Universidade Federal do Pará
Núcleo Pedagógico de Apoio ao Desenvolvimento Científico
Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas

JARBAS LIMA COIMBRA

Alguns Aspectos Problemáticos Relacionados ao Ensino-Aprendizagem da Álgebra Linear

Belém-Pará
2008

JARBAS LIMA COIMBRA

Alguns Aspectos Problemáticos Relacionados ao Ensino–Aprendizagem da Álgebra Linear

Dissertação apresentada para obtenção do grau de Mestre em Educação em Ciências e Matemáticas, Núcleo Pedagógico de Apoio ao Desenvolvimento Científico – NPADC,
Universidade Federal do Pará.
Área de Concentração: Matemática.
Orientador: Prof.Dr. Renato Borges Guerra

Belém-Pará
2008

JARBAS LIMA COIMBRA

Alguns Aspectos Problemáticos Relacionados ao Ensino-Aprendizagem da Álgebra Linear

Dissertação apresentada para obtenção do grau de Mestre em Educação em Ciências e Matemáticas, Núcleo Pedagógico de Apoio ao Desenvolvimento Científico – NPADC,
Universidade Federal do Pará.
Área de Concentração: Matemática.
Orientador: Prof.Dr. Renato Borges Guerra

Data de Aprovação:

Banca Examinadora:

Prof.Dr. Renato Borges Guerra - Orientador

Prof.Dr. Juaci da Silva Picanço

Profa.Dra.Silvia Nogueira Chaves

O autor agradece a todos que contribuíram para a realização deste trabalho, em especial ao Prof. Dr. Renato Borges Guerra, pela paciência, pela persistência, pelo incentivo, pela confiança que sempre demonstrou durante o período de elaboração deste texto.

Não poderia deixar de citar todos os colegas de turma que com suas opiniões, exposta no decorrer do curso, evidenciou a importância da pluralidade de visões sobre cada assunto abordado, abrindo de modo definitivo uma visão mais abrangente das idéias discutidas.

Aos mestres que tiveram a paciência de nos guiar, apesar de nossas resistências, dedicamos um agradecimento especial pelas luzes que acenderam em nossas mentes e que procuraremos conservar e, se possível, alimentar para sempre.

Um agradecimento especial a minha família que me incentivou a participar do curso do NPADC e a concluir este trabalho com muito apoio em todos os momentos.

SUMÁRIO

1 Introdução 4

2 Obstáculos ao Conhecimento 10

3 História e o Ensino da Álgebra Linear..33

4 Considerações sobre o Ensino da Álgebra Linear................................46

5 Questionário e Análise das Respostas 57

6 Conclusões e Encaminhamentos 62

7 Referências Bibliográficas 72

RESUMO

Este trabalho aborda alguns aspectos que considero como possíveis dificuldades ao ensino-aprendizagem da disciplina Álgebra Linear. Trata-se de uma disciplina de grande importância para muitos cursos de graduação da universidade e considero que qualquer estudo que objetive melhorar este ensino é importante. Contém diversas considerações sobre dificuldades que os alunos podem enfrentar no estudo da disciplina, como aquelas relacionadas ao conhecimento que já trazem do curso médio que tanto podem ser usados como auxilio como também podem causar dificuldades de entendimento dos conceitos mais gerais da disciplina, dificuldades com o uso da geometria, dificuldades com termos conhecidos de outras disciplinas, dificuldades lógicas e outras dificuldades.

Palavras chave: Álgebra Linear, Ensino-aprendizagem, Obstáculos Epistemológicos e Didáticos, Geometria, História da Matemática.

ABSTRACT

This study deals with some aspects that I consider as possible difficults to the Linear Álgebra lessons understanding. It treats of a subject of huge importance for many graduation university courses and I consider that any study that intends to improve this teaching is essencial. It contains innumerous considerations about difficults that students can face during the subject learning, like those related to the knowledge brought from the high school, witch can either be used as a help as can cause understanding troubles of general lesson concepts, difficulties with use of geometry, difficulties with expressions known from other classes, logical difficulties, and others difficulties.

Key words: Linera Álgebra, Teaching-Learning, Obstacles Didatic and Epistemological, Geometry, History of Mathematics.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÂO EM
CIÊNCIAS E MATEMÁTICAS
NÚCLEO PEDAGÓGICO DE APOIO AO DESENVOLVIMENTO
CIENTÍFICO - NPADC

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Alguns Aspectos Problemáticos Relacionados ao Ensino-Aprendizagem da Álgebra Linear

Autor : Jarbas Lima Coimbra

Orientador : Prof. Dr. Renato Borges Guerra

Este exemplar corresponde a redação final da Dissertação defendida por Jarbas Lima Coimbra e aprovada pela Comissão Julgadora.

Data: 28/02/2008.

Comissão Julgadora:

Prof.Dr. Renato Borges Guerra - Orientador

Prof.Dr. Juaci da Silva Picanço

Profa.Dra.Silvia Nogueira Chaves

Belém-Pará-2008

C a p í t u l o 1

INTRODUÇÃO.

É muito comum o comentário sobre as dificuldades em aprender matemática. O fato de alguém ter facilidade no aprendizado e uso desta matéria significa para muitas pessoas inteligência superior, e esse fato é assim julgado desde a antiguidade onde a matemática era reservada nas escolas para aqueles que seguiam os estudos até níveis muito elevados, pois:

> No inicio do Livro VII da República, logo após a Alegoria da Caverna, Platão, procurando explicitar os preceitos para uma educação adequada ao filósofo, estabelece que antes de o candidato a filósofo seja introduzido nos cânones da Dialética é necessário que a ele seja ensinado o cultivo das matemáticas (Soares, 1999, p.50).

Em dissertação de mestrado, Silveira (2000, p.28), sob o título – "“Matemática é para poucos”: um sentido marcado na história" - cita:

> Problemas ligados ao inicio das estações podem ter criado a necessidade dos primeiros cálculos. Surgiram assim os especialistas na feitura de calendários e, inicialmente, esta profissão foi reservada aos sacerdotes. Foram eles os primeiros “matemáticos”, os primeiros calculistas. Os sacerdotes egípcios executavam laboriosas medições a fim de adquirirem um razoável conhecimento acerca das enchentes e vazantes do Rio Nilo. Em seus templos, bem dissimulados, existiam nilômetros, aparelhos que os ajudavam nesse mister.

> O povo não participava desse trabalho nem conhecia a existência desses instrumentos. Assim, quando os sacerdotes previam determinada enchente ou vazante, tal previsão era recebida pelo povo aureolada de profecia; por via de conseqüência, os sacerdotes recebiam não apenas reverências reservadas aos profetas e deuses como, possivelmente mais importante que isso, outras homenagens mais materiais como presentes, dinheiro, etc. Desta forma, desde o início, a produção e organização do conhecimento matemático estavam em mãos da classe dominante, já que os sacerdotes constituíam-se em aliados importantes do poder (Tenório, apud Silveira,2000, p. 28).

Segue o comentário:

> Neste primeiro recorte discursivo, aparece a presença do não-dito, o que não aparece no discurso dos sacerdotes, ou seja, o ocultamento de informações para a comunidade, que com isso obtinham mais prestígio, demonstrando assim, o caráter ideológico que a matemática começa a apresentar, confirmando o discurso que diz que a "matemática é para poucos".

Atualmente a sociedade, de um modo geral, vê a matemática em si como um obstáculo a suas atividades cotidianas como, por exemplo, uma simples declaração de imposto de renda que se torna um problema pelos cálculos "complicados" exigidos. Isso se estende aos diferentes campos de atividades e conhecimentos a ponto de que se uma área exige saberes mais específicos de matemática então esta é considerada mais difícil e por isso, não raro, alguns desistem de seguir adiante seus estudos.

O ser humano tem, no entanto, a matemática como parte da sua natureza, pois, mesmo os povos primitivos, na mais remota antiguidade, tinham sua matemática e algumas, para os padrões atuais da matemática, bem desenvolvidas e hoje quando se fala em etnomatemática significa exatamente que a matemática é uma ferramenta utilizada por todas as sociedades. Uma linguagem perfeitamente integrada às atividades do dia-a-dia encontrada em diferentes atividades humanas e às vezes de modo despercebido.

Mesmo considerando as dificuldades intrínsecas relacionadas à aquisição ou construção do conhecimento, parece que o problema maior em relação à matemática, esta nas escolas, nos professores, nos métodos e estratégias de ensino, que podem propiciar obstáculos a aprendizagem e consequentemente levando a opiniões negativas sobre a matemática.

Desde as séries mais elementares até o curso superior temos as mesmas queixas, os mesmos problemas, as mesmas dificuldades, que podem ter suas origens em diferentes causas como, por exemplo, de um ensino que prima por uma matemática destituída de significados, restrita a algoritmos e fórmulas, sem relações com a realidade e que leva a questionamentos do tipo: “Para que estou estudando isto?”. Tal questionamento quando oriundo de um aluno do ensino básico parece confirmar a causa citada, mas quando feito por aluno do ensino superior, como a de uma aluna de uma universidade pública do Pará, em abril 2006, na disciplina Álgebra Linear, sobre combinação linear, demonstra a existências de obstáculos à aprendizagem, decorrentes não só da filosofia matemática subjacente ao processo de ensino, mas de outras causas que precisam ser melhores compreendidas, pois demonstram as dificuldades de uma aluna de um curso superior, em ambiente de ensino que privilegia os processos mentais abstratos e pelo não compromisso de aplicabilidade ao mundo real do conhecimento ali gerado, de estabelecer relações entre o novo saber e os saberes já existentes em sua estrutura cognitiva. Parece haver algo no novo saber que não encontra ancoradouro na estrutura cognitiva do aluno universitário, e isso, no caso do estudo da Álgebra Linear, tem se mostrado de forma ostensiva.

A Álgebra Linear, grosso modo, se caracteriza como uma teoria algébrica unificadora para o estudo de diferentes áreas da matemática, dentre elas, a geometria, as equações diferenciais lineares, a análise funcional, além da análise matricial e por isso tem um caráter abstrato no já abstrato mundo da matemática. É isso que amiúde ouvimos pelos corredores de nossos alunos quando a “enfrentam” pela primeira vez: “Isso é muito abstrato!” Detentora de altos índices de reprovação há nível planetário, ou seja, não apenas no Brasil, o ensino desta matéria tem sido merecedor da atenção de muitos pesquisadores.

Em sua dissertação Celestino (2000, p.11) apresenta quadros gráficos com resultados de reprovações na UNICAMP, USP, UNESP, que apontam índices oscilando entre 25% e 50% em Álgebra Linear, citando também pesquisas realizadas em outros países mostrando que os alunos apresentam dificuldades na compreensão dos principais conceitos da Álgebra Linear e conseqüentes baixos em seus aproveitamentos tanto no estudo desta disciplina como naquelas da qual dependem de seu suporte teórico. Na mesma linha a pesquisadora francesa Gueudet-Chartier (2003, p. 1) aponta em artigo publicado na revista Linear Álgebra and its Applications, questões relacionadas ao mesmo problema na França, o que tem incentivado estudos sobre o assunto na área de educação e resultados similares em publicações cada vez mais freqüentes sobre o ensino-aprendizagem da Álgebra Linear.

No Estado do Pará, onde atuei por décadas no ensino desta matéria em duas Universidades Públicas, o cenário não é diferente dos apresentados pelos autores supracitados e por isso elegemos como nosso objeto de pesquisa o processo de ensino-aprendizagem da Álgebra Linear nos cursos de graduação. A escolha do processo ensino-aprendizagem em vez de somente da aprendizagem ou do ensino, se justifica por não estar claro, para nós, se as dificuldades estão restritas ao ensino desenvolvido pelos professores, no sentido dos tratamentos apresentados, ou a questões da aprendizagem, como as cognitivas, por exemplo, ou ainda mesmo por questões epistemológicas do desenvolvimento da Álgebra Linear que podem interferir em ambos, no ensino e na aprendizagem. Pela complexidade da temática procuramos estabelecer então como foco os obstáculos que podem estar presentes nesse processo.

Nessa Linha Gueudet-Chartier (2003, p.1) levanta a hipótese de “a geometria constituir um obstáculo ao aprendizado da Álgebra Linear”, mas não chega a ser conclusivo, ou seja, ora a geometria pode constituir um obstáculo, ora se torna um facilitador na apropriação de conceitos que envolvem ideais da ortogonalidade, por exemplo. Isso nos leva a supor a existência de obstáculos de ordem epistemológica que por sua vez pode levar para outros obstáculos ao aprendizado ou mesmo ao ensino da Álgebra Linear. Desse modo nos propomos investigar os obstáculos e por factibilidade de realização de nossa pesquisa, dado a amplitude e complexidade que o assunto remete, a restringimos a nossa pesquisa a questão “Quais obstáculos mais evidente na conceituação de espaço vetorial?” A resposta a esta questão é importante porque nos permitirá melhor compreender os desencontros entre ensino e aprendizagem neste tema, pois, mesmo com os professores com expressivo conhecimento do conteúdo matemático, os resultados negativos dos desempenhos de seus alunos podem mostrar que não estão atentos às peculiaridades relacionadas ao tema aqui proposto.

Pela objetividade de nossa questão de pesquisa que envolve os obstáculos a aprendizagem ou ao conhecimento e a óbvia e estreita relação com o desenvolvimento histórico-epistemológico do conhecimento buscamos autores como Bachellard, D´Amore e outros que de forma menos expressiva, mas de fundamental importância, nos subsidiam na compreensão dos obstáculos que podem estar presentes em sala de aula. Deste modo, é importante destacar que buscamos não uma abordagem isolada de obstáculos e de história da matemática, mas mostrar um pouco dessa relação entre ambas no processo de ensino da Álgebra Linear.

Por meio de questionário, isto é de uma pesquisa de campo, interrogamos uma amostra de 15 alunos, de duas turmas, na última semana de aula do semestre, ambas com professores de qualificação elevada, doutores em Matemática, em uma universidade pública de Belém do Pará. Os assuntos abordados nas perguntas exploram os aspectos relacionados ao tema espaço vetorial. As conclusões decorrentes das análises realizadas são subsidiadas pelo exposto nos próximos capítulos.

C a p í t u l o 2

OBSTÁCULOS AO CONHECIMENTO.

No construtivismo de Piaget encontramos uma teoria aceita por muitos para explicar como construímos, em nossas mentes, o conhecimento. Não nascemos com conhecimento, o conhecimento é construído durante toda a nossa vida. Com o auxilio dessa maravilhosa ferramenta que é o nosso cérebro, entramos em contacto com o universo e de modo interativo, através da experiência e da razão, vamos então através da assimilação e da acomodação, interagindo com o ambiente construindo e reconstruindo nosso conhecimento.

No caso da sala de aula o conhecimento não é adquirido diretamente da natureza, mas sim mediado pelo professor. O professor conhecendo bem o assunto, as dificuldades, as técnicas didáticas, os alunos, os pré-requisitos, os objetivos a serem alcançados, pode e deve proporcionar para seus alunos facilidades na aprendizagem.

