



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ - UFPA  
NÚCLEO DE PESQUISA E DESENVOLVIMENTO DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA  
E CIENTÍFICA - NPADC  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E  
MATEMÁTICAS - MESTRADO

**ALYNE MARIA ROSA DE ARAÚJO**

**MODELAGEM MATEMÁTICA NAS AULAS DE CÁLCULO: UMA  
ESTRATÉGIA QUE PODE CONTRIBUIR COM A APRENDIZAGEM DOS  
ALUNOS DE ENGENHARIA.**

BELÉM  
2008

**ALYNE MARIA ROSA DE ARAÚJO**

MODELAGEM MATEMÁTICA NAS AULAS DE CÁLCULO: UMA ESTRATÉGIA QUE PODE CONTRIBUIR COM A APRENDIZAGEM DOS ALUNOS DE ENGENHARIA.

Autora: Alyne Maria Rosa de Araújo

Orientador: Prof.º Dr. Adilson Oliveira do Espírito Santo

Dissertação apresentada à comissão julgadora do Núcleo Pedagógico de Apoio ao Desenvolvimento Científico da Universidade Federal do Pará, sob a orientação do Prof. Dr. Adilson Oliveira do Espírito Santo, como exigência parcial para obtenção do título de Mestra em Educação em Ciências e Matemáticas, na área de concentração: Educação Matemática

BELÉM/PA  
2008

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)  
Biblioteca do NPADC, UFPA.**

ARAÚJO, Alyne Maria Rosa de

Modelagem matemática nas aulas de cálculos: uma estratégia  
que pode contribuir com a aprendizagem dos alunos de engenharia /  
Alyne Maria Rosa de Araújo. – Belém: [s.n.], 2008.

94 folhas

Orientador: Adilson Oliveira do Espírito Santo

Dissertação (Mestrado) – Núcleo de Pesquisa e Desenvolvimento  
da Educação Matemática e Científica, Universidade Federal do Pará,  
2008.

1. MODELOS MATEMÁTICOS – Estudo-ensino. 2. MATE  
MÁTICA – Estudo-ensino. I. Título

CDD: 22. ed. 511.8

**ALYNE MARIA ROSA DE ARAÚJO**

MODELAGEM MATEMÁTICA NAS AULAS DE CÁLCULO: UMA ESTRATÉGIA QUE PODE CONTRIBUIR COM A APRENDIZAGEM DOS ALUNOS DE ENGENHARIA.

Autora: Alyne Maria Rosa de Araújo

Orientador: Prof.º Dr. Adilson Oliveira do Espírito Santo

Dissertação apresentada à comissão julgadora do Núcleo Pedagógico de Apoio ao Desenvolvimento Científico da Universidade Federal do Pará, sob a orientação do Prof. Dr. Adilson Oliveira do Espírito Santo, como exigência parcial para obtenção do título de Mestra em Educação em Ciências e Matemáticas, na área de concentração: Educação Matemática

Belém, 31 de maio de 2008.

Banca Examinadora:

---

Prof. Dr. Adilson Oliveira do Espírito Santo  
UFPA/NPADC – Orientador

---

Prof. Dr. Francisco Hermes Santos da Silva  
UFPA/NPADC - Membro Interno

---

Prof<sup>ª</sup>. Dr<sup>a</sup>. Isabel Cristina Rodrigues de Lucena  
UFPA/NPADC – Membro Interno

---

Prof. Dr. Valcir João da Cunha Farias  
UFPA/Campus de Abaetetuba – Membro Externo

---

Prof. Dr. João Frederico da Costa Azevedo Meyer  
UNICAMP – Membro Externo

## **DEDICAÇÃO**

Dedico este trabalho:

- Aos meus pais, que em todos os momentos me incentivaram ir em busca dos meus sonhos e ideais;
- A minha irmã, que em minha ausência, pôde estar sempre dando o apoio necessário em casa;
- Ao meu namorado, que esteve ao meu lado nesta caminhada.

## **AGRADECIMENTOS**

- A Deus, que sempre me deu forças a caminhar firme pelos caminhos que me destinou a seguir;
- Às minhas verdadeiras amigas, Danielle e Lígia, que sempre estiveram de mãos dadas, compartilhando todos os momentos de alegria, angústia, aflição e de VITÓRIA.
- Ao meu orientador, Prof. Adilson, que proporcionou momentos de aprendizado e troca de experiência.
- Ao corpo docente do Mestrado, que contribuiu para ampliação de conhecimentos científicos, acadêmicos e pessoais.
- À coordenação do Programa de Pós-graduação, que oportunizou novas experiências no Mestrado e no EDUCIMAT;
- Aos colegas do GEMM, que puderam, indiretamente, enriquecer a minha pesquisa, através de discussões que aconteciam nos encontros do grupo;
- Aos alunos da turma que realizei a pesquisa, os quais foram personagens importantes nessa história de conquistas.

## RESUMO

Este trabalho objetiva analisar os possíveis efeitos que o uso da Modelagem Matemática, enquanto estratégia de ensino, provoca no processo de aprendizagem dos alunos da disciplina Cálculo III – EDO (Equações Diferenciais Ordinárias). A pesquisa foi desenvolvida em uma turma de alunos do 2º ano do curso de Engenharia da Computação, na Universidade Federal do Pará. O trabalho é de cunho qualitativo onde foram levados em consideração os aspectos sociais que permeiam uma sala de aula universitária. Importante destacar que houve a participação direta da professora-pesquisadora de Matemática.

Para que eu pudesse fazer a coleta dos dados, utilizei alguns instrumentos que considerei essenciais, tais como: observações, gravações em áudio, questionários semi-estruturados e registros escritos dos alunos. De posse de alguns resultados preliminares, me foi possível observar o quanto a Modelagem Matemática desempenha um papel relevante na aprendizagem dos conteúdos matemáticos por parte dos alunos, pois foi possível eles interagirem com outras áreas do conhecimento sendo, desta forma, estimulados a realizarem pesquisa e, simultaneamente, serem parte do processo de ensino e aprendizagem que foi gerado no ambiente de sala de aula.

Observei, também, que a utilização da Modelagem Matemática, enquanto estratégia de ensino e aprendizagem, conduziu os alunos a despertarem para os aspectos reflexivos e críticos até então adormecidos, uma vez que são necessários para uma aprendizagem com qualidade para, assim, construírem seus conhecimentos acadêmicos e profissionais.

### PALAVRAS-CHAVES:

Modelagem Matemática, Nível Superior, Processo de Ensino e Aprendizagem em Matemática.

## **ABSTRACT**

This work objects to analyze the possible effects which the use of Mathematics Modelling, while the teach strategy provoke in students' learning process of subject Calculation III – DOE (Differential Ordinary Equations). The research was develop in a students' classroom of second year of Computing Engineer course, at Federal University of Pará. The work is qualitative where they were took into consideration the social aspects that were in a university classroom. Important to point out there was direct participation of teacher-researcher of Mathematics.

For that I could do data collect I used some instruments that I considered essential, such as, observations, recordings in video, semi-structures questionnaires and registers wrote of students. Of possession some preliminary results it was possible for me to watch as to Mathematics Modelling develops a relevant paper in the learning of contents Mathematics for the part of students. Cause it was possible they interected with others areas of knowledge it being this way encourage to realise research and simultaneously was part of process of teach and learning was made in the classroom.

I also observed the Mathematics Modelling as strategy of teaching and learning; it led the students to arouse to reflexive aspects and critics asleep for learning with quality and agreed way they built your academic knowledges and profissionals.

### **KEY WORDS:**

Mathematics Modelling, Superior Level, Process of Teaching and Learning in Mathematics

## SUMÁRIO

RESUMO .....	v
ABSTRACT .....	vi
CAPÍTULO I – Lembranças e Reflexões.....	1
CAPÍTULO II – Lembranças e Reflexões .....	5
2.1 – Para início de conversa.....	5
2.2 – O que é a Modelagem Matemática, afinal: as diversas concepções.....	6
2.3 – As atividades de Modelagem Matemática.....	8
2.4 – A Modelagem Matemática em sala de aula.....	10
2.5 – Porque se deve estudar Matemática nos cursos de Engenharia?.....	12
2.6 – Modelagem Matemática no Ensino Superior .....	14
2.7 – O papel do professor e do aluno diante da utilização da Modelagem Matemática nas aulas de Cálculo.....	16
CAPÍTULO III – Traçando caminhos para a Investigação .....	21
3.1 – Introdução.....	21
3.2 – A Escolha Metodológica .....	24
3.3 – Os alunos .....	25
3.4 – A disciplina.....	26
3.5 – O Cálculo e a Modelagem .....	26
3.6 – Os dados coletados e a forma de registrá-los .....	27
3.6.1 – As observações .....	28
3.6.2 – Os questionários pré-atividade e pós-atividade.....	28
3.6.3 – Registros escritos dos alunos.....	29
3.6.4 – Analisando os dados.....	29
3.7 – O procedimento metodológico desenvolvido nas atividades .....	30

CAPÍTULO IV – As atividades de Cálculo através da Modelagem Matemática .....	34
4.1 – Introdução .....	34
4.2 – Analisando o questionário pré-atividade .....	34
4.3 – Compreendendo o desenvolvimento da 1ª atividade conforme as etapas utilizadas ..	39
4.3.1 – Resultados da 1ª Atividade.....	46
4.4 – Compreendendo o desenvolvimento da 2ª atividade conforme as etapas utilizadas...	47
4.4.1 – Identificando através de questionamentos alguns conhecimentos já apreendidos pelos alunos .....	50
4.4.2 – Resultados da Análise da 2ª atividade .....	58
4.5 – Compreendendo o desenvolvimento da 3ª atividade conforme as etapas utilizadas...	58
4.5.1 – Resultados da Análise da 3ª atividade .....	64
4.6 – Compreendendo o desenvolvimento da 4ª atividade.....	64
4.6.1 – Resultados da 4ª atividade .....	74
4.7 – Compreendendo o questionário pós-atividade .....	74
CAPÍTULO V – Minha Reflexões Finais .....	78
5.1 – Os incentivos para pesquisa.....	78
5.2 – As contribuições .....	78
5.3 – As expectativas e resultados da pesquisa .....	79
REFERÊNCIAS .....	83
ANEXOS .....	86
ANEXO 1 - Questionário Pré-Atividade.....	86
ANEXO 2 - Questionário Pós-Atividade .....	87

## CAPÍTULO I

### LEMBRANÇAS E REFLEXÕES

Ao longo desse capítulo venho trazendo algumas das lembranças que me motivaram à realização dessa pesquisa, as quais pude ao longo da trajetória estudantil e profissional refletir e buscar um norte para minha investigação. No segundo semestre de 2000, iniciei minha formação profissional na Universidade Federal do Pará (UFPA), uma Instituição Pública Federal multicampi, isto é, constituída de (09) nove campi distribuídos por todo o Estado do Pará.

O campus do Guamá, situado na cidade de Belém, capital do estado, atualmente é dividido em Institutos constituídos de Faculdades (à época, colegiados e departamentos) que coordenam os diferentes cursos de graduação existentes na Instituição. Licenciatura em Matemática foi o curso de graduação que escolhi para cursar e para o qual fui selecionada através de concurso vestibular. Durante os estudos no curso de Licenciatura em Matemática percebia que os professores estavam ali com a preocupação de ensinar os conteúdos de Matemática, assim como, também, ensinar a ser um bom professor, mas cada um da forma que achava ser a melhor. A maioria desses professores da Universidade tinham tido a mesma formação tradicional que meus professores do ensino fundamental e médio.

Os conteúdos de Matemática eram transmitidos da mesma forma que estavam nos livros indicados por eles para leitura. E a minha ansiedade era ver naquelas disciplinas ligações dos conteúdos com outras áreas do conhecimento, pois acreditava que a minha formação de professora ia além de aprender técnicas e algoritmos, mas poucos professores tinham a preocupação com essas ligações. Durante as aulas de Cálculo o contato com aplicações da Matemática em outras áreas do conhecimento era mínimo, que até passavam despercebidas, ou seja, o curso foi praticamente desenvolvido com ênfase na matemática pela matemática.

Já no último semestre do curso, estudei uma disciplina optativa, denominada Tópicos em História da Matemática, a qual foi ministrada através de temas contextualizados utilizando a Modelagem Matemática com o objetivo de mostrar modelos matemáticos que foram construídos durante a história do desenvolvimento da Matemática até os dias atuais como, por exemplo, a razão áurea, o crescimento populacional, a cubagem de madeira. Essa estratégia de ensino não tinha sido utilizada em nenhuma das disciplinas anteriores. Esse foi o meu primeiro contato com a Modelagem, momento em que o

professor trouxe problemas em que pudéssemos perceber as relações entre os temas diversos e a matemática que iríamos utilizar quando começássemos a trabalhar como docente. Por ser uma maneira “nova” de entender a Matemática, o interesse em aprofundar o conhecimento foi, de certa forma, tímido.

Tive, após a graduação, em 2005, a oportunidade de realizar um curso de especialização em Educação Matemática, oferecida pelo Programa de Pós-graduação<sup>1</sup> Lato Sensu do NPADC<sup>2</sup>. Este programa tem como um de seus objetivos a formação de professores cientes do seu papel na sociedade, preocupando-se em mostrar diferentes formas de ensinar as disciplinas de Ciências e Matemáticas, essenciais para uma boa formação dos alunos e, dentre as disciplinas ministradas, havia a de Modelagem Matemática, onde pude aprofundar meus conhecimentos com relação a essa estratégia.

Concomitantemente a esse curso, ensinava a matéria Cálculo para as turmas de graduação na Universidade Federal do Pará. Os profissionais que exercem carreiras acadêmicas nessa Instituição são habilitados nas devidas áreas de conhecimento, uns com diplomas de Mestrado, Doutorado ou Bacharelado, mas não são só profissionais com essas titulações que possuem oportunidades de lecionar nessa Instituição. Existe, também, dentro de cada Centro, hoje denominado Instituto, concursos simplificados que dão oportunidades para os recém-licenciados de exercerem a profissão de professores, caso exista insuficiência de professores efetivos. Foi, então, que surgiu a oportunidade de exercer pela primeira vez a carreira docente em sala de aula, para isso realizei o concurso e fui selecionada para tal exercício.

Devido à falta de experiência em sala de aula, iniciei minhas atividades docentes ministrando as disciplinas de Cálculo da mesma maneira que fui ensinada na maioria das disciplinas da graduação, ou seja, através do tripé: definição, exemplo e exercício, essa era a única forma que me sentia segura em trabalhar os conhecimentos matemáticos.

As turmas que comecei a lecionar eram de Administração, Engenharia Civil e Farmácia. Já no terceiro semestre, concluída a Especialização, comecei a trabalhar com uma turma de Engenharia da Computação, dentre outras. Nessa turma ensinava a disciplina Cálculo III, cujo conteúdo a ser ministrado era Equações Diferenciais Ordinárias e durante o curso foi sugerido pelos alunos que eu desenvolvesse o curso de Cálculo através de

---

<sup>1</sup> Programa de Pós-graduação em Educação de Ciências e Matemáticas (PPGECM)

<sup>2</sup> Núcleo de Apoio ao Desenvolvimento Científico da Universidade Federal do Pará

aplicações. Naquele momento percebi que a Modelagem Matemática apresentada na Especialização como uma estratégia de ensino e aprendizagem a ser utilizado em sala de aula seria uma possibilidade no ensino de Cálculo. Embora tenha realizado o curso de Especialização com relativo sucesso, ainda me sentia insegura para fazer uso da Modelagem em sala de aula.

Movida pelo desejo em atender a solicitação dos alunos e de investigar mais profundamente as contribuições que a Modelagem Matemática pode proporcionar à aprendizagem dos alunos, inscrevi-me no processo de seleção do curso de Mestrado em Educação em Ciências e Matemáticas do PPGECEM, tendo como proposta de pesquisa a investigação, em uma turma de Engenharia, do processo de aprendizado com a utilização da Modelagem em sala de aula. Estava, então, no quarto semestre de exercício docente na Instituição. Durante as disciplinas do curso de Mestrado, através de leituras sobre diversos autores e pesquisadores do tema em foco, pude desenvolver uma melhor reflexão sobre Modelagem Matemática e suas vinculações com o conhecimento.

Ao ler Newton da Costa, por exemplo, pude refletir sobre a prática que exercia, tendo agora a idéia de que o conhecimento é algo que pode ser construído durante as aulas e não tido como pronto e inquestionável:

O construtivismo parte do pressuposto de que, quando ocorrem ações físicas e mentais sobre o objeto analisado, o indivíduo construiu conhecimento acerca da análise e essa construção é um processo onde o indivíduo teve oportunidade de investigar, refletir, criticar e buscar conclusões acerca do assunto estudado. (COSTA, 1992, p.52).

Vinculando isto com a Modelagem Matemática foi, também, ao estudar sobre o pensamento do Boaventura da Silva Santos, que voltei a dar ênfase à reflexão sobre a estratégia de ensino que estava adotando:

A insatisfação perante os métodos ou conceitos básicos, até então usados sem qualquer contestação na disciplina, por vezes pressentida de alternativas viáveis, isto é, conceitos não dão conta de explicar determinada teoria, gerando uma renovação conceitual com o objetivo de manter o paradigma estabelecido. Neste tipo de crise devido o crescimento de uma disciplina, os conceitos e métodos tornam-se insuficientes. Então se faz necessário o desenvolvimento de novas bases conceituais e técnicas dentro da forma de conhecer o mundo da época (SANTOS, 1989, p.137).

Busquei contribuições em Thomas Kuhn para mudar de paradigma e adotar a Modelagem Matemática como estratégia nas disciplinas da matéria de Cálculo:

O homem que adota um novo paradigma nos estágios iniciais do seu desenvolvimento [profissional], freqüentemente, adota-o desprezando a

evidência fornecida pela resolução do problema. De outra forma, precisa ter fé na capacidade do novo paradigma para resolver os grandes problemas com que se defronta, sabendo apenas que o paradigma anterior fracassou em alguns deles (KUHN, 2003, p. 201).

Portanto, lancei-me, como afirma Kuhn (2003), apenas apoiada nessa fé do novo paradigma, isto é, que a Modelagem Matemática me ajudaria a dar conta dos problemas que se apresentavam a mim nas turmas de graduação. Tendo essas contribuições e refletindo na minha ação docente, passei a partir do 2º semestre do Mestrado a investigar, em uma turma de Engenharia da Computação da UFPA, o que havia proposto como investigação da pesquisa. Desenvolvi a pesquisa com as temáticas: Modelagem Matemática, Processo de Ensino e Aprendizagem e Nível Superior.

### **Estrutura da dissertação**

De acordo com a proposta de investigação do presente trabalho, estruturei a dissertação assim:

No 1º capítulo, descrevo sobre as motivações que me levaram a utilizar a Modelagem como estratégia de ensino e aprendizagem nas aulas de Cálculo.

No 2º capítulo, busquei trabalhar a Modelagem com o propósito de refletirmos sobre o que se pretende em sala de aula com a utilização dessa estratégia, as propostas do Nível Superior tendo em vista a condução das atividades em sala de aula e a aprendizagem dos alunos universitários, como também as contribuições que a Modelagem pode oferecer para um bom aprendizado segundo minhas reflexões.

No 3º capítulo, mostro os caminhos metodológicos seguidos para desenvolver todo o processo da e o planejado para o desenvolvimento das atividades com relação ao papel do professor e aluno, conforme os casos sugeridos por Barbosa (2004, p.7). Evidenciando os sujeitos da pesquisa, o desempenho e grau de liberdade dos alunos, bem como o papel do professor nas atividades planejadas e desenvolvidas relacionando com os casos de Barbosa (1990), o ambiente em que a pesquisa foi realizada, as atividades escolhidas e o porquê de tais escolhas.

No 4º capítulo, apresento as análises dos questionários pré-atividade e pós-atividade, bem como, as análises das atividades de Modelagem realizada com os alunos.

No 5º capítulo foi construída minha reflexão em relação aos resultados obtidos da pesquisa, ou seja, minhas considerações finais.

## CAPÍTULO II

### OLHOS TEÓRICOS ACERCA DA MODELAGEM MATEMÁTICA

#### 2.1 – Para início de conversa

Há diversos séculos a matemática vem sendo construída por civilizações como a babilônica, egípcia, grega, dentre outras. Na verdade, sua origem deve-se à necessidade que o ser humano teve de resolver problemas do cotidiano. Desde então, com auxílio da lógica, o homem busca organizar suas idéias com objetivo de obter soluções para os problemas que lhes são presentes. O conhecimento matemático, como integrante da formação profissional de um indivíduo, teve seu início, somente, com o surgimento da escola, mas que não depende exclusivamente da escola, onde este conhecimento, que era descoberto ou inventado (de acordo com a corrente filosófica) de forma pouco integrativa, passa a ser organizado em níveis e depois em séries.

Entretanto, quando trato de inquietações no âmbito do processo de ensino e aprendizagem, me apoio nas questões abordadas pela Educação Matemática, a qual vem crescendo cada vez mais enquanto linha de pesquisa, e os resultados têm mostrado o quanto o ensino de Matemática pode ser melhorado e re-significado.

Com intuito de qualificar o processo de ensino e aprendizagem de Matemática surgem tendências como, por exemplo, a Modelagem Matemática, a Resolução de Problemas, a Etnomatemática, a História da Matemática, as quais se preocupam e buscam melhoria do ensino no âmbito da Educação Matemática. Dentre elas destaco a Modelagem Matemática, com enfoque no Ensino Superior, que teve como um dos percussores no Brasil, Rodney Bassanezzi (2002, p. 15), o qual acredita que a mesma no processo de ensino e aprendizagem pode proporcionar “o desenvolvimento de um novo modelo de educação menos alienado e mais comprometido com as realidades dos indivíduos e sociedades”.

Essa mudança de atitude em pensar e efetivar o ensino da Matemática resulta de um repensar o ensino atual, pois o vínculo entre a realidade do aluno e o que é estudado em sala de aula pode possibilitar uma melhor formação do aluno cidadão.

Considerando que a Modelagem é uma alternativa ao professor que está enfadado de ensinar de maneira tradicional, sem levar significado ao que está ensinando, acredito que

o ensino na Universidade pode deixar de ser visto como um processo onde o aprendiz não seja o principal objetivo e o professor não seja um repetidor de conteúdos.

Machado Júnior (2005, p. 14) acredita que “(...) da forma que é trabalhada a Modelagem Matemática (...) seja possível estabelecer uma relação de proximidade entre a Matemática dos programas escolares e a realidade do estudante”.

Encontramos na literatura diferentes abordagens com relação ao uso da Modelagem Matemática em sala de aula, mas que também possuem semelhanças, pois se preocupam com o processo de ensino e/ou aprendizagem (Bassanezzi, 2002; Biembengut, 2002; Barbosa, 2001; Monteiro, 1999). Os focos estão em pesquisas realizadas em todos os níveis de ensino como, também, em relação à formação de professores.

## **2.2 - O que é Modelagem Matemática, afinal? As diversas concepções.**

Em busca de compreender melhor as idéias sobre o processo de Modelagem, identifiquei, através de leituras, algumas concepções de autores sobre o que é Modelagem Matemática, mas no presente trabalho apresento a concepção de Rodney Bassanezzi, a qual fundamenta o desenvolvimento do meu trabalho.

Bassanezzi (2002, p. 16) acredita que Modelagem “consiste na arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real”.

