

**MELHORAMENTO DA RESOLUÇÃO PARA CAMADAS
DELGADAS DE PERFILAGENS EXISTENTES EM
ÁREAS ESPECÍFICAS DE PRODUÇÃO – EXPLORAÇÃO**

por

LUIZ AIZMAN

Engenharia Elétrica (Universidade do Estado do Rio de Janeiro – 1987)

Tese submetida como requisito parcial ao grau de

MESTRE EM CIÊNCIAS

em

GEOFÍSICA

ao

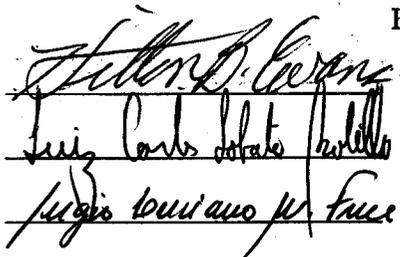
Colegiado de Pós-Graduação em

Geofísica

da

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ

Banca Examinadora :



Dr. Hilton Bernard Evans (Orientador)

Dr. Luiz Carlos Lobato Botelho

Dr. Sérgio Luciano Moura Freire

Aprovado : 28/11/1990

AIZMAN, Luiz. Melhoramento da resolução para camadas delgadas de perfilagens existentes em áreas específicas de produção – exploração. Belém, Universidade Federal do Pará. Centro de Geociências, 1990. 63 p. il. Tese (Mestrado em Geofísica) – Curso de Pós-Graduação em Geofísica, Centro de Geociências, UFPa., 1990.

1. PERFILAGEM DE INDUÇÃO DE POÇO. 2. GEOFÍSICA APLICADA – Prospecção de Hidrocarbonetos. 3. GEOFÍSICA – Técnicas Computacionais.

Aos amigos Jayme, Stella, Rachel,
José, Flávio e Vivian.

ÍNDICE

Dedicatória	i
Índice	ii
Lista de Figuras	iv
RESUMO	vi
ABSTRACT	vii
CAPÍTULO 1 – INTRODUÇÃO	1
1.1–Trabalhos Anteriores	1
1.2–Objetivo	2
CAPÍTULO 2 – ASPECTOS GERAIS	4
2.1–Geofísica de Poço	4
2.2–Perfil de Indução	5
2.2.1–Histórico	5
2.2.2–Princípios	5
2.2.3–Teoria do Fator Geométrico (Sonda com duas Bobinas)	7
2.2.4–Desvantagens dos Perfis de Indução	10
2.3–Resolução Vertical	10
CAPÍTULO 3 – MOTIVAÇÃO DO ESTUDO DOS FILTROS (Deconvolução)	12
3.1–Introdução	12
3.2–Inversão	13
3.3–Estimativa Através de Mínimos Quadrados	14

CAPÍTULO 4 – DESENVOLVIMENTO TEÓRICO DO ALGORITMO	17
4.1–Introdução	17
4.2–Atualização da Covariância do Erro	21
4.2.1–Desenvolvimento	21
4.3–Escolha da Matriz de Ganho do Filtro	23
4.3.1–Desenvolvimento	23
4.4–Propagação dos Erros	28
4.4.1–Desenvolvimento	28
4.5–Estimativa para os Valores Iniciais Utilizados no Processamento	33
4.6–Obtenção do Filtro Utilizado	35
CAPÍTULO 5 – RESULTADOS OBTIDOS	37
5.1–Conclusões e Considerações Finais	37
AGRADECIMENTOS	40
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	41
APÊNDICE.....	43

LISTA DE FIGURAS

Fig. 1 – O princípio da ferramenta de indução	51
Fig. 2 – A sonda de indução com duas bobinas	52
Fig. 3 – O fator geométrico radial	53
Fig. 4 – O fator geométrico vertical	54
Fig. 5 a) – Diagrama esquemático provável da sonda 6FF40 da Schlumberger	55
Fig. 5 b) – Arranjo de bobinas da sonda 6FF40 da Schlumberger	55
Fig. 6 a) – Comparação dos perfis do poço 7–LOR–18–RN (1220m a 1240m) SFL e ILD ...	56
Fig. 6 b) – Comparação do perfil do poço 7–LOR–18–RN (1220m a 1240m) ILD original com o ILD filtrado	56
Fig. 6 c) – Perfil de raio gama do poço 7–LOR–18–RN (1220m a 1240m) colocado com o objetivo de comparar com o ILD filtrado as formações que foram evidenciadas após o processamento dos dados do perfil ILD original	56
Fig. 7 a) – Comparação dos perfis do poço 7–LOR–18–RN (1240m a 1260m) SFL e ILD ...	57
Fig. 7 b) – Comparação do perfil do poço 7–LOR–18–RN (1240m a 1260m) ILD original com o ILD filtrado	57
Fig. 7 c) – Perfil de raio gama do poço 7–LOR–18–RN (1240m a 1260m) colocado com o objetivo de comparar com o ILD filtrado as formações que foram evidenciadas após o processamento dos dados do perfil ILD original	57
Fig. 8 a) – Comparação dos perfis do poço 7–LOR–18–RN (1260m a 1275m) SFL e ILD ...	58
Fig. 8 b) – Comparação do perfil do poço 7–LOR–18–RN (1260m a 1275m) ILD original com o ILD filtrado	58

Fig. 8 c) – Perfil de raio gama do poço 7-LOR-18-RN (1260m a 1275m) colocado com o objetivo de comparar com o ILD filtrado as formações que foram evidenciadas após o processamento dos dados do perfil ILD original	58
Fig. 9 – Cross-plots relativos ao poço 7-LOR-18-RN (1220m a 1240m) objetivando mostrar que após o processamento, os pontos aproximaram-se de uma linha reta, indicando uma aproximações dos valores de SFL e ILD original	59
Fig.10 – Cross-plots relativos ao poço 7-LOR-18-RN (1240m a 1260m) objetivando mostrar que após o processamento, os pontos aproximaram-se de uma linha reta, indicando uma aproximação dos valores de SFL e ILD original	60
Fig.11 – Cross-plots relativos ao poço 7-LOR-18-RN (1260m a 1275m) objetivando mostrar que após o processamento, os pontos aproximaram-se de uma linha reta, indicando uma aproximação dos valores de SFL e ILD original	61
Fig.12 – Comparação entre a resistividade verdadeira, a resposta da ferramenta 6FF40 e a resposta filtrada para camadas de 1,25 m e 2,5 m	62
Fig.13 – Comparação entre a resistividade verdadeira, a resposta da ferramenta 6FF40 e a resposta filtrada para camadas de 0,3048 m (1 pé)	63

**MELHORAMENTO DA RESOLUÇÃO PARA CAMADAS DELGADAS DE
PERFILAGENS EXISTENTES EM ÁREAS ESPECÍFICAS
DE PRODUÇÃO – EXPLORAÇÃO**
(TESE DE MESTRADO : Set./90)

LUIZ AIZMAN

Orientador : Dr. Hilton Bernard Evans

*Departamento de Geofísica – Centro de Geociências/UFPA
Caixa Postal 309 – Belém, PA, Brasil*

RESUMO

No campo da perfilagem de poço existe um grande interesse voltado para as técnicas que melhorem a resolução vertical das respostas das ferramentas. Neste trabalho, optamos por desenvolver uma técnica de aumento de resolução vertical dos perfis obtidos com a ferramenta de indução denominada na bibliografia de 6FF40, através de um algoritmo que utiliza as técnicas de estimativa dos mínimos quadrados. Este método torna possível o processamento dos dados registrados de uma maneira computacionalmente eficiente. O algoritmo apresentado necessita apenas dos dados registrados, dos valores adotados como coeficientes da ferramenta, e de uma estimativa dos ruídos existentes.

Como ilustração foram utilizados trechos de um perfil de uma área que reconhecidamente apresenta problemas relacionados à resolução vertical da ferramenta 6FF40.

Com o objetivo de verificar a eficiência do algoritmo utilizado, os perfis processados foram correlacionados com os perfis de raio gama e com os perfis esféricos focalizados do poço 7-LOR-18-RN, perfis estes que possuem resolução vertical maior do que os perfis convencionais de indução, comprovando a individualização das camadas delgadas que antes do processamento não eram facilmente reconhecidas no perfil original.

O algoritmo foi também testado com dados sintéticos demonstrando sua eficiência na recuperação de valores mais representativos para R_t .

IMPROVED THIN BED RESOLUTION FROM EXISTING LOGS IN SPECIFIC EXPLORATION – PRODUCTION AREAS

(MASTER THESIS : Sept./90)

LUIZ AIZMAN

Adviser : Dr. Hilton Bernard Evans

Departamento de Geofísica – Centro de Geociências/UFPA

Caixa Postal 309 – Belém, PA, Brasil

ABSTRACT

In well logging, there is a great interest in techniques that enhance the vertical resolution of the tool responses. In this work we develop a technique that enhances the vertical resolution of the logs obtained with the induction logging tool named in the bibliography 6FF40, by means of an algorithm that makes use of estimative methods through the least square technique. This method makes possible the processing of a set of recorded data in a computationally efficient way. This algorithm requires only the values assumed as tool coefficients and an estimative for the noise present in the recorded data.

As an illustration we used intervals of a log run in an area where the 6FF40 tool is known to have poor vertical resolution.

In order to verify the efficiency of the used algorithm, the processed logs were correlated with the gamma-ray and with the spherically focused log of the well 7-LOR-18-RN, which have a better vertical resolution, confirming the enhanced resolution in thin layers that could not be easily recognized on the previously log.

The algorithm was also tested with synthetic data demonstrating its efficiency in calculating more representative values for R_t .

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

1.1. Trabalhos Anteriores

Historicamente, e como um estudo básico, podemos citar o trabalho escrito por H. G. Doll (1949) no qual ele cita a invenção de uma nova ferramenta de perfilagem composta de um sistema de bobinas que pode ser utilizada em poços contendo fluidos de perfuração não condutivos. Introduziu ainda o conceito de fator geométrico, e demonstrou que o sinal total que mede a condutividade aparente da formação, é o somatório dos produtos parciais (fator geométrico \times condutividade) das regiões circunvizinhas ao sistema de bobinas da ferramenta.

Doll, após a apresentação da ferramenta inicial que continha duas bobinas, fez experiências com arranjos que possuíam vários pares de bobinas. Um par era utilizado para efetuar a medida primária de condutividade, e os pares adicionais para eliminar as contribuições indesejáveis de camadas localizadas acima e abaixo do primeiro par. Após dez anos, este trabalho culminou na sonda 6FF40, introduzida em 1959, composta de três pares de bobinas que proporcionaram uma sensível melhora no fator geométrico e na resolução vertical da ferramenta.

As ferramentas de indução são normalmente sensíveis a alguns centímetros cúbicos de formações que se encontram ao redor do poço. De acordo com a teoria do fator geométrico de Doll, as medidas relativas as profundidades são médias ponderadas das condutividades das camadas. Na linguagem de processamento de dados os pesos constituem o filtro da ferramenta, que ao se deslocar dentro do poço realiza leituras de médias ponderadas dos parâmetros das camadas ou rochas defronte a ela.

Porém os perfis de indução tornam-se bastante deficientes com relação à resolução vertical, principalmente quando as camadas consideradas são de menor espessura que o espaçamento entre a bobina transmissora e a bobina receptora; ou quando o contraste de condutividade entre camadas adjacentes for pequeno.

Existem vários métodos que melhoram a resolução vertical destes perfis de indução. Os métodos utilizados são normalmente soluções através de inversões, tal como filtros, ou exaustivas correções utilizando cartas de interpretação elaboradas pelas próprias companhias de serviço.

Neste estudo optamos por adotar como técnica de aumento de resolução vertical o processamento dos dados registrados pela ferramenta.

Este processamento, baseado em técnicas de estimativa através de mínimos quadrados utiliza um algoritmo que requer apenas os valores registrados pelo perfil, os coeficientes da ferramenta, e de um procedimento objetivando extrair os valores já processados.

Na literatura existem vários exemplos de programas de inversão para dados de perfis. Um trabalho desenvolvido por Foster et. all (1962) é bastante similar no contexto geral ao aqui desenvolvido. O trabalho de Foster et. all (1962) reafirmou que medidas de velocidade de longo espaçamento, contém quase a mesma quantidade de informação que medidas de curto espaçamento, porém com distorções e adicionadas de ruídos. As distorções podem ser consideradas como médias móveis ou filtros suavizadores. Sua inversão normalmente amplifica os ruídos existentes. Para que esta inversão seja proveitosa, é necessário que no projeto deste filtro haja um balanço entre os erros devidos à amplificação dos ruídos e aqueles devido a falta de nitidez. A teoria do filtro ótimo idealizado por Wiener (1949) nos fornece uma forma de alcançar este balanço, cujo resultado é chamado de filtro inverso ótimo. Neste trabalho, um filtro inverso é projetado minimizando o erro quadrático e considerando que os valores de medidas entre os valores registrados é uma seqüência de ruídos brancos ou aleatórios. Como os autores comentam, a hipótese do ruído branco é feita devido à falta de dados para apoiar outra solução.

1.2. Objetivo

Nosso objetivo é projetar um filtro através do qual a série de medidas registradas pelo perfil relaciona-se com parâmetros da formação (valores de condutividade das diversas camadas que compõe uma formação), com a hipótese de que cada um destes parâmetros é função dos valores registrados e de uma estimativa prévia.

As medidas y_j registradas pelo perfil são relacionadas aos parâmetros da formação, M_j , através da seguinte equação:

$$y_j = H^T \cdot M_j + n_j , \quad (1)$$

onde H^T são os coeficientes do filtro da ferramenta e n_j são os ruídos.

Deseja-se encontrar a estimativa de M_j , $M_j(+)$, que minimize a diferença abaixo

$$y_j - H^T \cdot M_j(+), \quad (2)$$

onde cada valor de $M_j(+)$ é originado da equação:

$$M_j(+)=A_j \cdot M_j(-)+B_j \cdot y_j, \quad (3)$$

em que $M_j(-)$ é o valor da estimativa de M_j antes do processamento das medidas, ou seja, uma estimativa prévia.

A determinação de A_j e B_j será feita através da minimização do quadrado da diferença $y_j - H^T \cdot M_j(+)$.

CAPÍTULO 2

ASPECTOS GERAIS

2.1. Geofísica de Poço

A geofísica de poço consiste em descer conjuntos de instrumentos dentro de poços perfurados na superfície da terra com o objetivo principal de obter medidas de parâmetros físicos que caracterizem as camadas atravessadas pelo poço. Essas medidas obtidas através daqueles instrumentos, apresentadas contra as medidas de profundidade, são conhecidas como perfis. Os perfis, são registros contínuos de informações geológicas e petrofísicas. Os poços podem ser destinados à produção de fluidos, ou perfurações com o propósito exclusivamente destinado à exploração.

O conjunto de instrumentos inclui uma sonda que contém os sensores que executam as medidas. Uma central eletrônica conectada à sonda controla os sensores, fornecendo energia em níveis apropriados, recebendo e processando os sinais de saída provenientes dos sensores, podendo incluir também uma pequena estação utilizada para transmitir os dados através de um sistema de telemetria digital. A sonda e o pacote eletrônico juntos são conhecidos como ferramenta de perfilagem.

A ferramenta de perfilagem é suspensa por um cabo, normalmente multicondutor, onde a parte superior do cabo é conectada a um sistema de aquisição de dados e posteriormente a um computador. Este computador é programado para executar o processamento de dados "on line" (ao mesmo tempo em que as ferramentas são corridas no poço), onde os perfis com os parâmetros físicos contra valores de profundidade são registrados continuamente.

A geofísica de poço é aplicada principalmente para auxiliar na avaliação das formações de subsuperfície, e analisar ou quantificar a natureza dos fluidos que preenchem os poros de rochas sedimentares, isto é, determinar as saturações de água, óleo e gás. Atualmente o espectro de perfis disponíveis é suficientemente grande, permitindo com uma precisão relativamente boa, determinar densidades de rochas, constituintes principais da rocha, tipos de argila, presença de fraturas e suas orientações, estruturas tectônicas e sedimentares, mergulhos de camadas, permeabilidade da rocha, ocorrência de elementos radioativos, etc.

2.2. Perfil de Indução

2.2.1. Histórico

O perfil de indução atual é uma evolução de um detector de minas, que Henry Doll, engenheiro chefe da Schlumberger, desenvolveu para o Departamento de Guerra dos Estados Unidos, para ser utilizado durante a Segunda Guerra Mundial. O detector era composto de duas bobinas montadas horizontalmente em um eixo de madeira fixado logo a frente de um jeep. Uma corrente alternada passando em uma das bobinas criava um campo magnético que induzia correntes de Eddy no terreno. A segunda bobina instalada no eixo de madeira detectava o campo magnético secundário criado pelas correntes de Eddy. As minas, sendo metálicas, portanto condutivas, ocasionavam correntes de Eddy mais intensas do que as normalmente detectadas ("*background*"). O dispositivo de Doll, ao detectar este aumento na intensidade da corrente na segunda bobina, imediatamente acionava os freios do veículo.

Devido ao fato de que o contato galvânico não era necessário, Doll reconheceu que a técnica poderia permitir as medidas de condutividade ou resistividade em formações atravessadas por poços em que não havia fluido presente, ou o fluido presente apresentava alta resistividade.

Após a guerra, Doll adaptou esta técnica para que a mesma pudesse ser utilizada em poços de petróleo. Em 1949, três anos depois que o primeiro perfil de indução foi corrido no Texas, Doll apresentou o equipamento para a indústria, denominando o registro dele derivado, de perfil de indução (induction log).

2.2.2. Princípios

Iremos estudar as ferramentas de poço que utilizam o princípio da indução através de uma abordagem conhecida como Teoria do Fator Geométrico. Esta teoria é rigorosamente correta apenas no limite quando a frequência é zero ou a resistividade é infinita. Apesar desta limitação, esta teoria serve como um excelente meio de mostrar as idéias fundamentais dos perfis de indução.

A figura 1 mostra os aspectos essenciais de um equipamento de perfilagem que utiliza o princípio da indução.

