

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ**  
**CENTRO DE GEOCIÊNCIAS**  
**CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM GEOFÍSICA**

**TESE DE DOUTORADO**

**ATENUAÇÃO DE MÚLTIPLAS E COMPRESSÃO DO  
PULSO FONTE EM DADOS DE SÍSMICA DE  
REFLEXÃO UTILIZANDO O FILTRO KALMAN-  
BUCY**

**MARCUS PINTO DA COSTA DA ROCHA**

**Belém – Pará - Brasil**

**2003**

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ  
CENTRO DE GEOCIÊNCIAS  
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM GEOFÍSICA

ATENUAÇÃO DE MÚLTIPLAS E COMPRESSÃO DO PULSO FONTE  
EM DADOS DE SÍSMICA DE REFLEXÃO UTILIZANDO O FILTRO  
KALMAN-BUCY.

TESE APRESENTADA POR

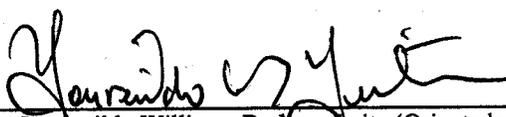
MARCUS PINTO DA COSTA DA ROCHA

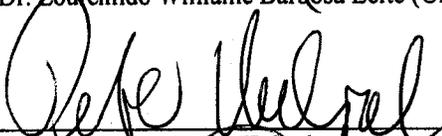
COMO REQUISITO PARCIAL À OBTENÇÃO DE GRAU DE DOUTORADO EM  
CIÊNCIAS NA ÁREA DE GEOFÍSICA

Data da aprovação: 24 / 01 / 2003

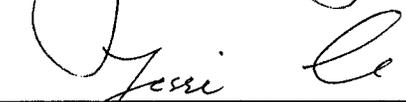
Conceito: 42% ( BOM )

COMITÊ DE TESE:

  
Prof. Dr. Lourenildo Williams Barbosa Leite (Orientador)

  
Prof. Dr. Peter Werner Hans Hubral

  
Prof. Dr. João Carlos Ribeiro Cruz

  
Prof. Dr. Jessé Carvalho Costa

  
Prof. Dr. Marco Pólo Pereira Buonora

A minha esposa Emiliana e aos meus  
filhos Marcus e Felipe

## **AGRADECIMENTOS**

Ao Prof. Dr. Lourenildo Williane Barbosa Leite pela proposta do tema de tese, paciência e pelas contínuas sugestões valiosas à realização deste trabalho.

Aos membros da banca examinadora, Prof. Dr. Jessé Carvalho da Costa, Prof. Dr. Marco Polo Pereira da Boa Hora, Prof. Dr. João Carlos Ribeiro Cruz e Prof. Dr. Petter H. W. Hubral pela disponibilidade, revisão e sugestões que foram de grande importância para a conclusão deste trabalho.

Aos professores que compõem o quadro docente do Curso de Pós-Graduação em Geofísica, e aos demais funcionários da Pós-Graduação, em especial a secretária Benildes Lopes.

A Emiliana por todo o seu amor, apoio e paciência durante a etapa de desenvolvimento deste trabalho.

# SUMÁRIO

<b>DEDICATÓRIA</b> .....	i
<b>AGRADECIMENTO</b> .....	ii
<b>LISTA DE ILUSTRAÇÃO</b> .....	v
<b>LISTA DE SÍMBOLOS</b> .....	xv
<b>RESUMO</b> .....	1
<b>ABSTRACT</b> .....	2
<b>1. INTRODUÇÃO</b> .....	3
1.1 ESTRUTURA DA TESE.....	5
<b>2. MODELO DIRETO (1D)</b> .....	7
2.1 MODELO ELÁSTICO SEM MÚLTIPLAS.....	9
2.2 MODELO ELÁSTICO COM MÚLTIPLAS.....	12
2.2.1 <b>Funções Refletividade e Transmissividade em Meios Estratificados</b> .....	13
2.3 MODELO ANELÁSTICO.....	14
2.3.1 <b>Atenuação sem Dispersão</b> .....	14
2.3.2 <b>Atenuação com Dispersão</b> .....	16
2.3.3 <b>Pulso Tempo-variante</b> .....	17
<b>3 DECONVOLUÇÃO DE PROCESSO NÃO-ESTACIONÁRIO</b> .....	20
3.1 O PROBLEMA WIENER – KOLMOGOROV.....	20
3.2 A SOLUÇÃO KALMAN – BUCY.....	21
3.2.1 <b>Forma Contínua e Discretizada</b> .....	21
<b>4. DECONVOLUÇÃO AO IMPULSO</b> .....	28
4.1 APLICAÇÃO EM DADOS SINTÉTICOS.....	30
4.1.1 <b>Resposta ao Impulso sem Múltipla</b> .....	30

4.1.1.1	Conclusões Parciais.....	32
<b>4.1.2</b>	<b>Resposta ao Impulso com Múltipla.....</b>	<b>37</b>
4.1.2.1	Conclusões Parciais.....	38
<b>4.1.3</b>	<b>Resposta Anelástica.....</b>	<b>41</b>
4.1.3.1	Atenuação sem Dispersão.....	41
4.1.3.2	Atenuação com Dispersão.....	44
4.1.3.3	Conclusões Parciais.....	49
4.2	EXEMPLO DE DADOS REAIS.....	49
<b>5</b>	<b>DECONVOLUÇÃO COM PREDIÇÃO.....</b>	<b>51</b>
5.1	IDENTIFICAÇÃO DO PROBLEMA.....	52
5.2	SOLUÇÃO DO PROBLEMA.....	53
5.3	RESULTADOS.....	59
<b>6.</b>	<b>CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS.....</b>	<b>75</b>
	<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....</b>	<b>77</b>
	<b>APÊNDICES.....</b>	<b>80</b>
	<b>APÊNDICE A – FILTRO KALMAN-BUCY.....</b>	<b>81</b>
	<b>APÊNDICE B – ANELASTICIDADE.....</b>	<b>97</b>
	<b>APÊNDICE C – GLOSSÁRIO.....</b>	<b>99</b>

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

- Figura 2.1 Ilustração do modelo elástico (sem múltiplas) mostrando a função refletividade simples, a função Berlage e o sismograma sintético 9
- Figura 2.2 Sistema de camadas ilustrando o caminho do raio central, para interfaces plano horizontais. .... 11
- Figura 2.3 Condição de contorno,  $c_{k+1}(t) = 0$ , ou seja, na interface  $k+1$  nada e transmitido tudo é refletido.. 12
- Figura 2.4 Variação da forma do pulso  $p_1(x,t)$  para valores fixos de  $x$  (deslocamento) e  $Q_F = 60$ . Para  $x \rightarrow \infty$ ,  $p_1(x,t) \rightarrow 0$ .  $t = x/v_p$  é a posição do máximo valor da curva, que tem a forma simétrica par, claramente não-causal, mostrando espalhamento para  $v$  constante. 14
- Figura 2.5 Variação da forma de  $p(x,t)$  em diferentes posições  $x$  (deslocamento) e  $Q_F = 60$ . Para  $x \rightarrow \infty$ ,  $p_2(x,t) \rightarrow 0$ ;  $p_2(x,t) = 0$  para  $t < x/v_\infty$ .  $t = x/v_\infty$  é o máximo valor da função,  $p(x,t)$ , causal e dispersiva com a propriedade especial importante de ser causal. 16
- Figura 2.6 (a) Função Berlage,  $u(t)$ . (b) Espectro de amplitude da função Berlage. A dificuldade deste espectro é na frequência zero onde  $A(0) \neq 0$ . 16
- Figura 2.7 Gráfico tempo-distância do efeito da atenuação intrínseca

- sobre o pulso-fonte (Berlage) para várias distâncias de propagação e variação temporal, demonstrado através do espalhamento do sinal onde  $v \neq v(\omega)$  para condição de não-dispersão. 17
- Figura 2.8 Gráfico tempo-distância do efeito da atenuação intrínseca sobre o pulso-fonte (Berlage) para várias distâncias de propagação e variação temporal demonstrado através do espalhamento do sinal. 17
- Figura 3.1 Representação do processo do filtro de Kalman na forma de diagrama de blocos onde  $Q_k = C\{w_k\}$  e  $E\{w_k\} = 0$ ,  $R_k = C\{v_k\}$  e  $E\{v_k\} = 0$ . A parte superior mostra os modelos matemáticos do sistema de estado e de medida propostos. A parte inferior mostra o processo de estimativa do sinal desejado em meio a ruído. A parte superior é a geração do sinal e a inferior é a de filtragem 23
- Figura 3.2 Diagrama de bloco computacional do processo de filtragem para as equações de Ricatti e ganho mostrando as etapas para o cálculo da estimativa do estado. A condição inicial para cada evento é definido em  $k = 0$ . 24
- Figura 3.3 Diagrama de blocos computacional utilizado no processo de deconvolução ao impulso de KB 25
- Figura 4.1 (Em cima) Função refletividade-simples (aleatória) sem ruído. (Em baixo) Função refletividade-simples com ruído aditivo. O significado físico para esta distribuição é fundamentada no modelo de Poisson-Gaussiano e no ganho dinâmico do traço. 30
- Figura 4.2 Na coluna esquerda estão os pulsos-fontes, e na coluna da direita as correspondentes raízes da TZ para mostrar a condição de fase, que em todos os casos são de fase-mínima. (Em cima) Pulso-fonte original. (Meio) Pulso-fonte estimado pela TH. (Em baixo) Pulso-fonte estimado pela deconvolução

homomórfica.

Na coluna esquerda estão os pulsos-fontes, e na coluna da direita as correspondentes raízes da TZ para mostrar a condição de fase, que em todos os casos são de fase-mínima. (Em cima) Pulso-fonte original. (Meio) Pulso-fonte estimado pela TH. (Em baixo) Pulso-fonte estimado pela deconvolução homomórfica.

- Figura 4.3 Sismogramas sintéticos gerados com o pulso-fonte original e com a refletividade contendo diferentes frações dos ruídos aditivos geológico e local. (a)  $S/R=99,98$ . (b)  $S/R=47,56$ . (c)  $S/R=11,72$ . Os traços estão repetidos 5 vezes para provocar o efeito visual de correlação lateral traço-a-traço. 31
- Figura 4.4 Refletividade extraída dos sismogramas da Figura 4.3 através do pulso-fonte original. Estes resultados servem de referência para análise geral do método e para os outros resultados apresentados nas Figuras 4.5 e 4.6. A seqüência de ruídos em (a), (b) e (c) corresponde a mesma da Figura 4.3. Observamos os efeitos da deconvolução na compressão do pulso, e na amplificação crescente do nível de ruído de (a) para (c). 31
- Figura 4.5 Refletividade extraída dos sismogramas da Figura 4.3 através do pulso-fonte efetivo estimado com a TH da Figura 4.2. Estes resultados devem ser comparados aos outros apresentados nas Figuras 4.4 e 4.6, em termos de resolução e amplificação de ruído. A seqüência (a), (b) e (c) corresponde à mesma da Figura 4.3. 32
- Figura 4.6 Refletividade extraída dos sismogramas da Figura 4.3 através do pulso-fonte efetivo estimado através da deconvolução homomórfica dado na Figura 4.2. Estes resultados devem ser comparados aos outros apresentados nas Figuras 4.4 e 4.5, em termos de resolução e amplificação de ruído. A seqüência (a), (b) e (c) corresponde à mesma da Figura 4.3. 33

- Figura 4.7 – Exemplo comparativo dos espectros envolvidos com o FKBD, tendo sido usado o sismograma (a) da Figura 4.3 ( $S/R=99,86$ ). (Em cima) Espectro de amplitude da entrada ao FKBD. (No meio) Espectro de amplitude da saída do FKBD. (Em baixo) Espectro de amplitude da função transferência do FKBD, onde se observa a tendência linear crescente da amplificação. 33
- Figura 4.8 Exemplo comparativo do efeito do equalizador passa-baixa de Ormsby na saída do FKBD, tendo sido usado o sismograma (b) da Figura 4.3 ( $S/R=47,56$ ). (Esquerda) Sismograma ruidoso. (Centro) Sismograma processado pelo FKBD após o passa-baixa equalizador. (Direita) Sismograma processado pelo FKBD sem o passa-baixa equalizador. O resultado do centro tem um foco melhor, e demonstra a utilidade do equalizador. 34
- Figura 4.9 Espectro de amplitude do fator de coerência medido entre os canais de entrada (sismograma ruidoso) e o de saída (refletividade recuperada) pelo FKBD. A instabilidade aumenta ao passo que a razão  $S/R$  diminui. A estabilidade é clara acima de  $S/R=75$ , e juntamente com a curva de fase (FFC), informam as limitações da operação de deconvolução com a presença de ruído. 34
- Figura 4.10 Espectro de fase do fator de coerência entre os canais de entrada (sismograma ruidoso) e de saída (refletividade recuperada) do FKBD. A instabilidade ocorre ao passo que a razão  $S/R$  diminui. A estabilidade é clara acima de  $S/R=75$  e, juntamente com a curva de amplitude (AFC), informam as limitações da deconvolução com a presença de ruído. 35
- Figura 4.11 (Em cima) Função refletividade-simples (aleatória) sem ruído. (Em baixo) Função refletividade-completa. O significado físico para esta distribuição é fundamentado no modelo de Goupillaud, onde se observa o decaimento da resposta ao

- impulso. 36
- Figure 4.12 Sismogramas sintéticos gerados com o pulso-fonte original e com a refletividade contendo diferentes frações dos ruídos aditivos geológico e local. (a)  $S/R=95,84$ . (b)  $S/R=39,21$ . (c)  $S/R=18,57$ . Os traços estão repetidos 8 vezes para provocar o efeito visual de correlação lateral traço-a-traço. 37
- Figura 4.13 Refletividade extraída dos sismogramas da Figura 4.12 através do pulso-efetivo. A seqüência de ruídos em (a), (b) e (c) corresponde a mesma da Figura 4.12. Observamos os efeitos da deconvolução na compressão do pulso, e na amplificação crescente do nível de ruído de (a) para (c). 37
- Figura 4.14 Exemplo comparativo dos espectros envolvidos com o FKBD, tendo sido selecionado o sismograma (a) da Figura 4.3 ( $S/R=95,84$ ). (Em cima) Espectro de amplitude da entrada ao FKBD. (No meio) Espectro de amplitude da saída do FKBD. (Em baixo) Espectro de amplitude da função transferência do FKBD onde observamos a tendência linear crescente da amplificação. 38
- Figura 4.15 Exemplo comparativo do efeito do equalizador passa-baixa de Ormsby na saída do FKBD tendo sido usado o sismograma (b) da Figura 4.12 ( $S/R=39,20$ ). (Esquerda) Sismograma ruidoso. (Direita) Sismograma processado pelo FKBD após o passa-baixa equalizador. (Centro) Sismograma processado pelo FKBD sem o passa-baixa equalizador. O resultado da Direita tem uma imagem melhor e demonstra a utilidade do equalizador. 38
- Figura 4.16 (Em cima) Função refletividade-simples (aleatória) sem ruído. (Em baixo) Função refletividade-completa. O significado físico para esta distribuição é fundamentada no modelo de Goupillaud. 39

- Figura 4.17 Pulso-fonte tempo-variante utilizado na convolução linear na geração dos sismogramas selecionados para este exemplo. 40
- Figura 4.18 Sismogramas sintéticos gerados com o pulso-fonte tempo-variante e com a refletividade contendo diferentes frações dos ruídos aditivos geológico e local. (a)  $S/R=94,52$ . (b)  $S/R=37,02$ . (c)  $S/R=7,31$ . Os traços estão repetidos 8 vezes para provocar o efeito visual de correlação lateral traço-a-traço. 40
- Figura 4.19 Refletividade extraída dos sismogramas da Figura 4.18 através do pulso-efetivo. A seqüência de ruídos em (a), (b) e (c) corresponde a mesma da Figura 4.18. Observamos os efeitos da deconvolução na compressão do pulso, e na amplificação crescente do nível de ruído de (a) para (c). 41
- Figura 4.20 Exemplo comparativo dos espectros envolvidos com o FKBD tendo sido selecionado o sismograma (a) da Figura 4.18 ( $S/R=94,52$ ). (Em cima) Espectro de amplitude da entrada ao FKBD. (No meio) Espectro de amplitude da saída do FKBD. (Em baixo) Espectro de amplitude da função transferência do FKBD onde se observa a tendência linear crescente da amplificação. 41
- Figura 4.21 Exemplo comparativo do efeito equalizador passa-baixa de Ormsby na saída do FKBD tendo sido usado o sismograma (b) da Figura 4.18 ( $S/R=37,02$ ). (Esquerda) Sismograma ruidoso. (Direita) Sismograma processado pelo FKBD após o passa-baixa equalizador. (Centro) Sismograma processado pelo FKBD sem o passa-baixa equalizador. O resultado da Direita tem um foco melhor e demonstra a utilidade do equalizador. 42
- Figura 4.22 Figura 4.22 – Sismograma com múltiplas e pulso tempo-variante dispersivo. 42
- Figura 4.23 (a) Sismograma sintético sem ganho automático. (b) Sismograma após o ganho automático (AGC). (c) Função

	refletividade-completa.	43
Figura 4.24	Diagrama de blocos para a deconvolução com os caminhos referentes ao filtro equalizador passa-baixa Ormsby.	44
Figura 4.25	(a) Função refletividade completa. (b) Sismograma sintético $S/R=80.94$ . (c) Sismograma deconvolvido pelo método de KB após o filtro equalizador passa-baixa do tipo Ormsby. Observamos que é realizada a compressão do pulso.	45
Figura 4.26	(a) Função refletividade-completa (b) Sismograma sintético $S/R=36,51$ . (c) Sismograma deconvolvido pelo método de KB após o filtro equalizador passa-baixa do tipo Ormsby. Com o aumento do ruído observamos os efeitos da deconvolução na compressão do pulso.	45
Figura 4.27	(a) Função refletividade completa. (b) Sismograma sintético sem ruído. (c) Sismograma deconvolvido pelo método de KB admitindo $b(k)$ constante (d) Sismograma deconvolvido pelo método de KB onde $b(k)$ é obtido a partir do modelo direto (Goupillaud). Observamos que é realizada a compressão do pulso para os dois casos, ocorrendo uma pequena melhora quando admitimos $b(k)$ variáveis.	46
Figura 4.28	(a) Função refletividade completa. (b) Sismograma sintético $S/R=80.94$ . (c) Sismograma deconvolvido pelo método de KB admitindo $b(k)$ constante (d) Sismograma deconvolvido pelo método de KB onde $b(k)$ é obtido a partir do modelo direto (Goupillaud).	46
Figura 4.29	(a) Sismograma real; (b) Sismograma processado pelo FKBD. Não foi aplicado ganho dinâmico, e o pulso-fonte efetivo utilizado na deconvolução foi estimado pela TH. Observamos claramente a compressão dos pulsos, e uma melhor definição das reflexões, principalmente da parte inicial da seção.	47
Figura 4.30	(a) Sismograma real; (b) Sismograma processado pelo FKBD após aplicação do equalizador (Passa-baixa de Ormsby). Não	

	foi aplicado ganho dinâmico. O pulso-fonte efetivo utilizado na deconvolução foi estimado pela TH. Observamos claramente a compressão dos pulsos, e uma melhor definição das reflexões, principalmente da parte inicial da seção.	48
Figura 5.1	Ilustra a função $b_i(k)$ para diferentes valores de periodicidade $P$ e do comprimento $L$ do operador. (a) e (b) informam o comprimento da janela sobre o traço sísmico. (c) e (d) mostram as formas estranhas de $b_i(k)$ para as janelas, em (a) e (b).	52
Figura 5.2	Estrutura do operador KBCP, $b_i(k)$ , caso 1D. $T$ constante.	53
Figura 5.3	Estruturas do operador KBCP, $b_{ij}(k)$ , caso 2D. $T=T(x, t)$ variável.	53
Figura 5.4	Ilustra os diferentes valores de $\beta$ . Diferença entre a saída desejada e a real. Observamos que a função $E(k)$ é complexa, apresentando vários mínimos locais.	55
Figura 5.5	(a) Traço de entrada de afastamento nulo (b) Traço de saída resultante da aplicação do operador KBCP. Notamos que a múltipla é suprimida.	55
Figura 5.6	(a) Operador KBCP. (b) Detalhes do operador KBCP na janela entre os pontos 344 e 360. (c) Traço de entrada. (d) Saída real onde se nota que a múltipla na Figura (c) foi atenuada	58
Figura 5.7	(a) Seção sísmica fonte-comum sem ruído e com uma múltipla de superfície. (b) Resultado da aplicação do operador KBCP. Notamos que a múltipla é atenuada.	58
Figura 5.8	(a) Seção sísmica fonte-comum com ruído (S/R=97) e uma múltipla simétrica. (b) Resultado da seção após a aplicação do operador KBCP. Notamos que a múltipla é atenuada.	59
Figura 5.9	(a) Seção sísmica com ruído (S/R=75) com uma múltipla simétrica. (b) Resultado da seção após a aplicação do operador KBCP. Notamos que a múltipla é atenuada.	59

- Figura 5.10 Modelo de uma camada plano-horizontal sob um semi-espaco e velocidades de 1800m/s e 2300 m/s, e 1300m e 1200m de espessura respectivamente. Onde estao mostrados os raios fonte-receptor. 60
- Figura 5.11 (a) Seção sísmica obtida utilizando o programa SEIS88. (b) Resultado do operador KBCP. Notamos que a múltipla é atenuada. 60
- Figura 5.12 Modelo com uma camada sobre um semi-espaco separado por uma interface plano-inclinada, e velocidades 3000 e 5500 m/s, e 50 receptores separados por um intervalo de 25m. Onde estao mostrados os raios fonte-receptor. 61
- Figura 5.13 (a) Seção fonte-comum obtida com o programa SEIS88. (c) Resultado obtido após a aplicação do operador KBCP. Notamos que a múltipla é atenuada. 62
- Figura 5.14 Comportamento da função  $b_i(k)$  para a seção da Figura 5.14, do 1º ao 5º traço sísmico. 62
- Figura 5.15 Modelo de duas camadas plano-inclinadas sobre um semi-espaco, e velocidade de 2000m/s, 4500m/s e 3000 m/s, e 50 receptores com espaçamentos de 25m. Onde estao mostrados os raios fonte-receptor. 63
- Figura 5.16 (a) Seção sísmica fonte-comum obtida utilizando o programa seis88. (b) Resultado da aplicação do operador KBCP. Notamos que a múltipla é atenuada. 64
- Figura 5.17 Comportamento da função  $b_i(k)$  para o modelo geofísico da Figura 5.16. O traço azul representa as reflexões primárias e o vermelho a múltipla. 64
- Figura 5.18 (a) Seção geológica longitudinal à Bacia do Solimões. (b) Modelo de velocidade referente a um trecho da Bacia do Solimões. (c) Detalhes da seção geológica utilizada para simulação da seção sísmica. 66
- Figura 5.19 Simulação num trecho selecionado da seção geológica (Figura

- 5.19c), ilustrando a trajetória dos raios na seção. 50 receptores separados por um intervalo de 25m. 67
- Figura 5.20 (a) Seção sísmica fonte-comum para a seção geológica usando o programa seis88, com aplicação do AGC na seção, com a finalidade de visualizar melhor as interfaces e a múltipla presentes nesta seção. (b) Seção sísmica após a aplicação do operador KBCP. 67
- Figura 5.21 Modelo de uma camadas de água sob um semi-espço e velocidades de 1500m/s e 4300 m/s, e 1000m e 1500m de espessura respectivamente. Onde estão mostrados os raios fonte-receptor. 68
- Figura 5.22 (a) Seção sísmica fonte-comum obtida utilizando o programa seis88. (b) Resultado da aplicação do operador KBCP. Notamos que as múltiplas de primeira, segunda e terceira ordem são atenuadas. 69
- Figura 5.23 Detalhes da seção geológica utilizada para simulação da seção sísmica, evidenciando o modelo de velocidade. 70
- Figura 5.24 (a) Seção sísmica fonte-comum para a seção geológica usando o programa seis88, com aplicação do AGC na seção, com a finalidade de visualizar melhor as interfaces e a múltipla presentes nesta seção. (b) Seção sísmica após a aplicação do operador KBCP. 70
- Figura 5.25 Detalhes da seção geológica utilizada para simulação da seção sísmica, evidenciando o modelo de velocidade. 71
- Figura 5.26 (a) Seção sísmica fonte-comum para a seção geológica usando o programa seis88, com aplicação do AGC na seção, com a finalidade de visualizar melhor as interfaces e a múltipla presentes nesta seção. (b) Seção sísmica após a aplicação do operador KBCP. 72

## LISTA DE SÍMBOLOS

Variável	Descrição
$A$	Amplitude da onda plana para modelos anelásticos e elásticos.
$A_0$	Amplitude de referência da onda plana.
$d(t)$	Ondas descendentes em meios estratificados (camadas finas).
$E$	Erro entre a saída desejada e a saída real.
$Q_F$	Fator de qualidade específico do material em meios elásticos e anelásticos.
$F(t), G(t), H(t)$	Matrizes de estado.
$E$	Função objeto de minimização entre o valor real e o desejado.
$K(t)$	Matriz ganho que realimenta o método Kalman-Bucy.
$m$	Direção de propagação em relação ao eixo $x$ .
$P(t)$	Matriz de covariância do erro entre o real e o desejado.
$s(t)$	Sismograma sem ruído.
$R(z)$	Função transferência da refletividade em meios estratificados.
$R(t)$	Refletividade (coeficiente de reflexão).
$T(z)$	Função transferência da transmissividade em meios estratificados.
$t$	Tempo de trânsito duplo.
$u(t)$	Pulso-fonte (Wavelet).
$v_p$	Velocidade de propagação da onda plana em meios elástico e anelástico.
$v(t)$	Ruído adicionado no sismograma.
$x(t)$	Variável de estado que determinam o estado do sistema dinâmico.
$\hat{x}(t)$	Estimativa do vetor de estado.
$z(t)$	Sismograma sintético com ruído.
$\rho$	Densidade do meio de propagação da onda.

$\mu$	Média (espectância).
$\omega$	Frequência circular ou angular.
$\alpha$	Fator de decaimento da onda plana.
$p(x,t)$	Pulso atenuante em meios elásticos e anelásticos.
$\varphi(x,t)$	Onda plana em meios elásticos e anelásticos.
$h(t)$	Filtro ótimo tempo invariante.
$\phi(t)$	Define as autocorrelações (mesmos subscrito) e correlações cruzadas (subscrito disrtinto).
$w(t)$	Vetor de geração do estado, isto é, vetor de entrada do sistema.
$\Phi(t)$	Matriz dinâmica de estado.
$H[ ]$	Transformada de Hilbert.
$b_i(k)$	Extrapolam os coeficientes $r(k)$ através dos $L$ coeficientes anteriores.
$S/R$	Razão sinal/ruído calculada pela razão simples das variâncias.
$g(k)$	Variável de estado, traço sísmico
$L$	Comprimento do coeficiente, $b_i(k)$ , do operador KBCP
$\beta$	Parâmetro de atenuação que gera o coeficiente $b_i(k)$
$\Delta t$	Incremento dado ao parâmetro de atenuação
$\sigma^2$	Variância
$\lambda$	Parâmetro da Distribuição de Poisson
$c(t)$	Ondas ascendentes em meios estratificados

## RESUMO

O objetivo central deste trabalho é o estudo e a aplicação do método Kalman-Bucy no processo de deconvolução ao impulso e de deconvolução com predição, onde é considerado que os dados observados são classificados como não-estacionários. Os dados utilizados neste trabalho são sintéticos e, com isto, esta Tese tem características de um exercício numérico e investigativo.

O operador de deconvolução ao impulso é obtido a partir da teoria de CRUMP (1974) fazendo uso das soluções das equações Wiener-Hopf apresentadas por KALMAN-BUCY (1961) nas formas contínuas e discretas considerando o processo como não estacionário. O operador de predição (KBCP) está baseado nas teorias de CRUMP (1974) e MENDEL ET AL (1979). Sua estrutura assemelha-se ao filtro Wiener-Hopf onde os coeficientes do operador (WHLP) são obtidos através da autocorrelação, e no caso (KBCP) são obtidos a partir da função  $b_i(k)$ .

O problema é definido em duas etapas: A primeira consta da geração do sinal, e a segunda da sua avaliação. A deconvolução realizada aqui é classificada como estatística, e é um modelo fortemente baseado nas propriedades do sinal registrado e de sua representação.

Os métodos foram aplicados apenas em dados sintéticos de seção fonte-comum obtida a partir dos modelos com interfaces contínuas e camadas homogêneas

## ABSTRACT

The main objective of this work is the study and the application of the Kalman-Bucy method in the process of deconvolution to the impulse and deconvolution with prediction, considering the observed data as no stationary. The data used in this work are synthetic and, with this, this Thesis has characteristics of a numerical and search.

The operator of deconvolution to the impulse is obtained from the Crump theory (1974), doing use of the solution of equation of Wiener-Hopf presented by Kalman-Bucy in the continuous and discrete forms considering the stationary process. The prediction operator (KBCP) is based the Crump (1974) and Mendel et al (1979) theoric. Its structure resembles the Wiener-Hopf filter, where the coefficients of the operator are obtained through the autocorrelation, in the case (KBCP) are obtained from the function  $b_i(k)$ .

The problem is defined in two steps: the first consists of the generation of the signal, and second of its evaluation. The deconvolution performed is classified as statistics, and is a model based in the properties of the registered signal and its representation.

The method were applied only in synthetic data with common-shot section obtained from models with continuous interfaces and homogeneous layers.

# 1 - INTRODUÇÃO

O objetivo central deste trabalho é o estudo e a aplicação do método Kalman-Bucy no processo de deconvolução ao impulso e de deconvolução com predição, considerando os dados observados como não-estacionários. A técnica Kalman-Bucy é considerada uma alternativa de processamento no domínio do tempo, e suplementar a teoria de Wiener-Hopf. A valorização e a importância do filtro Kalman-Bucy vem da sua aplicabilidade e versatilidade, bem como da essência de sua conceituação, fundamental aos processos geofísicos. As referências básicas de aplicação na sismica aqui estudadas são BAYLESS & BRIGHAM (1970), CRUMP (1974), MENDEL (1983, 1990), ROBINSON (1999) e MENDEL ET AL (1979). A engenharia elétrica têm disponível uma maquinaria muito desenvolvida de aplicações no assunto de tempo real, e aqui contamos com CHUI & CHEN (1987), CANDY (1987) e BROWN & HWANG (1996). Os dados utilizados neste trabalho são sintéticos e, com isto, esta Tese tem características de um exercício numérico e investigativo.

O operador de deconvolução ao impulso é obtido a partir da teoria de CRUMP (1974), fazendo uso das soluções das equações Wiener-Hopf apresentadas por Kalman-Bucy nas formas contínuas e discretas considerando o processo como não estacionário. O operador de predição (KBCP) está baseado nas teorias de CRUMP (1974) e MENDEL ET AL (1979). Sua estrutura assemelha-se ao filtro Wiener-Hopf, onde os coeficientes do operador (WHLP) são obtidos através da autocorrelação, no caso (KBCP) são obtidos a partir da função  $b_i(k)$ , descrita no capítulo 6.

A finalidade do processamento da seção sísmica de reflexão é permitir a interpretação dos dados registrados. A representação detalhada do sinal sísmico requer um modelo relativamente complicado, e o processamento usa de um conjunto de técnicas baseadas em propriedades estocásticas da informação. Processos estocásticos não-estacionários são as características básicas de dados geofísicos e necessárias para aplicação do presente método.

Alguns métodos estão baseados na suposição que o sismograma inclui somente reflexões primárias, entretanto, na realidade o sismograma também possui reflexões múltiplas que podem ser fortes, tornando os refletores profundos completamente invisíveis. Em geral, na aquisição de dados marinhos, as ondas, na camada de água, são repetidamente refletidas na superfície do oceano, sem ocorrer uma perda significativa na amplitude. Para identificar e localizar um refletor alvo (reservatório de óleo), é necessário que estas múltiplas sejam eliminadas ou simplesmente atenuadas. Nesta Tese propomos e discutimos um novo método para atenuação de múltiplas de superfície. Este método não identifica as múltiplas, e não requer medidas de estacionariedade.

Os problemas geofísicos são globalmente classificados em duas categorias: o problema direto e o problema inverso. Considerando a sísmica, no problema direto se busca a solução da resposta geofísica devido a uma fonte transiente, com a energia se propagando no meio e gravada pelo sensor-registrador. Sob este aspecto, este problema visa a simulação de dados verdadeiros onde o meio real é substituído por um meio efetivo sob a regência de uma equação diferencial parcial. Para completar esta representação, ao traço sísmico são acrescentados ruídos sob critérios estocásticos.

O problema inverso inicia com os dados observados, onde se busca recuperar um dos segmentos que compõem o processo, e que podem ser: (a) a assinatura da fonte; (b) a reverberação do meio; (c) a geometria do meio. Deconvolução faz parte da classe de problemas inversos, e aqui ela é definida como o processo que decompõe uma série temporal sísmica observada em suas partes constitutivas: pulso-fonte, reverberação e coeficientes de reflexão.

O problema é definido em duas etapas: A primeira consta da geração do sinal, e a segunda da sua avaliação. A deconvolução realizada aqui é classificada como estatística, e é um modelo fortemente baseado nas propriedades do sinal registrado e de sua representação.

O modelo sísmico 1D utilizado para as simulações é historicamente apresentado por Goupillaud (1961), e descrito por Shapiro & Hubral (1998), Silva & Robinson (1979), Berryman & Greene (1980) e Burridge et al. (1988) de forma conveniente para representar a propagação de ondas planas com incidência vertical em um meio estratificado, formado por camadas homogêneas e isotrópicas. As seções 2D foram simuladas utilizando a teoria do raio descrita por Hubral & Krey (1980).

O método KBCP foi aplicado apenas em dados sintéticos de seção fonte comum obtida a partir dos modelos com interfaces contínuas e camadas homogêneas. Foram selecionados 6 modelos diferenciados em relação a estrutura geológica; isto é, uma camada

O método KBCP foi aplicado apenas em dados sintéticos de seção fonte comum obtida a partir dos modelos com interfaces contínuas e camadas homogêneas. Foram selecionados 6 modelos diferenciados em relação a estrutura geológica; isto é, uma camada plano-horizontal, uma camada plano-inclinada, duas camadas plano-inclinadas, simulação de um trecho da Bacia do Solimões e camadas curvas.

Como citado anteriormente, este trabalho tem como objetivos específicos desenvolver dois operadores de deconvolução; ao impulso e de predição. Portanto, fornecendo desta forma uma técnica alternativa de deconvolução para auxiliar no processamento de seções sísmicas.

## 1.1- ESTRUTURA DA TESE

A estrutura desta Tese é constituída por sete capítulos resumidos a seguir.

No capítulo 2, descrevemos os modelos geofísicos 1D utilizados para demonstrar os métodos de deconvolução ao impulso Kalman-Bucy (KB) e a deconvolução com predição KBCP propostos.

No capítulo 3, iniciamos com a apresentação do problema Wiener-Kolmogorov, especificando a equação Wiener-Hopf e em seguida descrevemos a solução apresentada por Kalman-Bucy nas formas contínua e discreta para processos não-estacionários.

No capítulo 4, mostramos a estrutura apresentada por CRUMP (1974) para deconvolução ao impulso, apresentando as principais etapas, seus fluxogramas, e os resultados obtidos utilizando os dados sintéticos e reais, e como são obtidas as variáveis do método a partir dos modelos descritos no capítulo 2. Demonstramos a necessidade de aplicar um filtro passa-baixa de Ormsby para equalização nas altas frequências uma vez que a deconvolução ao impulso utilizada amplifica o espectro diferencialmente tornado-o parte integrante neste processo de deconvolução aqui desenvolvido.

No capítulo 5, propomos uma nova estrutura de deconvolução com predição (atenuação de múltiplas). Neste capítulo, definimos as teorias fundamentais baseadas na teoria Kalman-Bucy e estendida por CRUMP (1974) para a deconvolução ao impulso e por MENDEL ET AL (1979) para gerar sismogramas sintéticos. Identificação do problema, apresentação da solução, fluxogramas, diagramas de blocos, resultados aplicados em dados sintéticos estão presentes neste capítulo.

No Capítulo 6, apresentamos nossas conclusões sobre o método Kalman-Bucy para predição e deconvolução ao impulso, bem como perspectivas para trabalhos futuros relacionados ao operador KBCP.