Mesmo supondo que todos têm potencial para aprender matemática, não podemos esquecer as diferenças individuais e os obstáculos existentes ao conhecimento, seja na aquisição direta deste conhecimento seja por meio da mediação de um professor.

Considero importante que o professor tenha uma visão especial do assunto, que seja capaz de avaliar livros textos e que tenha ferramentas didáticas para utilizar no seu trabalho. O professor não deve ser conhecedor apenas da sua disciplina. Deve ter conhecimentos também de outras áreas que auxiliem o seu desempenho.

Na sala de aula o professor deve estar atento aos obstáculos de qualquer categoria: de natureza ontogenética, de natureza didática ou de natureza epistemológica, de modo a facilitar a aprendizagem. Evidentemente os obstáculos didáticos e ontogenéticos já merecem sua atenção pela sua própria formação profissional. Recomendo que, além disso, o professor também atente principalmente para os obstáculos epistemológicos, os quais também devem ser de seu conhecimento e que muito contribuirão para superar obstáculos didáticos.

Os conflitos cognitivos constituem um assunto relacionado ao que chamamos de obstáculos de um modo geral:

Trata-se do seguinte: um estudante pode já ter incorporado um conceito e ter dele uma imagem; essa imagem pode ter sido reforçada ao longo do tempo por provas, experiências repetidas. Mas pode acontecer, mais cedo ou mais tarde, que tal imagem se revele inadequada com relação a outra imagem do mesmo conceito, por exemplo, proposta pelo próprio professor ou por outros, contrastando com a imagem inicial.

> Dessa maneira, cria-se um conflito entre a imagem anterior, relativa àquele conceito, que o estudante acreditava ser definitiva, e a nova imagem; isso acontece quando a nova imagem amplia os limites de aplicação ou fornece uma versão mais ampla do conceito (D´Amore, 2005, p.81).

Além disso,

> Não é fácil formar os próprios conceitos. Isto porque, cada conceito, mesmo simples na aparência, está rodeado por um entorno flutuante e complexo de representações associadas que comportam diversos níveis de formulação e de integração do conceito (Giordan de Vecchi, apud D´Amore, 2005, p. 103).

D´Amore também afirma que:

> Além do mais, é preciso considerar os obstáculos que se sobrepõem à aprendizagem, propostos pela primeira vez por G. Brousseau desde seus trabalhos de 1968, outros de 1972 e 1976 (Brousseau, 1972ª, 1976), tornados célebres por seu trabalho específico de 1993 e pelo muito citado de 1986 [tal conceito, porém, já está presente em estudos filosóficos de Gaston Bachelard (1938), mesmo que restritos apenas às ciências naturais](DÁmore, 2005, p. 103).

D´Amore, certamente influenciado por Bachelard, trata do assunto de obstáculos voltados para a aprendizagem. Para melhor compreender esses obstáculos recorreremos ao próprio Bachelard posteriormente para que se tenha uma idéia geral das dificuldades existentes na aquisição de conhecimento de um modo geral e não apenas na sala de aula.

Distinguem-se três tipos de obstáculos segundo D´Amore (2005):

- de natureza ontogenética

- de natureza didática

- de natureza epistemológica

Cada sujeito que aprende desenvolve capacidades e conhecimentos adequados à sua idade mental (que pode ser diferente da idade cronológica), portanto, adequados a instrumentos e objetivos dessa idade: com relação a aquisição de determinados conceitos, essas capacidades e conhecimentos podem ser insuficientes para um projeto didático do professor e podem assim constituir obstáculos de natureza ontogenética (o aluno poderia ter limitações neurofisiológicas devidas até mesmo a sua idade cronológica). Por exemplo, está fadada à falência qualquer tentativa de introduzir demonstrações na segunda ou terceira série da Escola Média (alunos de 12-14 anos), no momento de apresentar o teorema de Pitágoras. Isso obriga os professores a substituir a “demonstração” por uma “prova”, às vezes concreta. Ainda, por exemplo, revela-se ineficaz tentar introduzir na Escola Elementar, o conectivo lógico “implicação”: se A então B, pelo mesmo motivo.

Cada docente escolhe um projeto, um currículo, um método, interpreta de maneira pessoal a transposição didática, de acordo com suas convicções científicas e didáticas: ele acredita nessa escolha e a propõe à classe porque considera eficaz; mas aquilo que é verdadeiramente eficaz para determinado estudante não é dito que o seja para os outros. Para esses outros, a escolha daquele projeto revela-se um obstáculo didático.

Cada assunto matemático possui um estatuto epistemológico próprio que depende da história de sua evolução no interior da Matemática, da sua aceitação crítica no âmbito da Matemática, das reservas que lhe são próprias, da linguagem no qual é expresso, ou que é necessária para poder exprimi-lo.

Quando na história da evolução de um conceito se percebe uma não continuidade, uma ruptura, mudanças radicais de concepções, então se supõe que tal conceito possua no seu interior obstáculos de caráter epistemológicos para ser aprendido. Isto se manifesta, por exemplo, em erros recorrentes e típicos de vários estudantes, em diferentes classes, que são estáveis no tempo. A história da Álgebra Linear mostra exatamente esse tipo de fenômeno. Acredito que por este motivo podemos classificar muitas das dificuldades do ensino-aprendizagem da Álgebra Linear como dificuldades epistemológicas.

Quando se busca o conhecimento diretamente na natureza estamos sujeitos a erros e obstáculos de varias categorias. Muitos pensadores já discutiram este assunto e é importante que o professor tenha conhecimento dele para que, usando sua didática, procure ajudar seus alunos na superação desses problemas em sala de aula, quando possível. As ações didáticas devem prevenir qualquer tipo de obstáculo. Se já conhecemos, ou suspeitamos que possa surgir um problema, porque não procurar evitá-lo? Os obstáculos didáticos já devem ter a atenção do mestre; o que quero ressaltar é a importância do conhecimento dos obstáculos epistemológicos por parte do professor, do mediador, para facilitar sua superação pelos alunos: “Os professores estudam, preparam suas aulas, participam do planejamento escolar, esforçam-se por antecipar ou prever as situações de aprendizagem” (Perrenoud, 2001, p. 12).

Ao professor não basta conhecer o assunto, o conteúdo. Como afirma Tardif (2002, p. 36): “Pode-se definir o saber docente como um saber plural, formado pelo amálgama, mais ou menos coerente, de saberes oriundos da formação profissional e de saberes disciplinares, curriculares e experiências.”

Além disso,

> Ensinar mobiliza um talento pessoal que não se deve tanto à formação, nem mesmo à experiência; ele se deve muito mais à personalidade ou à inteligência do professor: o que se pensa claramente é enunciado facilmente, e recorrendo ao bom senso, é possível comunicar de forma eficaz (Perrenoud, 2001, p.18).

Obstáculos Epistemológicos e Didáticos na sala de aula.

Como a aquisição de conhecimentos em sala de aula é uma atividade que tem a presença de um mediador, de um facilitador, os obstáculos podem ser previstos em muitos casos e então atenuados ou eliminados, facilitando a aprendizagem.

Citamos então o que na nossa visão deveria ser motivo da atenção dos professores da disciplina Álgebra Linear e de outras disciplinas.

O problema específico de validar nossos conhecimentos preocupa os pensadores desde a antiguidade. Podemos ter segurança a respeito daquilo que conhecemos?

Pensadores desde a mais remota antiguidade até o presente momento têm se preocupado com esses problemas. Cito alguns deles antes de me deter um pouco mais em Bachelard por ter entre suas idéias algumas que considero se aplicam diretamente ao ensino-aprendizagem de um modo geral e em particular no caso da Álgebra Linear.

Platão que com a “alegoria das cavernas” dá uma perfeita idéia dos obstáculos que os homens têm para conhecer a natureza.

Bacon que percebeu que devemos nos despir de “preconceitos” quando quisermos adquirir novos conhecimentos, para não termos influências de conhecimentos anteriores na nossa pesquisa atual. É uma tarefa impossível, mas devemos buscar o mínimo de interferência. Não podemos simplesmente apagar tudo aquilo que conhecemos, inclusive porque ficaríamos sem um referencial, sem nenhuma luz para nos orientar na busca de conhecimentos.

3.1. Platão.

426-348 AC.

A conhecida alegoria da caverna de Platão é o ponto de partida.

Segundo Platão os homens, na sua busca pelo conhecimento, comparam-se a alguém que estando no fundo de uma caverna com as costas voltadas para uma pequena abertura por onde entraria um pouco de luz e com os órgãos dos sentidos atentos veriam movimentos de sombras que a pouca luz existente projetaria nas paredes da caverna, e através desses estímulos procurasse deduzir a realidade existente no lado de fora. Esse conhecimento da realidade, do mundo exterior, certamente seria precário, seria resultado de um esforço intelectual muito laborioso, muito abstrato, associando sensações, raciocínios, deduções, imaginação, para formar um quadro, uma explicação da realidade.

3.2. Francis Bacon.

1561-1626

Até sua época os filósofos e sábios não procuraram os caminhos de uma ciência operativa em benefício do homem. Por essa razão propôs, como uma das tarefas preliminares de seu projeto examinar tecnicamente as causas desse erro. Em outros termos, para se atingir o conhecimento correto da natureza e descobrir os meios de torná-lo eficaz, seria necessário ao investigador libertar-se daquilo que Bacon chama "ídolos" e noções falsas.

> Os ídolos e noções falsas que ora ocupam o intelecto humano e nele se acham implantados, não somente o obstrui a ponto de ser difícil o acesso à verdade, como, mesmo depois de seu pórtico logrado e descerrado, ressurgirão como obstáculos à própria instauração das ciências, a não ser que os homens, já precavidos contra eles, se cuidem o mais que possam (Andrade, 1984, p.13).

A palavra "ídolos" é empregada por Bacon a partir da noção vulgar de imagem de um falso deus, da idéia de idolatria, e revela o gosto do autor por metáforas religiosas.

Para Bacon os ídolos são de quatro tipos: "da tribo", "da caverna", "do foro" e "do teatro".

Os "ídolos da tribo" são assim chamados porque inerentes à própria natureza humana "ou à própria tribo ou raça dos homens". Para os homens, por exemplo, é natural tomar o conhecimento dado pelos sentidos como verdadeiro. Eles não levam em conta que as percepções obtidas mediante os sentidos são parciais, pois dependentes da conformação própria do homem enquanto espécie. Seriam muitos os "ídolos da tribo" e eles levariam a uma apreensão do universo de maneira mais simples do que ele é na verdade e, sobretudo, engendrariam toda espécie de superstições. Segundo Bacon, a tendência da natureza humana no sentido de reduzir o complexo ao mais simples implica uma visão que se restringe àquilo que é favorável. Tratar-se-ia de uma espécie de inércia do espírito, cujas generalizações levariam em conta apenas àquilo que é conveniente. Exemplo clássico dessas generalizações seria encontrado na astrologia, na qual as crenças supersticiosas ignoram as predições que falharam, para ficar apenas com aquelas que resultaram conforme o esperado. A mesma tendência à simplificação existiria na antiga noção astronômica segundo a qual todos os corpos celestes descrevem órbitas circulares. Bacon também coloca como exemplo de “ídolos da tribo” toda a falsa ciência da cabala que imaginava realidades inexistentes, para fazê-las corresponder a necessidades numéricas. A alquimia, muito comum nos fins da Idade Média e no tempo de Bacon, igualmente se inclui entre os resultados dos “ídolos da tribo”: os alquimistas imaginam a atividade da natureza como análoga à atividade humana, encontrando assim, antipatias e simpatias nos fenômenos.

O segundo tipo de “ídolos”, os da caverna (termo que alude à célebre alegoria da República de Platão), são erros provenientes da conformação de cada individuo, distinguindo-se, deste modo, dos “ídolos da tribo”, que se referem à espécie humana. Cada pessoa – diz Bacon - possui “sua própria caverna particular, que interpreta e distorce a luz da natureza”. A tendência dos indivíduos seria ver todas as coisas sob determinada luz muito particular, à qual estão acostumados. “Assim, alguns espíritos têm condições para assinalar as diferenças, outros, as semelhanças, e ambos tendem ao erro, embora de maneiras opostas; por outro lado, o dedicar-se a uma ciência ou a uma especulação particular pode conformar de tal modo o pensamento do homem, que este tudo interpreta à luz daquela.”

Os “ídolos do foro” (ou do mercado, ou da feira) são erros implicados na ambigüidade das palavras e na comunicação entre os homens. De acordo com Bacon, uma mesma palavra pode ser usada em sentidos diferentes pelos interlocutores de um dialogo; isso pode levar a uma aparente concordância entre as pessoas, quando na verdade ocorre o contrário. Por outro lado, os homens usam palavras, que não são mais do que abstrações, como se fossem nomes de entidades reais. “O homem crê que a razão governa as palavras, mas é certo também que as palavras afetam o intelecto, e é isso que torna a filosofia e as ciências sofisticas e ociosas.”

Finalmente, os “ídolos do teatro” têm suas causas nos sistemas filosóficos e em regras falseadas de demonstração. A expressão é justificada por Bacon pelo fato de esses sistemas constituírem puras invenções, como as peças de teatro que se sucedem na cena e não proporcionam um retrato fiel do universo, tal como ele realmente é.

3.3. Gaston Bachelard.

1884-1962

Temos Gaston Bachelard como um pensador associado ao estudo de obstáculos epistemológicos que devemos considerar quando da aquisição de conhecimentos. Temos uma quantidade considerável de motivos para observar se não estamos diante de dificuldades, de obstáculos que nos impeçam na sua totalidade ou parcialmente de chegar a conclusões corretas acerca daquilo que queremos conhecer. Com argumentos mais atuais, e com exemplos, ele nos mostra como podemos interferir na observação da natureza, na absorção de novos conhecimentos, em nossas conclusões, em nossas avaliações, por obstáculos existentes sejam em nossas próprias mentes, sejam externos. Longe daquela idéia da caverna, mostra que na nossa realidade temos muitas oportunidades de errar e de corrigir os erros quando então estaremos com o conhecimento menos equivocado. Não se garante que os obstáculos sejam sempre superados, pois muitas vezes não nos damos conta da sua existência.

Sempre, de alguma maneira teremos a interferência do observador na natureza: seu conhecimento anterior, seu objetivo, suas expectativas, a linguagem, os paradigmas de sua época, enfim tudo que existe em sua mente participa da aquisição do novo conhecimento. Toda luz gera sombras. Existe uma espécie de limite através de uma herança cultural, que é referência para limitar os novos conhecimentos. Os instrumentos que usamos a linguagem, os paradigmas, toda nossa herança cultural limitam nossa maneira de ver, limitam o nosso olhar, limitam nossa observação, limitam nossa capacidade de conhecer.

