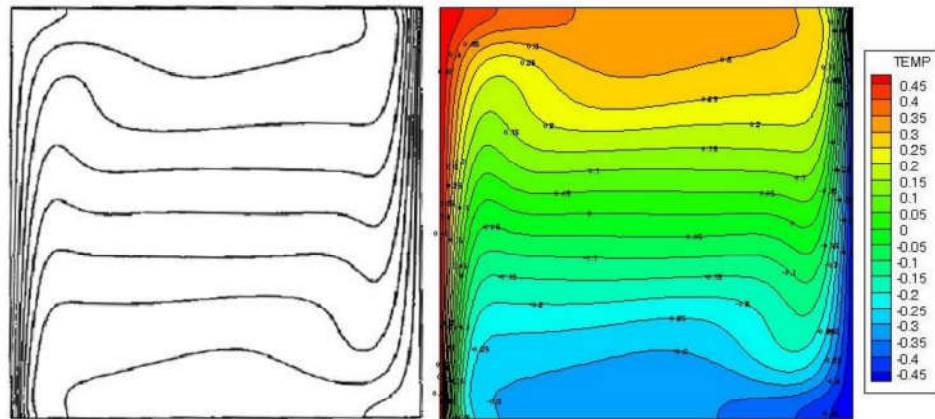


Figura 5. 9 - Isotermas Leal (1996) - $Ra_T = 10^6$ $Pr = 0,71$ $A = 1$

Tabela 5. 1 - Valores de Nusselt Médio – Leal (1996)

Número de Rayleigh	Nusselt – Leal (1996)	Nusselt – Presente Trabalho
$Ra_T = 10^3$	1,118	1,118
$Ra_T = 10^4$	2,245	2,245
$Ra_T = 10^5$	4,522	4,521
$Ra_T = 10^6$	8,825	8,815

Tabela 5. 2 - Módulo de função corrente –Leal (1996), $Ra = 10^3$

$Ra_T - 10^3$	$ \psi $ – Leal (1996)	$ \psi $ – Presente Trabalho
$x = 0,1$ $y = 0,1$	$3,598.10^{-2}$	$3,598.10^{-2}$
$x = 0,1$ $y = 0,5$	0,1856	0,1856
$x = 0,1$ $y = 0,9$	$2,516.10^{-2}$	$2,5160.10^{-2}$

Tabela 5. 3 - Módulo de função corrente –Leal (1996), $Ra = 10^4$

$Ra_T - 10^4$	$ \psi $ – Leal (1996)	$ \psi $ – Presente Trabalho
$x = 0,1$ $y = 0,1$	0,3323	0,3322
$x = 0,1$ $y = 0,5$	1,260	1,260
$x = 0,1$ $y = 0,9$	0,1718	0,1718

Tabela 5. 4 - Módulo de função corrente –Leal (1996), $Ra = 10^5$

$Ra_T - 10^5$	$ \psi $ – Leal (1996)	$ \psi $ – Presente Trabalho
$x = 0,1$ $y = 0,1$	1,699	1,692
$x = 0,1$ $y = 0,5$	5,365	5,364
$x = 0,1$ $y = 0,9$	1,215	1,2194

Tabela 5. 5 - Módulo de função corrente –Leal (1996), $Ra = 10^6$

$Ra_T - 10^6$	$ \psi $ – Leal (1996)	$ \psi $ – Presente Trabalho
$x = 0,1$ $y = 0,1$	4,606	4,621
$x = 0,1$ $y = 0,5$	15,32	15,31
$x = 0,1$ $y = 0,9$	7,280	7,273

As tabelas (5.6 – 5.7) mostram o comportamento da convergência para a função corrente para os números de Rayleigh 10^3 e 10^6 respectivamente em uma cavidade retangular totalmente fluida para a convecção puramente térmica, pode-se notar que a convergência não é uniforme em toda a cavidade, apresentando uma convergência mais rápida para o plano horizontal médio da cavidade ($y = 1/2$). A convergência também é maior para números de Rayleigh mais baixos garantindo uma convergência no quarto dígito significativo. Para altos valores de Rayleigh, os termos convectivos e de inércia, atuam como termos fonte para bases difusivas propostas para as expansões, o que acaba por retardar o processo de convergência como um todo, foi garantida uma convergência neste caso para o segundo dígito significativo.

Tabela 5. 6 - Convergência do módulo da função corrente para $Ra = 10^3$ - Leal (1996)

$Ra = 10^3; Pr = 0,71$			
$NV = NT$	$x = 0,1$ $y = 0,1$	$x = 0,1$ $y = 0,5$	$x = 0,1$ $y = 0,9$
5	0.34794E-01	0.18564E+00	0.25706E-01
10	0.35989E-01	0.18564E+00	0.25151E-01
15	0.35990E-01	0.18564E+00	0.25149E-01
20	0.35981E-01	0.18561E+00	0.25160E-01
25	0.35982E-01	0.18561E+00	0.25159E-01

30	0.35983E-01	0.18562E+00	0.25157E-01
<i>NV = NT</i>	<i>x = 0,5</i> <i>y = 0,1</i>	<i>x = 0,5</i> <i>y = 0,5</i>	<i>x = 0,5</i> <i>y = 0,9</i>
5	0.17733E+00	0.11756E+01	0.17733E+00
10	0.17706E+00	0.11747E+01	0.17706E+00
15	0.17705E+00	0.11746E+01	0.17705E+00
20	0.17705E+00	0.11746E+01	0.17705E+00
25	0.17705E+00	0.11746E+01	0.17705E+00
30	0.17705E+00	0.11746E+01	0.17705E+00
<i>NV = NT</i>	<i>x = 0,9</i> <i>y = 0,1</i>	<i>x = 0,9</i> <i>y = 0,5</i>	<i>x = 0,9</i> <i>y = 0,9</i>
5	0.25706E-01	0.18353E+00	0.34794E-01
10	0.25151E-01	0.18564E+00	0.35989E-01
15	0.25149E-01	0.18564E+00	0.35990E-01
20	0.25160E-01	0.18561E+00	0.35981E-01
25	0.25159E-01	0.18561E+00	0.35982E-01
30	0.25157E-01	0.18562E+00	0.35983E-01

Tabela 5. 7 - Convergência do módulo da função corrente para $Ra = 10^6$ - Leal (1996)

<i>Ra = 10⁶; Pr = 0,71</i>			
<i>NV = NT</i>	<i>x = 0,1</i> <i>y = 0,1</i>	<i>x = 0,1</i> <i>y = 0,5</i>	<i>x = 0,1</i> <i>y = 0,9</i>
5	0.16475E+02	0.18043E+02	0.56802E+01
10	0.37129E+01	0.15760E+02	0.50726E+01
15	0.75611E+01	0.15282E+02	0.47064E+01
20	0.73852E+01	0.15237E+02	0.44261E+01
25	0.72680E+01	0.15280E+02	0.45553E+01
30	0.72731E+01	0.15308E+02	0.46212E+01
<i>NV = NT</i>	<i>x = 0,5</i> <i>y = 0,1</i>	<i>x = 0,5</i> <i>y = 0,5</i>	<i>x = 0,5</i> <i>y = 0,9</i>

5	0.31214E+01	0.32446E+02	0.31214E+01
10	0.35723E+01	0.16899E+02	0.35723E+01
15	0.30161E+01	0.16177E+02	0.30161E+01
20	0.31453E+01	0.16283E+02	0.31453E+01
25	0.32069E+01	0.16350E+02	0.32069E+01
30	0.31882E+01	0.16371E+02	0.31882E+01
$NV = NT$	$x = 0,9$ $y = 0,1$	$x = 0,9$ $y = 0,5$	$x = 0,9$ $y = 0,9$
5	0.56802E+01	0.18043E+02	0.16475E+02
10	0.50726E+01	0.15760E+02	0.37129E+01
15	0.47064E+01	0.15282E+02	0.75611E+01
20	0.44261E+01	0.15237E+02	0.73852E+01
25	0.45553E+01	0.15280E+02	0.72680E+01
30	0.46212E+01	0.15308E+02	0.72731E+01

5.4.1.2 VERIFICAÇÃO FUNÇÃO CORRENTE – NECULAE (2003)

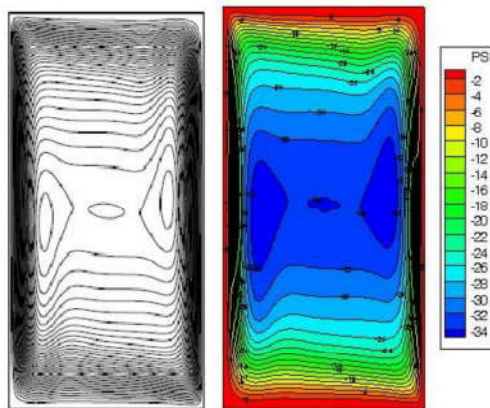


Figura 5. 10 - Verificação Neculae (2003) - $Ra_T = 10^6$ $Pr = 10$ $Da = 1$ $N = 10$ $x_p = 0,1$ $Le = 1$ $A = 0,2$

A tabela (5.8) mostra o comportamento de convergência para a convecção termosolutal para os resultados de função corrente encontrados por Neculae (2003) e apresentados na figura (5.10). Os resultados são equivalentes aos obtidos para convecção termosolutal em meio fluido uma vez que a permeabilidade é alta ($Da = 1$) e

o meio poroso comporta-se como fluido sem oferecer nenhuma resistência ao fluxo. A convergência é alcançada para o segundo e terceiro dígitos significativos em uma expansão de 25 termos. Para valores mais baixos de Ra_T como os usados neste trabalho, a convergência alcançada é ainda maior uma vez que os efeitos convectivos são menos pronunciados, no entanto o número de termos usados para o cálculo em todos os casos foram mantidos em 30 termos.

