



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E CIENTÍFICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICAS
DOUTORADO ACADÊMICO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICAS

IVONNE COROMOTO SÁNCHEZ SÁNCHEZ

Interconexões envolvendo História das Cônicas e o GeoGebra para o Ensino

Belém
2025

IVONNE COROMOTO SÁNCHEZ SÁNCHEZ

Interconexões envolvendo História das Cônicas e o GeoGebra para o Ensino

Tese doutoral apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas, do Instituto de Educação Matemática e Científica da Universidade Federal do Pará como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutora em Educação em Ciências e Matemáticas.

Área de concentração: Educação em Matemática.

Linha de pesquisa: História, Filosofia e Estudos Culturais.

Orientador: Prof. Dr. Iran Abreu Mendes

Belém

2025

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)**

S211i Sánchez Sánchez, Ivonne Coromoto.
Interconexões envolvendo História das Cônicas e o GeoGebra
para o Ensino / Ivonne Coromoto Sánchez Sánchez. — 2025.
160 f. : il. color.

Orientador(a): Prof. Dr. Iran Abreu Mendes
Tese (Doutorado) - Universidade Federal do Pará, Instituto de
Educação Matemática e Científica, Programa de Pós-Graduação em
Educação em Ciências e Matemáticas, Belém, 2025.

1. História das Cônicas. 2. GeoGebra. 3. Geometria
Analítica. 4. Ensino de Matemática. 5. Tecnologias Digitais. I.
Título.

CDD 371.102

IVONNE COROMOTO SÁNCHEZ SÁNCHEZ

Interconexões envolvendo História das Cônicas e o GeoGebra para o Ensino

Tese doutoral apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas, do Instituto de Educação Matemática e Científica da Universidade Federal do Pará como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutora em Educação em Ciências e Matemáticas. Área de concentração: Educação em Matemática.

Data de avaliação: 27/02/2025

Banca Examinadora

Prof. Dr. Iran Abreu Mendes – Orientador
PPGECM / Universidade Federal do Pará – UFPA

Prof^ª. Dr^ª. Maria Deusa Ferreira da Silva (UFPA)

Prof^ª. Dr^ª. Jesus Victoria Flores Salazar (PUC Peru)

Prof^ª. Dr^ª. Giselle Costa de Sousa (UFRN)

Prof. Dr. Saddo Ag Almouloud (UFPA)



SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E CIENTÍFICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICAS

ATA DE DEFESA DE TESE

Aos vinte e sete dias do mês de fevereiro dois mil e vinte e cinco, às quatorze horas, reuniu-se a Banca Examinadora aprovada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas, composta pelos professores doutores: Iran Abreu Mendes (Presidente), Saddo Ag Almouloud (membro interno), Maria Deusa Ferreira da Silva (membro externo - RENOEM/UESB), Jesus Victoria Flores Salazar (membro externo - PUC/Peru), e Giselle Costa de Sousa (membro externo – PPGECEM/UFRN). Sob a presidência do primeiro, procederam à Defesa de Tese da discente **Ivonne Coromoto Sánchez Sánchez**. Após a apresentação do trabalho intitulado “**Interconexões Envolvendo História das Cônicas e o Geogebra para o Ensino**”, a Banca reuniu-se em separado para a Avaliação e apresentou o seguinte parecer:

O tema é atual e relevante no que concerne às pesquisas em História da Matemática para o ensino de Matemática, com foco nas interconexões envolvendo as tecnologias digitais para o ensino de Geometria Analítica, especificamente relacionado às Cônicas, com destaques para dois pontos que fortalecem a tese: 1) a relevância da História da Matemática para o ensino em sala de aula em conexão com as tecnologias digitais representadas pelo Geogebra e 2) a validação da pesquisa por meio de uma epistemologia fundamentada nos usos das tecnologias em conexão com a História da Matemática e suas conexões com o desenvolvimento histórico-conceitual da Matemática. Reitera-se a relevância do trabalho para a área da história da Matemática para o ensino, notadamente por ter se proposto a interconectar epistemologias, fundamentos metodológicos de pesquisa e suas implicações na produção de encaminhamentos didáticos argumentadores da tese sustentada. Destaca-se que o trabalho contempla o objetivo anunciado no início do texto da tese e condiz com o que foi apresentado em todo o trabalho, possibilitando ao leitor, posteriormente fazer novos encaminhamentos de pesquisa e incorporação no ensino de Geometria Analítica das Cônicas, na forma de abordagem do tema tratado na tese. Não há dúvidas que o presente trabalho resulta no desenvolvimento de artigos científicos, capítulos de livros e encaminhamentos didáticos para a formação inicial e continuada de professores de Matemática, bem como para o ensino de Matemática. Assim, a banca também sugere a publicação parcial de partes da tese na forma de artigos. Para finalizar, conclui-se pela aprovação da tese apresentada.

Assim, a discente é considerada APROVADA neste Exame de Defesa de Tese.

A aprovação na defesa **não representa a conclusão do curso**, que somente será efetivada mediante a homologação do Colegiado do programa, após o cumprimento no prazo de até 60 (sessenta) dias, da entrega da Versão Final e demais exigências regimentais, quando será concedido o título de **Doutora em Educação em Ciências e Matemáticas** – área de concentração: **Educação em Matemática**.

E, para constar, a presente ata foi lida e assinada por todos os membros da Banca Examinadora.

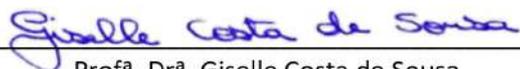
Belém, 27 de fevereiro de 2025.



Prof. Dr. Iran Abreu Mendes



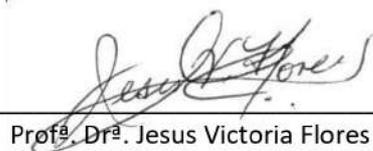
Prof^ª. Dr^ª. Maria Deusa Ferreira da Silva



Prof^ª. Dr^ª. Giselle Costa de Sousa

Documento assinado digitalmente
gov.br SADDO AG ALMOULOU
Data: 27/02/2025 17:20:07-0300
Verifique em <https://validar.it.gov.br>

Prof. Dr. Saddo Ag Almouloud



Prof^ª. Dr^ª. Jesus Victoria Flores Salazar

Dedico este trabalho a Luis Andrés Castillo Bracho, minha principal inspiração e impulso para superar desafios tanto na minha trajetória acadêmica quanto no dia a dia.

Agradecimentos

Nesta seção de agradecimentos, expresso minha profunda gratidão

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo apoio e financiamento aos Programas de Pós-Graduação, que têm sido essenciais para a formação de pesquisadores e o avanço do conhecimento no país;

À Fundação Amazônia de Amparo a Estudos e Pesquisas (FAPESPA) e à Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação (PROPESP) da Universidade Federal do Pará (UFPA), por meio de sua Diretoria de Pós-Graduação (DPG), agradeço a concessão da bolsa de Doutorado no âmbito do Programa de Ações Afirmativas da Pós-Graduação (PAF-PG) via o Edital 14/2021 com vigência de 2022-2024;

Aos professores do Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas da Universidade Federal do Pará, meu reconhecimento pelas valiosas contribuições ao meu desenvolvimento acadêmico;

À Universidade Federal do Pará e ao Instituto de Educação Matemática e Científica, expresso minha gratidão pelo inestimável suporte físico e estrutural ao longo de nossa jornada acadêmica. Destaco o comprometimento exemplar do corpo docente, técnicos administrativos, bibliotecários e demais funcionários que desempenham seu trabalho com diligência e dedicação na universidade e instituto ao serviço da comunidade discente;

À banca examinadora, composta pelos Professores doutores Maria Deusa Ferreira da Silva (UFPA), Jesus Victoria Flores Salazar (PUC Peru); Giselle Costa de Sousa (UFRN) e Saddo Ag Almouloud (UFPA), além do meu agradecimento, também, meu profundo reconhecimento pela avaliação cuidadosa, contribuições e provocações nas etapas de qualificação deste trabalho;

Aos líderes do Grupo de Pesquisa Práticas Socioculturais e Educação Matemática (GPSEM), expresso minha sincera gratidão pelo cuidado especial e dedicação em proporcionar espaços formativos excepcionais, marcados por um elevado padrão intelectual. Destaco as valiosas iniciativas, como as Escolas de Estudos Avançados sobre Pesquisa em Cultura, História e Educação, Ciclo de Palestras, Seminários, lançamentos de livros e a leitura e discussão de textos acadêmicos. Essas atividades não apenas enriquecem meu

capital intelectual, mas também oferecem uma base teórica sólida para compreender as complexidades da pesquisa científica na pós-graduação. O comprometimento dos professores líderes do GPSEM em criar ambientes propícios ao aprendizado e ao debate acadêmico é verdadeiramente inspirador, contribuindo significativamente para o aprimoramento intelectual de todos os membros do grupo;

Expresso minha profunda gratidão ao Professor Doutor Iran Abreu Mendes pelo investimento em mim nestes 4 anos de trabalho conjunto sob sua orientação (2021-2024). Sua competência, dedicação e rigor acadêmico foram fundamentais. Agradeço por suas orientações, conhecimentos compartilhados, paciência e confiança, que me permitiram amadurecer a minha compressão do que é ser e viver uma pós-graduação na nesta jornada doutoral;

Aos meus pais, Ivonne Coromoto Sánchez e Jairo Navi Sánchez Niño, que dia a dia na distância são meus pilares que me outorgam coragem e inspiração para ultrapassar os obstáculos na minha vida. Aos meus irmãos Milagros Nohemi Sánchez Sánchez, Ivana Solnay Sánchez Sánchez e Roberth Navi Sánchez Sánchez (*In memoriam*), pelo apoio e pela preocupação, que ainda de estar separado por uma distância muito longa entre nós o laço fraterno ainda é forte.

Aos meus Sobrinhos Luis Mathias Abreu Sánchez, Ivian Sofia Abreu Sánchez, Silvana Patricia Abreu Sánchez, Gael Enrique Sánchez Abreu, Cristhian David Mendoza Sánchez e Ángel Navi Sánchez Abreu (*In memoriam*), meus pequenos moleques que preenchem minha vida de alegria na distância.

A meu esposo, Luis Andrés Castillo Bracho, meu parceiro de vida, que está comigo há mais de 10 anos e sempre esteve ao meu lado, na felicidade, tristeza, no bom e no ruim, sempre juntos. Para você, obrigado me dar forças para me levantar em cada queda, torcendo por mim para alcançar meus objetivos;

Finalmente, aos colegas e amigos da jornada doutoral, José Erildo Lopes Junior e José dos Santos Guimarães Filho, pelos momentos de alegria, conversas partilhadas, palavras de encorajamento e força em diversos momentos desta viagem formativa.

RESUMO

Esta pesquisa tem como foco o modo como a integração entre a história das Seções Cônicas e o uso do *software* GeoGebra pode potencializar o ensino de geometria analítica no nível superior. O estudo parte da premissa de que o desenvolvimento histórico e epistemológico das cônicas, quando associado a ferramentas de geometria dinâmica, favorece a compreensão das conexões entre suas representações algébrica e geométrica, ampliando as possibilidades didáticas para além dos modelos tradicionais dos livros didáticos. A tese está estruturada em quatro capítulos. O primeiro capítulo apresenta uma revisão da literatura sobre História da Matemática e Tecnologias Digitais, analisando produções acadêmico-científicas nacionais e internacionais – em especial nos Anais do HTEM e do SNHM e em dissertações e teses do CREPHIMat. O segundo capítulo explora a História para o Ensino de Matemática com GeoGebra, destacando o potencial da história como acionador cognitivo do pensamento matemático e sua integração com ambientes digitais de geometria dinâmica. No terceiro capítulo, é traçado um panorama histórico das cônicas, desde Menêmo e Apolônio até sua formalização algébrica, examinando as relações entre razão e proporcionalidade e suas propriedades geométricas. O quarto capítulo estabelece conexões entre essa evolução histórica e os conteúdos de geometria analítica, propondo abordagens pedagógicas que favorecem a aprendizagem compreensiva da Parábola, da Elipse e da Hipérbole. Os resultados indicam que a articulação entre História da Matemática, Tecnologias Digitais e ensino pode enriquecer significativamente as práticas pedagógicas, promovendo uma aprendizagem mais integrada e reflexiva. Essa abordagem não apenas ressignifica o ensino de geometria analítica, mas também contribui para uma educação matemática mais contextualizada e significativa no Ensino Superior.

Palavras-chave: História das Cônicas, GeoGebra, Geometria Analítica, Ensino de Matemática, Tecnologias Digitais.

ABSTRACT

This research focuses on how the integration between the history of conic sections and the use of GeoGebra software can enhance the teaching of analytic geometry at the higher education level. The study is based on the premise that the historical and epistemological development of conics, when associated with dynamic geometry tools, favors the understanding of the connections between their algebraic and geometric representations, expanding the didactic possibilities beyond the traditional models of textbooks. The thesis is structured in four chapters. The first chapter presents a review of the literature on the History of Mathematics and Digital Technologies, analyzing national and international academic-scientific productions – especially in the Annals of HTEM and SNHM and in dissertations and theses of CREPHIMat. The second chapter explores History for Teaching Mathematics with GeoGebra, highlighting the potential of history as a cognitive trigger for mathematical thinking and its integration with digital environments of dynamic geometry. The third chapter presents a historical overview of conics, from Menechmus and Apollonius to their algebraic formalization, examining the relationships between ratio and proportionality and their geometric properties. The fourth chapter establishes connections between this historical evolution and the contents of analytic geometry, proposing pedagogical approaches that favor the comprehensive learning of the Parabola, the Ellipse and the Hyperbola. The results indicate that the articulation between History of Mathematics, Digital Technologies and teaching can significantly enrich pedagogical practices, promoting more integrated and reflective learning. This approach not only redefines the teaching of analytic geometry, but also contributes to a more contextualized and meaningful mathematics education in Higher Education.

Keywords: History of Conic Sections, GeoGebra, Analytic Geometry, Mathematics Education, Digital Technologies.

RESUMEN

Esta investigación se centra en cómo la integración entre la historia de las Secciones Cónicas y el uso del software GeoGebra puede mejorar la enseñanza de la geometría analítica en la educación superior. El estudio se basa en la premisa de que el desarrollo histórico y epistemológico de las cónicas, cuando se asocian con herramientas de geometría dinámica, favorece la comprensión de las conexiones entre sus representaciones algebraicas y geométricas, ampliando las posibilidades didácticas más allá de los modelos tradicionales de los libros de texto. La tesis se estructura en cuatro capítulos. El primer capítulo presenta una revisión de la literatura sobre Historia de las Matemáticas y las Tecnologías Digitales, analizando las producciones académico-científicas nacionales e internacionales – especialmente en los Anales de HTEM y SNHM y en disertaciones y tesis del CREPHIMat. El segundo capítulo explora la Historia para la enseñanza de las matemáticas con GeoGebra, destacando el potencial de la historia como disparador cognitivo del pensamiento matemático y su integración con entornos digitales de geometría dinámica. En el tercer capítulo, se esboza una reseña histórica de las cónicas, desde Menêcmus y Apolonio hasta su formalización algebraica, examinando las relaciones entre razón y proporcionalidad y sus propiedades geométricas. El cuarto capítulo establece conexiones entre esta evolución histórica y los contenidos de la geometría analítica, proponiendo enfoques pedagógicos que favorezcan el aprendizaje integral de la Parábola, la Elipse y la Hipérbola. Los resultados indican que la articulación entre la Historia de la Matemática, las Tecnologías Digitales y la enseñanza puede enriquecer significativamente las prácticas pedagógicas, promoviendo aprendizajes más integrados y reflexivos. Este enfoque no sólo replantea la enseñanza de la geometría analítica, sino que también contribuye a una educación matemática más contextualizada y significativa en la Educación Superior.

Palabras clave: Historia de las Cónicas, GeoGebra, Geometría Analítica, Enseñanza de la Matemática, Tecnologías Digitales.

LISTA DE QUADROS

Quadro 1	Trabalhos publicados nos Anais dos Colóquio de História e Tecnologia no Ensino de Matemática – HTEM (2002 – 2013)	34
Quadro 2	Trabalhos que contemplaram o uso Tecnologias e História da Matemática para o Ensino	35
Quadro 3	Distribuição dos trabalhos publicados nos anais do SNHM (1995-2021)	36
Quadro 4	Trabalhos no SNHM que contemplaram o uso Tecnologias e História da Matemática para o Ensino	37
Quadro 5	Teses e Dissertações que usam tecnologias digitais no CREPHIMat (1990 – 2019)	40
Quadro 6	Teses e Dissertações que usam o GeoGebra e História da Matemática	41
Quadro 7	Definições da Parábola	128
Quadro 8	Definições da Elipse	135
Quadro 9	Definições da Hipérbole	143

LISTA DE FIGURAS

Figura 1. Interface do GeoGebra	61
Figura 2. Cone, curvas e representação plana do triângulo gerador, segundo Menêcmo	65
Figura 3. Cone reto segundo Apolônio	68
Figura 4. A parábola segundo Apolônio	69
Figura 5. A elipse segundo Apolônio	69
Figura 6. A hipérbole segundo Apolônio	70
Figura 7. A <i>Orthotome</i>	73
Figura 8. KD é a média proporcional entre DM y DN	74
Figura 9. Vista frontal da <i>Orthotome</i> segundo Menêcmo	75
Figura 10. A <i>Orthotome</i> segundo Menêacmo	76
Figura 11. Solução da proposição XI de Apolônio	77
Figura 12. Semelhança nos triângulos $\Delta ABC \approx PMD$ e $\Delta ABC \approx AMN$	79
Figura 13. A curva GPE é chamada por Apolônio como Parábola	80
Figura 14. Gráfico de uma parábola num plano cartesiano	82
Figura 15. Relação do ponto D com a parábola, o eixo de simetria e a diretriz	83
Figura 16. Relação entre as distâncias SB e DC	83
Figura 17. Representação da Parábola segundo Smith	84
Figura 18. <i>Oxytome</i>	85
Figura 19. Vista frontal da <i>Oxytome</i> e semelhança dos triângulos ($\Delta MDE \approx \Delta BEJ$)	86
Figura 20. Vista frontal da <i>Oxytome</i> e semelhança dos triângulos ($\Delta FDN \approx \Delta FJC$)	86
Figura 21. A <i>Oxytome</i> segundo Menêcmo	88

Figura 22. Solução da proposição XIII de Apolônio	89
Figura 23. Esquema obtido a partir da definição de Apolônio	91
Figura 24. Semelhanças nos triângulos ($\Delta ABF \approx \Delta EDM$) e ($\Delta DNG \approx \Delta ACF$)	92
Figura 25. Semelhanças nos triângulos ($\Delta GEP \approx \Delta GDM$) e ($\Delta GEP \approx \Delta PTV$)	93
Figura 26. Interpretação geométrica da equação da elipse	95
Figura 27. Elipse segundo Apolônio	96
Figura 28. Gráfico da definição da elipse como lugar geométrico	97
Figura 29. Relações do ponto P com os focos da elipse e as circunferências g e p	97
Figura 30. Semelhanças nos triângulos ($\Delta PFM \approx \Delta APB$)	99
Figura 31. Gráfico da relação das distancias x e y na elipse	100
Figura 32. Elipse num plano cartesiano	103
Figura 33. <i>Amblytome</i>	104
Figura 34. Vista frontal da <i>Amblytome</i> segundo Meneâcmo	105
Figura 35. Vista frontal da <i>Amblytome</i> e semelhança dos triângulos ($\Delta IMD \approx \Delta IBE$ e $\Delta FDN \approx \Delta FEC$)	106
Figura 36. A <i>Amblytome</i> segundo Meneâcmo	108
Figura 37. Solução da proposição XII de Apolônio	110
Figura 38. Esquema obtido a partir da definição de Apolônio	112
Figura 39. Semelhanças nos triângulos ($\Delta ABF \approx \Delta EDM$) e ($\Delta DNG \approx \Delta ACF$)	113
Figura 40. Interpretação geométrica da equação da hipérbole	114
Figura 41. Hipérbole segundo Apolônio	115
Figura 42. Gráfico da definição da hipérbole como lugar geométrico	116
Figura 43. Gráfico da definição da hipérbole como lugar geométrico	117

Figura 44. Relação entre as distâncias x e y a partir do gráfico da hipérbole num plano	118
Figura 45. Relações do ponto P com os focos e centro da hipérbole	119
Figura 46. A hipérbole no plano cartesiano	122
Figura 47. Seções Cônicas em Winterle	126
Figura 48. Cônicas degeneradas em Winterle	126

LISTA DE SIGLAS

CAPES - Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
CG - Clubes GeoGebra
CNPq - Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico
CREPHIMat - Centro Brasileiro de Referência em Pesquisa sobre História da Matemática
ELBHM - Encontro Luso-Brasileiro de História da Matemática
ESG - Elaboração de Simuladores com GeoGebra
GPSEM - Grupo de Pesquisa de Práticas Socioculturais e Educação Matemática
HEdM - História da Educação Matemática
HEnM - História para o Ensino da Matemática
HEpM - História e Epistemologia da Matemática
HM - História da matemática
HTEM - Colóquio de História e Tecnologias no Ensino de Matemática
IEMCI - Instituto de Educação Matemática e Científica
MEC - Ministério da Educação
SBEM - Sociedade Brasileira de Educação Matemática
SBHMat - Sociedade Brasileira de História da Matemática
SBM - Sociedade Brasileira de Matemática
SBMAC - Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional
SGS - Software de Geometria Dinâmica
SNHM - Seminário Nacional de História da Matemática
TD - Tecnologias Digitais
UFPA - Universidade Federal do Pará

SUMÁRIO

CONSIDERAÇÕES GERAIS SOBRE O ESTUDO.....17

Este capítulo apresenta a trajetória acadêmica e a motivação da pesquisa, destacando a justificativa, a questão central, a tese defendida, os objetivos e a metodologia adotada.

1. PESQUISAS SOBRE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA E AS TECNOLOGIAS

DIGITAIS.....26

Realiza-se uma revisão da literatura nacional e internacional sobre o tema, com foco nas produções dos Anais do HTEM, do SNHM e em pesquisas do CREPHIMat. Analisa-se a evolução do campo, identificando tendências e lacunas na literatura.

2. HISTÓRIA PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA COM

GEOGEBRA.....52

Explora-se a interseção entre História da Matemática no ensino e o uso de tecnologias digitais, com ênfase no GeoGebra. Discute-se a história como ferramenta cognitiva e a geometria dinâmica como recurso pedagógico para enriquecer o ensino da matemática.

3. UMA HISTÓRIA SOBRE AS CÔNICAS COM UMA ABORDAGEM DO

GEOMÉTRICO AO ALGÉBRICO.....63

Investiga-se a origem e evolução das cônicas, desde Menêmo e Apolônio até suas formulações geométricas e algébricas. Analisa-se a transição da Orthotome para a Parábola, da Oxytome para a Elipse e da Amblytome para a Hipérbole, destacando conceitos matemáticos fundamentais.

4. CORRELAÇÕES HISTÓRICAS, EPISTEMOLÓGICAS E ESCOLARES DAS

CÔNICAS.....125

Propõe-se uma abordagem que associa o estudo das cônicas aos conteúdos de Geometria Analítica, favorecendo uma aprendizagem mais significativa sobre a Parábola, Elipse e Hipérbole, suas propriedades, equações e aplicações no Ensino Superior.

CONSIDERAÇÕES FINAIS.....152

BIBLIOGRAFIA REFERENCIADA.....155

CONSIDERAÇÕES GERAIS

SOBRE O ESTUDO

Com a premissa de melhorar o processo de ensino e aprendizagem da Matemática, alguns estudiosos vêm discutindo diferentes perspectivas teóricas e metodológicas para serem usadas nas salas de aula. O propósito é de que esse processo seja mais reflexivo, significativo e contextualizado, de acordo com a realidade educacional dos estudantes. Na conjuntura da sociedade digital, esses estudantes estão em um contexto permeado por tecnologias eletrônicas e digitais, como os computadores, calculadoras, *tablet*, *smartphone*, etc. Assim sendo, faz sentido que alguns desses recursos sejam direcionados ao ensino e aprendizagem da Matemática. Professores e pesquisadores do mundo todo têm desenvolvido investigações que relatam o uso dessas ferramentas tecnológicas em sala de aula, como os *softwares* de matemática dinâmica, destacando o seu papel nas atividades propostas pelo professor ou seu impacto no ensino e aprendizagem da Matemática.

De igual maneira, desde a última década do século XX, tem sido realizado um grande esforço por parte da comunidade de educadores e pesquisadores na Educação Matemática em realizar trabalhos e experiências que contemplem o uso da História da Matemática, de maneira de desenvolver um ensino da Matemática mais contextualizado, inovador e significativo, baseado no uso de informações do desenvolvimento histórico e epistemológico do conhecimento matemático produzido pela sociedade em diferentes culturas e épocas. Portanto, temos o surgimento de novas alternativas teóricas, metodológicas e estratégias para ensinar Matemática, partindo da constituição histórica de conceitos matemáticos.

Este trabalho representa um esforço para o estabelecimento de conexões entre os domínios da História da Matemática e as Tecnologias Digitais, em um ato de bricolagem que emerge da mistura de elementos tanto do passado como do presente instantâneo, de maneira simultânea. De tal maneira que, na descoberta ou invenção dessas passagens, seja possível estabelecer comunicação entre os domínios supracitados para promover um ensino e aprendizagem da Matemática por meio de atividades históricas expressadas em tecnologias digitais.

Nossa proposta da utilização da tecnologia digital é o *software* de matemática dinâmica GeoGebra. Assim, pretende-se que, por meio do GeoGebra, os estudantes possam

explorar, visualizar, construir e investigar os desenvolvimentos histórico e epistemológico de um conceito matemático, destacando as possíveis correlações algébricas-geométricas desse conceito. Este trabalho está baseado nas diretrizes sustentadas pela História da Matemática para/no ensino (Mendes, 2022); o uso do GeoGebra para o ensino (Hohenwarter, 2014); as potencialidades do uso do GeoGebra (Preiner, 2008),

A escolha deste tema de pesquisa doutoral não é por acaso. O assunto emerge por todo um percurso de experiências formativas e estudos, tendo seu alicerce na trajetória acadêmica desde a graduação até o momento atual da pós-graduação. Portanto, considero necessário descrever uma reflexão memorial suscinta acerca da referida trajetória acadêmica nos seguintes parágrafos.

Durante meus estudos de graduação na Licenciatura em Educação menção Matemática e Física¹ da Universidad del Zulia, na Venezuela (2011-2016), tive a oportunidade de explorar e utilizar alguns *Softwares* de Geometria Dinâmica (SGD) para o ensino da Matemática, tais como o Cabri-Géomètre II plus e o GeoGebra. O primeiro contato com o GeoGebra veio pela minha participação em um minicurso de ensino e aprendizagem da geometria com GeoGebra, oferecido pela *Aprender en Red*, um grupo de pesquisa emergente para o ingresso no percurso da formação superior, com ênfases no uso das Tecnologias Digitais (TD) para o ensino da Matemática.

No final de 2011, tive minha incorporação no referido grupo, o que me permitiu aprimorar competências e habilidades no uso das tecnologias digitais para o ensino da Matemática, por meio de autoformações, discussões de artigos científicos referentes a diversos temas (uso das TD, formação de professores, modelação, teoria da objetivação, etc.), publicação de artigos científicos e comunicações científicas em eventos regionais, nacionais e internacionais da área. De todas as atividades desenvolvidas com o uso do GeoGebra, e que tiveram maior impacto na minha trajetória acadêmica, foram aquelas chamadas Clubes GeoGebra (CG)², realizadas durante os anos 2013-2017.

¹ Licenciatura em Educación mención Matemática y Física, nome original em espanhol.

² Pequeños grupos de trabajo constituídos por alumnos da mesma escola e um professor de Matemática ou futuro professor (Sánchez-Noroño; Sánchez; Gutiérrez; Díaz-Urdaneta; Prieto; Castillo, 2020).

A atividade principal dos CG é a Elaboração de Simuladores com GeoGebra (ESG)³. Todas elas, em seu conjunto, foram experiências incríveis que me permitiram vivenciar durante a minha formação a relação professor- aluno mediante as discussões com alunos de ensino médio (com idade de 12 a 16 anos, que tiveram interesse nas TD e as matemáticas). Destacando o ensino de conhecimentos geométricos, algébricos e, em alguns casos, físicos, mediante o uso do GeoGebra. Dessa experiência, alguns momentos foram sistematizados e apresentados em congressos da área (Sánchez; Prieto, 2016, 2019; Sánchez; Sánchez, 2016) ou na escrita de artigos científicos (Sánchez; Prieto, 2019).

Após o referido percurso na graduação, as atividades desenvolvidas nesse grupo e um longo caminho percorrido da Venezuela para o Brasil, começou um novo capítulo nessa trajetória acadêmica: a Pós-Graduação, como mestranda (março, 2018 –fevereiro, 2020) no Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas (PPGECM) do Instituto de Educação Matemática e Científica (IEMCI) da Universidade Federal do Pará (UFPA). Nesse período, foi desenvolvida uma pesquisa que teve relação direta com a experiência com o uso das tecnologias digitais nos últimos 7 anos, com a atividade da ESG.

O foco da pesquisa foi a aprendizagem geométrica manifestada por um grupo de graduandos da Licenciatura Integrada em Ciências, Matemática e Linguagens do LIEMCI e três professores⁴ de Matemática que participam das atividades de Elaboração de Simuladores com GeoGebra (Sánchez, 2020). Os fundamentos teóricos dessa pesquisa foram baseados na perspectiva histórico-cultural da Teoria de Objetivação⁵, pela qual a aprendizagem é analisada com atenção aos processos de objetivação do saber geométrico, manifestados durante uma série de atividades realizadas nos momentos de matematização e trabalho matemático (dois momentos da atividade de ESG) na Elaboração de Simuladores com GeoGebra.

Para analisar esses momentos, utilizamos a perspectiva *multissemiótica*. Os resultados da pesquisa destacam alguns aspectos dos processos de objetivação evidenciados

³ A ESG é um conjunto de atividades criado pela necessidade de promover a aprendizagem geométrica nos alunos participantes do GC.

⁴ Foi um desses professores que participaram na atividade.

⁵ A Teoria da Objetivação se baseia em uma perspectiva histórico-cultural da aprendizagem matemática, desenvolvida por Luis Radford (2014, 2020). A TO fundamenta-se em uma concepção social de aprendizagem, na qual os sujeitos envolvidos em alguma atividade de ensino-aprendizagem desenvolvem capacidades intelectuais, ao mesmo tempo em que aprendem a se relacionar com os outros, ou seja, promovem também capacidades de relacionamento humano. Radford define a aprendizagem como processos de objetivação e subjetivação que ocorrem simultaneamente e juntos na atividade (Sánchez; Prieto, 2019).

no desempenho de professores e alunos, em relação às atividades realizadas para representar o setor circular no GeoGebra e os meios semióticos utilizados pelos indivíduos (Sánchez; Brandemberg; Castillo, 2020).

Nesse contexto do mestrado, ocorreu o encontro História da Matemática (HM) para o Ensino de Matemática, por meio das discussões do referido tema no grupo GEHEM: Grupo de Estudos e Pesquisa em História e Ensino de Matemática, ao qual eu estava vinculada. Participando dessas discussões, especificamente, de artigos, livros, me deparei pela primeira vez com a possibilidade de que a HM pode ser utilizada como uma metodologia de ensino e aprendizagem da Matemática.

Esse argumento da História no/para o Ensino da Matemática foi ainda mais significativo na continuação da formação como pós-graduanda neste período do doutoramento, com o reforço das diversas explicações e justificativas contínuas nos diálogos e trocas de ideias/orientações entre doutoranda e orientador; rodas de estudos e seminários promovidas pelo Grupo de Pesquisa Práticas Socioculturais e Educação Matemática (GPSEM), grupo ao qual esta pesquisa se vincula.

Nesse sentido, fomos cercando o tema para o estabelecimento do recorte a ser pesquisado. A partir das áreas de interesse de pesquisa do orientador e orientanda, decidimos por desenvolver um trabalho com o diálogo entre a História da Matemática e as tecnologias digitais, para mobilizar conceitos matemáticos na sala de aula. O tema das seções cônicas surgiu depois de amplas leituras sobre a história da Geometria Analítica.

Problema de pesquisa, pergunta e objetivos

O desenvolvimento epistemológico e histórico das seções cônicas teve seu início com os gregos. Segundo os estudiosos da História da Matemática (Boyer, 1974; Lintz, 1999; Estrada et al., 2000), os primeiros três séculos da matemática grega, por volta de 600 a.C. a 200 a.C., formam o período clássico e constituem uma época de grande atividade matemática com realizações extraordinárias de Euclides, Arquimedes e Apolônio de Perga, que assentaram as bases da Matemática atual. A maior contribuição de Apolônio foi sua obra de Seções Cônicas, composta por oito livros. No entanto, segundo Boyer (1974), essas curvas eram conhecidas já há cerca de um século e meio quando surgiu a obra. As cônicas foram estudadas por Euclides, Aristeu e Arquimedes. Porém, alguns historiadores atribuem o

descobrimto das seções cônicas a Menêcmo (séc. IV a.C.), ao tentar resolver o problema clássico da antiguidade: a “Duplicação do Cubo”.

Menêcmo baseou-se em elementos da geometria (segmentos, retas, pontos, cone, etc.) para construir as cônicas, via razões de proporção entre segmentos, utilizando três tipos de cones retos de uma folha, e a interseção com um plano perpendicular à geratriz. Após um século e meio, Apolônio aprofundou o estudo dessas curvas e deu o nome de “Parábola, Elipse e Hipérbole”. Ele mostrou sistematicamente que não é necessário tomar seções perpendiculares a um elemento do cone, e que apenas variando a inclinação do plano da seção de um cone, podem ser obtidas as três seções cônicas. Provou que o cone não precisa ser reto para a obtenção das curvas; pode ser também um cone oblíquo ou escaleno. Além disso, substituiu o cone de uma só folha por um duplo.

Mais tarde, o filósofo e matemático René Descartes (1596-1650) desenvolveu um método para relacionar curvas com equações, em sua obra *A geometria no Discurso do Método*. Isso serviu de base para a chamada Geometria Analítica, que permitiu um novo olhar para as curvas cônicas que podem ser representadas por equações de segundo grau nas variáveis x e y .

