

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
CENTRO DE GEOCIÊNCIAS
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM
GEOFÍSICA

ENSAIOS SOBRE A CONTRIBUIÇÃO DO AR NOS RESULTADOS DA
MODELAGEM DO MODO TRANSVERSO-ELÉTRICO DO MÉTODO
MAGNETOTELÚRICO

DISSERTAÇÃO APRESENTADA POR
MICHAEL HEIMER

COMO REQUISITO PARCIAL À OBTENÇÃO DE GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS NA
ÁREA DE GEOFÍSICA

Data da Aprovação: 29 de setembro de 2001

NOTA: 9,7 (Excelente)

BANCA EXAMINADORA:

Dr. Luiz Rijo (Orientador)

Dr. Sérgio Luiz Fontes

Dr. João dos Santos Protázio

BELÉM - PARÁ
2001

*Às cinco mulheres mais queridas e importantes da minha vida: Lourdinha, Ana Sofia,
Flora Vitória, Rosa dos Ventos e Riomar.*

AGRADECIMENTOS

Às cinco mulheres mais queridas e importantes da minha vida: minha mãe Lourdinha, minhas filhas Ana Sofia, Flora Vitória e Rosa dos Ventos e minha esposa Riomar, pelo amor, pelo apoio e pela compreensão.

Ao meu orientador, Professor Luiz Rijo, pela competente condução do meu processo de formação.

Aos professores José Geraldo das Virgens Alves e José Gouvêa Luiz, pela orientação das etapas de trabalho de campo aplicando os métodos TEM, GPR e Eletroresistividade na Ilha de Algodual - Pará, trabalhos estes que faziam parte do meu projeto de mestrado original e que tive que abandonar por falta de condições operacionais do Curso de Pós-Graduação em Geofísica da Universidade Federal do Pará.

Aos colegas João Baptista Junior e Klédson Tomaso, que me auxiliaram nos trabalhos de campo acima citados.

A Benildes Lopes, secretária do Curso de Pós-Graduação em Geofísica da Universidade Federal do Pará, pelo apoio recebido durante todo meu curso.

Aos seguintes professores do Departamento de Geofísica da Universidade Federal do Pará que, além de terem contribuído significativamente para minha formação, constituem exemplos de competência e seriedade profissional: João Batista Corrêa da Silva, José Geraldo das Virgens Alves, José Gouvêa Luiz, Lúcia Maria da Costa e Silva, Luiz Rijo, Om Prakash Verma.

Aos colegas da Alfândega do Porto de Belém, pelo apoio recebido durante todo o curso, principalmente na minha alocação em regimes de trabalho compatíveis com a minha condição de estudante.

A todos os que, diretamente ou indiretamente, ajudaram na realização do presente trabalho.

“Teoria é quando se sabe como as coisas funcionam, mas nada funciona.

Prática é quando tudo funciona, mas ninguém sabe porque.”

Autor ignorado

SUMÁRIO

DEDICATÓRIA	<i>i</i>
AGRADECIMENTOS	<i>ii</i>
EPÍGRAFE	<i>iii</i>
RESUMO	01
ABSTRACT	02
1. INTRODUÇÃO	03
2. O MÉTODO MAGNETOTELÚRICO	04
3. CALIBRAÇÃO DO ALGORITMO DE ELEMENTOS FINITOS NO MODO TM...	05
4. O MODO TE	11
5. RESULTADOS PARA O CAMPO ELÉTRICO NORMALIZADO NO MODO TE ..	17
6. RECÁLCULO DA SOLUÇÃO DE SAMPAIO	30
7. RESULTADOS PARA A RESISTIVIDADE APARENTE	42
8. CONCLUSÃO	44
9. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	46

RESUMO

Apresentamos a solução numérica do modelo da falha infinita para o modo TE utilizando o método dos elementos finitos para investigar o efeito do ar na solução TE. A comparação de nossa solução para o campo elétrico normalizado com a solução de Weaver evidenciou uma discrepância esperada devido ao efeito do ar, que foi intencionalmente negligenciado por Weaver, com o intento de facilitar a solução do problema. O problema analítico, levando em conta a presença do ar, é substancialmente mais difícil. Uma solução do problema real, parcialmente analítica e parcialmente numérica, foi apresentada por Sampaio. Devido a uma discrepância inesperada entre a nossa solução por elementos finitos e a solução exata de Sampaio, recalculamos a sua solução. Iterando a parte numérica da solução de Sampaio até ordens mais altas pudemos verificar que esta apresenta comportamento divergente. Para examinar o efeito do ar na resistividade aparente, comparamos três perfis de resistividade aparente obtidos a partir de nossa solução por elementos finitos com os mesmos perfis obtidos pela solução de Weaver. A discrepância encontrada entre estas soluções foi muito pequena, situando-se na faixa de erro instrumental de campo.

ABSTRACT

We present the numerical solution of the model of an infinite fault for the TE mode using the finite elements method to investigate the effect of the air in the TE solution. The comparison of our solution for the normalized electric field with the Weaver solution showed an expected discrepancy due to the effect of the air, which was neglected intentionally by Weaver to simplify the solution of the problem. The analytic problem is substantially more difficult. A solution of the real problem, partially analytic and partially numerical, was presented by Sampaio. Due to an unexpected discrepancy between our finite elements solution and the exact Sampaio solution, we recalculated his solution. Iterating the numerical part of the Sampaio solution up to higher orders we were able to verify that it presents divergent behavior. To examine the effect of the air on apparent resistivity, we compare three series profiles of apparent resistivity obtained with our FE solution with the profiles obtained using the Weaver solution. The discrepancy between the apparent resistivities shows to be small, figuring in the range of the instrumental field error.

1. INTRODUÇÃO

Devido a sua importância no estudo de grandes estruturas geológicas, o método magnetotelúrico vem sendo aplicado largamente desde os anos cinquenta. Esta utilidade gerou o interesse em se obter descrições matemáticas de modelos apropriados para análise e interpretação de dados. Modelos unidimensionais isotrópicos e anisotrópicos são bastante simples e são rotineiramente utilizados para inverter dados de campo (RIJO, 1992). Para modelos bidimensionais simples como a falha ou o dique foram apresentadas diferentes soluções analíticas. Porém, quando a geometria do modelo se torna mais complexa, a solução tem que ser obtida através de métodos numéricos. Por outro lado, para garantir a confiabilidade das soluções numéricas, precisa-se efetuar constantes comparações com os modelos simples das soluções analíticas para efeito de calibração.

Tikhonov (1950) e Canigard (1953) introduziram o modelo básico unidimensional isotrópico de ondas planas se espalhando na interface ar-terra. Baseado neste modelo foram apresentadas soluções analíticas para diferentes modelos bidimensionais, os quais podemos classificar em modelos do modo transverso-magnético (TM) e do modo transverso-elétrico (TE). O caso de polarização magnética (modo TM) acontece quando o campo magnético é paralelo ao eixo da estrutura. D'Erceville & Kunetz (1962) apresentaram a solução analítica para uma falha com um substrato de condutividade infinita e de resistividade infinita. O caso de polarização elétrica (modo TE), no qual o campo elétrico é paralelo ao eixo da estrutura, é um caso de complexidade matemática muito maior, por causa da propagação no ar do campo elétrico secundário criado pela descontinuidade. Weaver (1963) propôs uma solução analítica aproximada para o modelo de uma falha infinita, na qual ele negligencia intencionalmente o efeito do ar para simplificar o problema. Sampaio (1985) propôs uma solução híbrida, semi-analítica, para o problema: apresenta inicialmente formulação analítica exata através da qual encontra oito equações envolvendo integrais impróprias, as quais finalmente resolve pelo método numérico da série de Neumann. Soluções numéricas para modelos bidimensionais em ambos os modos foram propostas por Hohmann (1971), utilizando equações integrais, por Jones & Prince (1970), utilizando diferenças finitas e por Rijo (1977), utilizando o método de elementos finitos.

No presente trabalho apresentamos a solução numérica do modelo de uma falha infinita para o modo TE utilizando o método de elementos finitos, com a finalidade de investigar o efeito

do ar na solução TE. Comparando nossa solução para o campo elétrico normalizado com as soluções apresentadas por Weaver e Sampaio, notamos, além da diferença esperada em relação à solução aproximada de Weaver, uma diferença significativa em relação à solução de Sampaio. Uma vez que os gráficos apresentados por Sampaio foram computados apenas até a terceira iteração do método numérico de aproximações sucessivas, recalculamos a sua solução utilizando exatamente a mesma metodologia por ele utilizada nos seus trabalhos de 1985 e 1992. A computação de ordens de iteração mais altas evidenciou a divergência da parte numérica da solução de Sampaio.

Para examinar o efeito do ar na resistividade aparente no modo TE, comparamos três perfis de resistividade aparente obtidos com nossa solução de elementos finitos com os perfis obtidos utilizando a solução de Weaver, notando que a discrepância nas resistividades aparentes é muito menor do que a discrepância nos campos elétricos.

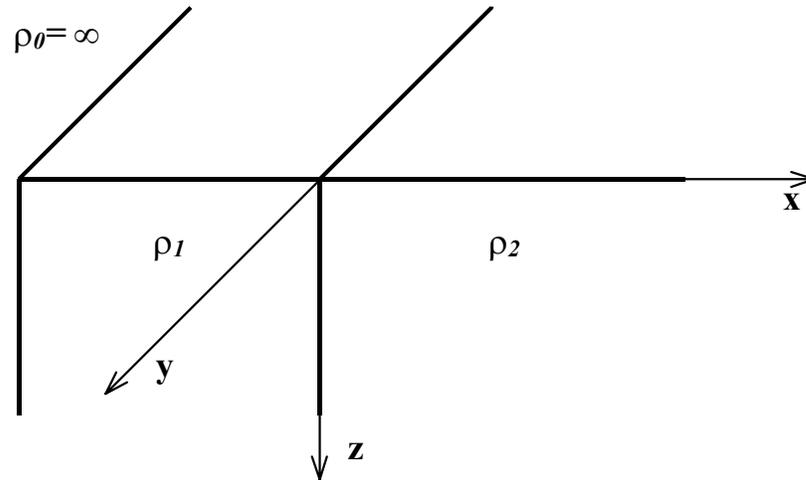
O presente trabalho está dividido da seguinte forma: na seção 2 é abordado sumariamente o método magnetotelúrico, na seção 3 é explicada a calibração do algoritmo de elementos finitos no modo TM, na seção 4 é abordado o modo TE, na seção 5 são apresentados os resultados para o campo elétrico normalizado no modo TE, na seção 6 é mostrado o recálculo da solução de Sampaio, na seção 7 são apresentados os resultados para a resistividade aparente e a seção 8 traz finalmente a conclusão de nosso trabalho.

2. O MÉTODO MAGNETOTELÚRICO

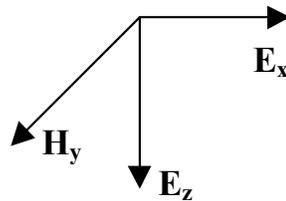
O método magnetotelúrico, cuja formulação matemática original foi introduzida por Tikhonov (1950) e Canigard (1953), vem sendo utilizado desde os anos cinquenta com o propósito de investigar estruturas geológicas de escala quilométrica. É um método que tem fonte natural, consistindo em campos eletromagnéticos flutuantes que têm sua origem na ionosfera. Devido à grande distância da fonte da superfície da Terra pode ser assumido, com boa precisão, que a fonte representa uma frente de ondas eletromagnéticas planas. As medidas são efetuadas na superfície do terreno, estabelecendo o tensor representado pela razão entre os componentes horizontais do campo elétrico e do campo magnético. Como as frequências medidas são muito baixas, situando-se entre 0,01 e 100 Hz, e devido à enorme discrepância entre as impedâncias do ar e da terra, temos que $\sigma \gg \omega\epsilon$ e então se torna válida a aproximação quase-estática:

$$\sigma + i\omega\epsilon \approx \sigma$$

Durante todo desenvolvimento do presente trabalho assumimos esta aproximação como válida. Ademais, consideramos $\mu = \mu_0 = \text{constante}$ para todos os meios. O número de onda k é definido como $k^2 = i\omega\mu (\sigma + i\omega\epsilon)$, ou, mais particularmente, $k^2 \approx i\omega\mu \sigma$, em virtude da condição quase-estática.



a) TM mode



b) TE mode

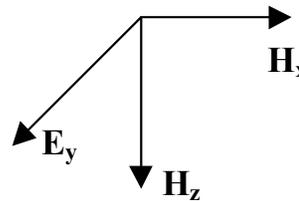


Figura 1: Modelo da falha infinita
a) Modo TM b) Modo TE

3. CALIBRAÇÃO DO ALGORITMO DE ELEMENTOS FINITOS NO MODO TM

O modo transverso-magnético (TM), chamado também modo de polarização magnética, caracteriza-se por ter o campo magnético paralelo ao eixo da descontinuidade. Como já citado anteriormente, apresenta solução analítica exata e por isso o utilizamos nas calibrações de nosso algoritmo de elementos finitos. Tais calibrações foram feitas com o modelo da falha infinita no

modo TM mostrado na Figura 1a. Utilizamos a formulação de EF seguindo a abordagem de Rijo (1992), que utiliza método de Galerkin para resolver a equação de Helmholtz para o modo TM:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\sigma} \frac{dH_y}{dx} \right) + \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{\sigma} \frac{dH_y}{dz} \right) + i\omega\mu H_y = 0$$

A formulação de EF trabalha com a montagem de um sistema de equações lineares, representados pela matriz global \mathbf{K} , na qual estão contidas as informações sobre o meio, o vetor \mathbf{f} , contendo as fontes e o vetor \mathbf{u} que contem o valor do campo procurado, na forma

$$\mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{f}.$$

A solução deste sistema matricial nos leva à solução procurada.

A escolha de uma malha adequada é de extrema importância para o funcionamento eficiente do método e envolve seguintes três fatores: geometria dos elementos, discretização e disposição dos elementos na malha. Quanto à geometria dos elementos, optamos por elementos triangulares, por estes serem de fácil implementação e por produzirem bons resultados. Na formulação através de elementos triangulares a matriz \mathbf{K} é preenchida por sub-matrizes \mathbf{k}^e de tamanho 3x3 e o vetor fonte é preenchido por sub-vetores \mathbf{f}^e de dimensão 3, onde:

$$\mathbf{k}_{mn}^e = \frac{1}{4A\sigma} \begin{pmatrix} b_i^2 + c_i^2 & b_i b_j + c_i c_j & b_i b_k + c_i c_k \\ b_j b_i + c_j c_i & b_j^2 + c_j^2 & b_j b_k + c_j c_k \\ b_k b_i + c_k c_i & b_k b_j + c_k c_j & b_k^2 + c_k^2 \end{pmatrix} + \frac{i\omega\mu A}{12} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$\mathbf{f}_m^e = -\frac{\Delta\sigma}{6\sigma} \left(E_{xi}^p + E_{xj}^p + E_{xk}^p \right) \begin{pmatrix} c_i \\ c_j \\ c_k \end{pmatrix} \quad (2)$$

Cada uma destas matrizes e destes vetores representa um dos elementos da malha e A é a área do respectivo elemento, dada por

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_i & z_i \\ 1 & x_j & z_j \\ 1 & x_k & z_k \end{vmatrix}.$$

Os valores de b e c são dados por:

$$b_i = z_j - z_k ; \quad b_j = z_k - z_i ; \quad b_k = z_i - z_j$$

$$c_i = x_k - x_j ; \quad c_j = x_i - x_k ; \quad c_k = x_j - x_i$$

em que x , y e z são as coordenadas dos vértices de cada um dos elementos.

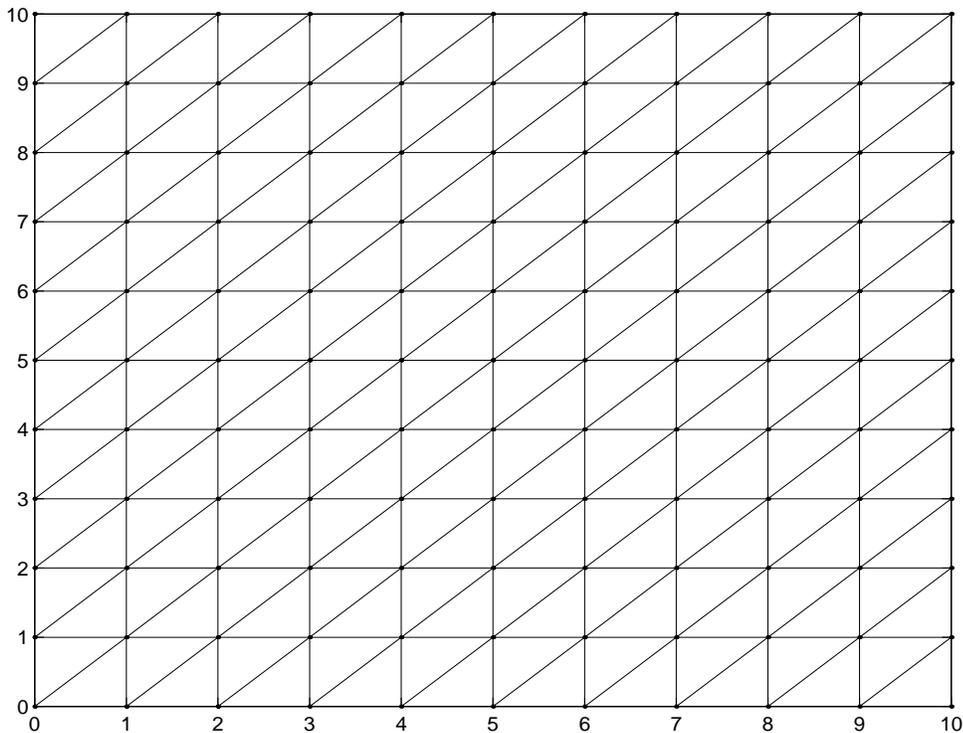


Figura 2: Malha de elementos finitos igualmente espaçada .

A discretização, ou seja, a quantidade de elementos utilizados, é uma escolha que deve otimizar a relação precisão/esforço computacional. Quanto mais elementos utilizados, maior será a precisão da solução. Por outro lado, quanto maior a quantidade, maior o esforço computacional. Mostra-se que o tempo de processamento aumenta rapidamente com o aumento do número de elementos da malha. Mesmo assim, com a tecnologia atual de computadores rápidos e baratos, o tempo de computação para os modelos bidimensionais se situa na faixa de minutos ou até de

segundos. Finalmente, a discretização necessária dependerá também da disposição dos elementos na malha. Do ponto de vista da precisão da solução, a disposição ideal está presente em uma malha igualmente espaçada conforme ilustrada na Figura 2, uma vez que o método de elementos finitos utiliza um tipo de aproximação linear de elemento para elemento, cuja solução está sujeita a erros numéricos quando os seus elementos são deformados. Estes erros numéricos dependerão da intensidade da solução nos pontos da malha e, principalmente, do comportamento da função nestes pontos. Desta forma, se a função for suficientemente suave, a deformação do elemento influirá pouco. Uma boa maneira para economizar elementos e assim também esforço computacional é refinar a malha perto das discontinuidades, onde se espera uma variação mais intensa da função campo eletromagnético, e de esparsar a malha nas extremidades, onde o efeito do campo secundário é mínimo. Seguindo esta idéia construímos a malha logarítmica ilustrada na Figura 3, que utiliza grupos de cinco elementos de espaçamento igual, aumentando este seu espaçamento de grupo em grupo exponencialmente. Os resultados obtidos mostraram que, para o modelo do modo TM considerado, ambas as malhas produzem um resultado com precisão de milésimos em poucos segundos.

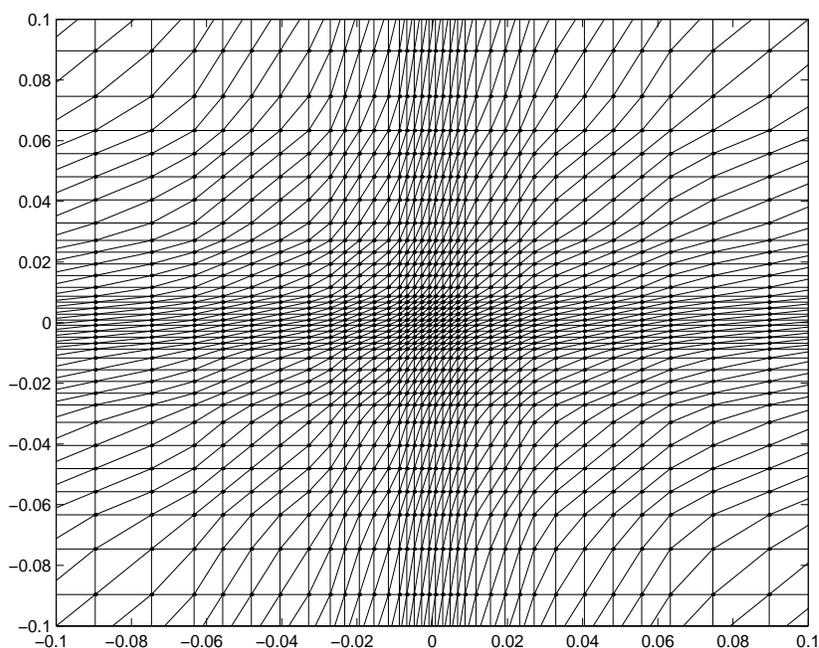


Figura 3: Malha de elementos finitos logarítmica.