Tabela 5. 8 - Convergência do módulo da função corrente Neculae (2003)

$Ra_T = 10^6$ $Pr = 10$ $Da = 1$ $N = 10$ $x_p = 0,1$ $Le = 1$ $A = 0,2$			
$NV = NT$	$x = 0,1$ $y = 0,1$	$x = 0,1$ $y = 0,5$	$x = 0,1$ $y = 0,9$
5	0.43838E+02	0.61494E+02	0.33783E+02
10	0.18808E+02	0.36109E+02	0.20369E+02
15	0.15752E+02	0.35052E+02	0.20051E+02
20	0.16221E+02	0.35179E+02	0.19806E+02
25	0.16230E+02	0.35308E+02	0.19843E+02
$NV = NT$	$x = 0,25$ $y = 0,1$	$x = 0,25$ $y = 0,5$	$x = 0,25$ $y = 0,9$
5	0.37257E+02	0.63343E+02	0.40721E+02
10	0.16803E+02	0.35805E+02	0.17589E+02
15	0.15676E+02	0.33577E+02	0.16511E+02
20	0.16043E+02	0.33908E+02	0.16855E+02
25	0.16106E+02	0.34026E+02	0.16875E+02
$NV = NT$	$x = 0,4$ $y = 0,1$	$x = 0,4$ $y = 0,5$	$x = 0,4$ $y = 0,9$
5	0.30812E+02	0.61250E+02	0.47580E+02
10	0.18964E+02	0.36028E+02	0.19976E+02
15	0.18751E+02	0.34991E+02	0.16611E+02
20	0.18529E+02	0.35113E+02	0.17146E+02
25	0.18652E+02	0.35241E+02	0.17111E+02

5.4.2 RESULTADOS NUMÉRICOS

5.4.2.1 INFLUÊNCIA DE Da NA FUNÇÃO CORRENTE

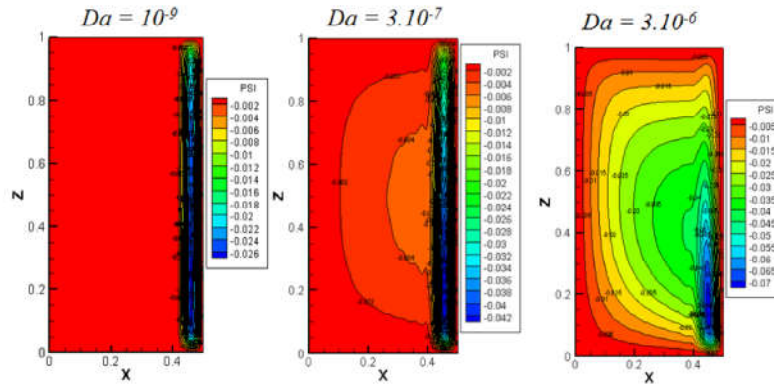


Figura 5. 11 - Influência do número de Darcy Da - $Ra_T = 10^4$, $Pr = 10$, $Le = 100$, $N = 10$, $A = 2$, $x_p = 0,8$

Pode ser verificado a partir da visualização de fluxo das linhas de corrente figura (5.11), que com o aumento da permeabilidade (isto é, do número de Darcy) o fluxo penetra progressivamente na camada porosa. Para baixos valores de Da o fluxo está totalmente confinado à região fluida, e não permite que este penetre na camada porosa, pode-se notar neste caso que existe um limite de contorno na interface fluido/poro. A medida que o número de Darcy aumenta as linhas de função corrente mostram uma mudança acentuada na sua inclinação na interface fluido/porosa. Quando o número de Da é igual à unidade o meio poroso oferece uma resistência muito menor ao fluxo e a convecção natural ocorre em toda a cavidade.

5.4.2.2 INFLUÊNCIA DE Da NA TRANSFERÊNCIA DE CALOR

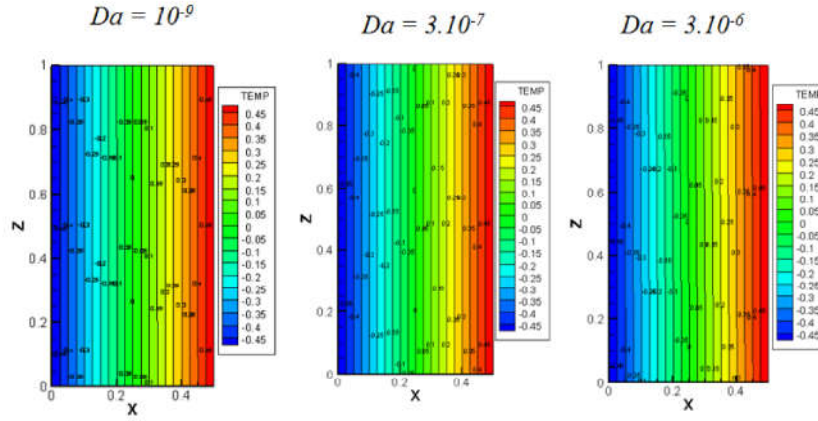


Figura 5. 12 - Influência do número de Darcy Da - $Ra_T = 10^4$, $Pr = 10$, $Le = 100$, $N = 10$, $A = 2$, $x_p = 0,8$

As isothermas mostradas na figura (5.12) nas camadas fluida e porosa são verticais e quase igualmente espaçadas, indicando que a transferência de calor se dá principalmente por condução, mesmo para números de Darcy elevados não se observa estratificação característica do fenômeno de convecção natural térmica. A transferência de calor na cavidade é principalmente por condução para todos os números de Darcy estudados. Este efeito deve-se ao elevado número de Lewis que favorece a condutividade térmica do meio em detrimento a convecção térmica.

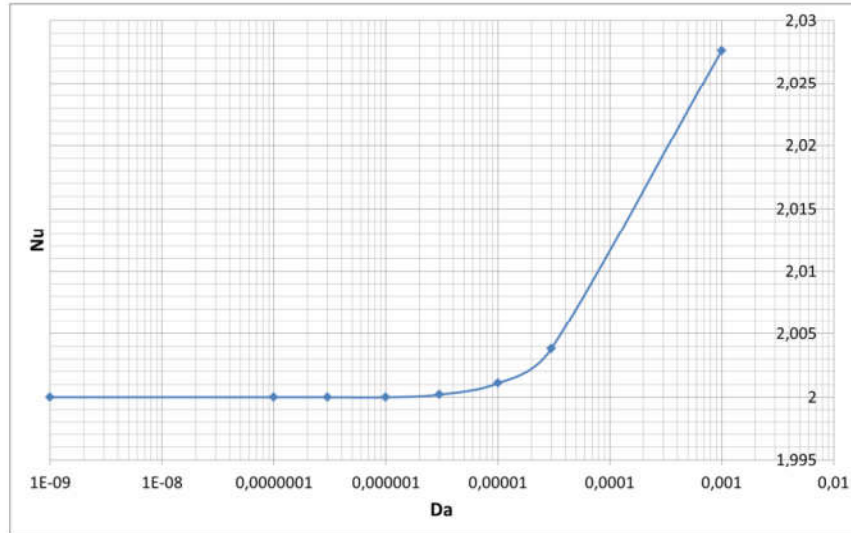


Figura 5. 13 - Influência do número de Darcy Da na transferência de calor - $Ra_T = 10^4$, $Pr = 10$, $Le = 100$, $N = 10$, $A = 2$, $x_p = 0,8$

A análise da figura (5.13) mostra a relação do número de Nusselt com o número de Darcy. Pode-se verificar que os valores de Nusselt são relativamente baixos. O número de Nusselt variou de 2 para 2,028 representando um aumento de 1,4% para toda a faixa de Darcy estudada, representando pouca influência deste parâmetro na transferência de calor na cavidade. Devido ao elevado número de Lewis neste caso estudado a convecção térmica é não tem grande influência na convecção natural do fluido. Ao avaliarmos a razão de fluutuabilidade N igual a 10, o número de Rayleigh solutal é 10 vezes maior que o número de Rayleigh térmico.

5.4.2.3 INFLUÊNCIA DE Da NA TRANSFERÊNCIA DE MASSA

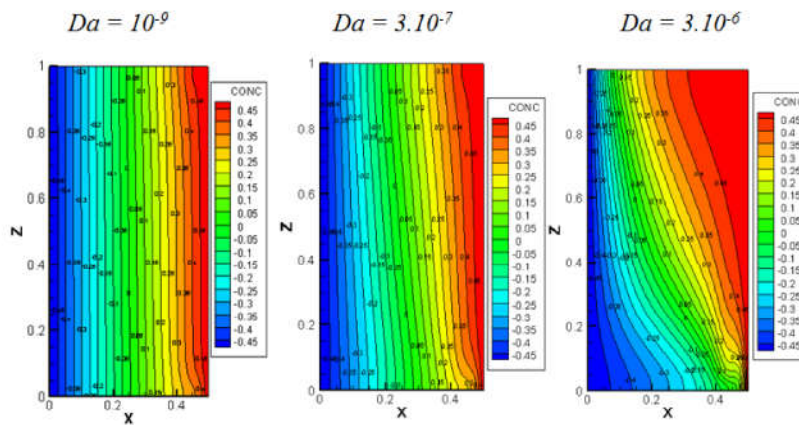


Figura 5. 14 - Influência do número de Darcy Da - $Ra_T = 10^4$, $Pr = 10$, $Le = 100$, $N = 10$, $A = 2$, $x_p = 0,8$

As isolinhas de concentração mostradas na figura (5.14) na camada porosa são verticais e quase igualmente espaçadas, indicando que a transferência de massa se processa por difusão molecular. Na região de fluido, existe uma estratificação no perfil de concentração para valores de Darcy elevados. À medida que a permeabilidade aumenta a transferência de massa convectiva torna-se predominante na cavidade, sendo esta a maior responsável pela convecção natural que ocorre no fluido. À medida que Da aumenta, o fluido penetrante provoca um aumento de transferência de massa no meio poroso, por convecção.