Nesse sentido, a abordagem que temos hoje em dia no ensino superior sobre essas curvas esquece-se totalmente das abordagens iniciais de Menêcmo e Apolônio, desvirtuando que o primeiro enfoque foi da geometria, e depois da álgebra. Apenas é apresentado um estudo das cônicas baseado na representação algébrica e na resolução de problemas, com o aprimoramento da álgebra, deixando de lado essa relação entre a geometria e a álgebra. Esse fato pode ser corroborado em livros didáticos. Lima (2015) apresenta um estudo da Elipse, Parábola e Hipérbole puramente algébrico, partindo da definição como lugar geométrico para chegar à equação da curva. No caso dos livros didáticos de Ramírez-Galarza (2011), Iezzi (2013) e Winterle (2014), apresentam-se também as definições das três seções cônicas numa abordagem algébrica e resolução de problemas. Com isso, não queremos dizer que essa abordagem esteja errada, porém, saber como são geradas as cônicas, a relação entre o geométrico e o algébrico, pode ampliar o conhecimento dos professores sobre esse conteúdo matemático.

Sendo assim, vemos que resgatar esse processo histórico, e permitir aos discentes entenderem esse movimento histórico do desenvolvimento epistemológico das seções cônicas, coloca em melhores condições conceituais a compreensão desse conteúdo da

matemática escolar e proporciona um contexto ainda mais significativo para os professores potenciarem suas ações pedagógicas em sala de aula, com atividades baseadas em informações históricas. Por outro lado, no cenário atual, com as tecnologias digitais, em especial os *softwares* de matemática dinâmica como o GeoGebra, é possível apoiar esses processos de atividades de investigação histórica em sala de aula, no momento de abordar o conteúdo de fato, resgatando essas abordagens tanto da geometria euclidiana plana por si só, como da combinação com a álgebra. Nesse sentido, será possível que os discentes consigam visualizar e manipular essas representações do mesmo objeto matemático, com o propósito de estabelecer correlações com as expressões algébricas dessas curvas. Essa possibilidade é favorecida pelo tipo de suporte digital que esse *software* possui em relação a outras tecnologias mais tradicionais, como o quadro branco e pincel.

Depois de todo o panorama exposto até o momento, observa-se que parece plausível estabelecer relações entre a História da Matemática e as tecnologias digitais. Certamente, são necessários maiores aprofundamentos nessa linha, com possibilidades de criar encaminhamentos que podem ser mobilizados para o ensino da Matemática, partindo de explorações didáticas da história das ideias matemáticas já produzidas, e que podem ser (re)exploradas hoje em dia com uma nova perspectiva mediante as tecnologias digitais.

Nesta pesquisa doutoral, sustenta-se que, a interconexões entre a história das Cônicas e o uso do GeoGebra pode potencializar o ensino de Geometria Analítica no nível superior. Ao integrar o desenvolvimento histórico e epistemológico das cônicas com recursos de geometria dinâmica, é possível promover uma compreensão mais significativa das relações entre suas representações algébrica e geométrica, favorecendo o ensino e aprendizagem e ampliando as possibilidades didáticas além dos modelos tradicionais presentes nos livros didáticos.

Dessa forma, a pesquisa se orienta pela seguinte questão central: Como a integração entre a história das Seções Cônicas e o uso do GeoGebra pode potencializar o ensino de Geometria Analítica no nível superior, favorecendo a conexão entre suas representações algébrica e geométrica e ampliando as possibilidades didáticas além dos livros didáticos?

No intuito de dar resposta à questão lançada, elaboramos os objetivos que guiarão todo nosso estudo.

Objetivo geral

Explorar como a integração entre a história das Cônicas e o uso do GeoGebra pode potencializar o ensino de Geometria Analítica no nível superior, favorecendo a conexão entre suas representações algébrica e geométrica e ampliando as possibilidades didáticas além dos modelos tradicionais presentes nos livros didáticos.

Objetivos específicos

- Identificar tendências, avanços e lacunas nas pesquisas apresentadas nos Anais do HTEM, SNHM e nas produções do CREPHIMat sobre as relações entre História da Matemática e Tecnologias Digitais;
- Caracterizar as potencialidades da História da Matemática para o Ensino e o GeoGebra como recurso pedagógico no ensino de conceitos matemáticos no contexto da geometria dinâmica;
- Sistematizar um desenvolvimento histórico e epistemológicos das Cônicas, analisando a transição de suas formulações geométricas para as representações algébricas, a fim de compreender melhor seus conceitos fundamentais e suas implicações didáticas;
- Propor sugestões para sala de aula para relacionar a história das Cônicas aos conteúdos nos livros didáticos de Geometria Analítica, visando facilitar a compreensão da Parábola, Elipse e Hipérbole e ampliar as possibilidades pedagógicas no Ensino Superior.

Procedimentos metodológicos

Para alcançarmos os objetivos propostos, realizamos uma pesquisa bibliográfica de abordagem qualitativa, que se vincula à leitura, análise e interpretação de livros, periódicos, manuscritos, relatórios, teses, monografias etc. (Severino, 2013). Para Gil (2008), a pesquisa bibliográfica é desenvolvida a partir de material já elaborado, constituído principalmente de livros e artigos científicos. Segundo este autor:

Existem, de um lado, os documentos de primeira mão, que não receberam qualquer tratamento analítico, tais como: documentos oficiais, reportagens de jornal, cartas, contratos, diários, filmes, fotografias, gravações etc. De outro lado, existem os documentos de segunda mão, que de alguma forma

já foram analisados, tais como: relatórios de pesquisa, relatórios de empresas, tabelas estatísticas, etc (Gil, 2008, p. 51).

Assim sendo, a bibliografia especializada consultada para esta pesquisa é referente a: (1) possível relação entre a HM e as TD em trabalhos publicados nos anais de eventos científicos da área e artigos científicos; (2) textos de fontes secundárias e terciárias sobre a história das seções cônicas; e (3) livros didáticos de Geometria Analítica. Na intenção de estabelecer uma diretriz que norteasse essa investigação, este trabalho segue as seguintes etapas.

Em uma primeira fase, fizemos o levantamento bibliográfico necessário para os estudos iniciais, para conhecer o panorama atual de pesquisas que abordam o uso da História da Matemática e das Tecnologias Digitais para o ensino de matemática. Para isso foram consultadas uma tese e dissertações encontradas no Centro Brasileiro de Referência em Pesquisa sobre História da Matemática (CREPHIMat), os Anais do Seminário Nacional de História da Matemática (SNHM) e do Colóquio de História e Tecnologia no Ensino de Matemática (HTEM) e artigos publicados em revistas científicas da área.

Na fase seguinte, discutimos o modelo teórico-referencial fundamentado nos princípios defendidos por Mendes (2009, 2022), quando propõe sugestões de uso da história no ensino de matemática via atividades históricas; e nas ideias de Preiner (2008) e Prieto (2016) sobre uma categorização do uso da aplicação do GeoGebra em situações de ensino e aprendizagem da matemática baseadas na perspectiva de Hohenwarter e Fuchs (2004).

Seguidamente fizemos um desenvolvimento histórico-epistemológico das seções cônicas baseado em fontes históricas, secundárias e terciárias de Menêmo e Apolônio e no tratamento realizado por Smith a essas curvas, amplamente estudadas por matemáticos, filósofos e astrônomos ao longo dos séculos. A escolha desses matemáticos, para nós, tem a ver com momentos significativos da história das cônicas ao longo do tempo. Menêmo deu a conhecer essas curvas na busca da solução do problema da duplicação do cubo. Anos mais tarde, Apolônio fez um estudo mais completo, em seu célebre tratado *As cônicas*. Smith, por sua vez, apresenta um tratamento geométrico para obter a equação reduzida de cada cônica a partir da definição delas como lugar geométrico. Logo depois, com uso das cônicas encontradas nos livros didáticos de geometria analítica, fazemos sugestões para os professores para o ensino desse conteúdo, utilizando os fundamentos e métodos emergentes contidos no desenvolvimento histórico das seções cônicas.

Este trabalho está estruturado da seguinte maneira: esta primeira parte trata sobre as considerações gerais sobre o estudo, apresentando uma síntese da trajetória acadêmica da autora e a motivação para a pesquisa. Logo, fazemos a abertura da temática pesquisada, abordando a justificativa, a questão central, a tese a sustentar, o objetivo geral e os objetivos específicos e o percurso metodológico que orientou a pesquisa e a redação do trabalho doutoral.

O Capítulo 1, intitulado “Pesquisas sobre História da Matemática e as Tecnologias Digitais”, descreve a revisão de literatura sobre a produção acadêmico-científica proveniente tanto de fontes internacionais quanto de fontes nacionais, em particular nos Anais do HTEM e do SNHM. São analisadas as contribuições dessa produção para uma compreensão abrangente do tema em questão. Adicionalmente, a pesquisa estender-se-á para incluir teses e dissertações disponíveis no CREPHIMat, com o objetivo de realizar uma análise sobre as principais tendências e lacunas identificadas nesse corpo de literatura sobre a temática abordada.

O Capítulo 2 trata sobre a História para o Ensino de Matemática com GeoGebra, direcionando o foco para a interseção entre duas áreas de interesse no contexto do ensino da matemática: História da Matemática para o Ensino e no ensino e uso das Tecnologias Digitais, particularmente o GeoGebra. A abordagem busca alicerçar-se em fundamentos epistemológicos da Investigação Histórica para o ensino como uma possibilidade por meio de atividades, da História como Acionador Cognitivo do Pensamento (Mendes, 2006, 2023) e de um ambiente de geometria dinâmica para o ensino: o GeoGebra. Exploraremos as bases para sustentar as relações intrínsecas para um ensino de matemática na conjunção desses elementos, possibilitando ações pedagógicas mais enriquecedoras e alinhadas com as demandas curriculares contemporâneas.

No Capítulo 3, intitulado “Uma história sobre as seções cônicas com uma abordagem do geométrico ao algébrico”, descrevemos a origem das cônicas, traçando sua evolução a partir das ideias e noções de Menêmo e Apolônio. Desbravaremos o desenvolvimento da Orthotome até a Parábola, da Oxytome até a Elipse e da Amblytome até a Hipérbole. Cada estágio de sofisticação será minuciosamente explorado, destacando o estudo por meio de razão e proporcionalidade de segmentos e a análise sob uma perspectiva tanto geométrica quanto algébrica e suas correlações. Esse capítulo proporciona uma compreensão abrangente

das bases fundamentais que culminaram nas propriedades distintas das cônicas, hoje encontradas nos livros didáticos.

O Capítulo 4 trata sobre conexões entre o desenvolvimento histórico e epistemológico das seções cônicas e os conteúdos do livro de geometria analítica. Apresenta uma proposta de abordagem dos conteúdos relacionados ao estudo da Orthotome, do Oxytome e da Amblytome, associando-os às unidades temáticas do livro de geometria analítica, com o objetivo de desenvolver processos de aprendizagem compreensiva (Knobbe, 2014; Mendes, 2023) sobre a Parábola, a Elipse e a Hipérbole, abrangendo conceitos, propriedades, equações e métodos de resolução pertinentes aos assuntos que viemos de mencionar. Isso se justifica, uma vez que, nos capítulos anteriores deste trabalho, ficou evidente a viabilidade das contribuições que poderão ressignificar o estudo da geometria analítica no Ensino Superior.

Finalmente, o último capítulo deste estudo apresenta as considerações finais da pesquisa.

1

PESQUISAS SOBRE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA E AS TECNOLOGIAS DIGITAIS

Esta pesquisa se demarca no conjunto, aparentemente sem junção, que se refere a dois temas que têm sido amplamente abordados e pesquisados na Educação Matemática, a saber: a História da Matemática (Mendes, 2006, 2009, 2015, 2022; 2023) e outros; e as Tecnologias Digitais (Borba, 2007; Borba E Penteadó, 2007; Aguilar, 2012; Rojano, 2014).

No que se refere à História da Matemática como campo de pesquisa, está em constituição no Brasil desde as últimas cinco décadas do século XX e início do século XXI. Nesse percurso, pesquisadores dos meios acadêmicos relacionados à área de Educação Matemática têm refletido e dialogado sobre tendências híbridas da pesquisa em História da Matemática (Mendes, 2022). Esse fato se comprova pelas pesquisas que são apresentadas em: eventos científicos, tais como o Seminário Nacional de História da Matemática (SNHM) e o Colóquio de História e Tecnologia no Ensino de Matemática (HTEM); nas produções acadêmicas (teses e dissertações) geradas nos programas de pós-graduação *stricto sensu*, no Brasil, e em artigos científicos publicados em revistas científicas da área.

Conforme já mencionamos, a maioria desses trabalhos podem ser encontrados no Centro Brasileiro de Referência em Pesquisa sobre História da Matemática (CREPHIMat)⁶. A esse respeito, Castillo e Mendes (2019, 2020) descrevem que o referido centro tem a função de repositório digital para organizar e disponibilizar à comunidade acadêmica o maior acervo digital de produções acadêmico-científicas relacionadas à História da Matemática. Dada a relevância, nos tempos atuais, da História da Matemática na educação,

⁶ Reiteramos que, para maiores informações, o leitor interessado no tema deve acessar o seguinte endereço eletrônico: <<http://www.crephimat.com.br>>.

é inevitável perguntar-se: O que é História da Matemática? O que se entende por História da Matemática? Mendes (2022) dá resposta a essas interrogações, ao apontar o seguinte:

Falar de história nos leva à narração de fatos e acontecimentos ocorridos na evolução das sociedades ou, ainda, no grupo de conhecimentos adquiridos através da tradição, e/ou mediante documentos ligados ao passado da humanidade. Não se pode, contudo, perder a certeza de que o hoje é resultado das evoluções mentais, sociais, físicas e climáticas de ontem. O ontem é o ocorrido, às vezes, documentado, ou mesmo transmitido oralmente, que se transforma em história (Mendes, 2022, p. 27).

De fato, a Matemática que é estudada atualmente é o resultado de reflexões feitas por muitas pessoas, na busca pela compreensão do mundo e na resolução de problemas da vida. Mendes (2015) ainda relata um fato muito presente quando nos deparamos pela primeira vez com a expressão *uso da História da Matemática no/para o ensino*. Nas palavras do autor: “quase sempre se confunde com pensar que se trata apenas de uso das narrativas que se referem a datas, nomes, locais e feitos heroicos relacionados com a Matemática, e muitas vezes desvinculados dos conteúdos que os professores se propõem a ensinar a seus estudantes” (Mendes, 2022, p. 122). Dessa forma, assumimos a postura de Mendes sobre o uso da História da Matemática no ensino, quando se refere “às explorações didáticas da história das ideias produzidas no tempo e no espaço e como, atualmente elas podem ser refletidas na Matemática que ensinamos hoje em dia” (Mendes, 2015). Sobre essas explorações de conteúdos matemáticos há muito o que falar, considerando todo o material disponível hoje em dia sobre o desenvolvimento da geometria, a álgebra e a aritmética.

Mendes (2015) relata uma busca por um modelo didático investigatório para a Matemática. Seus estudos apontam a o uso da História da Matemática como um agente de cognição Matemática e como um reorganizador cognitivo. Nesse sentido, e com base nos estudos, ações e reflexões realizadas por Mendes durante sua experiência docente na Educação Básica, sua formação profissional e os resultados de suas pesquisas desde os anos de 1990, ele defende a tese de que:

Uma abordagem didática investigatória nas aulas de Matemática, apoiada nas informações históricas, pode contribuir na concretização de um ensino e aprendizagem da Matemática com significado, ao desenvolver situações históricas problematizadoras que conduzam os estudantes em busca de sua aprendizagem matemática (Mendes, 2015, p. 121).

Com dito pelo pesquisador, reconhecemos ser importante para os professores que ensinam Matemática, agregando outras metodologias que podem ser implementadas nas salas de aula. Mendes (2015, p. 127) ainda apresenta uma nova maneira de olhar a Matemática no século XXI, partindo da proposta de uma possibilidade didática que tem que “recorrer à história dos tópicos matemáticos com a finalidade de reconstruir algumas práticas que podem ser viáveis para que, na atualidade, o estudante aprenda Matemática conectada às necessidades e exigências da contemporaneidade (contextualização, problematização, interdisciplinaridade, transversalidade) e materializadas com o apoio das tecnologias de informação e comunicação (TIC)”. Vemos, então, que pensar em um processo de ensino da Matemática que pode ser abordada desde a HM e as TD é viável, produtivo, ainda mais considerando atividades que levem aos estudantes a agir, a refletir e a produzir seu próprio conhecimento junto aos seus colegas e professor.

Por outro lado, as Tecnologias Digitais, durante as últimas décadas, têm sido objeto de estudo por diversos pesquisadores do campo da Educação Matemática para seu uso no ensino e a aprendizagem de Matemática, tornando-se mais um elemento que compõe a atividade Matemática da aula (Rojano, 2014). Seu uso é apresentado ao professor como um recurso a mais que pode acrescentar em sua metodologia para o ensino da Matemática, devido às potencialidades reportadas em livros (Borba; Villareal, 2005; Borba; Pentead, 2007), eventos científicos - na edição de 2018 do ICME-13 Monographs – *Uses of Technology in Primary and Secondary Mathematics Education*, volume dedicado aos estudos do uso das tecnologias digitais na Educação Matemática - e artigos em revistas científicas.

Segundo Zeynivandnezhad, Mousavi e Kotabe (2020), existem pesquisas significativas sobre os benefícios da integração de tecnologias digitais e sobre a descrição de seus efeitos no ensino e na aprendizagem da Matemática. Um exemplo desse interesse investigativo é perceptível na pesquisa de Rivers (2018), intitulada: *Empírica Evidencie for Benedict? Reviewing Quantitative Research on the Use of Digital Tools in Mathematics Education*. Nesse capítulo, o pesquisador diz que os “benefícios do uso de tecnologias digitais na educação, e na educação Matemática em particular, está sujeito a debate” (Drijvers, 2018, p. 01). Para pesquisar esses benefícios, teve como objeto de estudo os relatórios de pesquisas de estudos experimentais e quantitativos sobre o efeito do desempenho dos alunos com tecnologias digitais na sala de aula. No caso dessa pesquisa,

como resultado, obteve que são benéficas as contribuições do uso de Tecnologias Digitais na sala de aula de Matemática. Segundo Drijvers (2018), os alunos da Educação Básica parecem se beneficiar mais, destacando que os resultados são melhores para geometria do que para álgebra.

Gadanidis, Borba e Silva (2014) apresentam em seu livro quatro fases das tecnologias digitais em educação matemática. Na primeira fase, os autores ressaltam que as discussões ao redor do uso de calculadoras simples, científicas e computadores já estavam presentes na educação matemática por volta dos anos 1980. Naquela época, as expressões utilizadas para se referirem ao computador e *softwares* eram, por exemplo, “tecnologias informáticas” (TI) ou “tecnologias computacionais”. Porém, para os referidos autores, a primeira fase é definida fundamentalmente pelo uso do *software* LOGO, que teve início no ano de 1985. O que se seguiu foi o desenvolvimento de pesquisas com relação à produção de conhecimento matemático com uso da tecnologia da informação, e a consequente transformação das práticas pedagógicas e didáticas.

A segunda fase teve início na metade dos anos 1990, quando diversos *softwares* educacionais foram criados. Além disso, os professores encontraram cursos de formação continuada referentes ao uso das TI como ferramentas de apoio em suas aulas. Gadanidis, Borba e Silva (2014) destacam o uso de *softwares* voltados às múltiplas representações de funções (o Winplot e o Graphmatica), de geometria dinâmica (o Cabri Géomètre e o Geometricks) e mencionam o uso de sistemas de computação algébrica (o Maple).

A terceira fase teve início no ano de 1999 com a chegada da internet. Nessa fase, devido à natureza informacional e comunicacional da internet, surgem e se consolidam expressões como “tecnologias da informação e comunicação” (TIC). Naquele momento, diversas questões foram e ainda são pesquisadas por diversos autores. A quarta fase, segundo os autores, está sendo vivida neste momento, desde seus inícios por volta de 2004. Aqui se tornou comum o uso do termo “tecnologias digitais” (TD). Essa quarta fase é caracterizada por vários aspectos, dentro deles, o uso do GeoGebra, de vídeos na internet, comunidades on-line, aplicativos on-line, entre outros. Borba, Souto e Canedo Júnior (2022) apontam ainda o advento da quinta fase com os vídeos e um ator não humano, o vírus da COVID-19.

Após a descrição do panorama atual do que se tem discutido sobre cada um dos domínios da História da Matemática e Tecnologias Digitais em separado, temos o propósito de indagar sobre os possíveis diálogos entre eles, focalizando como tecnologia o GeoGebra.

Assim sendo, nos parágrafos a seguir, descrevemos e comentamos um percurso de pesquisas com foco no uso da História da Matemática e do GeoGebra, no nível internacional e nacional.

O primeiro trabalho, de autoria de Aguilar e Zabaleta (2015), intitulado *The difference as an analysis tool of the change of geometric magnitudes: the case of the circle*, foi apresentado no *Seventh European Summer University (ESU) on the History and Epistemology in Mathematics Education*, combinando elementos históricos da Matemática com o uso de ferramentas tecnológicas. Os autores acreditam que esse tipo de proposta que alia a história e o uso da tecnologia deve ser mais desenvolvido, pois, por um lado, o uso da história no ensino da geometria pode ter um valor motivacional para os alunos e, por outro lado, o uso da tecnologia pode agregar significado aos conceitos estudados na sala de aula de Matemática, ao tornar evidente a relação entre os diferentes contextos de representação (como o numérico, o algébrico e o geométrico).

A partir desse trabalho, encontramos a propostas de Kidron (2003), tendo como foco examinar o efeito da aplicação de computação simbólica e gráfica para melhorar a capacidade dos alunos de passar de uma interpretação visual de conceitos matemáticos para o raciocínio formal. Os tópicos de matemática envolvidos, Aproximação e Interpolação, foram ensinados de acordo com seu desenvolvimento histórico e epistemológico, e os alunos procuraram acompanhar o processo de pensamento dos criadores da teoria.

Nesse trabalho, se descreve que os alunos usaram um sistema de álgebra computacional para manipular expressões algébricas e gerar uma ampla variedade de gráficos dinâmicos. Assim, a tecnologia do século XX foi aplicada para “caminhar” com os alunos desde o período de Euler em 1748 até o período de Runge em 1901. Kidron (2003) considera que essas situações combinando gráficos dinâmicos, algoritmos e perspectiva histórica possibilitaram aos alunos melhorarem a compreensão de conceitos como limite, convergência e aproximação.

No artigo de Caglayan (2016) são propostos diversos métodos para resolver a quadratura das lúnulas, usando os argumentos de conservação e similaridade de área de Hipócrates de Quios. Entre esses métodos para usar a história na sala de aula, se descreve um por meio de *software* de geometria dinâmica, como o GeoGebra, para apresentar de uma maneira que complementa as abordagens analítica e visual, no dizer algébrico e geométrico. Segundo Caglayan (2016), os estudantes indicaram que acharam bastante simples resolver

esses problemas por meio do *software* de geometria dinâmica. Nessas experiências, o referido autor destaca que esse contexto permitiu mobilizar as noções das partes dos círculos e dos teoremas envolvendo arcos, cordas, segmentos e ângulos.

Meadows e Caniglia (2021) tem como foco especificamente o desenvolvimento de provas para professores de formação inicial, utilizando *software* de geometria dinâmica (DGS) para revisitar provas históricas com uma lente digitalizada. A novidade desse artigo foi a combinação da incorporação da História da Matemática (HM), do GeoGebra e do modelo de argumentação de Toulmin. Nessa abordagem pedagógica, a natureza dinâmica do GeoGebra permitiu, aos professores de Matemática em formação inicial, verem vários exemplos de um método que lhes fornece uma ilustração que pode ser utilizada em provas matemáticas.

No trabalho publicado por Thomsen (2020), no *The Ninth Nordic Conference on Mathematics Education*, intitulado *Working with Euclid's geometry in GeoGebra*, se apresenta resultados de uma pesquisa sobre a interação entre fontes primárias da História da Matemática e o GeoGebra, de forma a apoiar o desenvolvimento de processos de raciocínio em estudantes de 10 aos 13 anos. O estudo centra-se em como usar o GeoGebra em combinação com fontes originais com conteúdo geométrico.

Os resultados da pesquisa de Thomsen (2020) destacam o fato de a geometria euclidiana estar incorporada na forma como o GeoGebra foi materializado e, como isso, possibilita as oportunidades e desafios aos alunos quando estão envolvidos em atividades de raciocínio e demonstração nesse ambiente virtual. Esses resultados emergem da análise de dois exemplos empíricos envolvendo alunos do sexto ano trabalhando com a interação entre as proposições 6 e 7 de Euclides, livro IV e o GeoGebra.

Resultados semelhantes à pesquisa anterior podem ser encontrados no artigo de autoria de Jankvist e Geraniou (2021), intitulado *“Whiteboxing” the Content of a Formal Mathematical Text in a Dynamic Geometry Environment*. Nesse artigo, é descrito um exemplo empírico de como a tecnologia digital; nesse caso o GeoGebra, pode ajudar os alunos a descobrirem o conteúdo de uma prova matemática usando como caso particular a Proposição 41 dos Elementos de Euclides. Na discussão do exemplo, foi analisado o impacto da funcionalidade de “arrastar” do GeoGebra nas interações dos alunos e na posse e desenvolvimento dos esquemas de prova deles.

Os resultados da pesquisa ressaltam os efeitos positivos em relação ao conteúdo matemático da proposição, o *Whiteboxing*, através do arrastamento, exigindo cautela em relação ao trabalho dos alunos com prova. Além disso, os autores refletem que, nesse processo do *Whiteboxing*, os professores devem ter cautela, por exemplo, para que os alunos não tirem conclusões precipitadas e no processo desenvolvam esquemas de prova matemática inadequados, os quais podem criar dificuldades mais à frente.

O artigo publicado no *Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, de autoria de Zengin (2018) e intitulado *Incorporating the dynamic mathematics software GeoGebra into a history of mathematics course. International*, foi desenvolvido para responder: quais eram as opiniões dos futuros professores de Matemática sobre o curso de História da Matemática no qual o GeoGebra foi incorporado? Portanto, o objetivo do estudo foi investigar a visão dos futuros professores sobre o curso de História da Matemática em que o GeoGebra foi utilizado. Os participantes eram 23 professores de Matemática em formação inicial, que estudavam em uma universidade estadual na Turquia.

Como resultado dessa pesquisa, se determinou que o GeoGebra era uma ferramenta eficaz na aprendizagem e no ensino da História da Matemática. A análise da visão desses futuros professores revelou que o GeoGebra lhes permitiu perceber o desenvolvimento histórico de conceitos e métodos matemáticos. Um exemplo é apresentado sobre o processo de exploração do número π utilizando o Método de Arquimedes. Os futuros professores construíram esse método passo a passo.

Zengin (2018) observou que, enquanto os futuros professores examinavam a estrutura dinâmica do GeoGebra no final do processo de construção, eles perceberam muito melhor que a abordagem histórica envolvia esforços extremamente valiosos. Os futuros professores entenderam facilmente como foi o esforço de Arquimedes para estimar o número π , aumentando o número de lados do polígono com a ajuda do controle deslizante no GeoGebra.

Além disso, a investigação dos conceitos incluídos no curso de história da matemática num ambiente dinâmico proporcionou uma experiência de aprendizagem agradável. A visão de um dos futuros professores, após usar o GeoGebra no curso de História da Matemática, expressa que as aulas ficaram mais agradáveis e o medo foi substituído pela curiosidade durante o estudo das provas históricas com o *software*.

Como foi possível perceber, há um interesse pelo uso da História da Matemática em combinação com as tecnologias digitais, como o caso dos *softwares* de geometria dinâmica e, em específico, o GeoGebra, desde o início do século XXI. Com o trabalho de Kidron (2003), destacamos que isso não quer dizer que não tenham outros trabalhos anteriores com outras tecnologias, só que nosso foco são aqueles trabalhos que usam GeoGebra e História da Matemática.

Conseguimos compreender que a maioria dessas abordagens são de um ponto de vista geométrico, e há poucos trabalhos do tipo para estabelecer abordagens que vinculam mais de uma forma de representar os objetos matemáticos, por exemplo de abordagem algébrico-geométrico, como no caso das cônicas. Outro assunto de interesse é que tivemos a possibilidade de constatar que as relações entre História da Matemática e Tecnologias Digitais, como o GeoGebra, podem ser plausíveis de serem estabelecidas tanto na Educação Básica, a partir do Ensino Fundamental II, quanto no Ensino Médio e Superior, nas pesquisas mapeadas e comentadas anteriormente. Assim sendo, na seção seguinte, teremos um olhar, no contexto do Brasil, sobre como se refletem essas abordagens entre História da Matemática e Tecnologias Digitais.

1.1. História da Matemática e Tecnologias Digitais no Brasil: um percurso investigativo

Nesta seção, apresentamos um panorama geral das pesquisas realizadas no Brasil que exploram a integração entre História da Matemática e Tecnologias Digitais no ensino de Matemática, com ênfase naquelas que utilizam o GeoGebra. Esse mapeamento resulta de publicações anteriores que subsidiaram a construção deste capítulo, incluindo análises dos anais dos eventos HTEM (Castillo; Sánchez; Mendes, 2023) e SNHM (Castillo; Sánchez; Mendes, 2023), além de um levantamento de teses e dissertações disponíveis no acervo do Centro Brasileiro de Referência em Pesquisa sobre História da Matemática (CREPHIMat) (Sánchez; Castillo; Mendes, 2021).

1.1.1 Colóquio de História e Tecnologia no Ensino de Matemática (HTEM)

O HTEM foi lançado em 2002, com o objetivo de criar um espaço de discussões acerca dos aportes e impactos das pesquisas sobre a história da matemática e sobre o papel das tecnologias no ensino de matemática. Vários eventos tratam ora das tecnologias na

Educação Matemática (Congresso Brasileiro do GeoGebra), ora de história da matemática (SNHM, ELBHM), mas em geral, há poucas conexões entre tais temáticas. O HTEM teve ocorrência a cada dois anos e no total foram realizados VI edições.

Cada uma das edições do HTEM teve seus próprios anais, no total são 6 anais que reúnem os trabalhos apresentados no evento em suas diferentes modalidades. Queremos destacar ainda que, em nenhum momento, temos a pretensão de avaliar as produções, senão, ter um panorama das pesquisas e relatos de experiências que possam vislumbrar possíveis relações entre a História e Tecnologias para o ensino da Matemática. Tendo em vista que os trabalhos nos anais do HTEM têm duas vertentes, com as seguintes categorias: **História no Ensino da Matemática (HEnM)**: aqueles trabalhos apresentados no HTEM que tiveram referência só com o uso da História da Matemática para o ensino da Matemática - nos baseamos nas ideias propostas por Mendes (2015) sobre essa categoria; **Tecnologias no Ensino da Matemática (TEEnM)**: que tiveram referência só com o uso das Tecnologias Digitais para o ensino da Matemática; **História e Tecnologias no Ensino da Matemática (HTEnM)**: trabalhos apresentados no HTEM que tiveram referência ou alguns indícios do uso da HM e as TD para o ensino da Matemática. O quadro 1 detalha a quantidade de trabalhos encontradas nos anais, assim como a quantidade por categoria.

Quadro 1: Trabalhos publicados nos Anais dos Colóquio de História e Tecnologia no Ensino de Matemática – HTEM (2002 – 2013)

Colóquios realizados	Ano	IES/ Local	Trabalhos publicados	Trabalhos sobre História no Ensino da Matemática (HEnM)	Trabalhos sobre o uso das Tecnologias no Ensino da Matemática (TEEnM)	Trabalhos sobre História e Tecnologias no Ensino da Matemática (HTEnM)
I HTEM	2002	UERJ (RJ)	30	04	16	02
II HTEM	2004	UERJ (RJ)	35	12	22	06
III HTEM	2006	PUC-SP (SP)	43	18	22	04
IV HTEM	2008	UFRJ (RJ)	65	04	36	02
V HTEM	2010	UFPE (PE)	48	21	26	2
VI HTEM	2013	UFSCar (SP)	25	6	17	2
Total			151	57	87	18

Fonte: Elaborado pela autora

Nosso intuito foi identificar trabalhos com o uso do GeoGebra e História da Matemática para o Ensino, de maneira que fosse possível explorar as metodologias propostas

pelos pesquisadores. Nesse total de 7 trabalhos na tabela anterior, foram utilizadas diversas tecnologias, porém, dado o interesse investigativo, destacam-se no Quadro 2 os trabalhos que utilizam o GeoGebra e HM:

Quadro 2. Trabalhos que contemplaram o uso Tecnologias e História da Matemática para o Ensino

Edição	Ano	Autor	Título
IV HTEM	2008	Luiz Antônio Jacyntho e Luiz Mariano Carvalho.	Atividades no GeoGebra sobre demonstrações de Arquimedes e Barrow.
VI HTEM	2013	Maria Deusa Ferreira da Silva.	Os métodos para calcular áreas e volumes de Eudoxo e Arquimedes: um olhar sob a perspectiva histórica fazendo o uso das novas tecnologias.

Fonte: Elaborado pela autora

No total, foram 02 trabalhos que fizeram alguma menção ao uso do GeoGebra e História da Matemática para o Ensino nas diferentes modalidades do evento: Comunicação, Pôster e Resumo. O primeiro deles foi o trabalho de Jacyntho e Carvalho (2008), o qual apresenta a demonstração de que a área de qualquer círculo é equivalente a de um determinado triângulo retângulo, prova elaborada por Arquimedes. Os autores fizeram a referida demonstração através de Geometria Dinâmica, utilizando o *GeoGebra*, sendo possível obter visualizações e, conseqüentemente, uma melhor compreensão da demonstração. Além disso, também foi possível entender casos particulares do Teorema Fundamental do Cálculo, explorados por Barrow. Os autores afirmam que o uso de textos históricos e o *software* de Geometria Dinâmica tem o intuito de aumentar o interesse dos alunos pelo desenvolvimento da Matemática, acentuando diferenças, similaridades, limitações entre várias épocas do desenvolvimento do pensamento matemático.

O segundo trabalho de Silva (2013) apresentou os métodos utilizados por Eudoxo e Arquimedes para determinar áreas e volumes de regiões curvas, para o desenvolvimento conceitual do Cálculo Integral apoiado no uso de ferramentas tecnológicas, de maneira a mostrar que foi possível associar a História da Matemática fazendo uso de *softwares* de Matemática. Para isso, a autora apresenta alguns dos métodos desenvolvidos pelos antecessores de Arquimedes e, em seguida, coloca em cena os métodos de Arquimedes para calcular áreas e volumes e para finalizar, mostrando que esses métodos podem ter uma nova leitura quando utilizamos novas tecnologias. Podemos constatar que ambos os trabalhos abordam assuntos da geometria, apresentado métodos para determinar áreas e volumes e demonstrações de teoremas feitos por antigos estudiosos.

1.1.2. Seminário Nacional de História da Matemática – SNHM (1995-2021)

Da mesma forma, o mapeamento⁷ feito no SNHM buscou indagar quais são os trabalhos publicados nos anais do SNHM entre os anos 1995 – 2021, que apresentam as possíveis relações para o uso da História e Tecnologia Digitais no Ensino da Matemática.