Bassanezzi (2002, p. 38) defende que “a Modelagem no ensino é apenas uma estratégia de aprendizagem, onde o mais importante não é chegar imediatamente a um modelo bem sucedido, mas caminhar seguindo etapas aonde o conteúdo matemático vai sendo sistematizado e aplicado”.

Essas são as concepções existentes na obra de Bassanezzi sobre o que é o processo de Modelagem e Modelagem no Ensino e, desta forma, ele acredita que essa estratégia possibilita “(...) refletir sobre uma porção da realidade, na tentativa de explicar, de entender, ou de agir sobre ela e o processo usual é selecionar, no sistema, argumentos ou parâmetros considerados essenciais e formalizá-los através de um sistema artificial (...)” (2002, p. 19).

Diante dessa idéia, o autor concebe esse processo de reflexão como a Modelagem e a formalização como o Modelo, representado em linguagem matemática.

Além do processo para a obtenção do modelo, defendo a idéia de que a Modelagem Matemática pode vir a contribuir com os fatores condicionantes no ambiente que objetiva o ensino e aprendizagem do conteúdo matemático. *Torna o aluno e o professor motivador, reflexivo e crítico durante e após o processo.*

O autor (2002, p. 19-20) procura deixar explícito que o termo modelo é ambíguo, portanto, reconhece que uma representação pode ser interpretada de duas maneiras:

- Modelo Objeto – é a representação de um objeto ou fato concreto; suas características predominantes são a estabilidade e a homogeneidade das variáveis. Tal representação pode ser *pictórica* (um desenho, um mapa), *conceitual* (fórmula matemática), ou *simbólica*.
- Modelo Teórico – é aquele vinculado a uma teoria geral existente – será sempre construído em torno de um modelo objeto com um código de interpretação. Ele deve conter as mesmas características que o sistema real, isto é, deve representar as mesmas variáveis essenciais existentes no fenômeno e suas relações são obtidas através de hipóteses (abstratas) ou de experimentos (reais).

A partir dessas colocações, quero deixar evidente o que alguns autores concebem por Modelo Matemático:

Biembengut & Hein (2000, p.20), “um conjunto de símbolos e relações matemáticas que procura traduzir, de alguma forma, um fenômeno em questão ou problema de situação real (...)”;

Bassanezzi (2002, p.20), “um conjunto de símbolos e relações matemáticas que representam de alguma forma o objeto estudado”;

Ferruzzi et al (2004, p. 1354), “representações que são capazes de explicar e interpretar fenômenos em estudo”.

Quando se encontra um modelo deve-se entendê-lo como aproximações realizadas para se poder entender melhor um fenômeno.

A partir das idéias aqui expostas, concebo Modelagem Matemática como *uma estratégia de ensino e aprendizagem que pode possibilitar ao aluno um melhor*

*aprendizado dos conteúdos matemáticos através da construção de um modelo que descreva o problema identificado no tema estudado, de modo que o professor seja um mediador desse conhecimento, criando em sala de aula um ambiente de interação e significado.*

### 2.3 – As atividades de Modelagem Matemática

As atividades realizadas com a Modelagem Matemática, cujo foco é a Educação Matemática, possuem como fundamento para sua utilização os passos que nortearão o processo de Modelagem, no que diz respeito à percepção da Matemática Aplicada, numa visão diferenciada.

Tendo como base as considerações que venho expondo até este momento em relação ao processo de Modelagem Matemática em sala de aula, apresento, a seguir, o processo de Modelagem que me motivou para a inserção na prática de ensino na turma na qual intervi.

O esquema abaixo mostra as etapas do processo:

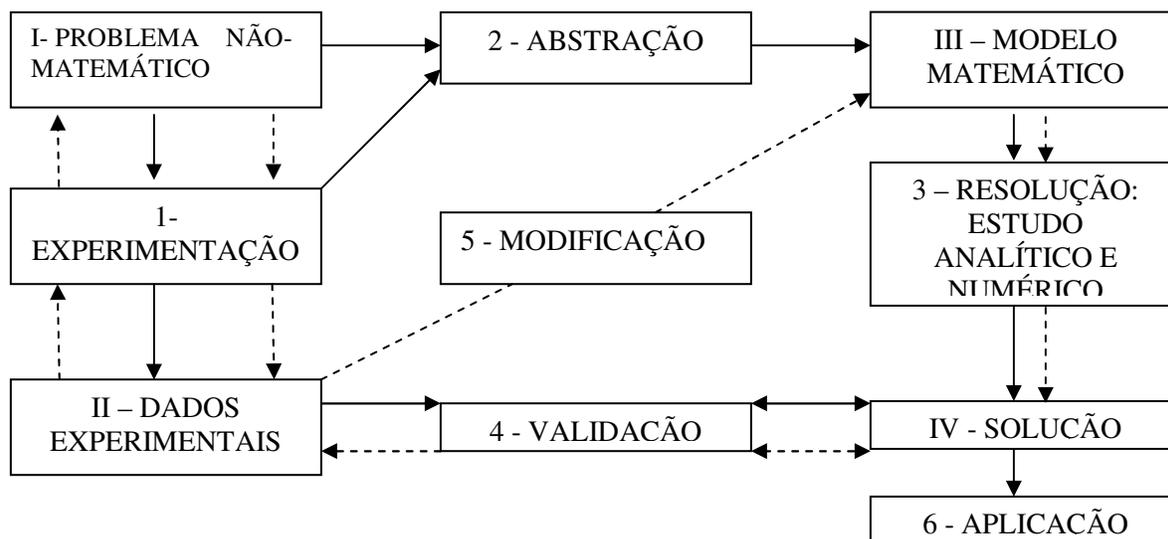


Figura 2.1- Esquema de uma modelagem: as contínuas indicam a primeira aproximação e as pontilhadas, a segunda aproximação após a validação (quando necessário) (Bassanezzi, 2002).

Considerando o esquema, Bassanezzi (2002) especifica cada etapa da seguinte forma:

- Experimentação: atividade onde se processa a obtenção dos dados.  
O papel do professor nesse processo é direcionar a pesquisa de modo que os dados sejam obtidos com maior facilidade, posteriormente, com a escolha das variáveis do fenômeno.
- Abstração: Fase onde se deve formular os modelos matemáticos.  
É considerado importante escolher as variáveis, problematizar a teoria que está sendo investigada para, então, utilizar a linguagem matemática e simplificar o problema, já que os problemas matemáticos, em geral, têm certo grau de complexidade.
- Resolução: Após a obtenção do modelo, que pode ser equação de variação discreta ou contínua, resolvemos o modelo através de métodos apropriados.
- Validação: É feita a verificação do modelo encontrado de acordo com os dados obtidos no início do problema;
- Modificação: Nesta fase o modelo é refeito para que fique bem próximo dos dados do problema, caso o modelo encontrado primeiramente não seja válido.

Outra obra que é destacada no âmbito da pesquisa em Educação Matemática com foco na Modelagem deve-se a Salett Biembengut, e venho apresentar as etapas por ela desenvolvidas e defendidas em relação ao desenvolvimento do processo de Modelagem.

As subetapas destacadas no esquema abaixo são provenientes de três etapas que são definidas por Biembengut & Hein (2000, p.21):

- Interação com o assunto – esta fase proporciona o reconhecimento da situação-problema e familiarização com o assunto estudado.

Nesta fase, o problema deve ser explorado pelo modelador de modo que quanto mais situado e próximo estiver do assunto facilitará o processo de obtenção do modelo.

- Matematização – neste momento são levantadas hipóteses sobre o problema e é resolvido o problema em termos do modelo.

Já nesta fase, o conhecimento matemático tem uma relevância grandiosa, pois é nessa fase que a interatividade e seleção das variáveis úteis para a construção do modelo serão eficazes, partindo então para a resolução do problema.

- Modelo Matemático – nesta fase a solução do modelo matemático encontrado é interpretado e verificado se é válido o modelo.

Feita a construção do modelo, não podemos de imediato considerá-lo como válido e, para isso, devemos interpretá-lo segundo os dados do problema inicial e verificar sua validade dentro do tema escolhido.

Observe o esquema do processo de Modelagem Matemática destacada por Biembengut (1999, p. 23):

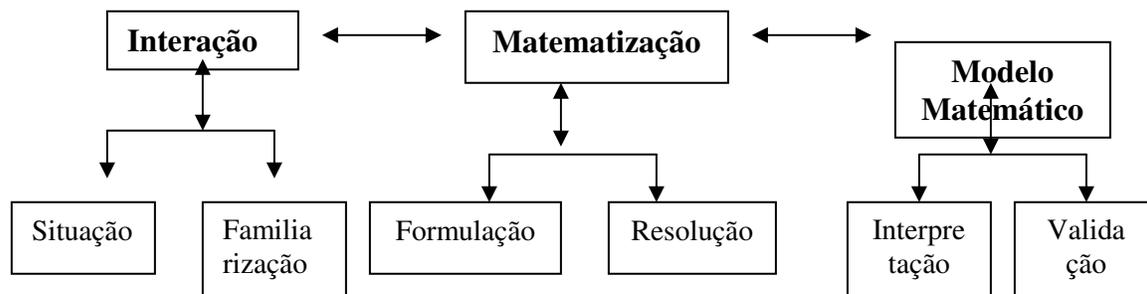


Figura 2.2: Esquema das etapas do processo de Modelagem Matemática utilizado por Biembengut (1999).

Parece-me muito próximas as concepções do processo de obtenção do modelo dada por esses dois autores, como apresentado nos esquemas acima. E ao se tratar da implementação da Modelagem Matemática em sala de aula, esses autores também consideram que essa estratégia pode sofrer modificações quando pretendem ser utilizadas no processo de ensino e aprendizagem.

A partir desse delineamento das fases e etapas, levo em consideração alguns fatores que distinguem o objetivo dos matemáticos aplicados em relação aos educadores matemáticos quando utilizam a Modelagem Matemática.

## 2.4 - A Modelagem Matemática em sala de aula

Tomar a decisão de utilizar a Modelagem Matemática em sala de aula requer do professor uma mudança de postura frente ao ensino tradicional. Mendes diz que (2006, p. 50-51):

“Para que o professor utilize a construção de modelos como forma de melhorar o ensino da matemática, deve mudar sua postura frente à realidade educacional, pois somente a partir daí iniciará, portanto, um processo de transformação”.

A partir dessa idéia que influencia positivamente, Barbosa (2004) propõe maneiras de abordar a Modelagem Matemática no ensino da Matemática:



	<b>Caso 1</b>	<b>Caso 2</b>	<b>Caso 3</b>
<b>Formulação do Problema</b>	Professor	Professor	Professor/aluno
<b>Simplificação</b>	Professor	Professor/aluno	Professor/aluno
<b>Coleta de Dados</b>	Professor	Professor/aluno	Professor/aluno
<b>Solução</b>	Professor/aluno	Professor/aluno	Professor/aluno

Tabela 2.1: Os casos sugeridos por Barbosa sobre o papel do professor e aluno no desenvolvimento do processo de Modelagem (Barbosa, 2004, p.7)

Didaticamente, Barbosa (2004) propõe três maneiras de se trabalhar a Modelagem Matemática:

- 1) *Caso 1. O professor apresenta a descrição de uma situação-problema, com as informações necessárias à sua resolução e o problema formulado, cabendo aos alunos o processo de resolução.*
- 2) *Caso 2. O professor traz para a sala um problema de outra área da realidade, cabendo aos alunos a coleta das informações necessárias à sua resolução.*
- 3) *Caso 3. A partir de temas não-matemáticos, os alunos formulam e resolvem problemas. Eles também são responsáveis pela coleta de informações e simplificação das situações-problema.*

Diante das várias metodologias utilizadas para trabalhar os conteúdos matemáticos, a Modelagem vem sendo uma das possibilidades que pode contribuir bastante para aprendizagem dos alunos, permitindo que o mesmo construa e analise o conhecimento científico que ora se estuda, adquirindo a melhor compreensão da matemática de forma dinâmica e participativa, havendo discussão sobre as relações e entidades matemáticas, sobre suas validades, contribuindo para uma não aceitação da aprendizagem sem questionamento.

Assim, Brondani e Rodrigues (2006, p. 2) acreditam que a “Modelagem Matemática consolida-se como uma alternativa dotada de muita criatividade, audácia e significância, visto que a criação de modelos matemáticos proporciona ao modelador um contato expressivo da Matemática com o meio em que ele está inserido cotidianamente”.

Esses três processos didáticos de desenvolver a Modelagem na sala de aula propostos por Barbosa (2004) possuem suas especificidades e, conseqüentemente, modos diferenciados de aquisição de conhecimento.

Acredito que quando se pretende desenvolver a Modelagem em sala de aula é necessário objetivar a aprendizagem dos conteúdos matemáticos curriculares através de uma abordagem prática e contextualizada, já que “A Modelagem Matemática (...) visa inserir no contexto escolar a realidade dos educandos, fazendo-os perceber de forma associativa a importância de se conhecer a fundo normas e procedimentos matemáticos capazes de sanar dificuldades que se apresentam cotidianamente em suas vidas.” Assim, obter um modelo matemático no final do processo não é o fator de extrema importância no processo de modelagem, mas fazer com que os alunos compreendam o conteúdo matemático de forma significativa no decorrer do processo.

O essencial nesse processo é o aprendizado que os alunos irão adquirir com a intervenção, o qual propicia uma aproximação com situações-problema que podem contribuir para a formação acadêmica, tornando-os críticos e reflexivos.

## **2.5 – Porque se deve estudar Matemática nos cursos de Engenharia?**

A Matemática, enquanto disciplina integrante do currículo universitário tecnológico, abrange diversos cursos. Tais cursos, por sua vez, procuram construir conhecimentos que proporcionem uma formação propícia a serem profissionais críticos e reflexivos perante as situações da realidade social.

Desta forma, as idéias matemáticas devem ser trabalhadas através de problemas que envolvam situações reais, nas quais os alunos venham aprender o conhecimento matemático significativo e relevante. Contribuindo com essa visão, Pinheiro (apud Baraldi, 2003, p.28) acredita que

“todo cidadão, para ter acesso ao mundo do conhecimento científico e tecnológico, precisa possuir uma cultura matemática básica que lhe permita interpretar e compreender criticamente a matemática do dia-a-dia, (...) resolver problemas e tomar

decisões dos mais variados aspectos de sua vida, nos quais a matemática esteja presente”.

Contudo, os cursos tecnológicos abrem um leque de possibilidades para um educador matemático exercer um ensino dinamizado, de modo que o que se ensina é prático e contextualizado, já que os próprios cursos visam essas características. E os alunos podem sentir-se parte da sua própria construção profissional, sendo assim Pinheiro (2003, p. 30) sugeriu que

“é preciso que os próprios alunos possam construir novos modelos, bem como entender e questionar os modelos já existentes, como forma de interpretação da realidade, discutindo as suas influências e posicionando-se face aos tópicos abordados, de maneira tal que possam criticar artefatos produzidos pela ciência e tecnologia, tomando decisões fundamentadas nas suas reflexões em favor do contexto social”.

Dentro desse contexto, Rodrigues<sup>3</sup> (2007, p.4) aponta que o curso de Engenharia frente ao estudo de Matemática possui dois objetivos: *1- resolver problemas físicos e; 2- acumular conhecimentos suficientes para elaborar modelos matemáticos, sabendo identificar as suas limitações*. Levando em consideração esses objetivos, o autor ainda ressalta que de acordo com o propósito de cada profissional a Matemática se torna relevante, destacando que

“para um profissional que vai apenas utilizar uma técnica matemática, nem sempre a apresentação de uma demonstração matemática pode ser elucidativa, estamos a referir-nos à Matemática em si e não na sua aplicação em um ramo específico do conhecimento. No entanto, quando um profissional precisa aplicar uma técnica a uma situação real, nem tudo se passa como o que ele aprendeu, torna-se necessário fazer alguns ajustes, por exemplo, por pequenos que sejam, no modelo em que foi aprendido. Neste momento, entender o resultado matemático (...) pode ser de grande utilidade. Por isso, não é conveniente considerar a Matemática como se tratasse dum mero reservatório de técnicas”(Rodrigues, 2007, p.9).

Com o intuito de possibilitar ao aluno de engenharia uma aproximação do conhecimento matemático com o que se objetiva no próprio curso, foi que utilizei nas aulas de Cálculo III a Modelagem Matemática como estratégia de ensino e aprendizagem.

---

<sup>3</sup> Prof<sup>o</sup> do Instituto Superior de Engenharia de Lisboa

## **2.6 - Modelagem Matemática no Ensino Superior.**

A Matemática se faz presente em todos os níveis de ensino, e é considerada por muitos uma disciplina de extrema dificuldade, já que poucas vezes é abordada levando-se em consideração o curso em que está sendo trabalhada e, conseqüentemente, o cidadão que se pretende formar.

A presença das disciplinas de Matemática nos cursos de Ensino Superior abrange diversas áreas do conhecimento, tais como: as ciências naturais, as biológicas e as sociais. O que difere a Matemática nessas áreas é a maneira como pode ser ensinada e, conseqüentemente, aprendida, já que cada curso possui suas especificidades.

O ensino de Cálculo, em geral, é realizado pelo professor através de aulas expositivas, onde são apresentados: o conceito, exemplo e uma lista de exercícios repetitivos do assunto abordado. No entanto, esse modelo de ensino fundamentado no paradigma tradicional tem provocado altas taxas de reprovação, conforme diferentes pesquisas publicadas na literatura pertinente (Villarreal, 1999).

O que acredito que acontece no ensino de matemática de Nível Superior é que a maioria dos professores, responsáveis pelas disciplinas de um modo geral e, em particular pelas disciplinas de Cálculo, foi submetido a uma formação pedagógica fundamentada no tripé: conceito, exemplo e exercício e que dessa maneira simplesmente reproduzem em sala de aula o mesmo modo como foram formados. Este tipo de atitude a meu ver, reflete-se no baixo interesse dos alunos em aprender Cálculo.

Quando os alunos optam por ter uma formação profissional, onde o que deve ser apreendido é de ordem prática e o professor acaba por ensinar somente teoria sem vínculo a conhecimentos práticos, aplicativos e interdisciplinares, acaba por não possibilitar um aprendizado ao aluno que venha a contribuir para sua futura atuação prática.

Assim, ressalto que é necessário rever o papel do professor e do aluno nos processos de ensino e aprendizagem, mas, nessa perspectiva, novas estratégias de aprendizagem devem ser vividas pelo professor, de forma que ele deixe de ser considerado o transmissor de conhecimento, passe a ser mediador de aprendizagem, e o aluno, por sua vez, deixe de ser um receptor passivo, sem senso crítico em relação ao conhecimento que estuda, mas tenha uma postura participativa, indagadora, podendo, assim, construir seu próprio conhecimento, garantindo sua autonomia em tomar decisões sejam em situações matemáticas ou não.

É nessa direção que as diversas tendências da Educação Matemática que visam o aprendizado podem minimizar as deficiências do ensino de Matemática, em que os alunos possam sentir-se responsáveis pelo desenvolvimento das atividades realizadas dentro e fora da sala de aula.

Este é um desafio que a Universidade deve cumprir nos dias atuais, na perspectiva que almejamos para a formação dos alunos e para a prática docente constituída no âmbito da Educação Matemática.

Desta forma, as diversas tendências do ensino da matemática, têm mostrado resultados positivos no aprendizado dos alunos e na condução das atividades em sala de aula. Em especial, a

“Modelagem Matemática vem ocupando amplos espaços nas discussões a respeito das tendências da Educação Matemática. Ao oportunizar, por intermédio de práticas evidenciadas por muitos pesquisadores desta área do conhecimento uma metodologia diferenciada de ensino que prima pela qualidade e melhoria efetiva do processo de ensino e aprendizagem da Matemática (...)” (Brondani & Rodrigues, 2006, p. 1).

Nesse sentido, procurei investigar como o uso da Modelagem Matemática pode contribuir no aprendizado dos alunos de Engenharia, tendo como objetivo analisar como acontece o aprendizado.

Desta forma, tive a preocupação de motivar os alunos com atividades contextualizadas. Procurei recorrer às aplicações com o propósito dos alunos criarem ligações necessárias dos conteúdos já estudados nas disciplinas de Cálculo I e II e os novos conteúdos de Cálculo III.

Essa foi uma maneira que vislumbrei para abranger as necessidades para a formação crítica do cidadão, levando o aluno a se interessar em aprender matemática, de forma não-linear, ativa. Além disso, o aluno fica sendo o principal ator do processo.

O professor, por sua vez, torna-se co-participante, mediador do conhecimento, que ora se estuda procurando não se limitar num currículo que tem a cumprir, ou numa abordagem única do livro didático, atendendo, pois, ao ensino atual. É evidente que o professor não terá uma mudança de postura e aceitação tão rápida, pois mudar de paradigma é um processo, certas vezes, com muitas resistências e incertezas.

Considerando o que diz a literatura, a Modelagem Matemática pode ser entendida tanto como um *método científico* (Bassanezzi, 2002, p.15), como também *estratégia de*

*ensino e aprendizagem*. Na intenção de abordar Modelagem Matemática como estratégia de ensino e aprendizagem, considero que o processo possui ampla oportunidade de criatividade, a qual para os alunos não deixará de ser um método ou caminho para fazerem ciência/matemática.

Alguns autores acreditam que a Modelagem Matemática pode ser inserida no currículo escolar, justificando através de suas pesquisas que ela promove, dentre muitos fatores, a motivação, a facilitação de aprendizagem, a preparação para utilizar a matemática em diferentes áreas, o desenvolvimento de habilidades gerais de exploração, compreensão do papel sócio-cultural da matemática (Bassanezzi, 2000, p. 3).

Refletindo acerca dessas justificativas acredito que ensinar matemática vai além de aprender o conteúdo escolar. É também a oportunidade de formar o aluno para ser crítico em relação ao que lhe é ensinado.

Trazer a Modelagem Matemática para a sala de aula proporciona ao aluno aprender a Matemática, antes tida sem significado e descontextualizada, de outra forma, através de temas contextualizados. Essa estratégia de ensino e aprendizagem, por ser desconhecida por muitos professores, gera conseqüentemente uma não compreensão do que seja a Modelagem Matemática, em que situação ela pode ser utilizada e como utilizá-la.

Vislumbrando o interesse pela Modelagem Matemática em minimizar a crise em que se encontra o ensino da matemática, crise que resulta em baixos conceitos dos estudantes em provas do tipo ENEM, PROVÃO entre outros. Acredito que a construção do conhecimento do aluno através dessa estratégia não segue uma seqüência rígida de conteúdos, pois o interesse enquanto ensino e aprendizagem está no processo que levará o aluno a adquirir conhecimentos, sejam eles do início, meio ou fim do conteúdo programático proposto pela coordenação do curso, fazendo com que o aprendizado seja espontâneo de modo que os assuntos aparecem sem imposição.

## **2.7 - O papel do professor e do aluno diante da utilização da Modelagem Matemática nas aulas de Cálculo.**

Acredito que é necessário rever o papel do professor e do aluno no processo de ensino e aprendizagem.

Considerando que o professor universitário diante da Modelagem Matemática enquanto estratégia de ensino e aprendizagem, deve possuir um papel diferente do efetuado

do ensino dito tradicional; de modo que a Modelagem vem a ser uma alternativa para o professor que pretende propor mudança em sua prática. Assim, “*O professor terá substituído seu papel exclusivo de transmissor de informações para o de mediador pedagógico ou de orientador do processo de aprendizagem de seu aluno*” (Teodoro, 2002, p. 83).