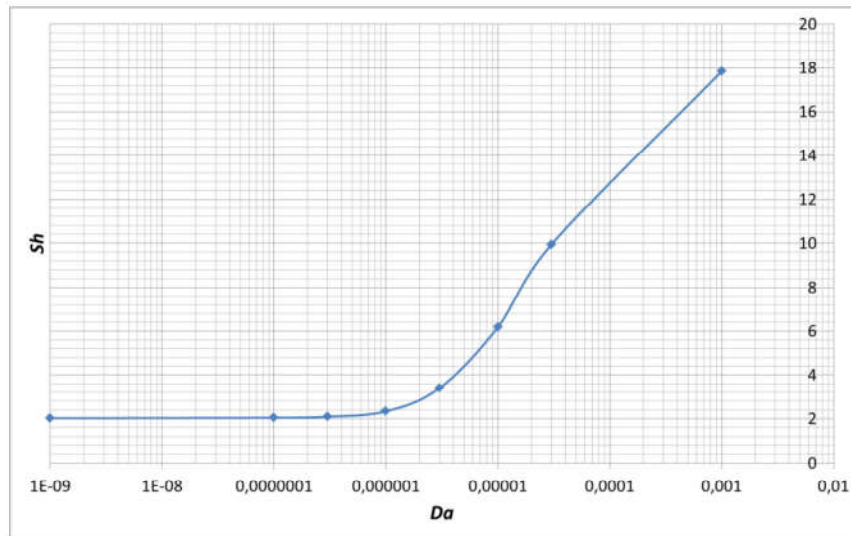


Figura 5.15 - Influência do número de Darcy Da na transferência de massa - $Ra_T = 10^4$, $Pr = 10$, $Le = 100$, $N = 10$, $A = 2$, $x_p = 0,8$

Ao analisarmos a variação do Número de Sherwood em função de Darcy Figura (5.15), vemos que a medida que o número de Darcy aumenta há um aumento significativo do número de Sherwood, passando de 2,0 para 18,0 quando Darcy varia de 10^{-9} para 10^{-3} , mostrando um elevado acréscimo na transferência de massa por convecção na cavidade retangular. Em valores elevados de permeabilidade ($Da > 10^{-3}$), o escoamento penetra completamente na camada porosa, o termo de Darcy é então desprezado frente aos termos de convecção e difusão viscosa, o movimento é regido pela equação de Navier-Stokes. A evolução da transferência de massa em função da permeabilidade na camada porosa tem as mesmas características que aquelas de transferência de calor em convecção puramente térmica.

5.4.2.4 INFLUÊNCIA DE x_p NA FUNÇÃO CORRENTE

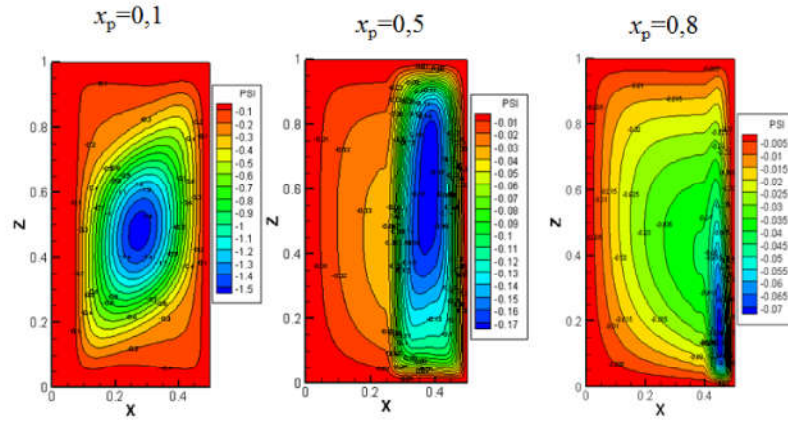


Figura 5. 16 - Influência da espessura da camada porosa x_p - $Ra_T = 10^4$, $Pr = 10$, $Le = 100$, $N = 10$, $A = 2$, $Da = 3 \cdot 10^{-6}$

Ao avaliarmos a figura (5.16), vemos que com o aumento da espessura porosa x_p , observa-se uma diminuição do módulo de função corrente passando de $|\psi|_{\max} = 1,5$ para $x_p = 0,1$ quando quase todo o domínio é fluido e $|\psi|_{\max} = 0,07$ para $x_p = 0,8$ quando o domínio é 80% poroso, devido ao fato de que a área onde ocorre a convecção natural é diminuída com o aumento de x_p . A penetração do fluxo diminui no meio poroso a medida que x_p aumenta para um determinado número de Darcy e Rayleigh. Para $x_p = 1$ corresponde à cavidade totalmente preenchida por meio poroso, onde a convecção natural termosolutal é mínima. À medida que x_p aumenta o núcleo de rotação convectiva tende a desaparecer.

5.4.2.5 INFLUÊNCIA DE x_p NA TRANSFERÊNCIA DE CALOR

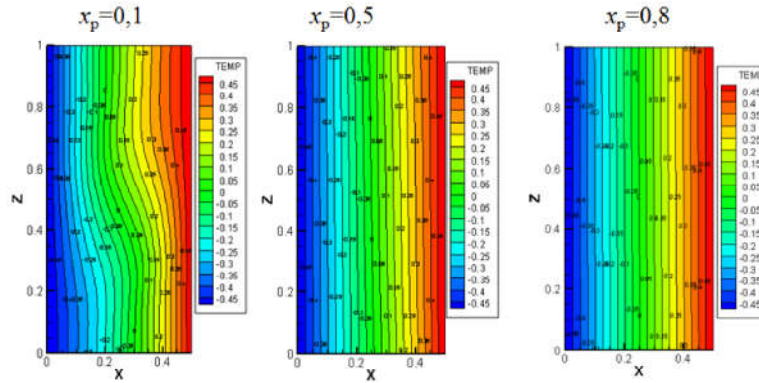


Figura 5. 17 - Influência da espessura da camada porosa x_p - $Ra_T = 10^4$, $Pr = 10$, $Le = 100$, $N = 10$, $A = 2$, $Da = 3.10^{-6}$

A figura (5.17) mostra que para x_p pequenos, onde a cavidade é quase que totalmente preenchida pelo meio fluido as isothermas apresentam linhas pouco distorcidas mostrando alguma convecção térmica. À medida que x_p aumenta, a transferência de calor por convecção diminui, passando a apresentar isothermas paralelas à parede e igualmente espaçadas, característica de transferência de calor por condução térmica.

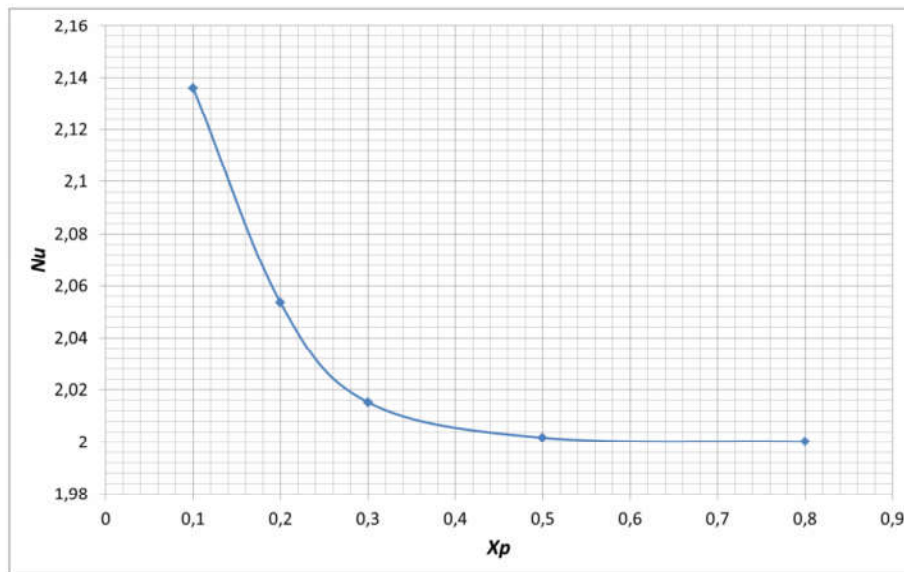


Figura 5. 18 - Influência da espessura da camada porosa de x_p na transferência de calor - $Ra_T = 10^4$, $Pr = 10$, $Le = 100$, $N = 10$, $A = 2$, $Da = 3.10^{-6}$

A figura (5.18) mostra o resultado para a variação do número de Nusselt médio, pode-se verificar uma pequena mudança no número de Nusselt variando de 2,14 quando x_p é igual a 0,1 para 2,00 quando x_p é igual a 0,8, mostrando novamente que mesmo para pequenas espessuras de camada porosa x_p não há um significativo aumento da convecção térmica na cavidade, isso se deve ao elevado valor do número de Lewis, onde favorece a convecção solutal em detrimento à convecção térmica. De modo geral o número de Nusselt tende a diminuir com o aumento da espessura da camada porosa.

5.4.2.6 INFLUÊNCIA DE x_p NA TRANSFERÊNCIA DE MASSA

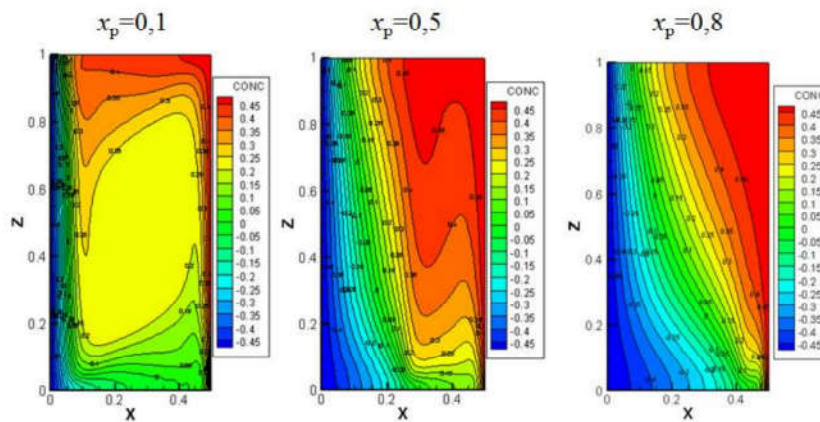


Figura 5. 19 - Influência da espessura da camada porosa x_p - $Ra_T = 10^4$, $Pr = 10$, $Le = 100$, $N = 10$, $A = 2$, $Da = 3.10^{-6}$

A figura (5.19) mostra as isolinhas de concentração em função da espessura da camada porosa. Para baixos valores de x_p , onde a cavidade é quase que totalmente preenchida pelo meio fluido as isolinhas de concentração apresentam-se estratificadas principalmente no centro da camada fluida devido ao efeito do núcleo rotacional do fluido. Pode ser visto que a contração tem grande importância na convecção natural da cavidade em estudo. Para a região porosa vê-se isolinhas paralelas a lateral da cavidade com espaçamentos constantes, nesta região a transferência de massa se dá predominantemente por difusão molecular. A medida que x_p aumenta a penetração do escoamento no meio poroso diminui, diminuindo assim a transferência de massa convectiva, que se restringe a região de fluido.