## 2 – MODELO DIRETO 1D

Neste capítulo descrevemos os modelos sísmicos utilizados para demonstrar a aplicação do método de deconvolução ao impulso Kalman-Bucy-Crump dados sintéticos sendo eles:

- (a) Modelo elástico. A distribuição dos coeficientes de refletividade forma uma série branca.
- (b) Modelo elástico. Os coeficientes de refletividade são do tipo série não-branca motivando o surgimento de múltiplas.
- (c) Modelo anelástico.

A equação de movimento da partícula em uma dimensão é dada por

$$\rho(y) \frac{\partial^2 g(y,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial y} [E(y) \frac{\partial g(y,t)}{\partial y}], \quad (2.1)$$

onde  $\rho(y)$  é a densidade;  $E(y)$  é uma constante elástica, que para ondas compressionais  $E(y) = \lambda(y) + 2\mu(y)$  e para ondas transversais  $E(y) = \mu(y)$ , com  $\lambda(y)$  e  $\mu(y)$  constantes de Lamé;  $g(y,t)$  pode representar deslocamento,  $t$ =tempo,  $y$ =direção de propagação. (AKI & RICHARDS, 1980).

No problema direto, a sintetização do traço sísmico é com base numa fonte plana, propagação vertical (em  $y$ ) sobre o meio formado de camadas plano-horizontais em condições individuais de homogeneidade e isotropia. A equação de movimento é, então, reescrita em forma mais adequada por

$$\rho_k \frac{\partial^2 g_k(y,t)}{\partial t^2} = E_k \frac{\partial^2 g_k(y,t)}{\partial y^2}, \quad (2.2)$$

onde  $\rho_k$  e  $E_k$  são constantes na camada  $k$ . É necessário apenas dois meios com  $v_k = \sqrt{E_k / \rho_k}$ , ( $k=1,2$ ), para definir o espalhamento na interface. Nestas condições, a equação na forma acima é válida para ondas de qualquer natureza (P, S, pressão, etc.) sem absorção interna.

Um distúrbio incidente (de frequência  $f$  e amplitude  $A_i$ ) se propagando num meio 1 tem seu deslocamento dado por

$$g_i = A_i e^{i2\pi f(t-y/v_1)}. \quad (2.3)$$

O distúrbio refletido tem a amplitude dada por

$$g_r = A_r e^{i2\pi f(t+y/v_1)}. \quad (2.4)$$

O distúrbio transmitido tem a amplitude dada por

$$g_t = A_t e^{i2\pi f(t-y/v_2)}. \quad (2.5)$$

O que se deseja é obter  $A_t$  e  $A_r$  em termos de  $A_i$ . Para isto é necessário duas condições de contorno na interface: (a) continuidade de deslocamento,  $g(y^-) = g(y^+)$ ; (b) continuidade de tensão,  $E_1 \partial g(y^-) / \partial y = E_2 \partial g(y^+) / \partial y$ . A aplicação resulta na relação entre as amplitudes:

$$(a) A_i + A_r = A_t \quad (b) A_i - A_r = \frac{E_2/v_2}{E_1/v_1} A_t. \quad (2.6a, 2.6b)$$

Para a elasticidade perfeita  $E = \rho v^2$ , sendo  $\rho v$  a impedância acústica do meio e representada por  $I = \rho v$ . Para análise, estas relações são reescritas como:

$$A_r = \frac{1 - \frac{I_2}{I_1}}{1 + \frac{I_2}{I_1}} A_i; \quad A_t = \frac{2}{1 + \frac{I_2}{I_1}} A_i. \quad (2.7a, 2.7b)$$

Os coeficientes de reflexão,  $r$ , e transmissão,  $t$ , de amplitude são definidos como

$$r = \frac{I_1 - I_2}{I_1 + I_2}; \quad t = \frac{2I_1}{I_1 + I_2}. \quad (2.8a, 2.8b)$$

Estes coeficientes são números reais, e  $|r| \leq 1$ ,  $0 \leq t \leq 2$  e  $r - t = 1$ .

Os coeficientes de reflexão,  $r_k$ , e de transmissão,  $t_k$ , para cada interface numa propagação descendente, para que haja correspondência com definição anterior, são dados por:

$$r_k = \frac{\rho_k v_k - \rho_{k+1} v_{k+1}}{\rho_k v_k + \rho_{k+1} v_{k+1}}; \quad t_k = \frac{2\rho_k v_k}{\rho_k v_k + \rho_{k+1} v_{k+1}}; \quad (k = 0, 1, 2, \dots, K). \quad (2.9a, 2.9b)$$

Em seguida descrevemos modelos combinando tipos diferentes de distribuição dos coeficientes  $r_k$ .

## 2.1 – MODELO ELÁSTICO SEM MÚTIPLAS

O modelo descrito nesta seção será utilizado na deconvolução ao impulso (seção 4.1.1).

No modelo convolucional (Silva & Robinson, 1979), o meio geológico é representado por uma função refletividade, aleatória,  $r(t)$ , que por convolução com o sinal-fonte efetivo,  $u(t)$ , determinístico, produz sinal sísmico  $x(t)$ , sendo adicionado um ruído aleatório,  $v(t)$ , Figura 2.1. As equações que representam o modelo do traço sísmico são:

$$x(t) = r(t) * u(t), \quad (2.1)$$

$$z(t) = r(t) * u(t) + v(t), \quad (2.2)$$

A distribuição conveniente para representar a função refletividade do modelo simples,  $r(t)$ , é a Poisson-Gaussiana, que tem os seguintes pressupostos:

(a) A subsuperfície é horizontal, perfeitamente elástica e formada por camadas homogêneas e isotrópicas.

(b) A diferença da impedância acústica nas interfaces entre as camadas é tal que os coeficientes de reflexão correspondentes são não-correlacionáveis, média zero, e as amplitudes têm distribuição Gaussiana.

(c) Estes coeficientes de reflexão são também suficientemente pequenos, de modo que reflexões múltiplas e efeitos de transmissão podem ser ignorados.

Obviamente, estas considerações não são completamente válidas; entretanto, elas são relativamente fortes e não são incomuns na geofísica.

A função  $r(t)$  consiste de uma distribuição de impulsos que pode ser descrita por

$$r(t) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \delta(t - \tau_i), \quad (2.3)$$

onde  $a_i$  e  $\tau_i$  referem a amplitude e localização de cada impulso, respectivamente. A partir das propriedades admitidas,  $a_i$  é uma variável aleatória com distribuição Gaussiana com média zero,  $\mu = 0$  e variância  $\sigma^2 = \sigma_a^2$ , e  $\tau_i$  é descrito como um processo de Poisson de parâmetro  $\lambda$  (Papoulis, 1965; Mendel, 1983). A fundamentação desta distribuição no processamento está relacionada ao ganho dinâmico, e as simulações aqui realizadas têm como pressuposto, como já mencionado acima, que a distribuição dos coeficientes de reflexão é puramente aleatória (série branca), e sendo demonstrado matematicamente que, nesta condição especial e restrita, os efeitos de múltiplas são cancelados (Silva & Robinson, 1979). No entanto, os

cálculos para gerar séries brancas resultam em aproximações e, conseqüentemente, a reverberação gerada é considerada como ruído aditivo.

Existem várias técnicas para estimar  $r(t)$ , e o problema fundamental na aplicação de técnicas de deconvolução em dados reais é a incerteza no conhecimento do pulso-fonte efetivo,  $u(t)$ . No Wiener-Hopf-Levinson (WH) convencional, a função autocorrelação pode ser submetida a uma janela de truncamento e são várias as premissas: (a) Que o pulso-fonte efetivo é estacionário, e tem fase-mínima; (b) Que o espectro da função refletividade é branco. A fundamentação da deconvolução ótima é o teorema que demonstra ser o operador WH,  $h(t)$ , fortemente de fase-mínima (Robinson & Wold, 1962).

O pulso-fonte efetivo pode ser descrito como resultante de várias contribuições independentes ao longo da sua trajetória, e que podem ser classificadas em tempo-invariante e tempo-variante, fase-mínima e fase-não-mínima, sendo elas: a assinatura da fonte (pulso-fonte original), fantasmas, anelasticidade, sensor, instrumentação. A estes ainda podemos adicionar os efeitos de dispersão na propagação em camadas finas (Burridge Et Al., 1988). Intencionalmente, na presente análise com ilustrações, consideramos estas componentes em conjunto.

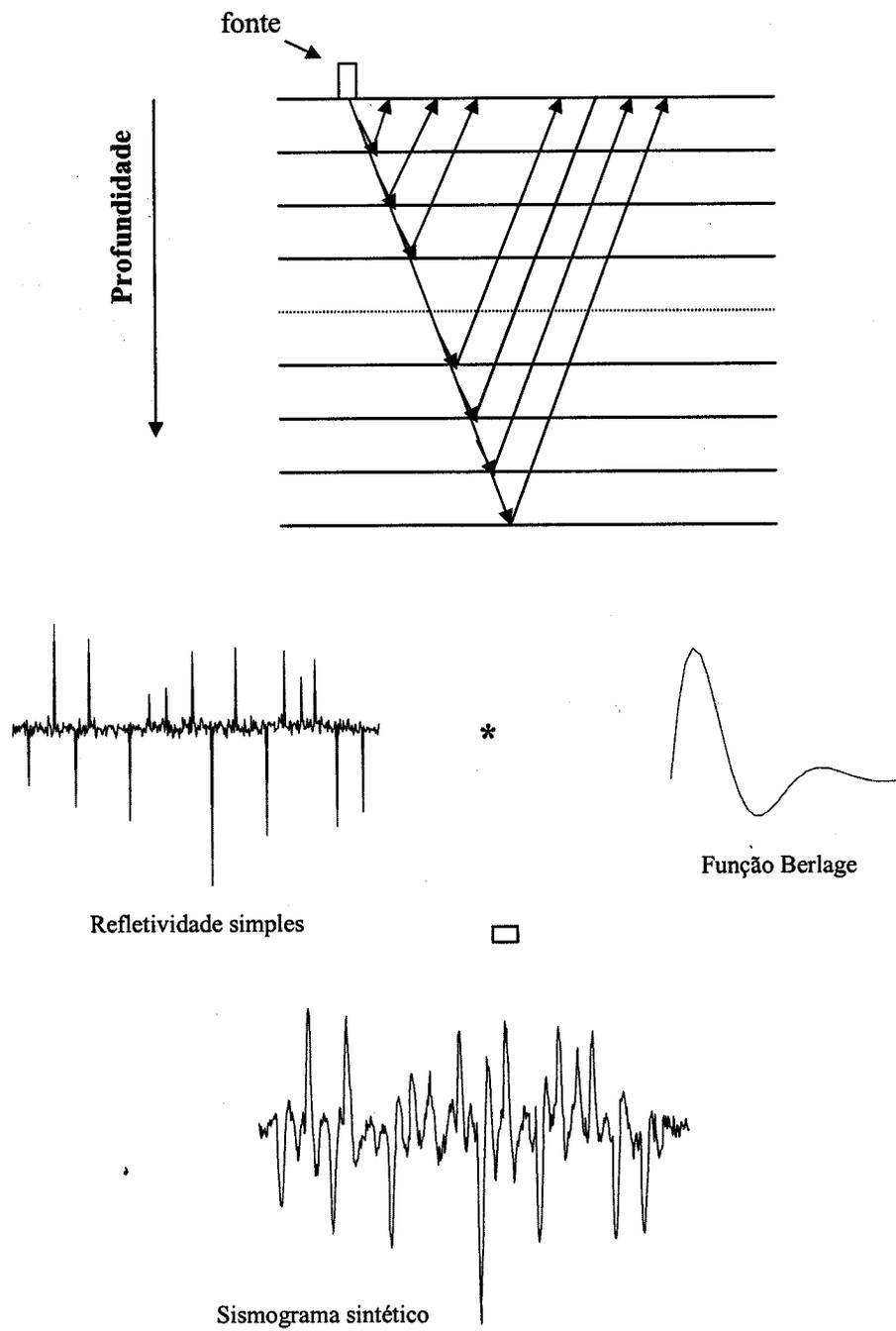


Figura 2.1 – Ilustração do modelo elástico (sem múltiplas) mostrando a função refletividade simples, a função Berlage e o sismograma sintético.

## 2.2 – MODELO ELÁSTICO COM MÚLTIPLAS

Bacias sedimentares são descritas por sedimentologistas, e os geofísicos as modelam matematicamente para a exploração sísmica (Khattri & Gird, 1976). As seqüências geológicas são classificadas em muitas formas diferentes como, por exemplo, periódicas, quase-periodicas, aleatórias, especiais, progressivas, regressivas, etc, objetivando uma descrição geral das assinaturas sísmicas. Os fenômenos físicos esperados nestes meios são descritos como devidos a filmes e a estratificação fina, e a transformada-Z de Laplace definida como

$$F(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k z^k, \text{ é um método conveniente para o modelamento sísmico (Brekhovskiy, 1980;}$$

Ziolkowski & Fokkema, 1986).

O estudo teórico da física de camadas finas para sísmica conta com uma vasta literatura. Além dos já referenciados, contamos também com Shapiro & Hubral (1998), Sherwood & Trorey (1965) e Burridge et al (1988). Semelhantemente, algoritmos numéricos são apresentados por diferentes autores, e para comparação citamos Thybo (1986), Douze (1979) e Temme & Muller (1982).

O modelo descrito nesta seção é utilizado para demonstrar aplicabilidade do operador KBCD na seção 4.1.2, e considera também uma onda plana vertical propagando em um meio homogêneo, isotrópico, com interfaces plano horizontais e incidência normal (Goupillaud, 1961; Robinson, 1967). As camadas estão numeradas do topo para a base, a camada  $n = 0$  representa o semi-espaco superior e a camada  $n + 1$  considera como um semi-espaco inferior. Desta forma, o modelo consiste de  $n$  camadas,  $n$  interfaces e  $n$  coeficientes de reflexão e transmissão, como podemos ver na Figura 2.2. A solução da equação de onda em cada interface leva a definição do coeficiente de reflexão  $r_j$  associado a cada interface.

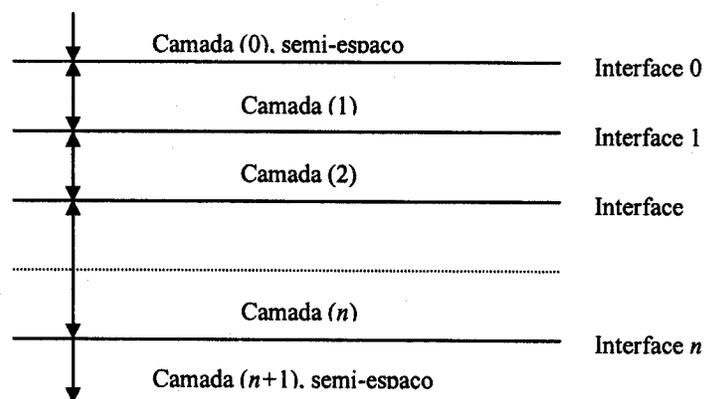


Figura 2.2 – Sistema de camadas ilustrando o percurso do raio central para interfaces plano horizontais.

### 2.2.1 - Funções Refletividade e Transmissividade em Meios Estratificados Finos

A onda descendente,  $d_0(t)$ , localizada no semi-espaço superior incide em um sistema com  $k$  camadas, e não há ondas ascendentes,  $c_{k+1}(t)$ , no semi-espaço inferior, isto é,  $c_{k+1}(t) = 0$ , como ilustrado na Figura 2.3.

A resposta do sistema segundo Silva & Robinson (1979) no domínio  $z$  é

$$\begin{bmatrix} D_{k+1}(z) \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{z^{-k/2}}{(1-r_k)\dots(1-r_1)(1-r_0)} \begin{bmatrix} z^k P_k(z^{-1}) & z^k Q_k(z^{-1}) \\ Q_k(z) & P_k(z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -r_0 \\ -r_0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_0(z) \\ C_0(z) \end{bmatrix}. \quad (2.4)$$

onde  $P_k$  e  $Q_k$  são os polinômios característicos. A equação matricial acima é representada por duas equações escalares que são:

$$D_{k+1}(z) = \frac{z^{-k/2} z^k}{(1-r_k)\dots(1-r_0)} \left\{ [P_k(z^{-1}) - r_0 Q_k(z^{-1})] D_0(z) + [-r_0 P_k(z^{-1}) + Q_k(z^{-1})] C_0(z) \right\}, \quad (2.5)$$

$$0 = [Q_k(z) - r_0 P_k(z)] D_0(z) + [-r_0 Q_k(z) + P_k(z)] C_0(z). \quad (2.6)$$

Resolvendo a equação (2.6) para  $C_0(z)$  obtemos

$$C_0(z) = \frac{r_0 P_k(z) - Q_k(z)}{P_k(z) - r_0 Q_k(z)} D_0(z), \quad (2.7)$$

ou

$$R(z) = \frac{C_0(z)}{D_0(z)} = \frac{r_0 P_k(z) - Q_k(z)}{P_k(z) - r_0 Q_k(z)}, \quad (2.8)$$

onde  $R(z)$  é função transferência da refletividade.

Substituindo a expressão (2.7) na equação (2.5) resulta em

$$D_{k+1}(z) = \frac{z^{-k/2} D_0(z)}{(1-r_k)\dots(1-r_0)} \frac{z^k P_k(z^{-1}) P_k(z) - z^k Q_k(z^{-1}) Q_k(z)}{P_k(z) - r_0 Q_k(z)} (1-r_0^2). \quad (2.9)$$

Como demonstrado temos

$$z^k P_k(z^{-1}) P_k(z) - z^k Q_k(z^{-1}) Q_k(z) = z^k (1-r_k)(1+r_k)\dots(1-r_0)(1+r_0). \quad (2.10)$$

Substituindo a equação (2.10) em (2.9) encontramos

$$D_{k+1}(z) = \frac{z^{k/2} (1+r_k)\dots(1+r_1)(1+r_0)}{P_k(z) - r_0 Q_k(z)} D_0(z), \quad (2.11)$$

ou

$$T(z) = \frac{D_{k+1}(z)}{D_0(z)} = \frac{z^{k/2} (1+r_k)\dots(1+r_1)(1+r_0)}{P_k(z) - r_0 Q_k(z)}. \quad (2.12)$$

onde  $T(z)$  é a função transferência da transmissividade.

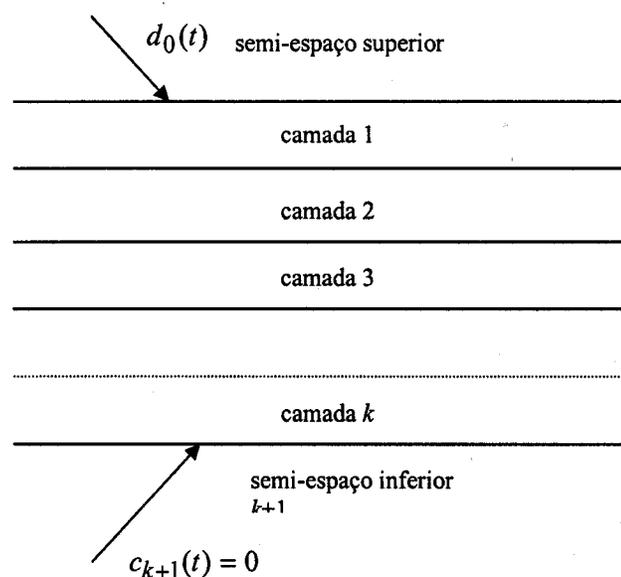


Figura 2.3 – Sistema de camadas ilustrando a ondas descendentes e ascendentes, para a primeira e para a interface  $k+1$  onde, nesta última, da e transmitido tudo é refletido.

## 2.3 – MODELOS ANELÁSTICOS

O modelo descrito nesta seção é utilizado na deconvolução ao impulso (seção 4.1.3).

### 2.3.1 – Atenuação sem Dispersão

A solução de D'Alembert é interpretada como uma onda plana na forma  $\delta(t - x/v_p)$ , onde a velocidade de propagação é  $v_p$ , posição ao longo do eixo  $x$ , o meio é homogêneo, isotrópico e perfeitamente elástico. Para um meio anelástico, a onda sofre atenuação e espalhamento no sentido de não-causalidade (Aki & Richards, 1980). Devido ao fenômeno de atenuação, o decaimento espacial da amplitude,  $A = A(x)$ , fica contido na equação

$$A(x) = A_0 \exp\left[\frac{-\omega x}{2v_p Q_F}\right], \quad (2.13)$$

onde  $Q_F$  é o fator de qualidade específico,  $A_0$  é a amplitude de referência e  $\omega$  é a frequência circular ou angular

A transformada de Fourier direta para o impulso em propagação é dada por

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - x/v) e^{i\omega t} dt = \exp\left[\frac{i\omega x}{v_p}\right]. \quad (2.14)$$

Escrevendo a equação do fator de decaimento,  $\alpha(\omega) = \omega/2v_p Q_F$ , apêndice B, na forma

$$\exp[-\alpha(\omega)x], \quad (2.15)$$

a transformada de Fourier inversa do pulso atenuante é dada por

$$p_1(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[\frac{-|\omega|x}{2v_p Q_F}\right] \exp\left[i\omega\left(\frac{x}{v_p} - t\right)\right] d\omega. \quad (2.16)$$

Experimentos realizados para medir a atenuação em sólidos demonstram que o fator de atenuação específico  $Q_F$  é aproximadamente constante para uma faixa de frequência 0,001 - 100 Hz predominante nos dados sísmicos (Aki & Richards, 1980). Neste estudo,  $Q_F$  é admitido intencionalmente como constante e, sob esta condição específica, a solução da integral (2.16) é dada por

$$p_1(x,t) = \frac{1}{\pi} \left[ \frac{\frac{x}{2v_p Q_F}}{\left(\frac{x}{2v_p Q_F}\right)^2 + \left(\frac{x}{v_p} - t\right)^2} \right]. \quad (2.17)$$

As propriedades de  $p_1(x,t)$  são: (a)  $\lim_{x \rightarrow 0} p_1(x,t) = \infty$ . (b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} p_1(x,t) = 0$ . Na Figura 2.4 plotamos  $p_1(x,t)$  com  $Q_F = 60$  para diversos valores fixos de  $x$  e  $t$ -variante, ilustrando a não-causalidade, e o ponto  $x/v = t$  de valor máximo da curva.

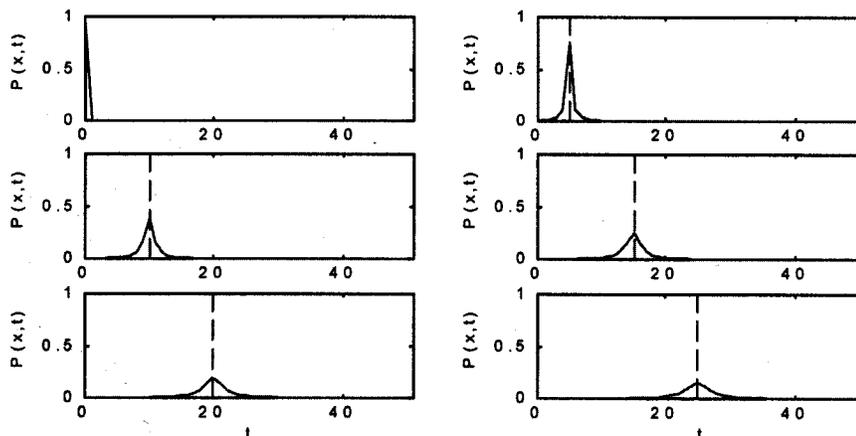


Figura 2.4 - Variação da forma do pulso  $p_1(x,t)$  para valores fixos de  $x$  (deslocamento) e  $Q_F = 60$ . Para  $x \rightarrow \infty$ ,  $p_1(x,t) \rightarrow 0$ .  $t = x/v_p$  é a posição do máximo valor da curva que tem a forma simétrica par, claramente não-causal, mostrando espalhamento para  $v$  constante.

### 2.3.2 – Atenuação com Dispersão

O objetivo agora é estabelecer causalidade, e para isto admitimos que  $v_p = v_p(\omega)$ , sendo o pulso nulo até o tempo de chegada  $x/v_\infty$ . O modelo é constituído por uma onda plana,  $\varphi(x,t)$ , com propagação na direção  $x$ , com  $\varphi(0,t) = 0$  para  $t < 0$ , e componentes Fourier,  $\varphi(x,\omega)$  para  $x > 0$ , dada por

$$\varphi(x,\omega) = \varphi(0,\omega)e^{ik(\omega)x}. \quad (2.18)$$

O número de onda'complexo,  $k=k(\omega)$ , é definido em termos da velocidade de fase  $v_p(\omega)$  e do fator de atenuação  $\alpha(\omega)$  na forma

$$k(\omega) = \omega/v_p(\omega) + i\alpha(\omega). \quad (2.19)$$

Para uma superposição linear

$$\varphi(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(0,\omega)e^{i[k(\omega)x - \omega t]} d\omega. \quad (2.20)$$

Isto é equivalente a convolução de  $\varphi(0,t)$  com

$$p_2(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega[k(\omega)x - \omega t]} d\omega, \quad (2.21)$$

$p_2(x,t)$  é a função atenuante, exemplificada na Figura 2.5. Sendo  $H[\ ]$  é a transformada de Hilbert, então,

$$\frac{\omega}{v_p(\omega)} = \frac{\omega}{v_\infty} + H[\alpha(\omega)], \quad (2.22)$$

onde

$$\alpha(\omega) = \frac{\omega}{2v_p(\omega)Q_F}, \quad \text{ou} \quad \frac{\omega}{v_p(\omega)} = 2Q_F\alpha(\omega), \quad (2.23, 2.24)$$

o que requer

$$\frac{\omega}{v_\infty} + H[\alpha(\omega)] = 2Q_F\alpha(\omega). \quad (2.25)$$

Esta condição é somente satisfeita para  $Q_F = Q_F(\omega)$ , que varia lentamente ao redor da frequência de interesse, neste caso 60 Hz.

Na próxima seção descrevemos o espalhamento do pulso tempo-variante resultante da convolução de um pulso original com efeito atenuante e dispersivo.

### 2.3.3 – Pulso Tempo-variante

O pulso considerado é descrito como a função Berlage dada por Aldridge (1990)

$$u(t) = Ad(t)t^n e^{-t} \cos(2\pi f_0 t + \phi_0), \quad (2.26)$$

onde  $n=1$ ,  $f_0 = 32,5$ ,  $\phi_0 = 30$ ,  $A=1$  e  $d(t)$  é a função degrau-simples. A ilustração é na Figura 2.6a e a Figura 2.6b é o seu espectro de amplitude.

O pulso-fonte tempo-variante é dado como resultado da convolução de  $p(x,t)$ ,  $p_1(x,t)$  ou  $p_2(x,t)$ , com uma função temporal,  $u(t)$ , segundo a expressão

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau,t) p(x,t-\tau) d\tau. \quad (2.27)$$

A Figura 2.7 ilustra o resultado da convolução do pulso tempo-variante com atenuação e a Figura 2.8 com atenuação e dispersão, mostrando a deformação do pulso-fonte para diferentes posições  $x$  com suas variações temporais, que serão utilizadas na deconvolução impulso e no operador de predição propostos neste trabalho.

As equações que representam o modelo do traço sísmico são:

$$s(t) = r(t) * u(x,t) \quad \text{e} \quad z(t) = r(t) * u(x,t) + v(t). \quad (2.28, 2.29)$$

onde  $r(t)$  é a função refletividade com ou sem múltiplas, que por convolução com o pulso-fonte tempo-variante,  $u(x,t)$ , gera uma resposta transiente,  $s(t)$ , sendo a ela adicionado um ruído aleatório,  $v(t)$  (Clarke, 1968).

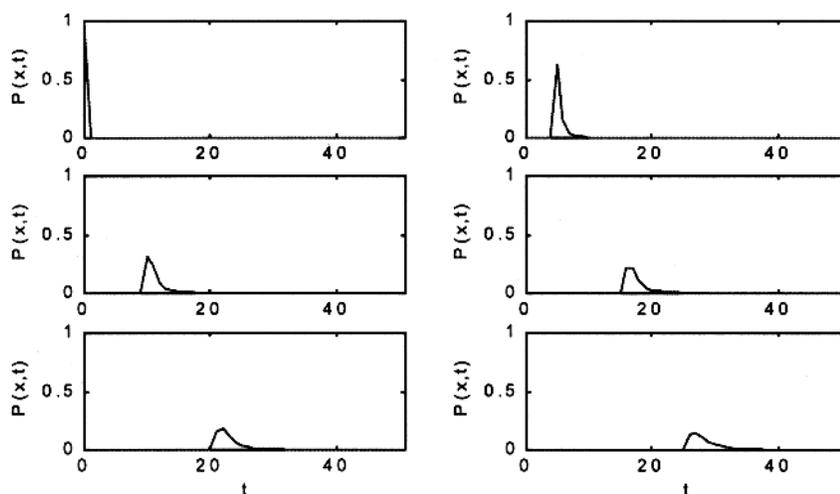


Figura 2.5 - Variação da forma de  $p(x,t)$  em diferentes posições  $x$  (deslocamento) e  $Q_F = 60$ . Para  $x \rightarrow \infty$ ,  $p_2(x,t) \rightarrow 0$ ;  $p_2(x,t) = 0$  para  $t < x/v_\infty$ .  $t = x/v_\infty$  é o máximo valor da função,  $p(x,t)$ , dispersiva com a propriedade especial importante de ser causal.

Figura 2.6 - (a) Função Berlage,  $u(t)$ . (b) Espectro de amplitude da função Berlage.

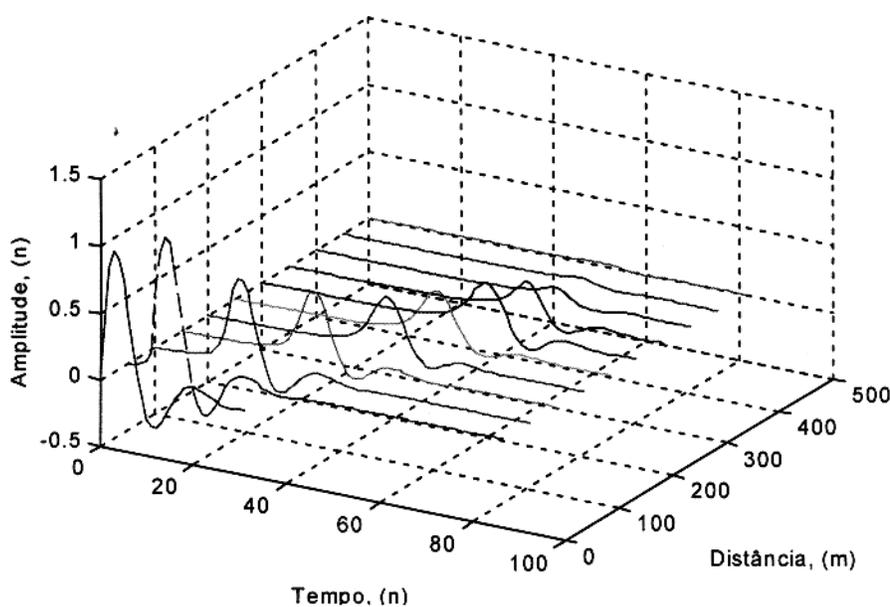
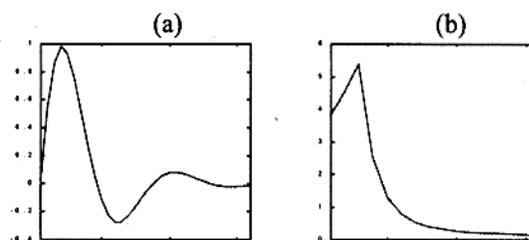


Figura 2.7 - Gráfico tempo-distância do efeito da atenuação intrínseca sobre o pulso-fonte (Berlage) para várias distâncias de propagação e variação temporal, demonstrado através do decaimento do sinal onde  $\nu \neq \nu(\omega)$  com a condição de não-dispersivo.

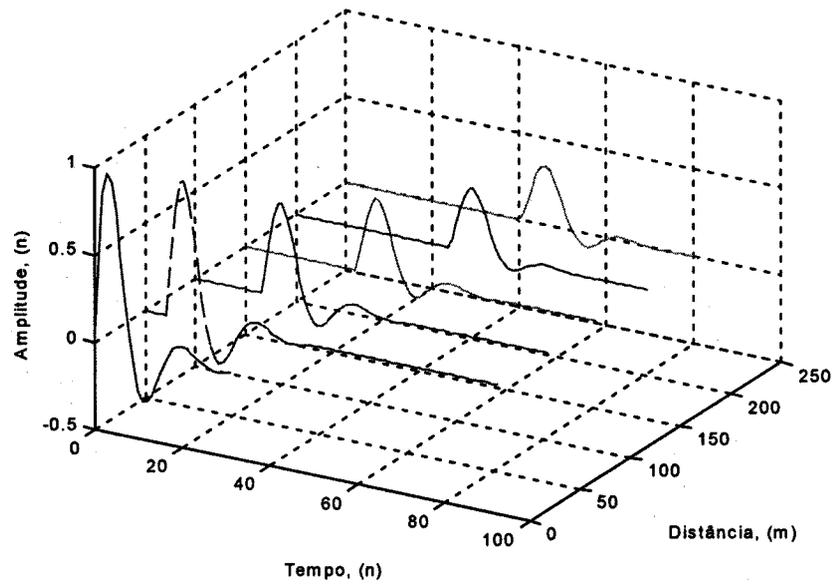


Figura 2.8 – Gráfico tempo-distância do efeito da atenuação intrínseca sobre o pulso-fonte (Berlage) para várias distâncias de propagação e variação temporal demonstrada através do decaimento do sinal.

### 3 – DECONVOLUÇÃO DE PROCESSOS NÃO-ESTACIONÁRIOS

#### 3.1 – O PROBLEMA WIENER – KOLMOGOROV

A descrição do problema Wiener-Kolmogorov inicia com o problema estacionário, onde o objetivo é obter a função filtro-ótimo invariante no tempo,  $h(t)$ , que opera sobre o sinal medido  $z(t)$ , e minimiza o erro médio-quadrático entre a saída real,  $\hat{x}(t)$ , e a saída desejada,  $x(t)$ . A função objeto de minimização é dada por

$$E\{h(t)\} = E\{[\hat{x}(t) - x(t)]^2\}, \quad (3.1)$$

que resulta nas equações normais entre os desvios e as observações,

$$E\{[\hat{x}(t) - x(t)]z(t)\} = 0. \quad (3.2)$$

A formulação básica da operação é dada através da integral

$$\hat{x}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} z(\tau)h(t - \tau)d\tau, \quad (3.3)$$

onde  $\hat{x}(t)$  é o sinal estimado,  $z(t)$  é a entrada e  $h(t)$  o filtro ótimo. É demonstrado, (Mendel, 1983), que a resposta do filtro ao impulso, invariante no tempo, satisfaz a equação de Wiener-Hopf

$$\phi_{xz}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\phi_{zz}(t - \tau)d\tau, \quad (3.4)$$

onde  $\phi_{xz}(t)$  e  $\phi_{zz}(t)$  são as funções correlação cruzada e autocorrelação estocásticas, e é considerado que  $z(t)$  seja sinal aleatório estacionário. A condição de ótimo estabelece uma condição *a priori* em que a distribuição que rege os dados é a Gaussiana. Para especificar o filtro Wiener-Hopf (FWH) é necessário resolver a equação integral acima, e a desvantagem para a deconvolução sísmica apresentada é a de pressupor a estacionariedade do processo, o que não satisfaz rigorosamente desta forma as características do problema em questão, que tem por descrição a não-estacionariedade. O conceito de estacionariedade utilizado é o

restrito, sendo, portanto, mais uma outra condição a priori, e isto significa que ela é definida sobre a espectância e sobre a covariância como sendo constantes no caso WH.

As generalizações do problema: (1) extensão à não-estacionariedade,  $h(t, \tau)$ ; (2) limitação da operação a uma janela móvel,  $t_0 \leq \tau \leq T$  e  $t_0 \leq \sigma \leq T$ ; e (3) forma matricial para multicanal. Estas condições não são satisfeitas pela integral da convolução, sendo a saída real,  $\hat{x}(t)$ , reescrita na forma de uma média-móvel de acordo com a teoria denominada de Wiener-Kolmogorov que estabelece a relação

$$\hat{x}(t) = \int_{t_0}^T \underline{h}(t, \tau) \underline{z}(\tau) d\tau. \quad (3.5)$$

De forma semelhante ao caso WH, esta integral é relacionada às correlações  $\phi_{=xz}(t, \sigma)$  e

$\phi_{=zz}(t, \sigma)$  através da equação

$$\phi_{=xz}(t, \sigma) = \int_{t_0}^T \underline{h}(t, \tau) \phi_{=zz}(\tau, \sigma) d\tau, \quad t_0 \leq \sigma \leq T. \quad (3.6)$$

A equação integral acima é do primeiro tipo, e ela representa as dificuldades inerentes à solução geral dos problemas de deconvolução e de inversão geofísica. Por outro lado, ela é útil na representação de processos aleatórios multidimensionais e não-estacionários, onde inclui observações finitas e estimativas tempo-variante. A solução festejada por Kalman & Bucy (1961) foi a conversão desta equação integral para equações diferenciais ordinárias lineares e não-lineares adaptáveis ao cálculo numérico, e fazemos uma apresentação resumida, a seguir.