Levando em consideração essa mudança, é momento do professor propiciar em sala de aula um ambiente no qual a troca de conhecimento venha a ser parte de quase todo processo de desenvolvimento das atividades.

Acredito que a utilização da Modelagem Matemática em sala de aula como estratégia de ensino e aprendizagem pode propiciar ao aluno uma melhor compreensão dos conceitos que nunca compreenderam e interesse em poder descobrirem o novo de forma não-estática. Nessa intenção, Teodoro & Vasconcelos (2003, p. 85) nos diz que:

“A aprendizagem universitária pressupõe, por parte do aluno, aquisição e domínio de um conjunto de conhecimentos, métodos e técnicas científicas de forma crítica. Iniciativa para buscar informações, relacioná-las, conhecer e analisar várias teorias e autores sobre determinado assunto compará-las, discutir sua aplicação em situações reais (..)”.

Assim, acredito que a aprendizagem é um fator a que se deve dar ênfase ainda maior, pois no ensino superior espera-se que haja um desenvolvimento de um cidadão crítico e reflexivo comprometido com vários aspectos, como o “desenvolvimento de suas capacidades intelectuais, de pensar, de raciocinar, de refletir, de buscar informações, de analisar, de criticar, de argumentar, de dar significado pessoal às novas informações adquiridas, de relacioná-las, de pesquisar e de produzir conhecimento” (Teodoro, 2003, p. 82).

Nesta visão, busco utilizar a Modelagem para investigar as contribuições por ela proporcionada, no aprendizado dos alunos, já que é um fator importante no processo de ensino e aprendizagem, possibilitando o conhecimento da sua realidade, a fim de promover uma discussão, inquietação e conclusão na utilização da matemática. O fundamental, no processo de ensino e aprendizagem na utilização da modelagem está no fato de provocar questionamentos e indagações.

Assim, a Modelagem como uma estratégia de ensino e aprendizagem proporciona “esta ligação da matemática escolar com a matemática da vida cotidiana do aluno faz[endo]

um papel importante no processo de escolarização do indivíduo, pois dá sentido ao conteúdo estudado, facilitando sua aprendizagem e tornando-a mais significativa” (Machado Júnior e Santo, 2004, p. 2).

Trazer a Modelagem na perspectiva da Educação Matemática para a sala de aula universitária proporciona ao aluno aprender os conteúdos matemáticos das disciplinas através de temas contextualizados, sem ter que ficar utilizando somente os modelos tradicionais de ensino, que reflete, segundo Villarreal (1999, p.4) “[no] ensino de cálculo (...) algoritmizado, [onde] sua aprendizagem se reduz conseqüentemente à memorização e aplicação de uma série de técnicas, regras e procedimentos, que terminam por algoritmizar o próprio aprendizado”.

Assim, oportuno ao conhecimento dos leitores o que Bassanezzi defende com relação à Modelagem no âmbito da Educação Matemática:

“No setor educacional, a aprendizagem realizada por meio da modelagem facilita a combinação dos aspectos lúdicos da matemática com seu potencial de aplicações. E mais, com este material, o estudante vislumbra alternativas no direcionamento de suas aptidões ou formação acadêmica” (Bassanezzi, 2002, p. 16).

A Modelagem, por sua vez, pode ser inserida no currículo escolar, de modo que ela promova motivação, facilitação de aprendizagem, preparação para utilizar a matemática em diferentes áreas; não sendo mais o professor o autor principal do processo de ensino e aprendizagem, e sim, a interação professor-aluno.

Contudo, essa estratégia favorecerá ao Ensino Superior um ambiente propício a uma aprendizagem que estabeleça relações da Matemática com as outras áreas de conhecimento. Desta forma, Ferruzzi et al (2004, p. 1954) aponta argumentos que podem ser utilizados para justificar a introdução de atividades de Modelagem no currículo de Matemática:

- O desenvolvimento de aspectos sociais: [a] interação dos indivíduos pode beneficiar mutuamente as pessoas que se encontram em um mesmo nível de desenvolvimento cognitivo, mas que analisam uma determinada situação com perspectivas diferentes. As atividades desenvolvidas em grupo podem proporcionar o desenvolvimento do senso de responsabilidade, a auto-estima, a cooperação e a criticidade.
- O reconhecimento do papel da Matemática na sociedade: A matemática tem sido utilizada como argumento para apresentar sugestões e soluções a problemas

políticos e sociais. (...) é importante que todo indivíduo conheça e reconheça o papel importante que a Matemática tem na vida, seja ela no âmbito acadêmico, profissional ou social.

- Aquisição de conceitos matemáticos e suas aplicações: As dificuldades encontradas pelos alunos no aprendizado da Matemática ultrapassam os limites dos ensinos fundamental e médio, chegando ao ensino superior. (...) Por outro lado, se o aluno não teve a oportunidade durante a vida acadêmica, de participar ativamente (...) não conseguirá solucionar os problemas encontrados no setor educacional. Assim, é preciso uma educação que incentive a resolução de problemas mostrando onde e como se aplica a Matemática. A aplicação de conceitos em situações do dia-a-dia exige que essa capacidade seja desenvolvida e ainda, que devemos trabalhar em sala de aula com “verdadeiras situações problemas”.
- Desenvolvimento do conhecimento reflexivo: (...) a Matemática intervém na realidade quando nos oferece não apenas discussões de fenômenos, mas também modelos para a alteração do comportamento. (...) agimos de acordo com a Matemática, e diante disso, entende que é necessário desenvolver uma competência crítica nos alunos (...). Essa forma específica de saber está relacionada com uma dimensão do conhecimento.
- Processos cognitivos desenvolvidos pelos alunos: (...) o conhecimento construído através dos modelos é um saber contextualizado e com significado. O aluno é agente desse processo de construção, onde ele observa, coleta dados, procura soluções e toma decisões. Se o conceito for construído pelo aluno será facilmente resgatado quando necessário.

Ao mesmo tempo em que se encontram pontos favoráveis, Bassanezzi (2002, p. 38) destaca que há algumas dificuldades encontradas quando se utiliza a Modelagem Matemática no processo de ensino e aprendizagem, como por exemplo: *a falta de tempo, a inércia dos estudantes e a inexperiência do professor*. O que não foi diferente na turma que realizei a pesquisa, pois o ambiente de sala de aula é por si só complexo, já que os alunos possuem diversidade na forma de pensar, de organizar as idéias, bem como a cultura que

está arraigada em relação à forma como é ensinado e aprendido o conhecimento matemático, entre outros.

Compreendo que alguns desafios serão enfrentados pelos professores e alunos quanto ao uso da Modelagem em sala de aula, na medida em que os mesmos não possuem familiaridade com essa nova estratégia de ensino e aprendizagem:

“Essas práticas de Modelagem trazem alguns desafios à prática docente devido aos novos papéis desempenhados pelo professor e pelo aluno, ao primeiro cabe de mediador do processo e ao segundo de participante ativo na condução desse ambiente de aprendizagem” (Oliveira, 2006, p. 2)

Assim, acredito que é necessário envolver o aluno no processo desde o início, procurando conhecer deles as dificuldades encontradas durante o curso e as suas expectativas com relação à disciplina de Cálculo que se propõe utilizar a Modelagem Matemática como estratégia de ensino e aprendizagem.

Bassanezzi (2002) espera que os obstáculos para implementação dessa estratégia de ensino e aprendizagem possam ser minimizados quando se adapta à sala de aula, de acordo com o nível de ensino, de modo que os conteúdos matemáticos sejam desenvolvidos durante o processo de modelagem vinculado a problemas que proporcionem aos alunos motivação e interesse no aprendizado da Matemática.

Para Barbosa (2003), a atividade escolar, quando trabalhada em um ambiente de aprendizagem é propícia à utilização da Modelagem, sendo, pois, colocadas algumas condições que propiciam determinadas ações e discussões. Para o autor o ambiente de Modelagem está associado a problemas e investigação.

Com base nas teorias acima enfatizadas e reflexões acerca das mesmas, é que realizei a pesquisa através da Modelagem, devido acreditar que possa possibilitar um dinamismo na condução das atividades contextualizadas. No próximo capítulo farei uma apresentação da pergunta que norteou minha pesquisa, os objetivos que pretendi alcançar e a abordagem dos caminhos para o desenvolvimento da pesquisa e das atividades que realizei.

## **CAPÍTULO III**

### **TRAÇANDO CAMINHOS PARA A INVESTIGAÇÃO**

#### **3.1 – Introdução**

Neste capítulo apresento a metodologia implementada durante a pesquisa para coletar os dados tendo em vista que é uma:

“(...) forma de conhecer o mundo que se materializa fundamentalmente através dos procedimentos conhecidos como qualitativos, que entende que o conhecimento não é isento de valores, de intenção e de história de vida do pesquisador, e muito menos das condições sócio-políticas do momento” (Borba, 2004, p.3)

Destaco os sujeitos da pesquisa, a maneira utilizada para implantação da estratégia e a estruturação das atividades de Modelagem, o desenvolvimento no ambiente, bem como os procedimentos metodológicos utilizados para coletar os dados e, por fim, a maneira como estes foram analisados.

Vejamos, a seguir, o que norteou a minha pesquisa e os objetivos por ela designados.

#### **Pergunta Inicial**

Como a Modelagem Matemática pode contribuir no processo de aprendizagem dos alunos da disciplina Cálculo III – Equações Diferenciais Ordinárias (EDO) – em um curso de Engenharia da Computação?

#### **Objetivo Geral**

Análise do processo em função da geração de um ambiente de aprendizagem dos alunos da disciplina Cálculo III do curso de Engenharia da Computação quando a Modelagem Matemática é utilizada como gerador do ambiente de ensino e aprendizagem.

## **Objetivos Específicos**

- 1) Identificar as dificuldades encontradas pelos alunos na aprendizagem dos conteúdos das disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral de uma e várias variáveis, em semestres anteriores, a partir do Cálculo III;
- 2) Identificar as expectativas dos alunos com relação ao processo metodológico e a condução da disciplina Cálculo III;
- 3) Analisar o desenvolvimento dos alunos durante a realização das atividades de Modelagem Matemática;
- 4) Conhecer dos alunos quais as contribuições que a Modelagem Matemática pôde proporcionar ao seu aprendizado.

## **Caminho Traçado**

Durante a pesquisa procurei averiguar a concepção dos alunos, de Engenharia da Computação, quanto ao uso da MM<sup>4</sup> no ensino de EDO, refletindo sobre o que os alunos esperam em seus aprendizados, da utilização de um processo metodológico “novo” e a condução das atividades em sala de aula realizadas durante as aulas regulares.

A partir de dados coletados, analisei a contribuição do uso da MM no sistema superior de ensino. Para isso, utilizei para a investigação os relatos obtidos na pesquisa por ser uma escolha metodológica que está adequada aos objetivos.

## **A coleta de dados da pesquisa**

Para investigar o proposto na pesquisa busquei desenvolver 4 (quatro) atividades de modelagem, em uma turma do turno matutino com um total de 20 (vinte) alunos de Engenharia da Computação da Universidade Federal do Pará.

Foram utilizadas para a análise das concepções dos alunos e análise das atividades de Modelagem<sup>5</sup> realizadas as técnicas a seguir: questionários semi-estruturados e registros escritos dos alunos.

---

<sup>4</sup> Abreviação de Modelagem Matemática

<sup>5</sup> Durante as realizações das atividades foram realizadas gravações em áudio.

**a) Questionários semi-estruturados<sup>6</sup> realizados com os alunos.**

- Pré-atividade: objetivando conhecer as inquietações dos alunos em relação ao ensino de Cálculo I e II, as dificuldades por eles encontradas e as expectativas com relação à disciplina de Cálculo III.
- Pós-atividade: objetivando identificar o posicionamento dos alunos em relação ao aprendizado, utilização do processo metodológico e à condução das atividades em sala de aula durante as aulas.

**b) Registros escritos dos alunos**

Das atividades de Modelagem realizadas com grupos de 3 alunos:

- A primeira atividade: o objetivo era identificar que relações os alunos faziam dos temas contextualizados com relação aos conhecimentos de física e cálculo;
- As três últimas atividades: o propósito era analisar o desenvolvimento dos alunos nas atividades enquanto realizavam a construção do processo de Modelagem.

Os questionários foram formulados por mim e as atividades de Modelagem foram escolhidas de modo que o tema e a questão proposta não tiveram participação direta dos alunos. Na 1ª atividade hipóteses foram levantadas pelos alunos e nas outras três atividades as hipóteses foram lançadas por mim.

Durante a realização das atividades a participação dos alunos no início da pesquisa não foi tão expressiva, chegando a ponto de alguns alunos se recusarem a participar, tornando-se ausentes nas aulas. Da 2ª atividade, em diante, quando começaram a perceber que o conteúdo da disciplina estava sendo enfatizado, a participação dos alunos foi aumentando significativamente.

Quando propus a reunião em grupos, eles se dispuseram e as discussões foram bem produtivas, questionamentos eram feitos entre eles e quando as dúvidas eram unânimes no grupo, pediam que eu me aproximasse do grupo para possíveis esclarecimentos ou sugestões, sendo as sugestões bem mais freqüentes.

Destaquei que muitos dos alunos que se recusaram no início em participar foram compreendendo o processo que estava sendo desenvolvido e se envolveram nas atividades.

---

<sup>6</sup> Seguem em anexo

## **Análise dos dados**

Constitui-se parte da dissertação as análises dos questionários semi-estruturados, dos registros escritos das atividades de Modelagem e as observações descritas no diário de campo, de acordo com os questionamentos, reflexões, hipóteses, conclusões feitas acerca das leituras bibliográficas e das colocações dos alunos no decorrer da pesquisa.

Realizada a coleta dos dados e com o embasamento teórico em relação à temática Modelagem no Ensino Superior (Bassanezzi, 2002), resolvi analisar:

- os questionários semi-estruturados feito pelos alunos, agrupando os fatores que mais evidenciaram em relação à proposta, criando três categorias: *condução das atividades*, *aprendizado* e *processo metodológico*. Tais categorias foram escolhidas por mim devido serem fatores pertinentes nas colocações dos alunos e por serem vinculados a proposta da pesquisa. Nestas categorias busco registrar as respostas dos alunos e fazer uma reflexão em relação a essas respostas, ao mesmo tempo em que, busco dialogar com os referenciais teóricos.
- Os registros escritos das atividades de Modelagem foram organizados de acordo com as fases propostas por Bassanezzi (2002), e à medida que anexava os registros descrevia suas análises e os resultados de cada atividade, para então, compor minhas conclusões.
- As observações foram feitas durante as atividades enquanto os alunos discutiam as propostas em grupo, como também em conversas informais antes, durante e após as aulas. As anotações eram realizadas e analisadas a cada término das aulas.

### **3.2 – A Escolha Metodológica**

Como o objetivo desta investigação é analisar o processo de aprendizado dos alunos da disciplina de Cálculo III do curso de Engenharia da Computação quando a Modelagem Matemática é utilizada como estratégia no processo de ensino e aprendizagem, optei por fazer um relato sobre minha própria prática.

Para a investigação com a utilização da Modelagem como estratégia de ensino e aprendizagem busquei enquadrar no relato todo o processo de desenvolvimento da pesquisa, em relação aos sujeitos envolvidos, a estratégia adotada e os procedimentos utilizados para análise, os quais proporcionaram uma melhor reflexão em relação à proposta e execução da mesma.

Pretendendo alcançar o objetivo da pesquisa, observei e registrei<sup>7</sup> o desenvolvimento das atividades e as informações dos questionários aplicados para, então, descrever e analisar seus resultados, dando atenção aos desenvolvimentos feitos pelos alunos e às relações estabelecidas por eles com o processo de Modelagem Matemática.

A seguir, apresento os sujeitos da pesquisa, a disciplina, a relação entre o cálculo e a modelagem, bem como os dados coletados e a forma de registrá-los e o procedimento metodológico realizado nas atividades.

### **3.3 - Os alunos**

Os alunos, sujeitos da pesquisa, eram estudantes do segundo ano de Engenharia da Computação da Universidade Federal do Pará (UFPA) campus de Belém, e cursavam durante a pesquisa o terceiro semestre, que dentre as disciplinas estava o Cálculo Diferencial e Integral III, cujo conteúdo é Equações Diferenciais Ordinárias (EDO). Foi ministrada durante o segundo semestre de 2006. Os alunos, num total de 20 (vinte) participantes, estavam na faixa etária de 18 a 27 anos.

A escolha de trabalhar com essa turma de Engenharia da Computação estava pautada em dois pontos principais:

- A disciplina Cálculo III, já havia trabalhado em um semestre anterior, de maneira diferente da adotada na pesquisa do curso de Engenharia da Computação;
- Os alunos dos cursos tecnológicos visam um aprendizado com aplicações, segundo relato de um aluno dessa turma anterior a que realizei a pesquisa.

A partir da decisão de trabalhar com a Modelagem nessa turma, resolvi explicar aos alunos que iríamos realizar uma pesquisa para elaboração da dissertação de mestrado, e que para isso precisaria coletar dados no decorrer das aulas, ao mesmo tempo em que desenvolveria o conteúdo proposto na disciplina. Deixei evidenciado que a realização das atividades no decorrer da pesquisa fazia parte do processo de avaliação continuada da disciplina de Cálculo III.

Sugeri que se formassem grupos, mas a escolha de compor os grupos ficou por conta dos alunos, sem determinação nem categoria para formação, tendo como suposição um bom andamento e interatividade durante as atividades de Modelagem.

---

<sup>7</sup> Diário de Campo: em um caderno destinado ao registro das observações ocorridas durante as atividades e das minhas reflexões enquanto professora-pesquisadora da turma.

Desta forma, os resultados aqui apresentados são decorrentes da análise feita nos questionários e atividades realizadas pelos alunos durante o semestre letivo na Universidade.

Levei em consideração que os alunos poderiam manifestar disposição em realizar as atividades, mas não descartei a hipótese de haver estudantes que realizassem as atividades, apenas por fazer parte das avaliações e não fizessem espontaneamente, o que não consegui evitar que acontecesse.

### **3.4 – A disciplina**

A disciplina de Cálculo III, como uma das disciplinas obrigatórias no currículo do Curso de Engenharia da Computação, tinha a participação dos alunos em dois dias da semana com duas horas-aula a cada dia, uma na terça-feira e outra na quinta, nos dois últimos horários de aula da turma, de 11h às 12 h 50 min.

As atividades foram realizadas em grupo de alunos. Eles desenvolviam, em sala de aula, as atividades de Modelagem, de modo que primeiro, interpretassem o problema, depois, procurassem resolvê-lo e logo em seguida relatassem as atividades, de acordo com os questionamentos levantados; descrevendo seus posicionamentos diante da realização das atividades, mas caso não conseguissem concluir eles continuariam na aula seguinte, de modo que puderam pesquisar o assunto e trazer seus resultados para sala de aula.

Coletados os registros da primeira atividade, procurei realizar o processo de construção do modelo que, de certa forma, deveria ser feito pelos alunos. Por eles não conhecerem o processo de Modelagem, considerei importante apresentar o processo aos alunos, com o intuito de esclarecer muitas dúvidas que surgiram nos grupos. Assim como familiarizar os alunos com o processo de Modelagem. Para que muitas dessas dúvidas fossem esclarecidas, foi necessária minha mediação durante as discussões em grupo.

Nesse ambiente, eu, professora da turma, tornei-me também pesquisadora da minha própria prática.

### **3.5 – O Cálculo e a Modelagem**

Acreditando que a estratégia que me propus a desenvolver nas aulas de Cálculo seria algo “novo” para os alunos, tive a preocupação, antes de realizarmos o questionário e as atividades em sala de aula, de esclarecer aos alunos que trabalharíamos com a

Modelagem Matemática, e que isto era parte do desenvolvimento de uma pesquisa. Eu acreditava que, ao familiarizar os alunos com a maneira de ensinar e aprender o Cálculo, traria para a sala de aula um ambiente propício para coletar e analisar os dados da pesquisa.

Após apresentar a Modelagem Matemática como estratégia que utilizaríamos nas aulas, procurei identificar as dificuldades ainda existentes das disciplinas Cálculo I e II e as expectativas dos alunos em relação a disciplina Cálculo III, a qual foi feita a intervenção. A partir dessa identificação, resolvi iniciar as atividades no horário de aula estabelecido pela instituição desde o início do semestre, onde cada atividade pôde ser trabalhada entre 2 a 3 semanas.

A partir das questões que preparei, os registros serviram como uma forma dos alunos expressarem seus posicionamentos, esclarecendo o que não pôde ser observado durante a intervenção.

A escolha de trabalhar as atividades em grupo está no fato de propiciar interatividade entre os alunos, de modo que haja uma discussão no sentido de progredir e desencadear a construção dos conceitos de Cálculo via Modelagem Matemática.

Desta forma, para que tivesse um ambiente mais propício para a coleta dos dados, acompanhei durante as atividades o desenvolvimento dos alunos no contexto da aprendizagem matemática na sala de aula participando em grupos para, então, registrar fatos que iriam contribuir juntamente com os relatos e descrição das atividades.

Outros trabalhos já foram desenvolvidos na linha da Educação Matemática, com a utilização da Modelagem Matemática em disciplina de Cálculo Integral e Diferencial, dentre esses, destaco Mônica E. Villarreal (1999) em sua tese de doutorado, cujo título é *O pensamento matemático de estudantes universitários de Cálculo e tecnologias informáticas*.

### **3.6 – Os dados coletados e a forma de registrá-los**

Inicialmente, foi explicado o por quê de realizar e registrar as atividades feitas em sala de aula através da Modelagem Matemática. Escolhi técnicas de coletar tais dados, as quais foram: observações, questionários semi-estruturados e registros escritos dos alunos, que são comuns à pesquisa qualitativa.

### 3.6.1- As observações

Durante a investigação observei as discussões feitas pelos alunos quando desenvolviam as atividades de Modelagem e, ao surgirem dúvidas durante o processo de construção, eu era convocada por algum aluno, procurava mediar o conhecimento, de modo que possibilitasse contribuir com os alunos na evolução das discussões. Considerando que:

“(...) a atividade de observação (...) permite ao pesquisador ficar mais livre de julgamentos, uma vez que não o torna, necessariamente, prisioneiro de um instrumento rígido de coleta de dados ou de hipóteses testadas antes, e não durante o processo de pesquisa”. (Deslandes, 2007, p. 70)

Tais observações foram registradas no **diário de campo**, de modo que pudesse selecionar as mais relevantes no desenvolvimento das atividades de Modelagem, as falas dos alunos em conversas informais, bem como as minhas reflexões acerca desses dados.

### 3.6.2 - Os questionários pré-atividade<sup>8</sup> e pós-atividade<sup>9</sup>

Com o propósito de conhecer as inquietações dos alunos com relação ao ensino de Cálculo I e II, as dificuldades por eles encontradas e as expectativas com relação à disciplina, na qual fizemos a intervenção metodológica, apliquei na turma um questionário anterior à realização das atividades de Modelagem. Desta forma, cada aluno contribuiu nesse questionário com respostas que possuem focos semelhantes.

