UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ

NÚCLEO DE PESQUISA E DESENVOLVIMENTO DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E CIENTÍFICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICAS – MESTRADO

Evandro dos Santos Paiva Feio

MATEMÁTICA E LINGUAGEM: um enfoque na conversão da língua natural para a linguagem matemática

Belém

2009

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ

NÚCLEO DE PESQUISA E DESENVOLVIMENTO DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E CIENTÍFICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICAS-MESTRADO

Evandro dos Santos Paiva Feio

MATEMÁTICA E LINGUAGEM: um enfoque na conversão da língua natural para a linguagem matemática

Dissertação apresentada ao Núcleo de Pesquisa e Desenvolvimento da Educação Matemática e Científica da Universidade Federal do Pará, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Educação em Ciências e Matemáticas.

Orientadora: Profª. Drª. Marisa Rosâni Abreu da Silveira

Belém
2009

**Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP) –
Biblioteca do IEMCI, UFPA**

.
Feio, Evandro dos Santos Paiva.
Matemática e linguagem: um enfoque na conversão da língua natural para a linguagem matemática / Evandro dos Santos Paiva Feio, orientadora Profa. Dra. Marisa Rosâni Abreu da Silveira. – 2009.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Pará, Instituto de Educação Matemática e Científica, Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas, Belém, 2009.

1. Matemática – estudo e ensino. 2. Linguagem e educação. 3. Língua materna. 4. Matemática (Segundo Grau) – Belém (PA). I. Silveira, Marisa Rosâni Abreu da, orient. II. Título.

CDD - 22. ed. 510. 802

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ

NÚCLEO DE PESQUISA E DESENVOLVIMENTO DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E CIENTÍFICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICAS-MESTRADO

Evandro dos Santos Paiva Feio

MATEMÁTICA E LINGUAGEM: um enfoque na conversão da língua natural para a linguagem matemática

Dissertação apresentada ao Núcleo de Pesquisa e Desenvolvimento da Educação Matemática e Científica da Universidade Federal do Pará, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Educação em Ciências e Matemáticas.

Aprovado em 27 de março de 2009.

Banca Examinadora

____

Profª. Drª. Marisa Rosâni Abreu da Silveira – UFPA – Orientadora

____

Profª. Drª. Cláudia Regina Flores – UFSC – Membro externo

____

Prof. Dr. Erasmo Borges de Souza Filho – UFPA – Membro titular interno

____

Prof. Dr. Francisco Hermes Santos da Silva – UFPA – Membro Suplente

Dedico este trabalho:

a Keyla, minha querida e amada esposa, pelo amor e pela certeza do companheirismo com o qual posso contar sempre, e ao meu filho Kaio, a maior de todas as graças que Deus me concedeu. É ao lado de vocês que a minha vida faz sentido.

AGRADECIMENTOS

A Deus, em primeiro lugar, por ter me concedido o dom da vida, saúde, sabedoria e a oportunidade de estar consolidando, não somente uma realização pessoal mas, sobretudo, a consumação de mais uma etapa da minha formação profissional.

A minha querida e adorada mãe Maria Madalena (meu porto seguro) pela dedicação e esforço conferido a minha educação e por ser a minha referência de caráter e dignidade.

A minha esposa Keyla e ao meu filho Kaio, por estarem sempre ao meu lado e, sobretudo, pela paciência e compreensão nos inúmeros momentos de privações que a realização deste trabalho exigiu.

Aos meus sogros (pais) Cláudio e Valduiza, pelo incentivo e pelo apoio que nunca me foi negado em todos os momentos que precisei, principalmente nos mais difíceis.

Aos meus tios José Raimundo e Anízia, por ter me estendido às mãos e ter proporcionado a oportunidade para que eu pudesse dar o primeiro passo em direção a minha formação acadêmica.

Ao amigo Professor Joaquim Bentes, pela gentileza de ter feito a correção ortográfica deste texto quando foi apresentado ao exame de qualificação.

Aos colegas integrantes do Grupo de Estudo e de Pesquisa em Linguagem Matemática (GELIM): Alan, Nelson, Paulo, Rafael, Reginaldo, Robson e Sales pelas contribuições feitas através das críticas e sugestões que possibilitaram o aprimoramento deste trabalho.

A todos os alunos tanto do Colégio Estadual “Paes de Carvalho” quanto da Escola Estadual de Ensino Médio “Pedro Amazonas Pedroso” que gentilmente se dispuseram a colaborar com as atividades propostas para a obtenção de coleta de informações desta pesquisa.

À coordenação e aos professores do Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas (PPGECM/NPADC/UFPA) pelo incentivo recebido e pelas contribuições dadas, por meio de seus conhecimentos, para que fosse possível realizar esta pesquisa.

Ao professor Dr. Tadeu Oliver Gonçalves, por ter me concedido um minuto de sua atenção quando lhe procurei a fim de que, me sugerisse um tema ao qual eu pudesse desenvolver uma proposta de pesquisa para concorrer no processo seletivo do PPGECM.

Aos professores Drª. Cláudia Regina Flores, Dr. Erasmo Borges de Souza filho e Dr. Francisco Hermes Santos da Silva pela gentileza de terem aceitado o convite para compor a banca examinadora desta dissertação.

À minha orientadora, Profª.Drª. Marisa Rosâni Abreu da Silveira, a qual devo eternos agradecimentos por ter me orientado no desenvolvimento desta pesquisa. Com ela aprendi que, segundo Wittgenstein (seu teórico favorito), o que não conseguimos dizer com palavras apontamos e mostramos. Nesse sentido, a linguagem nem sempre é capaz de expressar nossas sensações, visto que as sensações são privadas. Assim é que me sinto ao ter que expressar o quanto sou grato por suas contribuições para a realização deste trabalho de investigação, ou seja, me faltam palavras, e se existem eu ainda não as conheço.

De tudo ficaram três coisas:

A certeza de que estamos sempre começando...

A certeza de que é preciso sempre continuar...

A certeza de que podemos ser interrompidos antes de terminar...

PORTANTO DEVEMOS

Fazer da interrupção um novo caminho...

Da queda, um passo de dança...

Do medo, uma escada...

Do sonho, uma ponte...

Da procura... um encontro

(Fernando Sabino)

SUMÁRIO

RESUMO

Esta pesquisa teve como objetivo identificar e analisar quais as possíveis dificuldades advindas da linguagem que alunos enfrentam na conversão da língua natural para a linguagem matemática. A investigação foi realizada ao longo do ano letivo de 2008 em classes de Ensino Médio de duas escolas públicas da cidade de Belém, onde foram coletadas informações por meio de registros produzidos pelos alunos em testes e avaliações bimestrais. Para subsidiar a investigação foram utilizadas, como aporte teórico, idéias de Raymond Duval acerca da teoria dos registros de representação semiótica; o conceito de significado ligado a filosofia da linguagem segundo Wittgenstein; algumas considerações feitas por Gottlob Frege sobre a distinção entre sentido e referência assim como algumas idéias do filósofo Gilles-Gaston Granger no que concerne ao problema das significações e do aspecto formal da linguagem matemática. As análises das informações que foram coletadas no decorrer do processo investigativo revelaram que, na perspectiva dos alunos, a conversão da língua natural para a linguagem matemática se depara com quatro tipos de dificuldades: a primeira apontou para o fato de existirem em cada registro de representação de um mesmo objeto matemático, diferentes conteúdos a serem mobilizados; a segunda mostrou que os alunos fracassam ao realizar a conversão da língua natural para a linguagem matemática quando não interpretam corretamente as regras matemáticas implícitas no enunciado de uma situação problema; a terceira surgiu do fato de existirem no texto de uma situação problema, palavras que os alunos não compreendiam o seu significado ou que geravam ambigüidade de sentidos; a quarta surgiu a partir do fato dos alunos não conseguirem compreender o significado matemático das letras utilizadas nos enunciados dos problemas.

Palavras – chave: Linguagem matemática. Conversão. Língua natural. Registros de representação semiótica. Educação Matemática.

ABSTRACT

This research aimed to identify and analyze which possible difficulties that come from the language students face in the conversion from natural language to mathematical language. The investigation was carried out during the school year of 2008 in high school groups of two public schools in the city of Belém, where information has been collected through mathematics registers produced by the students through tests and assessments performed every two months. To assist such investigation, the ideas of Raymond Duval were used as a theoretical reference about the theory of the mathematics registers of semiotics representation; the concept of meaning connected to the philosophy of language according to Wittgenstein; also some considerations by Gottlob Frege about the distinction between meaning and reference and other ones by the philosopher Gilles-Gaston Granger concerning the problems of meaning and the formal aspect of mathematical language. The analyses of the information collected during the period of investigation revealed that, in the students' perspective, the conversion of natural language to mathematical language faces four types of difficulties: the first one has pointed out the fact that there are, in each record of representation of the same mathematical objective, different contents to be mobilized; the second one has shown that the students fail when they perform the conversion of natural language to mathematical language, when they do not interpret correctly the mathematical rules implied in the proposition of a situation problem; the third one has appeared from the fact that there are, in the text of a situation problem, words that the students do not understand the meaning of or may have an ambiguity of senses; the fourth one has appeared from the fact that the students do not understand the mathematical meaning of the letters used in the problem situations.

Key words: Mathematical language. Conversion. Natural language. Mathematics register of semiotics representation. Mathematical Education.

1 INTRODUÇÃO

O discurso que diz que a “Matemática é difícil”, veiculado entre os estudantes de todos os níveis de ensino, é corroborado pelas dificuldades que os alunos têm de lidar com o simbolismo e as regras inerentes à linguagem matemática. Isso porque essa linguagem dispõe de um conjunto de signos próprios que se relacionam segundo determinadas regras. No contexto escolar a linguagem matemática necessita do complemento da língua natural (nesta pesquisa refiro-me a língua portuguesa), sem a qual, possivelmente, não haveria o aprendizado da Matemática. Porém, na passagem da língua natural para a linguagem matemática, surgem algumas dificuldades que os alunos, por vezes, não conseguem superá-las. Nesta pesquisa, busquei identificar e investigar as razões de tais dificuldades.

Frente a esta temática alguns pesquisadores têm dedicado seus estudos à investigação das dificuldades que a leitura e a interpretação da escrita simbólica e codificada da linguagem matemática impõem aos alunos em situações de ensino. Ocsana Danyluk (2002), por exemplo, ressalta a importância do que a autora denomina de alfabetização matemática, isto é, o ato de aprender a ler e a escrever a linguagem matemática. Assim, a escrita e a leitura das primeiras idéias matemáticas, podem fazer parte do contexto geral de alfabetização ainda nas séries iniciais. Já Nilson José Machado (2001) ressalta a simbiose existente entre Matemática e língua materna.

Na mesma senda Granger (1974), em sua obra *Filosofia do Estilo*, discorre sobre o estilo da linguagem matemática enfatizando que, nos signos utilizados em uma linguagem formal, como a da Matemática, existem sempre resíduos implícitos a serem interpretados e, que portanto, a compreensão do que está escrito em uma linguagem formal por meio de signos está ligada ao processo de significação que, segundo o autor, se dá através de experiências vividas.

Por outro lado, o filósofo e psicólogo francês Raymond Duval assinala, em sua teoria denominada de *registros de representação semiótica*, que os objetos matemáticos não são diretamente perceptíveis a nossa visão e, somente os são por meio de suas representações semióticas. Por isso, é comum os estudantes fazerem confusões entre o objeto matemático e seus diferentes registros de representação semiótica.

Para Duval (1995, p. 15, tradução minha) a relação existente entre os objetos matemáticos e suas distintas representações se justifica porque:

> não é possível estudar os fenômenos relativos ao conhecimento sem recorrer a noção de representação [...] porque não há conhecimento que não possa ser mobilizado por um sujeito sem uma atividade de representação.

Em consonância com essa afirmação, Damm (1999, p. 137) acrescenta ainda que “não existe conhecimento matemático que possa ser mobilizado por uma pessoa, sem o auxilio de uma representação”. Por concordar com essas considerações, busco subsídios nos principais conceitos ligados a teoria de Duval, como forma de investigar o trânsito entre as diferentes representações que possui um objeto matemático, uma vez que para o autor, a língua natural também pode ser utilizada como forma de representar objetos matemáticos.

Quanto à organização, a pesquisa encontra-se estruturada em seis capítulos. Neste primeiro explicito, em linhas gerais, o propósito desta investigação, algumas das principais idéias desenvolvidas pelos autores que sustentam o referencial teórico utilizado para subsidiar minhas percepções acerca do objeto de estudo desta investigação.

No segundo capítulo, discorro sobre a motivação que me impulsionou a desenvolver a pesquisa e a optar pela temática em questão; apresento ainda a justificativa, os objetivos pretendidos e a pergunta a qual, com base na interpretação das informações coletadas durante a realização da pesquisa, busco encontrar possíveis repostas. Por fim, descrevo o percurso metodológico utilizado para nortear as ações empreendidas ao longo do desenvolvimento da pesquisa.

O terceiro capítulo é destinado à abordagem da primeira parte da fundamentação teórica que foi utilizada para embasar a interpretação das informações coletadas durante o período de investigação. Apresento alguns conceitos ligados à Semiótica, à luz do pensamento do autor norte-americano Charles Sanders Peirce. Apresento ainda os principais conceitos referentes à teoria dos registros de representação semiótica.

No quarto capítulo discorro sobre algumas questões inerentes à linguagem matemática. Para isso, busco subsídio teórico em algumas considerações feitas por Gilles Gaston-Grager, no que concerne ao estilo da linguagem matemática. Neste capítulo, são contempladas ainda questões relativas à leitura, à escrita e a interpretação da linguagem matemática, assim como as relações existentes entre linguagem matemática e língua natural. Por fim discorro sobre o conceito de jogos de linguagem, segundo a perspectiva do filósofo austríaco Ludwig Wittgenstein.

Como forma de vincular as idéias levantadas no referencial teórico à minha prática docente no cotidiano da sala de aula, apresento no quinto capítulo as análises das informações que foram coletadas durante o período em que transcorreu a investigação. A partir das minhas observações e experiências realizadas em sala de aula, foi possível identificar quatro tipos de dificuldades apresentadas pelos alunos no processo de conversão da língua natural para a linguagem matemática.

A primeira dificuldade surgiu do fato de existirem diferentes conteúdos matemáticos envolvidos nas diversas representações semióticas de um mesmo objeto matemático. A segunda emergiu da existência de regras matemáticas implícitas no enunciado de um problema que, por sua vez, exigem uma correta interpretação. A terceira dificuldade se deu pela presença de palavras ambíguas ou incompreensíveis aos alunos nos enunciados dos problemas. A quarta surgiu do fato dos alunos não terem conseguido atribuir significados as variáveis apresentadas nos enunciados dos problemas.

No sexto capítulo apresento as considerações finais acerca deste trabalho de investigação, onde com base nas análises realizadas, aponto os principais resultados obtidos, os objetivos que foram atingidos e minhas expectativas para realização de futuras pesquisas.

2 SITUANDO A PESQUISA

2.1 O TRIPÉ QUE MOTIVOU A REALIZAÇÃO DA PESQUISA

A realização desta pesquisa teve como fonte de inspiração, além da satisfação pessoal e do aprimoramento profissional, o desejo de encontrar respostas para algumas indagações surgidas ao longo da minha prática docente, acerca das dificuldades de ensino e de aprendizagem da Matemática. Esse tripé constitui a base da motivação que me impulsionou a realizar este trabalho de investigação.

No entanto, o caminho percorrido até a formulação da questão a qual pretendo apontar possíveis respostas, foi construído no decorrer da minha trajetória profissional enquanto professor de Matemática da Educação Básica. Neste primeiro momento, descrevo de forma sintética alguns episódios importantes dessa trajetória que culminou na realização desta pesquisa.

Ao longo destes 14 anos de atuação docente, tenho vivenciado no dia-a-dia da sala de aula experiências em diversos segmentos da Educação Básica da rede pública do estado do Pará. Essas experiências têm me conduzido ao amadurecimento pessoal e, sobretudo, profissional, deixando a certeza de que muito aprendi, mas sempre haverá algo novo a ser aprendido que, certamente, contribuirá para o aprimoramento da minha prática docente.

Isto porque acredito que Educação é um processo contínuo e dinâmico que exige do professor a árdua sim, mas prazerosa missão de estar sempre buscando aperfeiçoar seus conhecimentos, a fim de atender as exigências e as transformações impostas pelos novos paradigmas que surgem no âmbito da Educação no Brasil.

Foi exatamente nesse contexto de busca por novos conhecimentos e de aprimoramento, que aconteceu o fato que marcou início de minha trajetória profissional. No segundo semestre do ano de 1995, quando eu ainda cursava o segundo ano de Licenciatura Plena em Matemática na Universidade do Estado do Pará, recebi um convite feito por um professor de Matemática do Ensino Fundamental de uma escola pública da rede estadual, para substituí-lo durante o referido semestre, pois o mesmo precisava gozar de uma licença para tratar de questões pessoais.

Após o término deste semestre, no ano seguinte, a diretora da escola ofereceu-me a oportunidade de lecionar em classes do então 2º grau, hoje Ensino Médio, além de ter aceitado a proposta permaneci naquela escola por mais seis anos consecutivos.

Foram naquelas classes de Ensino Médio que surgiram minhas primeiras inquietações acerca das dificuldades de ensino e de aprendizagem da Matemática. Notei que uma das razões que gerava obstáculos para os alunos aprenderem os conteúdos trabalhados durante minhas aulas, era a dificuldade que eles tinham de compreender a simbologia utilizada na linguagem matemática. Desde então, tenho me debruçado sobre esta temática e concentrado esforços no intuito de investigar os problemas advindos da linguagem que dificultam o ensino e a aprendizagem da Matemática.

Ao ministrar minhas aulas, eu refletia a respeito das dificuldades que eu tinha de lidar com a linguagem matemática quando era aluno do Ensino Fundamental e Médio. A partir dessas reflexões, ao buscar alternativas para tornar a linguagem matemática compreensível para os meus alunos, eu estava também, de certa forma, preenchendo lacunas deixadas ao longo da minha formação acadêmica no curso de Licenciatura em Matemática que, nesse sentido foi insuficiente.

Assim cabe aqui uma crítica, de caráter subjetivo, a meu curso de graduação, pois não existia na grade curricular nenhuma disciplina que contemplasse essa outra faceta da Matemática, ou seja, o fato da Matemática ser uma ciência que possui uma linguagem própria. Consequentemente, a evidência desta falta pôde ser percebida nas dificuldades apresentadas pelos alunos nas aulas que eu ministrava durante e após ter concluído a Licenciatura.

Ainda nesta escola onde comecei a lecionar, percebi que ao aproximar, os conteúdos matemáticos trabalhados em sala de aula, ao cotidiano dos alunos os conceitos matemáticos tornavam-se mais claros e mais fáceis de serem assimilados, conseqüentemente, isso facilitava a compreensão da simbologia inerente à linguagem matemática. Essa percepção apontou-me um caminho ao qual eu poderia seguir para reduzir dificuldades impostas pela linguagem matemática.

Faço referências a esta primeira escola em que trabalhei, porque nela tive oportunidades de vivenciar, com a Diretora, inúmeras "discussões" acerca de Educação e de metodologias de ensino e aprendizagem de Matemática. Ela foi a pessoa que despertou em mim a importância da leitura de textos não-matemáticos como forma de enriquecimento da prática docente.

Em conversas, durante as reuniões pedagógicas na escola, tínhamos divergências de opiniões acerca de processos de ensino e de aprendizagem da Matemática, mas a Diretora sempre me envolvia com argumentos teóricos embasados em autores que se dedicam a pesquisa na área da Educação. Ela falava de algumas idéias de Paulo Freire, Emília Ferreiro, Piaget, Vygotsky etc.

Em virtude do pouco conhecimento que eu tinha sobre esses autores, não me restou alternativa senão buscar o contato com essa literatura, a fim de que pudesse adquirir embasamento teórico para sustentar minhas argumentações no momento de confrontá-las com as opiniões e metodologias propostas pela Diretora nas reuniões pedagógicas.

Nós, professores de Matemática, recebemos críticas por não termos o hábito de ler textos que abordam questões referentes à Educação, nos limitamos a ler apenas os textos presentes nos livros didáticos de Matemática, diante disso, é comum recebemos críticas de profissionais de outras áreas que nos acusam de termos pensamento “linear”. Essa crítica parece-me pertinente, uma vez que nos cursos de Licenciatura, pouca importância se confere à leitura de textos que tratam das questões inerentes à Educação Matemática, por conseguinte, essa falta se reflete em nossa (má) formação.

Porém, somente as leituras não foram suficientes para preencher as lacunas deixadas pela graduação; houve a necessidade de buscar algo mais. Assim, o primeiro passo dado nessa direção foi cursar, em 2004, uma Especialização em Ensino de Matemática, ofertada pela Universidade Federal do Pará meio do Núcleo Pedagógico de Apoio ao Desenvolvimento Científico - NPADC/UFPA.

A Especialização contribuiu não somente para ampliar, mas também para estimular a buscar por novos conhecimentos; nesse sentido, foi inevitável a continuação do caminho trilhado em direção à Educação Matemática. Caminho este que me conduziu ao ingresso no Mestrado em 2007, tornando-se, até então, minha maior oportunidade de investigar os motivos, advindos da linguagem, que dificultam para os alunos o aprendizado da Matemática.

Ao ingressar no Mestrado, minha proposta inicial de pesquisa encontrava-se sustentada pelas idéias desenvolvidas pelo psicólogo norte americano David Paul Ausubel, acerca da teoria da aprendizagem significativa. No entanto, o contato com a literatura trabalhada nas disciplinas “Matemática e linguagens” e “Leitura e escrita na matemática”, assim com as discussões concernentes à linguagem matemática que se desenvolvem no Grupo de Estudo de Linguagem Matemática (GELIM)[1] influenciaram o redirecionamento da minha proposta de pesquisa.

2.2 JUSTIFICATIVA

A Matemática tem sido durante muito tempo disciplina da grade curricular considerada por muitos alunos da Educação Básica, como uma das mais difíceis de ser aprendida. Um exemplo desta afirmação pode ser evidenciado através dos resultados obtidos na pesquisa de Silveira (2000, p. 122, grifos da autora) ao investigar a interpretação da Matemática na escola, no dizer dos alunos. A autora analisou algumas formulações discursivas proferidas por estudantes, tais como:

> (3) (...) Acho, não difícil, mas complicado estudar geometria, falando particularmente. (7) (...) Eu acho a matemática difícil, porque são muitas regras, muitas fórmulas, e também porque se você erra um sinal ou qualquer outro erro a conta já estará totalmente errada. (...) (10) (...) Porém ela é difícil, cada vez mais os cálculos exigem mais de você, por isso talvez ela tenha a fama de ser ruim.

Um olhar atento para esses dizeres permite-nos detectar a origem de algumas dificuldades de aprendizagem da Matemática, como por exemplo, as regras inerentes à linguagem matemática, o caráter abstrato dos seus objetos, o rigor dedutivo de seus teoremas, sua linguagem peculiar, etc.

O reflexo dessas dificuldades pode ser percebido também nos instrumentos de avaliação aplicados pelo MEC para avaliar o desempenho acadêmico dos estudantes brasileiros, como o Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica (SAEB) que

[1] O GELIM é o grupo de estudo filiado ao Programa de Pós Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas-Mestrado do IEMCI/UFPA. Seus integrantes reúnem-se uma vez por semana para discutir assuntos acerca da linguagem matemática.

> coleta informações sobre o desempenho acadêmico dos estudantes brasileiros, apontando o que sabem e são capazes de fazer, em diversos momentos do percurso escolar, considerando as condições existentes nas escolas (BRASIL, 2007, p. 5).

Realizado a cada dois anos, os resultados do SAEB têm revelado que em Matemática, o rendimento dos alunos do Pará sempre tem estado abaixo da média nacional. Em 2005, por exemplo, em uma escala de proficiência que varia de 0 a 500 pontos, a média atingida pelos estudantes da terceira série do Ensino Médio das escolas urbanas paraenses foi de 248,7; menor que a média da região norte que foi de 250,07; enquanto que a média nacional foi de 270,7.

Embora o objetivo do SAEB não seja avaliar o aluno e sim o sistema educacional, é possível perceber, indiretamente, que o fracasso dos estudantes nesses sistemas de avaliação tem uma estreita relação com a maneira como a Matemática tem sido ensinada na sala de aula. O que mostra que há algo errado no ensino e na aprendizagem dessa disciplina que acaba se refletindo no desempenho dos estudantes diante desses instrumentos de avaliação.

Nas duas escolas onde esta pesquisa foi realizada, segundo informações fornecidas pelo serviço técnico de ambas, no ano letivo de 2008, a Matemática foi a disciplina que apresentou a maior quantidade de alunos matriculados em situação de dependência de estudos em todos os turnos. Isso, de certa forma, pode ser uma das razões que justifique o fato de que

> a disciplina de matemática é alvo de constantes polêmicas na comunidade escolar, em especial devido ao alto índice de reprovação de estudantes. A aquisição deste conhecimento na escola, que deveria derivar de seu ensino, encontra alguns obstáculos que demandam análises mais detalhadas, possibilitando, dessa forma, entendermos os motivos pelos quais o aluno não aprende matemática (SILVEIRA, 2005, p. 22).

Em consonância com a autora, acredito que, sem dúvida nenhuma, há a necessidade de empreendermos análises mais detalhadas acerca dos problemas de aprendizagem da Matemática, a fim de que sejam identificadas as origens das causas dos obstáculos que dificultam o ensino e a aprendizagem desta disciplina para os alunos da Educação Básica.

