UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
NÚCLEO PEDAGÓGICO DE APOIO AO DESENVOLVIMENTO CIENTÍFICO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICAS

HISTÓRIA DA MATEMÁTICA E APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA DA ÁREA DO CÍRCULO: UMA EXPERIÊNCIA DE ENSINO-APRENDIZAGEM

JOSÉ MESSILDO VIANA NUNES

Belém
2007

JOSÉ MESSILDO VIANA NUNES

HISTÓRIA DA MATEMÁTICA E APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA DA ÁREA DO CÍRCULO: UMA EXPERIÊNCIA DE ENSINO-APRENDIZAGEM

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas do Núcleo Pedagógico de Apoio ao Desenvolvimento Científico, da Universidade Federal do Pará, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Educação Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Renato Borges Guerra

Belém
2007

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Biblioteca do NPADC/UFPA

Nunes, José Messildo Viana

História da Matemática e aprendizagem significativa da área do círculo: uma experiência de ensino-aprendizagem/José Messildo Viana Nunes. – Belém, 2007.

109 f.: il.; 29 cm

Orientador: Renato Borges Guerra

Dissertação (Mestrado) – Núcleo Pedagógico de Apoio ao Desenvolvimento Científico, Universidade Federal do Pará.

1. MATEMÁTICA – Estudo e ensino. 2. APRENDIZAGEM (Matemática). 3. EDUCAÇÃO MATEMÁTICA.

CDD 22.ed. 510.7

HISTÓRIA DA MATEMÁTICA E APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA DA ÁREA DO CÍRCULO: UMA EXPERIÊNCIA DE ENSINO-APRENDIZAGEM

Por

JOSÉ MESSILDO VIANA NUNES

Dissertação de Mestrado aprovada para obtenção do grau de Mestre em Educação Matemática, pela Banca Examinadora formada por:

Presidente: Prof. Dr. Renato Borges Guerra
Presidente, Orientador, UFPA

Membro: Prof. Dr. Francisco Hermes Santos da Silva
Membro interno, UFPA

Membro: Prof. Dr. Iran Abreu Mendes
Membro externo, UFRN

Defesa: Belém (PA), 28 de março de 2007

A minha mãe, Maria do Carmo Viana Nunes, que, por reconhecer o valor da educação para o desenvolvimento pessoal e profissional, não mediu esforços para propiciar a seus filhos as condições necessárias para que se desenvolvessem.

A minha flor, Orquídea Vasconcelos, por suas contribuições e críticas neste trabalho, durante o transcorrer do curso de mestrado e desde a elaboração da intenção do projeto de pesquisa até sua conclusão, e por seu companheirismo, parceria e compreensão demonstradas nos anos de convivência.

AGRADECIMENTOS

A Deus e aos invisíveis que me acompanham e que têm demonstrando sua existência sempre que preciso.

A meu orientador, Prof. Dr. Renato Borges Guerra, que acreditou em minha proposta de pesquisa, apresentando contribuições relevantes e essenciais ao desenvolvimento desta.

A meus professores do mestrado por seus ensinamentos, contribuições e por todas as críticas construtivas que fizeram, dando-me condições de desenvolver melhor este trabalho.

Ao Prof. Dr. Iran Abreu Mendes por reconhecer o valor de meu trabalho acadêmico desde minha especialização, e suas contribuições na qualificação e conclusão deste trabalho.

Ao professor Dr. Francisco Hermes Santos da Silva pelas contribuições e críticas a este trabalho.

A Maria Aparecida da Silva Cavalcante, componente da competente e atenciosa equipe da Gerência de Capacitação e Valorização do Servidor (GCVS-Seduc/PA)

A amigos e companheiros de turma que direta e indiretamente ajudaram-me durante o curso.

Aos inesquecíveis amigos de grupo de atividades formado durante o curso de mestrado: Roberto Carlos Dantas Andrade e Reginaldo Silva.

Meu agradecimento especial a Maria Eunice e Christian Nunes, cujas colaborações a este trabalho foram fundamentais.

RESUMO

Apresenta uma proposta com base na teoria da aprendizagem significativa de David Ausubel, objetivando a construção do conceito de área de figuras planas enfatizando a área do círculo. As atividades sugeridas neste foram orientadas por uma seqüência didática a partir de um texto histórico-matemático utilizado como *organizador prévio.* A proposta de pesquisa foi realizada em uma escola, da rede pública estadual de ensino, localizada na área metropolitana de Belém do Pará. O desenvolvimento da proposta promoveu motivação intrínseca possibilitando uma efetiva participação dos alunos na realização das tarefas. A abordagem histórica demonstrou ser uma ferramenta eficiente por possibilitar melhor organização da estrutura conceitual de área das figuras planas, o desenvolvimento satisfatório das atividades revelou que os objetivos da proposta foram alcançados.

Palavras-chave: Aprendizagem Significativa, História da Matemática, Organizadores Prévios, Área do Círculo.

ABSTRACT

This work presents a proposal on the basis of the theory of the significant learning of David Ausubel, objectifying the construction of the concept of area of plain figures emphasizing the area of the circle, the activities suggested in this study had been guided by a didactic sequence from a text used description-mathematician as organizers previous. The research proposal was carried through in a school, of the state public net of education, located in the metropolitan area of Belém of Pará. The development of the proposal promoted intrinsic motivation making possible an effective participation of the pupils in the accomplishment of the tasks. The historical boarding demonstrated to be an efficient tool for better making possible organization of the conceptual structure of area of the plain figures, the satisfactory development of the activities disclosed that the objectives of the proposal had been reached.

Key-words: Significant learning, History of the Mathematics, Previous Organizers, Area of the Circle.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO

MOTIVAÇÕES QUE NOS CONDUZIRAM À PESQUISA

Em nossa caminhada pessoal e profissional nos dedicamos a leituras, cursos, seminários, conferências, que nos ajudaram a amadurecer idéias conflitantes ao ensino tradicional vigente, baseado, em demasia, na memorização e repetição, que prioriza a técnica em detrimento à compreensão. Já na graduação participamos de cursos, nos quais percebemos nítida diferença entre o ensino que valoriza compreensão e construção dos conceitos considerando os conhecimentos prévios dos discentes e a aprendizagem mecânica que valoriza a técnica e a memorização de fórmulas e repetição de exercícios.

As inquietações tomaram maiores proporções durante o Curso de Especialização em Educação Matemática oferecido pela Universidade do Estado do Pará (UEPA); onde começamos a despertar interesse pelo estudo da história da Matemática, por influência dos professores John Fossa, PHD, e Dr. Iran Abreu Mendes integrantes do corpo docente da pós-graduação.

Apesar da disciplina História da Matemática fazer parte da grade curricular da graduação na Universidade do Estado do Pará, a primeira perspectiva que tivemos limitou-se a apresentar a evolução de conceitos matemáticos na história da humanidade: a Matemática no oriente, na Grécia, o período helenístico, Matemática medieval, Renascença, a Matemática do século XIX e a Matemática abstrata do século XX. Sem, no entanto, Incentivar-nos a utilizar a história da Matemática como instrumento pedagógico. O que, a nosso ver, poderia nos conscientizar da importância da história da Matemática tanto na aprendizagem de conceitos elementares como, também, nos propiciar uma reflexão sobre a inserção cultural da evolução de conceitos matemáticos na história da humanidade.

A primeira atividade que realizamos em sala de aula em uma perspectiva histórica, foi idealizada pelo professor Fossa durante a especialização. Consistia em formar grupos de alunos com a finalidade de criar sistemas de numerações apresentando suas operacionalidades. Durante a atividade, percebemos o quanto a história da Matemática pode ser nossa aliada na construção do conhecimento matemático.

Dado o interesse nas disciplinas, que abordavam discussões histórico-matemáticas, fomos convidados pela coordenação do Curso de Licenciatura Plena em Matemática desta instituição para ministrar a disciplina História da Matemática a graduandos no interior do Estado.

Durante o planejamento da disciplina optamos por desenvolver uma metodologia na qual pudéssemos construir o conhecimento dialeticamente com os discentes. Organizando seminários nos quais refletimos a respeito de livros didáticos, paradidáticos (Contando a história da Matemática; Tópicos de história da Matemática para uso em sala de aula), clássicos como Boyer (2003) e Eves (2004), além de informações histórico-matemáticas disponíveis em sites na Internet complementando com discussões baseadas na obra de Mendes (2001) intitulada “O uso da história no ensino da Matemática: reflexões teóricas e experiências”.

A aceitação da proposta demonstrada pelos discentes no decorrer das aulas, e exposta nos trabalhos de conclusão da disciplina em consonância com nossa satisfação pessoal, por estarmos inseridos em um projeto que nos acrescentou significativos conhecimentos, nos fez focalizar estudos mais consistentes sobre o assunto.

Aliando estas experiências na graduação à atuação nos ensinos fundamental e médio em escolas públicas estaduais e municipais de Belém do Pará, consolidamos o interesse em pesquisar propostas pedagógicas que objetivassem atribuir maior significado e compreensão ao estudo da Matemática.

Após certo tempo de prática, percebemos que a busca de conexões entre as disciplinas, e dentro da própria disciplina se faz necessário para uma aprendizagem significativa, desde o ensino básico até a pós-graduação. Durante a formação percebemos a fragmentação das disciplinas. Tardif (2003) chama a atenção para a lógica disciplinar existente na formação. As disciplinas como Psicologia, Filosofia, Didática etc. apresentam-se como unidades autônomas sem relações entre si. Shön (2000, p. 227) ressalta que “cada campo de disciplina é a esfera de atuação de um departamento e, dentro de cada departamento, o conhecimento é dividido novamente em cursos, nas esferas de cada professor, individualmente”. Diante dessas evidências, cabe a nós docentes nos conscientizarmos que o ensino necessita de um elo entre as disciplinas e que as inter-relações entre esses saberes, podem possibilitar aos discentes, maior compreensão e aprofundamento em cada uma delas.

Além disso, precisamos dar ênfase às interconexões dentro das próprias disciplinas, visto que o encontro mútuo, entre elas, pode possibilitar uma dinâmica de interação, que possivelmente capacite o discente na construção de conhecimentos mais abrangentes e conseqüentemente mais consistentes.

Tais fatos culminaram em uma proposta de uso da história da Matemática no ensino, objetivando o ingresso no curso de mestrado do Núcleo Pedagógico de Apoio ao Desenvolvimento Científico da Universidade Federal do Pará. Tendo sido aprovado, tivemos a oportunidade de consolidar a pesquisa obtendo maior fundamentação teórica em disciplinas como Bases Epistemológicas das Ciências, Tendências em Educação Matemática, dentre outras. Sob orientação do professor Dr. Adilson do Espírito Santo, aliamos nossa proposta de pesquisas à teoria da aprendizagem significativa de David Ausubel, consolidando e definindo nosso objeto de pesquisa na disciplina Tópicos da Matemática: Relação entre Álgebra, Aritmética e Geometria, ministrada pelo professor Dr. Renato Borges Guerra, que passou a orientar nosso trabalho.

Nesta disciplina obtivemos um olhar mais crítico sobre a construção do conhecimento geométrico. A história se fazia presente constantemente de tal forma que utilizamos problemas propostos pelo professor em nossas atividades o que nos possibilitou delimitar nosso objeto de pesquisa, consolidando assim a proposta.

Em nossa trajetória desde a atuação como estagiário já realizávamos reflexões sobre nossa prática. Porém, segundo Perrenoud (2002) tratava-se de uma reflexão ocasional espontânea que também é referenciada por Freire (1996, p. 43).

> O saber que a prática docente espontânea ou quase espontânea, “desarmada”, indiscutivelmente produz é um saber ingênuo, um saber de experiência feita, a que falta a rigorosidade metódica que caracteriza a curiosidade epistemológica do sujeito.

Ao assumirmos a prática reflexiva como identidade, devemos fecundá-la com leituras, apropriação de saberes acadêmicos ou profissionais construídos por outros, sejam pesquisadores ou profissionais, participação em formação continuada e interações com nossos pares (PERRENOUD, 2002).

Percebemos que uma das funções de prática reflexiva é que em cada momento de nossa ação devemos tomar consciência quando nossos planejamentos metodológicos são inadequados (PERRENOUD, 2002). Neste momento podemos inovar elaborando projetos alternativos de ensino; para tal temos a necessidade do conhecimento de vários métodos a fim de combiná-los. Fugindo dos procedimentos mecânicos; mobilizando saberes teóricos e metodológicos, mas não se reduzindo a eles. A prática reflexiva metódica tem por finalidade fazer o professor observar, memorizar, escrever, analisar o que aconteceu no transcorrer da aula, compreender e, se for o caso, assumir novas opções. Buscando dessa forma recursos pedagógicos que promovam uma aprendizagem significativa.

A busca de métodos e ferramentas conceituais baseados em saberes diversos é uma constante em nossa contínua formação. De acordo com Perrenoud (2002), ao assumirmos esta postura, entendemos melhor nossa tarefa docente; desta forma estaremos assumindo uma identidade de professor reflexivo.

Sabemos que a solução não depende somente de nós professores, mas também das instituições; de um modelo de governo que priorize o desenvolvimento da educação, entre outras coisas. Porém faz-se necessário tomarmos consciência a partir de nossas reflexões que podemos realizar conjuntamente, mudanças que objetivem a melhora do ensino. Nesse sentido, propomos o uso da história da Matemática como recurso pedagógico, aliado a teoria da aprendizagem significativa de David Ausubel, tal conjunção nos permitiu a elaboração de uma seqüência didática que favoreceu a construção do conhecimento matemático pelo próprio aluno, orientado pelo professor.

ASPECTOS TEÓRICOS E NOTAS METODOLÓGICAS

Apresentamos nossa proposta, a fim de contribuirmos para aquisição significativa de conceitos matemáticos. Para isso, elegemos como objeto de pesquisa o ensino de geometria com foco na área do círculo. Tal escolha se justifica pela teia de saberes envolvidos na construção histórico-epistemológica deste conceito. Nele se destacam as formulações das idéias de medida de área, áreas de polígonos regulares, figuras semelhantes e relação entre áreas dessas figuras que se interligam estrategicamente, para atingir o cálculo de área do círculo, e, ao mesmo tempo, induzem o estudo dos números racionais e irracionais. Essa dinâmica foi idealizada a partir das aulas da disciplina Tópicos da Matemática: relação entre Álgebra, Aritmética e Geometria ministrada, no curso de mestrado, pelo professor Dr. Renato Borges Guerra, e nos livros, destinados aos professores do ensino básico, “Medida e forma em geometria: comprimento, área, volume e semelhança” de Lima (1991), e “Temas e problemas elementares” de Lima et al. (2005).

Tal amplitude de teia de saberes envolvidos exige tratamento adequado de modo a demonstrar as relações envolvidas entre esses saberes de forma a tornar significativa a aprendizagem e para tanto, buscamos na história da matemática os subsídios histórico-epistemológicos de modo a construir e aplicar uma proposta de ensino no nível fundamental de uma escola pública da Região Metropolitana de Belém do Pará.

Assim o **objetivo do nosso trabalho é avaliar a construção e aplicação de uma proposta de ensino para área do círculo, amparada na teoria da aprendizagem significativa em conjunção com a história da Matemática de modo a responder questões do tipo: “A história da Matemática pode contribuir para aprendizagem significativa de geometria euclidiana?”**

Visando alcançar o objetivo supracitado, as atividades sugeridas neste trabalho buscam sempre apoiar o novo conhecimento em outros já existentes na estrutura cognitiva dos aprendizes, nos moldes propostos por David Ausubel para promover aprendizagem significativa do conceito de áreas de figuras planas, favorecendo a aquisição de habilidades, respeitando seu estágio e valores adquiridos dentro e fora da escola. Assim as novas aquisições conceituais são construídas pelo aluno a partir de conhecimentos anteriores adquiridos ao longo de sua vivência escolar.

O desenvolvimento de nossa pesquisa teve como ambiente a sala de aula, envolvendo alunos da 8ª série do ensino fundamental de uma escola pública estadual localizada na cidade de Belém do Pará, congregando uma clientela oriunda de diversos bairros e municípios próximos.

O fato de termos trabalhado na escola e conhecermos o perfil da clientela discente foi preponderante para nossa escolha do local da pesquisa, aliando a este fato a boa receptividade e aceitação, da proposta, tanto por parte da direção da escola como do corpo docente e demais funcionários. A professora da turma nos concedeu 2h/a semanais, no turno da manhã, cada aula com 45 minutos de duração, para realização da pesquisa. A turma era composta por 40 alunos, apresentando faixa etária entre 13 e 16 anos, apenas 3 alunos não estudaram desde a 5ª série na própria escola.

Antes de iniciarmos a aplicação das atividades discutimos com os alunos os objetivos do nosso trabalho, bem como algumas orientações, correspondentes a importância da geometria para o conhecimento matemático dos discentes, que julgamos importantes para dar suporte ao transcorrer da pesquisa. Ressaltamos que as atividades seriam realizadas em equipes de quatro componentes.

Com o intuito de fornecer aos discentes conceitos mais inclusivos e gerais sobre o cálculo de áreas de figuras planas reelaboramos um texto com fragmentos de um capítulo do livro de Eves (2004) intitulado "A Matemática babilônica e egípcia: o Oriente Antigo", escolhido em função das informações que remetiam à praticidade da mensuração no Egito e na Babilônia e do cálculo de áreas de figuras planas e da estimativa para determinação da área do círculo unitário.

Realizamos uma pré-análise no texto que nos indicou possíveis dificuldades que poderiam aparecer em relação a algumas palavras, que talvez não fossem do conhecimento do aluno, além da dificuldade de alguns trechos e na leitura do texto em geral, pois o mesmo apresentava grande quantidade de palavras próprias da Matemática. Propomos a partir desta análise como **primeira atividade** que os alunos *lessem e interpretassem o texto* destacando deste, palavras, frases ou parágrafos que desconhecessem ou quisessem por em destaque durante a socialização da atividade.

O texto aborda, além da mensuração prática exercida pelos egípcios e babilônios, o cálculo de áreas de figuras planas destacando a área do círculo unitário, o que nos remeteu à **segunda atividade** do trabalho: *Explorando os conteúdos matemáticos do texto*; subdividida em três etapas: 1) Em busca dos subsunçores necessários para ancoragem dos novos conhecimentos; 2) Cálculo das áreas do quadrado, retângulo, triângulo; 3) Área do círculo.

Dando seqüência na construção do conceito de área do círculo, planejamos atividades que buscaram diferenciar progressivamente tal conceito. Desta forma propomos o cálculo das razões entre áreas de figuras planas semelhantes, reconciliando os conceitos já adquiridos obtendo assim uma generalização para fórmula da área do círculo, para tal realizamos **a atividade** intitulada: *A razão de semelhança entre áreas*.

Ao final da aplicação das atividades realizamos dois testes, que nos remetem ao item ***Avaliando procedimentos***, que foi acrescentado à avaliação da professora da turma. Para nossa proposta tais testes não tiveram, apenas, a intenção de analisar desempenho, de identificar erros e acertos, mas principalmente identificar os procedimentos utilizados, conhecimentos mobilizados, dificuldades e facilidades encontradas nas resoluções.

A observação participante, presente em nossa pesquisa, parte do princípio que o pesquisador tem sempre contato direto com a situação estudada, afetando e sendo por ela afetado, além do princípio da interação constante entre o pesquisador e o objeto pesquisado dando ênfase no processo, naquilo que está ocorrendo e não no produto ou nos resultados (ANDRÉ, 1995).

Tais características são indícios que nossa pesquisa pode ser classificada como uma investigação de natureza qualitativa etnográfica. As evidências são reforçadas pelo fato de que o pesquisador faz uso de uma grande quantidade de dados descritivos: situações, pessoas, ambientes, depoimentos, diálogos, que são por ele reconstruídos em formas de palavras ou transcrições literais.

O processo etnográfico apresenta também as características de ser aberto e flexível sem, no entanto, deixar de lado a presença primordial de um referencial teórico, assim como a definição precisa de um objeto de estudo que juntos propiciam a formulação de categorias de análises que dialogam com os dados da pesquisa. De acordo com a etnografia, tais categorias devem ser construídas ao longo do estudo.

Na experiência vivida em campo, dialogamos com os referenciais revendo os princípios e os procedimentos e realizando os ajustes necessários. E posteriormente consolidamos a proposta em consonância às indicações de André (1995, p. 47).

> Na fase final do trabalho etnográfico, quando o pesquisador sistematiza os dados e prepara o relatório, a teoria tem um importante papel no sentido de fornecer suporte às interpretações e as abstrações que vão sendo construídas com base nos dados obtidos em virtude deles.

A partir dessa fase foi possível direcionar nossa pesquisa para as análises, orientadas de acordo com nosso referencial teórico. As atividades seqüenciadas em consonância aos pré-supostos ausubelianos, conduzidas por contextualização histórico-matemática permitiram a formulação de uma seqüência didática que nos possibilitou obter os dados a analisar.

Nos capítulos seguintes apresentaremos aspectos relevantes da teoria ausubeliana e de que forma concebemos a história da Matemática como recurso pedagógico a partir da construção epistemológica do conceito de áreas de figuras planas apoiados em alguns autores que fornecem suporte aos propósitos desta pesquisa. Iniciaremos com a apresentação de uma **proposta de conjunção entre a aprendizagem significativa e a história da Matemática**, em que fizemos um *breve relato sobre a evolução da educação em função da psicologia educacional* e seus principais idealizadores. Em seguida evidenciamos a *aprendizagem significativa como uma corrente da psicologia cognitiva,* destacando os *tipos de aprendizagem*; *aprendizagem significativa e aprendizagem mecânica, materiais de aprendizagem e pré-disposição para aprendizagem.* Na seqüência tratamos a respeito dos *tipos de aprendizagem significativa; princípios norteadores da aprendizagem significativa: diferenciação progressiva e reconciliação integrativa*; finalizamos este capítulo introduzindo a idéia de *organizadores prévios*.

Após isso, apresentamos **a história da Matemática como subsídio metodológico para o ensino da Matemática.** Logo após uma breve introdução do capítulo, evidenciamos *o conhecimento histórico matemático do professor* e de que forma concebemos *a história da Matemática como alternativa docente para promover aprendizagem significativa.*

Postulamos no capítulo seguinte sobre nossa perspectiva de conceber **a história da Matemática como organizador prévio**; destacando trabalhos correlatos concomitantes à proposição da história da Matemática como proposta investigativa; a partir disso apresentaremos **Ações pedagógicas que conduziram nossa proposta: análises e discussões dos resultados**, que nos remeteram às *primeiras intervenções junto aos discentes: em busca de motivações intrínsecas;* em seguida trabalhamos o texto histórico, já referenciado anteriormente, realizando *a leitura e interpretação do texto*, com a respectiva *exploração dos conteúdos matemáticos deste*; assim como *a análise dos procedimentos* contemplando as avaliações realizadas com a turma, teste este que nos fizeram retomar a fundamentação teórica e nos levaram as nossas *considerações finais*.

1 POSSIBILIDADES DE CONJUNÇÃO ENTRE A APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA E A HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

Para Ausubel, Novak e Hanesian (1980), uma compreensão genuína de um determinado assunto implica no domínio de significados claros, precisos, diferenciáveis e inclusivos. Se um pesquisador estiver tentando propiciar a seus discentes uma aprendizagem significativa e para isso organiza atividades que relatem os atributos relevantes de um conceito ou os elementos essenciais de uma proposição, pode organizar materiais introdutórios que explicitem as novas idéias a serem assimiladas, e expressem um alto nível de generalidade e poder de inclusão, ao qual as informações mais detalhadas possam ser relacionadas. As construções histórico-epistemológicas de conceitos matemáticos a nosso ver comungam com tais características.

Propomos uma conjunção entre a aprendizagem significativa dos conceitos matemáticos e sua trajetória histórica. Evidenciando a necessidade de se trabalhar com os alunos, primeiramente atividades que os coloquem em contato com a construção das idéias matemáticas, postulamos que uma das formas são as investigações históricas que visam a construção epistemológica dos conceitos. A concepção de uma aprendizagem significativa utilizando como recurso pedagógico a história da Matemática, nos termos sugeridos anteriormente, é a nosso ver ressaltada por Lakatos (1978, p. 183) ao afirmar que “não há teoria que não tenha passado por um período de progresso; além do mais, esse período é o mais interessante do ponto de vista histórico, e deve ser o mais importante do ponto de vista didático”.

A partir do exposto, podemos destacar a importância do uso da história da Matemática para a construção de conhecimento. Mostrando ainda que, para formalização de determinados conceitos matemáticos, se torna imprescindível que identifiquemos os dados históricos mais relevantes de forma que o aluno possa assimilar significativamente o conceito em questão.

1.1 PSICOLOGIA EDUCATIVA: UM BREVE RELATO

A convicção de que a psicologia pode contribuir significativamente para melhoria do ensino e da educação, tem suas raízes nos grandes sistemas de pensamento e nas teorias filosóficas, tendo apresentado a princípio um caráter laboratorial com finalidade de estabelecer leis gerais de aprendizagem. Tal concepção foi substituída na primeira metade do século XX por uma visão de psicologia educacional como engenharia psicológica aplicada à educação[1]. Cool et al. (2004) destacam que os autores que trataram da história e da epistemologia da educação ao longo das últimas décadas coincidem em um mesmo ponto: a diversidade de formulações e critérios, e não a unidade é uma de suas características mais evidentes. Identificando, ainda, três fatores que marcam atualmente a psicologia da educação.

> A reconsideração em profundidade, a que estamos assistindo a alguns anos, das funções e das finalidades da educação escolar em particular, assim como a revisão crítica da velha aspiração de construir uma teoria e uma prática educacionais sobre bases científicas (COOL et al., 2004, p. 20).
>
> A emergência e a aceitação crescentes de novos conceitos e enfoques teóricos em psicologia do desenvolvimento, em psicologia da aprendizagem e muito particularmente, em psicologia da educação e do ensino (COOL et al., 2004, p. 21).
>
> A mudança de perspectiva adotada progressivamente no transcurso das últimas décadas, a partir do final dos anos de 1960 aproximadamente, com relação à própria natureza das relações entre psicologia e educação e aos tipos de contribuições ou de aportes que a primeira pode fazer legitimamente à segunda (COOL et al., 2004, p. 21).

Na atualidade podemos observar grandes divergências entre os psicólogos da educação sobre como utilizar o conhecimento psicológico para obter contribuições satisfatórias no campo da educação, o que acarreta uma diversidade significativa de concepções de uso da psicologia para auxiliar no processo ensino-aprendizagem na escola.

---

[1] Segundo Cool et al. (2004), a psicologia como engenharia didática encarrega-se de transferir os conhecimentos psicológicos à educação e ao ensino a fim de proporcionar-lhes fundamentação e caráter científico.

No entanto, podemos destacar duas grandes áreas no confronto direto de idéias, de um lado existem autores que defendem que as diversas especialidades da psicologia como a do desenvolvimento, da aprendizagem, da personalidade, das diferenças individuais etc. devem ser aplicadas à Psicologia da Educação, ou seja, nesta visão a psicologia da educação apresenta-se como uma área de aplicação da psicologia.

Por outro lado há autores que consideram que a finalidade principal da Psicologia da Educação é a de assumir uma posição epistemológica e configurar-se como uma disciplina específica que dispõe de alguns objetivos, de alguns conteúdos e de alguns programas de investigação que podem auxiliar no desenvolvimento dos processos de aquisição de conhecimento (COLL et al., 1999).

Há uma confluência histórica entre a Psicologia da Educação e a psicologia científica, que influenciaram diretamente na evolução da educação, visto que tanto a psicologia quanto a educação apresentam seus fundamentos teóricos baseados nos grandes sistemas filosóficos.

Em seu desenvolvimento à margem das grandes correntes do pensamento filosófico a educação buscou uma fundamentação científica para se desenvolver. Esta busca foi bastante reforçada nas primeiras décadas do século XX devido à implantação progressiva, nos países ocidentais mais desenvolvidos, de uma escolarização generalizada e obrigatória para a maioria da população (COLL et al., 1999).

Com isso professores e representantes governamentais da política educativa nos centros de formação e nas instituições dedicadas à pesquisa educativa, unem forças na busca de mudanças qualitativas no ensino. Nesta busca focalizaram suas expectativas na psicologia como nos apontam Coll et al. (1999, p. 22).

> A psicologia, que acaba de separar-se da filosofia é a disciplina à qual estão dirigidos todos os olhares e na qual estão sendo depositadas as maiores expectativas como uma fonte de informação e de idéias para elaboração de uma teoria educacional de fundamento científico que permita melhorar o ensino e interferir sobre os problemas que se apresentam na escolarização generalizada da população infantil. Dessa maneira, amparada pelas primeiras tentativas da psicologia educativa e, em boa parte, como resultados das expectativas que foram depositadas a partir do mundo da educação, nasce a psicologia educacional; este momento situa-se, convencionalmente por volta da primeira década do século XX.