Outro questionário, que chamei de *questionário pós-atividade*, foi preenchido também pelos alunos após a realização das atividades de Modelagem, no qual responderam em relação à forma em que foi trabalhada a disciplina de Cálculo III na utilização da Modelagem, objetivando identificar que contribuições essa estratégia utilizada pôde trazer para sua formação, as dificuldades tidas durante a realização das atividades, ressaltando a diferença entre esse processo de ensino aprendizagem e os outros anteriormente utilizados nas disciplinas de Cálculo.

---

<sup>8</sup> Segue em anexo: Anexo 1

<sup>9</sup> Segue em anexo: Anexo 2

### 3.6.3 - Registros escritos dos alunos

As atividades de Modelagem foram registradas e serviram como fontes de dados contribuindo para que eu tivesse uma visão mais específica em relação ao desenvolvimento dos alunos no processo de ensino e aprendizagem com a utilização da Modelagem.

As informações contidas nesses registros foram importantíssimas, contribuindo para percepção da construção do conhecimento matemático dos alunos, juntamente com as gravações e observações que ocorriam em alguns momentos durante as atividades.

Ressalto que, durante o desenvolvimento das atividades, os alunos foram percebendo quais conhecimentos matemáticos não haviam aprendido e se estavam tendo dificuldades nas atividades e, concomitantemente, eu desenvolvia o papel de mediar o conhecimento, esclarecendo dúvidas de conceitos que foram ensinados em disciplinas de Cálculo I e II, não deixando que os erros permanecessem nas outras atividades ou depois de realizadas. Ao longo das atividades foram sendo trabalhados os conteúdos da disciplina, intercalando com *avaliações somativas*<sup>10</sup>.

### 3.6.4 -Analisando os dados

Realizada cada aula, procurei revisar os registros das atividades feitas pelos alunos e escutar as gravações,<sup>11</sup> para verificar se havia fatores que permitiam responder à pergunta de pesquisa, se havia regularidades nessas respostas. Desta forma, os questionamentos, dúvidas e inquietações demonstradas pelos alunos durante as atividades serviram de sustentação para a análise. Permitindo, assim, que as atividades seguidas fossem elaboradas para esclarecer as dúvidas dos alunos e levar à criação de hipóteses que pudessem contribuir para evolução no processo de construção do conhecimento de Cálculo com a Modelagem.

O procedimento para análise dos questionários e das atividades de Modelagem, depois de finalizadas as aulas, está definido nas seguintes etapas:

- 1- Analisar as respostas dos questionários respondidos pelos alunos selecionando os pontos que possuem regularidades e singularidade, que estão de acordo com o objeto de investigação da pesquisa, realizando comentários sobre a minha

---

<sup>10</sup> Entendo por avaliações somativas as que são feitas com o propósito de atribuir uma nota ou conceito relativo ao desempenho do aluno.

<sup>11</sup> Essas gravações foram feitas em áudio.

compreensão desses registros, criando três categorias que serão discutidas no 4º capítulo;

- 2- Diagnosticar através dos registros escritos o que foi desenvolvido pelos alunos nas atividades propostas por mim em sala de aula;

### **3.7 - O procedimento metodológico desenvolvido nas atividades**

Nesse trabalho utilizei atividades elaboradas por mim, mediante orientação do professor-orientador. Tais atividades permitiram que fossem efetuadas relações entre a Modelagem Matemática e os conteúdos de Cálculo pertencentes ao curso.

Com intenção de responder à pergunta inicial da pesquisa: Como a Modelagem Matemática pode contribuir no processo de aprendizagem dos alunos da disciplina Cálculo III –Equações Diferenciais Ordinárias (EDO) – em um curso de Engenharia da Computação? formulei quatro atividades:

A *1ª atividade*, denominada ‘As forças atuantes em um objeto em queda livre’, objetivou trabalhar o processo de modelagem até a fase de obtenção do modelo, o qual é classificado como uma equação diferencial de 1ª ordem, resgatando conceitos básicos de Cálculo já aprendidos por eles. Esta atividade foi desenvolvida durante duas aulas com os alunos.

Procurei nessa atividade diagnosticar que conhecimentos de cálculo e física os alunos conseguiam relacionar. Assim dividi a atividade em etapas:

- 1ª etapa: os alunos tiveram que ler o tema proposto, objetivando levantar questões a respeito desse tema;
- 2ª etapa: distribuídos em grupos de 3 (três) alunos, onde eles puderam discutir o tema e identificarem as relações entre os conteúdos de Física e Cálculo relacionados ao assunto;
- 3ª etapa: descrição de todas as hipóteses levantadas, em condições de tentar obter relações com o Cálculo;
- 4ª etapa: desenvolvimento do processo de Modelagem Matemática realizado por mim juntamente aos alunos para a obtenção do modelo, mostrando o conhecimento de Cálculo inserido no problema.

Aqui, os dados necessários para a construção do modelo matemático foram surgindo de acordo com as discussões feitas no grupo e foram utilizados para realizar a 4ª etapa da atividade. Desta forma, foram explorados os conceitos básicos úteis para desenvolver o processo de Modelagem, como também conceitos ainda não conhecidos por eles sobre Equações Diferenciais Ordinárias.

De acordo com as formas que Barbosa (2002) aponta para desenvolver atividades de Modelagem em sala de aula, nessa atividade adotei o caso 2, onde o aluno é responsável pelo levantamento de hipóteses, coleta de dados e resolução do problema; e o professor pela elaboração do problema.

A 2ª atividade, 'Fluxo de Corrente Elétrica', teve como objetivo utilizar o processo de construção do modelo, tendo em vista que os alunos já tinham conhecimento do processo de Modelagem, mas tinham que identificar as variáveis e compará-lo com o modelo encontrado na atividade 1, de modo que apontassem as semelhanças e diferenças entre os dois modelos. Nessa atividade não trabalhei resolução nem validação do modelo.

Também, nessa atividade os alunos puderam conceituar as equações encontradas como modelos nas duas atividades.

Essa atividade está de acordo com o caso 1 de Barbosa, no qual a escolha do tema, as hipóteses e os dados foram de minha responsabilidade.

Assim, a proposta de trabalhar essa atividade teve 3 etapas:

- 1ª etapa: os alunos puderam fazer leitura em grupos e discutirem sobre o tema visto em outra disciplina;
- 2ª etapa: a construção do modelo matemático, a partir das variáveis e constante identificadas nos dados do problema;
- 3ª etapa: com a finalidade de identificar a compreensão dos alunos com relação ao processo de Modelagem e conteúdo, formulei questões que proporcionem tal identificação.

Na 3ª atividade denominada 'Lei do Resfriamento de Newton' tivemos como objetivo desenvolver o processo de modelagem até a fase de encontrar a solução do modelo. Pudemos explorar nessa atividade conteúdos de Cálculo, como variáveis dependentes e independentes, constantes e técnicas de resolução como a identificação da Equação Diferencial Separável. Essa atividade foi trabalhada em duas aulas com grupos de alunos.

As etapas seguidas nessa atividade foram as seguintes:

- 1ª etapa: foi realizada uma leitura do tema para que identificassem os dados, já coletados por mim, levantando hipóteses do problema;
- 2ª etapa: os alunos formulam a equação encontrando o modelo, a partir da identificação das variáveis e constantes relacionando-as;
- 3ª etapa: inserção do novo conteúdo, nessa etapa foi necessária a intervenção do professor, de modo que fossem levantadas questões com o objetivo de fazer os alunos identificarem a técnica de resolução do problema de forma crítica.

Nessa atividade, eu, como professora-pesquisadora, tive um papel muito importante, pois além da escolha do tema, das hipóteses levantadas e dos dados coletados tive que mediar o conhecimento de Cálculo a partir da construção do modelo feito pelos alunos, de modo que compreendessem uma das técnicas de resolução do problema. Essa atividade corresponde ao nível 1 de Barbosa.

Na *4ª atividade*, intitulada ‘Misturas de Substâncias’ desenvolveu-se o processo de Modelagem em todas as fases. Utilizei nessa atividade alguns conteúdos de Cálculo, como a identificação do tipo de equação diferencial que é o modelo encontrado.

Para a realização dessa atividade, considerei que os alunos haviam entendido o processo para a obtenção do modelo, e que já sabiam identificar variáveis, mas após obter o modelo, puderam trabalhar com a resolução do problema e validação que eram fases pouco trabalhadas nas atividades anteriores, sendo assim distribuí nas seguintes etapas:

- 1ª etapa: leitura do problema, discussão em grupo, onde eles buscavam identificar as variáveis e encontrar o modelo;
- 2ª etapa: identificar que tipo de equação é o modelo encontrado para, então, definir qual técnica utilizar para a resolução;
- 3ª etapa: resolução do problema e interpretar a solução encontrada;
- 4ª etapa: a fase da verificação da validade do modelo encontrado, com auxílio do professor.

Os dados desse problema foram elaborados por mim e coube ao grupo de alunos construir o modelo, resolver o problema e verificar a validação do modelo, mas foi necessária a minha mediação para o desenvolvimento da fase de validação, já que esta fase ainda não tinha sido explorada.

Mostrada a proposta de realizar a pesquisa através dessa estratégia e os caminhos adotados para análise dos dados e o procedimento metodológico realizado nas atividades, passarei ao próximo capítulo apresentando os questionários pré-atividade e pós-atividade e as atividades realizadas com os alunos juntamente com suas análises e minha visão ao final.

## CAPÍTULO IV

### AS ATIVIDADES DE CÁLCULO ATRAVÉS DA MODELAGEM MATEMÁTICA

#### 4.1 – Introdução

Neste capítulo apresento os questionários aplicados na turma de Engenharia da Computação antes da realização das atividades, fazendo uma descrição das categorias identificadas nas respostas dos alunos, ressaltando comentários acerca de tais respostas.

Serão, também, parte desse capítulo as atividades de Modelagem realizadas nessa turma. Nestas atividades procurei coletar os registros escritos feitos pelos alunos, quando busco conhecer seus conhecimentos de Cálculo e Física e se eles conseguem relacionar com o tema escolhido, utilizando o processo de Modelagem.

A atenção a essas respostas do questionário pré-atividade foi importante, pois naquele momento considerei que conhecer o que os alunos pensam e esperam das aulas de Cálculo poderia contribuir significativamente para o desenvolvimento das atividades de Modelagem, pois eles poderiam expressar sentimentos, dificuldades e mostrar de que maneira eles gostariam que fosse aprendido o Cálculo, o que viabilizaria o aprendizado do conteúdo anterior, ainda não aprendido, paralelo ao novo conteúdo via Modelagem Matemática.

#### 4.2- Analisando o questionário pré-atividade

Considerei importante realizar esse tipo de coleta e nela pude com a análise identificar três categorias em relação às inquietações dos alunos: a) **quanto à condução das atividades**, b) **quanto ao aprendizado** e c) **quanto ao processo metodológico**.

Algumas das preocupações desses alunos aqui expostos são resultados de um questionário anterior à realização das atividades. Vejamos nos relatos dos alunos as categorias que se destacam:

##### a) Quanto à condução das atividades

Nos questionários os alunos deixam evidente a insatisfação com relação à **condução das atividades** nas aulas de Cálculo:

*“Existem professores realmente comprometidos com a prática de ensino, enquanto que alguns professores não são capazes de tomar uma postura correta e que auxiliie os alunos”*

*“O que falha são alguns professores que não têm uma boa didática...”*

*“O curso apresenta matérias muito importantes, (...), ministradas por professores que não as sabem passar, ou que não as inserem no contexto do curso...”*

*“Falta de vontade(didática) dos professores”*

*“As maiores dificuldades foram os professores não conseguirem passar a matéria para os alunos”*

*“Grande maioria do corpo docente esqueceu que está formando pessoas! Eles não nos ajudam a alcançar o prazer que existe na ciência”*

*“A falta de professores em determinadas disciplinas, a falta de empenho nas aulas (...)”*

*“... que seja repassado [conteúdo] de forma firme (sem dúvidas), e claro, possibilitando a interação aluno-professor, afim de por fim às dúvidas e tornar o entendimento mais claro e o aproveitamento muito melhor que os anteriores...”*

Através desses registros pude identificar que os alunos, além de terem a prática do professor na condução das atividades em sala de aula como fator relevante no aprendizado, também destacam a falta de didática desses profissionais que estão na Universidade para exercerem o papel de professor, tendo por responsabilidade auxiliar os alunos em sua formação profissional e pessoal. Gerando, assim, insatisfação quando percebem que existe pouco compromisso por parte do professor.

Refletindo sobre o que pensam os alunos pude considerar que a condução das atividades se torna essencial quando o professor aproxima o aluno do assunto a ser estudado e aprendido, mediando o conhecimento necessário à formação dos alunos, mas para isso, o professor deve possuir uma boa formação. Contudo, “não basta conhecer proposições e teorias. É preciso estudo, trabalho e pesquisa para renovar e, sobretudo, reflexão para não ensinar “o que” e “como” lhe foi ensinado” ( BARBOSA, 2005, p. 252).

## b) Quanto ao aprendizado

As preocupações dos alunos com relação ao aprendizado se evidenciam nos relatos a seguir:

### ➤ Conhecimentos prévios

*“A falta de base me fez ter um desempenho regular na matéria de Cálculo”.*

*“Para dar seguimento ao estudo dos Cálculos, precisamos ter tido uma boa base, no que diz respeito a conceitos, logo, todo o estudo por si só, já é mais do que importante, é necessário”.*

*“Espero sentir falta de base do Cálculo I e II, para que então eu possa realmente estudar”.*

*“Cheguei a um curso de Cálculo III com muitas deficiências em relação aos conteúdos anteriores. Se fosse verificar meus conceitos e desempenhos em Cálculo, seria uma situação bem complicada”.*

*“Para conseguir êxito em Cálculo III terei que me esforçar duplamente. Acredito que com persistência conseguirei me sair bem”.*

*“Pretendo entender e aprender Cálculo III, mesmo sabendo ser necessário estudar tópicos dos cálculos anteriores”.*

*“Melhorar bastante e ampliar meus conhecimentos, para que mais tarde possa ser utilizado de forma correta”.*

*“Considerarei importante todo o conteúdo estudado e aprendido, pois vou precisar desses conhecimentos para assuntos posteriores”.*

*“Vi que, de alguma forma, tudo que aprendemos será utilizado posteriormente”.*

*“A base de qualquer Engenharia é o Cálculo, então essas disciplinas nos ajudarão a ter uma boa formação”.*

*“Espero aumentar meu conhecimento”.*

*“Considero que meu curso de Cálculo até agora é ruim. Tanto por parte minha, que não fui aplicado o suficiente, até porque não gostava muito da matéria, por não ver aplicabilidade nela (não que ela não tenha, eu é que não possuo essa visão)”.*

*“Acho que foi importante porque, certamente, nós vamos precisar aplicar esse conteúdo no decorrer do curso”.*

*“Eu rezo para que diferentemente do semestre passado, eu aprenda alguma coisa”.*

*“Consegui, apesar das dificuldades, sair com Bom e Excelente. Foi preciso muito estudo e esforço, mas confesso que seria necessário uma maior orientação/estudo em cima dos Cálculos”.*

*“Resolvia questões de maneira mecânica, objetivando apenas conseguir resolver a prova (certa professora contribuía com essa visão), mesmo não tendo fundamentação teórica. Neste Cálculo, pretendo corrigir minhas deficiências e solidificar uma base teórica, que me permita entender, raciocinar e refletir em cima desse conhecimento, que é o que considero importante...”.*

*“Dificuldade de aprendizagem, devido à fraca capacidade de ensinar do professor”.*

*“Como não sentia interesse dos professores em ensinar, também sentia pouca vontade de estudar”.*

*“Espero ter um aprendizado e que a professora consiga passar o conteúdo da melhor forma possível e com uma boa convivência com a turma”.*

*“Espero que essa matéria e a professora despertem meu interesse na matéria e que possamos sentir interesse da professora em ministrar as aulas”.*

*“... espero que a professora seja atenciosa e competente, e motivada, afim de que haja motivação aos alunos e os façam aprender...”.*

Como pude analisar em seus relatos, os alunos não possuem sua atenção voltada, somente, ao novo conteúdo que irão aprender, mas eles também se preocupam em aprender os conteúdos vistos nas disciplinas de Cálculo I e II. Consideram que ter a base segura é facilitar a aprendizagem dos novos conteúdos.

Refletindo sobre a condição de aprendizagem, Huete e Bravo, (2006, p. 73) dizem que: “A aprendizagem é um processo no qual se descobre uma combinação de regras aprendidas com antecedência”. Desta forma, os assuntos que os alunos deveriam ter aprendido no Cálculo I e II seriam regras que antecederiam ao assunto do Cálculo III.

Mesmo com essa “deficiência”<sup>12</sup>, alunos reconhecem que os assuntos de Cálculo terão utilidades em disciplinas posteriores e, desta forma, não esperam que essa utilidade, ou melhor, aplicabilidade possa ser uma estratégia adotada na própria disciplina de Cálculo III.

---

<sup>12</sup> Palavra utilizada por um aluno em seu registro expressando a sua falta de aprendizado.

Enquanto isso, alguns alunos consideram seu aprendizado fracassado e esperam aprender alguma coisa, outros dizem que aprendiam resolvendo mecanicamente as questões, pois o objetivo nessas disciplinas era a avaliação, sendo assim, os alunos mostram-se insatisfeitos, querendo que a partir da disciplina Cálculo III aprendam os assuntos de modo que possam refletir e discutir sobre o que lhe é ensinado.

O professor também é condição para o aprendizado, levando os alunos a considerarem que se o professor não tiver interesse, motivação e interação em sala de aula com os alunos, o aprendizado fracassará.

### c) Quanto ao processo metodológico.

Em relação ao **processo metodológico adotado** nas aulas de Cálculo:

*“...que eu aprenda muitas coisas úteis e práticas”.*

*“... que seja usada uma metodologia diferente...”.*

*“... que se contextualize o cálculo com problemas práticos...”.*

*“... que tenha aplicabilidade no meu curso...”.*

*“...aprender aplicações de EDO...”.*

*“O tempo e o método do professor dificultou o aprendizado. Muito assunto, além do professor não possuir uma boa didática”.*

A partir das primeiras análises dos resultados do questionário, compreendo que a maioria dos alunos espera ter um ensino diferenciado do tradicional, que o processo metodológico adotado nas disciplinas de Cálculo I e II não foi satisfatório ao aprendizado dos alunos, ou seja, não é mais suficiente escrever o assunto no quadro, colocar exemplos resolvidos e listar exercícios análogos para resolução. É preciso envolver o aluno na construção do conhecimento, buscando estabelecer relações com situações-problemas. Isso gerou um incentivo maior para dar continuidade à realização da pesquisa, pois “a Modelagem Matemática começa com um grande problema de ordem prática ou de natureza empírica e, depois, busca a matemática que deveria ser utilizada para ajudar a resolver a situação problemática. Assim, a metodologia consiste em uma análise de problemas reais e a busca de modelos matemáticos apropriados para resolvê-los” (Mendes, 2006, p. 50).

Diante disso, as atividades de Modelagem Matemática foram realizadas e no decorrer de seu desenvolvimento, percebi que houve envolvimento dos alunos, a interação nos grupos e a busca em aprender o novo conhecimento, ao mesmo tempo, que melhoravam o entendimento dos conhecimentos já existentes

Para esse trabalho serão abordados temas que são propostos em livros de Cálculo sobre EDO (Boyce & Diprima, 2004), dos quais faço adaptações para então realizar uma atividade de Modelagem Matemática. Mas para isso foi preciso ter “(...) ausência de preconceitos e disposição para aceitar e implementar novas idéias, ter atitudes de responsabilidade baseada em princípios éticos e ter entusiasmo e coragem para adotar atitudes novas” (Bicudo, 2005, p. 252).

Levando em consideração tais evidências ressaltadas pelos alunos, apresento as atividades de Modelagem, as quais desenvolvi na turma para diagnosticar os conhecimentos matemáticos dos alunos.

#### **4.3 - Compreendendo o desenvolvimento da 1<sup>o</sup> atividade conforme as etapas utilizadas**

Para aplicar a primeira atividade de Modelagem em sala de aula fiz uma distribuição dos alunos em grupo de 3 (três) alunos. Como foi ressaltado anteriormente, não utilizei critérios para formação desses grupos, de modo que as contribuições para a investigação viessem também das discussões por eles realizadas. Desenvolvi a atividade utilizando as fases destacadas no capítulo anterior, mas não pretendi nessa atividade “executar” todos os passos sugeridos por Bassanezzi (2002): Experimentação, Abstração, Resolução, Validação e Modificação, pois considereei que o processo de aprendizagem viria evoluindo conforme as atividades fossem sendo desenvolvidas.

##### **1- Problema Não-Matemático**

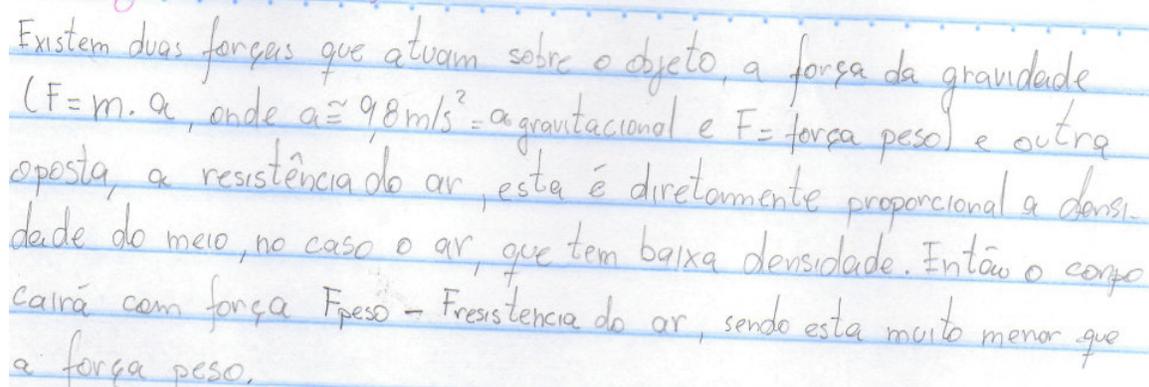
##### **1<sup>a</sup> etapa: Experimentação - Dados Experimentais**

O tema *As forças atuantes em um Objeto em Queda Livre* tem por objetivos melhorar o conhecimento de Cálculo e auxiliar os alunos no entendimento do processo de Modelagem, já que no questionário pré-atividade eles relatam que possuem *base fraca de Cálculo* e que gostariam de *solidificar essa base*. Essa atividade é uma adaptação de uma atividade proposta no livro sobre EDO (BOYCE & DIPRIMA, 2004). Desta forma, os

dados experimentais foram expostos pelos alunos em sala de aula de acordo com conhecimentos que já possuíam, não sendo realizada pesquisa extra classe nem experimentadas através de processos laboratoriais.

Acreditando que esse problema poderia proporcionar aos alunos um bom entendimento do processo de Modelagem, ao mesmo tempo em que viria solidificar a base dos conhecimentos de Cálculo, deixei que eles pensassem sobre o problema de modo que eu pudesse identificar que conhecimentos eles possuíam em relação ao tema proposto. Portanto, seriam registradas<sup>13</sup> as idéias por eles tidas após a apresentação dos dados coletados.