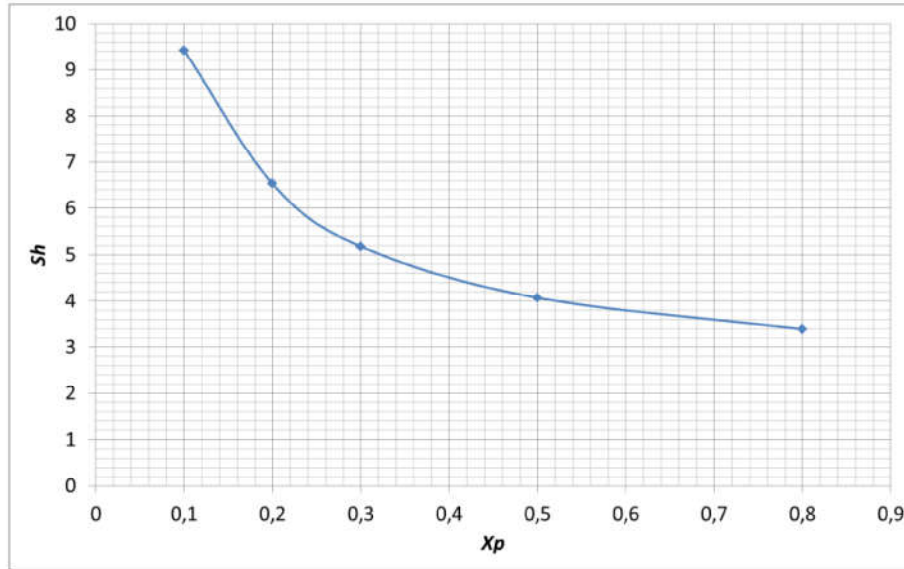


Figura 5.20 - Influência da espessura da camada porosa de x_p na transferência de massa - $Ra_T = 10^4$, $Pr = 10$, $Le = 100$, $N = 10$, $A = 2$, $Da = 3 \cdot 10^{-6}$

A figura (5.20) mostra a diminuição do número de Sherwood com o aumento da camada porosa. Com o aumento da espessura da camada porosa tanto a convecção térmica quanto a convecção solutal tendem a diminuir, o número de Sherwood passa de 9,4 quando a camada porosa ocupa 10% do domínio para 3,4 quando a camada porosa é 80% do domínio.

5.4.2.7 INFLUÊNCIA DE N NA FUNÇÃO CORRENTE

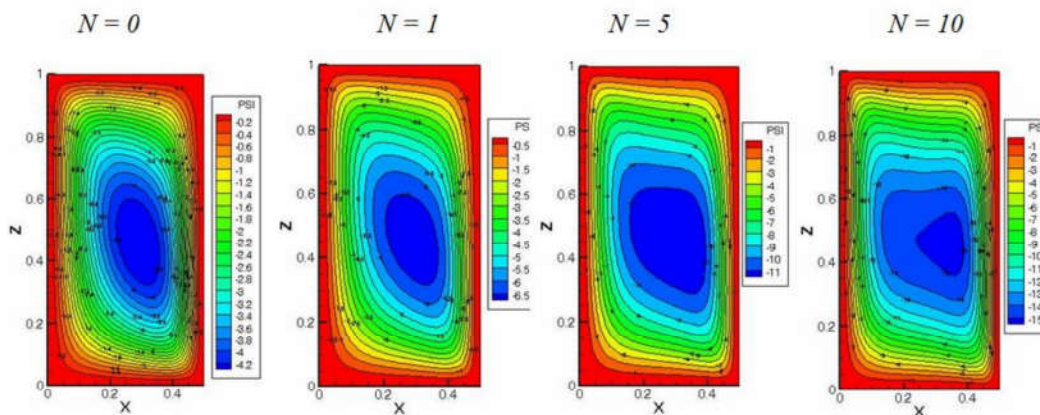


Figura 5.21 - Influência do número de N - $Ra_T = 10^5$, $Pr = 10$, $Le = 1$, $Da = 10^{-3}$, $A = 2$, $x_p = 0,8$

O fluxo do fluido na convecção natural é determinado pelo efeito líquido das forças de volume (térmica ou solutal).

N é uma grandeza adimensional que representa a razão entre as forças de flutuação solutal e térmica, em outras palavras $N = Ra_S/Ra_T$. Quando o número de Rayleigh solutal é inferior a Rayleigh térmico, a convecção térmica domina e determina o sentido do fluxo. Quando o número de Rayleigh solutal é maior que o térmico a concentração induz o sentido fluxo.

Os efeitos de N no escoamento são:

Para N baixo, o escoamento é imposto pelo efeito térmico, regimes de escoamento unicelulares.

Para N moderado, o escoamento térmico e solutal são equiparados na cavidade, regimes de escoamento multicelulares.

Para N alto, o escoamento é imposto pelo efeito solutal, regimes de escoamento unicelulares.

Para N intermediário, quando $1 < N/Le^{1/3} < 10$, as forças de volume competem entre si.

Na análise da figura (5.21) pode-se ver que temos baixos a moderados valores de N , mostrando o regime unicelular determinado pelo efeito térmico para $N = 0$ (convecção térmica predominante) com o aumento de N temos a formação de um novo núcleo de convecção, mostrando claramente uma concorrência entre os efeitos térmico e solutal na convecção do fluido. Via de regra, o aumento do parâmetro N aumenta a convecção natural termosolutal na cavidade, mostrado pelo aumento do módulo de função corrente de $\psi = 4.2$ em $N = 0$ para $\psi = 15$ em $N = 10$.

5.4.2.8 INFLUÊNCIA DE N NA TRANSFERÊNCIA DE CALOR

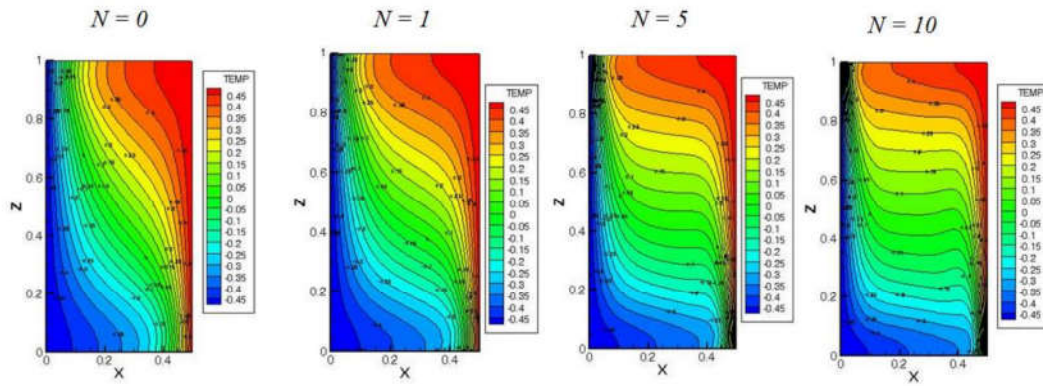


Figura 5.22 - Influência do número de N na transferência de calor - $Ra_T = 10^5$, $Pr = 10$, $Le = 1$, $Da = 10^{-3}$, $A = 2$, $x_p = 0,8$

A figura (5.22) mostra o perfil de temperatura em função de N como pode-se notar o efeito térmico na convecção é acentuado com o aumento do número de N . Para um número de Lewis igual a unidade, onde a convecção térmica e solutal são equivalentes, a convecção térmica neste caso vem a ser amplificada pelo aumento da convecção solutal. Os perfis de temperatura e de concentração são iguais uma vez que o número de Lewis é igual à unidade.

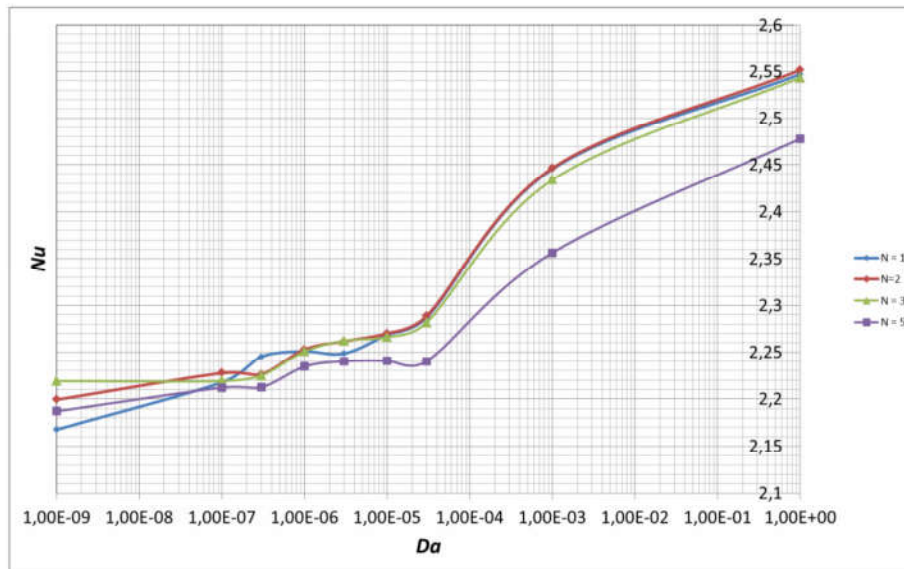


Figura 5.23 - Influência de N na transferência de calor - $Ra_T = 10^4$, $Pr = 10$, $Le = 100$, $A = 2$, $x_p = 0,1$

A figura (5.23) mostra a influência de N na transferência de calor onde o número de Lewis é elevado, favorecendo a convecção solutal. Com o aumento de N temos uma redução no número de Nusselt uma vez que o efeito solutal tende a aumentar em detrimento ao efeito térmico, este efeito é verificado para números de Lewis elevados como mostrado no gráfico onde $Le = 100$.