O equipamento básico consiste de uma bobina transmissora, excitada por corrente alter-

nada de média frequência (10^3 a 10^4 Hz) e uma bobina receptora. As duas bobinas, colocadas em um mandril de material não condutivo, são envolvidas por uma formação de condutividade σ . Um anel de corrente localizado na formação está indicado na figura 1.

Antes de analisarmos no item seguinte a sensibilidade geométrica do equipamento, vale a pena examinar a sequência de interações físicas que finalmente produz o sinal na bobina receptora. Através desta abordagem, poderemos verificar a dependência do sinal detectado com a frequência de excitação e com a condutividade da formação, bem como a relação de fase entre o sinal recebido e o sinal transmitido.

O primeiro passo a considerar é a excitação da bobina transmissora por uma corrente de amplitude constante e uma dependência do tempo na forma $e^{-i\omega t}$, ou seja:

$$I_t = I_o \cdot e^{-i\omega t}. \quad (4)$$

A bobina transmissora, que pode ser considerada como um dipolo magnético oscilante, cria dentro da formação um campo magnético B_t , cujo interesse está na componente vertical. A componente vertical deste campo magnético terá uma dependência no tempo dada por:

$$((B_t)_z) \propto -I_o \cdot e^{-i\omega t}. \quad (5)$$

Se um anel de material da formação que possui simetria axial com o eixo da ferramenta for considerado, ele forma o perímetro de uma superfície por onde passa um campo magnético variante no tempo. Da Lei de Faraday, um campo elétrico E será estabelecido, e será proporcional à derivada em relação ao tempo da componente vertical do campo B_t . Então:

$$E \propto -\frac{\partial(B_t)_z}{\partial t} \propto -i \cdot \omega \cdot I_o \cdot e^{-i\omega t}. \quad (6)$$

Este campo elétrico, que se estabelece ao redor da ferramenta, irá induzir uma densidade de corrente em um anel imaginário na formação que será proporcional à condutividade da formação, isto é:

$$J \propto \sigma \cdot E \propto -i \cdot \omega \cdot \sigma \cdot I_o \cdot e^{-i\omega t}. \quad (7)$$

A corrente estabelecida neste anel na formação (corrente de Eddy) irá se comportar como na bobina transmissora, isto é, irá estabelecer o seu próprio campo magnético B_2 . A componente vertical do campo magnético secundário $(B_2)_z$ possui a mesma dependência no tempo que a densidade de corrente do anel da formação,

$$(B_2)_z \propto -i \cdot \omega \cdot \sigma \cdot I_0 \cdot e^{-i\omega t}, \quad (8)$$

que devido à sua dependência no tempo irá induzir uma voltagem V_{rcvr} na bobina receptora, proporcional à derivada do campo magnético, ou seja:

$$V_{rcvr} \propto -\frac{\partial(B_2)_z}{\partial t} \propto -\omega^2 \cdot \sigma \cdot I_0 \cdot e^{-i\omega t}. \quad (9)$$

Este resultado final nos mostra que a voltagem detectada na bobina receptora irá variar diretamente com a condutividade da formação e com o quadrado da frequência de excitação. Podemos observar, comparando as equações (4) e (9), que esta voltagem se apresenta com uma defasagem de 180° em relação ao sinal de corrente do transmissor. Embora ignorada nesta discussão, devemos considerar também a voltagem induzida pelo acoplamento direto entre a bobina receptora e a bobina transmissora, que se apresenta com uma defasagem de 90° em relação ao sinal de corrente do transmissor. Um detetor de fase normalmente é utilizado nestes equipamentos de perfilagem para separar estes dois sinais, descartando-os de quadratura.

2.2.3. Teoria do Fator Geométrico (Sonda com Duas Bobinas)

Para descrever as características espaciais ou sensibilidade geométrica do campo induzido, retornemos ao transmissor de corrente. A lei de Biot-Savart prevê uma distribuição espacial do campo magnético, cuja derivada em relação ao tempo produz uma força eletromotriz em cada anel unitário do meio onde se encontra a bobina transmissora. As correntes de Eddy resultantes criam nos terminais da bobina receptora uma voltagem atribuída a um único anel. Com o fator $e^{-i\omega t}$ suprimido, esta voltagem tem a forma:

$$V_{rcvr} = \left[\frac{4\pi\omega^2 A_T A_R I_T}{L} \right] \cdot \left[\frac{L}{2} \cdot \frac{r^3}{(r^2 + (\frac{L}{2} - z)^2)^{3/2} (r^2 + (\frac{L}{2} + z)^2)^{3/2}} \right] \sigma(r, z), \quad (10)$$

onde (figura 2),

L = distância entre as bobinas transmissora e receptora,

A_T = produto da área pelo número de voltas da bobina transmissora,

A_R = produto da área pelo número de voltas da bobina receptora,

I_T = amplitude máxima da corrente no transmissor e

r, z = coordenadas cilíndricas de um anel unitário.

Podemos observar que o primeiro termo da equação (10) é a constante K para cada ferramenta. Para um valor fixo de L , o segundo termo da equação é função apenas de r e z , ou seja, da posição do anel unitário. Este segundo termo é referido como sendo o fator geométrico diferencial $g(r, z)$.

O fator geométrico diferencial $g(r, z)$ é apenas o peso relativo atribuído à condutividade de cada anel que contribui para a voltagem medida na bobina receptora. Uma vez que cada anel contribui independentemente para a força eletromotriz desenvolvida nos terminais da bobina receptora, o valor total da voltagem será uma operação envolvendo uma integral dupla nas variáveis r e z , ou seja, radial e verticalmente à sonda respectivamente. Então:

$$V = K \int_{z=-\infty}^{z=+\infty} \int_{r=0}^{r=+\infty} g(r, z) \cdot \sigma(r, z) dr \cdot dz. \quad (11)$$

Admitindo-se que cada anel é formado por material com apenas um valor de condutividade, considerando camadas planas e horizontais e poços verticais, pode-se utilizar a simetria cilíndrica. Esta ausência de variação azimutal é feita explicitamente através da notação $\sigma(r, z)$.

Para examinar separadamente as características das investigações radial e vertical da ferramenta contendo duas bobinas, é necessário apenas computar as duas integrais, dadas por:

$$g(r) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(r, z) dz$$

e

$$g(z) = \int_0^{+\infty} g(r, z) dr.$$

A integral em z é resolvida em termos de integrais elípticas tabuladas que permitem o cálculo da função mostrada na figura 3. Podemos observar que a posição radial em relação à sonda que contribui com a maior quantidade de informação está situada a uma distância de aproximadamente $L/2$ do eixo da sonda. Para distâncias $r > 3L$, as contribuições são pequenas em relação à porção principal. A função $g(z)$, mostrada na figura 4, representa as contribuições de discos de extensão radial infinita e espessura unitária e tem a forma dada pelas equações a seguir:

$$g(z) = \frac{1}{2L} \quad \text{para} \quad |z| < \frac{L}{2}$$

e

$$g(z) = \frac{1}{8z^2} \quad \text{para} \quad |z| > \frac{L}{2}.$$

Através do gráfico da função $g(z)$ (figura 4), podemos observar que a resolução vertical da ferramenta em questão é aproximadamente L ou $2L$, conforme o grau de resolução requerido, pois é fácil observar que uma camada que possui espessura $2L$ terá uma resolução melhor que uma camada que possui espessura L . Devido ao fato de que a condutividade de uma camada para outra pode sofrer variações da ordem de 10^4 mho/m, a função $g(z)$ não pode ser ignorada mesmo para valores de $z > 10L$ onde o valor de $g(z)$ é pequeno. Portanto, uma camada altamente condutiva, mesmo a uma distância considerável, acima ou abaixo da sonda, pode contribuir mais para o sinal recebido do que uma camada de menor condutividade nas proximidades do ponto de medida O .

Em um meio isotrópico, homogêneo e infinito (σ constante), a equação (11) se reduz a $V/K = \sigma_t$. Para o caso usual de formações invadidas ou laminadas é conveniente definir uma condutividade aparente $\sigma_a = V_m/K$ para cada profundidade, onde V_m corresponde a voltagem medida nos terminais da bobina receptora. Quando a ferramenta se encontra defronte a uma formação não invadida, de espessura suficientemente grande (de acordo com a figura (4) esta espessura deve ser maior que 6 vezes o comprimento L), teremos que $\sigma_a = \sigma_t$.

Perfis sintéticos, ilustrando os aspectos mencionados anteriormente, foram calculados por Doll (1949) através da teoria do fator geométrico sobre várias condições de invasão, espessura de camadas e condutividade de camadas adjacentes. Existem ainda cartas de correção elaboradas pelas próprias companhias de serviço que permitem a avaliação de σ_t (resistividade verdadeira) através

da σ_a (resistividade aparente), obtida do perfil, quando são dados outros parâmetros (diâmetro do poço, espessura de camadas, "skin effect", resistividade de lama, profundidade de invasão da lama, resistividade de camadas adjacentes, valores de resistividades provenientes de outros perfis ou outras ferramentas e com diferentes raios de investigação, etc ...).

2.2.4. Desvantagens dos Perfis de Indução

Os perfis de indução normalmente apresentam problemas quando são utilizados em poços preenchidos com lama altamente condutiva (lama a base de água salgada), ou em formações que possuam resistividades muito altas (>100 ohm.m), pois neste caso, a própria lama irá criar campos magnéticos em quantidades talvez muito maiores que aqueles oriundos da própria formação, indo desta maneira prejudicar sensivelmente as leituras de resistividade verdadeira (R_t) que desejamos obter.

Outro problema ligado a este tipo de perfil está relacionado com os reservatórios de pouca espessura ($<0,5$ m), intercalados com rochas não reservatório (folhelhos, siltitos, etc...), pois os perfis convencionais de indução, não possuem resolução vertical capaz de identificá-los, nem como determinar as resistividades individuais de cada camada, impossibilitando a estimativa do volume de hidrocarbonetos e potencialidade de produção desta determinada seção.

2.3. Resolução Vertical

Devido ao fato de os campos petrolíferos gigantes da década passada estarem entrando em fase final de exploração, uma grande mudança está ocorrendo na indústria petrolífera. Preocupados com o eminente declínio destes poços, as empresas de petróleo voltaram suas atenções para reservatórios menores, e com um grau de complexidade maior. Assim sendo, essas empresas estão exigindo novas tecnologias em perfuração, completação e avaliação de formações.

No campo da perfilagem de poço, existe um grande interesse voltado para as técnicas que melhorem a resolução vertical dos perfis, de tal forma que seja possível detectar mudanças verticais de propriedades em camadas delgadas ou finas. Portanto, para que possamos estudar as técnicas que melhorem a resolução vertical de perfis de indução, definiremos resolução vertical e quais os fatores influentes.

A resolução vertical de uma ferramenta de perfilagem pode ser definida como a mais fina

camada na qual uma medida verdadeira pode ser obtida. Dessa forma, a resolução vertical é um fator que limita a interpretação quantitativa do perfil.

A resolução vertical é normalmente determinada pela geometria da sonda. Nas ferramentas de indução, especificamente para o caso com duas bobinas, a resolução da ferramenta pode ser determinada pelo espaçamento entre a bobina transmissora e a bobina receptora. Consequentemente, quanto menor a distância entre as bobinas, maior será a resolução vertical da ferramenta.

Geralmente, a resolução vertical de uma sonda de perfilagem e sua profundidade de investigação são inversamente proporcionais. Portanto, quando tentamos melhorar a resolução vertical de uma ferramenta de indução através de modificações no espaçamento entre as bobinas, consequentemente iremos comprometer a sua profundidade de investigação.

Como ilustração, podemos citar a ferramenta do perfil de indução (6FF40) e o arranjo de bobinas utilizado pela Schlumberger (Tanguy, 1959) que são mostrados na figura (5).

Na ferramenta de indução apresentada na figura (5), o par transmissor-receptor primário são separados por 40 pol. (1,016 m). Como resultado da geometria da sonda, a resistividade em camadas de espessuras menores que 4 ft (1,2192 m) não podem ser efetivamente corrigidas com o objetivo de obtermos uma resistividade verdadeira.

CAPÍTULO 3

MOTIVAÇÃO DO ESTUDO DOS FILTROS (Deconvolução)

3.1. Introdução

Da teoria exposta no capítulo anterior, pode-se concluir que a condutividade lida no perfil pode ser considerada como a convolução entre os valores de condutividade da camada e os coeficientes da ferramenta. A condutividade verdadeira da camada pode ser obtida realizando uma operação inversa à convolução, conhecida como deconvolução.

No trabalho que estamos desenvolvendo, observa-se uma seqüência de valores registrados que se relaciona com a combinação linear de parâmetros da formação. No nosso caso, estes valores registrados são as condutividades lidas no perfil, e os parâmetros da formação são as condutividades de cada camada.

Nosso problema consiste em projetar um estimador, que processe a seqüência de dados observados com o objetivo de produzir uma estimativa dos valores registrados, de tal forma que esta estimativa reproduza os valores de condutividade de cada camada, e não como combinação linear destas condutividades.

Um modelo bastante abrangente seria considerarmos os valores registrados r_n como:

$$r_n = h_0 \cdot a_n + h_1 \cdot a_{n-1} + h_2 \cdot a_{n-2} + h_3 \cdot a_{n-3} + \dots + h_k \cdot a_{n-k} + w_n \quad (12)$$

em que:

a_n, a_{n-1}, \dots e a_{n-k} são os valores de condutividades de cada camada,

h_0, h_1, \dots, h_k são os valores de porcentagem de informação proveniente de cada camada, onde

$$h_0 + h_1 + h_2 + \dots + h_k = 1, \quad (13)$$

e w_n é o ruído relativo à medida de profundidade n .

Adotaremos nesta parte do trabalho um desenvolvimento em que consideramos que os valores registrados são funções lineares de apenas dois valores de condutividade e de um ruído, de tal forma que:

$$r_n = (a_n + a_{n-1}) + w_n, \quad 1 \leq n \leq N \quad (14)$$

onde:

r_n representa o valor de condutividade registrado no perfil na medida de profundidade n ,

a_n e a_{n-1} representam os valores de condutividades de duas camadas adjacentes localizadas de frente à medida de profundidade n , e

w_n representa o ruído relativo à medida de profundidade n .

Adotaremos como condutividade verdadeira de uma camada o valor a_n , e como estimativa da condutividade desta camada o valor \hat{a}_n . O erro decorrente desta estimativa será:

$$\tilde{a}_n = a_n - \hat{a}_n \quad (15)$$

3.2. Inversão

O objetivo neste item é estimar o coeficiente a_n a partir dos dados registrados r_n . Consideremos o caso isento de ruídos, ou seja:

$$r_n = a_n + a_{n-1}, \quad 1 \leq n \leq N. \quad (16)$$

A equação acima pode ser rearranjada com o intuito de obter-se uma inversão exata. Substituindo a_n pelo seu valor obtido na equação (15), na expressão (16), e a_{n-1} por uma equação semelhante àquela apresentada para a_n , obtemos:

$$r_n = \tilde{a}_n + \hat{a}_n + \tilde{a}_{n-1} + \hat{a}_{n-1}. \quad (17)$$

Porém, uma condição inicial para o erro devido à estimativa inicial, é necessária. Então:

$$\tilde{a}_n = -\tilde{a}_{n-1}, \quad 1 \leq n \leq N. \quad (18)$$

Portanto, após a substituição da expressão (18) de condição inicial na equação (17), tem-se que:

$$r_n = \hat{a}_n + \hat{a}_{n-1}, \quad 1 \leq n \leq N. \quad (19)$$

A equação (19) é interessante, pois mostra que se o modelo apresentado pela equação (16) e a equação (18) de condição inicial são válidas, os valores r_n registrados no perfil, podem ser obtidos a partir da soma dos estimadores.

Então,

$$\hat{a}_n = r_n - \hat{a}_{n-1}, \quad 1 \leq n \leq N. \quad (20)$$

Pode-se observar que, devido ao fato do algoritmo ser recursivo, o erro introduzido no início permanecerá nos cálculos subsequentes.

Além do mais, considerando-se os ruídos, os cálculos tendem a ficar mais instáveis e a condição inicial toma a seguinte forma:

$$\tilde{a}_n = -\tilde{a}_{n-1} - w_n.$$

Então,

$$\tilde{a}_1 = -\tilde{a}_0 - w_1,$$

$$\tilde{a}_2 = -\tilde{a}_1 - w_2 \longrightarrow \tilde{a}_2 = \tilde{a}_0 + w_1 - w_2,$$

$$\tilde{a}_3 = -\tilde{a}_2 - w_3 \longrightarrow \tilde{a}_3 = -\tilde{a}_0 - w_1 + w_2 - w_3,$$

⋮

consequentemente

$$\tilde{a}_n = -\tilde{a}_{n-1} - w_n \longrightarrow \tilde{a}_n = (-1)^n \cdot \tilde{a}_0 + \sum_{m=1}^n (-1)^m \cdot w_m.$$

A equação anterior descreve a propagação dos erros no processamento recursivo de dados adotado pelo modelo aqui desenvolvido, e permite obter o erro posterior em função do erro do passo anterior.

3.3. Estimativa Através de Mínimos Quadrados

Uma estimativa através de mínimos quadrados para a seqüência a_n pode ser obtida minimizando a função E, onde

$$E = \sum_{n=1}^N (r_n - \hat{a}_n - \hat{a}_{n-1})^2 + \sum_{n=0}^N a_n^2.$$

Uma função E mais geral pode ser obtida introduzindo um P_w^{-1} que penalize as diferenças entre as observações atuais e as observações obtidas através das estimativas, e um peso P_a^{-1} que penalize a grandeza dos valores estimados.

Portanto, a função E toma a seguinte forma

$$E = \sum_{n=1}^N P_{w(n)}^{-1} (r_n - \hat{a}_n - \hat{a}_{n-1})^2 + \sum_{n=0}^N P_{a(n)}^{-1} a_n^2.$$

Em geral, a função custo E pode ser representada em notação matricial como

$$E = (r - A \cdot \hat{a})^T \cdot \Lambda_w^{-1} \cdot (r - A \cdot \hat{a}) + \hat{a}^T \cdot \Lambda_a^{-1} \cdot \hat{a}, \quad (21)$$

onde

$$r = [r_1, r_2, r_3, \dots, r_N]^T \quad N \times 1,$$

$$\hat{a} = [\hat{a}_0, \hat{a}_1, \hat{a}_2, \dots, \hat{a}_N]^T \quad (N+1) \times 1,$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad N \times (N+1),$$

$\Lambda_w = P_w \cdot I$, $\Lambda_a = P_a \cdot I$, e I é a matriz identidade de dimensão apropriada.