Desta forma, a Psicologia da Educação dessa época nutriu-se, basicamente, dos conhecimentos gerados pela psicologia científica vigente. Segundo Coll et al. (1999), podemos destacar três campos da pesquisa em psicologia que direcionam seus estudos para a educação escolar: o estudo e a medida das diferenças individuais e a da elaboração de testes, a análise dos processos de aprendizagem e a psicologia infantil. As contribuições destes três campos de estudo possibilitaram "que a pedagogia obtivesse, definitivamente, um *status* científico" (COLL et al., 1999, p. 27).

Para Coll et al. (1999) por volta de 1920, a psicologia educativa estava em grande parte voltada para a elaboração e o aperfeiçoamento de instrumentos de medidas objetivas das capacidades intelectuais, dos traços de personalidade e do rendimento escolar.

Nesse sentido, Edward L. Thorndik constrói provas para medir o rendimento em Matemática e na escrita. Em 1920 publica "Elements of Psychology" na qual formula uma seqüência de leis de aprendizagem, das investigações realizadas em laboratórios, tanto com seres humanos como com animais. Thorndik destaca que é preciso fundamentar as propostas educativas nos resultados da pesquisa psicológica de caráter experimental (COLL et al., 1999).

Vale ressaltar que a lei do efeito [2] idealizada por Thorndik influenciou significativamente a psicologia da aprendizagem tanto em sua época como em outros momentos, dando origem à psicologia condutista, que orienta os trabalhos de Watson, e posteriormente, de Hull, Pavlov e Skinner (COLL et al., 1999).

Contrapondo-se a Thorndik, o autor americano Charles H. Judd direciona seus trabalhos para que o conhecimento psicológico seja relevante e útil para a educação escolar. O autor critica as experimentações com animais e os esforços para elaborar uma teoria geral da aprendizagem afirmando que estas não são suficientes para superar as grandes dificuldades e problemas enfrentados pela educação escolar.

Judd prioriza em seus estudos a estruturação do currículo e uma organização escolar que vise o desenvolvimento das instituições. Para esse autor os conteúdos escolares são formados por conhecimentos relevantes acumulados pela sociedade

[2] Segundo essa lei, as condutas posteriores são as que satisfazem uma necessidade um determinado impulso, positivo ou negativo; ao contrário as condutas que impedem a satisfação de uma necessidade do organismo ou que o intimidam não são aprendidas.

no transcurso de sua história, dessa forma o currículo deve abranger as informações históricas e atuais que sejam essenciais para o desenvolvimento do ser humano. Para este fim a psicologia deve analisar os processos mentais por meio dos quais o aprendiz assimila esse sistema de experiência acumulada pela sociedade, que constitui o currículo das diversas disciplinas.

As duas posições, antagônicas presentes nas propostas de Thorndik e Judd, reforçaram-se progressivamente durante as décadas seguintes até cristalizarem-se em duas diferentes concepções significativas da psicologia da educação, as quais são, ainda hoje, vigentes. A primeira estuda os processos de aprendizagem em laboratório, e a segunda, orienta suas pesquisas com mesmo intento, porém dentro de sala de aula.

Durante esse período houve uma grande aceitação entre os educadores e os teóricos da educação que chegaram a um consenso de que era preciso conhecer melhor o aluno para poder educá-lo melhor. Podemos destacar o suíço Edouard Claparède, como um dos grandes representantes desta proposição no contexto europeu. Seus trabalhos na área de psicologia experimental orientaram-no para uma *concepção funcional da psicologia*[3].

Claparède criou em 1912, com um grupo de amigos, o Instituto Jean-Jacques Rousseau de psicologia aplicada à educação. Nesse mesmo instituto trabalharam, psicólogos notáveis como André Rey, Jean Piaget e Bärbel Inhelder (COLL et al., 1999).

A revolução experimentada, na Europa, nas primeiras décadas do século XX, levou à criação de um movimento conhecido com o nome de Escola Nova, cujas concepções postulavam que o processo educativo não poderia basear-se no castigo nem na recompensa, mas despertar no aluno o interesse pela matéria ou pelo conteúdo de aprendizagem. A educação nesse sentido deveria auxiliar no desenvolvimento das funções intelectuais e morais abandonando o ensino memorístico em detrimento de um aprendizado voltado para o cotidiano da criança; em consonância a essa perspectiva a função do professor seria a de motivar o aluno para desenvolver suas potencialidades intelectuais.

De acordo com Coll et al. (1999) as pesquisas de John Dewey, situadas entre a filosofia, a educação e a psicologia, apresentam-se como o ápice da *concepção*

---

[3] Tal concepção tenta, acima de tudo, entender os fenômenos psíquicos a partir do ponto de vista de sua função para a vida, do lugar que ocupavam no conjunto da conduta em um dado momento.

funcional da psicologia. Claparède classificou o pensamento educativo de Dewey de genético, funcional e social.

> Genético, porque, para Dewey a finalidade da educação é assegurar o desenvolvimento humano e favorecer a realização plena das pessoas com ajuda de sua reserva inesgotável de atividade; funcional porque suas propostas pedagógicas tomam como ponto de partida as necessidades e os interesses dos alunos; e social, porque concebe a escola como um meio social com a missão de preparar os alunos para que possam cumprir uma função útil na sociedade (COLL et al., 1999, p. 26).

As contribuições de Dewey, e Claparède com a Escola Nova, originaram segundo Coll et al. (1999) um movimento renovador da educação progressiva, nos Estados Unidos; tendo exercido, então, grande influência nas escolas públicas norte-americanas durante as primeiras décadas do século XX.

Os principais autores da psicologia da educação na Europa, e principalmente na França e suas áreas de influência, eram, geralmente, figuras que focalizavam seus estudos na psicologia infantil, ou genética. Podemos destacar, por exemplo, Henri Wallon, um dos psicólogos do desenvolvimento mais importantes de todos os tempos. “Foi autor de um plano de reforma na França, o qual considerava, entre outras medidas, a criação de um serviço de psicologia escolar para as escolas” (COLL et al., 1999, p. 28).

Devemos destacar que Jean Piaget e seus principais colaboradores da escola de Genebra “formularam um sistema explicativo do desenvolvimento humano mais potente e compreensivo da história” (COLL et al., 1999, p. 28). Piaget propôs o estabelecimento de fases no desenvolvimento cognitivo que são: sensório-motor, pré-operacional, operacional-concreto e operacional-formal.

Piaget (1976) postula que o indivíduo constrói esquemas de *assimilação* para lidar com a realidade. Estes esquemas são estruturas que evoluem em nossas mentes conforme o desenvolvimento do indivíduo. Determinados problemas que não podem ser resolvidos por esquemas de ação familiares podem provocar uma modificação, das ações que acarretará em uma acomodação para nova idéia levando ao desenvolvimento cognitivo do indivíduo. O ciclo de novas assimilações e conseqüentes acomodações leva ao equilíbrio cognitivo, caracterizando um processo que Piaget denomina de *equilibração*, que se dá até o período das operações formais. Sendo assim o processo de assimilação de conhecimento se dá pelo desequilíbrio na mente do indivíduo e posterior equilíbrio.

Vale ressaltar que os estados de equilíbrio são sempre ultrapassados, não há um ponto de parada, pois a assimilação de uma estrutura pode sempre dar lugar a uma estrutura mais ampla, na realidade entendemos que não haja uma tendência para um equilíbrio absoluto o que se busca é um melhor equilíbrio que Piaget (1976) denomina, de *equilibração majorante*.

É relevante, também, referenciarmos Lev S. Vygotsky, pois segundo Coll et al. (1999) Vygotsky ofereceu um marco teórico único para psicologia da educação, no qual podemos destacar cinco teses básicas que caracterizam sua obra. A primeira se refere à relação do indivíduo com a sociedade; nela Vygotsky afirma que as características típicas humanas resultam da interação dialética do homem e seu meio sócio-cultural. A segunda, em decorrência da primeira, afirma que as funções psicológicas especificamente humanas se originam nas relações do indivíduo e seu contexto sócio-cultural. A terceira tese se refere à base biológica do funcionamento psicológico, onde o cérebro é visto como o órgão principal da atividade humana. No quarto postulado, identificamos que a relação do homem com o mundo não é uma relação direta, mas mediada por *instrumentos* e *signos*, que se constituem nas *ferramentas auxiliares* da atividade humana, é por isso que Vygotsky confere à linguagem um papel de destaque no processo de treinamento. A quinta postula que a análise psicológica deve ser capaz de conservar as características básicas dos processos psicológicos (REGO, 1995).

No decorrer das décadas de 50 e 60 do século XX são retomadas algumas teorias explicativas de aprendizagem, focalizando novamente o confronto ideológico de Thorndik e Judd relativo à pouca contribuição de experimentos laboratoriais que não levavam em consideração o cotidiano escolar e social nos quais os aprendizes estavam inseridos.

Outro fator a destacarmos nessa mesma época é o aparecimento de outras disciplinas que objetivavam também estudar os fenômenos educativos como, por exemplo: economia da educação, sociologia da educação, tecnologia da educação e planejamento da educação. Disciplinas que vão abalar a supremacia exercida até então pela psicologia educativa, o que acarretou um estudo multidisciplinar para explicações dos fenômenos educacionais.

Ressaltamos, também, os acontecimentos políticos da época como a acentuação da divisão dos países em blocos capitalistas e socialistas, tal confronto foi estendido ao desenvolvimento científico e tecnológico, colocando novamente o desenvolvimento educacional em destaque o que provocou uma retomada da hegemonia psicológica no âmbito educativo. Porém as novas disciplinas, já mencionadas, também ocuparam lugar de destaque no desenvolvimento das práticas escolares.

Como mencionamos, a lei do efeito, idealizada por Thorndik, deu origem à psicologia condutista, que posteriormente orientou os trabalhos de Skinner.

> A teoria do condicionamento operante de Skinner, estendida amplamente na década de 50, de 60 e em parte da década de 70, gera um modelo instrucional no campo educativo, que está na origem do ensino programado e das máquinas de ensinar que se tornaram bastantes populares naquele período (COLL et al., 1999, p. 32).

Concomitante a esse período já podemos destacar o surgimento de propostas cognitivistas, que começam a demonstrar o interesse pelas formas complexas de atividade intelectual do indivíduo que aprende. Psicólogos como Bruner e Ausubel contribuem decisivamente com essa evolução na explicação da aprendizagem; provocando uma convergência entre a psicologia da aprendizagem e a psicologia do ensino. Desde então os pesquisadores focalizam como objeto de estudo tarefas, conteúdos e situações que costumam fazer parte do currículo escolar como leitura, escrita, resolução de problemas etc.

Apesar do consenso de que o modelo cognitivo apresenta-se como um dos sistemas mais apropriados para explicar os fenômenos de aprendizagem escolar, suas concepções não se apresentam de forma homogênea e compacta no panorama atual da Psicologia da Educação.

Nas três últimas décadas as proposições reducionistas da psicologia aplicada a educação tem recebido muitas críticas. Os autores dessas críticas postulam que, necessitamos elaborar uma *ciência da educação* a fim de melhorar a compreensão e a interpretação dos fenômenos educativos. Argumentam que para fornecer consistência aos estudos dos fenômenos educacionais é preciso levar em consideração os componentes sociológicos, institucionais, políticos, econômicos, didáticos etc. com os quais aparecem indissoluvelmente relacionados (COLL et al., 1999).

Seguindo esses pressupostos, a Psicologia da Educação se distancia cada vez mais dos postulados e princípios que definem as proposições de *psicologia aplicada à educação*. Assumindo, com isso que a psicologia científica adote um caráter de disciplina-ponte[4] entre a psicologia educativa e a educação.

Nesse contexto, David Ausubel, psicólogo norte-americano que tem influenciado até os dias atuais a Psicologia da Educação, argumenta de maneira mais contundente contra a psicologia aplicada à educação e a favor da psicologia como uma disciplina-ponte.

> Em um artigo clássico, publicado em 1969, que representa um marco no desenvolvimento da psicologia da educação intitulado "Is there a discipline of educational psychology?", Ausubel opõe-se frontalmente a entendê-la como um simples amálgama de conhecimentos selecionados a partir da psicologia geral, da psicologia da aprendizagem, da psicologia do desenvolvimento, da psicologia diferencial, da psicologia social etc. (COLL et al., 1999, p. 42).

Tanto a psicologia aplicada quanto a Psicologia como disciplina-ponte, partem do mesmo princípio ao postularem que a Psicologia da Educação deve utilizar e aplicar os conhecimentos, os princípios e os métodos da psicologia para análise e o estudo dos fenômenos educativos. Contudo no breve relato que fizemos, podemos perceber um distanciamento progressivo das proposições que querem considerá-la como um simples campo de aplicação da psicologia.

Não tivemos a pretensão nestes breves comentários em detalhar o desenvolvimento da Psicologia da Educação. Nosso intento foi destacar alguns dos principais fatos e figuras que contribuíram para o encaminhamento da estrita relação entre educação e psicologia, mostrando em seguida quais concepções se coadunam com nossa pesquisa.

Nesse contexto, vários teóricos apresentaram suas contribuições para edificação da psicologia, com finalidade de explicar como adquirimos conhecimento.

---

[4] Neste caso as relações entre a psicologia e a educação são formuladas em dupla direção de forma que o conhecimento psicológico pode contribuir para melhorar a compreensão e a explicação dos fenômenos educacionais, mas os estudos destes, por sua vez, contribuem também para ampliar e aprofundar os conhecimentos psicológicos.

Sacristán e Gómez (1998, p. 28-29) distinguem dois amplos enfoques com suas diferentes correntes:

1) As teorias associativas, de condicionamento, de estímulo-resposta, dentro dos quais se podem distinguir duas correntes:

a) Condicionamento clássico: Pavlov, Watson, Guthrie.

b) Condicionamento instrumental ou operante: Hull, Thorndike, Skinner.

2) As teorias mediacionais: dentro das quais se podem distinguir múltiplas correntes com importantes matizes diferenciadores como:

a) Aprendizagem social, condicionamento por imitação de modelos: Bandura, Lorenz, Tinbergn, Rosenthal.

b) Teorias cognitivas, dentro das quais distinguimos várias correntes ao mesmo tempo:

- Teoria da Gestalt e psicologia fenomenológica: Kofka, Köhler, Whert.
- Psicologia genético-cognitiva: Piaget, Bruner, Ausubel, Inhelder.
- Psicologia genético-dialética: Vygotsky, Lúria, Leontiev, Rubinstein, Wallon.

c) A teoria do processamento de informação: Gagné, Newell, Simon, Mayer, Pascual Leone.

Nos itens seguintes faremos algumas reflexões a respeito da teoria mediacional genético-cognitiva idealizada por David Ausubel sobre aprendizagem significativa, com objetivo de fundamentar nosso trabalho nesta teoria, apresentando em seguida uma proposta do uso da história da matemática como subsídio metodológico para o ensino da Matemática apoiada em princípios ausubelianos.

1.2 APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA: UMA CORRENTE DA PSICOLOGIA COGNITIVA

A aprendizagem significativa preconiza que as idéias novas sejam relacionadas às informações previamente adquiridas pelos discentes através de uma relação *não arbitrária e substantiva*. Uma relação não arbitrária e substantiva significa que as novas informações serão relacionadas a conceitos relevantes existentes na estrutura cognitiva do aluno, denominados *conceitos subsunçores,* de forma que este consiga com interpretação própria conceituar o objeto em estudo.

A aprendizagem significativa pressupõe ainda que o aluno manifeste uma disposição para tal, caso contrário ocorrerá uma aprendizagem mecânica dos conteúdos estudados. Para Moreira e Masini (1982), a ocorrência da aprendizagem significativa de um conceito está condicionada a observações de regularidades ou das diferenças e semelhanças existentes entre o novo e o antigo conhecimento. Fatos estes que podem ser conduzidos pelos princípios da *diferenciação progressiva e reconciliação integrativa* dos conceitos, tais princípios podem ser auxiliados por materiais introdutórios identificados como *organizadores prévios.* Discorreremos com mais detalhes sobre a teoria ausubeliana nos tópicos subseqüentes.

1.2.1 Tipos de aprendizagem

Do ponto de vista da aprendizagem escolar, é importante distinguir os tipos principais de aprendizagens que ocorrem em classe. Apesar da diversidade existente, nos atentaremos à teoria ausubeliana, que estabelece uma distinção entre a *aprendizagem por recepção* e a *aprendizagem por descoberta* e uma outra entre *aprendizagem automática (por decoração) e significativa*.

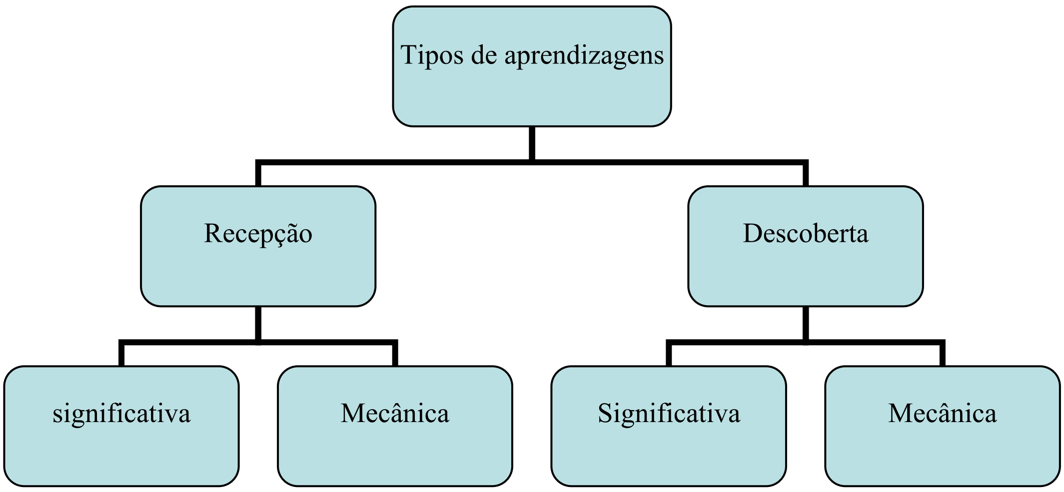


Figura 1: Tipos de aprendizagem escolar segundo Ausubel

Fonte: Elaborada pelo autor, 2006

Para Ausubel et al. (1980), grande parte das informações adquiridas pelos alunos, tanto dentro como fora da escola, é apresentada preferencialmente por descoberta. No entanto, grande parte do material de aprendizagem é apresentado de forma receptiva. O importante é observar que a aprendizagem, quer seja por descoberta ou recepção, pode apresentar tanto caráter mecânico quanto significativo.

Segundo Ausubel et al. (1980), na aprendizagem por recepção o que deve ser aprendido é apresentado ao discente em sua forma final, enquanto que na aprendizagem por descoberta o conteúdo principal a ser aprendido é descoberto por ele. Entretanto, após a descoberta em si, a aprendizagem só é significativa se o conteúdo descoberto ligar-se a conhecimentos prévios já existentes na estrutura cognitiva, ou seja, quer por recepção ou descoberta a aprendizagem só é significativa quando se conecta a conceitos subsunçores.

Grande parte da confusão nas discussões de aprendizagem escolar tem sua origem na deficiência de se reconhecer que as aprendizagens mecânica e significativa não são completamente dicotomizadas. Além disso, ambos os tipos de aprendizagem podem ocorrer concomitantemente na mesma tarefa de aprendizagem.

1.2.2 Aprendizagem significativa e aprendizagem mecânica; materiais de aprendizagem e pré-disposição para aprendizagem

Segundo Ausubel (1976), a aprendizagem significativa consiste em relacionar, de forma não arbitrária e substantiva (não ao pé da letra), uma nova informação a outra com as quais o aluno já esteja familiarizado. Caso contrário, se a tarefa consistir em associações puramente arbitrárias com a exigência que o aluno reproduza exatamente o que lhe foi “ensinado”, a aprendizagem é caracterizada por Ausubel como automática (mecânica). Assim, quando apresentamos aos discentes a fórmula da área do círculo $A_c = \pi r^2$ sem fornecer uma justificativa conceitual e contextual como, por exemplo, a perspectiva histórica[5], para tal relação, esta será

[5] Podemos abordar a origem da constante π o cálculo de área do círculo feita pelos egípcios, babilônios e método da exaustão de Arquimedes, semelhanças e razão de semelhança entre áreas de figuras planas.

utilizada de forma mecânica. Por outro lado, a contextualização histórica que originou a fórmula em questão, poderá culminar na compreensão e conseqüente aprendizagem significativa da área do círculo.

Ausubel et al. (1980) nos alertam que o equipamento cognitivo humano, diferentemente de um computador, não está apto a lidar eficientemente com informações adquiridas mecanicamente. Somente algumas tarefas relativamente simples podem ser internalizadas dessa forma, como, por exemplo, decorar fórmulas ou algoritmos sem compreendê-los. Além disso, tais informações são retidas somente por um período curto de tempo, a menos que ocorra um supertreinamento.

Por outro lado é importante ressaltar que aprendizagem mecânica em determinados momentos é tão importante quanto a aprendizagem significativa. O próprio Ausubel admite existir um c*ontinuum* entre as duas formas de aprendizagem.

A Matemática é um exemplo claro da existência deste *continuum,* visto que constantemente lidamos com cálculos mentais, símbolos que representam números, os nomes de conceitos como, por exemplo, “área é a medida de uma superfície” (IMENES; LELLIS, 1998, p. 33) e objetos particulares como quadrado, retângulo, círculo; fórmulas, que após serem internalizadas servirão de subsunçores. Dando suporte à aprendizagem significativa como a fórmula de Heron para o cálculo da área de um triângulo em termos de seus lados ($A = \sqrt{p (p - a).(p - b).(p - c)}$; onde p é o semi-perímetro e a, b e c são os lados do triângulo).

Moreira e Masini (1982) destacam a importância da aprendizagem mecânica principalmente quando os indivíduos adquiriram informações numa área de conhecimento completamente nova para eles, ou durante o processo de aquisição de conceitos pelas crianças pequenas. Em determinadas situações algumas proposições não podem ser aprendidas significativamente. Na verdade desde muito cedo nos apoiamos em aprendizagem mecânica (representacional) para adquirirmos conhecimento a partir disso. Certamente todos nós podemos pensar em exemplos de conceitos que uma vez aprendemos mecanicamente e mais tarde viemos a possuir estrutura conceitual para aprender estes conceitos significativamente.

> [...] muitas vezes, nossos alunos aprendem a repetir certo e rápido que $a^2 = b^2 + c^2$. Também aprendem a se lembrar dessa relação quando precisam trabalhar com triângulos retângulos. No entanto, podem levar anos para descobrir que essa relação matemática possui algum significado na forma do Teorema de Pitágoras, ou

> seja, apresentarem alguma compreensão além da repetição (BARALDI, 1999, p. 49).

Dependendo de uma série de fatores um indivíduo pode oscilar de vez em quando entre um e outro estilo, dependendo da sua disposição para aprender. Sendo assim devemos organizar nossas atividades priorizando a aprendizagem significativa. No entanto não podemos menosprezar nem ignorar a importância da aprendizagem mecânica, pois, por vezes assimilamos significativamente determinados conceitos, e, ocasionalmente, temos que recorrer à aprendizagem mecânica para resgatá-los.

É importante ressaltarmos também que a elaboração do material de aprendizagem é de suma importância, levando em conta que não podemos afirmar de antemão que este seja significativo e sim potencialmente significativo. Um dos pré-requisitos, que determina se a tarefa de aprendizagem é potencialmente significativa é o seu significado lógico[6]. O outro pré-requisito é a disponibilidade de conteúdo significativo na estrutura cognitiva do aluno. Quando o material de aprendizagem é internalizado pelo discente o significado lógico passa a significado psicológico [7], o que demonstra o caráter idiossincrático da aprendizagem significativa. Postulamos que textos que apresentem o desenvolvimento histórico de conceitos matemáticos favoreçam a passagem do lógico ao psicológico, tornando-se uma das justificativas, da elaboração e conseqüente aplicação de nossa proposta.

O significado psicológico emerge, de acordo com essa teoria, quando o significado lógico (a própria cultura determina a potencialidade lógica dos materiais), transforma-se num novo conteúdo cognitivo, diferenciado e idiossincrático para um indivíduo em particular, como produto de uma relação não arbitrária e substantiva, interando-se com idéias significativas em sua estrutura cognitiva.

Percebemos a necessidade de que os materiais de aprendizagem apresentem critérios ausubelianos como *relação não arbitrária*. Para isso é necessário que haja uma base adequada de conceitos subsunçores que relacione de forma não arbitrária o novo conhecimento. Um segundo critério é a *relação substantiva* que preconiza que o mesmo conceito ou proposição pode ser compreendido na sua essência e expresso através de uma linguagem sinônima,

[6] O significado lógico é intrínseco ao próprio conteúdo de aprendizagem (tem significado em si próprio).
[7] O significado psicológico (real ou fenomenológico) é relativo à interpretação subjetiva que o aluno apresenta sobre o que lhe foi exposto.

sendo que a partir deste, o aluno pode ancorar novos conhecimentos que apresentem significados similares.

Se o aluno aprende significativamente o conceito de área do quadrado ele deverá expressar sua compreensão de diversas formas, calculando, por exemplo, as áreas de qualquer retângulo, paralelogramo, triângulo e losango. A substantividade do aprendizado significa, então, que o aprendiz apreendeu o sentido, o significado daquilo que se ensinou, de modo que pode expressar este significado nas mais diversas tarefas.

Acreditamos que atividades com perspectivas históricas humanizam o estudo da disciplina, mostrando a Matemática como ciência em construção e em constante interação com outras ciências, sendo a nosso ver uma fonte de conhecimentos favoráveis à aprendizagem. Reconhecemos desta forma que recorrer à História da Matemática potencializa o aluno a internalizar o novo material de forma significativa realizando a passagem do lógico ao psicológico. Assim a descoberta histórica evidencia o significado lógico, motivando o discente a se apropriar significativamente dos conceitos em estudo, chegando às generalizações de fórmulas a partir da contextualização das idéias, mesmo controversas, que contribuíram para consolidação da Matemática que temos. Nesse sentido concordamos com De Morgan apud Lakatos (1978, p. 181) ao afirmar.

> Por vezes, aparece uma tendência a rejeitar tudo o que oferece alguma dificuldade ou não proporciona todas as suas conclusões sem problema no exame de contradições aparentes. Se com isso se deve entender que nada deva ser permanentemente utilizado, e, implicitamente indigno de confiança, o que não é verdade para a plena extensão da asserção feita, por mim não ofereceria oposição a tendência tão racional. Mas se implica que nada deva ser dado ao estudante, com ou sem advertência, que não possa ser compreendido em toda a sua generalidade, eu protestaria, com deferência, contra a restrição que tendesse, a meu ver, não apenas a dar falsas impressões do que realmente é conhecido como também estancar o progresso da descoberta.

Nestas condições está implícito que um conhecimento não poderia estar dissociado do seu contexto histórico, e que, por conseqüência, a história de uma noção fornece alguma indicação sobre o seu significado epistemológico. Entendemos dessa forma, que dar ênfase à situação problemática que deu origem ao novo conceito, acentua a lógica dos assuntos estudados, identificando também suas relações com outras disciplinas e com outros conceitos matemáticos que estejam relacionados de alguma forma ao assunto em estudo. A interpretação e a compreensão de um conceito matemático, a nosso ver, podem ser facilitadas quando ao invés de o apresentarmos como verdade perfeita e acabada, destacarmos as idéias primeiras que originaram tais conceitos, com suas imperfeições e contínua construção.

De acordo com Ausubel et al. (1980) o conteúdo curricular, na melhor das hipóteses pode ter significado lógico, pois sua relevância é inerente ao próprio currículo. A possibilidade de um indivíduo incorporar à sua estrutura cognitiva, proposições logicamente significativas criando o ambiente necessário para que haja transformação do significado lógico em psicológico, depende de uma série de fatores, como os conhecimentos prévios dos discentes, o material que será utilizado para o ensino e a disposição do aluno em aprender significativamente. Compreender um teorema é um exemplo da relação estrita entre os significados lógico e psicológico. “No aprendizado de um novo teorema geométrico, cada uma das partes componentes já é significativa, mas a tarefa como um todo (compreender o teorema) ainda está por ser realizada” (AUSUBEL et al., 1980, p. 42).

A aprendizagem significativa não deve ser interpretada simplesmente como aprendizagem de material significativo, estes materiais são apenas potencialmente significativos, a compreensão do material só será evidenciada quando o discente demonstrar predisposição, e também, como já foi dito antes, ter adquirido conceitos relevantes em sua estrutura cognitiva. Por tanto aumentar o potencial de aprendizagem significativa do material deve ser uma consideração primordial no planejamento dos conteúdos a serem estudados, a nosso ver a história da Matemática evidencia o significado lógico do assunto em estudo e motiva o discente a apropriar-se significativamente dos conteúdos apresentados.