Observamos, mas com muitas olheiras, com muitos filtros, além daqueles que fisicamente já possuímos através de nossos órgãos dos sentidos.

Os obstáculos relacionados por Bachelard em sua obra “A Formação do Espírito Cientifico” surgiram de analises que o autor realizou em trabalhos científicos do passado e mostrou as conseqüências da falta de atenção a eles quando se busca o conhecimento. Os equívocos, as deduções baseadas em falso conhecimento, enfim o descaminho das idéias quando esses obstáculos não são afastados, ou quando não estamos totalmente alertados para eles. Nem todo obstáculo é evitável porque o próprio processo de conhecer trás implícito o erro, o obstáculo.

Temos como obstáculos tratados pelo autor alguns que aparecem com mais freqüência e outros mais específicos, mas convém ressaltar que o autor não esgota o assunto e sempre o mais importante é ter em mente a possibilidade de obstáculos de um modo geral e não somente aqueles por ele relacionados.

Trabalhou com questões epistemológicas na Física, na Matemática e na Química, a importância da obra deste filósofo da Ciência para professores e pesquisadores em ensino de ciências é inquestionável. A partir de 1940 até a sua morte exerceu marcante atividade docente na Sorbonne, onde formou gerações de pensadores. Em 1961 recebeu o Prix National des Lettres. O caráter de sua obra permanece impar até os dias atuais. Nota-se em D´Amore a influência de Bachelard.

Bachelard inicia sua obra abordando a noção de obstáculos epistemológicos, os quais são caracterizados como “conflitos do ato de conhecer” que causam estagnação e regressão no espírito científico, ou seja, no pensamento científico. Toda “luz” tem potencial para provocar “sombras”. Daí entendermos “luz” como sendo o conhecimento prévio e “sombras” os obstáculos à aquisição do conhecimento causados pela “luz”. Quando limitamos os exemplos da Álgebra Linear à geometria deixamos muitas sombras que outras luzes podem ajudar a eliminar. Se utilizarmos também exemplos de outras áreas da matemática que estão na gênese da disciplina teremos várias luzes reduzindo as áreas de sombra.

O conhecimento do real nunca é “o que se pode achar” e sim o que se deixou de pensar. “O ato de conhecer dá-se contra um conhecimento anterior, desestruturando e reconstruindo o saber” essa fala nos remete a idéia de superação a qual descarta a idéia de partir do zero, peculiar nas culturas de superposição dos séculos XVII e XVIII. O conhecimento anterior do aluno tem de ser considerado para que ele consiga através do processo de assimilação e acomodação evoluir.

Veremos mais tarde que na Álgebra Linear, os conhecimentos que temos de vetores como flechas e que vem desde o ensino do curso médio, poderá tornar-se um obstáculo da experiência primeira, do conhecimento anterior que precisa ser reformado. Do mesmo modo o emprego de termos como perpendicular, distâncias ou comprimentos, projeções e outros emprestados da geometria podem dificultar a aplicação dos mesmos em elementos de outros espaços vetoriais, como generalidades.

Para Bachelard é impossível neutralizar de uma só vez, os conhecimentos habituais. Diante do real aquilo que cremos saber ofusca o que deveríamos saber; é por isso que para ele o “espírito” apresenta-se a cultura científica cheio de velhos preconceitos. O pensamento científico só irá ascender quando rejuvenescer, ou seja, quando contradisser o passado “opiniões, quase sempre erradas, não servem de base”.

A opinião pensa mal, não pensa: traduz necessidades em conhecimentos. Designa objetos pela utilidade impedindo-as de serem conhecidas.

A experiência primeira ou o conhecimento anterior como obstáculos.

Dentro da nossa pesquisa, este obstáculo é o mais importante porque o estudante já chega ao curso de Álgebra Linear com conhecimento prévio de vetores, suas operações e já tem experiência concreta de suas aplicações em outras disciplinas como Física, por exemplo. No caso da Álgebra Linear temos de atentar para o conhecimento que o aluno já trás e procurar evitar conflitos com os novos conceitos que serão apresentados. O modelo antigo deve ser superado e generalizado.

Entende-se que o conhecimento é produzido como resposta aos questionamentos. Nada é gratuito ou evidente tudo precisa ser construído. Temos que construir nosso conhecimento com muito sacrifício, baseados em nossa capacidade de conhecer herdada de nossos antepassados.

A pergunta pode desgastar, o esforço pode cansar, mas a resposta concreta continuará! “A partir daí, a atividade espiritual se inverte e se bloqueia” como resultado de um conhecimento que não admite questionamento. Bachelard concorda com um epistemólogo que diz: “os grandes homens são úteis apenas até a primeira metade de suas vidas...”.

Certamente esta afirmação é um exagero significando que as idéias mais importantes da humanidade, regra geral, surgem de pessoas mais jovens ou ainda daqueles que estão se iniciando em algum assunto, independente da idade, por não estarem ainda com a cabeça dentro de um esquema de pensamento antigo. Temos como conta-exemplo o próprio Bachelard que até após uma idade mais avançada continuou produzindo idéias importantes.

Um outro aspecto desta mesma noção de obstáculo foi evidenciado no princípio da idéia dominante de Bérgson “Nosso espírito tem a tendência... de considerar como mais clara a idéia que costuma utilizar com mais freqüência”. Tenhamos a idéia de Bachelard de que o instinto, a dificuldade de reorganizar o saber, e a generalização são obstáculos a serem superados. O instinto faz resistência ao conhecimento, à cabeça bem feita (fechada), é produto da escola e está precisando ser refeita; e a ciência tenta considerar fenômenos de aspectos diversos como idênticos.

Na sua prática pedagógica, o professor de ciência não se dá conta dos obstáculos epistemológicos, ou seja, de que seus alunos trazem conhecimentos empíricos ou mesmo da própria escola que foram sendo construídos pelas suas experiências cotidianas e nas salas de aula e que, portanto são “obstáculos que precisam ser superados”.

Como Bachelard propõe a superação desses obstáculos? Formando um espírito científico que seja contrário a natureza, o cientista deverá, para isso procurar dentro de si e fora de si o que foi produzido por impulso da natureza e assim oferecer-lhe resistência.

Por que sentimos dificuldade de entender esses obstáculos hoje? Os livros de hoje apresentam uma ciência “socializada”, não é mais a ciência da rua e do campo. Basta comparar um livro do período pré-científico, com um atual. No século XVIII não havia significativo desnível cultural entre autor e leitor, assim as obas eram produzidas para o conhecimento popular, agora são raros. Hoje em dia a ciência é apresentada como que ligada a uma teoria geral, não dá lugar ao senso comum, em outras palavras, não permite ao leitor trocar opinião com o autor.

O espírito pré-científico sempre acha que o natural tem maior valor que o artificial, daí surgir a ciência da eletricidade, pois sendo ela um princípio natural servirá, por exemplo, para distinguir os diamantes falsos dos verdadeiros. Infelizmente o folclore sobre a ciência incipiente tomava conta das “melhores cabeças”, as quais pensavam esta descobrindo o caráter misterioso da natureza.

No período pré-científico a imagem provoca a aceitação de hipóteses não verificadas e esta é validada por explicações fantasiosas e afoitas.

Nas salas de aula as imagens primeiras podem causar desastre semelhante, um nome esquisito pode chamar a atenção, mas não garante que se veja o essencial. Das aulas de ciências nos lembramos com facilidade do que deu errado ou causou estrago (explosão). Por conta disso Bachelard acredita ser possível traçar o perfil psicológico dos alunos de séries elementares e suas tendências futuras "... as experiências muito marcantes cheias de imagens são falsos centros de interesses", mas ele admite que "muitas vocações de químicos começaram por acidente".

Por essa razão, teoria e pratica devem ser "irmãs gêmeas" como também a bancada do laboratório e o quadro negro, onde o professor extrai o abstrato do concreto. "A experiência é feita para ilustrar um teorema".

Para ser racionalizada, a experiência precisa ser inserida em um "jogo de razões múltiplas", uma única razão encontrada não é suficiente, pois a teoria da razão tem contra si as convicções primeiras, a doce crença na recíproca, as necessidades de certezas imediatas e de se partir do certo. Contradizer os antigos é provocar angústias.

Obstáculo verbal.

Bachelard caracteriza como obstáculo verbal "um caso em que uma única imagem ou até uma única palavra, constitui toda a explicação", ou ainda, quando se faz uso de um substantivo que possui vários adjetivos.

> Uma idéia muito comum é a de considerar o ar como se fosse algodão, lã, esponja e muito mais esponjoso do que todos os outros corpos... com os quais pode ser comparado". "... em vez de supor que a água pode penetrar o ar, molhá-lo, e já se terá tudo o que é necessário para explicar os fenômenos.... (Réaumur apud Bachelard, 1996, p.92)

Quando os pensadores do período pré-científico fizeram uso da imagem generalizada de esponja, em seus experimentos, acreditavam não existir a necessidade de explicá-la.

> Se eu envolver a esponja com qualquer material com que a água não penetre e se eu mantiver a esponja na água, por meio de algum fio preso no fundo do vaso, a esponja ficará tão compressível quanto era no meio do ar. Se, com um pistão,... eu fizer pressão sobre a água, a água descerá, e a esponja será forçada a ocupar muito menos volume, suas partes serão obrigadas a alojar-se nos vazios que costumam manter entre si, e a água vai preencher o lugar que as paredes da esponja tiverem abandonado... Réaumur. (ele continua o experimento sem mais isolar a esponja da água e a considerar uma situação onde a esponja seja o ar que terá assim a capacidade de dissolver a água graças a sua propriedade esponjosa) (Idem)

Bachelard com a intenção de mostrar que o acúmulo de imagens prejudica a razão, e que o lado concreto do experimento é apresentado sem prudência, a ponto de impedir a visão abstrata. Os sentidos do adjetivo esponjoso (a) do substantivo esponja são: leve, poroso e absorvente; conferindo à esponja a capacidade de verter, ressudar, ressumar, transudar, eliminar, extinguir, apagar, expungir, surripiar, surrupiar e subtrair. Assim sendo “ao associar a uma palavra concreta uma abstrata, pensa ter feito avançar as idéias”, segundo Bachelard a abstração é obtida afastando-se das imagens primitivas.

O obstáculo verbal na Álgebra Linear ocorre pelo uso de palavras emprestadas da Geometria e da própria Álgebra Vetorial anteriormente estudada pelos alunos e que já trazem significados limitados que o professor deve procurar chamar a atenção para novos significados. A palavra vetor já trás a imagem de um segmento de reta orientado que poderá servir de modelo para o raciocínio do aluno e limitar sua compreensão.

O conhecimento unitário e pragmático como obstáculo ao conhecimento científico.

Para um espírito verdadeiramente científico todo conhecimento é uma resposta a uma pergunta. Todo ele é o resultado de um exaustivo trabalho de interrogação da realidade. Como tal, o objeto da História das Ciências tem por característica fundamental o fato de que ele não nos é dado, mas, deve ser por nós construídos, num processo de solução de continuidade. Contudo, já temos entendido que existem muitos obstáculos epistemológicos para a construção do espírito científico.

Bachelard afirma que outro obstáculo à formação do pensamento científico, é o conhecimento unitário e pragmático. Para o espírito pré-científico, a unidade é um princípio sempre desejado, sempre realizado sem esforço, não é permitido que a Ciência se contradiga, ou seja, compartimentada. O que é verdadeiro para o grande deve ser verdadeiro para o pequeno e vice-versa. À mínima dualidade, desconfia-se e erra-se. Essa necessidade de unidade traz uma multidão de falsos problemas. Por exemplo, De Marivets e Goussier preocupam-se com a dualidade absoluta mecânica que poderia ser atribuída ao fundamento da origem ou formação do mundo, do universo conhecido. Como atribuem a Deus o primeiro movimento do Universo, os autores vêem-se diante de uma objeção: a impulsão primeira viria juntar-se, como uma espécie de criação dinâmica, sobre a criação material, e, desse modo, haveria uma criação em dois tempos, as coisas primeiro, o movimento depois? Tal dualidade, aos seus olhos, é uma enormidade. Respondem então que:

> Não supuseram que esse Operário tenha sido obrigado a fabricar física e mecanicamente esse mecanismo, isto é, o Sol, por um choque produzido seja no centro da massa, seja em qualquer outro ponto dessa massa, seja no centro e, ao mesmo tempo, em qualquer outro ponto dessa massa. O que eles escreveram foi: Deus disse a esses corpos para girarem em torno de seus centros. Ora, nisso não há nada de inconcebível, deduzem dessa ordem, cuja execução torna-se a lei única da natureza, todos os fenômenos dos movimentos celestes. (Bachelard, 1996, p.108)

A unidade é, assim, realizada muito depressa, a dualidade suprimida num instante! O que era inconcebível mecanicamente, por uma ação física, torna-se concebível quando ligado a uma ação divina. Quem não percebe que a concebivibilidade mudou de campo? Um espírito moderno não aceita esse mito da unidade concebível. Em especial, formula o problema teológico em um plano diferente do problema cosmológico.

Um dos obstáculos epistemológicos em relação com a unidade e o poder atribuídos à Natureza é o coeficiente de realidade, que o espírito pré-científico atribui a tudo que é natural. Há nisso uma valorização indiscutida, sempre invocada na vida cotidiana e que, afinal, é causa de perturbação para a experiência e para o pensamento científico. A própria utilidade fornece uma espécie de indução muito especial que poderia ser chamada de indução utilitária. Ela leva as generalizações exageradas. Pode-se então partir de um fato verificado, pode-se até encontrar-lhe uma extensão feliz. Mas o impulso utilitário levará quase que infalivelmente, longe demais. Todo pragmatismo, pelo simples fato de ser um pensamento mutilado, acaba exagerando.

O homem não sabe limitar o útil. O útil por sua valorização, se capitaliza sem medida. Bachelard cita um exemplo em que a indução utilitária age de modo infeliz. Para Réaumur, as crisálidas de lagartas “transpiram”. É essa comunicação com o exterior que matam a vida latente da crisálida e a faz evoluir. Basta recobrir uma crisálida com verniz para que seu desenvolvimento fique mais lento ou pare. Réaumur acha que os ovos, graças a uma ousada indução, são “espécies de crisálidas”. Propõe ele, portanto, que se passe sebo ou verniz nos ovos que se deseja guardar. Tal pensamento vai ainda mais além, pois o historiador ainda conclui: “Que talvez os homens pudessem conservar-se por mais tempo, untando-se com uma espécie de verniz adequada, como faziam outrora os Atletas, como fazem ainda hoje os selvagens, embora com outros objetivos” (Bachelard, 1996, p.114).

Como se pode perceber, em todos os fenômenos procura-se a utilidade humana, não só pela vantagem que se pode oferecer, mas como princípio de explicação. Encontrar uma utilidade é encontrar uma razão. Ou seja, o verdadeiro deve ser acompanhado do útil, caso contrário este é mutilado. E quando se descobre a utilidade, encontra-se a função real do verdadeiro. Esse modo utilitário é, porém uma aberração.