Para garantir a existência das matrizes Λ_w^{-1} e Λ_a^{-1} , neste desenvolvimento Λ_w e Λ_a serão consideradas matrizes positivas definidas ($\det \Lambda_w, \det \Lambda_a \neq 0$).

A estimativa do mínimo quadrado do valor de a, pode ser obtida derivando-se a função custo E em relação a \hat{a} , ou seja:

$$\frac{\partial E}{\partial \hat{a}} = -A^T \cdot \Lambda_w^{-1} (r - A \cdot \hat{a}) + (r - A \cdot \hat{a}) \cdot \Lambda_w^{-1} \cdot (-A) + \Lambda_a^{-1} \cdot \hat{a} + \hat{a}^T \cdot \Lambda_a^{-1}.$$

Agrupando os termos comuns na equação anterior, teremos:

$$\frac{\partial E}{\partial \hat{a}} = -2 \cdot A^T \cdot \Lambda_w^{-1} (r - A \cdot \hat{a}) + 2 \cdot \Lambda_a^{-1} \cdot \hat{a}.$$

Iguala-se $\frac{\partial E}{\partial \hat{a}}$ a zero e resolve-se a equação para \hat{a} . Então:

$$\hat{a} = (\Lambda_a^{-1} + A^T \cdot \Lambda_w^{-1} \cdot A)^{-1} \cdot A^T \cdot \Lambda_w^{-1} \cdot r.$$

É importante acrescentar que no caso em que o sistema é quase indeterminado, ou seja, $\det \Lambda_w, \det \Lambda_a \approx 0$, os pequenos erros nos dados ou na estimativa prévia irão gerar grandes erros na estimativa final, de acordo com o desenvolvimento proposto por Lanczos (1961).

CAPÍTULO 4

DESENVOLVIMENTO TEÓRICO DO ALGORITMO

4.1. Introdução

Métodos vetoriais e matriciais são particularmente convenientes para aplicação em técnicas de estimativa de mínimos quadrados. Um exemplo específico de estimativa de mínimos quadrados ocorre em problemas de ajuste de curvas, onde deseja-se obter uma forma funcional de uma ordem escolhida que melhor se ajuste à série de medidas. O critério para o melhor ajuste se baseia na minimização da soma dos quadrados das diferenças entre as medidas e a curva ou forma funcional estimada.

O problema dos mínimos quadrados linear implica na utilização de uma série de medidas y_j , que são linearmente relacionados com M_j , vetor dos valores verdadeiros dos parâmetros (condutividades) da formação, que é um valor desconhecido na expressão

$$y_j = H^T \cdot M_j + n_j, \quad (22)$$

onde n_j é um número que representa os ruídos e H^T é um vetor que representa os coeficientes da ferramenta. O objetivo é encontrar uma estimativa dos valores do vetor M_j , designado pelo vetor $M_j(+)$. Em particular, dada a diferença

$$y_j - H^T \cdot M_j(+), \quad (23)$$

nosso objetivo se resume em encontrar o vetor $M_j(+)$ que minimize a soma dos quadrados dos elementos de $y_j - H^T \cdot M_j(+)$. Lembrando que o produto interno entre dois vetores iguais gera a soma dos quadrados dos elementos deste vetor, nosso objetivo se resume em minimizar a função escalar J_j onde

$$J_j = (y_j - H^T \cdot M_j(+)) \cdot (y_j - H^T \cdot M_j(+)). \quad (24)$$

A minimização de um escalar, com relação a um vetor, é obtida quando

$$\frac{\partial J_j}{\partial M_j(+)} = 0 \quad (25)$$

e o Hessiano de J_j é uma matriz semipositiva definida

$$\left| \frac{\partial^2 J_j}{\partial M_j(+)^2} \right| \geq 0. \quad (26)$$

Para efetuarmos o processamento, definiremos o vetor $M_j(-)$ como uma estimativa do valor do vetor M_j antes do processamento da medida y_j , e $M_j(+)$ como o vetor dos valores corrigidos do vetor $M_j(-)$ após o processamento de y_j . Na hipótese de que o valor do vetor $M_j(+)$ será função linear da estimativa do vetor M_j (vetor $M_j(-)$), e da série de medidas y_j , adotaremos para o valor do vetor $M_j(+)$ a seguinte expressão:

$$M_j(+) = A_j \cdot M_j(-) + B_j \cdot y_j. \quad (27)$$

onde A_j e B_j devem ser calculados. A determinação de A_j e B_j pode ser efetuada através da minimização de erros estimativos $\tilde{M}_j(-)$ e $\tilde{M}_j(+)$:

$$\tilde{M}_j(+) = M_j(+) - M_j \quad (28)$$

e

$$\tilde{M}_j(-) = M_j(-) - M_j. \quad (29)$$

Substituindo a equação (27) na equação (28), vem:

$$\tilde{M}_j(+) = [A_j \cdot M_j(-) + B_j \cdot y_j] - M_j. \quad (30)$$

Substituindo y_j pela expressão da equação (22),

$$\tilde{M}_j(+) = A_j \cdot M_j(-) + B_j \cdot [H^T \cdot M_j + n_j] - M_j. \quad (31)$$

Substituindo $M_j(-)$ da equação (29) pela expressão equivalente, vem:

$$\tilde{M}_j(+) = A_j \cdot [\tilde{M}_j(-) + M_j] + B_j \cdot H^T \cdot M_j + B_j \cdot n_j - M_j, \quad (32)$$

e colocando M_j em evidência obteremos

$$\tilde{M}_j(+) = [A_j + B_j \cdot H^T - I] \cdot M_j + A_j \cdot \tilde{M}_j(-) + B_j \cdot n_j. \quad (33)$$

Calculando as esperanças em ambos os lados da equação (33)

$$E[\tilde{M}_j(+)] = E\{[A_j + B_j \cdot H^T - I] \cdot M_j + A_j \cdot \tilde{M}_j(-) + B_j \cdot n_j\}. \quad (34)$$

Utilizando a propriedade de que a esperança de uma soma é igual a soma das esperanças

$$E[\tilde{M}_j(+)] = E\{[A_j + B_j \cdot H^T - I] \cdot M_j\} + A_j \cdot E[\tilde{M}_j(-)] + B_j \cdot E[n_j]. \quad (35)$$

Segundo comunicação verbal com Anderson (1989), em perfis de indução, normalmente os ruídos não são considerados problemas, exceto nas medidas perto de locais que possuam condutividades próximas de zero, onde pode existir um desvio constante em torno de 10^{-8} mho. Portanto, podemos considerar

$$E[n_j] = 0. \quad (36)$$

Calculando as esperanças em ambos os lados da equação (28)

$$E[\tilde{M}_j(+)] = E[M_j(+)] - M_j \quad (37)$$

e

$$E[M_j(+)] = M_j + E[\tilde{M}_j(+)]. \quad (38)$$

Para que o estimador $M_j(+)$ seja não tendencioso é necessário que

$$E[\tilde{M}_j(+)] = 0 \quad (39)$$

substituindo as expressões (36) e (39) na expressão (35), teremos

$$0 = E\{[A_j + B_j \cdot H^T - I] \cdot M_j\} + A_j \cdot E[\tilde{M}_j(-)] , \quad (40)$$

$$0 = [A_j + B_j \cdot H^T - I] \cdot E[M_j] + A_j \cdot E[\tilde{M}_j(-)] , \quad (41)$$

Para que a equação (41) seja satisfeita é necessário que o estimador $M_j(-)$ também seja não tendencioso

$$E[\tilde{M}_j(-)] = 0 \quad (42)$$

e que

$$A_j + B_j \cdot H^T - I = 0, \quad (43)$$

válido somente no caso em que $E[M_j] \neq 0$. Isto é decorrente do fato de que em um perfil, as propriedades físicas do meio não necessariamente oscilam em torno do valor zero.

A equação (43) pode ser também escrita da seguinte forma:

$$A_j = I - B_j \cdot H^T \quad (44)$$

Substituindo a equação (44) na equação (27) obtemos

$$M_j(+) = (I - B_j \cdot H^T) \cdot M_j(-) + B_j \cdot y_j \quad (45)$$

ou alternativamente

$$M_j(+) = M_j(-) + B_j \cdot (y_j - H^T \cdot M_j(-)) \quad (46)$$

Calcularemos agora o erro decorrente do estimador através da equação (28). Substituindo na equação (28) a equação (46), obtemos

$$\tilde{M}_j(+) = M_j(-) + B_j \cdot (y_j - H^T \cdot M_j(-)) - M_j \quad (47)$$

Colocando $M_j(-)$ em evidência na equação (47)

$$\tilde{M}_j(+) = (I - B_j \cdot H^T) \cdot M_j(-) + B_j \cdot y_j - M_j \quad (48)$$

Substituindo o valor de $M_j(-)$ na expressão (48) pela sua expressão, derivada na equação (29)

$$\tilde{M}_j(+)= (I - B_j \cdot H^T) \cdot (\tilde{M}_j(-) + M_j) + B_j \cdot y_j - M_j, \quad (49)$$

$$\tilde{M}_j(+)= (I - B_j \cdot H^T) \cdot \tilde{M}_j(-) + (I - B_j \cdot H^T - I) \cdot M_j + B_j \cdot y_j \quad (50)$$

e

$$\tilde{M}_j(+)= (I - B_j \cdot H^T) \cdot \tilde{M}_j(-) + B_j \cdot y_j - B_j \cdot H^T \cdot M_j. \quad (51)$$

Colocando B_j em evidência

$$\tilde{M}_j(+)= (I - B_j \cdot H^T) \cdot \tilde{M}_j(-) + B_j \cdot (y_j - H^T \cdot M_j) \quad (52)$$

e substituindo o valor da expressão $y_j - H^T \cdot M_j$ pelo seu valor da equação (22), na equação (52), obteremos

$$\tilde{M}_j(+)= (I - B_j \cdot H^T) \cdot \tilde{M}_j(-) + B_j \cdot n_j. \quad (53)$$

O resultado da expressão (53) nos permite calcular $\tilde{M}_j(+)$ (erro decorrente do estimador) em função do erro da estimativa do vetor M_j antes do processamento, denominado de vetor $\tilde{M}_j(-)$.

Esta expressão será utilizada no item seguinte com o intuito de deduzirmos as alterações na matriz covariância do erro.

4.2. Atualização da Covariância do Erro

4.2.1. Desenvolvimento

Utilizando a equação (53), a expressão para as alterações na matriz covariância do erro, quando uma medida é utilizada, pode ser deduzida.

De acordo com a definição, a covariância de $\tilde{M}_j(+)$, designada $P_j(+)$, é dada por

$$P_j(+)= E[\tilde{M}_j(+)\cdot\tilde{M}_j(+)^T]. \quad (54)$$

Substituindo o valor de $\tilde{M}_j(+)$ da equação (53) na equação (54), vem:

$$P_j(+)= E\{[(I - B_j \cdot H^T) \cdot \tilde{M}_j(-) + B_j \cdot n_j] \cdot [(I - B_j \cdot H^T) \cdot \tilde{M}_j(-) + B_j \cdot n_j]^T\} \quad (55)$$

de acordo com as propriedades de matrizes temos que

$$(A + B)^T = A^T + B^T$$

e

$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T.$$

Utilizando as propriedades acima citadas, temos que

$$P_j(+) = E \left\{ [(I - B_j \cdot H^T) \cdot \tilde{M}_j(-) + B_j \cdot n_j] \cdot [((I - B_j \cdot H^T) \cdot \tilde{M}_j(-))^T + (B_j \cdot n_j)^T] \right\}, \quad (56)$$

ou ainda

$$P_j(+) = E \left\{ [(I - B_j \cdot H^T) \cdot \tilde{M}_j(-) + B_j \cdot n_j] \cdot [(\tilde{M}_j(-))^T \cdot (I - B_j \cdot H^T)^T + n_j^T \cdot B_j^T] \right\}, \quad (57)$$

e então

$$\begin{aligned} P_j(+) = E \left\{ (I - B_j \cdot H^T) \cdot \tilde{M}_j(-) \cdot \tilde{M}_j(-)^T \cdot (I - B_j \cdot H^T)^T + B_j \cdot n_j \cdot n_j^T \cdot B_j^T + \right. \\ \left. + (I - B_j \cdot H^T) \cdot \tilde{M}_j(-) \cdot n_j^T \cdot B_j^T + B_j \cdot n_j \cdot \tilde{M}_j(-)^T \cdot (I - B_j \cdot H^T)^T \right\}. \quad (58) \end{aligned}$$

Por definição,

$$E[\tilde{M}_j(-) \cdot \tilde{M}_j(-)^T] = P_j(-) \quad (59)$$

e

$$E[n_j \cdot n_j^T] = \sigma_j^2. \quad (60)$$

Como a esperança só atua nas variáveis aleatórias, então a equação (58) vale

$$\begin{aligned} P_j(+) = (I - B_j \cdot H^T) \cdot P_j(-) \cdot (I - B_j \cdot H^T)^T + B_j \cdot \sigma_j^2 \cdot B_j^T + \\ + (I - B_j \cdot H^T) \cdot E[\tilde{M}_j(-) \cdot n_j^T] \cdot B_j^T + B_j \cdot E[n_j \cdot \tilde{M}_j(-)^T] \cdot (I - B_j \cdot H^T)^T. \quad (61) \end{aligned}$$

Como consequência de n_j ser um ruído branco, temos que

$$E[\tilde{M}_j(-) \cdot n_j^T] = 0 \quad (62)$$

e

$$E[n_j \cdot \tilde{M}_j(-)^T] = 0. \quad (63)$$

Substituindo os valores das esperanças das equações (62) e (63) na equação (61), obteremos

$$P_j(+) = (I - B_j \cdot H^T) \cdot P_j(-) \cdot (I - B_j \cdot H^T)^T + B_j \cdot \sigma_j^2 \cdot B_j^T. \quad (64)$$

O resultado da expressão (64), nos permite calcular os valores da matriz covariância do erro, $P_j(+)$, em função da estimativa da matriz covariância do erro ($P_j(-)$).

4.3. Escolha da Matriz de Ganho do Filtro (B_j)

4.3.1. Desenvolvimento

De acordo com Gelb (1974), o critério para escolher o melhor valor para B_j recairá sobre a minimização da soma escalar ponderada dos elementos da diagonal da matriz covariância do erro $P_j(+)$. Portanto, para estudar esta minimização, utilizaremos a função

$$J_j = E[\tilde{M}_j(+)^T \cdot S \cdot \tilde{M}_j(+)] \quad (65)$$

em que tentaremos minimizar o valor de J_j e onde S é qualquer matriz simétrica semipositiva definida.

Demonstraremos a seguir que a melhor estimativa para o valor de M_j é independente de S .

Substituindo o valor de $\tilde{M}_j(+)$ da equação (28), teremos:

$$J_j = E[(M_j(+) - M_j)^T \cdot S \cdot (M_j(+) - M_j)] \quad (66)$$

e utilizando a definição de esperança temos que

$$J_j = \int_{-\infty}^{+\infty} (M_j(+)-M_j)^T \cdot S \cdot (M_j(+)-M_j) \cdot P(M_j) \cdot dM_j. \quad (67)$$

Como queremos minimizar o valor de J_j com relação à $M_j(+)$, devemos fazer $\frac{\partial J_j}{\partial M_j(+)} = 0$.

Sendo assim:

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_j}{\partial M_j(+)} &= \int_{-\infty}^{+\infty} S \cdot (M_j(+)-M_j) \cdot P(M_j) \cdot dM_j + \\ &+ \int_{-\infty}^{+\infty} (M_j(+)-M_j)^T \cdot S \cdot P(M_j) \cdot dM_j; \end{aligned} \quad (68)$$

então,

$$\frac{\partial J_j}{\partial M_j(+)} = 2 \cdot S \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} (M_j(+)-M_j) \cdot P(M_j) \cdot dM_j. \quad (69)$$

Igualando a zero a equação (69), obteremos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (M_j(+)-M_j) \cdot P(M_j) \cdot dM_j = 0. \quad (70)$$

Consequentemente,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} M_j(+)\cdot P(M_j) \cdot dM_j = \int_{-\infty}^{+\infty} M_j \cdot P(M_j) \cdot dM_j. \quad (71)$$

Passando $M_j(+)$ da equação (71) para fora do integrando, teremos

$$M_j(+)\cdot \int_{-\infty}^{+\infty} P(M_j) \cdot dM_j = \int_{-\infty}^{+\infty} M_j \cdot P(M_j) \cdot dM_j \quad (72)$$

e como a probabilidade de ocorrência de M_j no intervalo $-\infty$ até $+\infty$ é 1, temos que

$$M_j(+)= \int_{-\infty}^{+\infty} M_j \cdot P(M_j) \cdot dM_j, \quad (73)$$

que demonstra que a melhor estimativa para o valor de $M_j(+)$ é independente de S . Consequentemente, podemos escolher a matriz S como sendo a matriz identidade I . Substituindo na equação (65) a matriz S pela matriz identidade I , obteremos

$$J_j = E[\tilde{M}_j(+)^T \cdot I \cdot \tilde{M}_j(+)] \quad (74)$$

que pode ser substituída pelo traço da matriz J_j , ou seja,

$$J_j = \text{tr} E[\tilde{M}_j(+)^T \cdot \tilde{M}_j(+)]. \quad (75)$$

Fazendo a substituição da equação (54) na equação (75), teremos

$$J_j = \text{tr} P_j(+). \quad (76)$$

Para encontrar o valor de B_j que fornece um valor mínimo para J_j é necessário que tomemos a derivada parcial de J_j com relação a B_j e posteriormente igualar a zero esta derivada. Para isto, utilizaremos a relação para a derivada parcial do traço de um produto de duas matrizes C e D (com D simétrica) que pode ser fornecido pelo Apêndice 1

$$\frac{\partial}{\partial C} [\text{tr}(C \cdot D \cdot C^T)] = 2 \cdot C \cdot D. \quad (77)$$

Portanto, substituindo a equação (64) na equação (76), obtemos

$$J_j = \text{tr} \left\{ (I - B_j \cdot H^T) \cdot P_j(-) \cdot (I - B_j \cdot H^T)^T + B_j \cdot \sigma_j^2 \cdot B_j^T \right\}. \quad (78)$$

Efetuada a derivada de J_j em relação a B_j (utilizando a relação da equação (77)) obtemos

$$\frac{\partial J_j}{\partial B_j} = 2 \cdot (I - B_j \cdot H^T) \cdot P_j(-) \cdot [-H] + 2 \cdot B_j \cdot \sigma_j^2. \quad (79)$$

Para encontrar o valor extremo de B_j para a equação de J_j , igualamos a equação (79) a zero e obtemos

$$-2 \cdot (I - B_j \cdot H^T) \cdot P_j(-) \cdot H + 2 \cdot B_j \cdot \sigma_j^2 = 0 \quad (80)$$

resolvendo a equação (80) para B_j

$$-I \cdot P_j(-) \cdot H + B_j \cdot H^T \cdot P_j(-) \cdot H + B_j \cdot \sigma_j^2 = 0. \quad (81)$$

Então,

$$B_j \cdot [H^T \cdot P_j(-) \cdot H + \sigma_j^2] = P_j(-) \cdot H, \quad (82)$$

ou

$$B_j = P_j(-) \cdot H \cdot [H^T \cdot P_j(-) \cdot H + \sigma_j^2]^{-1} \quad (83)$$

que é definida como a matriz de ganho do filtro.