### **REGISTRO 1**



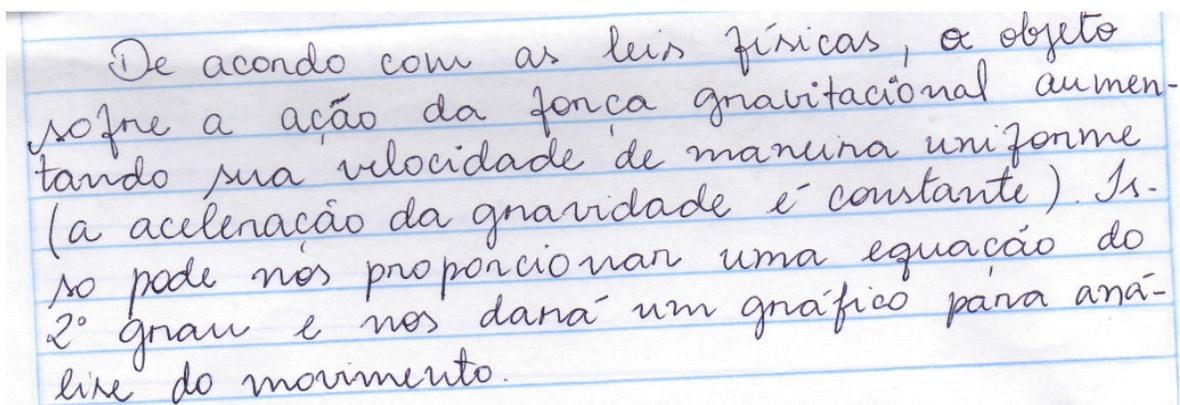
Existem duas forças que atuam sobre o objeto, a força da gravidade ( $F = m \cdot a$ , onde  $a \approx 9,8 \text{ m/s}^2 = a_{\text{gravitacional}}$  e  $F = \text{força peso}$ ) e outra oposta, a resistência do ar, esta é diretamente proporcional a densidade do meio, no caso o ar, que tem baixa densidade. Então o corpo cairá com força  $F_{\text{peso}} - F_{\text{resistência do ar}}$ , sendo esta muito menor que a força peso.

**Transcrição do registro:** Existem duas forças que atuam sobre o objeto, a força da gravidade ( $F = m \cdot a$ , onde  $a \approx 9,8 \text{ m/s}^2 = \text{aceleração gravitacional}$  e  $F = \text{força peso}$ ) e outra oposta, a resistência do ar, esta é diretamente proporcional a densidade do corpo, no caso do ar, que tem baixa densidade. Então o corpo cairá com força  $F_{\text{peso}} - F_{\text{resistência do ar}}$ , sendo esta muito menor que a força peso.

---

<sup>13</sup> Apesar de as atividades terem sido desenvolvidas em grupos, os registros foram feitos e coletados individualmente.

## REGISTRO 2



De acordo com as leis físicas, o objeto sofre a ação da força gravitacional aumentando sua velocidade de maneira uniforme (a aceleração da gravidade é constante). Isso pode nos proporcionar uma equação do 2º grau e nos dar um gráfico para análise do movimento.

### COMENTÁRIOS SOBRE OS REGISTROS:

O registro escrito pelo aluno (**REGISTRO 1**) está focado no conhecimento que possui do tema, mostrando que ele consegue identificar as forças atuantes no objeto, e através de um texto e relações matemáticas (equações) procura descrever o movimento do objeto em questão. O aluno do **REGISTRO 2** levanta a hipótese de que o movimento do objeto é em forma de parábola, não levando em consideração a condição do problema em ser *queda livre*, como também não identifica a relação entre as forças em questão.

#### 2ª etapa: Abstração

##### - Modelo Matemático

Para que pudesse perceber as relações por eles estabelecidas formulei o seguinte problema: *Suponha que um objeto está caindo na atmosfera próximo ao nível do mar. A partir de seus conhecimentos básicos de Física e Cálculo, escreva um modelo matemático que descreva as forças atuantes no objeto durante o movimento de queda.*

As hipóteses que eu gostaria que fossem levantadas pelos alunos são relativas às forças que atuam no objeto, de modo que essas forças viessem a ser os dados do problema, ao mesmo tempo em que são modelos que eles já haviam estudado em disciplinas antes do Cálculo III. Nessa fase o objetivo é que hipóteses sejam levantadas pelos alunos.

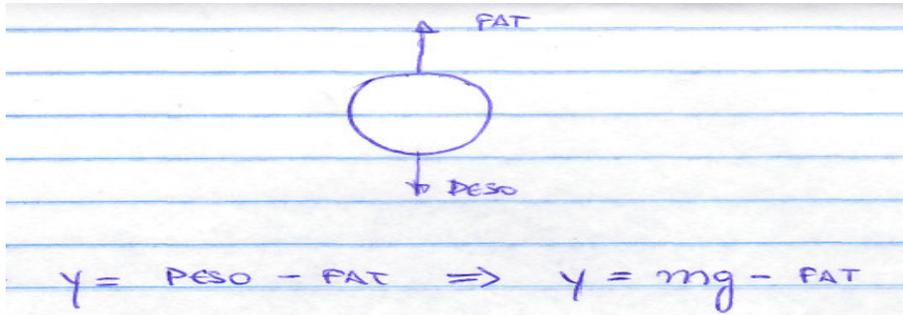
#### ➤ Identificando as forças em questão

Força Resultante:  $F_R$

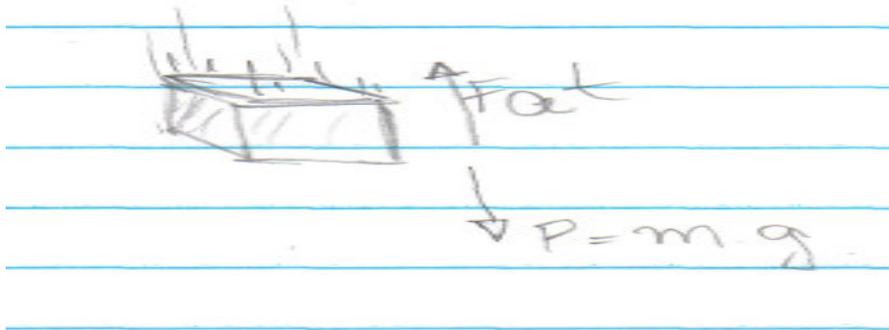
Força Peso:  $P$

Força de resistência do ar:  $F_{AR}$

### REGISTRO 3



### REGISTRO 4



### COMENTÁRIOS SOBRE OS REGISTROS:

A representação desses alunos para as forças atuantes, Força Peso ( $P$ ) e Força de Atrito ( $F_{at}$ ), se dá através de desenhos identificando a direção e sentido das mesmas e suas representações através de equações que envolvem as variáveis e constantes, mas a força de atrito ( $F_{at}$ ) não é representada por suas variáveis e constantes.

No **registro 3** o aluno considera a resultante das forças na direção vertical representando por  $y$ , por ser o movimento representado no eixo das ordenadas, convenção comumente adotada no eixo cartesiano. E o aluno do **registro 4** identifica as forças relacionando apenas uma força ( $P = m \cdot g$ ) com as suas variáveis e constantes através de uma equação, e não especifica as variáveis e constantes envolvidas nessa outra força  $F_{at}$  e nem relaciona as forças entre si..

Esses modelos coletados pelos alunos seriam os dados necessários para a formulação de um modelo mais sofisticado, onde seriam relacionados entre si. Contudo,

seria necessário que fossem formulados modelos, nos quais pudessem ser inseridos conhecimentos de Cálculo. Esses modelos seriam as forças atuantes no objeto, os quais estão representados nas seguintes relações físicas:

➤ **Identificando as relações de cada uma das forças atuantes no objeto:**

$F_R = m \cdot a$        $F_R$  (Força Resultante),  $m$  (massa do objeto),  $a$  (aceleração do objeto)

$P = m \cdot g$        $P$  (Força Peso),  $m$  (massa do objeto),  $g$  (aceleração de gravidade)

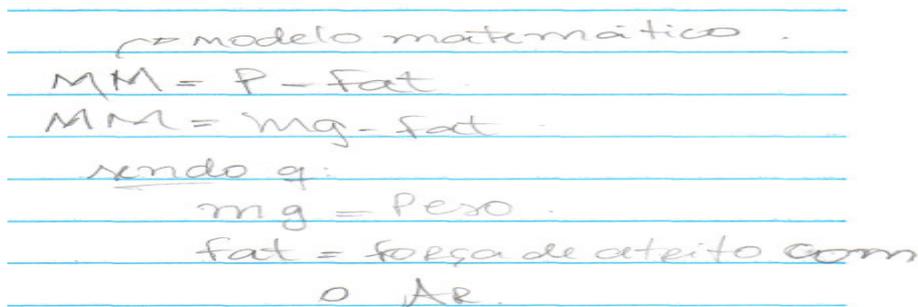
$F_{AR} = \mu \cdot v$        $F_{AR}$  (Força de resistência do ar),  $\mu$  (constante de resistência),  $v$  (velocidade do objeto)

Relacionando as forças entre si:

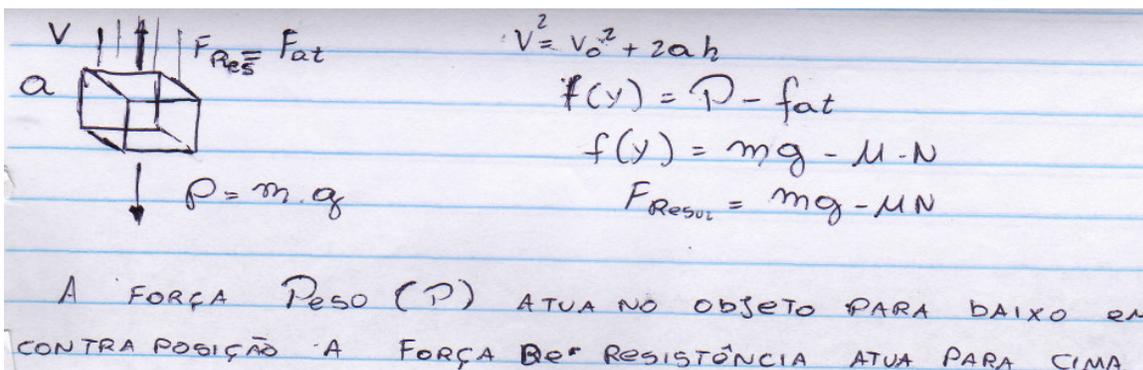
$$F_R = P - F_{AR}$$

Assim, conclui-se que a expressão que relaciona as forças, envolvidas no processo, responsáveis pelo movimento é:  $m \cdot a = m \cdot g - \mu \cdot v$ . Esses conhecimentos são oriundos dos estudos da matéria de Física.

**REGISTRO 5**



**REGISTRO 6**



## COMENTÁRIOS SOBRE OS REGISTROS:

No **registro 5**, o aluno relaciona as forças atuantes no objeto através de uma equação, sendo que ao invés de escrever a força resultante, ele representa por **MM**, as forças no objeto, ou seja, um modelo (**M**) matemático (**M**). Especificando a força Peso (**P**), com suas devidas relações entre as variáveis e/ou constantes, mas não especifica as variáveis e constantes da Força de Atrito (**F<sub>at</sub>**). No **registro 6**, além de equacionar as forças representando por **f (y)** (forças na direção vertical (**y**)), o aluno descreve a direção das forças atuantes, representando as variáveis e constantes.

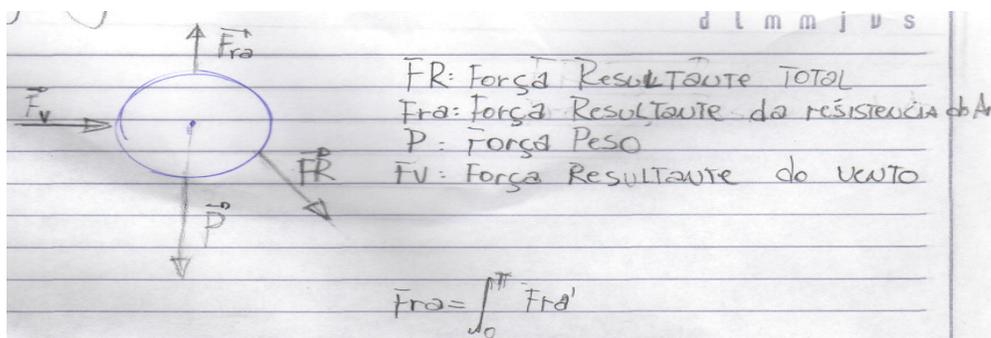
Depois de encontrar os modelos da física clássica, os alunos teriam condições de inserir, nesses modelos, conhecimentos de Cálculo identificando as variáveis do problema. Desta forma, temos: a massa do corpo (**m**), a aceleração de gravidade (**g**) e o coeficiente de resistência do ar (**μ**) são constantes nesse problema. As variáveis são a aceleração do objeto (**a**) e a velocidade do objeto (**v**).

### ➤ Fazendo as relações entre o conteúdo matemático de cálculo com o modelo matemático encontrado.

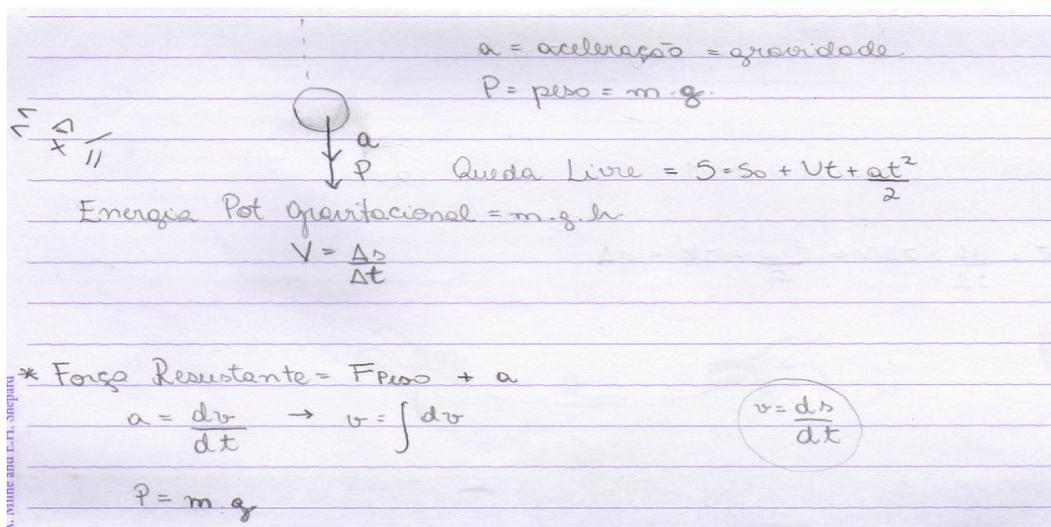
A partir dos conhecimentos de física e cálculo, seria necessário que os alunos fizessem ligações entre tais conhecimentos, de forma que uma vez estabelecida essas relações chegassem ao modelo matemático. Vejamos as relações que poderiam ser feitas pelos alunos:

A aceleração do corpo:  $a = \frac{dv}{dt}$ , ou seja, derivada ou taxa de variação instantânea da velocidade em relação ao tempo. Nesse caso, temos uma variável que depende da outra, de forma que o tempo (**t**) era uma variável implícita até identificarmos essa relação.

## REGISTRO 7



## REGISTRO 8



### COMENTÁRIOS SOBRE OS REGISTROS:

No **registro 7**, o aluno representa as forças atuantes no corpo e leva em consideração, além da força peso ( $P$ ) e força de atrito ( $F_{\text{at}}$ ), a força do vento, representada por  $F_v$ , e para representar de alguma forma as forças atuantes utilizando conhecimentos de Cálculo, o aluno (**registro 7**) escreve a força de atrito ( $F_{\text{ra}}$ ) como a integral das variações (derivada) da força de atrito ( $F'_{\text{ra}}$ ) no intervalo de 0 a  $\pi$ . Acredito que esse intervalo significa para o aluno que a força atua na direção vertical no sentido em que forma um semi-círculo.

No **registro 8** é levada em consideração a força peso ( $P$ ), a aceleração ( $a$ ) e velocidade do objeto ( $v$ ), como variáveis envolvidas no problema. Escreve as forças resultantes como sendo a soma da força peso ( $P$ ) e a aceleração ( $a$ ).

Com intuito de chegar a uma relação de Cálculo, o aluno escreve aceleração como sendo  $a = \frac{dv}{dt}$ , de modo que aparece uma relação de derivada entre as variáveis velocidade e tempo e  $v = \frac{ds}{dt}$ , a relação entre deslocamento e tempo.

As representações nesse registro são breves conceitos e idéias que serviram para que eu pudesse identificar os conhecimentos que os alunos conseguiriam relacionar conhecimentos de física e cálculo com o tema proposto.

Reescrevendo a relação das forças atuantes no objeto com as noções básicas de cálculo, temos:

$$m \cdot \frac{dv}{dt} = m \cdot g - \mu \cdot v$$

de outra forma:

$$m \cdot \frac{dv}{dt} + \mu \cdot v = m \cdot g$$

Assim, fica evidente a relação entre as noções de física e cálculo dado por:

$$m \cdot \frac{dv}{dt} + \mu \cdot v = m \cdot g$$

Esse é o modelo matemático simplificado<sup>14</sup> que descreve o movimento de um corpo em queda livre, o qual poderia ter sido obtido pelos alunos, caso conseguissem identificar tais relações.

Uma vez encontrado o modelo matemático, a próxima etapa seria resolver o modelo através de um método adequado, interpretando sua solução e verificar a validação do modelo. Nessa atividade meu propósito não era atingir essas fases do processo de Modelagem, mas somente identificar que conhecimentos os alunos possuíam e se faziam alguma relação com conhecimentos de Cálculo.

A seguir, mostrarei os resultados da análise feita da primeira atividade.

#### 4.3.1 - Resultados da 1ª Atividade

Analisando a atividade percebi que a maioria dos alunos registra os conhecimentos de Física com certa facilidade, identificando as forças atuantes no objeto, mas poucos identificam a força de atrito ( $F_{at}$ ), a qual é dita desprezada no estudo de Física no ensino médio, fator que é colocado em discussão por dois alunos durante a atividade e observado por mim.

Durante a discussão um aluno considerou a força de atrito desprezível enquanto outro ressalta que deve ser levada em consideração, pois eles já estão no ensino superior e não no médio. Desta forma, o aluno acredita que ao trabalhar um problema em que seja

---

<sup>14</sup> Simplificado, pois um fenômeno físico tem várias condicionantes a serem consideradas, mas o problema que trabalhamos são feitas escolhas das variáveis que consideramos mais relevantes para o problema.

utilizado conhecimento de nível superior, há um detalhamento maior e com isso mais condições são levadas em consideração.

Considerando os conhecimentos de Cálculo III, um único aluno percebe a relação de uma variável da Física, a aceleração, como taxa de variação (derivada) da velocidade em relação ao tempo, outros fazem tentativas de inserir conhecimentos de cálculo, mas não foi além de tentativas.

O modelo matemático encontrado por todos é apenas uma aproximação das relações existentes no problema, de modo muito simplificado e tímido.

As dificuldades encontradas pelos alunos são bem expressivas, de modo que a minha interferência nos grupos para mediar o que os alunos conheciam do tema e levá-los a progredir em suas discussões foi muito freqüente. Nesse momento busquei induzir os alunos a levantar hipótese, ao mesmo tempo em que esclarecia dúvidas em relação a conceitos básicos que os alunos não haviam entendido dos Cálculos anteriores, como, por exemplo, o conceito de derivada.

Após a identificação das relações feitas pelos alunos nessa atividade, considerei importante construir juntamente aos alunos o Modelo Matemático que descrevia o tema proposto, com o intuito de familiarizá-los com o processo de Modelagem para que pudessem evoluir nas próximas atividades.

#### **4.4 – Compreendendo o desenvolvimento da 2ª atividade conforme as etapas utilizadas**

Nessa segunda atividade de Modelagem distribuí os alunos em grupo de 3 (três), sem critério para tal distribuição. Como o objetivo era utilizar a Modelagem Matemática como estratégia para compreensão dos conteúdos de Cálculo, formulei questões que eu pudesse identificar se estava havendo aprendizado do conteúdo. Para isso, utilizei o caso 1 proposto por Barbosa, o qual foi desenvolvido da seguinte forma:

##### **1 – Problema não-matemático**

##### **1ª etapa: Experimentação- Dados Experimentais**

O tema **Fluxo de Corrente Elétrica** tem por objetivo identificar que conhecimentos os alunos puderam adquirir de Cálculo, visto que os alunos consideraram que esse era um assunto familiar, ao mesmo tempo em que já conheciam o processo de obtenção do modelo Matemático. Os dados que fazem parte da construção do modelo foram coletados por mim

em pesquisas realizadas em livros didáticos, então, a fase de experimentação não foi realizada em nenhum momento na atividade em sala de aula. Aqui seguem alguns conhecimentos que os alunos possuíam sobre o tema e ficam registrados por eles:

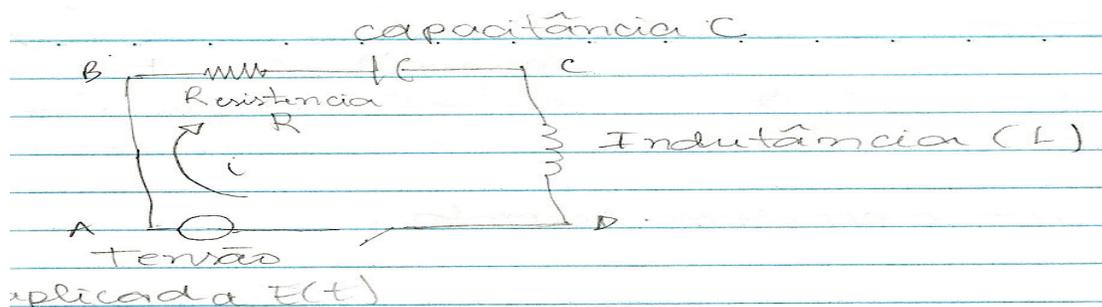
### REGISTRO 9

$I$  = fluxo de corrente



Constantes :  $R$  (Resistência)  
 $C$  (Capacitância)  
 $L$  (Indutância)

### REGISTRO 10



### COMENTÁRIOS SOBRE OS REGISTROS:

Tanto o *registro 9* quanto o *registro 10* mostram que os alunos conseguem representar o problema através de desenhos, deixando explícitas as constantes e variáveis, mas não descrevem que conhecimentos possuem visto que os dados necessários já foram entregues a eles.