Como vimos, Ausubel ressalta o caráter idiossincrático da aprendizagem significativa, ou seja, a pré-disposição para este tipo de aprendizagem. O aluno é tido como mola propulsora para ocorrência desta, visto que uma tarefa pode ser significativa para determinados alunos e mecânica para outros dependendo dos conhecimentos prévios que estes apresentem. Muitas vezes o aluno não está familiarizado com o assunto em questão e pode utilizar a estratégia de internalizar a atividade de forma arbitrária, decorando literalmente o que lhe foi apresentado. Sendo assim acreditamos que o envolvimento dos alunos em atividades estruturadas baseadas na história da Matemática, explorando, descobrindo e reinventando, contribui para que lhes façam conexões entre informações novas e antigas.

> O conhecimento só será significativo para o aluno quando ele construir o caminho de seu desenvolvimento histórico, trazendo-o para o seu real vivido. A Matemática é um dos instrumentos para a compreensão do mundo e o uso de sua história nos auxiliaria na formalização de seus conceitos (FERREIRA, et. al., 1992, p. 28).

Nossa proposição é que os alunos podem assimilar significativamente os conceitos a serem estudados, se estes descobrirem o encadeamento lógico na construção do conhecimento matemático. Esta construção esclarece aos discentes sobre o significado epistemológico do conceito, no plano da própria história da Matemática. Para isso podemos, por exemplo, organizar atividades pelas quais possamos analisar os procedimentos dos egípcios ao buscarem a transformação de triângulos e trapézios em retângulos dando origem à idéia da busca de uma comparação entre áreas, além de apresentarem um resquício de demonstrações matemáticas (BOYER, 2003).

O objetivo que procuramos atingir ao comparar estes encadeamentos, como o que se observa no domínio da produção e/ ou apropriação pessoal desse conhecimento no presente, não é de modo algum estabelecer uma reconstrução cronológica e natural do surgimento das idéias primeiras, mas sim caracterizar os grandes períodos sucessivos do desenvolvimento de um determinado conceito; e assim auxiliar o aluno a amenizar a obrigatoriedade de fixar fórmulas e algoritmos sem nenhuma compreensão.

Para Ausubel et al. (1980), uma das razões pelas quais o estudante desenvolve comumente uma disposição para aprendizagem mecânica em relação a uma determinada disciplina surge a partir de algumas experiências mal sucedidas, como por exemplo, respostas substantivamente corretas, mas que não são aceitas por professores que exigem literalmente o que “ensinaram”. Quantas vezes fomos exigidos ou infelizmente exigimos que as respostas sejam reproduzidas da mesma forma que foram apresentadas, reduzindo a capacidade criativa, a espontaneidade e dificultando a aprendizagem significativa de conceitos por parte do aluno.

Uma outra razão é atribuída ao alto nível de ansiedade ou devido a sucessivas experiências mal sucedidas experimentadas pelo aluno, acarretando falta de confiança e/ou atitude do aprendiz. Este fato pode prejudicar o discente até mesmo em suas relações sociais, visto que necessita de autoconfiança e tomada de decisões em seu dia-a-dia. Estes problemas levam o aluno a não ter outra alternativa a não ser a aprendizagem mecânica, para se sair bem nos testes avaliativos da escola e até mesmo em concursos públicos e vestibulares.

1.3 TIPOS DE APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA

A aprendizagem **representacional** refere-se à aprendizagem inicial cuja característica principal é a assimilação[8] de símbolos e seus significados particulares. Inicialmente podemos compará-la à aprendizagem mecânica, no entanto as proposições de equivalência que são feitas entre os símbolos e seus significados são obviamente relacionáveis e, portanto significativas. Por conseguinte a representação do objeto quadrado, nesta fase, passa a significar o próprio conceito de quadrado.

A aprendizagem **proposicional** diz respeito ao significado de idéias expressas por grupos de palavras combinadas em proposições ou sentenças, apresentando tanto o significado denotativo[9] quanto o conotativo[10] das palavras. Como por exemplo, a interpretação de um texto histórico ao qual solicitamos que o aluno realize procedimentos que o auxiliem na compreensão de algoritmos a partir das proposições enunciadas no texto.

Nesse sentido, a aprendizagem proposicional pode ser evidenciada no seguinte caso: dado um círculo de diâmetro unitário, podemos supor que o comprimento da circunferência do círculo situa-se entre o perímetro de qualquer polígono regular inscrito e a de qualquer polígono regular circunscrito. Desta forma, podemos calcular os perímetros dos hexágonos regulares inscritos e circunscritos, obtendo assim aproximações para π. Considerando que são conhecidas fórmulas[11], para obtenção dos perímetros dos polígonos regulares inscritos e circunscritos com

---

[8] Para Ausubel são relações entre idéias potencialmente significativas e idéias relevantes existentes na estrutura cognitiva.

[9] Refere-se ao sentido literal que está relacionado ao conceito.

[10] Refere-se às reações pessoais, idiossincráticas, que o conceito provoca em cada indivíduo, dependendo de suas experiências.

[11] $P_{2n} = 2 \dfrac{p_n.P_n}{p_n + P_n}$; p_n e P_n, denotam respectivamente, os perímetros dos polígonos regulares de n lados inscritos e circunscritos ao mesmo círculo.

o dobro do número de lados. E por aplicações sucessivas desse processo, podemos calcular os perímetros dos polígonos regulares inscritos e circunscritos de doze, vinte e quatro, quarenta e oito, e noventa e seis lados e, dessa forma, obter limites cada vez mais próximos de π. Foi isso que essencialmente fez Arquimedes, chegando à conclusão de que π está entre 223/71 e 22/7 ou que, até a segunda casa decimal, π é dado por 3,14 (EVES, 2004).

Ao sugerirmos aos discentes que utilizem as proposições anteriores para determinarem um valor aproximado para a área do círculo unitário, tentamos, na realidade, evidenciar o desenvolvimento epistemológico do conceito em questão.

Temos ainda a **aprendizagem de conceitos:** de acordo com Ausubel et al (1980, p. 72), “os conceitos constituem-se em abstrações dos atributos essenciais que são comuns a uma determinada categoria de objetos, eventos ou fenômenos”. Ausubel destaca dois tipos de aquisição de conceitos:

1. Formação de conceitos: Processo indutivo, significativo, orientado por hipóteses e atividades empírico-concretas que caracterizam a fase inicial de aquisição de conceitos pelos alunos. Por exemplo, solicitar que os discentes meçam as dimensões do quadro, da sala de aula, da quadra assim como estimem as áreas destes objetos; a partir de passos, palmos, braços e lajotas, a fim de evidenciar a necessidade de se estabelecer unidades de medidas.

2. Assimilação de conceitos: Após a etapa de formação de conceitos o aluno se encontrará em uma fase de maturidade que lhe permite relacionar à estrutura cognitiva os atributos essenciais abstratos de novas idéias genéricas, caracterizando a assimilação de conceitos.

Assim, por exemplo, entender que a partir da área do quadrado unitário podemos determinar as áreas dos outros quadriláteros só será de fato significativo para o aluno, se de alguma forma houver uma clara relação entre estas áreas.

O fluxograma a seguir mostra os tipos de aprendizagem significativa segundo Ausubel.

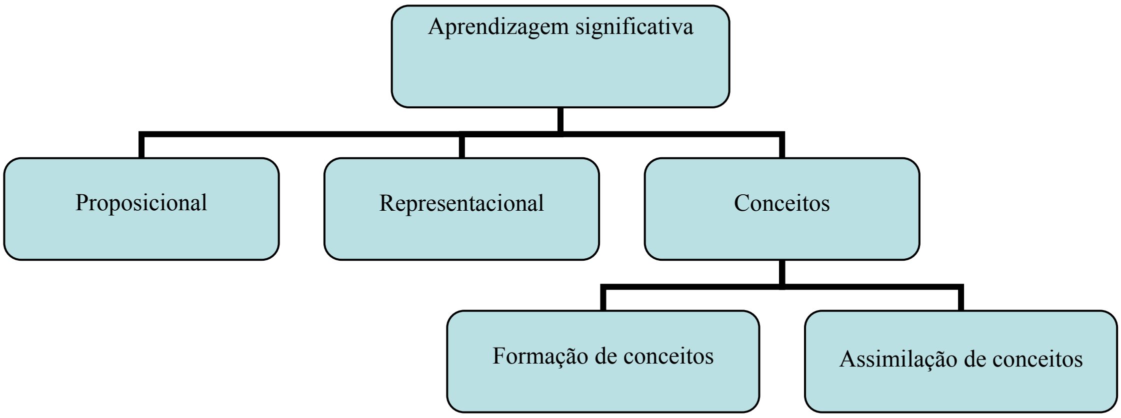


Figura 2: Tipos de aprendizagem significativa

Fonte: Elaborada pelo autor, 2006

Podemos identificar que a forma de aprendizagem mais básica da teoria ausubeliana é a *representacional* que hierarquicamente irá condicionar todas as outras formas de aprendizagem, relativas a esta teoria. Nesta fase os conceitos que representam um objeto são vistos como os próprios objetos.

As palavras se combinam para formar sentenças e construir proposições que representam realmente conceitos, e não objetos e situações são representados por palavras ou nomes. A aprendizagem do nome do conceito é uma espécie de aprendizagem representacional e corresponde à etapa final na formação de conceitos.

Em comparação à aprendizagem representacional, a proposicional não tem como objetivo aprender proposições de equivalência representacional, mas sim aprender o significado de proposições verbais, que expressam idéias diferentes daquelas da equivalência proposicional, ou seja, não é apenas a soma dos significados das palavras componentes.

A aquisição de conceitos se subdivide em formação de conceitos, evidenciada geralmente em crianças do ensino fundamental de 1ª a 4ª série, e assimilação de conceitos, predominante em crianças, adolescentes e adultos do ensino fundamental de 5ª a 8ª série, ensino médio e superior. Além dos demais indivíduos envolvidos na aquisição de conhecimento em ambiente escolar, especificamente com aprendizagem de conceitos. Durante o processo de assimilação de conceitos, os aprendizes entram em contato com os atributos essenciais de novos conceitos e relacionam esses atributos a idéias relevantes estabelecidas na estrutura cognitiva.

De acordo com Ausubel, na aprendizagem de conceitos ou proposicional a relação pode ser:

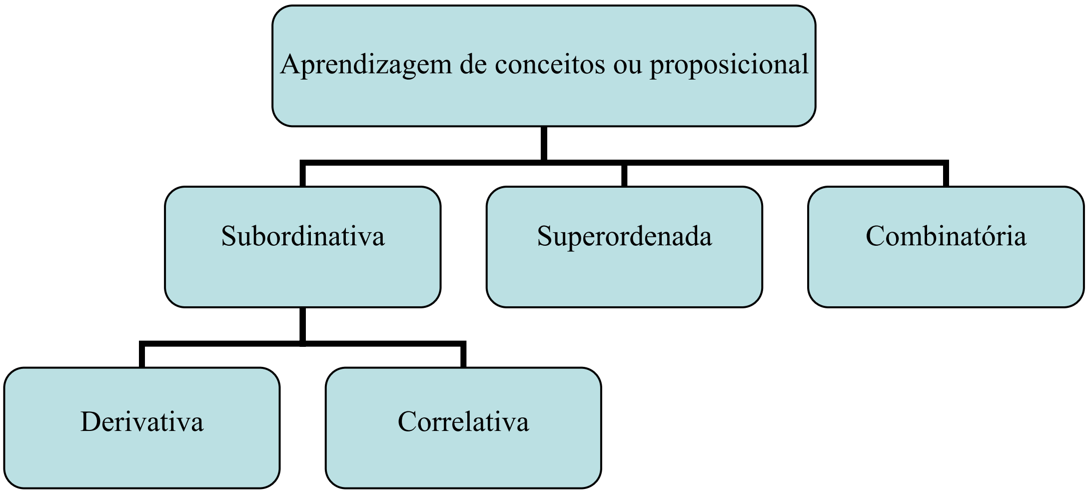


Figura 3: Classificação da aprendizagem de conceitos e proposicional quanto à relação
Fonte: Elaborada pelo autor, 2006

Quando as novas informações são vinculadas a informações pré-existentes na estrutura cognitiva, a aprendizagem de proposições ou de conceitos é dita *aprendizagem subordinativa*, que se apresenta de duas formas:

1. Subordinação derivativa que ocorre quando o novo material de aprendizagem é compreendido como um exemplo específico de um conceito já estabelecido na estrutura cognitiva. Por exemplo, o problema 51 do Papiro de Ahmes mostra que a área de um triângulo isósceles era obtida tomando a metade da base e multiplicando esta medida pela altura. Ahmes justificou seu método para achar a área sugerindo que o triângulo isósceles pode ser pensado como dois triângulos retângulos, um dos quais pode ser deslocado de modo que os dois juntos formam um retângulo (BOYER, 2003).

2. Subordinação correlativa ocorre quando o novo conteúdo for uma extensão, elaboração, modificação ou qualificação de conceitos já assimilados. Temos como exemplo no estudo de áreas de figuras planas o conceito de medida que é mais abrangente, pois apresenta um alto nível de generalidade e inclusão e juntamente com os outros conceitos geométricos que o precedem como o conceito de medida de comprimento e de área, servirão de subsunçores para as novas informações.

Caso conceitos estabelecidos na estrutura cognitiva sejam assimilados por conceitos mais inclusivos, identificamos a aprendizagem como *superordenada.* Como exemplo, o conceito de quadrilátero pode desenvolver uma condição superordenada em relação aos conceitos de quadrado, retângulo, paralelogramo, losango e trapézio.

A aprendizagem significativa de proposições novas que não apresentam uma relação subordinativa ou superordenada com idéias particulares relevantes na estrutura cognitiva, ou seja, não estão subordinadas a determinadas proposições e não podem condicionar o aparecimento de determinadas idéias é denominada de *aprendizagem combinatória.*

Um exemplo deste tipo de aprendizagem é o caso do cálculo aproximado da área do círculo de raio unitário, por meio da inscrição deste em um quadrado de lado igual ao seu diâmetro, dividindo o quadrado em nove partes iguais e posteriormente estimando um valor para a área do círculo unitário. Neste caso, usam-se conceitos já dominados pelos discentes com relação à área do quadrado, para ensinar conceitos novos e que guardam alguma relação com os antigos que serviram como âncora. Mas a área do círculo não é uma generalização nem um exemplo de área do quadrado, e vice-versa.

A aprendizagem significativa apresenta alguns princípios peculiares que podem favorecer a aquisição do conhecimento escolar. Ausubel postula que os discentes podem realizar aprendizagem significativa dos conceitos estudados, quando os mesmos estiverem organizados segundo uma seqüência lógica, denominada *diferenciação progressiva*. Além de sugerir uma dinâmica que permite constantes retomadas de conceitos já desenvolvidos, proporcionando revisões freqüentes, caracterizando a *reconciliação integrativa*. Durante o desenvolvimento das ações contidas nas tarefas potencialmente significativas, o que provavelmente facilitará a assimilação dos conceitos são as atividades desencadeadoras dos conteúdos a serem estudados, que Ausubel denomina de *organizadores prévios*.

1.4 PRINCÍPIOS NORTEADORES PARA APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA

Os novos conceitos ou proposições ancoram-se a conceitos ou proposições já adquiridos modificando-os e sendo modificados por estes, sendo organizados cognitivamente de forma seqüencial. Se os conceitos ou proposições são relacionados por aprendizagem superordenada ou combinatória, surgirão novos significados e significados conflitantes que podem ser resolvidos por um processo de revisão de conceitos já subsumidos pelos alunos.

1.4.1 Diferenciação progressiva

A aquisição de conhecimento pode se dar de forma indutiva ou dedutiva. De qualquer maneira os conteúdos assimilados são organizados na estrutura cognitiva hierarquicamente. Portanto, aproximar o ensino à forma como o conteúdo é organizado cognitivamente demonstra coerência pedagógica. Vejamos como Moreira (2000, p. 4) caracteriza este princípio.

> [...] é o princípio programado segundo o qual as idéias mais gerais e inclusivas da matéria de ensino devem ser apresentadas desde o início da instrução e, progressivamente, diferença em termos de detalhes e especificidade. Não se trata de um enfoque dedutivo, mas sim de uma abordagem na qual o que é mais relevante deve ser introduzido desde o início e, logo em seguida, trabalhando através de exemplos, situações, exercícios. As idéias gerais e inclusivas devem ser retomadas periodicamente favorecendo assim sua progressiva diferenciação.

Segundo Ausubel et al. (1980) durante o curso da aprendizagem significativa ocorrem dois importantes processos correlatos. Quando submetemos uma nova informação a um determinado conceito já subsumido, primeiramente a nova informação é assimilada, posteriormente o conceito anterior, subsunçor, é modificado pelo processo de ancoragem do novo conceito. Este processo de inclusão, que ocorre uma ou mais vezes, motiva a diferenciação progressiva do conceito que engloba novas informações.

Ancorado na teoria da aprendizagem significativa, grande parte das atividades contidas neste trabalho pode ser caracterizada como envolvendo a diferenciação progressiva de conceitos ou proposições. Por exemplo, os novos significados que são adquiridos posteriormente, a partir de proposições como o conceito da área do quadrado unitário podem representar a diferenciação progressiva deste conceito.

Como vimos quando os assuntos são programados de acordo com os princípios da diferenciação progressiva, as idéias mais gerais e inclusivas da disciplina são apresentadas em primeiro lugar. São então progressivamente diferenciadas, em termos de detalhe e especificidade. De acordo com Ausubel esta ordem de apresentação presumivelmente corresponde à seqüência natural de aquisição de conhecimento e de organização estrutural cognitiva, quando os seres humanos são, espontaneamente, expostos ou a um campo completamente desconhecido do conhecimento ou a um ramo desconhecido de um corpo de conhecimento familiar (AUSUBEL, 2002). Estes dois pressupostos postulados por Ausubel são:

> **1.** Para los seres humanos es menos difícil captar los aspectos diferenciados de un todo previamente aprendido y más inclusivo que formular el todo inclusivo a partir de sus partes diferenciadas previamente aprendidas (AUSUBEL, 2002, p. 259).
>
> **2.** La organización por parte de un individuo del contenido de una disciplina dada en su propia mente consiste en una estrutura jerárquica donde las ideas más inclusivas se encuentran en la cúspide de la estructura y subsumen progressivamente proposiciones, conceptos y dados factuales menos inclusivos y más diferenciados (AUSUBEL, 2002, p. 260).

Sendo assim, há necessidade de que os professores recorram a pesquisas que lhes evidenciem as conexões entre os assuntos a serem ministrados, e assim poderem propor seqüências que melhor satisfaçam o princípio da diferenciação progressiva. Neste planejamento podem também ser destacadas as relações, explícitas e implícitas, existentes entre os diversos conceitos, de modo a potencializar a reconciliação integrativa.

Os discentes envolvidos nesses estudos podem perceber que as novas idéias e informações são aprendidas e retidas mais eficientemente quando idéias mais inclusivas e especificamente relevantes já estão disponíveis na estrutura cognitiva, para desempenhar um papel subordinador ou para oferecer apoios ideacionais. Além disso, poderiam organizar o material de aprendizagem dentro de cada tópico ou subtópico e a seqüência dos vários tópicos e subtópicos de forma a se interligarem. Sendo assim estes estariam orientados pelo princípio da diferenciação progressiva.

Embora esse princípio pareça pertinente para introdução de novos conceitos, ele raramente é seguido nos procedimentos de ensino ou na organização da maioria dos livros-texto. A prática mais comum é segregar materiais topicamente homogêneos em capítulos e subcapítulos separados e ordenar a organização dos tópicos e subtópicos (AUSUBEL, 2002). Por exemplo, ao estudarmos isoladamente o assunto *semelhança* somente com base na relação tópica, sem considerar o seu nível relativo de abstração, generalidade e inclusividade, como suas aplicações à trigonometria e na formulação da área do círculo, estamos incorrendo em uma incongruência com o processo postulado mediante o qual a aprendizagem ocorre com a organização hierárquica da estrutura cognitiva, em termos de gradações progressivas de inclusividade, e com o mecanismo de acréscimo por meio de um processo de diferenciação progressiva (AUSUBEL, 2002).

Dessa forma, na maioria dos casos exige-se que os estudantes aprendam os detalhes de disciplinas novas e não familiares antes que tenham adquirido um corpo adequado de subordinadores relevantes num nível adequado de inclusividade.

Como resultado desta prática, os alunos e professores são levados a tratarem materiais potencialmente significativos como se tivessem caráter mecânico. Conseqüentemente têm dificuldades desnecessárias e pouco êxito tanto na aprendizagem quanto na retenção.

> Por ejemplo, la enseñanza de las matemáticas y las ciencias se sigue basando en gran medida en el aprendizaje memorista de fórmulas y pasos procedimentales, en el reconocimiento memorista de “problemas tipo” estereotipados y en la manipulación mecánica de símbolos (AUSUBEL, 2002, p. 261).

Na ausência de idéias claras e estáveis que possam servir como pontos de esteios e focos organizadores para a incorporação do material novo logicamente significativo, os estudantes estão presos num labirinto de incompreensão e têm pouca escolha além de memorizar mecanicamente as tarefas de aprendizagem para efeitos de exames (AUSUBEL, 2002).

A partir do exposto, parece razoável supor que uma aprendizagem e uma retenção satisfatória podem ocorrer quando os professores deliberadamente ordenam a organização e a seqüência dos assuntos de maneira similar às proposições ausubelianas. Desta maneira, um subordinador apropriadamente relevante e inclusivo é disponibilizado para oferecer um arcabouço ideativo para cada unidade componente do assunto a ser estudado. Além do mais, as idéias dentro de cada unidade assim como as várias unidades em relação com as outras são progressivamente diferenciadas.

Para o material ser compreendido e não somente memorizado, elaboramos uma seqüência lógica para construção do conceito de área de figuras planas evidenciando a área do círculo. Dessa forma, uma vez estabelecidas as bases necessárias para a aprendizagem significativa da área do quadrado unitário, ele passará a ser trabalhado através do princípio da diferenciação progressiva em direção aos conceitos sucessivamente mais específicos como são os das áreas do retângulo, do triângulo, do losango etc.

A compartimentalização dos conteúdos em tópicos dificulta o processo de diferenciação progressiva, não levando em consideração os diferentes níveis de abstração e de generalização, apresentando os conceitos isoladamente e desconexos, sem se relacionarem aos conceitos pré-estabelecidos pelos alunos. Este é um dos fatores que nos levam a propor um contexto histórico-matemático para apoiar novos conceitos, por apresentar características tais como generalização e potencialidade unificadora.

Quando submetemos uma nova informação a um determinado conceito ou proposição, a nova informação é aprendida e o conceito ou proposição inclusiva sofre modificações. Este processo de inclusão ocorre uma ou mais vezes refinando o significado e aumentando o potencial para criação de uma base para posterior aprendizagem significativa. O relacionamento destes conceitos pode gerar significados conflitantes que podemos resolver com o auxílio do que Ausubel denomina *reconciliação integrativa*.

1.4.2 Reconciliação integrativa

Os conhecimentos prévios ancoram os novos conhecimentos, apresentando diferenças e semelhanças entre si o que gera, por vezes, conflitos cognitivos. Devemos então rever os conceitos anteriormente adquiridos, observando as devidas diferenças e semelhanças para que não ocorram inconsistências ao novo conteúdo assimilado. Este procedimento é denominado por Ausubel de *reconciliação integrativa*.

> A maioria dos alunos afirmava que a base do poliedro não poderia ser face, senão todas as faces poderiam ser bases. Desse modo precisamos voltar aos conceitos mais abrangentes (diferenciação progressiva): polígonos, poliedros, faces, poliedros particulares (prismas e pirâmides), base, sanando distorções entre os conceitos e suas relações (BARALDI, 1999, p. 54).

Podemos observar que a ocorrência da aprendizagem significativa de um conceito está condicionada a observações de regularidades ou das diferenças e semelhanças existentes entre o novo e o antigo conhecimento. A comparação entre o que se quer assimilar e o conhecimento já adquirido é uma propriedade evidente da reconciliação integrativa. Como sua função primordial é favorecer a aprendizagem significativa devemos sempre que possível ressaltar aos discentes tal comparação.

Segundo Ausubel (2002) o princípio da reconciliação integrativa pode melhor ser descrito como antítese às práticas usuais contidas na maioria das propostas dos livros didáticos que compartimentalizam e segregam idéias ou tópicos particulares dentro de seus respectivos capítulos e subcapítulos.

Por exemplo, os alunos podem saber que a diagonal do retângulo e a hipotenusa do triângulo retângulo se equivalem, mas esta idéia volta a ser abordada posteriormente na distância entre dois pontos e no módulo de um complexo. A confusão inicial que o aluno pode experimentar é resolvida quando aprende novos significados combinatórios e compreende que a aplicação de uma mesma idéia matemática pode gerar vários conceitos correlatos, mas distintos, os conceitos e proposições aprendidos anteriormente são, desta forma, modificados e os novos significados são adicionados à estrutura cognitiva.

A reconciliação integrativa é mais completa quando possíveis fontes de confusão são eliminadas pelo professor ou pelos recursos didáticos. Portanto, podemos ajudar o aluno a resolver as inconsistências ou conflitos aparentes entre conceitos e proposições. No entanto, são feitos poucos esforços sérios no sentido de explorar explicitamente relações entre estas idéias, de assinalar semelhanças e diferenças significativas, e de reconciliar inconsistências reais ou aparentes. Algumas das conseqüências indesejáveis desta abordagem de acordo com Ausubel (2002, p. 263) são:

> **1.** que se emplean múltiples términos para representar conceptos que son intrínsecamente equivalentes salvo por la referencia contextual, generando así una tención y una confusión cognitivas incalculables además de fomentar el aprendizaje memorista.
>
> **2.** que se erigen barreras artificiales entre temas intrísecamente relacionados, ocultando importantes características comunes y haciendo así impossíble la aquisición de nociones dependientes del reconocimiento de estas características comunes.
>
> **3.** que no se hace un empleo adecuado de las ideas pertinentes aprendidas previamente como base para subsumir y asimilar nueva información relacionada.
>
> **4.** que puesto que las diferencias significativas entre conceptos aparentemente similares no se presentan de una manera clara y explícita, estos conceptos se suelen percibir y retener como si fueran idénticos.

Portanto, para que a aprendizagem das novas idéias ocorra, as idéias devem ser adequadamente discriminadas daquelas familiares estabelecidas. Caso contrário, os novos significados serão tão imbuídos de ambigüidades, e concepções errôneas que serão parcialmente ou completamente não existentes de direito próprio (AUSUBEL, 2002). Se, por exemplo, o aprendiz não consegue discriminar entre uma nova idéia sobre a área do triângulo e a velha idéia sobre área do paralelogramo (quando, coerentemente, fazemos esta relação), a primeira idéia não foi assimilada realmente para ele; fenomenologicamente, as idéias são idênticas. Além do mais, mesmo que o aprendiz consiga discriminar entre as duas idéias no momento da aprendizagem, a discriminação tem que ser precisa e livre de ambigüidade e confusão mais rapidamente do que geralmente ocorre.

Parece razoável postular que podemos ajudar o aluno a resolver as inconsistências ou os conflitos aparentes entre conceitos ou proposições, com auxílio da reconciliação integrativa. Assim as novas idéias de esteio capacitariam o aluno a mais tarde compreender as idéias e as informações mais detalhadas do assunto a ser aprendido com menos ambigüidades (AUSUBEL, 2002).

Um atributo dos professores é que tenham amplitude suficiente de conhecimento e experiência em sua área para que possam estar aptos a contribuir com seus alunos dotando-lhes de meios para formularem suas próprias reconciliações integrativas (AUSUBEL, 2002). Para tal elaboramos atividades bem organizadas, objetivando a formulação da área do círculo, isto quer dizer que os significados dos novos conceitos e proposições foram apresentados de forma clara, que os possíveis conflitos nos significados podem ser resolvidos e que, as novas reconciliações integrativas, supostamente, seriam facilitadas. Na seqüência das atividades havia a necessidade de constantes retomadas de conceitos e procedimentos para podermos concluí-las com êxito; somente no final generalizando o que foi estudado e associando ao conceito relevante de área do círculo unitário, estendemos o conceito para o cálculo de área de um círculo qualquer.

Os princípios supracitados acontecem simultaneamente em todos os instantes (AUSUBEL et al., 1980). Desta forma temos que organizar o material de ensino com o objetivo de facilitarmos os processos de diferenciação progressiva e reconciliação integrativa; para isso Ausubel nos recomenda a utilização dos *organizadores prévios*.

1.5 ORGANIZADORES PRÉVIOS

Para Ausubel et al. (1980), *organizadores prévios* são materiais introdutórios apresentados antes do próprio material a ser aprendido. Quando os conceitos subsunçores são pouco elaborados ou inexistentes, cabe ao professor utilizar-se dos *organizadores prévios*, que servem de ponte entre o que o aprendiz já sabe e o que ele vai aprender. São as “pontes cognitivas”.

Esses organizadores servem de âncora para a nova aprendizagem e são os facilitadores da aprendizagem subseqüente.