Deve-se verificar agora, através da segunda derivada de J_j com relação a B_j , se este valor de B_j minimiza J_j .

Partindo da equação (79), que é a primeira derivada de J_j com relação a B_j , e efetuando os produtos no lado esquerdo da equação, obtemos

$$\frac{\partial J_j}{\partial B_j} = -2 \cdot I \cdot P_j(-) \cdot H + 2 \cdot B_j \cdot H^T \cdot P_j(-) \cdot H + 2 \cdot B_j \cdot \sigma_j^2. \quad (84)$$

Efetuada a segunda derivada de J_j com relação a B_j , obtemos

$$\frac{\partial^2 J_j}{\partial B_j^2} = 2 \cdot I \cdot H^T \cdot P_j(-) \cdot H + 2 \cdot I \cdot \sigma_j^2. \quad (85)$$

Colocando a matriz identidade em evidência na equação (85), obtemos:

$$\frac{\partial^2 J_j}{\partial B_j^2} = 2 \cdot I \cdot [H^T \cdot P_j(-) \cdot H + \sigma_j^2] \quad (86)$$

Porém, a matriz $P_j(-)$ é não negativa definida, sendo assim o produto $H^T \cdot P_j(-) \cdot H$ será um número maior ou igual a zero. Portanto, a soma de $H^T \cdot P_j(-) \cdot H$ com σ_j^2 será um número maior ou igual a zero. Finalmente, pode-se concluir que a análise do Hessiano de J_j revela que o valor de B_j , na verdade minimiza J_j .

Após ter-se encontrado o valor de B_j que minimiza a soma escalar ponderada dos elementos da diagonal principal da matriz covariância do erro $P_j(+)$, substituiremos este valor de B_j na expressão de $P_j(+)$.

Utilizando as propriedades relativas à transposição de produto, soma de matrizes, e efetuando os produtos da equação (64), obtemos

$$\begin{aligned} P_j(+) &= P_j(-) - P_j(-) \cdot H \cdot B_j^T - B_j \cdot H^T \cdot P_j(-) + \\ &+ B_j \cdot H^T \cdot P_j(-) \cdot H \cdot B_j^T + B_j \cdot \sigma_j^2 \cdot B_j^T. \end{aligned} \quad (87)$$

Substituindo o valor de B_j da equação (83) na expressão (87), obtemos

$$\begin{aligned}
P_j(+) &= P_j(-) - P_j(-) \cdot H \cdot H^T \cdot P_j(-) \cdot [H^T \cdot P_j(-) \cdot H + \sigma_j^2]^{-1} - \\
&\quad - P_j(-) \cdot H \cdot H^T \cdot P_j(-) \cdot [H^T \cdot P_j(-) \cdot H + \sigma_j^2]^{-1} + \\
&\quad + P_j(-) \cdot H \cdot H^T \cdot P_j(-) \cdot H \cdot H^T \cdot P_j(-) \cdot [H^T \cdot P_j(-) \cdot H + \sigma_j^2]^{-2} + \\
&\quad + P_j(-) \cdot H \cdot \sigma_j^2 \cdot H^T \cdot P_j(-) \cdot [H^T \cdot P_j(-) \cdot H + \sigma_j^2]^{-2}.
\end{aligned} \tag{88}$$

Colocando $P_j(-) \cdot H \cdot [H^T \cdot P_j(-) \cdot H + \sigma_j^2]^{-1} \cdot H^T \cdot P_j(-)$ em evidência a partir do segundo termo do lado direito da equação (88), obtemos

$$\begin{aligned}
P_j(+) &= P_j(-) + P_j(-) \cdot H \cdot [H^T \cdot P_j(-) \cdot H + \sigma_j^2]^{-1} \cdot H^T \cdot P_j(-) \cdot \\
&\quad \left\{ -1 - 1 + H^T \cdot P_j(-) \cdot H \cdot [H^T \cdot P_j(-) \cdot H + \sigma_j^2]^{-1} + \right. \\
&\quad \left. + \sigma_j^2 \cdot [H^T \cdot P_j(-) \cdot H + \sigma_j^2]^{-1} \right\}.
\end{aligned} \tag{89}$$

Colocando em evidência o termo $[H^T \cdot P_j(-) \cdot H + \sigma_j^2]^{-1}$ na expressão que está entre chaves na equação (89), obtemos

$$\begin{aligned}
P_j(+) &= P_j(-) + P_j(-) \cdot H \cdot [H^T \cdot P_j(-) \cdot H + \sigma_j^2]^{-1} \cdot H^T \cdot P_j(-) \cdot \\
&\quad \cdot \{-2 + (H^T \cdot P_j(-) \cdot H + \sigma_j^2)^{-1} \cdot (H^T \cdot P_j(-) \cdot H + \sigma_j^2)\}.
\end{aligned} \tag{90}$$

Finalmente,

$$P_j(+) = P_j(-) - P_j(-) \cdot H \cdot [H^T \cdot P_j(-) \cdot H + \sigma_j^2]^{-1} \cdot H^T \cdot P_j(-); \tag{91}$$

colocando $P_j(-)$ em evidência na equação (91), obtemos

$$P_j(+) = [I - P_j(-) \cdot H \cdot [H^T \cdot P_j(-) \cdot H + \sigma_j^2]^{-1} \cdot H^T] \cdot P_j(-). \tag{92}$$

Substituindo $P_j(-) \cdot H \cdot [H^T \cdot P_j(-) \cdot H + \sigma_j^2]^{-1}$ por B_j , obtemos

$$P_j(+) = [I - B_j \cdot H^T] \cdot P_j(-) \tag{93}$$

que é o valor otimizado para a estimativa atualizada da matriz covariância do erro.

Existem dois problemas básicos quando nos propomos a implementar um filtro inverso. Um destes problemas está relacionado à determinação dos valores a serem adotados para as condições iniciais e o outro se relaciona ao problema de como saltar de um valor medido para um valor medido posterior. Passar de uma medida atual para uma medida posterior envolve especificação das relações entre $P_{j+1}(-)$ e $P_j(+)$ bem como $M_{j+1}(-)$ e $M_j(+)$.

Na forma como foi abordado o problema na equação (22) (combinação linear dos parâmetros), devemos estudar agora o estado de um sistema linear em pontos discretos. Segundo Gelb (1974) o modelo assume a forma

$$M_j = \Phi_{j-1} \cdot M_{j-1} + \Gamma_{j-1} \cdot W_{j-1}, \quad (94)$$

onde:

$\Phi_{j-1} = \Phi(t_j, t_{j-1})$, que é a matriz de transição de estado para passar do estado $j-1$ para o estado j ,

W_{j-1} é um vetor cujos valores são derivados de um processo aleatório (ruído branco), e

Γ_{j-1} é uma matriz.

4.4. Propagação dos Erros

4.4.1. Desenvolvimento

Considerando o problema de estimar o estado de um sistema dinâmico, no qual o vetor de estado M é conhecido em algum tempo t_j com uma incerteza expressa pela matriz covariância do erro,

$$P_j = E[\tilde{M}_j \cdot \tilde{M}_j^T]. \quad (95)$$

Desejamos obter uma estimativa em um tempo posterior t_{j+1} , que deverá conter um erro não tendencioso \tilde{M}_{j+1} . para criar a estimativa (a parte preditível de $M_{j+1}(+)$ dado $M_j(+)$), a conhecida matriz de transição de estado Φ_{j-1} da equação (94) é utilizada, resultando em

$$M_j(+) = \Phi_{j-1} \cdot M_{j-1}(+). \quad (96)$$

Para mostrar que o erro na estimativa em t_j é não tendencioso, subtrairemos a equação (94) da equação (96), obtendõ

$$M_j(+)-M_j=\Phi_{j-1}\cdot M_{j-1}(+)-\Phi_{j-1}\cdot M_{j-1}-\Gamma_{j-1}\cdot W_{j-1}. \quad (97)$$

Utilizando a equação (28) na equação (97), obtemos

$$\tilde{M}_j(+)=\Phi_{j-1}\cdot\tilde{M}_{j-1}(+)-\Gamma_{j-1}\cdot W_{j-1} \quad (98)$$

e calculando a esperança do erro temos que

$$E[\tilde{M}_j(+)] = \Phi_{j-1} \cdot E[\tilde{M}_{j-1}(+)] - \Gamma_{j-1} \cdot E[W_{j-1}] = 0. \quad (99)$$

Portanto, considerando que \tilde{M}_{j-1} e W_{j-1} são não tendenciosos, pode-se concluir que a equação (96) permite extrapolação da estimativa do vetor de estado, sem introduzir nenhum prejuízo nos cálculos.

Podemos observar que, objetivando projetar um filtro de Kalman para realizar a inversão de dados registrados, é necessário conhecimento da esperança, da variância e da matriz de transição de estado. É precisamente por causa destas exigências que o filtro de Kalman (Webster, 1978) é tão difícil de ser implementado. As estatísticas exigidas não são conhecidas, e os únicos dados disponíveis são os grupos de medidas, que são médias suavizadas dos parâmetros. Portanto, conhecendo-se as estatísticas, o problema de determinar a matriz de transição de estado se torna mais simples. Foster et. all (1962), não aplicam a teoria de Kalman, mas suas soluções também necessitam de especificações das estatísticas dos parâmetros. Sua inversão foi planejada supondo que as estatísticas dos parâmetros eram relativas a processos aleatórios (ruído branco). Bayless & Brigham (1970) trabalhando com a técnica de Kalman, assinalam sobre dificuldades em se obter os valores necessários à equação (97).

No item anterior foram citados os problemas relativos à implementação de um filtro inverso. Um destes problemas está relacionado à determinação dos valores a serem adotados para as condições iniciais.

A especificação da matriz $M_{j+1}(-)$ exigida, é efetuada observando-se que uma condição

inicial admissível para o algoritmo é

$$M_{j+1}(-) = \begin{bmatrix} y_{j+l+1} \\ \vdots \\ y_{j+1} \\ \vdots \\ y_{j-l+1} \end{bmatrix}, \quad (100)$$

que utiliza os primeiros $2l + 1$ valores registrados como estimativa inicial para os valores dos elementos do vetor M_j , onde

$$M_j = \begin{bmatrix} x_{j+l} \\ \vdots \\ x_j \\ \vdots \\ x_{j-l} \end{bmatrix}. \quad (101)$$

O outro problema que aparece quando nos propomos a implementar um filtro inverso, relaciona-se com a dificuldade em saltar de um valor medido, para um valor medido posterior.

Apresentaremos como solução deste problema a matriz Φ , que servirá ao mesmo propósito que a matriz de transição de estado, e que permite o processamento de dados exatamente como na teoria de Kalman.

A seguir, define-se a matriz Φ por

$$\Phi = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ [I_{2l+1}] & 0 \end{bmatrix}, \quad (102)$$

onde I_{2l} é uma matriz identidade de dimensões $2l \times 2l$.

Escrevemos a seguir a equação (94), de tal forma que a mesma utilize as medidas atualizadas (ou seja, corrigidas do efeito do filtro) $M_j(+)$ para calcular as medidas estimadas posteriores $M_{j+1}(+)$.

Portanto, a equação (94) toma a forma

$$M_{j+1}(-) = \Phi \cdot M_j(+) + \Gamma_{j-1} \cdot W_{j-1}. \quad (103)$$

A equação (103) deve ter o efeito de saltar do estado j para o estado $j + 1$, colocando os elementos de $M_j(+)$ (valor atualizado dos parâmetros no estado j) para a posição inferior, e utilizar

como estimativa inicial de x_{j+l+1} em $M_{j+1}(-)$ (valor estimado dos parâmetros para o estado $j+1$), a medida y_{j+l+1} . Finalmente, temos para a equação (103)

$$M_{j+1}(-) = \Phi \cdot M_j(+) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} \cdot y_{j+l+1} \quad (104)$$

ou,

$$M_{j+1}(-) = \Phi \cdot M_j(+) + C \cdot y_{j+l+1}, \quad (105)$$

onde C é um vetor coluna com $(2l+1)$ elementos.

Podemos observar também que o vetor dos valores verdadeiros M_j pode ser escrito em termos da matriz Φ e do vetor coluna C como

$$M_{j+1} = \Phi \cdot M_j + C \cdot x_{j+l+1}. \quad (106)$$

Sendo assim, a estimativa da matriz covariância do erro para o estado $j+1$, P_{j+1} fica

$$P_{j+1}(-) = E[\tilde{M}_{j+1}(-) \cdot \tilde{M}_{j+1}(-)^T]. \quad (107)$$

Substituindo o valor de $\tilde{M}_{j+1}(-)$ da equação (29) na equação (107), obtemos

$$P_{j+1}(-) = E[(M_{j+1}(-) - M_{j+1}) \cdot (M_{j+1}(-) - M_{j+1})^T]. \quad (108)$$

Substituindo o valor de $M_{j+1}(-)$ da equação (105) e o valor de M_{j+1} da equação (106) na equação (108), obtemos

$$P_{j+1}(-) = E\{[\Phi \cdot M_j(+) + C \cdot y_{j+l+1} - (\Phi \cdot M_j + C \cdot x_{j+l+1})] \cdot [\Phi \cdot M_j(+) + C \cdot y_{j+l+1} - (\Phi \cdot M_j + C \cdot x_{j+l+1})]^T\}. \quad (109)$$

Agrupando os termos multiplicados pela matriz Φ e agrupando os termos multiplicados pelo vetor coluna C na equação (109), obtemos

$$P_{j+1}(-) = E\{[\Phi \cdot (M_j(+) - M_j) + C \cdot (y_{j+l+1} - x_{j+l+1})] \cdot [\Phi \cdot (M_j(+) - M_j) + C \cdot (y_{j+l+1} - x_{j+l+1})]^T\}. \quad (110)$$

Substituindo as expressões $(M_j(+)-M_j)$ da equação (110) pelo seu valor na equação (28), obtemos

$$P_{j+1}(-) = E \left\{ [\Phi \cdot \tilde{M}_j(+)+C \cdot (y_{j+l+1}-x_{j+l+1})] \cdot [\Phi \cdot \tilde{M}_j(+)+C \cdot (y_{j+l+1}-x_{j+l+1})]^T \right\}. \quad (111)$$

Utilizando as propriedades de transposição de produto e de soma de matrizes, obtemos para a equação (111)

$$P_{j+1}(-) = E \left\{ [\Phi \cdot \tilde{M}_j(+)+C \cdot (y_{j+l+1}-x_{j+l+1})] \cdot [\tilde{M}_j(+)^T \cdot \Phi^T + C^T \cdot (y_{j+l+1}-x_{j+l+1})] \right\}. \quad (112)$$

Efetando os produtos na equação (112), obtemos

$$P_{j+1}(-) = E \left\{ \Phi \cdot \tilde{M}_j(+)\cdot \tilde{M}_j(+)^T \cdot \Phi^T + \Phi \cdot \tilde{M}_j(+)\cdot C^T \cdot (y_{j+l+1}-x_{j+l+1}) + C \cdot (y_{j+l+1}-x_{j+l+1}) \cdot \tilde{M}_j(+)^T \cdot \Phi^T + C \cdot C^T \cdot (y_{j+l+1}-x_{j+l+1})^2 \right\}. \quad (113)$$

Efetando as esperanças das variáveis não determinísticas, obtemos

$$P_{j+1}(-) = \Phi \cdot E[\tilde{M}_j(+)\cdot \tilde{M}_j(+)^T] \cdot \Phi^T + C \cdot C^T \cdot E[(y_{j+l+1}-x_{j+l+1})^2] + E \left\{ (y_{j+l+1}-x_{j+l+1}) \cdot [C \cdot \tilde{M}_j(+)^T \cdot \Phi^T + \Phi \cdot \tilde{M}_j(+)\cdot C^T] \right\}. \quad (114)$$

Então,

$$P_{j+1}(-) = \Phi \cdot P_j(+)\cdot \Phi^T + C \cdot C^T \cdot E[(y_{j+l+1}-x_{j+l+1})^2] + E \left\{ (y_{j+l+1}-x_{j+l+1}) \cdot [C \cdot \tilde{M}_j(+)^T \cdot \Phi^T + \Phi \cdot \tilde{M}_j(+)\cdot C^T] \right\}. \quad (115)$$

Ao verificar a equação (115), podemos observar que apenas o último termo desta ainda não foi analisado teoricamente. Porém, o fator $(y_{j+l+1}-x_{j+l+1})$ é um escalar que representa o erro na estimativa inicial x_{j+l+1} . Portanto, considerando todas estas diferenças no perfil, é esperado que na média esta quantidade seja zero, caso contrário os valores provenientes da ferramenta serão estatisticamente tendenciosos.