5.4.2.9 INFLUÊNCIA DE N NA TRANSFERÊNCIA DE MASSA

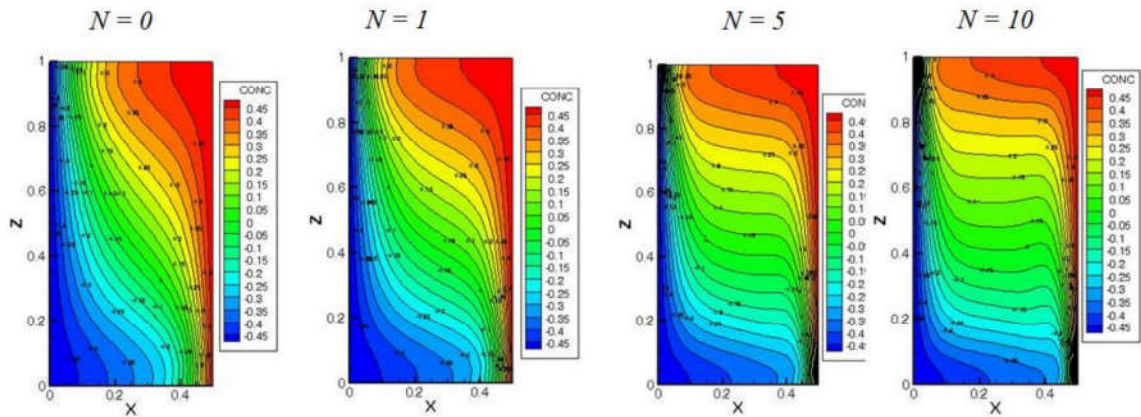


Figura 5. 24 - Influência do número de N na transferência de massa- $Ra_T = 10^7$, $Pr = 10$, $Le = 1$, $Da = 10^{-3}$, $A = 2$, $x_p = 0,8$.

A figura (5.24) mostra o perfil de concentração em função de N para um número de Lewis igual à unidade a convecção térmica e solutal são equivalentes, no entanto verifica-se que há um aumento global na convecção devido a convecção solutal como se pode ver analisando os perfis de concentração que se tornam cada vez mais estratificados com o aumento de N .

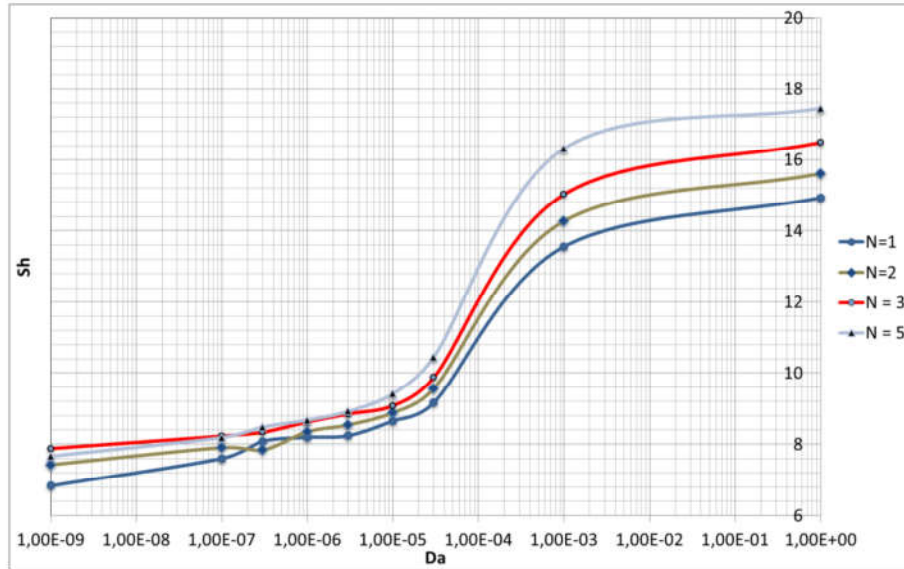


Figura 5. 25 - Influência de N na transferência de massa - $Ra_T = 10^4$ $Pr = 10$ $Le = 100$ $A = 2$ $x_p = 0,1$

Para um número de Lewis elevado ($Le = 100$) o efeito solutal na convecção ganha maior importância. Com o aumento de N temos um aumento no número de Sherwood como mostra a figura (5.25), o efeito solutal tende a sobrepor-se ao efeito térmico.

5.4.2.10 INFLUÊNCIA DE Le NA FUNÇÃO CORRENTE

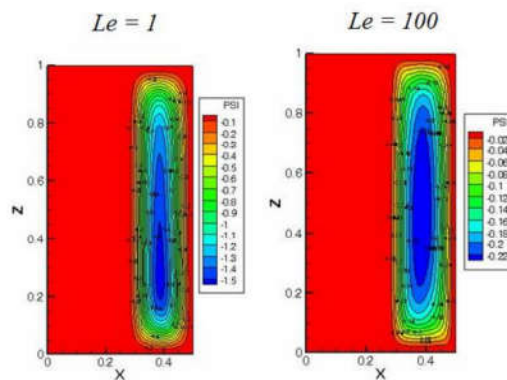


Figura 5. 26 - Influência do número de Le no campo de função corrente - $Ra_T = 10^4$, $Pr = 10$, $N = 10$, $Da = 10^{-9}$, $A = 2$, $x_p = 0,5$

O número de Lewis é a relação entre a difusividade térmica e mássica, ou ainda a relação entre o número de Schmidt e o número de Prandtl. Como já foi visto

anteriormente o número de Lewis é de vital importância para a análise da convecção termosolutal, uma vez que em função deste podemos determinar os limites térmico e solutal da convecção. A figura (5.26) mostra a função corrente para $Le = 1$, o fluxo é igualmente equilibrado pelos efeitos térmico e solutal e para $Le = 100$, podemos observar que o aumento no número de Lewis, provoca uma diminuição global no módulo da função corrente passando de 1,5 para 0,22, devido a um aumento das forças viscosas do fluido.

5.4.2.11 INFLUÊNCIA DE Le NA TRANSFERÊNCIA DE CALOR

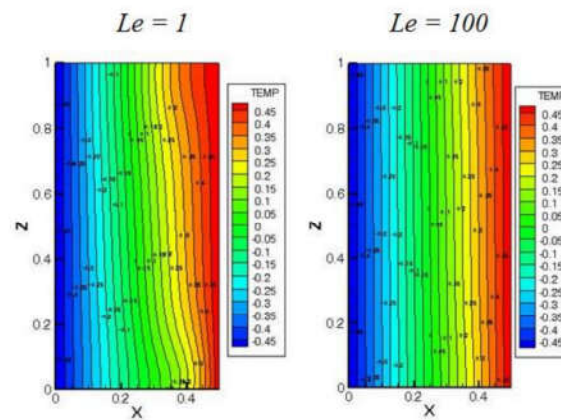


Figura 5. 27 - Influência do número de Le no perfil de temperatura - $Ra_T = 10^4$, $Pr = 10$, $N = 10$, $Da = 10^{-9}$, $A = 2$, $x_p = 0,5$

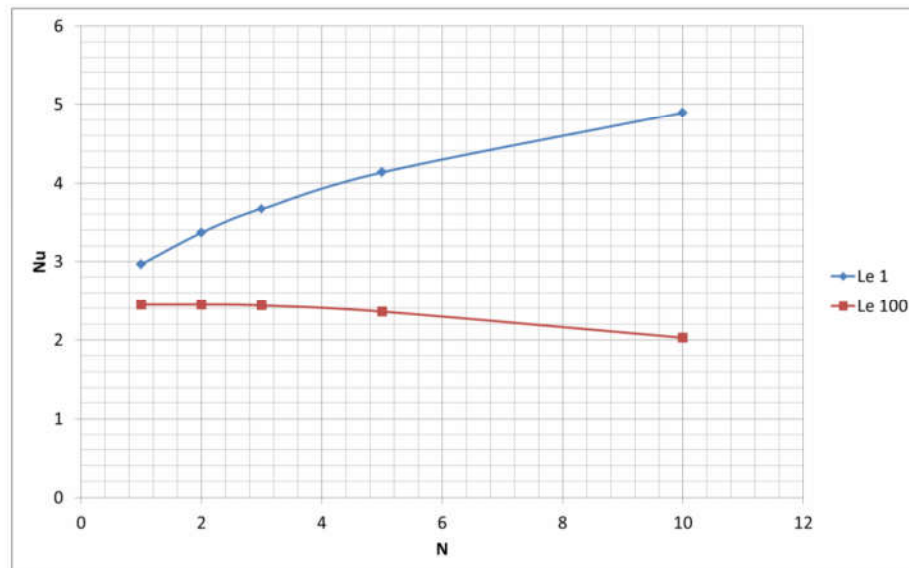


Figura 5. 28 - Influência do número de Le na transferência de calor - $Ra_T = 10^4$, $Pr = 10$, $N = 10$, $Da = 10^{-3}$, $A = 2$, $x_p = 0,1$

5.4.2.12 INFLUÊNCIA DE Le NA TRANSFERÊNCIA DE MASSA

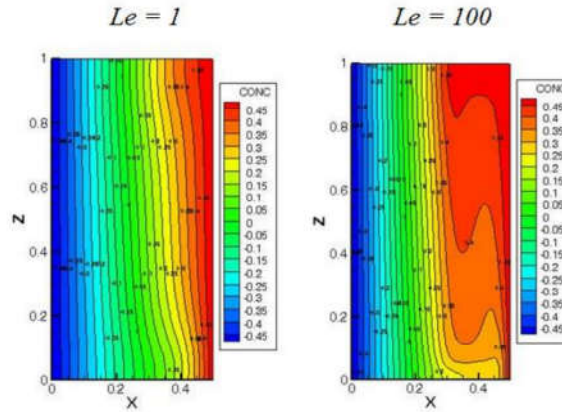


Figura 5. 29 - Influência do número de Le no perfil de concentração - $Ra_T = 10^4$, $Pr = 10$, $N = 10$, $Da = 10^{-9}$, $A = 2$, $x_p = 0,5$