Este obstáculo vem de encontro à idéia de alguns professores que para simplificar o ensino da Álgebra Linear afirmam que basta o aluno ter um bom conhecimento do assunto no espaço $\Re^n$ porque qualquer espaço de dimensão n é isomorfo a ele. Unifica-se então o estudo totalmente no $\Re^n$ e perdem-se as particularidades dos espaços em geral; do ponto de vista lógico de quem já conhece a disciplina esta idéias é interessante, mas no ensino deve-se chegar a essa idéia como uma conclusão e não usá-la como ponto de partida simplificador.

Ao final do capitulo sobre Libido e Conhecimento Objetivo afirma:

> Como se percebe, é o homem inteiro, com sua pesada carga de ancestralidade e de inconsciência, com toda a sua juventude confusa e contingente, que teria de ser levado em conta se quiséssemos medir os obstáculos que se opõem ao conhecimento objetivo, ao conhecimento tranqüilo. Infelizmente os educadores não colaboram para essa tranqüilidade! Não conduzem os alunos para o conhecimento objetivo. Emitem mais juízos do que ensinam! Nada fazem para

> curar a ansiedade que se apodera de qualquer mente diante da necessidade de corrigir sua maneira de pensar e da necessidade de sair de si para encontrar a verdade objetiva (Bachelard, 1996, p.258).

Talvez, pelo fato de se especializar cada vez mais, o cientista sinta-se cada vez menos atraído pelas alegrias totalitárias. Bachelard afirma que o filósofo é um especialista de generalidades enquanto um cientista busca sínteses a partir de especialidades, não podendo aceitar como pensamento objetivo, um pensamento não objetivado por ele. As questões referentes à objetividade científica são problemas psicológicos e não filosóficos.

Bachelard afirma que a curiosidade indeterminada não constitui o verdadeiro espírito científico, este espírito não pode ser influenciado pelo realismo inicial, para que se possa ter a certeza de que o estímulo primeiro deixa de ser a base da objetivação é necessário o controle social, onde o indivíduo poderá ampliar seus horizontes no comportamento do outro. As construções de conhecimento devem ser socializadas.

O autor demonstra que nas “ciências” o erro é necessário, pois pode fomentar o desenvolver da operação objetiva “mais vale confessar nossas tolices para que nosso irmão reconheça as suas...”.

A influência da psicanálise é latente neste capítulo. O leitor é convidado a acabar com o orgulho das certezas gerais e com o cupidez das certezas particulares. Recorre a outros autores para reforçar suas afirmativas, valoriza o erro como via para o conhecimento objetivo, e chega propor a formação de “sociedades científicas complexas” que alem do esforço lógico, realizariam um esforço psicológico a fim de tornar mais apurada a busca do saber.

A educação é abordada, em particular no ensino de ciências, Bachelard afirma que a educação científica, desenvolveu as qualidades da objetividade mais do que em períodos menos escolarizados: “... à proporção que uma ciência se torna social, isto é, fácil de ensinar, ela conquista bases objetivas.”

As observações de Bachelard são pertinentes e revelam que alguns problemas de sua "época" são comuns na atualidade, seu livro refere que:

> ... na escola, o ambiente jovem é mais formador que o velho; os colegas, mais importantes que os professores. Os professores, sobretudo na multiplicidade incoerente do ensino secundário, apresentam conhecimentos efêmeros e desordenados, marcados pelo signo nefasto da autoridade (Bachelard, 1996, p.299).

Critica o papel dos docentes de sua época, que dogmatizam a ciência privando os alunos. O papel da atividade de ensinar recebe atenção do autor, que crê em uma ciência de pensar, não proporcionando inclusive a experiência psicológica do erro humano.

> Não basta ao homem ter razão, ele precisa ter razão contra alguém. Sem o exercício social de sua convicção racional, a razão profunda mais parece um rancor; essa convicção que não se confronta com um ensino difícil age na alma como um amor desprezado (Bachelard, 1996, p. 300).

A psicologia recebe tratamento especial, sendo considerada de suma importância para a atividade educacional. Bachelard estimula o desenvolvimento da criticidade e aponta o erro da comodidade, que não deve existir no ensino de ciências. Em momentos em que a ciência exige mutações psicológicas das mais decisivas, os interesses e os instintos manifestam uma estranha estabilidade, este estado de resistência às mudanças não são pertinentes atualmente, pois "a ciência contemporânea é cada vez mais uma reflexão sobre a reflexão".

Para Bachelard, o século XX, inicia com um movimento da ciência, onde, o pensamento moderno exige que se resista à primeira reflexão, quanto outrora era o primeiro reflexo que resistia a reflexão. É preciso pensar contra o cérebro.

Recomenda-se que para a formação do espírito cientifico, as linhas de inferência que levam as idéias devam ser traçadas a partir de suas origens afetivas; o dinamismo psicológico que as percorre, deve segundo Bachelard ser “vigiado”, todos os valores sensíveis têm de ser depreciados. “O antigo deve ser pensado em função do novo”. Esta frase mostra bem o sentido da Álgebra Linear como idéia unificadora cujos conceitos generalizam conceitos de várias áreas antigas.

As relações entre escola e ciência encerram este capítulo, Gaston Bachelard afirma que as ciências devem ser integradas na cultura geral, afirma que a cultura presa ao momento escolar é a negação da cultura científica, e que a ciência deve fundar uma escola permanente, “a Sociedade será feita para a Escola e não a Escola para a Sociedade”. E continua: “Na obra da ciência só se pode amar o que se destrói, pode-se continuar o passado negando-o, pode-se venerar o mestre contradizendo-o. Aí, sim, a Escola prossegue ao longo da vida”.

A citação de Platão, Bacon e Bachelard têm como objetivo mostrar de modo o mais amplo possível os problemas dos obstáculos ao conhecimento. Quando temos dificuldades ou não entendemos um determinado conteúdo, certamente alguém que tenha uma visão dessa temática poderá nos auxiliar. Os alunos das licenciaturas certamente terão grandes benefícios em suas atividades futuras como professores se adquirirem durante sua passagem pela universidade conhecimentos relacionados ao assunto

Cito especificamente no caso da Álgebra Linear uma maneira de contornar obstáculos. Devemos definir nosso domínio de atuação, e, quando às vezes fazemos interação de domínios, devemos chamar a atenção para este fato como um meta-recurso que está sendo utilizado para facilitar a compreensão de um assunto em um determinado domínio através da utilização de um assunto mais fácil, já conhecido, de outro domínio. Como veremos adiante a Álgebra Linear dá oportunidade de trabalharmos freqüentemente com os domínios algébrico, geométrico e axiomático. A passagem de um para outro pode ser um instrumento didático de grande valor para a compreensão do assunto, seja através de exemplos, seja através de seu uso como meta-recurso.

C a p í t u l o 3

HISTÓRIA E O ENSINO DA ÁLGEBRA LINEAR.

Como seres humanos, temos nossa própria natureza, nosso próprio desenvolvimento biológico, e como conseqüência, aptidões várias adquiridas ou desenvolvidas para manusear conceitos matemáticos não podendo, portanto, parecerem estranhos e difíceis de entender, como se tivessem outra origem que não nosso próprio cérebro, o cérebro do ser humano. Problemas existem, principalmente nas salas de aula, nas construções desses conceitos pelas novas gerações que devem (re) construir essa herança de conhecimentos de modo a (re) significar para eles aquilo que historicamente significou para gerações passadas.

Existem dificuldades várias nessa reconstrução por parte de cada estudante e o professor atento, conhecedor profundo do conteúdo, dos obstáculos que se apresentam à construção por parte de cada estudante, conhecedor da história do desenvolvimento daquele assunto, com todos os significados originais e adquiridos ao longo da história, deve propiciar para que os alunos tenham, através de um processo de significações e re-significações, como chegar a ter aquela herança de seus antepassados. Por este motivo procuramos destacar a importância do conhecimento da história por parte do professor.

Em outros termos essa mediação da herança cultural feita pelos professores, que carregam em seus ombros uma enorme responsabilidade diante das novas gerações exige deste professor cuidados que muitas vezes não são observados, ficando o estudante com visões parciais, ou até mesmo equivocadas sobre assuntos importantes que mais tarde poderão gerar novas dificuldades.

Recorro a Henri Poincarré (apud Bruter, 1998, p 52): “Ao tornar-se rigorosa a ciência matemática assume um caráter artificial que impressionará toda gente;

ela esquece as suas origens históricas; vemos como as questões se podem resolver, mas já não vemos como e porque elas aparecem.”

E explica:

> ”Ora, para compreender uma teoria não basta constatar que o caminho que seguimos não está cortado por um obstáculo, é preciso percebermos as razões que o fizeram escolher.”. “Poderemos alguma vez dizer que compreendemos uma teoria se lhe quisermos dar logo a sua forma definitiva, a que a lógica impecável lhe impõe, sem que reste qualquer traço do tatear que a ela conduziu?” (idem).

> “A procura do rigor não é um exercício de invenção, mas de acabamento. É certo que esta procura permite aperfeiçoar as noções de base, mas não foi graças a ela que estas noções profundas foram descobertas.” (Idem).

Mas, como diz Poincaré: “a satisfação do mestre não é o único objeto do ensino”.

> “Os principiantes não estão preparados para o verdadeiro rigor matemático; só veriam ai sutilezas vãs e fastidiosas; seria uma perda de tempo pretender demasiado torná-los mais exigentes; eles precisam de percorrer rapidamente, mas sem queimar etapas, o caminho que percorreram lentamente os fundadores da ciência”. (Idem).

Poincaré baseia-se no fato do homem ser, sobretudo, um ser biológico e no fato do desenvolvimento mental do ser estar ligado ao de uma fisiologia que tem suas leis. Desconhecê-las conduz ao fracasso.

> “Os zoólogos afirmam que o desenvolvimento embrionário de um animal resume num tempo muito curto toda a história de seus antepassados das épocas geológicas. Aparentemente o mesmo se passa com o desenvolvimento dos espíritos. A tarefa do educador é a de fazer repassar o espírito da criança por onde passou o de seus pais, percorrendo rapidamente certas etapas, mas sem suprimir nenhuma. Seguindo este raciocínio, a história deve ser o nosso guia”. (Idem).

O quanto temos a aprender com a história? O que a Álgebra Linear tem a ver com a historia? Por que neste trabalho sobre ensino da Álgebra Linear e seus problemas estou preocupado com a historia e em particular com a historia da Álgebra Linear. Este capítulo tem por objetivo responder a estas questões. O olhar através da história trás informações importantes para o ensino; o professor não pode desprezar a história, e no caso da Álgebra Linear a importância do conhecimento por parte do professor é fundamental segundo meu ponto de vista.

Durante a pesquisa verifiquei a importância do conhecimento da história da Álgebra Linear para o perfeito entendimento de seus conceitos e o entendimento da disciplina como idéia unificadora. O entendimento da Álgebra Linear como idéia unificadora é muito importante porque não deixa o aluno assimilar a disciplina como uma extensão do calculo vetorial ou da geometria. Talvez para outras disciplinas esse conhecimento da história não seja tão importante, mas para Álgebra Linear é fundamental.

O texto a seguir mostra que o conceito de vetor tem milhares de anos e já era utilizado na antiguidade, tendo sofrido durantes esse período evolução até nossos dias.

> Os mecânicos, sob a inspiração de Arquimedes (287-212 a.C.), começaram a representar estas forças por vetores, imagens naturais das cordas esticadas por um cavalo quando puxa um fardo: a sua direção é a direção na qual se exerce o esforço, o seu comprimento é o da intensidade da força (Bruter, 1998, p. 92)

3.1. A História e o Ensino da Matemática.

Quando se fala em uso da historia para motivar o ensino da matemática a primeira coisa que se pensa é mesclar os conteúdos comumente ensinados com notas históricas associadas ao assunto, como por exemplo , qual o matemático que primeiro desenvolveu aquelas idéias , em que época , com qual objetivo e depois mostrar sua evolução até nossa época e , se possível , seu uso atual. Isso mostraria ao aluno, além da ilustração, da cultura geral, da localização no tempo e no espaço uma visão geral da evolução da humanidade nessa área de conhecimento.

Temos vários exemplos de livros didáticos cujos autores utilizam-se da história.

A coleção de Fundamentos de Matemática Elementar, volume 7 que trata de Geometria Analítica, traz um interessante exemplo (Iezzi, 1977, p.142).

Antes do capitulo VII, Cônicas, na pagina 142 mostra o seguinte texto sobre Blaise Pascal:

> Matemático foge para a religião.
>
> Blaise Pascal (1623-1662)
>
> Blaise Pascal, francês, tinha como o pai, Etienne Pascal, inclinação para a Matemática.
>
> Pascal, aos 12 anos participava com seu pai de reuniões informais na Academia de Mersenne em Paris, onde conheceu as idéias de Desargues. Baseado nelas, aos dezesseis anos publicou “Ensaio para as Cônicas” com apenas uma página, mas a de maior importância para a História. Nela estava o Teorema de Pascal sobre hexágonos inscritos numa cônica, a partir do que deduziria muitos corolários como, por exemplo, o que dá a construção da tangente a uma cônica por um ponto dela.
>
> Aos dezoito anos, Pascal dedicou-se à construção de uma máquina de calcular e no ano seguinte vendeu aproximadamente cinqüenta delas.

Em 1648 interessou-se por hidrostática do que resultaram experiências sobre o peso do ar e pressão de fluidos.

Em 1654 voltou à Matemática com o trabalho “Obra Completa sobre Cônicas”, que não chegou a ser publicada, mas onde, segundo Leibniz, utilizava-se de métodos sintéticos, pois Pascal não dava a merecida atenção e importância ao uso da álgebra simbólica e suas notações, estando neste aspecto bem atrasado em relação ao seu tempo.

Em uma carta enviada a Fermat, Pascal dá o ponto de partida real para a moderna teoria das probabilidades, ligando este assunto ao triângulo aritmético de Cardan, que, desde então, é conhecido como “triângulo de Pascal”, descobrindo algumas novas propriedades.

Em 1654, com habilidade excepcional no esclarecimento de conceitos, torna-se responsável, com Fermat e outros, pelo desenvolvimento dos métodos intuitivos ou “indução matemática”.

A 23 de novembro de 1654 Pascal abandona a Matemática e a Ciência, dedicando-se inteiramente à Teologia sobre a qual escreveu a obra “Cartas Provinciais” e “Pensamentos”.

Mas, numa noite de 1658, impedido de dormir por uma dor de dentes ou mal-estar e, para distrair-se, começou a estudar as ciclóides, achando volumes, áreas e centros de gravidade. A dor passou milagrosamente e Pascal tomou isso como sinal de aprovação de Deus ao seu estudo da Matemática. Esta foi a última notícia que se tem da obra deste matemático extremamente religioso. (Iezzi, 1997, p 142).