Ao desenvolver-se algebricamente o termo $(C \cdot \tilde{M}_j(+)^T \cdot \Phi^T + \Phi \cdot \tilde{M}_j(+)\cdot C^T)$ no Apêndice 2, pode-se observar que devido à estrutura da matriz Φ , a matriz resultante do termo acima se

apresenta como uma matriz simétrica, com os elementos da diagonal principal iguais a zero, e os elementos não pertencentes à diagonal são erros associados com as estimativas de valores de x que possuam índices menores que $(j + l + 1)$. Entretanto, deve ser esperado que os elementos não pertencentes à diagonal sejam pequenos e não correlacionados com o erro na estimativa de x_{j+l+1} .

Se estas condições forem satisfeitas, o valor esperado para o último termo da equação (115) será bem próximo de zero. Na prática, assumiremos que o último termo desta equação é igual a zero.

Uma observação adicional relativa a equação (115) é que, como os valores gravados são vistos como a saída suavizada de um filtro linear, o segundo termo corresponderá grosseiramente a variação quadrática de uma função x sobre sua média y , e esta quantidade pode ser estimada dos dados. Definiremos então uma nova quantidade Q como

$$Q_{j+l+1}^2 = E[(y_{j+l+1} - x_{j+l+1})^2] , \quad (116)$$

que num processo uniforme de distribuição é calculada como

$$Q_n^2 = \frac{1}{N} \cdot \sum_{n=1}^N (y_n - x_n)^2. \quad (117)$$

Utilizando a suposição acima e a definição de Q , a equação (115) pode ser escrita como

$$P_{j+1}(-) = \Phi \cdot P_j(+) \cdot \Phi^T + C \cdot C^T \cdot Q_{j+l+1}^2. \quad (118)$$

4.5. Estimativa para os Valores Iniciais Utilizados no Processamento

Supondo que a matriz covariância do erro do instante anterior é nula, pode-se inicializar a estimativa de $P_{j+1}(-)$ pela matriz diagonal

$$P_{j+1} = \begin{bmatrix} Q_{2j+1}^2 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & Q_{2j}^2 & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & Q_1^2 \end{bmatrix}. \quad (119)$$

Finalmente podemos começar o processamento recursivo dos dados, cujo objetivo é encontrar o valor do vetor $M_j(+)$. Resolvendo a equação (46), transcrita abaixo, para o valor de $M_j(+)$,

$$M_j(+) = M_j(-) + B_j \cdot (y_j - H^T \cdot M_j(-)); \quad (120)$$

observamos que deve ser feita uma estimativa inicial para o valor de $M_j(-)$. Uma boa aproximação para este valor inicial seria a correção dos valores apresentados no perfil, pelas cartas.

Um outro valor que precisa ser conhecido é o valor da matriz B_j , que pode ser obtido da equação (83), mostrada abaixo

$$B_j = P_j(-) \cdot H \cdot [H^T \cdot P_j(-) \cdot H + \sigma_j^2]^{-1}. \quad (121)$$

Portanto, o procedimento computacional deve ter a seguinte sequência:

1º PASSO → Estimativa do valor de σ_j^2

Como já foi comentado anteriormente, nos perfis de indução não é muito comum a presença de ruídos, exceto nos locais que possuam condutividades próximas de zero. Portanto, considera-se σ_j^2 bem próximo de zero, ou zero.

2º PASSO → Estimativa dos valores da matriz $P_j(-)$

Como estimativa para o valor inicial da matriz $P_j(-)$, utilizaremos a equação (119), em que os valores de Q_n^2 podem ser calculados através da equação (117).

3º PASSO → Estimativa dos valores do vetor $M_j(-)$

Como estimativa para o valor inicial do vetor $M_j(-)$, utilizaremos os valores registrados no perfil após as correções feitas pelas cartas.

4º PASSO → Cálculo dos valores da matriz B_j

Para calcular os valores da matriz de ganho do filtro será utilizada a equação (83) apresentada abaixo.

$$B_j = P_j(-) \cdot H \cdot [H^T \cdot P_j(-) \cdot H + \sigma_j^2]^{-1}.$$

5º PASSO → Cálculo dos valores do vetor $M_j(+)$

Para calcular o vetor dos valores corrigidos, $M_j(+)$, utiliza-se a equação (46), ou seja,

$$M_j(+) = M_j(-) + B_j \cdot (y_j - H^T \cdot M_j(-)).$$

6º PASSO → Cálculo dos valores da matriz $P_j(+)$

Para calcular os valores da matriz covariância do erro $P_j(+)$, utiliza-se a equação (93), ou seja,

$$P_j(+) = [I - B_j \cdot H^T] \cdot P_j(-).$$

a matriz acima calculada, servirá para montar a estimativa da matriz covariância do erro do passo posterior $P_{j+1}(-)$.

7º PASSO → Cálculo dos valores do vetor $M_{j+1}(-)$

Para calcular os valores do vetor estimativa para o próximo passo $M_{j+1}(-)$, utilizaremos a equação (105), transcrita abaixo:

$$M_{j+1}(-) = \Phi \cdot M_j(+) + C \cdot y_{j+l+1}.$$

8º PASSO → Cálculo dos valores da matriz $P_{j+1}(-)$

Para calcular os valores da matriz estimativa da covariância do erro para o próximo passo $P_{j+1}(-)$, utilizaremos a equação (118), mostrada abaixo

$$P_{j+1}(-) = \Phi \cdot P_j(+) \cdot \Phi^T + C \cdot C^T \cdot Q_{j+l+1}^2.$$

9º PASSO → Montagem do vetor que contém estimativa dos parâmetros da formação

Para efetuar a montagem deste vetor, deve-se armazenar o último elemento do vetor $M_j(+)$ como a estimativa de x_{j-l} (parâmetro da formação).

Após a conclusão do passo 09, o algoritmo deve retornar ao passo 04 e repetir o processo.

O fluxograma desenvolvido para efetuar o aumento de resolução vertical está em anexo no apêndice 3.

4.6. Obtenção do Filtro Utilizado

Os coeficientes da ferramenta utilizados neste trabalho foram obtidos através do fator geométrico vertical (Doll, 1949) em condutividades baixas ou bem próximas de zero, com ausência de "skin effect" (redução nas leituras de condutividades e diminuição da profundidade de investigação observadas em meios muito condutivos).

É importante observar que, desde que o perfil de indução mede condutividades, a função de resposta da ferramenta é correta apenas para valores de condutividade. Portanto, as medidas de resistividade dos perfis devem ser convertidas para valores de condutividade, antes do processamento através do filtro, com o intuito de adquirir os resultados esperados.

A soma dos coeficientes do filtro obtido por Lyle & Williams (1986) vale 1, o que torna o algoritmo de inversão estável.

Estes coeficientes podem ser vistos como frações de resposta da ferramenta oriundas de um cilindro vertical de raio infinito que possui a altura de um intervalo de formação. Portanto, os coeficientes podem ser calculados através da área sobre a curva de resposta da ferramenta de indução, sobre cada intervalo considerado. Após a estimativa destes coeficientes, os mesmos são normalizados, de modo que a soma vale 1.

Neste trabalho foram utilizados os mesmos coeficientes que Lyle & Williams (1986) utilizaram, porém foi feita uma interpolação destes valores para intervalos de 10 centímetros, uma vez que os valores de Lyle & Williams (1986) possuíam uma amostragem de 6 polegadas (15,24 cm).

CAPÍTULO 5

RESULTADOS OBTIDOS

5.1. Conclusões e Considerações Finais

Os perfis de raio gama e o SFL (Spherically Focused Log) possuem maior resolução vertical que os perfis de indução ILD (Induction Log Deep) sendo por este motivo utilizados para detectar possíveis camadas de pouca espessura. Devido a estas características, estes perfis serão utilizados para comprovar a eficiência do algoritmo.

Observa-se das figuras 6, 7 e 8, que o algoritmo utilizado aplica-se com maior eficiência em situações de elevado contraste de resistividade entre as camadas adjacentes, como por exemplo em delgadas intercalações de folhelhos e arenitos portadores de hidrocarbonetos, onde a curva de resistividade medida não identifica os diferentes corpos. Esta qualidade pode ser observada com detalhe na fig. 6 no intervalo de 1230m a 1238m, na fig. 7 no intervalo de 1246m a 1252m e na fig. 8 no intervalo de 1267m a 1273m. Estes níveis normalmente não são detectados pelo perfil de indução corrido com a ferramenta 6FF40, sendo desta forma confundidos com oscilações da sonda, rugosidade nas paredes do poço, bem como com a presença de ruídos nas transmissões de dados da ferramenta para a superfície.

Porém, estas oscilações registradas no perfil foram detectadas pelo algoritmo como sendo camadas delgadas e puderam ser comprovadas através dos perfis SFL (Spherical Focused Log) e de raios gama.

Portanto, para seqüências muito delgadas, o método apenas individualiza as camadas que, no perfil de indução corrido com ferramenta 6FF40, normalmente não eram detectadas.

Sendo assim, os valores de resistividade após o processamento dos dados ainda não podem ser considerados como valores de resistividade verdadeira (R_t) das formações.

Este efeito pode ser minimizado através da aplicação de um algoritmo de quadratização que tome como referência a ocorrência de picos, vales e pontos de inflexão.

Devido à pequena espessura das camadas, não foi possível obter uma estimativa confiável da magnitude de invasão, pois as cartas de correção disponíveis (Schlumberger, 1985) pressupõem

a ocorrência de estratos espessos. Entretanto, no poço tomado como modelo (7-LOR-18-RN), foram exigidos cuidados especiais durante a perfuração no sentido de se minimizar o raio de invasão, a fim de possibilitar o estudo das camadas delgadas com perfis de alta resolução vertical (EPT-Propagação Eletromagnética, HDT-Mergulho de Alta Resolução, SHDT-Mergulho Estratigráfico de Alta Resolução, etc...) e pequeno raio de investigação (Abbadia, 1987).

Como ilustração adicional pode-se observar as figuras 9, 10 e 11, em que são plotados em um gráfico, valores de $SFLU_{original} \times ILLD_{original}$ e $SFLU_{original} \times ILLD_{filtrado}$, onde se pode notar que o gráfico $SFLU_{original} \times ILLD_{filtrado}$ apresenta os pontos localizados mais próximos de uma reta. Este resultado indica que o filtro utilizado neste desenvolvimento conseguiu aproximar os valores obtidos anteriormente, dos valores de SFL, ou seja, de valores que possuem melhor resolução vertical

A eficiência do algoritmo pode ser atestada também através da comparação das curvas $ILLD_{filtrado}$ e de raio gama, observando-se a correspondência entre os diversos estratos conforme mostram as figuras 6b e 6c, 7b e 7c e 8b e 8c.

A maior suavidade da curva $ILLD_{original}$ em relação à $ILLD_{filtrada}$ (maior quantidade de altas frequências) acentua a boa performance obtida com a aplicação do algoritmo, como se pode observar nas figuras 6b, 7b e 8b.

Os estudos com relação ao algoritmo utilizado podem ser prosseguidos em áreas que reconhecidamente apresentam problemas com relação à sequencia de camadas delgadas, onde se efetuará um programa de perfilagem em que seriam corridos perfis de alta resolução (EPT-Propagação Eletromagnética, HDT-Mergulho de Alta Resolução, SHDT-Mergulho Estratigráfico de Alta Resolução, etc...) (Abbadia, 1987), e o tradicional corrido com a ferramenta 6FF40.

Este procedimento poderia ser executado com o intuito de se comprovar a efetividade do algoritmo, e suas possibilidades de utilização operacional e/ou de aperfeiçoamento.

O método pode apresentar uma sensível melhora para os valores de resistividade verdadeira (R_t), utilizando valores de coeficientes de ferramenta mais elaborados, ou seja, diferenciados para cada condição de poço, invasão e formação.

A figura 12 mostra a aplicação do algoritmo em dados sintéticos. Na seção estão represen-

tadas a resistividade verdadeira, a resposta da ferramenta 6FF40 e a resposta filtrada, ilustrando a eficiência do algoritmo na recuperação de valores mais representativos para R_t .

A utilização do algoritmo frente a finas intercalações, como representado na figura 13 (dados sintéticos de camadas de 0,3048 m) é realizada no intuito de identificar os diversos extratos que até então não poderiam ser distinguidos, além de posicionar corretamente os intervalos de maior e menor resistividade que no perfil original ocorrem invertidos.

Nos dois exemplos estudados (figuras 12 e 13), é possível observar que a eficiência do algoritmo na recuperação de valores de resistividade mais representativos de R_t é diretamente proporcional às espessuras das camadas até o limite da resolução vertical da ferramenta 6FF40 (em torno de 2,0 m). Condições extremas de alto contraste de resistividade e pequena espessura das camadas dificultam estimativas mais precisas do valor de R_t .

Podemos afirmar que o algoritmo desenvolvido pode ser aplicado em outros poços perfilados com a ferramenta 6FF40 e que apresentem situações análogas a do problema estudado, fazendo uso do fluxograma desenvolvido neste trabalho (Apêndice 3).

Finalmente, o algoritmo utilizado pode ser implementado em outros tipos de perfis, tais como laterolog, sônico, etc..., sempre que a importância do aumento de resolução vertical seja relevante.

AGRADECIMENTOS

Seria praticamente impossível agradecer nominalmente a todas as pessoas que de uma forma ou outra colaboraram com a idéia, desenvolvimento e conclusão deste trabalho.

Em primeiro plano, desejo expressar agradecimentos ao Dr. Hilton Bernard Evans, pelo estímulo, disponibilidade, discussões, sugestões, revisão crítica do texto, amizade e principalmente pela orientação.

Aos outros dois membros da Banca Examinadora, Dr. Luiz Carlos Lobato Botelho e Dr. Sérgio L. M. Freire, pelas sugestões e correções.

Ao professor Jorge Wilson Delgado Leão pela sua frequente boa vontade em ajudar.

Aos funcionários da Petrobrás Theognis Castejón Rodriguez e Alexandre Guedes Siqueira pela frequente boa vontade em enviar os dados solicitados e ao geólogo Geraldo Girão Nery pelos cursos ministrados, sugestões e correções do texto final da tese.

Os agradecimentos são extensivos a todos os colegas de trabalho que conseguiram completar esta jornada juntos e àqueles que devido a alguns problemas não conseguiram terminar esta jornada conosco.

Aos funcionários do prédio da Geofísica Aplicada à Prospecção de Petróleo, e a coordenação do convênio.

À pesquisadora da Schlumberger Barbara Anderson pelo fornecimento dos detalhes relativos às características de construção e resposta da ferramenta de indução 6FF40.

Em particular, queria expressar meus agradecimentos ao geólogo José Alberto Bucheb, ao físico Jessé Carvalho Costa, ao matemático João dos Santos Protázio, ao amigo Arnaldo Lopes Pereira Gomes, e a todas as amigas que fiz em Belém.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ABBADIA, M. R. D.; ASSIS, P. I.; PELLEGRINI, E., 1987, Estudo de camadas delgadas Poço: 7-LOR-18-RN, Schlumberger(Rel. int.).
- ANDERSON, B. & CHANG, S. K., 1982, Syntetic induction logs by the finite element method. Transactions, SPWLA 23rd Annual Logging Symposium.
- ANDERSON, B., 1989, Comunicação Pessoal.
- ATHANS, M., 1965, Gradient Matrices and Matrix Calculations. Lincoln Laboratory.
- BAYLESS, J. W. & BRIGHAM, E. O., 1970, Aplication of the Kalman filter to continuous signal restoration. Geophysics, 35 (1) 2-23.
- CHANG, S. K. & ANDERSON, B., 1984, Simulation of induction logging by the finite-element method. Geophysics, 49 (11) 1943-1958.
- DOLL, H. G., 1949, Introduction to induction logging and application to logging of wells drilled with oil based mud. Petroleum Transactions, AIME (June).
- ELLIS, D. V., 1987, Well Logging for Earth Scientists. Elsevier Science Publishing Co.,Inc.
- EVANS, H. B., 1967, Logging Manual -volume II, Marathon Oil Company.
- FOSTER, M. R.; HICKS, W. G.; NIPPER, J. T., 1962, Optimun inverse filters which shorten the spacing of velocity logs. Geophysics, 27 (3) 317-326.
- GELB, A., 1989, Applied Optimal Estimation. M.I.T.Press.
- GIANZERO, S. & ANDERSON, B., 1981, A new look at skin effect. Transactions, SPWLA 22nd Annual Logging Symposium.
- LANCZOS, C., 1961, Linear Differential Operators. London: van Nostrand.
- LATHI, B. P., 1968, Random Signal and Communication Theory. International Textbook Company.

- LYLE, W. D. & WILLIAMS, D. M., 1987, Deconvolution of well log data - an innovation approach. Transactions, SPWLA 27th Annual Logging Symposium.
- MORAN, J. H. & KUNZ, K. S.; 1962, Basic theory of induction logging and application to study of two coil sondes. Geophysics, 27 (6) 829-858.
- MORAN, J. H., 1982, Induction logging - Geometrical factors with skin effect. The Log Analyst(November) 4-10.
- PAPPOULIS, A., 1987, Probability, Random Variables, and Stochastic Processes. McGraw-Hill Book Co.
- SCHLUMBERGER LOG INTERPRETATION CHARTS, 1985.
- TANGUI, D., 1959, U. S. Patent n° 3.067.383.
- THADANI, S. G. & MERCHANT, G. A., 1982, Deconvolution with propagated geometric factors. Paper SPE 10986, 57th Annual Fall Technical Conference and Exhibition.
- TITTMAN, J., 1986, Geophysical Well Logging. Academic Press, Inc.
- WEBSTER, G. M., 1978, Deconvolution. Tulsa, Geophysics Reprint Series. V.2.
- WIENER, N., 1949, Extrapolation, Interpolation, and Smoothing of Stationary Time Series: New York, John Wiley and Sons, Inc., 163.