O Seminário Nacional de História da Matemática (SNHM) foi concebido como espaço tanto para o debate, estudos e pesquisas sobre História da Matemática, quanto para a sua disseminação e divulgação. Tendo como público-alvo pesquisadores em História da Matemática e História da Educação Matemática, bem como professores dos vários níveis educacionais, estudantes de graduação, pós-graduação e demais interessados nessa temática. A periodicidade do SNHM é a cada dois anos (ano ímpar), a abertura do evento é realizada na noite de domingo de Ramos e término na quarta-feira da Semana Santa. Neste trabalho, foram analisados desde a primeira edição até a edição do ano 2021.

A seguir, apresentamos no Quadro 3 as produções sobre estudos e pesquisas em História da Matemática nos anais do SNHM. Dado que nosso interesse é a história para o ensino de Matemática, nossa atenção será nos trabalhos do eixo de pesquisa “História no Ensino da Matemática” conceituado por Mendes (2015, 2018, 2019).

Quadro 3: Distribuição dos trabalhos publicados nos anais do SNHM (1995-2021)

Seminários realizados	Ano	Local	Trabalhos sobre História da Matemática	Trabalhos sobre História no Ensino da Matemática
1º SNHM	1995	Recife-PE	15	04
2º SNHM	1997	Águas de São Pedro-SP	31	05
3º SNHM	1999	Vitória-ES	46	10
4º SNHM	2001	Natal-RN	28	03
5º SNHM	2003	Rio Claro-SP	30	02
6º SNHM	2005	Brasília-DF	29	01
7º SNHM	2007	Guarapuava-PR	28	03
8º SNHM	2009	Belém-PA	119	27
9º SNHM	2011	Aracaju-SE	94	21
10º SNHM	2013	Campinas-SP	58	14
11º SNHM	2015	Natal-RN	120	28
12º SNHM	2017	Itajubá-MG	54	13
13º SNHM	2019	Fortaleza-CE	119	44
14º SNHM	2021	Uberaba-MG	79	20
Total			850	195

Fonte: Elaborado pela autora

⁷ Para maiores detalhes, ver o artigo de Castillo, Mendes e Sánchez, 2023 nas referências

De acordo com o Quadro 3, torna-se visível tanto a quantidade de trabalhos na sua totalidade, bem como a sua distribuição na categoria História no Ensino de Matemática. Como temos a previsão de encontrar possíveis relações entre Tecnologias e História da Matemática para o Ensino, foi feita uma (re)leitura desses trabalhos e selecionados aqueles que utilizaram o GeoGebra. No quadro 5 estão os 04 trabalhos que fizeram alguma menção ao uso do GeoGebra e História da Matemática para o Ensino.

Quadro 4: Trabalhos no SNHM que contemplaram o uso Tecnologias e História da Matemática para o Ensino

Edição	Ano	Autor(es)	Título
9º SNHM	2011	Francisco Regis Vieira Alves	Discussão dos Métodos Arábicos para a Resolução da Cúbica com suporte computacional
11º SNHM	2015	Francisco Regis Vieira Alves e Rui Eduardo Brasileiro	História e Tecnologia no Ensino: sobre o Teorema Fundamental da Álgebra – TFA
11º SNHM	2015	Rui Eduardo Brasileiro e Francisco Regis Vieira Alves	Redescobrimo Ceva e Menelaus em dimensão três
13º SNHM	2019	Ivonne C. Sánchez S. e João Cláudio Brandemberg	História da matemática com tecnologia digitais: uma aliança possível para o ensino do teorema de Pitágoras
13º SNHM	2019	Giancarlo Secci de Souza Pereira e Cristiane Ruiz Gomes	Teorema de Carnot uma validação com geometria dinâmica

Fonte: Elaborado pela autora

Assim, no quadro 05 mostra-se que o uso do GeoGebra relatados em pesquisas começou no ano de 2011 no SNHM. O primeiro trabalho, de autoria de Francisco Regis Vieira Alves, tem como título *Discussão dos Métodos Arábicos para a Resolução da Cúbica com suporte computacional*, publicado nos anais do 9º SNHM, no ano de 2011. Esse trabalho apresenta uma história sobre a evolução dos métodos árabes para a resolução predominantemente geométrica da equação geral da cúbica, descrita analiticamente por $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$. Logo, aplicam-se e exemplificam-se abordagens para a exploração desse relevante problema, identificando a importante contribuição dos matemáticos árabes *Al-Khwārizmī*, *Saraf al-Din al-Tusi*, *Al Quhi*. Os métodos matemáticos árabes são discutidos e significados nesse texto com uso de *softwares* computacionais para a compreensão da natureza das raízes da cúbica, inclusive no caso em que comparecem raízes de grandezas negativas.

O segundo trabalho, de autoria de Francisco Regis Vieira Alves e Rui Eduardo Brasileiro, intitulado *História e Tecnologia no Ensino: sobre o Teorema Fundamental da Álgebra – TFA*, objetivou rever uma discussão do Teorema Fundamental da Álgebra – TFA, com propósitos pedagógicos. Para isso, os autores apoiam suas ações com tecnologias, a fim de promoverem processos de visualização para uma compreensão geométrica desse conteúdo. Nesse trabalho, os autores descrevem um cenário, com a intenção de conduzir processos de ensino e aprendizagem sobre a compreensão do comportamento de funções do tipo $f(z)$ de variável complexa, desde uma perspectiva geométrica, de modo a representar, com o arrimo de dois *softwares*, as visualizações de suas partes real e imaginária. Isso, para demonstrar via exemplo, que o ensino que considera a tecnologia caminha no mesmo fluxo daquele característico da evolução histórica dos conceitos matemáticos.

O terceiro trabalho, de autoria de Rui Eduardo Brasileiro e Francisco Regis Vieira Alves, tem por título *Redescobrimo Ceva e Menelaus em dimensão três*, publicado nos anais do 11º SNHM de 2015, coloca num cenário dois teoremas clássicos da Geometria Euclidiana Plana e sua aplicação no contexto em dois problemas de contexto. Nesse cenário, destacam-se as possibilidades da exploração dos teoremas por meio das tecnologias. O trabalho descreve processos de ensino nos quais se prova e/ou realiza demonstração matemática, com arrimo do *software* GeoGebra, especificamente da interface 2D e 3D. Essa abordagem, fundamentada em elementos de ordem histórica, permitiu estruturar um cenário de investigação histórica e matemática, de maneira a proporcionar o que os autores chamam de “redescoberta” dos teoremas de Ceva e o de Menelaus em sala de aula ou no laboratório de ensino de Matemática.

Os autores sinalizam que, no ensino de Matemática, que contemple o componente histórico-epistemológico e as tecnologias da atualidade, os professores têm a possibilidade de “fugir” do ritual estruturante e formal e abordar esses teoremas de uma maneira mais dinâmica.

No quarto trabalho, de autoria de Ivonne C. Sánchez S. e João Cláudio Brandemberg, intitulado *História da Matemática com tecnologia digitais: uma aliança possível para o ensino do teorema de Pitágoras*, publicado nos anais do 13º SNHM, no ano de 2019, teve como objetivo descrever duas demonstrações do Teorema de Pitágoras feitas pelos matemáticos Bhâskara e Perigal. As referidas demonstrações foram dinamizadas com o GeoGebra, um *software* de matemática dinâmica. O motivo de fazer as demonstrações com o GeoGebra

é que o *software* tem o potencial de apresentar o registro algébrico, bem como, o geométrico do teorema de maneira simultânea, permitindo abordar o mesmo conteúdo com dois diferentes registros de representação matemática.

Os autores argumentam que esse fato impacta positivamente na atividade cognitiva dos sujeitos nas demonstrações do Teorema de Pitágoras, abordadas a partir de um ambiente dinâmico. Expressando que essa experiência é um exemplo concreto no processo de integração da História da Matemática e das tecnologias em interconexões para o ensino de Matemática na sala de aula.

Finalmente, o quinto trabalho, de autoria de Giancarlo Secci de Souza Pereira e Cristiane Ruiz Gomes, intitulado *Teorema de Carnot uma validação com geometria dinâmica*; teve o objetivo de apresentar uma abordagem do teorema de Carnot para triângulos acutângulos em conjunto com um *software* de geometria dinâmica, especificamente o GeoGebra, como ferramenta para demonstrar o teorema. Para a constituição dessa abordagem, os autores destacam que foi preciso fazer uma pesquisa bibliográfica para compor uma historiografia sucinta do matemático Lazaret Carnot, como também uma revisão literária sobre o uso da Tecnologia da Informação e Comunicação (TIC's), em especial, sobre o uso do GeoGebra no ensino da Matemática.

Segundo os autores, após esse movimento, foi possível compor uma visão dinâmica do teorema de Carnot em sete etapas no GeoGebra. Os autores destacaram que a proposta metodológica apresenta interconexões para o uso das tecnologias e História da Matemática para o ensino, de maneira a motivar os estudantes através de problemas desafiadores, como o teorema de Carnot e a exploração das demonstrações com o uso do GeoGebra.

Podemos constatar no quadro 4 que a maioria dos trabalhos abordam assuntos da Geometria, seguido de temas próprios da Álgebra. Também é evidente a falta de pesquisas referentes ao uso da HM e as TD que apresentem modelos teóricos e metodológicos que possam ser usados pelos professores para integrar essas duas tendências em suas aulas.

1.1.3. História da Matemática e Tecnologias Digitais nas Tese e dissertações no CREPHIMat

Este mapeamento teve como objeto de estudo as teses e dissertações disponíveis no CREPHIMat, distribuídas como História e Epistemologia da Matemática (HEpM), História da Educação Matemática (HEdM) e História para o Ensino da Matemática (HEnM), tendências conceituadas por Mendes (2015, 2019). O total de produções que usam a História da Matemática distribuídas nas três modalidades foi de 728. Após lermos os resumos e as palavras-chave dessas produções, fizemos uma nova filtragem, destacando aquelas que têm alguma menção sobre o uso de alguma tecnologia digital na pesquisa e/ou na materialização dela. A organização e distribuição deste grupo de produções se ilustra na Tabela 5.

Quadro 5: Teses e Dissertações que usam tecnologias digitais no CREPHIMat (1990 – 2019)

Nível	Modalidades de Pesquisa em História da Matemática			Total
	HEpM	HEdM	HEnM	
Doutorado	0	0	4	4
Mestrado Acadêmico	1	0	5	6
Mestrado Profissional	0	0	13	13
Total	1	0	22	23

Fonte: Sánchez, Castillo e Mendes (2021)

A informação mostrada na Tabela 5 permite perceber que as produções (22) na modalidade de HEnM que apresentam o uso das tecnologias digitais é maior em relação às outras duas, talvez pelo fato de as produções nesta modalidade de pesquisa da História da Matemática serem caracterizadas pelas propostas e ações centradas nos usos das informações históricas com fins pedagógicos, como uma estratégia para o ensino da Matemática, bem como a elaboração de materiais didáticos para ensinar Matemática, baseadas em fontes históricas. Depois da leitura desses trabalhos, podemos concluir que a maior quantidade de tecnologias digitais presentes nas produções está centralizada no uso de *softwares* de geometria dinâmica (GeoGebra, Régua e Compasso, Compasso Eletrônico e Meplot free). Dentre esses, o GeoGebra é o mais usado para a conjunção das propostas metodológicas nas produções de HEnM apoiadas com tecnologias digitais. Dado que nosso interesse investigativo está no uso do GeoGebra, no quadro 06 apresenta-se as produções que utilizam a HM e o GeoGebra.

Quadro 6: Teses e Dissertações que usam o GeoGebra e História da Matemática

Ano	Nível	Autor(es)	Título
2011	Mestrado Acadêmico	Luciano Ferreira	Uma proposta de ensino de geometria hiperbólica: “construção do plano de Poincaré” com o uso do software GeoGebra
2011	Mestrado Acadêmico	Tatiana de Camargo Waldomiro	Abordagem histórico – epistemológico do ensino da geometria fazendo uso da geometria dinâmica
2013	Doutorado	Rita Sidmar Alencar Gil	Formação de professores de matemática: conexões didáticas entre matemática, história e arquitetura
2014	Mestrado Profissional	José Damião Souza de Oliveira	Geometria do compasso (1797) de Mascheroni (1750-1800) em atividades com o GeoGebra
2016	Mestrado Acadêmico	Luiz Felipe Araujo Mod	O objeto matemático triângulo em teoremas de Regiomontanus: um estudo de suas demonstrações mediado pelo GeoGebra
2017	Mestrado Profissional	Luciana Vieira Andrade	História da matemática e tecnologias da informação e da comunicação no ensino de função
2018	Mestrado Profissional	Gilson Abdala Prata Filho	Teorema de Pitágoras a partir da história da matemática: análises epistemológicas de atividades em turmas do 9º ano da rede pública
2018	Doutorado	Elisângela Dias Brugnera	O uso da história da matemática e do GeoGebra para o ensino e aprendizado da geometria analítica com ênfase no estudo de retas
2019	Mestrado Acadêmico	Verusca Batista Alves	Um estudo sobre os conhecimentos matemáticos mobilizados no manuseio do instrumento círculos de proporção de William Oughtred
2019	Mestrado Acadêmico	Ranúzy Borges Neves	Uma introdução ao estudo das funções trigonométricas com recursos artísticos e seminários sobre a história da matemática no 2º ano do ensino médio
2019	Mestrado Profissional	Alison Luan Ferreira da Silva	História da matemática, tecnologias digitais e investigação Matemática no ensino de unidades temáticas de matemática da BNCC para o 8º ano
2020	Mestrado Profissional	Thais Maria Barbosa Goulart	Os “Elementos” de Euclides visitam o ensino fundamental: Análise de tarefas matemáticas pautadas na história da Matemática e desenvolvidas no software GeoGebra

Fonte: Elaborado pela autora

Nos seguintes parágrafos, faremos uma descrição comentada dessas produções, de maneira a destacar os seus elementos principais, seguindo a ordem cronológica.

A dissertação de Ferreira (2011) tem a intenção de contribuir significativamente para o aprimoramento do ensino e aprendizagem da Geometria, com foco especial na Geometria Hiperbólica, e de servir como um recurso substancial, tanto para a pesquisa quanto para a aplicação prática por parte de professores e estudantes que atuam nos níveis de Ensino Médio e Superior. A pesquisa em questão se apresenta em duas partes distintas. A primeira parte, de natureza teórica, resgata a evolução da Geometria Euclidiana, desde as primeiras tentativas de fundamentação do quinto postulado de Euclides até o surgimento das denominadas Geometrias não euclidianas. Dentro desse escopo, é apresentado o modelo do plano de Poincaré, que constitui a base da parte experimental da pesquisa. Adicionalmente, a parte teórica incorpora elementos fundamentais da Teoria Antropológica do Didático,

proposta por Chevallard e Bosh, bem como uma análise detalhada do conceito de obstáculo didático, conforme delineado por Brosseau.

No âmbito da parte experimental do estudo, são detalhadamente delineados os procedimentos relacionados à preparação das atividades, à efetiva aplicação do minicurso, à identificação e participação dos sujeitos da pesquisa, além da categorização dos elementos coletados durante a execução dessa etapa. A fim de analisar os dados obtidos, optou-se pela abordagem de análise de conteúdo proposta por Bardin, que se mostrou eficaz na identificação de possíveis dificuldades enfrentadas pelos participantes no processo de compreensão e construção dos conceitos inerentes ao modelo de Poincaré. Os resultados obtidos a partir dessa pesquisa atestam a viabilidade do ensino da Geometria Hiperbólica por meio da utilização de *software* de geometria dinâmica, como o GeoGebra, desde que se observe uma abordagem alinhada aos conteúdos previstos para as séries frequentadas pelos aprendizes. Além disso, a pesquisa ressalta a importância de abordagens pedagógicas cuidadosas na construção do conceito de métrica, visando uma compreensão sólida por parte dos estudantes.

Seguimos com a dissertação de Waldomiro (2011), de natureza quantitativa, tendo como objetivo responder à seguinte pergunta: De que maneira e em que extensão o trabalho pedagógico, que integra os aspectos históricos, geométricos e computacionais, tem influenciado as atitudes e abordagens dos alunos em relação ao domínio do conhecimento matemático? Para tal propósito, conduziu-se uma investigação detalhada e análise dos impactos decorrentes da interligação entre o ensino da História da Matemática e a aplicação de recursos computacionais, como alternativa para superar os desafios identificados no ensino da geometria, especialmente no contexto do Ensino Médio.

A pesquisa se baseou na obra de Lakatos e na primeira proposição (do livro 1) dos elementos de Euclides, utilizando um *software* de Geometria dinâmica para avaliar a validade de sua demonstração. Os resultados evidenciaram que a combinação da História da Matemática com as inovações tecnológicas pode transformar as percepções acerca do conhecimento matemático, uma vez que, através da intervenção do professor, esses elementos podem ser introduzidos na sala de aula, promovendo a evolução das práticas pedagógicas.

Na tese de Gil (2013) é apresentada a relação entre Educação Matemática e o contexto cultural da Amazônia, notavelmente o patrimônio arquitetônico da região, na

formação inicial do professor de Matemática, bem como nas situações experimentadas em sala de aula durante essa formação. Propõe a adoção de uma abordagem didática para o ensino de tópicos matemáticos, como geometria, medidas, simetria e proporcionalidade. Essa abordagem se baseia na exploração histórica do patrimônio arquitetônico de Belém e na avaliação, com o objetivo de incorporar novas diretrizes metodológicas à formação inicial do professor de Matemática, entre essas o uso do GeoGebra.

Nessa perspectiva, é conduzida uma pesquisa colaborativa no contexto da investigação qualitativa. Para a realização desse estudo, foram selecionados vinte e cinco alunos regularmente matriculados no curso de Licenciatura em Matemática do IFPA. Como meios para a coleta de informações, foram utilizados a observação participante; diários de campo; documentos de fontes primárias e secundárias; fotografias; filmagens; o curso de extensão; questionários e materiais desenvolvidos com o método de ensino por meio de atividades. Além desses procedimentos, também foram realizadas leituras de textos abordados por historiadores; antropólogos; cartógrafos; astrônomos; jornalistas e outros pesquisadores envolvidos em estudos relacionados a esse tema. Além disso, foram conduzidos estudos exploratórios nos acervos de imagens e desenhos referentes ao patrimônio arquitetônico de Belém.

Os resultados da pesquisa indicam que, por meio das experiências trazidas e vivenciadas, os alunos de Licenciatura que participaram desse estudo conseguiram aprimorar sua formação. Isso foi alcançado ao incorporar o patrimônio histórico-arquitetônico de Belém como um elemento de pesquisa e investigação histórica para o ensino e aprendizado da Matemática. Esse enfoque permitiu relacionar e contextualizar o conhecimento a partir das situações vivenciadas na realidade, especialmente durante suas atuações nas escolas de Belém.

A dissertação de Oliveira (2014) tem como objetivo demonstrar uma possibilidade de relação entre o uso da História da Matemática e o das Tecnologias da Informação e da Comunicação (TIC) no ensino de Matemática. Essa demonstração é realizada por meio de atividades que envolvem construções geométricas da “Geometria do Compasso” (1797), elaborada por Lorenzo Mascheroni (1750 - 1800). Nesse sentido, foi desenvolvida uma pesquisa qualitativa que consistiu inicialmente em uma exploração histórica de caráter bibliográfico, com uma intervenção empírica, que combinou o uso da História da Matemática com as TIC, empregando o método de Investigação Matemática. Esse processo

envolveu a análise de trabalhos relacionados ao tema, bem como uma investigação para identificar problemas e/ou episódios da História da Matemática passíveis de serem abordados com o auxílio das TIC, especificamente o GeoGebra.

Os problemas geométricos escolhidos foram da obra de Mascheroni como ponto central dessa investigação. Para abordá-los como sugestões de soluções e explorações foi usado o *software* GeoGebra. A pesquisa culminou na criação de um recurso educacional, especificamente um caderno de atividades. Esse caderno foi estruturado de forma a permitir que os alunos conduzissem investigações de natureza histórica e/ou matemática durante a execução das atividades.

Oliveira (2014) expressa que cada construção geométrica foi detalhadamente apresentada, acompanhada, em alguns casos, pela solução original proposta por Mascheroni. Além disso, os estudantes foram incentivados a investigar e a refletir sobre as próprias construções realizadas no GeoGebra, fomentando também comparações com as soluções tradicionais. O caderno de atividades foi aplicado em duas turmas da disciplina Didática da Matemática I (MAT0367) do curso de Licenciatura em Matemática da UFRN em 2014.

No decorrer desse estudo, foram abordadas preocupações, que por vezes surgem, em relação à integração da História da Matemática no ensino, como a percepção de perda de tempo. No entanto, verificou-se que esse obstáculo pode ser superado com o apoio das ferramentas computacionais. A utilização dinâmica do *software* permitiu verificações mais eficientes, eliminando a necessidade de repetição das construções. Importante ressaltar que a otimização do tempo não implicou em comprometer a reflexão e o amadurecimento das ideias, sobretudo quando adotada a abordagem investigativa, tanto histórica quanto matemática.

Na dissertação de Mod (2016) se tem por objetivo a investigação dos teoremas de *Regiomontanus* relacionados a triângulos, utilizando-se do *software* GeoGebra. *Regiomontanus* (1436-1476) é reconhecido como um matemático cujas contribuições desempenharam um papel fundamental no avanço da Trigonometria. Sua obra mais notável, intitulada "*De Triangulis Omnimodis Libri Quinque*", publicada em 1533, é o foco central dessa pesquisa.

No primeiro livro dessa obra, são apresentados teoremas cujas demonstrações envolvem a construção de triângulos que satisfazem determinadas condições pré-estabelecidas. Nessa pesquisa foram analisadas as demonstrações de alguns desses teoremas

por meio da interação dinâmica proporcionada pelo GeoGebra. Assim sendo, emerge a necessidade de explorar as múltiplas facetas da demonstração e ressalta-se a relevância intrínseca do GeoGebra como ferramenta de pesquisa. No contexto dessa investigação, se torna evidente que certas possibilidades não foram abordadas de forma abrangente nas demonstrações de *Regiomontanus*.

O desenvolvimento da pesquisa de Mod (2016) também aponta para perspectivas promissoras em relação à transformação de um legado histórico da Matemática em uma atividade investigativa passível de ser incorporada ao ambiente educacional por meio do GeoGebra.

Na pesquisa de Andrade (2017) se apresentam concepções orientadoras sobre o uso da História da Matemática (HM) no ensino de funções. A pesquisa adota elementos das Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC) e da Investigação Matemática (IM) em sala de aula, configurando-se como uma dissertação de mestrado profissional. O objetivo foi propor um caderno de atividades que integrasse a HM e TIC por meio da IM, visando enriquecer o processo de ensino e aprendizagem de funções.

Nesse contexto, foi desenvolvida uma pesquisa qualitativa em duas fases distintas. A primeira fase foi de natureza teórica, realizada por meio de uma pesquisa bibliográfica. A segunda fase, de caráter mais prático, adotou uma perspectiva de pesquisa-ação. Como resultado, traçou-se um panorama histórico do conceito de função. Esse conteúdo serviu como base para o desenvolvimento de um produto educacional, que consiste em um caderno de atividades destinado a alunos da Educação Básica. O caderno explora o conceito de função ao longo da história, utilizando o *software* GeoGebra como suporte, à luz dos princípios da IM.

Na seguinte dissertação de mestrado profissional de autoria de Prata-Filho (2018), a pesquisa teve por objetivo a análise das contribuições de uma abordagem metodológica no ensino fundamental, na qual a História da Matemática e situações-problema através do GeoGebra foram utilizados para o estudo do Teorema de Pitágoras. O princípio norteador consistiu na promoção de significados como elemento central para a aprendizagem, baseando-se no Modelo dos Campos Semânticos proposto por Romulo Lins. A utilização da História da Matemática como metodologia recebeu recomendações de diversos autores, os quais destacam seus benefícios em sala de aula. Um dos defensores dessa abordagem, Iran

Mendes, ressalta a capacidade da história em motivar os estudantes, humanizando a disciplina matemática e auxiliando na resolução de problemas.

O problema de pesquisa gira sobre a premissa de que muitos conteúdos ainda são apresentados de maneira expositiva, seguindo um modelo centrado no professor diante de alunos passivos. Por exemplo, em relação ao Teorema de Pitágoras, que desempenhou um papel fundamental na resolução de problemas matemáticos históricos e permanece relevante na atualidade. Embora existam diversas demonstrações desse teorema relacionadas a situações da vida real, é crucial não perder de vista o progresso epistemológico alcançado por adaptações pedagógicas contemporâneas, as quais podem aprimorar sua assimilação no contexto das aulas de Matemática.

As diversas demonstrações podem ser apresentadas de maneira acessível, com o auxílio de *softwares*, como é o caso do GeoGebra, uma ferramenta de Geometria Dinâmica que integra conceitos geométricos, álgebra e cálculo. As atividades desenvolvidas foram avaliadas considerando três categorias de análise: a compreensão inicial dos alunos, as interpretações alcançadas e os significados matemáticos produzidos por eles. Como resultado educacional dessa pesquisa, foi elaborado um guia didático destinado aos professores do Ensino Fundamental. Esse guia inclui uma série de atividades que exploram o Teorema de Pitágoras por meio da História da Matemática, empregando a resolução de problemas e aproveitando as potencialidades do GeoGebra.

Na tese de Brugnera (2018) se tem como objetivo analisar e compreender as estratégias empregadas por licenciandos em Matemática da Universidade do Estado de Mato Grosso. Essas estratégias emergem a partir de experiências com a História da Matemática e a utilização do *software* GeoGebra. O intuito é resolver problemas específicos que promovam uma melhor compreensão ou redefinição dos conceitos de ponto, coordenadas e equação da reta.

No desdobramento dessa investigação, se recorreu à História da Matemática como recurso pedagógico para o ensino matemático. A autora fez uma revisão histórica do sistema de coordenadas, do conceito de ponto e equação da reta, bem como da aplicação de tecnologias. A pergunta orientadora desse estudo é: Quais estratégias os alunos empregam, fundamentados em suas experiências com a História da Matemática e o GeoGebra, para solucionar problemas relacionados a coordenadas, pontos e equações de retas?

Os resultados obtidos por Brugnera (2018) indicam que as estratégias utilizadas pelos estudantes manifestam diferentes representações semióticas nas resoluções das atividades e problemas propostos. Essas estratégias foram mediadas tanto pelo uso do *software* quanto pelo conhecimento histórico da Geometria Analítica. Uma observação relevante é a atitude independente que os alunos adotaram durante esse processo, evidenciando-se na criação de "ecos ressonantes". Em síntese, pode-se concluir que a integração da História da Matemática no ensino de Geometria Analítica, juntamente com a aplicação do *software* GeoGebra, propiciou aos alunos o desenvolvimento de estratégias para a resolução de problemas. Essas estratégias contribuem significativamente para a redefinição de conceitos fundamentais tanto na Geometria quanto na Álgebra.

A dissertação de Alves (2019) tem foco na exploração dos instrumentos matemáticos contidos em tratados históricos, utilizados como catalisadores de conceitos. Nesse sentido, a pesquisa da autora tem a intenção de desenvolver um estudo através da criação de uma ligação entre a história e o ensino da Matemática. Para tal propósito, foi selecionado o instrumento dos "círculos de proporção", descrito em "*The Circles of Proportion and the Horizontal Instrument*" (1633), pelo matemático inglês William Oughtred (1574-1660). O objetivo da pesquisa foi compreender como os conhecimentos matemáticos, incorporados nos círculos de proporção, são aplicados no estudo do seu manuseio, estabelecendo assim uma interface entre a história e o ensino da Matemática.

Desse modo, a formação contínua dos professores que participaram no estudo apontou para uma possível ressignificação de conceitos, através da identificação de associações entre conhecimentos matemáticos que, frequentemente, não são correlacionados. Além disso, foi notória a persistência da ideia de uma abordagem meramente baseada em fórmulas por parte desses professores, o que provavelmente se relaciona com a sua formação docente. No entanto, constatou-se uma lacuna na competência de escrita matemática.

Assim, reforça-se a necessidade de ações formativas semelhantes àquela realizada neste estudo, uma vez que se entende que a inclusão da História da Matemática no ensino pode contribuir para uma compreensão mais profunda da disciplina. No entanto, é importante ressaltar que não é suficiente utilizar a história como um mero recurso para o ensino da Matemática; é fundamental também estabelecer uma ligação sólida entre ambas as áreas, de modo a construir conceitos de forma eficaz.

A pesquisa de Neves (2019) teve como objetivo investigar se a aplicação de metodologias artísticas contribui de maneira eficaz para motivar os estudantes matriculados no 2º ano do Ensino Médio Integrado Técnico em Automação Industrial e Informática no âmbito do Instituto Federal Catarinense - Campus São Bento do Sul, a assimilarem os conceitos relacionados à Matemática, particularmente abordando o conteúdo das Funções Trigonométricas. Para atingir esse propósito, a fundamentação teórica baseou-se em uma diversidade de autores que discutiram tópicos como a estimulação da criatividade durante as aulas de Matemática, a incorporação da Arte como ferramenta instrutiva, a relevância histórica da Matemática e a aplicação de seminários como recursos pedagógicos.

A professora e autora do presente estudo empregou paródias tocadas no violão, com a finalidade de ministrar ensinamentos sobre tópicos como as razões trigonométricas e os ângulos notáveis. Além disso, foi proposta a realização de um seminário acerca da história da trigonometria, cujos critérios de avaliação incluíram a demonstração de domínio do conteúdo e a demonstração de criatividade. Essa última habilidade foi destacada, uma vez que é reconhecida como um atributo diferenciador em qualquer trajetória profissional contemporânea, apesar de frequentemente não receber a devida ênfase nas aulas de Matemática.

Durante o período de dois meses dedicados ao processo de ensino e aprendizagem, uma variedade de recursos foi empregada, incluindo o uso de lousa, material didático impresso, apresentações em *slides*, materiais em formato de vídeo e listas de exercícios. O estudo culminou com um resumo elaborado através do *software/aplicativo* GeoGebra, acessível tanto por meio de dispositivos móveis quanto por computadores.

Segundo Neves (2019), no momento da apresentação dos seminários, distintas equipes abordaram as biografias e as principais contribuições à Trigonometria e às Ciências em geral de matemáticos notáveis, como Hiparco de Niceia; Cláudio Ptolomeu; François Viète; John Napier; Isaac Newton; Leonhard Euler, e Bhaskara Akaria. Essas exposições foram realizadas por meio de formas artísticas variadas, como músicas (paródias), peças de teatro, vídeos, poemas, poesias, crônicas, entre outras expressões.

A análise evidenciou que a maioria dos estudantes aprovou a abordagem metodológica empregada, demonstrando ainda o desejo de que essa abordagem fosse mantida e ampliada. O incremento da participação e interação dos alunos nas aulas, assim como nos momentos de assistência pedagógica, em conjunto com a qualidade das

apresentações realizadas, corroboraram a constatação de um retorno positivo à questão inicial que impulsionou a pesquisa.

A pesquisa de Silva (2019) teve como objetivo a proposição de um produto educacional que articule a História da Matemática (HM), as Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação (TDIC) e a Investigação Matemática (IM) para a abordagem das unidades temáticas de Matemática da Base Nacional Comum Curricular, direcionado ao 8º ano do Ensino Fundamental. O estudo é dividido em duas fases distintas. A primeira fase compreende um levantamento bibliográfico sobre o uso das ferramentas pedagógicas mencionadas e uma pesquisa bibliográfica centrada nos temas de HM.

A literatura resultante foi adaptada para o produto educacional proposto. Alinhados com as unidades temáticas da BNCC, foram identificados três tópicos principais: o problema das gavetas de Dirichlet (1805-1859), relacionado à unidade de Números e à unidade de Probabilidade e Estatística; transformações geométricas no plano cartesiano, vinculadas à unidade de Álgebra e à unidade de Geometria; por fim, a quadratura do círculo, abrangendo a unidade de Grandezas e Medidas. A segunda fase envolve a concepção e implementação do produto educacional, representado por um caderno de atividades. O caderno é estruturado em três blocos, cada um correspondendo aos tópicos previamente identificados.

Silva (2019) destaca que as explorações das atividades tiveram em alguns momentos o auxílio do *software* GeoGebra. A escolha do referido *software* se deu pelo fato de o GeoGebra tratar-se de um *software* de matemática dinâmica que contém os recursos que consideramos necessários, a exemplo de: reflexão em relação a uma reta, rotação em torno de um ponto e translação por um vetor.

Apesar dos esforços para conectar a História da Matemática, as Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação e a Investigação Matemática, denominada como investigação-histórica-com-tecnologia, reconhece-se que a plena integração desses elementos ainda é um desafio. Enquanto a ligação entre história e tecnologia se mostrou mais sólida, a exploração da investigação matemática poderia ter sido mais aprofundada. Essa abordagem serve como base para futuras propostas e desenvolvimentos, buscando uma integração mais efetiva entre os três componentes.

Na dissertação de Goulart (2020), a obra "Elementos" de Euclides é selecionada como a principal fonte de inspiração para o desenvolvimento do trabalho, devido ao seu valor formativo e relevância no ensino de Geometria. Especificamente são tomadas as

proposições contidas no livro I, que não apenas oferecem a oportunidade de aproximar os alunos do processo histórico de evolução da Matemática, mas também um contexto enriquecedor para a aprendizagem de conceitos geométricos. Essa pesquisa explora as possíveis contribuições de tarefas matemáticas historicamente enraizadas, desenvolvidas no ambiente do GeoGebra, com o intuito de facilitar a assimilação de noções de Geometria em uma turma do Ensino Fundamental.

As tarefas, concebidas e implementadas no GeoGebra, têm como ponto de partida as proposições do Livro I da obra "Elementos". O objetivo é empregar uma abordagem histórica no ambiente do GeoGebra para promover o aprendizado de conceitos de Geometria plana. A pesquisa, que se configura como um estudo de intervenção de natureza qualitativa, fundamenta-se na literatura que explora o potencial da História da Matemática como método de ensino e nas características dos ambientes de Geometria Dinâmica, particularmente o GeoGebra. O estudo envolveu 35 estudantes do 8º ano do Ensino Fundamental em uma escola pública localizada em Ibirité (MG). A coleta de dados ocorreu entre os meses de abril e outubro de 2019, por meio de observações; registros da pesquisadora em um diário de campo; gravações em áudio e vídeo de determinados momentos das aulas, além dos materiais produzidos pelos alunos durante o processo de aprendizado.

Os resultados revelam que as tarefas realizadas no GeoGebra revelaram um ambiente propício para a construção de conhecimentos geométricos, principalmente devido à possibilidade de efetuar construções de maneira ágil e manipular figuras, o que estimulou a formulação de conjecturas. Adicionalmente, observou-se um aumento do interesse dos alunos não só pela História em geral, mas também pela história de Euclides e dos "Elementos".