Evidentemente este texto é somente uma ilustração que o autor usa e que poderá ou não motivar quem está estudando geometria. Não tem nenhuma função específica dentro da aprendizagem do assunto Cônica.

Para a educação matemática é importante questionarmos como a história pode contribuir para melhorar o ensino. A história da matemática normalmente serve de motivação, desperta o interesse, pode servir de exemplo didático se observarmos na história como era ensinada, serve para mostrar sua ligação com o os problemas de uma determinada época, enfim pode ser utilizada sob diversos olhares e todos interessantes.

Um dos usos mais interessantes da história é servir como uma fonte para confecção de atividades mostrando a utilidade de seu conteúdo, redescobrindo os problemas originais que levaram a evolução daquele conteúdo, usando material concreto.

Depois podemos fazer uma tradução de contextos, daquele que originou o assunto para o contexto atual do estudante, relacionando as mudanças de contexto, e a utilidade atual para despertar o interesse. Essa concepção de história e seu uso no ensino, sempre numa perspectiva de resgate das situações problematizadoras conduzem os estudantes à redescoberta da matemática através das informações históricas que revestem essas situações.

Mendes (2001), em seu livro “O Uso da História no Ensino da Matemática” cita como exemplo o caso da trigonometria:

> “a trigonometria teve sucessivas re-interpretações de modo a ser utilizada de acordo com as necessidades e interesses de cada época, desde o ponto de vista instrumental da agrimensura, em que o seno representava a razão entre o lado oposto de um ângulo agudo e a hipotenusa de um triângulo retângulo, passando pela astronomia grega que utilizava a determinação de comprimentos de cordas de círculos em função dos arcos correspondentes, com isso ampliando a noção de seno, até a elaboração do trabalho de hindus e árabes para a metade da corda, chegando por fim ao trabalho de utilização da

> trigonometria no campo dos complexos, além da incorporação dessas noções ao desenvolvimento de alguns tópicos da Física (Mendes, 2001, p. 34).

Se na trigonometria temos todas essas informações não quer dizer que também teremos de todos os assuntos ou que possamos usar os problemas originais para motivar os estudantes. O livro do Professor Elon Lima, “Logaritmos”, mostra o exemplo do logaritmo em que a motivação atual é totalmente diferente daquela da época da criação.

Nosso enfoque neste momento é outro, totalmente diferente dos exemplos citados acima. Pretendemos mostrar como o passar da historia é importante, fundamental para o desenvolvimento do conhecimento matemático, que é guardado e repassado de geração em geração pelos livros, pelas escolas, pelos professores. Não é a citação dos fatos históricos nas aulas ou nos textos, mas o conhecimento por parte do professor que é importante.

Trata-se de um fenômeno natural, cultural, que nos permite ir acumulando e diversificando nossos conhecimentos, nossa cultura e levando para frente, tudo aquilo que nossos antepassados criaram, e desenvolvendo novos conhecimentos que por sua vez serão repassados para as futuras gerações.

Cada um de nos é, respeitando as individualidades, um produto único de nossos antepassados, queiramos ou não, respeitando nossas características como seres humanos com arquiteturas mentais semelhantes. Temos heranças culturais em todas as áreas de conhecimento que nos são repassados pela escola, pelo meio ambiente, de modo mais ou menos imperceptível, sendo que na escola é perceptível e proposital. Cada um de nos carrega uma herança que é única para cada individuo, pois as combinações de fatores que nos influenciam são únicas para cada individuo.

Deste modo cada um de nos constrói seu próprio eu de uma maneira particular assimilando fragmentos maiores ou menores de nosso ambiente como num quebra cabeça de infinitas peças que cada um monta, compondo sua individualidade.

As características do ambiente em que vivemos que nos torna diferentes, utilizam de modo maior ou menor nossas funções básicas, comuns a todos os humanos, geradas pela evolução de nossa mente. Algumas ferramentas ficam mais esquecidas (o meio exige menos), outras são mais usadas (o meio exige mais) e assim os seres humanos se mostram diferentes na aparência. Quando e se solicitadas, as ferramentas estão lá em nossas mentes.

Segundo a psicologia evolutiva nossa estrutura biológica exerce uma influência fundamental em nossa mente; crê que a mente está constituída por uma série de processos cognitivos especializados, cada um dedicado a um tipo concreto de comportamento. Temos uma “natureza humana” e o conhecimento matemático não é estranho a essa natureza.

Miguel (2002) em seu “Breve Ensaio Acerca da Participação da História na Apropriação do Saber Matemático” mostra através de seus trabalhos um interesse especial pelo papel da história na matemática.

Marx (apud Miguel, 2002, p.104) diz:

> Os homens fazem sua própria história, mas não como querem; não a fazem sob circunstâncias de sua escolha e sim sob aquelas com que se defrontam diretamente, legadas e transmitidas pelo passado. A tradição de todas as gerações mortas oprime como um pesadelo o cérebro dos vivos. E justamente quando aparecem empenhados em revolucionar-se a si e as coisas, em criar algo que jamais existiu, precisamente nesses períodos de crise revolucionária, os homens conjuram ansiosamente em seu auxilio os espíritos do passado, tomando-lhes emprestado os nomes, os gritos de guerra e as roupagens, a fim de apresentar-se nessa linguagem emprestada [...] De maneira idêntica, o principiante que aprende um novo idioma traduz sempre as palavras deste idioma para sua língua natal, mas, só quando puder manejá-la sem apelar para o passado e esquecer sua própria língua no emprego da nova, terá assimilado o espírito desta última e poderá produzir livremente nela (Miguel, 2002, p.104)

Admitir como verdade que os alunos se apropriam de conhecimentos matemáticos na interação com o professor, com os demais alunos e com os textos e atividades escolares, num processo ininterrupto de negociação de significados e de re-significação, processo esse cujo limite é dado pelas significações sócio-historicamente construídas no passado, isto é por nossos antepassados, então esse processo, queiramos ou não, já traz subjacente a si mesmo, uma interação com o passado, com a história, ainda que nem professores e nem alunos tenham consciência disso e ainda que, caso a tenham, não estejam dispostos, pelas mais diferentes razões, a tornarem explicita essas relações.

Por exemplo, quando professores e alunos esforçam-se em atribuir significado a uma expressão algébrica do tipo 3X+5 , o processo de negociação que se estabelece sempre tenderá a eliminar algumas dessas significações e a realçar outras tendendo, no limite, a firmar e a confirmar aquelas significações sócio-historicamente estabelecidas.

Como poderíamos interpretar e desenvolver, isto é, explorar livremente a analogia estabelecida por Marx?

Antes de tudo, o que ela parece dizer é que aprender é comparar, isto é, que não se pode aprender o que quer que seja sem se tomar algo como “unidade de medida”. Se o que desejamos aprender é uma língua estrangeira., a “unidade de medida” passa a ser nossa própria língua.

Mas a expressão “língua estrangeira” deve ser aqui compreendida como uma variável que toma valores arbitrários no conjunto universo do conhecimento humano, nele incluída a própria matemática. Além disso, ainda que essa analogia lingüística, ao eleger a operação mental “comparação” como o elemento mediador inicial necessário para a apropriação do saber acabe sugerindo que esta se ache inalienavelmente condicionada por um imperativo psicológico, as expressões “língua estrangeira” e “nossa própria língua” devem ser no contexto dessa analogia, interpretadas como instituições histórico-sociais, isto é, como instrumentos sócio-historicamente constituídos num tempo que é sempre cronologicamente anterior ao tempo no qual se processa cada ato de aprendizagem individual desses instrumentos. Portanto cada uma dessas “línguas”, isto é, a “nossa” e a do “outro” constituem, em si mesmas, experiências de outros, constituída no tempo de outros, num passado que permeia o nosso presente e qualquer presente. É esse o aspecto comum entre a “nossa língua” e a “língua do outro”.

Do mesmo modo que o principiante que aprende um novo idioma traduz sempre as palavras deste idioma para sua língua natal, pensamos que não haveria como redirecionar o ensino-aprendizagem a matemática de modo a torná-lo realmente significativo, reflexivo e problematizador, sem inicialmente traduzi-lo para a língua que serviu da base para sua constituição, e segundo a qual ele foi pensado, produzido e negociado. Essa “língua”, é claro, é a sua história e essa história é a nossa herança.

Traduzir significa aqui, ler, no presente e segundo as diferentes perspectivas intenções e circunstâncias de cada presente o passado à luz de nosso próprio passado, isto é, tentar fazer do passado o outro não o espelho do nosso próprio passado, mas a condição de possibilidade de uma leitura pessoal.

O caráter de obrigatoriedade desta tradução advém do fato de não haver como, psicologicamente, desobrigar-se ou renunciar a esta herança. Isto porque a mente humana é uma estrutura ou entidade social. Isto significa que a mente de um sujeito é sempre, e a todo momento, a mente de muitos sujeitos, uma mente na qual encontram-se e sedimentam-se de forma desorganizada e dissonante, aspectos (concepções, saberes,valores,atitudes,...) da experiência social coletiva de diferentes grupos culturais humanos, apropriados e re-significados de forma original e única por cada sujeito em função não apenas de um conjunto de fatores casuais e subjetivos , mas também, e sobretudo, de um conjunto de fatores contextuais e imperativos.

Esse ponto de vista não vê a história da matemática como um sótão repositório de objetos, técnicas, métodos, problemas, obstáculos, mecanismos de passagem ou do que quer que seja, a ser total ou parcialmente, transposto de forma mecânica para o plano do ensino-aprendizagem, mas como uma experiência humana acumulada que constitui e condiciona, em todo e qualquer presente, a apropriação subjetiva do conhecimento matemático. Pensamos ser de fundamental importância que se ressalte o papel do professor como representante da herança histórico-social do conhecimento matemático.

3.2. A História da Álgebra Linear.

A Álgebra Linear é um exemplo de idéia unificadora que surgiu da unificação de conceitos aplicados a várias disciplinas que já existiam anteriormente como mostra a história do seu desenvolvimento. Este fato é muito importante porque para seu entendimento é necessário que o professor e posteriormente o aluno percebam a extensão de seus conceitos.

A Álgebra Linear teve várias origens. Algumas delas têm ligação com a geometria e outras não têm uma ligação especial com a geometria, como o estudo dos sistemas de equações lineares. A origem “mais” geométrica da álgebra linear parece ser o trabalho de Leibniz. Ele criticou os métodos analíticos de Descartes e Fermat e tentou elaborar um cálculo geométrico que permitiria calcular diretamente dos objetos geométricos. Leibniz não alcançou seu objetivo, mas abriu uma nova linha de pesquisa. Mais de um século mais tarde, Grassmann desenvolveu uma teoria em seu livro: Die lineali Ausdehnungslehre, que foi sua própria pesquisa de um cálculo geométrico. Sua teoria é muito geral e abstrata, e fornece muito mais do que cálculo geométrico. Mas a despeito de sua generalidade, a origem geométrica está muito presente. Alguns resultados são introduzidos de dentro da geometria e então são generalizados. No final de cada capítulo aplicações geométricas são apresentadas.

De fato, geometria é onipresente e é muito difícil para o leitor do livro formar uma idéia concreta da teoria fora das aplicações geométricas. O próprio Grassmann falhou quando tentou usar um vocabulário diferente para o caso geral. Depois de explicar a importância de usar palavras diferentes para a teoria geral e para suas aplicações geométricas, ele usa no contexto geral um vocabulário que deveria ser restrito ao caso geométrico.

Para um leitor de Ausdehnungslehre é como estar dentro de um contexto geométrico ao invés de uma teria geral avançada. Isto aconteceu com um famoso leitor do Ausdehnungslehre: Giuseppe Peano. O livro Ausdehnungslehre de Grassmann foi mal compreendido, se não ignorado, na sua época. Peano, um defensor de Grassmann, tentou apresentar a teoria de Grassmann em um livro intitulado “Calcolo geométrico” (1888). Mas novamente restringiu, ele mesmo, às suas aplicações geométricas.

Grassmann elaborou uma teoria muito geral que inclui grande parte da moderna Álgebra Linear. Mas, a importância da geometria em seu livro, e a falta de outros exemplos concretos, prejudicou o desenvolvimento da teoria geral.

Os trabalhos que determinaram o desenvolvimento da Álgebra Linear moderna pertencem a Análise Funcional. Por volta de 1880 até 1930, vários matemáticos como Maurice Fréchet, Frédéric Riesz, Erhard Schmidt, Norbert Wiener, Hans Hahn e Stefan Banach, estudaram espaços vetoriais de dimensão infinita. Suas pesquisas levaram ao conceito de espaços vetoriais de funções, e eventualmente a moderna apresentação axiomática de espaço vetorial. Todos esses autores introduziram teorias gerais que também se aplicam à geometria. A geometria tem um destaque especial, por causa do vocabulário geométrico tais como ortogonalidade, distância, etc., que é usado na teoria geral. Leitores dos trabalhos de Riesz ou Schmidt provavelmente serão ajudados pelas analogias geométricas.

Além de mostrar como se deu o desenvolvimento da Álgebra Linear, sua história mostra o quanto foi difícil sua compreensão pelos próprios matemáticos da época que custaram a perceber seu objeto próprio, como idéia unificadora, independente da geometria, com idéias gerais aplicáveis a várias áreas da matemática. Este fato é muito importante e é fonte, ainda hoje, de dificuldades de ordem epistemológica.

C a p í t u l o 4

CONSIDERAÇÕES SOBRE O ENSINO DA ÁLGEBRA LINEAR.

Este capítulo está baseado em trabalho da Dra. Ghislaine Gueudet-Chartier, do Laboratório de Didática da Matemática, da Universidade de Rennes, França, em dissertações recentes que pesquisei como as do professor Luis Carlos Barbosa de Oliveira da PUC/SP que tem por titulo “Como funcionam os recursos meta em aula de Álgebra Linear”, de 2005 e já citada anteriormente “Ensino-Aprendizagem da Álgebra Linear: as pesquisas brasileiras na década de 90”, do professor Marcos Roberto Celestino, também da PUC/SP, 2000 e em minha experiência como professor universitário, além da análise de questionário apresentado a alunos de uma universidade pública do Pará com questões relacionadas a disciplina Álgebra Linear..

Motivado inicialmente pelo artigo, “Should we teach linear álgebra through geometry”, (Gueudet-Chartier, 2003), fui levado à questão: Quais os problemas mais freqüentes encontrados no ensino-aprendizagem da Álgebra Linear e relacionados ao entendimento dos conceitos mais importantes de espaço vetorial? Além desta questão outras naturalmente surgem como conseqüência das dificuldades do ensino de um modo geral.

Gueudet-Chartier, aborda o problema do uso da Geometria no ensino da Álgebra Linear. Sem ser conclusivo o artigo deixa claro que devemos ter cuidados com o uso da Geometria, que tanto pode auxiliar o ensino como pode também ser um obstáculo ao entendimento de alguns conceitos da Álgebra Linear.