APÊNDICE

Apêndice 1 – Desenvolvimento da expressão $\frac{\partial}{\partial A} \text{Tr}[A \cdot B \cdot A^T]$

Seja

$$[A \cdot B]_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot b_{kj}$$

onde n representa o número de colunas da matriz A, ou o número de linhas da matriz B. A notação apresentada acima pode representar todos os elementos de uma matriz resultante de um produto de matrizes, bastando para isso variar os valores de i e j. Como exemplo, pode-se citar o elemento resultante de um produto. Este elemento, que está situado na linha 1 e na coluna 1, será representado por

$$[A \cdot B]_{11} = \sum_{k=1}^n a_{1k} \cdot b_{k1}$$

Sendo assim, adotaremos como representação do elemento situado na linha i e coluna j de uma matriz resultante de um produto de matrizes, a expressão abaixo:

$$[A \cdot B]_{ij} \longrightarrow a_{ik} \cdot b_{kj}$$

Então, para um produto de três matrizes, teremos

$$[A \cdot B \cdot C]_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot [B \cdot C]_{kj}$$

$$[A \cdot B \cdot C]_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot \left[\sum_{l=1}^n b_{kl} \cdot c_{lj} \right]$$

e

$$[A \cdot B \cdot C]_{ij} = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_{ik} \cdot b_{kl} \cdot c_{lj}$$

Adotando a mesma representação para a equação anterior, teremos

$$[A \cdot B \cdot C]_{ij} \longrightarrow a_{ik} \cdot b_{kl} \cdot c_{lj}$$

De acordo com a sistemática utilizada acima, tem-se para o traço de um produto de matrizes a seguinte representação:

$$\text{Tr}[A \cdot B \cdot C]_{ij} \rightarrow a_{ik} \cdot b_{kl} \cdot c_{li}.$$

Finalmente pode-se desenvolver as operações de derivadas de traços de produtos de matrizes em relação a uma matriz.

Seja

$$\frac{\partial}{\partial A}[A \cdot B]_{ij} = \frac{\partial}{\partial a_{pq}} a_{ik} \cdot b_{kj}.$$

Então,

$$\frac{\partial}{\partial A} \text{Tr}[A \cdot B]_{ij} = \frac{\partial}{\partial A} [A \cdot B]_{ii} = \frac{\partial}{\partial a_{pq}} [a_{ik} \cdot b_{ki}].$$

Efetuando-se a derivada acima, considerando b_{ki} independente de a_{pq} , tem-se

$$\frac{\partial}{\partial a_{pq}} [a_{ik} \cdot b_{ki}] = b_{ki} \cdot \frac{\partial a_{ik}}{\partial a_{pq}}.$$

A operação acima só tem sentido quando $i = p$ e $k = q$, pois de outra forma ela seria igual a zero. Portanto,

$$b_{ki} \cdot \frac{\partial a_{ik}}{\partial a_{pq}} = b_{ki} \cdot \delta_{ip} \cdot \delta_{kq},$$

onde

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 1 & , \text{ se } m = n, \\ 0 & , \text{ se } m \neq n \end{cases}$$

$$\frac{\partial}{\partial a_{pq}} [a_{ik} \cdot b_{ki}] = b_{qp}.$$

Então,

$$\frac{\partial}{\partial a_{pq}} \text{Tr}[A \cdot B] = b_{qp}.$$

Finalmente,

$$\frac{\partial}{\partial A} \text{Tr}[A \cdot B] = B^T.$$

Pode-se agora desenvolver a derivada em relação a uma matriz do traço de um produto triplo, ou seja

$$\frac{\partial}{\partial A} \text{Tr}[A \cdot B \cdot A] = \frac{\partial}{\partial a_{pq}} \text{Tr}[a_{ij} \cdot b_{jk} \cdot a_{ki}]$$

ou

$$\frac{\partial}{\partial A} \text{Tr}[A \cdot B \cdot A] = \frac{\partial}{\partial a_{pq}} [a_{ij} \cdot b_{jk} \cdot a_{ki}].$$

Porém, a questão no momento é resolver a derivada abaixo:

$$\frac{\partial}{\partial A} \text{Tr}[A \cdot B \cdot A^T] = \frac{\partial}{\partial a_{pq}} \text{Tr}[a_{ij} \cdot b_{jk} \cdot a_{ik}].$$

Efetuada a derivada do produto de matrizes acima, tem-se

$$\frac{\partial}{\partial A} \text{Tr}[A \cdot B \cdot A^T] = \frac{\partial a_{ij}}{\partial a_{pq}} \cdot b_{jk} \cdot a_{ik} + a_{ij} \cdot b_{jk} \cdot \frac{\partial a_{ik}}{\partial a_{pq}}.$$

Porém, a primeira derivada parcial acima só é diferente de zero quando $i = p$ e $j = q$, e a segunda derivada só será diferente de zero quando $i = p$ e $k = q$, portanto

$$\frac{\partial}{\partial A} \text{Tr}[A \cdot B \cdot A^T] = \delta_{ip} \cdot \delta_{jq} \cdot b_{jk} \cdot a_{ik} + a_{ij} \cdot b_{jk} \cdot \delta_{ip} \cdot \delta_{kq}.$$

Então,

$$\frac{\partial}{\partial A} \text{Tr}[A \cdot B \cdot A^T] = b_{qk} \cdot a_{pk} + a_{pj} \cdot b_{jq}.$$

Para o caso particular em que a matriz B é simétrica, tem-se que $b_{qk} = b_{kq}$,

$$\frac{\partial}{\partial A} \text{Tr}[A \cdot B \cdot A^T] = a_{pk} \cdot b_{kq} + a_{pj} \cdot b_{jq}.$$

Sendo assim,

$$\frac{\partial}{\partial A} \text{Tr}[A \cdot B \cdot A^T] = a_{pj} \cdot b_{jq} + a_{pj} \cdot b_{jq}.$$

Portanto,

$$\frac{\partial}{\partial A} \text{Tr}[A \cdot B \cdot A^T] = \frac{\partial}{\partial a_{pq}} \text{Tr}[a_{ij} \cdot b_{jk} \cdot a_{ik}] = 2 \cdot a_{pj} \cdot b_{jq} = 2 \cdot [A \cdot B]_{pq}.$$

Apêndice 2 - Desenvolvimento da expressão $(C \cdot M^T \cdot \Phi^T + \Phi \cdot M \cdot C^T)$

O objetivo deste desenvolvimento é observar que o termo acima se apresenta como uma matriz simétrica, com os elementos da diagonal principal iguais a zero e os elementos não pertencentes a diagonal são os erros associados com as estimativas de valores que possuam índices menores que $(j + l + 1)$.

Seja C um vetor coluna com $(2l + 1)$ elementos, onde

$$C = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix};$$

M , um vetor coluna com $(2l + 1)$ elementos quaisquer

$$M = \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ \cdot \\ \cdot \\ L \end{bmatrix};$$

e Φ uma matriz $(2l + 1) \times (2l + 1)$, ou seja,

$$\Phi = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ [I_{2l}] & 0 \end{bmatrix},$$

onde I_{2l} é uma matriz identidade de dimensões $2l \times 2l$.

Desenvolvendo o primeiro termo da expressão

$$W = \underbrace{C \cdot M^T \cdot \Phi^T}_Q + \underbrace{\Phi \cdot M \cdot C^T}_R,$$

teremos

$$Q = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} \cdot [A \ B \ C \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ L] \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 0 \end{bmatrix}^T;$$

então,

$$Q = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} \cdot [A \ B \ C \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ L] \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

efetuando o produto do vetor coluna pelo vetor linha teremos

$$Q = \begin{bmatrix} A & B & C & \cdot & \cdot & \cdot & K & L \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Então,

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & A & B & \cdot & \cdot & \cdot & J & K \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Desenvolvendo o segundo termo da equação

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ \cdot \\ \cdot \\ L \end{bmatrix} \cdot [1 \ 0 \ 0 \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ 0 \ 0],$$

$$R = \begin{bmatrix} 0 \\ A \\ B \\ \cdot \\ \cdot \\ K \end{bmatrix} \cdot [1 \ 0 \ 0 \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ 0 \ 0];$$

então,

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ A & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ B & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ C & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ K & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

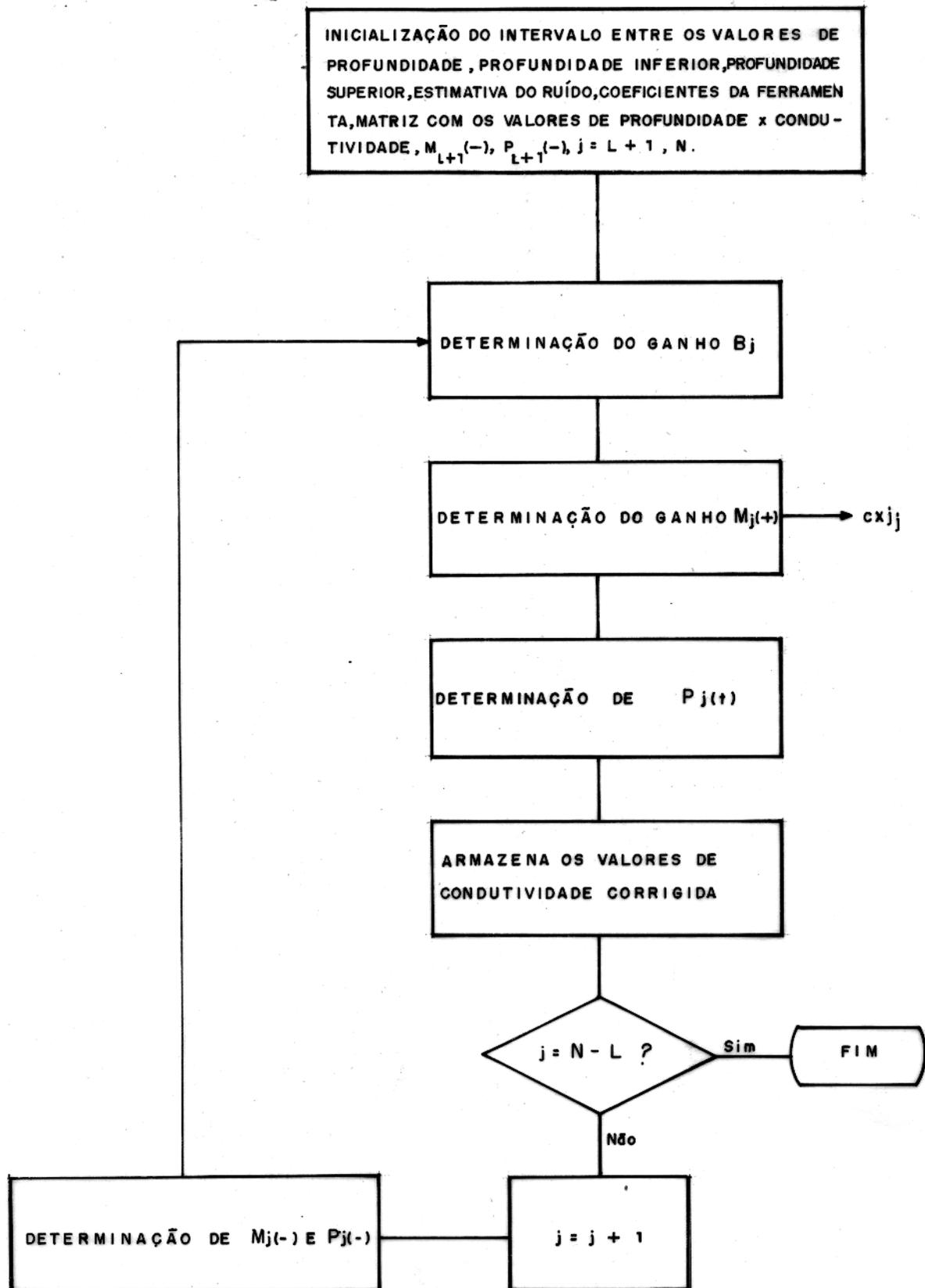
Efetuada a soma do primeiro termo com o segundo termo teremos

$$W = \begin{bmatrix} 0 & A & B & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & K \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ A & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ B & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ K & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ou

$$W = \begin{bmatrix} 0 & A & B & C & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & K \\ A & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ B & \cdot \\ C & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ K & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Apêndice 3 - Fluxograma



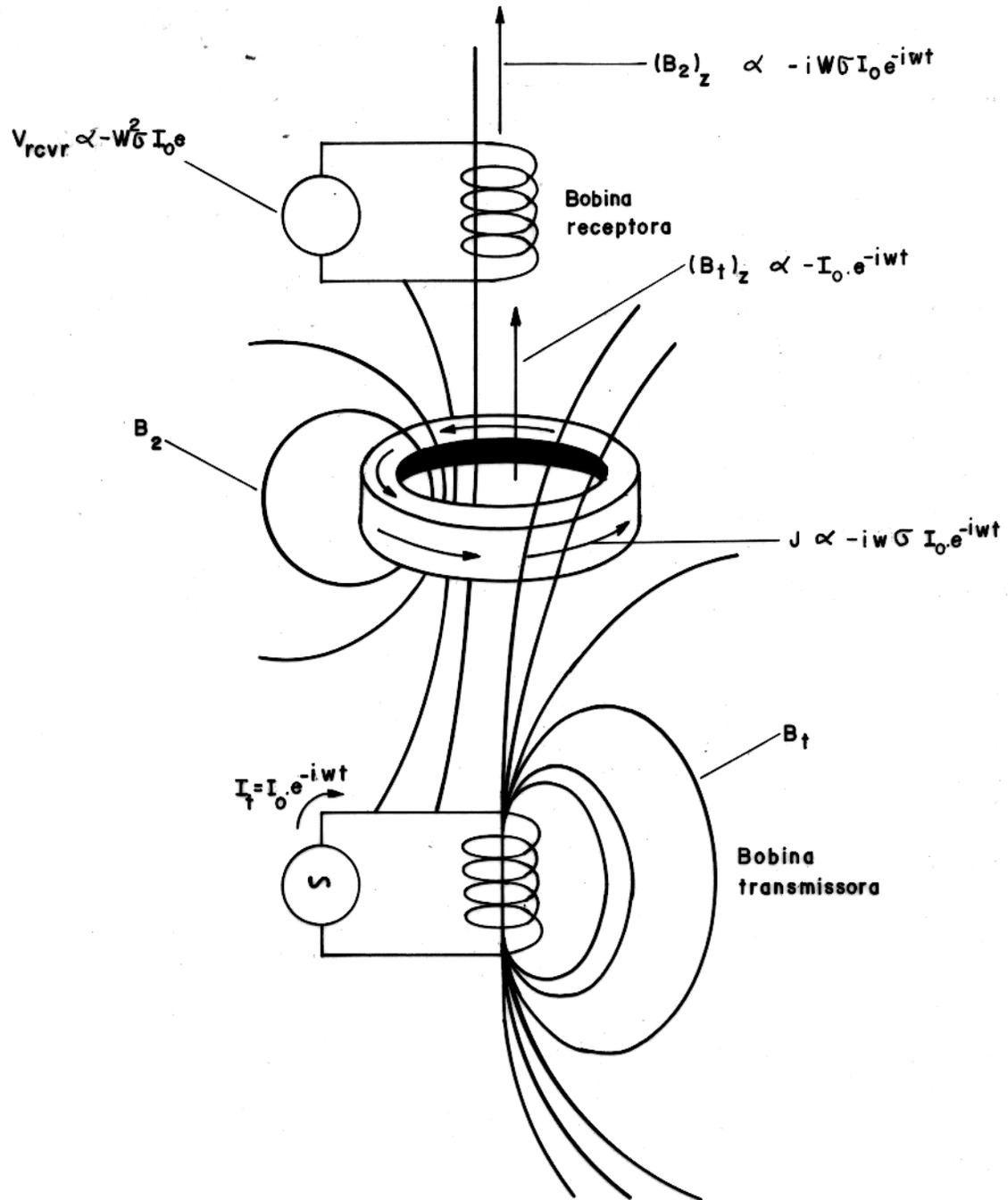


Figura 1 – O princípio da ferramenta de indução. A componente vertical do campo magnético da bobina transmissora induz correntes circulares, transversais ao eixo da sonda, na formação. Os anéis de corrente na formação produzem um campo magnético alternado que é detectado pela bobina receptora (Adaptado de Ellis, D.V., 1987).

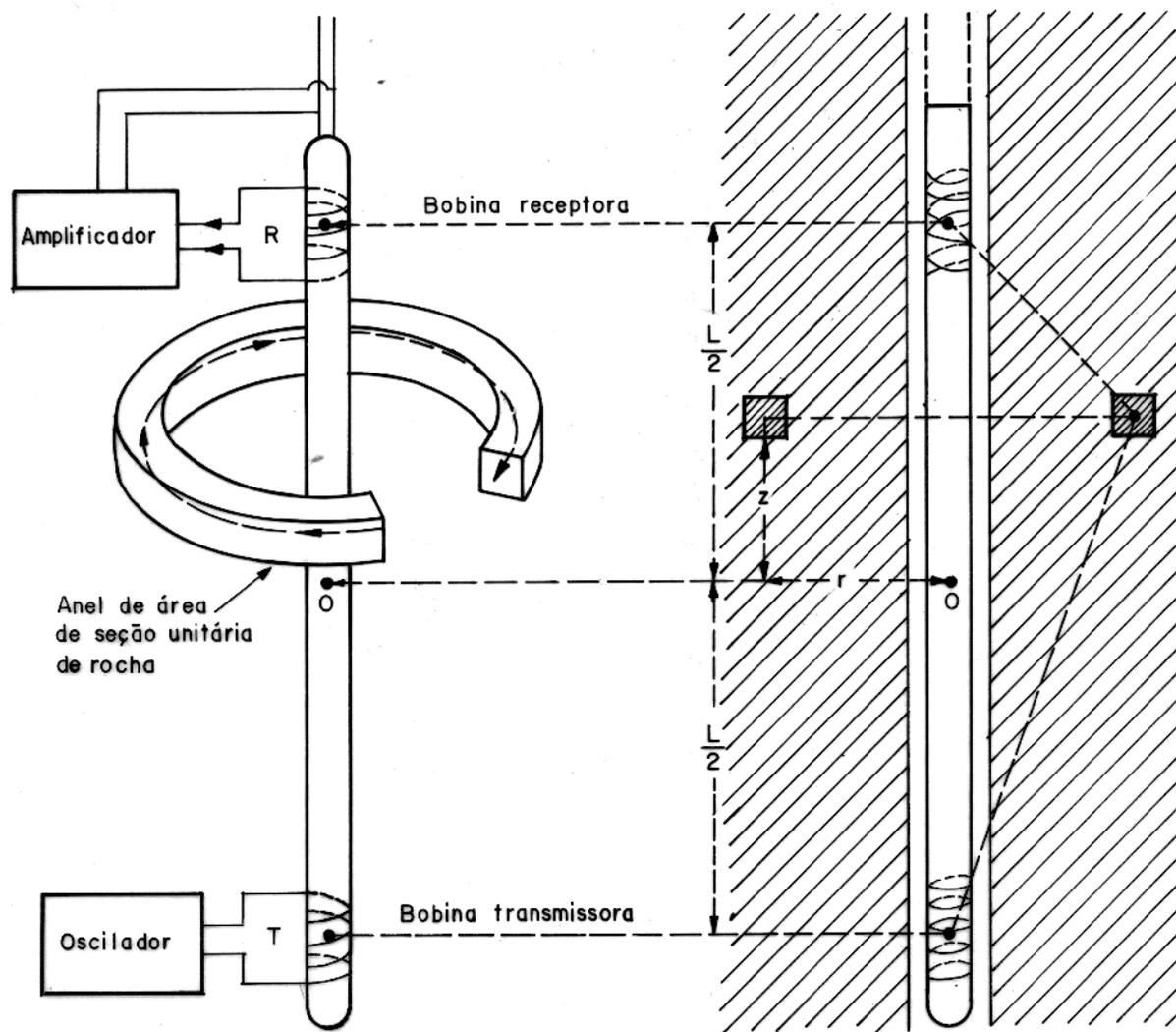


Figura 2 - A sonda de indução com duas bobinas. A bobina transmissora T e a receptora R são separadas de uma distância L e enroladas em um eixo isolante. A força eletromotriz induzida em R é proporcional à condutividade do material do anel de rocha (Adaptado de Doll, H.G., 1949).