A História da Matemática, utilizada como base para o desenvolvimento das tarefas, demonstrou ser crucial para que os alunos adquirissem novas percepções e atitudes diferenciadas em relação à Matemática e à obtenção do conhecimento nessa disciplina. Essa abordagem favoreceu a aproximação dos alunos com a visão dos processos de construção matemática a partir de práticas sociais. No entanto, também ficou evidente a importância de preparar os alunos para o uso do GeoGebra, já que muitos deles careciam tanto de conhecimento prévio quanto de habilidades na manipulação das ferramentas de desenho geométrico.

Pelo constatado, é evidente que existem primeiros avanços direcionados a discussões e reflexões acerca da interconexão entre a HM e TD. Nesse cenário, é possível observar que o GeoGebra é um *software* muito usado e referenciado nas pesquisas que têm esforços para possibilitar o trabalho conjunto entre essas áreas temáticas. Segundo Sánchez; Castillo; Lopes (2023) são evidentes as potencialidades, vantagens e outros assuntos na literatura internacional sobre o uso do GeoGebra no ensino e aprendizagem da Matemática. Porém, uma temática com foco no uso da História para o Ensino de Matemática com GeoGebra não é destaque na literatura analisada. O que quer dizer que ainda é um tema recente e fértil para pesquisa como esta proposta, podendo servir de alicerce para outras futuras.

Nesse cenário, justifica-se a realização desta pesquisa doutoral para contribuir com um campo emergente como esse, buscando promover o diálogo entre História da Matemática e Tecnologias Digitais, especificamente com um *software* de Geometria Dinâmica como o GeoGebra. Assim sendo, surge a pergunta: de que maneira o desenvolvimento Histórico e Epistemológico da Matemática pode ser incorporado ao uso do GeoGebra no ensino e aprendizagem desta ciência? Assim sendo, no seguinte capítulo buscamos responder a esse questionamento.

2

HISTÓRIA PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA COM GEOGEBRA

2.1 História da Matemática no/para o Ensino

A História da Matemática tem despertado o interesse de muitos estudiosos e pesquisadores da Educação Matemática, estabelecendo-se para alguns professores como um fundamento que pode auxiliar o processo de ensino e aprendizagem de Matemática em sala de aula. a História da Matemática como fundamento, pode dar respostas aos seguintes questionamentos: (1) Como tornar os alunos mais acessíveis à Matemática que é ensinada?; (2) Pode a tecnologia apoiar o processo de ensino e aprendizagem da matemática?; (3) Qual matemática para o ensino? Na tentativa de responder a essas questões, surgiram pesquisas que relatam o esforço para criar teorias e métodos para o aperfeiçoamento da prática pedagógica, podendo contribuir para o ensino e aprendizagem da Matemática.

Neste trabalho usaremos a História da Matemática para apoiar o ensino das seções cônicas, com base nas ideias propostas por Mendes (2022). Ele se refere ao uso da HM para/no ensino como “explorações educativas da história das ideias produzidas no passado e como podem ser refletidas na Matemática que ensinamos” (Mendes, 2022, p. 19). De fato, a Matemática que conhecemos hoje é um reflexo dos esforços do homem para resolver problemas cotidianos e compreender o mundo. Desde seus inícios, o homem fez inúmeras invenções para resolver os problemas que surgem em sua vida diária. Começando talvez com a invenção do fogo para cozinhar e aquecer-se, a criação de automóveis e aviões como meio de transporte para chegar a lugares mais distantes. Esse fato também marcou a evolução da Matemática, e pode ser visto refletido na compreensão do movimento planetário, no uso do triplo pitagórico para medir o rio Nilo, na criação de um sistema de numeração para fazer

contas. É evidente, então, que quase todos os avanços da ciência são reflexo da necessidade do homem de compreender o mundo ao seu redor e os fenômenos sociais, culturais e naturais em que está imerso.

Em suas reflexões, Mendes (2022) afirma que tais ideias históricas foram produzidas para explicar os fenômenos naturais, sociais e culturais, independentemente do contexto no qual estão inseridos esses problemas, como a religião, a arte, a matemática, a física, etc. Mendes ainda defende que:

O uso da HM nas aulas de Matemática só terá importância se exercitamos uma recriação da história da Matemática, na qual os envolvidos no processo de aprendizagem reflitam a respeito das estratégias sociocognitivas (pensamentos e ações), criadas e praticadas ao longo da história humana para explicar e compreender tais fatos matemáticos no contexto sociocultural em que se desenvolveram (Mendes, 2022, p. 19-20).

Nesse sentido, os professores que usem a HM em suas salas de aula têm que refletir com seus estudantes sobre as estratégias e práticas criadas ao longo da história humana, e que podem ser implementadas ainda hoje para explicar e compreender conteúdos matemáticos imersos em tais práticas. Assim, promovendo uma possibilidade de um novo método educativo que procure um ensino e aprendizagem diferenciado, criativo, investigativo, etc. Ainda Mendes (2022), em suas reflexões a respeito do tema, reconhece que o estudo de textos do passado torna-se importante para o ensino de Matemática, na medida que o professor guie seus estudantes na reconstrução das ideias atualmente presentes na Matemática e que foram constituídas nos livros didáticos, a partir da riqueza do tratamento dos documentos originais.

Nesse sentido, na sala de aula, se faz necessária uma readaptação das informações históricas encontradas em diversos materiais que foram escritos e estão a nosso alcance. Além disso, hoje em dia o professor dispõe de diversos materiais manipulativos, eletrônicos, aplicativos, etc., que podem apoiar a compreensão do desenvolvimento dos objetos matemáticos desde seus inícios. Essa compreensão sobre esses materiais e as tecnologias disponíveis neste momento podem levar o professor a usá-los como fonte investigativa e, a partir daí, inovar, (re)criar, (re)inventar, propor e orientar produções didáticas em diferentes níveis de ensino, procurando um ensino e aprendizagem da Matemática criativo e desafiador, que foge do tradicional.

2.1.1 A Investigação histórica para o ensino: uma possibilidade por meio de atividades

Uma alternativa teórico-prática que possibilita o uso da história para a criação de atividades didáticas para o ensino de Matemática é a Investigação Histórica. Essa perspectiva baseia-se na história e na investigação como fontes de geração de matemática escolar. Para Mendes (2006), é possível adaptar essa perspectiva teórico-prática na medida em que valorizemos e adaptemos as informações históricas às necessidades do professor, de modo que seu uso seja mais produtivo na sala de aula. Ainda segundo Mendes, o princípio que articula as atividades de ensino por meio de História da Matemática é a *investigação*, de modo que se estabeleça em sala de aula um ambiente criativo, provocador e problematizador do conhecimento evidenciado na História da Matemática.

A utilização de atividades mediadas pela história possibilita ao aluno a oportunidade de perceber como os conceitos matemáticos constituídos hoje em dia mudaram com o passar dos tempos, e que os mesmos métodos de resolução dos problemas matemáticos históricos foram aprimorados até chegarem à forma do conhecimento escolar. De acordo com Mendes (2001, p. 32), ao usar as atividades mediadas pela História da Matemática em sala de aula:

[...] o professor poderá usá-la como fonte de enriquecimento pedagógico e conduzir suas atividades num caminhar crescente, em que o aluno investigue, discuta, sintetize e reconstrua as noções matemáticas anteriormente vistas como definitivas sem que o aspecto histórico tivesse sido usado para despertar o interesse de quem as aprende [...].

Nesse sentido, é importante que as atividades estejam bem-organizadas numa sequência de ensino. Ainda como destaque, é importante organizar cuidadosamente cada uma das etapas de ensino, de maneira que se possam alcançar os objetivos propostos pelo professor. As atividades históricas propostas por Mendes (2006, p. 119) são apresentadas sob três principais características: atividades de desenvolvimento, de associação e de simbolização. Em nosso trabalho pretendemos usar a História da Matemática através de uma sequência de atividades históricas que conduza os alunos à redescoberta, mergulhando-os na história das seções cônicas, buscando reconstruir os passos dados pelos matemáticos antigos de outras épocas para estudá-las. Então, as sugestões para os professores contêm alguns dos indicadores no modelo proposto por Mendes (2006; 2022):

- **Conteúdo histórico:** nesse item se apresentam as informações históricas referentes a fatos ou problematizações do conhecimento matemático. Essas

informações servem de suporte para o desenvolvimento da atividade investigativa para conduzir o estudante à compreensão e aprendizagem desse conhecimento matemático;

- **Material a ser utilizado:** trata-se de qualquer material a ser utilizado para a realização da atividade. No caso das atividades produzidas neste trabalho, será o *software* de geometria dinâmica o GeoGebra
- **Procedimentos operacionais:** trata-se da orientação aos professores no sentido de desenvolver as atividades investigativas através de etapas que os conduzam a uma compreensão total;

Como já foi descrito anteriormente, o material utilizado para produzir as atividades neste trabalho será o *software* de geometria dinâmica GeoGebra. Nesse sentido, apresenta-se, a seguir, as potencialidades desse *software* e a justificativa de sua escolha.

2.2 O GeoGebra como um Ambiente de Geometria Dinâmica para o Ensino

Ambiente de Geometria Dinâmica

Nas últimas décadas, a sociedade passou por uma grande mudança devido à incorporação das tecnologias digitais. Essas tecnologias influenciaram todas as áreas em que o ser humano se desenvolve. A comunicação é um exemplo disso. Hoje em dia as informações dos eventos que acontecem no mundo chegam mais rápido às pessoas através da internet, rádio, televisão, smartphone, etc. Os empregos também foram influenciados pela tecnologia, graças ao desenvolvimento de *software*, aplicativos que ajudam a aprimorar o trabalho de forma eficaz, por exemplo, o desenvolvimento de IA (inteligência artificial). A educação também foi impactada pelas tecnologias digitais com a criação das calculadoras, o desenvolvimento dos computadores e da internet.

Assim, o pensamento acerca do conteúdo matemático, dos materiais curriculares e as metodologias de ensino passaram a ter uma influência importante ao redor das tecnologias. Foram criados *softwares* que auxiliam o ensino de geometria, álgebra, cálculo e estatística, possibilitando uma nova forma de abordar o conteúdo matemático em todos os níveis de educação. No caso daqueles *softwares* referentes à geometria, passaram a ser designados coletivamente por Geometria Dinâmica (DG), termo originalmente cunhado por Nick Jackiw e Steve Rasmussen. Esse tipo de *software* fornece certos objetos primitivos, que são aqueles que dão base para a construção dos conhecimentos geométricos (ponto, reta, planos),

ferramentas básicas: (1) que constroem um objeto geométrico (circunferência, polígono, segmento); (2) auxiliam na construção do objeto geométrico, por exemplo, uma reta perpendicular a uma reta I através do ponto P , assim como a reflexão através de um ponto ou reta. Também permite medir o comprimento de um segmento, a área de um polígono ou círculo.

A característica principal que distingue a geometria dinâmica e a transformação contínua em tempo real, frequentemente é chamado de “arrastamento”. Segundo Goldenberg e Cuoco (1998, p. 349), essa característica permite ao usuário deslocar livremente os elementos de uma construção e observar como outros elementos respondem dinamicamente às condições alteradas, à medida em que esses elementos são movidos por todo o plano. Além disso, na medida em que a construção é bem-feita, ou seja, baseada na teoria geométrica, o *software* mantém todas as relações que foram especificadas como restrições essenciais da construção original, e todas as relações que são consequências matemáticas dessas. Os *softwares* de geometria dinâmica (SGD) que foram amplamente usados pelos professores são: o Geometer's Sketchpad, o Cabri Geometry II, o Cindirrella, o GeoGebra.

Nesse contexto, uma discussão que veio à tona com o uso dos SGD foi a distinção entre *desenho* e *construção* de uma figura geométrica, já que antigamente, quando construíamos objetos geométricos com lápis, papel e outras tecnologias, como régua e compasso, ou seja, num entorno estático, tais discussões não eram necessárias (Gadanidis; Borba; Silva, 2014). Nesse sentido, Laborde (1997) define o *desenho* como uma representação possível do objeto geométrico, que também possui outras propriedades que não são exigidas pelas propriedades definidoras da figura geométrica, enquanto uma *construção* é uma figura geométrica que, no decorrer do deslocamento de um de seus elementos, preserva as propriedades espaciais que respondem pelas propriedades geométricas do objeto que está representando. Dessa forma, a exigência de comunicar ao programa um procedimento de construção geométrica permite caracterizar o objeto geométrico.

Assim, em alguns desafios das atividades históricas descritas neste trabalho, os alunos terão que construir um “desenho dinâmico”. Segundo Laborde (1997), esse é um desenho feito em um ambiente dinâmico, que evoca uma certa teoria geométrica e preserva as propriedades espaciais que foram declaradas em sua construção, após ser arrastado por seus elementos livres. No nosso caso, consideramos como *desenho dinâmico* aquele desenho

feito na interface do GeoGebra, tanto no 2D como no 3D, que foi construído com as ferramentas do *software*, considerando a teoria geométrica que está subjacente e as propriedades espaciais que lhe foram atribuídas.

O GeoGebra foi criado por Markus Hohenwarter, em 2002, como um *software* de geometria dinâmica e Álgebra no plano. Rapidamente, os recursos do *software* se expandiram para outras áreas da Matemática, como o cálculo, a estatística, a geometria no espaço etc. Desde 2002, a expansão do GeoGebra tornou-se um fenômeno de popularidade devido ao seu fácil acesso e dinamismo como ferramenta matemática poderosa para aprender e criar conhecimento matemático. O GeoGebra se define como:

Um *software* matemático gratuito para educação em todos os níveis, disponível em várias plataformas. Ele reúne dinamicamente aritmética, geometria, álgebra e cálculo, e até mesmo recursos de probabilidade e estatística, em um único conjunto que é tão operacionalmente simples quanto poderoso. Ele oferece diversas representações de objetos de cada uma de suas perspectivas possíveis: visualizações gráficas, algébricas gerais e simbólicas, estatísticas e de organização em tabelas e planilhas (Hohenwarter, 2014).

Assim, O GeoGebra possui uma ampla versatilidade para abordar conteúdos matemáticos que possam apoiar as aulas de Matemática de forma mais dinâmica. No entanto, no decorrer desta pesquisa pode surgir a seguinte questão: por que selecionamos o GeoGebra e não outro SGD? De fato, existem muitos *softwares* desenvolvidos nos últimos tempos que já foram mencionados, mas o GeoGebra é especial em muitos aspectos. O fundamento matemático descrito por seu criador corresponde com nosso interesse investigativo, ou seja, às relações geométrico-algébrico que se possam estabelecer de um objeto matemático.

Ao falar dessa fundamentação teórica do GeoGebra, é inevitável olhar a dissertação do mestrado do seu criador, Markus Hohenwarter, intitulada “GeoGebra Ein Softwaresystem für dynamische Geometrie und Algebra der Ebene”, na tradução ao português “**GeoGebra** Um sistema de *software* para geometria dinâmica e álgebra plana”. Na dissertação, Hohenwarter apresenta o programa GeoGebra, sua fundamentação matemática e computacional, assim como uma aplicação do *software* para alguns problemas de Matemática. O objetivo da dissertação foi bastante claro: “um programa de computador chamado GeoGebra que pode ser utilizado para aulas de geometria, que cria uma conexão

entre software de geometria dinâmica e álgebra computacional para o tratamento de objetos geométricos no plano” (Hohenwarter, 2002).

Como uma justificativa para a criação de seu programa, Hohenwarter expõe o panorama geral sobre os dois tipos de *softwares* educacionais que conectam os campos da geometria e da álgebra e são utilizados para o ensino e aprendizagem da Matemática. Por um lado, existe o *software* de geometria dinâmica (SGD), que permite aos usuários criarem e modificarem construções geométricas elementares, de tal forma que suas relações posicionais mútuas (por exemplo, perpendicular, paralela) sejam mantidas porque a manipulação de um objeto também modifica os objetos dependentes dele. Alguns exemplos são: o Cinderella, o Cabri-Géomètre 2D e 3D, o Geometer's Sketchpad, etc. Alguns programas de geometria dinâmica, por exemplo, o Cabri, ainda fornecem recursos algébricos básicos, exibindo as equações de linhas ou seções cônicas, bem como outras expressões matemáticas. Porém, o usuário não pode modificar essas equações diretamente.

Por outro lado, existem sistemas de álgebra computacional (CAS) que realizam simbolicamente álgebra, geometria analítica e cálculo (por exemplo, Derive, Maple, Mathematica, etc.). Usando equações de objetos geométricos, um sistema de álgebra computacional pode decidir sobre sua posição relativa entre si e exibir suas representações gráficas. Muitos sistemas de álgebra computacional também são capazes de plotar equações explícitas e, às vezes, até mesmo implícitas. Geralmente, a representação geométrica dos objetos não pode ser modificada diretamente pelo usuário.

O GeoGebra, por sua vez, é uma tentativa de unir esses dois tipos de *software*, em que geometria, álgebra e cálculo são tratados como parceiros iguais. O *software* oferece duas representações de cada objeto: (1) algebricamente, usando coordenadas, equações ou representação paramétrica e (2) geometricamente, como o conjunto de soluções associado (Hohenwarter, 2002, p. 3-4). Como destaque, agora o usuário pode modificar diretamente as representações geométricas e algébricas. A representação geométrica pode ser modificada arrastando-a com o mouse, enquanto a representação algébrica desse mesmo objeto é alterada dinamicamente. Por outro lado, a representação algébrica pode ser alterada usando o teclado, fazendo com que o GeoGebra ajuste automaticamente a representação geométrica relacionada.

Essa nova conexão dinâmica *bidirecional* entre múltiplas representações de objetos matemáticos abre uma ampla gama de novas possibilidades de aplicação de *software* de matemática dinâmica para ensinar e aprender Matemática, ao mesmo tempo em que promove a compreensão dos conceitos matemáticos pelos alunos de uma forma que não era possível há alguns anos (Preiner, 2008). Ainda Hohenwarter (2002) apresenta toda a teoria geométrica, algébrica e computacional na qual ele se baseou para criar o GeoGebra, nosso maior interesse, de acordo com os objetivos da pesquisa, está nessa relação bidirecional das representações de um objeto matemático descrito acima. Preiner (2008, p. 61-63) expõe algumas razões para escolher o GeoGebra como recurso tecnológico para o ensino e aprendizagem da Matemática. A seguir, discutimos algumas delas.

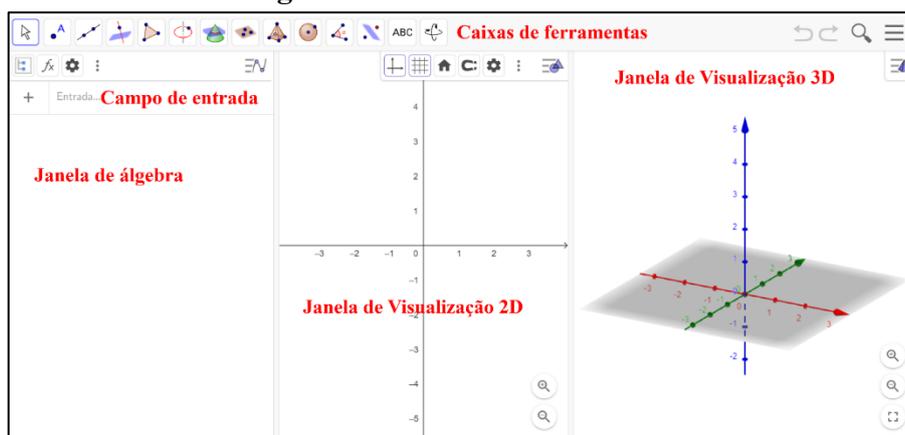
- **Múltiplas representações:** o GeoGebra fornece múltiplas representações de objetos matemáticos que potencialmente promovem a compreensão dos alunos sobre conceitos matemáticos (Duval, 1999). As representações algébricas numéricas de objetos são exibidas na janela de álgebra, e as representações gráficas desses objetos são exibidas na janela de visualização.
- **Conexão bidirecional:** No GeoGebra a necessidade de uma relação bidirecional de geometria dinâmica e álgebra computacional foi percebida. As diferentes representações de objetos matemáticos são conectadas dinamicamente, permitindo que o GeoGebra adapte cada representação às modificações de sua contraparte.
- **Manipuláveis virtuais:** o GeoGebra permite a criação de materiais instrucionais interativos baseados na web, chamados de planilhas dinâmicas.
- **Comunidade internacional de usuários:** o GeoGebra conta com uma comunidade internacional de professores e pesquisadores, que cria e compartilha materiais de ensino de Matemática e Ciências que podem ser baixados e usados por professores de todo o mundo.

Diante de tudo o que foi exposto até agora, o uso do GeoGebra promete ser eficaz para o ensino e aprendizagem da Matemática. Nesse sentido, Prieto (2016) apresenta uma categorização do uso da aplicação do GeoGebra em situações de ensino e aprendizagem da Matemática, baseado na perspectiva de Hohenwarter y Fuchs (2004), conforme Prieto (2016):

- **Como ferramenta de visualização:** o GeoGebra pode ser usado para oferecer uma perspectiva dinâmica de conceitos e relações matemáticas, a partir de múltiplos registros de representação (Dikovic, 2009; Preiner, 2008). Dessa forma, os sujeitos têm a possibilidade de \ “ver” e \ “explorar” conhecimentos matemáticos, muitas vezes inacessíveis com outros dispositivos;
- **Como ferramenta de construção:** o GeoGebra permite a criação e a manipulação de construções geométricas em 2D e 3D, com altos níveis de liberdade e consistência, favorecendo o estudo de objetos de geometria euclidiana e analítica (Liste, 2008, p. 12);
- **Como ferramenta de descoberta:** o uso adequado do GeoGebra pode favorecer a descoberta de padrões, regularidades ou invariantes matemáticos (por exemplo, invariantes geométricos) nos objetos exibidos em sua interface, o que aproxima os alunos do conhecimento matemático institucionalizado;
- **Como ferramenta de representação e comunicação do conhecimento matemático:** o GeoGebra oferece aos professores um ambiente amigável para o desenvolvimento de materiais dinâmicos, através dos quais eles podem representar e comunicar conceitos matemáticos e relacionamentos com seus alunos.

Essa categorização apresentada por Prieto (2016) permite uma visão mais ampla de como os professores podem utilizar o GeoGebra em suas aulas com diferentes propósitos. Nossa intenção é que o GeoGebra possa ser utilizado com uma ou duas dessas características nas atividades históricas. Para criar as atividades históricas nós usamos o GeoGebra Clássico 6, que pode ser usado em computadores, tablet, *smartphone* (Figura 1).

Figura 1. Interface do GeoGebra



Fonte: Elaboração pela autora

Os resultados discutidos neste capítulo evidenciam que a interseção entre História da Matemática e Tecnologias Digitais, especialmente com o uso do GeoGebra, amplia as possibilidades pedagógicas no ensino de Matemática. A história, ao ser utilizada como um acionador cognitivo, mostrou-se um recurso potente para estimular o pensamento crítico e criativo dos estudantes, promovendo uma compreensão mais aprofundada dos conceitos matemáticos. Paralelamente, o GeoGebra demonstrou ser um ambiente dinâmico que favorece a interação entre os aspectos históricos e a prática matemática contemporânea, possibilitando novas abordagens didáticas.

Dessa forma, este capítulo reforça a importância de integrar a História da Matemática e as Tecnologias Digitais no ensino, abrindo caminho para investigações que explorem essa articulação em diferentes contextos educacionais. A análise realizada contribui para a construção de uma perspectiva mais ampla sobre o ensino de Matemática, destacando que a história e a tecnologia não devem ser vistas como elementos isolados, mas sim como componentes complementares que enriquecem a aprendizagem.

Dando continuidade à investigação, o próximo capítulo se volta para a evolução histórica das Cônicas e sua relação com a Geometria Analítica. Busca-se compreender como a transição das formulações geométricas para as representações algébricas pode contribuir para o ensino dessa área, sistematizando um desenvolvimento histórico e epistemológico das Cônicas e analisando suas implicações didáticas.

3

UMA HISTÓRIA SOBRE AS CÔNICAS COM UMA ABORDAGEM DO GEOMÉTRICO AO ALGÉBRICO

Este capítulo apresenta uma revisão analítica-epistemológica sobre as seções cônicas: Parábola, Elipse e Hipérbole. Estabelecemos uma sequência histórica sobre os estudos dessas curvas, partindo de seus inícios com as contribuições por parte de Menêcmo⁸ (380 a.C. - 320 a.C.), considerado o descobridor das cônicas, e Apolônio de Perga (262 a.C.- 194 a.C.), com aprofundamento das seções cônicas e uma abordagem geométrica para determinar as equações das seções cônicas a partir de sua definição de lugar geométrico. Nossa intenção neste capítulo é argumentar que, nesse desenvolvimento histórico-epistemológico apoiado nas ideias desses matemáticos, podem se delinear correlações geométricas-algébricas.

Diversas fontes secundárias e terciárias foram consultadas para esta revisão analítica-epistemológica, tais como livros, tese, dissertações e artigos que descrevem o estudo das seções cônicas. Iniciaremos com a origem das cônicas que, segundo a História da Matemática está no problema da duplicação do cubo. Em sequência, falaremos do desenvolvimento da Parábola, Elipse e Hipérbole, conforme a sequência estabelecida no parágrafo anterior.

3.1 Uma história sobre as seções cônicas

Nesta seção, apresentamos uma sistematização da história das Cônicas com base nas contribuições de diversos historiadores da Matemática (Collette, 1985; Boyer, 1997; Estrasa; Sá; Queiró; Costa, 2000). Nosso objetivo é articular essas perspectivas históricas com

⁸ Não existe uma única forma de escrever o nome deste matemático nas fontes consultadas. Constam: Menêacmo, Menaecmus, Menêcmo, entre outros. Neste trabalho nos referiremos ao matemático como Menêcmo.

reflexões próprias, buscando oferecer uma visão coesa e acessível sobre o desenvolvimento das cônicas ao longo do tempo. Para manter a fluidez do texto e evitar um excesso de referências que possa comprometer a clareza da leitura, citamos pontualmente os autores nos trechos em que suas contribuições são diretamente discutidas.

Vários historiadores (Collette, 1985; Boyer, 1997; Estrasa; Sá; Queiró; Costa, 2000) atribuem a origem das seções cônicas a Menêcmo, por meio de sua resolução do problema da duplicação do cubo, também chamado de “problema de Delos”. Segundo Lopes (2011) o referido problema foi declarado da seguinte maneira: dada a aresta de um cubo, construir com o uso da régua e compasso a aresta de um segundo cubo cujo volume seja o dobro do primeiro. Aunado a isso, Lopes (2011) expressa que Hipócrates de Chios (470-410 a.C.) demonstrou que resolver o problema da duplicação do cubo equivale a resolver o problema de inserir duas médias proporcionais entre dois segmentos. Então, se considerarmos um cubo de segmento a , determine dois segmentos x e y que são proporcionais, tais que:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a} \quad (1)$$

Se considerarmos a notação atual, duas das três igualdades a seguir devem ser resolvidas:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} \Rightarrow x^2 = ay \quad (1.1)$$

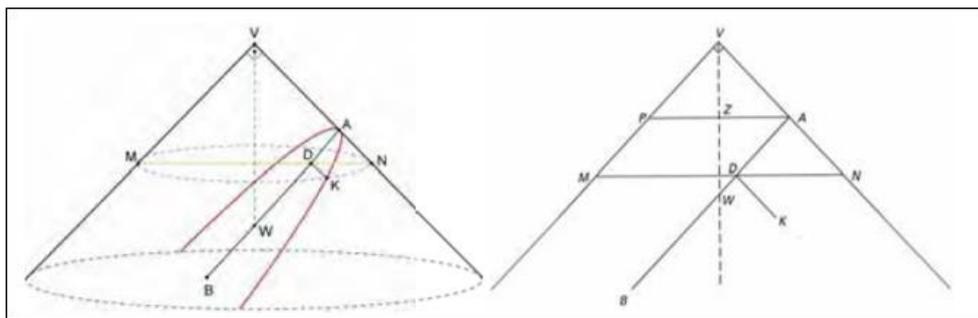
$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} \Rightarrow y^2 = 2ax \quad (1.2)$$

$$\frac{a}{x} = \frac{y}{2a} \Rightarrow x \cdot y = 2a^2 \quad (1.3)$$

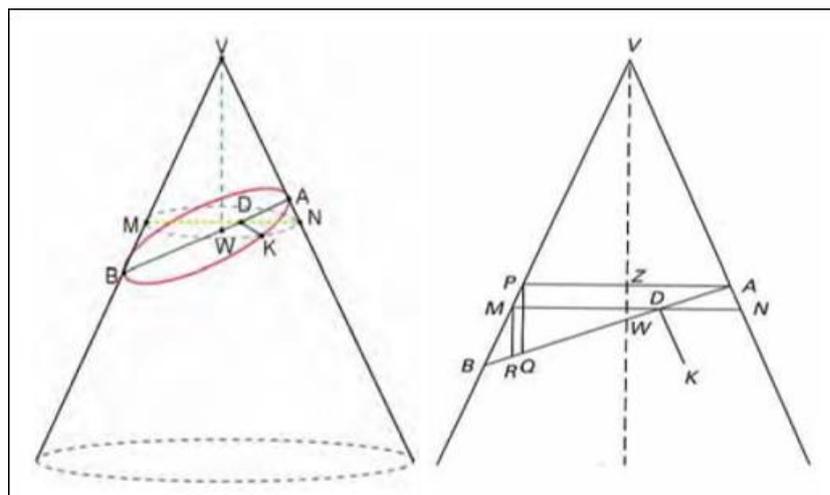
Nesse sentido, Lopes (2011, p. 34) afirma “que representam parábolas nos dois primeiros casos e hipérbolas no terceiro”. Portanto, os segmentos procurados são determinados pela interseção de quaisquer duas dessas três cônicas. Em sua busca para resolver esse famoso problema, Menêcmo da Academia Platônica – o mais famoso dos discípulos de Eudoxo e professor de Aristóteles e Alejandro Magno – descobriu uma família de curvas adequadas que foram chamadas de “Triade de Menêcmo”, obtidas pelo mesmo método, ou seja, de um plano que corta perpendicularmente a geratriz de três tipos de cones retos, dependendo do ângulo no vértice do cone: agudo, reto ou obtuso.

Que em suas origens as cônicas deveriam ser obtidas de três cones diferentes se deve ao fato de que, na Grécia dos séculos IV e III a.C., um cone era um sólido gerado pela rotação de um triângulo retângulo em torno de um de seus catetos. Portanto, naquela época, apenas os cones retos de uma única folha eram considerados (Collette, 1985). Dessa forma, as cônicas foram classificadas de acordo com o tipo de cone com o qual são produzidas. Assim, segundo Silva Filho (2015), foram denominadas seção de cone de ângulo reto ou *Orthotome*, hoje conhecida como parábola (Figura 2a); seção de cone de ângulo agudo ou *Oxytome*, a elipse (Figura 2b), e seção de cone de ângulo obtuso ou *Amblytome*, a hipérbole (Figura 2c). É importante mencionar que, por serem considerados apenas cones de uma única folha, pôde-se observar apenas um único ramo do *Amblytome*.

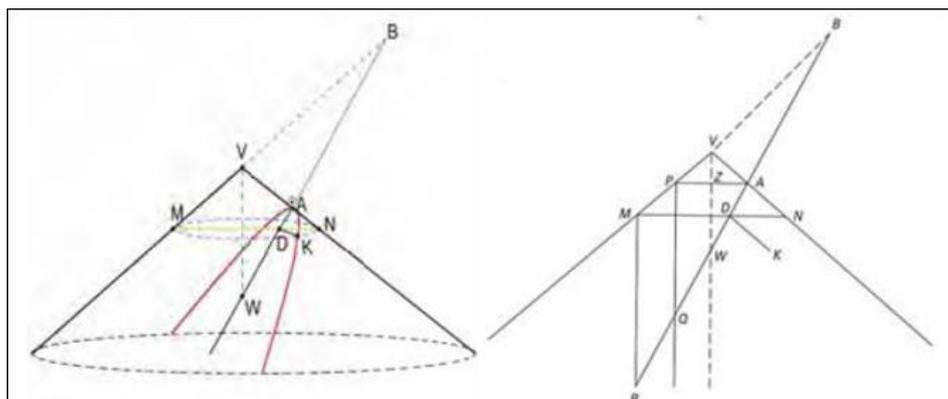
Figura 2. Cone, curvas e representação plana do triângulo gerador, segundo Menêcmo



(a) Orthotome



(b) Oxytome



(c) Amblytome

Fonte: Lopes (2011, p. 36)

A partir dessas definições, Lopes (2011) expressa que os gregos estabeleceram a fórmula matemática que caracteriza a cônica. Essa fórmula era baseada na relação entre dois segmentos perpendiculares situados no plano da curva. Na linguagem matemática atual, esses segmentos correspondem à abscissa e à ordenada de um ponto da curva em questão. Os gregos chamavam de *symptome*⁹ dessas curvas aquela expressão matemática que se obtinha através da semelhança de triângulos na representação planar do triângulo, gerado a partir de cada tipo de cone. Assim, Menêmo usaria os conhecimentos geométricos que seriam familiares aos matemáticos da Academia Platônica para mostrar a família de curvas em seus estudos.

Durante mais de 150 anos, as curvas introduzidas por Menêmo eram conhecidas a partir da descrição da forma em que foram descobertas, ou seja, através da perífrase, seção (perpendicular a uma geratriz) de um cone ângulo agudo, retângulo ou obtuso. Isso mudou com a publicação da obra “As Cônicas”, de Apolônio de Perga. Ele foi um dos matemáticos que mais se destacou em seu tempo produzindo trabalhos notáveis que influenciaram a Matemática atual. O apelido de Grande Geômetra foi devido às suas diversas obras sobre a geometria, que se caracterizavam pelo rigor matemático nos textos, estudo exaustivo do tema abordado e ideias sofisticadas.

Entre os diversos tratados, apenas dois chegaram até nós de forma quase completa: (1) *Dividir segundo uma razão* e (2) *As cônicas*. Este último é, sem dúvida, sua obra mais notável, composta por oito volumes e cerca de 400 proposições. Nele, o autor realiza uma

⁹ Que quer dizer sintoma.

análise aprofundada sobre as seções cônicas, reunindo todo o conhecimento disponível na época e acrescentando descobertas inéditas, o que consolidou As Cônicas como o tratado mais relevante sobre o tema até então. Dos oito volumes originais, sete foram preservados — quatro em grego e três por meio de uma tradução para o árabe feita por Thabit Ibn Qurra (Lopes, 2011).

Apolônio fez importantes contribuições para as seções cônicas. Uma delas é o tipo de cone usados para gerar a curva. Como foi mencionado anteriormente, antes de Apolônio as cônicas eram obtidas como seções de três tipos de cone circular reto. O geômetra mostrou sistematicamente pela primeira vez que não é necessário tomar seções perpendiculares à geratriz de um cone, e que de um único cone podem ser obtidas todos os três tipos de seções cônicas, simplesmente variando a inclinação do plano da seção. Uma segunda ampliação conceitual relacionada ao cone foi a demonstração de que ele não precisa ser, obrigatoriamente, reto — podendo assumir formas oblíquas ou escalenas. Outra importante contribuição de Apolônio foi a introdução do cone duplo em substituição ao cone de uma única folha.