> [...] servem tanto para fornecer a ligação entre a nova informação e os conhecimentos relevantes anteriores, como também para fornecer conceitos relevantes não-existentes para a ancoragem da nova aprendizagem. Os organizadores prévios podem aparecer sob

> diversas formas – uma pergunta ou um problema, um filme um texto, uma demonstração, atividades lúdicas ou "concretas" – oferecendo ao aluno idéias essenciais e mais inclusivas sobre o assunto, ou ainda apontando quais idéias anteriores precisam ser retomadas e delineadas (BARALDI, 1999, p. 53).

Nas primeiras pesquisas que realizamos a respeito da teoria ausubeliana percebemos que um organizador prévio é um recurso pedagógico que apresenta papel mediador e unificador, assim como a história da Matemática. De acordo com Ausubel os organizadores prévios podem servir, em parte, para focalizar a atenção do aprendiz em elementos ou atributos de materiais de estudo que poderiam passar inteiramente despercebidos sem induzir a disposição que pode por ele ser oferecida, característica a nosso ver presente nas investigações históricas.

Para o autor, em um contexto amplo, os organizadores orientam os estudantes para o estabelecimento de uma disposição para aprendizagem podendo influenciar significativamente a maneira pela qual a informação é internalizada na estrutura cognitiva, ou seja, a motivação também é um pré-suposto comum tanto dos organizadores prévios quanto da história da Matemática.

2 A HISTÓRIA DA MATEMÁTICA COMO SUBSÍDIO METODOLÓGICO PARA O ENSINO DA MATEMÁTICA

Atualmente várias tendências em Educação Matemática fornecem suporte metodológico para docentes que buscam dar mais significado e compreensão ao estudo da Matemática. Dentre as diversas tendências (jogos, informática, modelagem, etnomatemática, história da matemática e outras), direcionamos nossas atenções à história da Matemática por ter mais afinidade com esta, sem desconsiderar a relevância das demais tendências. Mendes (2001, p. 25) nos desperta o interesse por essa pesquisa ao interrogar “a história da matemática pode auxiliar o professor de Matemática para que ensine essa disciplina com significado e compreensão?” Chassot (2001, p. 99) também nos incentiva a enveredar por esses estudos ao destacar:

> Há necessidade de uma busca de um ensino cada vez mais marcado pela historicidade. Ao invés de apresentarmos o conhecimento pronto, é preciso resgatar os rascunhos. Também é preciso envolver alunos e alunas em atividades que busquem ligações com seu passado próximo e remoto.

Não faltam argumentos que reforcem as potencialidades pedagógicas da utilização da história da Matemática, evidenciadas em dissertações de mestrados, teses de doutorado, livros, artigos de revistas educativas e científicas, seminários, encontros, congressos, que culminaram com a criação, em 1999, da Sociedade Brasileira de História da Matemática (SBHMat).

Os PCN (BRASIL, 1997, p. 26) fazem referência a esta tendência em evolução destacando que a “história da Matemática também tem se transformado em assunto específico, sendo um item a mais a ser incorporado ao rol de conteúdos, que muitas vezes não passa de apresentação de fatos ou biografias de matemáticos famosos”.

Apesar dessas evidências, não vislumbramos com a freqüência necessária o uso desta tendência em sala de aula, nem em livros didáticos, por uma série de fatores como: a necessidade de mais leituras, pesquisas e busca de aperfeiçoamento em nível de pós-graduação, por parte dos docentes; autores que demonstrem a sensibilidade de relacionar a história que abordam, geralmente, para introduzir capítulos, aos assuntos tratados; universidades/faculdades que implantem a disciplina História da Matemática ou disciplinas que discutam o tema nos cursos de licenciatura em Matemática, com a finalidade de nortear os futuros professores a inserirem a história da Matemática em suas práticas pedagógicas.

O que nos interessa, na realidade, é o desenvolvimento histórico-epistemológico dos conceitos matemáticos. Nesse sentido acreditamos que a cultura da utilização da história da Matemática no processo ensino-aprendizagem pode contribuir para uma educação matemática de melhor qualidade. Das considerações supracitadas, a que nos leva a acreditar na possibilidade de vir a existir uma identidade histórico-matemática no processo de ensino é a introdução dessa tendência nos cursos de formação inicial e continuada de professores. A identidade a qual nos referimos pode se apresentar no decorrer da graduação em disciplinas como Cálculo, Álgebra, Geometria, Teoria dos Números, em fim, nos diversos estudos que realizamos durante a formação e naturalmente nos demais níveis educacionais.

A busca por um recurso metodológico para nossas aulas de Matemática é movida, em grande parte, pela necessidade que sentimos de fazer com que o conteúdo que ensinamos seja assimilado com significado e compreensão por parte do aluno. Ensinar com significado, através da história da Matemática consiste em proporcionar ao aluno condições para que ele pense e compreenda o conteúdo que está sendo ministrado.

Diante de uma tarefa que resgate o desenvolvimento histórico de determinados conceitos matemáticos o discente pode apreender que o conhecimento matemático é falível, corrigível e em contínua expansão, nascendo da atividade humana, como parte de um processo social (CURY, 1997). Evidenciando as divergências até mesmo sobre a origem histórica dos elementos matemáticos, como podemos perceber na controvérsia sobre a origem da Geometria, entre Heródoto e Aristóteles, o primeiro afirma que a mesma tenha surgido da necessidade prática de fazer novas medidas de terras após cada inundação anual do vale do rio Nilo. Enquanto que Aristóteles achava que a existência no Egito de uma classe sacerdotal com lazeres é que tenha conduzido ao estudo da Geometria (BOYER, 2003).

Para Lakatos (1978), a epistemologia da Matemática não pode ser considerada independente da história da Matemática. Segundo este autor, ocultar os contra-exemplos que levam a uma “descoberta matemática” apresenta o conceito de forma autoritária e artificial. Desta forma propomos que a construção do conceito da área do círculo unitário seja apresentada de vários pontos de vista e que a reorganização das idéias primeiras conscientizem os discentes que a praticidade do manuseio de fórmulas, que temos hoje, deriva da reorganização e integração parcial das posições iniciais.

Posto isso, acreditamos que somente depois de toda uma construção, organização e sistematização das idéias desenvolvidas é que devemos chegar às definições formais. Como a condução de propostas, similares a essa, é função docente, procederemos a algumas reflexões sobre como a história da Matemática se apresenta aos professores de Matemática.

2.1 O CONHECIMENTO HISTÓRICO MATEMÁTICO DO PROFESSOR

A História da Matemática como ferramenta pedagógica para o ensino apresenta uma série de adversidades, visto que, grande parte dos professores, não teve (ou não tem) contato com o estudo histórico-matemático durante sua formação e, por vezes, nem mesmo na formação continuada.

Aliado a este fato, constatamos a falta de tempo para elaboração de atividades que utilizem a história para a construção de conhecimentos matemáticos e a escassez de material bibliográfico com sugestões de atividades, além de abordagens históricas *ornamentais* [12] inseridas em livros didáticos. Tais fatos contribuem significativamente para a não inserção da História da Matemática nos currículos de Matemática, em qualquer que seja o nível de ensino.

Silva da Silva (apud PETERS, 2005) constata que existem mais de 130 cursos de licenciatura e bacharelado em instituições brasileiras. A autora constatou que em 28 instituições, apenas 16 oferecem a disciplina História da Matemática; 13 como obrigatória e três como optativa detectando que as maiores dificuldades em

[12] Fossa (2001, p. 54) caracteriza como *ornamental* o uso da história contida na maioria dos livros textos de Matemática “são notas históricas que nos contam algo sobre o desenvolvimento da Matemática ou o seu formalismo ou, ainda, sobre algum fato picante da biografia de um grande matemático do passado”.

ofertar a disciplina são: falta de professores qualificados e dificuldade de acesso à bibliografia e outros materiais para o ensino.

Tais barreiras não devem e não podem desestimular os educadores de enveredarem em pesquisas histórico-matemáticas, pois conhecer a história da Matemática com maior grau de profundidade, permite ao professor criar novas estratégias didáticas que certamente auxiliam o aluno a compreender como foram edificados os conhecimentos matemáticos. Mostrando ainda, não ser um passe de mágica a aparição de símbolos, fórmulas e demais elementos matemáticos, além de ter mais sensibilidade quanto aos erros e obstáculos (SCHUBRING, 1998) apresentados pelos alunos.

Quanto a isto, o professor Morris Kline do Instituto Courant de Ciências Matemáticas, da Universidade de Nova York, considera que:

> se os matemáticos levaram um milênio desde o tempo em que a Matemática de primeira classe pareceu chegar ao conceito de números negativos – e levaram – e se levaram outro milênio para aceitarem os números negativos – como realmente levaram – podemos ter certeza que os estudantes terão dificuldades com os números negativos (KLINE, 1976, p. 60).

Evidentemente nossos discentes não terão a mesma dificuldade, pois temos uma estruturação numérica que nos possibilita dentro do próprio convívio social estar em contato com este sistema de numeração como, por exemplo, temperaturas abaixo de zero, saldo bancário negativo, movimentos orientados (como o subir e descer de um elevador num prédio com andares subterrâneos) etc. Desta forma o professor deve lançar mão de analogias, para auxiliar os alunos a superarem tais obstáculos, mas ciente de que as dificuldades de aceitação e compreensão dos números relativos e outros conceitos matemáticos estarão presentes como estiveram historicamente.

2.2. A HISTÓRIA DA MATEMÁTICA COMO ALTERNATIVA CONTEXTUAL PARA PROMOÇÃO DA APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA

Com base em nosso estudo podemos postular que a história é um dos instrumentos que pode promover a aprendizagem significativa da Matemática e pode esclarecer os conceitos e as teorias estudadas. Mendes (2001) afirma que a interpretação das informações históricas, incorporadas à estrutura cognitiva dos alunos, favorece a abstração dos conceitos matemáticos. Propomos, também, que a reconstrução teórico-prática dessa história proporcionará ao aluno oportunidades para evidenciar os significados da aprendizagem, ressaltando os obstáculos que surgiram na construção do conhecimento.

A história da Matemática constitui, a nosso ver, um dos fatores que pode despertar o interesse dos discentes a se apropriarem do conhecimento matemático escolar, motivando e despertando, tanto no professor quanto no aluno, o desejo de enveredar pelo estudo das descobertas matemáticas, as quais permitem compreender a origem das idéias que deram forma e auxiliaram o desenvolvimento da disciplina. Assim como as circunstâncias às quais estavam submetidas as pessoas que contribuíram para essas idéias. Mostrando aos alunos os porquês (tão solicitados por esses) de determinadas proposições matemáticas, contribuindo para um olhar crítico sobre os objetos em estudo. Cabe ao professor apropriar-se do conhecimento histórico e favorecer a aquisição de conceitos pelos discentes.

> Em alguns casos, o domínio dos saberes a serem ensinados é crucial; se ele não existir, alguns problemas não podem ser levantados a interpretação de alguns erros de compreensão é esclarecida pela história e pela epistemologia da disciplina ensinada (PERRENOUD, 2002, p. 200).

Reconhecemos sem dificuldades o alcance epistemológico do estudo dos períodos históricos e das linhas de forças que eles comportam, o domínio dos saberes histórico-matemáticos, além de favorecer a aprendizagem significativa dos conceitos, não nos deixa incorrer a qualquer ilogismo visto a evidência em reconhecer o valor informativo da história para analisar a construção dos conhecimentos (PIAGET; GARCIA, 1987).

Nesse sentido apresentamos nossa proposta, que em consonância com as indicações apresentadas em caminhos para se “fazer matemática” na sala de aula em destaque nos parâmetros curriculares nacionais, pode auxiliar docentes a organizarem atividades que valorizem a compreensão das idéias primeiras de conceitos matemáticos.

> A história da Matemática pode oferecer uma importante contribuição ao processo de ensino e aprendizagem dessa área do conhecimento. Ao revelar a Matemática como uma criação humana, ao mostrar necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, ao estabelecer comparações entre os conceitos e processos matemáticos do passado e do presente, o professor cria condições para que o aluno desenvolva atitudes e valores mais favoráveis diante desse conhecimento. (BRASIL, 1998, p. 42)

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1997, p. 38) nos indicam que “o conhecimento matemático precisa fazer parte da formação do professor para que este possa mostrar aos alunos a face falível e em constante reformulação da matemática”. Além de destacar, como já evidenciamos que o professor estando a par do conhecimento histórico-matemático provavelmente terá uma visão diferenciada sobre os erros históricos e conseqüentemente aqueles apresentados pelos alunos.

Temos que considerar também que a história da Matemática como tendência metodológica é uma forma pedagógica de contextualização do ensino da Matemática, pois situa o aluno no contexto do conhecimento matemático no tempo e no espaço (SILVA; SANTO, 2004, p. 7). A proposta dos autores indica-nos uma recontextualização o que em nossa concepção valoriza em demasia o conhecimento escolar estruturado, justificando aos discentes *o porquê* de se estudar determinado conteúdo, fazendo relações com atualidades mostrando-lhes *o para que* se estudar tais assuntos.

A experimentação, o descobrimento e a invenção, ou seja, aprender no contexto da exploração, nos parece ser a raiz da aprendizagem contextual. E o aprender parece acontecer mais prazerosamente quando os alunos são colocados diante de problemas que esclareçam os porquês de determinadas relações matemáticas.

Os dados históricos serão, a nosso ver, sempre relevantes em consideração à estrutura conceitual e contextual. Podemos estruturar atividades neste contexto que busquem a construção de novas experiências de aprendizagem a partir dos conhecimentos prévios dos alunos ou que forneçam subsunçores que ancorem os novos conhecimentos construindo, a partir de então, experiências de aprendizagem sobre o que eles já conhecem.

Farago (2003) propõe o uso da história da Matemática para apresentar um novo conteúdo, mostrando a necessidade do surgimento e a evolução de determinado conceito, chegando ao cotidiano de forma contextualizada. Desta forma acreditamos que o aprendizado contextual proporcione uma abordagem mais eficiente, porque o ensino contextualizado aproxima-se da forma cotidiana de adquirir conhecimento. É preciso que o que se ensine esteja carregado de significado e tenha sentido para o aluno. Esse é o grande desafio posto aos professores diante da tarefa de formular atividades contextuais como as baseadas na história da Matemática.

O que realmente sentimos falta nos conhecimentos dos professores diz respeito aos esclarecimentos sobre os significados epistemológicos dos conceitos matemáticos, no plano da própria história da Matemática. Assim postulamos que história da Matemática é eficaz para construção e esclarecimentos dos conceitos e pode preceder e ancorar os conteúdos que serão apresentados.

Assim, justificamos recorrer à história da Matemática, em uma perspectiva contextual, pois consideramos que ela deva levar os alunos a perceber que é mais conveniente estabelecer eles mesmos a validade dos conceitos que lhes são “ensinados”, do que solicitar provas prontas e acabadas. O aluno deve, também, relacionar situações cotidianas com as informações obtidas no contexto histórico a fim de resolver os problemas que lhes sejam postos.

3 A HISTÓRIA DA MATEMÁTICA COMO ORGANIZADOR PRÉVIO

Já destacamos que se os conceitos relevantes não estivessem disponíveis na estrutura cognitiva, o organizador prévio servirá para ancorar novas aprendizagens e levar ao desenvolvimento de um conceito subsunçor que facilitasse a aprendizagem subseqüente. Por outro lado, se os conceitos adequados estivessem disponíveis, o organizador prévio poderia servir como elemento de ligação entre a nova aprendizagem e subsunçores relevantes específicos (NOVAK, 1981). Nosso pressuposto é que o contexto histórico da matemática pode ser um elemento facilitador de uma aprendizagem significativa, na medida em que se habilite como organizador prévio.

Para Ausubel (2002, p. 41, grifos do autor) as razões para se implementar os organizadores se baseiam principalmente em:

> **1.** La importancia de tener ideas pertinentes o apropiadas en algún otro sentido ya establecidas y disponibles en la estructura cognitiva para hacer que las nuevas ideas *lógicamente* significativas y que las nuevas ideas *potencialmente* significativas sean *realmente* significativas (es decir, que produzcan nuevos significados), además de ofrecerles un anclage estable.
>
> **2.** Las vantajas de usar las ideas más generales e inclusivas de una disciplina en la estructura cognitiva como ideas de anclaje o subsumidoras, modificándolas adecuadamente para una mayor particularidad de su pertinencia dentro del material de instrucción. A causa del carácter más oportuno y específico de su pertinencia, también disfrutan de una mayor estabilidad intrínseca, de más poder expositivo y de una mayor capacidad integradora.
>
> **3.** El hecho de que los propios organizadores intenten identificar los contenidos pertinentes ya existentes en la estructura cognitiva (y de la relacionarse explícitamente con ellos) e indicar de forma explícita tanto la pertinencia del contenido ya existente como su propia pertinencia para el nuevo material de aprendizaje.

A história da Matemática como organizador prévio se justifica, então, pelas mesmas razões pelas quais os organizadores prévios se justificam dentro da teoria ausubeliana.

Em consonância com a primeira razão, acreditamos que introduzir um conceito por meio de uma contextualização histórica favorece a compreensão do conceito, incorporando a estrutura cognitiva do aluno subsunçores necessários a ancoragem da aprendizagem posterior. A história da Matemática pode contribuir, também, para evidenciar o significado lógico de conceitos potencialmente significativos, tais qualidades podem ser atribuídas à história da Matemática o que, em nossa concepção, a potencializa como organizador prévio.

Em relação à segunda razão postulamos que a estrutura de assuntos a serem desenvolvidos tem em seu aspecto histórico epistemológico que, a nosso ver, identificam os conceitos mais gerais e inclusivos dos conteúdos matemáticos a serem estudados. Uma exposição introdutória baseada em investigações históricas explicita as novas idéias, expressando um alto nível de generalidade e poder de inclusão, às quais as informações mais detalhadas possam ser relacionadas. Acreditamos desta forma, que a história como organizador prévio é vantajosa para compreensão dos conceitos e conseqüentemente a utilização destes como ideais âncoras. Possibilitando, também, ao aluno, que possa perceber que o conhecimento adquirido sobre certo assunto pode ser enriquecido e esclarecido, favorecendo a ressignificação de conceitos já estudados anteriormente.

Relacionamos a terceira razão com o contexto histórico da seguinte forma, caso os conceitos já estejam estabelecidos na estrutura cognitiva a contextualização histórica identificará tais conceitos, mostrando sua relevância para a época de sua construção assim como sua aplicabilidade atual, além de destacar sua importância para aquisições de conceitos subseqüentes que estejam relacionados aos anteriores.

O organizador prévio que utiliza a história da Matemática, em nossa concepção, contextualiza o aprendizado de um determinado conteúdo, mostrando formas de conectar estas novas idéias com outras já existentes. Além de ser altamente motivador para os alunos, uma vez que apresenta situações problemas cuja solução bem sucedida requer um poder de raciocínio, flexibilidade de pensamento, improvisação, sensibilidade, astúcia tática para compreender os princípios subjacentes, habilidade, destreza e conhecimentos prévios. Atuando como elemento motivador o organizador pode instigar o aluno a continuar o processo de ensino aprendizagem compreendendo-se como parte integrante do mesmo e não como um mero receptor e espectador reproduzindo as informações apresentadas.

O desenvolvimento dos conceitos tem sua origem nos problemas, propondo soluções que serão testadas, criticadas, refutadas. As soluções são substituídas por outras que serão, por sua vez, refutadas e o desenvolvimento se dá através dos embates entre as soluções propostas, não por uma acumulação de conhecimento, mas pelo refinamento do mesmo, a partir das críticas (LAKATOS, 1978).

A história da Matemática apresenta-se sob a forma de problemas para formação de determinados conceitos, evidencia a construção, lógica ou empírica, que contribuíram para o desenvolvimento deste. Portanto, a história da Matemática fornece compreensão aos conceitos, fato que reforça, mais uma vez, o papel da história como organizador prévio. Veja como as proposições contidas em textos históricos, podem introduzir conceitos relevantes que servem de subsunçores; Segundo Eves (2004) é provável que nenhum outro problema tenha exercido um fascínio maior ou mais duradouro do que aquele de construir um quadrado de área igual a área de um círculo dado. Já em 1800 a.C. os egípcios haviam "resolvido" o problema, tomando o lado do quadrado igual a 8/9 do diâmetro do círculo dado. Assim observamos a importância da história da Matemática para introduzir conceitos e que seu poder de inclusividade é suficientemente amplo para servir de subsunçor das idéias e conceitos que serão trabalhados posteriormente.

A expansão do conhecimento se dá a partir das discussões, das idéias contidas em textos dessa natureza, possibilitando ainda a correção de erros confrontando os trabalhos sobre um mesmo tema. Segundo Ausubel et al. (1980), quando um conceito é encontrado numa ampla variedade de conceitos, os atributos que definem um conceito são mais rapidamente aprendidos. Podemos, por exemplo, confrontar as idéias dos egípcios a dos babilônios que consideravam uma circunferência como o triplo de seu diâmetro e a área do círculo como um duodécimo da área do quadrado de lado igual à circunferência respectiva.

Mostrando assim que os conceitos matemáticos não são criados arbitrariamente, eles surgem da ação sobre outros já existentes, que, por sua vez, foram criados para atender as necessidades de atividades cotidianas. Portanto, nossa perspectiva ao adotar a história como organizador prévio é mostrar que a origem do conhecimento matemático não está dissociada das necessidades humanas, mas é experimental, e gerado a partir das tentativas de solução dos problemas reais que surgem em uma determinada época ou comunidade, os quais se enquadram contribuindo com seus conceitos construídos no passado para busca de soluções dos problemas que emergem no presente e quiçá no futuro.

A utilização dos organizadores prévios para introduzir novos conceitos, além de aguçar o interesse dos alunos pelo assunto, orienta o novo assunto a partir daquilo que o aluno já sabe. Uma vez que estará sendo apresentado, em primeiro lugar, as idéias mais gerais sobre o assunto sob a forma de um problema, um filme, um texto histórico-matemático. Dentre outros recursos que favoreçam a construção do conhecimento sem entregá-lo pronto, por meio de definições e algoritmos; Irá possibilitar o estabelecimento de diferenças e das semelhanças entre os fatos históricos e os fatos que ocorrem no cotidiano.

O uso da história da Matemática como organizador prévio pode, também, favorecer a prática dos princípios de diferenciação progressiva e reconciliação integrativa, isto é, antes mesmo de iniciar um assunto, é possível conhecer as idéias mais gerais e mais amplas, para depois partir para as específicas a que se pretende chegar, estabelecendo comparações entre os conceitos já conhecidos e o novo. A contextualização histórica, ao fornecer as idéias primeiras de determinados assuntos, potencializa o aluno a ter uma visão ampla de tais assuntos, favorecendo a apreensão dos conceitos específicos relacionados ao contexto histórico apresentado.

Entendemos que fica mais fácil para a maioria dos alunos compreenderem os conceitos de áreas do retângulo, do paralelogramo, do triângulo losango, do trapézio e círculo a partir de conceitos com os quais já estão acostumados, relativos à área do quadrado. É imprescindível que, nestes casos, as semelhanças e as diferenças entre a idéia nova e a antiga que lhe serviu como âncora sejam progressivamente explicitadas, a fim de que o sujeito não misture, confunda ou reduza os conceitos relativos de uma idéia aos da outra.

Evidenciar eventuais diferenças entre as idéias já estabelecidas e aquelas que se está aprendendo, a fim de que, caso haja alguma analogia entre elas, isso não leve os alunos a reduzirem uma a outra ou a confundirem ambas. Este é o caso do uso da área do quadrado para obter uma aproximação da área do círculo unitário. Apesar de haver algumas semelhanças, os conceitos e as características destes dois conceitos são bastante distintos, devendo, portanto, ser explicitamente elucidados.

3.1 A CONCEPÇÃO DA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA COMO ORGANIZADOR PRÉVIO E SUA PERSPECTIVA INVESTIGATÓRIA

Brighenti (2003) propôs como exemplo de organizador prévio, que os professores utilizem textos históricos, apresentando problemas desafiadores aos discentes, como por exemplo, os procedimentos utilizados por Thales de Mileto, para calcular a altura de uma pirâmide no Egito. Segundo Eves (2004) há duas versões de como Tales, supostamente, tenha obtido a altura da pirâmide egípcia. A primeira diz que Tales anotou o comprimento da sombra no momento em que esta era igual à altura da pirâmide que a projetava. A segunda afirma que ele fincou verticalmente uma vara e fez uso de semelhança de triângulos.

> Esse organizador prévio, além de motivar os alunos para aprendizagem do novo assunto, também os prepara para desenvolver ações extraclasse como, por exemplo, medir a altura de algo no pátio da escola, utilizando-se dos procedimentos empregados por Thales de Mileto [...] (BRIGHENTI, 2003, p. 41).

Assim, a atividade que será utilizada para ligar o que se deve aprender a conhecimentos previamente aprendidos deve ser mais ampla, geral e inclusiva em relação aos conceitos que serão abordados a partir desse organizador. Postulamos que os organizadores, que recorrem a contextualizações históricas da Matemática, podem ser elaborados em vários níveis, como por exemplo, na introdução de uma disciplina, na introdução das várias partes de uma dada disciplina e/ou na introdução dos vários assuntos relativos a cada parte de uma disciplina.

O papel assumido pelo organizador foi, portanto aproveitar as possíveis analogias, evidenciando as peculiaridades, as semelhanças e as diferenças existentes entre o conjunto de idéias já subsumidas e as idéias mais inclusivas relativas ao conteúdo que desejávamos ensinar. Uma vez estabelecidas as bases necessárias para a aprendizagem significativa do novo conteúdo, ele passou a ser trabalhado através do princípio da diferenciação progressiva em direção aos conceitos sucessivamente mais específicos.

Neste caso, o organizador funcionou no sentido de evidenciar a origem de diversos conceitos a serem apreendidos, em nosso caso áreas de figuras planas. Além disso, apresentou o papel de prover maior estabilidade e clareza as idéias âncoras, como a busca de unidades de medidas de áreas. Com isso, as idéias subordinadas e mais específicas, de áreas de figuras planas, foram alicerçadas em um conceito mais amplo.

Nosso organizador prévio foi montado em função dos pré-requisitos que julgamos necessários para seqüenciarmos coerentemente as atividades, de modo a fornecermos os meios necessários a fim de que os novos conceitos a serem trabalhados no seqüenciamento das atividades possam relacionar-se de forma não-arbitrária e substantiva com conceitos previamente existentes na estrutura cognitiva do aluno.

Mendes (2005) apresentou a uma turma de estudantes uma história narrativa[13] sobre os aspectos conceituais envolvendo Ptolomeu e seus estudos sobre as cordas da circunferência, e outra narrativa a respeito do Teorema de Pitágoras. Afirmando que seu principal objetivo não era apenas apresentar um texto com informações de fatos históricos em si, mas também ressaltar o caráter investigatório presente nas narrativas.

Concordamos com Mendes (2006) ao defender as atividades investigatórias na qual o estudante se posicione como um pesquisador em busca do conhecimento. Nesse sentido propomos a organização de uma seqüência didática baseada no desenvolvimento histórico-epistemológico da área do círculo, reelaborando um texto extraído de Eves (2004) visando a aprendizagem significativa proposta por Ausubel. Dessa forma o conhecimento, oriundo da atividade, foi apreendido, e ressignificado, pelos alunos a partir de informações históricas de acordo com a contextualização sociocultural que revestiu essas informações.

Em nossa proposta, as atividades históricas foram elaboradas a partir de um diálogo conjuntivo entre as informações históricas e a aprendizagem significativa. Indícios dessa proposta podem ser observados nas indicações de Mendes (2006, p. 98).

> Um bom exemplo [...] é a leitura e discussões de textos referentes à história da matemática. Essa dinâmica justifica a introdução de uma perspectiva histórica e investigativa na aprendizagem da matemática, permitindo tanto ao professor quanto ao estudante compreender a natureza da atividade matemática. Com isso, eles poderão apropriar-se dos conceitos filosóficos que estão presentes nesses textos,

[13] Fauvel e Maanen (1997) afirmam que a história narrativa (anedótica) é usada, por exemplo, para mudar a imagem da Matemática e humanizá-la. No entanto, Mendes (2006) entende que a história narrativa não contribui para que a Matemática transmita essa imagem. Tampouco contribui para a construção de noções matemáticas. Afirmado que há assuntos ricos que, contextualizados historicamente, podem ser úteis nas discussões de sala de aula, além de se constituírem em fonte de pesquisa.

> mudando, assim, sua imagem a cerca da matemática como conhecimento pronto e acabado, o que lhes permite interpretar essa prática como atividade educativa.

Nessa perspectiva acreditamos que as aulas investigativas conduzem os discentes a atividades que permitam a eles construírem os conceitos matemáticos. Assim, uma aula investigativa baseada na história da Matemática possibilita uma ampla visão desta disciplina, pois envolve os alunos em atividades que requerem exploração de hipóteses, conjecturas, generalizações e comprovações de resultados, o que, a nosso ver, favorece a aprendizagem significativa.

As atividades elaboradas a partir da história da Matemática com caráter investigativo, para introduzirem conceitos, revelam-se como legítimos organizadores prévios, pois coadunam com suas características essenciais, visto que os organizadores devem apresentar as seguintes características: clareza, estabilidade, relevância e inclusividade, apresentando também níveis superiores de abstração e generalidade do que se vai ensinar. Observamos neste sentido uma conjunção entre a construção histórica do conceito e a aprendizagem significativa.