Nesse sentido, me propus a desenvolver esta pesquisa de natureza qualitativa, nos termos propostos por Bogdan e Biklen (1994), conforme abordaremos no parágrafo seguinte, a fim de os resultados aqui alcançados possam, unir-se a resultados de outras pesquisas realizadas na área da Educação Matemática que tenham como propósito reduzir as dificuldades que alunos apresentam para realizar de maneira correta a conversão da língua natural para linguagem matemática.

Ao discorrer sobre características da pesquisa qualitativa os autores Bogdan e Biklen (1994, p. 47) assinalam que

> a investigação qualitativa possui cinco características. Nem todos os estudos que consideraríamos qualitativos patenteiam estas características com igual eloqüência. Alguns deles são, inclusivamente, totalmente desprovidos de uma ou mais das características.

Embora os autores ressaltem que uma investigação em educação para ser qualitativa não haja necessidade de conter as cinco características, acredito que a presente investigação contemple-as, conforme explicitado nos parágrafos a seguir.

A primeira característica a qual os autores se referem é o fato de que

> *na investigação qualitativa a fonte directa de dados é o ambiente natural, constituindo o investigador o instrumento principal*. Os investigadores introduzem-se e despendem grande quantidade de tempo em escolas, famílias, bairros e outros locais tentando elucidar questões educativas. (BOGDAN e BIKLEN. 1994, p. 47, grifos dos autores).

A partir dessas considerações feitas pelos autores na citação acima é possível estabelecer algumas conexões com a presente pesquisa, haja vista que a fonte direta dos dados coletados, foi a sala da aula como ambiente natural, onde realizei a investigação, acerca das dificuldades que os alunos pesquisados apresentam no que se refere a minha questão de pesquisa.

Na segunda característica, os autores afirmam que

> *a investigação qualitativa é descritiva*. Os dados recolhidos são em forma de palavras ou imagens e não de números. Os resultados escritos da investigação contem citações feitas com base nos dados para ilustrar e substanciar a apresentação. Os dados incluem transcritos de entrevistas, notas de campo, fotografias, vídeos, documentos pessoais, memorandos e outros registros oficiais. (BOGDAN e BIKLEN. 1994, p. 48, grifos dos autores).

As considerações dos autores com relação a esta segunda característica também podem ser evidenciadas na presente pesquisa, uma vez que, o aspecto quantitativo aqui levantado serviu apenas para que pudéssemos identificar o foco das dificuldades dos alunos. No entanto minha preocupação voltou-se para a investigação dos motivos dessas dificuldades e para tal utilizei como fonte de dados as respostas das questões propostas nos testes através dos registros escritos dos alunos.

Na terceira característica, os autores ressaltam que

> *os investigadores qualitativos interessam-se mais pelo processo do que simplesmente pelos resultados ou produtos*. Como é que as pessoas negociam os significados? Como é que se começaram a utilizar certos termos ou rótulos? Como que determinadas noções começaram a fazer parte daquilo que consideramos ser o “senso comum”? Qual a história natural da actividade ou acontecimentos que pretendemos estudar? (BOGDAN e BIKLEN. 1994, p. 49, grifos dos autores).

Os pontos de dificuldades apontados nesta pesquisa se constituem no produto desta investigação, mas foi sem dúvida nenhuma o constante diálogo estabelecido com os alunos no dia-a-dia da sala de aula, que me enriqueceu quanto pessoa e quanto profissional, pois passei a ter a clareza da importância que deve ser conferida ao ato de ouvir os questionamentos, as dúvidas e as opiniões dos alunos como forma de auxiliar o professor no ensino da Matemática.

Na quarta característica, assinalam os autores que na pesquisa qualitativa

> *os investigadores tendem a analisar os seus dados de forma indutiva*. Não recolhem dados ou provas com objectivo de confirmar ou infirmar hipóteses construídas previamente; ao invés disso, as abstrações são construídas à medida que os dados particulares que foram recolhidos se vão agrupando (BOGDAN e BIKLEN. 1994, p. 50, grifos dos autores).

Esta característica vai ao encontro dos objetivos da presente pesquisa, haja vista que, a princípio, tinha apenas minhas inquietações acerca dos motivos que dificultam aos alunos a passagem da língua natural para a linguagem matemática, as respostas foram obtidas ao longo do período de investigação, as informações foram coletadas à medida que os conteúdos iam sendo trabalhados em sala de aula, ou seja, eu não tinha hipóteses previamente construídas.

Na quinta característica, os autores destacam que

> *o significado é de importância vital na abordagem qualitativa* (...) Os investigadores qualitativos estão continuamente a questionar os sujeitos de investigação, com o objectivo de perceber “aquilo que eles experimentam”, o modo como eles interpretam as suas experiências (...) Os investigadores qualitativos estabelecem estratégias e procedimentos que lhes permitam tomar em consideração as experiências do ponto de vista do informador. O processo de condução de investigação qualitativa reflecte um espécie de diálogo entre os investigadores e os respectivos sujeitos (BOGDAN e BIKLEN. 1994, p. 50, grifos dos autores).

A forma como se deu a presente investigação não foi outra senão esta como descrita na citação acima. Uma vez que era através do diálogo estabelecido com os sujeitos investigados nesta pesquisa que se abria espaço para que os alunos pudessem fazer seus questionamentos e expressar suas dificuldades diante dos conteúdos matemáticos trabalhados em sala de aula.

Em consonância com as considerações de Bogdan e Biklen, a respeito de investigação qualitativa, D’Ambrosio (2007) ressalta que essa modalidade de pesquisa depende sobretudo do professor estar atuando em sala de aula e que haja por parte do investigador uma inserção e interação com o ambiente sociocultural e natural. Nesse caso, a investigação deve ser focalizada no indivíduo, com toda a sua complexidade.

2.3 PERGUNTA DA PESQUISA

Esta pesquisa foi realizada com o propósito de encontrar possíveis respostas para a seguinte questão: **Quais as dificuldades que os alunos enfrentam na conversão da língua natural para a linguagem matemática?**

2.4 OBJETIVOS

2.4.1 Objetivo geral

Na presente pesquisa pretendo mostrar que no processo de conversão da língua natural para a linguagem matemática, tanto os aspectos semióticos das representações dos objetos matemáticos, quanto às especificidades inerentes a linguagem matemática influenciam na conversão da língua natural para a linguagem matemática. Nesse sentido, esta pesquisa busca contribuir, no âmbito da Educação Matemática, para que professores da disciplina tomem conhecimento, por meio dos resultados aqui apresentados, de algumas dificuldades que os alunos enfrentam nas aulas de Matemática no que concerne a conversão da língua natural para a linguagem matemática.

2.4.2 Objetivos específicos

- Identificar possíveis motivos, advindos da linguagem, que dificultam a conversão da língua natural para a linguagem matemática.
- Investigar como os alunos lidam com a leitura, a escrita e a interpretação de textos matemáticos escritos em língua natural.
- Compreender como se dá, na perspectiva do aluno, a significação dos signos utilizados na linguagem matemática.

2.5 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Os procedimentos utilizados para desenvolver esta pesquisa foram norteados pelas minhas práticas vivenciadas no dia-a-dia da sala de aula ao longo de um ano de investigação. Nesse período, utilizei algumas questões que foram aplicadas aos alunos das classes pesquisadas, em testes e provas bimestrais, a fim de compreender as dificuldades apresentadas pelos alunos diante da pergunta a qual busco responder nesta pesquisa.

Ao longo do período de investigação, busquei através de constante diálogo estabelecido com os alunos, identificar suas dificuldades frente aos conteúdos matemáticos trabalhados em sala de aula. Ao expressarem oralmente suas dúvidas durante as aulas, os alunos forneciam pistas que auxiliavam na compreensão dos registros que produziam nas resoluções das questões que foram utilizadas como fonte de coleta de informações.

2.5.1 Lócus

A pesquisa foi realizada em classes de duas escolas de Ensino Médio da rede pública do estado do Pará localizadas na cidade de Belém: Escola Estadual de Ensino Médio “Pedro Amazonas Pedroso” e Colégio Estadual “Paes de Carvalho”. Na primeira, as classes pesquisadas estavam sob a minha regência, enquanto na segunda não. Assim contamos com a gentileza da direção dessa Escola e do professor das referidas classes para que pudéssemos realizar a coleta de informações que se deu por meio de aplicação de testes e de conversa realizada com os alunos logo após a aplicação desses testes.

O principal objetivo de investigar os alunos do Colégio Estadual “Paes de Carvalho” foi verificar se esses estudantes apresentavam dificuldades semelhantes às apresentadas pelos alunos das classes que estavam sobre a minha regência, a fim de que fosse possível confrontar as informações obtidas e fazer uma análise mais concisa das mesmas.

2.5.2 Sujeitos

Os sujeitos envolvidos nesta investigação foram alunos de 1ª e 3ª séries de das duas escolas onde a pesquisa foi realizada. Porém, na Escola Estadual de Ensino Médio “Pedro Amazonas Pedroso”, os alunos pesquisados estavam matriculados no turno da noite, enquanto que os do Colégio Estadual “Paes de Carvalho” estavam matriculados no turno da manhã.

2.5.3 Coleta de informações

Para facilitar minha abordagem, utilizarei as denominações de N1 e N3 para designar as duas classes de 1ª. e 3ª. Série, respectivamente, do Colégio Estadual “Paes de Carvalho” e as denominações M1 e M3 para as duas classes de 1ª. e 3ª.

Série, respectivamente, da Escola Estadual Ensino Médio “Pedro Amazonas Pedroso”.

Nas Classes N1 e N3, a coleta de informações se deu por meio de três testes distintos, que aqui denominarei TIPO I, TIPO II e TIPO III, conforme anexos A, B e C, respectivamente. Esses testes foram aplicados no segundo bimestre do ano letivo de 2008, cujo objetivo era identificar as dificuldades apresentadas pelos alunos e verificar se coincidiam ou não com as dificuldades apresentadas pelos alunos das classes M1 e M3, dado que os alunos pertenciam a escolas e turnos diferentes e, sobretudo, não tinham o mesmo professor de Matemática.

O teste TIPO I foi aplicado na classe N1 que continha 26 alunos. Com a aplicação deste teste meu objetivo era identificar quais dificuldades os alunos apresentavam para realizar a conversão para a linguagem matemática, a partir de situações- problema envolvendo temas extraídos do cotidiano dos alunos.

Os testes TIPO II e TIPO III foram aplicados na classe N3, que continha 32 alunos, com a aplicação destes testes eu pretendia atingir dois objetivos: o primeiro era identificar quais as dificuldades que os alunos têm para interpretar regras matemáticas implícitas em um texto matemático[2] escrito em língua natural; o segundo era investigar como os alunos lidavam com palavras existentes no enunciado de situações-problema que supostamente poderiam ter sentido ambíguo.

Logo após as aplicações dos testes nas classes citadas, conversei com os alunos a fim de obter informações que pudessem contribuir para as análises dos registros escritos produzidos por eles ao resolverem as questões propostas. Perguntei quais foram as principais dificuldades que eles tiveram para resolver as questões.

Conforme respondiam, eu fazia anotações pertinentes a minha pesquisa. Assim, alguns dos registros produzidos por esses alunos, ao responderem as questões propostas nos testes, estão mencionados no quinto capítulo desta dissertação que se destina as análises e discussões das informações coletadas.

Já nas classes M1 e M3, que continha respectivamente 21 e 34 alunos, tive maior grau de liberdade para efetuar a investigação e a coleta de informações, dado que tinha em meu favor, o fato de eu ser o professor das classes pesquisadas. Nesse caso, a coleta de informações se deu por meio dos registros produzidos pelos

[2] Entende-se aqui por texto matemático toda e qualquer forma de expressar conteúdos matemáticos, por exemplo, o enunciado de um problema, um gráfico, uma tabela, etc.

alunos através de provas bimestrais realizadas ao longo do ano letivo de 2008, conforme anexos D, E, F e G.

Após a correção das provas, à medida que eu chamava os estudantes para entregar suas respectivas notas, eu solicitava a eles que me explicassem suas resoluções, ou o motivo de não terem, eventualmente, conseguido resolver algumas das questões propostas. De acordo com suas justificativas, eu fazia anotações pertinentes à pergunta de pesquisa.

Por fim solicitei aos alunos das classes pesquisadas, que suas provas ficassem sob meu poder por algum tempo, pois seriam utilizadas como material de análise para a minha pesquisa. Não houve objeção por parte dos alunos, assim as cópias dos registros produzidos por alguns desses alunos constarão no quinto capítulo desta dissertação.

3 SEMIÓTICA E REPRESENTAÇÃO DOS OBJETOS MATEMÁTICOS

Este capítulo é destinado à abordagem da primeira parte do referencial teórico que utilizei para subsidiar esta investigação. Discorrerei sobre alguns conceitos pertencentes à teoria dos *registros de representação semiótica*, mas antes, farei uma breve explanação acerca de alguns tópicos ligados a Semiótica desenvolvida por Peirce, uma vez que encontrei nesta ciência, alguns pressupostos importantes para a compreensão da teoria de Duval e da funcionalidade das representações semióticas no ensino e na aprendizagem da Matemática.

3.1 SEMIÓTICA NA CONCEPÇÃO PEIRCEANA

Sob o ponto de vista etimológico da palavra semiótica, que é de raiz grega, *semeiom*, quer dizer *signo*, portanto Semiótica é a ciência que tem como objeto de estudo os signos. Ao discorrer sobre a origem dessa ciência, Nöth (2005, p.17) assinala que "é preciso distinguir entre o desenvolvimento de uma Semiótica propriamente dita e as tendências de uma Semiótica *avant la lettre*[3]". Nesse sentido, para este autor, a Semiótica propriamente dita começa a ser desenvolvida por dois filósofos: John Locke (1632-1704) ao apresentar sua obra intitulada *Essay on human understanding*, em 1960, em que postula uma "doutrina dos signos" com o nome de *semeiotiké* e Johann Heinrich Lambert (1728-1777), que foi um dos primeiros filósofos a escrever, em 1764, um tratado intitulado *Semiotik*. Nöth (2005)

Antes disso, na idade antiga, Platão e Aristóteles, de certa forma, já desenvolviam uma doutrina dos signos que compreendia investigações acerca da natureza dos signos, da significação e da comunicação na história das ciências. Desta forma, Platão e Aristóteles eram teóricos do signo e, portanto, semioticistas *avant la lettre* como afirma Nöth.

As considerações acerca de Semiótica que aqui serão abordadas estão baseadas nas idéias de Peirce, que de acordo com Nöth (2005), é o mais importante dos fundadores da Semiótica moderna. Todavia, é importante ressaltar que o pensamento científico, filosófico, lógico e semiótico de Peirce é vasto e multifacetado. Os assuntos que aborda são tão complexos e interconectados que

---

[3] Avant la lettre é uma expressão francesa que significa: antes do seu inteiro desenvolvimento, ou antes do termo existir.

uma apresentação breve desse pensamento torna-se aqui uma tarefa muito difícil de ser realizada, uma vez que este autor dedicou grande parte de sua vida para desenvolver e estruturar a Semiótica como uma ciência geral dos signos.

Diante disso, não tenho aqui o propósito de adentrar, na exegese do pensamento de Peirce. Assim, limitarei-me ao que Lúcia Santaella considera como sendo o primeiro ramo da Semiótica, ou seja, o estudo dos signos. A autora destaca este estudo como o substrato indispensável para a análise profunda da natureza e gênese do método científico, segundo a concepção peirceana. Portanto, a fim de ser ainda mais específico no que pretendo abordar, discorrerei sobre a capacidade de representação que é inerente ao signo. Posteriormente tratarei da Semiótica e das relações que possui com a com a linguagem matemática.

Na concepção peirceana

> um Signo, ou *representâmen*, é aquilo que, sob certo aspecto ou modo, representa algo para alguém. Dirige-se a alguém, isto é, cria na mente dessa pessoa, um signo equivalente, ou talvez um signo mais desenvolvido. Ao signo assim criado denomino *interpretante* do primeiro signo. O signo representa alguma coisa, seu *objeto*. Representa esse objeto não em todos os seus aspectos, mas com referência a um tipo de idéia que eu, por vezes, denominei fundamento do representâmen (PEIRCE, 2003, p. 46, grifos do autor).

Por força dessa definição é possível exprimir o signo num esquema triangular conforme figura abaixo.

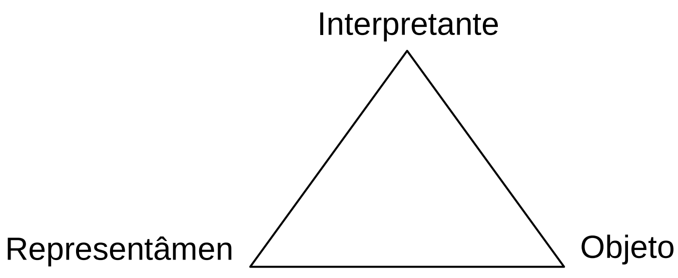


Figura 1: Triângulo semiótico de Peirce.

Ou seja, o signo se constitui como tal na relação entre esses três elementos: representâmem-objeto-interpretante. Assim, no que propõe Peirce, o signo é uma estrutura complexa composta de três elementos intrinsecamente ligados: o *representâmen*, que é o aspecto do signo que o habilita a funcionar como tal; o *objeto*, que é algo diferente e exterior ao signo, se torna mediatamente presente, a um intérprete, por intermédio do signo; já o *interpretante* é uma espécie de signo auxiliar obtido pelo efeito que o signo produz em uma mente interpretativa e é através dessa interpretação que o representâmen revela algo sobre o objeto ausente, pois o objeto está fora e existe independentemente do signo.

Sobre o signo Santaella acrescenta ainda que

> o signo é uma coisa que representa uma outra coisa: seu objeto. Ele só pode funcionar como signo se carregar esse poder de representar, substituir uma outra coisa diferente dele. Ora, o signo não é o objeto. Ele apenas está no lugar do objeto. Portanto, ele só pode representar esse objeto de um certo modo e numa certa capacidade (SANTAELLA, 1995, P. 58).

A autora destaca que a importância conferida ao signo se deve, sobretudo, pela capacidade que este tem de representar algo, no caso seu objeto. Mas o que isso tem haver com Matemática? Como resposta é possível afirmar que os signos matemáticos também têm, sob meu ponto de vista, essa mesma capacidade de representar algo, nesse caso, os objetos matemáticos. Por exemplo, podemos destacar a figura de uma circunferência desenhada em uma folha de papel que nada mais é do que uma representação semiótica deste objeto matemático. Assim, no triângulo semiótico de Peirce, este exemplo ficaria representado pela figura a seguir:

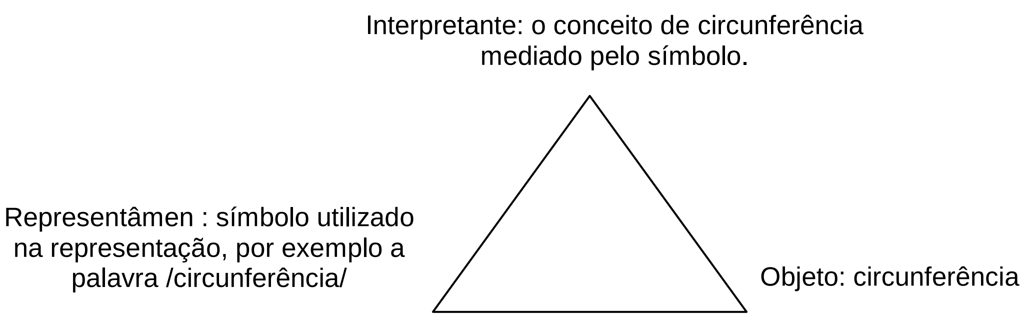


Figura 2: Signo matemático representado no triângulo semiótico de Peirce.

Deste modo, o objeto matemático, circunferência, é representado pelo signo, no caso, a palavra circunferência, que, por sua vez, determina o interpretante, ou seja, o conceito de circunferência. Assim, podemos dizer que o signo ou representâmen *circunferência* faz a mediação entre o objeto e o seu interpretante.

Para Colombo, Flores e Moretti (2007, p. 187), “o signo é o que objetiva a representação, ou seja, uma teoria geral do signo relaciona-se com uma teoria geral da representação”. Corroborando com os autores acrescentamos ainda que, visto por este prisma, o signo desempenha a importante função de ser a parte material de um sistema de representação semiótica na produção do conhecimento.

3.2 DIVISÃO DOS SIGNOS

No que propõe Peirce (2003), os signos são classificados segundo três tricotomias[4], a primeira, conforme o signo em si mesmo for uma mera qualidade; a segunda, conforme a relação do signo para com seu objeto consistir no fato de o signo ter algum caráter em si mesmo, ou manter alguma relação existencial com esse objeto ou em sua relação com um interpretante; a terceira, conforme seu Interpretante poder representá-lo como um signo de possibilidade, como signo de fato ou como signo de razão.

Para Peirce (2003, p. 64), “a mais importante divisão dos signos faz-se em *Ícones*, *Índices* e *Símbolos*”. Isto é, a segunda tricotomia, conforme explicitado anteriormente. Para esta pesquisa, em particular, acredito ser essa também a que mais contribui para os aspectos relacionados ao objeto de estudo aqui em questão. A seguir, discuto algumas das principais características que distinguem entre si cada um desses elementos e de que forma eles se constituem como signo.

3.3.1 Ícone

Os ícones são espécies de signos que se relacionam com seus objetos por meio de semelhança.

> Um ícone é um Representâmen[5] cuja qualidade representativa é uma sua Primeiridade como primeiro. Ou seja, a qualidade que ele tem *qua* coisa o torna apto a ser um representâmen. Assim qualquer coisa é capaz de ser um substituto para qualquer coisa com a qual se assemelha (PEIRCE. 2003, p. 64).

---

[4] Posteriormente, Peirce (por volta de 1906) descobriu que existem dez tricotomias e sessenta e seis classes de signos.
[5] Para Peirce Representâmen é outra forma de designar a palavra signo.

Assim, os ícones são signos que preenchem a função de representar seus objetos, mesmo que não sejam reais, em virtude de características próprias que eles possuem por meio de traços de similaridade que guardam com seus objetos. Como exemplo de ícone, Peirce (2003, p. 65) nos apresenta uma *fotografia*, argumentando o fato de não ser o seu objeto, no entanto, mostra-se capaz de representá-lo. Ou seja, não é o objeto e sim uma imagem semelhante a ele.

Outro exemplo de Ícone citado por Peirce (2003, p.66), este agora na Matemática, diz respeito ao sistema linear abaixo, onde o autor explicita o fato de se usar, em uma equação algébrica, letras semelhantes para coeficientes correspondentes.

$$a_1x + b_1y = n_1$$
$$a_2x + b_2y = n_2$$

Isto é um ícone, pelo fato de fazer com que se assemelhem quantidades que mantêm relações análogas com o problema. Peirce conclui generalizando que toda equação algébrica é um ícone, na medida em que, exibe, através de signos algébricos (que em si mesmo não são ícones), as relações de quantidades em questão.

3.3.2 Índice

Os índices são espécies de signos afetados diretamente pelos seus objetos em virtude de apresentar uma relação factual com o mesmo. Por exemplo, um barômetro ao marcar pressão baixa e ar úmido é índice de chuva, um cata-vento é um índice da direção do vento. Como se percebe nesses exemplos, os índices são signos que envolvem uma relação efetiva com os seus respectivos objetos.

No caso dos signos matemáticos, os índices podem ser evidenciados, por exemplo, em uma função quadrática definida por $y = ax^2 + bx + c$, com a e b e c pertencente ao conjunto dos números reais e $a \neq 0$. A afirmação $a \neq 0$ indica que o coeficiente pode ser qualquer número real com exceção ao zero. Ou seja, existe uma relação de causa e efeito que é diretamente afetada por essa restrição.

3.2.3 Símbolo

Esta modalidade de signo se estabelece numa relação arbitrária com o seu objeto, isto é, os símbolos estão associados aos seus objetos por força de uma lei ou de uma convenção. Por conta dessas disposições ou regras é que os símbolos podem representar objetos diferentes deles.

> Um *símbolo* é um representâmen cujo caráter representativo consiste exatamente em ser uma regra que determinará seu interpretante. Todas as palavras, frases, livros e outros signos convencionais são símbolos (...) Um *símbolo* é uma lei ou regularidade do futuro indefinido. Seu interpretante deve obedecer a mesma descrição, e o mesmo deve acontecer com o Objeto imediato completo, ou significado (PEIRCE, 2003, p. 71, grifos do autor).

De acordo com o autor, um símbolo não pode representar uma coisa particular qualquer; ele denota uma espécie de coisa, não apenas isso como também em si mesmo, uma espécie e não uma coisa singular. Como exemplos de símbolos, Peirce (2003, p. 71) afirma que

> qualquer palavra comum, como ‘dar,’ ‘pássaro’, ‘casamento’, é um exemplo de símbolo. O símbolo é aplicável a tudo o que possa concretizar a idéia ligada a palavra; em si mesmo não identifica essas coisas. Não nos mostra um pássaro, nem realiza diante de nossos olhos, uma doação ou um casamento, mas supõe que somos capazes de imaginar essas coisas, e a elas associar a palavra.

Deste modo, é possível escrever em uma folha de papel qualquer uma dessas palavras explicitadas pelo autor na citação acima, porém isso não faz de quem a escreveu, o criador da palavra, assim como, se apagarmos a palavra, ela não será extinta, uma vez que, a palavra vive na mente de que a usa.