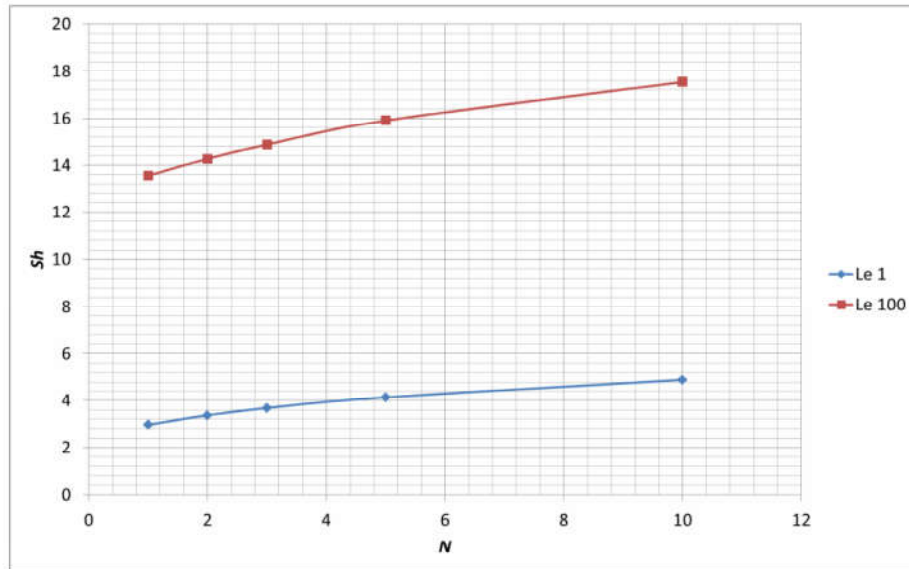


Figura 5. 30 - Influência do número de Le na transferência de massa - $Ra_T = 10^4$, $Pr = 10$, $N = 10$, $Da = 10^{-3}$, $A = 2$, $x_p = 0,1$

O aumento do número de Lewis é efeito do aumento da convecção mássica, com o aumento de Sh Figura (5.30). O aumento do número de Lewis causa a diminuição da transferência de calor por convecção e a redução do número de Nusselt Figura (5.28). As figuras (5.27) e (5.29) mostram essa competição entre os efeitos térmicos e mássicos, para $Le = 1$ temos Nusselt e Sherwood iguais, os efeitos térmico e solutal são iguais como pode ser visto nestas figuras, onde tanto o perfil de temperatura como o

perfil de concentração aparecem pouco estratificados. Para $Le = 100$ a convecção mássica é elevada em detrimento à convecção térmica, o perfil de temperatura passa a exibir linhas verticais em todo o domínio caracterizado pela transferência de calor predominantemente por condução, enquanto que o perfil de concentração mostra-se estratificado na região fluida caracterizado pela transferência de massa convectiva.

CAPÍTULO 6

CONCLUSÕES E SUGESTÕES

Este trabalho foi dividido cronologicamente através de seus capítulos, inicialmente foram realizados estudos a fim de entender o comportamento da GITT perante problemas envolvendo interfaces e alto grau de não-linearidade a fim de resolver as equações de Darcy-Brinkman-Forchheimer, foram testadas as abordagens conhecidas como domínio duplo e domínio único, este se mostrando mais conveniente para os estudos seguintes. Obtido sucesso nesta primeira etapa com a solução do escoamento totalmente desenvolvido em canal aberto parcialmente preenchido com meio poroso e porosidade variável em função da coordenada espacial, possibilitando avaliar o escoamento no tempo e as condições de interface.

A segunda etapa do trabalho tratou de resolver o problema de convecção térmica em cavidade retangular fechada parcialmente preenchida com meio poroso, utilizando ainda formulação Darcy-Brinkman-Forchheimer com a abordagem em domínio único. Os resultados do uso da GITT para este problema foram excelentes e demonstraram que para este tipo de problema o coeficiente de Forchheimer tem pouca importância, o custo computacional foi relativamente alto, porém reduzido pela integração semianalítica.

A última etapa do trabalho foi o estudo do problema de convecção termosolutal em cavidade retangular fechada parcialmente preenchida com meio poroso, que após desprezarmos o coeficiente de Forchheimer e usarmos a extensão de Brinkman da equação de Darcy com abordagem de domínio único, conseguiu-se excelentes resultados com a aplicação da GITT. Foi possível realizar o estudo de todos os parâmetros constituintes do problema para valores intermediários de Rayleigh. A Técnica da Transformada Integral Generalizada mostrou-se eficiente para resolver problemas com alto grau de não-linearidade e acoplamento das equações de momento, energia e concentração.

A GITT mostrou-se particularmente eficiente para problemas com interface poro/fluido uma vez que o sistema de transformação integral permite calcular as duas

regiões separadamente, já que a técnica possibilita particionar o domínio, necessitando apenas de uma estimativa média entre as propriedades do fluido e do poro quando avaliadas na interface, dessa forma em alguns coeficientes apenas se calculava em uma das regiões sem a necessidade de se realizar o cálculo para todo o domínio, diminuindo assim o custo computacional.

O filtro empregado neste trabalho possibilitou o estudo dos parâmetros constituintes de problemas com geometrias cartesianas parcialmente preenchidas com meio poroso, para valores de Rayleigh médios e uma grande faixa de permeabilidade. Para o estudo com valores de Rayleigh mais elevados deve buscar filtros mais adequados para as equações de forma que possibilite a retirada de parte das não linearidades da equação original. No entanto, com o uso de filtros extremamente simples foi possível alcançar excelentes convergências com baixos números de termos no truncamento das expansões.

Vê-se a necessidade de avaliar o custo computacional para resolver problemas com formulação de Darcy-Brinkman-Forchheimer incorporando outros termos na integração semianalítica, principalmente em problemas envolvendo convecção natural termosolutal em geometrias parcialmente preenchidas com meio poroso, até hoje pouco abordada com o uso da GITT.

CAPÍTULO 7

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALVES, L. S. de B., COTTA, R. M., " Transient natural convection inside porous cavities: hybrid numerical-analytical solution and mixed symbolic-numerical computation", **Numerical Heat Transfer**, Part A, 38:89-110 , 2000

AMBERG, G., HOMSY, G. M. "Nonlinear analysis of buoyant convection in binary solidification with application to channel formation". **J. Fluid Mech**, vol. 252, pp. 79-98, 1993.

ANDERSON, D. M., WORSTER, M. G. "Weakly nonlinear analysis of convection in mushy layers during the solidification of binary alloys", **J. Fluid Mech.**, v.15, pp.302, 307–331 1995.

ALAZMI, B.; VAFAI K., "Analysis of fluid flow and heat transfer interfacial conditions between a porous medium and a fluid layer", **Int. J. Heat Mass Transfer**, 44, 1735–1749, 2001.

ALAZMI, B. & VAFAI, K. "Analysis of fluid flow and heat transfer interfacial conditions between a porous medium and a fluid layer". **Int. J. Heat Mass Transfer**, 44, 1735-1749, 2001.

AMIRI, A. & VAFAI, K., "Analysis of dispersion effects and non-thermal equilibrium, non-Darcian, variable porosity incompressible flow through porous média". **Int. J. Heat Mass Transfer**, 37, 939-954, 1994.

ARQUIS, E. & CALTAGIRONE, J.P. "Sur les conditions hydrodynamiques au voisinage dune interface milieu fluide milieu poreux: appllication a la convection naturelle". CR Acad. Sci. 299. Paris II, 1–4, 1984.

BAOHUA, C., COTTA R. M., Integral Transform Analysis of Natural Convection in Porous Enclosures, **Int. J. of Numerical Methods in Fluids**, vol. 17, pp. 787-801, 1993.

BEAVERS, G.S. & JOSEPH, D., “Boundary condition at a naturally permeable wall”. **Journal of Fluid Mechanics**, 30, 197-207, 1967.

BEAVERS, G. S.; SPARROW, E. M.; MAGNUSON, R. A. “Experiments on couple parallel flow in a channel and a bounding porous medium”. **J. Basic Eng.** 1970.

BEAVERS, G. S.; SPARROW, E. M.; MASHA, B. “A. Boundary condition at a porous surface which bounds a fluid flow”. **AIChE J.**, 20, 596-597, 1974.

BECKERMANN, C.; RAMADHYANI, S.; VISKANTA, R. “Natural convection flow and heat transfer between a fluid layer and a porous layer inside a rectangular enclosure”. **J. Heat Transfer**, 109, 363-370, 1987.

BECKERMANN, C.; VISKANTA, R.; RAMADHYANI S. “Natural convection in vertical enclosures containing simultaneously fluid and porous layers”. **J. Fluid Mech.**, v. 186, pp. 257–284, 1988.

BECKERMANN, C.; VISKANTA, R.” Double diffusive convection during dendritic solidification of a binary mixture”. **PhysicoChemical Hydrodynamics**, 10, 195-213, 1988.

BEJAN,A. AND NIELD, D. A. “**Convection in Porous Média**”.Third Edition, New York, USA, 2006.

BENNON, W.D.; INCROPERA, F. P. “A continuum model for momentum, heat and species transport in binary solid-liquid phase change systems - II. Application to solidification in a rectangular cavity”. **International Journal of Heat and Mass Transfer**, 30, 2171-2187, 1987.

BENNACER, R., TOBBAL, A., BEJI, H. & VASSEUR, P., Double-diffusive convection in a vertical enclosure filled with anisotropic porous media. **Int. J. Therm. Sci.**, 40.30-41, 2001a.

BENNACER, R.; MOHAMAD, AA; AKROUR, D; Transient natural convection in an enclosure with horizontal temperature and vertical solutal gradients. *Int. J. Therm. Sci.*, 40, 899-910, 2001b.