### 2ª etapa: Abstração

#### - Modelo Matemático

Identificado o problema e este familiarizado com o assunto e os dados propostos, é momento dos alunos construírem o modelo matemático. Para que os alunos pudessem

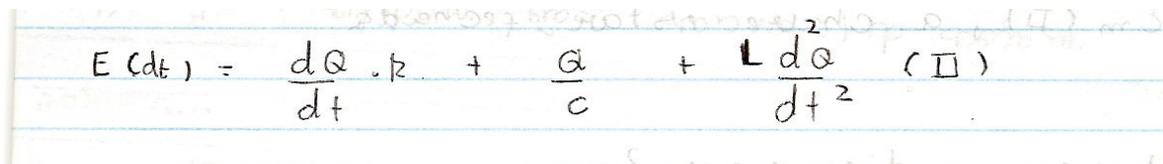
identificar as variáveis pertencentes ao problema trouxe para sala de aula os dados necessários, formulando o seguinte problema:

Levando em consideração os elementos presentes no Fluxo de Corrente Elétrica num circuito elétrico em série, simples, temos: 1) *Intensidade da Corrente Elétrica  $I$ , em ampères é a quantidade de carga elétrica  $Q$  que atravessa uma seção transversal de condutor em cada unidade de tempo  $t$ ; Capacitância  $C$  é a grandeza elétrica de um capacitor, determinada pela quantidade de energia elétrica que pode ser armazenada em si por uma determinada tensão e pela quantidade de corrente alternada que o atravessa numa determinada frequência, submetido a uma carga elétrica  $Q$ . Indutância  $L$  de um indutor é uma constante relacionada no circuito e a voltagem impressa  $E$  (em volts) é uma função conhecida do tempo. O fluxo de corrente no circuito está governado pela 2ª lei de Kirchhoff: num circuito fechado a tensão aplicada é igual à soma das quedas de tensão no restante do circuito. De acordo com as leis elementares da eletricidade, sabemos que: a queda de tensão no resistor é diretamente proporcional a Resistência e a Intensidade de corrente elétrica, a queda de tensão no capacitor é diretamente proporcional a quantidade de carga elétrica e inversamente proporcional a Capacitância e a queda de tensão no indutor é diretamente proporcional a indutância e à taxa de variação da intensidade de corrente elétrica em relação ao tempo. Relacione através de um modelo matemático as hipóteses do problema utilizando os conhecimentos de Física e Cálculo.*

Nessa etapa os alunos identificaram as variáveis e constantes, de modo que puderam compreender o conceito de variáveis dependentes e independentes, como também de constantes, organizando as hipóteses que se encontravam no corpo do texto, escrevendo o modelo matemático.

Esses modelos foram registrados pelos alunos e se apresentam abaixo:

### **REGISTRO 11**


$$E (dt) = \frac{dQ}{dt} \cdot R + \frac{Q}{C} + L \frac{d^2Q}{dt^2} (\square)$$

## REGISTRO 12

malha DABCD

$$E(t) - Ri - \frac{Q}{C} - L \frac{di}{dt} = 0$$
$$E(t) - R \frac{dQ}{dt} - \frac{Q}{C} - L \frac{di}{dt} = 0$$
$$E(t) - R \frac{dQ}{dt} - \frac{Q}{C} - L \frac{di}{dt}$$
$$\boxed{R \frac{dQ}{dt} = -\frac{Q}{C} - L \frac{di}{dt} + E(t)}$$

### COMENTÁRIOS SOBRE OS REGISTROS:

No **registro 11** o aluno representa as hipóteses levantadas em formato de uma equação onde ele indica que a diferença de potencial (**E**) depende da variação do tempo (**dt**). Ao mesmo tempo, em que consegue relacionar as variáveis e constantes indicando as derivadas corretas, de acordo com as hipóteses.

No **registro 12** o aluno consegue relacionar as variáveis e constantes, representando o modelo com as variáveis físicas do problema, para depois representar em termos da derivada de 1ª ordem  $i = \frac{dQ}{dt}$ , mas não consegue relacionar a taxa de variação da intensidade da corrente em relação ao tempo ( $\frac{di}{dt}$ ) como a taxa de variação da taxa de variação da carga em relação ao tempo, ou seja, a 2ª derivada da carga em relação ao tempo ( $\frac{d^2Q}{dt^2}$ ), como é representada no **registro 11**.

#### 4.4.1- Identificando através de questionamentos alguns conhecimentos já apreendidos pelos alunos

Uma vez construído o modelo matemático, busquei colocar questões para que, a partir delas, pudesse identificar se os alunos já eram capazes de aprender novos conceitos, até mesmo descrevendo os conceitos através do seu entendimento. Ao mesmo tempo pedi que essas respostas às questões fossem feitas tanto para a atividade do *Fluxo de Corrente Elétrica* quanto para atividade do *Objeto em Queda Livre*. As questões foram formuladas com o intuito de perceber a evolução dos alunos em relação ao conteúdo de Cálculo e ao entendimento do processo de Modelagem Matemática.

**Questão 1:** Encontrado o modelo do Fluxo de Corrente Elétrica, pedi que os alunos identificassem e distinguíssem as variáveis e constantes dos problemas. Assim, seguiram as respostas dos alunos.

**REGISTRO 13**

<p><u>PROB. 1</u></p> <p>PESO → VARIÁVEL          MASSA → CTE          ACELERAÇÃO DA GRAV → CTE          K → CONSTANTE          VELOCIDADE → VARIÁVEL          TEMPO → VARIÁVEL</p>	<p><u>PROB. 2</u></p> <p><u>CONST.</u> { R - RESIST.          C - CAPACITÂNCIA          L - INDUTÂNCIA</p> <p><u>VAR.</u> { I - CORRENTE          Q - CARGA          t - TEMPO</p>
---	--

**REGISTRO 14**

Em (I), as variáveis são: velocidade (v) e o tempo (t)

Em (II), as variáveis são: carga elétrica (Q), tempo (t) e a tensão aplicada (E).

Constantes:

Em (I): massa (m), gravidade (g) e resistência do ar (K)

Em (II): resistência (R), capacitância (C) e a indutância (L)

**REGISTRO 15**

1º problema

$$m \cdot \frac{dv}{dt} = mg - kv$$

Constantes: m, g, K

Variáveis: v, t

2º problema:	Variáveis: $Q, t$
$\frac{dQ}{dt} \cdot R + \frac{Q}{C} + L \frac{d^2Q}{dt^2}$	Constantes: $L, R, C$

### COMENTÁRIOS SOBRE OS REGISTROS:

No **registro 13** o aluno considera que na atividade 1 as constantes são a massa do objeto ( $m$ ) e a aceleração de gravidade ( $g$ ), mas ao mesmo tempo afirma que a força peso ( $P=m \cdot g$ ) é variável, mesmo a massa e aceleração de gravidade sendo constantes. E identifica a velocidade ( $v$ ) e o tempo ( $t$ ) como variáveis. Já na atividade 2, devido estarem levantada as hipóteses, identifica as variáveis e constantes com facilidade. No **registro 14**, as variáveis e constantes são facilmente identificadas.

Para responder a questão, o aluno (**registro 15**) representa os modelos matemáticos encontrados deixando perceptível a identificação das constantes e variáveis.

**Questão 2:** Como já havia desenvolvido o processo de modelagem após a primeira atividade, procurei saber se eles saberiam o que fazer depois de encontrado o modelo. Se eles conseguiriam perceber o que resultaria ao resolver o problema, já que após encontrar o modelo matemático, a próxima etapa seria encontrar a solução do problema. Nos registros:

### REGISTRO 16

2. Formas detalhadas de expressar problemas.

### REGISTRO 17

objetivos:

Em (I), a velocidade instantânea no movimento de queda livre

Em (II), a tensão em função do tempo

### **REGISTRO 18**

2 - Na tentativa de resolver o problema, objetivamos uma fórmula matemática que descreva a situação e que ajude a encontrar valores de variáveis e constantes, além de relacioná-las matematicamente.

### **REGISTRO 19**

2) Ao resolver esses problemas o que eu objetivo encontrar?

R: A solução para a relação entre essas variáveis envolvidas nos problemas.

### **COMENTÁRIOS SOBRE OS REGISTROS:**

No **registro 16** o aluno considera que resolver o problema é encontrar uma expressão detalhada, mas não justifica, nem deixa explícito que detalhamento deve ser considerado. Enquanto que no **registro 17** o aluno acredita que resolver o problema é encontrar na atividade 1 a velocidade ( $v$ ) e na atividade 2 a tensão ( $E(t)$ ), ou seja, uma variável em função de outra. Considero tal resposta próxima ao que esperava que eles respondessem, porém, não foram todos que tiveram respostas condizentes. Já no **registro 18** o aluno possui interpretação próxima a do **registro 17**, mas não especifica que fórmula matemática seria a solução do problema.

No **registro 19** o aluno chega a entender que a solução é uma relação entre variáveis, mas não as especifica.

Todos esses registros mostram que os alunos possuem noção do que é resolver um problema de equações diferenciais, e até mesmo o que se pretende encontrar como solução. Contudo, as idéias por eles tidas são representadas em linguagem não-matemática.

**Questão 3:** As condições iniciais de um problema físico são conceitos básicos para o entendimento do conteúdo de EDO e resolução do problema. Neste sentido, busquei nessa

questão analisar se os alunos conseguiriam identificar as condições iniciais ao invés de ser conceituada por mim nas aulas. Seguem os registros feitos pelos alunos:

### REGISTRO 20

No instante inicial o objeto está em repouso, no primeiro caso, já no segundo consideramos o circuito inicialmente aberto.

### REGISTRO 21

③ No PROB 1, APENAS QUE UM CORPO ESTÁ CAINDO PERTO DO MAR.  
No PROB 2, NOS DIZ QUAIS AS VARIÁVEIS E CONSTANTES ENVOLVIDAS E NOS DÁ UMA EQUAÇÃO.

### REGISTRO 22

1º caso: se o objeto estava em repouso ou em movimento  
2º caso: se o circuito estava aberto ou fechado

### COMENTÁRIOS SOBRE OS REGISTROS:

As condições iniciais são colocadas pelos alunos como situações em que se encontram o objeto e o circuito no início do experimento. As condições iniciais da atividade 1 é  $v(0) = 0$ , velocidade nula no instante  $t = 0$ , e no **registro 20** o aluno considera o objeto em repouso, interpretação com o mesmo significado. Já no **registro 21** é levado em consideração a posição que o objeto é encontrado e no **registro 22** a interpretação vai além da resposta representada no **registro 20**, pois é considerado também que o objeto pode estar em movimento a partir do instante  $t = 0$ s (zero).

Na atividade 2, os alunos (**registro 20 e 22**) possuem a mesma interpretação, considerando o circuito aberto ou fechado como condição inicial, a mesma interpretação seria dizer que não há corrente quando o circuito está aberto e, conseqüentemente, não há carga. Em termos matemáticos seria  $Q(0) = 0$ , ou seja, a quantidade de carga é nula no instante  $t = 0$  s (zero). Já no **registro 21** é considerado como condição inicial o fato de ser

descrito os dados para os alunos, o que não aconteceu na atividade 1, neste caso, seria a condição inicial de cada atividade proposta por mim e não o problema em si, onde na 1ª atividade utilizo o caso 2 de Barbosa e na 2ª atividade o caso 1.

**Questão 4:** Uma vez analisado se os alunos identificam as variáveis e constantes, se sabem o que se pretende ao resolver o problema e identificando as condições iniciais, resolvi investigar se os alunos percebiam semelhança e diferença nas duas atividades até aqui desenvolvidas. Essa questão seria necessária para que os alunos pudessem perceber a regularidade nos problemas, bem como as não-regularidades. Observemos os registros:

#### **REGISTRO 23**

④ ambas possuem derivadas, mais no primeiro caso, existem no derivadas de 1ª ordem e no 2º problema existe também derivadas de 2ª Ordem.

#### **REGISTRO 24**

R: A semelhança é o uso de derivadas.  
A diferença é que na segunda há um detalhamento maior do problema.

#### **REGISTRO 25**

4. Os problemas se relacionam pelo uso de derivadas, mas envolvem grandezas diferentes.

#### **REGISTRO 26**

Ambas são equações diferenciais, A diferença é que elas possuem variáveis e constantes diferentes.

## REGISTRO 27

④ OS OBJETIVOS SÃO OS MESMOS, ENQUANTO, EM UM NADA NOS É FALADO SOBRE OS DADOS DOS PROBLEMAS NO OUTRO NOS É ENTREGADO TODOS OS DADOS.

NAS A PRINCIPAL DIFERENÇA É O SURGIMENTO DA 2ª DERIVADA NO PROB. 2

## COMENTÁRIOS SOBRE OS REGISTROS:

Em todos os registros é identificada e registrada pelos alunos a presença de derivada como fator semelhante e regular nos dois modelos encontrados. Em relação às diferenças dos modelos, um aluno (**registro 23**) considera que é a ordem, ou seja, presença da 1ª derivada no modelo de queda livre e 2ª derivada no modelo de Fluxo de Corrente Elétrica se destaca. Tal observação feita pelo aluno é um dos conceitos básicos de EDO (**ordem**), que seria necessário para o entendimento do assunto.

No **registro 24 e 27** os alunos identificam como diferença a forma como são apresentadas as atividades, onde na 1ª atividade não são entregues aos alunos os dados do problema e na 2ª atividade todas as hipóteses e dados são descritas e entregues aos alunos.

Os alunos (**registro 25 e 26**) ressaltam o fato das variáveis e constantes serem diferenciadas.

As respostas de todos os alunos foram fatores importantes para saber como estava o conhecimento deles antes mesmo de apresentar conceitos matemáticos que seriam trabalhados mais detalhadamente, com intuito de esclarecer as dúvidas ainda existentes.

Através dessas questões até aqui apresentadas, os alunos puderam utilizar conceitos por eles compreendidos, antes mesmo de serem conceituados por mim, identificando que os alunos possuíam conhecimentos de Cálculo I e II, os quais contribuíram em seu aprendizado do Cálculo III.

**Questão 5:** Essa última questão segue na condição de que conseguindo identificar as regularidades e identificando os conceitos básicos de Cálculo, os alunos já poderiam definir Equações Diferenciais Ordinárias, sem ter que ser definido no início das aulas por mim. Seguem os registros:

### REGISTRO 28

São equações que possuem derivada, tem como característica fazer uma análise instantânea do problema.

### REGISTRO 29

5. Modelo matemático que expressa problemas detalhadamente através de derivadas.

### REGISTRO 30

⑤ São equações que estabelecem uma relação matemática entre um função e suas derivadas.

### REGISTRO 31

R= Uma eq. Diferencial envolve as variáveis encontrados no dia-a-dia, por isso é muito envolvida na física.

### REGISTRO 32

5 - Equações diferenciais demonstram situações onde não há regularidade de funções (vistas no ensino médio por exemplo) daí o uso de derivadas.

### REGISTRO 33

Equações diferenciais são modelos matemáticos que expressam a resolução de um problema a partir de derivadas.

### **COMENTÁRIOS SOBRE OS REGISTROS:**

Todos esses registros (*registros 28, 29, 30, e 33*) apresentam equações diferenciais ordinárias como equações que se caracterizam pela existência de derivada, como o envolvimento de funções e variáveis. No *registro 31* o aluno justifica a utilização da física no problema por envolver variáveis do dia-a-dia. Enquanto que dois alunos (*registro 29 e 33*) definem equações como modelos matemáticos. Tais definições se assemelham com as que encontramos nos livros didáticos e possuem coerência com o que se entende por E.D.O.

Feito a coleta dos registros da atividade do Fluxo de Corrente Elétrica, procurei enfatizar os conceitos básicos como, por exemplo, a ordem, os tipos de equações, variáveis, constantes, condições iniciais, soluções, como também a definição de Equações Diferenciais Ordinárias. Nessa atividade não foi realizada a etapa de resolução e validação do modelo.

#### **4.4.2 - Resultados da Análise da 2ª atividade**

Tal atividade caracterizou-se como um avanço na aprendizagem dos alunos em relação a conceitos básicos de E.D.O.

Na escolha de apresentar os dados para a construção do modelo matemático pude identificar que os alunos souberam relacioná-los, de modo que o modelo matemático foi construído com maior facilidade, utilizando a relação das variáveis e constantes.

Motivados a responder o questionário, os alunos registram o que compreendem em relação a conceitos ainda não definidos na disciplina de Cálculo III, mostrando que a compreensão de novos conteúdos pode acontecer de modo que haja construção durante o processo de ensino e aprendizagem, motivado por alguma estratégia ao invés de ser exposto por mim antes mesmo da execução da atividade e a Modelagem Matemática pôde contribuir nessa atividade para o aprendizado dos alunos.

#### **4.5 – Compreendendo o desenvolvimento da 3ª atividade conforme as etapas utilizadas**

Na terceira atividade de Modelagem Matemática os alunos foram distribuídos em grupo de três alunos. Considerando que estes já conhecem o processo de Modelagem até a fase de obtenção do modelo e os conceitos básicos de Cálculo. Então, nessa atividade os

alunos além de desenvolverem essas fases da Modelagem, que já foram trabalhadas anteriormente, também, puderam encontrar a solução do modelo.

Desta vez foram introduzidos conceitos novos de EDO como, por exemplo, variáveis dependentes, independentes, tipos de equações e a técnica de resolução do problema. Propus utilizar o caso 1 de Barbosa, mediante o processo de Bassanezzi (2002), os quais seguem assim:

## **1 – Problema não-matemático**

### **1ª etapa: Experimentação- Dados Experimentais**

O tema **Lei do Resfriamento de Newton** tem por objetivo o reconhecimento de mais uma situação prática que pode ser trabalhada via Modelagem Matemática. Os alunos puderam se familiarizar com o tema, identificando os dados que foram coletados e levados por mim à sala de aula.

### **2ª etapa: Abstração**

Formulei o seguinte texto no qual inseri o problema:

*Sobre a condição de calor, um modelo real simples que trata sobre a troca de calor de um corpo com o meio ambiente em que o mesmo está colocado, aceita tais hipóteses básicas:*

- 1- A temperatura  $T = T(t)$  depende do tempo  $t$ .*
- 2- A temperatura  $T_m$  do meio ambiente permanece constante ao longo da experiência;*
- 3- A taxa de variação da temperatura em relação ao tempo  $t$  é proporcional à diferença entre a temperatura do corpo e a temperatura do meio ambiente.*

Encontre o modelo matemático, identifique as variáveis e as condições iniciais.

Sabemos que a temperatura do ambiente  $T_m = 36^\circ\text{C}$  e que às 8h, a temperatura é de  $16^\circ\text{C}$ , qual a temperatura inicial do corpo?

Após a familiarização com o tema e com os dados coletados, os alunos iniciaram o processo de construção do modelo matemático, resolução do problema em termos do modelo.

### - Modelo Matemático

Nessa etapa os alunos construíram o modelo matemático que consideraram condizentes com os dados coletados. Vejamos algumas dessas representações do modelo e das variáveis e constantes do problema.

#### REGISTRO 34

$T = T(t)$        $T_m \Rightarrow$  CONSTANTE

VARIÁVEIS :      CONSTANTES  
 $T \Rightarrow$  TEMPERATURA       $T_m \rightarrow$  TEMP. DO MEIO  
 $t \rightarrow$  TEMPO

$\frac{dT}{dt} = K(T - T_m)$  } MODELO MATEMÁTICO

CONDIÇÃO INICIAL  $\Rightarrow T(0) = T_0$

#### REGISTRO 35

4) Lei de Resfriamento

- $T = T(t)$
- $T_m = cte$
- $\frac{dT}{dt} = T - T_m$

•  $T(0) = T_0$   
•  $T_m ?$

↳ Variáveis:  $T$ : Temperatura  
 $t$ : Tempo

↳ Condições iniciais:  $T(0) = T_0$

↳ Modelo:  $\frac{dT}{dt} = T - T_m$

#### REGISTRO 36

taxa de variação de temperatura =  $\frac{dT}{dt}$

onde  $T$  = temperatura do corpo e  $t$  = tempo

taxa =  $T - T_m$

$K = cte$  de diminuição de temperatura.

$T_m$  = Temperatura do Meio Ambiente. (constante)

Modelo:  $\frac{dT}{dt} = (T - T_m) K$

### COMENTÁRIOS SOBRE OS REGISTROS:

Nos registros aqui expressos percebi que os alunos conseguiram por meio das hipóteses e dados relacionar as variáveis e constantes, encontrando o modelo matemático. Representam na linguagem matemática a condição inicial, conceito que os alunos não conseguiram expressar em atividades anteriores.

O aluno (*registro 34*) apresenta uma constante  $K$  (constante de decaimento da temperatura), mas o mesmo não a explicita. No *registro 35* essa constante não é levada em consideração, não aparecendo no modelo. No *registro 36* o aluno descreve as variáveis e constantes anteriores à construção do modelo, procurando identificar o significado de cada representação descrita. Nesse caso, a constante de decaimento da temperatura apresenta-se no modelo descrito pelo aluno.

### 3ª etapa: Resolução

Nessa etapa os alunos puderam interpretar as condições que o modelo encontrado poderia proporcionar no processo de solução do modelo. Desta forma, tiveram que identificar que tipo de equação diferencial ordinária o modelo encontrado por eles estava enquadrado, de acordo com a forma apresentada em aulas e fizessem escolha da técnica de resolução mais adequada. Ressalto que esta fase teve evolução sob minha orientação, já que essas técnicas eram algo ainda não visto pelos alunos.