Os símbolos encontram-se abundantemente presentes na Matemática, pois o símbolo, como vimos, é aplicável a tudo que possa concretizar uma idéia à palavra. Nos exemplos mostrados por Peirce, ele afirma que embora não possamos ter o Objeto (casamento, pássaro, doação) diante de nossos olhos, somos capazes de imaginar esses objetos por meio de convenções estabelecidas dentro de uma determinada língua, uma vez que o uso da língua é uma convenção social, da mesma forma que aceitamos convencionalmente que o símbolo *f(x)* representa uma função qualquer, ou que os símbolos “U” e “∩” representam união e intersecção, respectivamente, de dois conjuntos, por exemplo.

Diante do exposto, tem-se que para Peirce um signo pode relcionar-se com seu objeto de três formas, isto é, por meio de uma convenção, neste caso é denominado de *símbolo*. Por meio de traços similaridades que mantém com o objeto, passando então a ser denominado de *ícone*. Ou se for diretamente afetado pelo objeto, nesse caso recebe a denominação de *índice*.

3.3 SIGNO EM UM SISTEMA DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

Colombo, Flores e Moretti (2007) discorrem sobre o papel fundamental atribuído ao signo como sendo a parte material de um sistema de representação semiótica na produção do conhecimento. Esses autores, levando em consideração as idéias de Peirce, assinalam que na relação ternária que envolve os componentes do signo, o *objeto* é a coisa representada, o *símbolo* é o sinal utilizado para representar e o *interpretante* é o conceito que o símbolo faz surgir na mente do sujeito, ou seja, o significado.

A partir dessas considerações a respeito das idéias centrais acerca da Semiótica, passarei a partir de agora relacioná-las ao processo de ensino e de aprendizagem da Matemática, com o intuito de esclarecer as dificuldades que os alunos investigados nesta pesquisa, apresentaram ao lidar com os signos utilizados na linguagem matemática, para isso busquei auxílio na teoria dos registros de representação semiótica desenvolvida por Raymond Duval. Na seção a seguir apresento, em linhas gerais, alguns dos principais conceitos ligados a esta teoria.

3.4 TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais

> o conhecimento matemático formalizado precisa, necessariamente, ser transformado para se tornar passível de ser ensinado/aprendido; isto é, a obra e o pensamento do matemático teórico não são passíveis de comunicação direta (BRASIL, 1997, p. 39).

Nesse sentido, pode-se pensar nas importantes considerações feitas por Raymond Duval, acerca da teoria dos registros de representação semiótica, como forma de fazer com que o conhecimento matemático formalizado seja transformado a fim de que possa ser ensinado e aprendido na escola.

De acordo com Duval (2005), a importância primordial das representações semióticas para a Matemática se justifica por duas razões: a primeira é que qualquer tratamento sobre os objetos matemáticos se estabelece por meio de um sistema de representação. Por exemplo, para trabalhar as operações básicas da Matemática, faz-se necessário a utilização do sistema de numeração decimal; já para seja trabalhado o cálculo de áreas e perímetros de figuras planas, recorre-se à registros figurais.

A segunda razão se deve ao fato de que os objetos matemáticos não são diretamente perceptíveis aos nossos olhos, nem mesmo com a ajuda de instrumentos, como as células, por exemplo, são para os biólogos. Portanto, os objetos matemáticos são dependentes de sistemas de representações que os permitam designá-los.

Analisemos o exemplo explicitado na figura abaixo:

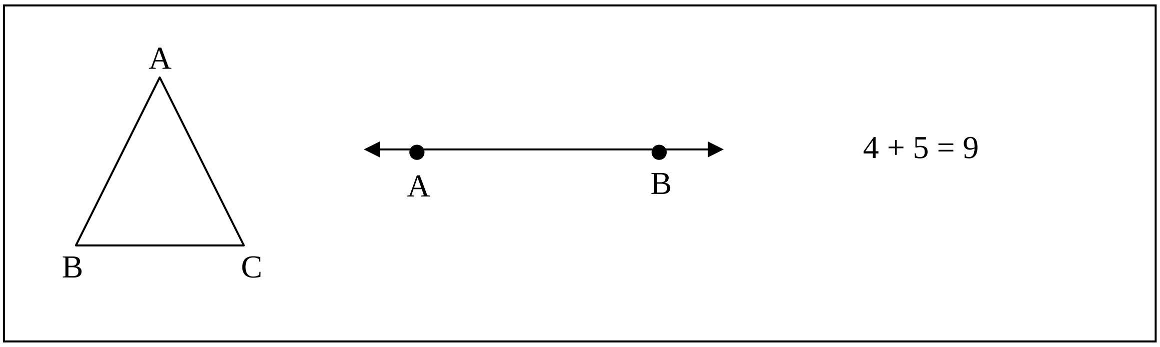


Figura 3: exemplos de representações semióticas de objetos matemáticos.

O que vemos na figura 3, não é um triângulo, uma reta, e sim signos que são usados para representar esses objetos matemáticos. Podemos ver cinco laranjas, mas se tirarmos as laranjas, abstraímos a idéia do número cinco e representamos pelo signo “5”. Todos esses signos, como quaisquer outros que representam os objetos matemáticos, são convenções aceitas dentro do formalismo da linguagem matemática.

De acordo com Duval (2005), a Matemática dispõe de uma grande variedade de representações semióticas: os sistemas de numeração, as figuras geométricas, as escritas algébricas, as representações gráficas e até mesmo língua natural é considerada pelo autor uma forma de representação semiótica. Nesse sentido, para designar os diferentes tipos de representações semióticas utilizadas em Matemática, o autor introduz a idéia de *registros de representação semiótica* e ressalta que existem quatro tipos distintos de registros que podem ser utilizados em Matemática, conforme exposto no quadro a seguir.

	REPRESENTAÇÃO DISCURSIVA	REPRESENTAÇÃO NÃO-DISCURSIVA
REGISTROS MULTIFUNCIONAIS: Os tratamentos não são algoritmizáveis.	Língua natural Associações verbais (conceituais). Forma de raciocinar: • argumentação a partir de observações, de crenças...; • dedução válida a partir de definição ou de teoremas.	Figuras geométricas planas ou em perspectivas (configurações em dimensão 0, 1, 2 ou 3). • apreensão operatória e não somente perceptiva; • construção com instrumentos.
REGISTROS MONOFUNCIONAIS: Os tratamentos são principalmente algoritmos.	Sistemas de escritas: • numéricas (binária, decimal, fracionária...); • algébricas; • simbólicas (línguas formais). Cálculo	Gráficos cartesianos. • mudanças de sistema de coordenadas; • interpolação, extrapolação.

Quadro 1: Classificação dos diferentes registros de representação.
Fonte: Duval (2005, p. 14).

Para Duval, essa grande variedade de registros de representação utilizada na Matemática é que determina os graus de liberdade em que um sujeito pode dispor para objetivar uma idéia por meio de registros de representações semióticas, que diferentemente das representações mentais, são externas, conscientes e desempenham um papel fundamental. Deste modo

> a especificidade das representações semióticas consiste em serem elas relativas a um sistema particular de signos, a linguagem, a escritura algébrica ou gráficos cartesianos e em poderem ser convertidas em representações “equivalentes” em um outro sistema semiótico, mas podendo tomar significações diferentes para um sujeito que as utiliza (DUVAL, 1995, p. 17, tradução minha).

No que propõe o autor, as representações semióticas, por serem externas, desempenham tanto a função de comunicação quanto funções cognitivas como: a função de objetivação e de tratamento dos objetos matemáticos. Assim, toda comunicação em Matemática se dá por meio de representações semióticas. Já no que concerne aos aspectos cognitivos, afirma Duval (2005) que no processo de ensino e de aprendizagem de Matemática, é imprescindível que os alunos não confundam os objetos matemáticos e os diferentes registros de representação semiótica que possuem.

Porém, Duval (2005, p. 21) apresenta uma importante questão: "como podemos não confundir um objeto e sua representação se não temos acesso a esse objeto a não ser por meio de sua representação?". Como resposta a essa pergunta, o autor afirma que a compreensão em Matemática está ligada ao fato de devemos dispor de pelo menos dois registros de representação diferentes para um mesmo objeto matemático, pois essa seria a única maneira de não confundir o objeto representado e suas diferentes representações semióticas. Diante do exposto, vemos que tanto Duval como Peirce consideram que um signo é algo distinto de seu objeto.

Assim, acredita Duval que a compreensão em Matemática implica a capacidade que um sujeito deve ter de mudar de registros o mais naturalmente possível, mantendo-se em referência o mesmo objeto matemático denotado. Porém ressalta o autor que essa passagem de um registro de representação a outro não tem nada de espontâneo para a maioria dos estudantes, uma vez que na realização dessa atividade surgem alguns obstáculos, como os fenômenos de *congruência* e de *não-congruência* entre os diferentes registros de representação que possui um objeto matemático, conforme veremos mais adiante.

Para analisar a atividade matemática numa perspectiva de ensino e de aprendizagem, Duval (2005) afirma ser necessário realizar uma abordagem cognitiva sobre os dois tipos de transformações de representações que são fundamentais para essa análise, *os tratamentos* e *as conversões*. Dedicarei especial atenção a estes que acredito serem os pontos centrais da teoria de Duval.

3.5 TRANSFORMAÇÕES DE REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS

Em Matemática, existem dois tipos diferentes de transformações de representações semióticas que podem ocorrer: *os tratamentos* e *as conversões*. É por meio delas que é possível analisar as atividades matemáticas desenvolvidas pelos alunos em uma situação de ensino. Ao se analisar as soluções de determinadas atividades apresentadas pelos alunos, Duval (2005) ressalta que não se toma o cuidado de distinguir esse dois tipos de transformações. Mas como se define cada uma dessas transformações? Quais são as suas características e especificidades? Veremos, então, uma a uma a fim de que se possa responder tais questionamentos e compreender suas funcionalidades, de acordo com as idéias de Duval.

3.5.1 Os tratamentos

Os tratamentos são transformações de representações que ocorrem internamente em um único registro de representação, por exemplo, o cálculo do valor de uma expressão numérica, conforme mostrado abaixo, se restringe a um único sistema de escrita ou de representação.

$$
\begin{aligned}
&2 + \{10 \div [(2 \times 3 + 4) - (1 + 4)]\} \\
&= 2 + \{10 \div [10 - 5]\} \\
&= 2 + \{10 \div 5\} \\
&= 2 + 2 \\
&= 4
\end{aligned}
$$

Notemos que para resolver a expressão numérica não houve mudança de registro de representação, ou seja, as transformações necessárias à resolução aconteceram todas no interior do mesmo sistema de representação semiótica. No entanto, vale ressaltar que, uma vez definida uma representação para um objeto, é através da atividade de tratamento que os alunos constroem um caminho para justificar suas respostas diante de uma atividade proposta.

No ensino tradicional, ressalta Duval (2005) que, de uma maneira geral, é somente esse tipo de transformação que é levado em consideração, durante a avaliação de uma atividade proposta em sala de aula numa situação de ensino. Corroborando com o autor apresento a seguir um exemplo de uma situação por mim vivenciada na classe M3 durante o período em transcorreu esta investigação.

Fiz aos alunos a seguinte pergunta: o que é fração? Sem obter uma resposta que pelo menos se aproximasse do conceito de fração, continuei a provocação, só que dessa vez, indaguei: o que é numerador? E o que é denominador?” O que me impressionou naquele momento não foi tanto o fato deles não saberem o conceito de fração, de numerador ou de denominador, mas sim o fato de alguns terem respondido, “temos que calcular o ‘MMC’, dividir pelo debaixo, multiplicar pelo de cima e depois somar”, quando perguntei qual era o resultado da soma $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$.

Nesse discurso proferido pelos alunos, é possível notar que, embora estejam cursando o último ano do Ensino Médio, eles ainda não aprenderam o conceito de fração, ou seja, conhecem a representação de fração, mas não o conceito. Nesse sentido, somos levados a concordar com Duval quando o autor afirma ser o tratamento o tipo de transformação que mais se destaca nas aulas de Matemática, uma vez que os alunos citados sabiam o algoritmo para efetuar a soma frações.

Nesse sentido, ressalta Bruno D’Amore (2005, p. 52) que

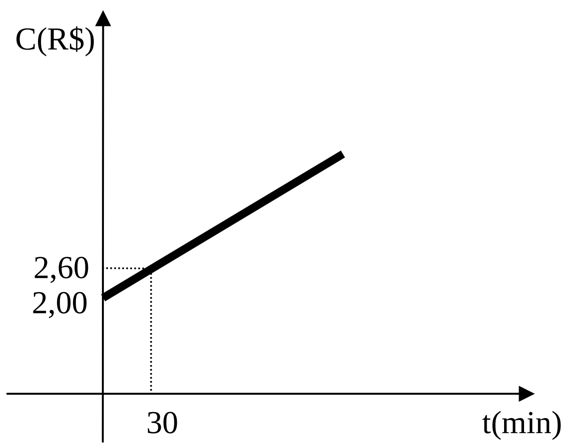
> é preciso prestar muita atenção; de um lado, o estudante não sabe que está aprendendo signos que estão no lugar de conceitos e que deveriam estar aprendendo conceitos; do outro lado, se o professor nunca refletiu sobre o assunto, acreditará que o estudante está aprendendo conceitos, enquanto ele está, na realidade, “aprendendo” apenas a utilizar signos.

O exemplo da soma de frações explicitado anteriormente, vai ao encontro do que diz o autor na citação, e converge para o que afirma Duval com relação à ênfase dada a atividade de tratamento nas aulas Matemática.

A fim de evitar esses equívocos, o professor deve certificar-se da importância primordial de não confundir um objeto matemático e seus distintos registros de representação semiótica, é somente a partir dessa percepção que o professor pode ensinar os conteúdos matemáticos valorizando a atividade de conversão ao invés de valorizar a atividade de tratamento, uma vez que de acordo com Duval, é a atividade de conversão que garante a aprendizagem de conceitos.

3.5.2 As conversões

As conversões são transformações de representações semióticas em que necessariamente ocorrem mudanças de registros de representação mantendo-se em referência a um mesmo objeto matemático denotado. Assim, a passagem de uma função descrita em um texto em língua natural para a escrita algébrica ou gráfica são exemplos de conversões, conforme mostra o quadro a seguir.

Registro na língua natural	O proprietário de um estacionamento cobra de seus clientes R$ 2,00 na entrada e mais R$ 0,02 pelo tempo, dado em minutos, de permanência do automóvel no estacionamento.
Registro algébrico	$C(t) = 0{,}02.\ t + 2{,}00$
Registro gráfico	

Quadro 2: exemplo de conversão.

Assim, pode-se dizer que a conversão consiste em mudar a forma pela qual um objeto matemático é representado. Ou seja, a conversão é uma transformação externa em relação ao registro de representação de partida. Segundo Duval (2005), a conversão pode ser analisada sob dois aspectos: do ponto de vista matemático e do ponto de vista cognitivo.

No primeiro, a conversão é utilizada apenas para escolher um determinado registro no qual teríamos um tratamento de forma mais fácil, ou menos trabalhosa possível, ou ainda, para obter um segundo registro que serve de suporte ou de guia aos tratamentos que se efetuam em outro registro. Por exemplo, na resolução da equação $x^2 - 6x + 9 = 0$ (registro 1) que também pode ser representada por $(x - 3) . (x - 3) = 0$ (registro 2), pode-se resolver a equação na primeira forma representada empregando a fórmula de Bhaskara (tratamento 1), já na segunda forma, cuja resolução se torna menos trabalhosa, basta verificar a condição: $x - 3 = 0$ ou $x - 3 = 0$, para concluir que as raízes $x_1 = x_2 = 3$ (tratamento 2). Como se observa o tratamento 2, nos leva a uma solução de maneira menos trabalhosa. No entanto essas duas formas de representação não possuem os mesmos *custos cognitivos*, conforme veremos mais adiante.

Já do ponto de vista cognitivo, a atividade de conversão figura como sendo responsável pelos mecanismos que conduzem os alunos a uma verdadeira compreensão dos conceitos dos objetos matemáticos, ou seja, a conversão não tem um papel essencial nos processos matemáticos de justificação ou de prova, uma vez que tal justificativa se baseia num tratamento efetuado em um registro estabelecido. Mas do ponto de vista cognitivo, é atividade de conversão que, ao contrário, aparece como atividade de transformação representacional fundamental, aquela que conduz aos mecanismos subjacentes à compreensão no processo de ensino e de aprendizagem da Matemática.

No entanto, Duval (1995, p. 4, tradução minha) reconhece que "a passagem de um sistema de representação a outro ou a mobilização simultânea de vários sistemas de representação não tem nada de espontâneo para a maioria dos estudantes", justamente porque essa atividade se depara com algumas características que lhes são peculiares, conforme veremos a seguir.

3.6 FENÔMENOS QUE CARACTERIZAM AS CONVERSÕES

Segundo Duval (2005), existem dois fenômenos que caracterizam a atividade de conversão, o primeiro diz respeito às variações de congruência e não-congruência entre os registros envolvidos numa conversão, o segundo refere-se ao sentido da conversão.

O primeiro fenômeno característico da atividade de conversão que aqui abordarei repousa no fato de ser imprescindível observar, em uma atividade de conversão, se o registro de partida transparece no registro de chegada. Nesse caso, diz-se que há a *congruência* entre os registros, caso contrário, têm-se um caso de *não-congruência*, e para ilustrar essa característica, Duval (1995, p. 45) nos coloca os exemplos mostrados no quadro[6] a seguir.

Exemplos	Registro na língua natural (partida)	Registro algébrico (chegada)
1º	“o conjunto dos pontos cuja ordenada é superior a abscissa”	y>x
2º	“o conjunto dos pontos que têm uma abscissa positiva...”	x>0
3º	“o conjunto dos pontos que têm abscissa e ordenada de mesmo sinal”	x.y>o

Quadro 3: exemplos de casos de congruência e de não-congruência entre registros

No quadro acima, temos casos de conversões entre registros: da língua natural (registro de partida) para registros algébricos (registro de chegada), onde é possível perceber que no primeiro exemplo, o autor esclarece que comparando a proposição do registro de partida e o registro de chegada e, realizando uma correspondência termo a termo entre as respectivas unidades significantes é suficiente para realizar a conversão, e que nesse caso, a conversão no sentido inverso permite encontrar o registro de partida.

No segundo exemplo, falta no registro de chegada uma unidade significante correspondente a “positivo”. Logo há a necessidade de recorrer à perífrase “> 0”, como sendo uma combinação de duas unidades significantes para amenizar essa ausência.

No terceiro exemplo, a conversão torna-se ainda mais difícil, uma vez que não há mais correspondência termo a termo entre as respectivas unidades significantes das duas proposições. Nesse caso, há a necessidade de uma reorganização da proposição dada no registro de partida para se obter uma proposição correspondente no registro de chegada.

Além disso, a perífrase “> 0” pode indicar tanto “de mesmo sinal” quanto “positivo”. Nesse caso, a conversão no sentido inverso dificulta reencontrar a proposição inicial “x.y>0”, visto que esta se traduz naturalmente por “o produto da abscissa e da ordenada é superior a zero (é positivo)” e não por “o conjunto de pontos que tem abscissa e ordenada de mesmo sinal”.

[6] Os exemplos mostrados no quadro 3 foram traduzidos por mim.

Diante do exposto, pode-se afirmar que, no primeiro exemplo, tem-se um caso de congruência entre os dois registros de representação, pois na conversão o registro de partida transparece no registro de chegada. Já nos dois últimos exemplos isso não acontece, ou seja, o registro de partida não transparece no registro de chegada, por conseguinte os registros de representação envolvidos nesta conversão são não-congruentes.

Granger embora não se refira ao termo congruência, como empregado por Duval, nos apresenta um exemplo, explicitado na citação a seguir, cuja análise se faz sob outro ponto de vista, mas que também pode ser utilizado como ilustração do fenômeno de congruência entre registros.

> O que o matemático escreve: $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ pode bem chamar-se <<a matriz quadrada a duas colunas a^{ij}>>. Mas os esquemas operatórios que caracterizam este tipo de objeto matemático serão espontaneamente referidos ao signo a duas dimensões, mais do que à perífrase oral (GRANGER, 1975, p. 93).

Assim, o autor destaca o apelo à representação semiótica, haja vista que é mais fácil referir-nos ao objeto matemático mostrado na citação por meio de sua representação semiótica numa dimensão simbólica de que por meio do registro expresso em língua natural por meio da perífrase oral.

Existem alguns fatores que, segundo Duval, determinam o caráter congruente ou não-congruente entre duas representações utilizadas numa conversão. Moretti (2002) aponta para um desses fatores ao discorrer sobre congruência semântica, afirmando que a conversão requer que percebamos a diferença entre o que Frege chama de sentido e referência dos símbolos ou dos signos, ou entre o conteúdo de uma representação e aquilo que ela representa.

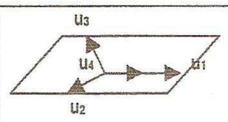
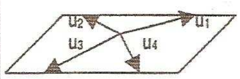
Frege (1978, p.64) afirma que “a referência e o sentido de um sinal devem ser distinguidos da representação associada a este sinal”. Em outras palavras, o que o autor quer chamar atenção é para o fato de que embora duas representações de um mesmo objeto possam ter em comum a mesma referência, isso não significa que estas representações tenham o mesmo sentido.

Corroborando com essa afirmativa, Moretti (2002, p. 345) acrescenta ainda que “em Matemática essa separação é fundamental”. Como exemplo nos apresenta que $1,\ 3-2,\ \frac{4}{4}$ e 5^0 referem-se ao mesmo número, ao mesmo objeto matemático, ou seja, a mesma referência. No entanto, este objeto em suas diferentes representações não possui o mesmo sentido. O autor comenta que um aluno, por exemplo, pode reconhecê-lo em $3-2$, mas pode não fazer o mesmo em 5^0 ou $\frac{4}{4}$.

De acordo com Duval (1998, p. 7 apud MORETTI, 2002, p. 345), “duas expressões tendo a mesma referência podem ser trocadas uma pela outra, em uma frase ou fórmula sem que o valor de verdade mude”. Por exemplo, a soma de $1+\frac{1}{2}$, pode ser feita da seguinte maneira: $\frac{2}{2}+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$, ou ainda de outra forma, mantendo-se a mesma referência: $1+\frac{1}{2}=1+0,5=1,5$.

Sobre esses exemplos Moretti acrescenta que as transformações de 1 em $\frac{2}{2}$ e de $\frac{1}{2}$ em $0,5$, não possuem a mesma natureza cognitiva e que, dependendo do tipo de transformação, o custo cognitivo pode ser maior ou menor. Isso depende muito do que Duval chama de *congruência semântica* entre as duas expressões ou objetos matemáticos, que possuem a mesma referência.

O outro fenômeno característico da atividade de conversão diz respeito à importância do sentido da conversão, isto é, o fato de uma conversão ser realizada num sentido não garante que ela automaticamente aconteça no sentido contrário. Pavlopoulou (1993, p. 84 apud DUVAL, 2005, p. 20) nos apresenta o resultado de sua pesquisa realizada com 144 estudantes universitários em que ele exemplifica essa afirmação.

	Registro de partida	Registro de chegada	144 estudantes
T*G	l o k p o l m o		.83
G*T		l o a c o l b d	.34

Quadro 4: Inversão no sentido da conversão.
Fonte: Duval (2005, p. 20)

Observando os resultados mostrados no quadro acima, constata-se na primeira linha que 83 estudantes conseguiram realizar com sucesso a conversão dos vetores representados na tabela. Porém, quando foi solicitada a conversão no sentido inverso, o número de estudantes que realizou com sucesso a conversão caiu para 34, fato que comprova o alto grau de complexidade que existe ao exigir dos alunos uma conversão no sentido inverso.

Sobre esse respeito, Duval (2005) tece alguns comentários chamando atenção para o fato dos professores privilegiarem geralmente um sentido da conversão acreditando assim que, ao exercitá-lo, automaticamente os estudantes conseguirão realizar a conversão no sentido inverso. Nos casos de congruência, os alunos conseguem algum sucesso, mas infelizmente esses não são os mais freqüentes durante o desenvolvimento das atividades realizadas nas aulas de Matemática, e isso acaba fazendo com que alguns professores reduzam a conversão a uma forma de tratamento, conforme veremos a seguir.

3.7 REDUÇÃO DA CONVERSÃO A UM TRATAMENTO

Muitas vezes acredita-se que o fato de um aluno passar uma função em sua forma algébrica para a forma gráfica, por exemplo, é suficiente para se afirmar que houve a conversão entre os dois registros. Essa confusão quase sempre acontece quando se analisam os registros dos alunos ao responderem uma atividade proposta em situação de ensino.

Para Duval (2005), essa é uma visão superficial e enganadora, pois seria como reduzir a conversão a uma das formas mais simples de tratamento, pois bastaria aplicar a regra que associa um ponto a um par de números sobre um plano dividido por dois eixos graduados. Nesse caso, podemos dizer que houve uma “codificação”, pois foi suficiente aplicar regras de correspondência para estabelecer uma tradução, e isso não garante a conversão.

As regras de codificação permitem apenas uma leitura pontual das representações de cada registro. Essas regras não permitem uma apreensão global e qualitativa do objeto representado. E é justamente essa apreensão global e qualitativa que é necessária para ir além da tradução e utilizar os registros para fins de estabelecer relações significativas e, a partir daí, pode-se afirmar que houve uma conversão. Passar de um registro de representação a outro não é somente mudar de modo de tratamento, é necessário que os alunos reconheçam e expliquem propriedades diferentes de um mesmo objeto em diferentes registros de representação.