Desta forma utilizaremos uma reelaboração de um texto, de fonte secundária, da história da Matemática como *organizador prévio*. A partir deste, exploraremos problemas relativos às áreas do quadrado, do retângulo, do triângulo e do círculo, em consonância com os demais elementos da teoria ausubeliana.

Buscamos, inicialmente, traçar um perfil da turma a qual nos dispusemos a aplicar nossa proposta, às primeiras informações foram relatadas pela professora da classe, confirmadas por nós, no início das atividades. Nossa proposição buscou conduzir os discentes à descoberta do conhecimento através do levantamento e da testagem de suas hipóteses acerca dos problemas investigados, nas informações históricas que abordaram a evolução histórica da busca de unidades de medidas de áreas. Nessa perspectiva metodológica esperávamos que eles apreendessem com significado e compreensão, para que assim pudessem estar motivados a exercerem sua criatividade, criticidade e pensamento lógico-matemático, colhendo informações no texto, referentes à história da Matemática, reelaboradas por nós.

4 AÇÕES PEDAGÓGICAS QUE CONDUZIRAM NOSSA PROPOSTA: ANÁLISES E DISCUSSÕES DOS RESULTADOS

A professora da turma nos apresentou, informando aos discentes que em virtude de nosso projeto de pesquisa eles receberiam orientações sobre geometria plana. Por este motivo os alunos passaram a afirmar que tinham dois professores, um de Matemática e outro de Geometria, fato que foi esclarecido, no decorrer do desenvolvimento da proposta.

A princípio percebemos o desinteresse da turma com relação à realização das atividades, fato que já havia sido relatado pela professora e nos parece rotineiro em grande parte das escolas públicas, bem como nos constatam os Parâmetros Curriculares Nacionais. Destaca-se que jovens nessa faixa etária enfrentam mudanças corporais, inquietações emocionais e psicológicas que repercutem na vida afetiva, na sexualidade, nas relações com a família e também na escola.

> [...] Muitos têm a sensação de que a matemática é uma matéria difícil e que seu estudo se resume em decorar uma série de fatos matemáticos, sem compreendê-los e sem perceber suas aplicações e que isso lhe será de pouca utilidade. Tal constatação os leva a assumir atitudes bastante negativas, que se manifestam no desinteresse, na falta de empenho e mesmo na pouca preocupação diante de resultados insatisfatórios ou nos sentimentos de insegurança, bloqueio e até em certa convicção de que são incompetentes para aprendê-la, o que os leva a se afastar da matemática em situações na vida futura (BRASIL, 1998, p. 79).

Trata-se de uma constatação que nos incomoda e nos leva a supor que uma das razões pelas quais o ensino da Matemática tem sido tão ineficaz é que durante a apresentação dos conteúdos estudados raramente os docentes justificam os procedimentos e algoritmos utilizados. O planejamento e a elaboração de atividades que, em primeiro lugar, auxiliem o aluno na compreensão dos conceitos que pretendemos ensinar, destacando possíveis relações com outras disciplinas e com outros conteúdos da própria disciplina devem ser priorizados. São estes motivos que nos levaram a propor uma abordagem da Matemática dentro de um contexto histórico, buscando motivar e despertar nos discentes, mais interesse, levando-os a ter compreensão e conseqüente apropriação significativa do conceito de áreas de figuras planas.

Num contexto escolar podemos observar que os discentes dispõem de certos recursos pessoais, para agirem diante de atividades que os motivem a aprender significativamente, como, tempo, energia, talentos, conhecimentos e habilidades, que poderão ser investidos na atividade proposta e será mantida enquanto os fatores motivacionais estiverem atuando (BZUNECK, 2001).

Sabemos que a motivação do aluno em sala de aula resulta de um conjunto de medidas educacionais, que são certas estratégias e técnicas de ensino que devem estar sob o domínio dos professores a fim de serem usadas com flexibilidade e criatividade.

Nossa intenção ao propor o uso pedagógico da história da matemática como organizador prévio foi o de motivar os alunos a envolverem-se ativamente em investigações que os esclareçam e gerem maior compreensão sobre a evolução histórica que originaram os atuais procedimentos para o cálculo de áreas de figuras planas.

É de natureza do ensino escolar, motivar os discentes com elogios, notas, prêmios etc., ou seja, o primeiro processo que observamos em sala de aula, é o envolvimento em tarefas que provocam motivação *extrínseca*. Como as diversas atividades do indivíduo em seu cotidiano são movidas por razões externas, a recompensa geralmente guia as motivações. Nosso problema na escola, então, é como carrear a motivação *extrínseca* para *intrínseca* provocando no aluno a necessidade de realizar determinada tarefa.

Na realidade ninguém é capaz de fazer o sujeito ter motivação intrínseca, pois ela é idiossincrática, o que podemos fazer é propor metodologias que possam provocar uma motivação por necessidade, caso contrário, ficaremos em um nível muito elementar, no qual o aluno aprende por obrigação.

Para Guimarães (2001) os esforços educacionais devem, sempre que possível, almejar a motivação intrínseca, a qual se refere à escolha e à realização de determinada atividade por sua própria causa, por esta ser interessante, atraente, ou de alguma forma, geradora de satisfação.

> Envolver-se em atividades por razões intrínsecas gera maior satisfação e há indicadores que esta facilita a aprendizagem e o desempenho. Estes resultados devem-se ao fato de que, estando assim, motivado o aluno opta por aquelas atividades que assinalam oportunidade para o aprimoramento de suas habilidades, focaliza a atenção nas instruções apresentadas, busca novas informações,

> empenha-se em organizar o novo conhecimento de acordo com seus conhecimentos prévios, além de tentar aplicá-lo a outros contextos. A percepção de progresso produz um senso de eficácia em relação ao que está sendo aprendido, gerando expectativas positivas do desempenho e realimentando a motivação para aquela tarefa ou atividade (GUIMARÃES, 2001, p. 38).

Analogamente Ausubel, Novak e Hanesian (1980) ressaltam que o desejo de conhecimento como um fim em si próprio é o mais importante na aprendizagem significativa, a motivação intrínseca é, pelo menos potencialmente, o mais importante tipo de motivação para aprendizagem em sala de aula.

4.1 PRIMEIRAS INTERVENÇÕES JUNTOS AOS DISCENTES: EM BUSCA DE MOTIVAÇÕES INTRÍNSECAS

Os alunos antes da intervenção segundo relatos da professora, da turma, demonstravam pouca necessidade de saber e compreender exercendo relativamente pequeno esforço para aprender. Desta forma apresentavam uma disposição insuficiente para aprendizagem significativa. Como objetivávamos que durante a realização das tarefas os discentes pudessem desenvolver significados precisos, reconciliando o material novo com conceitos já existentes e reformulando novas proposições em termos de seu próprio conhecimento e vocabulário idiossincrático, formando uma base adequada para aprendizagem subseqüente, contornamos as dificuldades propondo investigações históricas.

Buscamos, então, elevar a motivação intrínseca, usando uma reelaboração de um texto de fonte secundária da história da Matemática e organizando as aulas em atividades seqüenciadas, acreditando na possibilidade de garantir, desta forma, uma aprendizagem significativa. Colocando ênfase crescente sobre o valor do conhecimento e da compreensão do discente como objetivo maior, afastando deste qualquer benefício que pudesse produzir motivação extrínseca.

Nesse sentido dialogamos com a turma a respeito do desenvolvimento do trabalho, nos empenhamos em esclarecer aos discentes sobre a importância da geometria plana para o ensino fundamental, assim como sua escassa abordagem nas escolas públicas. E como a falta de conhecimentos prévios dificulta a compreensão e a apreensão significativa de assuntos subseqüentes, ressaltando, ainda, o prejuízo que este fato acarretará em aprendizagens atuais e futuras.

A partir do diálogo, sentimos de imediato o melhor interesse da turma na realização das atividades. A dinâmica de realização das tarefas em grupos com auxílio recíproco entre os integrantes, além de ter permitido a cooperação entre os discentes ajudou estes a compreenderem com mais facilidade os conteúdos. Os alunos trabalharam conjuntamente para realizarem as atividades, em grupos de quatro integrantes, demonstrando atitudes favoráveis ao aprendizado como delegação de tarefas, observação, sugestões, discussão e tomada de decisões.

> É, também, muito importante fazer com que o aluno investigue os conceitos por si mesmo, de preferência em conjunto com alguns colegas, em pequenos grupos. Assim, o professor não deveria mostrar a solução ao aluno e meramente solicitar que ele repita o que já foi feito. A atividade será muito mais proveitosa se o aluno tiver que refletir sobre o problema posto, investigando-o por si mesmo. Dessa forma, especialmente quando a investigação é feita em pequenos grupos, a estimulação intelectual será muito benéfica (FOSSA, 2006, p. 143-144).

Nessa perspectiva a proposta inicial era abordar textos que nos auxiliassem na construção do conceito do Teorema de Pitágoras. Porém ao dialogarmos com a turma a respeito de conhecimentos prévios em geometria, fomos surpreendidos em saber que grande parte desta não havia tido contato com o estudo da geometria. E os poucos que estudaram não haviam se apropriado significativamente dos conceitos, pois não recordavam, por exemplo, como calcular a área de um retângulo.

Poderíamos realizar o trabalho em outra turma, no entanto aceitamos o desafio, até mesmo pela responsabilidade docente que nos sensibilizou em auxiliar a turma na aquisição de conhecimentos geométricos.

A fase inicial da intervenção nos fez refletir e modificar o planejamento, enveredando pelas investigações históricas a respeito da construção do conceito de áreas de figuras planas, sem em princípio, desconsiderar o primeiro foco a generalização do Teorema de Pitágoras. Realizamos, então, uma construção dos conceitos de áreas do quadrado, do retângulo, do triângulo e do círculo que serviriam como conteúdos prévios necessários para as atividades planejadas. Tal objetivo nos fez incorrer em uma falha na apresentação da área do triângulo, visto que está foi calculada a partir da área do retângulo ao invés do paralelogramo. Desta forma iniciamos o trabalho analisando primeiramente uma reelaboração de um texto construído a partir de fragmentos de um capítulo do livro de Eves (2004) intitulado *A Matemática babilônica e egípcia.*

A seqüência começa em um nível bem geral com uma discussão sobre a natureza prática da geometria plana. O uso deste organizador torna desnecessário muitas das memorizações mecânicas às quais os alunos tantas vezes recorrem devido à exigência para que realizem cálculos de áreas de figuras planas antes de terem disponíveis um número suficiente de idéias âncoras.

Tal organizador foi proposto em função dos pré-requisitos que julgamos relevantes, de modo a promoverem os meios necessários a fim de que os novos conceitos a serem trabalhados possam se relacionar de forma não-arbitrária e substantiva com conceitos previamente existentes na estrutura cognitiva do aluno. Funcionando, então, como algo que contextualiza o aprendizado de medidas e áreas de figuras planas, mostrando formas de ligar estas novas idéias com outras já existentes. Além de servir como *ponte cognitiva*[14], ele pode ser altamente motivador para os alunos, uma vez que apresenta situações que auxiliem na compreensão dos conceitos em estudo.

4.2 A MATEMÁTICA BABILÔNICA E EGÍPCIA (EVES, 2004)

A Matemática primitiva necessitava de um embasamento prático para se desenvolver, e esse embasamento veio a surgir com a evolução para formas mais avançadas de sociedade. Foi ao longo de alguns dos grandes rios da África e da Ásia que se deu o aparecimento de novas formas de sociedade: o Nilo na África, o Tigre e o Eufrates na Ásia Ocidental, o Indo e depois o Ganges no sul da Ásia Central e o Howang Ho e depois o Yangtze na Ásia Oriental. Com as drenagens de pântanos, o controle de inundações e a irrigação, era possível transformar as terras ao longo desses rios em regiões agricultáveis ricas. Projetos extensivos dessa natureza não só serviram para ligar localidades anteriormente separadas, como também a engenharia, o financiamento e a administração desses projetos, e os propósitos que os motivaram, requeriam o desenvolvimento de considerável tecnologia e da Matemática concomitante. Assim, pode-se dizer que a Matemática

[14] Na concepção de Ausubel (1980) o organizador prévio é considerado como ponte cognitiva, pois tem a função de preencher o hiato entre aquilo que o aprendiz já conhece e o que precisa conhecer.

primitiva originou-se em certas áreas do Oriente Antigo primordialmente como uma ciência prática para assistir a atividades ligadas à agricultura e à engenharia.

A ênfase inicial da Matemática ocorreu na aritmética e na mensuração prática. Uma arte especial começou a tomar corpo para o cultivo, a aplicação e o ensino dessa ciência na prática. Nesse contexto, todavia, desenvolvem-se tendências no sentido da abstração e, até certo ponto, passou-se então a estudar a ciência por si mesma. Foi dessa maneira que a álgebra evoluiu a partir da aritmética e a geometria teórica originou-se da mensuração.

Há dificuldades em localizar no tempo as descobertas feitas no Oriente Antigo. Uma dessas dificuldades reside na natureza estática da estrutura social e no prolongado isolamento de certas áreas. Outra dificuldade se deve aos materiais de escrita sobre os quais as descobertas se preservaram. Os babilônicos usavam tábulas de argila cozida e os egípcios usavam pedra e papiros, tendo estes últimos felizmente existência duradoura em virtude do pouco comum clima seco da região. Mas os primitivos chineses e indianos usavam material muito perecível como casca de árvore e bambu. Assim, enquanto se dispõe de apreciável quantidade de informações definidas sobre a matemática dos antigos babilônicos e egípcios, muito pouco se conhece sobre essa matéria, com certo grau de certeza no que diz respeito à China e à Índia na mesma época.

A geometria babilônica se relacionava intimamente com a mensuração prática. De numerosos exemplos concretos infere-se que os babilônicos do período 2000 a. C. a 1600 a. C. deviam estar familiarizados com as regras gerais da área do retângulo, da área do triângulo retângulo e do triângulo isósceles (e talvez da área de um triângulo genérico), da área de um trapézio retângulo, do volume de um paralelepípedo reto-retângulo e, mais geralmente, do volume de um prisma reto de base trapezional. Considerava-se uma circunferência como o triplo de seu diâmetro e área do círculo como um duodécimo da área do quadrado de lado igual a circunferência respectiva.

São muito diferentes as histórias políticas do Egito e da Babilônia antigos. Esta última era aberta a invasões de povos vizinhos e, como conseqüência, havia períodos de muita turbulência em que um império sucedia a outro. O Egito antigo, ao contrário, manteve-se em isolamento, protegido naturalmente de invasões estrangeiras, governado pacífica e ininterruptamente por uma sucessão de dinastias.

Ambos eram sociedades essencialmente teocráticas governadas por burocratas ricos e poderosos, íntimos da classe sacerdotal. A maior parte do trabalho manual era feita por uma classe escrava numerosa, que na babilônia resultava principalmente da derrubada de um império e assunção do poder por algum povo invasor, e no Egito da importação deliberada de nações estrangeiras. Era principalmente essa classe escrava que cavava e mantinha em funcionamento o sistema de irrigação, construía as zigurates (construções em formato de pirâmides) na babilônia e erigia os grandes templos e as pirâmides do Egito. A agrimensura e a engenharia práticas, com sua Matemática concomitante, foram criadas para auxiliar no planejamento e na execução desses trabalhos.

1850 a. C. é a data aproximada do papiro de Moscou, um texto matemático que contém 25 problemas já antigos quando o manuscrito foi compilado. O papiro que foi adquirido no Egito em 1893 agora se encontra no museu de belas-artes de Moscou.

1650 a. C. é a data aproximada do papiro de Rhind, um texto matemático na forma de manual prático que contém 85 problemas copiados em escrita hierática pelo escriba Ahmes de um trabalho mais antigo. O papiro foi adquirido no Egito pelo egiptólogo escocês Henry Rhind, sendo mais tarde comprado pelo museu britânico. Esse papiro e o papiro de Moscou são nossas principais fontes de informação referentes à Matemática egípcia antiga.

Vinte e seis dos 110 problemas dos papiros de Moscou e Rhind são geométricos. Muitos deles decorrem de fórmulas de mensuração necessárias para o cálculo de áreas de terra a volume de grãos. Assume-se que a área de um círculo é igual à de um quadrado de lado igual a 8/9 do diâmetro. Investigações recentes parecem mostrar que os egípcios sabiam calcular a área de um triângulo qualquer.

4.3 LEITURA E INTERPRETAÇÃO DO TEXTO

Com base nos fatos históricos que acabaram de conhecer e depois de realizarem reflexões sobre os problemas que os egípcios e os babilônios enfrentaram para construírem uma geometria prática, os grupos foram orientados pelo professor a destacarem do texto frases ou palavras que desconheciam ou que lhes chamassem a atenção, merecendo destaque e discussões.

Dentre os destaques elencados pelos grupos evidenciamos os mais relevantes, aos nossos objetivos, os quais serviram de auxílio às atividades subseqüentes. Tais destaques foram apresentados sob forma de perguntas de termos desconhecidos, frases retiradas diretamente do texto e opiniões a partir de interpretações dos alunos.

- *O que é mensuração?*
- *A aplicação prática da Matemática, drenagem do pântano, controle de irrigações.*
- *A diferença entre a história política dos babilônios e dos egípcios.*
- *A geometria técnica originou-se da mensuração.*
- *A inteligência de calcular a área do círculo com a área do quadrado.*

Os grupos relataram principalmente sobre a praticidade da Matemática babilônica e egípcia, como as construções, a engenharia e a agricultura. Ao percebermos a motivação da turma na condução da atividade, solicitamos que esses recorressem ao dicionário para esclarecer os destaques que fizeram sob forma de perguntas como, por exemplo, a palavra mensuração a qual percebemos a necessidade da *formação do conceito,* uma vez que esta nos interessava, pois conduziram grande parte das atividades subseqüentes.

A aplicação prática da Matemática, evidenciada no texto, nos parece ter evidenciado aos discentes que as idéias primitivas desta área, muitas vezes, se originam a partir das necessidades humanas. As diferenças sociais e políticas demonstraram o quanto tais fatos repercutem nas criações em geral, e mais especificamente na Matemática, e como a produção do conhecimento evolui a partir das necessidades de cada civilização. Enfim não podemos desconsiderar o cenário cultural em que os matemáticos desenvolveram suas teorias, com suas crenças, concepções e hipóteses interligadas ao momento político, e a conjuntura social de seus tempos.

A palavra mais forte nesse contexto é mensuração, o que nos interessou para evidenciar como ela se apresentou e se apresenta na atualidade, objetivando que esta nos auxiliasse tanto em medidas de comprimento como nas medidas de área. Quando percebemos que um dos grupos pôs em destaque a tentativa de quadratura do círculo, realizada pelos babilônios e egípcios, identificamos que estava posta a premissa que conduziria nossas atividades, a partir de então, relativa a eleger uma unidade para medir todas as áreas de figuras planas.

As discussões acenaram para um possível cumprimento da função do organizador prévio de potencializar a criação de relações não-arbitrárias e substantivas entre os novos conceitos e as idéias que lhes servirão de âncora na estrutura cognitiva do aluno, dando uma visão geral do assunto que seria abordado em um nível mais alto de abstração. Neste caso, esta primeira atividade nos serviu como fator que motivou, incentivou e potencializou os estudantes a uma posterior *aprendizagem significativa por descoberta* da área de figuras planas.

A aprendizagem significativa por descoberta, em nossa concepção, é especialmente apropriado para aprendizagem em geometria euclidiana. Também é mais apropriado quando os pré-requisitos para adquirir grandes corpos de conhecimento não estão presentes. Também nos estágios não sofisticados da aprendizagem de qualquer assunto abstrato, o método da descoberta é extremamente útil (AUSUBEL; NOVAK; HANESIAN, 1980).

4.4 EXPLORANDO OS CONTEÚDOS MATEMÁTICOS DO TEXTO

Após a interpretação do texto os alunos estavam aptos a solucionar problemas desencadeadores, utilizando-se de conceitos recém comentados e de outros conceitos relevantes da geometria.

Nossa intenção nesta atividade foi de fornecer subsunçores necessários que fundamentassem os conteúdos a serem estudados, a partir do organizador histórico-matemático, visto anteriormente, visando uma aprendizagem significativa do conceito de unidade de medidas e áreas de figuras planas. Uma vez que a construção do conhecimento matemático a partir de uma situação-problema que os antigos matemáticos enfrentaram para resolver situações da época, serviram de conhecimento prévio para as situações que em seguida se defrontaram na sala de aula. Desta forma, a compreensão do objeto em estudo esteve ancorada por idéias claras e estáveis possibilitando, a partir de então, que se trabalhasse significativamente os novos conceitos.

Para desenvolver os exercícios sugeridos, foram utilizados os dois princípios propostos por Ausubel diferenciação progressiva e reconciliação integrativa. O primeiro porque as idéias mais gerais precederam os conceitos mais específicos abordados hierarquicamente e o segundo porque serão constantemente retomados os conceitos já subsumidos.

4.4.1 Em busca dos subsunçores necessários para ancoragem dos novos conhecimentos

Estabelecidos os conceitos mais gerais e inclusivos do assunto, medidas de comprimento e de área, e as suas dependências hierárquicas (Figura 4), propomos que os estudos sobre as áreas de figuras planas fossem efetuados por meio de efetivas ações realizadas em sala de aula, de modo que os alunos construíssem o conceito de área, utilizando os conceitos de unidade de medidas, tidos como conceito mais abrangente.

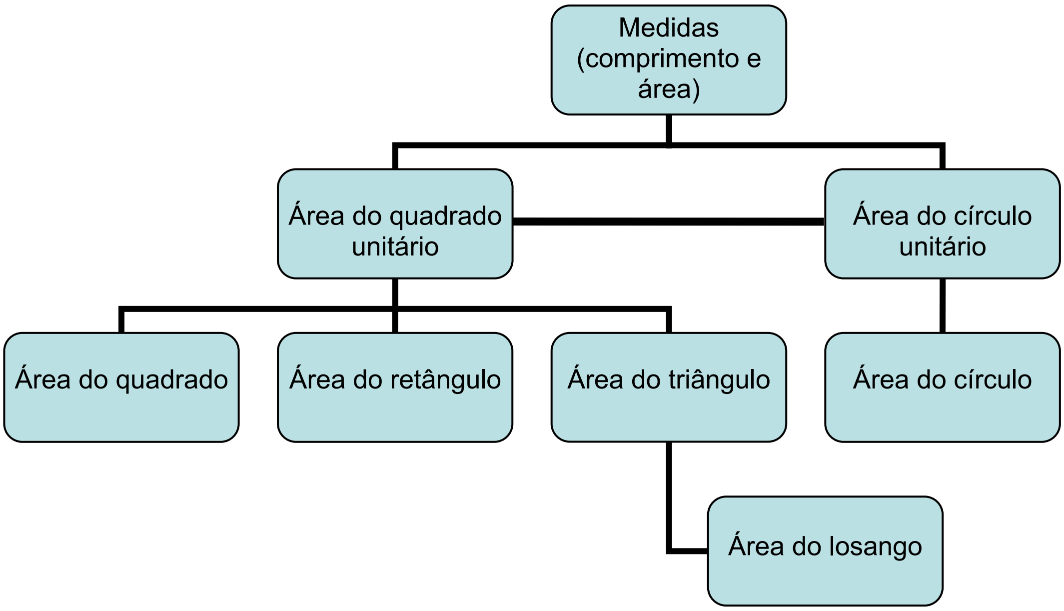


Figura 4: Hierarquia conceitual segundo as atividades desenvolvidas nesta proposta

Fonte: Elaborada pelo autor, 2006

Realizamos assim tarefas que progressivamente remontavam o ato de medições lineares e de área. Desta forma antes de iniciar a exploração do texto propriamente dita, solicitamos aos alunos, organizados em grupos, que medissem o comprimento e a largura da sala de aula utilizando o passo como unidade de medida.

Posteriormente, mediram o comprimento do quadro de escrever usando o palmo como unidade de medida. Estas tarefas remetem à aprendizagem caracterizada por Ausubel de *formação de conceitos* e objetivaram obter dos próprios alunos a construção dos conceitos de unidades de medidas de comprimento. Atividades como estas favorecem o conhecimento substancial, o que faz com que os discentes expressem com suas palavras, os conceitos em questão os quais constatamos serem similares às definições formais.

Em seguida interrogamos os alunos para saber se era adequado a medição auxiliada por parte do corpo humano. As respostas coadunavam em sentido geral com a resposta, a seguir, dada por um dos grupos.

– não, cada um tem a mão, o pé e o braço de tamanhos diferentes.

A simples constatação demonstrou coerência e entendimento da atividade, assim como aguçou a noção de medir e nos remeteu as premissas de se eleger uma unidade padrão, o que pôs em destaque o conteúdo específico das atividades subseqüentes. A constatação dos discentes, por mais óbvia e simples que pareça pressupõe que o desenvolvimento da compreensão clara, precisa e integrada do conceito em estudo depende das idéias centrais do conteúdo em estudo e que estas sejam aprendidas antes que se introduza os conceitos e as informações mais periféricas (AUSUBEL; NOVAK; HANESIAN, 1980); garantimos também a substantividade ao pedirmos aos alunos para formularem novas proposições com suas próprias interpretações

Em seguida fizemos a seguinte interrogação aos discentes, o que é medir? Os discentes escreveram e expuseram suas proposições. Mencionaremos aquelas que destacamos com objetivo de formalizar o conceito.

- *É a forma de ver o tamanho de alguma coisa.*
- *Uma forma de saber o tamanho de alguma coisa.*
- *É uma forma de saber as medidas das coisas, como por exemplo, uma caneta tem 14 cm.*
- *É quando usamos uma determinada coisa para saber qual o comprimento a largura e o tamanho que devemos medir.*

Grande parte da Matemática escolar encontra-se na forma de *proposições* que compreendem conceitos que na combinação têm algum significado composto.

Ausubel afirma que uma das evidências da aprendizagem significativa é que o aluno consiga relatar os atributos relevantes de um conceito ou os elementos essenciais de uma proposição. Nesta atividade os alunos formularam proposições com suas próprias interpretações. Verificamos, então, a ocorrência de aprendizagem significativa uma vez que não houve arbitrariedade, pois os discentes já haviam subsumido as idéias primeiras conseguindo, também, com interpretação própria conceituar o objeto em estudo.

Dialogando com os discentes a respeito das respostas destacadas, sobre a forma de ver o tamanho de alguma coisa e precisar de alguma coisa para saber o comprimento do que devemos medir. Apresentamos o conceito, mostrando que este não estava distante das concepções dos alunos, a partir de então foi possível concluir que medir é comparar, tomando como base uma unidade de medida. O diálogo evidenciou o entendimento dos discentes a respeito de medições. Após a apropriação do conceito de medir, demos seqüência às atividades a fim de obtermos a unidade de medida de área.

Passamos então à atividade de cálculo de área, contando as lajotas da sala de aula, estimando valores para área do quadro de escrever e das paredes. Discutindo a respeito de como medir áreas, extraímos dos relatos as seguintes conjecturas.

- *Calculando as áreas.*
- *Somando as áreas.*
- *Somar várias áreas.*
- *Podemos calcular a área pelo comprimento e depois pela largura.*

As respostas são indícios que os discentes compreenderam que podemos calcular áreas a partir da comparação com uma unidade de medida, e verificar aproximadamente quantas vezes esta unidade está contida nas outras. Estabelecendo assim a construção do conceito de medida de área, resgatando a maneira como as civilizações antigas tratavam medida de área, no sentido comparativo.

A atividade realizada para o cálculo de áreas, comparando figuras, trata-se de um claro exercício de investigação matemática visto que a história da Matemática nos mostra que a busca de uma unidade padrão vem de longa data. Como podemos identificar nos problemas 51 e 52 do Papiro Ahmes mostrando que as áreas do triângulo isósceles e do trapézio isósceles eram remontadas de maneira a se transformarem em retângulos (BOYER, 2003), simplificando o cálculo das áreas.

Utilizamos o conceito subsunçor “unidade de medida” para ancorar a nova idéia, “medida de área”, que em nosso entender foi descoberta pelos alunos e incorporada á estrutura cognitiva dos mesmos. A tarefa prioritária dessa atividade, em outras palavras, foi descobrir o conceito de medida de área e estabelecer em que circunstância o novo conhecimento estava pré-formado ou decorreria de uma construção investigativa efetiva.

Nesta primeira fase da aprendizagem significativa por descoberta, o aluno foi convidado a reagrupar informações, integrá-las à estrutura cognitiva existente, reorganizar e transformar a combinação integrada, de tal forma que originassem a descoberta de uma relação que tratava a grandeza medida no sentido comparativo. Concluída a aprendizagem por descoberta, verificamos nas atividades posteriores que, o conteúdo descoberto tornou-se significativo, apresentando-se apto para ancorar novos conhecimentos.