Para reforçar nossos testes aplicamos o algoritmo de elementos finitos resolvendo o problema utilizando duas abordagens diferentes: para o campo magnético total e para o campo magnético secundário. A abordagem de campo magnético total utiliza a fonte indicada na equação (2) com valor identicamente nulo. Nesse caso, a informação do campo incidente é introduzida por meio das condições de fronteira da malha, impostas para o campo total:

$$\text{i) } H_y = H_0 \quad \text{em } z = 0$$

$$\text{ii) } H_y = 0 \quad \text{em } z = \infty$$

$$\text{iii) } H_y = H_0 e^{-ik_j z} \quad \text{em } x = -\infty (j=1) \quad \text{e } x = \infty (j=2)$$

A abordagem de campo magnético secundário utiliza as mesmas equações (1) e (2), assumindo o campo magnético primário $H_y^{p,1} = H_0 e^{-ik_1 z}$ para o terreno inteiro e utilizando $E_x^p = -\rho_1 \frac{dH_y^{p,1}}{dz}$ como fonte.

As condições de fronteira, agora dadas em função do campo secundário, são:

$$\text{i) } H_y^s = 0 \quad \text{em } z = 0, \quad z = \infty \quad \text{e em } x = -\infty$$

$$\text{ii) } H_y^s = H_y^{p,2} - H_y^{p,1} \quad \text{em } x = \infty$$

Neste caso, o campo magnético total é obtido somando o campo magnético primário ao campo magnético secundário obtido através de elementos finitos.

É importante enfatizar que, do ponto de vista da formulação numérica, as duas abordagens de campo total e de campo secundário são muito diferentes. Enquanto na abordagem de campo total a solução é totalmente numérica, na abordagem de campo secundário a solução é apenas parcialmente numérica, tendo uma participação significativa da solução exata do campo primário. O fato de as duas soluções coincidirem indica que o problema está bem formulado numericamente, sendo robusto sob ponto de vista computacional.

Para melhor comparação dos resultados entre as duas abordagens, analisamos a componente horizontal do campo elétrico, obtido através da diferenciação numérica da expressão

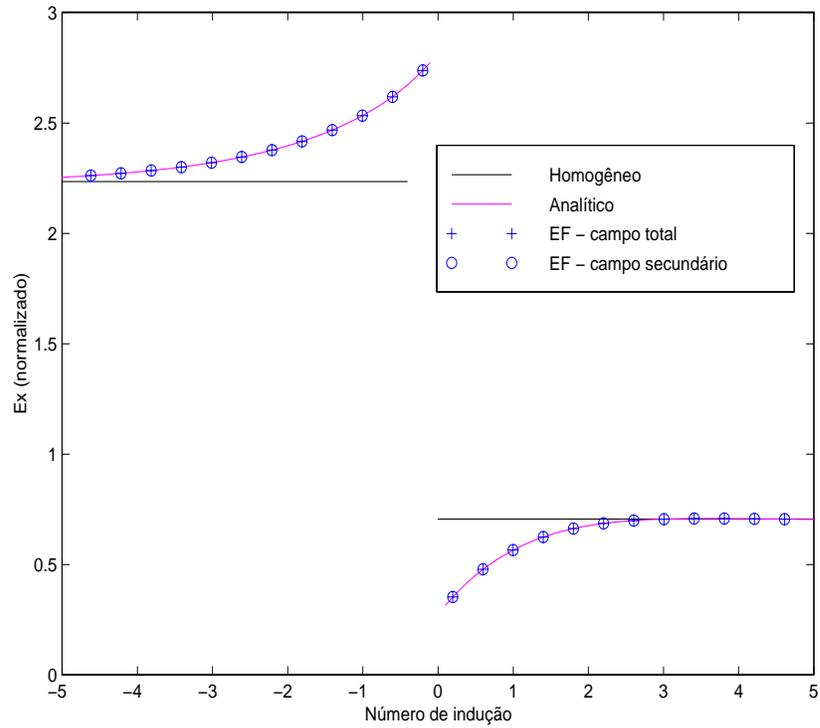


Figura 4: Parte real do campo elétrico normalizado para o modelo da falha infinita no modo TM para $R=2$.

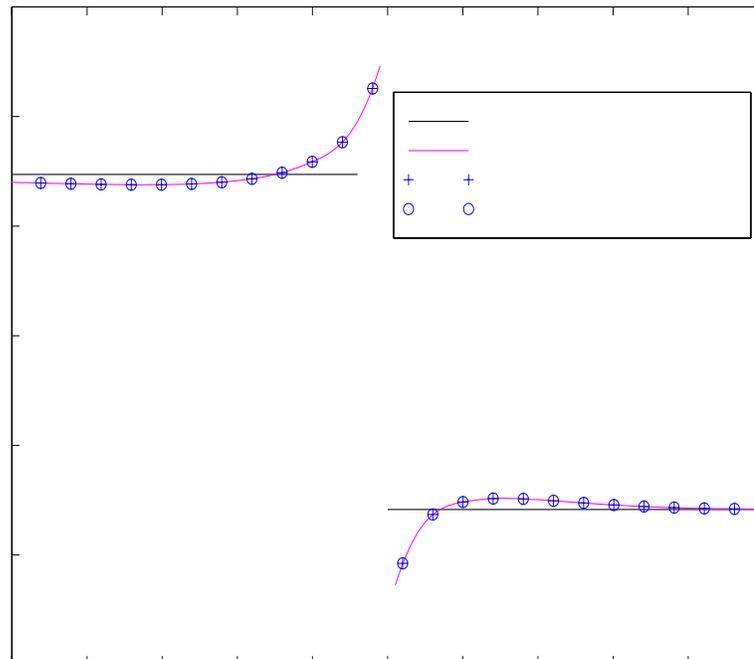


Figura 5: Parte imaginária do campo elétrico normalizado para o modelo da falha infinita no modo TM para $R=2$.

$E_x = -\rho \frac{dH_y}{dz}$, uma vez que esta varia segundo o plano $z=0$ perpendicular à falha, sendo descontínuo em $x=0$ e, desta forma, sensível a todo tipo de erros numéricos. Calculamos nossa solução para o campo normalizado, i. e., $Ex_{norm} = E_x \frac{|k_2|}{\omega\mu}$, e a lançamos em gráfico como função do numero de indução, $\theta = \sqrt{\omega\mu\sigma_2}x$. Esta normalização tem como principal objetivo abranger uma grande faixa de frequências e de dimensões métricas. O contraste de resistividade é denotado por $R = \rho_1/\rho_2 = \sigma_2/\sigma_1$. Comparamos ambas as abordagens com a solução analítica calculada a partir do método proposto por D' Erceville & Kunetz (op. cit.), obtendo perfeita congruência, conforme mostrado nas Figuras 4 e 5.

4. O MODO TE

O modo transverso-elétrico (TE), chamado também de polarização elétrica, caracteriza-se por ter o campo elétrico paralelo ao eixo da descontinuidade. Tanto do ponto de vista analítico como numérico o modo TE do nosso problema, mostrado na Figura 1b, representa um problema matematicamente mais complexo do que o modo TM, uma vez que a componente E_y do campo elétrico a ser encontrada não é constante no plano $z=0$, como acontece com a componente H_y no modo TM. A este fenômeno chamamos de “efeito do ar”, porque representa a contribuição do campo elétrico secundário, criado pela descontinuidade, propagando-se através do ar. Desta forma, não mais podemos estabelecer uma fronteira com a condição de Dirichlet em $z=0$. Torna-se necessário introduzirmos o ar em nossa malha de elementos finitos e de colocar a condição de fronteira num plano $z=h$ acima da interface ar/terra, com h suficientemente grande para garantir que não teremos mais efeito algum do campo elétrico secundário. Este aumento do tamanho da malha por causa do ar atribui um significado muito maior à escolha da malha do que no modo TM, uma vez que, devido à grande magnitude de h , o esforço computacional aumenta consideravelmente quando é usada uma malha igualmente espaçada. Para viabilizar o trabalho com o modo TE, tem que se necessariamente lançar mão de uma malha mais “econômica” em termos computacionais, o que é o caso da malha logarítmica já apresentada. Neste sentido fizemos apenas alguns testes de calibração com a malha igualmente espaçada para garantir a confiabilidade da nossa solução com a malha logarítmica.

Trabalhamos apenas com o modelo da falha infinita, que é o modelo mais elementar de variação lateral, posto que, por um lado, é o único para o qual já existe uma solução proposta que pôde servir para comparação e, por outro lado, tem embutido toda problemática do efeito do ar que desejamos investigar. Graças à versatilidade do método de elementos finitos, a resolução de qualquer outro modelo bidimensional, uma vez aferida a confiabilidade do algoritmo para o modo TE em duas dimensões, passa a ser um simples desdobramento de nosso modelo elementar.

Novamente usamos as duas abordagens de campo total e campo secundário, desta vez para resolver a equação de Helmholtz no modo TE:

$$\frac{d^2 E_y}{dx^2} + \frac{d^2 E_y}{dz^2} + k^2 E_y = 0.$$

As matrizes \mathbf{k}^e e os vetores \mathbf{f}^e dos elementos são definidos por:

$$\mathbf{k}_{mn}^e = \frac{1}{4Ai\omega\mu} \begin{pmatrix} b_i^2 + c_i^2 & b_i b_j + c_i c_j & b_i b_k + c_i c_k \\ b_j b_i + c_j c_i & b_j^2 + c_j^2 & b_j b_k + c_j c_k \\ b_k b_i + c_k c_i & b_k b_j + c_k c_j & b_k^2 + c_k^2 \end{pmatrix} + \frac{\sigma A}{12} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$\mathbf{f}_m^e = -\frac{\Delta\sigma A}{12} \begin{pmatrix} 2E_{yi}^p + E_{yj}^p + E_{yk}^p \\ E_{yi}^p + 2E_{yj}^p + E_{yk}^p \\ E_{yi}^p + E_{yj}^p + 2E_{yk}^p \end{pmatrix} \quad (4)$$

A abordagem de campo elétrico total trabalha com a fonte da equação (4) identicamente nula e suas condições de fronteira da malha são (Jones & Prince, 1970):

i) $E_y = 0$ em $z = \infty$

ii) $E_y = E_0^j e^{-ik_j z}$ em $x = -\infty$ ($j=1$) e $x = \infty$ ($j=2$) quando $z \geq 0$

iii) $E_y = E_0^j (1 - ik_j z)$ em $x = -\infty$ ($j=1$) e $x = \infty$ ($j=2$) quando $z < 0$

iv) $E_y = E_0 - i\omega\mu H_0 h$, onde $E_0 = \frac{1}{2} \frac{x}{x_{\max}} (E_0^2 - E_0^1)$

x_{\max} é o valor assumido para $x = \infty$, h é o valor de z assumido para $z = -\infty$ e $E_0^j = \frac{\omega\mu H_0}{k_j}$.

A abordagem de campo secundário trabalha com as mesmas equações (3) e (4) e assume o campo primário $E_y^{p,1}$ para o terreno inteiro e utiliza o mesmo como fonte. As condições de fronteira da malha são:

$$\text{i) } E_y^s = 0 \quad \text{em } z = \infty \quad \text{e em } x = -\infty$$

$$\text{ii) } E_y^s = E_y^{p,2} - E_y^{p,1} \quad \text{em } x = \infty$$

$$\text{iii) } E_y^s = E_0^1 \quad \text{em } z = -\infty$$

O campo elétrico total é obtido somando-se o campo elétrico primário com o campo elétrico secundário obtido por elementos finitos.

Novamente, ambas as abordagens produziram o mesmo resultado. A resistividade aparente foi encontrada computando-se primeiro numericamente

$$H_x = \frac{1}{i\omega\mu} \frac{dE_y}{dz},$$

e depois

$$\rho_a = \frac{1}{\omega\mu} \left| \frac{E_y}{H_x} \right|^2.$$

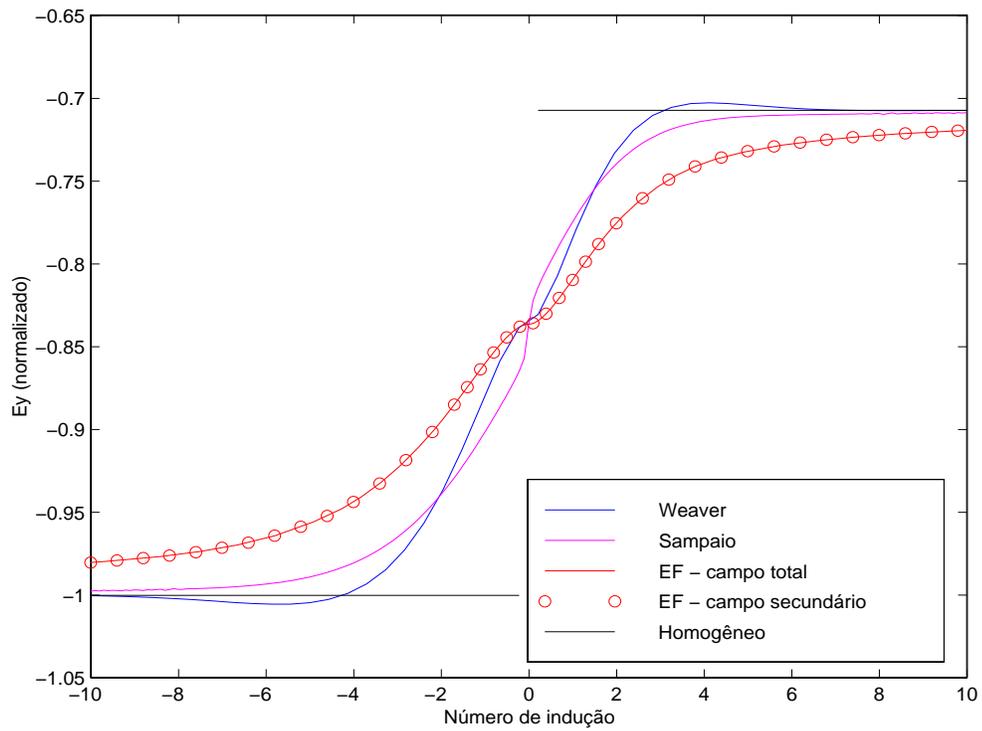


Figura 6: Parte real do campo elétrico normalizado no modo TE com $R=2$.

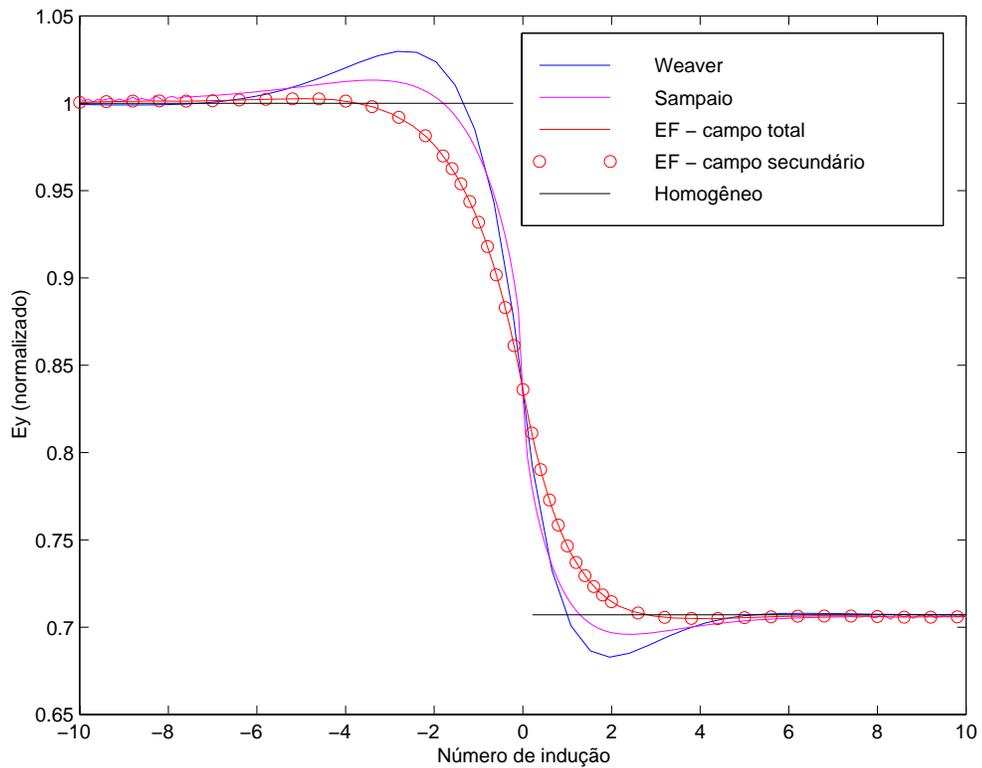


Figura 7: Parte imaginária do campo elétrico normalizado no modo TE com $R=2$.

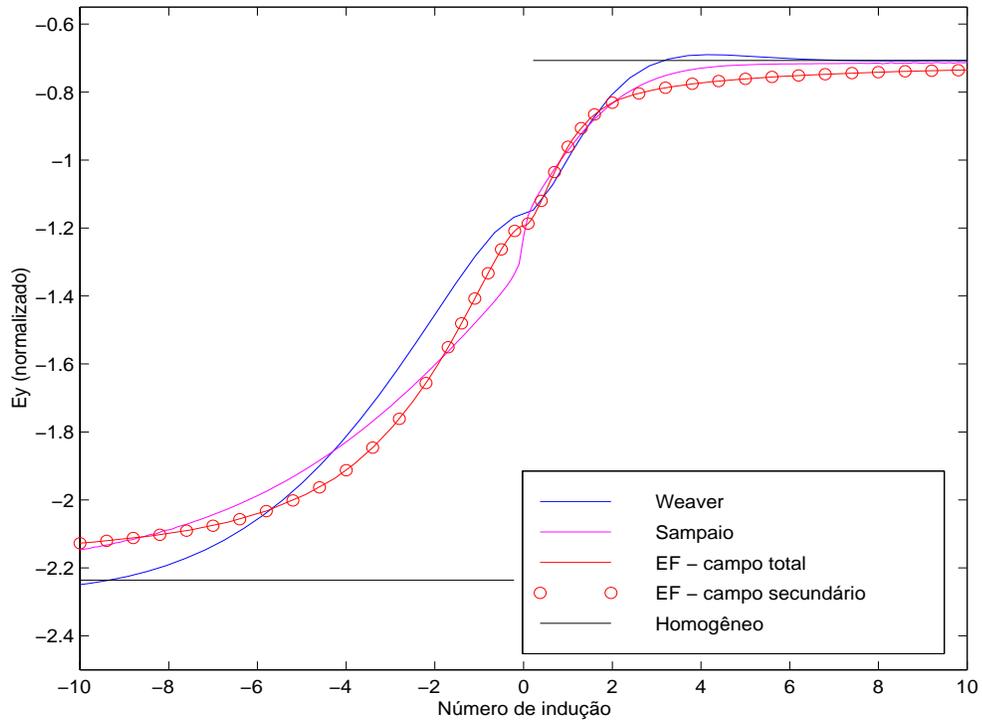


Figura 8: Parte real do campo elétrico normalizado no modo TE com $R=10$.