A importância da Álgebra Linear e das pesquisas sobre seu ensino-aprendizagem repousa no fato de que ela hoje se encontra subjacente a quase todos os domínios da Matemática e consequentemente, é imprescindível que aqueles que pretendem trabalhar com as ciências que utilizam a Matemática, tanto como objeto de seu estudo quanto como instrumento para outros estudos, dominem seus principais conceitos.

Além das dificuldades já citadas no ensino aprendizagem da Álgebra Linear, Oliveira (2005) ressalta o fato de que:

> “não foi encontrada nenhuma situação-problema que o aluno possa se defrontar em um primeiro curso de Álgebra Linear que dê origem ao desenvolvimento de noções elementares. As situações-problemas existentes ou são complexas e exigem do aluno um conhecimento ainda não adquirido ou são tão elementares que ele pode resolvê-las sem o emprego dos conhecimentos de Álgebra Linear (Oliveira, 2005,18)”.

4.1. Modos de descrever a Álgebra Linear.

Os modos de descrever a Álgebra Linear são múltiplos.

Joel Hillel (2000, p.191) identifica “três modos de descrição da Álgebra Linear: o modo abstrato, o modo algébrico, e o modo geométrico”.

O modo abstrato usa a linguagem de uma teoria formal: espaço de vetores, subespaços, homomorfismos, núcleo e imagem, etc.; o modo algébrico usa a linguagem das n-uplas e matrizes; o modo geométrico usa a linguagem dos espaços de dimensão dois e três: pontos, retas, planos, direção, etc. A descrição de Hillel das dificuldades dos estudantes com o modo geométrico questiona seriamente o uso da abordagem geométrica no ensino da Álgebra Linear.

> As dificuldades associadas com as representações de “ponto e seta” de um vetor são muito notáveis. Um vetor (aqui a palavra vetor significa qualquer elemento de um espaço vetorial) pode ser olhado como um ponto ou como uma seta. Hillel observa que muitos professores usam ambas as

> representações indiscriminadamente. Vetores são ao mesmo tempo representados como pontos, por exemplo, quando se ilustra a distância de um vetor a um subespaço; mas as setas são preferidas quando ilustramos operações tais como adição de vetores. (Gueudet-Chartier, 2003, p.2)

Freqüentemente, existem diagramas que usam ambas as representações ao mesmo tempo.

Hillel descreve as subseqüentes interpretações mistas dessas representações pelos estudantes em detalhes.

> Por exemplo, quando os estudantes são solicitados a desenhar o conjunto de vetores $D = \{ (x,y) \in \Re^2 , x+y = 1 \}$, eles desenham os eixos em $\Re^2$ e a reta correspondente a $x+y = 1$. Mas quando questionados sobre um elemento de D, a maioria deles desenha uma seta sobre a reta, ao invés de uma seta unindo a origem a um ponto da mesma (Idem).

Tais dificuldades limitam os benefícios dos desenhos e mesmo de imagens mentais no ensino da álgebra linear. Imagens mais apropriadas podem ser usadas pelos professores, por exemplo, usando somente vetores fixos na origem. Mas isso raramente é feito.

Muitos estudantes pensam os conceitos matemáticos em termos de seus exemplos protótipos ao invés de definições. Por exemplo, alguns estudantes, dado um par de vetores da base e questionados a construir uma transformação linear com os vetores dados, procuram uma transformação geométrica bem conhecida (dilatação, rotação, etc.) ou por alguma combinação dessas transformações. Os estudantes estão usando um modelo geométrico daquelas bem conhecidas transformações no plano – que são comumente lembradas de seus estudos anteriores - para encontrar a transformação linear correspondente.

4.2. O princípio da concretização na álgebra linear.

O princípio da concretização foi estabelecido por Guershon Harel.

> Para os estudantes abstraírem uma estrutura matemática de um dado modelo dessa estrutura, os elementos deste modelo devem ser entidades conceptuais aos olhos dos estudantes; quer dizer, o estudante tem procedimentos mentais que podem tomar esses objetos como referências (Harel, 2000, p.177).

Para os estudantes é possível aprender álgebra linear fazendo abstrações da geometria? Podem os objetos geométricos servir como entidades conceituais?

Harel (2000) tem feito experiências com cursos de Álgebra Linear seguindo o princípio da concretização e usando uma apresentação geométrica de espaços vetoriais. Esta abordagem tem tido efeitos positivos no desempenho dos estudantes em Álgebra Linear, dando a eles alguma habilidade para provar resultados gerais da Álgebra Linear. Os estudantes pertencentes a um grupo que seguiu a experiência ganharam um melhor controle sobre a correção de suas respostas do que um outro grupo que aprendeu Álgebra Linear sem a interferência da geometria.

Mas foram observadas dificuldades que estão associadas com o uso do modelo geométrico: alguns estudantes não conseguiram aprender a teoria geral porque ficaram limitados no mundo dos vetores geométricos. Harel concluiu que a geometria deve ser usada cuidadosamente e não tão cedo, por exemplo, somente após uma apresentação detalhada do $\Re^n$ tenha sido dada.

O ponto mais importante é que os estudantes não necessitarão fixar-se ao modelo geométrico porque muitos outros importantes conceitos tais como funções e seqüências gozam de um papel fundamental importante.

De fato, nossa análise histórica leva-nos a estabelecer que o modelo geométrico sozinho pareça insuficiente para justificar a necessidade de uma teoria geral. Especialmente quando a teoria geral emergiu da unificação de vários conceitos matemáticos.

A transferência da última afirmação para um contexto de ensino necessita de um pouco mais de estudo. A Álgebra Linear é noção “unificadora” e dessa maneira não pode ser apresentada como o desenvolvimento natural de um conhecimento prévio e nem como um meio de resolver novos problemas.

Uma outra importante afirmação pode ser concluída da análise histórica. As ligações entre Álgebra Linear e geometria não parecem ter a mesma importância em todas as partes da Álgebra Linear O vocabulário geométrico que é usado por Schmidt, Riesz e outros ocorre principalmente com termos como ortogonalidade, norma, produto escalar, etc. Então a ligação histórica entre Álgebra Linear e geometria consiste primariamente em espaços com produtos internos.

4.3. O potencial e os limites do modelo geométrico: ortogonalidade e produto escalar.

A ligação mais forte entre a Álgebra Linear e geometria, surge quando se estudam espaços com produto interno. Por esta razão Gueudet-Chartier focaliza como exemplo a questão da ortogonalidade. O estudo de $\Re^2$ e $\Re^3$ como espaços vetoriais com produto escalar pode servir como modelo geométrico para a noção geral de espaços vetoriais com produto escalar e de formas quadráticas. Propriedades e resultados simples podem ser introduzidos em $\Re^2$ e $\Re^3$ primeiro e então generalizados para um espaço arbitrário qualquer com produto interno. Mencionarei aqui dois exemplos típicos (Gueudet-Chartier, 2003, p. 6):

- a noção de projeção ortogonal sobre um subespaço F pode ser apresentada em E = $\Re^2$ ou E = $\Re^3$ (e associada com gráficos). Qualquer vetor u de E pode ser decomposto de uma única forma como u = $u_F + u_{F\perp}$, com $u_F \in$ F e $u_{F\perp} \in F\perp$; a projeção ortogonal p em F é definida por p(u) = u_F . A mesma definição aplica-se a qualquer espaço com produto interno.

- iniciando com a definição de ortogonalidade e comprimento via o produto interno, o teorema de Pitágoras para dois vetores (por exemplo no $\Re^2$) é uma conseqüência direta de propriedades da bilinearidade. Isso pode ser generalizado como $| e_1 + ...+ e_k |^2 = | e_1 |^2 + ... + | e_k |^2$ para qualquer conjunto { e_1 , ... , e_k } de vetores ortogonais.

Dessa maneira nós imediatamente obtemos uma generalização do teorema de Pitágoras que é estendida para espaços de Hilbert de dimensões infinitas. Mas mesmo que tais possibilidades existam, elas mantêm-se limitadas por vários fatores.

A primeira dificuldade origina-se do modo como os tópicos relacionados são ensinados no nível secundário ou em outras disciplinas. Por exemplo, ortogonalidade é introduzida através de sua noção intuitiva de ângulo reto como no primeiro contacto na escola primária. O conhecimento prévio deve ser adaptado a nova definição, ao novo conceito. Ou, como diz Bachelard: o novo deve explicar o antigo.

Similarmente, a noção de distância é introduzida intuitivamente e ela é usada para definir a noção de vetor. Estas noções intuitivas de ortogonalidade e distância são então usadas para definir base ortonormal, coordenadas, e o produto escalar em $\Re^2$.

Projeção ortogonal é mencionada, mas somente pontos são projetados, e a propriedade:

Se p(M) é a projeção ortogonal de M sobre uma reta D (ou plano P), então a distância de M a D é d(M,p(M))" não pode ser estabelecida, porque a ortogonalidade e o teorema de Pitágoras pertencem aos triângulos retângulos.

Nos cursos de álgebra linear das universidades, estes conceitos são apresentados em ordem invertida, e ortogonalidade de vetores é definida em termos do produto escalar sendo zero. Por isso não existe ligação natural entre o nível da universidade da definição de ortogonalidade através do produto escalar e daquela geometria da escola, ligações que deveriam permitir ao estudante utilizar suas noções intuitivas.

Existem outros obstáculos para ensinar que são resultado das representações que são limitadas a $\Re^2$ e $\Re^3$. Alguns teoremas importantes podem parecer evidentes em $\Re^2$ e $\Re^3$ porque estão associados a gráficos ou figuras na mente. Por exemplo, o teorema: "Um conjunto de vetores ortogonais não nulos é linearmente independente" freqüentemente não é considerado como um resultado interessante pelos nossos estudantes.

Por causa da imagem associada às dimensões dois ou três, este teorema parece auto-evidente, porque e dois vetores não nulos ortogonais não estão na mesma reta.

Algumas vezes as figuras mentais podem guiar a intuição de modo a complicar os resultados gerais. Por exemplo, quando estudando formas quadráticas em geral é muito difícil ao estudante aceitar que um subespaço pode ser seu próprio complemento ortogonal.

Algumas noções da Álgebra Linear e alguns resultados podem ser baseados na geometria. Por exemplo, espaços com produto interno podem ser estudados bem com essa abordagem.

Mas, mesmo dentro de tópicos específicos as imagens mentais associadas a $\Re^2$ e $\Re^3$ podem constituir um obstáculo para o entendimento de alguns resultados. Nossa análise histórica indica que a Álgebra Linear não pode aparecer como uma generalização da geometria somente; ao invés disso, ela está baseada em vários domínios matemáticos.

A principal conclusão a respeito do uso da geometria no ensino da Álgebra Linear é que a geometria pode auxiliar, mas não serve como o único tópico a conduzir para a Álgebra Linear. Pelo contrário a Álgebra Linear deve ser associada com outros assuntos tais como polinômios, funções, seqüências, etc. Numa abordagem baseada em múltiplos tópicos para a álgebra linear nossas noções não serão baseadas somente em geometria, mas ao menos nas analogias necessárias entre a geometria e vários outros assuntos.

Iremos agora examinar alguns usos efetivos da geometria no ensino da Álgebra Linear. Iremos observar especialmente as conseqüências no raciocínio dos estudantes em álgebra linear durante a apresentação em sala de aula de alguns exemplos geométricos

Alguns professores louvam uma abordagem estrutural para a Álgebra Linear, com quase nenhum gráfico mostrado aos alunos. A geometria está presente então como uma conseqüência natural da teoria geral. Outros escolhem apresentar afinidade com a geometria com associação de representações de imagens antes de introduzir a Álgebra Linear.

Se os alunos necessitam de figuras mentais para ajudar seu raciocínio em Álgebra Linear eles irão provavelmente usar representações associadas com a geometria e que podem ser inconvenientes para espaços vetoriais em geral

A respeito de representações gráficas, os professores não parecem ter desenvolvido gráficos específicos para as classes de Álgebra Linear. Em algumas classes os gráficos são usados apenas quando semelhanças com a geometria surgem no curso. Os professores usam gráficos em Álgebra Linear, mas somente para $\Re^2$ e $\Re^3$. Neste caso Álgebra Linear em $\Re^2$ e $\Re^3$ pode fornecer um modelo no qual basear a teoria geral. Mas não há evidencia de que estudantes estarão aptos a usar os discernimentos geométricos, especialmente se o professor não utiliza gráficos na colocação geral de espaços vetoriais.

Como exemplo, temos o entendimento do Teorema de Pitágoras:

Em trabalho recente citado em Gautier (apud Gueudet-Chartier, 2003, p. 8) foi proposto o seguinte exercício para os alunos durante uma entrevista.

> Seja $E = R^3[X]$ o espaço com produto interno dos polinômios do grau 3 e sejam P e Q dois elementos ortogonais de E cujo comprimento é 1. Você pode determinar o comprimento de P + Q ?

Dos oito estudantes entrevistados somente quatro encontraram o resultado. Um deles encontrou a solução diretamente, usando o teorema de Pitágoras. Ele não usou este termo, mas ele claramente aplicou o resultado. Três encontraram o resultado depois de calcular q(P+Q) usando a forma bilinear f para q.

Entre os quatro estudantes que não conseguiram encontrar a resposta correta, dois declararam que deve existir uma fórmula, mas eles não lembravam dela; os outros dois declararam que não era possível calcular o comprimento de P+Q. Nenhum deles esboçou gráfico.

Todos eles pensaram, posteriormente, no teorema de Pitágoras. Outros dois rejeitaram representação de polinômios como setas; eles estavam entre os quatro que não se consideraram aptos a resolver o exercício.

Então somente um estudante estava apto a reconhecer o teorema de Pitágoras e aplicá-lo aqui. Este estudante particular associou o exercício com uma imagem mental associando os polinômios como setas. Ele então observou que isso corresponde a um dos primeiros desenhos relacionados à $\Re^2$, e então ele aplicou o teorema de Pitágoras.

Conclusões similares podem ocorrer quando um resultado geral é dado e associado com um exemplo geométrico (este exemplo pode ser dado antes de estabelecer o resultado como uma introdução, ou posteriormente como ilustração), muitos alunos não podem aplicar o resultado (o teorema de Pitágoras no $\Re^2$ ou $\Re^3$ no nosso caso) em outro contexto tal como em um espaço de polinômios ou de funções. O uso de vários exemplos diferentes provenientes de várias áreas, tais como geometria, polinômios, seqüências, etc. parecem ajudar mais os alunos a conferir significados mais amplos para um resultado geral.

4.4. O entendimento da independência linear.

Uma idéia fundamental que não pode ser negligenciada é a de independência linear de elementos de um espaço vetorial. Da sua compreensão dependem outros conceitos importantes e básicos da Álgebra Linear.