3.8 NOESÍS E SEMIOSÍS

Duval chama de *semiosís* a apreensão ou representação de um determinado objeto matemático por meio de signos e *noesís* a apreensão conceitual desse objeto. No entanto, para que ocorra a apreensão de um determinado objeto matemático é necessário que a *noesís*, ou seja, a conceitualização, ocorra por meio de significativas *semiosís*, ou seja, representações semióticas. Daí porque Duval afirma que "*não existe noesís sem semiosís*" uma vez que a apreensão conceitual dos objetos matemáticos só se torna possível quando o sujeito que aprende tem a habilidade de realizar uma articulação entre os vários registros de representação de um mesmo objeto matemático.

Um dos problemas do ensino e da aprendizagem de conteúdos da Matemática se dá quando o professor ao ensinar, não atenta para o fato de que não basta apenas estabelecer uma ou mais representações para um mesmo objeto e seus respectivos tratamentos para cada forma de representação desse objeto, mas a garantia da apreensão, ou a conceitualização, desse objeto somente ocorrerá se o sujeito que aprende for capaz de transitar pelas diferentes representações de um mesmo objeto representado.

Nesta primeira parte do referencial teórico utilizado na presente pesquisa, tratei tão somente de questões pertinentes a Semiótica. Porém, acredito na conversão da língua natural para a linguagem matemática a leitura, a escrita, a interpretação da simbologia utilizada na linguagem matemática, são aspectos importantes de serem discutidos e levados em consideração na conversão entre essas duas linguagens. É sobre aspectos que passarei a discorrer no próximo capitulo.

4 A MATEMÁTICA COMO LINGUAGEM

Alguns autores, como Vergani (2002), consideram que a Matemática possui uma linguagem universal. Já para outros, como Silveira (2008), consideram que a linguagem matemática pretende ser universal. Sem entrar nos meandros dessa discussão que, por sinal é muito cativante. Limitarei minha abordagem assumindo aqui a posição de que a Matemática possui uma linguagem própria que é simbólica e codificada.

Assim, neste capítulo que, complementa a fundamentação teórica utilizada para subsidiar as investigações desta pesquisa, trato especificamente da linguagem matemática. Isto é, discorro sobre a escrita, a leitura, a interpretação dos símbolos que são utilizados na linguagem matemática, como também as regras matemáticas e o processo de significação e objetivação do pensamento através da escrita simbólica.

Para subsidiar as idéias aqui levantadas utilizo algumas considerações feitas por autores, como Nilson José Machado, Stella Baruk, que dedicam suas pesquisas ao estudo da linguagem matemática. Discuto também sobre algumas considerações feitas por Gilles-Gaston Granger no que diz respeito ao estilo da linguagem matemática e ainda alguns conceitos ligados à filosofia de Wittgenstein.

De acordo com Chauí (2003), durante muito tempo a filosofia se preocupou em definir a origem e as causas da linguagem. Uma das primeiras divergências a esse respeito surgiu na Grécia antiga onde havia a discussão se a linguagem é natural aos homens, ou seja, se existe por natureza, ou se é uma convenção social. Neste contexto há um desdobramento que aponta que se a linguagem for natural, as palavras possuem um sentido próprio; se for convencional, trata-se de decisões consensuais da sociedade.

Após alguns séculos de discussão, tomou-se como conclusão que a linguagem como capacidade de expressão do ser humano é natural, isto é, os humanos nascem com uma aparelhagem física, anatômica e fisiológica que lhes permite expressarem-se pelas palavras, mas as línguas são convencionais, isto é, de condições históricas, geográficas, econômicas e políticas, ou seja, são fatos culturais.

Considerando a linguagem como um sistema de signos ou sinais usados para indicar coisas, na comunicação entre pessoas e na expressão de idéias, é possível estabelecer algumas relações entre a linguagem e a Matemática, em que esta última pode ser considerada também como um sistema de signos que são utilizados para representar coisas (objetos matemáticos), estabelecer comunicação (por meio da leitura, da escrita ou até mesmo da oralidade) e expressar idéias (conceitos de objetos matemáticos).

Assim, nesta pesquisa, passarei a partir de agora a considerar a Matemática como linguagem, ou melhor, a Matemática como uma ciência que possui uma linguagem própria. Corrobora com essa afirmação Vergani (2002, p. 95) ao considerar que "sendo a Matemática uma área do saber de enorme riqueza, é natural que seja pródiga em inúmeras facetas; uma delas é precisamente, ser possuidora de uma linguagem própria".

Na mesma senda, Granger (1974, p. 32) acrescenta que

> para a matemática, a linguagem é, ainda mais diretamente, parte integrante da atividade científica. (...) a Matemática poderia ser qualificada de ciência por 'construção de linguagem'. (...) A criação de uma linguagem matemática não é tão só um acontecimento exterior ao desenvolvimento da Ciência. Está, ao mesmo tempo, ligada ao conteúdo do conhecimento matemático e às condições que constituem a sua infra-estrutura.

Para o autor, uma invenção lingüística neste domínio acha-se, de certo modo, situada no ponto de intersecção do universo formal da Matemática e do sistema dos atos concretos que constituem as relações dos homens entre si e com o mundo.

No entanto, o fato da Matemática possuir uma linguagem própria é que muitas vezes torna o seu ensino/aprendizagem dificultoso em detrimento ao rigor e a formalidade dessa linguagem. De um lado, muitos professores não têm a sensibilidade de trabalhar os conteúdos matemáticos levando em consideração os aspectos inerentes à linguagem matemática. Por outro lado, os alunos sentem-se entediados nas aulas de matemática por não conseguirem ler, escrever ou compreender a simbologia dessa linguagem.

Mas esse é um problema que não é recente, nem tampouco exclusivo de nossos atuais alunos, uma vez que, até mesmo grandes intelectuais de séculos passados demonstravam suas limitações diante da formalidade da linguagem matemática. Michael Guillen relata um encontro ocorrido no século XVIII entre o grande matemático Leonhard Euler, que teria provado matematicamente a existência de Deus, e o eminente intelectual francês da época Denis Diderot:

> Segundo parece, Euler aceitara um convite de Diderot, que ao tempo se encontrava na corte de Czar russo. No dia de sua chegada, Euler procurou Diderot e proclamou: [...] Cavalheiro, $\left(a+b^{n}\right)/n=X$, portanto Deus existe. Responda! Anteriormente, Diderot tinha já eloqüente e vigorosamente refutado numerosos argumentos filosóficos para a existência de Deus, mas neste momento, incapaz de compreender o significado da equação matemática que Euler lhe apresentara, sentiu-se intimidado e não proferiu palavra (GUILLEN, 1987, p.9).

Outro exemplo bem interessante nos é apresentado por Paulos (1990, apud Granell, 1993, p. 258). O autor relata que certa vez ouvira o noticiário na televisão com um grupo de pessoas consideradas “instruídas”. O serviço meteorológico informou que a probabilidade de chover no sábado era de cinqüenta por cento e que no domingo também era de cinqüenta por cento. O apresentador do noticiário concluiu então que a probabilidade de chover no final de semana seria de cem por cento. Paulos não se surpreendeu tanto com a informação prestada pelo serviço meteorológico, mas sim pelo fato de que nenhuma das pessoas, consideradas instruídas, que ouviam o noticiário com ele expressarem sequer alguma reação diante da informação erroneamente prestada.

Os relatos desses fatos exemplificam a dificuldade que a linguagem matemática impõe às pessoas que não a dominam, independentemente de seus níveis intelectuais. O ensino e a aprendizagem da Matemática, em todos os níveis de ensino, se deparam com esses tipos de obstáculos de natureza lingüística e que se não forem levados em consideração continuaremos a presenciar, no cotidiano de nossa sociedade, indivíduos produzindo novos exemplos de desconhecimento e uso incorreto da linguagem matemática.

Como toda linguagem, a da matemática também possui sua sintaxe e sua semântica, no entanto, essas especificidades presentes na linguagem matemática não são flexíveis como nas línguas naturais. Pelo seu caráter formal, a linguagem matemática tem suas regras pré-definidas e que rejeitam alterações, por exemplo, a equação $x^2-6x+8=0$, só admite duas únicas raízes, ou seja, $x=2$ ou $x=4$, não tem como ser diferente, da mesma forma que, ao se referir a aplicação de uma regra em Wittgenstein, Silveira (2008) afirma que esta por sua vez segue o imperativo, “que seja assim!”.

4.1 A ESCRITA E A ORALIDADE NA LINGUAGEM MATEMÁTICA

Segundo Machado (2001), a partir do século XV até os dias atuais, o prestígio da escrita cresceu consideravelmente em relação ao papel desempenhado pela fala, invertendo assim uma relação natural. Nesse sentido, na atual conjuntura, um indivíduo que, embora fale e seja capaz de se comunicar por meio do uso de sua língua materna, mas que não saiba ler e que não tenha domínio da escrita é considerado analfabeto.

Na escola, por exemplo, nas avaliações bimestrais, o que prevalece é o registro que se estabelece por meio da escrita, sendo este o principal instrumento utilizado pelo professor para medir o desempenho escolar dos alunos. Por outro lado, a maior parte das atividades pedagógicas envolvidas no processo de ensino/aprendizagem ainda se restringe à oralidade, onde a fala do professor é o principal canal de comunicação com os alunos.

De acordo com Machado (2001), um grande impulso em favor da escrita ocorreu em meados do século XV. Com o avanço tecnológico, surgiram mecanismos simplificadores para a impressão de textos escritos, com isso houve a substituição da forma manual de escrever pelo desenvolvimento de textos impressos. A importância da palavra escrita cresceu paulatinamente em relação à fala, até chegar um ponto em que, de acordo com Saussure (1975, p. 34) “acaba por usurpar-lhe o papel principal; terminamos por dar maior importância à representação do signo vocal do que ao próprio signo”. No entanto, o autor ressalta que o objetivo lingüístico não se define pela combinação da palavra escrita e da palavra falada; esta última, por si só, constitui tal objeto.

Sobre esses pontos e contrapontos em relação à escrita e à oralidade de uma linguagem. Frege (1983, p. 191) destaca que

> a escrita oferece a possibilidade de conservar muitas coisas presentes ao mesmo tempo, e ainda que não possamos em cada momento manter sob os olhos mais do que uma pequena parte delas, retemos contudo uma impressão geral das demais, que, quando precisarmos, estarão imediatamente à nossa disposição.

Assim o autor nos revela esta faceta que a escrita oferece, ou seja, além da praticidade, uma maior duração e imutabilidade. Essas características contribuem com relativa importância para o desenvolvimento das atividades no âmbito da Educação. Por exemplo, ao escrever este texto tivemos que inevitavelmente recorrer a algumas idéias desenvolvidas pelos autores que sustentam a base teórica desta pesquisa. O acesso a essas informações somente foi possível porque tais idéias foram objetivadas através dos textos escritos por estes autores, o que justifica as considerações feitas por Frege.

Assim são muitas as funções desempenhadas pela escrita. Nesse sentido, Silveira (2005, p. 61) acrescenta que “entre as diversas funções da escrita podemos destacar duas: nós escrevemos para não esquecer e para dar forma ao pensamento”. Na escola, por exemplo, o aluno copia o que o professor escreve para não esquecer o conteúdo trabalhado em sala de aula, na expectativa de que as informações fiquem armazenadas e possam ser acessadas num momento posterior.

Por outro lado, ao escrever para responder uma atividade proposta pelo professor, o aluno está dando forma ao seu pensamento. Mas no caso da Matemática, esse recurso de copiar do quadro a matéria para auxiliar a memória, mostra-se ineficaz em algumas situações, porque o que o aluno escreve em linguagem matemática, nem sempre consegue ler com facilidade posteriormente.

Na escola, é muito comum ouvir dos alunos nas aulas de Matemática a formulação discursiva “professor aqui, em sala, eu entendo o que o senhor explica, mas quando chego em casa esqueço”. Uma provável justificativa para este problema é o fato de que, durante a aula, a escrita simbólica da linguagem matemática torna-se compreensível através da fala do professor, porém quando o aluno abre o caderno em casa para estudar, não dispõe mais da fala do professor para dar sentido aos símbolos que ali estão escritos.

Neste caso, evidencia-se a importância primordial da oralidade, como um suporte de significação natural e insubstituível para tornar compreensível a simbologia da linguagem matemática objetivada através da escrita. Ou seja, a língua natural, via oralidade, presta auxílio à compreensão da linguagem formalizada escrita.

As linguagens formais surgem fundamentadas no princípio de que as línguas naturais admitem falhas e ambigüidades, pelo fato da palavra ser polissêmica. Assim, a criação das linguagens formais erige-se na perspectiva de que tais imperfeições intrínsecas às línguas naturais possam ser suplantadas. Essa idéia era defendida por alguns filósofos, principalmente os racionalistas como Descartes e Lebiniz que almejavam a criação de uma linguagem cuja gramática teria características plenamente lógicas, portanto adequada para o exercício da razão.

Para Machado (2001), tal visão não passou de um mal-entendido. Primeiro porque os supostos “defeitos” das línguas naturais não passam de características próprias das mesmas, com as quais temos que aprender a conviver. Por outro lado, em detrimento à forma como foram criadas, as linguagens formais revelam-se tanto mais precisas quanto mais distantes da experiência. O fato de uma linguagem formalizada, como a da matemática, se revelar distante da experiência, devido ao grau de abstração de seus objetos, acaba constituindo-se em obstáculo para que muitos estudantes aprendam Matemática.

De acordo com Silveira (2005, p. 64), “o grande problema da linguagem formalizada é a economia de linguagem. Com a utilização de poucos símbolos, muito se pode dizer de um objeto matemático”. Em consonância com a autora, observemos a sentença $f\ \textit{é função de}\ A\ \textit{em}\ B \Leftrightarrow \forall x \in A, \exists| y \in B / (x, y) \in f$. Para quem não tem o domínio da linguagem matemática, essa sentença se apresenta como algo escrito em uma língua estrangeira.

Granger (1974, p.33, grifos do autor) nos chama atenção para o caráter formal da linguagem matemática, destacando que essa linguagem não contempla a oralidade, ou seja, a linguagem matemática caracteriza-se como um sistema exclusivamente simbólico em que predomina a escrita.

> Na matemática, onde a construção se quer unívoca, esta inserção do formal num conjunto de atos lingüísticos é particularmente delicada. Inicialmente, ela se singulariza pelo fato de só poder desenvolver-se verdadeiramente pela escrita: o ‘espaço’ informacional oferecido pela cadeia falada tal como é percebida não se presta bem à recepção e à transmissão de mensagens que devem veicular essencialmente *combinações de informações referentes à sua própria estrutura*. As línguas naturais faladas podem quando muito *descrever* objetos e propriedades de objetos estruturais. Dir-se-á: ‘A soma dos quadrados de um triângulo retângulo...’ para descrever o que a estrutura figurada do simbolismo mostra diretamente: $a^2 + b^2 = c^2$. Mas, desde que as propriedades estruturais ultrapassem um certo grau de complexidade, sua descrição torna-se tão difícil de ser compreendida que toda manipulação, toda análise, toda demonstração, acham-se paralisadas.

Em consonância com o autor, percebe-se que de fato as estruturas[7] formais da Matemática se desenvolvem unicamente pela escrita. Mas, por outro lado, se nossa preocupação é com o processo de ensino e aprendizagem desta disciplina na escola, nesse caso, não podemos nos restringir ao rigor do formalismo da linguagem matemática. Como já dissemos anteriormente, é através da fala do professor, fazendo uso da língua natural, que os símbolos matemáticos podem adquirir sentido para os alunos.

Segundo Saussure (1975, p. 196), “nada entra na língua sem ter sido antes experimentado pela fala”. Nesse sentido, percebe-se que, para o autor, a escrita não é algo que se opõe a oralidade ainda que numa linguagem formalizada, ou seja, a escrita e a oralidade em qualquer forma de linguagem caminham juntas complementando-se mutuamente.

Machado (2001, p. 10) compartilha desse pensamento ao afirmar que

> entre a Matemática e a língua materna existe uma relação de dependência mútua. Ao considerarem-se esses dois temas enquanto componentes curriculares, tal impregnação se revela através de um paralelismo nas funções que desempenham, uma complementaridade nas metas que perseguem, uma imbricação nas questões básicas relativas ao ensino de ambas. É necessário conhecer a essencialidade dessa impregnação e tê-la como fundamento para a proposição de ações que visem à superação das dificuldades com o ensino de Matemática.

Corroborando com o autor, acredito que as dificuldades com o ensino e a aprendizagem da Matemática podem ser minimizadas se forem levadas em consideração a essencialidade dessa impregnação mútua existente entre a língua natural e a linguagem matemática. O diálogo entre o professor e o aluno em sala de aula deve fluir de uma forma constante, pois o aluno expondo suas dúvidas auxilia o professor a fazer com que a Matemática se torne mais compreensível.

Atualmente a tendência é que os conteúdos matemáticos trabalhados pela escola estejam voltados para a realidade do contexto histórico e social dos indivíduos, conforme as Diretrizes Curriculares para o Ensino da Matemática apontadas nos Parâmetros Curriculares Nacionais, ou seja, a Matemática deve ser vista como uma ciência que auxilie o cidadão na tomada consciente de decisões de

---

[7] Para Granger, uma estrutura matemática é precisamente pensada antes como virtualidade do que como objeto já constituído.

situações que lhes são impostas em situações rotineiras do cotidiano e que lhes exijam conhecimentos matemáticos para tal.

Machado (2001, p. 108) concorda com esse pensamento ao dizer que "podemos afirmar que enquanto componente curricular destinada a todos os indivíduos que passam pela escola, a Matemática não pode ser tratada estritamente como uma linguagem formal". Nesse sentido, acreditamos ser necessário lidar com essa linguagem sob a ótica de um sistema de representação que transcenda o formalismo, até mesmo porque, conforme acrescenta Granger (1974, p. 139), "o que se ganha em rigor, perde-se radicalmente em eficácia".

O rigor e o formalismo encobrem o que há por trás da linguagem matemática, como revela Vergani (2002) ao referir-se à beleza e elegância da Matemática. A autora aponta para a necessidade dos professores despertarem nos alunos a curiosidade da beleza da dança dos números e nos coloca como exemplo que o resultado de 3 multiplicado por si mesmos (3 x 3 = 9), somado ao resultado de 4 multiplicado por si mesmo (4 x 4 = 16) é igual ao resultado de 5 multiplicado por si mesmo (5 x 5 = 25).

Repare-se que 3, 4 e 5 são números inteiros seguidos. Isto não acontece com quaisquer outros números inteiros seguidos", ou seja, a Matemática tem como um de seus objetivos, e não o único objetivo, desenvolver o raciocínio lógico e dedutivo. Privar os alunos do domínio dessa linguagem significa privá-los de ter o acesso à arte de manipular as estruturas abstratas da Matemática.

Nesse sentido, é que o professor no desempenho de suas atividades pedagógicas, deve explorar em suas aulas, atividades que envolvam e conduzam o aluno a ler, escrever e interpretar as estruturas formais inerentes à linguagem matemática. Para isso o diálogo com os alunos pode ser um caminho que possibilite esse envolvimento, a fim de que os obstáculos advindos da linguagem matemática sejam reduzidos.

Na sala de aula, a fala medeia o processo de ensino e de aprendizagem da Matemática. De um lado o professor a utiliza, através da língua natural, para traduzir a linguagem matemática que se encontra codificada. Do outro, os alunos apreendem a tradução feita pelo professor e projetam sentido no que está sendo comunicado. Por conseguinte, os alunos constroem conceitos. Em outras palavras, o rigor e o formalismo da linguagem matemática podem ser amenizados através do discurso do professor durante a aula, o que mostra mais uma característica da oralidade servindo como ferramenta a ser utilizada em favor da redução dos obstáculos presentes nas estruturas formais da Matemática.

Machado (2001) nos apresenta um exemplo em um tom jocoso, de uma situação onde ele diz que se houvesse a possibilidade de fazer com que um cidadão ateniense pudesse ser transportado para os nossos dias atuais, ele estranharia tudo que visse. No entanto, sentir-se-ia perfeitamente ambientado em uma escola, nas aulas de matemáticas, por exemplo, ouviria falar de Pitágoras, Tales e de outros conterrâneos ilustres, mas sentiria dificuldade no momento da avaliação, uma vez que nesta, o que prevalece é a escrita.

Embora o autor tenha nos apresentado tal situação, como dissemos, num tom jocoso, o exemplo nos permite e nos remete a algumas reflexões acerca da forma como ocorre a avaliação dos conteúdos matemáticos trabalhados em sala de aula nas provas bimestrais, em que prevalecem na maioria das escolas os registros escritos dos alunos.

Assim um aluno que apresenta “x = 2” como solução de um problema, quando simplesmente utiliza o cálculo mental, é questionado pelo professor que quer saber como chegou a tal resultado. Essa construção quase sempre é exigida de forma escrita, ou seja, não é dada ao aluno a oportunidade de expressar oralmente seu pensamento, como era feito na época em que vivia o cidadão ateniense citado no exemplo de Machado.

Nessa mesma direção Arnould e Lancelot (1992, p. 2 apud DANYLUK, 2002, p. 23) acrescentam ainda que

> falar é explicar seus pensamentos por meios de signos que os homens inventaram para este fim. Achou-se que os signos mais cômodos eram os sons e as vozes. Como, porém, estes sons se esvaem, inventaram-se outros signos para torná-los duráveis e visíveis, que são os caracteres da escrita.

Isso mostra a supremacia da escrita. Por outro lado, é necessário que o professor compreenda a dificuldade que os alunos têm de expressarem-se através da escrita da linguagem matemática, uma vez que para realização dessa tarefa, lhes são exigidos conhecimentos das regras matemáticas, o que não acontece na comunicação via oralidade, pois não lhes é exigido o mesmo rigor como lhes é exigido através da escrita.

4.2 LEITURA, ESCRITA E INTERPRETAÇÃO DA LINGUAGEM MATEMÁTICA

Ao inquirir sobre o fracasso dos estudantes quando estão diante de uma situação problema proposta em um texto que lhes exige a conversão para a linguagem matemática, Fonseca e Cardoso (2005, p. 64, grifos do autor) afirmam que

> é comum encontrarmos depoimentos de professores sobre as dificuldades que seus alunos enfrentam na leitura de enunciados e de problemas de Matemática. Em geral, nós, professores que ensinamos Matemática, dizemos que "*os alunos não sabem interpretar o que o problema pede*".

A afirmação proferida pelos professores, na citação acima, não é sempre verdadeira. Há casos em que os alunos sabem interpretar o que o problema pede, mas eles têm dificuldades de objetivar seu pensamento por meio da escrita codificada e simbólica da linguagem matemática. Essa afirmação é verificada no cotidiano escolar, pois é muito comum ouvir dos alunos argumentos como "eu sei fazer a conta de cabeça, mas não sei como escrever no caderno". Situações como essa revelam a dificuldade que muitos estudantes têm em relação à escrita formal e simbólica da linguagem matemática.

A leitura da linguagem matemática é extremamente complexa basta ver que na escrita da linguagem matemática são utilizados símbolos para explicar ou definir outros símbolos, por exemplo.

$$\mathbb{Q} = \{x / x = \frac{a}{b}, a \in \mathbb{Z} \; e \; b \in \mathbb{Z}^*\}$$

Para representar o conjunto dos números racionais utilizamos o símbolo "$\mathbb{Q}$" e para defini-lo escrevemos $\{x / x = \frac{a}{b}, a \in \mathbb{Z} \; e \; b \in \mathbb{Z}^*\}$. Para o aluno ler e ter a compreensão do que está escrito na linguagem matemática, necessariamente precisa traduzir para a linguagem natural. Isso tudo ocorre num alto nível de abstração que exige do aluno certo vigor do pensamento para que ele consiga traduzir e interpretar essa linguagem.

O hábito da leitura infelizmente ainda é pouco explorado pelos professores nas escolas, principalmente em Matemática. Nós professores que ensinamos Matemática, atribuímos à dificuldade que os alunos têm de compreender o que se pede em um enunciado de um problema matemático à falta de leitura dos alunos e afirmamos que “eles não sabem interpretar o que o problema pede”.

Para Silveira (2005, p. 39), “a matemática é a fonte dos modelos abstratos. Os objetos matemáticos são formas puras, sem conteúdo sensível, que aparentam o real e representam os fenômenos. A representação do objeto se dá dentro de um espaço virtual”. Nesse sentido, a autora atribui a falta de visualização do objeto matemático como sendo uma das causas para as dificuldades que os alunos têm de ler e compreender a linguagem matemática. Segundo a autora, para que os símbolos tenham significado, é preciso que o aluno interprete cada símbolo, e para interpretar, é preciso que ele “veja” o objeto através de sua representação semiótica. Dessa forma, o significado do lido encontra-se no mundo onde o homem vive e o sentido do que se lê está no contexto.

No entanto, conforme mencionado no capítulo anterior, não temos acesso aos objetos matemáticos a não ser por meio de suas representações semióticas. Daí porque Granger (1974, p. 40), ao referir-se a linguagem matemática, afirma que “estranha linguagem essa, cuja função comunicativa é frequentemente apenas virtual e cuja presença é a de uma sombra, ou se se preferir, de uma divindade”. A leitura da linguagem matemática exige do aluno a capacidade de estabelecer relações entre os símbolos e o que eles representam dentro do contexto de uma situação de ensino. Percebe-se então que o ato de ler é abrangente e que ele não se reduz apenas à leitura de palavras escritas. É necessário ir além da leitura, ou seja, há a necessidade, sobretudo da interpretação do que está sendo lido.