## 3.2 - A SOLUÇÃO KALMAN - BUCY

### 3.2.1 - Forma Contínua e Discretizada

A solução do problema (3.5 e 3.6) é iniciada com uma equação diferencial ordinária de ordem  $N-1$  que expressa a relação entre a entrada e a saída de um sistema, dada por

$$\sum_{n=1}^{N-1} a_n(t) \frac{d^n y(t)}{dt^n} = w(t), \quad (a_1 = 1). \quad (3.7)$$

A transformação para variáveis de estado  $x_n(t)$  e  $\dot{x}_n(t)$  é feita substituindo as derivadas de  $y(t)$  ordem superior segundo a regra:

$$x_1 = y, x_2 = \dot{y}, x_3 = \ddot{y}, \dots, x_N = y^{(N-1)}, \quad (3.8)$$

$$\dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = x_3, \dot{x}_3 = x_4, \dots, \dot{x}_{n-1} = x_n, \quad (3.9)$$

$$\dot{x}_n = -(a_n x_1 + a_{n-1} x_2 + \dots + a_1 x_n) + w. \quad (3.10)$$

A mudança de variáveis resulta nas equações dinâmicas de estado escritas abaixo no caso mais geral que é a contínua, tempo-variante:

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{F}(t)\underline{x}(t) + \underline{G}(t)\underline{w}(t), \quad (\text{sistema}), \quad (3.11)$$

$$\underline{z}(t) = \underline{H}(t)\underline{x}(t) + \underline{v}(t), \quad (\text{medidas}). \quad (3.12)$$

onde o vetor  $\underline{x}(t)$  é a função variável de estado e as matrizes  $\underline{F}(t)$ ,  $\underline{G}(t)$  e  $\underline{H}(t)$  são funções de  $t$ ; o vetor  $\underline{w}(t)$  é a função de geração do estado (sinal); e o vetor  $\underline{z}(t)$  é função da saída selecionada através de  $\underline{H}(t)$ ; o vetor  $\underline{v}(t)$  é o ruído aditivo ao processo (OGATA, 1990).

No desenvolvimento da solução Kalman-Bucy é necessário definir as propriedades estocásticas a priori para os processos  $\underline{z}(t)$ , através da autocorrelação e da correlação cruzada estocástica entre as componentes dos vetores  $\underline{w}(t)$  e  $\underline{v}(t)$ . As condições a priori são de série branca e de correlação cruzada nula na janela da definição da integral, e elas são, para  $t$  e  $\tau$  fixos, escritas na forma:

$$E\{\underline{w}(t) = 0\}, \quad \phi_{\underline{ww}}(t, \tau) = E\{\underline{w}(t)\underline{w}^T(\tau)\} = E\{w_i(t)w_j(\tau)\} = \delta_{ij}Q_j(t)\delta(t - \tau), \quad (3.13)$$

$$E\{\underline{v}(t) = 0\}, \quad \phi_{\underline{vv}}(t, \tau) = E\{\underline{v}(t)\underline{v}^T(\tau)\} = E\{v_i(t)v_j(\tau)\} = \delta_{ij}R_j(t)\delta(t - \tau), \quad (3.14)$$

$$\phi_{\underline{wz}}(t, \tau) = E\{\underline{w}(t)\underline{z}^T(\tau)\} = 0, \quad \phi_{\underline{vw}}(t, \tau) = E\{\underline{w}(t)\underline{v}^T(\tau)\} = 0, \quad (3.15)$$

$$\phi_{\underline{xv}}(t, \tau) = E\{\underline{x}(t)\underline{v}^T(\tau)\} = 0, \quad \phi_{\underline{wx}}(t, \tau) = E\{\underline{w}(t)\underline{x}^T(\tau)\} = 0. \quad (3.16)$$

O uso da nomenclatura  $\phi(t, \tau)$  implica em que  $t$  e  $\tau$  são as variáveis independentes de integração e de deslocamento.  $\delta_{ij}$  indica que as componentes são não correlacionadas.  $\delta(t)$  é a distribuição delta de Dirac que multiplicado por  $\underline{Q}(t)$  e  $\underline{R}(t)$  define matrizes diagonais para as matrizes autocorrelações dos canais como condições *a priori*.

O longo algebrismo para mostrar as relações entre as equações integrais WH generalizadas, as equações de estado e as premissas estocásticas e que resultam na

transformação para equações diferenciais lineares e não-lineares apropriadas ao cálculo numérico foram analisadas, como por exemplo, em Rocha (1998), e transferida para o Apêndice A. A solução na forma contínua está aqui resumida na Tabela 3.1, e a Tabela 3.2 contém a forma discretizada.

Tabela 3.1 - Equações dinâmicas matriciais do filtro Kalman-Bucy (FKB) na forma contínua.

Sistema	$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{F}(t)\underline{x}(t) + \underline{G}(t)\underline{w}(t)$
Medida	$\underline{z}(t) = \underline{H}(t)\underline{x}(t) + \underline{v}(t)$
Condições Iniciais	$E\{\underline{x}(0)\} = \hat{\underline{x}}_0, E\{(\underline{x}(0) - \hat{\underline{x}}_0)(\underline{x}(0) - \hat{\underline{x}}_0)^T\} = P_0$
Estimativa do Estado	$\dot{\hat{\underline{x}}}(t) = \underline{F}(t)\hat{\underline{x}}(t) + \underline{K}(t)[\underline{z}(t) - \underline{H}(t)\hat{\underline{x}}(t)]$
Covariância do erro (Equação de Ricatti)	$\dot{\underline{P}}(t) = \underline{F}(t)\underline{P}(t) + \underline{P}(t)\underline{F}^T(t) + \underline{G}(t)\underline{Q}(t)\underline{G}^T(t) - \underline{K}(t)\underline{R}(t)\underline{K}^T(t)$
Matriz Ganho	$\underline{K}(t) = \underline{P}(t)\underline{H}^T(t)\underline{R}^{-1} = [\underline{P}(t)\underline{H}^T(t) + \underline{G}(t)\underline{H}(t)]\underline{R}^{-1}(t)$

Tabela 3.2 - Equações dinâmicas matriciais do filtro Kalman-Bucy (FKB) na forma discretizada.

Sistema	$\underline{x}_{k+1} = \underline{\Phi}_k \underline{x}_k + \underline{w}_k$
Medidas	$\underline{z}_{k+1} = \underline{H}_{k+1} \underline{x}_{k+1} + \underline{v}_k$
Condições iniciais	$E\{\underline{x}(0)\} = \hat{\underline{x}}_0, E\{(\underline{x}(0) - \hat{\underline{x}}_0)(\underline{x}(0) - \hat{\underline{x}}_0)^T\} = P_0$
Extrapolção da estimativa do estado	$\hat{\underline{x}}_{k+1}(-) = \underline{\Phi}_k \hat{\underline{x}}_k(+)$
Extrapolção da covariância do erro	$\underline{P}_{k+1}(-) = \underline{\Phi}_k \underline{P}_k(+) \underline{\Phi}_k^T + \underline{Q}_k$
Estimativa do estado atualizado	$\hat{\underline{x}}_{k+1}(+) = \hat{\underline{x}}_{k+1}(-) + \underline{K}_{k+1} [\underline{z}_{k+1} - \underline{H}_{k+1} \hat{\underline{x}}_{k+1}(-)]$
Covariância do erro atualizado	$\underline{P}_{k+1}(+) = [\underline{I} - \underline{K}_{k+1} \underline{H}_{k+1}] \underline{P}_{k+1}(-)$
Matriz de ganho	$\underline{K}_{k+1} = \underline{P}_{k+1}(-) \underline{H}_{k+1}^T [\underline{H}_{k+1} \underline{P}_{k+1}(-) \underline{H}_{k+1}^T + \underline{R}_{k+1}]^{-1}$

A Figura 3.1 ilustra os modelos matemáticos do sistema de estado e de medida propostos, e o processo de estimativa do sinal desejado em meio a ruído. Na Figura 3.2 temos o diagrama de bloco computacional do processo de cálculos.

A aplicação do método Kalman-Bucy em um sismograma com ruído,  $\underline{z}(t)$ , consiste de uma seqüência de operações ponto-a-ponto. Esta seqüência é descrita em 6 etapas a seguir.

(1) Inicia com a definição das condições de partida

$$P(0) = P_0, \quad \hat{x}(0) = x_0. \quad (3.17)$$

(2) Cálculo da matriz  $P^+(k)$ ,

$$\underline{\underline{P}}^+(k) = \underline{\underline{\Phi}}(k, k-1) \underline{\underline{P}}^-(k-1) \underline{\underline{\Phi}}^T(k, k-1) + \underline{\underline{Q}}(k-1). \quad (3.18)$$

(3) Cálculo da matriz ganho  $K(k)$ ,

$$\underline{\underline{K}}(k) = \underline{\underline{P}}^+(k) \underline{\underline{H}}^T(k) \left\{ \underline{\underline{H}}(k) \underline{\underline{P}}^+(k) \underline{\underline{H}}^T(k) + \underline{\underline{R}}(k) \right\}^{-1} \quad (3.19)$$

(4) Cálculo da estimativa do vetor de estado,

$$\hat{x}^-(k) = \hat{x}^+(k) + \underline{\underline{K}}(k) [z^-(k) - z^+(k)], \quad (3.20)$$

onde

$$\hat{x}^+(k) = \underline{\underline{\Phi}}(k, k-1) \hat{x}^-(k-1) \quad \text{e} \quad z^+(k) = \underline{\underline{H}}(k) \hat{x}^+(k) \quad (3.21)$$

(5) Cálculo da matriz  $P^-(k)$

$$\underline{\underline{P}}^-(k) = \underline{\underline{P}}^+(k) - \underline{\underline{K}}(k) \underline{\underline{H}}(k) \underline{\underline{P}}^+(k). \quad (3.22)$$

(6) Iteração para uma nova amostra,  $k+1$ , e retorno ao segundo estágio como mostra a Figura 3.3.

Na próxima seção descrevemos a estrutura da deconvolução ao impulso, descrevendo as variáveis pertinentes ao processo, as condições a priori e o método utilizado para a estimativa do pulso.

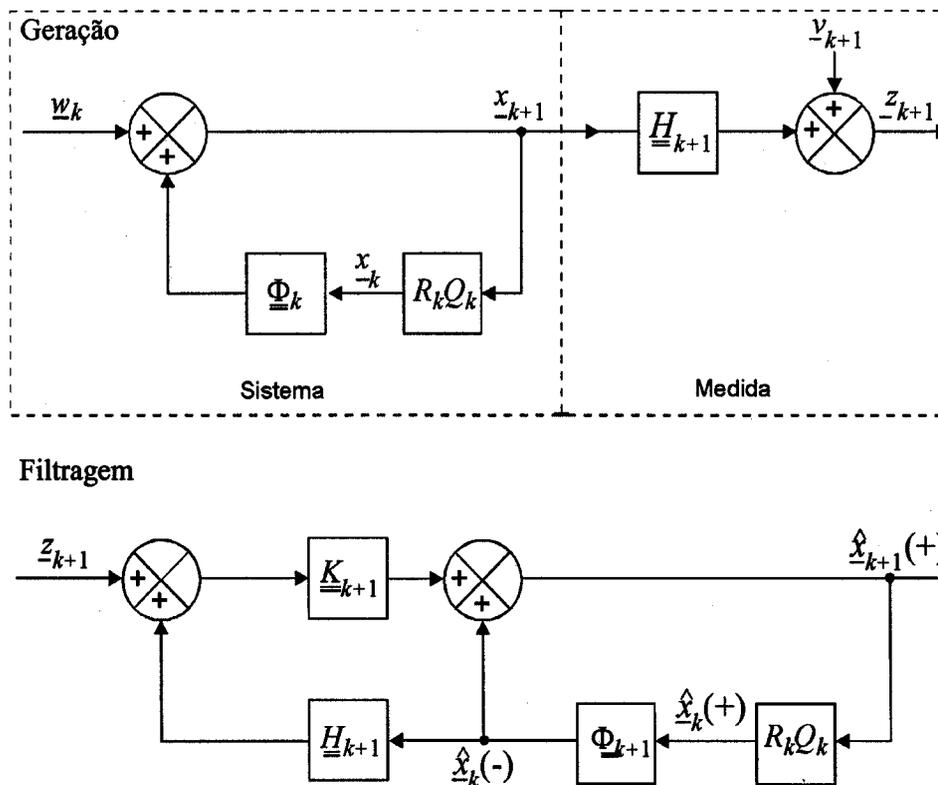


Figura 3.1 – Representação do processo do filtro Kalman-Bucy na forma de diagrama de blocos onde:  $Q_k = Cov\{w_k\}$ ,  $E\{w_k\} = 0$ ,  $R_k = Cov\{v_k\}$  e  $E\{v_k\} = 0$ .  
 A parte superior mostra os modelos matemáticos do sistema de estado e de medidas. A parte inferior mostra o processo de estimativa do sinal desejado em meio a ruído. A parte superior é a geração do sinal, e a parte inferior é a de filtragem.

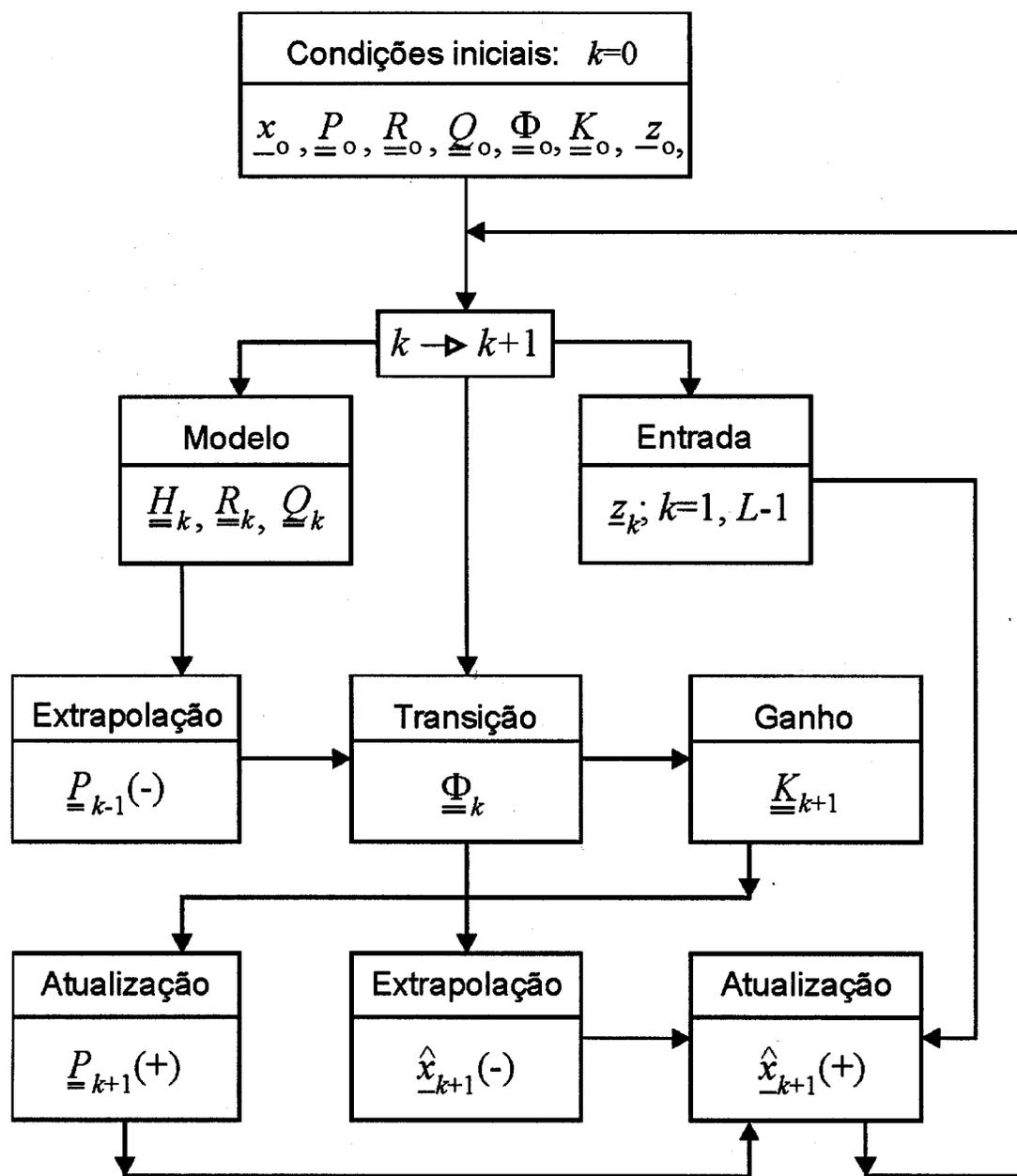


Figura 3.2 - Diagrama de bloco do processo de filtragem para as equações de Riccati, definida no Apêndice A, e de ganho mostrando as etapas para o cálculo da estimativa do estado. A condição inicial para cada evento é definido em  $k = 0$ .

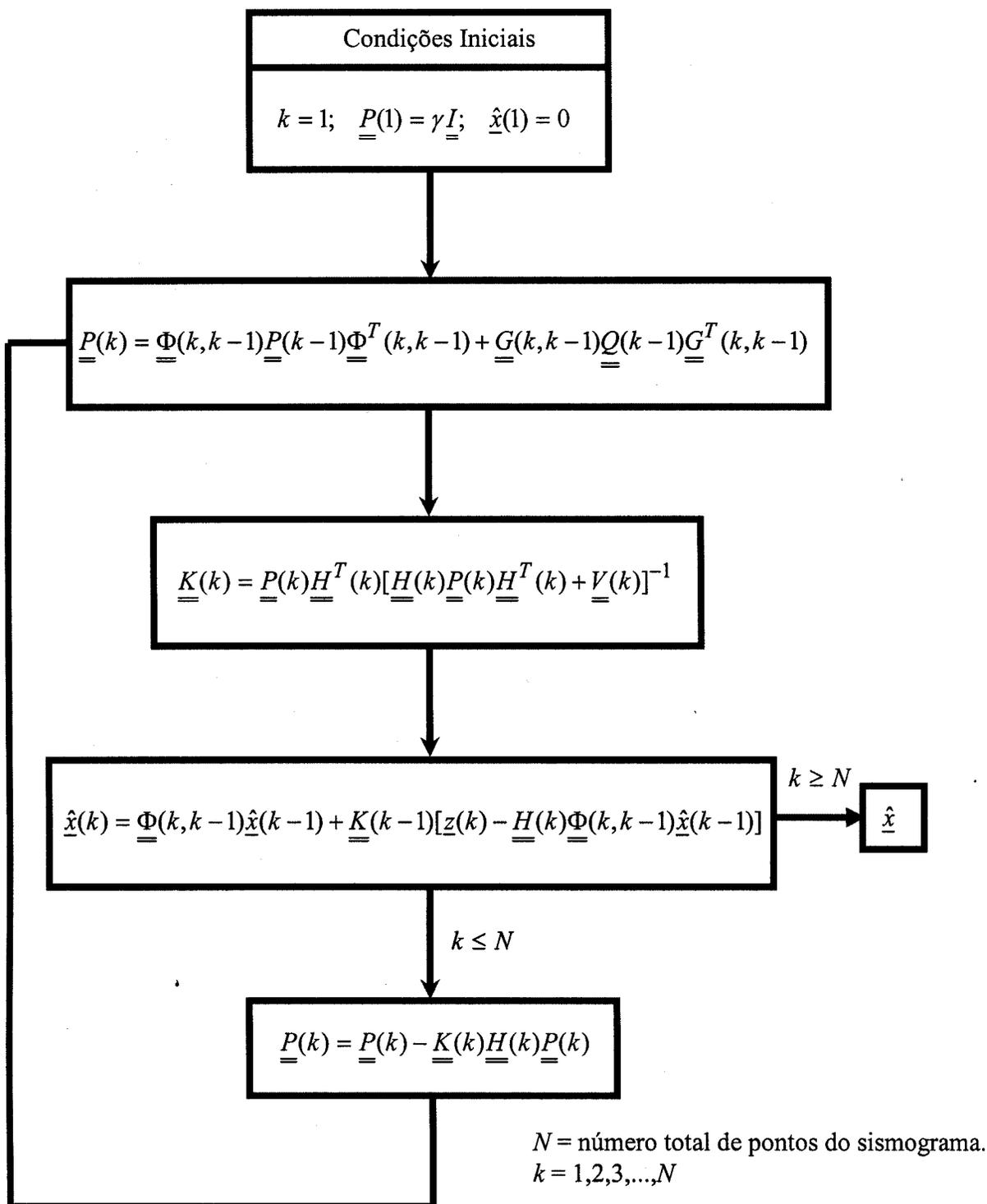


Figura 3.3 – Diagrama de blocos utilizado no cálculo da deconvolução ao impulso KB.

onde  $w(k)$  é um processo estocástico branco já definido anteriormente, e ele representa a geração do estado  $r(k)$ . Esta equação extrapola os coeficientes  $r(k)$  através dos  $L$  coeficientes anteriores. No entanto, esta forma não tem um significado físico, sendo necessário definir os coeficientes  $b_i(k)$  através de estratégias especiais. Nas primeiras simulações aqui realizadas, os valores de  $b(k)$  foram escolhidos a partir de uma seqüência de experimentos, e considerados inicialmente constante e igual a  $1/40$ . Em seguida foi incluído um modelo direto no processo, como o do tipo Goupillaud, para ser usado na extrapolação de valores  $b_i(k)$ , o que representa o elo com a teoria de propagação de ondas elásticas.

(5) A equação de estado 4.5 escrita na forma matricial é:

$$r(k) = \Phi(k, k-1)r(k-1) + w(k-1), \quad (\text{sistema}), \quad (4.6)$$

onde

$$\Phi(k, k-1) = \begin{bmatrix} b_1(k-1) & b_2(k-1) & b_3(k-1) & \dots & b_L(k-1) \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.7)$$

As equações acima (4.5 e 4.6) constituem as equações de estado do sistema dinâmico para o modelo convolucional.

(6) A matriz de covariância do erro,  $P(k)$ , é definida como uma matriz identidade para iniciar o processo.

(7) A matriz diagonal  $R_{nk} = E\{v(n)v^T(k)\} = \delta_{nk}R(k)$  representa a variância do ruído associado com a saída do processo, e é uma informação a priori. De forma prática, podemos estimar  $R(k)$  diretamente com a análise de ruído no sismograma.

(8) A matriz diagonal  $Q(k) = E\{w(n)w^T(k)\}$  representa a variância da componente aleatória associada com o processo de geração dos coeficientes de reflexão.

(9) Para completar as etapas é ainda necessário informar o pulso-fonte efetivo. Neste caso, ele é admitido como sendo de fase-mínima, e estimado a partir da autocorrelação de janelas do sismograma e da aplicação da transformada de Hilbert (TH). O fluxograma deste cálculo numérico é descrito em mais outras 6 etapas descritas imediatamente abaixo.

(a) A autocorrelação  $\phi_{zz}(\tau)$  é calculada em janelas especificadas.

(b) A transformada de Fourier (TF) é aplicada a  $\phi_{zz}(\tau)$ :  $\Phi_{zz}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{zz}(\tau) e^{-i2\pi f\tau} d\tau$ .

(c) O logaritmo natural de  $A(f) = \sqrt{\Phi_{zz}(f)}$  é calculado para formar  $\ln A(f)$ .

(d) A fase do pulso de fase-mínima é calculada pela TH:  $\theta(f) = \frac{-1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln A(f')}{f - f'} df'$ .

(e) O pulso-fonte efetivo é composto por:  $U(f) = A(f) e^{i\theta(f)}$ .

(f) A TF inversa gera o pulso-efetivo:  $u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(f) e^{i2\pi ft} df$ .

## 4.1 – APLICAÇÃO A DADOS SINTÉTICOS

### 4.1.1 – Resposta ao Impulso Sem Múltiplas

Nesta seção aplicamos o método de deconvolução ao impulso no modelo geofísico descrito no início do capítulo 2.

A Figura 4.1 contém a função refletividade-simples em duas formas: uma sem ruído, e a outra com ruído geológico aleatório. A Figura 4.2 contém o pulso-fonte original usado para gerar os sismogramas através da convolução linear com as funções refletividade e, neste exercício, ele tem a propriedade, mas não restritiva, de ser de fase-mínima. As outras duas partes da Figura 4.2 contém os pulsos-efetivos para deconvolução, como extraídos dos sismogramas pela transformada de Hilbert e pela deconvolução homomórfica.

A Figura 4.3 contém sismogramas escolhidos para exemplificar a performance do FKBD na presença de três níveis diferentes de ruído como informados nas Figuras. O valor da relação sinal/ruído ( $S/R$ ) foi calculado pela razão simples das variâncias segundo a equação

$$S/R = 1/N \sum_{i=1}^N (g_i - \bar{g})^2 \bigg/ 1/N \sum_{i=1}^N (r_i - \bar{r})^2, \quad (4.8)$$

onde  $\bar{g}$  e  $\bar{r}$  são as médias aritméticas simples.

Como o processo requer o conhecimento do pulso-fonte efetivo, montamos três casos distintos de pulsos deconvolutivos para comparação. O primeiro caso considera o sinal-fonte original, com os resultados mostrados na Figura 4.4(a, b, c) para os três níveis de ruído. O segundo caso considera o sinal-fonte estimado pela TH (Figura 4.2), com os resultados

mostrados na Figura 4.5(a, b, c) repetido para os três níveis de ruídos. O terceiro caso considera o sinal-fonte estimado pela deconvolução homomórfica (Gomes, 1998), com os resultados mostrados na Figura 4.6(a, b, c) também para os três níveis de ruído. Observamos em todos estes exemplos que o FKBD realiza bem a compressão do pulso sísmico, e que ele apresenta uma perda de resolução com o aumento de ruído no sismograma, o que é coerente.

A Figura 4.7 é um exemplo selecionado para mostrar o efeito do FKBD nos espectros de amplitudes dos sinais de entrada, de saída e a sua função transferência, sendo todos eles referentes ao sismograma com a  $S/R=99,86$ . Observamos que o FKBD age muito bem caracterizado como um filtro de ganho linear ascendente em direção das altas frequências. Estas observações sugerem a aplicação de um filtro equalizador, e para isto selecionamos o passa-baixa de Ormsby (Leite, 1998) antes do FKBD, com a finalidade de atenuar as altas frequências. Esta aplicação resulta num aumento de qualidade da resolução da saída do FKBD como pode ser visto na Figura 4.8.

Além da avaliação de qualidade visual, optamos em utilizar a medida de coerência espectral entre dois canais de sinal para analisar a saída do FKBD com relação a entrada, uma vez que este conceito tem por base a correlação cruzada. Um resultado típico é mostrado nas Figuras 4.9 e 4.10, com o sismograma ruidoso sendo um dos canais, e a refletividade recuperada como sendo o outro canal. As medidas de coerência espectrais complexas são calculadas pela seguinte expressão

$$C(A,B)_k = \frac{1}{2M+1} \sum_{m=k-M}^{k+M} \frac{A_m B_m^*}{\sqrt{A_m A_m^*} \sqrt{B_m B_m^*}}, \quad 0 \leq C(A,B)_k \leq 1. \quad (4.9)$$

$A_m$  e  $B_m$  são as transformadas de Fourier dos canais, e  $A^*$  e  $B^*$  são os seus respectivos complexos conjugados. Desta função são calculadas a amplitude e a fase, dados respectivamente por

$$A_C(k) = \sqrt{C(k)C^*(k)} \quad \text{e} \quad \phi_C(k) = \arctan[\text{Im}(C)/\text{Re}(C)]. \quad (4.10)$$

Esta medida estabelece o limite máximo da potência comum quando os dois sinais estão perfeitamente coerentes em fase numa determinada frequência. A amplitude e a fase variam teoricamente de forma aleatória (Leite, 1998).

Para analisarmos a aplicabilidade da função coerência descrita acima, geramos 180 sismogramas variando a razão  $S/R$ , processamos com o FKBD, e em seguida calculamos  $A_C(k)$  e  $\phi_C(k)$  para cada par entrada-saída. Observamos nas Figuras 4.9 e 4.10 que o fator de coerência é bastante oscilatório na faixa de alto ruído (baixo  $S/R$ ), enquanto que na faixa de

baixo ruído (alto  $S/R$ , entre 75 e 100), a amplitude e a fase tem uma resposta quase plana desejável, indicando que a razão  $S/R$  admissível nos dados é de no mínimo  $S/R=75$ . Este nível mínimo serve para medir a conservação da forma entre o sinal de saída com relação ao de entrada, o que é importante para caracterizar o processamento.

#### 4.1.1.1 – Conclusões Parciais

O método de deconvolução ao impulso (KBC) se comporta muito bem para este modelo, como medido pelo efeito de compressão do pulso-fonte. Demonstramos a importância de acoplar ao método o filtro Passa-baixa de Ormsby e analisar o fator de coerência, definindo assim a faixa admissível da  $S/R$ .

A seguir analisamos com o modelo que admite a existência das múltiplas internas, considerações estas desprezadas nesta seção.

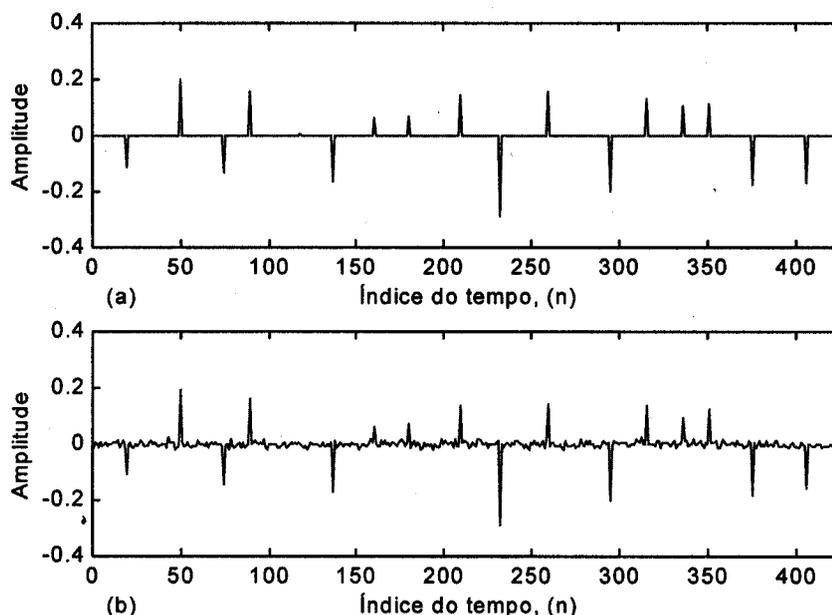


Figura 4.1 – (Em cima) Função refletividade-simples (aleatória) sem ruído. (Em baixo) Função refletividade-simples com ruído aditivo. O significado físico para esta distribuição é fundamentada no modelo de Poisson-Gaussiano e no ganho dinâmico do traço.

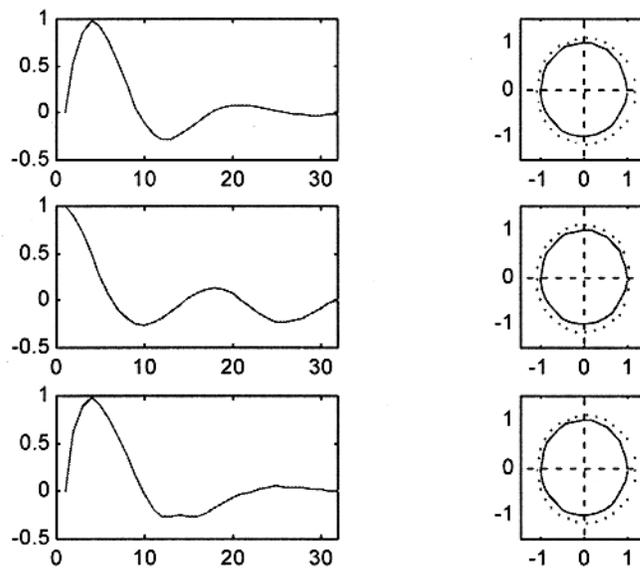


Figura 4.2. Na coluna esquerda estão os pulsos-fontes, e na coluna da direita as correspondentes raízes da TZ para mostrar a condição de fase, que em todos os casos são de fase-mínima. (Em cima) Pulso-fonte original. (Meio) Pulso-fonte estimado pela TH. (Em baixo) Pulso-fonte estimado pela deconvolução homomórfica.

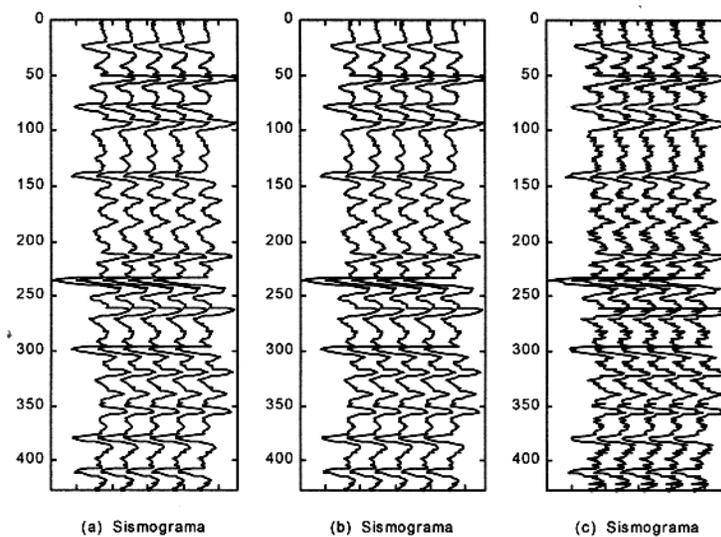


Figura 4.3. Sismogramas sintéticos gerados com o pulso-fonte original e com a refletividade contendo diferentes frações dos ruídos aditivos geológico e local. (a)  $S/R=99,98$ . (b)  $S/R=47,56$ . (c)  $S/R=11,72$ . Os traços estão repetidos 5 vezes para provocar o efeito visual de correlação lateral traço-a-traço.

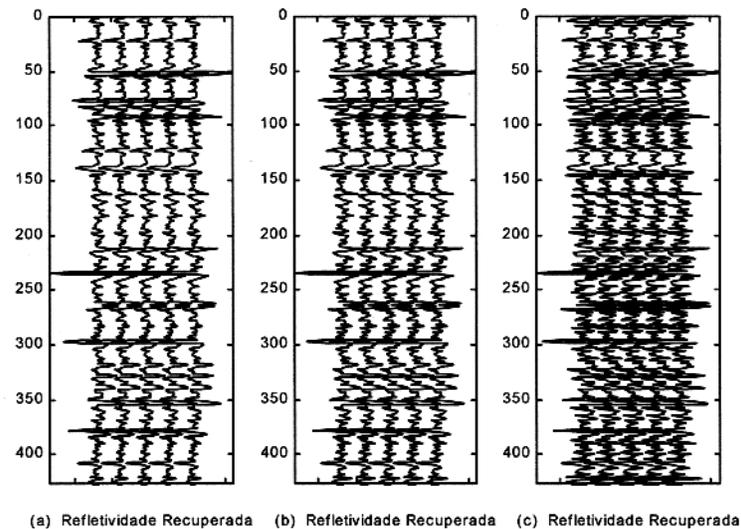


Figura 4.4. Refletividade extraída dos sismogramas da Figura 4.3 através do pulso-fonte original. Estes resultados servem de referência para análise geral do método e para os outros resultados apresentados nas Figuras 4.5 e 4.6. A seqüência de ruídos em (a), (b) e (c) corresponde a mesma da Figura 4.3. Observamos os efeitos da deconvolução na compressão do pulso, e na amplificação crescente do nível de ruído de (a) para (c).