A partir das respostas dadas pelos discentes retomando o conceito de medida de áreas de figuras planas, procurando satisfazer os pressupostos ausubelianos, de não arbitrariedade e substantividade evidenciando a compreensão do conceito em estudo. Foi possível concluir esta etapa apresentando o conceito de área do quadrado unitário, a partir das proposições dos alunos (Figura 5).

Identificando, por conseguinte, uma medida básica de área, que denominaremos de *quadrado unitário* sendo este o quadrado cujo lado mede uma unidade de comprimento (LIMA et al., 2005). O procedimento para o calculo consiste em comparar uma dada superfície com a de uma outra figura tomada como unidade, com isso, determinamos o número de vezes que a figura contém tal unidade, no caso, de área (BRITO; CARVALHO, 2005).

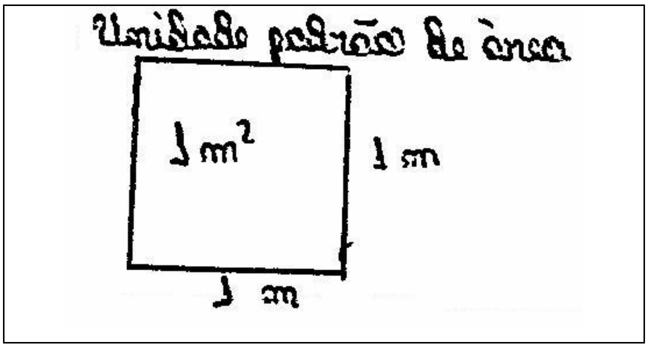


Figura 5: Unidade padrão de área

Fonte: Construção dos alunos, 2006

Para abordarmos as outras unidades, discutimos com os alunos sobre quais as unidades de comprimento mais apropriadas para medir uma caneta, o comprimento do quadro, a largura da sala de aula, a extensão de uma estrada etc. As respostas foram coerentes e satisfatórias, sendo assim foi possível prosseguir com raciocínio análogo referente a medidas de superfície.

A partir disso direcionamos os diálogos com a turma no seguinte sentido se o lado do quadrado for de 1cm, a unidade de área será chamada de centímetro quadrado e representada por $1cm^2$ para medir, por exemplo, a superfície de um caderno. Naturalmente que, no caso do quadrado, para cada unidade de comprimento, existe uma unidade de área correspondente. Assim, o metro quadrado (m^2) pode ser usado para medir a superfície da sala de aula, do quadro de escrever, o milímetro quadrado (mm^2), o quilômetro quadrado (km^2) são outras unidades de área utilizadas quando forem convenientes para o sujeito que faz a medição.

4.4.2 Áreas do quadrado, do retângulo e do triângulo

As idéias apreendidas anteriormente serviram de subsunçores e subordinaram as atividades subseqüentes, uma vez que as medidas de comprimento e de área (do quadrado unitário) são os elementos geométricos mais inclusivos e por esta razão são estudados em primeiro lugar, e em seguida, foi possível dar seqüência a conceitos específicos como as áreas das figuras planas. Neste caso, ressaltamos a importância de conceituar de forma precisa estas idéias âncoras, pois estas consistências das idéias primeiras, segundo Ausubel, garantem a assimilação significativa no estudo de áreas.

A partir do quadrado de área unitária, realizamos atividades sobre o cálculo das áreas do quadrado, do retângulo e do triângulo (Figura 6). Pedimos aos discentes que determinassem as áreas a partir da unidade padrão que irá subordinar de forma progressiva as outras áreas, com intento maior de obtermos generalizações para o cálculo de áreas destas figuras (Figura 7).

Vejamos os procedimentos, realizados por grupos diferentes, durante a realização da tarefa.

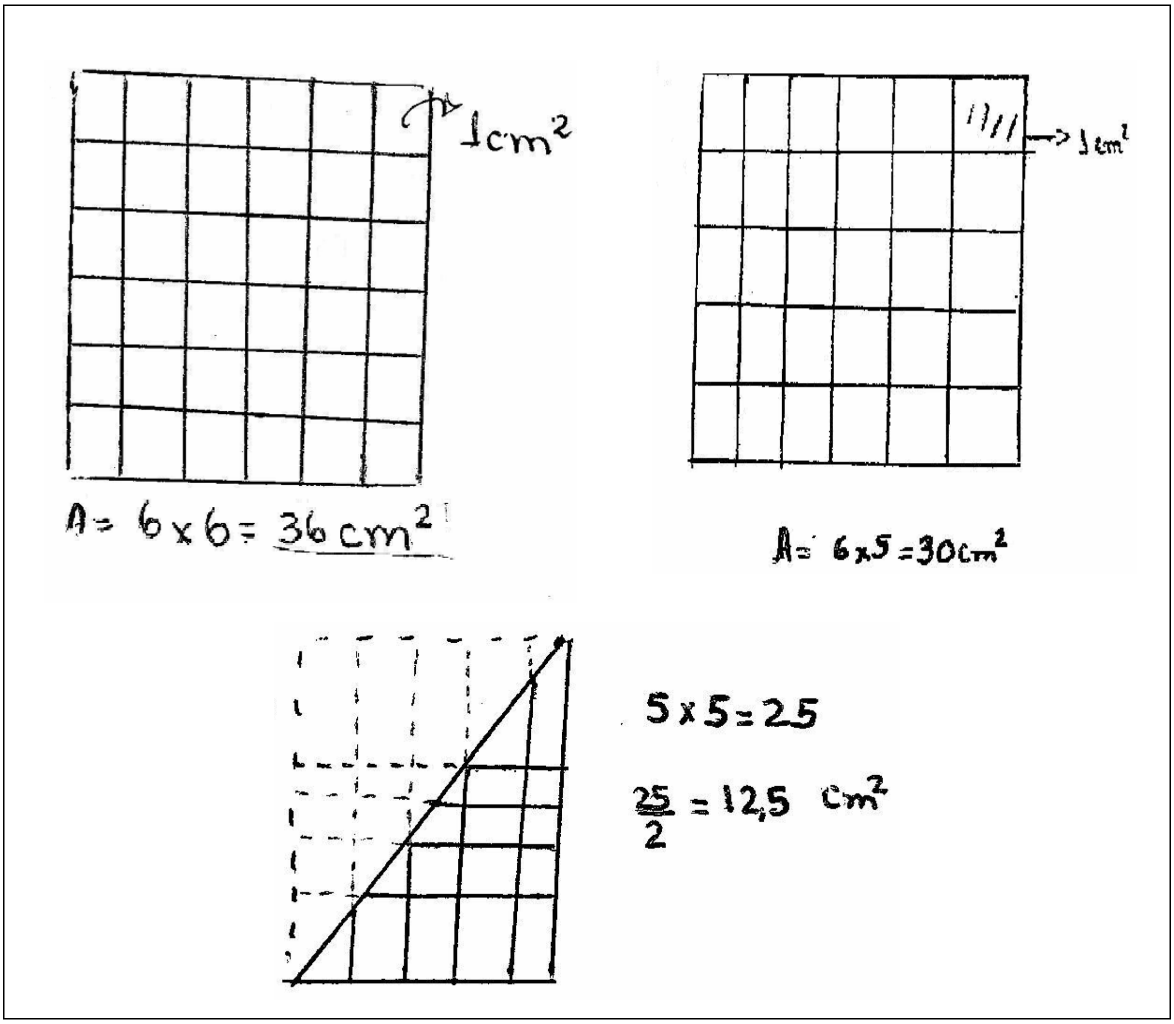


Figura 6: Cálculo de áreas a partir da unidade padrão

Fonte: Construção dos alunos, 2006

Nesta atividade observamos que a unidade de área foi bem utilizada, sobretudo para estimativa da área do triângulo. O subsunçor quadrado unitário foi claro e estável, por isso, pode ancorar os novos conhecimentos, ao ancorar neste subsunçor a nova informação o modificou e o reelaborou. O resultado foi um subsunçor com maior poder de generalidade, ou seja, a partir da atividade anterior, o quadrado unitário será visto como um objeto matemático capaz de auxiliar na construção de novos conceitos relacionados ao cálculo de áreas.

Os conceitos e as proposições aprendidos anteriormente precisaram ser modificados e os novos significados foram adicionados à estrutura cognitiva. Caso os discentes não tivessem percebido as diferenças e as semelhanças entre a área do quadrado e as de outras figuras eles tenderiam a generalizar erradamente o cálculo dessas novas áreas.

Dando seqüência às atividades, a seguinte tarefa sugeriu aos discentes que buscassem formas práticas para o cálculo sem precisar contar quadradinhos otimizando o cálculo, buscando uma generalização (Figura 7). Verificamos na realização desta atividade, a diferenciação progressiva do conceito de área, evidenciada nos procedimentos dos cálculos de áreas, que nos conduziram à reconciliação integrativa, para assim podermos generalizar os cálculos das áreas em questão.

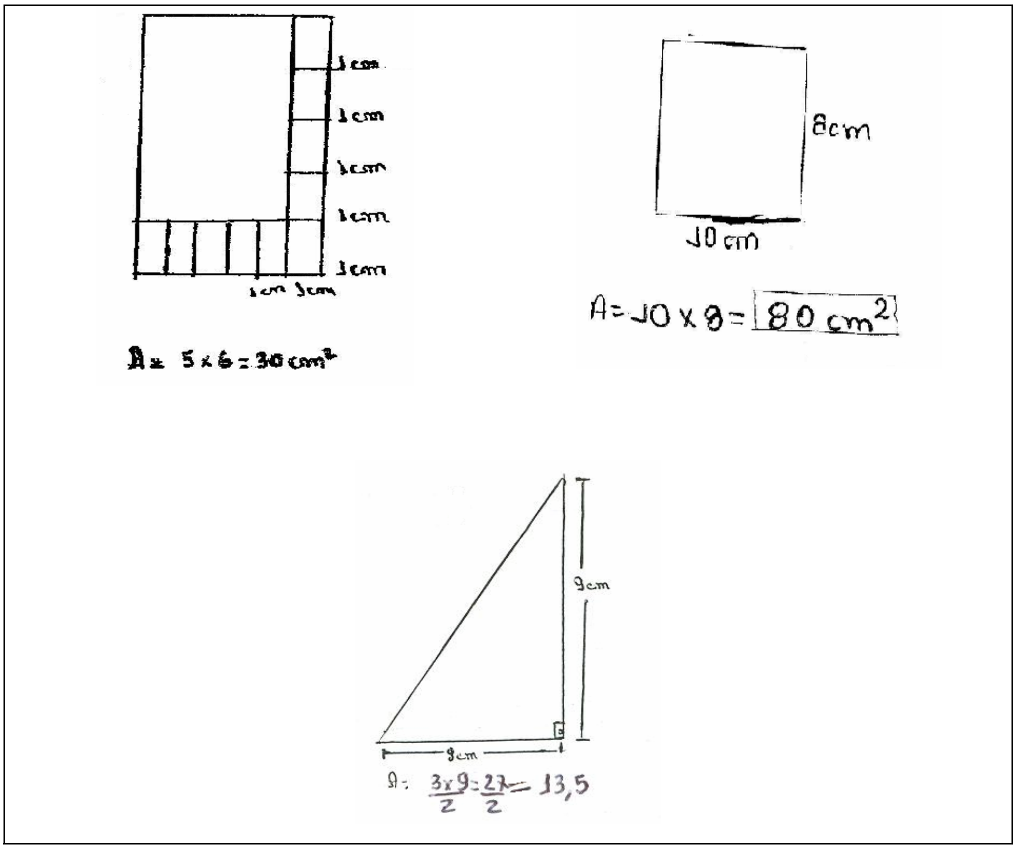


Figura 7: Generalização gradual do cálculo de áreas

Fonte: Construção dos alunos, 2006

Progressivamente os alunos abandonaram o auxílio do quadrado unitário, visto que a ordem hierárquica das atividades lhes exigiram novas estratégias para o cálculo das áreas, induzidos a otimizarem os cálculos, o que os possibilitou generalizar as fórmulas da área do quadrado e do retângulo. Todavia a generalização da área do triângulo, por uma falha em nossa intervenção, foi obtida através da divisão do retângulo em duas partes iguais, o que nos fornece apenas a área do triângulo retângulo, quando sabemos que no caso mais geral o paralelogramo é a figura que nos possibilita obter a fórmula generalizada para calcular a área do triângulo. A falha foi cometida devido à nossa preocupação inicial que objetivava uma investigação histórica do Teorema de Pitágoras, fato esse que nos fez omitir o cálculo da área do paralelogramo, comprometendo, de certa forma, a generalização do cálculo da área do triângulo, que não deixou de ser calculada corretamente apesar da omissão.

A socialização das idéias possibilitou que a turma chegasse às fórmulas das áreas das figuras em questão, vale ressaltar que a seqüência hierárquica facilitou a generalização das áreas.

Acreditamos que estes procedimentos, realizados pelos alunos, propiciaram *a aprendizagem subordinativa correlativa* do novo conhecimento, pois foram realizados por meio da extensão de uma idéia já desenvolvida, em que os valores das áreas do quadrado, retângulo e triângulo foram relacionados com a medida padrão de área, no caso o quadrado unitário, já trabalhado anteriormente. Tais procedimentos foram conduzidos, como já destacamos pelos princípios de *diferenciação progressiva e reconciliação integrativa*, uma vez que facilitaram a ampliação do que já havia sido estudado. Aumentando a especificidade dos conceitos, destacando as semelhanças e as diferenças existentes nos cálculos de cada uma das áreas a partir da unidade padrão.

4.4.3 Área do círculo unitário

Dando seqüência nas atividades os alunos foram orientados para, a partir do texto, calcularem a área do círculo unitário de acordo com os procedimentos babilônicos e egípcios[15]. Um dos grupos procedeu da seguinte maneira (Figura 8):

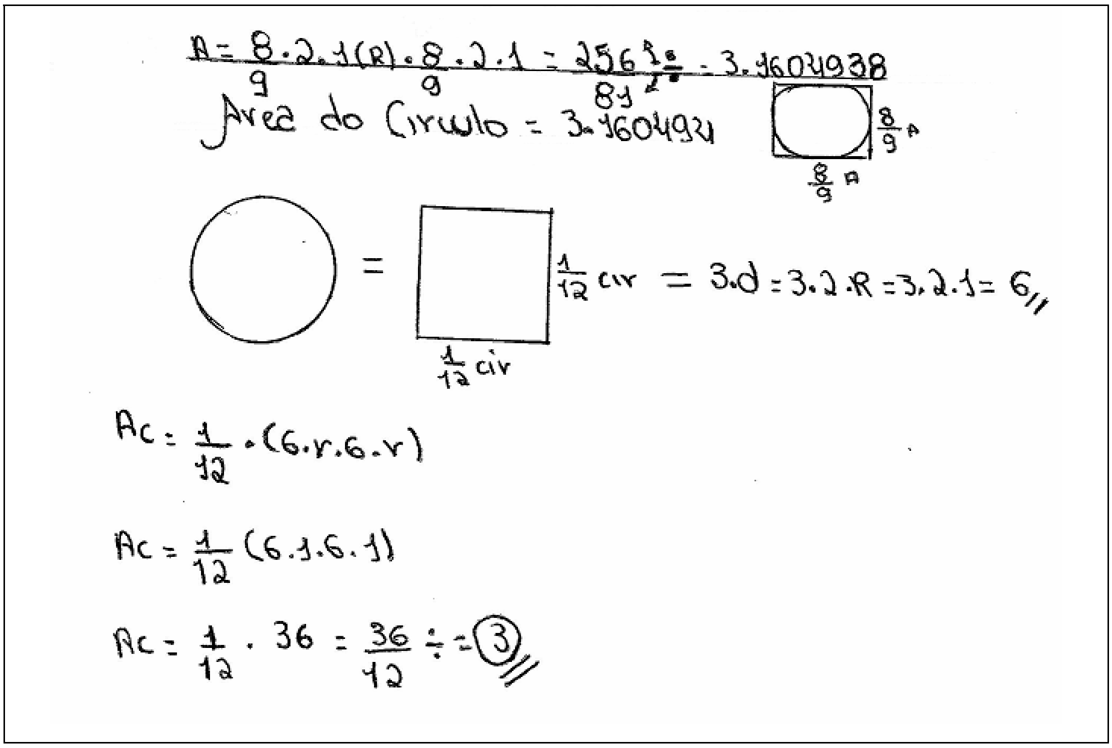


Figura 8: Quadratura do círculo 1

Fonte: Construção dos alunos, 2006

Em seguida a esta atividade solicitamos que os discentes inscrevessem um círculo unitário num quadrado de lado igual ao diâmetro do círculo unitário; dividindo cada lado do quadrado em 3 partes iguais e a partir dos nove novos quadrados formados, obtivessem uma estimativa para a área do círculo. Adaptado do problema 48 do papiro de Ahmes, que segundo Boyer (2003), provavelmente forneça sugestões sobre como os egípcios chegaram à sua área do círculo. Nesse problema o escriba formou um octógono a partir de um quadrado de lado nove unidades dividindo os lotes em três e cortando os quatro triângulos isósceles dos cantos, cada um tendo área de 4 ½ unidades) (Figura 9).

[15] Os babilônios consideravam uma circunferência como o triplo de seu diâmetro e a área do círculo como um duodécimo da área do quadrado de lado igual à circunferência respectiva; os egípcios assumiam a área de um círculo igual à de um quadrado de lado igual a 8/9 do diâmetro.

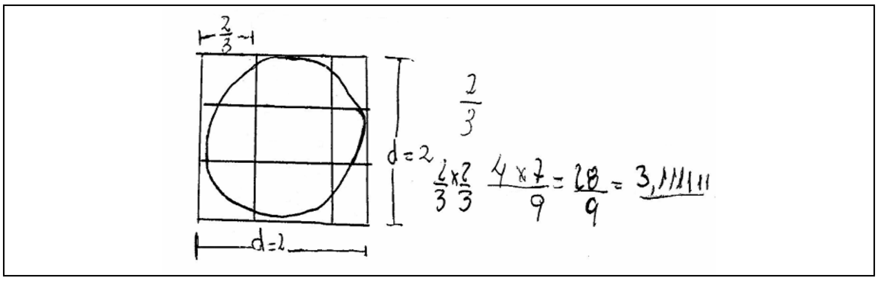


Figura 9: Quadratura do círculo 2

Fonte: Construção dos alunos com base no problema 48 do Papiro de Ahmes

Finalizando as tarefas relacionadas a tentativa de obter uma aproximação da área do círculo a partir da área do quadrado, os alunos calcularam as áreas dos quadrados inscritos e circunscritos ao círculo de raio **r** (Figura 10). Como não havíamos destacado a área do losango, então os discentes calcularam o quadrado inscrito a partir de quatro vezes a área de um triângulo de base **r** e altura **r**. Para o cálculo da área do quadrado inscrito (losango) tornar-se mais clara, discriminável e diferenciada, houve a interação com seu subordinador, a área do triângulo, e com o significado análogo estabelecido e diferenciado, deve, então, manter a sua identidade por mais tempo que a simples mecanização da fórmula.

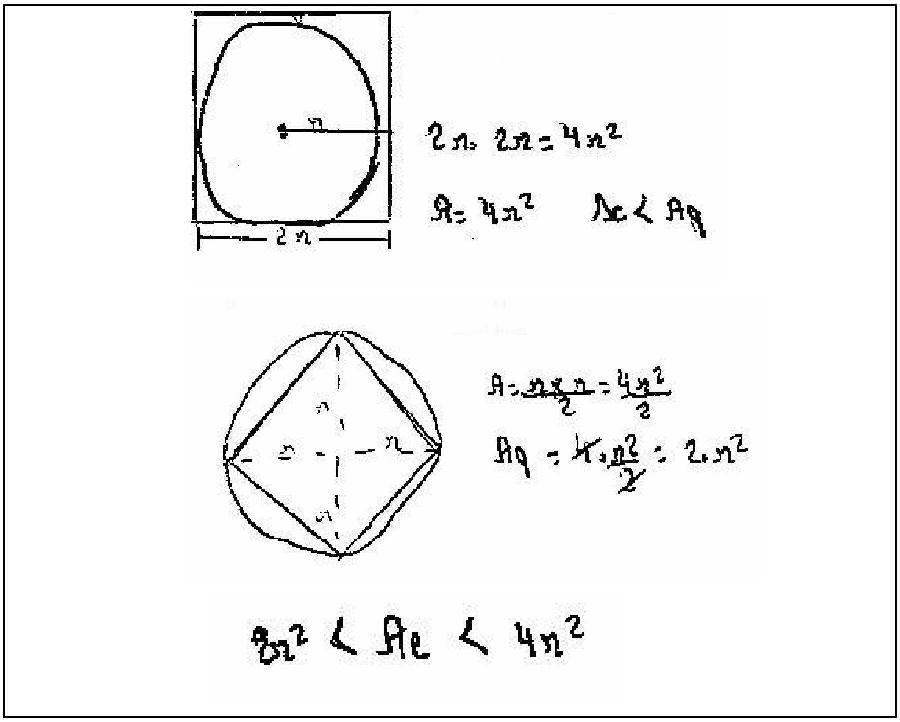


Figura 10: Quadratura do círculo 3

Fonte: Construção dos alunos, 2006

Os alunos demonstraram a incorporação da idéia do cálculo de áreas a partir de unidades padrão de acordo com a conveniência de unidade de medida generalizaram, como vimos, o cálculo da área do losango a partir da área conhecida do triângulo.

Dialogando com a turma interrogamos estes a respeito da comparação entre as áreas dos quadrados e dos círculos de onde concluímos em comum acordo que a área do círculo de raio **r** é um número maior que $\mathbf{2r^2}$ e menor que $\mathbf{4r^2}$; $2r^2 < A_c < 4r^2$, ou seja, o produto de um número próximo de 3 por r^2.

Verificamos que a construção do conceito de área do círculo unitário progressivamente foi se consolidando. Ausubel, Novak e Hanesian (1980) nos afirmam que grande parte da assimilação de conceitos dentro do ambiente escolar é conduzida por aprendizagem combinatória.

Dessa forma, realizou-se uma *aprendizagem combinatória*, pois as necessidades que motivaram a relação entre a área do quadrado e a do círculo, apontam para uma expansão do que haviam estudado sobre quadrados, possibilitando estimar um valor aproximado para área do círculo unitário. Na aprendizagem combinatória, as idéias estabelecidas na estrutura cognitiva evidenciaram as relações existentes entre as áreas do quadrado e do círculo, no curso da aprendizagem do conceito de área do círculo. Esta combinação dos elementos existentes na estrutura cognitiva assumiu uma nova organização e, portanto novo significado. Esta recombinação dos elementos existentes na estrutura cognitiva evidencia o princípio da *reconciliação integrativa.*

A aprendizagem destas novas proposições, como também conceitos, induziu a uma categoria de significados combinatórios, os quais são potencialmente significativos porque consistem de combinações sensíveis de idéias previamente aprendidas que puderam relacionar-se não arbitrariamente ao amplo armazenamento de conteúdo, geralmente relevante, na estrutura cognitiva, em virtude de sua congruência geral com este conteúdo como um todo.

A maioria das generalizações novas que o estudante aprende em matemática constituem exemplo de aprendizagem combinatória (AUSUBEL; NOVAK; HANESIAN, 1980). Embora adquiridas com maior dificuldade, em relação à aprendizagem subordinativa ou superordenada manifestam uma vez adequadamente formulada, a mesma estabilidade interna como qualquer idéia inclusiva ou superordenada na estrutura cognitiva. Supomos, então, que a idéia ancora para generalizar o cálculo da área do círculo estava, assim, consolidada.

4.4.4 A razão de semelhança entre áreas

Esta atividade consta de pares de figuras planas de mesma forma. Os alunos foram orientados a indicarem as dimensões das figuras menores e ao lado de cada figura havia outra da mesma forma, porém ampliada. A partir das dimensões das figuras menores escolheram um fator de multiplicação objetivando ampliar igualmente cada uma destas dimensões garantindo assim a semelhança entre as figuras. Em seguida calcularam as áreas de cada figura e a razão entre a maior área e a menor. Na seqüência calcularam a área maior em função da menor, escrevendo em forma de potência o número de vezes que a maior excedia a menor. Vejamos, por exemplo, os procedimentos de um dos grupos, para o retângulo (Figura 11).

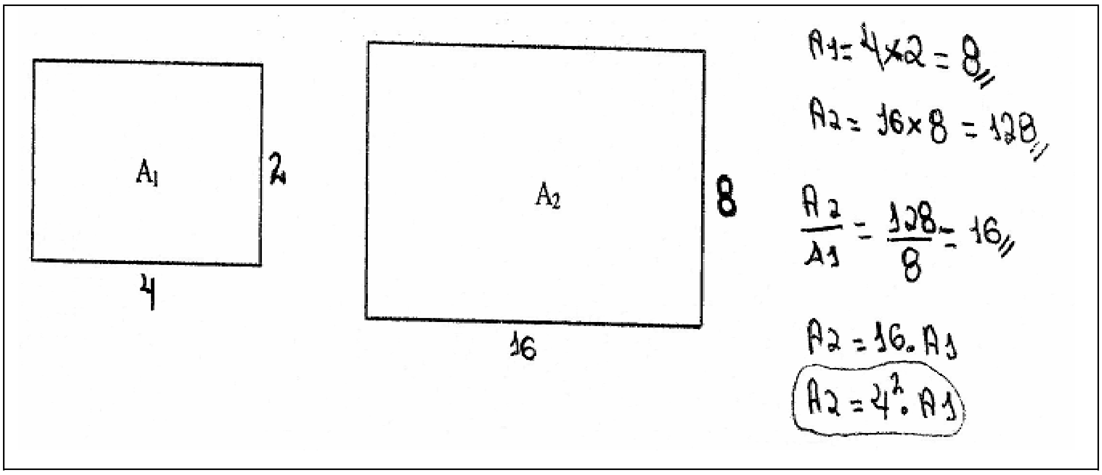


Figura 11: Retângulos semelhantes

Fonte: Elaborada pelo autor, 2006

Como se pode observar esta atividade não esteve ancorada nos conceitos subsunçores até aqui utilizados. Como os alunos não haviam estudado especificamente semelhança, fizemos discussões sobre as peculiaridades de figuras semelhantes como forma, ampliação, redução etc., que foi suficiente para realização da atividade.

Os conceitos de razão e proporcionalidade já eram do conhecimento dos alunos e a partir destas idéias relevantes menos inclusivas foi possível concluirmos a tarefa. Para Ausubel, realizou-se assim uma *aprendizagem superordenada*, pois foram utilizadas as idéias particulares menos inclusivas numa seqüência de modo a desencadear uma nova relação matemática de acordo com os princípios da diferenciação progressiva, e da reconciliação interativa. Isto quer dizer que os significados dos novos conceitos e proposições foram apresentados de forma clara, e diferenciáveis, a trama de conhecimentos aprendidos desta forma permanece integrada e com pouca ou nenhuma contradição e, portanto, é viável para assimilação e retenção dos conceitos.

Dando seqüência na atividade os grupos realizaram o mesmo procedimento para o quadrado e o triângulo, vejamos como procederam duas das equipes (Figura 12).

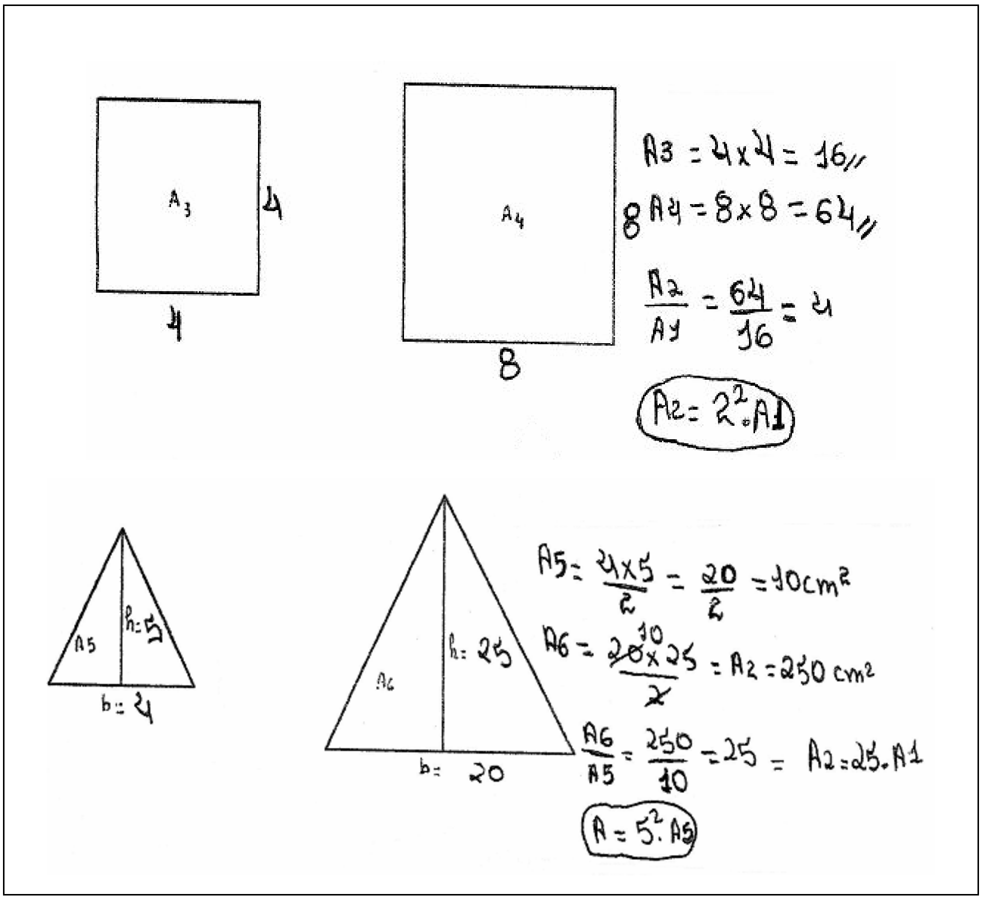


Figura 12: Triângulos semelhantes

Fonte: Elaborada pelo autor, 2006

Isto mostra que os significados dos novos conceitos e proposições foram apresentados de forma clara, e diferenciáveis, e a trama de conhecimentos aprendidos desta forma permanece integrada e com pouca ou nenhuma contradição e, portanto, é viável para assimilação e retenção dos conceitos.