Para Ocsana Danyluk (2002, p. 19)

> ler matemática significativamente é ter a consciência para o sentido e para o significado matemático do que se está sendo lido. É compreender, interpretar e comunicar idéias matemáticas. É nesse ato de conhecimento que os atos de criticar e de transformar se fazem presentes, realizando o movimento da consciência direcionado para as coisas. Dessa forma o leitor não é consumidor passivo de mensagens. Ele é um receptor de mensagens.

No que propõe a autora, para o aluno ter essa consciência do sentido e do significado da leitura de textos escritos em linguagem matemática não é simples. Nas aulas de Matemática, é muito comum os alunos cometerem erros como no exemplo mostrado por Baruk (1996, p. 238): “se numa meia-página de exercícios A e

B $\ll$são$\gg$ decimais, depois sobre outra meia-página A e B $\ll$são$\gg$ conjuntos, não nos deveremos espantar que o autômato declare $\ll$ser levado a pôr$\gg$: A < B, para A $\subset$ B”. Conforme Silveira (2008), o aluno tende a generalizar uma regra matemática, o que gera conflitos cognitivos, pois ele tem dificuldades de entender que uma regra se atualiza de acordo com o contexto. Por exemplo, na simplificação da expressão algébrica $\frac{(x+2).(x-2)}{x+2}$, a regra diz “simplifica-se o *x + 2* do numerador com o *x + 2* do denominador” no que resulta *x – 2*. O aluno tende a aplicar a mesma regra no caso em que a expressão seja $\frac{(x+2)+(x-2)}{(x+2)}$. Para a autora, assim como a língua natural segue as regras gramaticais, a linguagem matemática segue as regras da Matemática e a leitura da linguagem matemática exige o conhecimento dessas regras.

Nesse sentido, não há outro caminho para aprender as regras matemáticas senão o apontado por Wittgenstein (1981, p. 81) ao acrescentar que “não consigo descrever como (em geral) aplicar regras, excepto ensinando-te, treinando-te a aplicar regras”. O ato de seguir regra é essencialmente uma prática, ou seja, aprendemos a aplicar uma regra à medida que a utilizamos, tal como lembramos facilmente de um número de telefone para o qual ligamos constantemente. A ação de discar o número se constitui no treinamento que conduz a memorização do número. Assim como a ação de aplicar a regra de simplificação em expressões algébricas, conforme explicitada acima, se constitui no treinamento que conduz ao seu aprendizado.

Assim como a leitura e a escrita da linguagem matemática pode ocorrer através de treino. Ao se referir a forma como as crianças aprendem sua língua materna Wittgenstein (1991, p. 11) afirma “o ensino da linguagem não é aqui nenhuma explicação, mas sim um treinamento”. Desse modo, assim como aprendemos andar, a dirigir automóveis etc. por meio de treinamento, poderemos aprender a aplicação das regras matemáticas também por essa via.

Portanto, seguir uma regra é essencialmente uma prática. Como explica Wittgenstein (1991, p. 88) “eis porque ‘seguir a regra’ é uma práxis. E acreditar seguir a regra não é seguir a regra. E daí não podermos seguir a regra ‘privadamente’, porque, senão, acreditar seguir a regra seria o mesmo que seguir a regra”. Com isso, o filósofo ressalta o caráter público da regra, não no sentido de ser produto de um consenso coletivo, passível de ser reproduzido por qualquer grupo de sujeitos; mas no sentido sermos introduzidos em formas de vidas que nos permitem agir em conformidade com as regras.

Para Carrasco (2006, p. 194)

> a dificuldade de ler e escrever em linguagem matemática, onde aparece uma abundância de símbolos, impede muitas pessoas de compreenderem o conteúdo do que está escrito, de dizerem o que sabem de matemática e, pior ainda, de fazerem matemática.

A citação acima nos permite colocar o exemplo de situações muitas vezes vivenciadas durante uma aula de Matemática, quando os alunos dizem ao professor que sabem fazer a conta, porém não sabem como objetivar por meio da escrita o cálculo feito mentalmente. Situações como essa mostram a limitação e a dificuldade que os alunos têm de escrever em linguagem matemática. Diante de circunstâncias como essas vivenciadas no dia-a-dia da sala de aula, cabe a seguinte indagação: será que nós professores que ensinamos Matemática, incentivamos nossos alunos a ler e a interpretar textos escritos em linguagem matemática? Assim como na língua natural, na linguagem matemática o hábito da leitura influencia diretamente no aprendizado da escrita.

Nesse sentido, tem grande relevância o trabalho de Danyluk (2002) ao se preocupar em investigar como se dá o processo de alfabetização matemática nas séries iniciais. Os resultados de trabalhos voltados para essa finalidade tendem a contribuir para que professores direcionem ações que visem a reduzir a dificuldade dos alunos em relação a leitura, a escrita e a interpretação da simbologia utilizada na linguagem matemática.

4.3 SIGNIFICAÇÃO EM LINGUAGEM MATEMÁTICA

A leitura da linguagem matemática, necessariamente, depende da interpretação e do significado dos símbolos. Sobre isso Granger (1974, p. 135) afirma que

> toda prática poderia ser descrita como uma tentativa de transformar a unidade da experiência em uma unidade de uma estrutura, mas essa tentativa comporta sempre um resíduo. A significação nasceria das alusões a este resíduo. (...) na prática que os elabora, os elementos e as relações de uma estrutura abstrata são necessariamente associações de signos; estes, inicialmente, remetem, pois em princípio a um conjunto de noções abstratas.

Para o autor, os símbolos por si só não revelam de maneira explícita os seus significados. Por exemplo, a simbologia da expressão $A \cap B$ não traz explicitamente o significado de intersecção de dois conjuntos, nem tampouco esclarece o que é intersecção. Para Granger, existe sempre um *resíduo* subjacente à simbologia de uma linguagem formalizada como a da Matemática.

Os resíduos dos signos não aparecem nos signos da linguagem matemática formalizada. Portanto, cabe ao professor, por meio de um processo dialógico durante as aulas, auxiliar os alunos na busca desses resíduos que se encontram implícitos na simbologia da linguagem matemática. Ou seja, na perspectiva do autor podemos dizer que o significado do signo surge a partir do momento em que o aluno ao se deparar com um signo matemático saiba o que ele significa.

Granger (1974) ressalta ainda que a significação se dá na experiência[8] vivida. Um exemplo dessa afirmação decorre de uma situação do cotidiano por mim vivenciada: uma menina de 12 anos de idade vendia bombons nos bares à noite para complementar a renda familiar. Certa noite, ela me abordou para oferecer jujubas em uma pequena embalagem que continha 10 unidades ao preço de R$ 1,00. Aproveitei a ocasião e fiz a ela a seguinte pergunta: “se na embalagem tem 10 jujubas, quanto custa cada uma?” Ela respondeu rapidamente “dez centavos”. Questionei-a novamente, e pedi a ela que fizesse o seguinte cálculo “1 ÷ 10” escrito em um lenço de papel. Ela não soube responder, insisti e perguntei se ela sabia que tipo de operação era essa e ela respondeu “não sei fazer”.

---

[8] Não queremos no referir aqui a concepção construtivista de experiência a qual defende que o significado está na ação do sujeito de manipular o objeto, mas sim do ponto de vista colocado por Granger (1974, p. 134) ao considerar que “experiência é um momento vivido como totalidade, por um sujeito ou por sujeitos formando uma coletividade”.

O que pretendo mostrar com esse exemplo é que a divisão de 1 real por 10 balinhas supõe uma experiência vivenciada no cotidiano da menina com o objeto em questão, portanto existe significado real que gera o cálculo mental utilizado pela menina para fundamentar sua resposta. Mas, quando solicitei a ela que fizesse o mesmo cálculo na folha de papel, este não tinha o mesmo significado, ou seja, o "significado desaparece diante da linguagem formalizada" (Granger, p. 141).

Silveira (2005, p. 83) compartilha desse pensamento ao afirmar que em Matemática "quando muda o contexto, muda o conceito". Assim, podemos dizer que no cotidiano da menina, a divisão de decimais tem um sentido, já na escola diante da linguagem matemática formalizada tem outro, uma vez que se trata de diferentes contextos.

Wittgenstein, em sua obra *Investigações Filosóficas*, faz criticas ao que aqui chamarei de concepção agostiniana da linguagem, segundo a qual o significado é algo que pode substituir, na linguagem, o objeto. Outro fato que também está associado a esta idéia é o de que a linguagem se baseia em experiências privadas. Segundo esse modelo, a função fundamental das palavras de nossa linguagem é nomear e a função fundamental das sentenças é descrever.

Contrapondo-se a essas proposições, Wittgenstein (1991, p. 14) afirma que "quando dizemos: 'cada palavra da linguagem designa algo', com isso ainda não é dito absolutamente *nada*; a menos que esclareçamos qual a diferença que desejamos fazer". Ou seja, os significados das palavras emergem dos usos que fazemos delas. Porém, ressalta o autor que esses usos devem ser regrados, devem se basear em convenções e em formas de vidas particulares para que as palavras tenham inteligibilidade intersubjetiva e, consequentemente, para que elas tenham sentido.

Assim a significação da palavra não é um ato interno, ela nasce nos *jogos de linguagem*. Nesse sentido, Gottschalk (2004, p. 318) acrescenta que

> com o conceito de "jogo de linguagem" Wittgenstein esclarece como atribuímos significados às nossas palavras. Segundo ele estas só adquirem significados quando operamos com elas, portanto, dentro de um jogo de linguagem, que seria para Wittgenstein, a totalidade formada pela linguagem e pelas atividades com as quais vem entrelaçada. A palavra jogo vem ressaltar as diversas atividades com as quais a linguagem se vincula.

Não há ao longo dos aforismos escritos por Wittgenstein uma definição para “jogos de linguagem”. Ele apenas nos apresenta, através de inúmeros exemplos, ações que evidenciam o que o autor quer dizer com esta expressão. Portanto, comandar, e agir segundo comandos; conjecturar sobre um acontecimento, resolver um problema de cálculo aplicado; relatar um acontecimento; expor uma hipótese e prová-la, etc. são exemplos que constituem inúmeros jogos de linguagem.

A expressão “jogo de linguagem” é essencial na filosofia de Wittgenstein, uma vez que ele a utiliza como um “método” para mostrar os diferentes usos dos conceitos em nossas formas de vida. Nesse sentido, as palavras não podem ser utilizadas apenas para descrever. Pois, além das descrições que fazemos a partir de nossas formas de representação, há muitos outros tipos de jogos de linguagem e dentro desses jogos é que os objetos adquirem significado, ou seja, quando operamos com eles e não simplesmente quando os relacionamos às imagens que fazemos deles. Nesse sentido, é que Wittgenstein se opõe à concepção referencial da linguagem, pois não há mais a necessidade de se postular entidades extralingüísticas como condições necessárias da significação.

4.4 FORMALIZAÇÃO EM LINGUAGEM MATEMÁTICA

A conversão da língua natural para a linguagem matemática constitui-se em um processo de formalização desta segunda linguagem, isto é, dar forma ao amorfo, na medida em que se considerem as representações semióticas como o único meio de acesso aos objetos matemáticos, tal como afirma Duval.

Nesse sentido afirma Granger (1974, 76) que “todo conhecimento científico se desdobra num universo de linguagem; aceitando provisoriamente a língua usual ou criando uma para seu uso” tal como evidenciado na Matemática que, por ser uma ciência formal, cria a sua própria linguagem para seu uso. Mas essa linguagem possui características que lhe concebe um estilo.

> O que denominamos um estilo não é pois uma simples modalidade de expressão, um simbolismo. Tratar-se-ia então de uma categoria do pensamento formal puro e é nisso que numerosos trabalhos de estética leva a crer. Decidimos definir um conceito de estilo como *usos* do simbolismo; o que diz respeito não somente à própria textura deste último, mas também à sua relação com uma experiência que o envolve (GRANGER,1974, p. 19).

Nesse sentido, o uso dos registros de representações semióticas para representar ou para dar forma aos objetos matemáticos constitui o estilo da linguagem matemática.

Para Granger (1974, p.319), “o característico de um modelo abstrato é ter em si mesmo valor de objeto matemático”, isto é, a formalização de um objeto matemático se mostra tão abstrata como o próprio objeto. Por exemplo, a forma da pirâmide deve ser compreendida para que a fórmula ($V = \frac{1}{3} A_b . h$) que determina seu volume tenha sentido.

Tomemos como outro exemplo, o clássico problema da corrida de táxi que nos remete a uma função, cujo valor a ser pago *y* por uma corrida depende da distância *x* a ser percorrida. Deseja-se que os alunos exprimam essa situação por meio de uma expressão do tipo y = ax + b. No entanto, essa formalização que se encontra objetivada pela escrita na linguagem matemática não ocorre de forma natural, uma vez que o aluno precisa projetar sentido a *x* e *y*.

Essa projeção dependente da significação que emerge dos resíduos que o aluno tem que abstrair do texto, ou seja, para formalizar através da linguagem matemática uma situação problema que se apresenta em língua natural, o aluno se defronta com as características intrínsecas a linguagem matemática e com a abstração tanto dos objetos como de suas formas.

No entanto, Granger (1974) assinala que a significação desaparece nas linguagens formalizadas, tal como no caso da linguagem matemática. Isso implica dizer que os signos utilizados na linguagem matemática quando são empregados na forma de um registro de representação só tem sentido à medida que os resíduos dessa representação são compreendidos.

Para que ocorra a conversão da língua natural para linguagem matemática é necessário que os alunos compreendam os significados dos signos matemáticos inseridos no texto de uma situação problema para que eles consigam formalizar, isto é, “colocar na forma de” um determinado sistema de representação que possibilite um tratamento.

5 ANÁLISES E DISCUSSÕES

A partir de minha prática docente vivenciada e do referencial teórico utilizado nesta pesquisa, apresento neste capítulo as análises das informações que foram coletadas durante o período em que ocorreu a investigação. Por meio das atividades realizadas no dia-a-dia em sala de aula e dos registros escritos produzidos pelos alunos, foi possível identificar algumas dificuldades que eles apresentaram para realizar corretamente a conversão da língua natural para a linguagem matemática e, para melhor entendimento das análises dessas dificuldades, organizei este capítulo em quarto seções, como será explicitado a seguir.

5.1 DIFERENTES REGISTROS MOBILIZAM DIFERENTES CONTEÚDOS

De acordo com Duval um mesmo objeto matemático dispõe de diferentes registros de representações semiótica. No entanto, é importante notar que esses diferentes registros podem exigir dos alunos conhecimentos de diferentes conteúdos matemáticos, isto é, os diferentes registros de um mesmo objeto matemático envolvem diferentes conteúdos. As informações coletadas nesta pesquisa revelaram que este fato contribuiu para que os alunos não conseguissem realizar corretamente a conversão da língua natural para a linguagem matemática.

Ao abordar essa problemática Duval assinala que

> passar de um registro de representação a outro não é somente mudar de modo de tratamento, é também explicar as propriedades ou os aspectos diferentes de um mesmo objeto. Vemos, então, que duas representações de um mesmo objeto, produzidas em dois registros diferentes, não têm de forma alguma o mesmo conteúdo (Duval 2005, p. 22).

Assim, o que determina então o conteúdo matemático de uma representação é a forma como o objeto matemático é representado. O que significa dizer que as diferentes maneiras de representação de um objeto exigem do aluno distintos conhecimentos matemáticos, consequentemente isso pode gerar obstáculos para os alunos realizarem corretamente conversões entre registros de um mesmo objeto matemático.

A situação problema apresentada na figura a seguir, aplicada nas classes M1 e N1, ilustra este tipo de dificuldade.

01- Uma operadora de telefonia celular, num determinado plano, cobra de seus clientes, uma taxa referente à assinatura mensal fixa no valor de R$ 35,00 e mais R$ 0,90 a cada minuto em que um cliente efetua ligações de seu celular.

Com base nas informações contidas no texto responda o que se pede em cada item abaixo.

a) Qual o valor da conta de um cliente que num determinado mês realiza 100 minutos em ligações de seu celular?

b) Escreva uma sentença matemática que represente o valor da conta **y** que um cliente pagará se efetuar **x** minutos em ligações do seu celular?

c) Representar por meio de um gráfico a função descrita no texto.

Figura 4: exemplo que mostra existir diferentes conteúdos em diferentes registros de representação de um mesmo objeto matemático.

No item "a", para que os alunos realizem a conversão da língua natural (texto da situação problema) para a linguagem matemática, é exigido dos alunos conhecimentos sobre as regras e os algoritmos utilizados para efetuar operações básicas da aritmética.

Já no item "b", para que os alunos realizem a conversão da língua natural para a linguagem matemática (escritura algébrica), é primordial que os alunos primeiramente, compreendam que tanto "x" quanto "y" representam as duas grandezas envolvidas na situação problema, isto é, *x* representa a quantidade de minutos falados ao telefone, enquanto *y* representa o valor a ser pago em função do tempo, em minutos, falado ao telefone.

O registro algébrico envolve ainda outros conceitos tais como: equação da reta, crescimento e decrescimento, coeficientes angular e linear etc. que são importantes de serem explorados, uma vez que, são características inerentes ao objeto matemático *função* que podem ser percebidas neste tipo de registro de representação, e com isso os alunos possam fazer relações das variáveis visuais "y" e "x" com o texto do problema.

No caso do item "c", em que é solicitada a conversão da língua natural para o registro gráfico, os alunos deveriam ter conhecimentos sobre sistema de coordenadas cartesianas, par ordenado, localização de ponto no plano cartesiano, conceito de reta e de outros conhecimentos que este tipo registro de representação possibilita explicitar.

Na figura a seguir, observando os registros dos alunos, é possível evidenciar a dificuldade que eles encontraram diante do item “c”, em que é solicitada a conversão para o registro gráfico da função.

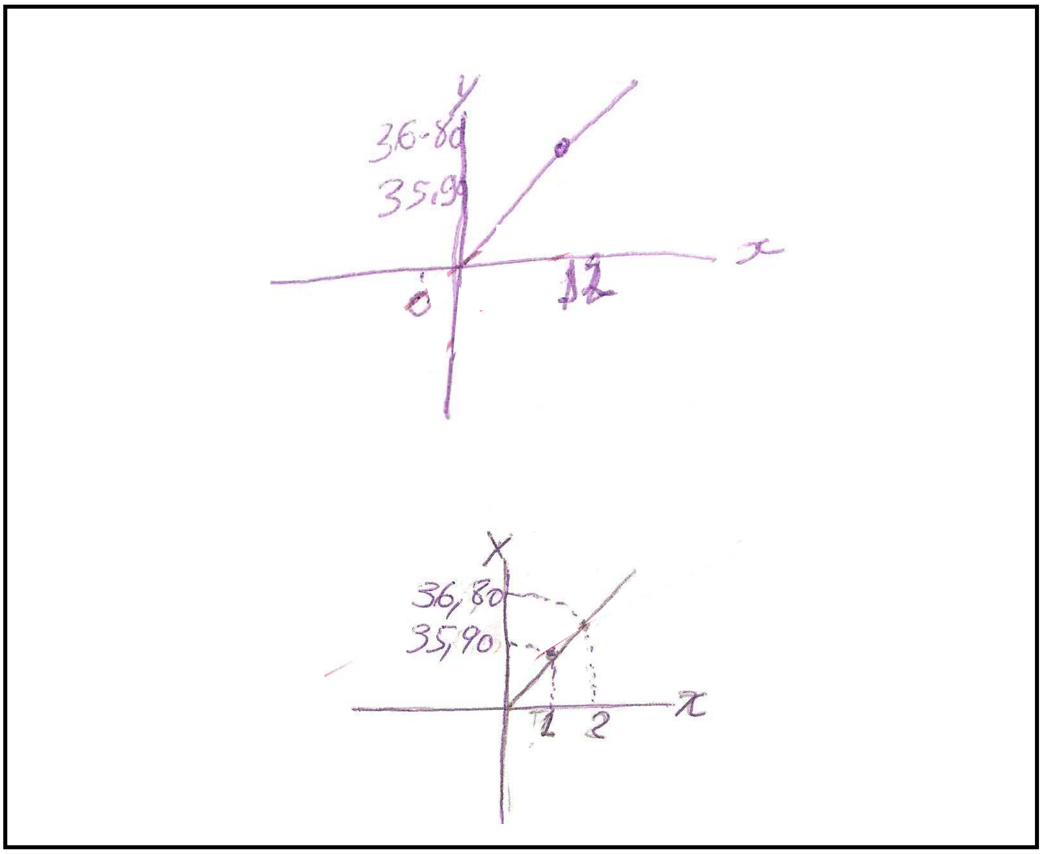


Figura 5: registro que mostra a dificuldade que alunos têm de localizar pontos no plano cartesiano.

Percebe-se que os alunos, sabem que o gráfico da função é uma reta. Eles encontraram corretamente pontos que pertencem a essa reta, No entanto, não conseguiram posicionar corretamente no plano cartesiano os pontos encontrados. Esta dificuldade, de posicionar pontos no sistema cartesiano ortogonal, foi evidenciada por aproximadamente 62% dos alunos da classe M1. Esse fato revelou-se como um dos principais motivos que fizeram com que apenas 12% dos alunos dessa classe conseguissem realizar corretamente a conversão da situação problema proposta, para o registro gráfico.

Outro fato evidenciado em relação a esta situação problema, que pode ser observado nos registros apresentados na figura 5, é que ambos os gráficos estão passando na origem do sistema cartesiano. Essa constatação caracteriza o que Duval chama de *codificação*, uma vez que os alunos não identificaram que o ponto localizado na origem do sistema não pertence ao gráfico da função.

Isso poderia ser percebido, se os alunos tivessem realizado o que Duval chama de articulação entre os diferentes registros envolvidos nesta conversão. Nesse sentido, os alunos poderiam, por exemplo, ter recorrido ao texto da situação problema, ou ao registro algébrico e perceber que o valor do coeficiente linear é diferente de zero, portanto, não havia possibilidade do gráfico passar na origem do sistema.

Para que a conversão da língua natural para a linguagem matemática seja realizada corretamente, essa é uma das condições primordiais, ou seja, que os alunos façam uma articulação entre os diferentes registros e reconheçam as diferentes características de um objeto matemático em suas distintas representações.

Diante do exposto, acredito haver dois pontos importantes a serem observados: primeiramente é vago afirmar que o fato dos alunos possuírem domínio dos conteúdos envolvidos nas diferentes representações de um objeto matemático, garantirá que eles realizem com êxito as conversões, haja vista que a conversão envolve outros fatores como, por exemplo, os de natureza cognitiva.

Nesse sentido, Duval (2005, p. 24) acrescenta que

> a aprendizagem da matemática ressalta fenômenos complexos, pois é necessário ao mesmo tempo levar em conta as exigências cientificas próprias dos conteúdos matemáticos e o funcionamento cognitivo do pensamento humano.

Para o autor, a aprendizagem da Matemática está intimamente ligada a uma abordagem cognitiva que possibilite ao aluno compreender, efetuar e controlar ele próprio a diversidade dos processos matemáticos que lhes são propostos em situações de ensino. Assim, a conversão não depende tão somente do domínio dos conteúdos matemáticos, há a necessidade de se levarem em consideração outros fatores como, por exemplo, a subjetividade do aluno e a objetividade da Matemática.

O segundo ponto é que mesmo que o aluno possua domínio dos conteúdos envolvidos nos diferentes registros de representação dos objetos matemáticos, não lhe é garantido que realize as conversões de maneira satisfatória. Por outro lado, o domínio dos conteúdos matemáticos é imprescindível enquanto pré-requisito para que as conversões venham a ser realizadas corretamente pelos alunos. Em outras palavras, não há como realizar conversões sem conhecimento matemático do conteúdo envolvido na situação problema. Parafraseando Machado (2001), seria como abdicar das pernas para andar.

Para encerrar minhas análises sobre este tipo de dificuldade, utilizarei nos parágrafos seguintes algumas importantes considerações feitas por Gottlob Frege acerca da distinção entre *sentido* e *referência*. De acordo com o autor

> temos que distinguir entre sentido e referência. Certamente “2^4” e “4.4” têm a mesma referência, isto é, são nomes próprios do mesmo número, mas não têm o mesmo sentido. Daí terem “$2^4 = 4^2$ e $4.4 = 4^2$”, na verdade, a mesma referência, mas não o mesmo sentido, isto é, neste caso, não contêm o mesmo pensamento (FREGE, 1978, p. 44).

Assim, os diferentes registros utilizados na citação têm em comum a mesma referência, ou seja, o numeral 16. No entanto, cada um dos diferentes registros possui sentidos diferentes. A partir dessa idéia, é possível compreender então, as dificuldades que os alunos investigados nesta pesquisa apresentaram para realizar corretamente as conversões solicitadas na questão proposta na figura 4. Isto é, embora todos os itens da questão tivessem a mesma referência, ou seja, o objeto matemático função do 1º grau, de acordo com Frege, as diferentes representações semióticas desse objeto não têm o mesmo sentido.

A partir dessas considerações foi possível compreender porque na classe M1, 22% dos alunos conseguiram realizar corretamente a conversão solicitada no item “a”, 12 % no “b” e 15% no “c”. Enquanto na classe N1, os índices de acertos dos alunos nas conversões solicitadas nos itens “a”, “b” e “c”, respectivamente, foram de 12%, 15% e 20%. Ou seja, tanto o texto do enunciado da situação problema quanto os registros solicitados em cada item da questão faziam referência ao mesmo objeto matemático (função do 1º grau). Porém, na perspectiva dos alunos, o registro de representação mobilizado em cada item, possuíam diferentes sentidos.