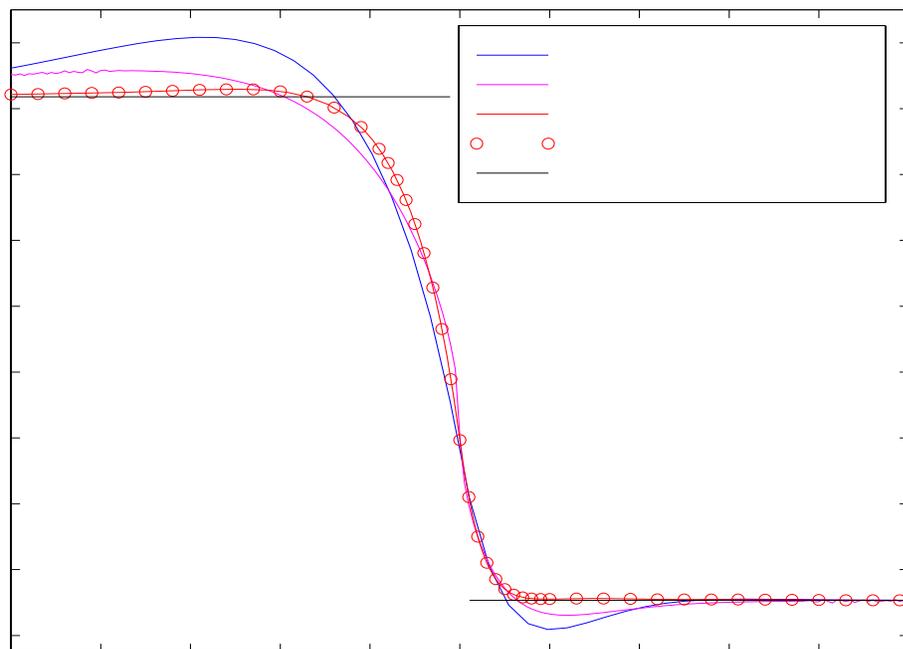


Figura 9: Parte imaginária do campo elétrico normalizado no modo TE com $R=10$.

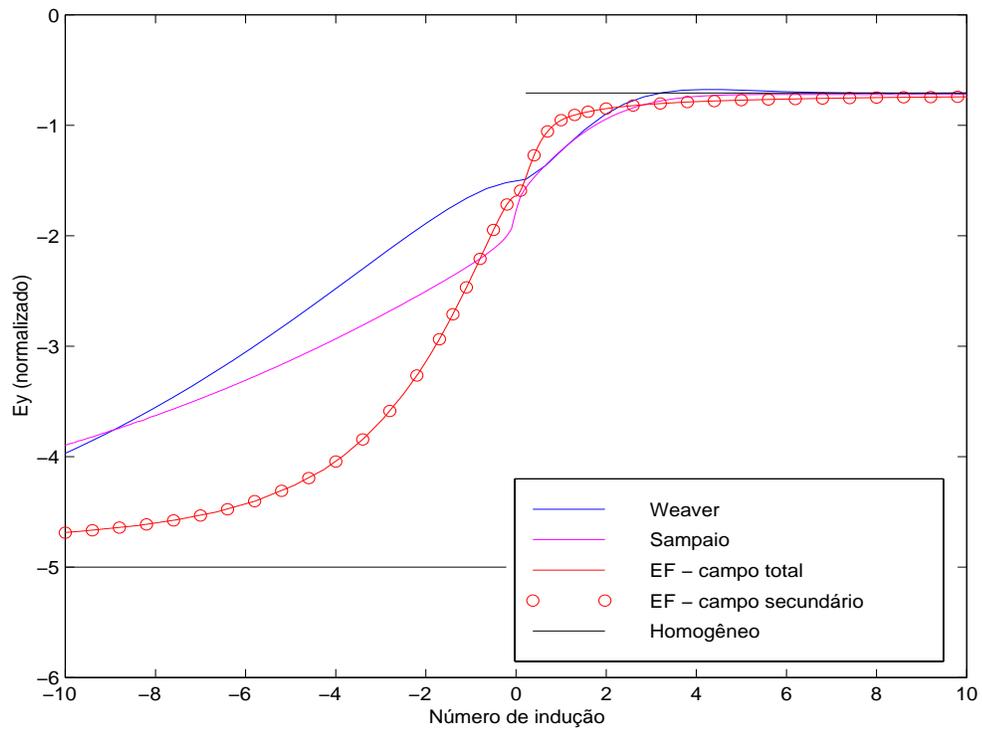


Figura 10: Parte real do campo elétrico normalizado no modo TE com $R=50$.

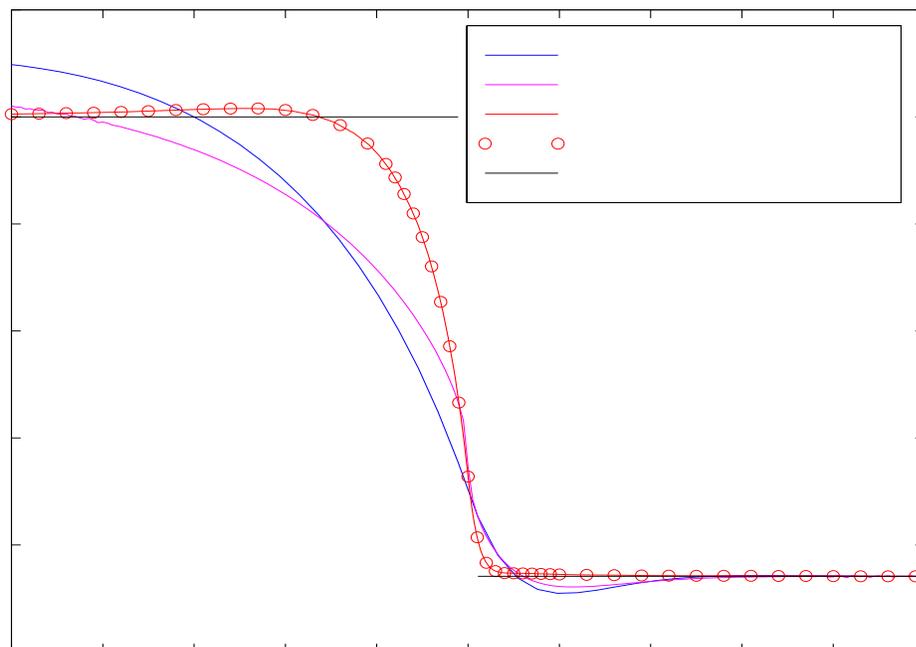


Figura 11: Parte imaginária do campo elétrico normalizado no modo TE com $R=50$.

5. RESULTADOS PARA O CAMPO ELÉTRICO NORMALIZADO NO MODO TE

Para abranger uma grande faixa de frequências e de dimensões métricas e para facilitar a comparação com os resultados de Sampaio, calculamos nossa solução novamente para o campo normalizado, i. e., $Ey_{norm} = E_y \frac{|k_2|}{\omega\mu}$, e a lançamos em gráfico como função do número de indução, $\theta = \sqrt{\omega\mu\sigma_2}x$. O contraste de resistividade é denotado por $R = \rho_1/\rho_2 = \sigma_2/\sigma_1$. Consideramos três casos: $R = 2$, $R = 10$ e $R = 50$. As partes real e imaginária do campo elétrico normalizado para estes casos estão mostradas nas Figuras 6 a 11, nas quais comparamos nossa solução de elementos finitos com a solução de Weaver, com a solução de Sampaio e com o caso de uma camada homogênea de condutividade σ_j . A discrepância encontrada entre a solução de elementos finitos e a de Weaver era esperada, uma vez que a solução de Weaver é uma solução analítica aproximada, que negligencia conscientemente o efeito do ar quando fixa o campo magnético na superfície como um valor constante. Porém, a discrepância encontrada entre a solução de elementos finitos e a solução de Sampaio foi uma surpresa para nós, uma vez que ambas as soluções representam soluções exatas, a primeira do tipo inteiramente numérica e a segunda do tipo híbrida, utilizando uma formulação parcialmente analítica e parcialmente numérica. Como as fontes de erro numérico do método de elementos finitos foram totalmente controladas, voltamos a nossa atenção para possíveis erros na solução de Sampaio. A parte analítica do trabalho de Sampaio não levanta nenhum questionamento. Porém, no seu trabalho de 1985, Sampaio apresenta os gráficos obtidos executando apenas as primeiras três iterações do método das aproximações sucessivas que configura a parte numérica da solução, indicando, inclusive, que a continuidade do processo levará a um maior grau de precisão. Esta consideração serviu como estímulo para recalcularmos a solução de Sampaio, na expectativa de que as iterações de ordem superior aproximassem sua solução da nossa solução por elementos finitos, cumprindo, assim, seu propósito de servir como base para calibração da nossa solução numérica.

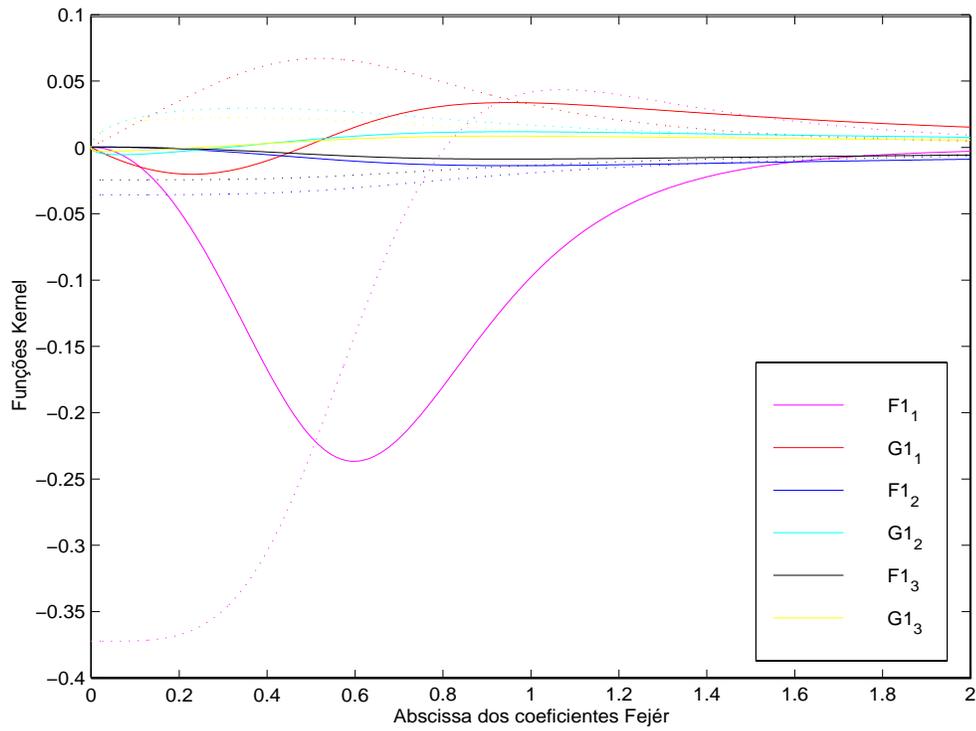


Figura 12: Funções *kernel* de ordem 1 a 3 do lado 1 da falha para $R=2$.
(curvas contínuas - parte real; curvas tracejadas - parte imaginária)

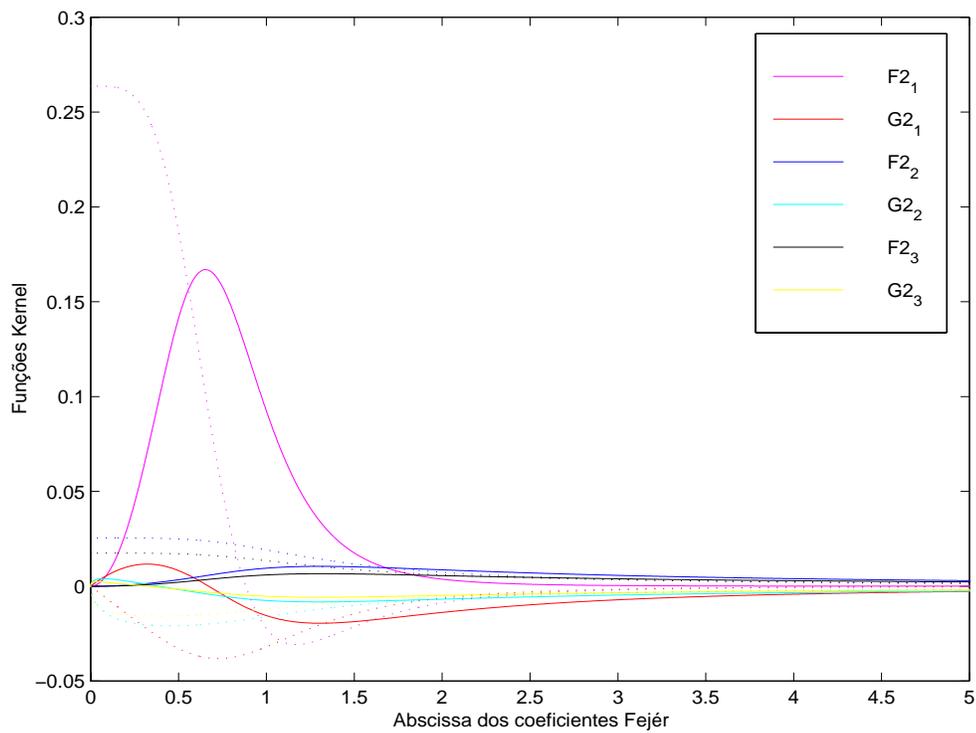


Figura 13: Funções *kernel* de ordem 1 a 3 do lado 2 da falha para $R=2$.
(curvas contínuas - parte real; curvas tracejadas - parte imaginária)

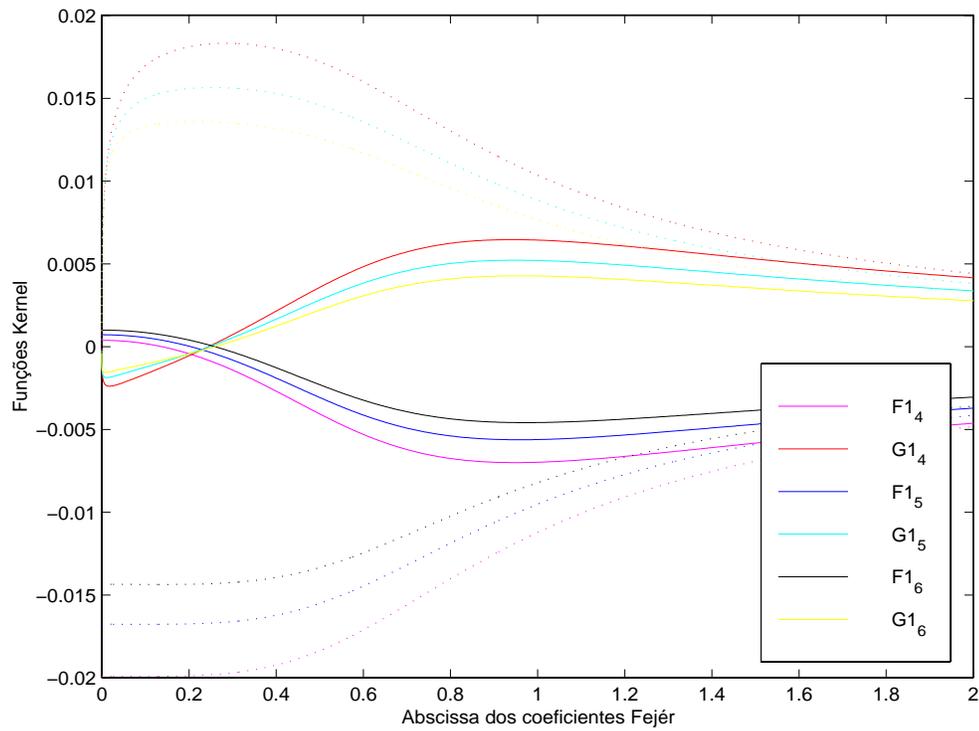


Figura 14: Funções *kernel* de ordem 4 a 6 do lado 1 da falha para $R=2$.
(curvas contínuas - parte real; curvas tracejadas - parte imaginária)

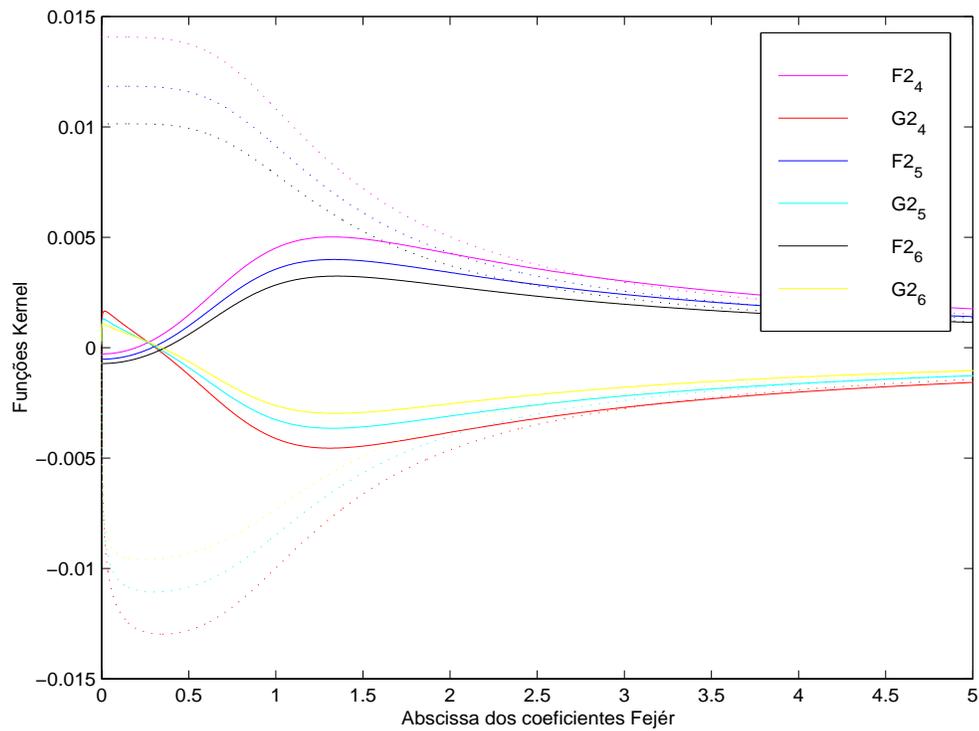


Figura 15: Funções *kernel* de ordem 4 a 6 do lado 2 da falha para $R=2$.
(curvas contínuas - parte real; curvas tracejadas - parte imaginária)

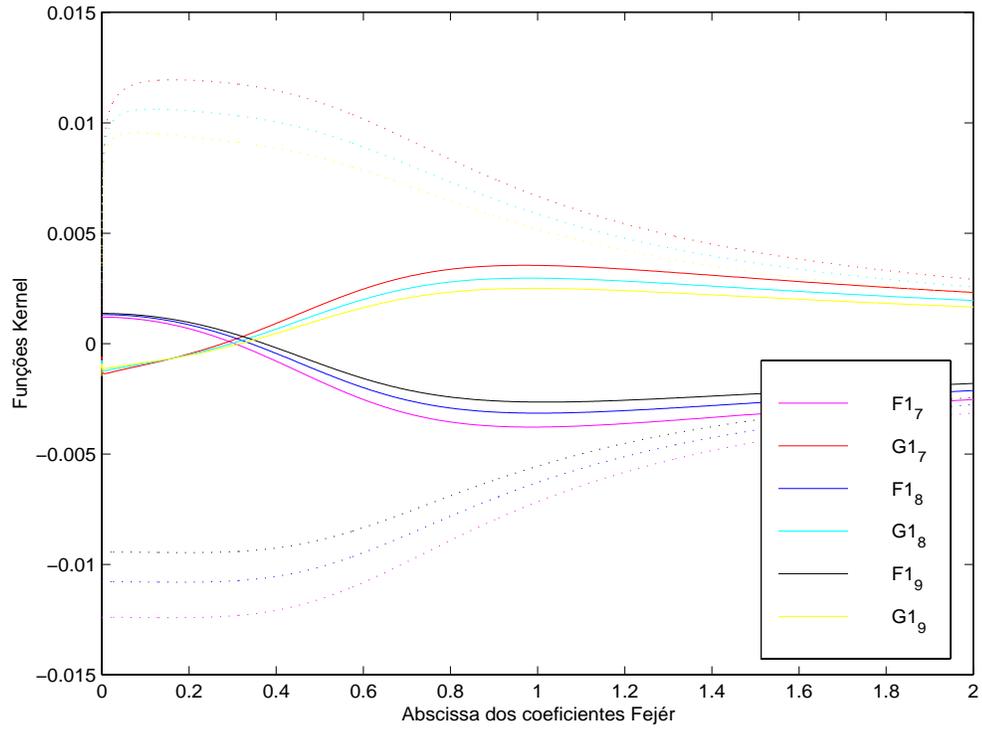


Figura 16: Funções *kernel* de ordem 7 a 9 do lado 1 da falha para $R=2$.
(curvas contínuas - parte real; curvas tracejadas - parte imaginária)