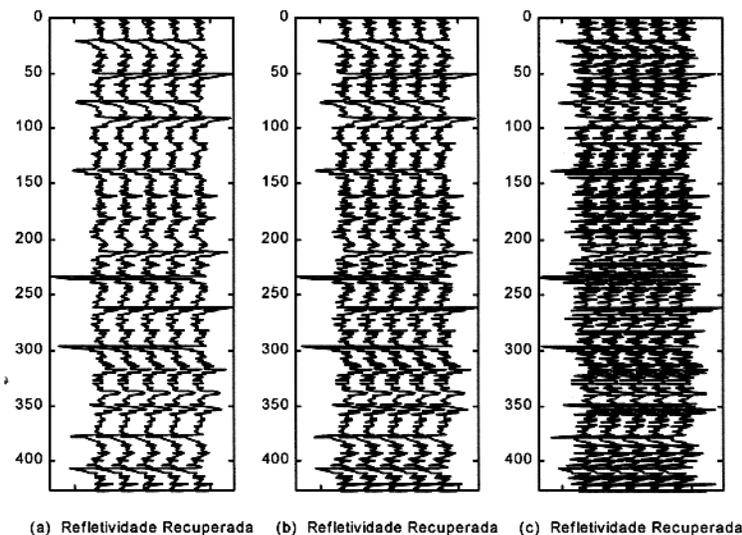


Figura 4.5. Refletividade extraída dos sismogramas da Figura 4.3 através do pulso-fonte efetivo estimado com a TH da Figura 4.2. Estes resultados devem ser comparados aos outros apresentados nas Figuras 4.4 e 4.6, em termos de resolução e amplificação de ruído. A seqüência (a), (b) e (c) corresponde à mesma da Figura 4.3.

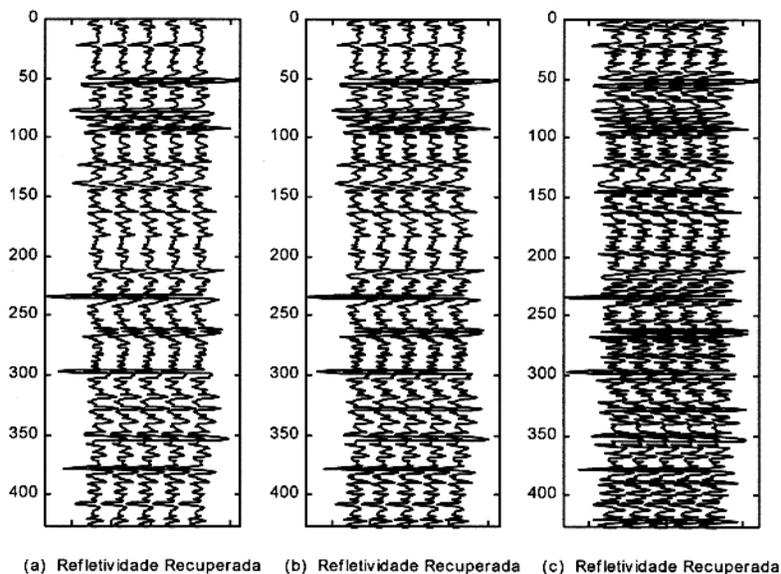


Figura 4.6. Refletividade extraída dos sismogramas da Figura 4.3 através do pulso-fonte efetivo estimado através da deconvolução homomórfica dado na Figura 4.2. Estes resultados devem ser comparados aos outros apresentados nas Figuras 4.4 e 4.5, em termos de resolução e amplificação de ruído. A seqüência (a), (b) e (c) corresponde à mesma da Figura 4.3.

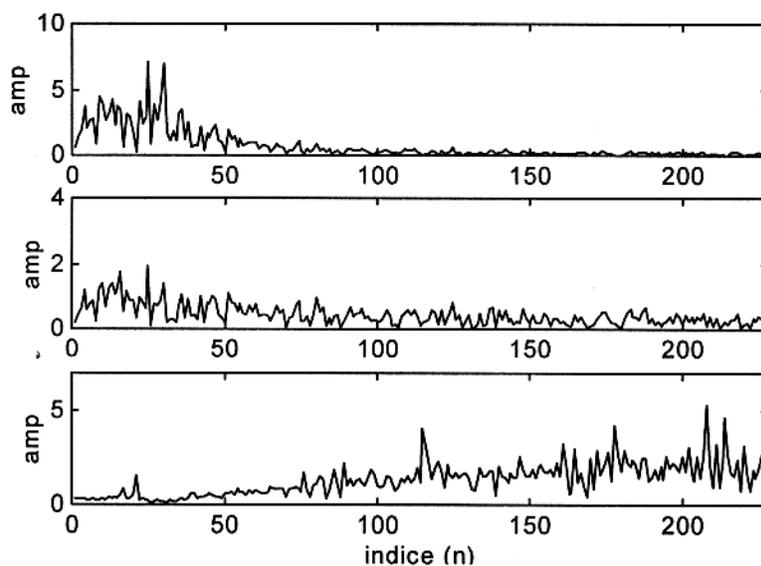


Figura 4.7. Exemplo comparativo dos espectros envolvidos com o FKBD, tendo sido usado o sismograma (a) da Figura 4.3 ( $S/R=99,86$ ). (Em cima) Espectro de amplitude da entrada ao FKBD. (No meio) Espectro de amplitude da saída do FKBD. (Em baixo) Espectro de amplitude da função transferência do FKBD, onde observamos a tendência linear crescente da amplificação.

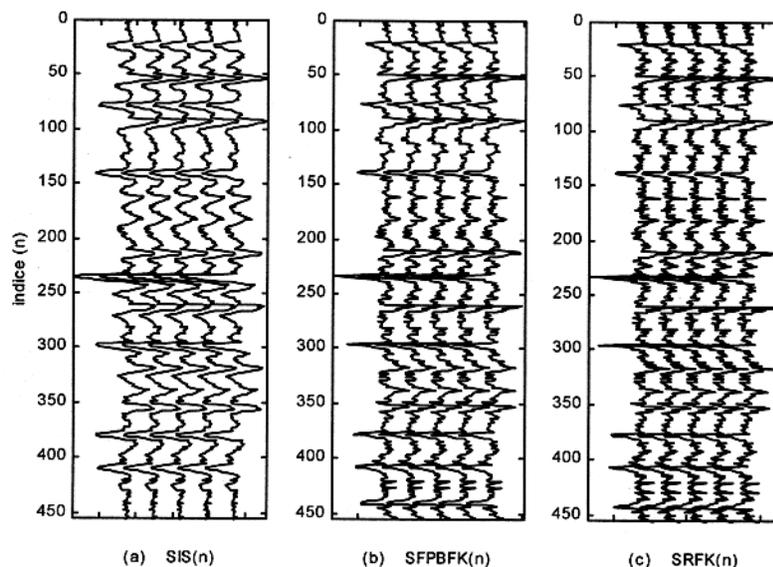


Figura 4.8. Exemplo comparativo do efeito do equalizador passa-baixa de Ormsby na saída do FKBD, tendo sido usado o sismograma (b) da Figura 4.3 ( $S/R=47,56$ ). (Esquerda) Sismograma ruidoso. (Centro) Sismograma processado pelo FKBD após o passa-baixa equalizador. (Direita) Sismograma processado pelo FKBD sem o passa-baixa equalizador. O resultado do centro tem um foco melhor, e demonstra a utilidade do equalizador.

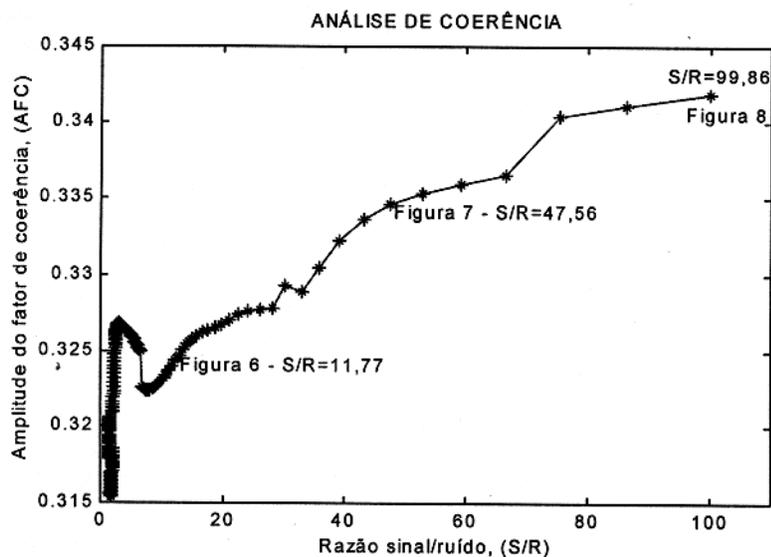


Figura 4.9. Espectro de amplitude do fator de coerência medido entre os canais de entrada (sismograma ruidoso) e o de saída (refletividade recuperada) pelo FKBD. A instabilidade aumenta ao passo que a razão  $S/R$  diminui. A estabilidade é clara acima de  $S/R=75$  e, juntamente com a curva de fase (FFC), informam as limitações da operação de deconvolução com a presença de ruído.

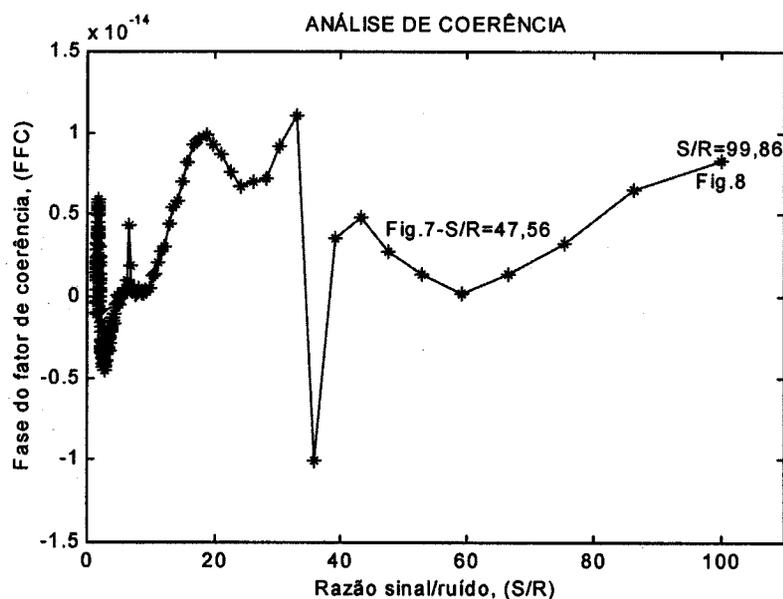


Figura 4.10. Espectro de fase do fator de coerência entre os canais de entrada (sismograma ruidoso) e de saída (refletividade recuperada) do FKBD. A instabilidade ocorre ao passo que a razão  $S/R$  diminui. A estabilidade é clara acima de  $S/R=75$  e, juntamente com a curva de amplitude (AFC), informam as limitações da deconvolução com a presença de ruído.

#### 4.1.2 – Resposta ao Impulso Com Múltiplas

Nesta seção aplicamos o método KB de deconvolução ao impulso no modelo geofísico descrito na seção 2.2.

A Figura 4.11 contém a distribuição dos coeficientes de reflexão sísmica e a função refletividade-completa gerada a partir desta distribuição. O pulso-fonte original utilizado para gerar os sismogramas é o mesmo descrito na seção 4.1.1. Nestes exemplos, optamos em utilizar a transformada de Hilbert para extrair dos sismogramas o pulso-efetivo para a deconvolução.

A Figura 4.12 contém os sismogramas escolhidos para exemplificar a performance do Filtro Kalman-Bucy de deconvolução (FKBD) na presença de três níveis diferentes de ruídos como informados nas Figuras. O valor da razão sinal/ruído ( $S/R$ ) foi calculado da mesma forma que na seção 4.1.1, ou seja, através da equação 4.8. Na Figura 4.13 apresentamos o resultado da deconvolução.

Na Figura 4.14 apresentamos os espectros de amplitudes dos sinais de entrada, de saída e a função transferência para o sismograma com a  $S/R$  igual à 95,84. Observamos

novamente que o FKBD age como um filtro de ganho linear ascendente em direção as altas frequências. Na Figura 4.15 mostramos os resultados da deconvolução utilizando o filtro passa-baixa antes do FKBD.

#### 4.1.2.1 – Conclusões Parciais

Neste modelo geofísico o método consegue seu objetivo que é a compressão do pulso-fonte. Demonstramos novamente com este modelo a necessidade de um filtro equalizador passa-baixa de Ormsby.

Na próxima seção analisamos os modelos anelásticos.

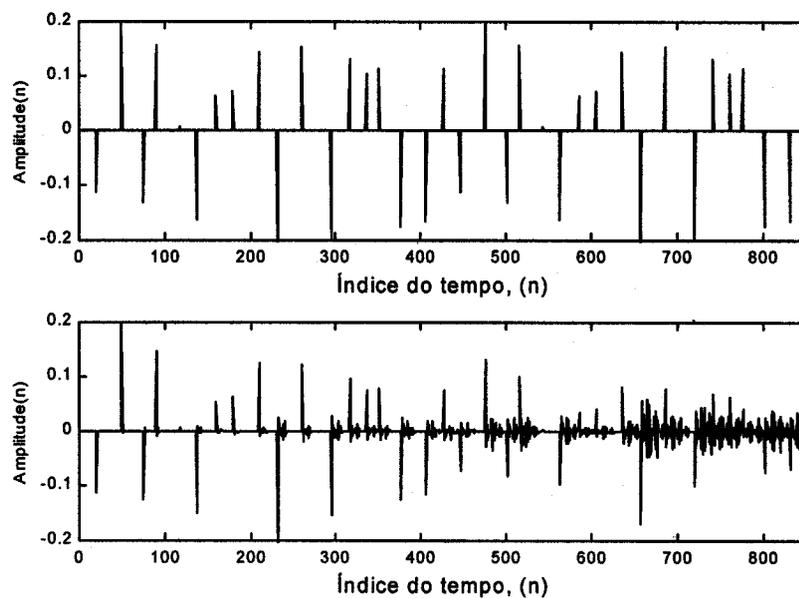


Figura 4.11 – (Em cima) Função refletividade-simples (aleatória) sem ruído. (Em baixo) Função refletividade-completa. O significado físico para esta distribuição é fundamentado no modelo de Goupillaud, onde observamos o decaimento da resposta ao impulso.

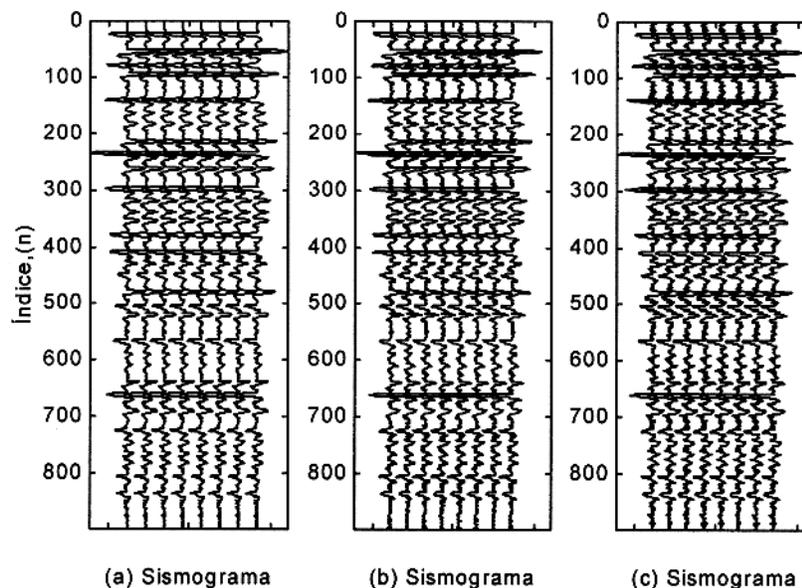


Figura 4.12. Sismogramas sintéticos gerados com o pulso-fonte original e com a refletividade contendo diferentes frações dos ruídos aditivos geológico e local. (a)  $S/R=95,84$ . (b)  $S/R=39,21$ . (c)  $S/R=18,57$ . Os traços estão repetidos 8 vezes para provocar o efeito visual de correlação lateral traço-a-traço.

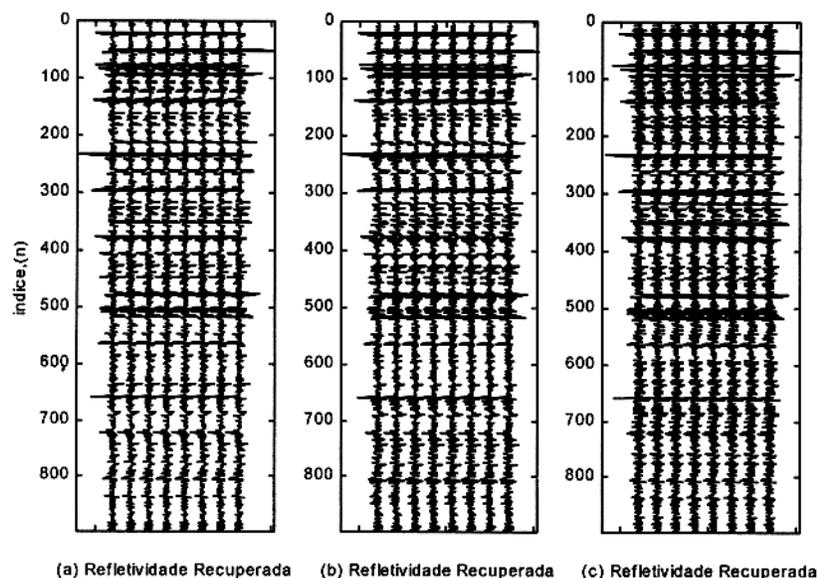


Figura 4.13. Refletividade extraída dos sismogramas da Figura 4.12 através do pulso-efetivo. A seqüência de ruídos em (a), (b) e (c) corresponde a mesma da Figura 4.12. Observamos os efeitos da deconvolução na compressão do pulso, e na amplificação crescente do nível de ruído de (a) para (c).

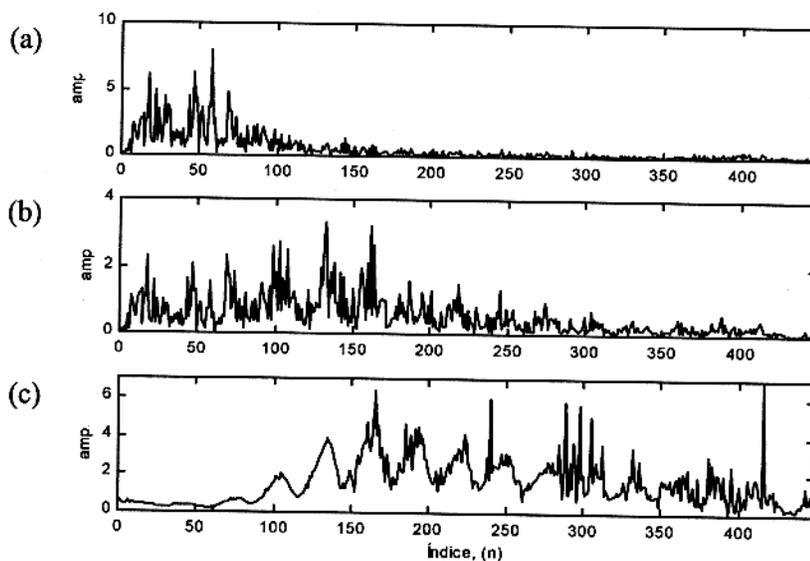


Figura 4.14. Exemplo comparativo dos espectros envolvidos com o FKBD, tendo sido selecionado o sismograma (a) da Figura 4.3 ( $S/R=95,84$ ). (a) Espectro de amplitude da entrada (sismograma) ao FKBD. (b) Espectro de amplitude da saída do FKBD. (d) Espectro de amplitude da função transferência do FKBD onde observamos a tendência linear crescente da amplificação.

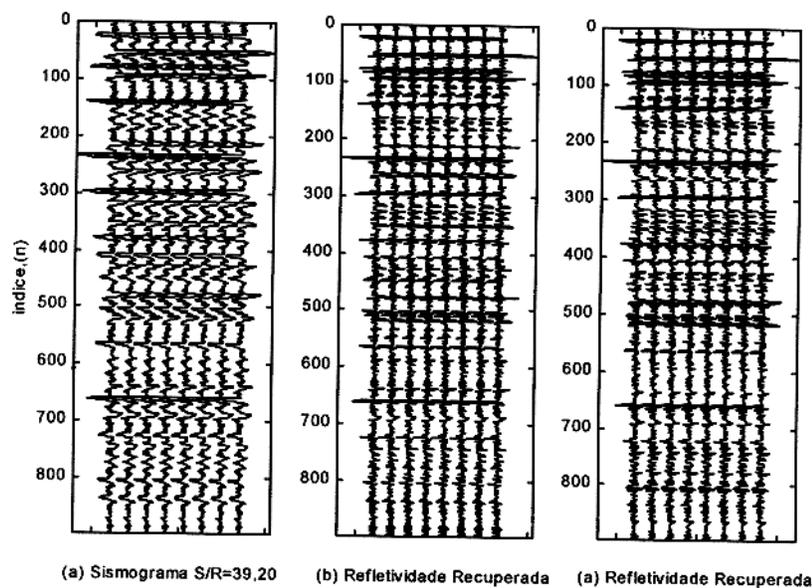


Figura 4.15. Exemplo comparativo do efeito do equalizador passa-baixa de Ormsby na saída do FKBD tendo sido usado o sismograma (b) da Figura 4.12 ( $S/R=39,20$ ). (Esquerda) Sismograma ruidoso. (Direita) Sismograma processado pelo FKBD após o passa-baixa equalizador. (Centro) Sismograma processado pelo FKBD sem o passa-baixa equalizador. O resultado da direita tem um foco melhor, e demonstra a utilidade do equalizador.

### 4.1.3 - Resposta Anelástica

Nesta seção aplicamos o método de deconvolução ao impulso de Kalman no modelo descrito na seção 2.3.

#### 4.1.3.1 - Atenuação sem Dispersão.

A Figura 4.16 ilustra a função refletividade com ruído e sem ruído utilizadas na convolução linear com o pulso tempo-variante da Figura 4.17 para gerar os sismogramas. Da mesma forma que na seção anterior, a transformada Hilbert foi a técnica utilizada para estimar o pulso-fonte efetivo.

Na Figura 4.18 mostramos os sismogramas escolhidos na presença de três níveis diferentes de ruídos calculados através da razão das variâncias dada pela equação 4.8, como informamos nas Figuras. Na Figura 4.19 ilustramos os resultados após a aplicação do operador de deconvolução ao impulso.

A Figura 4.20 contém os espectros de amplitude dos sinais de entrada, de saída e a função transferência para o sismograma com a S/R igual à 94,52. Notamos novamente que o FKBD, tem o mesmo comportamento descrito nas seções anteriores. Na Figura 4.21 ilustramos os resultados comparativos entre a resposta do FKDB com e sem o filtro passa-baixa equalizador de Ormsby.

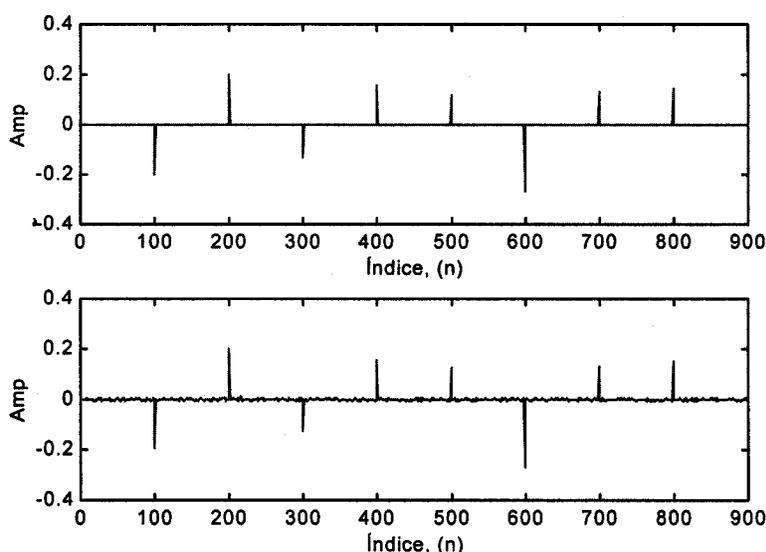


Figura 4.16 – (Em cima) Função refletividade-simples (aleatória) sem ruído. (Em baixo) Função refletividade-completa. O significado físico para esta distribuição é fundamentada no modelo de Goupillaud.

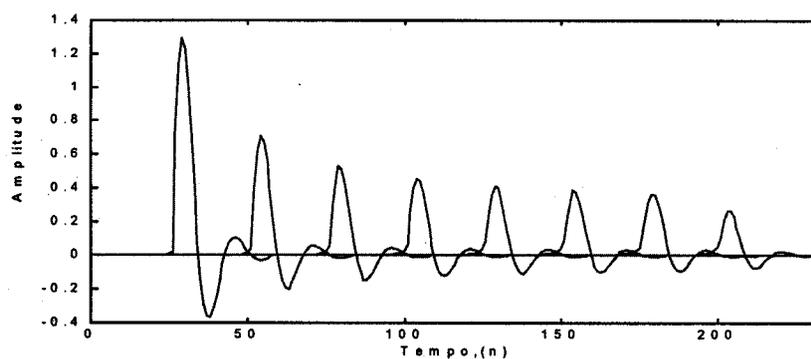


Figura 4.17- Pulso-fonte tempo-variante utilizado na convolução linear na geração dos sismogramas selecionados para este exemplo.

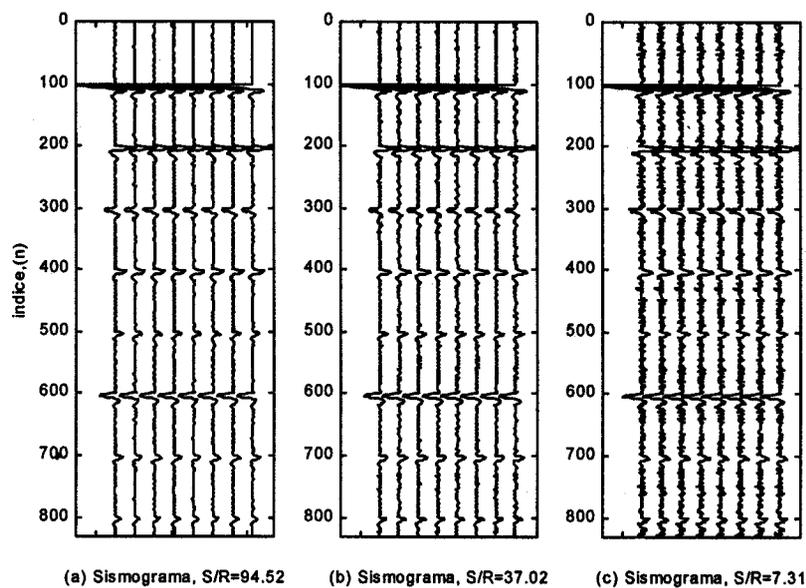


Figura 4.18. Sismogramas sintéticos gerados com o pulso-fonte tempo-variante e com a refletividade contendo diferentes frações dos ruídos aditivos geológico e local. (a)  $S/R=94,52$ . (b)  $S/R=37,02$ . (c)  $S/R=7,31$ . Os traços estão repetidos 8 vezes para provocar o efeito visual de correlação lateral traço-a-traço.

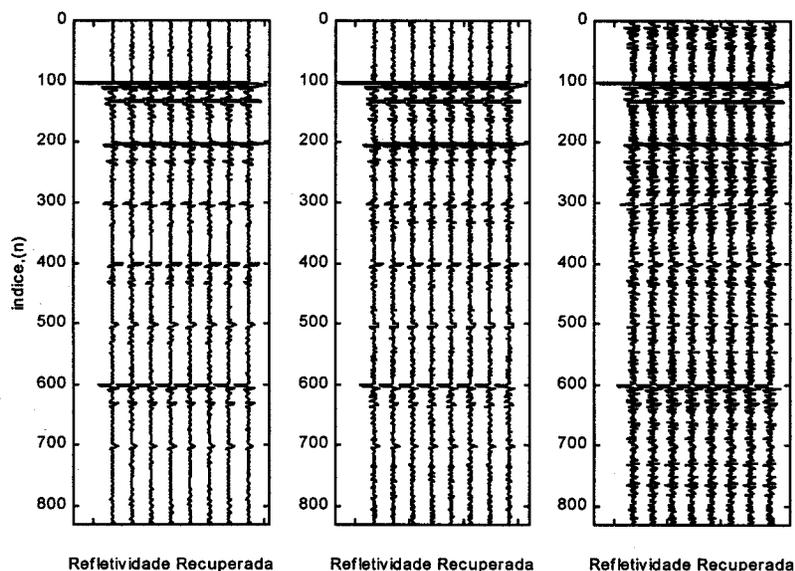


Figura 4.19. Refletividade extraída dos sismogramas da Figura 4.18 através do pulso-efetivo. A seqüência de ruídos em (a), (b) e (c) corresponde a mesma da Figura 4.18. Observamos os efeitos da deconvolução na compressão do pulso, e na amplificação crescente do nível de ruído de (a) para (c).

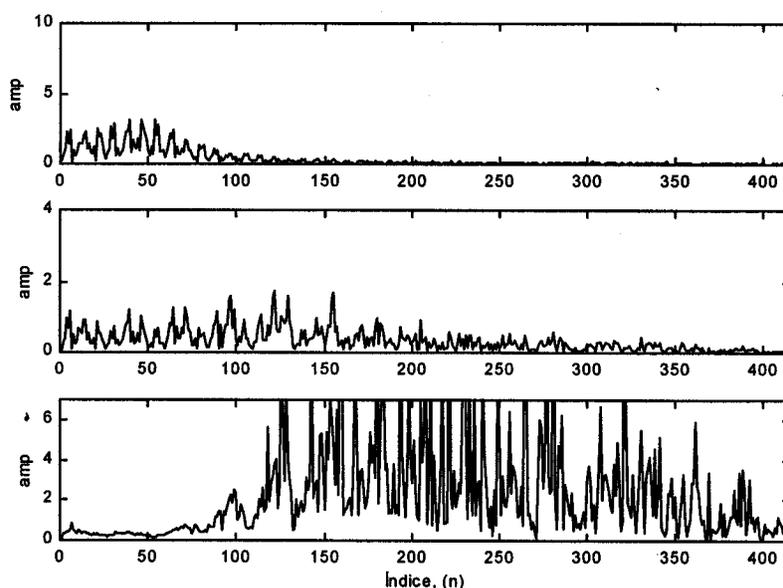


Figura 4.20. Exemplo comparativo dos espectros envolvidos com o FKBD tendo sido selecionado o sismograma (a) da Figura 4.18 ( $S/R=94,52$ ). (Em cima) Espectro de amplitude da entrada ao FKBD. (No meio) Espectro de amplitude da saída do FKBD. (Em baixo) Espectro de amplitude da função transferência do FKBD onde observamos a tendência linear crescente da amplificação.

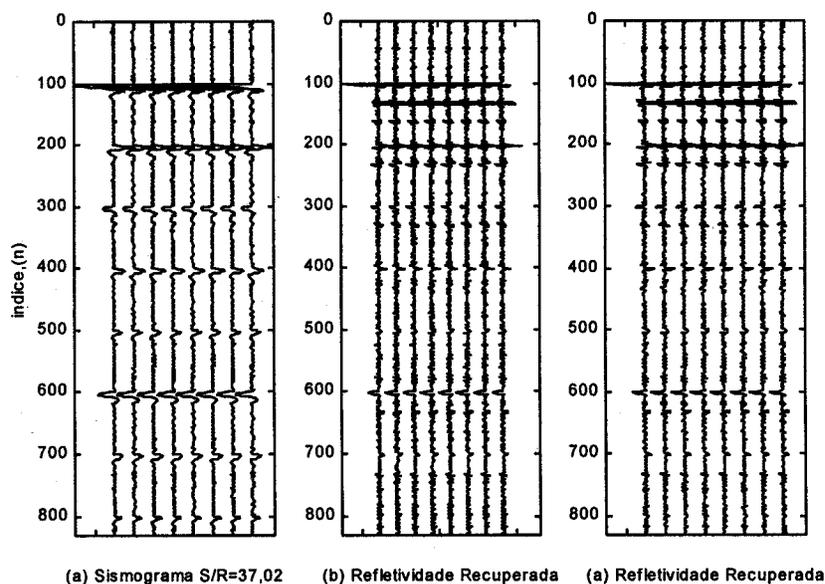


Figura 4.21. Exemplo comparativo do efeito equalizador passa-baixa de Ormsby na saída do FKBD tendo sido usado o sismograma (b) da Figura 4.18 ( $S/R=37,02$ ). (Esquerda) Sismograma ruidoso. (Direita) Sismograma processado pelo FKBD após o passa-baixa equalizador. (Centro) Sismograma processado pelo FKBD sem o passa-baixa equalizador. O resultado da direita tem um foco melhor e demonstra a utilidade do equalizador.

#### 4.1.3.2 – Atenuação com Dispersão

Neste caso consideramos o pulso-fonte tempo-variante dispersivo e a função refletividade completa (Figura 4.22).

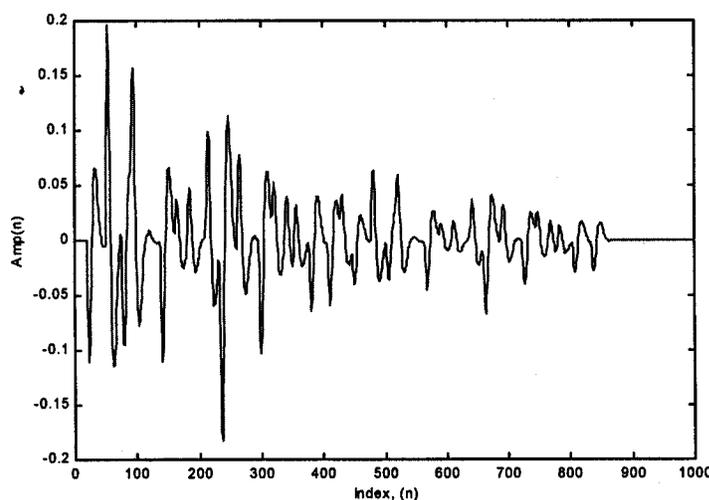


Figura 4.22 – Sismograma com múltiplas e pulso tempo-variante dispersivo.

A Figura 4.23 contém os sismogramas de duas formas; a primeira o sismograma foi obtido pela convolução linear do pulso-fonte variante com a função refletividade completa Figura 4.23c e o segundo é o sismograma no qual foi aplicado um ganho dinâmico, para uma visualização melhor dos eventos Figura 4.23b. O fluxograma para a deconvolução de KB é apresentado na Figura 4.24.

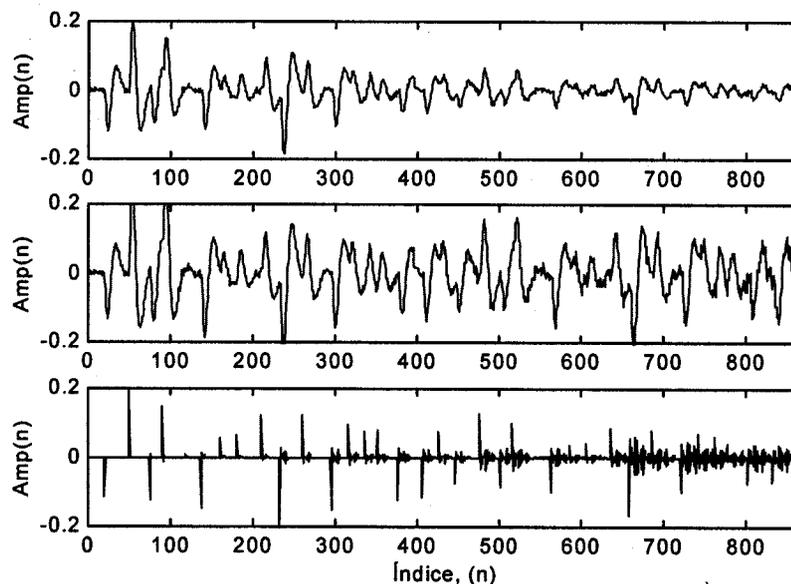


Figura 4.23 – (a) Sismograma sintético sem ganho. (b) Sismograma após o ganho dinâmico. (c) Função refletividade-completa.

Nas Figuras 4.25a e 4.26a apresentamos a função refletividade completa, e nas Figuras 4.25b e 4.26b os sismogramas com S/R de 80,94 e 36,51 respectivamente. Nas Figuras 4.25c e 4.26c ilustramos o resultado da deconvolução de KB e observamos que nos dois casos a compressão do pulso-fonte é realizada.

Seguindo o mesmo procedimento como nas seções anteriores, aplicamos o filtro equalizador passa-baixa do tipo Ormsby para mostrar a necessidade de acoplá-lo à deconvolução, e verificamos que resulta numa melhora dos resultados como mostra as Figuras 4.25 e 4.26. Nas Figuras 4.27 e 4.28 apresentamos os resultados do FKBD onde  $b(k)$  é obtido a partir do modelo direto (Goupillaud), e comparamos este resultado quando admitimos  $b(k)$  constante.