5.2 INTERPRETAÇÃO DE REGRAS

De acordo com Silveira (2008), nos enunciados de problemas matemáticos escritos em linguagem natural, existe uma regra matemática implícita. Por conseguinte, essa regra precisa ser interpretada corretamente pelo aluno a fim de que consiga responder o que lhe está sendo perguntado no problema. Por exemplo, “Kaio tem em seu cofre R$ 10,00. Que quantia terá se depositar nesse cofre uma moeda de R$ 0,50?”.

Nesse caso, a regra matemática implícita a ser interpretada é soma “10 + 0,50”. No texto da situação problema, que está escrito em língua natural, não está explícito que o aluno deve realizar a referida adição. Esta operação deve ser interpretada e posteriormente efetuada.

Em consonância com a autora, é possível acrescentar ainda que, no texto de uma situação problema, pode existir até mesmo mais de uma regra matemática a ser interpretada pelo aluno. Examinemos, por exemplo, a seguinte situação “Em um triângulo retângulo, a hipotenusa mede 40 cm e a altura relativa a hipotenusa divide-a em dois segmentos cujas medidas estão na razão de 2 para 3. Calcule a área desse triângulo” (DANTE, 2007, p 202).

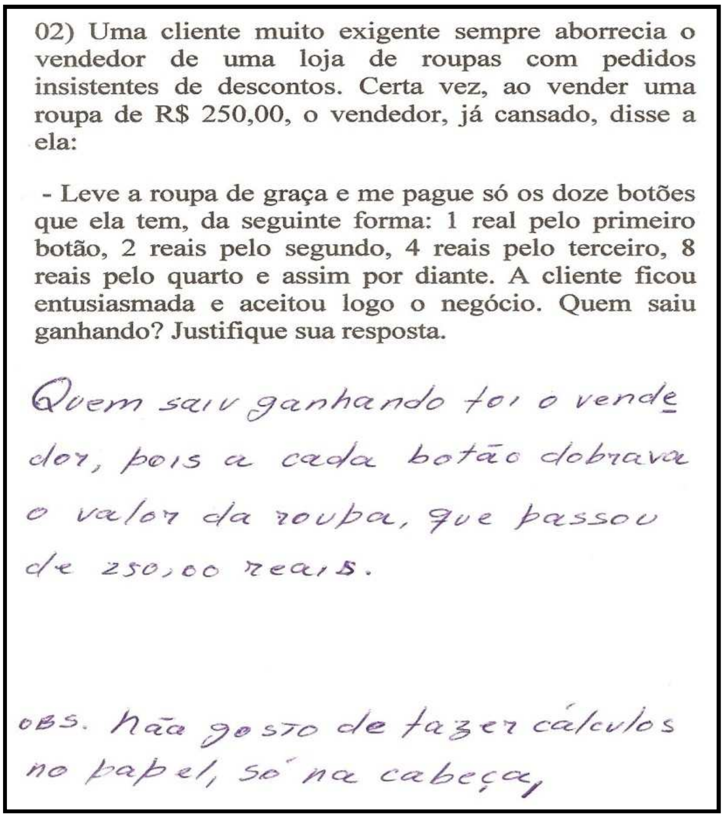
No enunciado desse problema, estão implícitos os conceitos de triângulo retângulo, de hipotenusa, de segmentos, de razão, de área etc. Assim, para o aluno resolver corretamente a questão, isto é, calcular a área do triângulo, é necessário que ele tenha conhecimento desses conceitos, que por sua vez, estão implícitos no texto do problema. Nesse caso, o exemplo citado revela mais de uma regra a ser interpretada.

Caso o aluno não tenha conhecimento desses conceitos, terá dificuldades para resolver o problema. Nesse sentido, pode-se considerar que as regras matemáticas a serem interpretadas e os conceitos dos objetos matemáticos são os resíduos inerentes às linguagens formais aos quais se refere Granger (1974). Na perspectiva dos alunos, os signos utilizados na linguagem matemática e a interpretação do texto matemático escrito em língua natural, adquirem significados a partir da compreensão desses resíduos.

Nesse sentido, na conversão da língua natural para a linguagem matemática, é primordial que o aluno compreenda esses resíduos, isto é, que interprete corretamente as regras matemáticas que se encontram implícitas nas entrelinhas dos textos matemáticos escritos em língua natural. Diante desse fato, a presente pesquisa revelou duas situações distintas que geraram dificuldades para que os alunos obtivessem sucesso na conversão da língua natural para a linguagem matemática.

Na primeira, alguns alunos não realizaram corretamente a referida conversão porque, embora tivessem interpretado corretamente a(s) regra(s) matemática(s) implícita(s) no enunciado da situação problema, apresentaram dificuldades de objetivar, de formalizar o pensamento por meio de um registro de representação semiótica; na segunda, alguns alunos não tiveram êxito porque não conseguiam interpretar corretamente a(s) regra(s) matemática(s) implícita(s) no texto das situações-problema, consequentemente, não formalizavam suas respostas por meio de um registro de representação semiótica.

Durante o período em que transcorreu a presente investigação, essas dificuldades foram evidenciadas tanto no dia-a-dia da sala de aula, através de manifestações verbais proferidas pelos alunos como “professor o que é pra fazer nessa questão?”, quanto nos registros escritos, conforme o apresentado na figura a seguir.



02) Uma cliente muito exigente sempre aborrecia o vendedor de uma loja de roupas com pedidos insistentes de descontos. Certa vez, ao vender uma roupa de R$ 250,00, o vendedor, já cansado, disse a ela:

- Leve a roupa de graça e me pague só os doze botões que ela tem, da seguinte forma: 1 real pelo primeiro botão, 2 reais pelo segundo, 4 reais pelo terceiro, 8 reais pelo quarto e assim por diante. A cliente ficou entusiasmada e aceitou logo o negócio. Quem saiu ganhando? Justifique sua resposta.

Quem saiu ganhando foi o vendedor, pois a cada botão dobrava o valor da roupa, que passou de 250,00 reais.

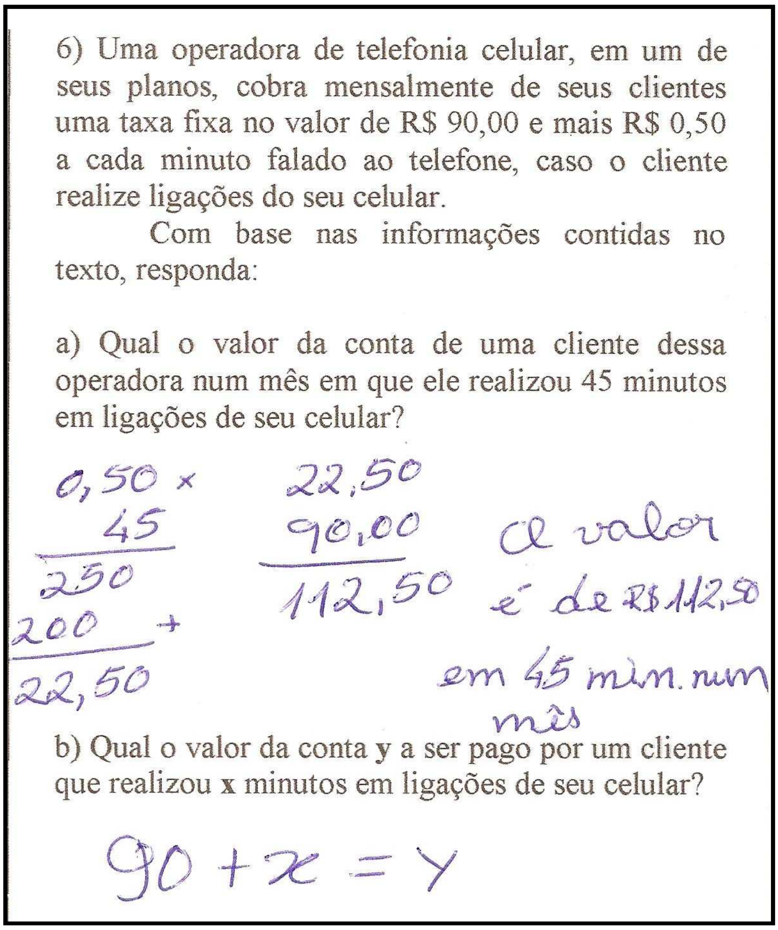
OBS. não gosto de fazer cálculos no papel, só na cabeça,

Figura 6: exemplo de como o aluno interpreta a regra matemática.

Nesta questão é possível perceber que o aluno interpretou corretamente a regra matemática. No caso, somar os valores equivalentes a cada botão da roupa, mas encontrou dificuldades para objetivar seu pensamento por meio da escrita simbólica da linguagem matemática.

Na observação feita pelo aluno, ao afirmar que “não gosto de fazer cálculos no papel, só na cabeça”, ele revela sua dificuldade de objetivar o pensamento por meio da escrita simbólica da linguagem matemática. Este problema foi aplicado nas classes M3 e N3 e, pouco mais de 40% dos alunos conseguiram resolvê-lo corretamente em virtude dessa dificuldade de formalizar a resposta em linguagem matemática.

Em outro caso, explicitado na figura a seguir, é possível perceber que a aluna interpreta corretamente a regra matemática implícita no enunciado da situação problema, fato que se justifica pela maneira que ela resolveu o item “a” da questão.



6) Uma operadora de telefonia celular, em um de seus planos, cobra mensalmente de seus clientes uma taxa fixa no valor de R$ 90,00 e mais R$ 0,50 a cada minuto falado ao telefone, caso o cliente realize ligações do seu celular.

Com base nas informações contidas no texto, responda:

a) Qual o valor da conta de uma cliente dessa operadora num mês em que ele realizou 45 minutos em ligações de seu celular?

0,50 ×
45
250
200 +
22,50

22,50
90,00
112,50

O valor é de R$ 112,50 em 45 min. num mês

b) Qual o valor da conta **y** a ser pago por um cliente que realizou **x** minutos em ligações de seu celular?

$90 + x = y$

Figura 7: exemplo de como o aluno interpreta a regra matemática.

O que chama atenção é o modo como a aluna resolveu o item “b”. Nesse caso, embora ela tenha interpretado corretamente a regra matemática implícita no enunciado da situação problema, encontrou dificuldades para realizar a conversão solicitada, pois a escrita formal e simbólica da linguagem matemática lhe impôs obstáculos, uma vez que escrever em linguagem algébrica exige que os alunos atribuam significados às letras utilizadas neste tipo de registro de representação.

Por isso, o registro utilizado pela a aluna na resolução do item “a” foi diferente do utilizado na resolução do item “b”; porém vale ressaltar que o raciocínio que ela utilizou para resolver ambas as questões foi o mesmo, ou seja, ela entendeu que deveria somar o consumo com a taxa fixa. Isso explica o fato dela ter apresentado como solução do item “b” a soma “90 + x” e não ter levado em consideração o preço de cada minuto falado ao telefone.

Nesse sentido, é possível afirmar, em consonância com Silveira (2005), que nem sempre “a lógica do aluno coincide com a lógica da Matemática”, ou seja, para a aluna, seu raciocínio está correto, mas a forma como ela objetivou seu pensamento por meio do registro escrito não coincide com a lógica formal da escrita simbólica da linguagem matemática.

Na presente pesquisa foi possível perceber a importância do contexto trazido pelas situações-problema. Por exemplo, na figura 7, ao resolver o item “a”, a aluna interpretou corretamente a regra, pois, o enunciado do problema remetia a uma experiência vivenciada pela aluna. Por outro lado, no item “b” a aluna não interpretou corretamente a regra, pois agora a mesma regra está sendo aplicada em outro contexto (álgebra).

A aluna não intui corretamente a regra matemática uma vez que esta mesma regra deveria ser interpretada e aplicada em diferentes contextos. Ou seja, nas diferentes situações solicitadas em cada um dos itens da questão. É por isso que Duval ressalta a importância de se utilizar mais de um registro de representação para designar um objeto matemático.

Situações como essas podem induzir alguns professores de Matemática a acreditarem que seus alunos não sabem interpretar o que o problema pede. A análise dos registros da aluna explicitado na figura 7 é um exemplo de que nem sempre o problema é de interpretação do enunciado, e sim, de como formalizar a resposta obtida através da escrita simbólica da linguagem matemática.

Nas figuras a seguir, são analisadas algumas dificuldades que os alunos apresentaram para interpretar as regras matemáticas implícitas no texto, a partir de situações-problema envolvendo geometria espacial.

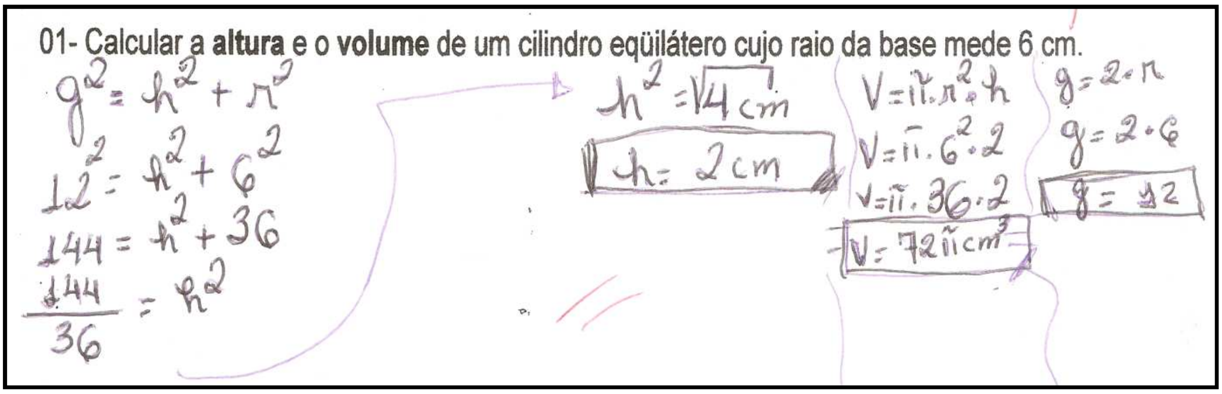


Figura 8: exemplo que mostra a dificuldade de identificar as regras implícitas no texto

Nesse caso, é possível perceber a dificuldade que a aluna teve de identificar o objeto matemático. Ela resolveu a questão tendo em mente a figura de um cone eqüilátero. Essa dificuldade de visualização do objeto matemático foi evidenciada nesta questão por aproximadamente 40% dos alunos da classe M3.

Outro fato que contribuiu para o insucesso dos alunos na resolução desta questão, mostrada na figura 8, foi a quantidade de informações implícitas no enunciado. Por exemplo, no cilindro eqüilátero, tem-se que o valor da medida da altura é igual ao dobro do valor da medida do raio da base. Essa informação não está explícita no texto do problema, mas o aluno deve ter tal conhecimento, caso contrário encontrará obstáculos para realizar a conversão para a linguagem matemática.

No registro produzido por outra aluna, em relação a mesma situação problema explicitada na figura 8, é possível perceber esta constatação.

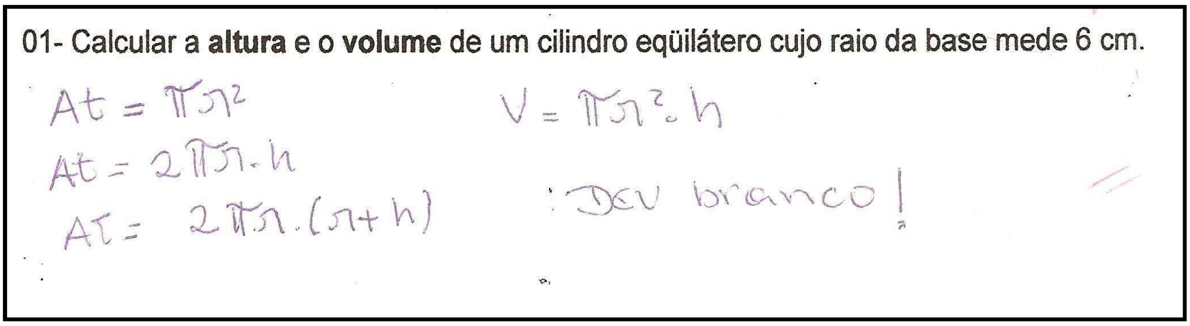


Figura 9: exemplo de dificuldade de identificar os implícitos do texto.

Neste caso, é importante salientar que esta situação problema, embora tenha o enunciado pequeno, exige um grande esforço cognitivo do aluno para conseguir interpretar as regras e os conceitos matemáticos que estão implícitos nas entrelinhas do texto. Por este motivo, "deu branco" no raciocínio da aluna diante da dificuldade de compreender os resíduos (forma e o conceito de cilindro eqüilátero, os conceitos de: altura, volume, raio da base) do texto.

Por outro lado, também foi possível perceber, tanto nas atividades desenvolvidas no dia-a-dia da sala, quanto nas manifestações verbais proferidas pelos alunos que, na aplicação de situações-problemas que envolviam geometria, as dificuldades de realizar a conversão da língua natural para a linguagem matemática eram reduzidas na medida em que eram fornecidos, juntamente com o enunciado das situações-problema, os registros figurais dos objetos matemáticos, no caso dos sólidos geométricos.

Desse modo, é razoável inferir que em situações-problemas que envolvem geometria, o uso do registro figural do sólido trabalhado, auxilia o aluno na interpretação e na compreensão dos resíduos implícitos nas entrelinhas do texto da situação problema, pois ajuda não somente na visualização dos elementos do sólido como na interpretação do enunciado, conforme ilustrado na figura a seguir.

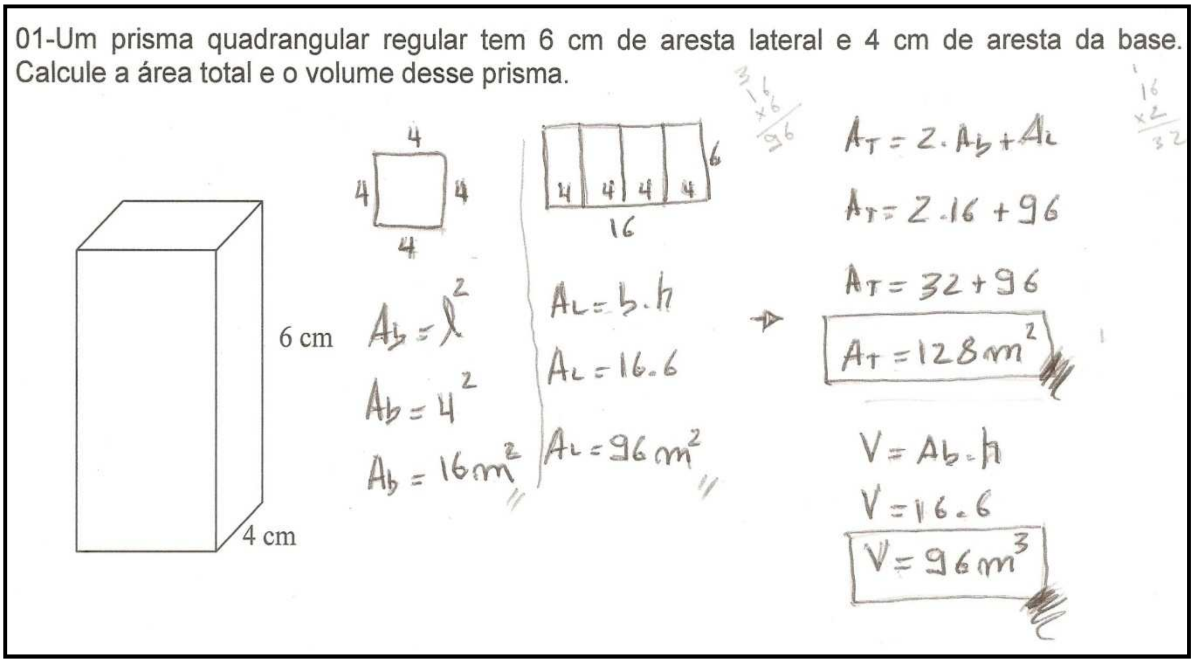


Figura 10: Exemplo de situação problema sendo dada a representação do objeto

Esta questão foi aplicada na classe M3 e o índice de fracasso nas conversões reduziu para menos de 10%. O fato de ter sido fornecida a representação figural facilitou a visualização dos elementos do prisma e eximiu o aluno da necessidade de representá-lo por meio da figura. Em outras palavras, a representação semiótica do sólido medeia a conversão da situação problema proposta em língua natural para a linguagem matemática e, auxilia o aluno na compreensão dos resíduos do texto do problema que está escrito em língua natural.

5.3 PALAVRAS QUE GERAM AMBIGUIDADE DE SENTIDO

Nas línguas naturais existem algumas palavras que possuem um significado quando empregadas em situações cotidianas e outro quando empregadas em enunciados de problemas matemáticos. Tal é o caso de volume, diferença, produto etc. Assim o que determina o significado de uma palavra quando esta é utilizada é o contexto.

Nesse sentido, Wittgenstein (1969, p. 31) afirma que “quando os jogos de linguagem mudam, há uma modificação nos conceitos e, com as mudanças nos conceitos, os significados das palavras mudam também”. Isso levou os alunos investigados nesta pesquisa apresentaram dificuldades de compreender o significado de algumas palavras que foram utilizadas no enunciado de algumas situações-problema.

Conforme já dito anteriormente no capítulo 4, a linguagem matemática inevitavelmente utiliza-se da língua natural como suporte de significação para suas estruturas abstratas. A linguagem matemática é formal e não admite ambigüidades. Por outro lado, a língua natural é polissêmica e, consequentemente algumas palavras podem constituir-se em obstáculos para o aluno interpretar o enunciado de uma situação problema.

Essa afirmação foi constatada através das informações coletadas nesta pesquisa, onde foi evidenciado que, quando existem no texto de uma situação problema palavras que geram ambigüidades de sentidos, ou que os alunos não compreendem seus significados, no contexto em são empregadas, as mesmas dificultam ou até mesmo impedem que os alunos realizem corretamente a conversão da língua natural para a linguagem matemática.

Nas figuras a seguir, há alguns registros que ilustram essa dificuldade.

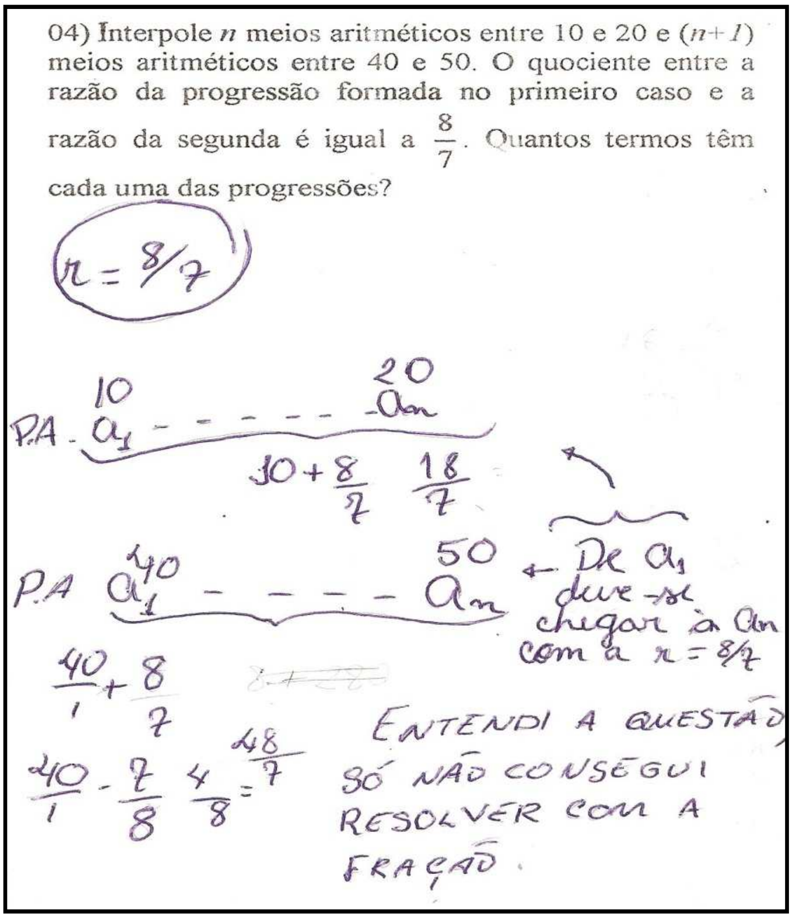
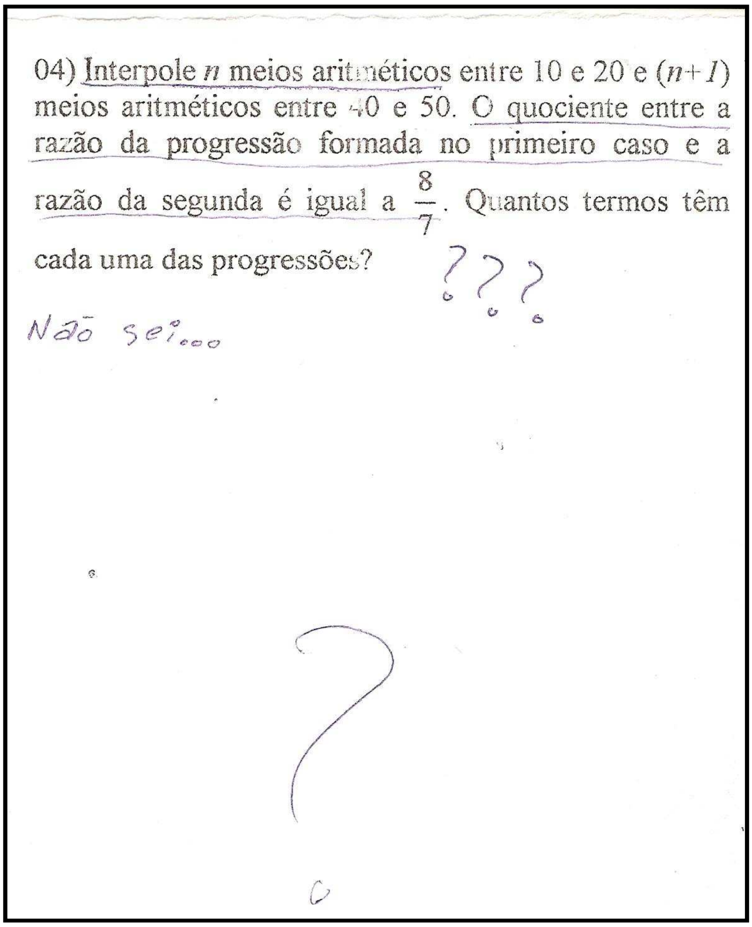


Figura 11: exemplo que revela a dificuldade imposta aos alunos na interpretação de palavras com ambigüidade de significado.