Rogalski (apud Oliveira, 2005, p. 35) relata que, em uma demonstração de independência linear, os alunos concluem que “se os a_i são nulos, ao mostrar que $a_1u_1+a_2u_2+...+a_nu_n = 0$, então, os u_i são linearmente independentes”. O que não é verdade, pois a demonstração precisa ser feita de maneira inversa, isto é, para que $a_1u_1+a_2u_2+...+a_nu_n = 0$, os a_i são nulos.

A causa é o desconhecimento ou má interpretação da lógica elementar da Matemática, que leva os alunos a dificuldades nas demonstrações.

Seja V um espaço vetorial e $S=\{u_1,u_2,...,u_n\}$ um subconjunto de V. Dizemos que S é um conjunto linearmente independente se a igualdade

$a_1u_1+a_2u_2+...+a_nu_n= 0$, com $a_1,a_2,...,a_n$, em R, só for verdadeira para $a_1=a_2=..=a_n=0$.

De acordo com a definição para demonstrar que o conjunto é linearmente independente temos de resolver um sistema linear e mostrar que a solução é única e corresponde a: $a_1=a_2=..=a_n=0$. Como o sistema é homogêneo, basta que seja determinado para que a solução seja única.

Quando se trabalha com o espaço $\Re^n$ o aluno consegue certa desenvoltura nos exercícios; no entanto as dificuldades aparecem com mais freqüência quando se sai deste domínio mais conhecido para o espaço dos polinômios de grau menor ou igual a n, por exemplo.

O aluno confunde o segundo membro com o escalar zero (0) ao invés de identificá-lo com o vetor nulo do espaço que é o polinômio identicamente nulo. Quando se trata de matrizes 2x2 o aluno não identifica o segundo membro com a matriz nula 2x2.

Esta noção é fundamental para o entendimento de base e dimensão de um espaço vetorial e no questionário respondido pelos alunos nota-se uma dificuldade maior quando se tem problemas não numéricos ou que exija algum conhecimento de lógica elementar, como no caso de vetores independentes.

Capítulo 5

QUESTIONÁRIO E ANÁLISE DAS RESPOSTAS

Em abril de 2006 realizei uma entrevista por meio de um questionário em duas turmas de Álgebra Linear de uma universidade pública do Pará. Um total de 15 alunos respondeu a perguntas sobre espaço vetorial, um dos conceitos que sustentam a Álgebra Linear, com propósito de observar seus procedimentos, ou respostas, as perguntas postas. Com isto pretendíamos avaliar o nível de absorção desses alunos com relação aos conceitos básicos de espaço vetorial. A partir das respostas e de minha experiência de décadas como docente da disciplina, procurei fazer uma análise à luz dos referenciais teóricos abordados nos capítulos anteriores.

A primeira pergunta tinha como objetivo verificar se os alunos conseguiam abstrair a noção de espaço vetorial em conjuntos diferentes em busca de verificar se eles apresentavam a percepção de espaço vetorial, mesmo inicial, como idéia unificadora. Somente quatro alunos, menos de 30%, responderam satisfatoriamente identificando a estrutura de espaço vetorial nos conjuntos distintos dados. A questão foi: O que o conjunto das matrizes quadradas de ordem 2 e o conjunto dos vetores do plano têm em comum?

> A noção de espaço vetorial é central em Álgebra Linear, seus elementos, os vetores, podem representar diferentes objetos matemáticos, de naturezas diferentes: funções, matrizes, etc. Assim, um curso deve abordar a generalidade desse tipo de representação (Celestino, 2000, p.43).

O interessante nesta pergunta é que ela trata do conceito de espaço vetorial e sobre tal conceito toda a Álgebra Linear é desenvolvida. Não esperamos que de fato nossos alunos venham a perceber de imediato a Álgebra Linear como uma teoria unificadora, pois isso exige uma rede de saberes ainda não conhecida por eles, no entanto tal idéia, espaço vetorial, promove os primeiros passos nessa direção. Portanto, a não assimilação de tal conceito parece estar clara, e, para melhor observarmos, encaminhamos a segunda pergunta que trata do conceito de subespaço. O subconjunto S={(x,y)/y=1} é um subespaço vetorial de $\Re^2$?. Somente quatro alunos responderam satisfatoriamente, novamente menos de 30%, e outras seis apresentavam alguma idéia de subespaço. Mais uma vez verificamos a não assimilação pelos alunos da idéia sobre espaço vetorial. Uma resposta possível e esperada é que não se trata de subespaço porque o vetor nulo não pertence ao conjunto. Um simples exemplo de que uma propriedade básica não é verificada no conjunto responderia satisfatoriamente à pergunta. A noção de subespaço é importante porque frequentemente trabalha-se com partes de um espaço vetorial que também tem estrutura de espaço vetorial, ou seja, a estrutura de espaço vetorial pode ser mantida para determinadas de suas partes e as relações que envolvem os espaços vetoriais e seus subespaços são um dos esteios do desenvolvimento da Álgebra Linear.

A terceira pergunta “Quais as características mais importantes de um espaço vetorial?” vem confirmar a não assimilação da idéia de espaço vetorial. Somente dois alunos conseguiram citar as características mais importantes de um espaço vetorial. Menos de 15%. As respostas matematicamente adequadas seriam aquelas que destacassem as propriedades dos conjuntos relacionadas às operações e, além disso, citações de dimensão e base. Tivemos varias respostas do tipo: “É um conjunto cujos elementos são vetores”. É uma resposta redundante que não diz absolutamente nada sobre espaço vetorial.

Como podemos observar que o conceito, ou a conceitualização, de espaço vetorial não foi assimilada, mesmo de forma embrionária, pela maioria expressiva dos alunos consultados e isso indica a presença de obstáculos ao conhecimento, e, aqui identificamos tanto a existência de obstáculos didáticos como epistemológicos.

Os Obstáculos Didáticos são aqui identificados, primeiramente, pelas atitudes dos alunos em relação à matemática que revelam uma concepção de que em matemática tudo se responde ou constrói por meio de cálculos numéricos ou manipulações algébricas, não admitindo, portanto, respostas em palavras como poderia ter sido feito em relação às perguntas supracitadas. Isso é observado nas respostas às perguntas apresentadas em que destacamos a segunda pergunta em que, além de quatro respostas tidas como satisfatórias, mais seis alunos esboçaram alguma idéia do solicitado. A segunda pergunta é a única que exige bem pouco é verdade, mas exige manipulações de números e letras.

Essa concepção da matemática é construída ao longo do ensino básico por meio de atividades de ensino que privilegiam a demasia de manipulações algébricas e cálculos numéricos em detrimento da argumentação, talvez por se julgar equivocadamente que toda argumentação é de rigor formal e para tanto os alunos do ensino básico não estejam cognitivamente preparados existindo aí o que D’Amore (2005) identifica como obstáculos ontogenéticos. Embora, os alunos de curso de graduação devessem estar cognitivamente preparados para os processos de formalização, presumidamente livre de obstáculo ontogenético do tipo citado, essa concepção de manipulação de números e letras em matemática tem sido observada por nós, mesmo em alunos que cursam os semestres finais do curso superior, inclusive matemática, com maior freqüência nos alunos que cursam os semestres iniciais.

A disciplina Álgebra Linear é ofertada nos semestres iniciais para diferentes cursos superiores, e, portanto, para alunos em formação inicial ainda com forte influência da educação básica, apresentando concepções e saberes conflitantes, ou mesmo insuficiente, com os novos saberes. Quanto aos saberes que conflitam destacamos a palavra “vetor”. Essa palavra, para o aluno do ensino médio, está carregada de significados físicos como direção, sentido e comprimento e que admite uma representação geométrica como uma seta. Não há, para os alunos, nenhuma relação entre esse ente vetor, com funções, polinômios, e matrizes, também estudados por eles no ensino médio. O conflito é inevitável, pois ao tratar espaços vetoriais, cujos elementos são ditos vetores, a imagem mental de um vetor que é uma seta não encontra congruência, por exemplo, com a imagem mental de um polinômio do segundo grau ou mesmo com uma matriz cuja representação mental é apenas de uma tabela. Assim,

> O estudante pode já ter incorporado um conceito e ter dele uma imagem: essa imagem pode ter sido reforçada ao longo do tempo por provas, experiências repetidas. Mas pode acontecer, mais cedo ou mais tarde, que tal imagem se revele inadequada com relação a outra imagem do mesmo conceito , por exemplo, proposta pelo próprio professor, ou por outros, contrastando com a imagem inicial. Dessa maneira cria-se um conflito entre a imagem anterior, relativa àquele conceito, que o estudante acredita ser definitiva, e a nova imagem; isso acontece principalmente quando a nova imagem amplia os limites de aplicação ou fornece uma versão mais ampla do conceito. (D´Amore, 2005, p.81)

Na Álgebra linear é exatamente o que ocorre com o objeto matemático vetor. É mostrado um novo conceito de vetor que amplia os limites de aplicação, incorporando o conceito anterior. Desse modo acreditamos que há um conflito cognitivo decorrente da imagem geométrica que a palavra vetor significa para nossos alunos; uma seta, e, um polinômio, uma função ou uma matriz não são setas. Isso é evidenciado nas respostas a primeira pergunta. Um obstáculo, antes de tudo, verbal (Bachelard,1996).

Na palavra vetor há evidencias também de um obstáculo de raízes de natureza epistemológicas, pois a palavra vetor está ligada à geometria que permeia todo o desenvolvimento da Álgebra Linear que, embora não suficiente para provocar a formulação de uma teoria unificadora, marcou como um amalgama a alma dessa teoria como mostramos no capítulo dois.

É importante também destacarmos que independente dos obstáculos acima, observamos que os tratamentos de espaço vetorial encontrados nos diferentes livros didáticos partem de uma definição seguida de exemplos, sem buscar construir tal conceito. A busca da unidade ou de congruências entre os conjuntos é antecipada apressadamente e, não raro, por isso, limitam o estudo a apenas um tipo de espaço vetorial como o $\Re^n$ que apresenta mais facilidades de interpretação geométrica quando limitado às dimensões dois e três. Isso é evidenciado nas respostas as duas perguntas seguintes envolvendo questões numéricas nos espaços $\Re^2$ e $\Re^3$, e em espaços de polinômios com elementos em princípio mais abstratos. A proporção de respostas certas no primeiro caso foi expressivamente maior que no segundo caso. Isto mostra que os alunos têm mais desembaraço quando trabalhando em $\Re^2$ ou $\Re^3$e, além disso, a praticidade pela rapidez e concretude dos exemplos que podem ser criados pela representação geométrica pode favorecer uma concepção errada de espaço vetorial pela limitação conceitual, e, ao mesmo tempo, não evidencia o tratamento axiomático, não permitindo, portanto, ao aluno se dar conta de tal método axiomático.

O tratamento axiomático na matemática não é um luxo, é em muito uma necessidade. A limitação do tipo de espaço vetorial ao se ensinar Álgebra Linear não somente favorece obstáculos didáticos no aprendizado da Álgebra Linear, mas também pode favorecer a criação de obstáculos a outras disciplinas, principalmente aquelas de caráter axiomático. Isso parece denunciar o abandono dos aspectos do desenvolvimento histórico-epistemológico dessa área de conhecimento na formulação curricular dos cursos superiores, em especial da matemática, limitando os subsídios aos professores na preparação de materiais e estratégias de ensino. Isso talvez evitasse a pergunta expressa em dos questionários por um aluno participante de nossa pesquisa; “Pra que eu estou estudando isto?”.

.

C a p í t u l o 6

CONCLUSÕES E ENCAMINHAMENTOS.

Esta pesquisa procura mostrar que o uso da geometria para o ensino da Álgebra Linear tanto pode auxiliar os estudantes como pode gerar dificuldades especificas, constituindo-se um obstáculo pedagógico.

Uma análise histórica do processo de nascimento da Álgebra Linear mostra que esta matéria não pode ser construída como uma mera generalização da geometria. Nossa mais importante sugestão é que a geometria deve ser usada muito cuidadosamente nos cursos de Álgebra Linear.

Potencial para um modelo geométrico existe: os exemplos de projeção ortogonal e o teorema de Pitágoras demonstram isso. Entretanto a concretização que parece uma carência em Álgebra Linear pode ser mais eficientemente fornecida pelo uso de gráficos, especialmente gráficos ilustrando conceitos e propriedades em espaços vetoriais abstratos. Estes gráficos podem promover o entendimento dos alunos de álgebra linear e suas habilidades para resolver problemas.

Já está evidenciado que o problema de grande índice de reprovação em Álgebra Linear é decorrente dos problemas relacionados ao ensino desta disciplina. Dessa forma nosso trabalho, mesmo limitado a apenas alguns aspecto dos problemas do ensino da Álgebra Linear, coloca-se como um mais um subsidio para os professores dedicados a essa tarefa. O problema não é somente local. Conforme Gueudet-Chartier (2003, p.1): “É um fato bem conhecido que os estudantes encontram dificuldades neste assunto. Ele parece muito abstrato e desconectado de todos os conhecimentos anteriores”. Também citamos Rogalski (apud Oliveira, 2005, p14): “Sem dúvida não existe na França um primeiro ciclo universitário onde os professores não constatem o fracasso do ensino tradicional da Álgebra Linear”.

Esta reflexão é apenas uma parte do problema. Este problema aqui discutido não é o único no ensino da Álgebra Linear, nem somente da Álgebra Linear. Certamente nos Cálculos também ocorrem problemas semelhantes que merecem a atenção de nossos pesquisadores.

A seguir destaco de modo resumido os aspectos abordados neste trabalho e que certamente têm participação no processo de ensino-aprendizagem da disciplina Álgebra Linear.:

Aspectos Problemáticos no Ensino-Aprendizagem da Álgebra Linear:

Atitude do Professor

O professor deve ter uma formação profissional específica. Ensinar é uma atividade profissional específica. Não basta conhecer o assunto a ser ensinado com alguma profundidade de detalhes. O ensino não é uma atividade fácil, trivial. Por mais que eu conheça um determinado assunto isso não basta para que eu seja um bom mediador para que outros adquiram este conhecimento.

Na formação de um profissional de ensino recomendo pela sua importância noções de epistemologia para um conhecimento mais sólido das dificuldades relacionadas ao conhecimento.

A importância do mestre sempre deve ser destacada por ser ele o condutor do processo de ensino-aprendizagem. Na Álgebra Linear como em qualquer outra disciplina somente a formação acadêmica, teórica, sólida no assunto não é suficiente.

Muitos professores imaginam que o cérebro dos alunos é um espaço em branco a ser preenchido com o conhecimento que o mestre vai transferir de uma mente para a outra. O mestre conhece bem o assunto, prepara bem sua aula e o único trabalho do aluno é prestar atenção que logo tudo passará para sua cabeça. É conhecido o comentário de um professor que, questionado por um aluno que não tinha entendido sua explicação, replicou: “Como ainda não entendeu? Já repeti tantas vezes.”