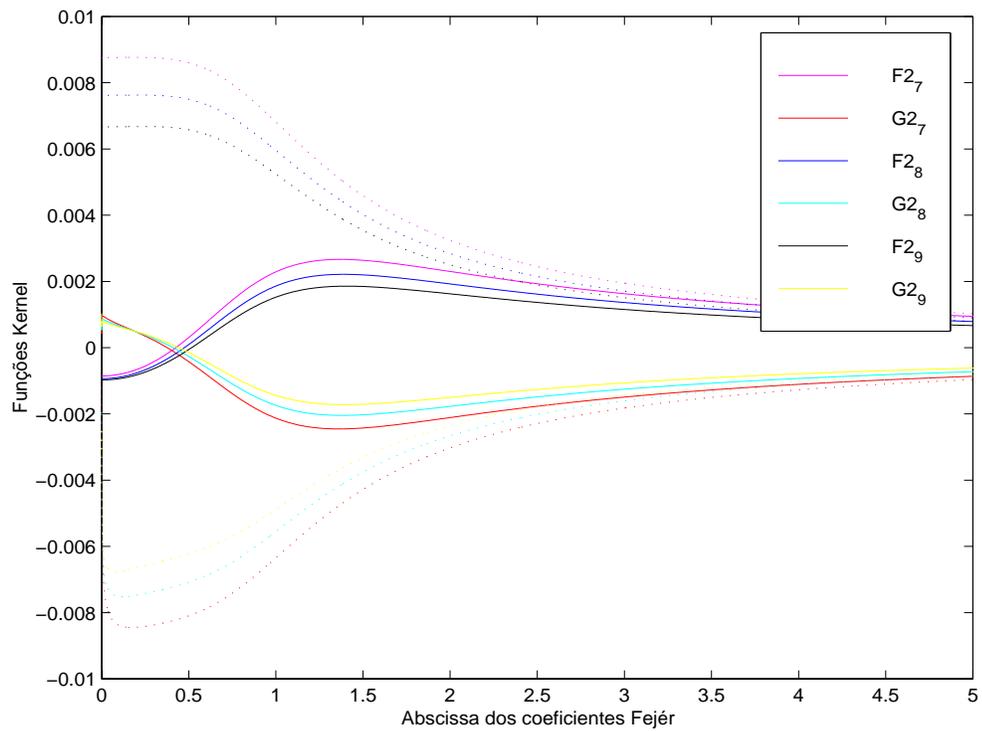


Figura 17: Funções *kernel* de ordem 7 a 9 do lado 2 da falha para $R=2$.
(curvas contínuas - parte real; curvas tracejadas - parte imaginária)

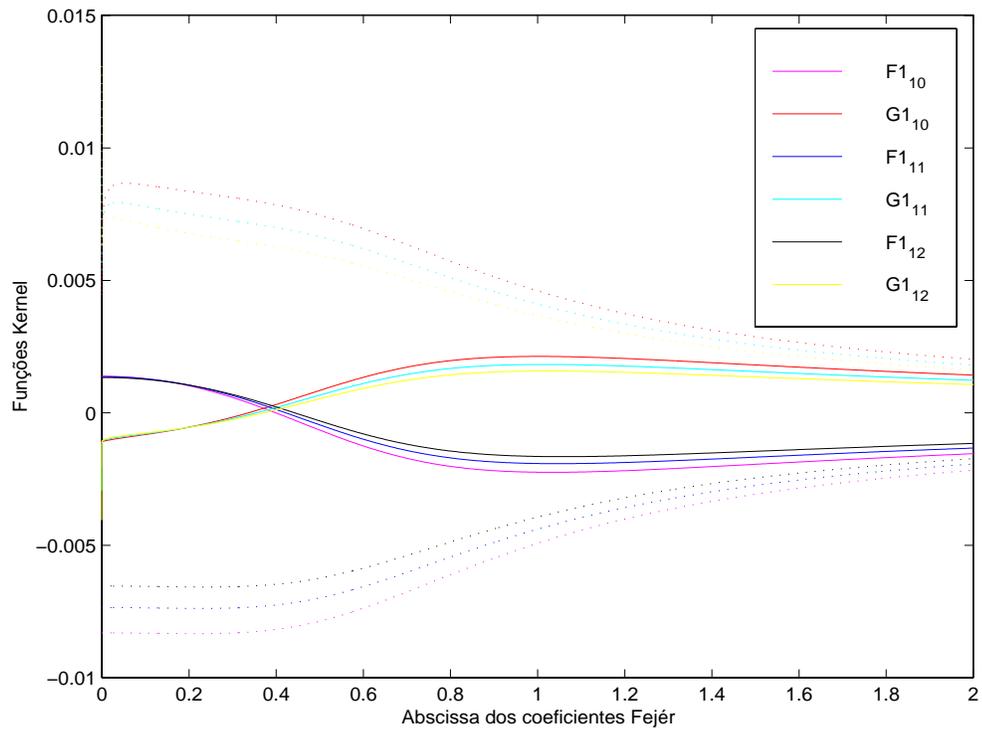


Figura 18: Funções *kernel* de ordem 10 a 12 do lado 1 da falha para $R=2$.
(curvas contínuas - parte real; curvas tracejadas - parte imaginária)

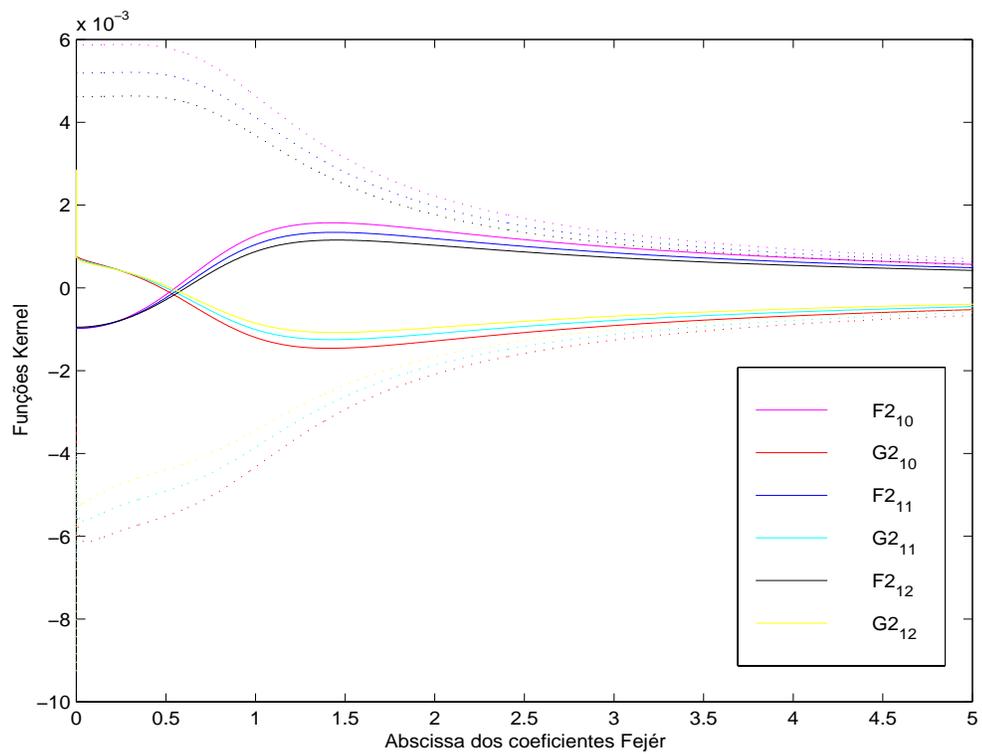


Figura 19: Funções *kernel* de ordem 10 a 12 do lado 2 da falha para $R=2$.
(curvas contínuas - parte real; curvas tracejadas - parte imaginária)

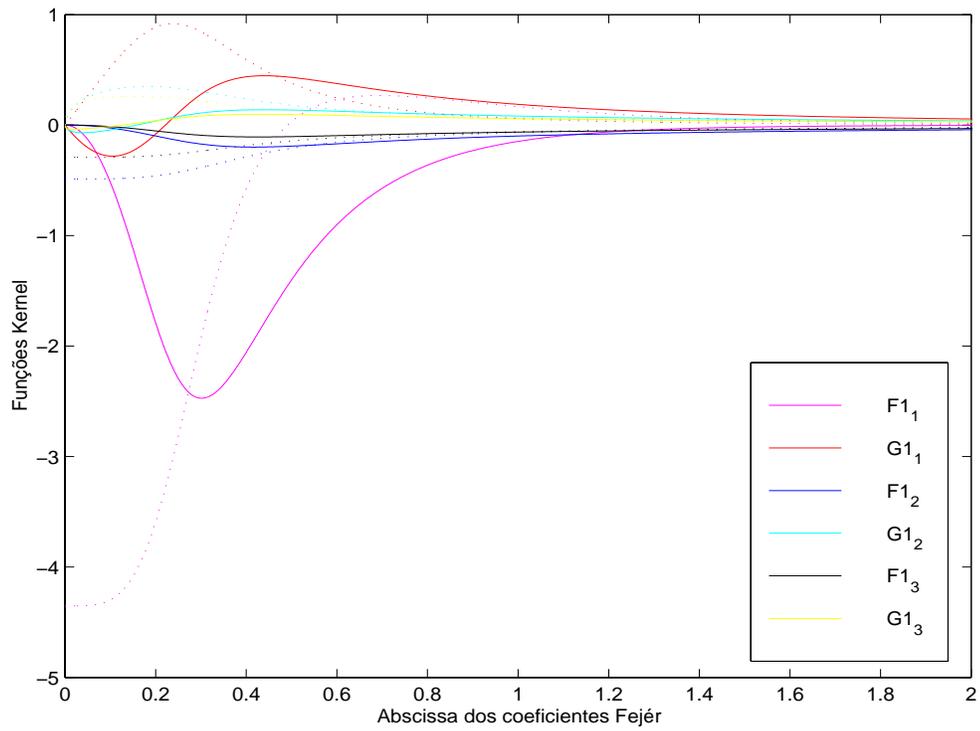


Figura 20: Funções *kernel* de ordem 1 a 3 do lado 1 da falha para $R=10$.
(curvas contínuas - parte real; curvas tracejadas - parte imaginária)

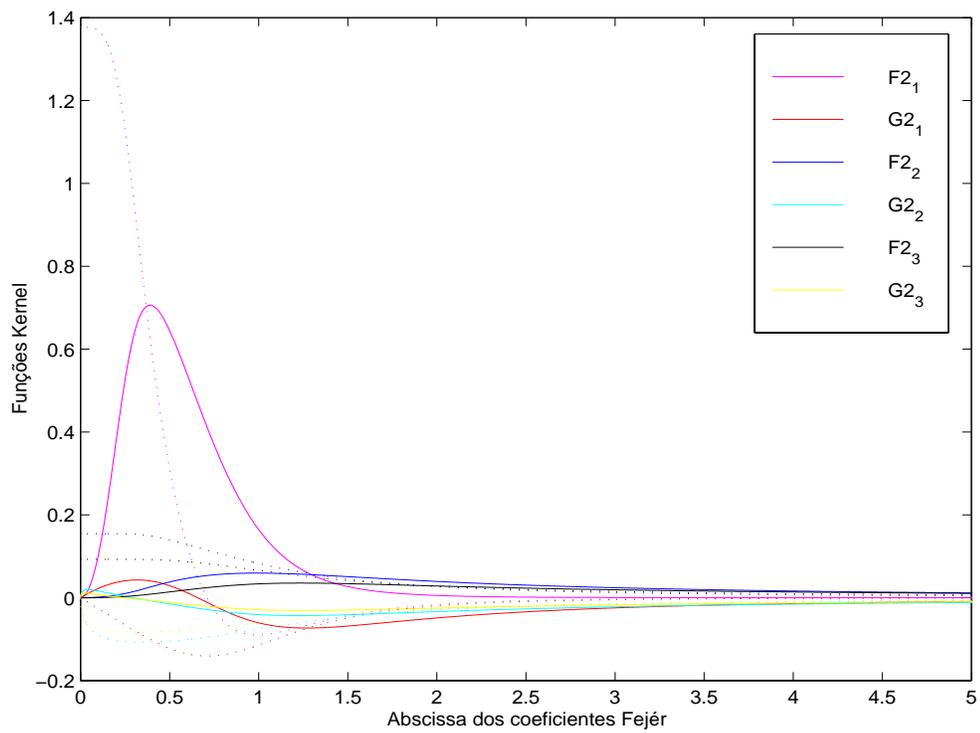


Figura 21: Funções *kernel* de ordem 1 a 3 do lado 2 da falha para $R=10$.
(curvas contínuas - parte real; curvas tracejadas - parte imaginária)

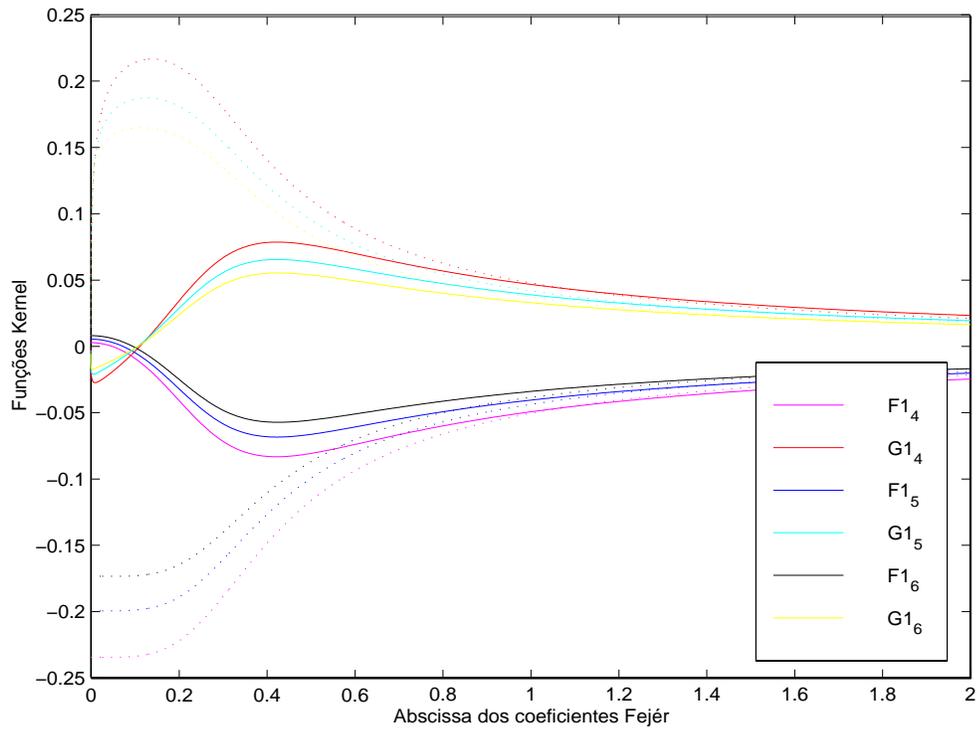


Figura 22: Funções *kernel* de ordem 4 a 6 do lado 1 da falha para $R=10$.
(curvas contínuas - parte real; curvas tracejadas - parte imaginária)

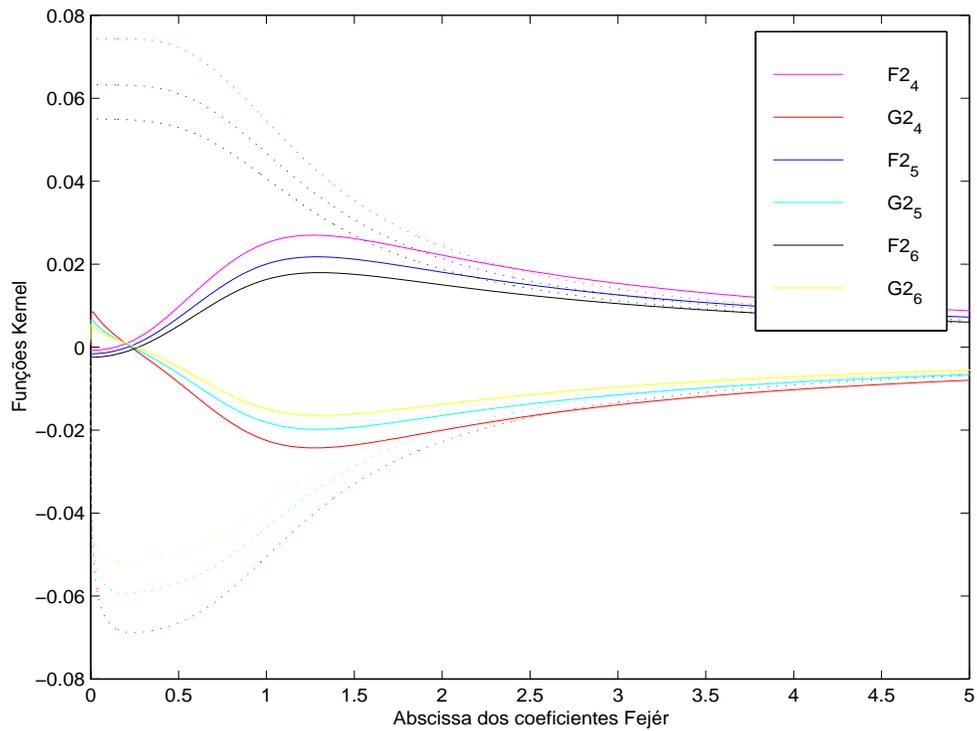


Figura 23: Funções *kernel* de ordem 4 a 6 do lado 2 da falha para $R=10$.
(curvas contínuas - parte real; curvas tracejadas - parte imaginária)

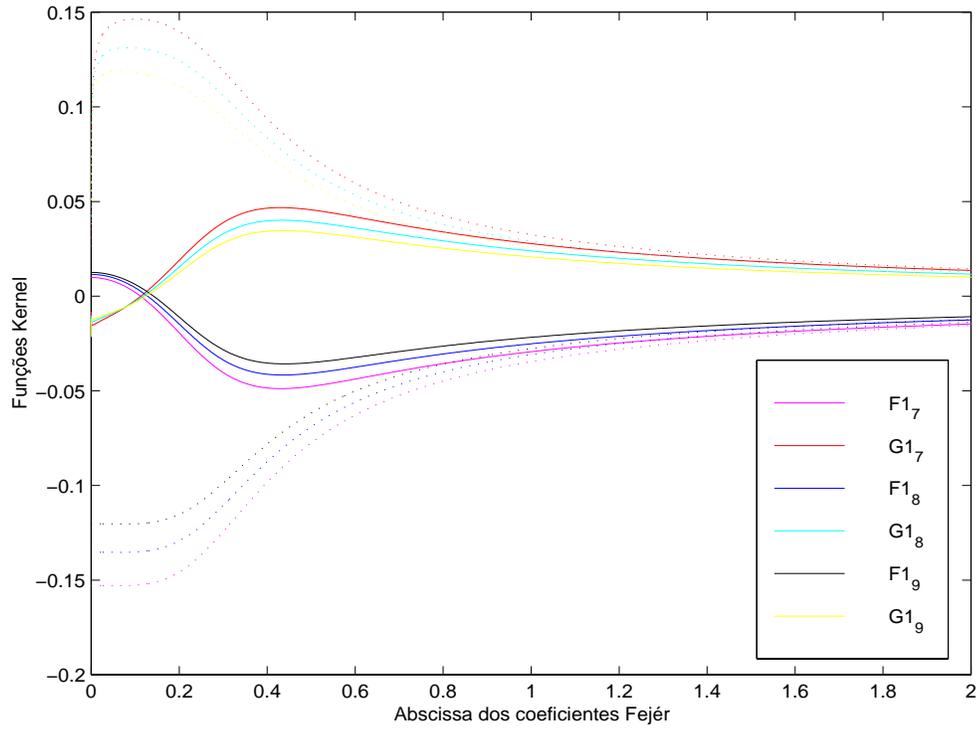


Figura 24: Funções *kernel* de ordem 7 a 9 do lado 1 da falha para $R=10$.
(curvas contínuas - parte real; curvas tracejadas - parte imaginária)