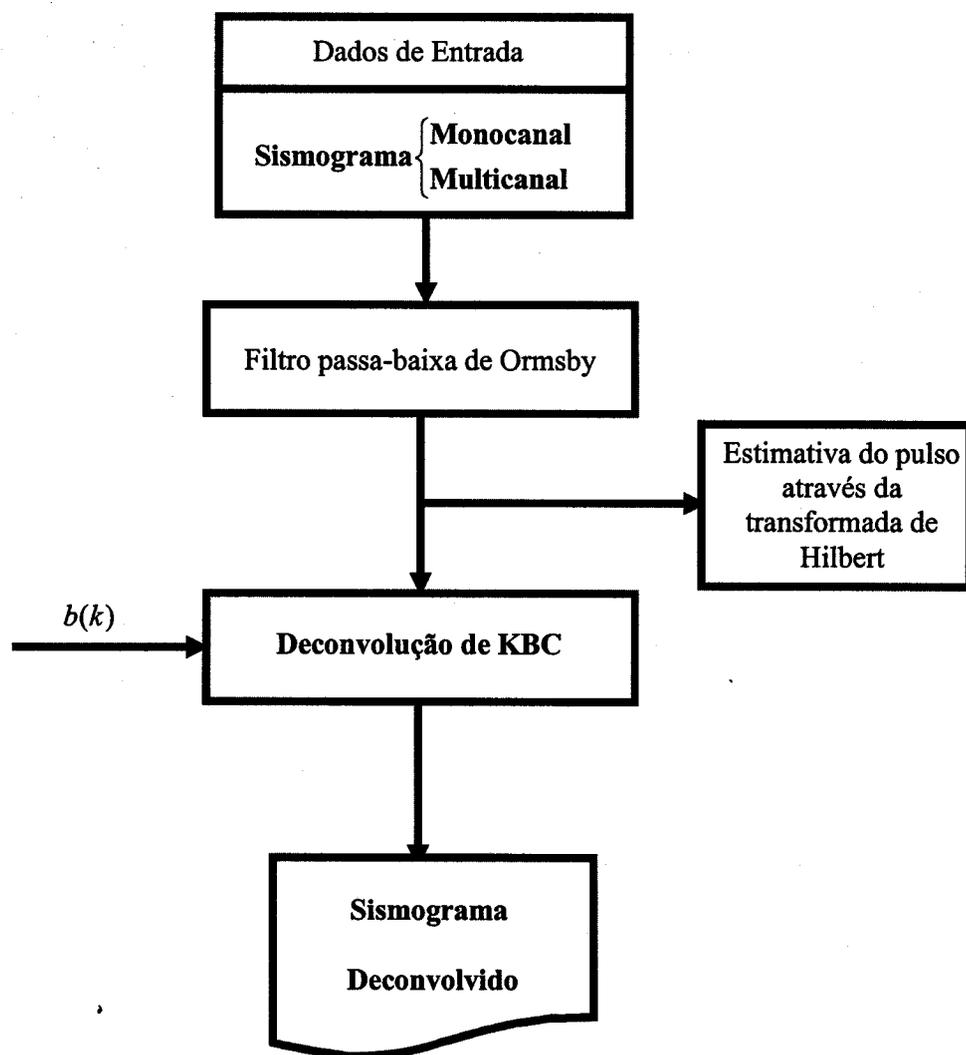


Figura 4.24 – Diagrama de blocos para a deconvolução com os caminhos referentes ao filtro equalizador passa-baixa Ormsby.

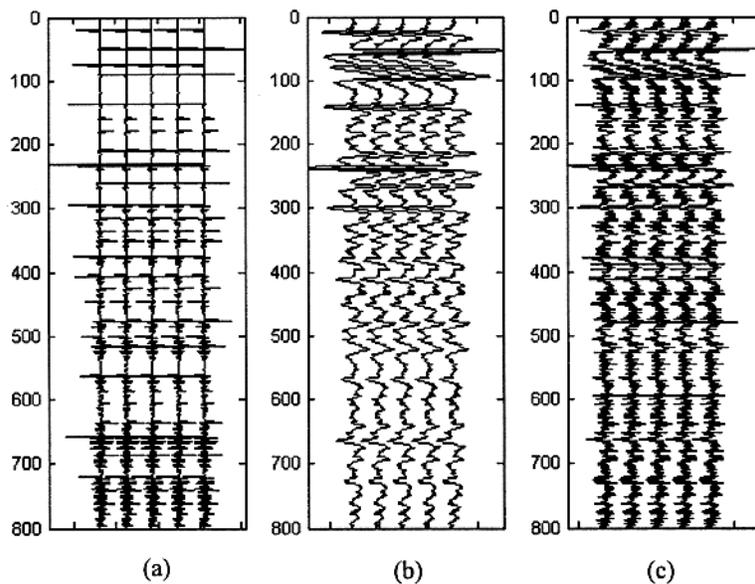


Figura 4.25 – (a) Função refletividade completa. (b) Sismograma sintético  $S/R=80.94$ . (c) Sismograma deconvolvido pelo método de KB após o filtro equalizador passa-baixa do tipo Ormsby. Observamos que é realizada a compressão do pulso.

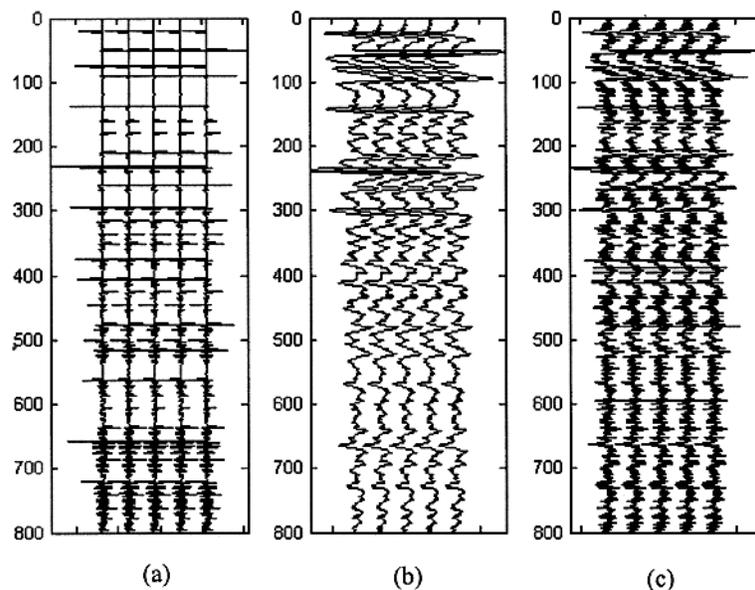


Figura 4.26 – (a) Função refletividade-completa (b) Sismograma sintético  $S/R=36,51$ . (c) Sismograma deconvolvido pelo método de KB após o filtro equalizador passa-baixa do tipo Ormsby. Com o aumento do ruído observamos os efeitos da deconvolução na compressão do pulso.

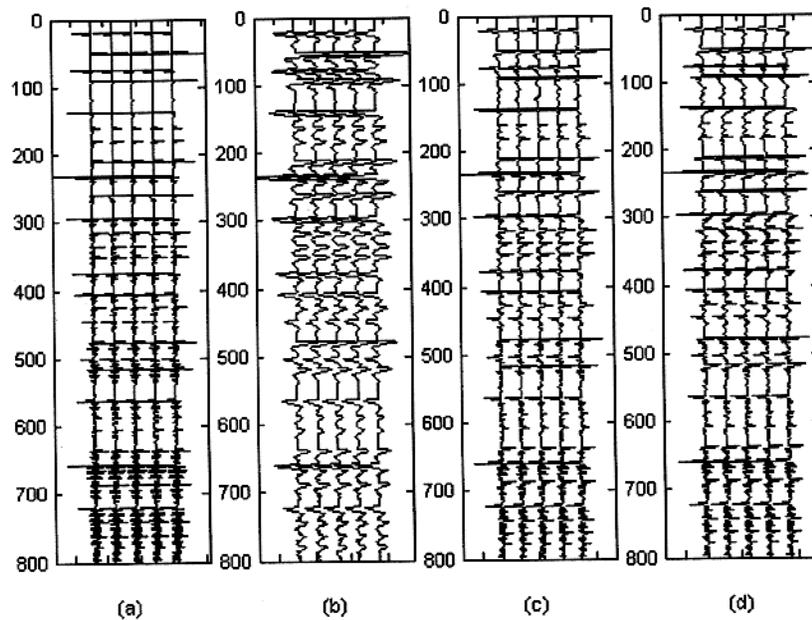


Figura 4.27 – (a) Função refletividade completa. (b) Sismograma sintético sem ruído. (c) Sismograma deconvolvido pelo método de KB admitindo  $b(k)$  constante (d) Sismograma deconvolvido pelo método de KB onde  $b(k)$  é obtido a partir do modelo direto (Goupillaud). Observamos que é realizada a compressão do pulso para os dois casos, ocorrendo uma pequena melhora quando admitimos  $b(k)$  variável.

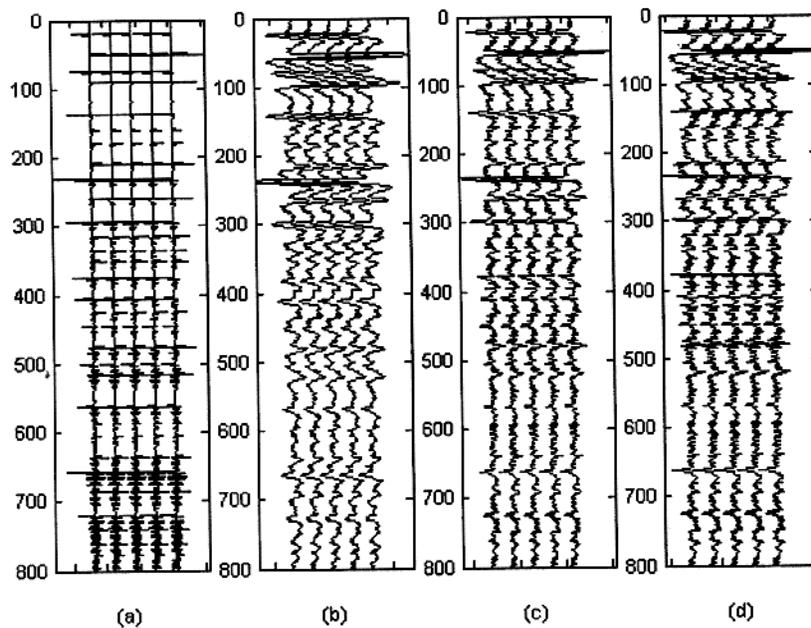


Figura 4.28 – (a) Função refletividade completa. (b) Sismograma sintético  $S/R=80.94$ . (c) Sismograma deconvolvido pelo método de KB admitindo  $b(k)$  constante (d) Sismograma deconvolvido pelo método de KB onde  $b(k)$  é obtido a partir do modelo direto (Goupillaud).

### 4.1.3.3 – Conclusões Parciais

Observamos também neste modelo que a compressão do pulso-fonte foi alcançada. É evidente a necessidade do uso do filtro equalizador passa-baixa, o que foi verificado em todos os resultados obtidos até aqui. Mostramos que o filtro de deconvolução comporta-se bem em todos os sismogramas sintéticos monocanais aqui apresentados. Estes resultados nos dão os fundamentos necessários para estudar o seu processamento em dados reais.

## 4.2 – EXEMPLO DE DADOS REAIS

Um exemplo do dado real utilizado neste trabalho foi o retirado de BUHL ET AL. (1974), e os resultados obtidos com o FKBD descrito neste trabalho estão nas Figuras 4.29 e 4.30. A seção é montada com o efeito visual da repetição e o sismograma é descrito como tipicamente não-estacionário, o pulso-fonte efetivo foi calculado através da TH. Na Figura 4.30 foi aplicado um filtro passa-baixa de Ormsby para equalização. Podemos notar claramente o efeito compressivo do FKBD, possibilitando identificar melhor as reflexões individuais (“interfaces”) superiores.

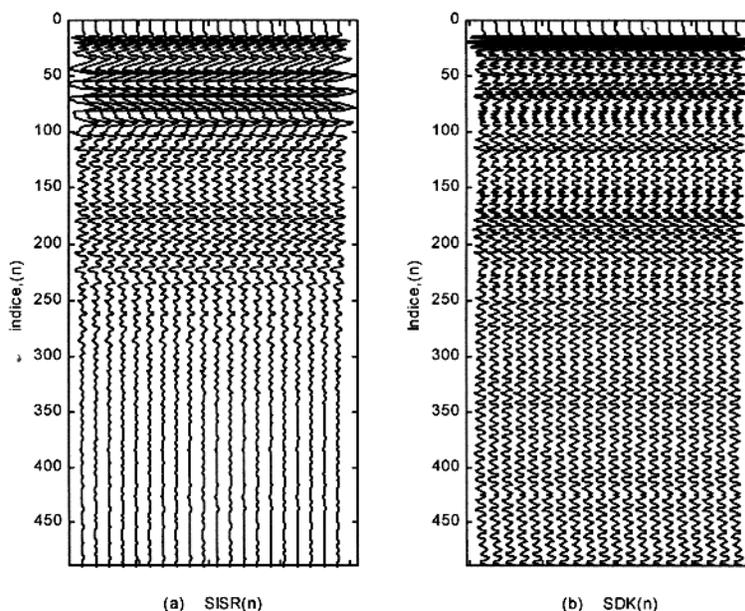


Figura 4.29. (a) Sismograma real; (b) Sismograma processado pelo FKBD. Não foi aplicado ganho dinâmico, e o pulso-fonte efetivo utilizado na deconvolução foi estimado pela TH. Observamos claramente a compressão dos pulsos e uma melhor definição das reflexões, principalmente da parte inicial da seção.

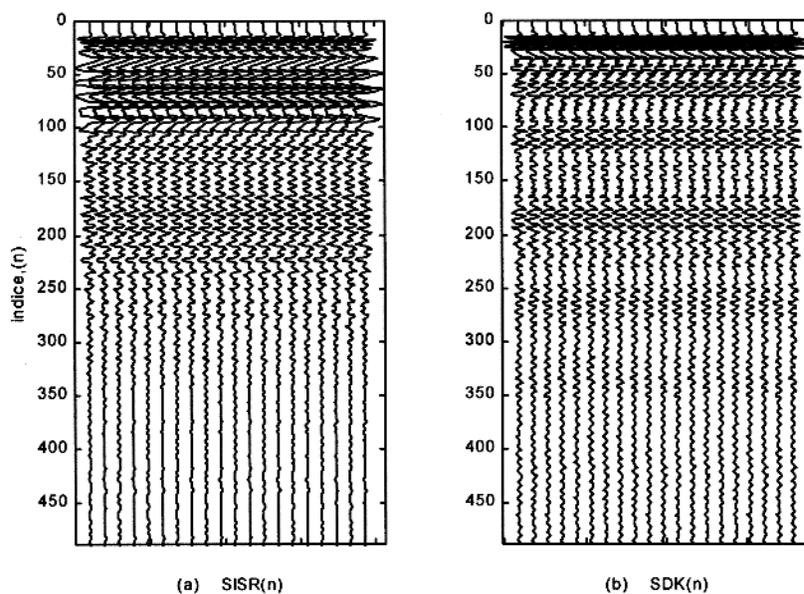


Figura 4.30. (a) Sismograma real; (b) Sismograma processado pelo FKBD após aplicação do equalizador (Passa-baixa de Ormsby). Não foi aplicado ganho dinâmico. O pulso-fonte efetivo utilizado na deconvolução foi estimado pela TH. Observamos claramente a compressão dos pulsos, e uma melhor definição das reflexões principalmente da parte inicial da seção.

## 5 – DECONVOLUÇÃO COM PREDIÇÃO

A teoria fundamental para atenuação de múltiplas de seções sísmicas (1D e 2D), baseadas na teoria Kalman-Bucy é apresentada neste capítulo. O método Kalman-Bucy foi estendido por Crump (1974) para a deconvolução ao impulso, e por Mendel et al (1979) para gerar sismogramas sintéticos.

O método KB é flexível por permitir a solução de diferentes problemas, e o presente objetivo é obter um operador de predição para atenuação de múltiplas e o detalhe está na representação da variável de estado. Crump (1974) representa a variável de estado como sendo a distribuição dos coeficientes de reflexão  $x(t) = r(t)$ , e neste caso o processo recursivo para a geração do vetor de estado é representado por critério de:

$$r(k) = \sum_{i=1}^L b_i^C(k)r(k-i) + w(k-1), \quad (\text{sistema}), \quad (5.1)$$

$$g(k) = s(k) * r(k) + v(k), \quad (\text{saída}), \quad (5.2)$$

onde  $v(k)$  e  $w(k)$  são teoricamente considerados como processo estocásticos branco.

Mendel et al. (1979) definem a variável de estado como sendo as ondas ascendentes e descendentes partindo da seguinte representação:

$$\underline{x}(t) = \underline{A}\underline{x}(t) + \underline{b}m(t), \quad (\text{sistema}), \quad (5.3)$$

$$\underline{g}(t) = \underline{c}^T \underline{x}(t) + r_0 m(t), \quad (\text{saída}), \quad (5.4)$$

onde  $m(t)$  é a função de geração do estado (sinal) e

$$A = \left[ \begin{array}{c|c} A_1 & A_2 \\ \hline A_3 & A_4 \end{array} \right], \quad (5.5)$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ (1+r_1) & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & (1+r_2) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1+r_3) & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & (1+r_{k-1}) & 0 \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} 0 & (1-r_1) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & (1-r_2) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1-r_3) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & (1-r_{k-1}) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_2 = -\text{dig}[r_0 \ r_1 \ \dots \ r_{k-1}], \quad A_3 = \text{dig}[r_1 \ r_2 \ \dots \ r_k],$$

$$b = [1 + r_0, 0, 0, \dots, 0]^T, \quad c = [0, 1 - r_0, 0, 0, \dots, 0]^T,$$

e  $r_k$  são os coeficientes de reflexão.

A variável de estado que define o sismograma é representada pelas ondas ascendente,  $d(t)$ , e descendente,  $u(t)$  na forma

$$x(t) = [u_1(t), d_1(t), u_2(t), d_2(t), \dots, u_k(t), d_k(t)]^T. \quad (5.6)$$

## 5.1 – IDENTIFICAÇÃO DO PROBLEMA

A identificação da variável de estado com o modelo não-estacionário é necessária para escrever o par de equações sistema-saída. A seleção do vetor de estado  $\underline{x}$  não tem unicidade e aqui é definida como:

$$\underline{x}(k) = [g(k) \ g(k-1) \ \dots \ g(k-L+1)]. \quad (5.7)$$

onde  $g(k)$  é o sismograma com ruído (equação 5.2).

Desta forma, a equação dinâmica do processo recursivo da geração do vetor de estado é completada com a seguinte equação:

$$g(k) = \sum_{i=1}^L b_i(k-1)g(k-i) + u(k-1), \quad (\text{sistema}), \quad (5.8)$$

onde  $u(k)$  é considerado teoricamente como processo estocástico branco. A equação de transição de estado é escrita na forma:

$$\underline{x}(k) = \underline{\Phi}(k, k-1)\underline{x}(k-1) + Su(k-1), \quad (\text{sistema}). \quad (5.9)$$

onde

$$\underline{\Phi}(k, k-1) = \begin{bmatrix} b_0(N-1) & \dots & b_{L-2}(N-1) & b_{L-1}(N-1) & b_L(N-1) \\ 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (5.10)$$

e

$$S = [1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0]. \quad (5.11)$$

## 5.2 – SOLUÇÃO DO PROBLEMA

Para obter os valores de  $b_i(k)$ , a equação

$$g(k) = \sum_{i=1}^L b_i(k-1)g(k-i) + u(k-1) \quad (5.12)$$

é analisada a partir da forma matricial

$$\begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ \vdots \\ g_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & b_1(0) \\ 0 & \cdots & 0 & b_1(1) & b_2(1) \\ 0 & \cdots & b_1(2) & b_2(2) & b_3(2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_1(N-1) & \cdots & b_{L-2}(N-1) & b_{L-1}(N-1) & b_L(N-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{L-1} \\ \vdots \\ g_2 \\ g_1 \\ g_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{N-1} \end{bmatrix}. \quad (5.13)$$

Nesta, definimos que:

$$L = \sum_{i=1}^P T_i, \quad (P=1,2,\dots \quad k=1,2,3,\dots,N), \quad (5.14)$$

onde  $L$  é o comprimento do operador  $b_i(k)$ ;  $N$  é o comprimento do sinal de entrada;  $u(k-1)$  é considerado teoricamente como um processo estocástico branco, e  $P$  representa a periodicidade dos eventos a serem atenuados,  $T$  é a diferença entre o tempo de trânsito da primaria e a múltipla. A equação (5.12) projeta para frente o traço sísmico através de uma média ponderada dos pontos anteriores.

A solução da equação (5.13) com uma estrutura atípica torna-se de difícil solução, e a primeira forma natural de resolvê-la é através do método de tentativa-e-erro, sendo necessário incluir um parâmetro,  $\beta$ , no processo recursivo de geração da função  $b_i(k)$  da seguinte forma.

$$\text{Para } k=1 \quad b_1(0) = \frac{g_1}{g_0}. \quad (5.15)$$

$$\text{Para } k=2 \quad b_2(1) = \beta b_1(0), \quad (5.16)$$

$$b_1(1) = \frac{g_2 - [b_2(1)g_0]}{g_1}. \quad (5.17)$$

$$\text{Para } k=3 \quad b_2(2) = \beta b_1(1), \quad b_3(2) = \beta b_2(1), \quad (5.18)$$

$$b_1(2) = \frac{g_3 - [b_2(2)g_1 + b_3(2)g_0]}{g_2}. \quad (5.19)$$

Para  $k = N$ :

$$b_2(N-1) = \beta b_1(N-2) \quad b_3(N-1) = \beta b_2(N-2) \quad \dots \quad b_{N-1}(N-1) = \beta b_{N-2}(N-2) \quad (5.20)$$

$$b_1(N-1) = \frac{g_N - [b_2(N-1)g_{N-2} + b_3(N-1)g_{N-3} + \dots + b_{L-1}(N-1)g_1 + b_L(N-1)g_0]}{g_{N-1}} \quad (5.21)$$

A contribuição de  $u(k-1)$  na equação (5.9) é desprezada porque esta tem média zero e é não-correlacionada com alguma ou qualquer das previsões anteriores (Brown & Hwang, 1996). Para os experimentos computacionais,  $\beta$  foi considerado constante para cada traço e contido no intervalo  $0 < \beta < 1$ . Sendo assim, é possível determinar de forma recursiva os valores de  $b_i(k)$ . Na Figura 5.1 ilustramos os resultados encontrados de  $b_i(k)$  por tentativa-e-erro para diferentes valores de periodicidade  $P$  e do comprimento  $L$  do operador. Na próxima seção demonstramos a obtenção do operador KBCP proposto neste trabalho.

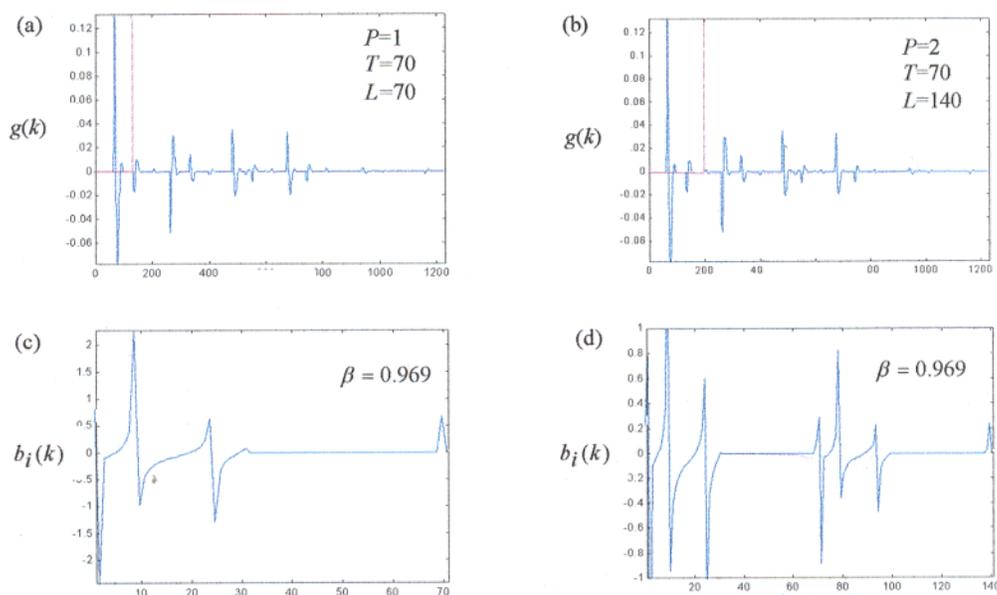


Figura 5.1 – Ilustra a função  $b_i(k)$  para diferentes valores de periodicidade  $P$  e do comprimento  $L$  do operador. (a) e (b) informam o comprimento da janela sobre o traço sísmico. (c) e (d) mostram as formas estranhas de  $b_i(k)$  para as janelas, em (a) e (b).

O operador de predição KBCP 1D e 2D são definidos de forma similar ao WHLP (Robinson, 1967), onde os coeficientes do operador WHLP são obtidos através da

autocorrelação. No caso KBCP são obtidos a partir da função  $b_i(k)$ , e tem as seguintes formas (ver Figura 5.2 e 5.3):

1D	2D
$h_k(i) = [1, 0, \dots, 0, b_{T_1}(k), 0, \dots, 0, b_{T_2}(k), \dots]$	$h_{jk}(i) = [1, 0, \dots, 0, b_{T_1(x)}(k), 0, \dots, 0, b_{T_2(x)}(k), \dots]$
$h_k(i) = [1, 0, \dots, 0, b_{T_1}(k), b_{T_{i+1}}, \dots, b_{T_n}(k)]$	$h_{jk}(i) = [1, 0, \dots, 0, b_{T_1(x)}(k), b_{T_{i+1}(x)}, b_{T_n(x)}(k)]$

O operador KBCP realiza sua operação numa janela que inclui a primária e sua múltipla. A razão desta estratégia é para que distorções provenientes dos eventos fora da janela sejam evitados.

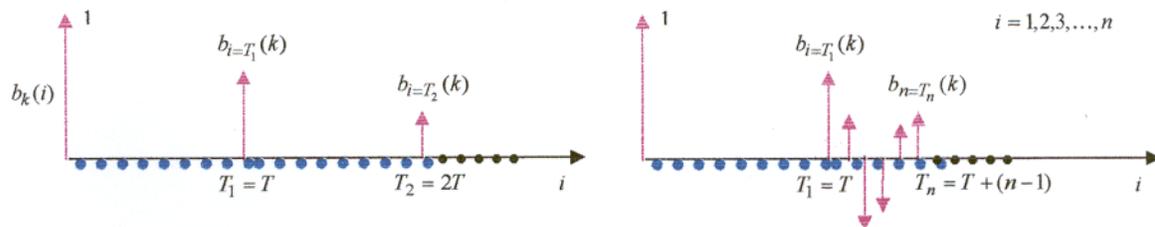


Figure 5.2. Estrutura do operador KBCP,  $b_i(k)$ , caso 1D.  $T$  constante.

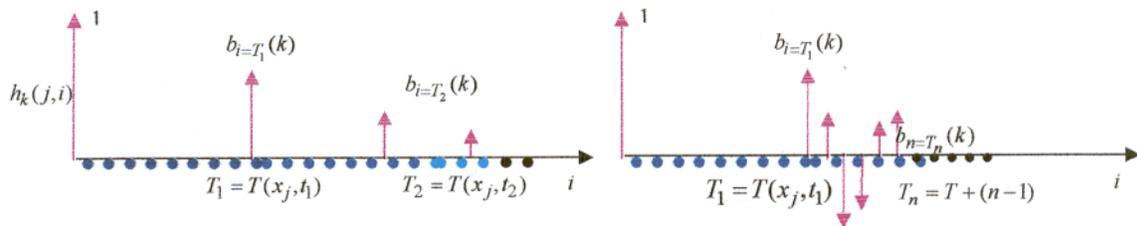


Figure 5.3. Estruturas do operador KBCP,  $b_{ij}(k)$ , caso 2D.  $T=T(x, t)$  variável.

Agora buscamos dar uma melhor exposição ao operador KBCP através do fluxograma e diagrama de blocos para cálculo. Também, mostramos como é feito de forma recursiva o cálculo do operador KBCP, e como estabelecemos as condições iniciais deste processo recursivo.

O fluxograma está organizado em 8 etapas que estão descritas abaixo.

- 1) Informações de entrada: escolha da seção sísmica.
- 2) Identificar a variável de estado (sistema) para montar as equações 5.8 e 5.9.
- 3) Definir as condições iniciais para dar início ao processo recursivo de geração da função  $b_i(k)$ , sendo elas:

- (a) Fator de atenuação inicial  $\beta_0$ .

(b) Incremento  $\Delta t$ .

(c) Tempo de trânsito da primária e de sua múltipla

- 4) Calcular o operador KBCP e a saída real,  $\bar{y}(k)$ , para cada incremento  $\Delta t$  para cada;  $\beta_0 \leq \beta_j = \beta_{j-1} + \Delta t \leq \beta_p$ , onde  $j = 1, 2, \dots, p$ .
- 5) Cálculo do erro mínimo entre a saída desejada,  $y(k)$ , e a saída real,  $\bar{y}(k)$ , pela forma:

$$E(k) = |y(k) - \bar{y}(k)| \quad (5.30)$$

onde  $y(k)$  é o sismograma sem múltiplas, e  $\bar{y}(k)$  é a saída após o operador KBCP. O fator de atenuação,  $\beta$ , e o comprimento do operador ( $L$ ) são variados para obter a matriz  $E_{ij}(k)$  para cada  $\bar{y}_{ij}(k)$ , sendo  $i$  o número de variações de  $\beta$  e  $j$  o número de variações do comprimento do operador.  $E_{ij}(k)$  é armazenado em uma matriz, e o erro mínimo global é obtido através de uma busca automática (sub-rotina Matlab) (Figura 5.4).

- 6) O fator de atenuação  $\beta$  e o comprimento do operador é selecionado para obter o menor erro. Desta forma, obtemos o melhor valor de  $b_i(k)$  e, conseqüentemente, o operador KBCP mais adequado para cada traço da seção sísmica.
- 7) Convolução do operador de predição KBCP com o traço correspondente da seção sísmica. (Figura 5.5).
- 8) Os passos 3,4 e 5 são realizados em toda seção sísmica.

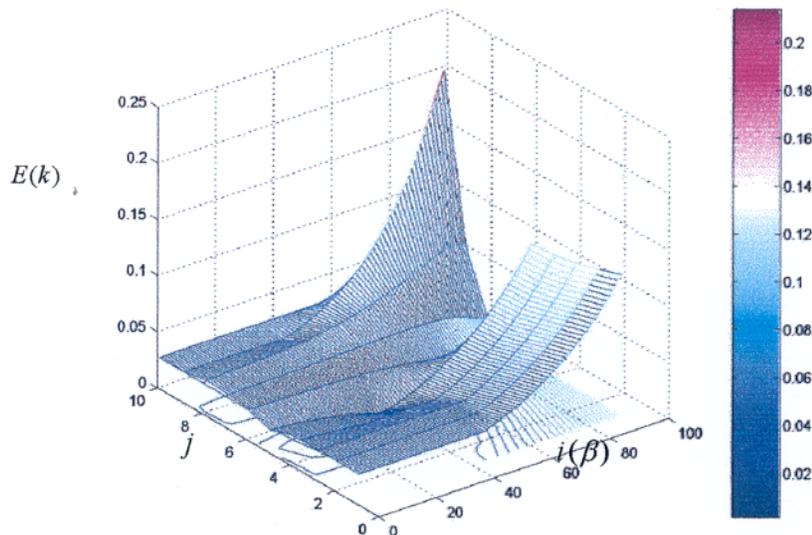


Figura 5.4 – Ilustra os diferentes valores de  $\beta$ . Diferença entre a saída desejada e a real. Observamos que a função  $E(k)$  é complexa, apresentando vários mínimos locais.

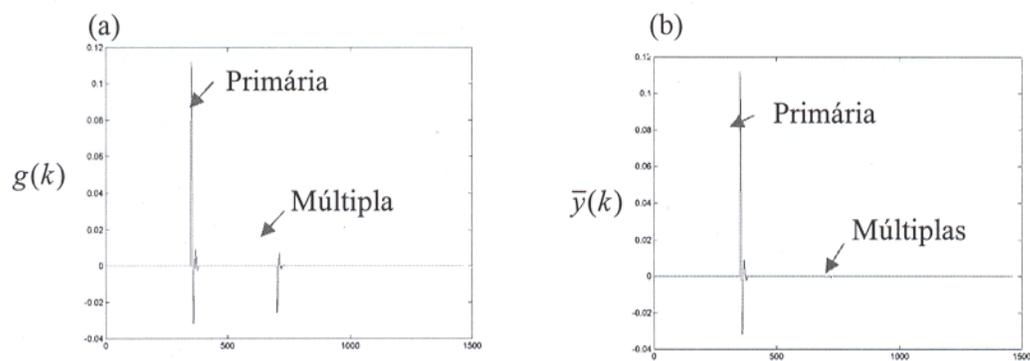
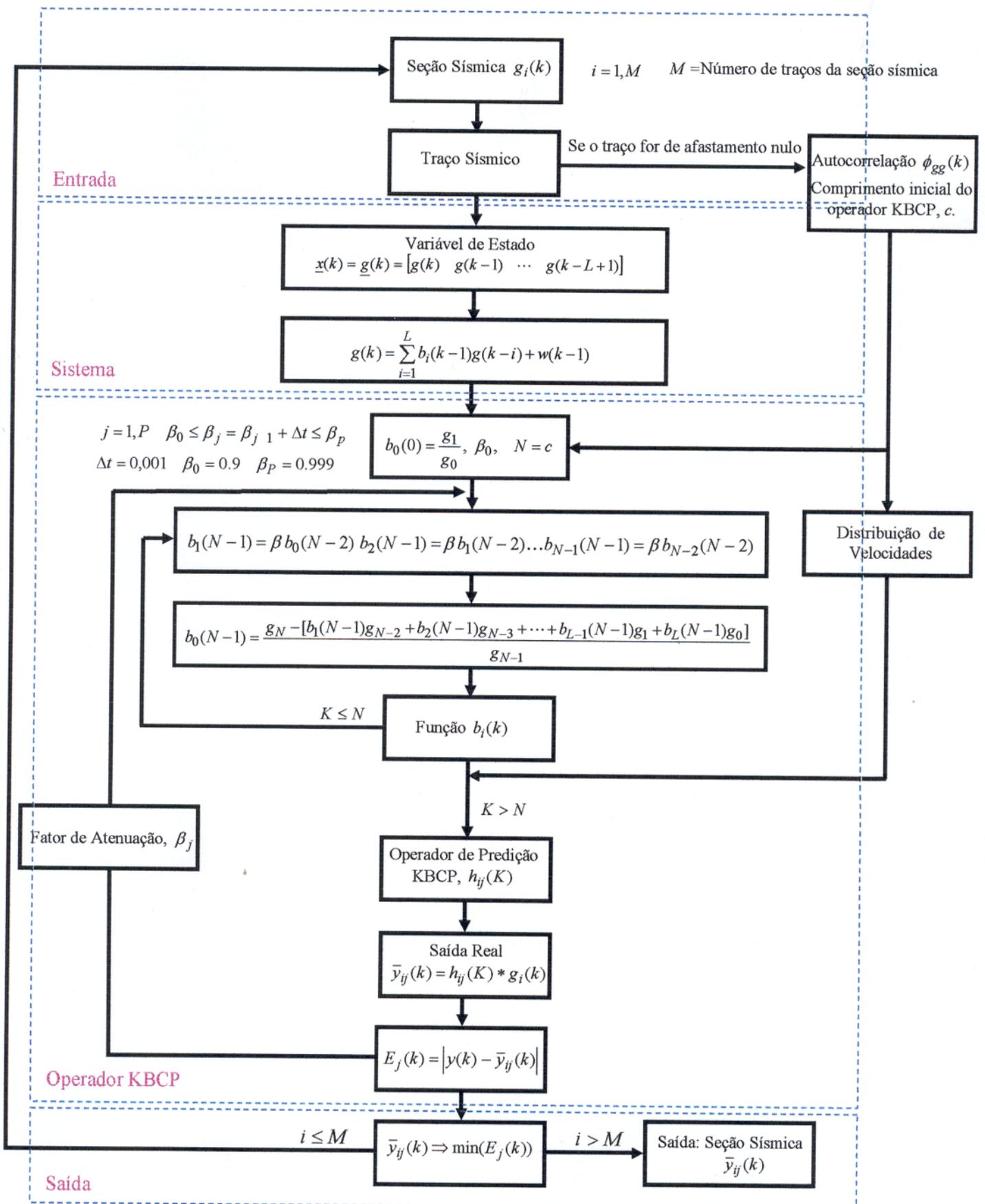


Figura 5.5 – (a) Traço de entrada de afastamento nulo (b) Traço de saída resultante da aplicação do operador KBCP. Notamos que a múltipla é atenuada.