A última figura é um círculo de raio unitário e ao lado outro círculo de raio escolhido pelos grupos, que de imediato não obtiveram êxito na resolução. Por conseguinte interferimos na atividade, alertando que observassem as questões anteriores a fim de perceberem que a razão entre as áreas é o quadrado da razão de semelhança, e o fator de multiplicação que ampliava o círculo de raio unitário era o próprio raio do círculo, escolhido por eles. Recordando que a área do círculo unitário já havia sido estimada em atividades anteriores. Tomando como referência o mesmo grupo da atividade anterior obtivemos (Figura 13):

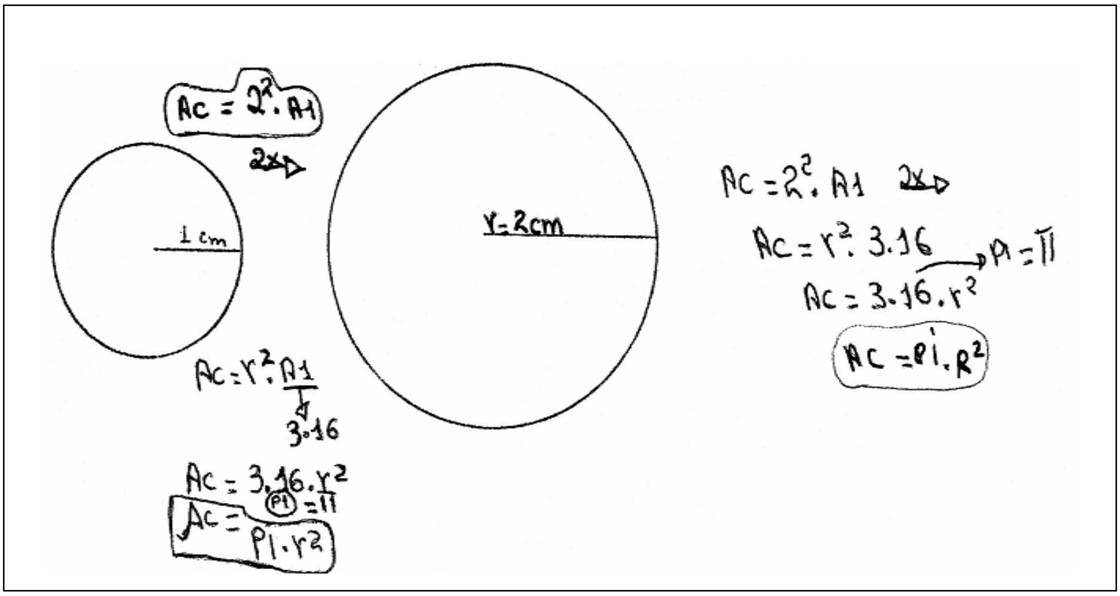


Figura 13: Semelhança dos círculos

Fonte: Elaborada pelo autor, 2006

As tentativas de quadrar o círculo estão ligadas diretamente com o cálculo do "π", relatamos aos discentes que o valor que encontramos para a área do círculo unitário é representado pela letra do alfabeto grego "π". Destacamos algumas informações sobre a constante π, que fornecemos a turma a nível de comentário.

Vimos que no Egito, foi atribuído ao π um valor próximo de 3,16 e na Babilônia somente 3, mas é bom saber que π, além de representar a área do círculo unitário, também indica o valor da razão entre a circunferência de qualquer círculo e seu diâmetro. Podemos também obter um aproximação para π calculando os perímetros dos hexágonos regulares inscritos e circunscritos, em um círculo de raio unitário. Por aplicações sucessivas desse processo, podemos calcular os perímetros dos polígonos regulares inscritos e circunscritos de doze, vinte e quatro, quarenta e oito, e noventa e seis lados e, dessa forma, obter limites cada vez mais próximos de π. Foi isso que essencialmente fez Arquimedes, chegando a conclusão de que π está entre 223/71 e 22/7 (EVES, 2004).

É uma das mais antigas constantes matemáticas que se conhece. Apesar disso, ele ainda é fonte de pesquisas em diversas áreas; com efeito, π é um dos poucos objetos estudados pelos povos da Antiguidade, há mais de 2000 anos, que ainda continua sendo pesquisado. Muitos foram os matemáticos que dedicaram parte de suas vidas ao seu cálculo. A simbologia atual foi aceita após ser utilizado pelo matemático Leonardo Euler em 1737 (EVES, 2004).

Mostramos que a dificuldade de se calcular π era devido a sua irracionalidade, isto é não poder ser expresso como uma fração entre números inteiros. A prova da irracionalidade de π veio só com Lambert, em 1761 (EVES, 2004).

Atualmente, já se calculou π com bilhões de casas decimais, com auxílio de computadores. Mostramos que a maioria das calculadoras científicas possuem uma tecla que mostra o π com várias casas decimais.

A atividade de semelhança foi realizada, a fim de determinarmos a fórmula da área do círculo e para isso precisamos reconciliar as atividades anteriores ancorando os procedimentos em conceitos já subsumidos como o da área do círculo unitário.

Durante o processo de assimilação dos conceitos, os aprendizes entraram em contato com os atributos essenciais dos novos conceitos e relacionaram esses atributos a idéias relevantes estabelecidas na estrutura cognitiva. Nesta etapa os alunos se encontram em uma fase de maturidade que lhes permitiu relacionar à estrutura cognitiva os atributos essenciais abstratos das novas idéias genéricas, caracterizando assim *a assimilação dos conceitos* estudados.

As tarefas nos possibilitaram a construção das fórmulas para os cálculos das áreas em questão de forma significativa e contextualizada. A compreensão das fórmulas se deu por meio da contextualização histórica e de atividades apoiadas na *diferenciação progressiva* dos conceitos, assim como em sua *reconciliação* *integrativa*, pois a cada momento retomávamos conceitos anteriores identificando sua semelhança com o novo conceito diferenciando-os. As atividades postas não foram meros exercícios, que induziram o aluno a fixar mecanicamente as fórmulas, pois apresentaram caráter investigativo o que possibilitou aos alunos a valorização do trabalho realizado e tendo compreensão que as fórmulas otimizam o processo de cálculos, evidenciando o valor da utilização destas.

A organização seqüencial das atividades sugeridas proporcionou constantes retomadas de conceitos já subsumidos, de forma que essa diferenciação e reconciliação simultâneas possibilitaram a revisão e a fixação dos conceitos de áreas de figuras planas. Somente depois de toda construção, organização e sistematização das idéias desenvolvidas é que chegamos à definição formal da fórmula da área do círculo. Desta forma, o aluno construiu o conceito estudado sem que tenhamos iniciado o assunto pela apresentação de fórmulas já sistematizadas. Por conseguinte os discentes realizaram uma aprendizagem por *descoberta significativa*.

Vale destacar também o tratamento dado aos valores aproximados nas tentativas de determinar a área do círculo, fato este que evidenciou a importância que devemos ter tanto do ponto de vista histórico como do atual a respeito de cálculos estimados. Evidenciando também que o grau de precisão na aproximação não é uma boa medida das realizações matemáticas arquitetônicas, e por este motivo não devemos supor que as obras egípcias apresentavam aproximações grosseiras (BOYER, 2003). A precisão babilônica não é bem inferior à medida egípcia. No entanto a contagem de casas decimais nas aproximações para “π” não é uma medida adequada da estatura geométrica de uma civilização (BOYER, 2003).

4.5 AVALIANDO PROCEDIMENTOS

Realizamos duas avaliações, uma individual outra em grupo, que nos serviu para o fortalecimento, a consolidação e a ampliação dos conceitos estudados, nosso intento nesta tarefa como já destacamos, não foi, somente, de analisar desempenho, erros e acertos, e sim priorizarmos identificar os procedimentos utilizados, conhecimentos mobilizados, dificuldades e facilidades encontradas nas resoluções.

Em uma aula antes da realização das tarefas realizamos discussões a respeito da composição de figuras, cuja área seria a soma das áreas de cada uma das figuras, de áreas vazadas cuja área final seria a subtração (como a área da coroa circular) e figuras que representavam partes como, por exemplo, um quarto de uma coroa circular. Os discentes já aprenderam como se calcula a área do círculo; esse conceito, então, foi modificado para incluir, por exemplo, o cálculo da área da coroa circular.

Confirmando a proposição ausubeliana que o conceito subsunçor, no caso, área do círculo (assimilado via organizador prévio) apresenta maior poder de generalidade e inclusividade. O conceito de áreas de figuras planas em especial do círculo subordina as estratégias de soluções das questões abaixo.

As questões seguintes (Figuras 14, 15, 16, 17 e 18) foram realizadas nos mesmos grupos de trabalho, sendo retiradas do livro de Imenes e Lellis (2002, p. 232).

1. Calcule a área aproximada da pista de atletismo. Os trechos circulares são metades de círculos.

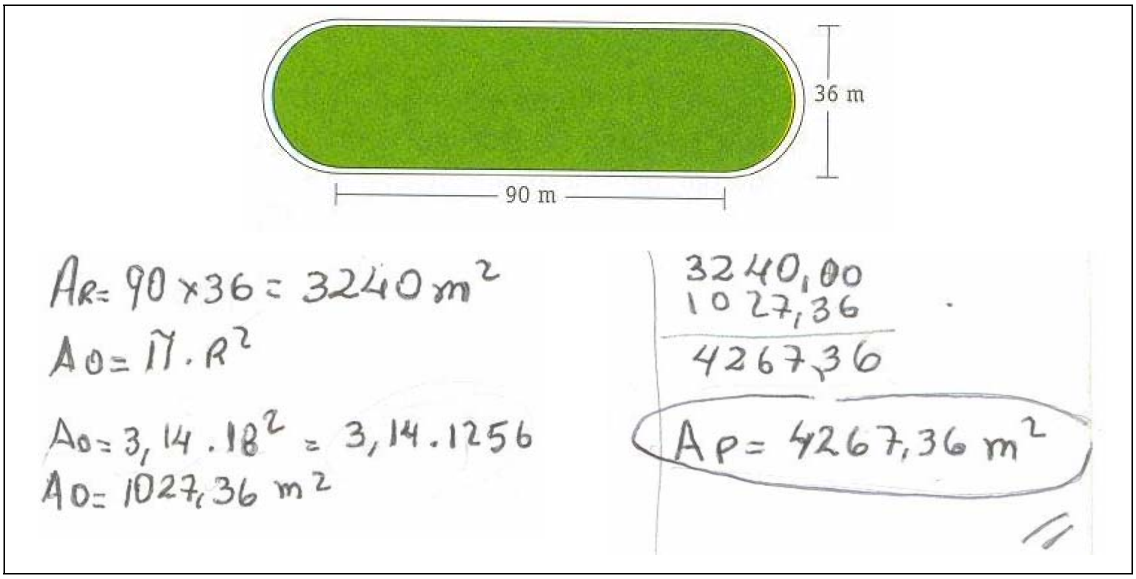


Figura 14: Representação de uma pista de atletismo

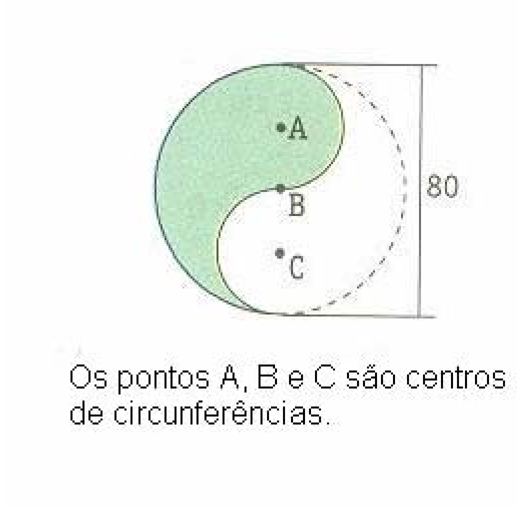
Fonte: Imenes e Lellis (2002)

Esta primeira questão não gerou grandes dificuldades, pois todos os grupos perceberam que a figura foi composta por um retângulo e dois semicírculos (tratados como um círculo inteiro), assim a resolveram satisfatoriamente, como evidenciamos acima na solução de um dos grupos. As características da figura relacionaram-se significativamente com o conceito de área do círculo e do retângulo já subsumidos, o que, possivelmente, possibilitou o bom desempenho na resolução do problema.

Analisaremos as estratégias de resoluções das questões seguintes, comentaremos em seguida as resoluções de alguns grupos.

2. Calcule a área aproximada de cada figura.

A)



$$A = \frac{\pi \cdot R^2}{2}$$
$$A = \frac{3.14 \cdot 40^2}{2}$$
$$A = \frac{3.14 \cdot 1600}{2}$$
$$A = \frac{5024,00}{2}$$
$$A = 2512,00$$

Figura 15: Área hachurada 1

Fonte: Imenes e Lellis (2002)

Questão dois, item "a"

Professor - *O desenho como um todo representa que figura?*

Alunos - *Um círculo.*

Professor - *Que parte do círculo esta pintada?*

Alunos – *Metade.*

Assim, de acordo com o diálogo evidenciado acima o grupo em questão utilizou a fórmula da área do círculo e dividiram-na por dois, como se pode comprovar na solução vista anteriormente. Não sendo diferente nos outros grupos, que também buscaram auxílio com colegas de equipes diferentes, não precisando por vezes, do auxílio do professor.

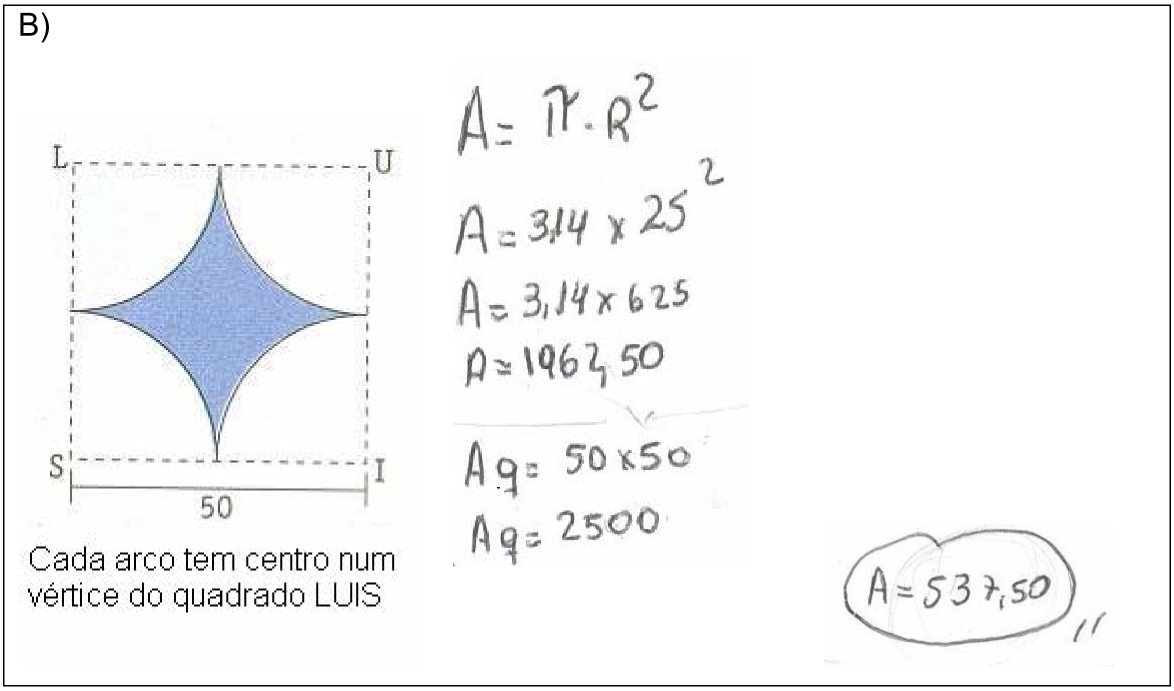


Figura 16: Área hachurada 2

Fonte: Imenes e Lellis (2002)

Questão dois, item “b”

Pedimos aos alunos que observassem não a parte pintada, mas sim a parte vazada.

Professor - *Que figura está representada em cada uma das partes do canto do desenho?*

Alunos - *A quarta parte de uma circunferência.*

Professor - *E se juntarmos todas?*

Alunos - *Teremos uma circunferência completa, dentro de um quadrado.*

Daí calcularam como podemos observar, anteriormente em um dos grupos, a área do círculo de raio 25 e subtraíram da área do quadrado de lado 50.

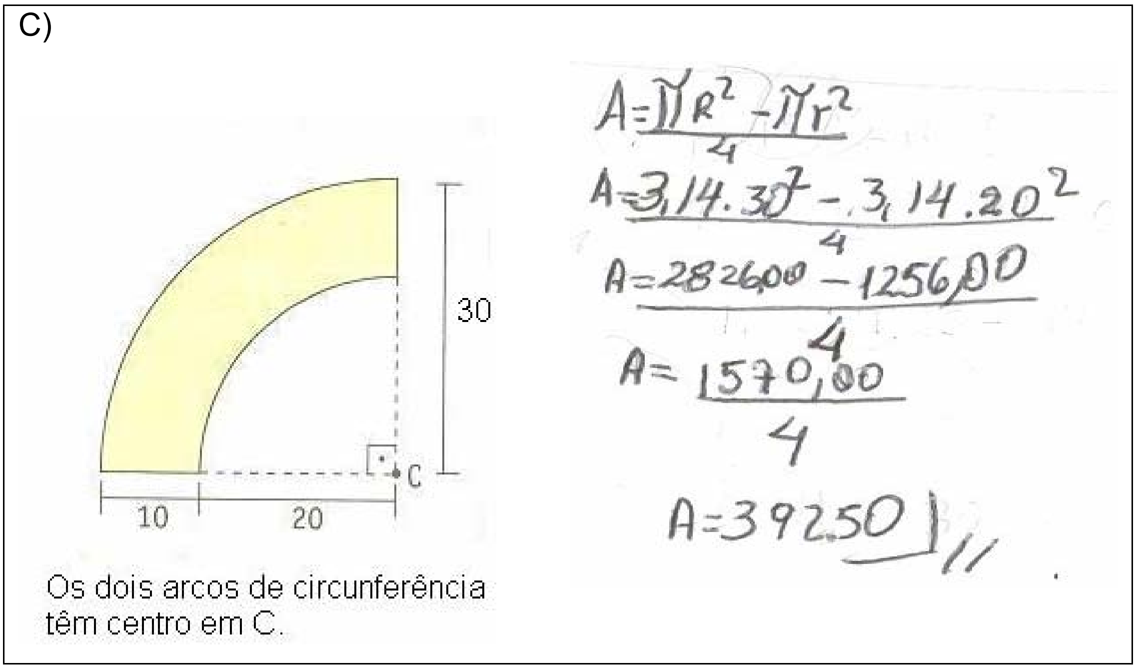


Figura 17: Área hachurada 3

Fonte: Imenes e Lellis (2002)

Questão dois, item “c”

Como já havíamos comentado, em aulas anteriores, a respeito da área da coroa circular, somente com a idéia da subtração, sem reduzir a fórmula conhecida da coroa, não houve grandes dificuldades para eles perceberem que se tratava da quarta parte da coroa.

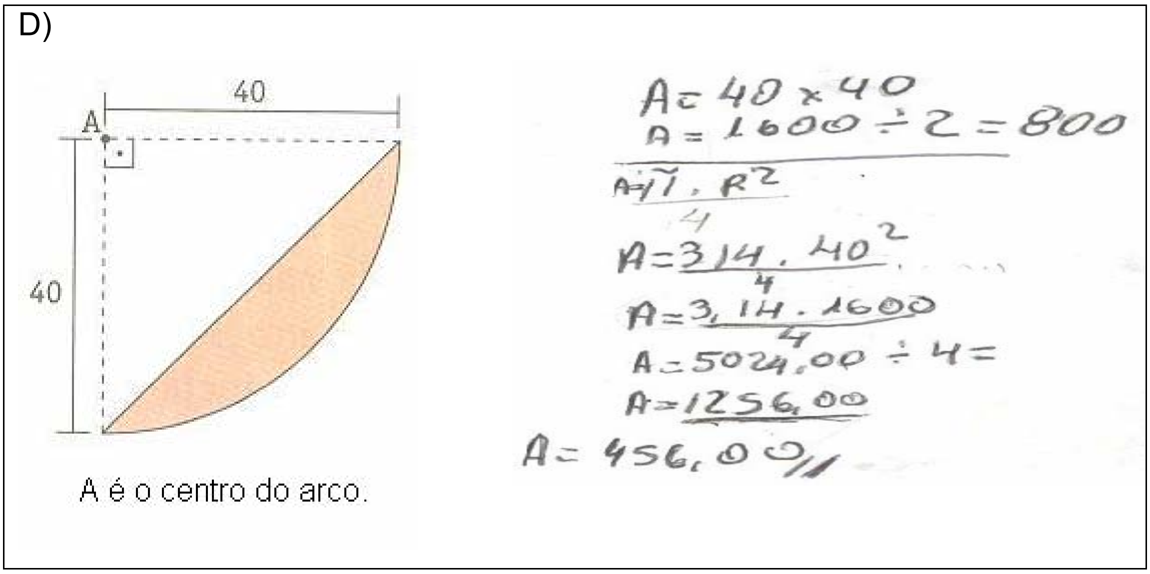


Figura 18: Área hachurada 4

Fonte: Imenes e Lellis (2002)

Questão dois, item "d"

Neste item identificamos mais uma vez, dificuldades na percepção das figuras que compunham o desenho. Por este motivo novamente nos dirigimos aos grupos, a fim de mediar a resolução da situação problema.

> Professor – *Se pintarmos todo o desenho que figura obteremos?*
> Alunos - *A quarta parte de uma circunferência.*

Os alunos pintaram a lápis a parte vazada, para responderem a primeira interrogação do professor, tornando evidente o triângulo retângulo (vazado). Dessa forma calcularam a área do triângulo e da quarta parte da circunferência, subtraindo-os posteriormente, como se pode observar na solução mostrada.

As questões supracitadas, que representavam figuras vazadas ou partes delas, foram resolvidas pelos grupos com relativa dificuldade visto que eram questões desafiadoras e não triviais. As dificuldades consistiram, basicamente, em perceber o que representava a parte pintada. Dialogamos nos grupos, interrogando-os sucintamente a respeito das figuras, objetivando que a própria percepção dos discentes os levasse a concluir do que se tratavam os desenhos.

Como já afirmamos nossa intenção não foi, somente, de analisar os erros, e sim priorizar os procedimentos, porém achamos pertinente apresentá-los, sem, no entanto analisá-los à luz da teoria que conduziu nosso trabalho, pois os erros, em nosso entender, não apresentaram ligação direta com o desenvolvimento da proposta.

Observamos alguns erros, de cálculos como, por exemplo, de um grupo que utilizou no item “b” o valor 10 para raio menor, comprometendo o resultado final. No item “c” dois grupos calcularam as áreas do quadrado e do círculo, porém não realizaram a subtração, e como isso não obtiveram o resultado final. No item “d” cinco grupos cometeram erros de operações com decimais e, apenas, um grupo não realizou o cálculo deixando a questão em branco, mesmo nos colocando à disposição para auxiliá-los.

As questões seguintes foram realizadas individualmente. Como estávamos em período de copa do mundo, contextualizamos a primeira questão a partir de um campo de futebol, estendendo o contexto esportivo para a segunda questão: uma pista de fórmula 1 em formato de coroa circular. Na terceira e última questão optamos por um problema relacionado ao cotidiano dos jovens que, normalmente, gostam de pizza (questões adaptadas de DANTE, 2002).

1. Durante a realização da copa do mundo um fato interessante foi observado, o gramado de um dos campos foi replantado, porém o círculo central estava com a grama perfeita, só havendo a necessidade do replantio no restante do campo. Calcule a área do campo que recebeu o novo gramado (Figura 19).

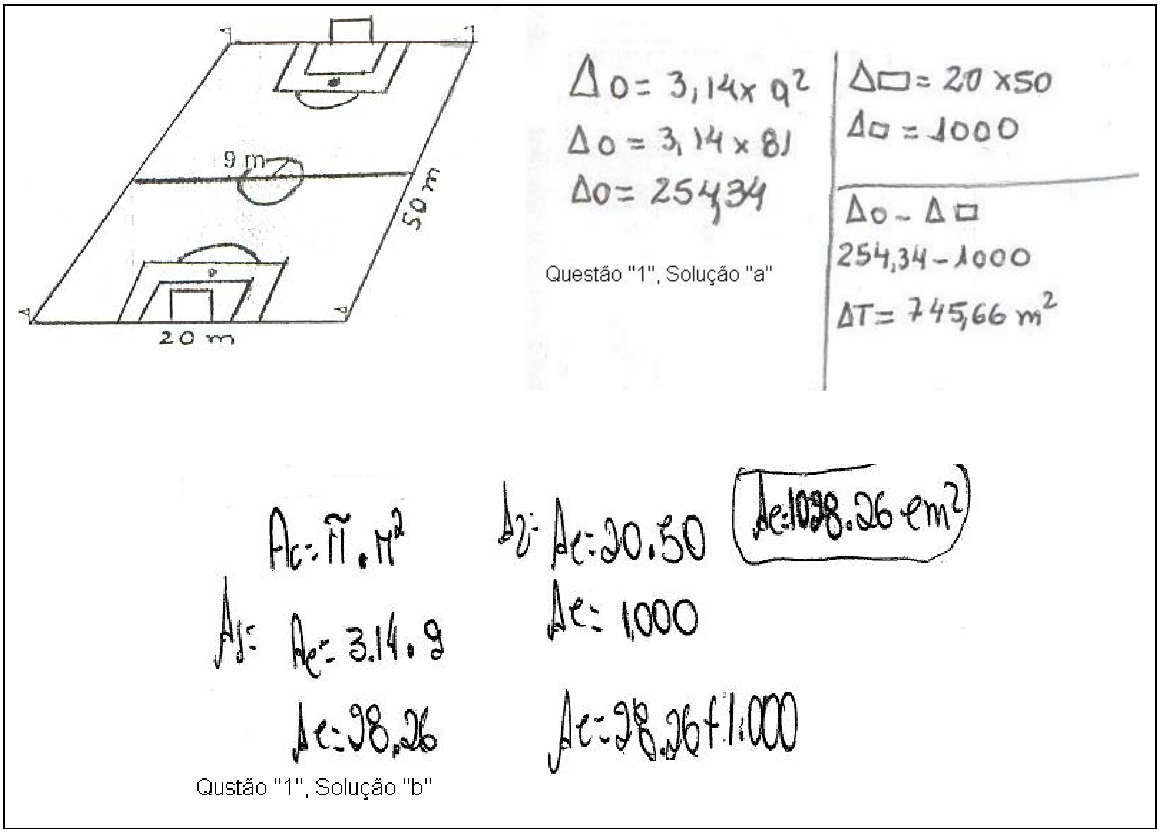


Figura 19: Representação de um campo de futebol

Fonte: Adaptada de Dante (2002)

Nesta primeira questão, 19 dos 40 alunos a concluíram satisfatoriamente, como se pode constatar na solução “a”, na solução de um dos alunos, 18 cometeram pequenos equívocos nas operações com decimais ou falta de atenção como podemos perceber na solução “b” de outro aluno, que não elevou ao quadrado o raio do círculo central (r = 9m).