Vejamos como os alunos desenvolvem a técnica de resolução do problema:

#### REGISTRO 37

The image shows handwritten mathematical work on lined paper. It starts with the integral equation  $\int \frac{1}{T-T_m} = \int K \cdot dt + \int 0 \cdot dt$ . Below this, it shows  $\ln(T-T_m) = Kt$  and  $e^{\ln(T-T_m)} = e^{Kt+c} \rightarrow (T-T_m)(t) = e^{Kt} \cdot e^c$ . A note in a cloud says "e = base do logaritmando". Then it shows  $(T-T_m)(t) = e^{Kt} - c_1$  and  $(T-T_m)(t_0) = (T-T_m)_0$ . Next,  $(T-T_m)(0) = e^{K \cdot 0} \cdot c_1 \rightarrow (T-T_m)_0 = c_1$ . Then  $(T-T_m)(t) = e^{Kt} (T-T_m)_0$ . Finally, it substitutes  $T_m = 36^\circ C$ ,  $t = 8h$ , and  $T_0 = 16^\circ C$  to get  $= e^{K8} (16 - 36)$  and  $= e^{K8} (-20) \rightarrow -20 e^{8K}$ .

$$\int \frac{1}{T-T_m} = \int K \cdot dt + \int 0 \cdot dt$$
$$\ln(T-T_m) = Kt$$
$$e^{\ln(T-T_m)} = e^{Kt+c} \rightarrow (T-T_m)(t) = e^{Kt} \cdot e^c \rightarrow c_1$$
$$(T-T_m)(t) = e^{Kt} - c_1 \quad \rightarrow \quad (T-T_m)(t_0) = (T-T_m)_0$$
$$(T-T_m)(0) = e^{K \cdot 0} \cdot c_1 \rightarrow (T-T_m)_0 = c_1$$
$$(T-T_m)(t) = e^{Kt} (T-T_m)_0$$
$$T_m = 36^\circ C \quad | \quad t = 8h \quad | \quad T_0 = 16^\circ C$$
$$= e^{K8} (16 - 36)$$
$$= e^{K8} (-20) \rightarrow -20 e^{8K}$$

**REGISTRO 38**

$$\frac{1}{T-T_M} dT = dt$$

$$\int \frac{1}{T-T_M} dT = \int dx + \int 0$$

$L\cup T-T_M = x + K$   
 $T-T_M = e^{x+K}$   
 $T(x) = e^{x+K} + T_M \quad \leadsto T(x) = e^x \cdot C + T_M$

• para  $T(0) = T_0$  Temos

$$T_0 = e^K + T_M \quad ; \quad T_0 = C + T_M$$

• para  $T_M = 36^\circ\text{C}$  e  $T(8) = 16$

$$16 = e^{8+K} + 36$$

$$-20 = e^8 \cdot e^K$$

$$\therefore \frac{-20}{2980,9578} = C$$

$$C = -0,006709$$

$$T(t) = -0,006709 e^t + 36$$

Resposta: A constante  $e^{-0,006709}$

**REGISTRO 39**

$$x = T - T_m$$

$$dx = 1 dx$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \int K dt$$

$$\ln(T - T_m) = Kt + C$$

$$T - T_m = e^{Kt+C}$$

$$T - T_m = e^{Kt} \cdot e^C$$

$$T(t) = e^{Kt} \cdot C_1 + T_m$$

$$T(0) = e^{K \cdot 0} \cdot C_1 + T_m$$

$$T_0 = C_1 + T_m$$

$$C_1 = T_0 - T_m$$

$$T(t) = e^{Kt} \cdot (T_0 - T_m) + T_m$$

$$T(8) = e^{8K} \cdot (T_0 - 36) + 36$$

$$16 - 36 = e^{8K} \cdot (T_0 - 36)$$

$$-20 = e^{8K} \cdot (T_0 - 36)$$

$$e^{8K} = \frac{-20}{(T_0 - 36)}$$

$$(T_0 - 36) e^{8K} = -20$$

$$T_0 = \frac{-20}{e^{8K}} + 36$$

#### REGISTRO 40

$$\frac{dT_c}{(T_c - T_m)} = K \cdot dt$$
$$\int \frac{1}{T_c - T_m} dT_c = \int K dt + \int 0 dc$$
$$u = T_c - T_m$$
$$\int \frac{1}{u} dT_c = \int K dt + \int 0 dc$$
$$\ln(T_c - T_m) = K \cdot t + C$$
$$T_c - T_m = e^{K \cdot t + C} \rightarrow T_c - T_m = e^{K \cdot t} \cdot e^C$$
$$T_0 - T_m = e^C \rightarrow (T_0 - T_m = e^{K \cdot 0} \cdot e^C)$$
$$T_c - T_m = e^{K \cdot t} (T_0 - T_m)$$
$$T_c = e^{K \cdot t} (T_0 - T_m) + T_m$$
$$T_m = 36^\circ\text{C} ; t = 8\text{h} ; T_c = 16^\circ ; T_0 = ?$$
$$16 = e^{K \cdot 8} (T_0 - 36) + 36$$
$$e^{K \cdot 8} \cdot T_0 - e^{K \cdot 8} \cdot 36 = -20$$
$$T_0 = \frac{-20 + e^{K \cdot 8} \cdot 36}{e^{K \cdot 8}} = \frac{-20}{e^{K \cdot 8}} + \frac{e^{K \cdot 8} \cdot 36}{e^{K \cdot 8}} = \frac{-20}{e^{K \cdot 8}} + 36$$

#### COMENTÁRIOS SOBRE OS REGISTROS:

No processo de resolução do problema os alunos desenvolvem a técnica de equações de variáveis separáveis identificando o tipo de equação, a qual já havia sido apresentada a eles juntamente a outras técnicas de equação de 1ª ordem. Percebi que os alunos não tiveram tanta dificuldade no processo de integração, mas ao tentar utilizar a condição inicial para encontrar a constante, os alunos tiveram dificuldades.

Nos **registros 39 e 40** os alunos recorrem à técnica de mudança de variáveis para resolver o processo de integração e encontram a constante de decaimento de temperatura com facilidade. Todos esses registros mostram que os alunos desenvolvem o processo de resolução sem tantas dificuldades, percebendo que possuem base sobre a técnica de integração (Cálculo I), haja vista que no início da pesquisa deixaram enfatizado a falta de base, mas que não perdurou durante o processo das atividades, pois foram sendo esclarecidas quando necessárias.

#### 4.5.1 - Resultados da Análise da 3ª atividade

Nessa atividade houve uma evolução no processo de Modelagem Matemática, sendo assim, as fases mais enfatizadas foram a obtenção do modelo e a resolução do problema, levando em consideração que o objetivo é o processo de aprendizagem dos conteúdos matemáticos via Modelagem. E essas fases são desenvolvidas com relativo sucesso.

#### 4.6 – Compreendendo o desenvolvimento da 4ª atividade.

A 4ª atividade foi trabalhada em grupo de três alunos, com os mesmos critérios estabelecidos nas outras técnicas de resolução e, além do processo de Modelagem desenvolvido até então nas atividades anteriores, foi feita também a validação da solução do modelo encontrado.

#### 1 – Problema não-matemático

##### 1ª etapa: Experimento - Dados experimentais

O tema **Misturas de Substância** pôde ser trabalhado com os alunos com o intuito de trabalhar os conteúdos de E.D.O. e os passos de Modelagem Matemática até a fase de validação do modelo. Desta forma, os alunos foram formando conhecimento do tema e se familiarizando através de uma leitura do texto que fora levado por mim à sala de aula.

##### 2ª etapa: Abstração:

##### - Modelo Matemático

Esse tema foi escolhido por mim e levado aos alunos juntamente com as hipóteses do problema da seguinte maneira:

*No instante  $t=0$ , um tanque contém  $Q_0$  lb de sal dissolvido em 100 gal (cerca de 455 l) Suponha que água contendo  $\frac{1}{4}$  lb (cerca de 113 g) de sal por galão está entrando no tanque a uma taxa de  $r$  galões por minuto e que o líquido, bem misturado, está saindo do tanque à mesma taxa. Vamos supor que o sal não é criado nem destruído no tanque. Portanto, as variações na quantidade de sal devem-se, apenas, aos fluxos de entrada e saída no tanque. Mais precisamente, a taxa de variação de sal no tanque,  $\frac{dQ}{dt}$ , é igual à razão de entrada menos a razão de saída.*

A taxa de entrada no tanque é a concentração  $\frac{1}{4} \frac{lb}{min}$  vezes a taxa de fluxo de entrada  $r$  gal/min ou  $\frac{r}{4}$  lb/min. Para calcular a taxa de saída de sal do tanque, precisamos multiplicar a concentração de sal no tanque pela taxa de fluxo de saída,  $r$  gal/min. Como as taxas dos fluxos de entrada e de saída são iguais, o volume de água no tanque permanece constante em 100 galões e, como o líquido está “bem mexido”, a concentração em todo o tanque é a mesma, a saber,  $\left[ \frac{Q(t)}{100} \right]$  lb/gal. Portanto, a taxa segundo o qual o sal deixa o tanque é  $\left[ \frac{r \cdot Q(t)}{100} \right]$  lb/min. Considerando a condição inicial é  $Q(0) = Q_0$ , descreva um modelo matemático que representa a mistura de substância e resolva-o pelo método apropriado e verifique se a solução é válida para o modelo encontrado .

A partir do problema exposto e das hipóteses coletadas, coloquei alguns itens que pudessem estimular os alunos à construção do modelo matemático ao mesmo tempo em que fossem identificando conhecimentos de Cálculo necessários para a fase da resolução e validação do modelo.

Os itens foram os seguintes:

- a) Quais as variáveis e constantes envolvidas no problema?
- b) O modelo matemático encontrado é que tipo de equação diferencial?
- c) Qual é a solução que você pretende encontrar?

Neste momento os alunos buscam registrar o modelo que eles conseguiram construir dada as informações necessárias e as respostas dos itens. Desta forma, seguem os registros por eles feitos:

### REGISTRO 41

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{r}{4} - \frac{Q(t) \cdot r}{100}$$

② Variáveis:  $Q, t$

a) Constante:  $r$

b) É linear; não é exata; não é homogênea; é separável.

c) A solução será  $Q$  em função de  $t \Rightarrow Q(t)$ ,

→ reescrevendo:

$$Q' + \frac{rQ}{100} = \frac{r}{4} \quad \text{é linear}$$

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{25r - Q \cdot r}{100} \rightarrow \frac{dQ}{25 - Q} = \frac{dt}{100} \rightarrow \text{separável.}$$

### REGISTRO 42

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{\pi}{4} - \frac{Q \cos \pi}{100}$$

② a) variáveis:  $Q, t$

constantis:  $\pi$

b) É linear, não é exata, não é homogênea, é separável

c) A solução é  $Q$  em função de  $t$ .

$$Q' + \frac{\pi Q}{100} = \frac{\pi}{4} \quad \text{é linear}$$

### REGISTRO 43

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{r}{4} - \frac{rQ(t)}{100}$$

② a)  $Q, t \rightarrow$  variável  
 $r \rightarrow$  constante

b)  $Q' + \frac{rQ}{100} = \frac{r}{4} \Rightarrow$  PORTANTO É LINEAR

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{25r - Qr}{100} \Rightarrow \frac{1}{25 - Q} dQ = \frac{1}{100} dt \Rightarrow \text{É SEPARÁVEL}$$

c) A solução é  $Q$  em função de  $t$

#### REGISTRO 44

1. 
$$\frac{dQ}{dt} = \frac{r}{4} - \frac{Q(t) \cdot r}{100}$$
- 2.
- a) VARIÁVEIS:  $t, Q$   
CONSTANTE:  $r$
  - b) LINEAR, SEPARÁVEL
  - c)  $Q(t)$

#### REGISTRO 45

- 13) 
$$\frac{dQ}{dt} = \frac{r}{4} - \frac{Q(t)r}{100}$$
- 22) a)  $Q, t =$  variáveis  
 $r =$  constantes
- b) A equação é Separável e Linear
- c) O problema pede a quantidade de sal em função do tempo  $Q(t) = 25 - e^{-\frac{rt-c}{100}}$

#### REGISTRO 46

- 1) 
$$\frac{dQ}{dt} = \frac{r}{4} - \frac{Q(t)r}{100}$$
- 2)
- Variáveis:  $Q(t), dt, dQ$
  - Constantes:  ~~$Q, r$~~   $r$
- 3) A equação é linear, pois se apresenta na forma:
- $$\frac{dy}{dt} + p(t) \cdot y = q(t)$$
- Não é exata, pois não está na forma:
- $$M(x, y) + N(x, y) y' = 0$$
- Não é homogênea, já que não pode ser escrita em função apenas das variáveis  $x/y$ .
- ~~3)~~ É separável.
- 4)  $Q(t)$
-

### COMENTÁRIOS SOBRE OS REGISTROS:

Observamos nestes registros que o modelo matemático é descrito com precisão em relação às hipóteses, identificando as constantes e variáveis e analisando que tipo de equação se enquadra o modelo encontrado. E identifica que solução almeja encontrar quando for resolver o problema.

Nos **registros 41 a 43**, os alunos identificam que tipo de equação o modelo encontrado satisfaz e, além disso, escrevem na forma representável de cada tipo, mostrando a compreensão e distinção dos tipos de equação. O aluno do **registro 46**, escreve a forma geral dos tipos de equação e observa que o modelo que encontrou possui sua particularidade. Considero, pois, que no momento em que deixo a cargo do aluno identificar tais conceitos a partir do modelo que ele construiu, estou preparando o aluno a fazer uma escolha de qual técnica de resolução adotar para encontrar a solução do problema, ao invés de impor uma única técnica.

A partir desses registros os alunos puderam identificar que tipo de equação era o modelo que eles haviam encontrado para, então, escolher um método de resolução adequado e que solução objetivava ser encontrada.

### 3ª etapa: Resolução

Nesta fase os alunos escolheram a técnica que haviam se familiarizado e resolveram o problema, onde seguem os registros:

#### REGISTRO 47

③ Resolvendo por lineares:

$$Q' + \frac{r}{100} Q = \frac{r}{4}$$
$$u(t) = \frac{\int f(t)}{e^{\int p(t) dt}} = \frac{\int \frac{r}{4} dt}{e^{\frac{rT}{100}}} = e^{-\frac{rT}{100}}$$
$$Q' e^{\frac{rT}{100}} + \frac{rT}{100} Q = e^{\frac{rT}{100}} \cdot \frac{r}{4}$$
$$\int d[Q \cdot e^{\frac{rT}{100}}] = \int \frac{r}{4} \cdot e^{\frac{rT}{100}} + \int 0$$
$$Q \cdot e^{\frac{rT}{100}} = \frac{r}{4} \cdot 100 \cdot \frac{e^{\frac{rT}{100}}}{r} + K$$
$$Q e^{\frac{rT}{100}} = 25 e^{\frac{rT}{100}} + K$$
$$Q = 25 + K \cdot e^{-\frac{rT}{100}}$$
$$Q(0) = 25 + K \cdot e^{-\frac{r \cdot 0}{100}}$$
$$Q_0 = 25 + K$$
$$K = Q_0 - 25$$
$$Q(T) = 25 + (Q_0 - 25) \cdot e^{-\frac{rT}{100}}$$

### REGISTRO 48

$$(34) \quad \frac{dQ}{dt} = \frac{25 - rQ}{100}$$
$$\frac{100}{25 - rQ} dQ = \int dt$$

$$\frac{100}{r} \int \frac{1}{25 - Q} dQ = \int dt$$

$$\frac{100}{r} \int \frac{-du}{u} = \int dt + \int c$$

$$-\frac{100 \ln 25 - Q}{r} = t + c$$

$$\ln 25 - Q = -\frac{r(t+c)}{100}$$

$$Q = 25 - e^{-\frac{r(t+c)}{100}}$$

Condição Inicial

$$Q_0 = 25 - e^{-\frac{r \cdot 0}{100}} \cdot e^{\frac{rc}{100}}$$

$$Q_0 = 25 - K$$

$$K = -Q_0 + 25$$

### COMENTÁRIOS SOBRE OS REGISTROS:

Nesse momento os alunos escolhem a técnica de resolução que desejam utilizar para resolução de acordo com a que eles identificam que abrange o modelo encontrado.

A resolução se dá com relativa facilidade, bem como a utilização da condição inicial.

Considerando que deixei livre a escolha por eles feitas em relação à técnica de resolução a ser utilizada, não foram evidenciadas muitas dificuldades e as que pude identificar durante o processo de realização da atividade foram feitas enquanto observava as discussões nos grupos. Observe que no **Registro 47** foi utilizada a técnica de resolução de equações lineares enquanto que no **Registro 48** a técnica de resolução é a de equações separáveis, onde ambos alunos conseguem encontrar a solução aproximada do problema.

### 4ª etapa: Validação do modelo

Interpretada a solução encontrada, busquei nessa atividade acrescentar a fase do processo de Modelagem Matemática que não havia sido trabalhada nas atividades anteriores. Sendo assim, desenvolvi outro item no qual pedi que os alunos verificassem se a solução encontrada era válida para o problema.

**REGISTRO 49**

$$Q(t) = 25 - e^{\frac{-nt-nc}{100}}$$

$$Q'(t) = \frac{ne^{\frac{-nt-nc}{100}}}{100}$$

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{25n - nQ(t)}{100} \rightarrow \frac{ne^{\frac{-nt-nc}{100}}}{100} = \frac{25n - 25n + ne^{\frac{-nt-nc}{100}}}{100}$$

$$\frac{ne^{\frac{-nt-nc}{100}}}{100} = \frac{ne^{\frac{-nt-nc}{100}}}{100} \quad \therefore \text{solução é válida.}$$

**REGISTRO 50**

$$\textcircled{5} \quad Q(t) = 25 + 25e^{-3t/100}$$

$$Q'(t) = -\frac{3}{4} \cdot e^{-3t/100}$$

$$-\frac{3}{4} \cdot e^{-3t/100} + \frac{3 \cdot 25 e^{-3t/100}}{100} + \frac{3 \cdot 25}{100} = \frac{3}{4}$$

$$-\frac{3}{4} \cdot e^{-3t/100} + \frac{3}{4} \cdot e^{-3t/100} + \frac{3}{4} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{3}{4} = \frac{3}{4} \quad \therefore \text{a solução}$$

**REGISTRO 51**

$$\textcircled{5} \quad Q(t) = 25 - e^{-\frac{tn-nc}{100}}$$

$$Q'(t) = \frac{n e^{-\frac{tn-nc}{100}}}{100}$$

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{25n - nQ}{100}$$

$$\frac{n e^{-\frac{tn-nc}{100}}}{100} = \frac{25n - 25n + n e^{-\frac{tn-nc}{100}}}{100}$$

$$\frac{n e^{-\frac{tn-nc}{100}}}{100} = \frac{n e^{-\frac{tn-nc}{100}}}{100}$$

$$\boxed{n e^{-\frac{tn-nc}{100}} = n e^{-\frac{tn-nc}{100}}}$$

**REGISTRO 52**

$$\textcircled{5} \text{ e } \textcircled{6} \quad Q = 25 + (Q_0 - 25) e^{-\frac{nt}{100}}$$

$$Q = 25 + 25 e^{-\frac{3t}{100}} \quad |$$

$$Q' = 25 \cdot e^{-\frac{3t}{100}} \cdot \left(-\frac{3}{100}\right)$$

$$Q' = -\frac{3}{4} e^{-\frac{3t}{100}} \quad |$$

$$-\frac{3}{4} e^{-\frac{3t}{100}} = \frac{n}{4} - \frac{Q(t) \cdot n}{100}$$

$$-\frac{3}{4} e^{-\frac{3t}{100}} = \frac{3}{4} - \frac{Q(t) \cdot 3}{100}$$

$$-\frac{3}{4} e^{-\frac{3t}{100}} = \frac{3}{4} - \frac{3}{4} \cdot \frac{Q(t)}{25}$$

$$-\frac{3}{4} e^{-\frac{3t}{100}} = \frac{3}{4} \left(1 - \frac{Q(t)}{25}\right)$$

$$-e^{-\frac{3t}{100}} = 1 - \frac{Q(t)}{25}$$

$$-25 e^{-\frac{3t}{100}} = 25 - Q(t)$$

$$Q(t) = 25 + 25 e^{-\frac{3t}{100}} \quad |$$

Logo,  $Q = 25 + 25 e^{-\frac{3t}{100}}$  é solução.

### **COMENTÁRIOS SOBRE OS REGISTROS:**

De acordo com cada solução encontrada, os alunos utilizam uma maneira que mais se familiarizam para verificar a validade do modelo. Percebi que os alunos validam a solução com certa facilidade, utilizando a igualdade dos membros da equação (**registros 49, 50 e 51**). Já no **registro 52** o aluno utiliza o modelo encontrado derivando-o e substituindo no modelo e depois isola  $Q(t)$  que é a solução, verificando que é igual ao modelo encontrado.

Nessa atividade os alunos tiveram a liberdade de escolher a técnica de resolução para o modelo encontrado e assim, também, em verificar a validação do modelo, acreditando que os alunos possuíam conhecimentos que foram aprendidos em outros momentos (derivação de funções) que servirão para desenvolver novos conhecimentos. Devido essa fase do processo de Modelagem Matemática ter sido trabalhada pela 1ª vez nessa atividade, algumas dúvidas surgiram e pude nas discussões dos grupos contribuir à medida que os alunos pediam para esclarecer suas dúvidas.

Desenvolvida a atividade, pedi que os alunos fizessem suas considerações em relação a esse problema, as quais seriam uma das formas dos alunos refletirem sobre o que estava sendo desenvolvido. Desta maneira acreditava que estaria contribuindo para a formação de um cidadão crítico e reflexivo sobre seu aprendizado. Ficam registradas as seguintes considerações:

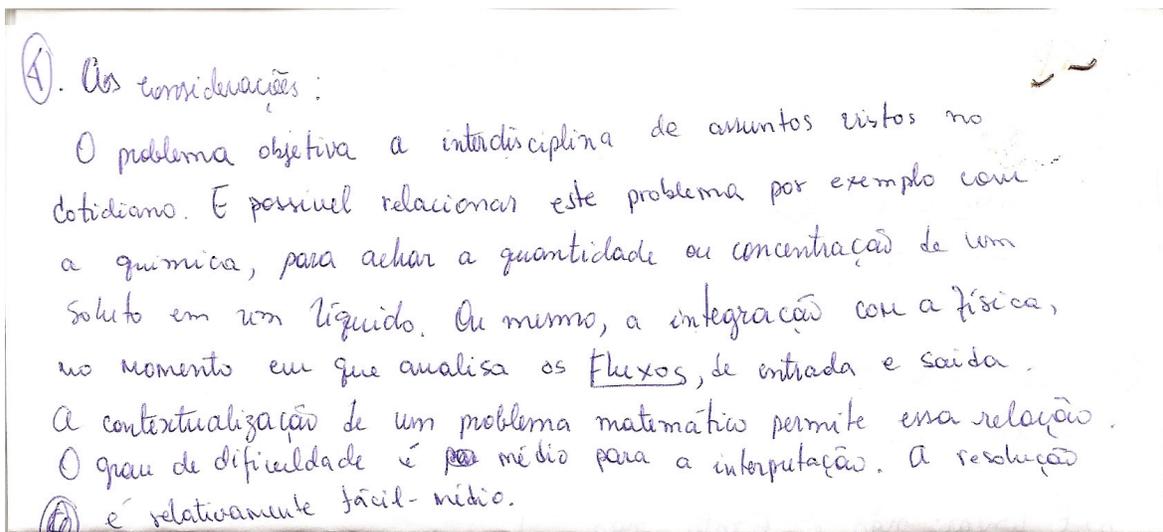
#### **REGISTRO 53**

4) O problema é uma aplicação dos conceitos de equações diferenciais ao mundo de Física. Desta forma, podemos ter uma melhor visualização de várias aplicações em variados contextos.

#### **REGISTRO 54**

④ Essa equação diferencial é aplicada a mistura com sal assim como em muitas aplicações no dia-a-dia que se resolvem pelas mesmas. A dificuldade em resolvê-la foi apresentada no modelo matemático em que envolveu a concentração do soluto e outras variáveis e constantes.

## REGISTRO 55



## REGISTRO 56

4? O problema dado é bastante contextualizado, sendo que se encontra o modelo matemático de maneira direta, já que os dados são apresentados diretamente com a procedência de organização do modelo. O problema é resolvido apropriadamente como uma equação linear com coeficientes variáveis.

### COMENTÁRIOS SOBRE OS REGISTROS:

Em todos os registros (53, 54, 55 e 56) há uma regularidade em considerar o problema uma aplicação voltada para situações do dia-a-dia, contextualizada e interdisciplinar. Mas apesar de serem trabalhadas essas atividades como motivação no aprendizado de matemática, ainda tiveram alunos que não consideraram a estratégia utilizada como uma possibilidade no aprendizado de matemática. E muitos alunos, diante dessas atividades, ainda apresentam dificuldades em encontrar o modelo matemático ou resolver pelo método apropriado, visto que foi algo novo e diferente das estratégias utilizadas nas disciplinas de Cálculo I e II.

#### 4.6.1 - Resultados da 4ª atividade

A partir da compreensão dos registros dos alunos e das observações feitas por mim e registradas no diário de campo, pude considerar que nessa atividade os alunos desenvolveram o processo de obtenção do modelo com mais facilidade em relação às outras atividades. Após a fase de obtenção do modelo, os alunos escolheram uma das técnicas de resolução do modelo, podendo perceber que houve compreensão por eles das técnicas. Devido à fase de validação ter sido trabalhada somente nessa atividade, os alunos pediram orientações para mim e a partir dessas orientações desenvolveram a verificação do modelo sem dificuldades.

Essa atividade, como sendo a última desenvolvida durante a pesquisa, proporcionou a mim uma visão mais ampla de como o processo de Modelagem pôde contribuir com o aprendizado dos alunos em relação a conceitos dos Cálculos I e II, ainda não compreendidos pelos alunos, bem como proporcionar um bom entendimento do Cálculo III de maneira gradativa e não instantânea.