BÉRNARD, C.; GOBIN, D. & THÉVENIN, J." Thermosolutal natural convection in a rectangular enclosure: numerical results". *ASME National Heat Transfer Conference* (Philadelphia, 6-9 August). **Heat Transfer in Convection Flows**, pp 249-254, 1989.

BIRD, R. B., STEWART, E. W. & LIGHTFOOT, E. N., “**Transport Phenomena**”, Second Edition, John Wiley & Sons, Inc., 2002.

BRINKMAN, H. C. " A calculation of the viscous force exerted by a flowing fluid on a dense swarm of particles". **Appl. Sci. Res. A.**, v. 1, pp.27–34, 1947.

CHEN, F.; LU, J. W.; YANG, T. L. “Convective instability in ammonium chloride solution directionally solidified from below”. **J. Fluid Mech.**, vol. 276, pp. 163-187, 1994.

COTTA, R.M., *Integral Transforms in Computational Heat and Fluid Flow*, CRC Press, Boca Raton, FL, 1993.

COTTA, R.M. & MIKHAILOV, M.D. “Heat Conduction: -Lumped Analysis, Integral Transform, Symbolic Computation”. Wiley- Interscience , NY, 1997.

COTTA, R.M., “The Integral Transform Method in Thermal-Fluid Sciences & Engineering”. Begell House Inc., NY, 1998.

CHUNG, C. A., CHEN, F. “Onset of plume convective in mushy layers”. **J. Fluid Mech.**, vol.408, pp 53-82, 2000.

DERYAGIN, B.V. & LEVI, S.M. "Film Coating Theory" **Focal Press**, London, 1964.

DISLICH, H., "Thin films from the sol-gel process, In **Sol-Gel Technology for Thin Films, Fibers, Preforms, Electronics, and Special Shapes**", ed. L.C. Klein. pp. 50-79, Park Ridge, NJ: Noyes, 1988.

DUPUIT, A. J. E. J. "Études Théoriques et Pratiques sur le Mouvement des eaux dans les Canaux Découverts et à Travers les Terrains Perméables". Victor Dalmont, Paris, 1863.

ETTEFAGH, J., VAFAI, K. & KIM, S. J. "Non-Darcian effects in open ended cavities filled with a porous medium". **ASME J. Heat Transfer**, 113, 747–756, 1991.

ERGUN, S., "Fluid Flow through Packed Columns". **Chem. Engng. Prog.**, 48:89-94, 1952

FORCHHEIMER, P., "Wasserbewegung durch Boden". **Zeitschrift des Vereines Deutscher Ingenieure**, 45, pp.1736–1741, pp.1781–1788, 1901.

GOBIN, D.; GOYEAU, B.; NECULAE A. "Convective heat and solute transfer in partially porous cavities". **Int. J. Heat Mass Trans.**, 48, pp. 1898-1908. 2005.

GOBIN, D., GOYEAU, D. & SONGBE, J. P. "Double diffusive natural convection in a composite fluid-porous layer". **ASME J. Heat Transfer**, 120, 234-242, 1998.

GOYEAU, B., & GOBIN, D. "Heat transfer by thermosolutal natural convection in a composite fluid-porous cavity". **Int. Comm. Heat Mass Transfer**, 26, 1115-1126, 1999.

GOBIN; D. GOYEAU, B., NECULAE, A. Convective heat and solute transfer in partially porous cavities, **Int. J. Heat Mass Trans.**, 48, 1898–1908, 2005

GOYEAU, B., MERGUL, S. SONGBE, J. P. & GOBIN, D. "Convection thermosolutal en cavité partiellement occupée par une couche poreuse faiblement permeable". **C. R. Acad. Sci.**, 323, 447-454, 1996.

GOYEAU, B.; LHUILLIER, D.; GOBIN, D.; VELARDE, M.G." Momentum transport at a fluid-porous interface", **Int. J. Heat Mass Trans**, 46, 4071-4081, 2003.

HADIM, A. "Forced convection in a porous channel with localized heat sources", **ASME Journal of Heat Transfer**, 116:465-472, 1994.

HAN, H. & KUEHN, T. H. "Double diffusive natural convection in a vertical rectangular enclosure: II Numerical study". **Int. Comm. Heat Mass Transfer**, v.34, pp 461-471, 1991.

HIRATA, S.C., GOYEAU, B., GOBIN, D., CARR, M., COTTA, R. M., Linear stability of natural convection in superposed fluid and porous layers: Influence of the interfacial modeling. **International Journal of Heat and Mass Transfer** 50, 1356-1367, 2007.

HONG, J.T. AND TIEN, C.L., "Analysis of thermal dispersion effect on vertical – plate natural convection in porous média", **Int. J. Heat Mass Trans**, 30:143-150, 1987.

HSU, C.T. AND CHENG, P. "Thermal dispersion in a porous medium". **Int. J. Heat Mass Trans**, 33:1587-1597, 1990

HUANG, P.C. AND VAFAI, K. "Flow and heat transfer control over an external surface using a porous block arrangement", **Int. J. Heat Mass Trans**, 36, 4019-4032, 1993.

IMSL LIBRARIES, MATH LIBRARY, USA, 2010.

JONES I. P. "Low Reynolds number flow past a porous spherical shell". **Proc Camb Phil Soc**, 73: 231-238, 1973.

KARIMI-FARD M., CHARRIER-MOJTABI M.C., & VAFAI K. Non-Darcian effects on double-diffusive convection within a porous medium. *Numer. Heat Transfer, part A* 31: 837–852, 1997.

KAVIANY, M. “**Principles of Heat Transfer in Porous Média**”, second ed., Springer-Verlag, New York, 1995.

KUZNETSOV. A.V. " Fluid mechanics and heat transfer in the interface region between a porous medium and a fluid layer: A boundary layer solution", **J POROUS M**, 2(3), pp. 309-321, 1999.

KIM, S.J. & CHOI, C.Y. “Convective heat transfer in porous and overlying fluid layers heated from below”, **Int. J. Heat Mass Trans**, 39:319-329, 1996.

KNUPP, D. C., Naveira-Cotta, C. P., COTTA, R. M., Theoretical analysis of conjugated heat transfer with a single domain formulation and integral transforms, **International Communications in Heat and Mass Transfer** 39 355–362, 2012.

LAURIAT, F., MESGUICH, F., "Natural Convection and Radiation in an Enclosure Partially Filled With a Porous Insulation," **ASME Paper** N°. 84-WA/HT-101, 1984.

LAGE, J.L., “The fundamental theory of flow through permeable média from Darcy to turbulence”, **Transport Phenomena in Porous Média**, Pergamon, Oxford, pp.1-30, 1998.

LARSON, R. E., HIGSON, J. J. L. “Microscopic flow near the surface of two-dimension porous média, Part 1: Axial flow”, **J. Fluid Mech.**, 166, 449-472, 1986.

LARSON, R. E., HIGSON, J. J. L. “Microscopic flow near the surface of two-dimension porous média, Part 2: Transverse flow”, **J. Fluid Mech.**, 178, 119-136, 1987.

LEAL, M, A. “**Convecção natural em cavidades para regimes permanente e transiente: o método da transformada integral**”, tese de doutorado, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, 1996.

LEAL, M. A. ; PÉREZ-GUERRERO, J. S. ; COTTA, R. M., “Natural convection inside two-dimensional cavities: the integral transform method”. **Communications in Numerical Methods in Engineering**, v. 15, p. 113-125, UK,1999.

LEAL, M.A., MACHADO, H.A. & COTTA, R.M., “Integral Transform Solutions of Transient Natural Convection in Enclosures with Variable Properties”. **Int. J. Heat Mass Transfer**, 2000.

LE BARS, M.; WORSTER, M. G. “Solidification of a binary alloy: finite-element, single-domain simulation and new benchmark solutions”. **J. Comp. Physics**, vol. 216(1), pp. 247-263, 2006.

LE BRETON, P., CALTAGIRONE, J.P. AND ARQUIS, E. “Natural convection in a square cavity with thin porous layers on its vertical walls”. **ASME J. Heat Transfer**, 113, 892–898, 1991.

LEE, J. W & HYUN, J. M." Double diffusive convection in a rectangle with opposing horizontal gradients of temperature and concentration". **Int. J. Heat Mass Transfer**, v. 33, pp.1619-1632, 1990.

LEE, D.Y.; VAFAI, K., “Analytical characterization and conceptual assessment of solid and fluid temperature differentials in porous media”, **Int. J. Heat Mass Transfer**, 42, 423–435, 1999.

LEVY, T. AND SANCHEZ-PALENCIA, E.,” On boundary conditions for fluid flow in porous media”, **International Journal of Engineering Science**, 13 (11):923-940, 1975.

LIMA, J. A., **Solução das Equações de Navier-Stokes Médias para Escoamento Turbulento via Transformação Integral**, Tese de M.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 1995.

MACHADO, H. A., **Soluções em Convecção Térmica com Propriedades Variáveis via Transformação Integral**, Tese de D.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 1998.

MIKHAILOV, M. D. & Özisik, M. N.. “**Unified Analysis and Solutions of Heat and Mass Diffusion**”. John Wiley & Sons, New York, 1984.

MERCIER, J., WEISMAN, C., FIRDAOUS, M., & LEQUÉRÉ, P. “Heat transfer associated to natural convection flow in a partly porous cavity”. **J. Heat Transfer.**, 124, pp. 130–143, 2002.

MOHAMAD, A. A., & BENNACER, R. “Natural convection in a confined saturated porous medium with horizontal temperature and vertical solutal gradients”. **Int. J. Thermal Science**, 40, 82-93, 2001.

MOHAMAD, A. A., & BENNACER, R." Double diffusion, natural convection in an enclosure filled with saturated porous medium subject to cross gradient; stably stratified fluid". **Int. Heat and Mass Transfer**, 45, 3725-3740, 2002

NECULAE, A. "**Contribution à l'étude des phénomènes de transport dans une zone de croissance dendritique**" Thèse de doctorat en Mécanique. Énergétique, Paris, 2003.