Nós professores devemos ter perfeita consciência destes problemas relacionados a obstáculos, dificuldades na aquisição do conhecimento, para através da ação e da reflexão tentarmos evitar que os alunos caiam nas armadilhas descritas anteriormente e que são do nosso conhecimento. A mente do aluno não é igual a do professor; os conhecimentos anteriores que ele tem são importantes e devem ser considerados.

No artigo “Perspectivas de desenvolvimento profissional de professores de Matemática” o professor João Pedro da Ponte comenta:

> Uma questão hoje em dia decisiva é saber se o professor é alguém que vive a sua atividade como uma profissão a tempo inteiro ou que se desdobra por várias ocupações e responsabilidades. Na verdade, há várias maneiras de estar em cada momento na profissão.
>
> Por simplicidade, podemos arrumá-las em grandes grupos:
>
> -os investidos, que vivem a sua profissão com entusiasmo e sentido de responsabilidade, remando muitas vezes contra ventos e marés (e que não são tão poucos como isso!);
>
> -os acomodados, que não têm esperança de ver ocorrer qualquer mudança significativa no ensino e que encaram a sua profissão fundamentalmente como um meio de sobrevivência;
>
> -os transitórios, que estão na profissão apenas de passagem, à espera de mudar para outra atividade em que se sintam melhor (Ponte, 1992, p. 4).

É claro que estamos tratando de professores investidos neste trabalho.

Hoje, comenta-se a baixa qualidade de uma grande parte dos alunos de licenciatura com o ingresso na universidade nos cursos em que se consideram com mais chances de aprovação. Comenta-se que entram na universidade com uma formação deficiente do curso médio, não encontram formação adequada na universidade, e assumem vagas no magistério depois de formados para realizar um trabalho de qualidade inferior enfrentando os mesmos problemas da minha época, mas com uma motivação menor. Escolheram fazer licenciatura não por opção consciente de carreira, mas como uma opção possível pelo nível de concorrência do vestibular que lhes dá mais chances.

> As estatísticas estão aí para evidenciar que os estudantes oriundos da rede pública de ensino têm chances reduzidas de entrar nas universidades públicas, em especial nos cursos considerados de maior “status”, os considerados “nobres”, como é o caso de Medicina, Direito, Engenharias e Computação, dentre outros. Os alunos da rede pública , quando não param seus estudos ao terminar o ensino médio, acabam, de um modo geral, por concorrer aos cursos de menor procura e considerados de menor “status”. Entre estes estão, na sua grande maioria, os cursos de licenciatura. (Gonçalves, 2006, p.26)

A questão que se coloca então é: será que a quantidade de professores investidos está se reduzindo e a de professores acomodados está aumentando? E quanto aos transitórios? Essas atitudes dependem de que? A acomodação ocorre pela necessidade de sobrevivência pela falta de opções de emprego que leva a permanecia em uma atividade mesmo sem motivação maior, sem amor a profissão? E o desenvolvimento profissional de um professor acomodado? Com baixos salários, falta de motivação, sem vocação parar a profissão, será que um pequeno aumento no salário leva o profissional a procurar um curso de especialização, um mestrado, um aperfeiçoamento, a comprar livros, a se dedicar mais, a melhorar suas aulas? É claro que alguns procuram; é claro que depende de cada indivíduo.

Desconhecimento da História

No caso da Álgebra Linear o conhecimento da história é muito importante para uma compreensão de toda sua importância como idéia unificadora. Esta idéia não pode faltar ao professor e deve estar presente em todos os momentos para que os alunos percebam toda sua extensão e não fiquem com uma visão parcial e deformada do assunto. O uso da história é um fator importante também como motivador da aprendizagem como muitos livros didáticos mostram. Os alunos da licenciatura deveriam ter em seu currículo cursos de história da matemática, não só como um relato do passado com datas e nomes, mas também com todas as implicações e conseqüências possíveis de seu conhecimento, com a evolução das idéias e as dificuldades que as originaram.

Assimilação sem acomodação.

Como Bachelard e D´Amore chamam a atenção, o professor tem que considerar que os alunos já chegam com bastante conhecimentos e também uso prático sobre vetores de outras disciplinas, e, se não tivermos cuidado, os alunos podem usar este conhecimento antigo como uma base real de acordo com o princípio da concretização para a formação de novos conceitos que permanecerão limitados às idéias iniciais. Neste caso, não há construção de um novo conhecimento, mas a extensão de conhecimento anterior. Há assimilação sem acomodação. As aulas de matemática serão vistas pelo aluno como um "conjunto de receitas que permitem resolver problemas". (Celestino, 2000, p.65)

Obstáculos Verbais

O uso de palavras já conhecidas da álgebra vetorial, da geometria e de outros assuntos deve merecer atenção especial para que não haja nenhuma confusão com seus sentidos quando usados em Álgebra Linear, como idéia unificadora que é, por exemplo.

Os termos vetor, ortogonal, projeção, e outros podem causar problemas por causa de um entendimento equivocado.

O termo vetor é ampliado para “qualquer elemento de um espaço vetorial”, visão que deve prevalecer sobre aquela de segmento de reta orientado usado extensivamente principalmente na Física.

O termo ortogonal não deve mais ser limitado à imagem de duas retas ou dois vetores cujas direções fazem ângulos de noventa graus. Devemos generalizar para produto escalar igual a zero e mostrar que o caso anterior está enquadrado no novo caso geral.

Ainda dentro do obstáculo verbal podemos considerar o obstáculo do formalismo quando o professor usa uma linguagem excessivamente formal que deixa o aluno com menor poder de abstração totalmente sem suporte para raciocinar.

Uso da Geometria

Antes do ingresso na universidade o estudante já adquiriu conhecimentos a respeito de vetores e já trabalhou com esses elementos não só em matemática, mas também em outras disciplinas. Esse conhecimento aparece então como a experiência anterior ou conhecimento anterior de que fala Bachelard. Ele poderá ajudar, mas também trazer “sombras”. Em Física temos as noções de força, velocidade, aceleração apresentadas como vetor de modo gráfico com modulo, direção e sentido muito bem entendidas e utilizadas pelos estudantes, bem como as operações elementares com vetores como adição e multiplicação por escalar. Têm as noções de ortogonalidade, distância e projeção, muito claras e bem definidas. Este conhecimento anterior deve ser aproveitado com cuidado para que o aluno não só assimile o novo conhecimento, mas também proceda a uma acomodação em seus conceitos novos o que significa o real aprendizado.

Do mesmo modo muitos termos já bem conhecidos constituirão obstáculo verbal uma vez que agora, dentro da Álgebra Linear serão usados com significado muito mais amplo do que anteriormente e o uso desses termos deve ser motivo de extremo cuidado por parte de alunos e professores.

A idéia da Álgebra Linear como “idéia unificadora” deve ficar bem clara para o aluno que deve criar uma imagem além daquela de que ela é uma simples generalização da geometria.

A Geometria pode ajudar os estudantes de Álgebra Linear? Estudando esta questão Ghislaine Gautier concluiu que não existe uma resposta óbvia e clara: a geometria pode ser útil ou pode ser um obstáculo para aprender Álgebra Linear em sua totalidade. Os conceitos da geometria podem servir de exemplos, mas não esgotam os conceitos da Álgebra Linear.

O aluno deve ser capaz de assimilar e acomodar os conceitos da Álgebra Linear como historicamente já descrevemos como conceitos de uma disciplina que surgiu como idéia unificadora, portanto, uma visão mais ampla que as anteriores assimiladas no curso médio.

A Álgebra Linear é introduzida durante o primeiro ou segundo ano da universidade em vários cursos e é fato bem conhecido que os estudantes encontram dificuldades no assunto.

Ele parece muito abstrato e desconectado de todos os outros conhecimentos matemáticos prévios. Muitos professores estão freqüentemente convencidos que uma solução é basear ao menos as noções e resultados elementares da Álgebra Linear na geometria.

A geometria permite usar figuras e associar um conceito matemático a um gráfico. Desse modo o uso da geometria como uma base para um curso de Álgebra Linear é interessante. Uma questão a discutir é determinar se isto sempre ajuda o estudante ou não.

As pesquisas observadas, principalmente Gueudet-Chartier (2003), mostram dificuldades nos estudantes que estão relacionadas com o uso da geometria. Estudos anteriores parecem confirmar que a questão levantada neste trabalho merece ser estudada. Temos várias pesquisas no Brasil e no exterior apontando problemas em geral no ensino da Álgebra Linear, como as já citadas anteriormente.

A geometria poderá ajudar com seus exemplos, com figuras, mas devemos ter cuidados para não exagerar no uso da geometria e deixar o aluno com a visão de que Álgebra Linear está baseada somente na geometria. A integração de domínios é importante para que o aluno perceba as correspondências entre as definições formais, as figuras, os exemplos e tenha uma visão mais ampla dos conceitos. A Álgebra Linear pode ser abordada de três modos diferentes.

Uso da Lógica

Devemos ter cuidado com o conceito de independência linear e seus exemplos porque os alunos apresentam dificuldades no uso da lógica elementar e se confundem no entendimento deste conceito que é fundamental para o entendimento dos conceitos de base e dimensão de um espaço vetorial. A lógica é também muito importante para o acompanhamento dos aspectos mais formais da Álgebra Linear. Claro que na formação do professor de matemática é importantíssimo o estudo da lógica elementar.

Certamente existe por parte dos alunos alguma confusão com condições necessárias e suficientes às quais o professor deve estar atento. A confusão entre condição necessária e suficiente faz com que o aluno não entenda de modo muito claro o verdadeiro sentido dos problemas relacionados a dependência e independência linear.

Exemplos mais variados e integração de domínios.

Nota-se claramente que os alunos são muito mais exigidos com relação aos espaços $\Re^2$ ou $\Re^3$. Poucos exemplos são dados de outros espaços vetoriais. Quando se trata de exercícios ou mesmo em provas a maioria ocorre em questões também de $\Re^2$ ou $\Re^3$. Dessa maneira os alunos não se sentem com desembaraço para usar os mesmos conceitos em espaços de funções, de polinômios, de matrizes e outros. Alguns professores partem do princípio que basta o aluno conhecer o assunto no domínio geométrico que por analogia serão capazes de estender esses conhecimentos para outros domínios. Isso nem sempre é verdade para todos os alunos. Além disso, quando falamos em integração de domínios, queremos dizer que o professor deve estimular o aluno a utilizar conhecimentos em várias áreas já de seu conhecimento. Isto pode auxiliar o aluno na resolução de problemas.

A integração de domínios pode ser vista como um meio de se obter diferentes formulações de um dado problema, permitindo uma nova visão das dificuldades encontradas e, assim, disponibilizar ferramentas e técnicas para resolver a primeira formulação. Em termos mais precisos, se os conhecimentos de um certo domínio, que podem ser seus conceitos, suas propriedades e até os procedimentos matemáticos, não são suficientes para avançar em uma dada situação, ou problema, o aluno deverá lançar mão dos conhecimentos de outros domínios.

> O professor pode apresentar um problema em um determinado domínio (numérico ou geométrico, ou no algébrico ou no axiomático) e perceber que no domínio apresentado, por exemplo, no algébrico, na tentativa de resolver o problema torna a solução de difícil encaminhamento, então, ele interpreta o problema em outro domínio, por exemplo, no geométrico, domínio esse, em que pode ser mais fácil perceber a solução. Assim, encaminhada a solução, ela voltará para o domínio anterior para efetivamente apresentar a solução (Oliveira, 2005, p.21).

Encerramos este trabalho com a convicção de que os professores da disciplina Álgebra Linear devem ter sua atenção voltada em grande parte para o cuidado com os obstáculos de ordem epistemológica que a própria historia do desenvolvimento já indica e pela natureza abstrata a unificadora dos conceitos mais importantes abordados.

Referências Bibliográficas.

Andrade, J.A.R. Francis Bacon Tradução e Notas. São Paulo: Abril Cultural, 1984.

Bachelard, G. A formação do espírito cientifico: contribuição para uma psicanálise do conhecimento. Rio de Janeiro: Contraponto, 1996.

Bruter, C. P. Compreender as Matemáticas: As dez noções fundamentais. Lisboa: Instituto Piaget, 1998.

Celestino, M.R. Ensino-aprendizagem da Álgebra Linear: as pesquisas brasileiras na década de 90. Dissertação de Mestrado: PUC-SP, 2000.

D´Amore, B. Epistemologia e Didática da Matemática. Escrituras Editora: São Paulo, 2005.

Desmet, H. A educação pós-moderna. Edições Loyola, 1999.

Dorier, J.L. On the Teaching of Linear Algebra. Kluwer Academic Publisher: Dordrecht, 2000.

Fernandez, A. Direito, Evolução, Racionalidade e Discurso Jurídico. Sergio Antonio Fabris Editor: Porto Alegre, 2002.

Ferreira, A. B. de H. Pequeno Dicionário Brasileiro da Língua Portuguesa. Rio de Janeiro: Editora Gamma, 23° ed., 1993.

Fossa, J. A. Teoria Intuicionista da Educação Matemática, Editora da UFRN, 1998.

Gonçalves, T.O. A Constituição do Formador de Professores de Matemática: A prática formadora, Editora Cejup, Belém, 2006.

Gueudet-Chartier, G. Should we teach linear algebra through geometry? www.elsevier.com, Linear Algebra and its Applications 2003.

Harel, G. Three Principles of learning and teaching mathematics. Dordretch, 2000.

Hillel, J. Modes of description and the problem of representation in linear algebra. Dordrecht, 2000.

Iezzi, G. Fundamentos de Matemática Elementar: Geometria Analítica, Editora Atual: São Paulo, 1977.

Lima, E.L. Logaritmos: Coleção do Professor de Matemática. SBM, 1996.

Mendes, I.A. O Uso da História no Ensino da Matemática. Editora UEPA: Belém, 2001.

Miguel, A. Breve Ensaio Acerca da Participação da História na Apropriação do Saber Matemático. Ed. Vozes Ltda, 2002.

Oliveira, L.C.B. Como Funcionam os Recursos Meta em Sala de Álgebra Linear? Dissertação de Mestrado. PUC/SP, 2005.

Perrenoud, P. Ensinar: agir na urgência, decidir na incerteza. Artmed Editora, 2001.

Ponte, J.P.da Perspectivas de desenvolvimento profissional de professores de Matemática. CIEFCUL: Universidade de Lisboa, 1992.

Silveira, M.R.A. da. A Interpretação da Matemática na Escola, no Dizer dos Alunos: Ressonâncias do Sentido de "Dificuldade", Dissertação de Mestrado, Faculdade de Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2000.

Soares, J.S. Dialética, Educação e Política: uma releitura de Platão. Cortez Editora, 1999**.**

Tardif, M. Saberes Docentes e Formação Profissional. Vozes: Rio de Janeiro, 2002.

BIBLIOGRAFIA

Gomes, João C. *Planejamento conceitual: um guia para um planeta melhor*, 3ª ed. Lendo, SP: CostaMauro, 1996.

Santos, Carlos. *Teoria e arte da estrutura de comunicação.* Editora da Univesidade do Estado, 1997.