Nessa situação problema, foi constatado que aproximadamente 35% dos alunos da classe M3 conseguiram êxito na conversão solicitada, enquanto na classe N3, pouco mais de 25 % realizaram corretamente a referida conversão.

Nos registros do aluno pertencente a classe N3, é possível perceber a confusão provocada pelas palavras, “quociente” e “razão”, presentes no enunciado da situação problema proposta. Ele interpretou $\frac{8}{7}$ como sendo a razão das seqüências, enquanto que, na verdade, $\frac{8}{7}$ é o quociente entre as razões das sequências.

A confusão gerada pela não compreensão dos significados dessas palavras no contexto da situação problema dificultou, para o aluno, o processo de conversão da língua natural para a linguagem matemática. Da mesma forma que dificultou também para outros alunos, como explicitado na figura a seguir.



04) Interpole n meios aritméticos entre 10 e 20 e $(n+1)$ meios aritméticos entre 40 e 50. O quociente entre a razão da progressão formada no primeiro caso e a razão da segunda é igual a $\frac{8}{7}$. Quantos termos têm cada uma das progressões?

???

Não sei...

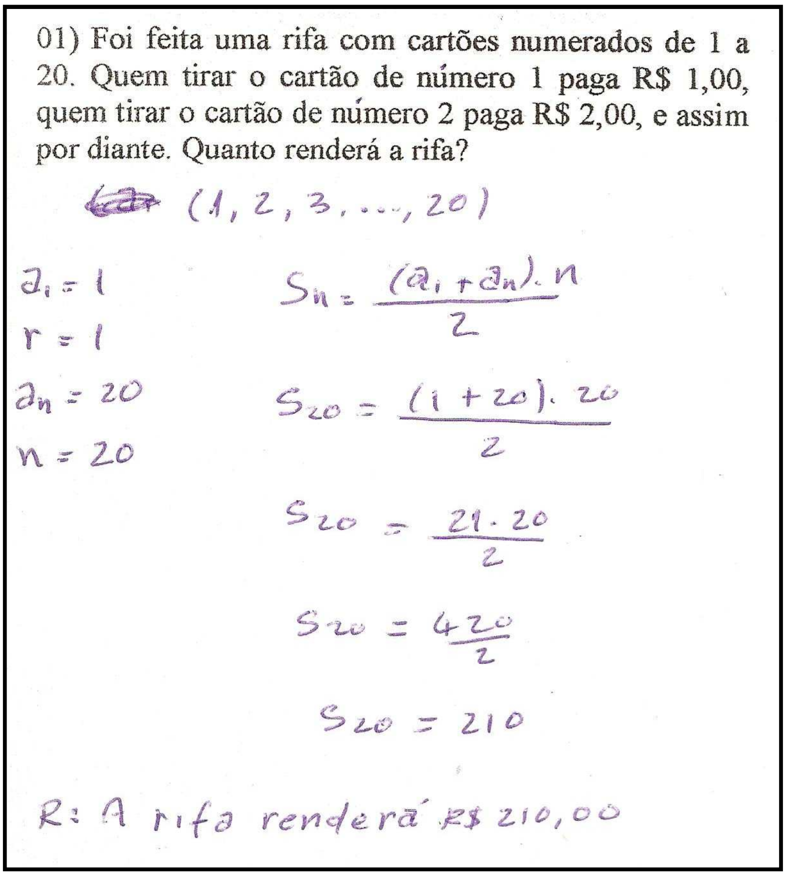
?

Figura 12: exemplo que revela a dificuldade que os alunos encontram para realizar a conversão da língua natural para linguagem matemática quando não compreendem o significado de algumas palavras do enunciado do problema.

Nesse caso, não foram necessárias muitas palavras para o aluno expressar sua dificuldade de interpretar o texto da situação problema. Ao afirmar simplesmente “não sei”, ele revela através das palavras sublinhadas no texto, que não compreendeu os significados no contexto em que foram usadas.

Os pontos de interrogação presentes no registro do aluno, possivelmente são alusivos aos grifos feitos no texto destacando o que não foi compreendido por ele. Isso ilustra o fato de que, quando no enunciado de uma situação problema contém palavras que os alunos não compreendem seu significado ou que provocam ambigüidade de sentido, tendem a dificultar a conversão da língua natural para a linguagem matemática.

A figura a seguir, mostra os registros do mesmo aluno explicitado na figura 12 diante de outra situação problema.



01) Foi feita uma rifa com cartões numerados de 1 a 20. Quem tirar o cartão de número 1 paga R$ 1,00, quem tirar o cartão de número 2 paga R$ 2,00, e assim por diante. Quanto renderá a rifa?

$(1, 2, 3, \ldots, 20)$

$a_1 = 1$

$r = 1$

$a_n = 20$

$n = 20$

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

$$S_{20} = \frac{(1 + 20) \cdot 20}{2}$$

$$S_{20} = \frac{21 \cdot 20}{2}$$

$$S_{20} = \frac{420}{2}$$

$$S_{20} = 210$$

R: A rifa renderá R$ 210,00

Figura 13: exemplo de que quando o texto de uma situação problema é escrita com um vocabulário acessível ao aluno as dificuldades de se realizar a conversão da língua natural para a linguagem matemática são menores.

Neste caso verifica-se que na situação problema explicitada na figura acima, o texto da questão se apresenta ao aluno de uma forma mais acessível que o da questão anterior. Portanto, facilitou a compreensão e a interpretação do enunciado. Isso favorece a conversão e até mesmo o tratamento empregado para resolver a questão.

Segundo Fonseca e Cardoso (2005), muitos estudantes têm problemas de ler e interpretar corretamente o enunciado de problemas de Matemática. As autoras afirmam que é comum os professores de Matemática sugerirem aos colegas professores de Língua Portuguesa que realizem e/ou reforcem atividades de interpretação de texto com os alunos. Tal sugestão, embora possa contribuir para leitura de uma maneira geral, não ataca a questão fundamental das dificuldades específicas que os alunos têm na compreensão dos textos de problemas matemáticos.

Corroborando com essas percepções, Smole e Diniz (2001, p.72) afirmam que

> a dificuldade que os alunos encontram em ler e compreender os textos de problemas está, entre outros fatores, ligada à ausência de um trabalho específico com o texto do problema. O estilo no qual os problemas de Matemática geralmente são escritos, a falta de compreensão de um conceito envolvido no problema, uso de termos específicos da Matemática que, portanto, não fazem parte do cotidiano do aluno e até mesmo palavras que têm diferentes significados na Matemática e fora dela – total, diferença, impar, média, volume, produto – podem constituir-se em obstáculos para que ocorra a compreensão.

Nesse sentido, o trabalho específico com os textos de problemas matemáticos deve ser realizado pelo próprio professor de Matemática, na sala de aula, pois, ele é quem domina (deve dominar) a simbologia utilizada na linguagem matemática.

Não há aqui a intenção de se opor ao uso de uma ou outra palavra, nos enunciados de situações-problema, tais como *quociente*, *meios aritméticos*, *total, diferença, impar* etc. Mas o que pretendo salientar é que determinadas palavras, quando utilizadas no enunciado de uma situação problema, podem gerar obstáculos para os alunos na compreensão do texto.

A questão que se coloca é como então o professor pode desenvolver este trabalho em sala de aula? Wittgenstein (1981, p. 100) aponta um caminho que pode ser seguido a fim de responder esta questão. Ao afirmar que "toda a explicação tem seu fundamento no treino. (Os educadores deviam lembrar-se disto)". Ou seja, através do treino em sala de aula que se cria o hábito que pode conduzir os alunos a ler, escrever, utilizar os signos matemáticos e interpretar os significados das palavras utilizadas. Haja vista que para o autor o significado de uma palavra é o seu uso na linguagem.

Em consonância com Wittgenstein, Peirce (2003, p. 22) reconhece a necessidade do treino em Matemática:

> sou forçado a dizer que a matemática requer um certo vigor do pensamento, o poder de concentração da atenção de forma a manter na mente uma imagem altamente complexa, e mantê-la assim o bastante para ser observada; e apesar de um treinamento poder efetuar maravilhas em pouco tempo quanto a aumentar esse vigor, mesmo assim não se fará um pensador vigoroso a partir de uma mente fraca, ou de uma mente que tiver sido enfraquecida profundamente pela preguiça mental.

O autor chama a atenção para o caráter abstrato da Matemática e assume uma posição ríspida diante desta abstração ao admitir que o aprendizado da Matemática exige, de um sujeito que se propõe a aprendê-la, além do treino, grande disposição mental.

Wittgenstein (1981, p. 76) nos remete aos diferentes usos que podemos fazer de uma determinada palavra.

> <<Como é que faço para utilizar sempre uma palavra correrctamente, *i. e*., com sentido; tenho de estar sempre a consultar uma gramática? Não; é o fato de querer dizer algo – o que quero dizer obsta a que diga disparates. >> - << Quero dizer algo com as palavras>> significa aqui: sei que consigo aplicá-las. Posso no entanto pensar que consigo aplicá-las e vir a revelar-se que me enganei.

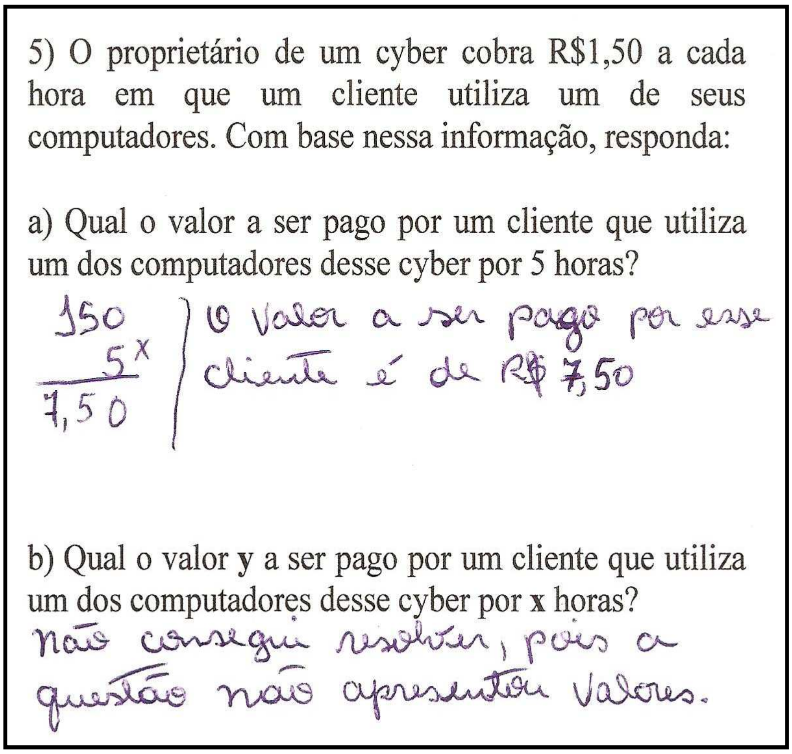
Para o autor, uma palavra adquire diferentes sentidos quando usada em contextos diferentes. Por isso, podemos nos enganar ao usar uma palavra com um sentido quando na verdade deveria ter sido usada em outro, tal como ocorreu nos registros dos alunos explicitados nas figuras 11 e 12.

Frege (1974, p. 208) destaca que "deve-se perguntar pelo significado das palavras no contexto da proposição, e não isoladamente", reiterando assim o que afirma Wittgenstein no que diz respeito a significação de uma palavra, isto é, a palavra independe de uma referência extralingüística para ter significado, pois o seu significado é o seu uso na linguagem em diferentes contextos.

5.4 DIFICULDADES DE ATRIBUIR SIGNIFICADO

Ao analisar os registros produzidos pelos sujeitos envolvidos nesta pesquisa ao resolverem as questões propostas durante o período de investigação, foi possível perceber que os alunos apresentam dificuldades em realizar a conversão da língua natural para a linguagem matemática através de um registro algébrico, uma vez que para isso há a necessidade de se atribuir significado as letras envolvidas neste tipo de registro.

O registro do aluno da classe N1, explicitado na figura a seguir, é um exemplo do que se afirma.


5) O proprietário de um cyber cobra R$1,50 a cada hora em que um cliente utiliza um de seus computadores. Com base nessa informação, responda:

a) Qual o valor a ser pago por um cliente que utiliza um dos computadores desse cyber por 5 horas?

150
5 x
7,50

O valor a ser pago por esse cliente é de R$ 7,50

b) Qual o valor **y** a ser pago por um cliente que utiliza um dos computadores desse cyber por **x** horas?

Não consegui resolver, pois a questão não apresentou valores.

Figura 14: exemplo que revela a dificuldade de atribuir significado às variáveis.

Observando os registros do aluno, é possível perceber, no item “a” que ele interpretou corretamente a regra matemática implícita no texto da situação problema, e objetivou seu pensamento na linguagem matemática por meio de um registro de representação na forma de um algoritmo de multiplicação.

Ele segue a regra da multiplicação que, possivelmente, aprendeu ao aplicá-la em atividades desenvolvidas nas aulas de Matemática. Uma vez aprendida uma regra matemática, o aluno pode aplicá-la em diferentes contextos oriundos de circunstâncias rotineiras de seu cotidiano, como à descrita na situação problema apresentada na figura 14.

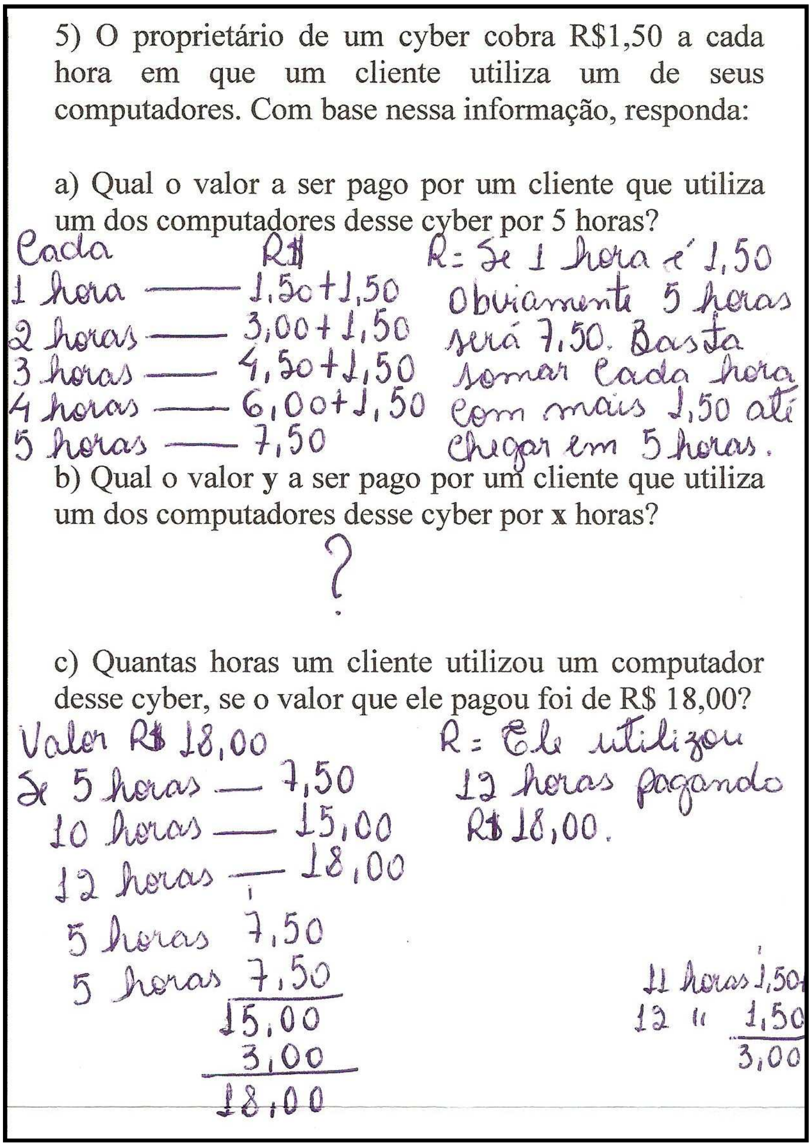
Em outras palavras, pode-se dizer que em situações que remetem a experiências já vivenciadas por um sujeito, diminuem-se os obstáculos que surgem para os alunos, diante da necessidade de interpretar regras matemáticas implícitas no enunciado de situações-problema. Isso, por conseguinte pode reduzir as dificuldades de realizar a conversão da língua natural para a linguagem matemática.

Na situação problema evidenciada na figura 14, o índice de acerto verificado no item “a” foi de 100%, tanto na classe M1, quanto na N1. Ao questionar os sujeitos investigados nesta pesquisa sobre os procedimentos utilizados para a resolução desta questão, ficou constatado que, embora os alunos tivessem apresentado suas resoluções através de diferentes algoritmos, guiavam-se pela referência a experiência vivida no cotidiano para justiçar suas respostas.

No caso do item “b”, pouco mais de 23% dos alunos da classe N1 conseguiram realizar corretamente a conversão solicitada, enquanto que na classe M1 aproximadamente 30% conseguiram êxito. Através dos registros dos alunos foi possível perceber que eles apresentavam dificuldades de atribuir significados para “x” e para “y”, e isso foi confirmado a partir do diálogo estabelecido com os alunos após a aplicação dos testes.

Ao ouvir as justificativas dos alunos, ficou evidente que o baixo percentual de acerto no item “b” ocorreu porque eles buscavam subsídios em experiências vividas como a descrita na situação problema, tal como haviam feito no item “a”. Mas, dessa vez, havia letras e não números para que a tarefa fosse realizada, isso dificultou a conversão porque não é comum fazermos cálculos em situações vivenciadas no cotidiano usando letras, e sim, números. Por essa razão é que, conforme mostrado na figura 14, o aluno afirma não ter conseguido resolver o problema, pois a questão não apresentou valores.

Na conversão da língua natural para a linguagem matemática (através de um registro algébrico), o aluno se depara com a necessidade de atribuir significados às letras assim como formalizar o suas resoluções através da escritura algébrica, conforme ilustrado na figura a seguir.



5) O proprietário de um cyber cobra R$1,50 a cada hora em que um cliente utiliza um de seus computadores. Com base nessa informação, responda:

a) Qual o valor a ser pago por um cliente que utiliza um dos computadores desse cyber por 5 horas?

Cada R$
1 hora —— 1,50+1,50
2 horas —— 3,00+1,50
3 horas —— 4,50+1,50
4 horas —— 6,00+1,50
5 horas —— 7,50

R: Se 1 hora é 1,50 Obviamente 5 horas será 7,50. Basta somar cada hora com mais 1,50 até chegar em 5 horas.

b) Qual o valor **y** a ser pago por um cliente que utiliza um dos computadores desse cyber por **x** horas?

?

c) Quantas horas um cliente utilizou um computador desse cyber, se o valor que ele pagou foi de R$ 18,00?

Valor R$ 18,00
Se 5 horas — 7,50
10 horas — 15,00
12 horas — 18,00

5 horas 7,50
5 horas 7,50
15,00
3,00
18,00

R: Ele utilizou 12 horas pagando R$ 18,00.

11 horas 1,50
12 " 1,50
3,00

Figura 15: exemplo que revela a dificuldade de atribuir significado às variáveis.

A aluna formalizou seu pensamento, realizando corretamente a conversão da língua natural para a linguagem matemática nos itens “a” e “c” seguindo a mesma linha de raciocínio. Porém no item “b” que lhe exigia a conversão para um registro na escritura algébrica, a interrogação presente no registro da aluna se justifica por duas razões, primeiro pelo fato de não ter conseguido atribuir significado a “x” e a “y”, segundo por ter dificuldades de escrever na linguagem algébrica.

Nesse sentido, Granger ressalta a importância da experiência vivida funcionando como um suporte de significação à simbologia utilizada na linguagem matemática.

> Na Matemática, o trabalho tem isto de singular: a estrutura por ele edificada é diretamente visada na sua mais completa abstração. Nem por isso ela deixa de ser extraída, contudo, do fundo de uma *experiência*, que se situa em níveis variados de abstração [...] Mas esta abstração é, antes de tudo vivida como experiência [...] é desta experiência que virão os elementos “intuitivos” isto é, aqueles que o trabalho assume e recorta como dados (GRANGER,1974, p. 29).

Para o autor, é a partir da experiência vivida que um sujeito extrai informações que lhe auxiliarão na compreensão dos resíduos implícitos na simbologia da linguagem matemática.

Diante do exposto, retomando as discussões a respeito dos registros dos alunos nas figuras 14 e 15, foi possível compreender os motivos pelos quais, nos itens “a” e “c”, o índice de acerto na questão proposta foi alto, pois os alunos levaram em consideração a experiência vivida no cotidiano como subsídio para realizar a conversão da língua natural para a linguagem matemática. Essa constatação foi evidenciada a partir do diálogo estabelecido com os alunos após a aplicação do teste, momento em que eles expressaram as dificuldades que encontraram para resolver a questão.

No caso do item “b”, em que se evidenciou um baixo índice de sucesso na resolução da questão proposta, verificou-se que o fracasso ocorreu por conta da dificuldade que os alunos tiveram de atribuir significado para as letras “x” e “y”, uma vez que, nesse caso, não havia referência direta à experiências vividas.

No entanto, é importante esclarecer que quando me menciono a experiência vivida, não estou me referindo tão somente as experiências vividas no cotidiano do aluno como sendo a única via de acesso que o auxilia na significação dos signos matemáticos. Refiro-me também a experiências matemáticas vivida pelos alunos tanto fora da sala de aula, como o exemplo anteriormente citado da menina que vendia balinhas, quanto dentro da sala de aula. Por exemplo, é a partir de experiências vividas através do uso de diversas formas geométricas nas aulas de Matemática que os alunos aprendem os conceitos de triângulos, de quadrados etc. Assim a sala de aula se constitui em um ambiente de treino profícuo ao aprendizado das técnicas, das regras, dos conceitos e da linguagem matemática.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta pesquisa foi desenvolvida com o propósito de identificar e investigar no contexto da sala de aula possíveis dificuldades, advindas da linguagem, que poderiam surgir para que os alunos das classes investigadas realizassem corretamente a conversão da língua natural para a linguagem matemática.

Guiado por essa inquietação, não somente encontrei algumas respostas para essa questão, como aprimorei e enriqueci meus conhecimentos acerca dessa problemática, pois ao identificar os pontos de dificuldades apresentados pelos alunos, me debrucei sobre a literatura a fim de encontrar fundamentação teórica para analisar essas dificuldades.

Nesse sentido, acredito, assim como Duval, que, nos diferentes níveis de ensino, o fato das conversões de registros não serem exploradas tanto quanto a atividade de tratamento nas atividades matemáticas realizadas em sala de aula, faz com que o aluno, não tenha uma compreensão mais abrangente do objeto matemático. Consequentemente isso leva o aluno a ter uma visão fragmentada desse objeto e isso limita a capacidade do aluno de realizar corretamente a conversão entre registros de representação semiótica.

Por outro lado, para observar a atividade de conversão da língua natural para a linguagem matemática, é primordial que se leve em consideração a dependência mútua entre essas duas linguagens, como afirma Machado (2001), pois a linguagem matemática se apresenta ao aluno de forma codificada pelos símbolos que precisam ser traduzidos com auxílio da língua natural. Assim, ao dialogar com os alunos e analisar os registros por eles produzidos, foi possível perceber que a conversão de registros de representação semiótica está intimamente relacionada a aspectos inerentes à linguagem matemática.

Nesta pesquisa ao adentrar a sala de aula assumindo a postura de quem está ali para aprender com os alunos, percebi que este espaço é impregnado de diferentes linguagens. Há, por exemplo, a língua natural que é utilizada como via de comunicação oral entre professores e alunos, há a linguagem do professor que deve seguir as normas cultas da gramática da língua natural, há linguagem do aluno que é mais coloquial. Enfim esse conjunto acaba se constituindo em diferentes jogos de linguagem que determinam o significado das palavras no contexto em que são empregadas, tal como considera Wittgenstein (1991).