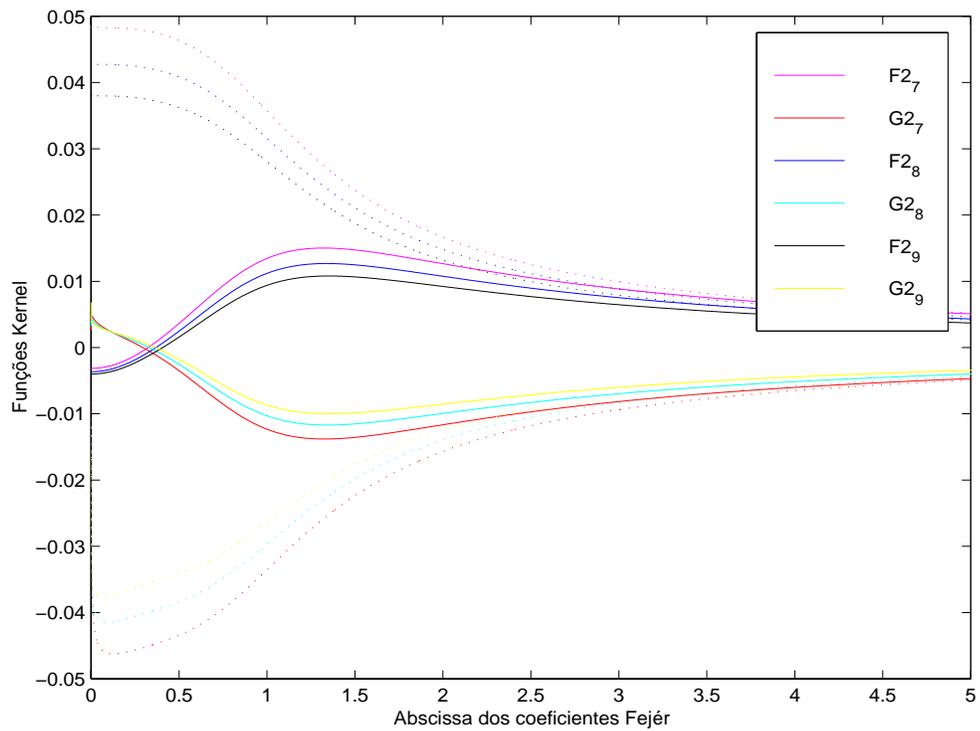


Figura 25: Funções *kernel* de ordem 7 a 9 do lado 2 da falha para $R=10$.
(curvas contínuas - parte real; curvas tracejadas - parte imaginária)

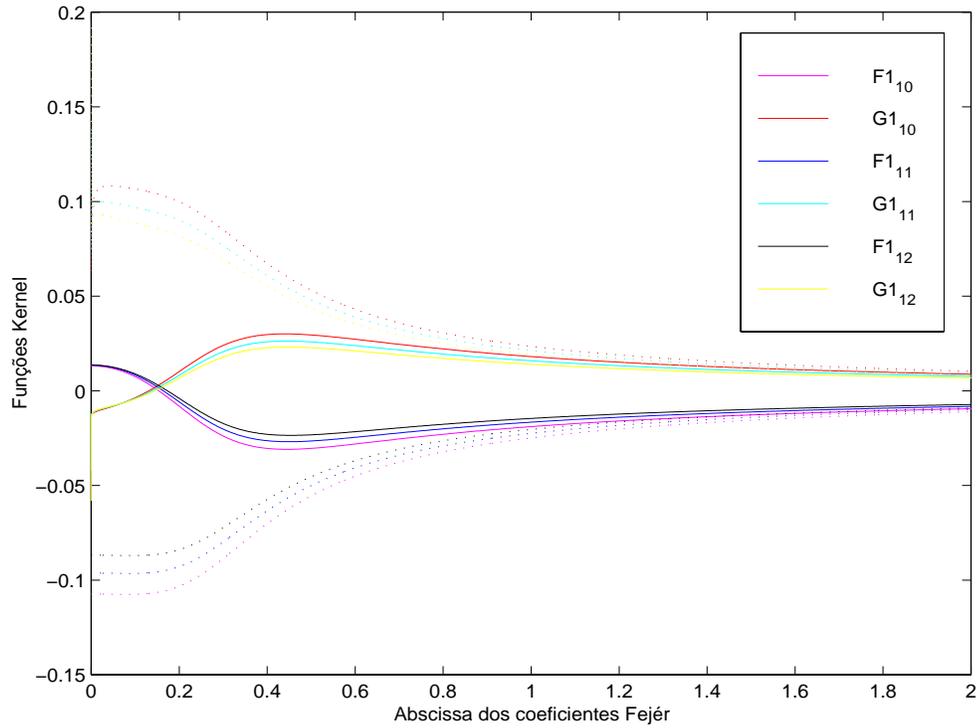


Figura 26: Funções *kernel* de ordem 10 a 12 do lado 1 da falha para $R=10$.
(curvas contínuas - parte real; curvas tracejadas - parte imaginária)

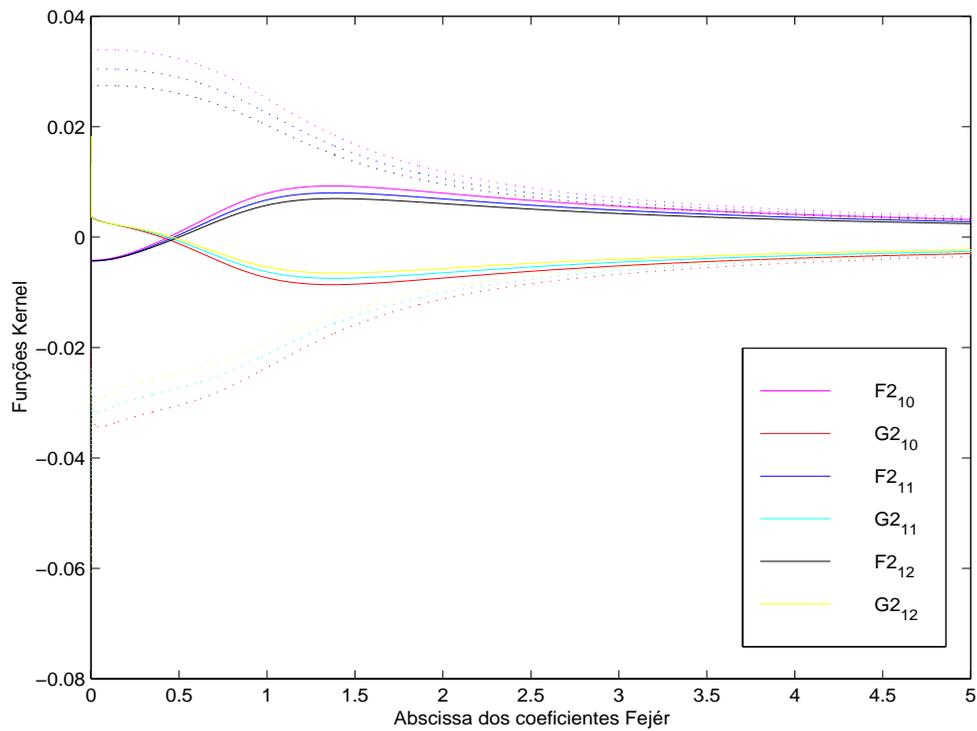


Figura 27: Funções *kernel* de ordem 10 a 12 do lado 2 da falha para $R=10$.
(curvas contínuas - parte real; curvas tracejadas - parte imaginária)

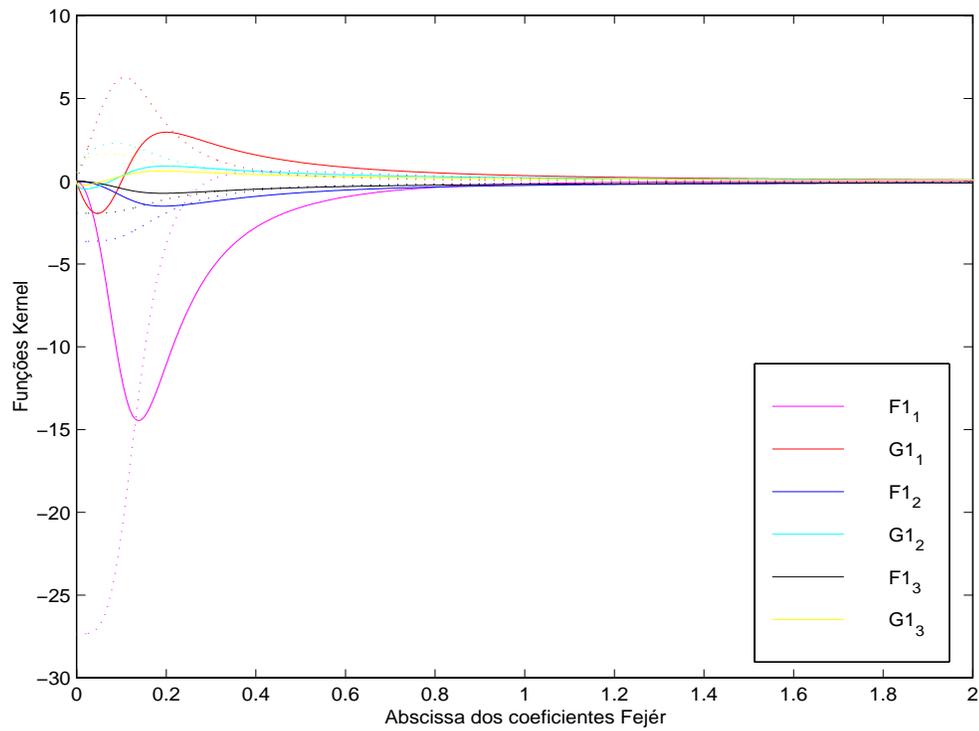


Figura 28: Funções *kernel* de ordem 1 a 3 do lado 1 da falha para $R=50$.
(curvas contínuas - parte real; curvas tracejadas - parte imaginária)

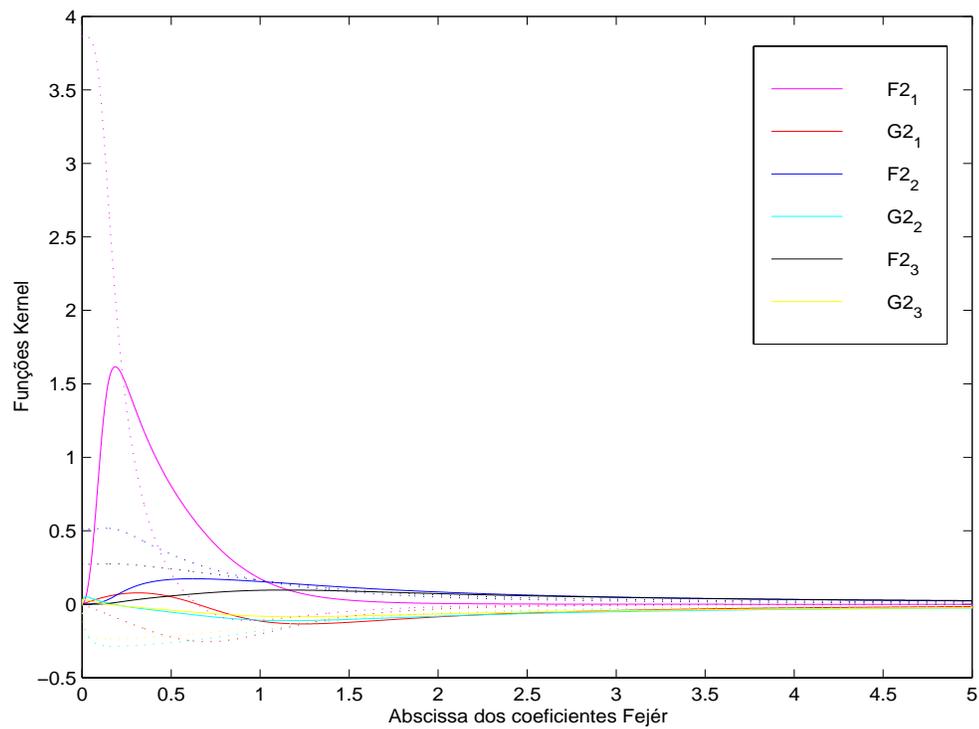


Figura 29: Funções *kernel* de ordem 1 a 3 do lado 2 da falha para $R=50$.
(curvas contínuas - parte real; curvas tracejadas - parte imaginária)

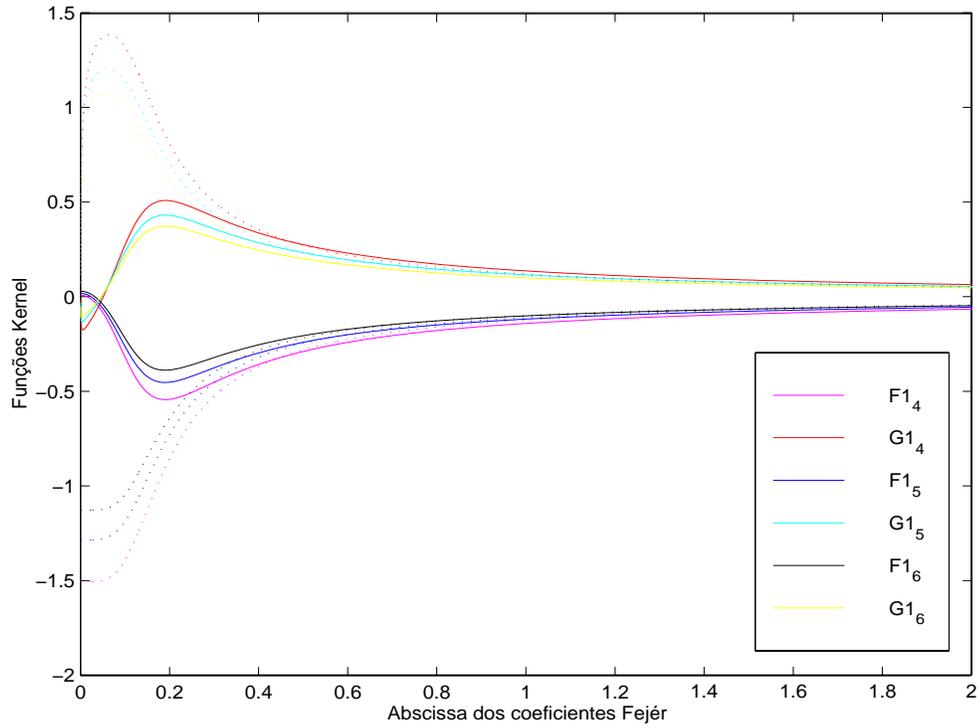


Figura 30: Funções *kernel* de ordem 4 a 6 do lado 1 da falha para $R=50$.
(curvas contínuas - parte real; curvas tracejadas - parte imaginária)

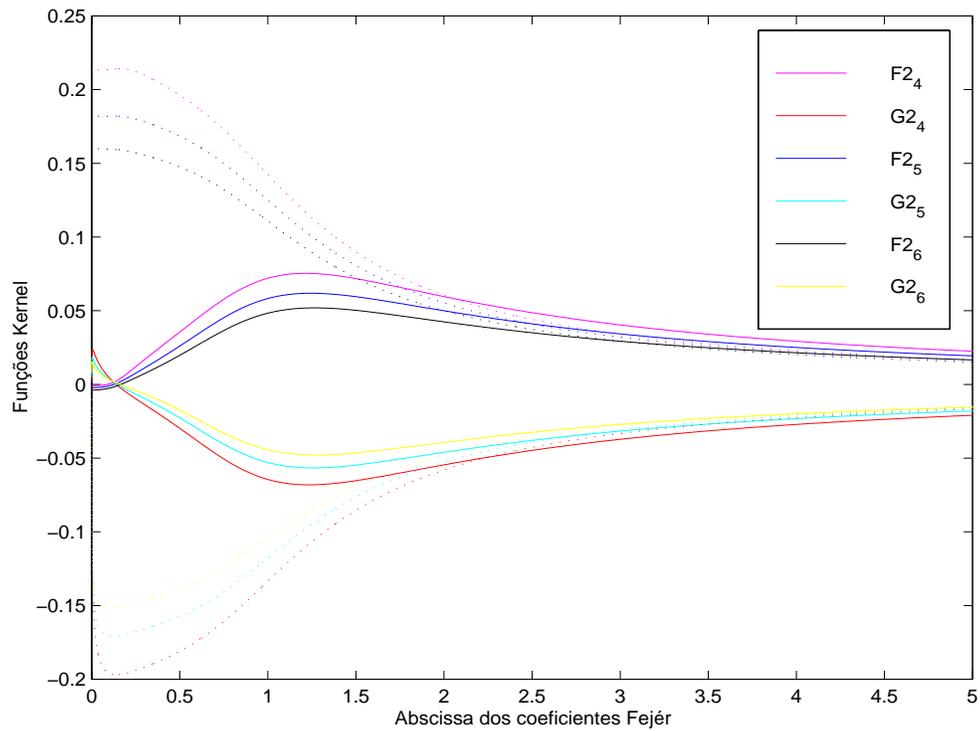


Figura 31: Funções *kernel* de ordem 4 a 6 do lado 2 da falha para $R=50$.
(curvas contínuas - parte real; curvas tracejadas - parte imaginária)

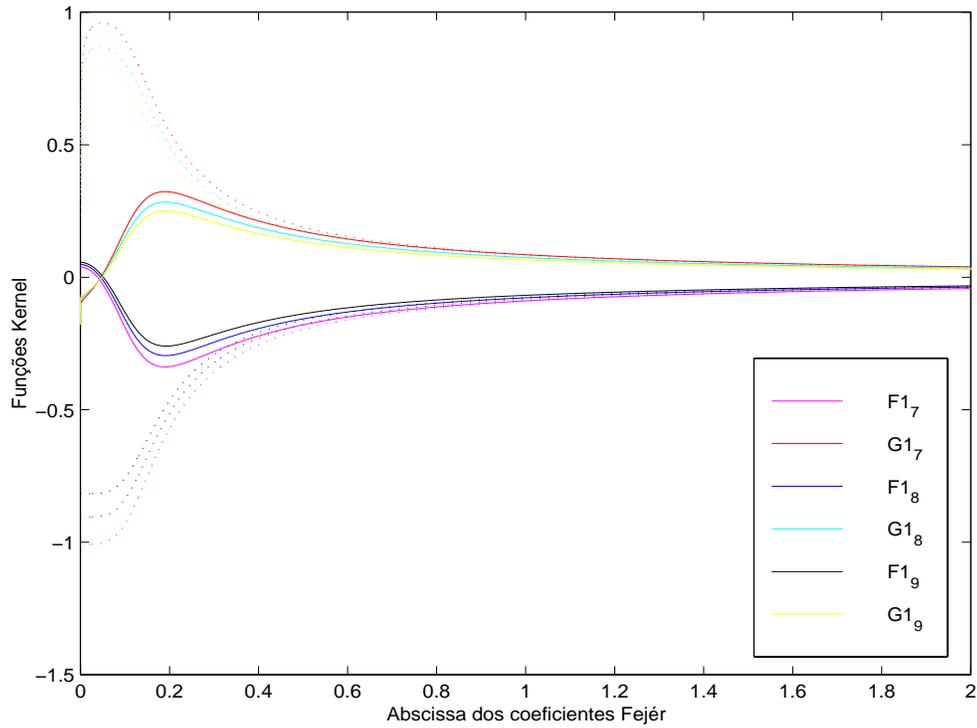


Figura 32: Funções *kernel* de ordem 7 a 9 do lado 1 da falha para $R=50$.
(curvas contínuas - parte real; curvas tracejadas - parte imaginária)

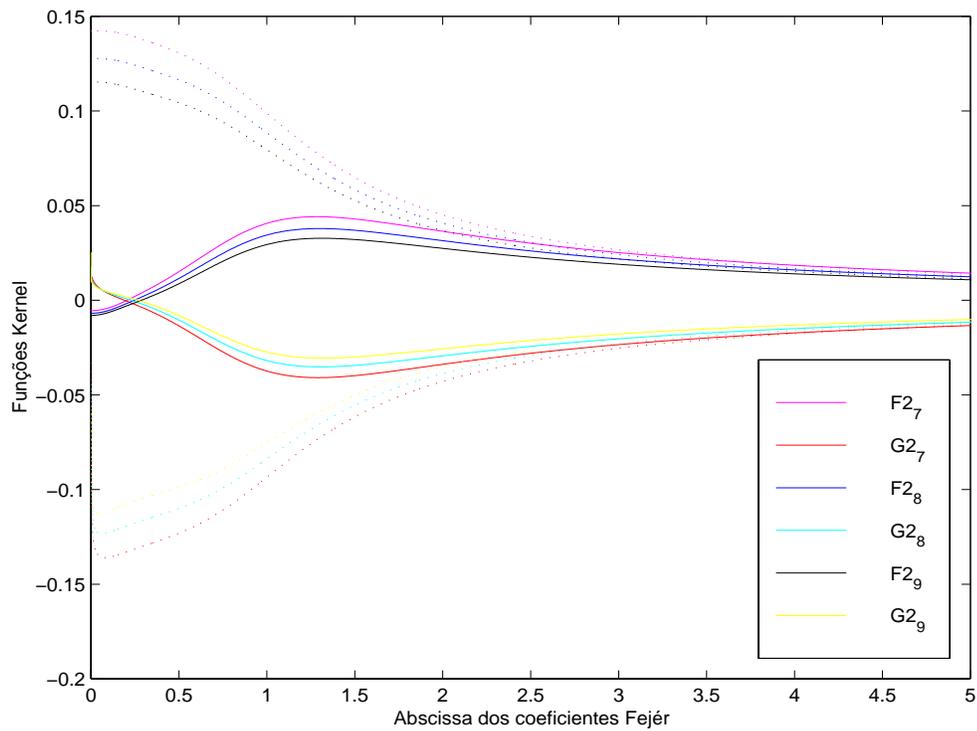


Figura 33: Funções *kernel* de ordem 7 a 9 do lado 2 da falha para $R=50$.
(curvas contínuas - parte real; curvas tracejadas - parte imaginária)