#### 4.7 – Compreendendo o questionário pós-atividade

Realizadas as atividades, considerei necessário fazer um outro questionário para resgatar as contribuições que essa atividade pôde proporcionar, levando em consideração os relatos dos alunos anteriores à realização das atividades através da Modelagem Matemática.

Portanto, as considerações que apresento abaixo foram resultados do questionário pós-atividades e de observações feitas por mim durante as atividades.

a) quanto ao aprendizado:

Os alunos refletem sobre os conhecimentos dos cálculos anteriores às atividades que puderam aprender na utilização da Modelagem Matemática, o que Ferruzzi (2004, p.1954) contribui quando diz que o conceito quando é construído pelo aluno é facilmente resgatado quando necessário:

➤ Conhecimentos prévios

*“... aprimorou meu conhecimento dos cálculos anteriores com os novos conhecimentos...”*

*“... alguns momentos pude suprir conceitos básicos da matemática...”*

*“... me estimulou a melhorar a base...”*

Apresentar o novo conhecimento a partir da Modelagem provocou uma diferença de pensamento nesses alunos, desta forma, eles fazem uma reflexão, de modo que o conhecimento construído através de modelos é um saber contextualizado e com significado (Ferruzzi, 2004, p. 1954):

➤ Contextualização

*“... a abordagem teórica somente não mostra ao aluno aonde ele pode utilizar os assuntos no dia-a-dia...”*.

*“... pude fazer uma análise crítica em relação a questionamentos interdisciplinares, resolução de problemas e possibilidade de interpretação textual, a fim de relacionar a matemática (o cálculo) com o dia-a-dia...”*.

*“... aprendi como avaliar matematicamente problemas, tornando-os mais compreensivos...”*.

*“... saiu da matemática pura apresentando problemas contextualizados...”*.

Para esses alunos foi considerada importante a participação do professor durante o processo de Modelagem, podendo, assim, motivar em seu aprendizado, considerando que a professora oportunizou os alunos a reconhecerem o papel da Matemática na vida, seja ela no âmbito acadêmico, profissional ou social (Ferruzzi, 2004, p.1954):

➤ Afetividade e motivação

*“... tive um bom aproveitamento, pois a docente foi uma das poucas que tiveram a preocupação com o aprendizado do aluno...”*.

*“... foi a 1ª vez, em três semestres que me esforcei em aprender alguma coisa. Porque os outros professores te ensinam, mas não procuram saber se você está aprendendo...”*.

Levando em consideração tais motivações, ficou evidente que a Modelagem Matemática, enquanto estratégia de ensino e aprendizagem utilizada durante a pesquisa, é bastante enfatizada pelos alunos, visto que, as aplicações de conceitos em situações do dia-

a-dia exigem que a capacidade dos alunos sejam desenvolvidas e que, devemos trabalhar em sala de aula com “verdadeiras situações problemas” (Ferruzzi, 2004, p.1954):

➤ **Aprendizagem Significativa**

*“... sempre tive grande interesse em saber como seria feito um curso através da modelagem matemática...”*

*“... é uma maneira diferente de dar aula, faz o aluno pensar em resolver problemas contextualizados...”*

*“... torna-se mais claro a visualização de como abordar cada aplicação da disciplina...”*

*“... o aluno tem a liberdade de modelar os problemas...”*

*“... podemos por si próprios, achar modelos e resolvê-los...”*

Segundo Silva & Santo (2004, p.5) algumas pesquisas têm mostrado a importância de se considerar o cotidiano do sujeito na aquisição do conhecimento matemático. E os alunos vêm a ressaltar o papel do professor e dos alunos relacionando com a proposta do curso no Ensino Superior, quando utilizada a Modelagem Matemática:

➤ **Contextualização no cotidiano**

*“... o curso foi ministrado tão bem claro e objetivo que o aluno pensa “eu realmente vou usar isso...”*

*“...talvez os professores devam pesquisar sobre o curso no qual ele irá dar aula...”*

*“...os professores devem (...) buscar temas mais próximos e mais “úteis” à formação do aluno naquele objetivo de aprender mais sobre o curso que ele [aluno] faz...”*

*“... não posso esquecer da proximidade da professora que ajudou os alunos esclarecendo suas dúvidas. Isso em nível superior não é visto com muita frequência...”*

*“... creio que os resultados desse curso refletirão melhores fora da universidade...”*

Mesmo sabendo que poderia haver contribuições dos alunos e aceitação perante a mudança de estratégia de ensino no curso de Cálculo, tive dentre 20 (vinte) alunos, 2 (dois)

que deixaram transparecer durante as atividades a insatisfação e concepções quanto a utilização da Modelagem, pois no momento em que pedi que respondessem o questionário pós-atividade foram bastante defensores de suas idéias em relação ao que é aprender matemática na Universidade:

➤ Conceção Tradicional de ensino e aprendizagem- o paradigma do exercício

*“havia momentos que eu preferia ir á biblioteca pesquisar ou fazer um trabalho de outra disciplina. A falta de ânimo para estar nessa aula era grande devido a metodologia de resolver uma questão por aula”*

*“sempre discordei. Matemática se aprende resolvendo muitas questões, algo que não ocorria em sala de aula”*

*“não quero lhe deixar triste, mas minha formação foi através de ensinamentos tradicionais e para mim, aprender matemática ainda é resolver exercícios e não foi feito nem a metade dos exercícios do livro”.*

Contudo acredito que no ensino de Matemática não deve ser utilizado exclusivamente através de uma estratégia de ensino e aprendizagem, desta forma, a Modelagem Matemática não deve ser trabalhada durante uma disciplina em todos os momentos, mas intercalada com outras estratégias. O que foi realizada nessa pesquisa, visto que, uma maneira somente, não foi suficiente.

Em qualquer disciplina desenvolvida durante os cursos, os alunos universitários devem perceber que o aprendizado é uma união de prática em sala de aula e pesquisa extra sala de aula e, não uma espera de conhecimento que possam ser trazidos pelo professor, ou seja, o aluno deve exercitar seu papel acadêmico de forma autônoma, fato que não aconteceu com esses dois alunos.

Assim percebi que a Modelagem Matemática é uma estratégia que pôde contribuir com o aprendizado da maioria dos alunos de Engenharia, ao mesmo tempo em que proporciona ao professor a reflexão em relação à prática que pretende adotar levando o aluno a ser crítico e reflexivo frente ao conteúdo que lhe é ensinado, principalmente por ser um processo de construção de conhecimentos e interação em sala de aula, mesmo sabendo que não vai agradar a todos, visto que são pessoas que pensam, agem diferentemente uns dos outros.

## **CAPÍTULO V**

### **MINHAS REFLEXÕES FINAIS**

Para finalizar este trabalho, gostaria de fazer uma retrospectiva dos fatores que me incentivaram à realização desta pesquisa, as contribuições que esta trouxe para minha formação e evolução no aprendizado dos alunos enquanto participantes principais do processo de ensino e aprendizagem, bem como as expectativas e resultados alcançados.

#### **5.1 – Os incentivos para pesquisa**

Ao me lançar no desafio da pesquisa estava, na verdade, propondo-me a mudar minha postura diante da prática que adotava, ao mesmo tempo em que pudesse consolidar como foco da pesquisa a aprendizagem dos alunos de Engenharia, uma vez que já estava atuando no ensino superior, mas com a proposta de utilização de uma estratégia de ensino e aprendizagem diferenciada da que adotava no ensino de Cálculo.

A oportunidade do ingresso no mestrado surgiu durante os estudos, em meio uma a disciplina e outra, onde pude refletir sobre as colocações de diversos autores e, assim, buscar uma resposta à seguinte pergunta que me inquietava no momento: Como a Modelagem Matemática pode contribuir no processo de aprendizagem dos alunos da disciplina Cálculo III – Equações Diferenciais Ordinárias (EDO) – em um curso de Engenharia da Computação?

Norteando a pesquisa através dessa pergunta, inicia-se, pois, a ansiedade de “ver” a concretização da investigação e, conseqüentemente, a busca de minha satisfação profissional e pessoal.

#### **5.2 – As contribuições**

Um fator que pôde ser considerado primordial para o desenvolvimento e enriquecimento da minha pesquisa foi a participação nos encontros do GEMM (Grupo de Estudos em Modelagem Matemática). Este grupo está destinado a gerar discussões entre pessoas que possuem o mesmo foco de pesquisa: a Modelagem Matemática na Educação Matemática, de modo que as contribuições se tornaram importantes para que eu pudesse refletir sobre como estava realizando a pesquisa, os caminhos por ela designados e como os resultados que estavam sendo coletados poderiam ser analisados. À medida que as idéias

iam surgindo nos grupos, considerava que minha dissertação ia tomando forma, pois quando há uma interação sempre há um aprendizado, uma melhoria na produção de conhecimento, seja coletivo ou individual.

Esse foi um processo essencial no desenvolvimento da pesquisa e na minha formação como pesquisadora, levando à construção de uma visão crítica como professora e pesquisadora, embora acredite que sempre falta algo a ser aprendido.

### **5.3 – As expectativas e resultados da pesquisa**

Com o intuito de desencadear o interesse nos alunos de Engenharia em relação ao aprendizado de Cálculo e de ajudar profissionais que atuam no Ensino Superior na elaboração de suas próprias práticas foi que este trabalho teve como fundamentação teórica a Modelagem Matemática na linha da Educação Matemática, fazendo com que “o fenômeno modelado [viesse a servir como] pano de fundo ou motivação para o aprendizado das técnicas e conteúdos da própria matemática” (Bassanezzi, 2002, p.38).

O trabalho realizado com os estudantes me mostrou o quanto é difícil desempenhar um papel no qual você está mudando de atitudes e propondo mudança no pensamento e atitudes de seus alunos. E paralelo a isso, foram surgindo sentimentos que se misturavam apesar de suas contradições, ora sentia-me insegura e, por vezes, tranqüila e confiante no sucesso da pesquisa. Tais sentimentos surgiram por ser uma experiência nova, por acreditar que poderia está realizando uma atividade docente melhor, mas ao mesmo tempo, sabia que o aprendizado dos alunos estava evoluindo à medida que as atividades iam sendo desenvolvidas, pois sempre foi a condição que mais dei atenção em todo o processo.

Com a introdução de novas estratégias gera-se um ambiente de argumentações, sugestões, idéias e resultados diferenciados, visto que a sala de aula já é por si só um sistema complexo, constituído de pessoas que trazem um arcabouço de concepções formadas e, por certas vezes, difíceis de sofrer modificações.

A fim de adquirir uma nova adaptação em relação à proposta estabelecida, foi necessário saber escutar, deixar de ser o centro do processo (transferindo esse papel para o aluno), permitir e encorajar os alunos a serem construtores de seu próprio conhecimento, aceitando constantemente que o aluno possui conhecimento adquirido em outros momentos de sua experiência acadêmica e pessoal.

Evidências, que os alunos tiveram neste momento o primeiro contato com aplicações de outras áreas do conhecimento vinculado à disciplina de Cálculo, foram encontradas logo nas respostas ao questionário pré-atividade. Tanto é verdade, que nos registros da primeira atividade não houve, com exceção de um aluno ter feito uma tentativa, nenhum registro deste vínculo. O que os alunos utilizam como registros são representações do tipo: desenhos para visualização da situação, outros utilizam as relações algébricas, de modo que estabelecem relações entre essas representações, mas que ao longo do processo foram evoluindo no seu aprendizado.

No Quadro I que segue intenta-se apresentar uma visão panorâmica acerca do processo de evolução no aprendizado dos alunos diante dos conteúdos à medida que acontecia uma evolução do processo de Modelagem Matemática apresentada no Quadro II. Tais conclusões foram obtidas a partir das análises das atividades desenvolvidas durante as aulas de Cálculo III.

**Quadro I: Evolução no processo de aprendizado dos alunos diante dos conteúdos de Cálculo III**

	<b>1ª atividade</b>	<b>2ª atividade</b>	<b>3ª atividade</b>	<b>4ª atividade</b>
<b>Conhecimento de Cálculo relacionado ao Tema</b>		X	X	X
<b>Conceitos de Ordem</b>		X	X	X
<b>Identificação de Variáveis</b>		X	X	X
<b>Identificação de Constantes</b>		X	X	X
<b>Conceito de E.D.O</b>		X	X	X
<b>Utilização da Linguagem Matemática</b>	X	X	X	X
<b>Utilização das Técnicas de Resolução</b>			X	X
<b>Identificação da Condição Inicial</b>			X	X

Neste quadro estão contidos os conhecimentos essenciais para o aprendizado de Equações Diferenciais Ordinárias e, na medida em que foram apresentadas as atividades, houve uma compreensão de conceitos e técnicas de resolução do problema.

Na 1ª atividade os alunos só conseguem utilizar conhecimentos de Física relacionando através de relações algébricas, quando passam para a 2ª atividade, os conceitos básicos de E.D.O, os alunos já identificam, mas ainda não utilizam nenhuma técnica de resolução. Na 3ª e 4ª atividades, os alunos acrescentam nos novos conhecimentos as técnicas de resolução de EDO, e assim conseguem ter uma visão mais ampla dos conteúdos a serem abordados na disciplina vinculados a conhecimentos de outras áreas. A aquisição destes conhecimentos de Cálculo foi motivada pela Modelagem Matemática, processo que também foi acontecendo gradativamente à medida que as atividades iam sendo apresentadas. Vejamos como ocorreu a evolução no processo de Modelagem Matemática:

**Quadro II: Evolução no processo de Modelagem Matemática**

	<b>1ª atividade</b>	<b>2ª atividade</b>	<b>3ª atividade</b>	<b>4ª atividade</b>
<b>Experimentação</b>	X	X	X	X
<b>Abstração</b>	X	X	X	X
<b>Resolução</b>			X	X
<b>Validação</b>				X

Os resultados apresentados neste quadro nos mostram como a Modelagem Matemática, além de possibilitar a integração do conteúdo a ser estudado no curso de Engenharia, pode possibilitar, também, uma tentativa em buscar o aprendizado dos alunos, desenvolvendo ao mesmo tempo uma visão crítica ao que é estudado por meio da Modelagem Matemática.

O trabalho em equipe, os momentos de discussão na busca da construção do modelo matemático, ao relacionar conhecimentos adquiridos anteriormente aos novos conhecimentos, fez com que, cada um, indiretamente, se sentisse parte do processo de resolução do problema e responsáveis pelo próprio aprendizado, tendo a minha participação como mediadora do processo de aquisição do conhecimento.

As dificuldades mais freqüentes que os alunos encontraram foram em ter que apresentar conhecimentos já adquiridos em outros momentos sem ser apresentados novos

conceitos, técnicas e idéias do conteúdo a ser aprendidos por eles, pois já estavam acostumados à utilização de um mesmo sistema de ensino, o tradicional.

Ao desenvolver as atividades de Modelagem, surgiram em alguns momentos (com maior frequência no início das primeiras atividades em alguns alunos) ações de resistência à estratégia adotada, gerando ausência dos alunos em algumas aulas. Mas, conforme fui propondo discussões nos grupos de alunos e procurando dar atenção aos que se mostravam resistentes no início, a assiduidade e a participação deles foi aumentando, bem como o interesse em aprender o Cálculo via Modelagem Matemática.

Percebi, assim, que nesta situação a Modelagem Matemática pode contribuir no resgate de conhecimentos construídos em outras disciplinas de Cálculo, a aquisição de novos conhecimentos sem que o professor defina todos os conceitos e técnicas. Na verdade, o que se percebe é que o processo natural de conhecer é deparar-se com um problema que faz sentido ao sistema cognitivo e, sendo assim, o sujeito se motiva para a sua solução, o que é parte de um modelo explicativo do fenômeno e que é internalizado no mesmo sistema cognitivo de forma significativa. Ora, o processo de Modelagem Matemática contribui na perspectiva de aplicar o processo natural de conhecer para se promover o ensino-aprendizagem da Matemática escolar.

Portanto, fica aqui uma motivação para o professor que ainda é resistente a proposta de implementação de novas estratégias no ensino de Matemática, em poder ousar e enriquecer suas aulas na utilização da Modelagem Matemática, e aos alunos que, porventura, não tinha conhecimento de como a Matemática pode ser aprendida de maneira dinâmica e contextualizada.

Por final, gostaria de dizer que a experiência de ser professora e pesquisadora desde o princípio do curso de mestrado, me fez perceber que todo conhecimento adquirido proporcionou momentos de reflexão da minha própria prática, acreditando sempre, que é possível trazer para nossos alunos conhecimentos que venham a contribuir para a formação profissional e pessoal, tendo pois, a satisfação em ser *professora de Matemática* e assim, prosseguir com pesquisas que venham a contribuir com um ensino superior de qualidade.

## REFERÊNCIAS

- BASSANEZZI, R. C.** *Ensino – aprendizagem com Modelagem Matemática: uma nova estratégia.* São Paulo: Contexto, 2002;
- BARBOSA, J.** *Modelagem na Educação Matemática: Contribuições para o debate teórico.* São Paulo: UNESP, 1990.
- BICUDO, M. & BORBA, M.** *Educação Matemática: pesquisa em movimento.* São Paulo: Cortez., 2005;
- BIEMBENGUT, M. S.** *Modelagem Matemática & Implicações no Ensino – Aprendizagem de Matemática.* Blumenau: Ed. da Furb, 1999;
- BIEMBENGUT, M. S. & HEIN, N.** *Modelagem Matemática no ensino.* 3ª edição. São Paulo: Contexto, 2003.
- BORBA, M. C.** *A Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática.* Publicado em CD nos Anais da 27ª reunião anual da Anped, Caxambu, MG, 21-24 Nov. 2004;
- BOYCE, W. & DIPRIMA, F.** *Equações Diferenciais Ordinária: Valores e Problemas de Contorno.* São Paulo: LTC (Livros Técnicos e Científicos), 2004;
- BRONDANI, M.F. & RODRIGUES, P.** *Modelagem Matemática como estratégia de ensino e aprendizagem em Matemática.* In: IX EGEM – Encontro Gaúcho de Educação Matemática, 2006, Caxias do Sul. Anais do XI Encontro Gaúcho de Educação Matemática. Caxias do Sul: Editora da UCS, 2006;
- COWAN, J.** *Como ser um professor universitário inovador: Reflexão na ação.* . Natal: Flecha do Tempo, 2006;
- COSTA, N. C.A.** *Introdução aos fundamentos da Matemática.* 3ª edição. São Paulo: Hucitec, 1992.

**DESLANDES, S. F.** *Pesquisa social: Teoria, método e criatividade*. 25ª edição revista e atualizada, Petrópolis, RJ. Vozes, 2007;

**FERRUZI, E. C.; GONÇALVES, M. B.; HRUSCHKA, J.; ALMEIDA, L. M. W.** *Modelagem Matemática como estratégia de ensino e aprendizagem nos Cursos Superiores de Tecnologia* in World Congress on Engineering and Technology Education. São Paulo, 2004, p. 1354-1358;

**HUETE, J.C.S. & BRAVO, J.A.F.** *O Ensino da Matemática: Fundamentos teóricos e bases psicopedagógicas*. Porto Alegre: Artmed, 2006;

**KUHN, T. S. A.** *Estrutura das Revoluções Científicas*. 8ª ed. São Paulo: Perspectiva, 2003. 260 p.;

**MACHADO Jr.A.** *A Modelagem Matemática no ensino-aprendizagem: ações e resultados*. Belém: UFPA, 2005. Dissertação (Mestrado) – NPADC, Universidade Federal do Pará;

**MACHADO Jr.A. & SANTO, A.O.E.** *A Modelagem Matemática como caminho para “fazer matemática” na sala de aula*. Conhecimento Complexo e Multiculturalidade: trabalhos e resumos: Anais do VII CNNECIM. Belém-Pará, 2004. Ed. CEJUP, p. 77-85;

**MASETTO, M.T.** *Ensinar e Aprender no Ensino Superior: por uma epistemologia da Curiosidade na Formação Universitária*. Organizadores: Teodoro, A. & Vasconcelos, M. São Paulo: Mackenzie e Cortez, 2003.

**MENDES, I.** *Matemática e Investigação em sala de aula: Tecendo redes cognitivas na aprendizagem*. Natal :Flecha do Tempo., 2006.

**OLIVEIRA, A.M.P.** *Professores, Tensões e Modelagem Matemática*. Artigo apresentado no doutorado sob orientação de Jonei Barbosa. Programa de Pós-graduação em Ensino, Filosofia e História das Ciências. UFBA/UEFS, 2006.

**PINHEIRO, N.A.M.** *Uma reflexão sobre a importância do conhecimento matemático para a ciência, para tecnologia e para sociedade*. Artigo apresentado no Programa de Pós-graduação em Educação Científica e Tecnológica.CEFET-PR. Publicado em 23/04/2003.

**SANTOS, B. S.** *Introdução a uma ciência pós-moderna*. Rio de Janeiro: Graal, 1989.

**SILVA, M.R.G.** *Discurso de alguns professores de Cálculo sobre taxas de variação*. Quadrante, Vol. 7, Nº 1, UNESP: 1998, p. 54-73;

**SILVA, F. H. S & SANTO, A. O. S.** *A contextualização: uma questão de contexto*. Comunicação Científica disponível nos anais do VIII Encontro Nacional de Educação Matemática, Recife, 2004.

**RODRIGUES, J.A.** *A Matemática na Construção do Futuro*. Artigo disponível no site: [www.deetc.isel.ipl.pt](http://www.deetc.isel.ipl.pt). Acessado no dia 09/01/2008;

**TEODORO, A. & VASCONCELOS, M.** *Ensinar e aprender no ensino superior: por uma epistemologia da curiosidade na formação universitária*. São Paulo: Mackenzie e Cortez, 2003.

**VILLARREAL, M.E.** *O Pensamento Matemático de estudantes universitários de Cálculo e tecnologias informáticas*. Tese de doutorado, UNESP: Rio Claro- São Paulo, 1999.

## **ANEXOS**

### **ANEXO 1: Questionário Pré-Atividade**

1- Como você avalia seu curso de graduação?

( ) bom ( ) regular ( ) fraco ( ) muito bom

Justificativa:

2- Você considerou importante estudar as disciplinas de Cálculo I e II?

3- O que você considerou importante para sua formação nas disciplinas de Cálculo I e II?

4- Quais as maiores dificuldades que você encontrou durante essas disciplinas?

5- Faça uma auto-avaliação sobre as disciplinas de Cálculo que você já cursou?

6- Quais as suas expectativas sobre a disciplina de Cálculo III?

## ANEXO 2- Questionário Pós-Atividade

1- Você considerou o curso de Cálculo III:

RUIM       BOM       REGULAR       ÓTIMO

2- Que contribuições esse curso trouxe para sua formação?

3- A metodologia utilizada pela professora, ao abordar o assunto através de problemas contextualizados, é mais vantajosa?

SIM       NÃO

4- Que dificuldades você sentiu durante o curso?

5- Em algum momento, você discordou com a maneira que foi ministrada a disciplina?  
Qual seria sua sugestão?

6- Você percebeu alguma diferença na disciplina de Cálculo III em relação aos outros Cálculos? O que você percebeu de diferença?

7- As expectativas que você teve no início do curso foram almeçadas? Faça suas considerações.