NIELD, D. A. “Onset of thermohaline convection in a porous medium”. **Water Resources Research**, 1968.

NIELD, D.A., JUNQUEIRA, L.M. AND LAGE, J.L., “Forced convection in a fluid saturated porous medium channel with isothermal or isoflux boundaries”, **Journal of Fluid Mechanics**, 322:201-214, 1996.

NIELD, D.A.; BEJAN, A. “**Convection in Porous Média**”, 3rd ed., New York: Springer-Verlag Press, 2006.

NITHIARASU, P., SEETHARAMU, K.N., SUNDARARAJAN T., Double-diffusive natural convection in an enclosure filled with fluid-saturated porous medium: a generalized no-Darcy approach. *Numer. Heat transfer.*, A30, 413-426, 1996.

OCHOA-TAPIA, J.A. AND WHITAKER, S. "Momentum transfer at the boundary between a porous medium and a homogeneous fluid II: comparison with experiment". **Int. J. Heat Mass Transfer**. v. 38, pp.2647-2655, 2001.

OCHOA-TAPIA, J.A. AND WHITAKER, S., "Momentum transfer at the boundary between a porous medium and a homogeneous fluid - I. Theoretical development", **Int. J. Heat Mass Transfer**, 38:2635-2646, 1995a.

OCHOA-TAPIA, J.A. AND WHITAKER, S., "Momentum transfer at the boundary between a porous medium and a homogeneous fluid - II. Comparison with experiment", **Int. J. Heat Mass Transfer**, 38:2647-26, 1995b.

ÖZISIK, N. M. & HAHM, David W. "**Heat Conduction**", John Wiley & Sons, Inc, 2012.

PÉREZ GUERREIRO, J. S., "Solução das Equações de Navier-Stokes em formulação de função corrente via transformação integral", dissertação de mestrado, COPPE/UFRJ, 1991.

PÉREZ GUERREIRO, J. S. & COTTA, R. M, "Integral transform method for Navier-Stokes equations in stream-function only formulation", **Int. J. Num. Meth. In Fluid**, 15, 399-409, 1992.

PÉREZ GUERRERO, J. S. & COTTA, R. M., "Benchmark Integral Transform Results for Flow Over a Backward-Facing Step", **Computer & Fluids**, v. 25, n. 5, pp.527-540, 1996.

PLUMB, O.A., "The effect of thermal dispersion on heat transfer in packed bed boundary layers", Proc. **ASME-JSME Thermal Engineering Joint Conference**, 2:17-22, 1983.

PLUMB, O.A. AND WHITAKER, S., “Dispersion in heterogeneous porous média – 1. Local volume averaging and large-scale averaging”, **Water Resources Research**, 24:927-938, 1988a.

PLUMB, O.A. AND WHITAKER, S., “Dispersion in heterogeneous porous média – 2. Predictions for stratified and two-dimensional spatially periodic system”, **Water Resources Research**, 24:927-938, 1988b.

POULIKAKOS, D. AND KAZMIERCZAK, M., “Forced convection in a duct partially filled with a porous material”, **ASME Journal of Heat Transfer**, 109:653-662, 1987.

POULIKAKOS, D., BEJAN, A., "Natural Convection in Vertically and Horizontally Layered Porous Media Heated From the Side," **International Journal of Heat and Mass Transfer**, Vol. 26, pp. 1805-1813, 1983.

QUARESMA, J. N. N., **Transformação Integral das Equações de Navier-Stokes para Escoamentos Laminares Tridimensionais**. Tese de D.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 1997.

ROSENBERG, L.D. AND BEITER, R.L., “Impact of new technology and changing practices in the automotive coatings business”, **AIChE Symposium Series on New Polymer Technology for Auto Body Exteriors**, pp. 33-36, 1989.

RICHARDSON, S. “A model for the boundary condition of a porous material, Part 2”, **J. Fluid Mech.**, 49, 327-336, 1971.

SAFFMAN, P., “On the boundary condition at the interface of a porous medium”, **Studies in Applied Mathematics**, 50:93-101 1971

SAHRAOUI, M.; KAVIANY M., “Slip and no-slip velocity boundary conditions at interface of porous, plain média”, **Int. J. Heat Mass Transfer**, 35 (4), 927–943, 1992.

SAHRAOUI, M.; KAVIANY, M., "Slip and no-slip temperature boundary conditions at interface of porous, plain média: convection", **Int. J. Heat Mass Transfer**, 37 (6), 1029–1044, 1994.

SALEH, S., J.F. THOVERT, AND P.M. ADLER, "Flow along porous média by particle image velocimetry" **AIChE J.** 39, 1765-1776, 1993.

SATHE, S. B., TONG, T.W. & FARUQUE, M. A. "Experimental study of natural convection in a partially porous enclosure". **AIAA J. Thermophys. Heat Transfer** 1, 260–267, 1987.

SATHE, S. B., LIN, W. Q. & TONG, T. W. "Natural convection in enclosures containing an insulation with a permeable-fluid-porous interface". **Int. J. Heat Fluid Flow**, 9, 389–395, 1988.

SATHE, S. B. & TONG, T. W. "Comparison of four insulation schemes for reduction of natural convective heat transfer in rectangular enclosures". **Int. Comm. Heat Mass Transfer** 16, 795–802, 1989.

SATHE, S. B. & TONG, T. W. "Measurements of natural convection in partially porous rectangular enclosures of aspect ratio 5". **Int. Comm. Heat Mass Transfer** 15, 203–212, 1988.

SCHNEIDER, M.C.; BECKERMANN, C. "A numerical study of the combined effects of microsegregation, mushy zone permeability and flow, caused by volume contraction and thermosolutal convection, on macrosegregation and eutectic formation in binary alloy solidification", **Int. J. Num. Meth. In Fluid**, 38, 3455-3473, 1995.

SOMERTON, C. W., CATTON, I., "On the Natural Convection of Superposed Porous and Fluid Layers," **Asme Journal of Heat Transfer**, Vol. 104, pp. 160-165, 1982.

SUN, W. J., "Convective Instability in Superposed Porous and Free Layers", Ph.D. Dissertation, University of Minnesota, Minneapolis, MN, 1973.

TAYLOR, G. I. "A model for the boundary condition of a porous material, Part 1". **J. Fluid Mech.**, 49, 319-326, 1971.

TIEN, C. L., HONG, J. T., "Natural Convection in Porous Media Under Non-Darcian and Non-uniform Permeability Conditions," **Natural Convection**, S. Kakac et al., eds., Hemisphere, Washington, DC, 1985.

TONG, T. W., SUBRAMANIAN, E., "Natural Convection in Rectangular Enclosures Partially Filled With a Porous Medium," **ASME-JSME Thermal Engineering Joint Conference**, ASME, New York, Vol. 1, pp. 331-338, 1983.

TREVISAN, O. V. & BEJAN, A. "Combined heat and mass transfer by natural convection in a vertical enclosure". **J. Heat Transfer**, v. 109, pp. 104-112, 1987.

TURKI, S.; LAURIAT, G. "An examination of two numerical procedures for natural convection in composites enclosures, in: Numerical Heat Transfer Proceedings of AIAA- ASME" **Thermophysics and Heat Transfer Conference**, HTD, vol. 130, pp. 107-113, 1990.

TURNER, J. S. "The behaviour of a stable salinity gradient heated from below". **J. Fluid Mech.**, 33, 183-200, 1968.

VAFAI, K. & TIEN, C.L., "Boundary and inertia effects on flow and heat transfer in porous media", **Int. J. Num. Meth. In Fluid**, 24, 195-203, 1981.

VAFAI, K., & TIEN, C. L. "Boundary and inertia effects on convective mass transfer in porous media". **Int. J. Heat Mass Transfer**, 25, 1183-1190, 1982.

VAFAI, K. AND KIM, S.J., "Forced convection in a channel filled with a porous medium: an exact solution", **ASME Journal of Heat Transfer**, 111:1103-1106, 1989.

VAFAI, K. AND KIM, S.J. "Fluid mechanics of the interface region between a porous medium and a fluid layer – an exact solution". **Int. J. Heat Fluid Flow**, 11, pp 254-256, 1990a.

VAFAI, K.; KIM, S.J., "Analysis of surface enhancement by a porous substrate", **ASME Journal of Heat Transfer**, 112:700-706, 1990b.

VAFAI, K. AND KIM, S.J., "On the limitation of the Brinkman-Forchheimer-extended Darcy equation", **Int. J. Heat Fluid Flow**, 16(1):11-15, 1995.

VOLLER, V. R.; PRAKASH, C., "A fixed grid numerical modeling methodology for convection-diffusion mushy region phase-change problems", **Int. J. Heat Fluid Flow**, 30, 1709-1719, 1987.

WORSTER, M. G. "Instabilities of the liquid and mushy regions during solidification of alloys", **J. Fluid Mech.**, vol. 237, pp. 649-669, 1992.

XIONG, M. " **Investigation of transport phenomena in the presence of interfaces: forced convection in composite porous/fluid domains, solidification with a mushy region, and meniscus formation in dip coating processing**". Dissertation of Doctor of Philosophy. North Carolina, USA, pp. 59-77, 2001.

XU., H.J.; QU, Z.G.; LU T.J.; HE Y.L., TAO W.Q., "Thermal modeling of forced convection in a parallel plate channel partially filled with metallic foams", **ASME J. Heat Transfer**, 133 (9), 092603.1-092603.9, 2011a.

XU, H.J.; QU, Z.G., TAO, W.Q., "Analytical solution of forced convective heat transfer in tubes partially filled with metallic foam using the two-equation model", **Int. J. Heat Mass Transfer**, 54, 3846–3855, 2011b.

YANG, K.; VAFAI, K., "Restrictions on the validity of the thermal conditions at the porous-Fluid interface-an exact solution", **ASME-J. Heat Transfer**, 133, 112601.1-12, 2011.

YOO, H.; VISKANTA, R. "Effect of anisotropic permeability on the transport process during solidification of a binary mixture", **Int. J. Heat Mass Transfer**, 35, 2335-2346, 1992.