2. Em uma corrida de F1, a pista apresentava dois círculos concêntricos. Determine a área desta pista (Figura 20).

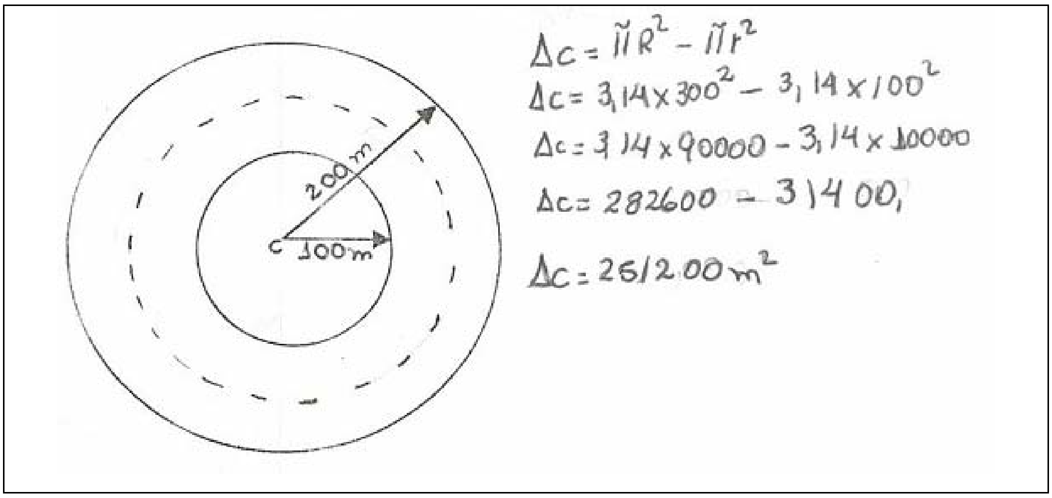


Figura 20: Representação de uma pista circular de F1

Fonte: Adaptada de Dante (2002)

Na realização desta questão, como já havíamos trabalhado com área da coroa circular, aproximadamente 70% dos alunos concluíram a atividade satisfatoriamente, como podemos constatar acima na solução dada por um dos alunos. Apesar de 30% alunos não terem conseguido resolver a questão o índice de assertivas serviu de indício para supormos que houve apropriação significativa dos conceitos de área da coroa circular subordinado ao conceito de área do círculo.

3. O preço de uma pizza é proporcional a sua área. Uma pizza grande custa R$ 18,00 e tem diâmetro de 42 cm. O preço de uma mini-pizza, cujo diâmetro é de 14 cm vale (Figura 21):

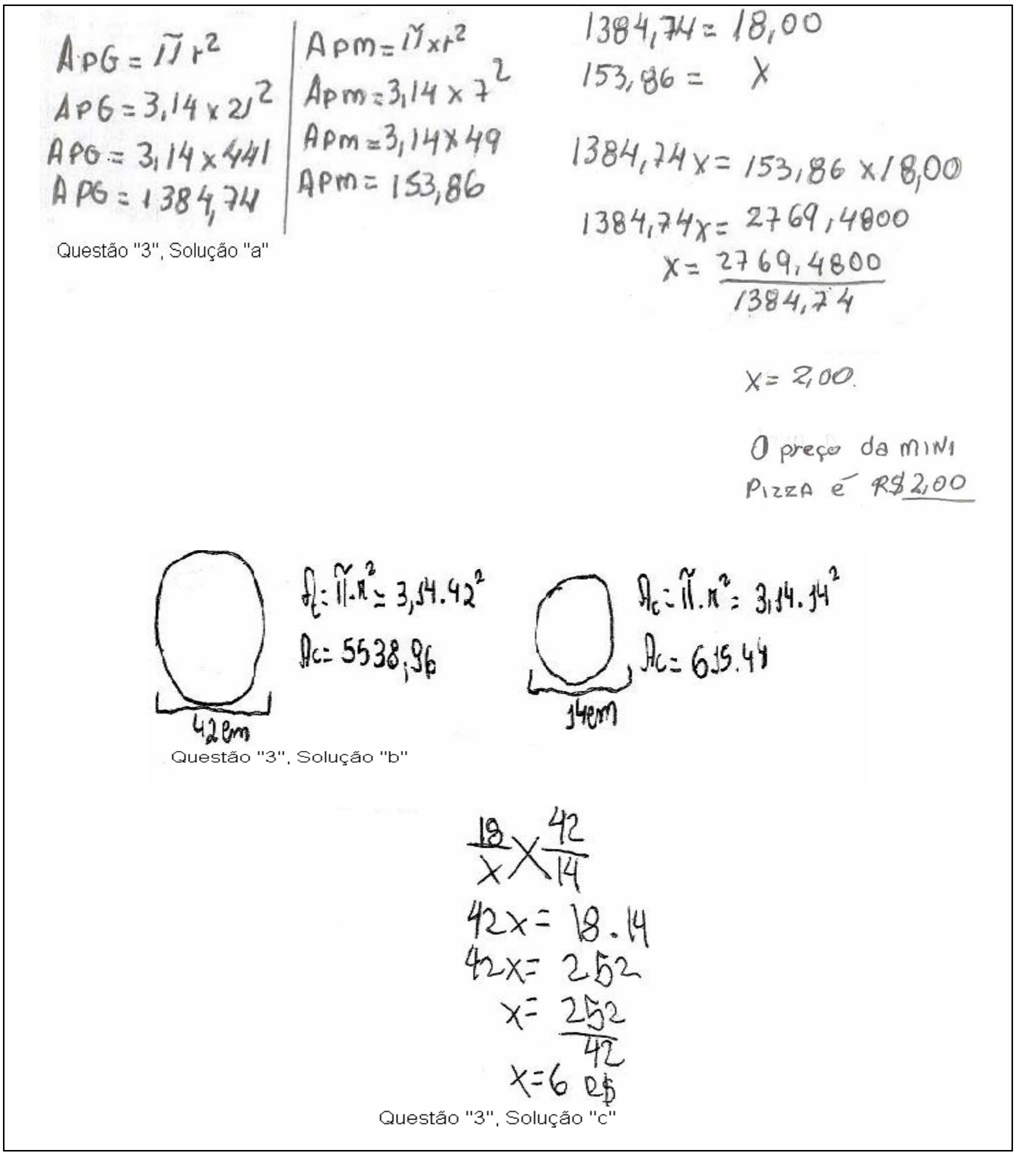


Figura 21: Representação de duas pizzas: uma grande e uma pequena

Fonte: construção dos alunos (2006)

No que se refere ao cálculo da área do círculo, está evidente que o conceito foi subsumido satisfatoriamente. Nesta questão, por exemplo, um quarto dos discentes obteve o resultado final R$ 2,00 (solução “a”), metade da turma calculou as áreas circulares, correspondentes, das duas pizzas, porém não efetivaram o cálculo para determinar o preço da mini-pizza (solução “b”). O restante dos alunos realizou o cálculo da regra de três sem atentarem que deveriam primeiramente obter a área circular das pizzas, como se pode constatar na resolução “c”.

Para solucionarem os problemas, em nosso entender, os discentes já haviam internalizado as idéias mais inclusivas do conteúdo em estudo. Postulamos que esta internalização foi potencializada por meio do uso do organizador prévio. Feito isso, as idéias e os conceitos subseqüentes que favoreceram a solução dos problemas foram trabalhados de acordo com os princípios da diferenciação progressiva e da reconciliação integrativa.

Apesar de acreditarmos que essas avaliações nos serviram primordialmente como parâmetros de análise de procedimentos, podemos identificar avanços apresentados pelos alunos de uma atividade para a outra. Ressaltamos que a comparação entre os novos conhecimentos e os anteriores e as devidas reconciliações integrativas entre estes novos conceitos e aqueles que já se dominam foram realizadas adequadamente. Caso contrário é provável que os alunos entendessem o novo conceito como desconecto do anterior. Desta forma, dificultaria o princípio da diferenciação progressiva.

Segundo Ausubel, Novak e Hanesian (1980) uma das maneiras de verificar se houve aprendizagem significativa seria a partir da resolução de problemas criativos e desafiadores. Na resolução dos problemas ficou claro que os conceitos das áreas construídas a partir do organizador e de atividades suscitadas pelo texto foi assimilado significativamente.

Percebemos desde o início das atividades que o desenvolvimento desta proposta seria um grande desafio para nós, como foi. Deparamos-nos com uma turma que não teve oportunidade de realizar um estudo mais aprofundado em geometria euclidiana e com pouca motivação para realização de atividades, segundo relato da professora da turma. Nossa intervenção mostrou-se satisfatória ao revelar, durante a realização das atividades, a motivação intrínseca evidenciada pelos discentes ao realizarem as tarefas com empenho e auxílio mútuo, demonstrando bom desempenho na apreensão das idéias primeiras da construção da área de figuras planas focando a área do círculo.

O organizador prévio direcionado ao contexto da história da Matemática funcionou, então, como material que contextualizou o aprendizado de área de figuras planas priorizando o círculo, mostrando maneiras de ligar as novas idéias com outras já existentes de forma não-arbitrária e substantiva. Além de servir como *ponte cognitiva*, ele pode ser altamente motivador para os alunos, uma vez que apresentou situações de descoberta autônoma, o que provavelmente aguçou o significado intuitivo implícito nas atividades e favoreceu a capacidade de abstrair e generalizar conceitos dos dados descritos.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS E IMPLICAÇÕES DO ESTUDO

Nossa proposta consistiu de uma seqüência didática baseada em princípios ausubelianos, com o intento maior de fornecer subsunçores necessários para a aprendizagem significativa de área de figuras planas, focalizando a área do círculo.

Os princípios básicos que nortearam as atividades foram a *diferenciação progressiva* e a *reconciliação integrativa:* preconizando idéias mais gerais e inclusivas da matéria de ensino apresentadas no início da instrução e, progressivamente, diferenciadas em termos de detalhes e especificidade; a reconciliação complementou a organização das atividades, à medida que a nova informação foi apresentada a partir de conceitos mais gerais, ressaltando de imediato os conceitos subordinados relacionados voltando, através de exemplos, a novos significados para os conceitos de ordem mais alta na hierarquia.

A determinação de quais são os conceitos mais gerais, mais inclusivos de um corpo de conhecimentos não é tarefa fácil. Para isso, planejamos atividades que nos exigiram uma análise, dos conceitos a serem estudados e de algumas relações entre estes que serviram para ilustrar quais os mais gerais superordenados, combinatórios e quais os mais específicos e subordinados.

Para introduzir os conceitos de unidades de medidas de comprimento e de área e áreas de figuras planas utilizamos como *organizador prévio* um texto da história da Matemática. A função deste organizador foi de potencializar a criação de relações *não-arbitrárias* e *substantivas* entre os novos conceitos e as idéias que lhes serviram de âncora na estrutura cognitiva do aluno, contribuindo para evidenciar o significado lógico do conceito, sendo essa uma das qualidades que atribuímos à história da Matemática e que a potencializou como organizador prévio.

A investigação histórica do texto realizada pelos grupos provocou uma motivação intrínseca em grande parte da turma, visto que o empenho demonstrado por estes na realização das tarefas subseqüentes causou surpresa à professora da classe, pois os alunos antes da intervenção demonstravam, segundo a professora, pouco interesse em adquirir conhecimentos matemáticos exercendo, relativamente, pequeno esforço para aprender.

A motivação também se deu devido às relações estabelecidas pelos alunos com aprendizagens anteriores. Conhecendo a história da matemática percebemos como as teorias que hoje aparecem acabadas e elegantes resultaram de desafios enfrentados pelos matemáticos, os quais foram desenvolvidos com grande esforço e, quase sempre, numa ordem bem diferente daquela em que são apresentadas após todo o processo de descoberta.

A realização das atividades motivou os alunos, pois além de diferenciar a forma como a matemática era apresentada tradicionalmente, também possibilitou a verificação da aprendizagem dos conceitos estudados anteriormente, uma vez que, os mesmos foram retomados e utilizados sempre que possível.

A história da matemática, contextualizada, revela a matemática enquanto ciência em construção, evidenciando que, o conhecimento matemático é falível, corrigível e em contínua expansão, nascendo da atividade humana, como parte de um processo social. (LAKATOS, 1978). Tendo um papel decisivo na organização do conteúdo que se deseja ensinar alertando, desta forma, aos discentes para compreenderem que uma das melhores alternativas de aprender procedimentos matemáticos é descobri-los por eles próprios. Podemos assim dizer que as ações desenvolvidas foram responsáveis pela motivação intrínseca dos alunos.

Consideramos assim que a história da Matemática, como organizador prévio, propiciou maior compreensão sobre área de figuras planas, favorecendo uma aprendizagem significativa para o conceito de área do círculo. Verificamos que as atividades propostas desenvolveram a criatividade do aluno, e o pensamento hipotético ao elaborarem hipóteses na tentativa de encontrar solução para os problemas propostos, além de promoverem a interação social entre os alunos. Evidenciando desta forma as condições necessárias para que a história da Matemática seja uma das alternativas para auxiliar o professor a promover aprendizagem significativa de conceitos matemáticos, como por exemplo, o de áreas de figuras planas, nos termos ausubelianos.

Neste trabalho, apresentamos uma forma alternativa de conceituar áreas de figuras planas evidenciando a área do círculo, visando melhorar a eficiência do processo de ensino-aprendizagem significativo destes conceitos. Evidenciando o que nos interessa, no caso o desenvolvimento histórico-epistemológico, constatamos que a busca na história é importante mesmo que seja contextual, indicando de que forma se construiu um determinado conceito, buscando o lado lúdico de construir e do fazer na história da Matemática.

De um lado, ressaltamos que o uso de conhecimentos prévios dos alunos para introduzir novos conceitos é uma prática que deve ser realizada amplamente.

Por outro lado, a abordagem histórica pareceu ser uma ferramenta muito eficiente, pois possibilitou melhor organização da estrutura conceitual na medida em que revelou as concepções que fundamentaram o conceito de área do círculo.

Apontamos para futuras pesquisas similares a essa que não se descuidem do fato que percebemos no andamento deste trabalho, que foi o caráter interdisciplinar implícito em textos históricos, pois os grupos enveredaram em questões como guerra, religião, política, tomando grande parte da aula o que não estava previsto no planejamento inicial. As contribuições das diversas culturas humanas para os desenvolvimentos matemáticos que foram evidenciados são destacadas por Fauvel e Maanen (1997), ao relatarem que os desenvolvimentos matemáticos ocorrem dentro dos contextos culturais sendo válido falar da Matemática islâmica, Matemática grega e assim por diante. Demonstrando que devemos ressaltar no ensino-aprendizagem da matemática, as contribuições à base do conhecimento disponível aos alunos de hoje que cada cultura no mundo erigiu.

Percebemos que o conhecimento matemático não poderia contemplar as informações contidas no texto. Sentimos pois a necessidade de dialogar com outras fontes do saber, como História, Geografia, Artes, Ensino Religioso, enriquecendo, desta forma, nosso trabalho com estas disciplinas.

> [...] o termo “interdisciplinaridade” não possui ainda um sentido único e estável e que, embora as distinções terminológicas sejam inúmeras, seu princípio é sempre o mesmo: caracteriza-se pela intensidade das trocas entre especialistas e pela integração das disciplinas num mesmo projeto de pesquisa (FAZENDA, 1999, p. 30-31).

Assim o termo “interdisciplinaridade” assume uma relação de reciprocidade de cooperação mútua. Tal interação iria possibilitar o diálogo com outras áreas do saber que sentimos falta em nossa pesquisa. Assim a interdisciplinaridade depende então, basicamente, da substituição de uma concepção fragmentária pela unitária do ser humano (FAZENDA, 1999).

As constatações anteriores nos levam a postular que o currículo deveria, então, contemplar essa necessidade, possibilitando aos professores e aos alunos adquirirem uma visão mais geral dos conteúdos que são comuns a várias disciplinas. De forma isolada, cada disciplina expressa relativamente pouco e não interessaria por si só aos nossos discentes, que manifestaram nessa pesquisa a vontade de ampliar as discussões, nesse sentido (MACHADO, 1993).

6 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANDRÉ, M. E. D. A. **Etnografia da prática escolar**. Campinas: Papirus, 1995.

AUSUBEL, D. P. **Psicologia educativa**: un punto de vista cognoscitivo. México: Ed. Trillas, 1976.

______. NOVAK. J. D.; HANESIAN, H. **Psicologia educacional.** 2. ed. Rio de Janeiro: Interamericana, 1980.

______. **Adquisición y retención del conocimento:** Una perspectiva cognitiva. Barcelona ed. Paidós, 2002.

BARALDI, I. M. **Matemática na escola**: que ciência é esta? Bauru, SP: Edusc, 1999.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. 2. ed. Trad. Elza F. Gomide. São Paulo: Edgar Blücher, 2003.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** matemática/ Ensino de primeira a quarta série. – Brasília: MEC/SEF, 1997.

BRASIL. Secretaria da Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** matemática/ Ensino de quinta a oitava série. – Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRIGHENTI, M. J. L. **Representações gráficas: atividades para o ensino e a aprendizagem de conceitos trigonométricos**. Bauru, SP: Edusc, 2003. (Coleção Educar)

BRITO, A. J. e CARVALHO, D. L. **Utilizando a História no ensino de Geometria**. In: Brito, A.J. (org.) História da Matemática em Atividades Didáticas. Natal: Editora da UFRN, 2005.

BZUNECK, J. A: A motivação do aluno: aspectos introdutórios. In: BORUCHOVITCH E. e BZUNECK J. A. (Org.) **A motivação do aluno**: Contribuições da Psicologia Contemporânea. Petrópolis: Vozes, 2001.

CHASSOT, A. **Alfabetização científica**: questões e desafios para a educação. Ijuí: Ed. Ijuí, 2001. (Coleção Educação em Química)

COOL, C.; et. al. **Desenvolvimento psicológico e educação**. 2. ed. Porto Alegre: Artmed, 2004.

______. MESTRE, M. M., GOÑI, J. O., GALLART, C. M. O. **Psicologia da educação.** Porto Alegre: Artes Médicas Sul, 1999.

CURY, H. N. As idéias de Lakatos e Vygotsky em uma proposta de mudança para as licenciaturas em Matemática. **Educação Brasileira,** Brasília, v.19, n.38, p.121-137, jan./jul. 1997.

DANTE, L. R. **Tudo é Matemática.** São Paulo: Ática, 2002. 8ª série

EVES, H**. Introdução à história da Matemática.** Tradução: Higino H. Domingues. Campinas: Unicamp, 2004.

FARAGO, J. L. **O ensino da História da Matemática à sua contextualização para uma Aprendizagem Significativa.** 67p. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2003.

FAUVEL, J., MAANEN, J. V. **ICMI Study on The role of the history of mathematics in the teaching and learning of mathematics.** Discussion Document. Bulletin of the International Comission on Mathematical Instruction, p. 9-16. 1997.

FAZENDA, I. C. A. **Interdisciplinaridade**: um projeto em parceria. 4. ed. São Paulo: Edições Loyola, 1999. (Coleção Educar n. 13)

FERREIRA, E. S. et. al. O uso da história da Matemática na formalização de conceitos. **Bolema Especial**, Rio Claro, n. 2, p. 28, São Paulo, 1992.

FOSSA, J. A. **Ensaios sobre a educação matemática.** Belém: EDUEPA, 2001.

______. Recursos pedagógicos para o ensino da matemática a partir de obras de dois matemáticos da Antiguidade. In: MENDES, I. A.; FOSSA, J. A.; VALDÉS, J. E. N. **A História como um agente de cognição na educação matemática**. Porto Alegre: Sulina, 2006.

FREIRE, P. **Pedagogia da autonomia** -Saberes necessários à prática reflexiva. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1996. (Coleção Leitura)

GUIMARÃES, S. E. R. Motivação intrínseca, extrínseca e o uso de recompensas em sala de aula. In: BORUCHOVITCHE e BZUNECK J. A. (Org.) **A motivação do aluno**: contribuições da Psicologia contemporânea. Petrópolis: Vozes, 2001.

KLINE, M. **O fracasso da Matemática moderna**. Tradução: Leônidas Gontijo de Carvalho. São Paulo: IBRASA, 1976.

IMENES, L. M.; LELLIS, M. **Matemática para todos**. São Paulo: Scipione, 2002. 8ª série.

______. **Microdicionário de Matemática**. São Paulo: Scipione, 1998.

LAKATOS, I. **A lógica do descobrimento matemático**: provas e refutações. Trad. Nathanael C. Caixeiro. Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1978.

LIMA, E. L. et. al. **Temas e problemas elementares,** Coleção do Professor de Matemática, Sociedade Brasileira de Matemática. Rio de Janeiro: 2005.

______. **Medidas e formas em geometria**: Comprimento, Área, Volume e Semelhança, Rio de Janeiro SBM, 1991.

MACHADO, N. J. Interdisciplinaridade e Matemática. **Revista Pro-Posições**, v. 4, n. 1 [10], março de 1993.

MENDES, I. A. **O uso da história no ensino da matemática reflexões teóricas e experiências**. Belém: Eduepa, 2001.

______. **Atividades históricas para o ensino da trigonometria.** In: BRITO, A. J. (org.) História da Matemática em atividades didáticas. Natal: Editora da UFRN, 2005.

______. A investigação histórica como agente da cognição matemática na sala de aula. In: MENDES, I. A.; FOSSA, J. A.; VALDÉS, J. E. N. **A História como um agente de cognição na educação matemática**. Porto Alegre: Sulina, 2006.

MOREIRA, M. A.; MASINI, E. A. F. S. **Aprendizagem significativa**: a teoria de David Ausubel. São Paulo: Moraes, 1982.

______. **Aprendizagem significativa crítica:** Atas do III Encontro Internacional sobre Aprendizagem Significativa. Lisboa, 2000.

NOVAK, J. D. **Uma teoria da educação**. Tradução: Marco Antônio Moreira. São Paulo: Pioneira, 1981.

PERRENOUD, P. **A prática reflexiva no ofício de professor**: profissionalização e razão pedagógica. Trad. Schilling C. Porto Alegre: Artmed, 2002.

PETERS, J. R. **A história da Matemática no ensino fundamental**: uma análise de livros e artigos sobre história. 2005. Dissertação (Mestrado em Educação Científica e Tecnológica) – Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2005.

PIAGET, J. **A equilibração das estruturas cognitivas.** Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1976.

PIAGET, J.; GARCIA, R. **Psicogénese e história das ciências.** Lisboa: Publicações Dom Quixote, 1987. (Coleção Ciência Nova, n. 6)

REGO, Tereza Cristina. **Vygotsky**: uma perspectiva histórico-cultural da educação. Petrópolis: Vozes, 1995.

SACRISTÁN, J.Gimeno; GÓMEZ, A.I Pérez; **Compreender e transformar o ensino**. Trad. Ernani F. da Fonseca Rosa. 4: ed. Porto Alegre: Artmed, 1998.

SCHÖN, D. A. **Educando o profissional reflexivo**: um novo desing para o ensino e a aprendizagem. Trad. Costa, R. C. Porto Alegre: Artmed, 2000.

SCHUBRING, G. Desenvolvimento histórico do conceito e do processo de aprendizagem a partir de recentes concepções matemático-didáticas. Erro, obstáculo, transposição. **Zetetiké**, Campinas, v. 6, n. 10, p. 9-34, jul./dez. 1998.

SILVA, F. H. S; SANTO, Adilson O. E. A contextualização: uma questão de contexto. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 8., Recife, **Anais...** Recife: UFPE, 2004, p. 7.

TARDIF, M. **Saberes docentes e formação profissional.** Petrópolis: Vozes, 2002.

ANEXOS

ANEXO I

O contexto histórico relativo às atividades em geral

As atividades seguintes formam uma seqüência didática baseada no contexto histórico que se segue e no livro “Medidas e formas em geometria: comprimento, área, volume e semelhança”, de Lima (1991) e nas notas de aulas da disciplina “Tópicos da Matemática: relação entre Álgebra, Aritmética e Geometria”, ministrada pelo professor Dr. Renato Borges Guerra no Mestrado em Educação em Ciências e Matemáticas, do Núcleo Pedagógico de Apoio ao Desenvolvimento Científico, da Universidade Federal do Pará (NPADC-UFPA). O objetivo maior foi trabalhar os conceitos de áreas de figuras planas, vistos em atividades anteriores, a fim de desenvolver o conceito de área do círculo, abordando também nesta seqüência noções de razão, proporção, semelhança e generalização.

O contexto histórico nos mostra que um dos problemas que exerceu grande fascínio e desafio no pensamento matemático antigo foi o de construir um quadrado com área igual à de um círculo dado. O papiro Rhind é uma fonte primária rica sobre a Matemática egípcia antiga, que apresenta uma solução para o problema, na qual a área de um círculo é tomada como a de um quadrado de lado igual a 8/9 do diâmetro. Os babilônios consideravam uma circunferência como o triplo de seu diâmetro e a área do círculo como um duodécimo da área do quadrado de lado igual à circunferência respectiva.

Porém a principal questão que se punha era a de, dado um círculo, construir com régua e compasso o lado de um quadrado com área igual à desse círculo. Como hoje se sabe, tal construção é impossível apenas com aqueles instrumentos. Mas Hipócrates de Chios conseguiu quadrar, no contexto da geometria plana da régua e do compasso, certas figuras curvilíneas chamadas lunas[16]. As quadraturas de lunas atribuídas a Hipócrates, provavelmente tenham se originado da tentativa de quadrar o círculo. O seguinte teorema é creditado a Hipócrates: *Segmentos de círculos semelhantes estão na mesma razão que os quadrados de suas bases*[17] (BOYER, 2003). O relato de Eudemo diz que Hipócrates provou tal proposição,

[16] Figuras em forma de lua limitadas por dois arcos de circunferência.
[17] Generalizando o teorema teremos a proposição mais moderna: As áreas de duas figuras semelhantes estão entre si como o quadrado da razão de semelhança.

mostrando primeiro que as áreas dos círculos estão entre si como os quadrados dos diâmetros. Esse teorema é utilizado, em nossas atividades, de forma intuitiva para generalizarmos a fórmula da área do círculo.

ANEXO II

ATIVIDADE 01: *Referente ao texto “A Matemática babilônica e egípcia”*

01) Marque no texto palavras ou frases que você gostaria de discutir (por desconhecer ou por merecer destaque).

02) A partir de informações contidas no texto, calcule a área do círculo de acordo com os procedimentos dos babilônios e dos egípcios.

03) Inscreva o círculo unitário num quadrado de lado igual ao diâmetro do círculo. Dividindo cada lado do quadrado em 3 partes iguais e a partir dos nove novos quadrados formados, obtenha uma estimativa para a área do círculo.

ANEXO III

ATIVIDADE 02: *Seu contexto histórico*

As questões relativas à atividade 02, em especial, estão baseadas em princípios arquimedianos que podem ser identificados no relato histórico que se segue. Arquimedes utilizou o seguinte princípio para calcular a área do círculo: se um quadrado é inscrito em um círculo, sua área é menor que a do círculo, se o quadrado, porém, estiver circunscrito, sua área será maior que a do círculo. Dobrando o número de lados do polígono inscrito, obteremos um octógono, cuja área ainda será menor que a do círculo, mas a diferença entre elas diminuiu. De maneira semelhante, dobrando o número de lados do polígono circunscrito, obteremos um octógono, cuja área é maior que a do círculo. Aumentando-se cada vez mais o número de lados dos polígonos inscrito e circunscrito, suas áreas ficarão cada vez mais próximas da área do círculo. Portanto, o valor da área do círculo estará sempre compreendido entre os valores das áreas dos polígonos nele inscritos e a ele circunscritos. Tal princípio será aqui abordado de forma bem elementar para acompanhar o nível de desenvolvimento da turma, em se tratando de conhecimentos geométricos.

01) Construa um círculo, cujo raio tem medida **r**, inscrito em um quadrado de lado igual ao diâmetro do círculo. Calcule em seguida a área deste quadrado (Aq_1) e compare a área do círculo (A_c).

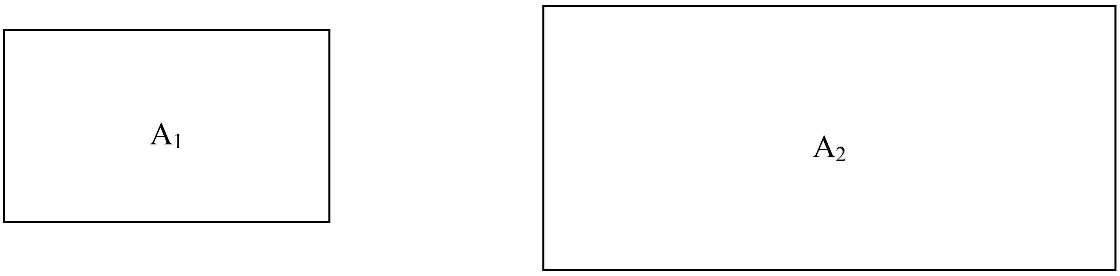
02) Construa um círculo, cujo raio tem medida **r**, circunscrito a um quadrado de lado igual ao diâmetro do círculo. Calcule em seguida a área deste quadrado (Aq_2) e compare a área do círculo.

03) Vamos comparar as três áreas (Aq_1, A_c, Aq_2).

ANEXO IV

ATIVIDADE 03: *Razão de semelhança entre áreas*

01) Indique as dimensões e determine a área A_1 do retângulo, construa um retângulo semelhante a A_1 calcule a área A_2 do novo retângulo. Encontre a razão entre A_2/A_1 (razão de semelhança). Determine A_2 em função de A_1.



02) Proceda da mesma forma para o quadrado, o triângulo e o círculo (de raio unitário) abaixo.