### 5.3 - RESULTADOS

Nesta seção são apresentados os resultados da aplicação do método KBCP em dados sintéticos, com a finalidade de avaliar a resolução em seções de fonte-comum. O método KBCP foi aplicado nos dados sintéticos de modelos com interfaces contínuas e camadas homogêneas. Foram selecionados 5 modelos, diferenciando-os com relação a estrutura geológica; isto é, uma camada plano-horizontal, uma camada plano-inclinada, duas camadas plano-inclinadas e a simulação de um trecho da Bacia do Solimões.

#### Modelo 1

Modelo composto por uma camada homogênea separada por interfaces plano-horizontais sobre um semi-espaço, e velocidades de 1800m/s e 2300m/s, e espessuras 1300m e 1200m, respectivamente. Por meio de um algoritmo de traçamento de raio, foram geradas apenas reflexões primárias e múltiplas para a primeira interface. O conjunto de dados consiste de um seção de fonte-comum com 50 receptores com intervalo uniforme de 25m. O sinal-fonte é do tipo Gabor com uma freqüência dominante de 40 Hz, e intervalo de amostragem de 2 ms. Com o propósito de avaliar a estabilidade do operador KBCP, adicionamos ruído aleatório branco como representado nas Figuras 5.10a e 5.11a. A razão sinal/ruído (S/R) é calculada pela razão da estimativa das variâncias

$$\frac{S}{N} = \frac{1/N \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{1/N \sum_{i=1}^N (v_i - \bar{v})^2}, \quad (5.30)$$

onde  $\bar{x}$  e  $\bar{v}$  são as estimativas dos valores médios.

Os resultados obtidos para este sem ruído estão apresentados nas Figuras 5.7b e 5.10b, e nas Figura 5.8b e 5.9b com ruído. Podemos notar que o operador KBCP consegue atenuar a múltipla selecionada para os dois casos (sem ou com ruído).

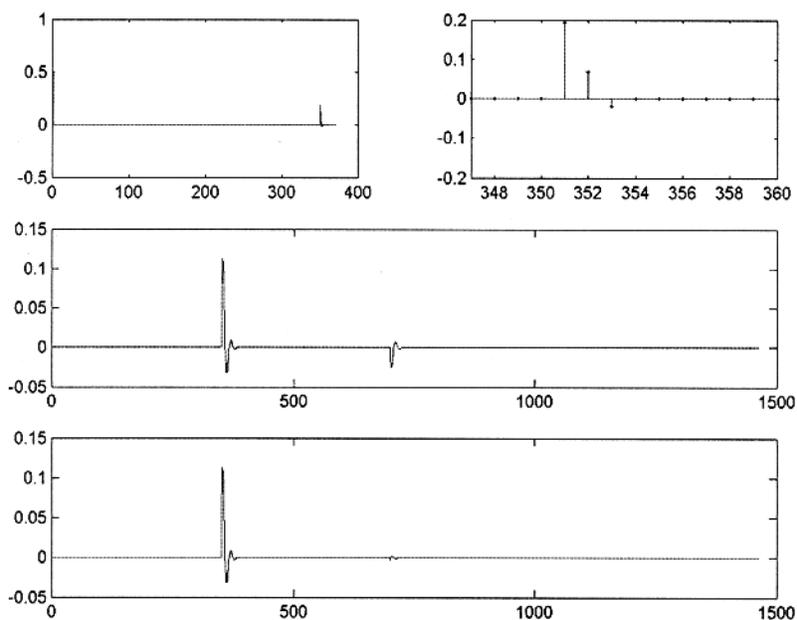


Figura 5.6 - (a) Operador KBCP. (b) Detalhes do operador KBCP na janela entre os pontos 344 e 360. (c) Traço de entrada. (d) Saída real onde se nota que a múltipla na Figura (c) foi atenuada.

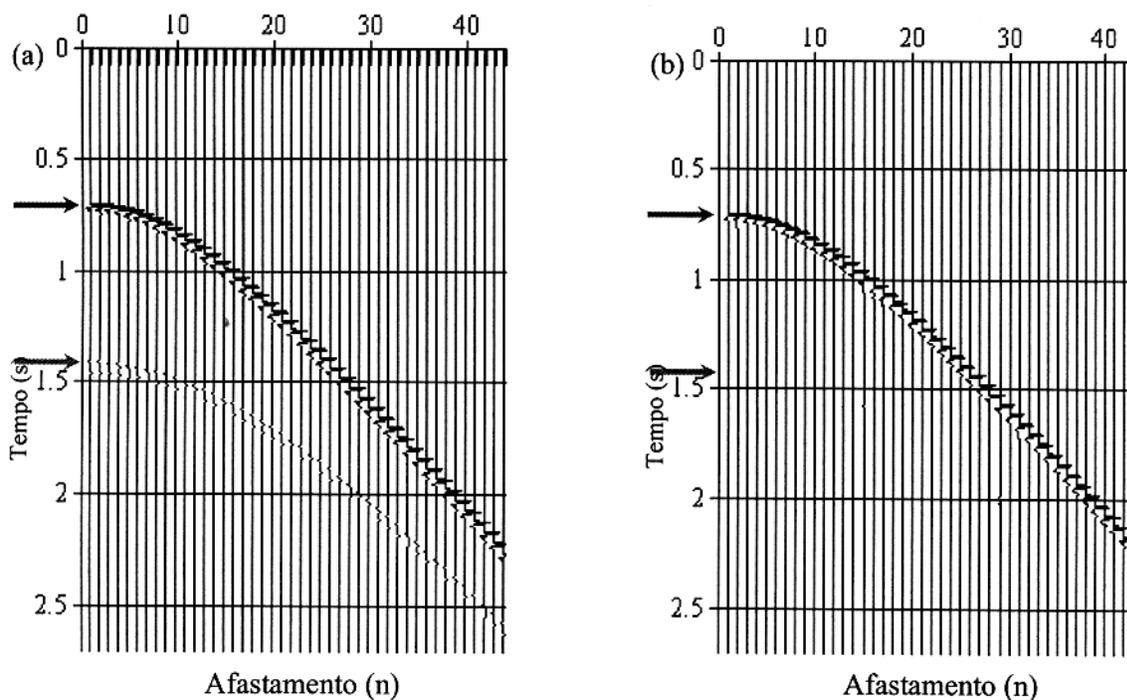


Figura 5.7 - (a) Seção sísmica fonte-comum sem ruído e com uma múltipla de superfície. (b) Resultado da aplicação do operador KBCP. Notamos que a múltipla é atenuada.

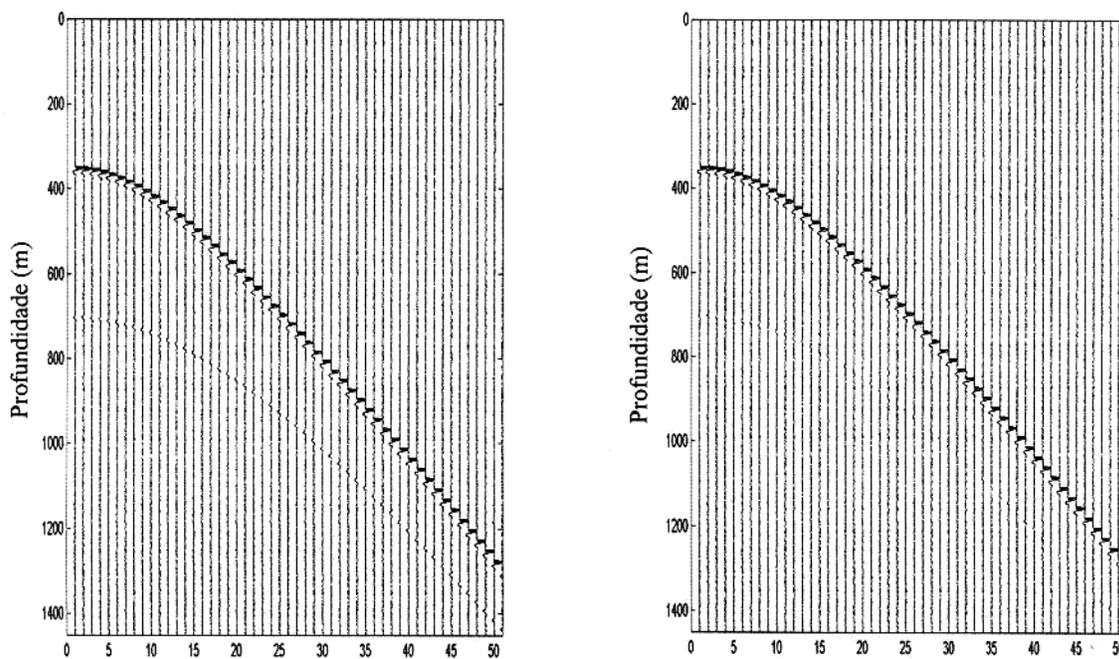


Figura 5.8 - (a) Seção sísmica fonte-comum com ruído ( $S/R=97$ ) e uma múltipla simétrica. (b) Resultado da seção após a aplicação do operador.

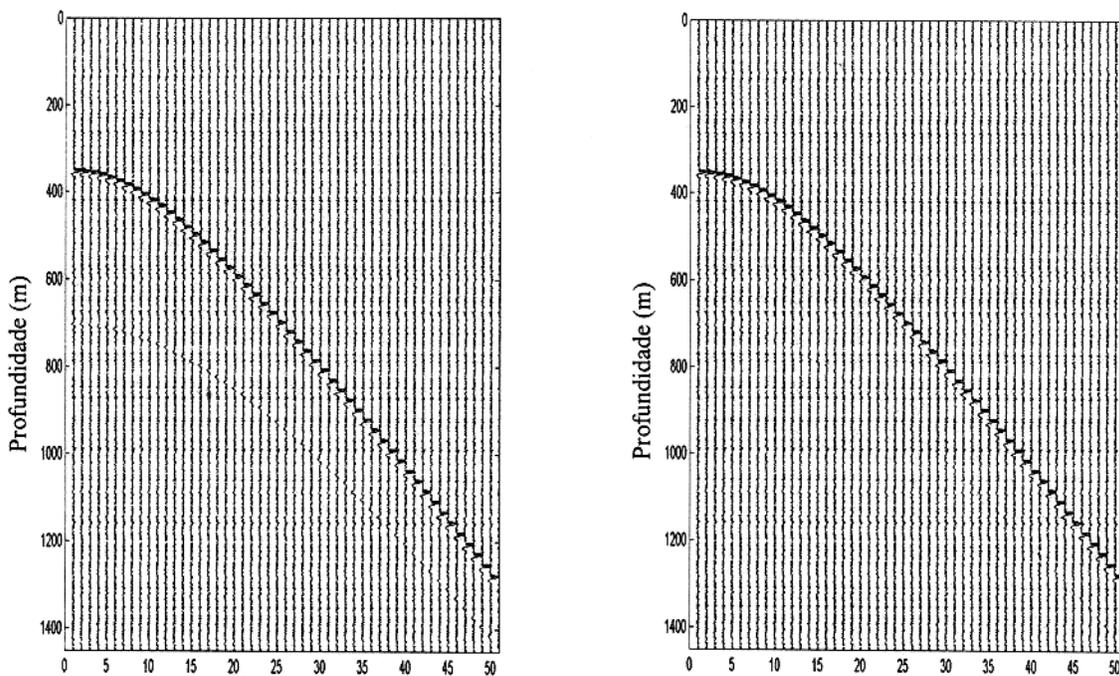


Figura 5.9 - (a) Seção sísmica com ruído ( $S/R=75$ ) com uma múltipla simétrica. (b) Resultado da seção após a aplicação do operador KBCP. Notamos que a múltipla é atenuada.

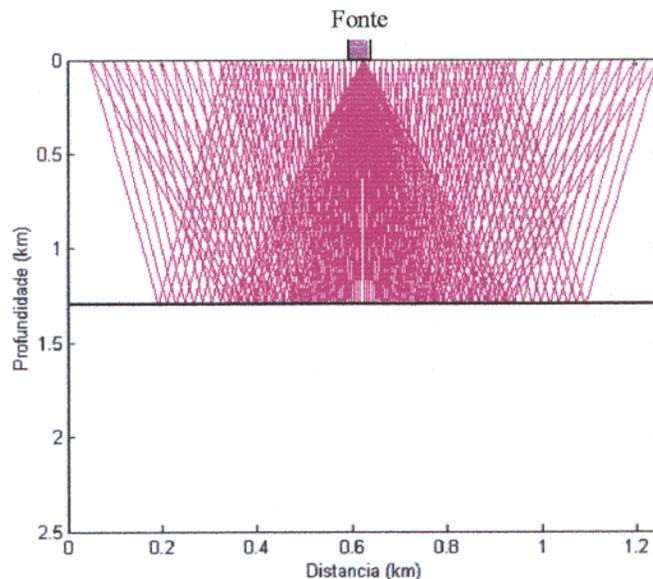


Figura 5.10 – Modelo de uma camada plano-horizantal sob um semi-espaço e velocidades de 1800m/s e 2300 m/s, e espessuras de 1300m e 1200m, respectivamente. Está ilustrado os raios fonte-receptor

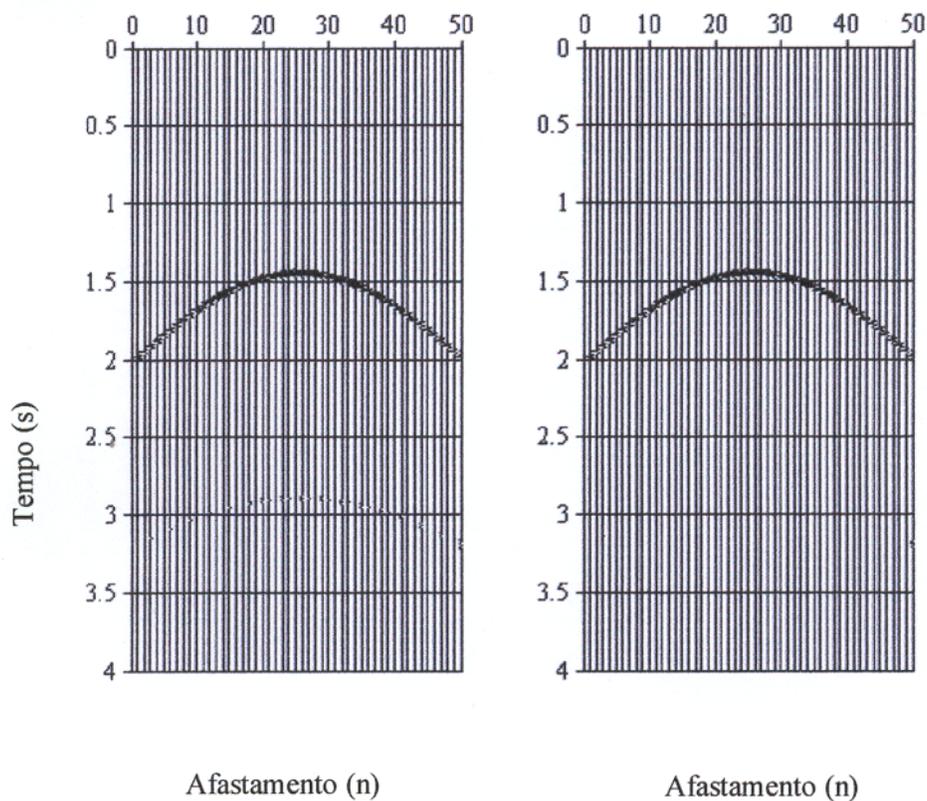


Figura 5.11 – (a) Seção sísmica obtida utilizando o programa SEIS88. (b) Resultado do operador KBCP. Notamos que a múltipla é atenuada.

## Modelo 2

Modelo composto por uma camada homogênea separada por uma interfaces plano-inclinada e contínua sobre um semi-espaço, e velocidades de 3000m/s e 5500m/s. (Figura 5.12). Por meio de um algoritmo de traçamento de raios foram geradas apenas a reflexão primária e a múltipla para a interface (Figura 5.13a). O conjunto de dados consiste de uma seção de fonte-comum com 50 receptores separados por um intervalo uniforme de 25m. O sinal-fonte é o Gabor com uma frequência dominante de 40 Hz, tendo os traços sísmicos um intervalo de amostragem de 2 ms.

O resultado obtido para o Modelo 2 sem ruído está mostrado na Figura 5.13, onde notamos que o operador KBCP realiza a atenuação da múltipla selecionada. Na Figura 5.14 mostramos o comportamento do operador KBCP em um trecho da seção sísmica.

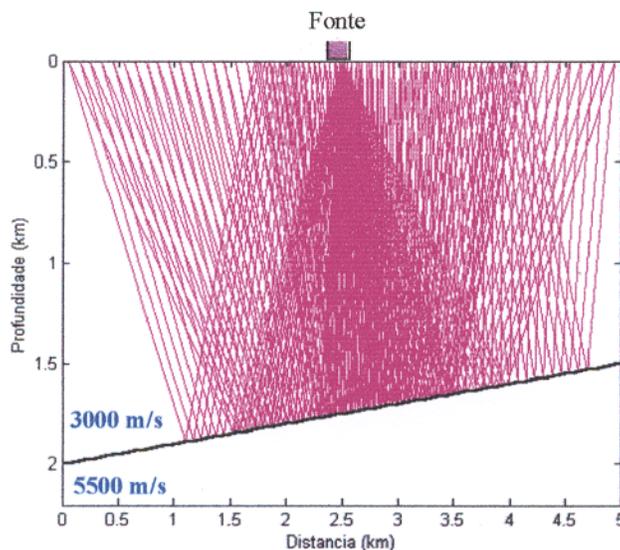


Figura 5.12 – Modelo formado por com uma camada sobre um semi-espaço separado por uma interface plano-inclinada com velocidades de 3000 e 5500 m/s, e 50 receptores separados por um intervalo de 25m. Estão ilustrados os raios fonte-receptor.

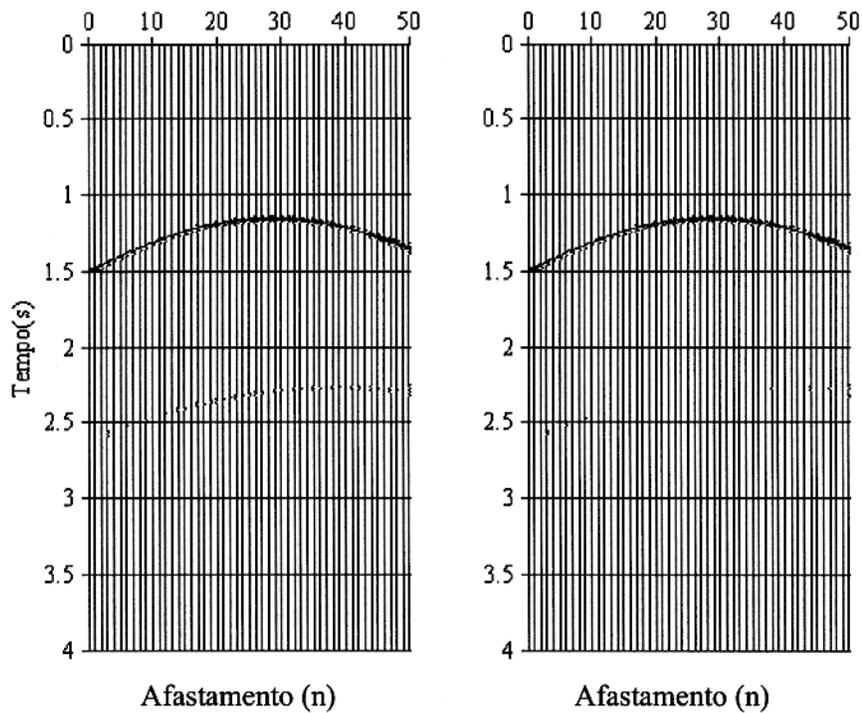


Figura 5.13 - (a) Seção fonte-comum obtida com o programa SEIS88. (c) Resultado obtido após a aplicação do operador KBCP. Notamos que a múltipla é atenuada.

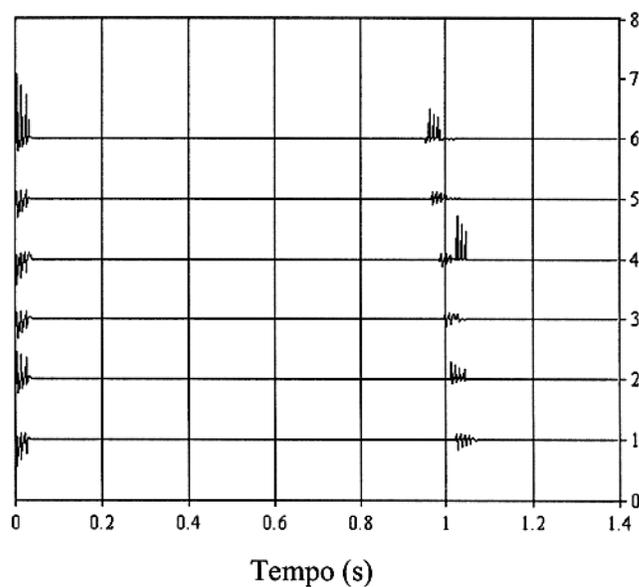


Figura 5.14 - Comportamento da função  $b_i(k)$  para a seção da Figura 5.14, do 1º ao 5º traço sísmico.

### Modelo 3

Modelo simples composto por duas camadas homogêneas separadas por duas interfaces plano-inclinadas e contínuas sobre um semi-espaço, e velocidades de 3000m/s, 4000m/s e 5500m/s. (Figura 5.15). Por meio de um algoritmo de traçamento de raios foram geradas apenas as reflexões primárias para as duas interfaces, porém a múltipla apenas para a primeira interface (Figura 5.16a). O conjunto de dados consiste de uma seção-fonte-comum com 50 receptores separados por um intervalo de 25m. O sinal-fonte é o Gabor com uma frequência dominante de 40 Hz, e os traços têm um intervalo de amostragem de 2 ms.

Os resultados obtidos para a seção do Modelo 3 sem ruído estão mostrados na Figura 5.16b, onde podemos notar que o operador KBCP realiza a atenuação da múltipla selecionada. Na Figura 5.17 mostramos o comportamento do operador KBCP.

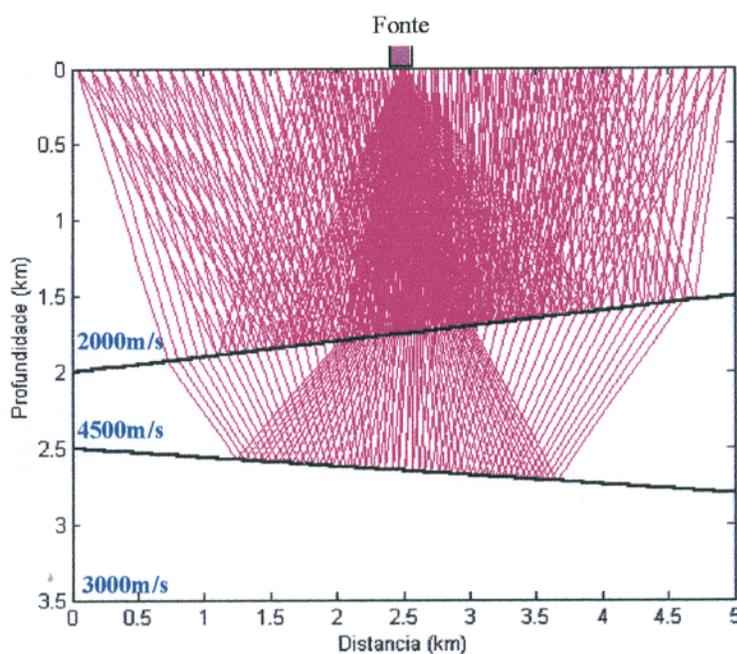


Figura 5.15 - Modelo de duas camadas plano-inclinadas sobre um semi-espaço, e velocidades de 2000m/s, 4500m/s e 3000 m/s, e 50 receptores com espaçamento uniforme de 25m. Estão ilustrados os raios fonte-receptor.

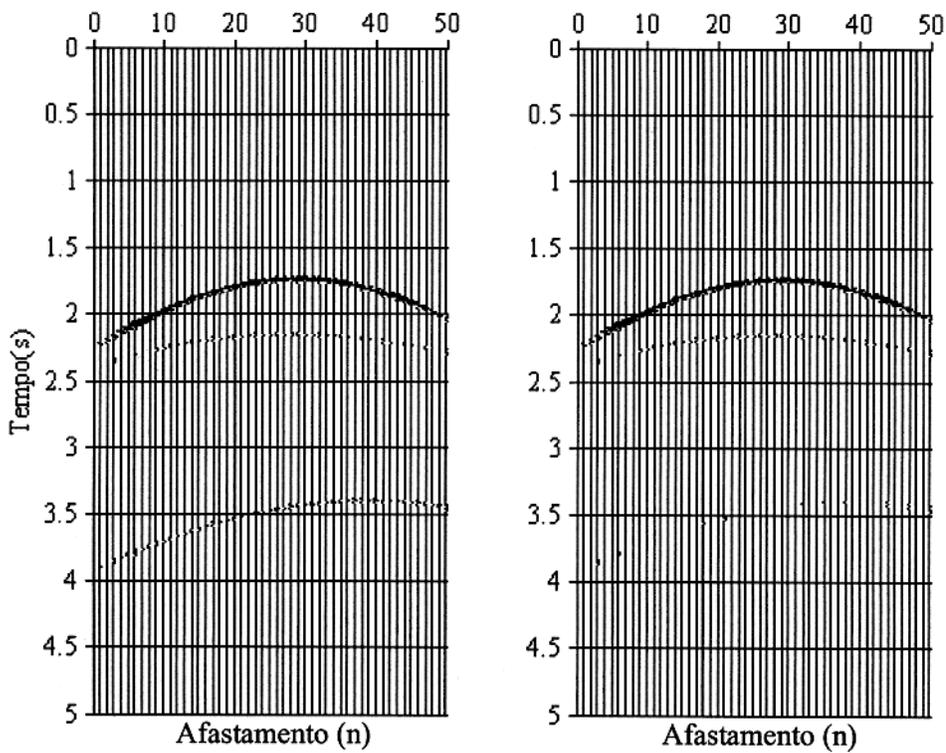


Figura 5.16 - (a) Seção sísmica fonte-comum obtida utilizando o programa seis88. (b) Resultado da aplicação do operador KBCP. Notamos que a múltipla é atenuada.

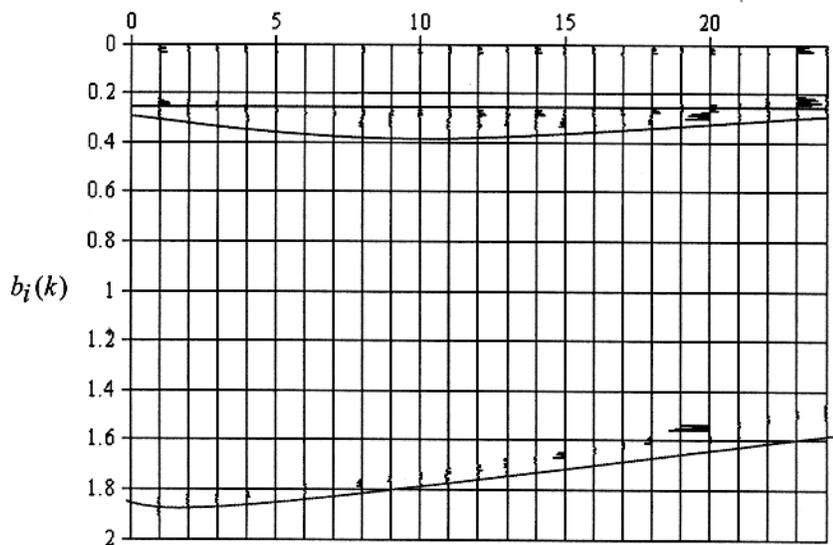


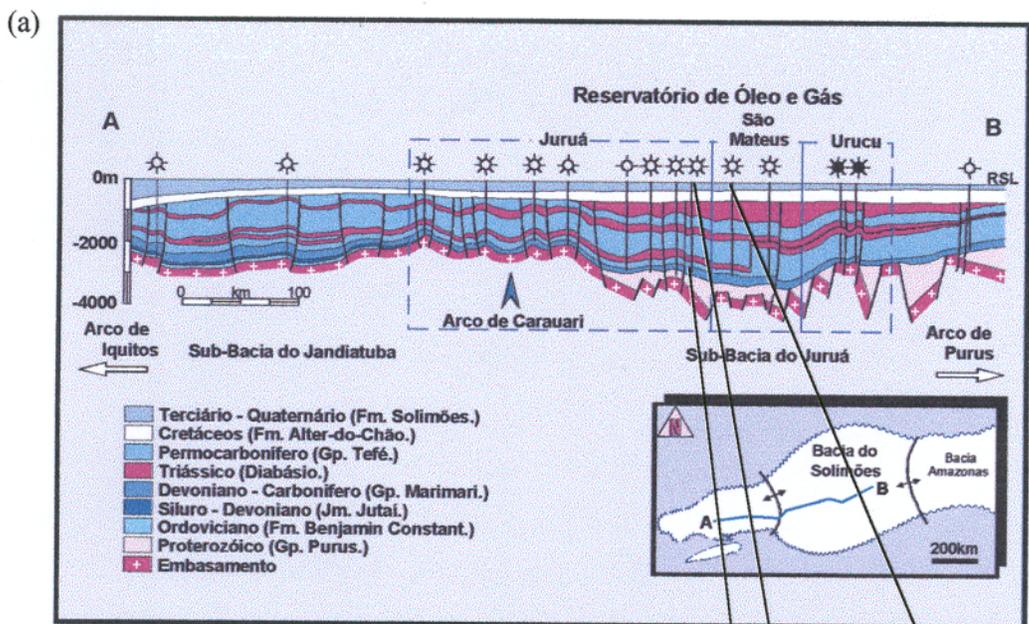
Figure 5.17 - Comportamento da função  $b_i(k)$  para o modelo geofísico da Figura 5.16. O traço azul representa a reflexão primária e o vermelho a múltipla.

#### Modelo 4

A definição do macro-modelo para um trecho da seção geológica longitudinal à Bacia do Solimões é baseado em Eiras (1996), (Figura 5.18a), sendo formado por sete camadas homogêneas separadas por interfaces contínuas, plano-inclinadas e horizontais sobre um semi-espço, (Figura 5.18c). Os valores das velocidades com as respectivas espessuras das camadas estão contidos na Figura 5.18b. Por meio de um algoritmo de traçamento de raio foram geradas apenas reflexões primárias para todas as interfaces, porém a múltipla foi gerada apenas para a segunda interface (Figura 5.20a). O conjunto de dados consiste de uma seção de fonte-comum com 50 receptores separados por um intervalo de 25m. O sinal-fonte é o Gabor com uma frequência dominante de 40 Hz, intervalo de amostragem uniforme é de 2 ms.

Aplicamos ganho dinâmico na seção, com finalidade de uma melhor visualização das interfaces e da múltipla presente na seção, Figura 5.20b. Os resultados obtidos para o Modelo 4 estão ilustrados na Figura 5.21b, onde notamos que o operador KBCP realiza a atenuação da múltipla selecionada, porém não com a precisão das anteriores devido ao modelo ser mais complexo.

## Seção Geológica Longitudinal à Bacia do Solimões



After Eiras, 1996

(b)

Espessura	Velocidade	
300	1800	
350	2300	
400	5800	
300	5500	
200	6000	
500	5700	
200	6300	
150	5300	
100	5000	Reservatório

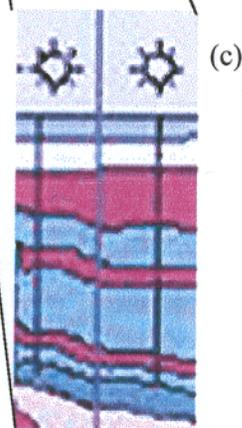


Figura 5.18 – (a) Seção geológica longitudinal à Bacia do Solimões. (b) Modelo de velocidade referente a um trecho da Bacia do Solimões. (c) Detalhes da seção geológica utilizada para simulação da seção sísmica.

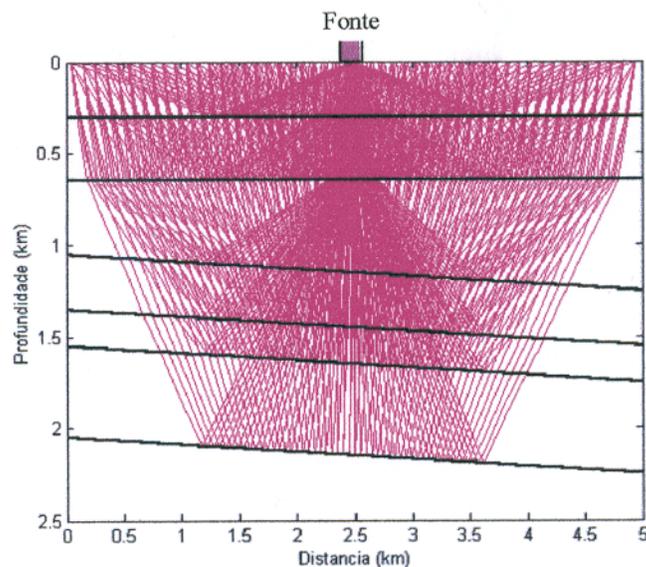


Figura 5.19 – Simulação com um trecho selecionado da seção geológica (Figura 5.18c), ilustrando a trajetória dos raios na seção. São 50 receptores com um intervalo uniforme de 25m.

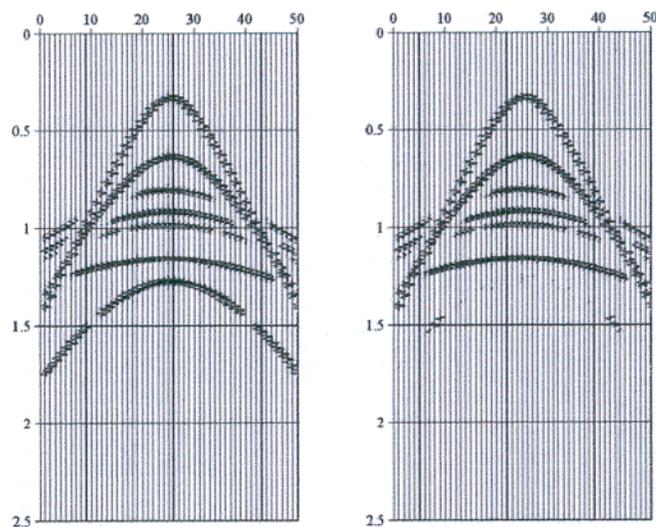


Figura 5.20 - (a) Seção sísmica fonte-comum para a seção geológica usando o programa seis88 e aplicação de ganho com a finalidade de visualizar melhor os eventos primários e múltiplas presentes. (b) Seção sísmica após a aplicação do operador KBCP.

### Modelo 5

Modelo composto por uma camada de água sobre um semi-espaço, velocidades de 1500m/s e 4300m/s, e espessuras 1000m e 1500m, respectivamente (Figura 5.21). O conjunto de dados consiste de uma seção de fonte-comum com 50 receptores com intervalo uniforme de 25m. O sinal da fonte é do tipo Gabor com uma frequência dominante de 40 Hz, e o intervalo de amostragem é de 2 ms.

O resultado obtido para o Modelo 5 está mostrado na Figura 5.22b, onde notamos que o operador KBCP realiza a atenuação das múltiplas de primeira, segunda e terceira ordem.

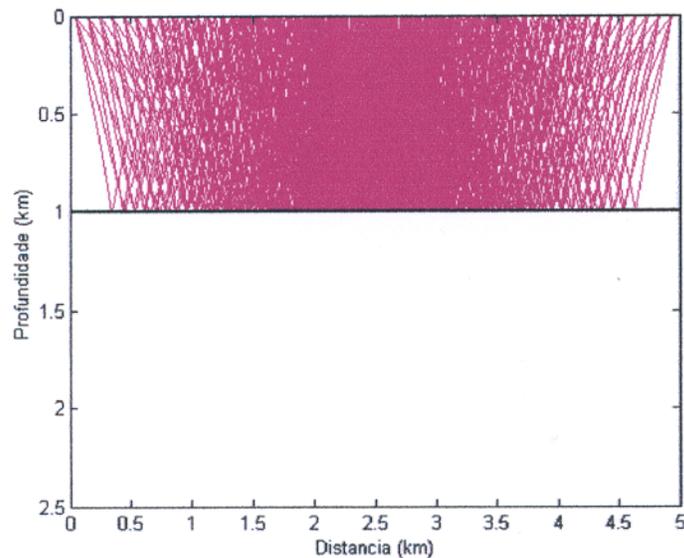


Figura 5.21 – Modelo de uma camada de água sobre um semi-espaço e velocidades de 1500m/s e 4300 m/s, e 1000m e 1500m de espessura, respectivamente. Estão ilustrados os raios fonte-receptor.