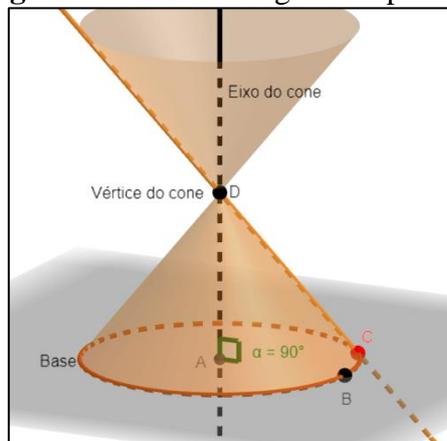
Dessa maneira, as definições referentes ao cone encontram-se no livro I das Cônicas, as 8 primeiras definições relativas à geração das superfícies e do volume dos cones retos e oblíquos, dos diâmetros conjugados e dos eixos das linhas curvas. Seguem três definições referentes ao cone descritas pelo Apolônio:

Definição 1: *Se de um ponto não localizado no plano de uma circunferência for traçada uma linha reta prolongada em ambas as direções e, permanecendo o ponto fixo, a linha feita percorre a circunferência até retornar ao ponto de sua posição inicial, chamo de “superfície cônica” aquela que, descrita pela reta, é composta por duas superfícies opostas no vértice que se estendem até o infinito, igual à reta geradora; e chamo o ponto fixo de “vértice” da superfície, e a reta traçada por ele e o centro do círculo de “eixo” (Eecke, 1963 p.3).*

Definição 2: *Chamo de “cone” a figura delimitada pelo círculo e pela superfície cônica situada entre o vértice e a circunferência do círculo; “vértice” do cone o ponto que é o próprio vértice de sua superfície; “eixo” do cone a linha traçada do vértice ao centro do círculo; e a “base” o círculo (Eecke, 1963 p.4).*

Definição 3: *Dentre os cones, chamo de retos aqueles que têm os eixos perpendiculares às bases, e oblíquos a aqueles que não têm os eixos perpendiculares às bases* (Eecke, 1963 p.4).

Figura 3. Cone reto segundo Apolônio



Fonte: Elaborado pela autora

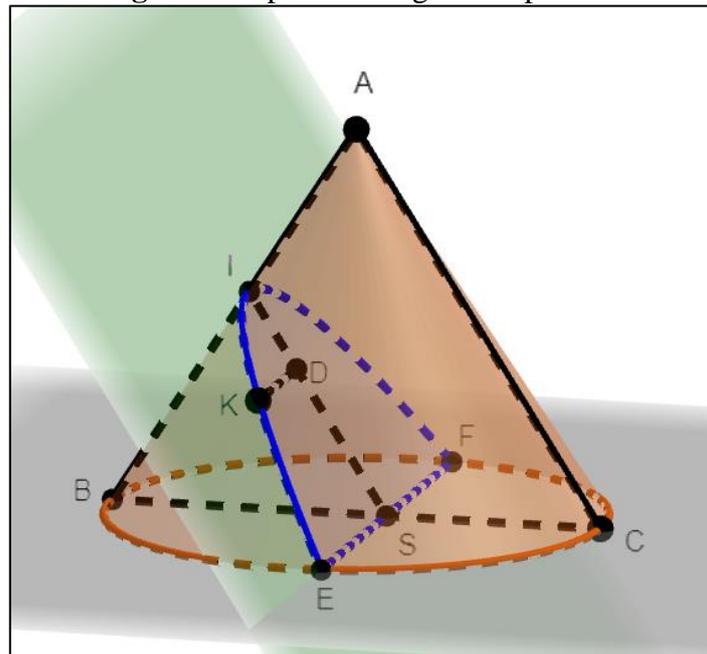
Outro avanço significativo trazido por Apolônio no estudo das cônicas foi a introdução dos nomes Parábola, Elipse e Hipérbole. Por cerca de 150 anos, essas curvas eram identificadas de acordo com a forma do cone em que eram geradas: seção de cone acutângulo (*axytome*), seção de cone retângulo (*orthotome*) e seção de cone obtusângulo (*amblytome*). Porém, Apolônio não inventou esses nomes, ele aplicou no estudo das cônicas uma terminologia desenvolvida pelos pitagóricos que era empregada nas aplicações de área da geometria grega. Os nomes dessas aplicações se justificam pelo fato de que a palavra parábola indica igual; a palavra elipse vem de *ellipsis* e significa falta, e a palavra hipérbole, vem de *hyperbola*, querendo dizer excesso (Silva Filho, 2015).

Com base nas definições propostas por Apolônio, as cônicas passaram a ser compreendidas sob uma nova perspectiva. Para caracterizar as três curvas, o geômetra iniciou cortando o cone por um plano que passava pelo seu eixo. A linha resultante da interseção entre esse plano e a base do cone é o diâmetro BC. O triângulo formado, denominado triângulo axial, é o triângulo ABC. A partir disso, a parábola, a elipse e a hipérbole são definidas como as curvas obtidas pela interseção do cone com planos específicos que cortam o segmento BC ou sua extensão, ao longo de uma reta EF. Logo, a reta AS é a interseção dos cortes planos com o triângulo axial. As cônicas são definidas, então, da seguinte forma (Lopes, 2011, p. 41):

- Se IS é paralelo ao lado do triângulo axial, a seção é uma parábola (Figura 4);

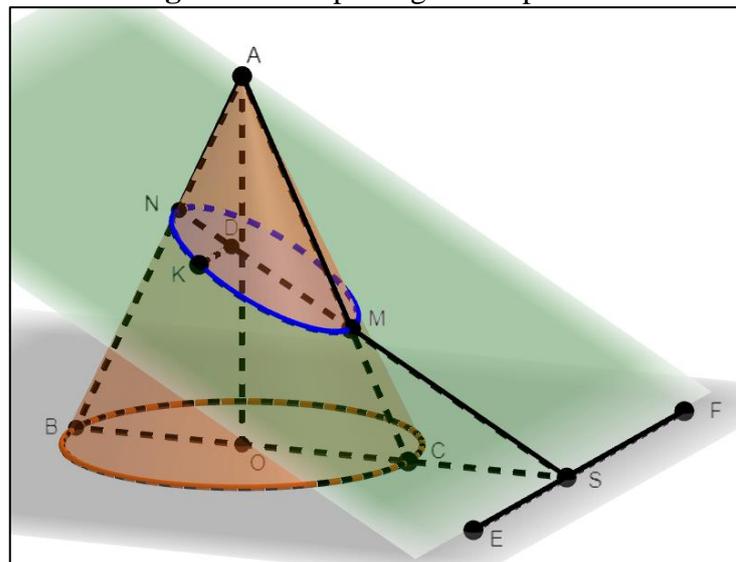
- Se IS interceptar ambos os lados do triângulo axial, a seção é uma elipse (Figura 5);
- Se IS interceptar um dos lados do triângulo axial e o prolongamento do outro lado dado além de A, a seção é uma hipérbole. Nesta situação, existem dois ramos da curva, ao contrário da hipérbole gerada pelo cone de ângulo obtuso (Figura 6).

Figura 4. A parábola segundo Apolônio



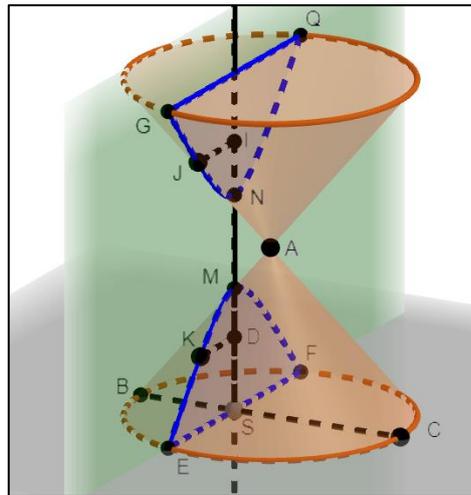
Fonte: Elaborado pela autora

Figura 5. A elipse segundo Apolônio



Fonte: Elaborado pela autora

Figura 6. A hipérbole segundo Apolônio



Fonte: Elaborado pela autora

Apolônio determinou o *syntome* (a expressão matemática) da curva utilizando um método semelhante ao adotado por seus antecessores. Para isso, ele escolhia um ponto arbitrário K sobre a curva e traçava, por esse ponto, um plano paralelo à base do cone (Lopes, 2011).

Durante muito tempo, as cônicas foram estudadas a partir de uma abordagem puramente geométrica. Isso mudou com o nascimento da Geometria Analítica, que permitiu uma nova abordagem dessas curvas que se estabelece até hoje. Segundo estudiosos da História da Matemática, a Geometria Analítica nasceu num período histórico, especificamente no século XVII. Nesse período, houve um autêntico surgimento de novos ramos da Matemática, por exemplo, o Cálculo Infinitesimal¹⁰ a Teoria dos Números e a Geometria Projetiva. É uma época em que foi alcançado o grau máximo de recuperação e assimilação do legado matemático grego. O nascimento da Geometria Analítica é atribuído aos franceses René Descartes (1596 - 1650) e Pierre de Fermat (1601-1665).

Durante esse período houve grande interesse pelo mundo matemático clássico dos gregos. Por um lado, houve os impressionantes resultados obtidos e, por outro, os métodos de descoberta da matemática grega. É nesse contexto que a época é dominada pela reconstrução das obras perdidas da antiguidade, especialmente as de Apolônio, talvez motivada pela conjectura de que, reconstruindo os livros perdidos, poderia ser descoberto o procedimento utilizado pelos gregos para obter seus resultados brilhantes, ou seja, “o

¹⁰ Em seu duplo aspecto diferencial e integral.

método”, que nunca haviam revelado. Nesse sentido, Fermat assumiu a tarefa de reconstruir os *Lugares Planos de Apolônio*¹¹, com base nas referências contidas na *Coleção Matemática Pappus*, que deu origem à sua obra *Introdução aos lugares geométricos de curvas planas e sólidas*¹², conhecida como *Isagoge*, onde está a Geometria Analítica de Fermat. Por sua vez, Descartes criou um método que levaria ao conhecimento das verdades absolutas, baseado exclusivamente na razão. Em suas palavras: “buscar o verdadeiro método para conhecer todas as coisas de que meu espírito é capaz” (Descartes, 2018, p. 80). A intencionalidade de Descartes estaria refletida até no título da obra da qual *A Geometria* faz parte, denominada *O Discurso do Método*¹³, na qual expressa, de forma clara e distinta: “o método para direcionar corretamente a razão e buscar a verdade nas ciências”.

As Geometrias Analíticas de Descartes e Fermat surgem, justamente, do interesse de ambos pela metodologia. Segundo Urbaneja (2007), “Tanto *A Geometria* de Descartes como a *Isagoge* de Fermat estão baseadas na Geometria Grega, mas consideram uma tarefa essencial encontrar métodos novos, mais simples, mais operacionais, mais decisivos e, sobretudo, mais gerais”. Além disso, Descartes e Fermat utilizam a álgebra geométrica de François Viète (1540-1603), expressa em sua obra *Introdução à Arte Analítica*¹⁴. Nesse trabalho, François Viète estabeleceu uma ligação entre Álgebra e Geometria, obtendo as equações que correspondem a diversas construções geométricas, para problemas geométricos específicos, utilizando apenas equações específicas, em que a variável, embora seja uma incógnita, é uma constante fixa para determinar (Urbajena, 2007). Assim, Descartes e Fermat desenvolvem essa ideia para problemas geométricos indeterminados, considerando equações indeterminadas em variáveis contínuas representando segmentos geométricos.

O princípio fundamental da Geometria Analítica considera que equações indeterminadas em duas incógnitas correspondem a lugares geométricos, geralmente curvas, determinados por todos os pontos cujas coordenadas relativas a dois eixos satisfazem a equação. Descartes, no Livro II da *A Geometria*, expressa um aspecto dessa ideia: “Para encontrar todas as propriedades das retas curvas basta conhecer a relação que todos os seus pontos têm com os das retas [...]”. Por sua vez, Fermat complementa a ideia de Descartes quase no início da *Isogage*: “Sempre que duas incógnitas são encontradas em uma equação

¹¹ Em latim, *Apolonii Pergaei libri duo de locis planis restituti*.

¹² Em latim, *Ad Locos Planos et Solidos Isagoge*.

¹³ *Discours de la méthode pour bien conduire sa raison, et chercher la vérité dans les sciences*.

¹⁴ *In artem analyticem isagoge*.

final, existe um lugar geométrico, com o final de uma delas descrevendo uma linha reta ou curva”.

Em ambas as sentenças são estabelecidos os fundamentos da Geometria Analítica, ou seja, a relação que liga os segmentos ou “retas” que funcionam como coordenadas dos pontos de uma curva, ou a equação da curva, um elemento essencial para desvendar as propriedades e elementos da curva. A equação da curva faz uma transição da Geometria para a Álgebra, que, pela sua natureza operacional, permite, através de cálculos e resolução de equações, regressar à Geometria, para encontrar e resolver questões geométricas, para que se estabeleça uma correspondência entre as propriedades algébricas da equação e as propriedades geométricas da curva associada (Urbaneja, 2007).

Descartes elabora um potente método analítico-sintético para os problemas geométricos, cuja solução seja um lugar geométrico (caso do problema de Pappus), utilizando a álgebra como instrumento algorítmico. Porém, segundo Aymemí (2009), Descartes usa a álgebra para resolver problemas geométricos e, assim, obtém uma solução algébrica, mas ainda acredita que um problema geométrico exige uma solução geométrica representável graficamente. A álgebra é, portanto, uma ferramenta útil, mas o objetivo ainda é a geometria desenhada no papel. Por sua vez, Fermat estabelece que uma equação algébrica em duas incógnitas define, em relação a um sistema de coordenadas, um lugar geométrico de pontos, ou seja, uma curva. Assim, ao ligar os trabalhos de Apolônio e François Viète, Fermat concebe a sua Geometria Analítica que estabelece uma ponte eficaz entre a Geometria e a Álgebra, que lhe permitirá associar curvas e equações, a partir da aplicação da Análise Algébrica de François Viète aos problemas de lugares geométricos de Apolônio e Pappus, definido, num sistema de coordenadas, por uma equação indeterminada em duas incógnitas.

De um modo geral, pode-se dizer que a invenção da Geometria Analítica por Descartes consiste na extensão da Arte Analítica de François Viète à construção geométrica de soluções de equações indeterminadas, enquanto para Fermat foi o estudo dos lugares geométricos através da Arte Analítica de François Viète. Nesse sentido, digamos que, enquanto Descartes parte da curva correspondente a um lugar geométrico, da qual deriva a equação do lugar, ou seja, resolve problemas geométricos através da construção da solução geométrica das equações, Fermat parte inversamente de uma equação algébrica da qual são derivadas as propriedades geométricas da curva correspondente (Urbaneja, 2007).

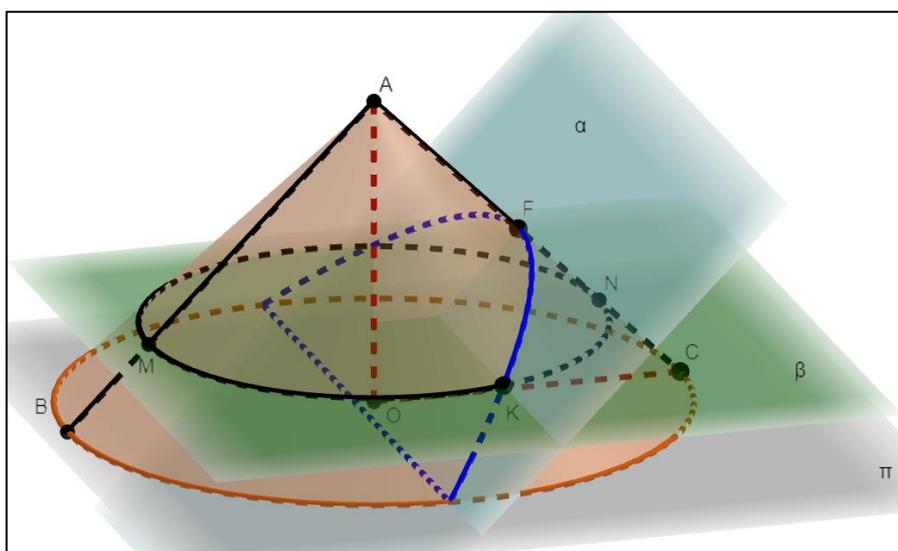
É nessa direção da geometria analítica que os estudos das seções cônicas continuaram até o que conhecemos hoje, ou seja, como lugares geométricos que atendem a determinadas condições pertencentes a um plano cartesiano. Nesse sentido, o estudo realizado sobre as seções cônicas nas subseções seguintes partirá da descoberta delas por Menêcmo, do estudo de Apolônio sobre essas curvas e de um estudo geométrico das seções cônicas a partir de sua definição como lugar geométrico.

3.2 A trajetória matemática da *Orthotome* à Parábola

Iniciaremos este recorrido histórico- epistemológico da Parábola trazendo as ideias produzidas por Menêcmo para obter o *symptome* da *Orthotome*, já que, como foi dito nos parágrafos anteriores, a descoberta dessas curvas atribui-se a esse matemático grego.

Segundo Estrada *et al.* (2000), Menêcmo considerou um cone circular reto apoiado sobre o plano π que possui um ângulo reto no vértice A . O segmento BC é o diâmetro da circunferência c da base do cone. O ponto F está sobre a geratriz AC e por ele trace um plano α perpendicular a AC . Da interseção do cone com o plano α obtemos a curva p , que Menêcmo chamou de *Orthotome*. Além disso, o ponto O é o centro do cone. Agora temos um ponto K sobre a curva p que seja diferente de F e por esse ponto incidiremos o plano β paralelo ao plano π . A interseção do cone com o plano β é a circunferência g . A interseção de g com as geratrizes AC e AB são os pontos N e M , respectivamente. Temos então que o segmento MN é o diâmetro de g (Figura 7).

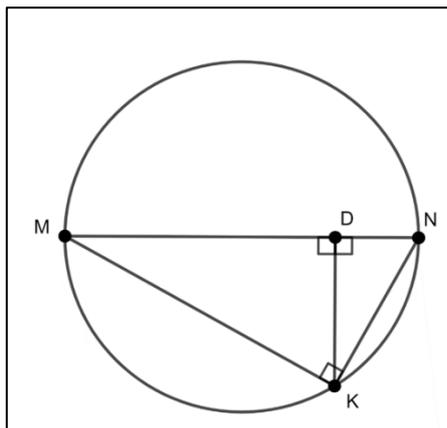
Figura 7. A *Orthotome*



Fonte: Elaborada pela autora a partir de Silva Filho (2015)

A interseção entre a curva p e a circunferência c são os pontos J e G e a interseção de p com g são os pontos P e Q . Seja E o ponto médio dos pontos J e G . Por simetria os segmentos MN e PQ são perpendiculares e a interseção entre eles é o ponto D . Como MN é diâmetro de g , temos que o triângulo KMN inscrito na circunferência g é retângulo e tem o segmento MN como hipotenusa e KD é a altura relativa à hipotenusa (Figura 8).

Figura 8. KD é a média proporcional entre DM y DN



Fonte: Elaborado pela autora

A partir da figura 18, observe que o triângulo ΔMKN é retângulo em K e o triângulo ΔMKN é semelhante aos triângulos ΔMDK e ΔNDK . Os triângulos ΔMDK e ΔNDK são semelhantes, então podemos dizer que:

$$\frac{DM}{DK} = \frac{DK}{DN} \quad (2)$$

Dessa forma, KD é a média proporcional¹⁵ entre DM y DN , portanto, podemos escrever o seguinte:

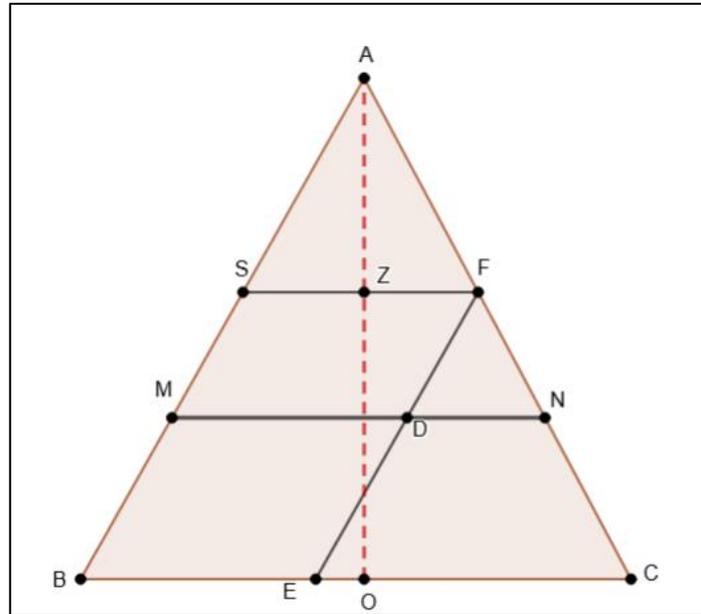
$$KD^2 = DM \cdot DN \quad (2.1)$$

Observe que FD e KD são segmentos perpendiculares e podem ser vistos como a abscissa e a ordenada do ponto K , respectivamente. Assim, a expressão matemática associada a cada curva é obtida pela relação entre KD e FD (Lopes, 2011). Como o cone é ortogonal, o triângulo retângulo que gera o cone também é isósceles, portanto, os segmentos FD e AB são paralelos (Estrada *et al.*, 2000). Em seguida, desenhe uma reta paralela a MN

¹⁵ Um segmento é a média proporcional de dois outros segmentos, quando ocupa as duas médias ou os dois extremos da mesma proporção.

e chame S e Z os pontos de interseção desse paralelo com a geratriz AB e com o eixo do cone AO respectivamente (Figura 9).

Figura 9. Vista frontal da *Orthotome* segundo Menêmo



Fonte: Elaborada pela autora

Tanto o triângulo ΔFZA quanto o triângulo ΔDNF são semelhantes pelo critério ângulo-ângulo, os ângulos \widehat{DFN} e \widehat{FZA} são retos e os ângulos \widehat{AFZ} e \widehat{FND} são congruentes pelo fato de ser correspondentes entre paralelas, já que $MN \parallel SF$ (\parallel notação para retas paralelas).

$$\frac{DN}{DF} = \frac{FA}{ZF} \Rightarrow DN = \frac{DF \cdot FA}{ZF} \quad (2.2)$$

Observe que $MD \parallel SF$ assim como $ME \parallel DF$, logo o quadrilátero $MDFS$ é um paralelogramo, pode-se escrever o seguinte:

$$DM = 2 \cdot ZF \quad (2.3)$$

Então, substituindo as equações (2.2) e (2.3), em (2), temos que,

$$KD^2 = DM \cdot DN \Rightarrow KD^2 = 2ZF \frac{DF \cdot FA}{ZF}, \text{ logo}$$

$$KD^2 = 2FA \cdot PD \quad (2.4)$$

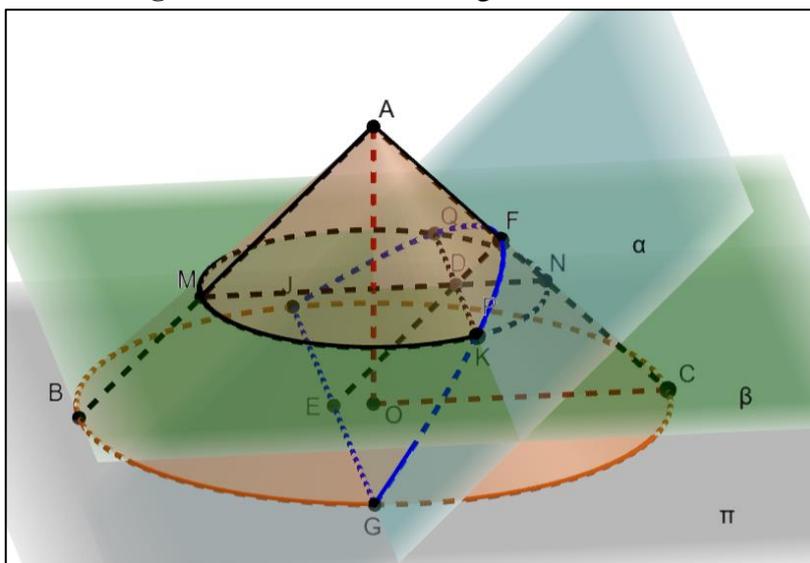
Segundo Estrada *et al.* (2000), os gregos chamavam a *symptome* do *Orthotome* da seguinte maneira: Dado um ponto qualquer K da curva, o quadrado de lado KD é o dobro do retângulo de lado DF FA , onde A é o vértice do cone, F o ponto de interseção do plano da curva com a geratriz AC (que lhe é perpendicular), e D o pé da perpendicular do ponto K .

Agora, se usamos a notação de hoje e chamarmos $KD = x$, $DF = y$ e $FA = p$, a equação (2.4) pode ser escrita da seguinte forma:

$$x^2 = 2py \quad (2.5)$$

O que seria uma equação da Parábola (Figura 10).

Figura 10. A *Orthotome* segundo Menêacmo



Fonte: Elaborada pela autora a partir de Silva Filho (2015)

O seguinte avanço no estudo da Parábola foi por parte de Apolônio em seu tratado *As Cônicas*. Segundo Eecke (1963), o geômetra define a Parábola no seu primeiro livro na proposição XI da seguinte maneira:

Se um cone for cortado por um plano que passa pelo eixo, e se for cortado por outro plano que corta a base do cone ao longo de uma linha perpendicular à base do triângulo que passa pelo eixo; se, além disso, o diâmetro da seção for paralelo a um dos lados do triângulo que passa pelo eixo, o quadrado de qualquer reta traçada a partir da seção do cone, paralela à seção comum do plano secante e da base do cone, até o diâmetro da seção, equivale ao retângulo delimitado pela linha que ele corta no diâmetro, na lateral do topo da seção, e por uma determinada linha cuja relação com a linha localizada entre o ângulo do cone e do vértice da seção é igual ao do quadrado da base do triângulo que passa pelo eixo até o retângulo delimitado pelos dois lados restantes do triângulo. Chamaremos tal seção de parábola (p. 21).

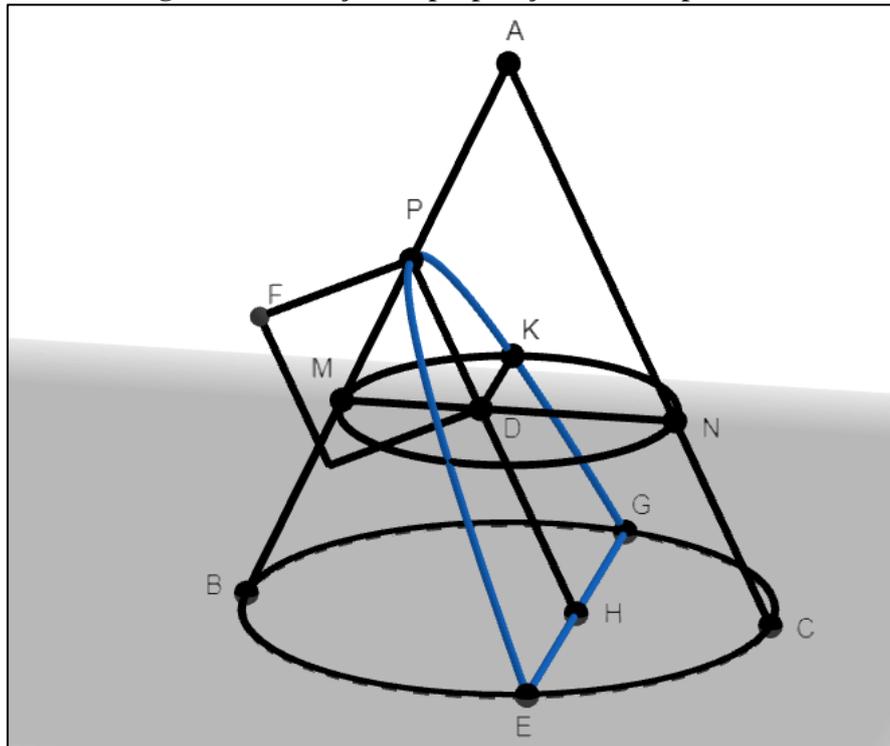
Segundo Eecke (1963, p. 22) e Unbaneja (2017, p. 52), Apolônio brinda uma continuação à sua proposição XI no intuito de explicar sua definição de Parábola:

Se um cone de vértice A e que tem como base a circunferência BC , vamos cortá-lo por um plano que passa pelo eixo, que produzirá como seção o triângulo ABC , e por outro plano que corta a base do cone segundo a reta EG perpendicular à base BC do triângulo ABC e à superfície cônica segundo a reta GPE cujo diâmetro PH

é paralelo ao lado AC do triângulo que passa pelo eixo; vamos elevar no ponto P a perpendicular PF a PH e fazer com que a reta PF esteja para uma reta PA como o quadrado de BC ao retângulo formado por AB e AC e, por fim, traçamos por qualquer ponto K da seção paralela KD a EG . Digo que o quadrado de KD equivale ao retângulo de PF e PD .

A solução de Apolônio para sua proposição XI do livro I é mostrada na figura 11 a seguir:

Figura 11. Solução da proposição XI de Apolônio



Fonte: Elaborada pela autora

Mais detalhadamente, o que Apolônio propõe para o estudo dessa curva pode ser entendido da seguinte forma: Seja um cone de vértice A e que tem como base a circunferência BC , trazemos um plano que passa pelo eixo, que produzirá o triângulo axial ABC , logo o segmento BC é base do triângulo axial ABC . O segmento GE no plano da base do cone é perpendicular a BC . A curva FGE é uma Parábola gerada pela interseção do plano π com o cone, logo o segmento FH é a interseção da seção plana com o triângulo ABC . O ponto K é um ponto qualquer pertencente à curva FGE , com o segmento KD perpendicular ao plano do triângulo axial ABC . Assim, KD é perpendicular a FH no ponto D . Por sua parte, o segmento MN é o diâmetro da seção circular determinada por um plano que contém o segmento KD , sendo este paralelo à base BC . O segmento MN intercepta o lado AB em M e AC em N , logo KD é perpendicular a MN no ponto D .

Por média proporcional, encontra-se:

$$KD^2 = MD \cdot ND \quad (3.1)$$

O ponto P é a interseção da curva com um dos lados do triângulo axial ΔABC . PF é um segmento perpendicular a PH e PF também está contido no plano perpendicular à seção cônica que passa por P . Segundo Lopes (2011), o segmento PF é de extrema importância para a caracterização das curvas. Ainda segundo esse autor, é um parâmetro que Apolônio definiu em função dos lados do triângulo axial ABC e dos segmentos AP e PF da seguinte forma:

$$\frac{PF}{PA} = \frac{BC^2}{BA \cdot AC} \quad (3.2)$$

O autor Eecke (1963, p. 22) comenta como Apolônio conseguiu chegar à equação (3.2):

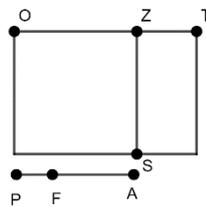
Encontramos num pequeno comentário de Eutócio, relativo a esta proposição, (ver ed. Heiberg, vol. II, p. 217), a forma de satisfazer pelo processo de aplicação de áreas, usual entre os geômetras da antiguidade, para o relacionamento.

$$\frac{PF}{PA} = \frac{BC^2}{BA \times AC}$$

Apolônio aqui invoca subsidiariamente, resumimo-lo da seguinte forma, de acordo com o texto grego de Eutócio: Seja um retângulo tal que:

$$OZ \times ZS = BA \times AC$$

Apliquemos ao lado ZS uma área retangular equivalente ao quadrado BC , cujo outro lado será ZT :



$$\frac{PF}{PA} = \frac{TZ}{ZO}$$

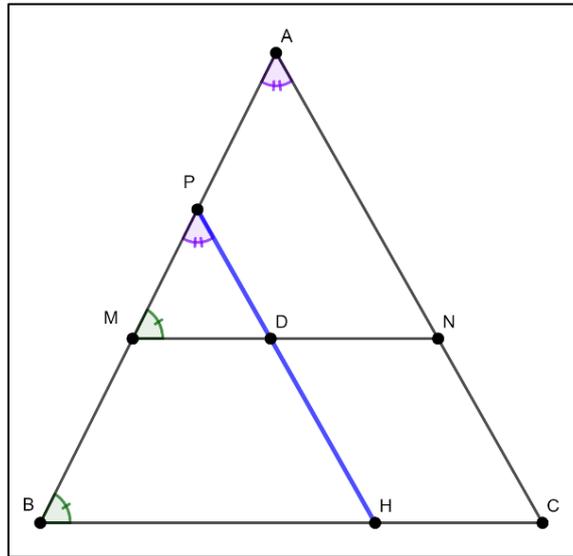
Os retângulos OS , TS estão entre eles como suas bases, feitos

$$\begin{aligned} \frac{TZ}{ZO} &= \frac{\text{area } TS}{\text{area } OS} = \frac{ZT \times ZS}{OZ \times ZS} \\ \frac{PF}{PA} &= \frac{TZ}{ZO} = \frac{BA \times AC}{BC^2} \\ \frac{PF}{PA} &= \frac{BA \times AC}{BC^2} \end{aligned}$$

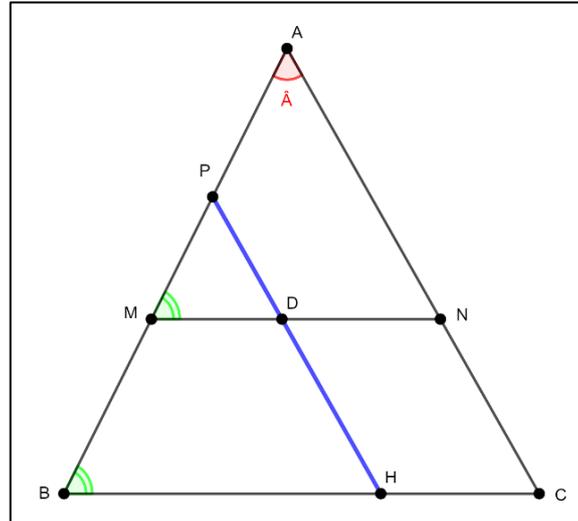
Agora, se PH for paralelo ao lado AC do triângulo Axial ($PH \parallel AC$) e, como foi dito acima, o segmento MN é paralelo ao diâmetro da base BC ($MN \parallel BC$), então os triângulos ABC e PMD são semelhantes, pelo critério ângulo- ângulo (o ângulo \widehat{ABC} é congruente com o ângulo \widehat{PMD} por serem ângulos correspondentes entre paralelas, de igual maneira, o ângulo \widehat{MPD} é congruente com o ângulo \widehat{BAC} , por serem ângulos correspondentes entre

paralelas, ver Figura 12a). De igual maneira, os triângulos ABC e AMN são semelhantes, pelo critério ângulo-ângulo (o \hat{A} é comum para os dois triângulos, o ângulo \widehat{CBA} é congruente com o ângulo \widehat{NMA} por serem ângulos correspondentes entre paralelas, ver figura 12b).