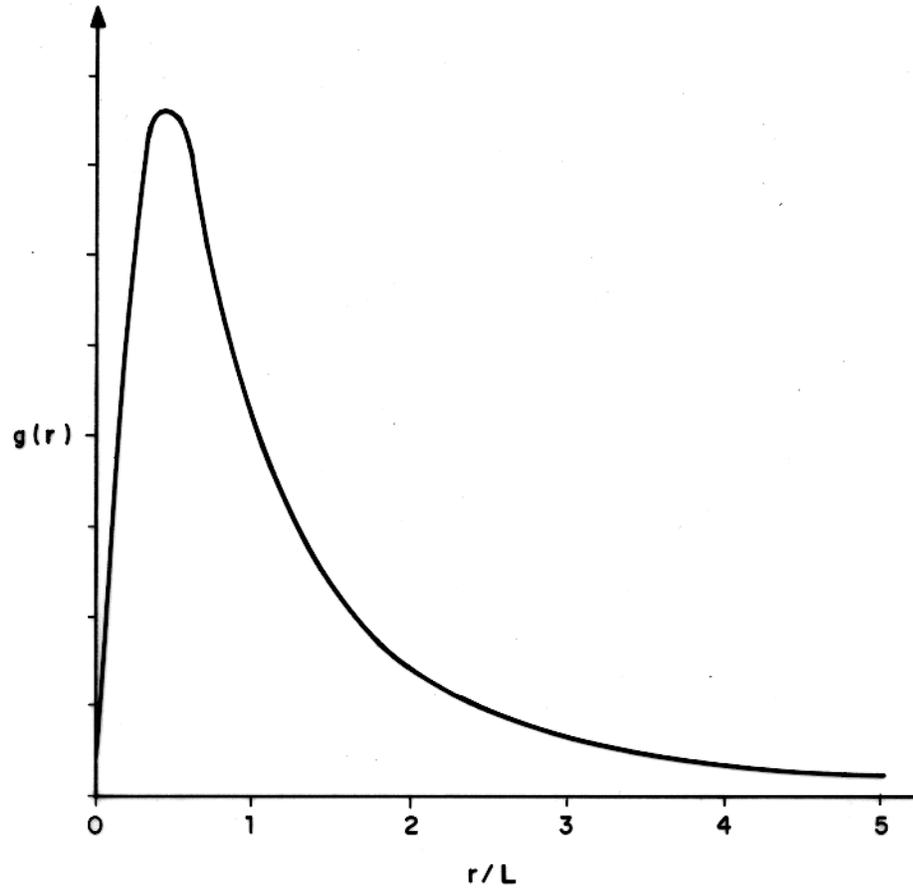


Figura 3—Fator geométrico radial (Doll, H.G., 1949).

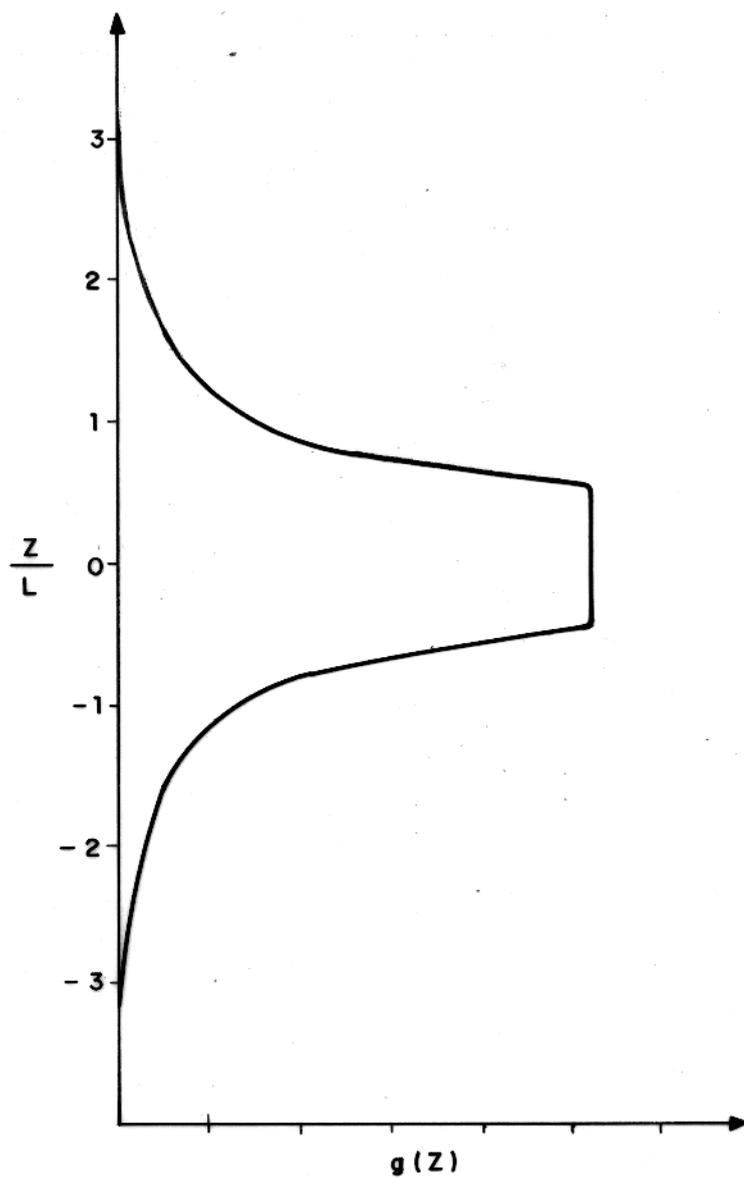


Figura 4 — Fator geométrico vertical (Doll, H.G., 1949).

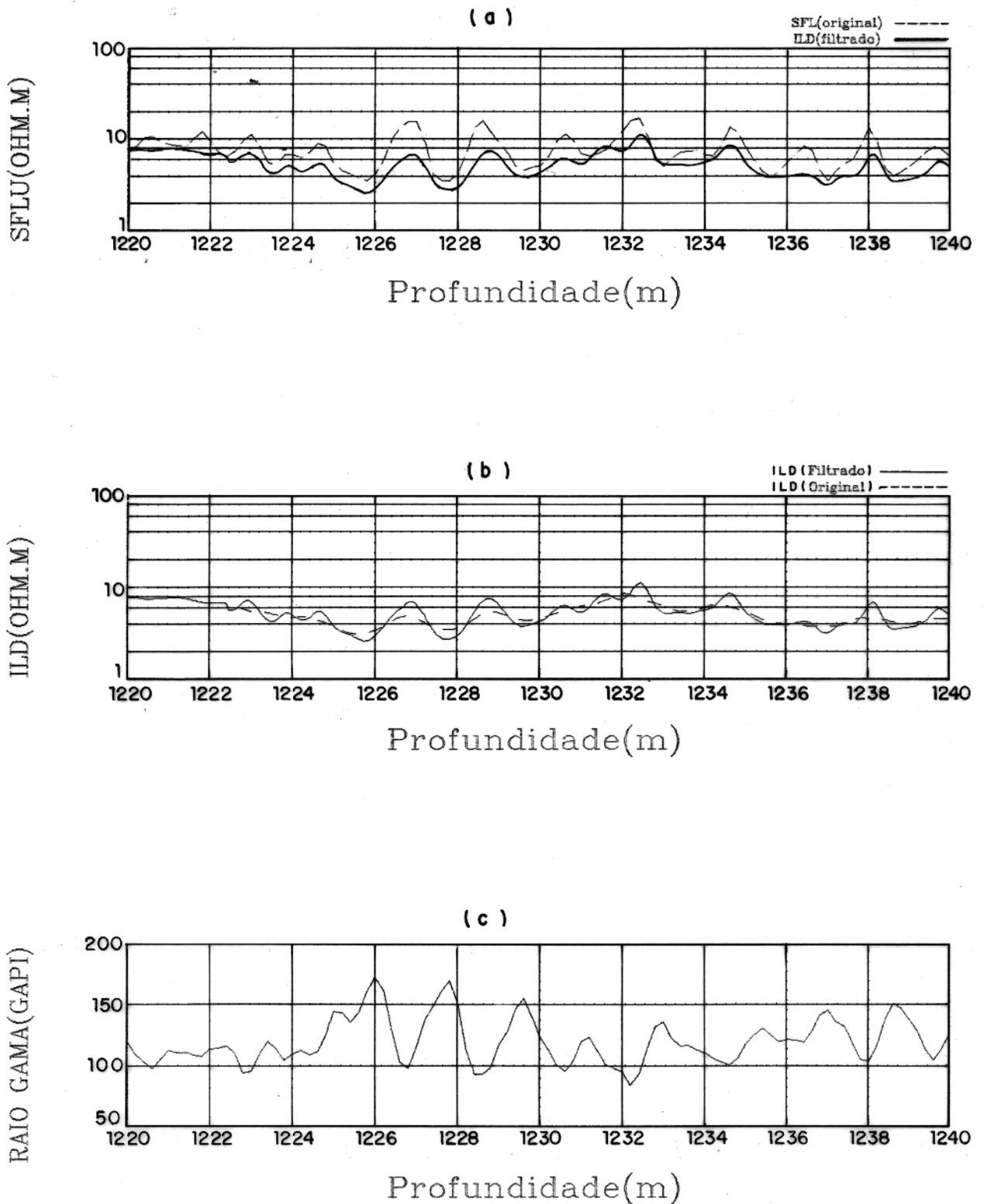


Figura 6- (a) Comparação dos perfis do poço 7-LOR-18-RN (1220m a 1240m) SFL e ILD filtrado. (b) Comparação do perfil do poço 7-LOR-18-RN (1220m a 1240m) ILD original com o ILD filtrado. (c) Perfil de raio gama do poço 7-LOR-18-RN (1220m a 1240m) colocado com o objetivo de comparar com o ILD filtrado as formações que foram evidenciadas após o processamento dos dados do perfil ILD original.

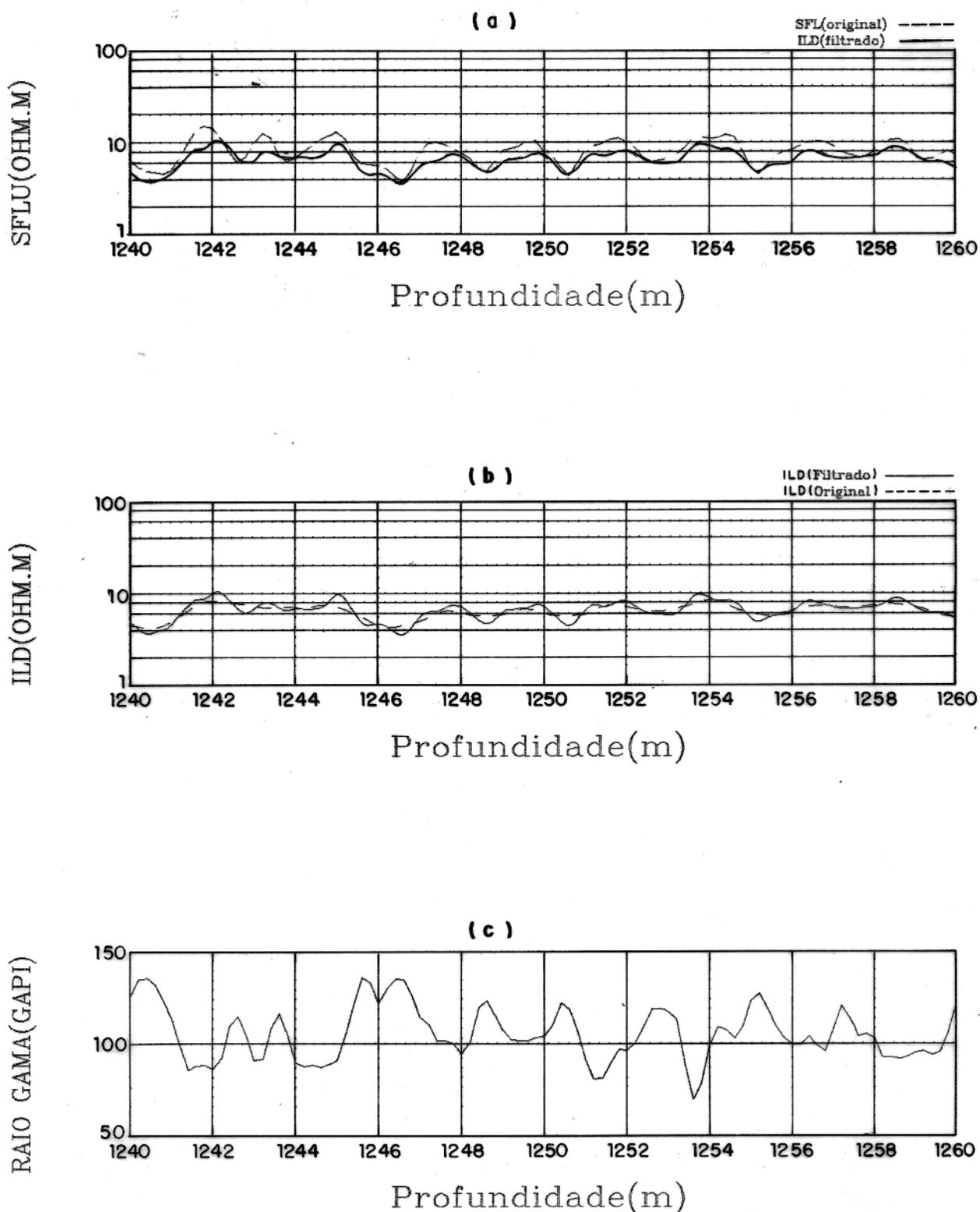


Figura 7 – (a) Comparação dos perfis do poço 7-LOR-18-RN (1240m a 1260m) SFL e ILD filtrado. (b) Comparação do perfil do poço 7-LOR-18-RN (1240m a 1260m) ILD original com o ILD filtrado. (c) Perfil de raio gama do poço 7-LOR-18-RN (1240m a 1260m) colocado com o objetivo de comparar com o ILD filtrado as formações que foram evidenciadas após o processamento dos dados do perfil ILD original

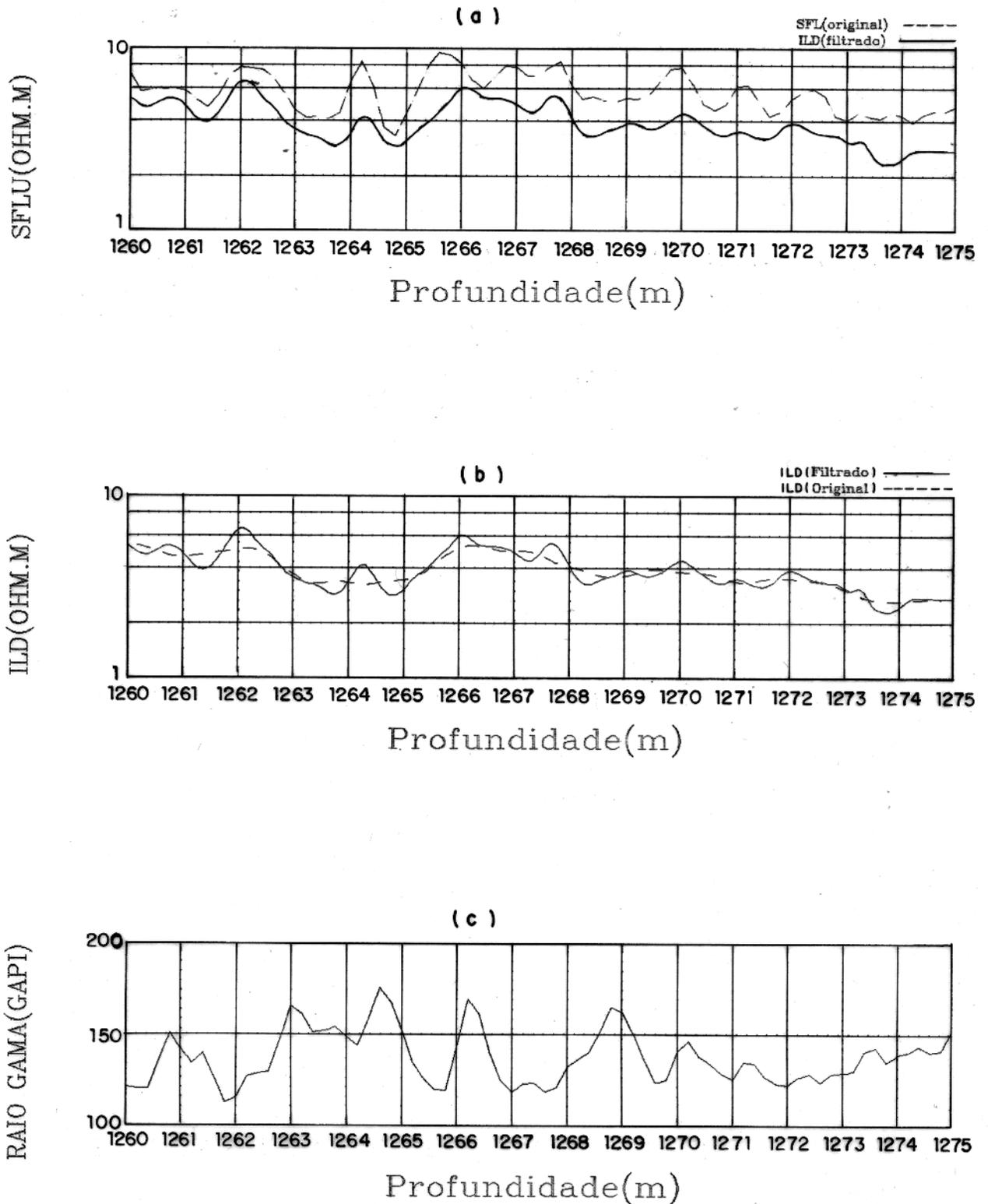


Figura 8 - (a) Comparação dos perfis do poço 7-LOR-18-RN (1260m a 1275m) SFL e ILD filtrado. (b) Comparação do perfil do poço 7-LOR-18-RN (1260m a 1275m) ILD original com o ILD filtrado. (c) Perfil de raio gama do poço 7-LOR-18-RN (1260m a 1275m) colocado com o objetivo de comparar com o ILD filtrado as formações que foram evidenciadas após o processamento dos dados do perfil ILD original.