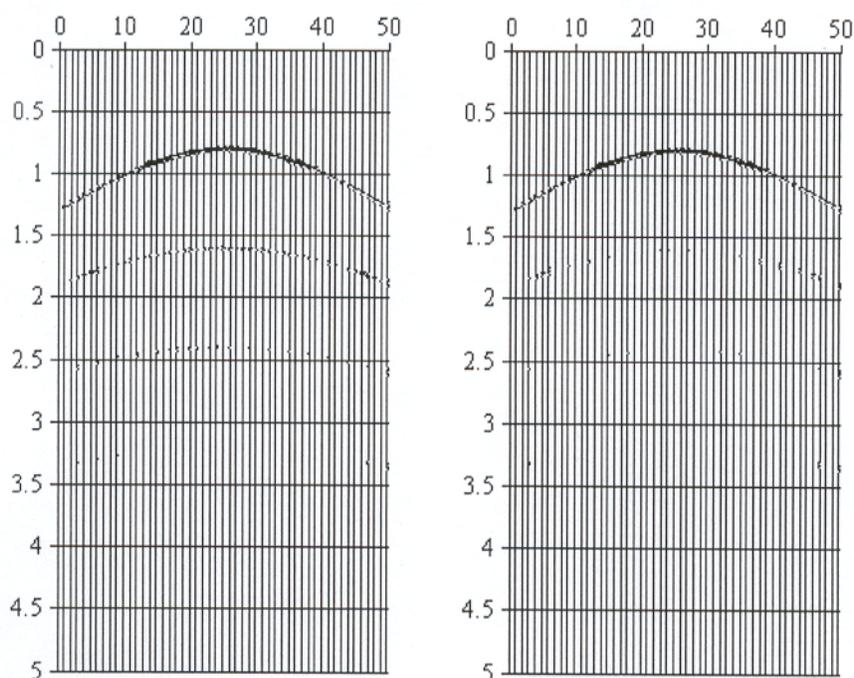


Figura 5.22 - (a) Seção sísmica fonte-comum obtida utilizando o programa seis88. (b) Resultado da aplicação do operador KBCP. Notamos que as múltiplas de primeira, segunda e terceira ordem estão atenuadas.

### Modelo 6

Este macro-modelo é definido como sendo para uma seção geológica longitudinal contendo cinco camadas homogêneas separadas por interfaces contínuas sobre um semi-espaço (Figura 5:23). Por meio de um algoritmo de traçamento de raio foram geradas apenas reflexões primárias para todas as interfaces, para a múltipla foi gerada apenas para a primeira interface. O conjunto de dados consiste de uma seção de fonte-comum com 50 receptores separados por um intervalo de 25m. O sinal-fonte é o Gabor com uma frequência dominante de 40 Hz e amostragem uniforme de 2 ms.

Aplicamos ganho dinâmico na seção com finalidade de melhorar a visualização dos eventos primários e múltiplas presentes na seção (Figura 5.24b). Os resultados obtidos para o Modelo 6 estão ilustrados na Figura 5.24a, onde notamos que o operador KBCP realiza a atenuação da múltipla selecionada, porém não com a precisão das anteriores e a razão disto deve ser devido ao modelo ser mais complexo.

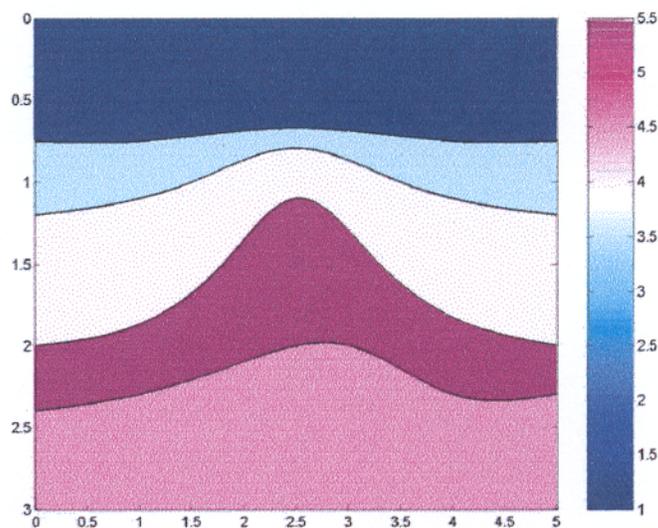


Figura 5.23 - Detalhes da seção geológica utilizada para simulação da seção sísmica evidenciando a variação de velocidade.

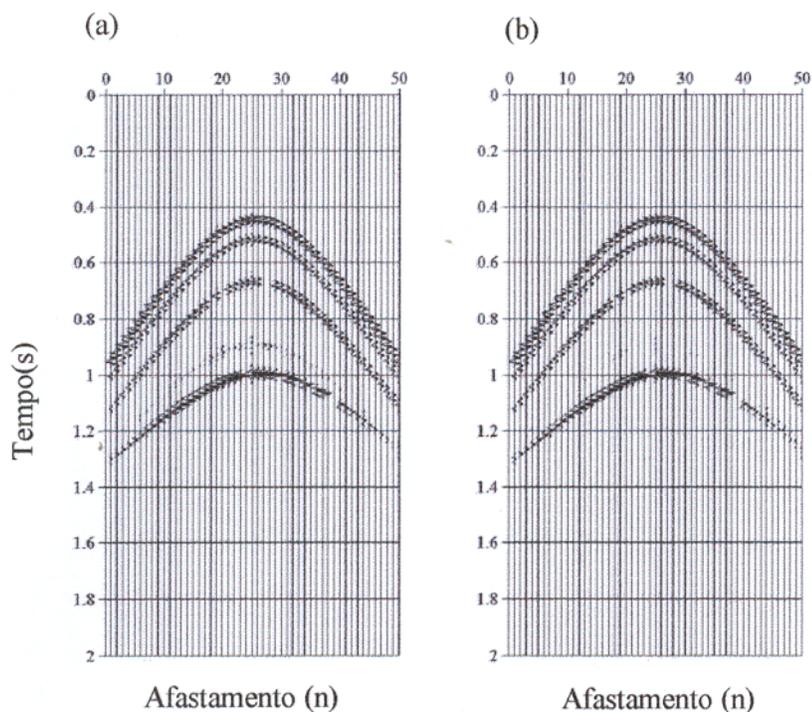


Figura 5.24 - (a) Seção sísmica fonte-comum para a seção geológica usando o programa seis88 com aplicação de ganho na seção, com a finalidade de visualizar melhor os eventos primários e as múltiplas presentes. (b) Seção sísmica após a aplicação do operador KBCP.

### Modelo 7

Este macro-modelo é definido como uma seção geológica longitudinal, contendo cinco camadas homogêneas separadas por interfaces contínuas sobre um semi-espço, (Figura 5.25). Os valores de velocidades e espessuras das camadas estão contidos na Figura 5.25a. Por meio de um algoritmo de traçamento de raio foram geradas apenas reflexões primárias para todas as interfaces, porém a múltipla foi gerada apenas para a primeira interface. O conjunto de dados consiste de uma seção de fonte-comum com 50 receptores separados por um intervalo de 25m. O sinal da fonte é o Gabor com uma frequência dominante de 40 Hz, e intervalo de amostragem uniforme de 2 ms.

Aplicamos ganho dinâmico na seção com a finalidade melhorar a visualização dos eventos primários e das múltiplas presentes na seção (Figura 5.26b). Os resultados obtidos para este modelo estão ilustrados na Figura 5.26c, onde notamos que o operador KBCP realiza a atenuação da múltipla selecionada, porém não com a precisão das anteriores a razão disto deve ser devido ao modelo ser mais complexo.

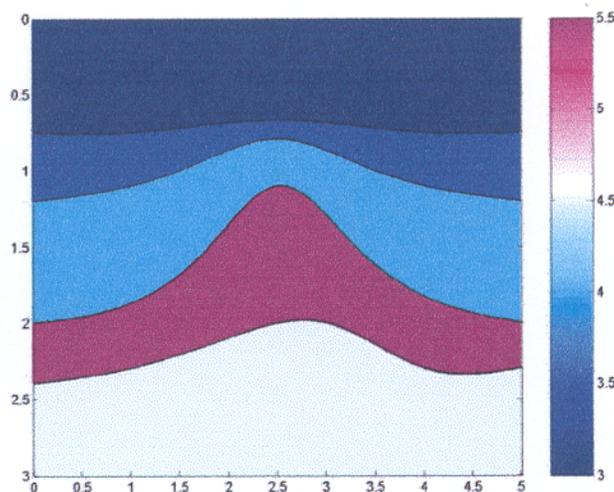


Figura 5.25 - Detalhes da seção geológica utilizada para simulação da seção sísmica evidenciando o modelo de velocidade.

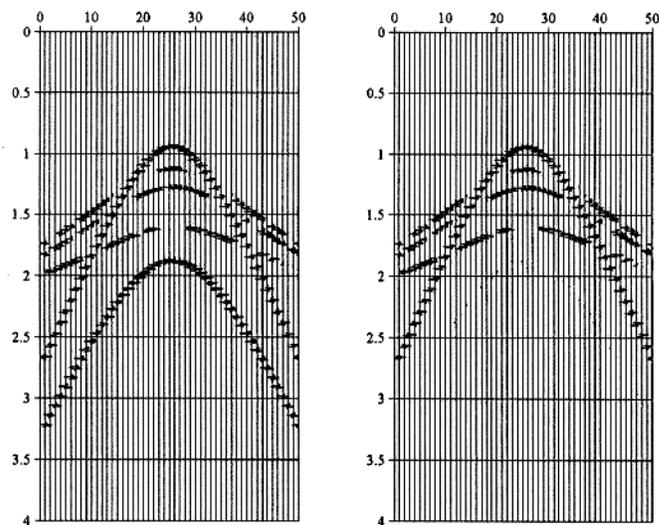


Figura 5.26 - (a) Seção sísmica fonte-comum para a seção geológica usando o programa seis88 com aplicação de ganho na seção com a finalidade de visualizar melhor os eventos primários e as múltiplas presentes nesta seção. (b) Seção sísmica após a aplicação do operador KBCP onde observamos que a múltipla é atenuada

## 7 – CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

A comparação com outros estudos paralelos mostram que a implementação do FKBD e KBCP pode ser mais simples do que a do FWH convencional, e teoricamente a aplicação do FKB dispensa medidas de estacionariedade. A versatilidade do FKB está diretamente relacionada à capacidade de generalização do problema WH quanto a não-estacionariedade na janela dos dados, condição natural de dados geofísicos. O problema reescrito na forma de média-móvel matricial permite a transformação para equações diferenciais ordinárias lineares e não-lineares, através do sistema de variáveis de estado com premissas sobre os processos estocásticos envolvidos.

Os experimentos realizados os resultados obtidos e os com exemplos aqui apresentados nos permitem concluir que o FKBD resolve bem a compressão do pulso-fonte efetivo. O FKBD tem, interessantemente, uma resposta linear ascendente com a frequência, o que não é desastroso por não ser, por exemplo, exponencial. Devido a este fato, descoberto numericamente, demonstramos a necessidade de complementar o processamento com um filtro equalizador, e que o passa-baixa de Ormsby é uma opção. Este assunto (FKBD) foi parcialmente publicado na revista *Brazilian Journal of Geophysics* (LEITE & ROCHA, 2000).

A deconvolução baseada na teoria WH convencional se baseia na condição de pulso-fonte de fase-mínima, e conseqüentemente se limita ao operador teoricamente estacionário e de fase-mínima, negligenciando a componente de fase-não-mínima do pulso-fonte efetivo. Consideramos como vantagem o operador do FKBD ser não-estacionário, e a matriz do pulso-fonte efetivo poder incluir qualquer forma de pulso (mínima, máxima e mista) com uma distribuição qualquer de fase, o que torna o método potencialmente mais versátil, porém com mais engenharia na sua descrição teórica e na aplicação prática.

O operador KBCP consegue realizar uma boa atenuação de múltiplas de superfície nos modelos sintéticos aqui apresentados. O KBCP não permite a identificação de múltiplas, pois para os exemplos mostrados, admitimos conhecer os tempos de trânsito das múltiplas. Este operador proposto precisa até momento estar associado a um outro método que tenha como

característica a predição de múltiplas, visto que esta Tese tem como objetivo também a atenuação de múltiplas.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- AKI, K. & RICHARDS, P. G. (1980). *Quantitative Seismology*. W. H. Freeman and Company. San Francisco, USA.
- ALDRIDGE, D. F. (1990). *The Berlage wavelet*. *Geophysics*, 55: 1508-1511.
- BAYLESS, J. W. & BRIGHAM, E. O. (1970). *Application of the Kalman filter to continuous signal restoration*. *Geophys. Res.*, 35(1): 2-23.
- BERRYMAN, J.G. & GREENE, R.R. (1980). *Discrete inverse methods for elastic waves in layered media*. *Geophysics*, v. 45, n. 1, p. 213-233.
- BREKHOVSKY, L.M. (1980). *Waves in Layered Media*. Academic Press. New York, USA.
- BROWN, R.G. & HWANG, P.Y.C. (1996). *Introduction to Random Signals and Applied Kalman Filtering*. John Wiley & Sons. New York, USA
- BUHL P. ; STOPHA, P. L. & BRYAN, G. M. (1974). *The application of homomorphic deconvolution to shallow-water marine seismology – Part II: Real Data*. *Res.* 39(4): 417-420.
- BURRIDGE, R.; PAPANICOLAOU, G.S. & WHITE, B.S. (1988). *One-dimensional wave propagation in a highly discontinuous medium*. *Wave Motion*, v. 10, p. 19-44.
- CANDY, J.V. (1987). *Signal Processing. The Model-Based Approach*. McGraw-Hill Book Company. New York, USA.
- CHUI, C.K. & CHEN, G. (1987). *Kalman Filtering*. Springer-Verlag. Berlin, Germany.
- CLARK, G. C. (1968). *Time-varying deconvolution filters*. *Geophysics*, 06: 936-944.
- CRUMP, N. (1974). *A Kalman filter approach to the deconvolution of seismic signals*. *Geophys. Res.*, 39(1): 1-13.
- DOUZE, E.J. (1979). *Synthetic seismograms at non-vertical incidence*. *Geophysical Prospecting*, v. 27, p. 564-575.
- GELB, A.; KASPER, J. F.; NASH, R. A.; PRICE, C. F.; SUTHERLAND, A. A. (1974) *Applied Optimal Estimation*. The MIT Press. Massachusetts, USA.
- GOMES, M. V. N. (1998). *Aplicação de deconvolução homomórfica a dados geofísicos*. Dissertação de Mestrado, UFPA. Curso de Pós-Graduação em Geofísica.
- GOUPILLAUD P. L. (1961). *An approach to inverse filtering of near-surface layer effects from seismic records*. *Geophysics Res.*, 26: 754-760.
- HAMILTON, J. D. (1994). *Time Series Analysis*, Princeton University Press New York, USA

- HUBRAL, P. & KREY, T. (1980). *Interval Velocities from Seismic Reflection Time Measurements*. Kenneth L. Lerner. Houston, Texas.
- KHATTRI, K. & GIR, R. (1976). *A study of the seismic signatures of sedimentation models using synthetic seismograms*. Geophysical Prospecting, v. 24, n. 3, p. 454-477.
- KALMAN, R. E., & BUCY, R. E., (1961). *New results in linear filtering and prediction theory*. Trans. ASME, Series D, Journal of Basic Engineering, 83; 95-107.
- LEITE, L. W. B. (1998). *Introdução a Análise Espectral em Geofísica*. Belém, Pará.
- LEITE, L. W. B. & ROCHA, M. P. C. (2000). *Deconvolução de Processo Sísmico Não-Estacionário*. Brazilian Journal of Geophysics. 18(1): 75-89.
- LEWIS, F. L. (1986). *Optimal Estimation*. John Wiley & Sons. New York, USA.
- MENDEL, J. M., (1983). *Optimal Seismic Deconvolution*. Academic Pres. New York, USA.
- MENDEL, J.M. (1990). *Maximum-Likelihood Deconvolution, A Journey into Model-Based Signal Processing*. Springer-Verlag.
- MENDEL, J.M.; NAHI, N.E. & CHAN, M. (1979). *Synthetic seismogram using the state-space approach*. Geophysics, v. 44, n. 5, p. 880-895.
- OGATA, K. (1990). *Modern Control Engineering*. Prentice-Hall. Engewood Cliffs. New Jersey, USA.
- PAPOULIS, A. (1965). *Probability, Randon Variables, and Stochastic Processes*. MacGraw-Hill. New York, USA.
- ROBINSON, E. A. (1967). *Predictive Deconvolution*. Geophysics, (4): 418-484.
- ROBINSON, E. A. & WOLD, H. (1962). *Structural properties of stationary stochastic processes with applications*. Em M. Rosenblatt (editor), Proceedings of the Symposium on Time Series Analysis at Brown University. John Wiley and Sons, Inc. New York, USA. (11): 170-196.
- ROBINSON, E.A. (1999). *Seismic Inversion and Deconvolution. Part B: Dual-sensor Technology*. Pergamon Press. Amsterdam, Netherlands.
- ROCHA, M. P. C. (1998). *Aplicação do Método de Kalman a Dados Geofísicos*. Dissertação de Mestrado, UFPA. Curso de Pós-Graduação em Geofísica.
- SILVA, M. T. & ROBINSON, E. A. (1979). *Deconvolution of Geophysical Time Series in the Exploration for Oil and Natural Gas*. Elsevier Scientific. Amsterdam, Holanda
- SHAPIRO S. A. & HUBRAL P. 1998. *Fundamentals of Seismic Stratigraphic Filtering*. Spinger-Verlag. Alemanha.

- SHERWOOD, J.W.C. & TROREY, A.W. (1965). *Minimum-phase and related properties of the response of a horizontally stratified absorptive earth to plane acoustic waves.* Geophysics, v. 30, n. 2, p. 191-197.
- TEMME, P. & MULLER, G. (1982). *Numerical simulation of vertical seismic profiling.* Journal of Geophysics, v. 50, p. 177-188.
- THYBO, H. (1986). *An algorithm for fast time-domain computation of one-dimensional synthetic vertical seismic profiles.* Geophysical Prospecting, v. 34, p. 833-844.
- ZIOLKOWSKI, A. & FOKKEMA, J.T. (1986). *Tutorial. The progressive attenuation of high-frequency energy in seismic reflection data.* Geophysical Processing, v. 34, p. 981-1001.

# Apêndices

## APÊNDICE A - FILTRO KALMAN-BUCY

### A.1 - FORMA CONTÍNUA

#### A.1 1- Descrição Estocástica dos Processos Envolvidos

Para desenvolver as equações do filtro na forma contínua, Bayless & Brigham (1970) seguem o desenvolvimento original de Kalman (1961) que conserva a relação com a teoria Wiener-Hopf. Iniciamos a formulação com as equações dinâmicas de estado reescritas abaixo na forma mais geral que é tempo-variante:

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{F}(t)\underline{x}(t) + \underline{G}(t)\underline{w}(t), \quad (\text{sistema}), \quad (\text{A1.1})$$

$$\underline{z}(t) = \underline{H}(t)\underline{x}(t) + \underline{v}(t), \quad (\text{medida}). \quad (\text{A1.2})$$

nas formas matriciais

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_{N-1} \\ \dot{x}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_{N-1}(t) \\ x_N(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \underline{w}(t), \quad (\text{A1.3})$$

$$, \quad H = [1 \ 0 \ \cdots \ 0], \quad y(t) = [1 \ 0 \ \cdots \ 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}. \quad (\text{A1.4})$$

$\underline{F}(t)$ ,  $\underline{G}(t)$  e  $\underline{H}(t)$  são matrizes dos elementos variantes em  $t$ , e  $\underline{w}(t)$  é o vetor de geração do estado (sinal)  $\underline{x}(t)$ , o caso mais simples é  $\underline{H}(t) = 1$ .  $\underline{z}(t)$  é a saída selecionada através da forma de  $\underline{H}(t)$  com a presença de ruído aditivo.

Para o desenvolvimento do filtro de Kalman-Bucy é necessário definirmos propriedades estocásticas gerais para os processos  $\underline{w}(t)$  e  $\underline{v}(t)$  envolvidos, que são o valor médio (esperança), a autocorrelação e a correlação cruzada estocásticas dadas por:

$$E\{\underline{w}(t)\} = 0, \quad \phi_{\underline{ww}}(t, \tau) = E\{\underline{w}(t)\underline{w}^T(\tau)\} = \underline{Q}(t)\delta(t-\tau), \quad (\text{A1.5, A1.6})$$

$$E\{\underline{v}(t)\} = 0, \quad \phi_{\underline{vv}}(t, \tau) = E\{\underline{v}(t)\underline{v}^T(\tau)\} = \underline{R}(t)\delta(t-\tau), \quad (\text{A1.7, A1.8})$$

$$\phi_{\underline{wz}}(t, \tau) = E\{\underline{w}(t)\underline{z}^T(\tau)\} = 0, \quad \phi_{\underline{wv}}(t, \tau) = E\{\underline{w}(t)\underline{v}^T(\tau)\} = 0. \quad (\text{A1.9, A1.10})$$

O uso da nomenclatura  $\phi(t, \tau)$  implica em que  $t$  e  $\tau$  são as variáveis de integração, de forma a ficar conveniente com a definição do lado direito, segundo Bayless & Brigham (1970). As matrizes  $\underline{Q}(t)$  e  $\underline{R}(t)$  são matrizes diagonais, significando que todas as componentes do vetor são independentes, portanto elas são correlacionáveis com ela mesma.  $\delta(t)$  é o delta Dirac, que multiplicado por  $\underline{Q}(t)$  e  $\underline{R}(t)$  define matrizes diagonais para as autocorrelações, partindo do pressuposto que o processo é ergódico. Para uma melhor visualização escrevemos as expressões (A1.6) e (A1.8) nas suas formas expandidas:

$$\begin{bmatrix} \phi(t, \tau)_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \phi(t, \tau)_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \phi(t, \tau)_{NN} \end{bmatrix}_{\underline{ww}} = \begin{bmatrix} Q(t)_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & Q(t)_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & Q(t)_{NN} \end{bmatrix} \delta(t-\tau), \quad (\text{A1.11})$$

$$\begin{bmatrix} \phi(t, \tau)_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \phi(t, \tau)_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \phi(t, \tau)_{NN} \end{bmatrix}_{\underline{vv}} = \begin{bmatrix} R(t)_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & R(t)_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & R(t)_{NN} \end{bmatrix} \delta(t-\tau), \quad (\text{A1.12})$$

onde

$$\underline{Q}(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T dt \begin{bmatrix} w_1(\tau) \\ w_2(\tau) \\ \vdots \\ w_N(\tau) \end{bmatrix} [w_1(t-\tau) \quad w_2(t-\tau) \quad \dots \quad w_N(t-\tau)], \quad (\text{A1.13})$$

e

$$\underline{\underline{R}}(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T d\tau \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \\ \vdots \\ v_N(t) \end{bmatrix} [v_1(t-\tau) \quad v_2(t-\tau) \quad \dots \quad v_N(t-\tau)]. \quad (\text{A.1.14})$$

Resolvendo a integral devido a presença de  $\delta(t-\tau)$  ficamos com a matriz diagonal com elementos  $\phi_{ii}(\tau)$ .

### A.1.2 - Introdução da Equação de Medidas nas Propriedades Estocásticas

Aqui introduzimos a equação de medida nas funções autocorrelação e correlação cruzada estocásticas (teóricas) definidas na seção anterior, e que serão utilizadas no desenvolvimento matemático da transformação da equação integral em equações diferenciais ordinárias não-lineares que definem o filtro (Gelb et al, 1974).

Com as propriedades *a priori* definidas na seção anterior, iniciamos a transformação da integral Wiener-Kolmogorov (equação 3.6, seção 3.1), calculando as correlações entre  $\phi_{=zz}(t, \sigma)$  e  $\phi_{=xx}(t, \sigma)$ . Para isto, é necessário o desenvolvimento da correlação cruzada estocástica,  $\phi_{=xz}(t, \sigma)$ , definida por

$$\phi_{=xz}(t, \sigma) = E\{\underline{x}(t)\underline{z}^T(\sigma)\} = E\{\underline{x}(t)[\underline{H}(\sigma)\underline{x}(\sigma) + \underline{v}(\sigma)]^T\}, \quad (\text{A1.15})$$

$$\phi_{=xz}(t, \sigma) = E\{\underline{x}(t)\underline{x}^T(\sigma)\}\underline{H}^T(\sigma) + E\{\underline{x}(t)\underline{v}^T(\sigma)\}. \quad (\text{A1.16})$$

A não correlação entre  $\underline{x}(t)$  e  $\underline{v}(t)$  leva a uma equação intermediária

$$\phi_{=xz}(t, \sigma) = \phi_{=xx}(t, \sigma)\underline{H}^T(\sigma). \quad (\text{A1.17})$$

Para a autocorrelação  $\phi_{=zz}(t, \sigma)$ , temos que

$$\phi_{=zz}(t, \sigma) = E\{\underline{z}(t)\underline{z}^T(\sigma)\} = E\{[\underline{H}(t)\underline{x}(t) + \underline{v}(t)][\underline{H}(\sigma)\underline{x}(\sigma) + \underline{v}(\sigma)]^T\}. \quad (\text{A1.18})$$

Desenvolvendo e reagrupando os seus termos

$$\begin{aligned} \phi_{=zz}(t, \sigma) = & \underline{H}(t)E\{\underline{x}(t)\underline{x}^T(\sigma)\}\underline{H}^T(\sigma) + \underline{H}(t)E\{\underline{x}(t)\underline{v}^T(\sigma)\} \\ & + \underline{H}(t)E\{\underline{v}(t)\underline{x}^T(\sigma)\} + E\{\underline{v}(t)\underline{v}^T(\sigma)\} \end{aligned} \quad (A1.19)$$

Aplicando as relações (A1.8) e (A1.10) em (A1.12), esta simplifica para uma equação intermediária

$$\phi_{=zz}(t, \sigma) = \underline{H}(t)\phi_{=xx}(t, \sigma)\underline{H}^T(\sigma) + \underline{R}(t)\delta(t - \sigma). \quad (A1.20)$$

Continuando, substituindo (A1.17) na equação integral Wiener-Kolmogorov (equação 3.6, seção 3.1) resulta na equação integral

$$\phi_{=xx}(t, \sigma)\underline{H}^T(\sigma) = \int_{t_0}^t \underline{h}(t, \tau)\phi_{=zz}(\tau, \sigma)d\tau; \quad (t_0 < \sigma < t). \quad (A1.21)$$

As expressões (A1.21) e (A1.20) são as relações intermediárias de  $\phi_{=zz}(t, \sigma)$  e  $\phi_{=xx}(t, \sigma)$  que serão simplificadas na próxima seção e aplicadas na equação integral Wiener-Kolmogorov.

### A.1.3 - Introdução da Equação de Estado nas Propriedades Estocásticas

Nesta etapa introduzimos a equação do sistema através da autocorrelação tempo-variante, como passo intermediário a obtenção da equação diferencial da estimativa de estado. Para isto é necessário fazer a diferenciação de  $\phi_{xx}(t, \sigma)$  para que a equação (A1.1) seja introduzida, sendo assim

$$\frac{\partial \phi_{=xx}(t, \sigma)}{\partial t} = E\left\{\frac{d\underline{x}(t)}{dt}\underline{x}^T(\sigma)\right\}. \quad (A1.22)$$

Desenvolvendo-a, temos que:

$$\frac{\partial \phi_{=xx}(t, \sigma)}{\partial t} = E\left\{\underline{F}(t)\underline{x}(t) + \underline{G}(t)\underline{w}(t)\right\}\underline{x}^T(\sigma), \quad (A1.23)$$

$$\frac{\partial \phi_{=xx}(t, \sigma)}{\partial t} = \underline{F}(t)E\{\underline{x}(t)\underline{x}^T(\sigma)\} + \underline{G}(t)E\{\underline{w}(t)\underline{x}^T(\sigma)\}. \quad (A1.24)$$

Considerando as propriedades estocásticas (A1.6) a (A1.10), a equação (A1.24) resulta em

$$\frac{\partial \phi_{=xx}(t, \sigma)}{\partial t} = \underline{\underline{F}}(t) \phi_{=xx}(t, \sigma), \quad (\sigma < t). \quad (\text{A1.25})$$

Multiplicando à direita ambos os lados por  $\underline{\underline{H}}^T(\sigma)$  obtemos

$$\frac{\partial \phi_{=xx}(t, \sigma)}{\partial t} \underline{\underline{H}}^T(\sigma) = \underline{\underline{F}}(t) \phi_{=xx}(t, \sigma) \underline{\underline{H}}^T(\sigma). \quad (\text{A1.26})$$

Continuando, diferenciando a equação (A1.21) usando a regra de Leibniz obtemos

$$\frac{\partial \phi_{=xx}(t, \sigma)}{\partial t} \underline{\underline{H}}^T(\sigma) = \underline{\underline{h}}(t, t) \phi_{=zz}(t, \sigma) + \int_{t_0}^t \frac{\partial \underline{\underline{h}}(t, \tau)}{\partial t} \phi_{=zz}(\tau, \sigma) d\tau, \quad (t_0 < \sigma < t). \quad (\text{A1.27})$$

Analisando o primeiro termo do lado direito,  $\underline{\underline{h}}(t, t)$  aparece naturalmente como resultado da diferenciação, e com a substituição da equação (A1.20) para  $\sigma < t$  obtemos

$$\underline{\underline{h}}(t, t) \phi_{=zz}(t, \sigma) = \underline{\underline{h}}(t, t) \underline{\underline{H}}(t) \phi_{=xx}(t, \sigma) \underline{\underline{H}}^T(\sigma). \quad (\text{A1.28})$$

Transportando (A1.21) para (A1.28) obtemos

$$\underline{\underline{h}}(t, t) \phi_{=zz}(t, \sigma) = \int_{t_0}^t \underline{\underline{h}}(t, t) \underline{\underline{H}}(t) \underline{\underline{h}}(t, \tau) \phi_{=zz}(\tau, \sigma) d\tau, \quad (t_0 < \sigma < t). \quad (\text{A1.29})$$

Substituindo (A1.21) em (A1.26) obtemos

$$\frac{\partial \phi_{=xx}(t, \tau)}{\partial t} \underline{\underline{H}}^T(\sigma) = \int_{t_0}^t \underline{\underline{F}}(t) \underline{\underline{h}}(t, \tau) \phi_{=zz}(\tau, \sigma) d\tau, \quad (t_0 < \sigma < t). \quad (\text{A1.30})$$

Manipulando as expressões (A1.27), (A1.29) e (A1.30) encontramos a equação

$$\int_{t_0}^t \underline{\underline{F}}(t) \underline{\underline{h}}(t, \tau) \phi_{=zz}(\tau, \sigma) d\tau = \int_{t_0}^t \underline{\underline{h}}(t, t) \underline{\underline{H}}(t) \underline{\underline{h}}(t, \tau) \phi_{=zz}(\tau, \sigma) d\tau + \int_{t_0}^t \frac{\partial \underline{\underline{h}}(t, \tau)}{\partial t} \phi_{=zz}(\tau, \sigma) d\tau. \quad (\text{A1.31})$$

Reagrupando os seus termos

$$0 = \int_{t_0}^t \left[ -\underline{\underline{F}}(t) \underline{\underline{h}}(t, \tau) + \underline{\underline{h}}(t, t) \underline{\underline{H}}(t) \underline{\underline{h}}(t, \tau) + \frac{\partial \underline{\underline{h}}(t, \tau)}{\partial t} \right] \phi_{=zz}(\tau, \sigma) d\tau, \quad (t_0 < \sigma < t), \quad (\text{A1.32})$$

como A1.32 deve valer para qualquer  $\phi_{=zz}(\tau, \sigma)$  é necessário que

$$-\underline{\underline{F}}(t)\underline{\underline{h}}(t,\tau) + \underline{\underline{h}}(t,t)\underline{\underline{H}}(t)\underline{\underline{h}}(t,\tau) + \frac{\partial \underline{\underline{h}}(t,\tau)}{\partial t} = 0, \quad (\text{A1.33})$$

logo

$$\frac{\partial \underline{\underline{h}}(t,\tau)}{\partial t} = \underline{\underline{F}}(t)\underline{\underline{h}}(t,\tau) - \underline{\underline{h}}(t,t)\underline{\underline{H}}(t)\underline{\underline{h}}(t,\tau), \quad (t_0 < \tau < t). \quad (\text{A1.34})$$

Esta é a equação diferencial que o operador tempo-variante  $h(t, \tau)$  deve satisfazer, sendo este o resultado desejado nesta seção. A equação (A1.34) acima é usada na próxima seção para achar a equação diferencial para  $\hat{x}(t)$ .

#### A.1.4 - Matriz Ganho e a Solução da Equação Integral

Nesta seção é definida a matriz ganho, e encontrada a forma de solução da equação integral Wiener-Kolmogorov (equação 3.5, seção 3.1), usando as relações (A1.34), (A1.17) e (A1.20) definidas nas seções anteriores, e mantendo as condições de validade da solução no intervalo  $(t_0, t)$ .

Diferenciando a equação integral Wiener-Kolmogorov (equação 3.6, seção 3.1) pela regra de Leibnitz, encontramos uma equação diferencial do valor estimado  $\hat{x}(t)$  na forma

$$\frac{d\hat{x}(t)}{dt} = \underline{\underline{h}}(t,t)\underline{\underline{z}}(t) + \int_{t_0}^t \frac{\partial \underline{\underline{h}}(t,\tau)}{\partial t} \underline{\underline{z}}(t,\tau) d\tau. \quad (\text{A1.35})$$

Introduzindo a equação (A1.34) na equação acima obtemos agora que

$$\dot{\hat{x}}(t) = \underline{\underline{h}}(t,t)\underline{\underline{z}}(t) + \int_{t_0}^t [\underline{\underline{F}}(t)\underline{\underline{h}}(t,\tau) - \underline{\underline{h}}(t,t)\underline{\underline{H}}(t)\underline{\underline{h}}(t,\tau)] \underline{\underline{z}}(t,\tau) d\tau. \quad (\text{A1.36})$$

Reagrupando os seus termos

$$\dot{\hat{x}} = \underline{\underline{h}}(t,t)\underline{\underline{z}}(t) + \int_{t_0}^t \underline{\underline{F}}(t)\underline{\underline{h}}(t,\tau)\underline{\underline{z}}(t,\tau) d\tau - \underline{\underline{h}}(t,t)\underline{\underline{H}}(t) \int_{t_0}^t \underline{\underline{h}}(t,\tau)\underline{\underline{z}}(t,\tau) d\tau, \quad (\text{A1.37})$$

e substituindo equação 3.5, seção 3.1

$$\dot{\hat{x}}(t) = \underline{\underline{h}}(t,t)\underline{\underline{z}}(t) + \underline{\underline{F}}(t)\hat{x}(t) - \underline{\underline{H}}(t)\underline{\underline{h}}(t,t)\hat{x}(t), \quad (\text{A1.38})$$

ou, de forma equivalente

$$\hat{\underline{x}}(t) = \underline{F}(t)\hat{\underline{x}}(t) + \underline{h}(t,t)[\underline{z}(t) - \underline{H}(t)\hat{\underline{x}}(t)]. \quad (\text{A1.39})$$

Esta é uma equação diferencial intermediária para o valor estimado do estado, em termos de funções conhecidas a de informação existente.

Falta obtermos uma expressão explícita para  $\underline{h}(t,t)$ , e isto significa que o intervalo de definição do operador coincidente a dos dados, ou seja,  $\tau = t$ . Neste caso especial, a identificação é  $\underline{h}(t,t) = \underline{K}(t)$  sendo denominado de ganho.