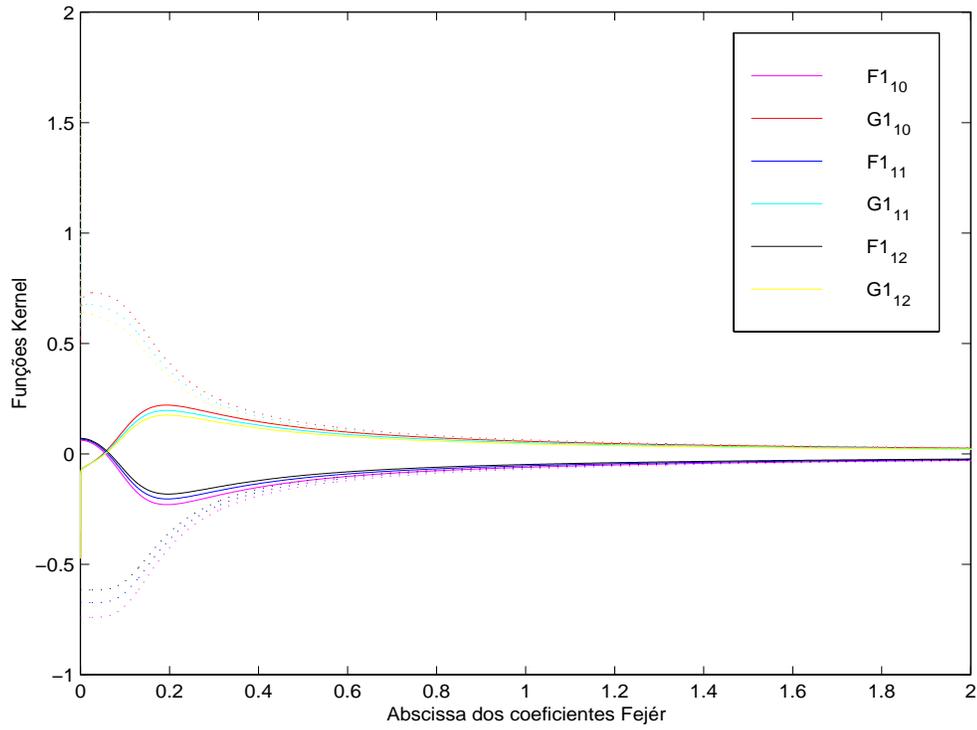


Figura 34: Funções *kernel* de ordem 10 a 12 do lado 1 da falha para $R=50$.
(curvas contínuas - parte real; curvas tracejadas - parte imaginária)

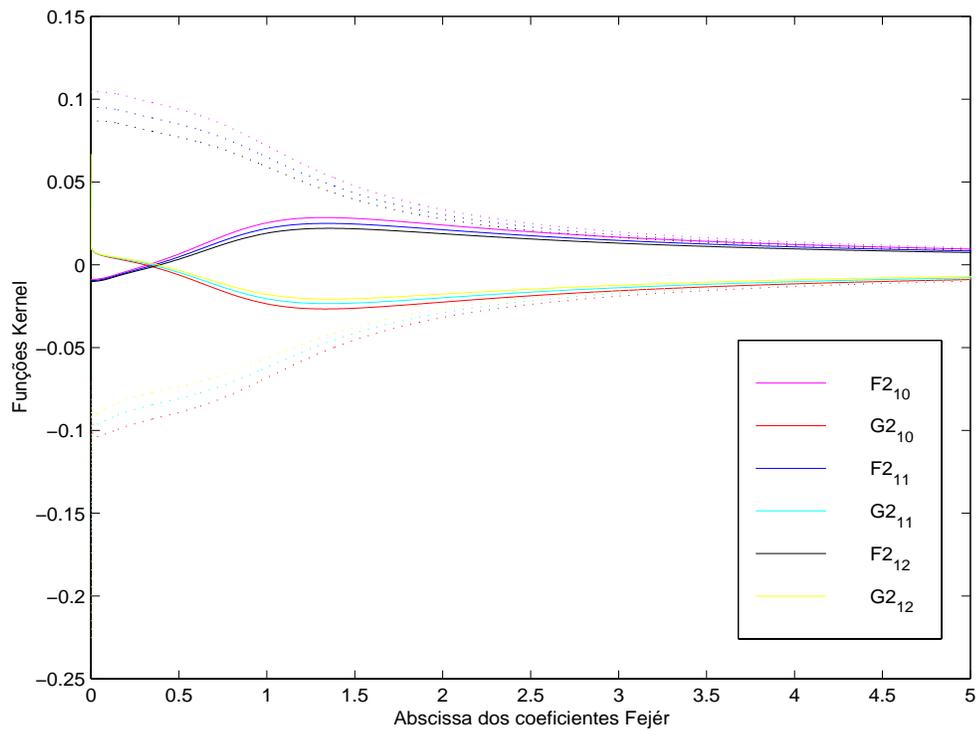


Figura 35: Funções *kernel* de ordem 10 a 12 do lado 2 da falha para $R=50$.
(curvas contínuas - parte real; curvas tracejadas - parte imaginária)

6. RECÁLCULO DA SOLUÇÃO DE SAMPAIO

Sampaio (1985) aborda o problema da falha infinita dividindo o espaço inteiro em quatro quadrantes, dois no ar e dois no terreno separados pela falha. Emprega, em cada quadrante, duas transformadas unilaterais de Fourier, uma em relação à coordenada vertical z e outra em relação à coordenada horizontal x . A formulação encontrada para ambos os lados do terreno é:

$$E_1 = -\frac{\omega\mu H_0}{k_1} e^{ik_1 z} + \int_0^\infty f_1(s) \cos(sz) e^{u_1 x} ds + \int_0^\infty g_1(t) \cos(tx) e^{-v_1 z} dt, \quad z > 0, \quad x < 0 \quad (5)$$

$$E_2 = -\frac{\omega\mu H_0}{k_2} e^{ik_2 z} + \int_0^\infty f_2(s) \cos(sz) e^{-u_2 x} ds + \int_0^\infty g_2(t) \cos(tx) e^{-v_2 z} dt, \quad z > 0, \quad x > 0 \quad (6)$$

onde s e t são variáveis de integração, $u_j = \sqrt{s^2 - k_j^2}$, $v_j = \sqrt{t^2 - k_j^2}$, para $j = 1, 2$.

A aplicação das condições de contorno leva ao seguinte sistema de oito equações integrais, resolvido para as funções de f e g , denominadas funções *kernel*:

$$f_0''(s) = -f_0'(s) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty v_0 \left[\frac{g_0'(t) - g_0''(t)}{2(s^2 - v_0^2)} \right] dt \quad (7)$$

$$g_0'(t) = \frac{2v_1}{\pi(v_0 + v_1)} \int_0^\infty \left[\frac{u_1 f_1(s)}{t^2 + u_1^2} - \frac{u_0 f_0'(s)}{t^2 + u_0^2} \right] ds \quad (8)$$

$$g_0''(t) = \frac{2v_2}{\pi(v_0 + v_2)} \int_0^\infty \left[\frac{u_2 f_2(s)}{t^2 + u_2^2} - \frac{u_0 f_0''(s)}{t^2 + u_0^2} \right] ds \quad (9)$$

$$f_1(s) = \frac{2i\omega\mu H_0(u_1 - u_2)}{\pi u_1^2 u_2} + \frac{2u_2}{\pi(u_1 + u_2)} \int_0^\infty \left[\frac{v_2 g_2(t)}{s^2 + v_2^2} - \frac{v_1 g_1(t)}{s^2 + v_1^2} \right] dt \quad (10)$$

$$f_2(s) = \frac{2i\omega\mu H_0(u_2 - u_1)}{\pi u_2^2 u_1} + \frac{2u_1}{\pi(u_1 + u_2)} \int_0^\infty \left[\frac{v_1 g_1(t)}{s^2 + v_1^2} - \frac{v_2 g_2(t)}{s^2 + v_2^2} \right] dt \quad (11)$$

$$g_1(t) = \frac{2v_0}{\pi(v_0 + v_1)} \int_0^\infty \left[\frac{u_0 f_0'(s)}{t^2 + u_0^2} - \frac{u_1 f_1(s)}{t^2 + u_1^2} \right] ds \quad (12)$$

$$g_2(t) = \frac{2v_0}{\pi(v_0 + v_2)} \int_0^\infty \left[\frac{u_0 f_0''(s)}{t^2 + u_0^2} - \frac{u_2 f_2(s)}{t^2 + u_2^2} \right] ds \quad (13)$$

Note que as funções f_0^I , f_0^{II} , g_0^I e g_0^{II} são as correspondentes das funções f_1 , f_2 , g_1 e g_2 indicadas nas equações (5) e (6), só que para os quadrantes do ar, que aqui não nos interessam diretamente. O sistema de equações dado pelas equações (7) a (13) é resolvido por Sampaio utilizando o método numérico de Neumann das aproximações sucessivas. Segundo este método, cada função *kernel* corresponde a um somatório, de acordo com as seguintes expressões:

$$\begin{aligned} f_j(s) &= \sum_k F_{jk} \quad ; \quad j = 0, 1, 2 \\ g_j(s) &= \sum_k G_{jk} \quad ; \quad j = 0, 1, 2 \end{aligned}$$

A primeira aproximação, conhecida como aproximação de Born, é feita colocando-se $g_0^I = g_0^{II} = f_0^I = f_0^{II} = g_1 = g_2 = 0$ e substituindo-se $g_1 = 0$ e $g_2 = 0$ nas equações (10) e (11), obtendo F_{11} e F_{21} . Substituindo os valores de F_{11} e F_{12} nas equações 8, 9, 12 e 13, obtemos G_{01}^I , G_{01}^{II} , G_{11} , G_{21} . F_{02}^I e F_{02}^{II} são obtidos através da substituição de G_{01}^I , G_{01}^{II} na equação (7). Este processo pode ser continuado, iterando-se a solução até a ordem desejada. Tratando-se de um método de aproximações sucessivas, espera-se uma solução de grau de precisão aumentando com a ordem de iteração, desde que a solução seja convergente.

Para garantir um grau de precisão máximo no cálculo das integrais das funções *kernel*, optamos pela quadratura de Fejér, baseada em interpolação polinomial e de alta precisão, estabelecendo os coeficientes de integração com 3360 valores das abscissas: 3000 valores entre 0 e 15, 300 valores entre 15 e 30 e 60 valores entre 30 e 60. Esta mesma distribuição de valores foi utilizada também por Sampaio, que a utilizou na integração pela regra trapezoidal simples, de grau de precisão muito inferior à quadratura de Fejér. A aplicação do intervalo de integração de 0 a 60 para as integrais de 0 a ∞ em questão se justifica pelo comportamento das funções *kernel*. As figuras 12 a 35 mostram as funções *kernel* obtidas a partir do cálculo das primeiras 12 iterações para os contrastes de resistividade $R=2$, $R=10$ e $R=50$. No seu trabalho de 1985, Sampaio apresenta as funções *kernel* apenas até a terceira ordem de iteração. Não obstante os métodos de integração diferentes, os seus resultados coincidem com os nossos até a terceira ordem de iteração.

Obtidas as funções *kernel*, calculamos o valor do campo elétrico normalizado através das equações (5) e (6), utilizando a mesma integração de Fejér, novamente para os contrastes de resistividade $R=2$, $R=10$ e $R=50$. Testamos as soluções até a ordem de iteração 50 mas não exibimos os resultados para as ordens 17 e acima, uma vez que, a partir desta iteração, ao invés de diminuir em magnitude, a soma dos quadrados do acréscimo vai se tornando maior do que a anterior, o que é um comportamento claramente divergente. Os resultados até a 16ª ordem estão ilustrados nas Figuras 36 a 53. A solução de Weaver corresponde à primeira iteração, que ainda não utiliza nenhuma integração para a obtenção das funções *kernel*. A 3ª iteração foi apresentada por Sampaio no seu trabalho de 1985 e coincide com a por nós calculada. A análise das iterações 15 e 16 exibidas nas Figuras 38, 39, 44, 45, 50 e 51 evidencia que a solução semi-analítica de Sampaio é divergente na sua parte numérica, quando a máxima inclinação em $\theta=0$ se transforma em uma descontinuidade. Por isso, discordamos da explicação dada por Sampaio & Fokkema (1992, pág. 1962) para a máxima inclinação da curva campo elétrico em $\theta=0$. Acreditamos que esta tendência de máxima inclinação é devido ao caráter divergente da solução por eles apresentada.

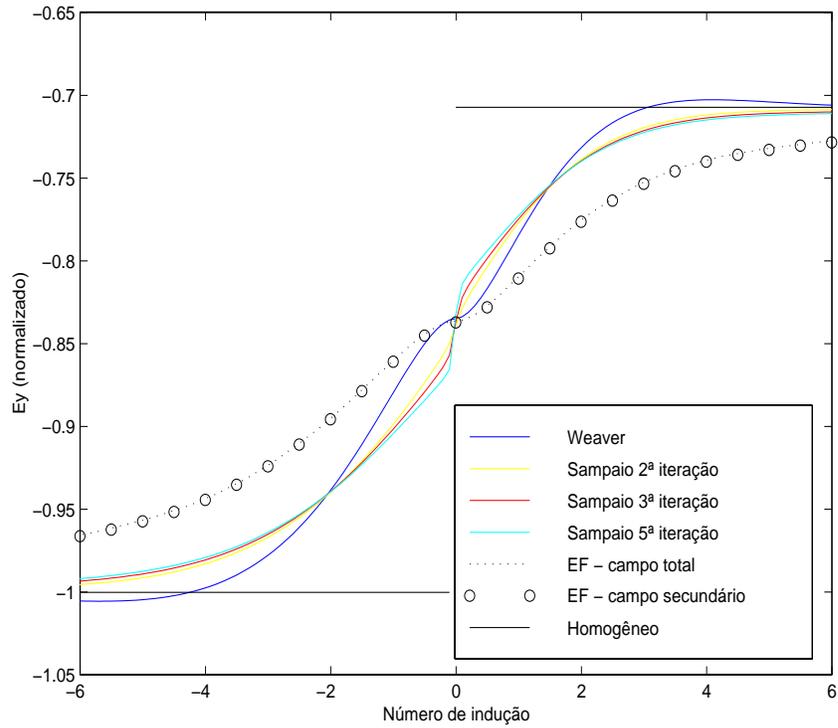


Figura 36: Parte real do campo elétrico normalizado no modo TE para $R=2$. Iterações 2, 3 e 5 da solução de Sampaio.

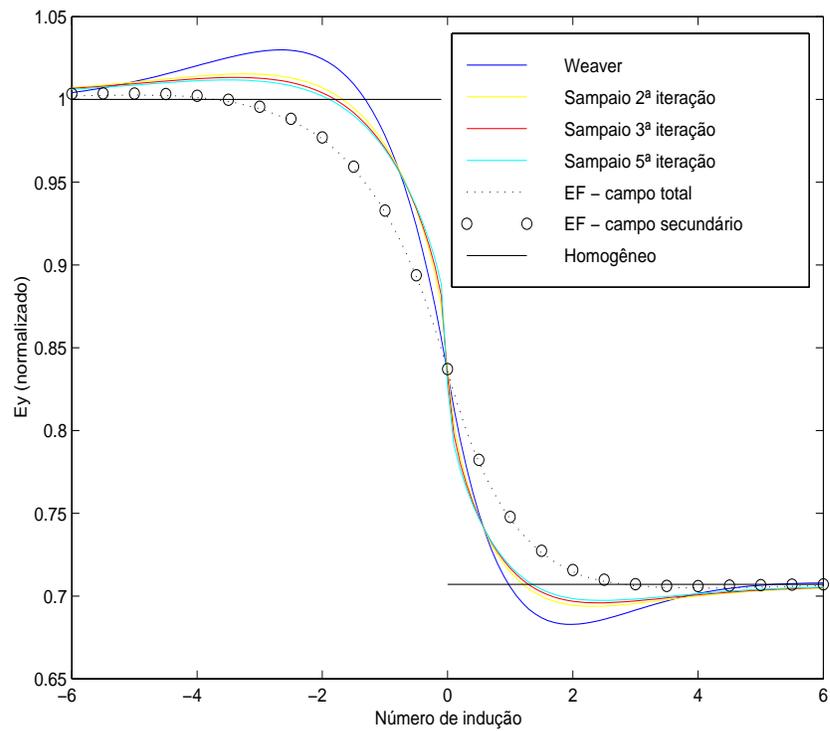


Figura 37: Parte imaginária do campo elétrico normalizado no modo TE para $R=2$. Iterações 2, 3 e 5 da solução de Sampaio.

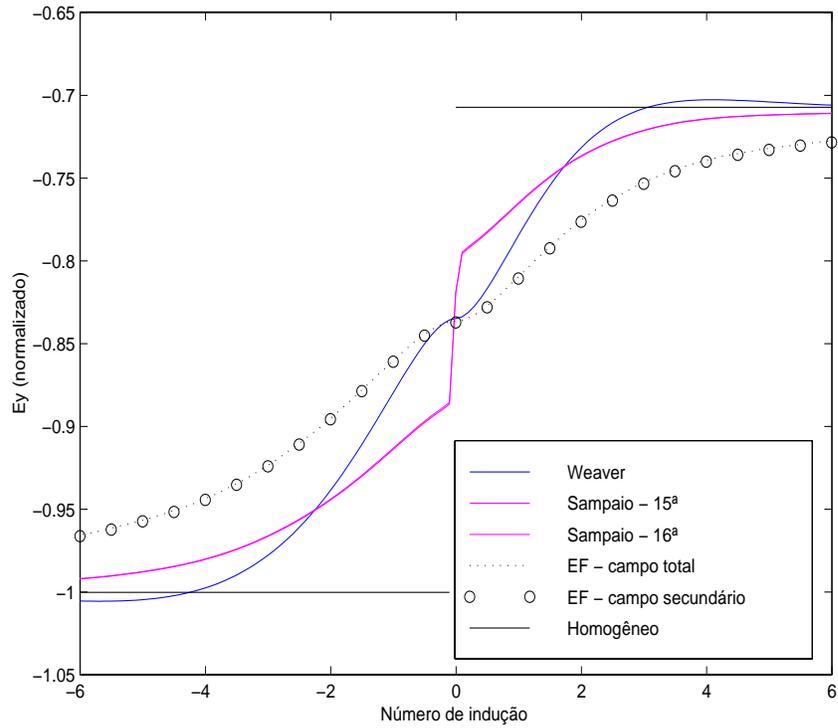


Figura 38: Parte real do campo elétrico normalizado no modo TE para $R=2$.
Iterações 15 e 16 da solução de Sampaio.

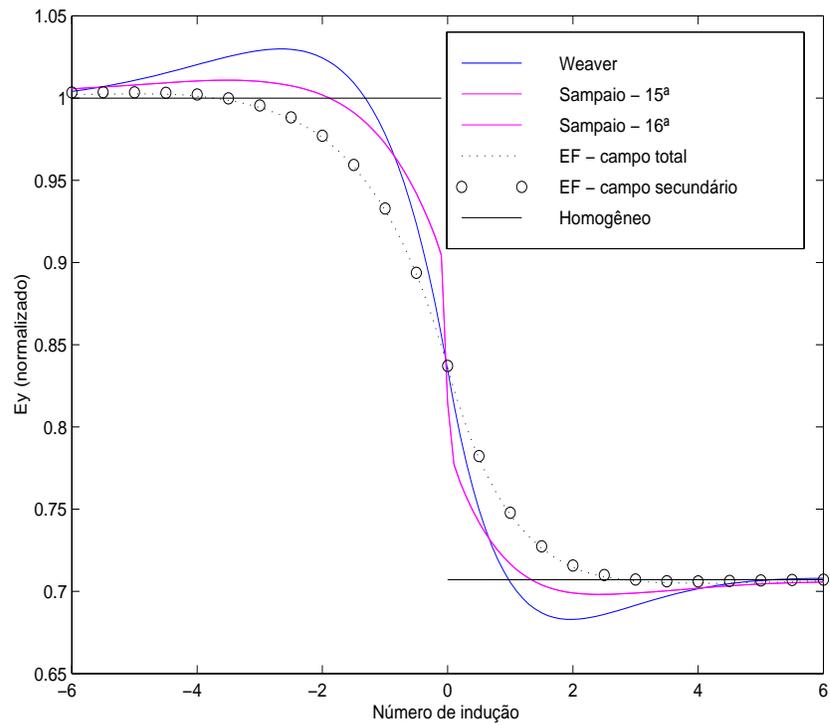


Figura 39: Parte imaginária do campo elétrico normalizado no modo TE para $R=2$.
Iterações 15 e 16 da solução de Sampaio.