Figura 12. Semelhança nos triângulos $\Delta ABC \approx PMD$ e $\Delta ABC \approx AMN$



(a)



(b)

Fonte: Elaboração pela autora

então temos que:

$$\Delta PDM \approx \Delta ABC \text{ e } \Delta ABC \approx \Delta AMN, \text{ logo}$$

$$\Delta PDM \approx AMN$$

Dáí tem-se que:

$$\frac{MD}{PD} = \frac{BC}{AC} \quad \text{e} \quad \frac{DN}{PA} = \frac{BC}{BA} \quad (3.3)$$

Dividindo ambos os membros da equação (3.1) por $PD \cdot PA$ tem-se que:

$$\frac{KD^2}{PD \cdot PA} = \frac{MD \cdot DN}{PD \cdot PA} \quad (3.4)$$

Logo, substituindo (3.2) e (3.3) em na equação (3.4)

$$\frac{KD^2}{PD \cdot PA} = \frac{BC \cdot BC}{AC \cdot BA} = \frac{BC^2}{AC \cdot BA} = \frac{PF}{PA}, \quad (3.5)$$

Então, podemos escrever (3.5) da seguinte maneira:

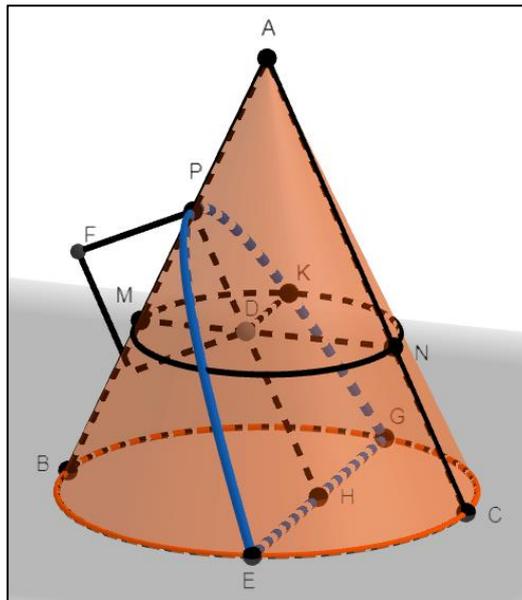
$$\frac{KD^2}{PD \cdot PA} = \frac{PF}{PA} \Rightarrow KD^2 = \frac{PD \cdot PF \cdot PA}{PA} \Rightarrow KD^2 = PF \cdot PD \quad (3.6)$$

A equação (3.6) pode ser interpretada geometricamente como: a área do quadrado de lado KD é igual à área do retângulo de lados PF e PD . Então, a curva GPE é chamada por Apolônio como Parábola (Figura 13), que vem do grego *paraboli*, ou seja, aplicação sem falta ou excesso (Lopes, 2011, p. 44).

Utilizando a linguagem usada hoje em dia, considere PF um parâmetro $PF = p$, $KD = x$ e $PD = y$, a equação (3.6) fica

$$x^2 = py$$

Figura 13. A curva GPE é chamada por Apolônio como Parábola



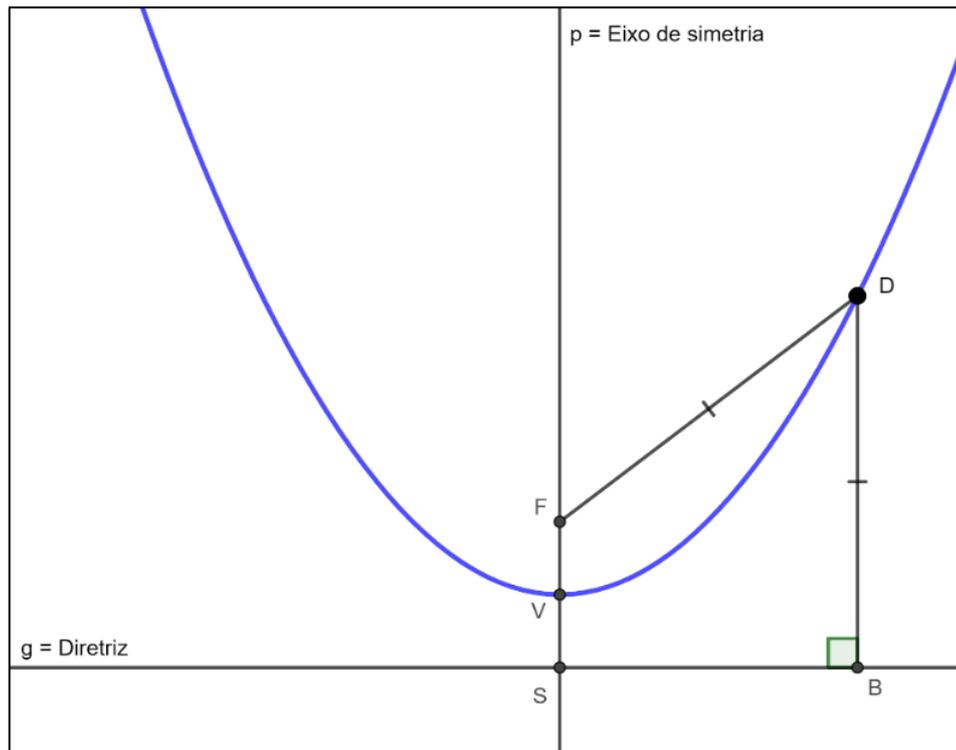
Fonte: Elaboração pela autora

Em sua obra *As Cônicas*, Apolônio escreveu sobre alguns elementos característicos das cônicas, como a definição de reta tangente e normal presente no primeiro livro. Já no terceiro livro, o geômetra escreveu sobre uma propriedade particular das cônicas que estava relacionada com o que chamou de “os pontos originados pela aplicação”. Esses pontos foram chamados de *focos* pelo astrônomo e matemático Johannes Kepler (1571-1630), que os utilizou para descrever as órbitas planetárias. Assim, muitos matemáticos escreveram sobre essa propriedade das cônicas para a física, propondo aplicações práticas no campo da Óptica (Silva Filho, 2015). Porém, o estudo da propriedade dos focos tornou-se muito mais relevante quando passaram a utilizá-lo na caracterização das cônicas. Além disso, as contribuições de Descartes e Fermat no século XVII permitiram uma mudança no estudo dessas curvas com os inícios da Geometria Analítica, relacionando a Álgebra com a Geometria e caracterizando as curvas como lugares geométricos. Tudo isso é de tal importância que influencia até hoje o ensino das cônicas na escola e no nível superior.

Para seguir com o estudo da Parábola, agora vamos a considerar a seguinte definição: “uma parábola é definida como o conjunto de pontos, em um plano, que estão à mesma distância de um ponto (o foco) e de uma reta (a diretriz)” (Smith, 2013). Para caracterizar a Parábola, segundo a definição anterior, utilizaremos o método proposto por Descartes, em sua obra *O Discurso do Método*. No apêndice *A Geometria*, o matemático francês aplica brilhantemente o método analítico para resolver problemas geométricos que permaneciam insolúveis com os métodos geométricos tradicionais. Assim, declararemos primeiramente aquilo que é evidente, baseado nos dados proporcionados pela definição. Logo, identificar aqueles objetos mais simples e mais fáceis de conhecer até aqueles que são do conhecimento mais complexos, e supondo mesmo uma ordem entre aqueles que não precedem naturalmente uns aos outros. Finalmente, fazer enumerações do que é desconhecido.

Nesse sentido, na figura 14, a parábola é a curva azul, a reta g é a reta diretriz, a reta p é o eixo de simetria da curva, o ponto F é o foco, o ponto V é o vértice da Parábola, ou seja, o ponto mais perto da diretriz, S é o ponto de interseção da diretriz com o eixo de simetria e o ponto D é algum ponto que lhe pertence à Parábola.

Figura 14. Gráfico de uma parábola num plano cartesiano



Fonte: Elaboração pela autora

Da definição anterior podemos dizer o seguinte:

$$FD = BD$$

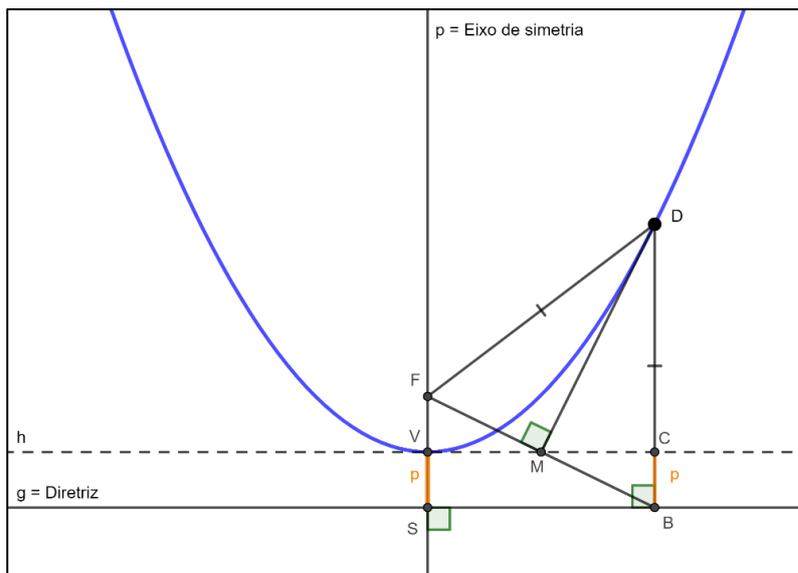
Então, o triângulo ΔFDB é isósceles. Logo, o ponto M é o ponto médio do segmento FB , já que DM é mediatriz¹⁶ do segmento FB e DM é perpendicular a FB ¹⁷ ($DM \perp FB$). Além disso, o ponto B é a projeção ortogonal do ponto D na reta diretriz g . Seja p a distância entre o ponto V e a diretriz. A reta h é paralela à diretriz pelo ponto V . seja C o ponto de interseção do segmento DB com a reta h . Como DB e o eixo de simetria da parábola (p) são perpendiculares à diretriz (g) e VC é paralelo à diretriz (g) (Figura 15), então:

$$DB \perp VC$$

¹⁶ A mediatriz é uma reta perpendicular a um segmento de reta e que passa pelo ponto médio desse segmento.

¹⁷ Num triângulo isósceles, a mediatriz coincide com a altura relativa à base, a bissetriz do ângulo do vértice e a mediana.

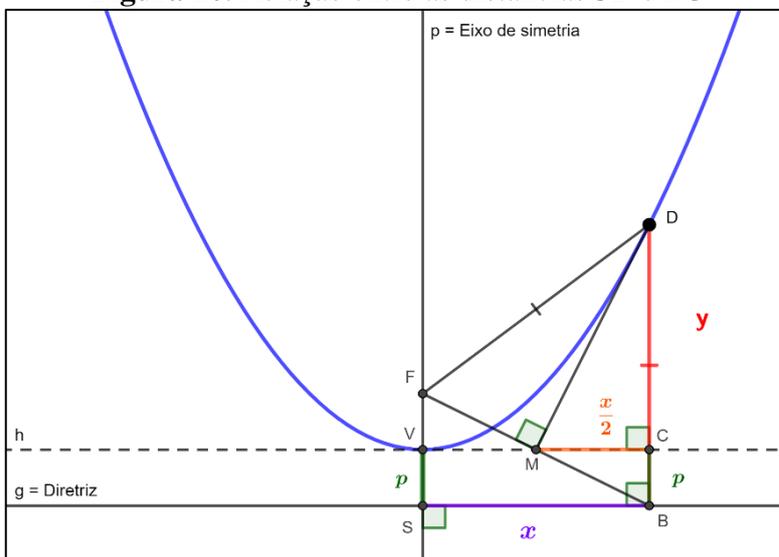
Figura 15. Relação do ponto D com a parábola, o eixo de simetria e a diretriz



Fonte: Elaboração pela autora

Então, para caracterizar a parábola queremos saber a relação entre as distâncias SB e DC . Assim, chamaremos $SB = x$, $DC = y$, $CB = p$ e $MC = \frac{x}{2}$ (Figura 16)

Figura 16. Relação entre as distâncias SB e DC

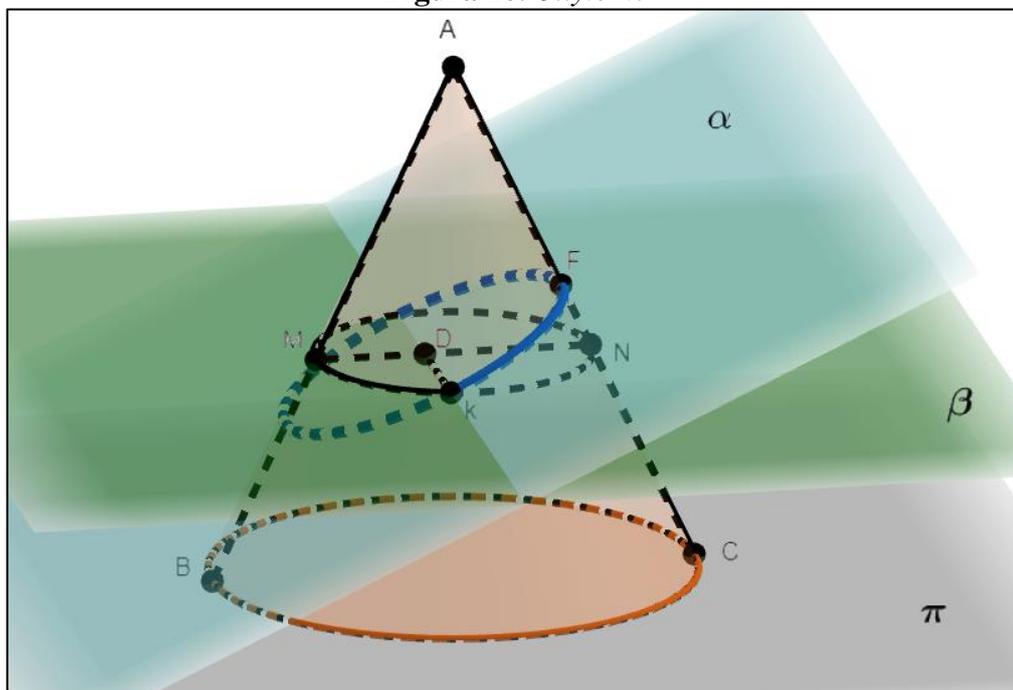


Fonte: Elaboração pela autora

Agora, focamos nossa atenção no que acontece no ΔDMB , ele é um triângulo retângulo com o ângulo reto no vértice M , ou seja, $\widehat{DMB} = 90^\circ$. Ao mesmo tempo, o triângulo ΔMCB também é retângulo, com o ângulo reto no vértice C ($\widehat{C} = 90^\circ$). Logo, segundo (Smith, 2013), para determinar a raiz quadrada por meio de construções

paralelo ao plano π . A interseção do cone com o plano β é a circunferência g . A interseção de g com as geratrizes AC e AB são os pontos N e M , respectivamente. Temos, então, que o segmento MN é o diâmetro de g .

Figura 18. *Oxytome*

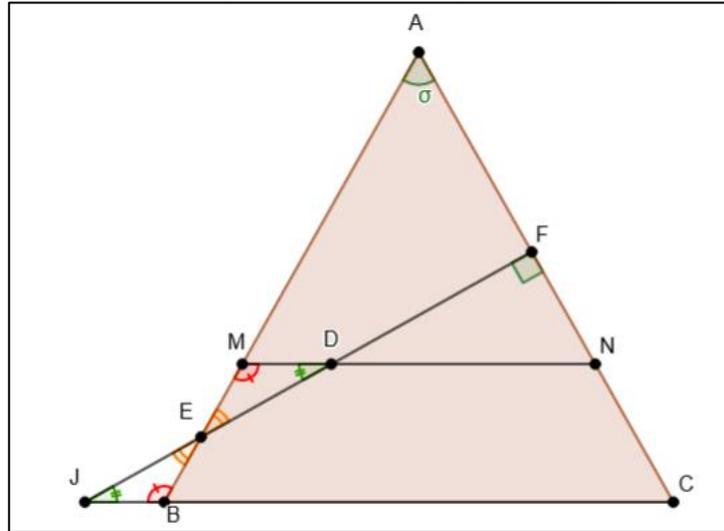


Fonte: Elaborada pela autora a partir de Silva Filho (2015)

Nesse caso, o plano de seção α , perpendicular à geratriz AC , não é paralelo à geratriz AB , portanto as retas FD e AB não são paralelas ($FD \nparallel AB$). É importante destacar que a mesma análise no plano β realizada para a parábola por Menêmo também é válido para a elipse. Portanto, a equação (2.1) também pode ser utilizada para a caracterização da elipse.

Agora prolongamos os segmentos EF e BC de modo que se encontrem no ponto J (Figura 29). Dessa forma, temos que os triângulos ΔMDE e ΔBEJ são semelhantes ($\Delta MDE \approx \Delta BEJ$) pelo critério ângulo-ângulo-ângulo (os ângulos $\widehat{MED} \cong \widehat{BEJ}$ por serem opostos pelo vértice, também temos que os ângulos $\widehat{EMD} \cong \widehat{EBJ}$ e $\widehat{MDE} \cong \widehat{BJE}$ por serem ângulos alternos internos entre paralelas, ver Figura 19).

Figura 19. Vista frontal da *Oxytome* e semelhança dos triângulos ($\Delta MDE \approx \Delta BEJ$)



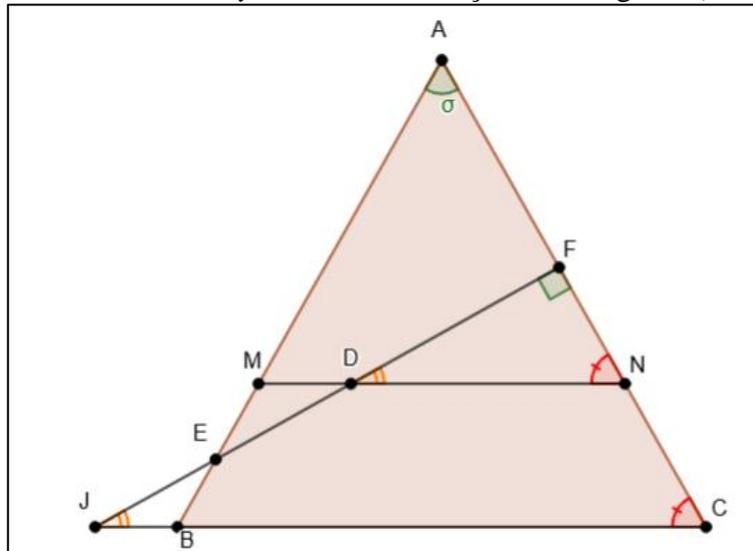
Fonte: Elaboração pela autora

Dessa semelhança, temos:

$$\frac{DM}{DE} = \frac{BJ}{EJ} \Rightarrow DM = \frac{DE \cdot BJ}{EJ} \quad (4)$$

Da mesma forma, observa-se que os triângulos ΔFDN e ΔFJC são semelhantes ($\Delta FDN \approx \Delta FJC$) (Figura 30), pelo critério ângulo-ângulo-ângulo (o ângulo \widehat{FDN} e congruente com o ângulo \widehat{FJC} ($\widehat{FDN} \cong \widehat{FJC}$), o ângulo \widehat{FND} é congruente com o ângulo \widehat{FCJ} ($\widehat{FND} \cong \widehat{FCJ}$) por serem ângulos correspondentes entre paralelas e os triângulos compartilham o mesmo ângulo \widehat{DFN} (Figura 20).

Figura 20. Vista frontal da *Oxytome* e semelhança dos triângulos ($\Delta FDN \approx \Delta FJC$)



Fonte: Elaboração pela autora

Então tem-se que:

$$\frac{DN}{DF} = \frac{JC}{JF} \Rightarrow DN = \frac{DF \cdot JC}{JF} \quad (4.1)$$

Assim, substituindo as expressões (4) e (4.1) em (2.1) obtemos:

$$KD^2 = DM \cdot DN \Rightarrow KD^2 = \frac{DE \cdot BJ}{EJ} \cdot \frac{DF \cdot JC}{JF} \quad (4.2)$$

Como $DE = EF - DF$ a equação (4.2) pode ser escrita na forma:

$$KD^2 = (EF - DF) \frac{BJ \cdot JC \cdot DF}{EJ \cdot JF} \quad (4.3)$$

Os segmentos BJ, JC, EJ e JF têm sempre a mesma medida independente da escolha do ponto K sobre a curva, enquanto os segmentos KD e FD variam de comprimento em função da posição do ponto K (Silva Filho, 2015). Então, fazendo $KD = y$ e $DF = x$, $EF = 2a$ e $\frac{BJ \cdot JC}{EJ \cdot JF} = k$, temos:

$$y^2 = kx(2a - x)$$

$$y^2 = 2akx - kx^2 \quad (4.4)$$

Utilizando as expressões de hoje em dia, podemos escrever a equação (4.4) da seguinte maneira, considerando $k = \frac{b^2}{a^2}$, temos:

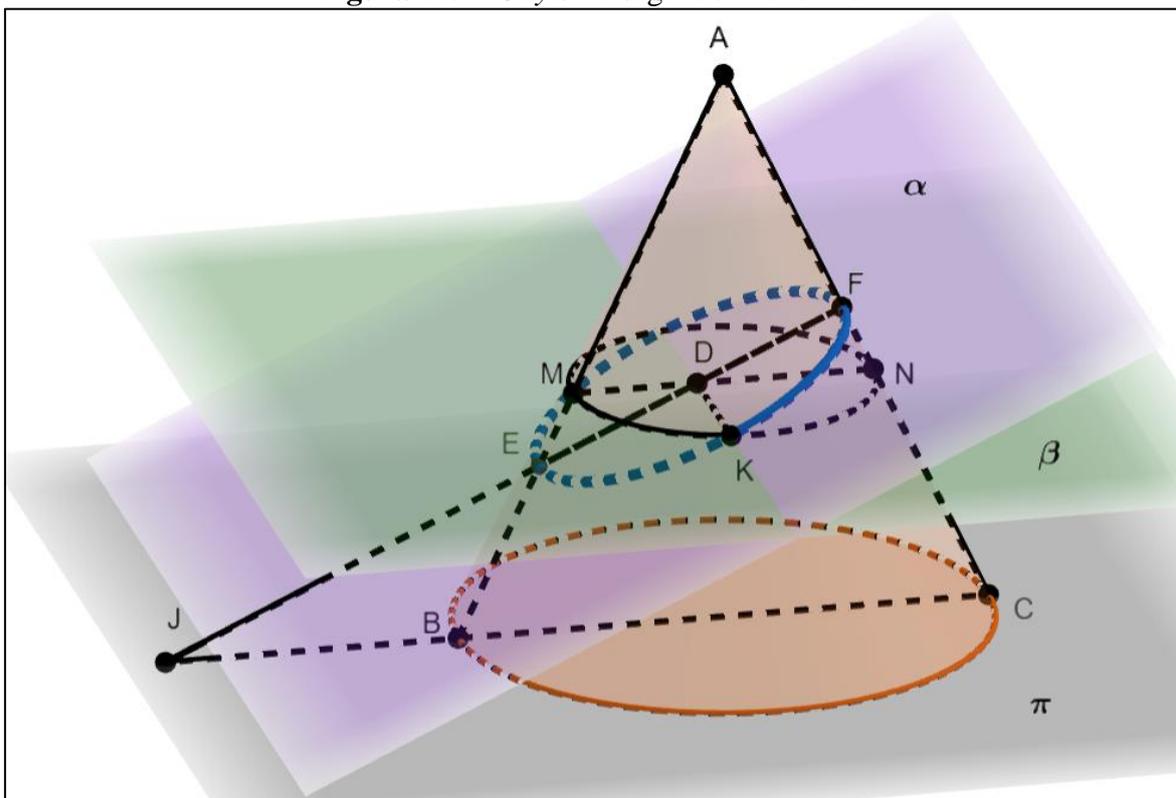
$$y^2 = 2ax \frac{b^2}{a^2} - \frac{b^2}{a^2} x^2 \Rightarrow y^2 = \frac{2axb^2}{a^2} - \frac{b^2x^2}{a^2} \Rightarrow y^2 = \frac{2b^2x}{a} - \frac{b^2x^2}{a^2}, \quad (4.5)$$

Agora, considerando $l = \frac{2b^2}{a}$, podemos escrever o seguinte

$$y^2 = lx - \frac{lx^2}{2a} \quad (4.6)$$

Segundo Urbaneja (2017), l é uma constante chamada de *latus rectum* e “ a ” e “ b ” são constantes (Figura 21).

Figura 21. A *Oxytome* segundo Menêcmo



Fonte: Elaboração pela autora

Por sua vez, segundo Eecke (1963), Apolônio, em seu tratado *As Cônicas*, definiu a Elipse em seu primeiro livro, na proposição XIII, da seguinte maneira:

Se um cone é cortado por um plano que passa pelo eixo, e se é cortado por outro plano que, encontrando cada um dos lados do triângulo que passa pelo eixo, não é paralelo nem antiparalelo à base do cone; se, além disso, o plano base do cone e o plano secante se encontram ao longo de uma linha reta perpendicular à base do triângulo que passa pelo eixo, ou perpendicular ao prolongamento desta base, o quadrado de qualquer linha reta traçada a partir da seção do cone, paralelo à seção comum dos planos, até o diâmetro da seção, será equivalente a uma área aplicada ao longo de uma determinada linha reta, com a qual a razão entre o diâmetro da seção é igual à razão do quadrado da reta, do topo do cone, paralelo ao diâmetro da seção, até a base do triângulo, até o retângulo delimitado sob as linhas que esta última linha recorta nas laterais do triângulo⁽¹⁸⁾; área que tem como largura a linha cortada no diâmetro por esta primeira linha, na lateral do topo da seção, e reduzida por uma figura, semelhante ao retângulo delimitado pelo diâmetro e pelo parâmetro, e colocada de forma semelhante⁽¹⁹⁾. Chamamos essa seção de elipse (p. 28).

¹⁸ Isto é, sob os segmentos que é paralelo ao diâmetro, traçado a partir do vértice do cone, corta na base estendida do cone do triângulo axial

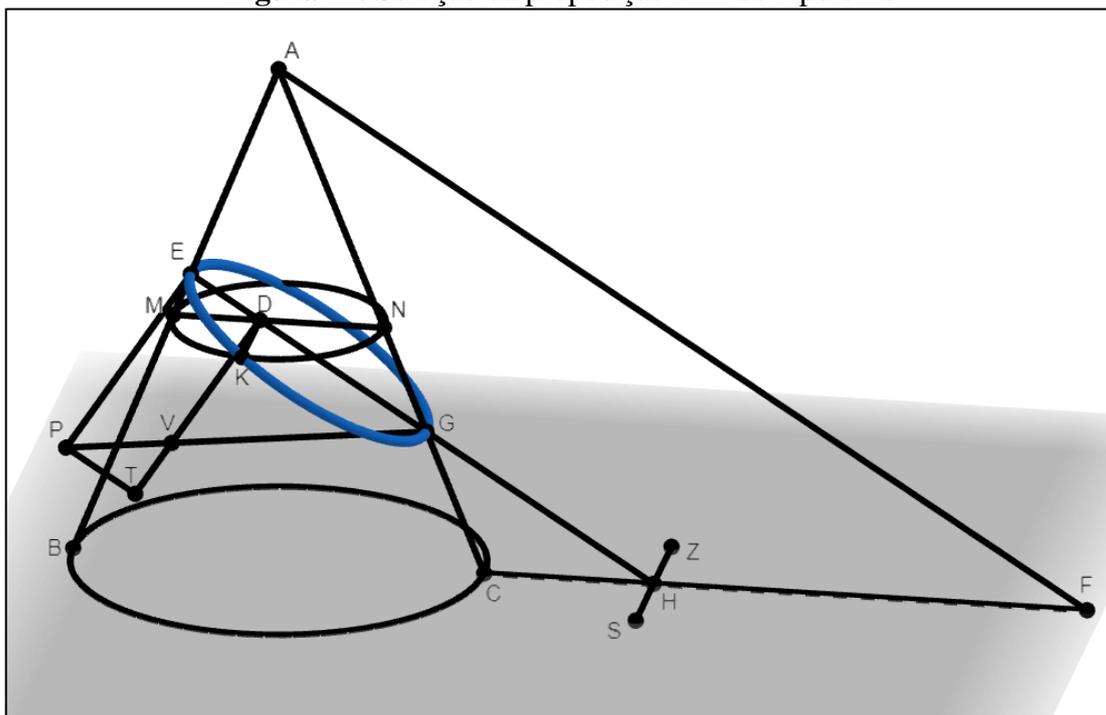
¹⁹Esta afirmação equivale a dizer que, na seção cônica considerada, o quadrado da ordenada equivale a uma área retangular que, aplicada de acordo com o parâmetro, ou seja, tendo este parâmetro como comprimento, e tendo a abscissa como largura, é reduzido por outra área, semelhante àquela que tem o parâmetro para

Segundo Eecke (1963, p. 29) e Unbaneja (2017, p.57-58), Apolônio brinda uma continuação à sua proposição XIII, no intuito de explicar sua definição da Elipse:

Seja um cone de vértice A e que tem como base a circunferência BC , vamos cortá-lo por um plano que passa pelo eixo, que produzirá como seção o triângulo ABC , e por outro plano que não é nem paralelo nem oposto, cuja interseção com o cone dá a superfície cônica GEK com diâmetro EG . ZH perpendicular a BC do plano secante e da base do cone. Vamos traçar pelo ponto E a reta EP perpendicular a EG , por A a reta AE paralela a EG e vamos fazer com que a reta EG esteja para uma reta EP como o quadrado de FA para o retângulo formado por FB e FC , e finalmente, vamos desenhar um ponto qualquer K da seção, o paralelo KD a ZH . Digo que o quadrado KD equivale ao retângulo que, aplicado a EP , tem a largura ED reduzida numa figura semelhante ao retângulo das retas EG e EP .

A solução de Apolônio para sua proposição XIII do livro I é mostrada na figura 22 a seguir:

Figura 22. Solução da proposição XIII de Apolônio



Fonte: Elaboração pela autora

comprimento e o diâmetro para largura. Portanto, se designarmos a ordenada por y , a abscissa por x , o diâmetro por a e o parâmetro por p , o enunciado da proposição se traduz na relação: $y^2 = px - \frac{b}{a}x^2$, que é a equação cartesiana de uma elipse relacionada a eixos oblíquos, um dos quais é o diâmetro e o outro a tangente em sua extremidade.

Baseados na definição de Elipse de Apolônio, essa curva pode ser caracterizada da seguinte forma:

Seja um cone de vértice A e que tem como base a circunferência BC , trazemos um plano que passa pelo eixo, que produzirá o triângulo axial ABC , logo o segmento BC é base do triângulo axial ABC . O segmento SZ no plano da base do cone é perpendicular à prolongação de BC . A curva GEK é uma Elipse gerada pela interseção do plano π com o cone, logo o segmento EH é a interseção da seção plana com o triângulo ABC . E e G são os pontos de interseção da curva com AB e AC respectivamente. Traçamos AF paralelo a EG e encontra-se com o prolongamento de BC no ponto F . O ponto K é um ponto qualquer pertencente à curva GEK , com o segmento KD perpendicular ao plano do triângulo axial ABC . Assim, KD é perpendicular a EG no ponto D . Por sua parte, o segmento MN é o diâmetro da seção circular determinada por um plano β que contém o segmento KD , sendo este paralelo à base BC . O segmento MN intercepta o lado AB em M e AC em N , logo KD é perpendicular a MN no ponto D . EP é um segmento perpendicular a EG e EP também está contido no plano perpendicular à seção cônica que passa por E . O retângulo $EDPT$ está situado num plano perpendicular ao plano da seção cônica. V é o ponto de interseção dos segmentos DT e PG .

Segundo Lopes (2011), o segmento EP é de extrema importância para a caracterização das curvas. Ainda segundo esse autor, é um parâmetro que Apolônio definiu em função dos lados do triângulo axial ΔABC e dos segmentos AE e AF da seguinte forma:

$$\frac{EP}{EG} = \frac{BF \cdot FC}{AF^2} \quad (4.7)$$

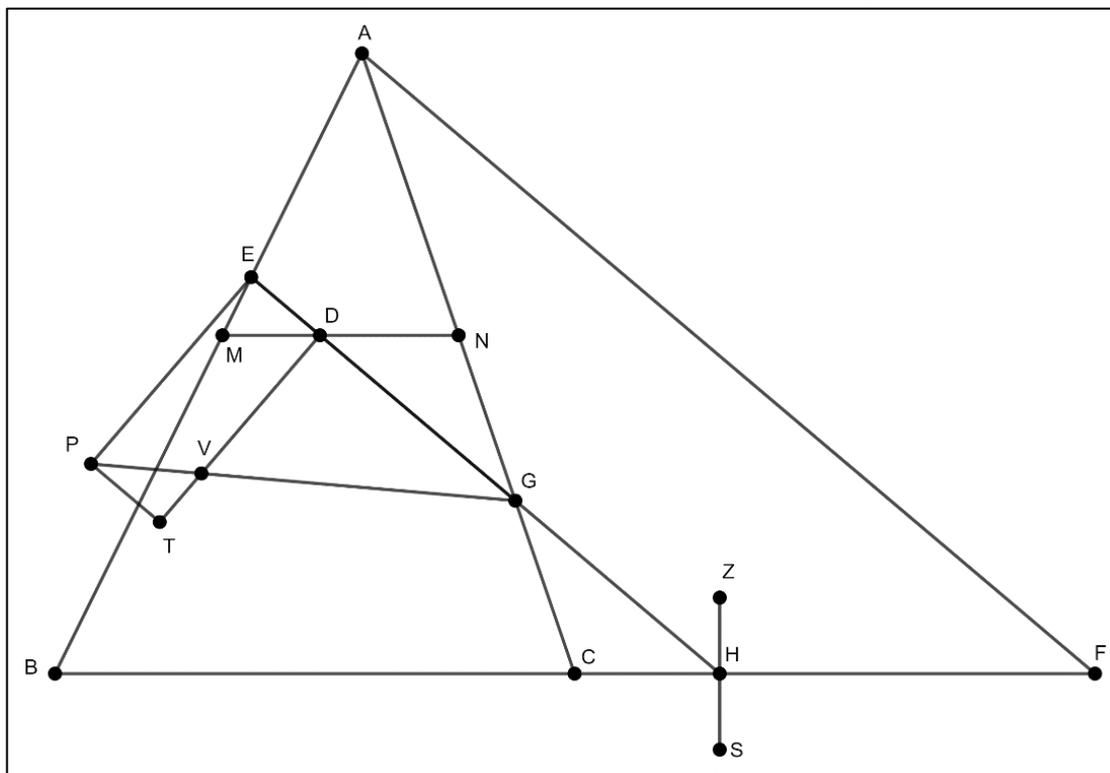
A análise que Apolônio proporcionou para obter a equação (3.1), na caracterização da Parábola na seção anterior, também é válida para a Elipse, já que, segundo as construções anteriores, sabe-se que MN é o diâmetro da circunferência que passa pelo ponto K e o segmento KD é perpendicular a MN no ponto D . Então, podemos escrever a mesma relação:

$$KD^2 = MD \cdot ND \quad (3.1)$$

Sabe-se que EH não é paralelo ao lado AC do triângulo axial ΔABC , neste caso EH intercepta ao lado AC no ponto G . Agora, para a análise e caracterização da Elipse, Apolônio em sua definição relaciona o quadrado KD que equivale ao retângulo que, aplicado a EP , tem a largura ED reduzida numa figura semelhante ao retângulo das retas EG e EP .