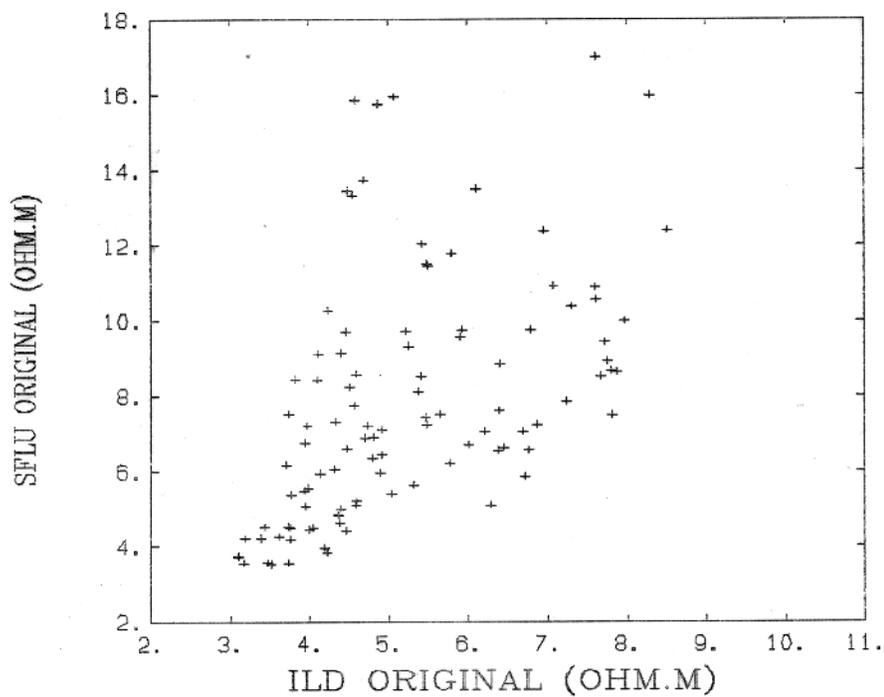
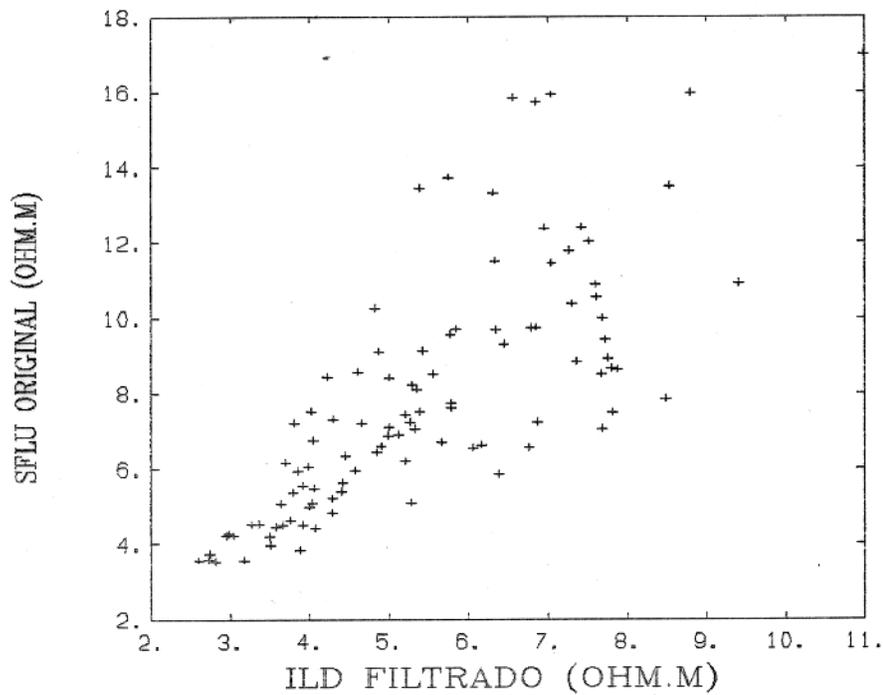


Figura 9 - Cross-plots relativos ao poço 7-LOR-18-RN(1220m a 1240m) objetivando mostrar que após o processamento, os pontos tendem a uma linha reta, indicando uma aproximação dos valores de SFL e ILD filtrado.

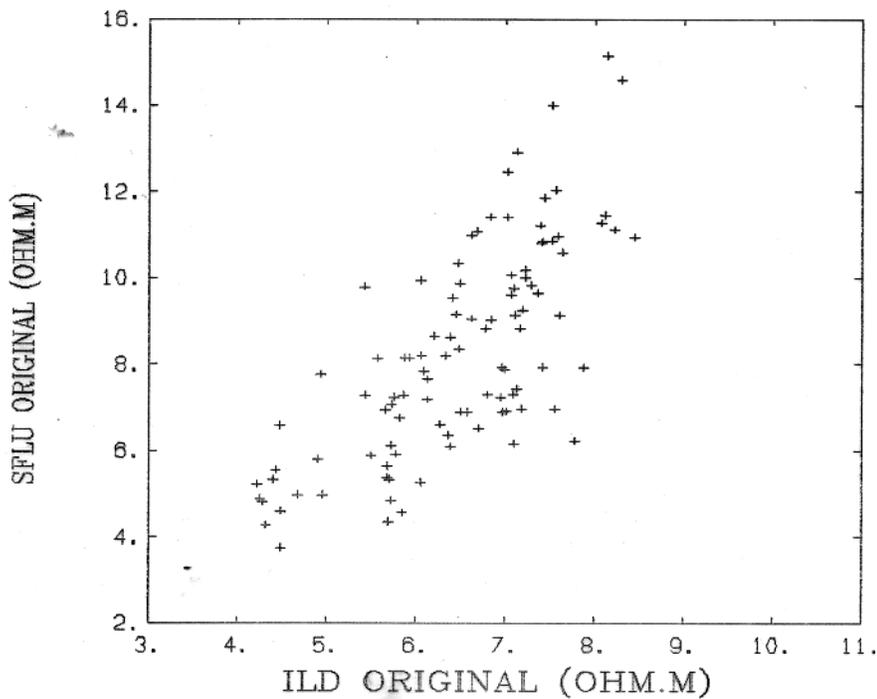
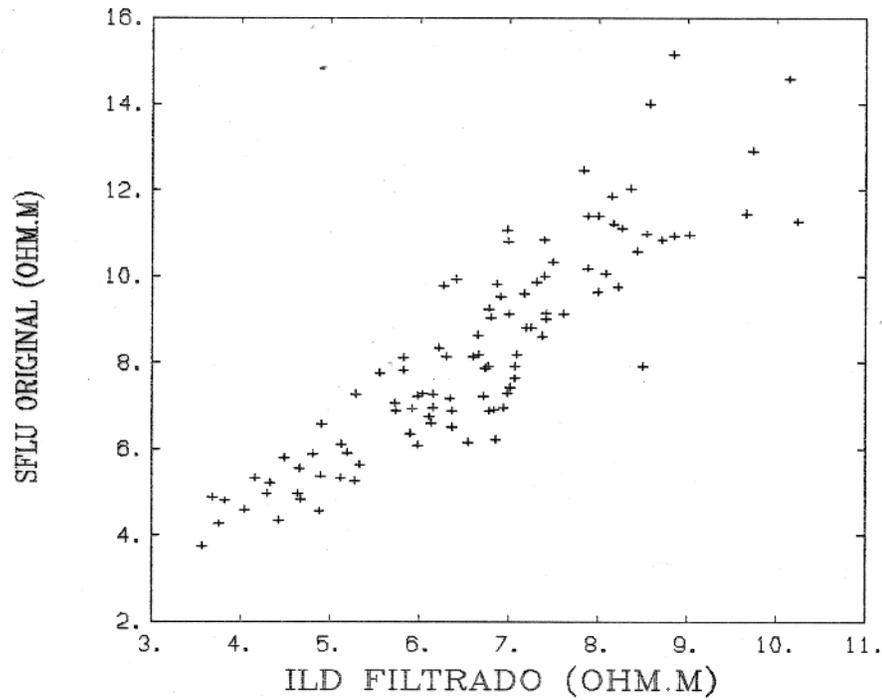


Figura 10- Cross-plots relativos ao poço 7-LOR-18-RN (1240m a 1260m) objetivando mostrar que após o processamento, os pontos tendem a uma linha reta, indicando uma aproximação dos valores de SFL e ILD filtrado.

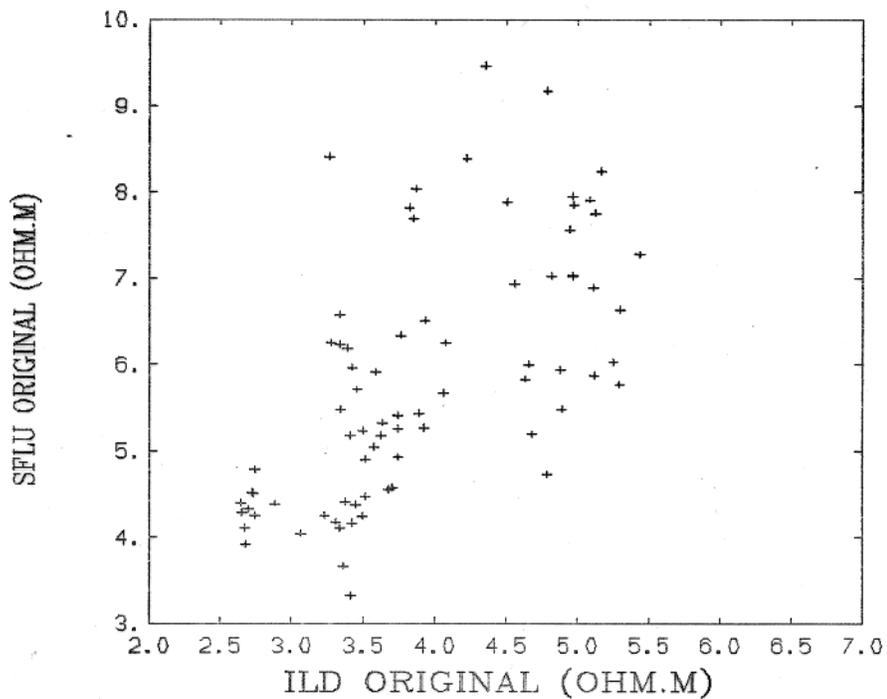
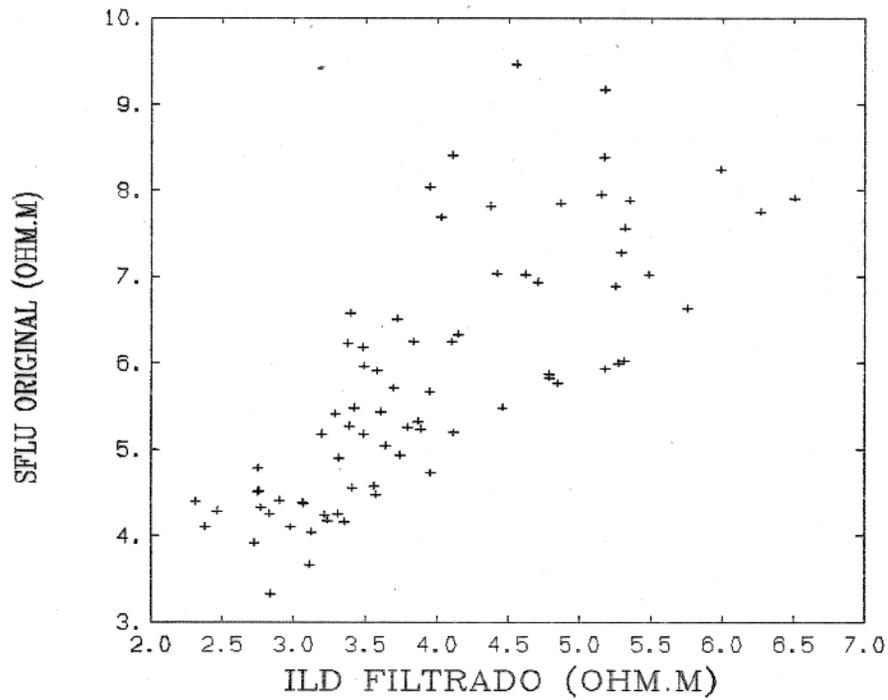


Figura 11— Cross-plots relativos ao poço 7-LOR-18-RN (1260 a 1275m) objetivando mostrar que após o processamento, os pontos tendem a uma linha reta, indicando uma aproximação dos valores de SFL e IDL filtrado.

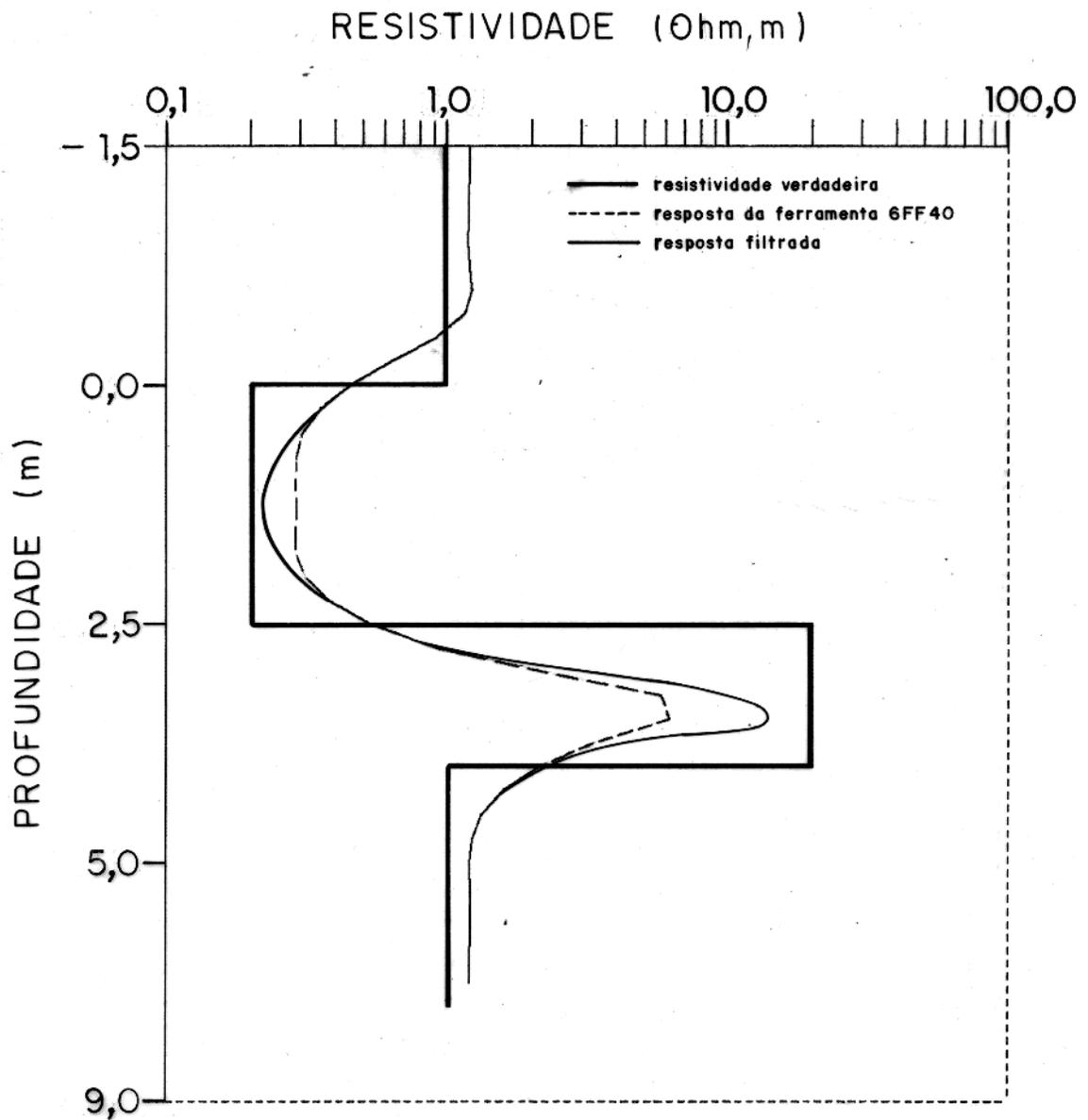


Figura 12 — Comparação entre a resistividade verdadeira, a resposta da ferramenta 6FF40 e a resposta filtrada para camadas de 1,25m e 2,5m.