Por meio do diálogo estabelecido com os alunos durante as aulas que compreenderam o período de investigação, e dos registros por eles produzidos em provas bimestrais e testes, foram identificados e analisados, sob a luz do referencial teórico utilizado nesta pesquisa, quatro pontos de dificuldades que se constituíram em obstáculos ou até mesmo impediram que alguns alunos realizassem corretamente a conversão de situações-problema propostas em língua natural para linguagem matemática.

O primeiro tipo de dificuldade foi identificado, surgiu do fato de que em diferentes registros de representação de um mesmo objeto matemático, há diferentes conteúdos matemáticos envolvidos. Isso gerou obstáculos para que a maioria dos alunos conseguisse realizar corretamente a conversão da língua natural para a linguagem matemática, a partir de algumas situações-problema que foram propostas. Pois nesse caso, havia a necessidade dos alunos reconhecerem o objeto matemático em seus diferentes registros de representação semiótica e, dominarem os conteúdos matemáticos envolvidos nestes diferentes registros.

A partir das idéias de Frege acerca da distinção entre sentido e referência, foi possível analisar e compreender essa dificuldade sentida pelos alunos diante das situações-problema que foram propostas. Com base no pensamento de Frege, foi possível compreender que distintos registros de representação semiótica podem referir-se a um mesmo objeto matemático, mas esses registros, na perspectiva dos alunos, não têm o mesmo sentido, uma vez que, em uma conversão, mobilizam diferentes conteúdos matemáticos.

Para Wittgenstein, os conceitos se modificam de acordo com o contexto. Isso significa dizer que, para os alunos, o conceito do objeto matemático é modificado conforme o registro de representação utilizado em uma atividade matemática realizada em sala de aula. Nesse sentido, o aluno tem dificuldade de compreender o conceito em diferentes contextos.

Essas considerações foram primordiais para que fosse possível compreender e analisar esse primeiro tipo de dificuldade apresentada pelos alunos das classes pesquisadas. Essa dificuldade pode ser amenizada na medida em que os professores levem em consideração essas discussões em sua atividade didática em sala de aula.

Diante do exposto, percebe-se que a conversão não está ligada somente aos aspectos semióticos dos objetos matemáticos, ou seja, não é o fato dos alunos reconhecerem o mesmo objeto matemático em diferentes registros de representação que lhes garantirá o sucesso na conversão entre esses registros. O aluno precisa, sobretudo, saber o conteúdo matemático envolvido em cada registro de representação semiótica assim, como ler, escrever e interpretar os símbolos da linguagem matemática.

O segundo tipo de dificuldade que foi apontada pelos sujeitos investigados nesta pesquisa se deu pelo fato de existirem, no texto de uma situação problema, regras matemáticas que precisavam ser interpretadas corretamente pelos alunos a fim de que eles conseguissem obter êxito na conversão da língua natural para a linguagem matemática.

Neste tipo de dificuldade, é importante destacar a forma como o enunciado de uma situação pode contribuir para o sucesso ou o fracasso dos alunos na atividade de conversão. Cabe ao professor, ao formular os textos de uma situação problema ou até mesmo ao selecionar problemas de livros didáticos, ter a sensibilidade de examinar se essas regras implícitas nos textos estão acessíveis a compreensão dos alunos de acordo com o que foi trabalhado em sala de aula.

O terceiro tipo de dificuldade apresentada pelos alunos foi evidenciado a partir de algumas palavras empregadas no texto das situações-problema que os alunos não compreendiam os seus significados. Mais uma vez observa-se que a atividade de conversão não está exclusivamente ligada ao aspecto semiótico das representações, pois há que se levar em consideração a polissemia da língua natural que quando utilizada na Matemática, pode gerar múltiplos significados.

Nesse sentido, ressalta Wittgenstein que o significado de uma palavra depende do seu uso na linguagem, assim como dos diferentes jogos de linguagem em que está inserida. Por exemplo, a palavra *triângulo*, terá diferentes significados que dependerão dos jogos de linguagem onde ela está sendo usada. Assim a palavra *triângulo*, quando é utilizada em geometria possui um significado diferente de quando é empregada para designar uma placa de transito ou um instrumento musical. Diante desse fato é essencial que o professor realize, com os alunos em sala de aula, trabalhos específicos de produção textual, de leitura e de interpretação de textos matemáticos a fim de minimizar os efeitos dessa dificuldade.

O quarto tipo de dificuldade foi detectado a partir dos problemas que os alunos apresentaram para atribuir significados aos signos utilizados na linguagem matemática. Ao pesquisar na literatura sobre essa dificuldade constatei que os autores citados que sustentam a base teórica desta pesquisa, defendem que a significação se dá por duas vias. Na primeira, amparada nas idéias de Granger, tem-se que a significação do signo matemático emerge, sobretudo, da experiência vivida. Na segunda, amparada pelo pensamento de Wittgenstein, tem-se que a significação independe de qualquer referência externa à linguagem. Isto é, a significação se dá quando operamos com esses signos dentro de determinados jogos de linguagem.

Granger, ao ressaltar a experiência vivida como suporte para significação, nos faz compreender que, para o aluno, é mais fácil realizar um cálculo com números do que com letras, porque os cálculos com números sugerem experiências vivenciadas em atividades corriqueiras do dia-a-dia. Isso não acontece com cálculos envolvendo letras, nesse caso, não é comum no cotidiano, um sujeito realizar cálculos envolvendo letras.

Nesse sentido, no processo de ensino e de aprendizagem da Matemática, o professor deve levar em consideração as experiências vividas pelo aluno, pois estas lhe auxiliam na compreensão dos resíduos do texto matemático escrito em língua natural, Tal como foi possível perceber nesta pesquisa através dos registros produzidos por alguns alunos ao resolverem situações-problema que remetiam a experiências por eles já vivenciadas no cotidiano.

Wittgenstein ressalta a importância do treino no aprendizado de uma linguagem. Acredito, assim como este autor, que o significado se dá no uso que fazemos das palavras em diferentes contextos. Assim, a sala de aula pode se transformar em um ambiente de treino onde as técnicas, as regras, os conceitos inerentes à linguagem matemática podem ser ensinados e incorporados pelos alunos à medida que forem usados em atividades corriqueiras da sala de aula.

Nesse processo, o tem professor um importante papel a desempenhar, pois

> é na interface das duas formas de linguagem (a corrente e a matemática) ou dessas diferentes orientações que se manifestam na aula de Matemática que o professor atua para enfrentar conflitos no uso das linguagens, da comunicação e da construção dos conceitos matemáticos. Além das ambigüidades nas formas de representação e comunicação, há que se levar em conta as particularidades que dependem da noção matemática envolvida (SANTOS, 2005, p. 123).

Nesse sentido, o professor deve auxiliar seus alunos, por meio de atividades realizadas em sala de aula que proporcionem a aquisição da leitura e interpretação do simbolismo e das palavras usadas nos textos matemáticos escritos em língua natural.

Conforme foi percebido por meio das análises dos pontos de dificuldades identificados nesta pesquisa, os problemas evidenciados na aprendizagem da Matemática não são os mesmos da aprendizagem da língua materna. Já que a linguagem matemática não se adquire de maneira natural, não é utilizada constantemente e necessita ser aprendida e praticada em diferentes contextos.

Para que ocorra a aprendizagem em Matemática, Duval (2005) ressalta que é primordial que os alunos não confundam o objeto matemático e seus distintos registros de representação semiótica. Nesse sentido, o autor destaca a importância da atividade de conversão como forma evitar tal confusão. No entanto, esta pesquisa mostrou que, além disso, é necessário, no caso da conversão da língua natural para a linguagem matemática que se leve em consideração as relações entre essas duas linguagens, uma vez que

> partindo do fato de que a Língua Materna é imprecisa, frequentemente de caráter polissêmico, é comum pretender-se que a Matemática represente para a Ciência o papel de uma linguagem precisa, monossemia, depurada de ambigüidades (MACHADO, 2001, p. 16).

Assim, fazer uso da língua natural para escrever enunciados de problemas matemáticos, empregar letras de nosso alfabeto para representar objetos matemáticos etc, são exemplos de relações que podem ser estabelecidas entre essas duas linguagens. Mas essa relação pode gerar obstáculos para que os alunos realizem corretamente a conversão da língua natural para a linguagem matemática, uma vez que a primeira é polissêmica. A segunda pretende ser unívoca e desprovida de ambigüidade para se constituir como Ciência, conforme explicitado por Machado na citação acima.

Essa problemática foi evidenciada nesta pesquisa, no momento em que em que foi constatado que a maioria dos alunos não conseguiu realizar corretamente a conversão da língua natural para a linguagem matemática diante de situações-problema que continham em seus enunciados palavras que, na perspectiva dos alunos, não tinham seus significados compreendidos ou que possuíam sentidos ambíguos.

Por outro lado, não foi somente a discussão teórica que contribuiu para que eu pudesse compreender os quatro pontos de dificuldades levantados nesta investigação. Nesse sentido, ressalto a importância do diálogo estabelecido com os alunos em que eles falavam de suas dificuldades e de como estavam compreendendo o conteúdo trabalhado em sala de aula.

Diante disso, acredito que a pesquisa realizada sala de aula ala de aula estreita a relação entre professor e aluno, uma vez que o foco da aula passa a ser não somente a transmissão de conteúdos e sim como esses conteúdos podem/devem ser ensinados/aprendidos da melhor maneira possível.

Durante o período em que se deu esta investigação era muito comum ouvir dos alunos questionamentos como “professor está correta a minha conversão?”. Essas indagações não somente me faziam sorrir como revelavam o envolvimento mútuo que esta forma de pesquisa pode proporcionar. Todo professor deveria ser pesquisador de suas classes. Assim, teria a oportunidade de aprender ensinando e o aluno o ensinaria aprendendo.

Por fim, a realização desta pesquisa atendeu minhas expectativas apontadas pelo tripé que se constituiu na motivação que impulsionou a realização deste trabalho de investigação, pois encontrei prazer e satisfação pessoal, aprimoramento profissional e, sobretudo, algumas respostas para os meus anseios acerca das dificuldades de ensino e de aprendizagem da Matemática no que concerne a conversão da língua natural para a linguagem matemática.

Ao chegar ao final deste percurso tenho consciência dos avanços conseguidos, dos conhecimentos adquiridos e dos passos que foram dados em direção ao longo caminho a ser percorrido neste vasto campo de investigação chamado Educação Matemática. Assim, sinto-me em uma promissora viagem que, ao invés de estar chegando ao fim, certamente está apenas começando.

REFERÊNCIAS

BARUK, Stella. **Insucesso e Matemáticas.**Trad. Manuel Alberto, Lisboa: Relógio D'agua ed. 1996.

BOGDAN, C. Roberto; BIKLEN, Sari Knopp. Trad. Maria João Alvarez, Sara Bahia dos Santos e Telmo Mourinho Baptista. **Investigação qualitativa em educação**: uma introdução à teoria e aos métodos. Ed. Porto. 1994. (Coleção Ciências da educação)

BRASIL, Ministério da Educação e do Desporto, Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática, v.3. Brasília: MEC/SEF, 1997.

BRASIL, Ministério da Educação e do Desporto, Secretaria de Educação Básica. **Matrizes de referência, tópicos e descritores, Prova Brasil**: avaliação do rendimento escolar. INEP. Brasília. 2007

CARRASCO, Lúcia Helena Marques. Leitura e escrita na matemática. In: NEVES, Iara Conceição Bitencourt (Org.). Ler e Escrever: compromisso de todas as áreas: 7. ed. Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2006.

CHAUÍ, Marilena. **Convite à filosofia**. 13ª ed. São Paulo: Ática, 2003.

COLOMBO, Janecler. A.A; FLORES, Cláudia. R; MORETTI, Méricles T. Reflexões em torno da representação semiótica na produção do conhecimento: compreendendo o papel da referência na aprendizagem matemática. **Educação matemática pesquisa,** São Paulo, v. 9, n. 2, pp. 181-203, 2007.

CORRÊA, Roseli de Alvarenga. Linguagem matemática, meios de comunicação e Educação Matemática. In: NACARATO Adair Mendes; LOPES, Celi Espassandin (Org.). **Escritas e leituras na educação matemática.** Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

D'AMBROSIO, Ubiratan. **Educação matemática:** da teoria à prática. 14ª ed. Campinas, SP : Papirus, 2007. – (Coleção Perspectiva em Educação Matemática)

DAMM, Regina Flamyng. Registros de Representação. In: MACHADO, Silvia Dias Alcantara et al. **Educação Matemática:** uma introdução. São Paulo: EDUC, 1999.

D'AMORE, Bruno. **Epistemologia e didática da matemática** – Trad. Maria Cristina Bonomi Barufi. São Paulo: Escrituras, 2005. - (Coleção. Ensaios transversais)

DANYLUK, Ocsana. **Alfabetização matemática:** as primeiras manifestações da escrita infantil. 2. ed. Porto Alegre: Sulina, Passo Fundo: EDIUPF, 2002.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática** (Ensino Médio). São Paulo: Ática, 2007.

DINIZ, Maria Ignez. Os problemas convencionais nos livros didáticos. In: SMOLE, Kátia C. S.; DINIZ, Maria Ignez (Orgs.). **Ler, escrever e resolver problemas**: habilidades básicas para aprender matemática. Porto Alegre: Artmed, 2001.

DUVAL, Raymond. Registros de representações semióticas e o funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, Silvia D.Alcantara. (org) **Aprendizagem em matemática:** registros de representações semióticas**.** 2. ed. São Paulo: Papirus, 2005 (Coleção. Papirus Educação).

DUVAL, Raymond. **Sémiosis et pensée humaine:** registres sémiotiques et apprentissageges intellectuels. Suisse: Peter Lang, 1995.

FONSECA, Maria F. Reis; CARDOSO, Cleusa de Abreu. Educação Matemática e letramento: textos para ensinar Matemática, Matemática para ler o texto. In: NACARATO Adair Mendes; LOPES, Celi Espassandin (Org.). **Escritas e leituras na educação matemática.** Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

FREGE, Gottlob. **Os fundamentos da aritmética**. São Paulo: Abril Cultural, 1983. (Os pensadores)

FREGE, Gotlob. **Lógica e filosofia da linguagem**. Tradução de Paulo Alcoforado. São Paulo, Cutrix, 1978.

GÓMEZ-GRANELL, Carmem. A aquisição da linguagem matemática: símbolo e significado. In: TEBEROSKY, Ana; TOLCHINSKY, Ana. **Além da alfabetização:** a aprendizagem fonológica, ortográfica, textual e matemática. São Paulo: Editora Ática, 2003, p. 257-282.

GOTTSCHALK, Cristiane. A natureza do Conhecimento Matemático sob a Perspectiva de Wittgenstein: algumas implicações educacionais. **Cadernos de História e Filosofia da Ciência**, Campinas, Série 3, v. 14, n. 2, p. 305-334, jul. - dezembro. 2004. Disponível em:

http://www.cle.unicamp.br/cadernos/pdf/Cristiane%20Gottschalk.pdf. Acesso em 15 set. 2008.

GRANGER, Gilles-Gaston. **A Ciência e as Ciências**, São Paulo: Editora Unesp, 1994.

GRANGER, Gilles-Gaston. **Filosofia do estilo**. Trad. Escarlett Zebertto Marton. São Paulo, Perspectiva, Ed. Da Universidade de São Paulo, 1974.

GRANGER, Gilles-Gaston. **Pensamento Formal e Ciências do Homem I**. Trad. Miguel Serras Pereira. Lisboa. Ed. Presença, 1975.

GUILLEN, M. **Pontes para o infinito:** o lado humano das matemáticas. Lisboa: Gradiva, 1987.

MACHADO, Nilson José. **Matemática e língua materna:** análise de uma impregnação mútua, 5. ed. São Paulo: Cortez, 2001.

MORETTI, Méricles Thadeu. **O papel dos registros de representação na aprendizagem de matemática**. Contrapontos: Revista de Educação da Univali, Itajaí, v.2, n.6, p.343-362, set./dez. 2002.

NÖTH, Winfried. **Panorama da Semiótica:** de Platão a Peirce. 4. ed. São Paulo: Annablume, 2005 (Coleção E – 3).

PEIRCE, Charles Sanders. **Semiótica**, Trad. de José Teicheira Coelho Neto, 3. ed. São Paulo: Perspectiva, 2003.

SANTAELLA, Lucia. **O que é semiótica**. 13. ed. São Paulo: Brasiliense, 1995. (Col. Primeiros Passos)

SANTAELLA, Lucia. **Teoria geral dos signos:** como as linguagens significam as coisas: São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2004.

SANTAELLA, Lucia; NÖTH, Winfried. **Imagem:** cognição, semiótica e mídia. São Paulo: Iluminuras, 2001.

SANTAELLA, Lúcia. **Matrizes da linguagem e pensamento:** sonora, visual e verbal. São Paulo: Iluninuras: FAPESP. 2005.

SANTOS, Vinício de Macedo. Linguagens e comunicação na aula de Matemática. In: NACARATO Adair Mendes; LOPES, Celi Espassandin (Org.). **Escritas e leituras na educação matemática.** Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

SAUSSURE, Ferdinand de . **Curso de lingüística geral**. Trad. Antonio Chelini, José Paulo Paes e Isidoro Blikstein, 7 ed. São Paulo, Cultrix, 1975.

SILVEIRA, Marisa Rosâni Abreu da. **Interpretação da matemática na escola, no dizer dos alunos:** ressonância no sentido de "dificuldade". 2000. 186 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2000.

SILVEIRA, Marisa Rosâni Abreu da. **Produção de sentidos e construção de conceitos na relação ensino/aprendizagem da matemática.** 2005, 176 f. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2005.

SILVEIRA. Marisa Rosâni. Abreu da. **Wittgenstein e a Matemática**. Anais do Terceiro Congresso Brasileiro de Etnomatemática, Niterói, 2008 (CD-ROM).

VERGANI, Tereza. **Matemática e Linguagem(s)**. Lisboa: Pandora Edições, Imagem e Comunicação, 2002.

WITTGENSTEIN, Ludwig. **Da certeza**. Trad. Maria Elisa Costa. Lisboa: Edições 70, 1969.

WITTGENSTEIN, Ludwig. **Fichas** (Zettel). Trad. Ana Berhan da Costa, Edições 70, Lisboa – Portugal. 1981.

WITTGENSTEIN, Ludwig. **Investigações Filosóficas**. Trad. José Carlos Bruni, 5 ed. São Paulo: Nova Cultural, 1991. (Coleção. Os pensadores; 10).

ANEXOS

ANEXO A – TESTE TIPO I

01- O proprietário de um cyber cobra R$ 1,50 a cada hora em que um cliente utilize um de seus computadores. Com base nessa informação, responda:

a) Qual o valor pago por um cliente que utiliza um computador desse cyber por 5 horas?

b) Qual o valor **y** a ser pago por um cliente que utiliza um computador desse cyber por **x** horas?

c) Quantas horas um cliente utilizou um computador desse cyber, se o valor que ele pagou foi de R$ 18,00?

02- Uma operadora de telefonia celular, em um de seus planos, cobra mensalmente de seus clientes uma taxa fixa no valor de R$ 90,00 e mais R$ 0,50 a cada minuto falado ao telefone, caso o cliente realize ligações do seu celular.

Com base nas informações contidas no texto, responda:

a) Qual o valor da conta de um cliente dessa operadora num mês em que ele realizou 45 minutos em ligações?

b) Qual o valor **y** da conta de um cliente dessa operadora que realizou **x** minutos em ligações?

ANEXO B – TESTE TIPO II

01- Uma cliente muito exigente sempre aborrecia o vendedor de uma loja de roupas com pedidos insistentes de descontos. Certa vez, ao vender uma roupa de R$ 250,00, o vendedor, já cansado, disse a ela:

-Leve a roupa de graça e me pague só os doze botões que ela tem, da seguinte forma: 1 real pelo primeiro botão, 2 reais pelo segundo botão, 4 reais pelo terceiro, 8 reais pelo quarto e assim por diante.

A cliente ficou entusiasmada e aceitou o negócio. Quem saiu ganhando? Justifique sua resposta.

02- Interpole *n* meios aritméticos entre 10 e 20 e *(n+1)* meios aritméticos entre 40 e 50. O quociente entre a razão da progressão formada no primeiro caso e a razão da segunda é igual a $\frac{8}{7}$. Quantos termos têm cada uma das progressões?

ANEXO C – TESTE TIPO III

01- Foi feita uma rifa com cartões numerados de 1 a 20. Quem tirar o cartão número 1 paga R$ 1,00, quem tirar o cartão número paga R$ 2,00, e assim por diante. Quanto renderá a rifa?

02- Numa estrada existem dois telefones públicos no acostamento: um no Km 3 e outro no Km 88. Entre eles serão colocados mais 16 telefones, mantendo-se entre dois telefones consecutivos sempre a mesma distância. Qual é essa distância?

ANEXO D – QUESTÕES DA 1ª AVALIAÇÃO/2008

01- Leia atentamente o texto:

Uma operadora de telefonia celular, num determinado plano, cobra de seus clientes uma taxa fixa referente à assinatura mensal no valor de valor R$ 35,00 e mais R$ 0,90 a cada minuto em que um cliente efetua ligações de seu celular.

Com base nas informações contidas no texto responda:

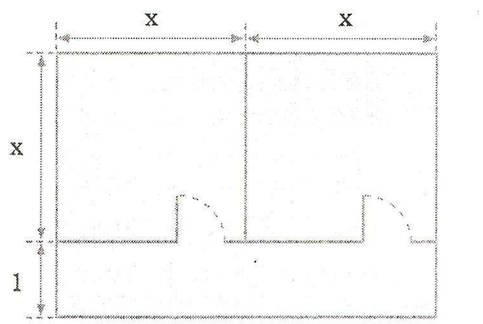
a) Qual o valor da conta de um cliente que, num determinado mês, realizou 100 minutos em ligações de seu celular?

b) Escreva uma sentença matemática que represente o valor da conta **y** que um cliente pagará se efetuar **x** minutos em ligações de seu celular?

c) Represente por meio de um gráfico a função descrita no texto.

02- A figura abaixo representa a planta baixa de um escritório que ocupa um andar de um prédio formado por duas salas quadradas e um corredor retangular. A área total **y** é dada em função de **x**, que representa a medida do lado de cada sala.

Com base nas informações contidas no texto, escreva uma sentença matemática que represente a área total **y** em função da medida **x.**



ANEXO E – QUESTÕES DA 2ª AVALIAÇÃO/2008

01- Foi feita uma rifa com cartões numerados de 1 a 20. Quem tirar o cartão número 1 paga R$ 1,00, quem tirar o cartão número 2 paga R$ 2,00, e assim por diante. Quanto renderá a rifa?

02- Uma cliente muito exigente sempre aborrecia o vendedor de uma loja de roupas com pedidos insistentes de descontos. Certa vez, ao vender uma roupa de R$ 250,00, o vendedor, já cansado, disse a ela:

– Leve a roupa de graça e me pague só os doze botões que ela tem, da seguinte forma: 1 real pelo primeiro botão, 2 reais pelo segundo botão, 4 reais pelo terceiro, 8 reais pelo quarto e assim por diante...

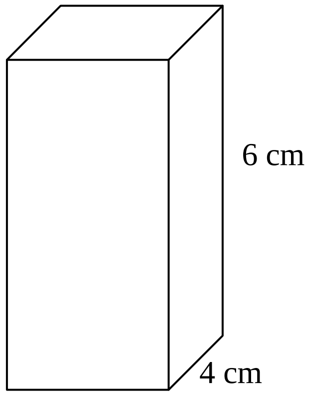
A cliente ficou entusiasmada e aceitou logo o negócio. Quem saiu ganhando? Justifique sua resposta.

03- Três candidatos, A, B e C, disputaram uma vaga oferecida por determinada empresa, submeteram-se a uma prova. As notas obtidas foram, respectivamente, 6, 5 e 7, em redação, e 7, 9 e 6, em computação. Escreva a matriz candidatos × notas.

04- Determine **x** e **y** de modo que se tenha $\begin{pmatrix} 2 & y \\ x & 4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}$

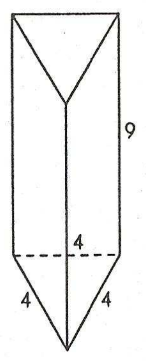
ANEXO F – QUESTÕES DA 3ª AVALIAÇÃO/2008

01-Um prisma quadrangular regular tem 6 cm de aresta lateral e 4 cm de aresta da base. Calcule a área total e o volume desse prisma.



02- Um prisma triangular regular apresenta 9cm de aresta lateral e 4cm de aresta da base. Determinar:

a) Área da base
b) Área lateral
c) Área total
d) Volume



03- Num prisma regular de base hexagonal, a área lateral mede $36m^2$ e a altura é 3m. Calcule a aresta da base.

04- Calcule o **volume** e a **diagona**l de um cubo cuja aresta mede 3cm.

ANEXO G: QUESTÕES DA 4ª AVALIAÇÃO/2008

01- Calcular a **altura** e o **volume** de um cilindro eqüilátero cujo raio da base mede 6 cm.

02- Calcular a **área total** de um cone reto cuja geratriz mede 5 cm e o raio da base mede 3cm

03- Calcule a **área da superfície esférica** e o **volume** de uma esfera cujo raio mede 3m.

04- Um indústria que produz sucos artificiais, utiliza dois tipos de embalagens plásticas para vender seus produtos, um tem formato de cilindro eqüilátero cujo raio da base mede 3 cm; o outro tem formato de cone cuja altura mede 12 cm e o raio da base mede 3 cm. Em qual das duas embalagens cabe a maior quantidade de suco? (Justifique sua resposta)