Nesse sentido, considere-se o esquema obtido a partir da figura 36 e ilustrado na figura 23.

Figura 23. Esquema obtido a partir da definição de Apolônio



Fonte: Elaboração pela autora baseada em Lopes (2011)

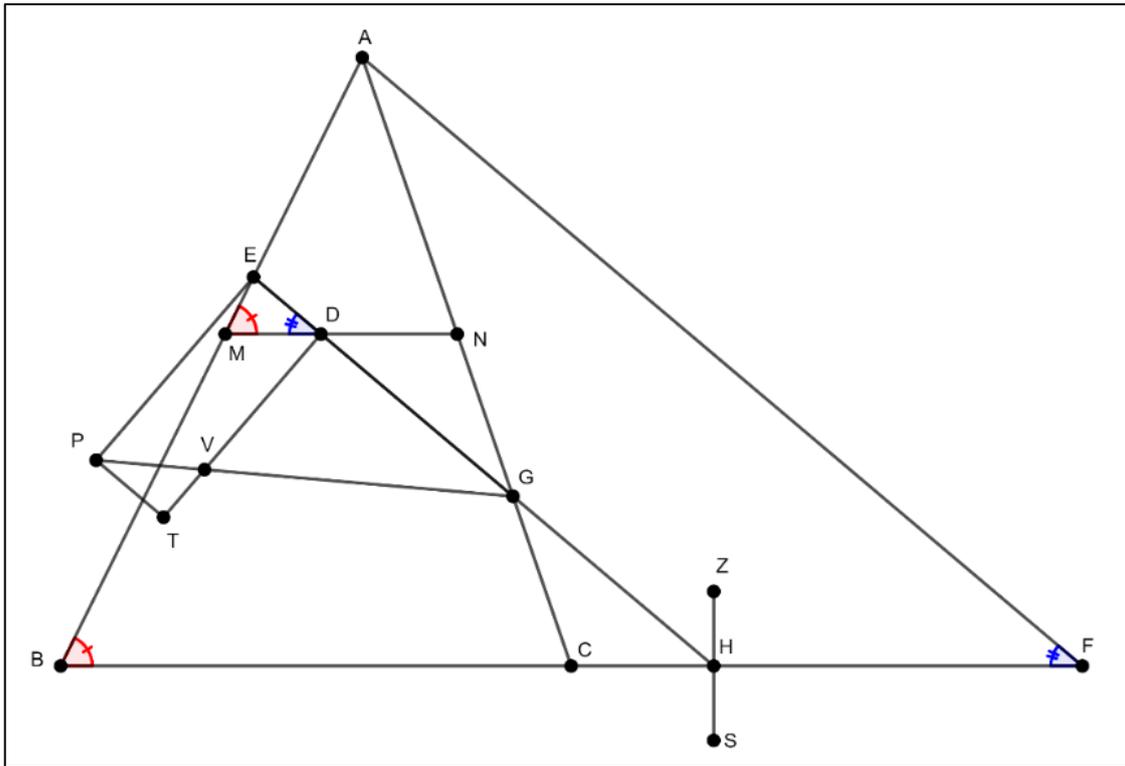
Por construção, MN é paralelo a BC e AF é paralelo EH , então os triângulos ΔABF e ΔEDM são semelhantes ($\Delta ABF \approx \Delta EDM$) pelo critério ângulo-ângulo (os ângulos \widehat{ABF} e \widehat{EDM} são congruentes ($\widehat{ABF} \cong \widehat{EDM}$), por serem ângulos correspondentes entre paralelas, $MN \parallel BC$ e os ângulos \widehat{AFB} e \widehat{EDM} são congruentes ($\widehat{AFB} \cong \widehat{EDM}$), por serem ângulos correspondentes entre paralelas, $AF \parallel EH$ (Figura 24a), logo:

$$\frac{MD}{ED} = \frac{BF}{AF} \quad (4.8)$$

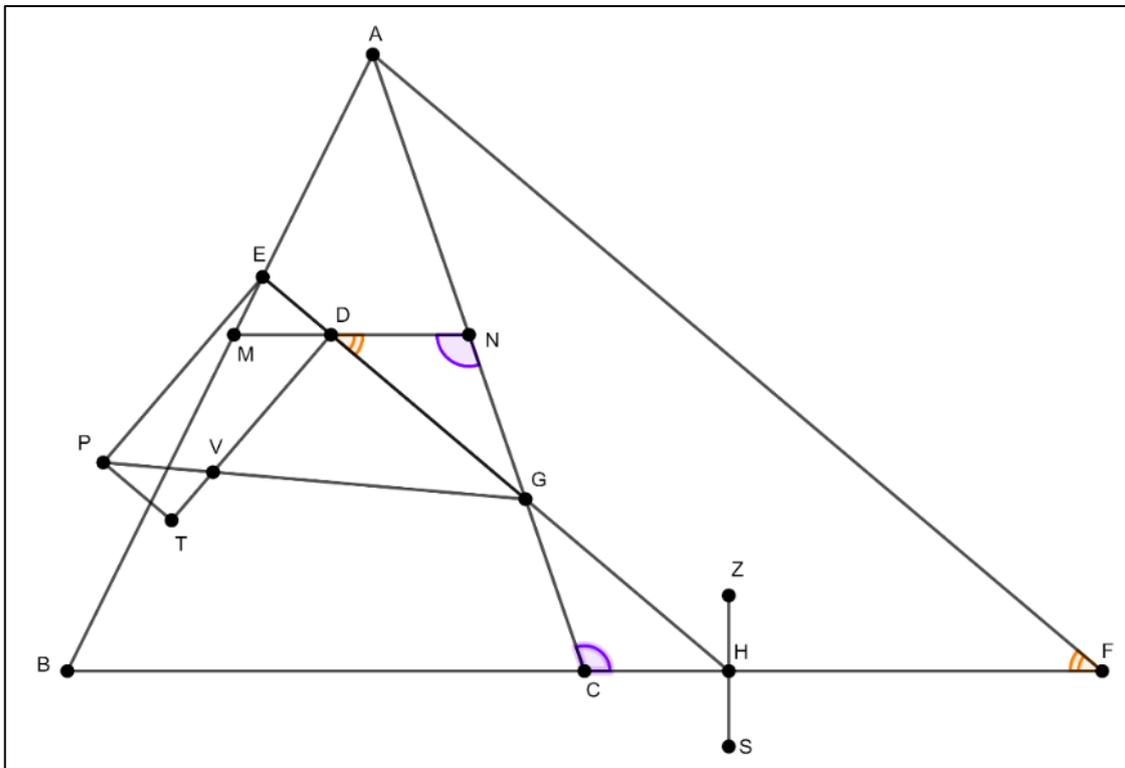
Da mesma maneira, DN é paralelo a FC e GD é paralelo a AF , então os triângulos ΔDNG e ΔACF são semelhantes ($\Delta DNG \approx \Delta ACF$) pelo critério ângulo-ângulo (os ângulos \widehat{GDN} e \widehat{ACF} são congruentes ($\widehat{GDN} \cong \widehat{ACF}$), por serem ângulos alternos internos entre paralelas, $DN \parallel FC$ e os ângulos \widehat{GND} e \widehat{ACF} são congruentes ($\widehat{GND} \cong \widehat{ACF}$), por serem ângulos correspondentes entre paralelas, $GD \parallel AF$, ver Figura 24b), logo:

$$\frac{DN}{DG} = \frac{CF}{AF} \quad (4.9)$$

Figura 24. Semelhanças nos triângulos ($\Delta ABF \approx \Delta EDM$) e ($\Delta DNG \approx \Delta ACF$)



(a)



(b)

Fonte: Elaboração pela autora

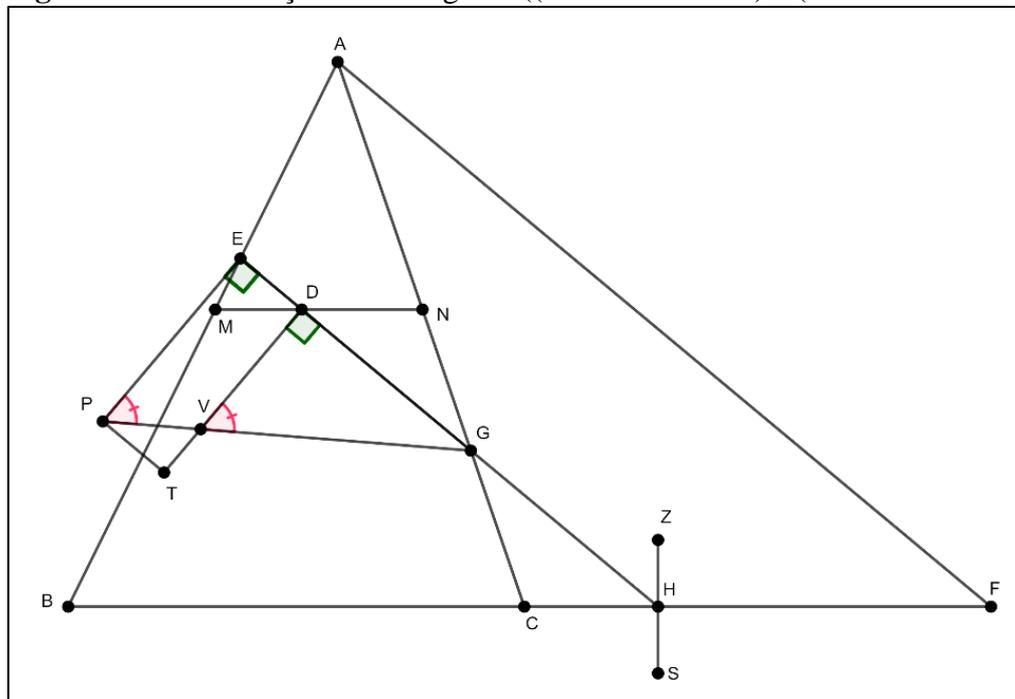
Sabe-se também por construção que EP é paralelo a DV , então os triângulos ΔGEP e ΔGDM são semelhantes ($\Delta GEP \approx \Delta GDM$) pelo critério ângulo-ângulo (os ângulos \widehat{GEP} e \widehat{GDM} são congruentes ($\widehat{GEP} \cong \widehat{GDM}$) e os ângulos \widehat{GPE} e \widehat{GMD} são congruentes ($\widehat{GPE} \cong \widehat{GMD}$), por serem ângulos correspondentes entre paralelas, $EP \parallel DV$ (Figura 25a), logo:

$$\frac{EP}{EG} = \frac{DM}{GD} \quad (4.10)$$

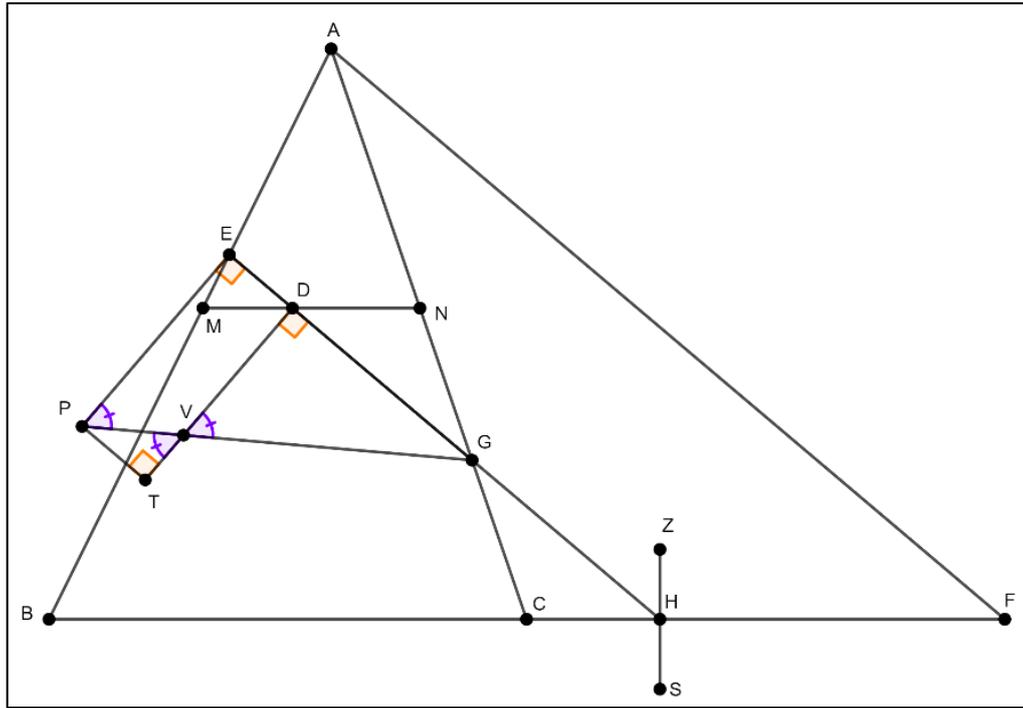
O segmento que passa pelos pontos colineares D, V e T é paralelo a EP e ED é paralelo a PT . Logo, os triângulos ΔGEP e ΔPTV são semelhantes pelo critério ângulo-ângulo: os ângulos \widehat{GPE} e \widehat{VPT} são congruentes por serem correspondentes entre paralelas, os ângulos \widehat{GVD} e \widehat{VTP} são congruentes por serem opostos pelo vértice, logo os ângulos \widehat{GPE} e \widehat{VPT} são congruentes ($\widehat{GPE} \cong \widehat{VPT}$). Ainda os ângulos \widehat{GDT} e \widehat{PTV} também são congruentes por serem ângulos alternos internos entre paralelas, os ângulos \widehat{GDT} e \widehat{GEP} são congruentes por serem correspondentes entre paralelas, logo os ângulos \widehat{GEP} e \widehat{PTV} são congruentes ($\widehat{GEP} \cong \widehat{PTV}$) (Figura 25b). Daí:

$$\frac{VT}{TP} = \frac{EP}{EG} \quad (4.11)$$

Figura 25. Semelhanças nos triângulos ($\Delta GEP \approx \Delta GDM$) e ($\Delta GEP \approx \Delta PTV$)



(a)



(b)

Fonte: Elaboração pela autora

Ainda como os segmentos ED e PT têm o mesmo comprimento, já que são lados do retângulo $EDTP$, obtém-se:

$$VT = \frac{EP}{EG} \cdot ED \quad (4.12)$$

Logo, segundo Lopes (2011), a expressão correspondente a essa curva pode ser obtida da seguinte forma: Dividindo (3.1) por $ED \cdot GD$ tem-se que,

$$\frac{KD^2}{ED \cdot GD} = \frac{MD \cdot DN}{ED \cdot GD} \quad (4.13)$$

Substituindo (4.8) e (4.9) encontra-se que:

$$\frac{KD^2}{ED \cdot GD} = \frac{BF}{AF} \cdot \frac{CF}{AF}, \text{ logo}$$

$$\frac{KD^2}{ED \cdot GD} = \frac{BF \cdot CF}{AF^2} \quad (4.14)$$

Segundo Estrada *et al.* (2000), a relação da equação (4.13) mostra que a razão entre o quadrado de lado KD e o retângulo de lados DE e DG é independente do ponto K pertencente à cônica. Ainda segundo esses autores, Apolônio não toma essa propriedade como sintoma da cônica.

Então, fazendo uso de (4.7) e (4.10), obtém-se:

$$KD^2 = \frac{DV \cdot ED \cdot GD}{GD}$$

$$KD^2 = DV \cdot ED \quad (4.15)$$

Logo, a equação $KD^2 = DV \cdot ED$ é uma expressão geral para a curva, com DV representando valores diferentes. Agora, escrevendo DV em função da constante EP , temos que: $DV = EP - VT$. Assim, pode-se escrever (4.15) da seguinte maneira

$$KD^2 = ED(EP - VT) \quad (4.16)$$

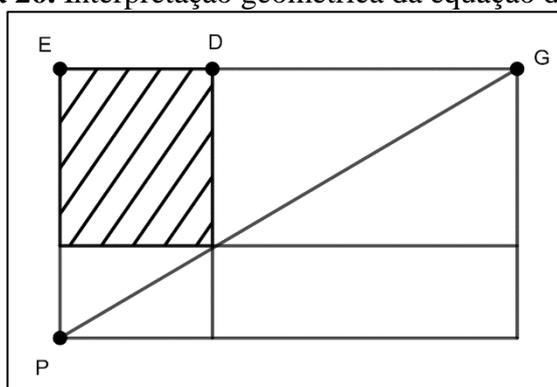
Ainda pela equação (4.12) podemos escrever (4.16) da seguinte maneira:

$$KD^2 = ED \left[EP - \left[\left(\frac{EP}{EG} \right) \cdot ED \right] \right] \text{ ou}$$

$$KD^2 = ED \cdot EP - \frac{EP}{EG} \cdot ED^2 \quad (4.17)$$

A equação, interpretada geometricamente (Figura 26), é o mesmo que dizer que a área do quadrado aplicado ao segmento KD é igual à área do retângulo de lado a EP e altura ED , menos algum valor, neste caso seria $\frac{EP}{EG} \cdot ED^2$. Assim, a curva nesse caso é uma Elipse, termo originário do grego *ellipis*, que corresponde à aplicação de áreas por falta (Estrada et al., 2000; Lopes, 2011).

Figura 26. Interpretação geométrica da equação da elipse

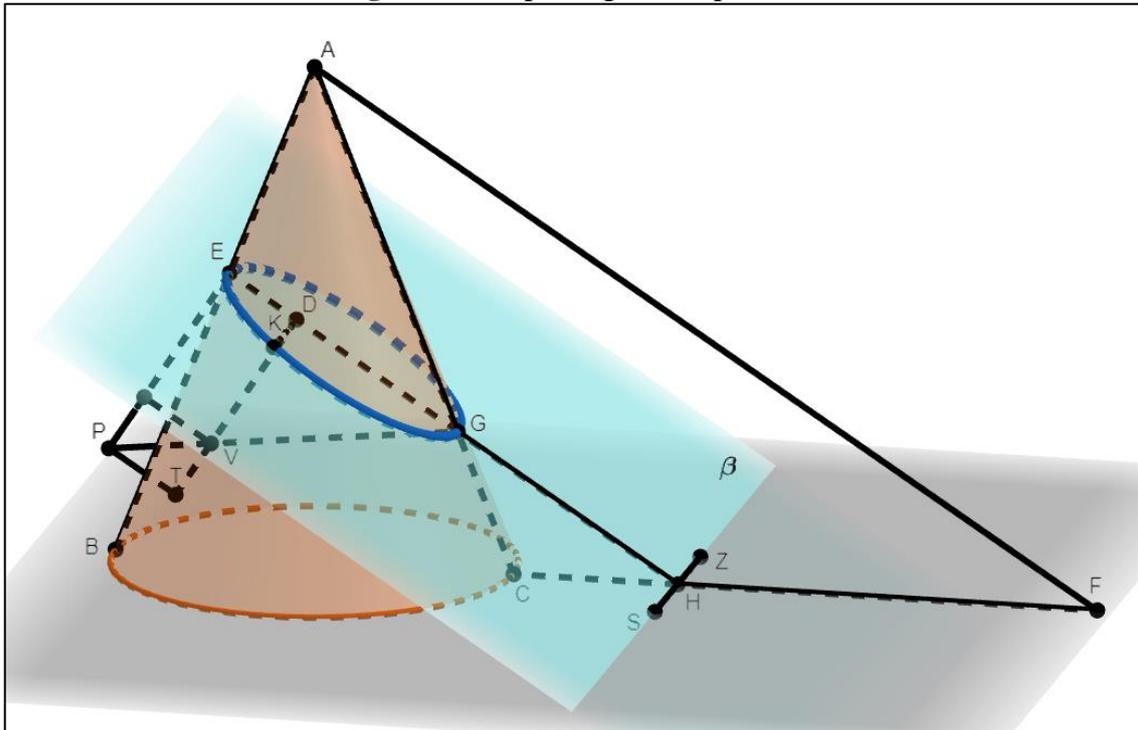


Fonte: Elaboração pela autora

Utilizando a linguagem usada hoje em dia, considere EP um parâmetro $EP = p$ e EG diâmetro $EG = 2a$ que irá representar o eixo maior da elipse, considerando ainda $KD = y$ e $ED = x$ (Figura 27), a equação (4.17) fica como:

$$y^2 = xp - \frac{px^2}{2a}$$

Figura 27. Elipse segundo Apolônio

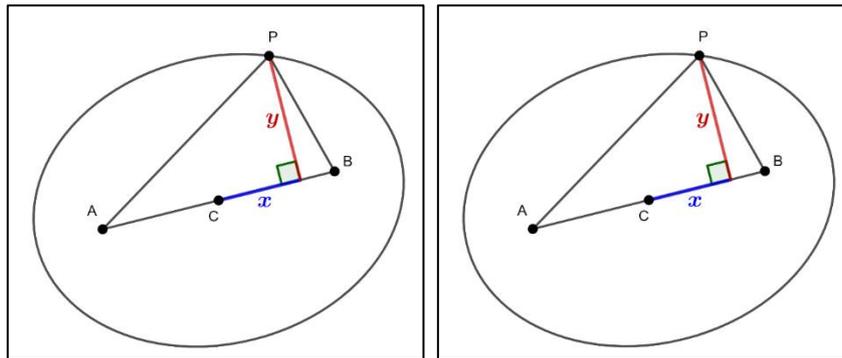


Fonte: Elaborado pela autora

Para seguir com o estudo da Elipse, vamos considerar a seguinte definição: “Uma Elipse é definida como o conjunto de todos os pontos do plano que atendem à condição $AP + BP = 2r$ e que estão em um único plano, onde A e B são os focos da Elipse (Smith, 2013). Nesse sentido, sejam A e B dois pontos arbitrários pertencentes a um plano. Escolhemos alguma distância arbitrária, maior do que a distância entre A e B . Definimos r como metade dessa distância, então a distância em si seria $2r$, daí $AP + BP = 2r$. C é o ponto médio entre A e B . Então, é do nosso interesse investigar as características da Elipse²⁰, especialmente a relação entre as distâncias x e y (Figura 28a).

²⁰ Toda fórmula é um registro escrito em forma de equação, da relação entre quantidades que podem ser medidas. Neste caso, as distâncias x e y

Figura 28. Gráfico da definição da elipse como lugar geométrico



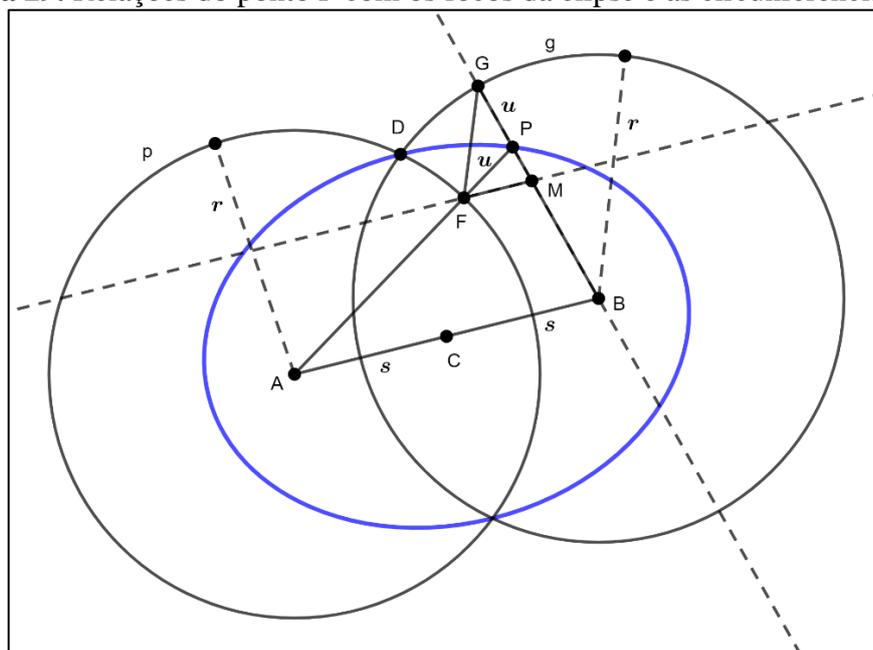
(a)

(b)

Fonte: Elaboração pela autora

Seja o ponto D equidistante de A e B , pois está à distância r dos dois pontos, ou seja, $DA = r$ e $DB = r$. Vamos chamar s à distância AC , que é igual à distância CB , então $AC = s$, $CB = s$ e $AB = 2r$ (Figura 28b). A seguir, traçamos uma circunferência de raio r centrado no ponto A , que chamaremos de p , da mesma forma desenharemos outra circunferência de raio r centrado no ponto B , que chamaremos de g . F é o ponto de interseção da circunferência p com o segmento AP . G é o ponto de interseção da circunferência g com a reta que passa pelos pontos B e P . pelo ponto F tracemos uma reta paralela a AB e chamemos de M ao ponto de interseção dessa paralela com o segmento BP . Chamemos u à distância GP e PF , logo $GP = u$ e $PF = u$ (Figura 29).

Figura 29. Relações do ponto P com os focos da elipse e as circunferências g e p



Fonte: Elaboração pela autora

Observe na figura 30 que o ponto P está fora da circunferência centrada em A , portanto, a distância entre esses dois pontos é maior que r por certa distância, neste caso PF , porém, $PF = u$ então:

$$AP = r + u \quad (5)$$

Ainda segundo a figura 43, o ponto P está dentro da circunferência centrada em B , portanto, a distância entre esses dois pontos é menor que r por certa distância, neste caso GP , porém, $GP = u$, logo:

$$BP = r - u \quad (5.1)$$

Agora, considere o diagrama da Figura 40a a partir da Figura 39. Observe que os pontos C , F e G podem ser colineares. Segundo Smith (2013), para caracterizar a Elipse não precisamos provar, mas vale a pena. Logo, como FM é paralela com AM , os triângulos ΔPFM e ΔAPB são semelhantes pelo critério ângulo-ângulo, já que os ângulos \widehat{PFM} e \widehat{PAB} são congruentes por serem correspondentes entre paralelas e os ângulos \widehat{PMF} e \widehat{PBA} são congruentes por serem correspondentes entre paralelas, então:

$$\frac{FM}{AB} = \frac{FP}{AP} \quad (5.2)$$

Substituindo os valores de AB , FP e AP em (5.2) temos:

$$\begin{aligned} \frac{FM}{2r} &= \frac{u}{r+u} \\ FM &= \frac{2ru}{r+u} \quad (5.3) \end{aligned}$$

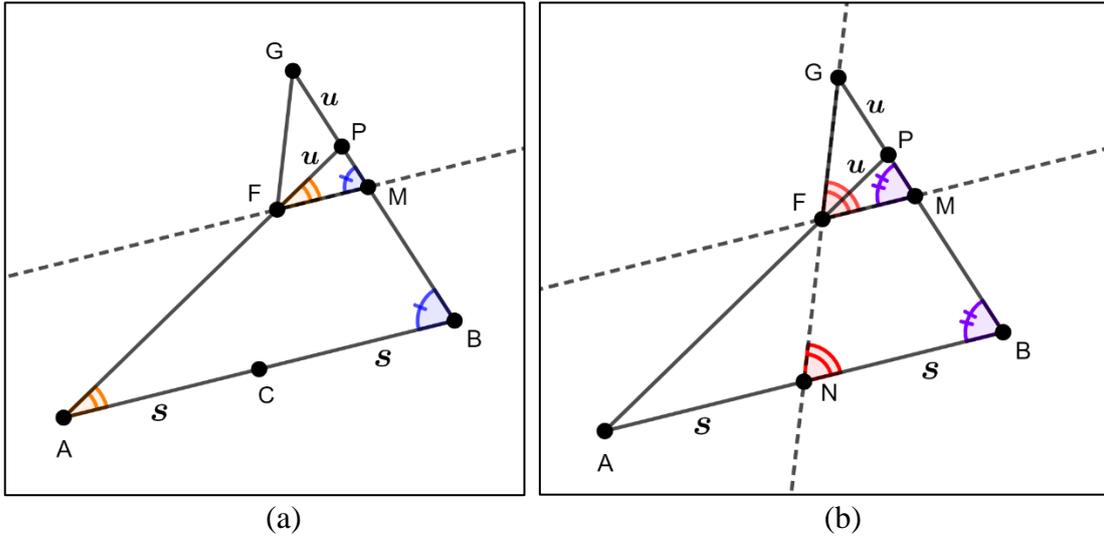
Dessa semelhança de triângulos também podemos dizer que:

$$\frac{PM}{PB} = \frac{FP}{AP} \quad (5.4)$$

Substituindo os valores de PB , FP e AP em (5.4) temos:

$$\begin{aligned} \frac{PM}{r-u} &= \frac{u}{r+u} \\ PM &= \frac{u(r-u)}{r+u} \quad (5.5) \end{aligned}$$

Figura 30. Semelhanças nos triângulos ($\Delta PFM \approx \Delta APB$)



Fonte: Elaboração pela autora

Agora, traçamos a reta que passa por GF , o ponto de interseção desta reta com AB chamaremos N . Observe o diagrama da figura 40b, os triângulos ΔNGB e ΔFGM são semelhantes pelo critério ângulo-ângulo, já que os ângulos \widehat{GNB} e \widehat{GFM} são congruentes por serem ângulos correspondentes entre paralelas, e os ângulos \widehat{GMF} e \widehat{GBN} são congruentes por serem ângulos correspondentes entre paralelas, logo:

$$\frac{NB}{FM} = \frac{GB}{GM}$$

$$NB = \frac{FM \cdot GB}{GM} \quad (5.6)$$

Observe que:

$$GM = GP + PM \quad (5.7)$$

Sabemos que $GP = u$, então substituindo esse valor e a equação (5.5) em (5.7)

$$GM = u + \frac{u(r - u)}{r + u}$$

Resolvendo essa soma de frações, temos

$$\frac{u(r + u) + u(r - u)}{r + u} = \frac{u[(r + u) + (r - u)]}{r + u} = \frac{2ur}{r + u}$$

Dessa maneira, GM fica como:

$$GM = \frac{2ur}{r + u} \quad (5.8)$$

Ainda temos que, $GB = r$, então substituindo esse valor, a equação (5.3) e (5.8) em (5.6) temos que:

$$NB = \frac{\frac{2ru}{r+u}(r)}{\frac{2ur}{r+u}} \quad (5.9)$$

Logo, $NB = r$. Sabemos também que $AB = 2r$, então

$$AB = AN + NB$$

$$AN = AB - NB$$

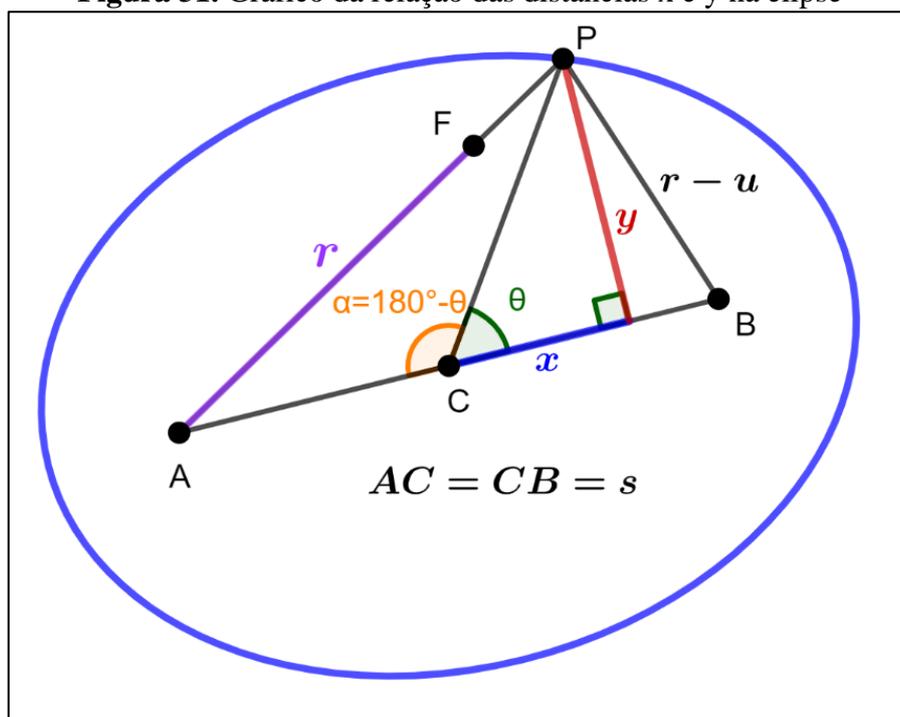
$$AN = 2r - r$$

$$AN = r$$

Isso mostra que N está entre A e B , especificamente, à mesma distância (s) de A e B . O ponto C ocupa a mesma posição, portanto os pontos C, F e G são colineares.

Voltemos agora ao nosso propósito inicial, que é identificar uma relação entre as distâncias x e y . A partir dos dados da Figura 31, podemos obter expressões para PC e $\cos \theta$, o que nos permitirá desenvolver uma fórmula que relaciona x e y . Chamaremos θ ao ângulo \widehat{PCB} e α ao ângulo \widehat{PCA} , o valor do ângulo α é $\alpha = 180^\circ - \theta$.