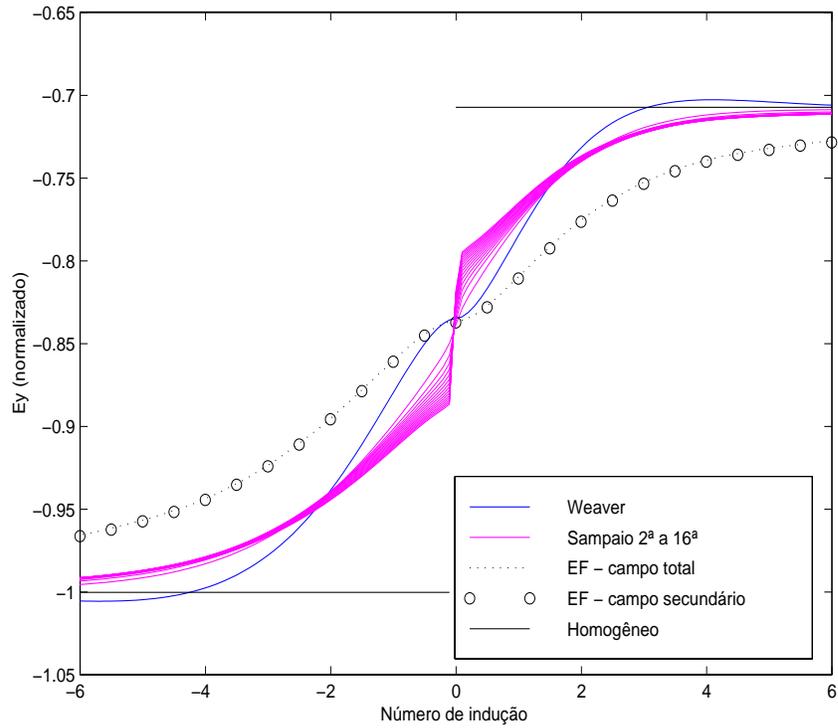


Figura 40: Parte real do campo elétrico normalizado no modo TE para $R=2$.
Iterações 2 a 16 da solução de Sampaio.

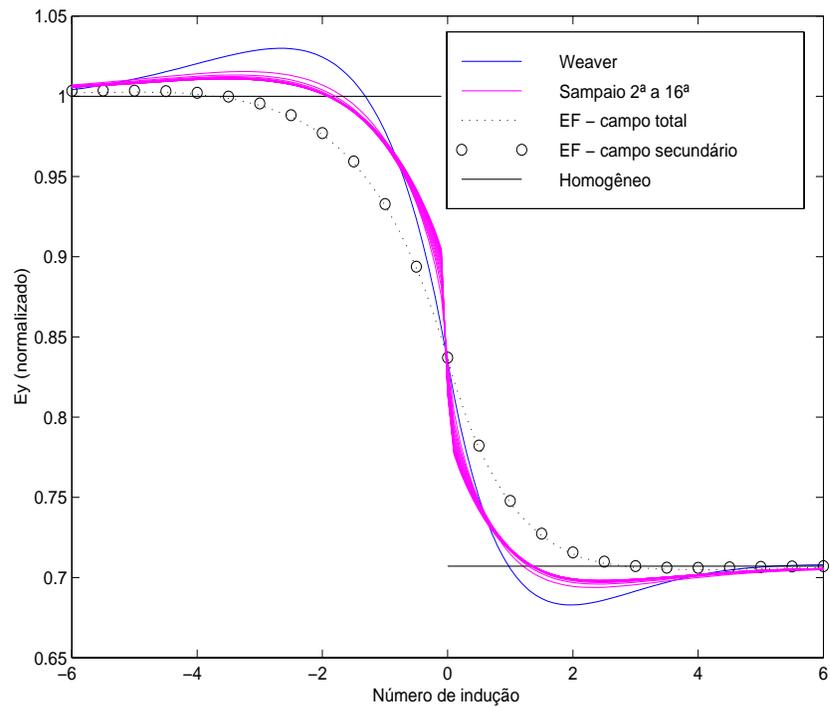


Figura 41: Parte imaginária do campo elétrico normalizado no modo TE para $R=2$.
Iterações 2 a 16 da solução de Sampaio.

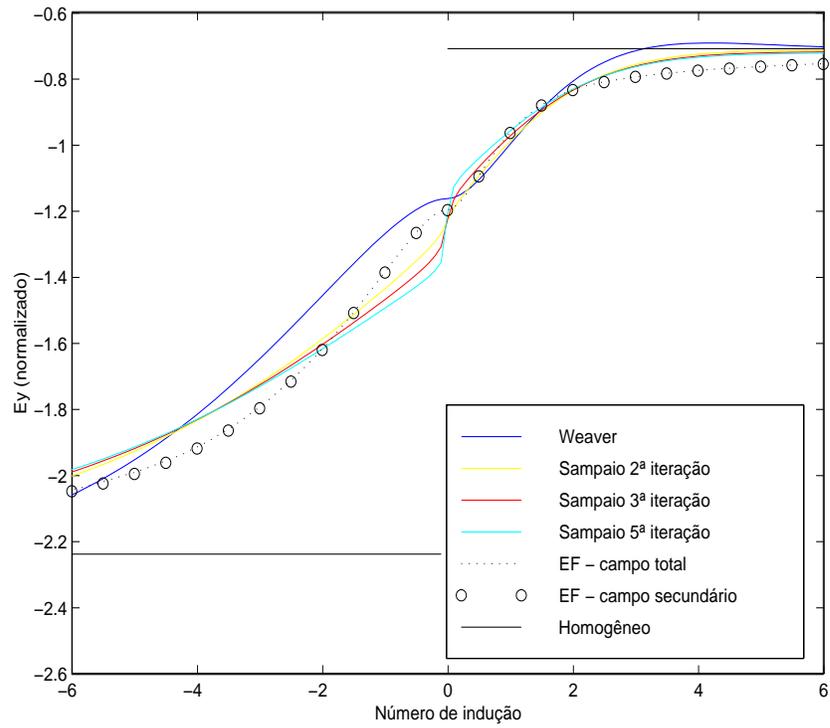


Figura 42: Parte real do campo elétrico normalizado no modo TE para $R=10$. Itens 2, 3 e 5 da solução de Sampaio.

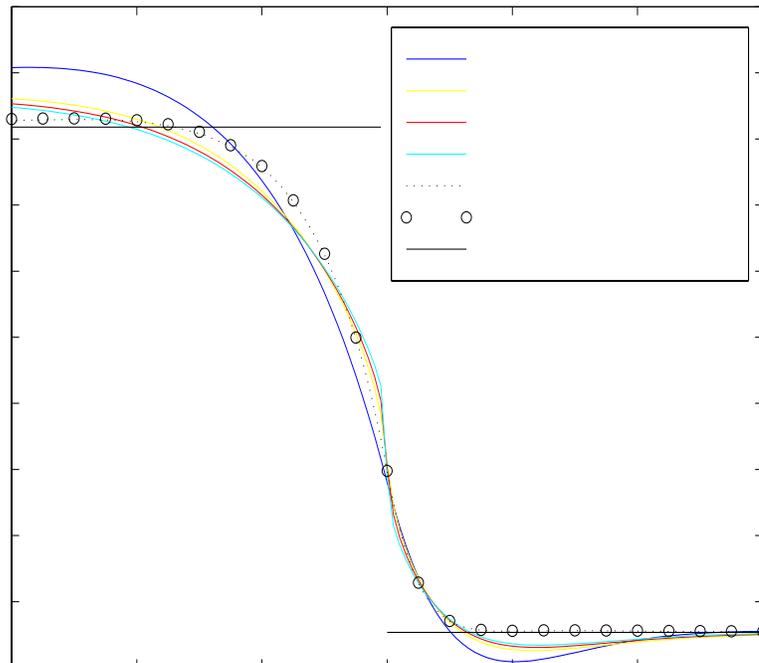


Figura 43: Parte imaginária do campo elétrico normalizado no modo TE para $R=10$. Itens 2, 3 e 5 da solução de Sampaio.

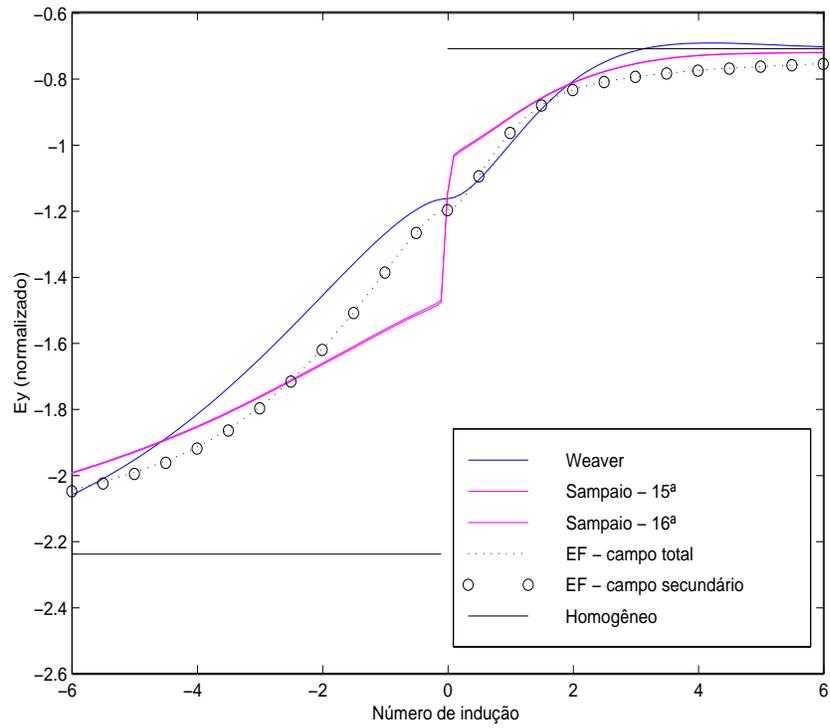


Figura 44: Parte real do campo elétrico normalizado no modo TE para $R=10$.
Iterações 15 e 16 da solução de Sampaio.

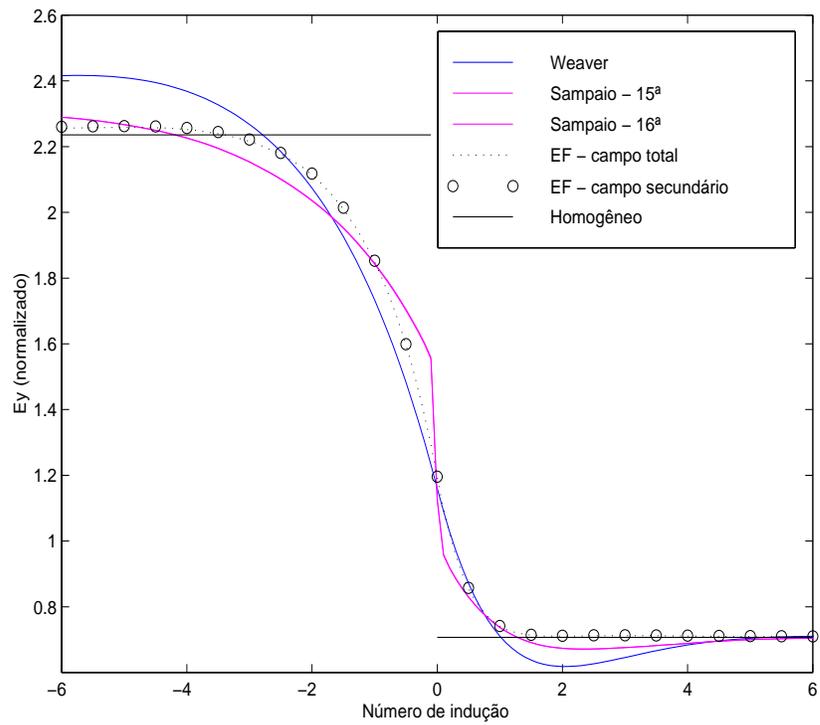


Figura 45: Parte imaginária do campo elétrico normalizado no modo TE para $R=10$.
Iterações 15 e 16 da solução de Sampaio.

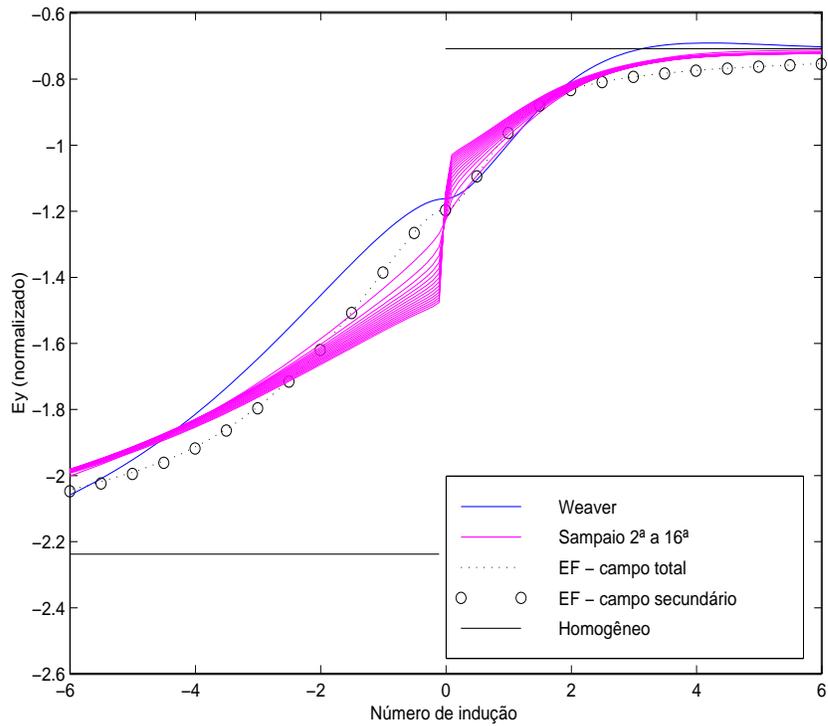


Figura 46: Parte real do campo elétrico normalizado no modo TE para $R=10$. Iterações 2 a 16 da solução de Sampaio.

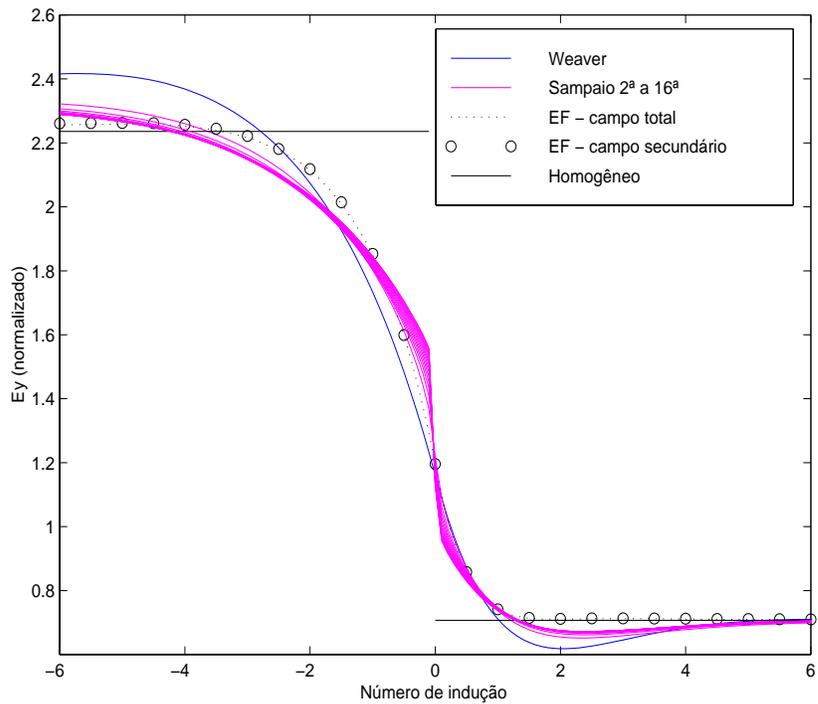


Figura 47: Parte imaginária do campo elétrico normalizado no modo TE para $R=10$. Iterações 2 a 16 da solução de Sampaio.

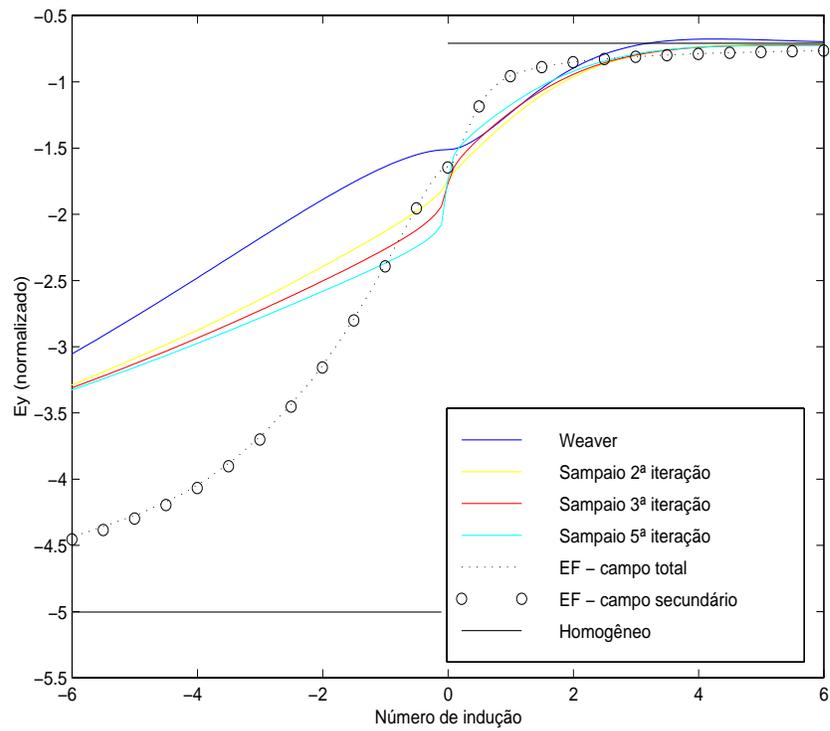


Figura 48: Parte real do campo elétrico normalizado no modo TE para $R=50$. Iterações 2, 3 e 5 da solução de Sampaio.

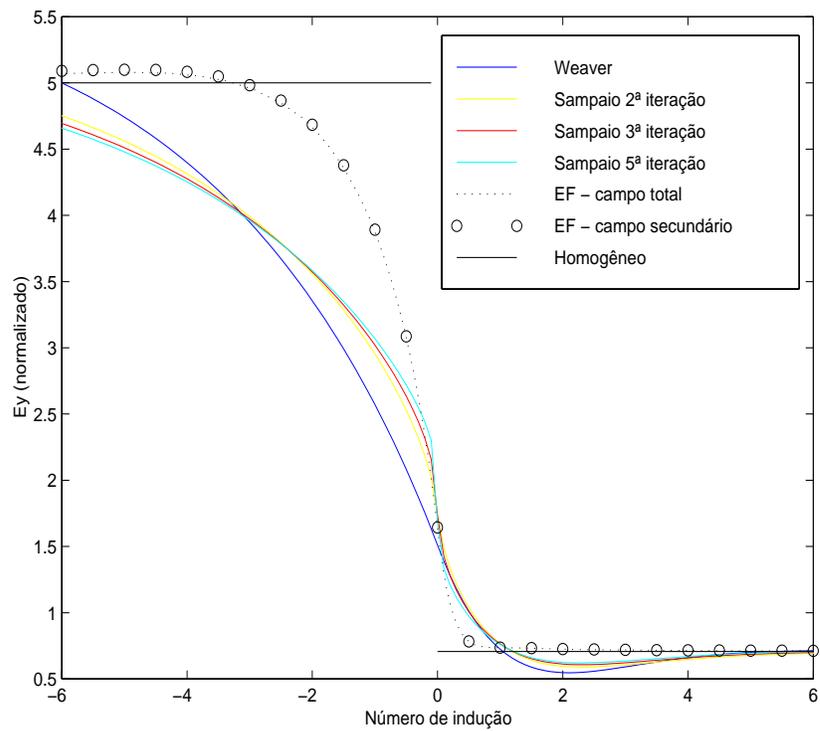


Figura 49: Parte imaginária do campo elétrico normalizado no modo TE para $R=50$. Iterações 2, 3 e 5 da solução de Sampaio.