Para deduzirmos a matriz ganho de Kalman,  $\underline{K}(t) = \underline{h}(t,t)$  introduzimos (A1.17) e (A1.20) na equação Wiener-Kolmogorov, para obtermos

$$\underline{\phi}_{xx}(t,\sigma)\underline{H}^T(\sigma) = \int_{t_0}^t \underline{h}(t,\tau) \left[ \underline{H}(t)\underline{\phi}_{xx}(\tau,\sigma)\underline{H}^T(\sigma) + \underline{R}(t)\delta(\tau-\sigma) \right] d\tau, \quad (\text{A1.40})$$

que desdobra para

$$\underline{\phi}_{xx}(t,\sigma)\underline{H}^T(\sigma) = \int_{t_0}^t \underline{h}(t,\tau)\underline{H}(t)\underline{\phi}_{xx}(\tau,\sigma)\underline{H}^T(\sigma)d\tau + \int_{t_0}^t \underline{h}(t,\tau)\underline{R}(t)\delta(\tau-\sigma)d\tau. \quad (\text{A1.41})$$

Para  $\sigma = t$ , condição de coincidência intervalar do filtro em estudo, a expressão acima simplifica para

$$\underline{\phi}_{xx}(t,t)\underline{H}^T(t) - \int_{t_0}^t \underline{h}(t,\tau)\underline{H}(t)\underline{\phi}_{xx}(\tau,t)\underline{H}^T(t)d\tau = \underline{h}(t,t)\underline{R}(t). \quad (\text{A1.42})$$

Por definição, o erro é

$$\Delta \underline{x}(t) = \underline{x}(t) - \hat{\underline{x}}(t). \quad (\text{A1.43})$$

e a covariância do erro dada por

$$\underline{P}(t) = E\{\Delta \underline{x}(t)\Delta \underline{x}^T(t)\}. \quad (\text{A1.44})$$

Substituindo (A1.43) obtemos

$$\underline{P}(t) = E\{\underline{x}(t)\underline{x}^T(t)\} - E\{\hat{\underline{x}}(t)\hat{\underline{x}}^T(t)\}. \quad (\text{A1.45})$$

Substituindo equação integral Wiener-Kolmogorov em (A1.45) obtemos

$$\underline{P}(t) = \underline{\phi}_{xx}(t,t) - \int_{t_0}^t \underline{h}(t,\tau)\underline{\phi}_{zz}(\tau,t)d\tau. \quad (\text{A1.46})$$

Comparando as equações (A1.46) e (A1.42) obtemos a relação

$$\underline{\underline{P}}(t)\underline{\underline{H}}^T(t) = \underline{\underline{h}}(t,t)\underline{\underline{R}}(t), \quad (\text{A1.47})$$

de onde se escreve que

$$\underline{\underline{h}}(t,t) = \underline{\underline{P}}(t)\underline{\underline{H}}^T(t)\underline{\underline{R}}^{-1}(t), \quad (\text{A1.48})$$

definida como a matriz ganho de Kalman  $\underline{\underline{K}}(t)$ , ou seja,

$$\underline{\underline{K}}(t) = \underline{\underline{h}}(t,t) = \underline{\underline{P}}(t)\underline{\underline{H}}^T(t)\underline{\underline{R}}^{-1}(t). \quad [ \underline{\underline{R}}^{-1}(t) \text{ existe} ]. \quad (\text{A1.49})$$

Assim, obtemos a transformação da equação integral Wiener-Kolmogorov para a equação diferencial de estado na forma

$$\frac{d\hat{\underline{\underline{x}}}(t)}{dt} = [ \underline{\underline{F}}(t) - \underline{\underline{K}}(t)\underline{\underline{H}}(t) ] \hat{\underline{\underline{x}}}(t) + \underline{\underline{K}}(t)\underline{\underline{z}}(t). \quad (\text{A1.50})$$

Esta equação é a forma própria ao cálculo numérico. No entanto, para calcular  $\underline{\underline{K}}(t)$  necessitamos achar ainda a equação covariância do erro  $\underline{\underline{P}}(t)$  em termos de  $\underline{\underline{F}}(t)$ ,  $\underline{\underline{H}}(t)$ ,  $\underline{\underline{R}}(t)$ ,  $\underline{\underline{G}}(t)$  e  $\underline{\underline{Q}}(t)$ , o qual será demonstrada na próxima seção.

### A.1.5 - Equação Diferencial de Ricatti

Passamos agora a deduzir a equação diferencial para a covariância do erro  $\underline{\underline{P}}(t)$ , necessária ao cálculo da equação diferencial do estado (sistema). Por definição, a covariância do erro é dada pela expressão

$$\underline{\underline{P}}(t) = E \left\{ \Delta \underline{\underline{x}}(t) \Delta \underline{\underline{x}}^T(t) \right\}. \quad (\text{A1.51})$$

Diferenciando-a

$$\dot{\underline{\underline{P}}}(t) = E \left\{ \frac{d\Delta \underline{\underline{x}}(t)}{dt} \Delta \underline{\underline{x}}^T(t) \right\} + E \left\{ \Delta \underline{\underline{x}}(t) \frac{d\Delta \underline{\underline{x}}(t)^T}{dt} \right\}. \quad (\text{A1.52})$$

O próximo passo é desenvolver os dois termos do lado direito desta equação.

O erro do sistema é dado por

$$\Delta \underline{\underline{x}}(t) = \underline{\underline{x}}(t) - \hat{\underline{\underline{x}}}(t). \quad (\text{A1.53})$$

Substituindo (A1.39), (A1.1) e (A1.2) em (A1.53) obtemos

$$\Delta \dot{\underline{x}}(t) = \underline{\underline{F}}(t)\underline{x}(t) + \underline{\underline{G}}(t)\underline{w}(t) - \underline{\underline{F}}(t)\hat{\underline{x}}(t) - \underline{\underline{K}}(t)\left[\underline{\underline{H}}(t)\underline{x}(t) + \underline{v}(t) - \underline{\underline{H}}\hat{\underline{x}}(t)\right]. \quad (\text{A1.54})$$

Reagrupando os termos

$$\Delta \dot{\underline{x}}(t) = \left[\underline{\underline{F}}(t) - \underline{\underline{K}}(t)\underline{\underline{H}}(t)\right]\Delta \underline{x}(t) - \underline{\underline{K}}(t)\underline{v}(t) + \underline{\underline{G}}(t)\underline{w}(t). \quad (\text{A1.55})$$

A matriz de transição de estado,  $\underline{\underline{\Phi}}(t, t_0)$ , é o propagador reconhecida acima, e

$$\underline{\underline{\Phi}}(t, t_0) = \underline{\underline{F}}(t) - \underline{\underline{K}}(t)\underline{\underline{H}}(t). \quad (\text{A1.56})$$

Com isto, a solução para a equação diferencial (A1.55) equívale a

$$\Delta \underline{x}(t) = \underline{\underline{\Phi}}(t, t_0)\Delta \underline{x}(t_0) - \int_{t_0}^t \underline{\underline{\Phi}}(t, \tau)\underline{\underline{K}}(\tau)\underline{v}(\tau)d\tau + \int_{t_0}^t \underline{\underline{\Phi}}(t, \tau)\underline{\underline{G}}(\tau)\underline{w}(\tau)d\tau. \quad (\text{A1.57})$$

De acordo com equação (A1.55), podemos expandir o primeiro termo da equação (A1.52) da seguinte forma

$$E\left\{\frac{d\Delta \underline{x}(t)}{dt}\Delta \underline{x}^T(t)\right\} = E\left\{\left[\left(\underline{\underline{F}}(t) - \underline{\underline{K}}(t)\underline{\underline{H}}(t)\right)\Delta \underline{x}(t) - \underline{\underline{K}}(t)\underline{v}(t) + \underline{\underline{G}}(t)\underline{w}(t)\right]\Delta \underline{x}^T(t)\right\}. \quad (\text{A1.58})$$

Reagrupando os termos

$$E\left\{\frac{d\Delta \underline{x}(t)}{dt}\Delta \underline{x}^T(t)\right\} = \left[\underline{\underline{F}}(t) - \underline{\underline{K}}(t)\underline{\underline{H}}(t)\right]E\left\{\Delta \underline{x}(t)\Delta \underline{x}^T(t)\right\} - \underline{\underline{K}}(t)E\left\{\underline{v}(t)\Delta \underline{x}^T(t)\right\} + \underline{\underline{G}}(t)E\left\{\underline{w}(t)\Delta \underline{x}^T(t)\right\}. \quad (\text{A1.59})$$

Observamos que para resolver a equação (A1.59) é necessário encontrarmos as correlações cruzadas  $\phi_{=v\Delta x}(t, t)$  e  $\phi_{=w\Delta x}(t, t)$ . Primeiramente, consideramos a expressão

$$\phi_{=v\Delta x}(t, t) = E\left\{\underline{v}(t)\Delta \underline{x}^T(t)\right\}, \quad (\text{A1.60})$$

onde não podemos afirmar sobre as condições de não correlação devido ao desdobramento de  $\Delta \underline{x}(t)$ . Usando a equação (A1.57) obtemos

$$\phi_{=v\Delta x}(t, t) = E\left\{\underline{v}(t)\left[\underline{\underline{\Phi}}(t, t_0)\Delta \underline{x}(t_0) - \int_{t_0}^t \underline{\underline{\Phi}}(t, \tau)\underline{\underline{K}}(\tau)\underline{v}(\tau)d\tau + \int_{t_0}^t \underline{\underline{\Phi}}(t, \tau)\underline{\underline{G}}(\tau)\underline{w}(\tau)d\tau\right]^T\right\}. \quad (\text{A1.61})$$

Reescrevendo-a, com  $\underline{\underline{\Phi}}^T(t, t_0) = \underline{\underline{\Phi}}(t, t_0)$ ,

$$\begin{aligned} \underline{\phi}_{=v\Delta x}(t,t) &= \underline{\Phi}^T(t,t_0) E \left\{ \underline{v}(t) \underline{\Delta x}^T(t) \right\} - \int_{t_0}^t E \left\{ \underline{v}(t) \underline{v}^T(\tau) \right\} \underline{K}^T(t) \underline{\Phi}^T(t,\tau) d\tau \\ &+ \int_{t_0}^t E \left\{ \underline{v}(t) \underline{w}^T(\tau) \right\} \underline{\Phi}^T(t,\tau) \underline{G}(t) d\tau. \end{aligned} \quad (\text{A1.62})$$

Usando propriedades A1.9 e A1.10 de não-correlação, deduzimos que

$$\underline{\phi}_{=v\Delta x}(t,t) = - \int_{t_0}^t E \left\{ \underline{v}(t) \underline{v}^T(\tau) \right\} \underline{K}^T(\tau) \underline{\Phi}^T(t,\tau) d\tau. \quad (\text{A1.63})$$

A partir da equação (A1.8)

$$\underline{\phi}_{=vv}(t,\tau) = \underline{R}(t) \delta(t-\tau), \quad (\text{A1.64})$$

que substituindo em (A1.63), esta resulta em

$$\underline{\phi}_{=v\Delta x}(t,t) = - \int_{t_0}^t \underline{R}(t) \underline{K}^T(\tau) \underline{\Phi}^T(t,\tau) \delta(t-\tau) d\tau \quad (\text{A1.65})$$

A integral (A1.65) tem para limite superior  $t$ . O impulso unitário é descrito através de funções simétricas-par como:

$$\delta(t) = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{1}{T} \Pi\left(\frac{t}{T}\right), \quad (\text{A1.66})$$

onde a função retangular é simétrica e definida por

$$\frac{1}{T} \Pi\left(\frac{t}{T}\right) = \begin{cases} \frac{1}{T}, & |t| < T \\ 0, & \text{de outro modo} \end{cases} \quad (\text{A1.67})$$

Para o problema em questão o integrando é causal. Também  $\underline{\Phi}(t_0, t_0) = \underline{I}$ . Com isto, a equação (A1.65) resulta na forma abaixo por cobrir apenas a metade do intervalo de simetria de  $\delta(t)$

$$\underline{\phi}_{=v\Delta x}(t,t) = - \frac{1}{2} \underline{R}(t) \underline{K}^T(t). \quad (\text{A1.68})$$

De forma similar, determinamos  $\underline{\phi}_{=w\Delta x}(t,t)$  pelas seguintes relações:

$$\underline{\phi}_{=w\Delta x}(t,t) = E \left\{ \underline{w}(t) \underline{x}^T(t) \right\}, \quad (\text{A1.69})$$

$$\phi_{=w\Delta x}(t, t) = \int_{t_0}^t E \left\{ \underline{w}(t) \underline{w}^T(\tau) \right\} \underline{G}^T(t) \underline{\Phi}(t, \tau) d\tau, \quad (\text{A1.70})$$

de onde

$$\phi_{=w\Delta x}(t, t) = \frac{1}{2} \underline{Q}(t) \underline{G}^T(t). \quad (\text{A1.71})$$

Substituindo as equações (A1.68), (A1.71) em (A1.59) obtemos

$$E \left\{ \frac{d\Delta \underline{x}}{dt} \Delta \underline{x}^T(t) \right\} = \left[ \underline{F}(t) - \underline{K}(t) \underline{H}(t) \right] \underline{P}(t) + \frac{1}{2} \underline{K}(t) \underline{R}(t) \underline{K}^T(t) + \frac{1}{2} \underline{G}(t) \underline{Q}(t) \underline{G}^T(t). \quad (\text{A1.72})$$

De forma análoga, obtemos o segundo termo da expressão (A1.52) como sendo dada por

$$E \left\{ \Delta \underline{x}(t) \frac{d\Delta \underline{x}}{dt}^T(t) \right\} = \left[ \underline{F}(t) - \underline{K}(t) \underline{H}(t) \right]^T \underline{P}(t) + \frac{1}{2} \underline{K}(t) \underline{R}(t) \underline{K}^T(t) + \frac{1}{2} \underline{G}(t) \underline{Q}(t) \underline{G}^T(t). \quad (\text{A1.73})$$

Somando (A1.72) com (A1.73) temos, de acordo com (A1.52), que

$$\begin{aligned} \dot{\underline{P}}(t) = & \left[ \underline{F}(t) - \underline{K}(t) \underline{H}(t) \right] \underline{P}(t) + \underline{P}(t) \left[ \underline{F}(t) - \underline{K}(t) \underline{H}(t) \right]^T + \\ & + \underline{K}(t) \underline{R}(t) \underline{K}^T(t) + \underline{G}(t) \underline{Q}(t) \underline{G}^T(t). \end{aligned} \quad (\text{A1.74})$$

Finalmente, usando (A1.49), chegamos a equação diferencial matricial não-linear de Ricatti para a covariância do erro:

$$\dot{\underline{P}}(t) = \underline{F}(t) \underline{P}(t) + \underline{P}(t) \underline{F}^T - \underline{P}(t) \underline{H}^T(t) \underline{R}^{-1}(t) \underline{H}(t) \underline{P}(t) + \underline{G}(t) \underline{Q}(t) \underline{G}^T(t). \quad (\text{A1.75})$$

Observamos com estes resultados que a transformação da equação integral Wiener-Kolmogorov é centrada na equação diferencial ordinária linear de estado, tendo acoplado a ela uma equação não-linear de Ricatti para o ganho  $\underline{P}(t)$ .

As equações diferenciais que fazem parte da formulação completa do filtro Kalman-Bucy (A1.49), (A1.50) e (A1.75) na forma contínua estão sumarizadas na Tabela A.1.

Tabela A.1 - Equações do filtro Kalman-Bucy na forma contínua.

Modelo do sistema	$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{F}(t)\underline{x}(t) + \underline{G}(t)\underline{w}(t)$
Medida do modelo	$\underline{z}(t) = \underline{H}(t)\underline{x}(t) + \underline{v}(t)$
Condições iniciais	$E\{\underline{x}(0)\} = \hat{\underline{x}}_0, E\{(\underline{x}(0) - \hat{\underline{x}}_0)(\underline{x}(0) - \hat{\underline{x}}_0)^T\} = P_0$
Estimativa do estado	$\dot{\hat{\underline{x}}}(t) = \underline{F}(t)\hat{\underline{x}}(t) + \underline{K}(t)[\underline{z}(t) - \underline{H}(t)\hat{\underline{x}}(t)]$
Matriz de covariância do erro	$\underline{P}(t) = \underline{F}(t)\underline{P}(t) + \underline{P}(t)\underline{F}^T(t) + \underline{G}(t)\underline{Q}(t)\underline{G}^T(t) - \underline{K}(t)\underline{R}(t)\underline{K}^T(t)$
Matriz ganho	$\underline{K}(t) = \underline{P}(t)\underline{H}^T(t)\underline{R}^{-1} = [\underline{P}(t)\underline{H}^T(t) + \underline{G}(t)\underline{H}(t)]\underline{R}^{-1}(t)$

### A.3.2 - APROXIMAÇÃO AO DISCRETIZADO

O estudo desta seção é transformar as equações diferenciais linear de estado e não-linear de Ricatti que definem o filtro Kalman-Bucy na forma contínua, vistas na seção anterior, para a forma discretizada com o objetivo de escreve-las na forma conveniente ao cálculo computacional. Para isto, dividimos esta seção em quatro partes que são apresentadas a seguir tendo como referência básica LEWIS (1986).

#### A.2.1 - Aproximações Básicas

Iniciamos com a aproximação de Euler, para descrever algumas equações necessárias nas próximas etapas.

Partindo da equação

$$\underline{\Phi}(k\Delta t) = e^{\underline{F}\Delta t} = \underline{I} + \underline{F}(t)\Delta t + \frac{1}{2!}\underline{F}^2(t)\Delta t^2 + \frac{1}{3!}\underline{F}^3(t)\Delta t^3 + \dots \quad (\text{A1.76})$$

Portanto, quando  $\Delta t \rightarrow 0$ , desprezando os termos de ordem superior a  $F^2$  encontramos o seguinte aproximação linear

$$\underline{\underline{w}}_k \Delta t = \underline{\underline{\Phi}}_k = \underline{\underline{I}} + \underline{\underline{F}}_k t \Delta t. \quad (\text{A1.77})$$

A autocovariância da função forçante  $w_k$ , é definida por

$$\underline{\underline{Q}}(t, \tau) = E\{w(t)w(\tau)^T\}, \quad (t = k\Delta t, \quad \tau = k\Delta t), \quad (\text{A1.78})$$

e segundo Lewis (1986) temos que

$$\underline{\underline{w}}(\Delta t) = \int_0^{\Delta t} \underline{\underline{\Phi}}(\Delta t - \tau) \underline{\underline{G}}(t) w(\tau) d\tau. \quad (\text{A1.79})$$

Substituindo (A1.79) em (A1.78) resulta em

$$\underline{\underline{Q}}(\Delta t) = \int_0^{\Delta t} \int_0^{\Delta t} \underline{\underline{\Phi}}(\Delta t - \tau) \underline{\underline{G}}(t) E\{w(t)w^T(\tau)\} \underline{\underline{G}}^T(t) \underline{\underline{\Phi}}(\Delta t - \tau) d\tau dt. \quad (\text{A1.80})$$

Rescrevendo a equação (A1.6) na forma

$$E\{w(t)w^T(\tau)\} = \underline{\underline{Q}}(t)\delta(t - \tau), \quad (\text{A1.81})$$

e introduzindo (A1.81) em (A1.80) obtemos

$$\underline{\underline{Q}}(\Delta t) = \int_0^{\Delta t} \underline{\underline{\Phi}}(\Delta t - \tau) \underline{\underline{G}}(t) \underline{\underline{Q}}(t) \underline{\underline{G}}^T(t) \underline{\underline{\Phi}}(\Delta t - \tau) d\tau. \quad (\text{A1.82})$$

Usando as propriedades de integral definida de Riemann podemos reescrever a equação (A1.82) e a (A1.79) na forma numérica

$$\underline{\underline{Q}}_{=k} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{N-1} \underline{\underline{\Phi}}(\Delta t) \underline{\underline{G}}(\xi_i) \underline{\underline{Q}}(\xi_i) \underline{\underline{G}}^T(\xi_i) \underline{\underline{\Phi}}(\Delta t) \Delta t \quad (\text{A1.83})$$

e

$$\underline{\underline{w}}_k = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{N-1} \underline{\underline{\Phi}}(\Delta t) \underline{\underline{G}}(\xi_i) w(\xi_i) \Delta t, \quad (\text{A1.84})$$

onde  $t_i \leq \xi_i \leq t_{i+1}$ ;  $\Delta t = t_{i+1} - t_i$ ;  $i = 0, 1, 2, \dots, (N-1)$ . Substituindo (A1.77) nas expressões (A1.84) e (A1.83) obtemos

$$\underline{\underline{Q}}_{=k} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{N-1} (\underline{\underline{I}} + \underline{\underline{F}}(t)\Delta t) \underline{\underline{G}}(\xi_i) \underline{\underline{Q}}(\xi_i) \underline{\underline{G}}^T(\xi_i) (\underline{\underline{I}} + \underline{\underline{F}}(t)\Delta t) \Delta t, \quad (\text{A1.85})$$

e

$$\underline{w}_k = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{N-1} (\underline{I} + \underline{F}(t)\Delta t) \underline{G}(\xi_i) \underline{w}(\xi_i) \Delta t. \quad (\text{A1.86})$$

Reagrupando e desprezando os termos de ordem superior obtemos o seguinte resultado para as expressões acima

$$\underline{Q}_{=k} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{N-1} \underline{G}(\xi_i) \underline{Q}(\xi_i) \underline{G}^T(\xi_i) \Delta t, \quad (\text{A1.87})$$

e

$$\underline{w}_k = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{N-1} \underline{G}(\xi_i) \underline{w}(\xi_i) \Delta t. \quad (\text{A1.88})$$

Portanto, podemos considerar no limite as seguintes relações:

$$\underline{Q}_{=k} = \underline{G}(t) \underline{Q}(t) \underline{G}^T(t) \Delta t, \quad (\text{A1.89})$$

e

$$\underline{w}_k = \underline{G}(t) \underline{w}(t) \Delta t. \quad (\text{A1.90})$$

A partir das definições na seção A1-1, a autocovariância  $\underline{R}(t)$  diagonal é dada por

$$\underline{R}(t) = E\{\underline{v}(t)\underline{v}^T(\tau)\} = \underline{R}(t)\delta(t-\tau), \quad (\text{A1.91})$$

A seqüência ruído branco discretizado pode ser tratada para aproximar ao processo de ruído branco contínuo, reduzindo o comprimento ( $\Delta t$ ) e incrementando sua amplitude, de forma que  $R_k \rightarrow R/\Delta t$ . Isto é, no limite  $\Delta t \rightarrow 0$ , a função ruído branco discretizado tende para o valor de um dos pulsos de duração zero, assim a área sob a função de autocorrelação e  $R_k \Delta t$  igual a área sobre a função contínua de autocorrelação, (GELB et al, 1974). Com isto, temos definido as três relações básicas desejáveis (A1.89), (A1.90) e (A1.77).

### A.2.2 - Equação Diferencial de Estado Discretizada

Passamos agora a transformar as equações do filtro Kalman na forma contínua para a forma discretizada para cálculo em computador, utilizando as aproximações da seção anterior. Iniciamos com a equação diferencial de estado dada por

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{F}(t)\underline{x}(t) + \underline{G}(t)\underline{w}(t). \quad (\text{A1.92})$$

Aplicando a simples aproximação de Euler, temos que

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x_{k+1} - x_k}{\Delta t} = \underline{\underline{F}}(t)x_k + \underline{\underline{G}}(t)w_k. \quad (\text{A1.93})$$

Na forma recursiva

$$x_{k+1} = x_k \left( I + \underline{\underline{F}}(t)\Delta t \right) + \underline{\underline{G}}(t)w(t)\Delta t. \quad (\text{A1.94})$$

Considerando as relações (A1.77) e (A1.90) em (A1.94) temos que

$$x_{k+1} = x_k \underline{\underline{\Phi}}_k + w_k \quad (\text{A1.95})$$

### A.2.3 - Equação Diferencial da Estimativa do Discretizada

Partimos para a discretização da equação diferencial da estimativa do erro definida pela equação (A1.45) pelo mesmo procedimento da seção anterior. Com,

$$\frac{d\hat{x}(t)}{dt} = \left[ \underline{\underline{F}}(t) - \underline{\underline{K}}(t)\underline{\underline{H}}(t) \right] \hat{x}(t) + \underline{\underline{K}}(t)z(t), \quad (\text{A1.96})$$

e utilizando a aproximação de Euler, e considerando a amostragem na forma

$$\hat{x}(t) = \hat{x}(k\Delta t) \quad \text{e} \quad z(t) = z(k\Delta t), \quad [k\Delta t \leq t \leq (k+1)\Delta t], \quad (\text{A1.97})$$

obtemos

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\hat{x}_{k+1} - \hat{x}_k}{\Delta t} = \left[ \underline{\underline{F}}(t) - \underline{\underline{K}}(t)\underline{\underline{H}}(t) \right] \hat{x}_k + \underline{\underline{K}}(t)z_k, \quad (\text{A1.98})$$

escrevendo na forma recursiva e reagrupando os termos, então,

$$\hat{x}_{k+1} = \hat{x}_k \left[ I + \underline{\underline{F}}(t)\Delta t \right] + \underline{\underline{K}}(t)\Delta t \left[ z_k - \underline{\underline{H}}(t)\hat{x}_k \right]. \quad (\text{A1.99})$$

Com as relações

$$\underline{\underline{\Phi}}_k = I + \underline{\underline{F}}_k \Delta t, \quad (\text{A1.100})$$

e

$$\underline{\underline{K}}_k = \underline{\underline{K}}(t)\Delta t, \quad (\text{A1.101})$$

substituindo-as em (A1.99) obtemos

$$\hat{x}_{k+1} = \underline{\underline{\Phi}}_k \hat{x}_k + \underline{\underline{K}}_k \left( z_k - \underline{\underline{H}}_k \hat{x}_k \right). \quad (\text{A1.102})$$

Escrevemos a equação (A1.102) na forma da estimativa procurada para a variável de estado atualizado ao redor do ponto de medida  $k$  segundo a amostragem de ordem zero. Considerando a extrapolação da estimativa da variável de estado como sendo dado por

$$\hat{\underline{x}}_{k+1}(-) = \underline{\Phi}_k \hat{\underline{x}}_k(+), \quad (\text{A1.103})$$

que substituída em (A1.102) resulta em

$$\hat{\underline{x}}_{k+1}(+) = \hat{\underline{x}}_{k+1}(-) + \underline{K}_k \left[ z_k - \underline{H}_k \hat{\underline{x}}_{k+1}(-) \right], \quad (\text{A1.104})$$

definida como a estimativa atualizado do estado.

#### A.2.4 - Equação de Ricatti na Forma Discretizada

Para o caso da equação diferencial matricial da covariância do erro, procedemos de forma similar como foi realizado nas seções anteriores. Dada a equação de Ricatti na forma contínua (A1.75), isto é,

$$\frac{d\underline{P}(t)}{dt} = \underline{F}(t)\underline{P}(t) - \underline{P}(t)\underline{F}^T(t) - \underline{P}(t)\underline{H}^T(t)\underline{R}^{-1}(t)\underline{H}(t)\underline{P}(t) + \underline{G}(t)\underline{Q}(t)\underline{G}^T(t). \quad (\text{A1.105})$$

Segundo a aproximação de Euler

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\underline{P}_{k+1} - \underline{P}_k}{\Delta t} = \underline{F}(t)\underline{P}(t) - \underline{P}(t)\underline{F}^T(t) - \underline{P}(t)\underline{H}^T(t)\underline{R}^{-1}(t)\underline{H}(t)\underline{P}(t) + \underline{G}(t)\underline{Q}(t)\underline{G}^T(t). \quad (\text{A1.106})$$

Temos que a matriz ganho (A1.49) é definida por

$$\underline{K}(t) = \underline{P}(t)\underline{H}^T(t)\underline{R}^{-1}(t). \quad (\text{A1.107})$$

Substituindo-a em (A1.106), escrevendo a forma recursiva e reagrupando os termos, obtemos que

$$\underline{P}_{k+1} = \left( \underline{I} + \underline{F}(t)\Delta t \right) \underline{P}_k \left( \underline{I} + \underline{F}(t)\Delta t \right)^T - \underline{K}(t)\underline{H}(t)\underline{P}_k \Delta t - \underline{G}(t)\underline{Q}(t)\underline{G}^T(t)\Delta t. \quad (\text{A1.108})$$

Usando as aproximações (A1.77) e (A1.89) em (A1.108), isto é,

$$\underline{\Phi}(\Delta t) = \underline{\Phi}_k = \underline{I} + \underline{F}(t)\Delta t \quad (\text{A1.109})$$

e

$$\underline{Q}_k = \underline{G}(t)\underline{Q}(t)\underline{G}^T(t)\Delta t, \quad (\text{A1.110})$$

obtemos como resultado

$$\underline{P}_{k+1} = \underline{\Phi}_k \underline{P}_k \underline{\Phi}_k^T - \underline{K}_k \underline{H}_k \underline{P}_k + \underline{Q}_k. \quad (\text{A1.111})$$

Consideremos que a extrapolação de  $\underline{P}_{k+1}$  é dada por

$$\underline{P}_{k+1}(-) = \underline{\Phi}_k \underline{P}_k(+) \underline{\Phi}_k^T + \underline{Q}_k. \quad (\text{A1.112})$$

Então, representamos a covariância do erro atualizado como

$$\underline{P}_{k+1}(+) = \underline{P}_{k+1}(-) - [\underline{K}_k \underline{H}_k \underline{P}_{k+1}(-)], \quad (\text{A1.113})$$

ou, equivalentemente,

$$\underline{P}_{k+1}(+) = [I - \underline{K}_k \underline{H}_k] \underline{P}_{k+1}(-). \quad (\text{A1.114})$$

As equações que fazem parte da formulação do filtro Kalman-Bucy na forma discretizada obtidas neste capítulo estão sumarizadas nas Tabelas A2.

Tabela A2 - Equações do filtro Kalman-Bucy na forma discretizada.

Modelo do sistema	$\underline{x}_{k+1} = \underline{\Phi}_k \underline{x}_k + \underline{w}_k$
Modelo de medidas	$\underline{z}_{k+1} = \underline{H}_{k+1} \underline{x}_{k+1} + \underline{v}_k$
Condições iniciais	$E\{\underline{x}(0)\} = \hat{\underline{x}}_0, \quad E\{(\underline{x}(0) - \hat{\underline{x}}_0)(\underline{x}(0) - \hat{\underline{x}}_0)^T\} = \underline{P}_0$
Extrapolação da estimativa do estado	$\hat{\underline{x}}_{k+1}(-) = \underline{\Phi}_k \hat{\underline{x}}_k(+)$
Extrapolação da covariância do erro	$\underline{P}_{k+1}(-) = \underline{\Phi}_k \underline{P}_k(+) \underline{\Phi}_k^T + \underline{Q}_k$
Estimativa do estado atualizado	$\hat{\underline{x}}_{k+1}(+) = \hat{\underline{x}}_{k+1}(-) + \underline{K}_{k+1} [\underline{z}_{k+1} - \underline{H}_{k+1} \hat{\underline{x}}_{k+1}(-)]$
Covariância do erro atualizado	$\underline{P}_{k+1}(+) = [I - \underline{K}_{k+1} \underline{H}_{k+1}] \underline{P}_{k+1}(-)$
Matriz de ganho	$\underline{K}_{k+1} = \underline{P}_{k+1}(-) \underline{H}_{k+1}^T [\underline{H}_{k+1} \underline{P}_{k+1}(-) \underline{H}_{k+1}^T + \underline{R}_{k+1}]^{-1}$

## APÊNDICE B – ANELASTICIDADE

### B.1– Definição do fator de qualidade $Q$

Para um volume de material sob tensão cíclica de frequência  $\omega$ , a medida do atrito interno, ou anelasticidade, é dada por

$$Q(\omega) = -\frac{2\pi E}{\Delta E}, \quad (\text{B.1})$$

onde  $E$  é a energia de deformação armazenada no volume,  $-\Delta E$  é a energia perdida em cada ciclo devido as imperfeições na elasticidade do material,  $Q$  é o fator de qualidade do material, dependente da frequência  $\omega$  (AKI E RICHARDS, 1980).

Para um meio com relação linear tensão-deformação, a amplitude  $A$  da onda é proporcional a  $E^{1/2}$ . Por exemplo,  $A$  pode representar a velocidade máxima da partícula, ou um componente de deformação da onda. Admitimos também que  $Q \gg 1$ . Portanto,

$$Q(\omega) = -\pi \frac{A}{\Delta A}, \quad (\text{B.2})$$

onde podemos obter as flutuações das amplitudes devido a atenuação.

A obtenção da forma  $A = A(x)$  função da distância  $x$ , é simples desde que o pico máximo de uma onda particular pode ser mostrado ao longo da distância  $dx$ , e o decaimento espacial gradual de  $A$  pode ser observado. Consideramos que a direção da atenuação máxima é ao longo do eixo  $x$ , na qual também é a direção de propagação. Então

$$\Delta A = \frac{dA}{dx} \lambda, \quad (\text{B.3})$$

onde  $\lambda$  é o comprimento de onda dado em termo de  $\omega$  e a velocidade de fase  $c$

$$\lambda = \frac{2\pi v_p}{\omega}, \quad (\text{B.4})$$

substituindo (B.4) em (B.3) obtemos

$$\Delta A = \frac{dA}{dx} \frac{2\pi v_p}{\omega}. \quad (\text{B.5})$$

Agora, substituindo (B.5) em (B.2) encontramos

$$\frac{1}{Q} = \frac{dA}{dx} \frac{v_p}{\omega} \quad \text{ou} \quad \frac{dA}{dx} = - \left( \frac{\omega}{2Qv_p} \right) A. \quad (\text{B.6, B.7})$$

Escrevendo  $A(x)$  na forma de decaimento exponencial temos

$$A(x) = A_0 e^{\left( \frac{-\omega x}{2v_p Q} \right)}, \quad (\text{B.8})$$

ou

$$A(x) = A_0 e^{(-\alpha(\omega)x)}, \quad (\text{B.9})$$

onde  $\alpha(\omega)$  é

$$\alpha(\omega) = \frac{\omega}{2v_p(\omega)Q}. \quad (\text{B.10})$$

## APÊNDICE C - GLOSSÁRIO

### 1. ESTADO

Estado de um sistema dinâmico é o menor conjunto de variáveis (chamado variáveis de estado), tal que o conhecimento destas variáveis em  $t = t_0$ , junto com o conhecimento da entrada para  $t \geq t_0$ , determina completamente o comportamento do sistema para qualquer instante  $t \geq t_0$ .

### 2. VARIÁVEL DE ESTADO

As variáveis de estado de um sistema dinâmico são as variáveis que constituem o menor conjunto de variáveis que determinam o estado do sistema dinâmico. Se pelo menos  $n$  variáveis  $x_1, x_2, \dots, x_n$  são necessárias para descrever completamente o comportamento de um sistema dinâmico então o estado futuro do sistema está completamente determinado.

### 3. PROCESSO ESTOCÁSTICO

A palavra “estocástico” é, normalmente, considerada sinônima da palavra “aleatória”, conseqüentemente, a expressão “processo estocástico” e “processo aleatório” são intercambiáveis. No entanto, alguns autores reservam a palavra estocásticos para processos aleatórios onde a variável independente é o tempo. Um processo é composto por um conjunto de realizações (ou eventos) e representado por uma variável aleatória. Um sinal é considerado aleatório se ele não tem início nem fim, e se o seu valor preciso não pode ser predito num estágio posterior.

### 4. PROCESSO ESTACIONÁRIO

Num processo estocástico estacionário tem algumas propriedades tempo-invariante. Existem dois tipos de estacionariedade (Hamilton, 1994)

- a) Estacionariedade estrita ou forte: Quando a forma de distribuição conjunta do processo permanece invariante sob uma forma temporal. Na prática é muito difícil especificar a distribuição conjunta de processo estocástico. Com conseqüência define uma versão mais fraca de estacionariedade, chamada de estacionariedade fraca ou de segunda ordem, onde apenas alguns parâmetros do processo permanecem invariantes no tempo.
- b) Estacionariedade ampla ou fraca: A média e a variância do processo são constantes no tempo.

## 5. PROCESSO DETERMINÍSTICO

O processo determinístico é baseado nas teorias físico-matemáticas de geração e propagação de ondas, e envolve equações diferenciais e integrais que satisfazem condições de contorno e iniciais. Isto é, não utiliza teorias estatísticas para gerar ondas. (Leite, 1998)

## 6. ERGOCIDADE

É o princípio que permite calcular a média de uma variável aleatória (tempo fixo), através da média temporal. Isto é, substituindo o eixo  $x$  pelo eixo  $t$ . A ergodicidade é uma propriedade importante na prática, uma vez é difícil (senão impossível) realizar uma série infinita de medidas de modo a poder calcular média do conjunto. Todo processo ergódico é estacionário, porém o inverso não é verdadeiro. Exemplo de correlação cruzada

$$\bar{\phi}_{gf}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \underline{g}(t) \underline{f}(t - \tau) dt = E\{\phi_{gf}(\tau)\}.$$