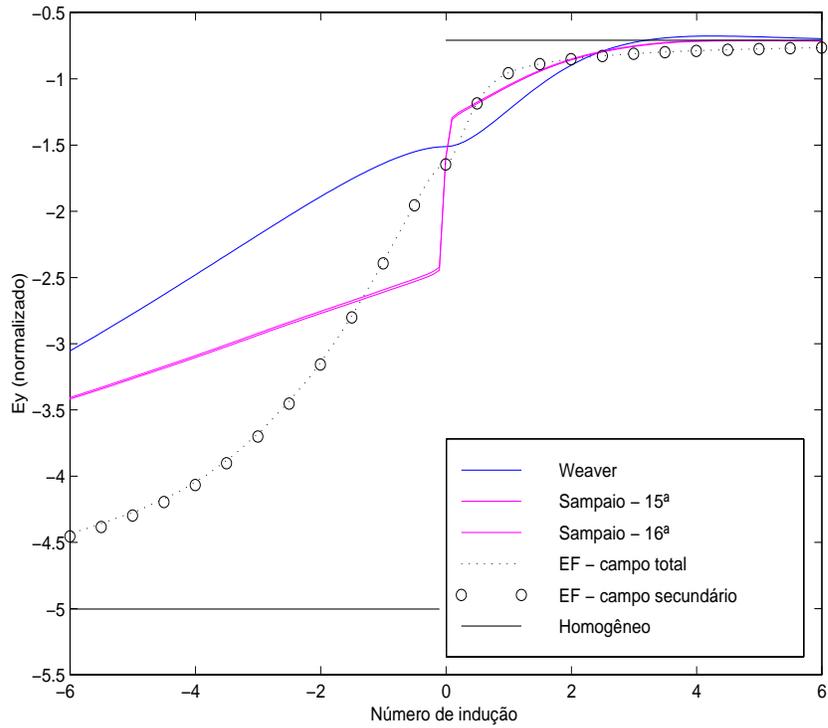


Figura 50: Parte real do campo elétrico normalizado no modo TE para $R=50$.
Iterações 15 e 16 da solução de Sampaio.

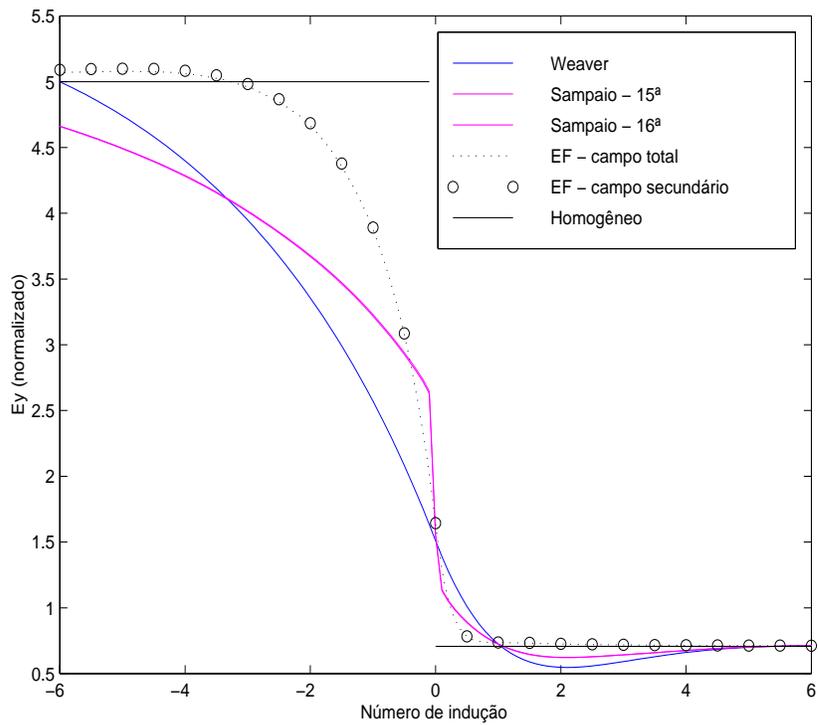


Figura 51: Parte imaginária do campo elétrico normalizado no modo TE para $R=50$.
Iterações 15 e 16 da solução de Sampaio.

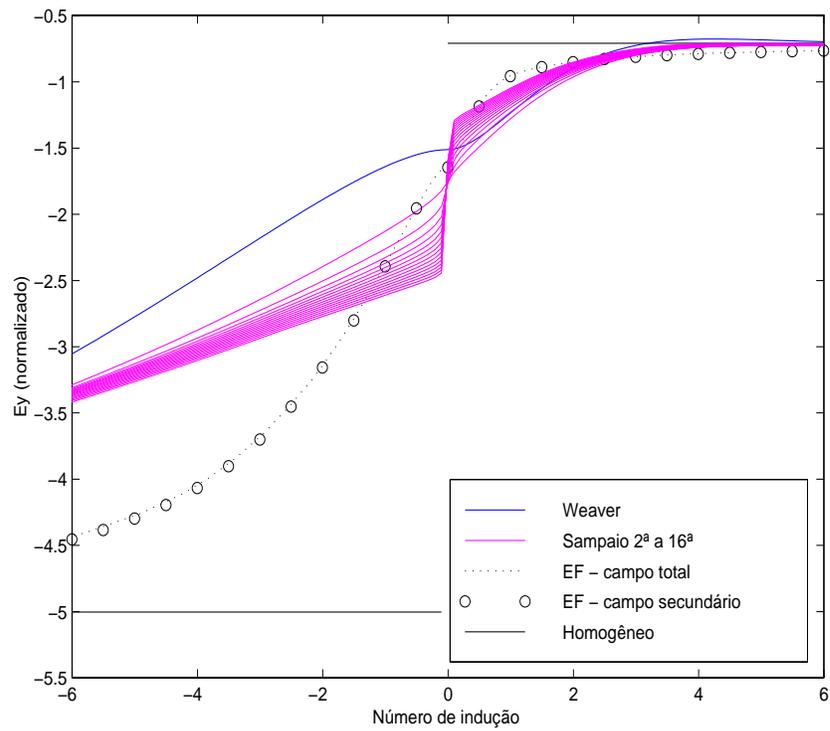


Figura 52: Parte real do campo elétrico normalizado no modo TE para $R=50$.
Itaerações 2 a 16 da solução de Sampaio.

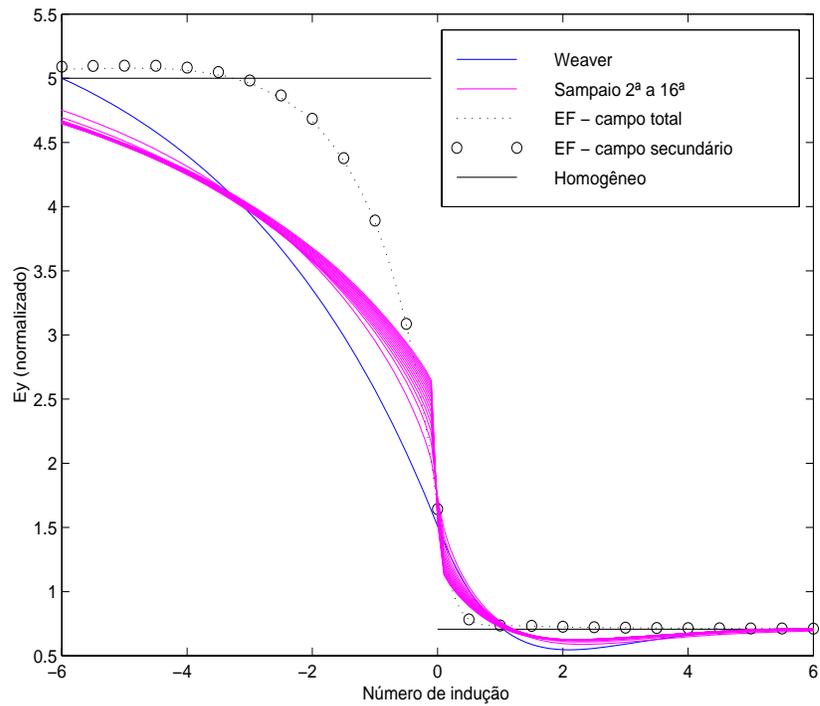


Figura 53: Parte imaginária do campo elétrico normalizado no modo TE para $R=50$.
Itaerações 2 a 16 da solução de Sampaio.

7. RESULTADOS PARA A RESISTIVIDADE APARENTE

As Figuras 54 a 58 mostram perfis de resistividade aparente, calculados para as frequências entre 0,01 e 100 Hz, utilizando a solução de Weaver e nossa solução por elementos finitos, para os contrastes de resistividade $R=2$, $R=10$ e $R=50$. Não apresentamos o cálculo da resistividade aparente segundo a solução de Sampaio pois, devido ao seu caráter descontínuo, descartamos a solução por ele apresentada. Em todos os casos a discrepância entre as duas soluções é muito menor do que a discrepância observada na solução equivalente para o campo elétrico normalizado. Este fato evidencia o efeito suavizador da função resistividade aparente em relação ao campo elétrico. Observa-se também que a magnitude da discrepância é muito pequena para um contraste de resistividade pequeno e que esta magnitude vai aumentando com o aumento de R . Em todos os casos, a magnitude da discrepância é menor do que o erro instrumental de campo.

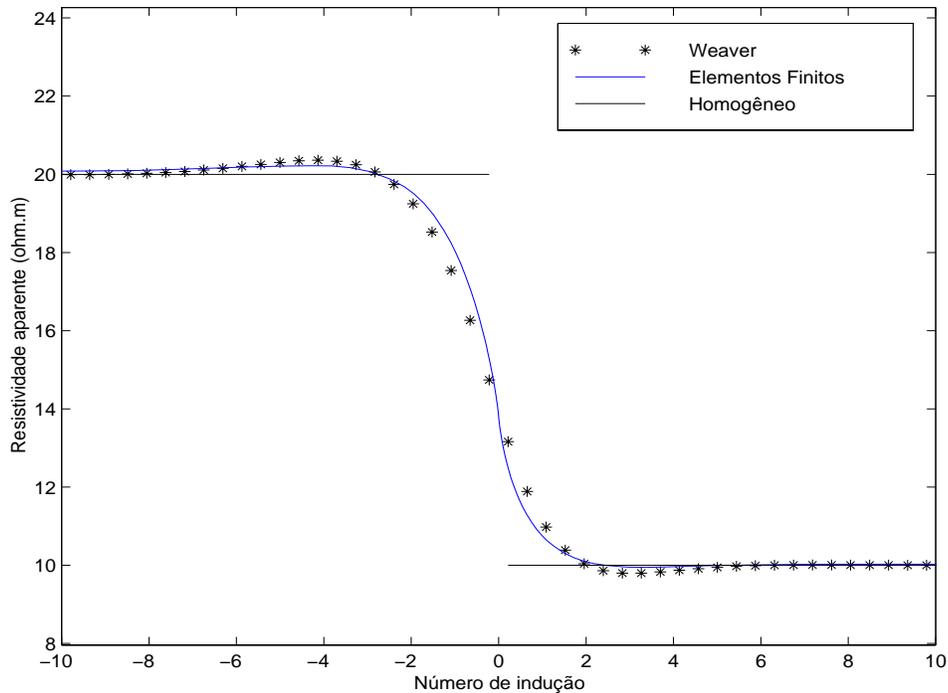


Figura 54: Perfil de resistividade aparente para $R=2$ no modo TE.

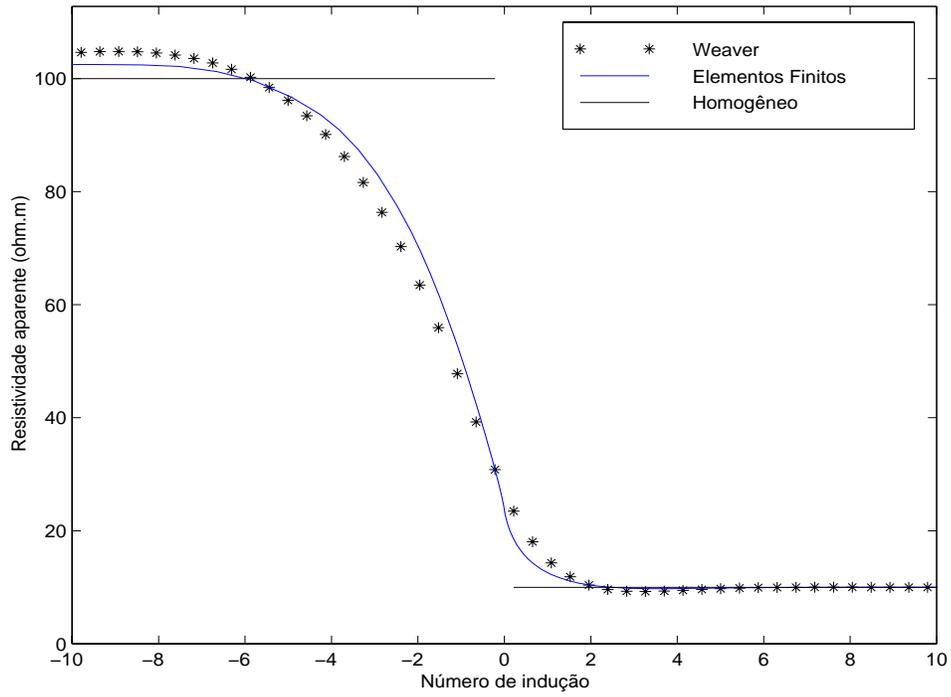


Figura 55: Perfil de resistividade aparente para R=10 no modo TE.

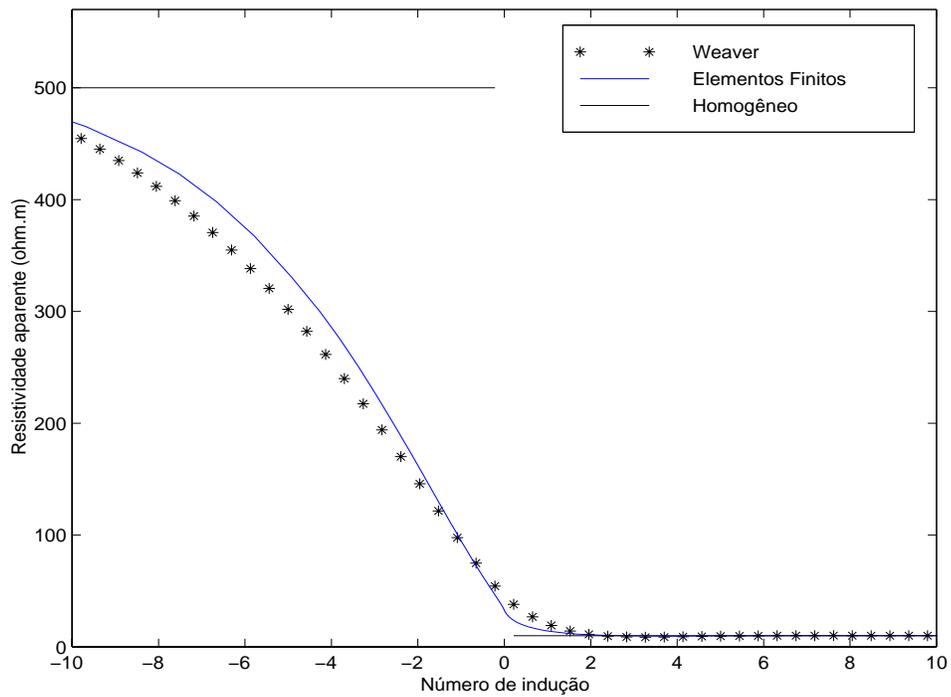


Figura 56: Perfil de resistividade aparente para R=50 no modo TE.

8. CONCLUSÃO

Apresentamos a solução numérica do modelo da falha infinita para o modo TE utilizando o método dos elementos finitos. A comparação de nossa solução para o campo elétrico normalizado com a solução de Weaver evidenciou uma discrepância esperada devido ao efeito do ar, que foi negligenciado por Weaver para facilitar a solução analítica do problema. A discrepância inesperada entre a nossa solução por elementos finitos e a solução híbrida apresentada por Sampaio, livre das restrições impostas por Weaver, nos fez recalculamos a solução de Sampaio, a fim de obter uma melhor aproximação através do cálculo com maior número de iterações. Reproduzidos os resultados apresentados por Sampaio no seu trabalho de 1985, iteramos até a ordem 50. Ao contrário do esperado, com o acréscimo dos termos de ordem maiores, a solução diverge em relação ao primeiro termo, que constitui a solução de Weaver. A geometria das curvas obtidas sugere que algum erro numérico pode estar presente já desde a segunda iteração. Este comportamento evidencia que uma solução analítica, que para sua implementação precisa lançar mão de métodos numéricos, se tornando, desta forma, semi-analítica ou híbrida, pode ser desvantajosa em relação a uma solução puramente numérica obtida através de métodos numéricos robustos que utilizam premissas fortes e se encontram bem consolidados, como, no presente caso, o método de elementos finitos.

Para examinar o efeito do ar na resistividade aparente, comparamos três perfis de resistividade aparente obtidos a partir de nossa solução por elementos finitos com os mesmos perfis obtidos pela solução de Weaver. A discrepância encontrada entre estas soluções foi muito pequena, situando-se na faixa de erro instrumental de campo. Isto sugere que, na prática, a solução de Weaver é uma boa aproximação para prospecção geofísica.

Finalmente cabe observar que, pelo exposto, o problema da solução exata do modelo da falha infinita no modo TE do método magnetotelúrico, analítica ou semi-analítica, continua em aberto. Apesar de que os testes de consistência (calibrações no modo TM, comparações entre as abordagens de campo total e secundário e a utilização de diferentes tipos de malha) não deixem dúvidas quanto à confiabilidade do nosso algoritmo de elementos finitos, seria desejável se encontrar a solução também confiável obtida através do método analítico ou semi-analítico. Considerando que a formulação analítica da solução de Sampaio não parece apresentar nenhum

equivoco, acreditamos que um estudo mais analítico da parte numérica da solução de Sampaio possivelmente elucidaria as razões da divergência de suas integrais.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- CAGNIARD, L. 1953. Basic theory of the magneto-telluric method of geophysical prospecting. *Geophysics*, **18**: 605-635.
- D'ERCEVILLE, I. & KUNETZ, G. 1962. The effect of a fault on the Earth's natural electromagnetic field. *Geophysics*, **27**(5): 651-665.
- HOHMANN, G. 1971. Electromagnetic scattering by conductors in the Earth near a source of current. *Geophysics*, **36**(1): 101-131.
- JONES, F. W. & PRICE, A. T. 1970. The perturbations of alternating geomagnetic fields by conductivity anomalies. *Geophysics*, **20**: 317-334.
- RIJO, L. 1977. Modeling of electric and electromagnetic data. Utah, University of Utah, Department of Geology and Geophysics, 242 p. (Doctorate in Geophysics).
- RIJO, L. 1992. Teoria dos métodos elétricos e eletromagnéticos I e II. Belém, Brasil. (Notas de aula).
- SAMPAIO, E. E. S. 1985. Espalhamento de uma onda eletromagnética plana por dois quartos-de-espaço condutores. UFBA, 35 p. (Trabalho de professor titular).
- SAMPAIO, E.E.S. & FOKKEMA, J. T. 1992. Scattering of monochromatic acoustic and electromagnetic plane waves by two quarter spaces. *Journal of Geophysical Research*, **97**: 1953-1963.
- TIKHONOV, A. N. 1950. On Determining electrical characteristics of the deep layers of the earth's crust. *Dokl. Acad. Nauk. U.S.S.R.*, **73**: 295-297.

WEAVER, J. 1963. The Electromagnetic field within a discontinuous conductor with reference to geomagnetic micropulsations near a coast line, *Canadian Journal of Physics*. **41**(3): 484-495.