Figura 31. Gráfico da relação das distancias x e y na elipse



Fonte: Elaboração pela autora

Usando a identidade trigonométrica

$$\cos(180^\circ - \theta) = -\cos \theta \quad (5.10)$$

Então, aplicando a lei dos cossenos²¹ ao triângulo ΔPCB

$$(r - u)^2 = (PC)^2 + (s)^2 - 2(PC)(s) \cos \theta$$

Desenvolvendo $(r - u)^2$ temos:

$$r^2 - 2ru + u^2 = (PC)^2 + (s)^2 - 2(PC)(s) \cos \theta \quad (5.11)$$

Logo, aplicando a lei dos cossenos ao triângulo ΔPAC , temos:

$$(r + u)^2 = (PC)^2 + (s)^2 - 2(PC)(s) \cos(180^\circ - \theta) \quad (5.12)$$

Porém, como $\cos(180^\circ - \theta) = -\cos \theta$ e desenvolvendo $(r + u)^2$ a equação (5.12) fica:

$$r^2 + 2ru + u^2 = (PC)^2 + (s)^2 + 2(PC)(s) \cos(\theta) \quad (5.13)$$

Subtraindo a equação (5.11) de (5.13) obtemos

$$\begin{array}{r} r^2 - 2ru + u^2 = (PC)^2 + (s)^2 - 2(PC)(s) \cos \theta \\ - \\ r^2 + 2ru + u^2 = (PC)^2 + (s)^2 + 2(PC)(s) \cos(\theta) \\ \hline 4ru = 4(PC)(s) \cos \theta \\ (PC) \cos \theta = \frac{ru}{s} \end{array}$$

Porém, $PC \cos \theta = x$, então

$$x = \frac{ru}{s} \quad (5.14)$$

$$\text{é } u = \frac{sx}{r} \quad (5.15)$$

Pelo teorema de Pitágoras no triângulo ΔPCE , para determinar y , temos que

$$y^2 = (PC)^2 - x^2 \quad (5.16)$$

Agora precisamos conhecer alguma expressão para PC . Se somarmos as equações 5.11) e (5.13), tem-se:

²¹ A lei dos cossenos é usada para encontrar as partes que faltam em um triângulo oblíquo (não um triângulo retângulo) quando as medidas dos dois lados e a medida do ângulo incluído são conhecidas. $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$.

$$\begin{array}{l}
r^2 - 2ru + u^2 = (PC)^2 + (s)^2 - 2(PC)(S) \cos \theta \\
+ \quad r^2 + 2ru + u^2 = (PC)^2 + (s)^2 + 2(PC)(S) \cos(\theta) \\
\hline
2r^2 + 2u^2 = 2(PC)^2 + (s)^2
\end{array}$$

Então, simplificamos:

$$2(r^2 + u^2) = 2[(PC)^2 + (s)^2]$$

$$(PC)^2 = r^2 + u^2 - s^2 \quad (5.17)$$

Logo, substituindo (5.17) em (5.16) temos

$$y^2 = r^2 + u^2 - s^2 - x^2 \quad (5.18)$$

Substituindo a equação (5.15) em (5.18) temos:

$$y^2 = r^2 - s^2 + \left(\frac{sx}{r}\right)^2 - x^2$$

$$y^2 = (r^2 - s^2) + \left(\frac{s^2x^2}{r^2} - x^2\right)$$

$$y^2 = (r^2 - s^2) + \left(\frac{s^2x^2}{r^2} - \frac{x^2r^2}{r^2}\right)$$

$$y^2 = (r^2 - s^2) + \left(\frac{s^2x^2 - x^2r^2}{r^2}\right)$$

$$y^2 = (r^2 - s^2) + \frac{(s^2 - r^2)x^2}{r^2} \quad (5.19)$$

Multiplicando ambos os lados da igualdade da equação (5.19) por r^2

$$r^2y^2 = r^2(r^2 - s^2) + (s^2 - r^2)x^2 \quad (5.20)$$

Logo, então, tirando o fator comum -1 da expressão $(s^2 - r^2)$

$$r^2y^2 = r^2(r^2 - s^2) - (r^2 - s^2)x^2$$

$$(r^2 - s^2)x^2 + r^2y^2 = r^2(r^2 - s^2) \quad (5.21)$$

Se dividirmos ambos os lados da equação (5.21) por $r^2(r^2 - s^2)$, obtemos

$$\frac{(r^2 - s^2)x^2}{r^2(r^2 - s^2)} + \frac{r^2y^2}{r^2(r^2 - s^2)} = \frac{r^2(r^2 - s^2)}{r^2(r^2 - s^2)}$$

$$\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{(r^2 - s^2)} = 1 \quad (5.22)$$

Na expressão na equação (5.22) considerando $a = r$ e $b = r^2 - s^2$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b} = 1 \quad (5.23)$$

Para chegar na expressão semelhante à equação da Elipse encontrada em livros didáticos (Lima, 2015):

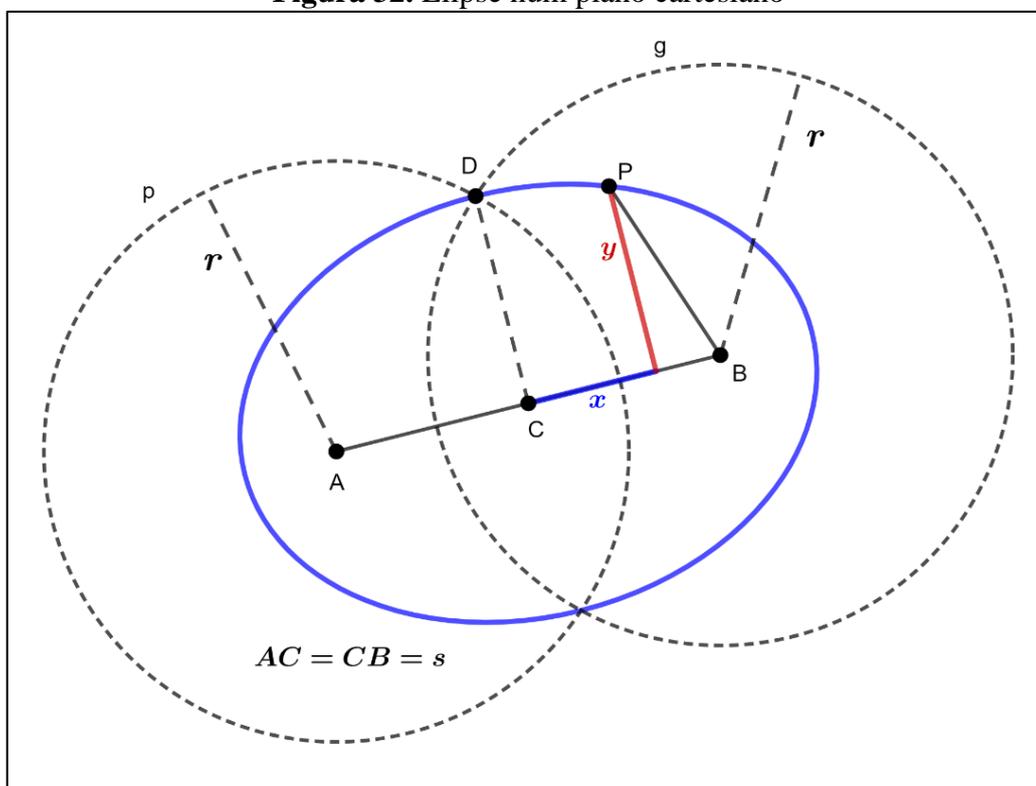
$$b = r^2 - s^2 \Rightarrow b^2 = \sqrt{r^2 - s^2}$$

Logo, podemos escrever (5.22) da seguinte maneira

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (5.24)$$

Dessa forma, segundo Smith (2013), é possível compreender o significado das quantidades s e r na equação da Elipse. Lembrando que s é a metade da distância entre os focos e r é a metade da soma das distâncias entre qualquer ponto que pertença à Elipse e os dois focos.

Figura 32. Elipse num plano cartesiano

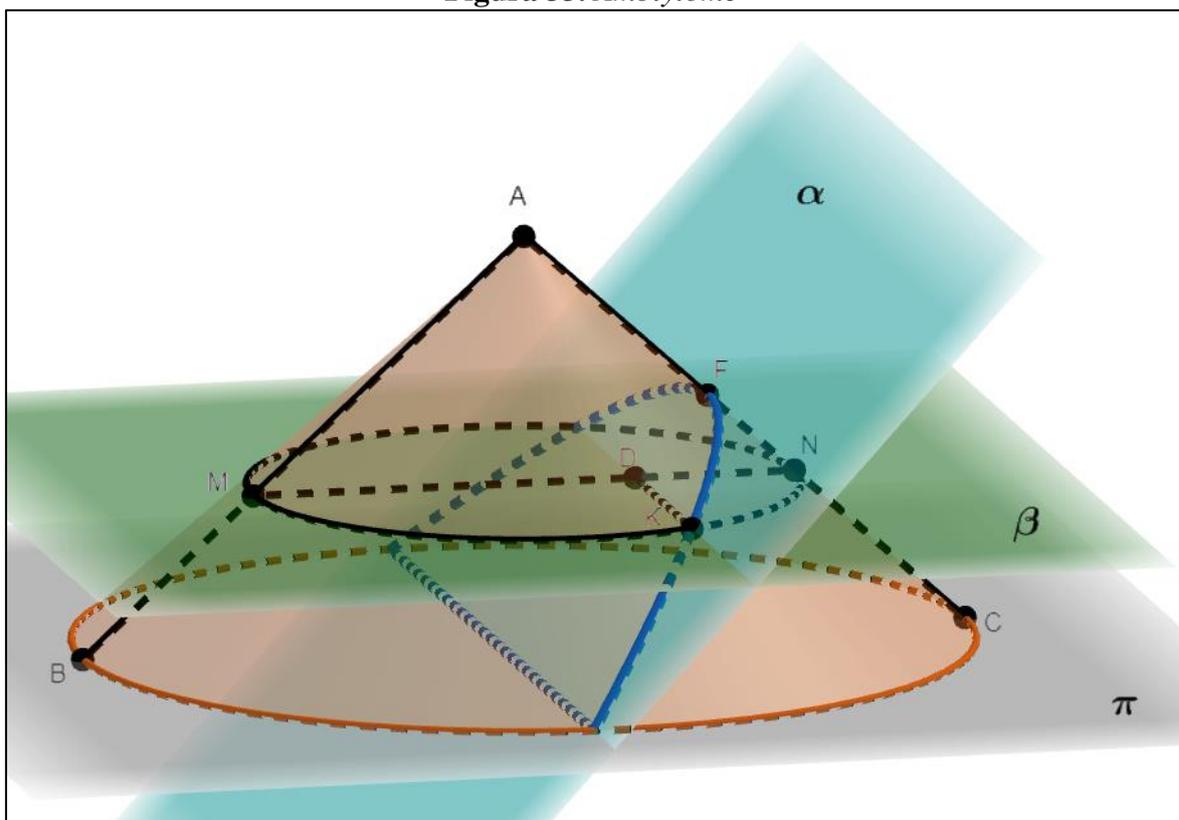


Fonte: Elaboração pela autora

3.4 A trajetória matemática da *Amblytome* à Hipérbole

Segundo Estrada *et al.* (2000), Menêcmo utilizou um cone *amblygonal*, ou seja, um cone que têm o ângulo obtuso no vértice para determinar o *symptome* da Hipérbole. A análise e procedimento realizado são muito parecidos com o da elipse, assim, seja um cone circular reto apoiado sobre o plano π que possui um ângulo obtuso no vértice A . O segmento BC é o diâmetro da circunferência base do cone. O ponto F está sobre a geratriz AC e por ele trace um plano α perpendicular a AC . Da interseção do cone com o plano α obtemos a curva p , a qual Menêcmo chamou de *Amblytome*. Agora, temos um ponto K sobre a curva p que seja diferente de F e por esse ponto incidiremos o plano β paralelo ao plano π . A interseção do cone com o plano β é a circunferência g . A interseção de g com as geratrizes AC e AB são os pontos N e M , respectivamente. Temos então que o segmento MN é o diâmetro de g (Figura 33).

Figura 33. *Amblytome*

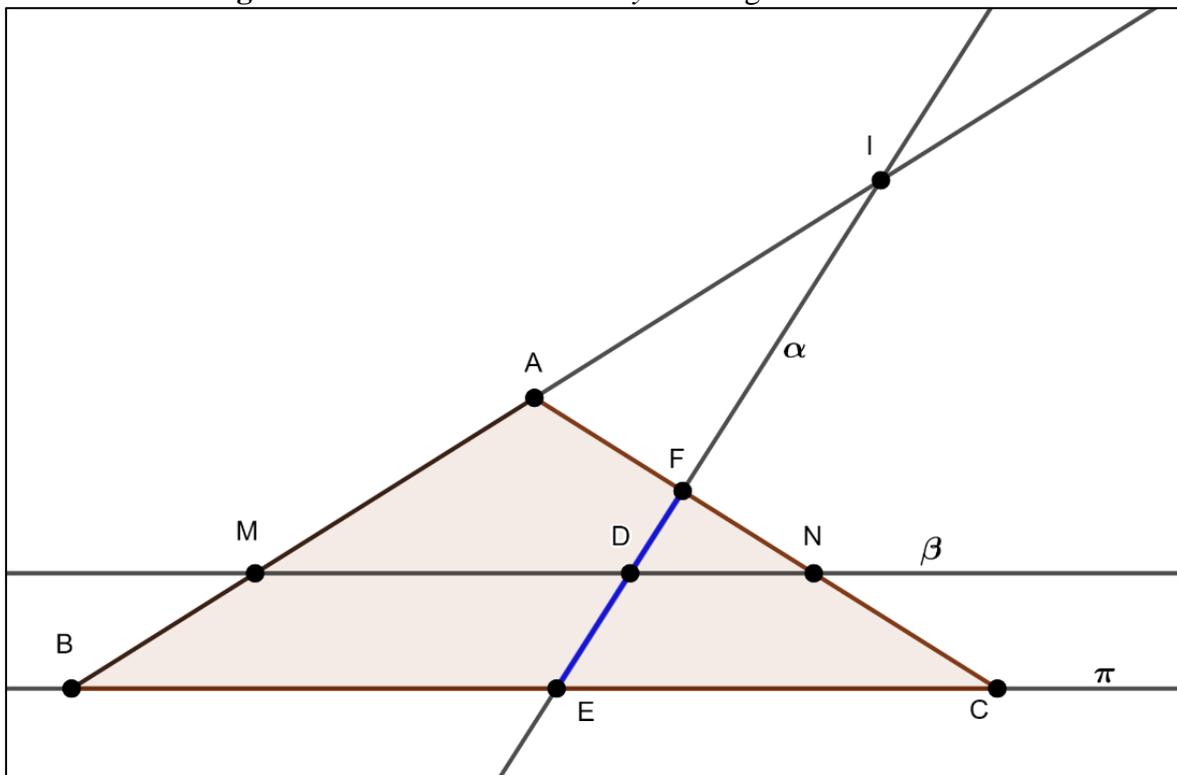


Fonte: Elaborada pela autora a partir de Silva Filho (2015)

Nesse caso, o plano de seção α , perpendicular à geratriz AC , não é paralelo à geratriz AB , portanto as retas FD e AB não são paralelas ($FD \nparallel AB$). É importante destacar que a mesma análise no plano β realizada para a parábola por Menêcmo também é válida para a Hipérbole. Portanto, a equação (2.1) também pode ser utilizada para a caracterização da

Hipérbole. Logo, prolongamos os segmentos AB e DE até que se intersectem no ponto I (Figura 34).

Figura 34. Vista frontal da *Amblytome* segundo Meneâcmo



Fonte: Elaboração pela autora

Como os segmentos MD e BE são paralelos, os triângulos ΔIMD e ΔIBE são semelhantes pelo critério ângulo-ângulo, já que os ângulos \widehat{IMD} e \widehat{IBE} são congruentes por serem ângulos correspondentes entre paralelas e os ângulos \widehat{IDM} e \widehat{IEB} são congruentes por serem ângulos correspondentes entre paralelas (Figura 35a). Assim podemos escrever a seguinte relação:

$$\frac{DM}{DI} = \frac{EB}{EI}$$

$$DM = \frac{DI \cdot EB}{EI} \quad (6)$$

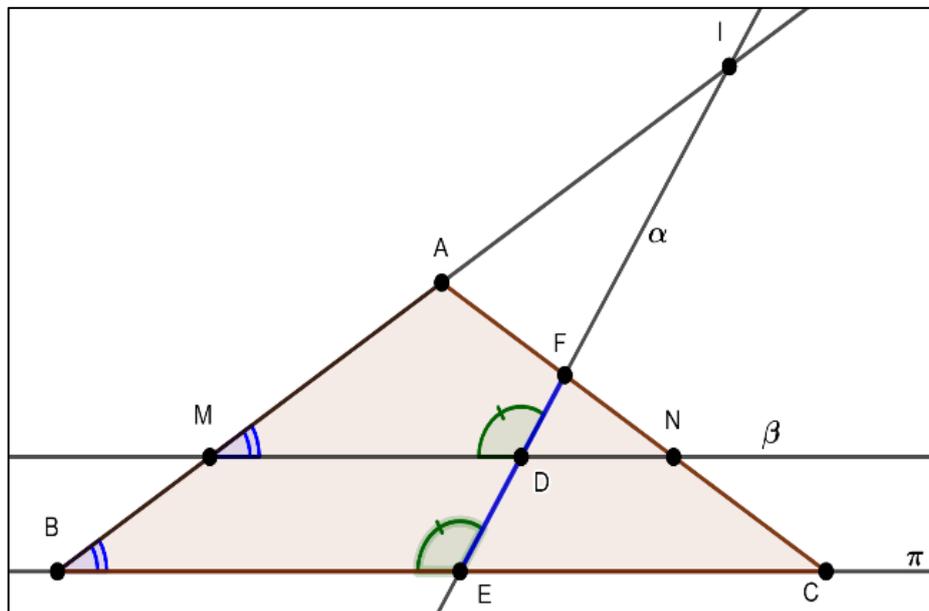
De forma análoga, temos que os triângulos ΔFDN e ΔFEC também são semelhantes pelo critério ângulo-ângulo, já que os ângulos \widehat{FDN} e \widehat{FEC} são congruentes por serem ângulos correspondentes entre paralelas e os ângulos \widehat{FND} e \widehat{FCE} são congruentes por serem

ângulos correspondentes entre paralelas (Figura 35b). Assim podemos escrever a seguinte relação:

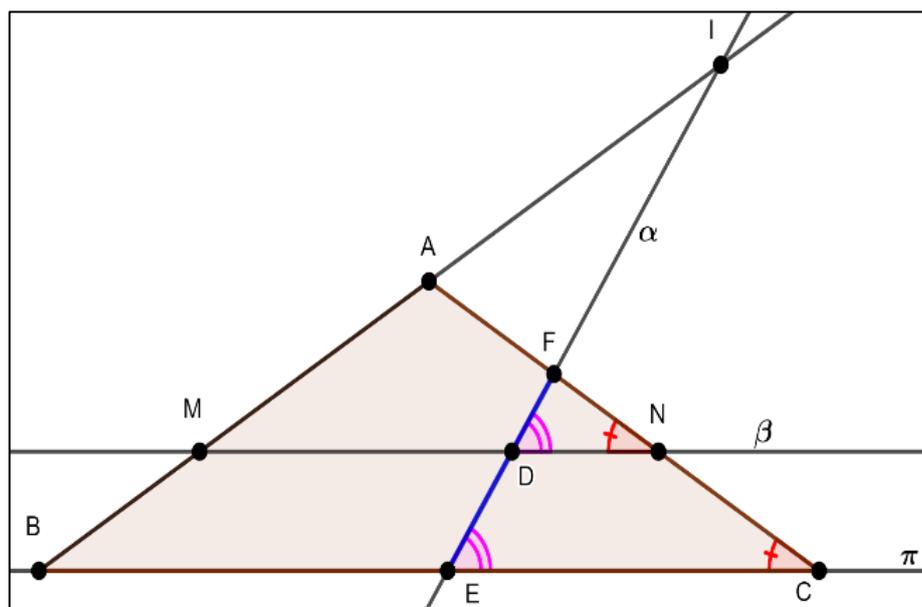
$$\frac{DN}{DF} = \frac{EC}{EF}$$

$$DN = \frac{EC \cdot DF}{EF} \quad (6.1)$$

Figura 35. Vista frontal da *Amblytome* e semelhança dos triângulos ($\Delta IMD \approx \Delta IBE$ e $\Delta FDN \approx \Delta FEC$)



(a)



(b)

Fonte: Elaborado pela autora

Logo, substituindo as equações (6) e (6.1) na equação (2.1) temos:

$$KD^2 = \frac{DI \cdot EB}{EI} \cdot \frac{EC \cdot DF}{EF} \quad (6.2)$$

Como $DI = DF + FI$, podemos escrever a equação (6.2) da seguinte forma:

$$KD^2 = (DF + FI) \cdot \frac{EB \cdot DF \cdot EC}{EI \cdot EF} \quad (6.3)$$

Os segmentos FI, BE, EC, EF e EJ têm sempre a mesma medida independente da escolha do ponto K sobre a curva, enquanto os segmentos KD e DF variam de comprimento em função da posição do ponto K . Isto pode ser verificado por meio do arquivo `ggb`²² chamado “Hipérbole segundo Menêmo”²³.

Então, fazendo $KD = y$ e $DF = x$, $FI = 2a$ e $\frac{BE \cdot EC}{EI \cdot EF} = k$, temos:

$$y^2 = kx(2a + x) \quad (6.4)$$

Utilizando as expressões de hoje em dia, podemos escrever a equação (6.4) da seguinte maneira, considerando $k = \frac{b^2}{a^2}$, temos:

$$\begin{aligned} y^2 &= \frac{b^2}{a^2} x(2a + x) \\ y^2 &= \frac{2ab^2x}{a^2} + \frac{b^2x^2}{a^2} \\ y^2 &= \frac{2b^2x}{a} + \frac{b^2x^2}{a^2} \quad (6.5) \end{aligned}$$

Considerando $l = \frac{2b^2}{a}$, podemos escrever o seguinte

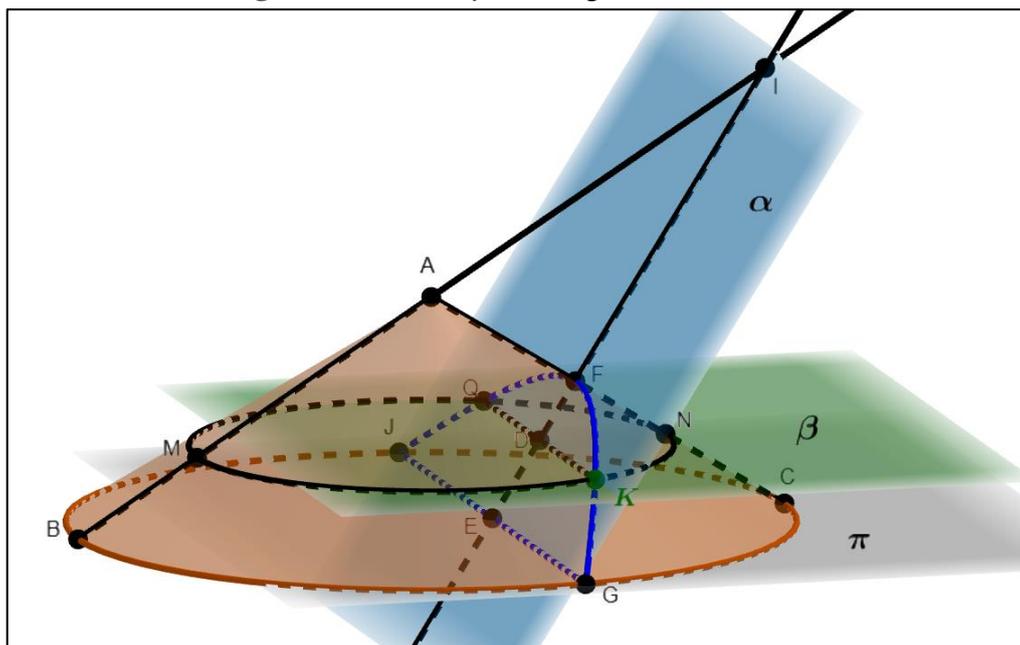
$$y^2 = lx + \frac{b^2}{a^2} x^2 \quad (6.7)$$

Segundo Urbaneja (2017), l é uma constante chamada de *latus rectum* e “ a ” e “ b ” são constantes.

²² O `.ggb` extensão de arquivo é usado por arquivos criados usando o aplicativo GeoGebra.

²³ Disponível em: <https://www.geogebra.org/classic/fydxvbt>

Figura 36. A *Amblytome* segundo Meneâcmo



Fonte: Elaboração pela autora

Por sua vez, Segundo Eecke (1963), Apolônio, em seu tratado *As Cônicas*, definiu a Hipérbole em seu primeiro livro, na proposição XII, da seguinte maneira:

Se um cone for cortado por um plano que passa pelo eixo, e se for cortado por outro plano que corta a base do cone ao longo de uma linha perpendicular à base do triângulo que passa pelo eixo; se, além disso, o diâmetro estendido da seção encontra um dos lados do triângulo que passa pelo eixo além do vértice do cone, o quadrado de qualquer linha reta traçada a partir da seção, paralela à seção comum do plano secante e da base do cone, até o diâmetro da seção ⁽²⁴⁾, será equivalente a uma área, aplicada ao longo de uma determinada reta, com a qual a relação da reta localizada no prolongamento do diâmetro da seção, e subtendendo o ângulo externo do triângulo ⁽²⁵⁾, é igual à razão entre o quadrado da linha traçada do topo do cone, paralela ao diâmetro da seção, até a base do triângulo, e o retângulo delimitado sob os segmentos da base, determinado pela reta linha desenhada; área que tem como largura a linha cortada no diâmetro ⁽²⁶⁾ por esta primeira linha ⁽²⁷⁾, ao lado do vértice da secção, e acrescida de um número que, à semelhança do retângulo delimitado pela linha que subtende o ângulo exterior do triângulo, e pelo

²⁴ Isto é, o quadrado de uma ordenada de um ponto da seção.

²⁵ Isto é, o triângulo axial.

²⁶ Isto é, a abscissa do ponto da seção.

²⁷ Isto é, pela ordenada.

parâmetro, é colocado de forma semelhante ⁽²⁸⁾. Chamamos tal seção de hipérbole ⁽²⁹⁾ (p. 24-25, tradução nossa).

Segundo Eecke (1963, p. 26) e Unbaneja (2017, p.54-55), Apolônio brinda uma continuação à sua proposição XIII, no intuito de explicar sua definição da Elipse:

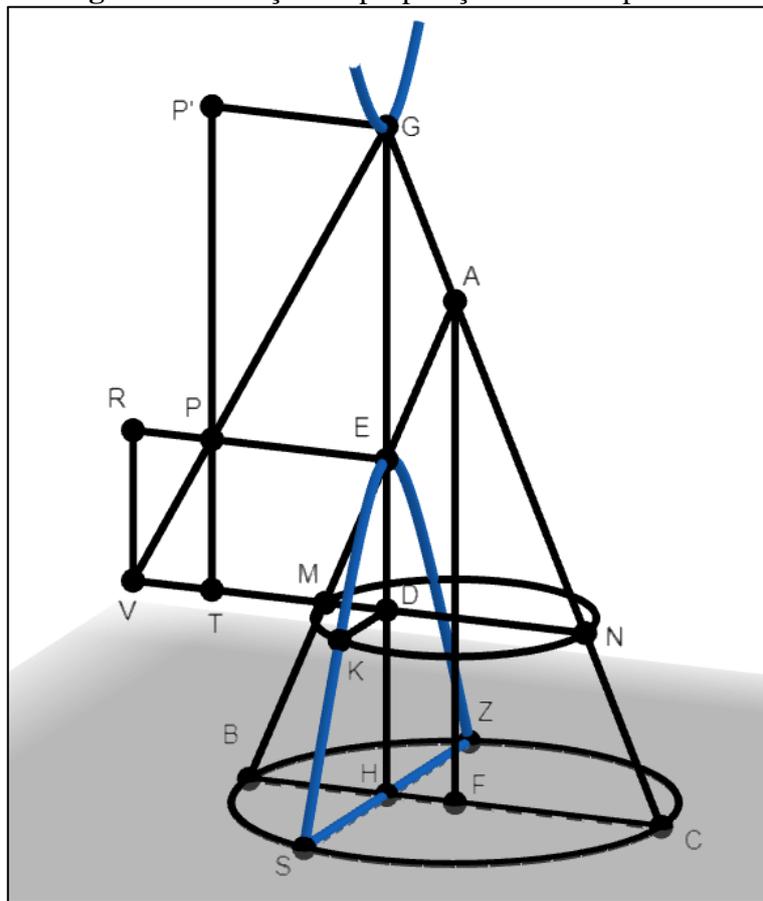
Sejamos um cone com vértice A e baseemos a circunferência BC e vamos cortá-lo por um plano que passa pelo eixo, que produz o triângulo ABC como seção e por outro plano que corta a base do cone segundo a reta SZ perpendicular a BC do triângulo e à superfície cônica segundo a reta ZES cujo diâmetro EH , estendido, encontra um dos lados AC do triângulo ABC no ponto G além do vértice. Tracemos uma reta AF paralela ao diâmetro EH da seção que passa por A , levantemos no ponto E a perpendicular EP a EH e façamos com que a reta EG esteja para uma reta EP como o quadrado de FA para o retângulo formado por FB e FC , e por fim, desenhemos através de um ponto qualquer K do trecho paralelo KD a SZ e através do ponto D o DTV paralelo a EP , estendemos o GP até seu encontro com V com o DTV e pelos pontos P e V o PT e VR paralelos ao ED . Digo que o quadrado de KD equivale ao retângulo EP que, aplicado à reta EP , tem a largura ED e o excesso PV , que é um retângulo semelhante ao das retas EG e EP .

A solução de Apolônio para sua proposição XII do livro I é mostrada na figura 47 a seguir:

²⁸ A afirmação desta proposição, uma leitura bastante penosa, equivale a dizer que, na seção cônica considerada, o quadrado da ordenada equivale a uma área retangular que, aplicada segundo o parâmetro, ou seja, tendo como parâmetro a altura, e tendo a abcissa como base, é acrescida de outra área, semelhante àquela que tem como base o eixo transversal ou diâmetro, e o parâmetro como altura. Portanto, se designarmos a ordenada por y , a abcissa por x , o eixo transversal ou diâmetro por a , e o parâmetro por p , o enunciado da proposição se traduz na relação: $y^2 = px + \frac{p}{a}x^2$ que é 1 equação cartesiana da hipérbole relacionada aos eixos oblíquos, um dos quais é o diâmetro e o outro a tangente em sua extremidade.

²⁹ Ao criar o nome *hyperbole* que foi preservado pelos modernos na palavra “hipérbole”, Apolônio separou-se de seus antecessores, notadamente Arquimedes, que sempre designam a curva em questão pela perífrase: “seção de obtusangular cone reto”, pois consideravam que era obtido apenas pela seção plana, perpendicular a uma geratriz, de um cone reto obtusangular.

Figura 37. Solução da proposição XII de Apolônio



Fonte: Elaboração pela autora

O procedimento relatado por Apolônio para caracterizar a curva definida na proposição XIII é muito parecido com o da Elipse. Então:

Seja um cone de vértice A e que tem como base a circunferência BC , trazemos um plano que passa pelo eixo, que produzirá o triângulo axial ΔABC , logo o segmento BC é base do triângulo axial ΔABC . O segmento SZ no plano da base do cone é perpendicular BC . O segmento EH é a interseção da seção plana com o triângulo ΔABC . E é o ponto de interseção da curva com AB e G é o ponto de interseção da curva com a prolongação de AC . Traçando AF paralelo a EG , encontra-se com BC no ponto F . O ponto K é um ponto qualquer pertencente à curva, com o segmento KD perpendicular ao plano do triângulo axial ΔABC . Assim, KD é perpendicular a EG no ponto D . Por sua parte, o segmento MN é o diâmetro da seção circular determinada por um plano β que contém o segmento KD , sendo este paralelo à base BC . O segmento MN intercepta o lado AB em M e AC em N , logo KD é perpendicular a MN no ponto D . EP é um segmento perpendicular a EG e EP também está contido no plano perpendicular à seção cônica que passa por E . O retângulo $EDPT$ está situado num

plano perpendicular ao plano da seção cônica. V é o ponto de interseção da prolongação do segmento DT .

Segundo Lopes (2011), o segmento EP é de extrema importância para a caracterização das curvas. Ainda segundo esse autor, é um parâmetro que Apolônio definiu em função dos lados do triângulo axial ΔABC e dos segmentos AE e AF da seguinte forma:

$$\frac{EP}{EG} = \frac{BF \cdot FC}{AF^2} \quad (7)$$

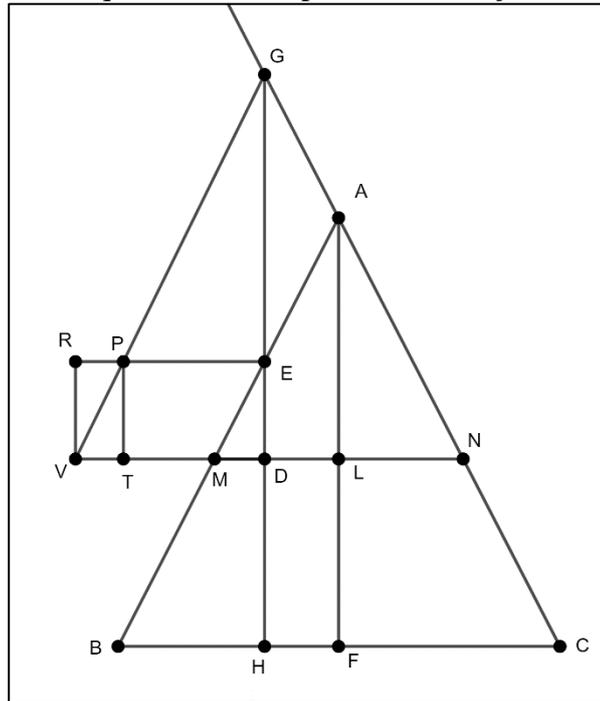
A análise que Apolônio proporcionou para obter a equação (3.1), na caracterização da Parábola na seção anterior, também é válida para a Hipérbole, já que, segundo as construções anteriores, sabe-se que MN é o diâmetro da circunferência que passa pelo ponto K e o segmento KD é perpendicular a MN no ponto D . Então, podemos escrever a mesma relação:

$$KD^2 = MD \cdot ND \quad (3.1)$$

Pelas construções realizadas, sabemos que EH não é paralelo ao lado AC do triângulo axial ΔABC , neste caso EH intercepta a prolongação do lado AC no ponto G . Agora, para a análise e caracterização da Hipérbole, Apolônio, em sua definição, relaciona o quadrado KD que equivale ao retângulo que, aplicado à EP , tem a largura ED reduzida numa figura semelhante ao retângulo das retas EG e EP .

Nesse sentido, considere-se o esquema obtido a partir da figura 37 e ilustrado na figura 38.

Figura 38. Esquema obtido a partir da definição de Apolônio



Fonte: Elaboração pela autora baseada em Lopes (2011)

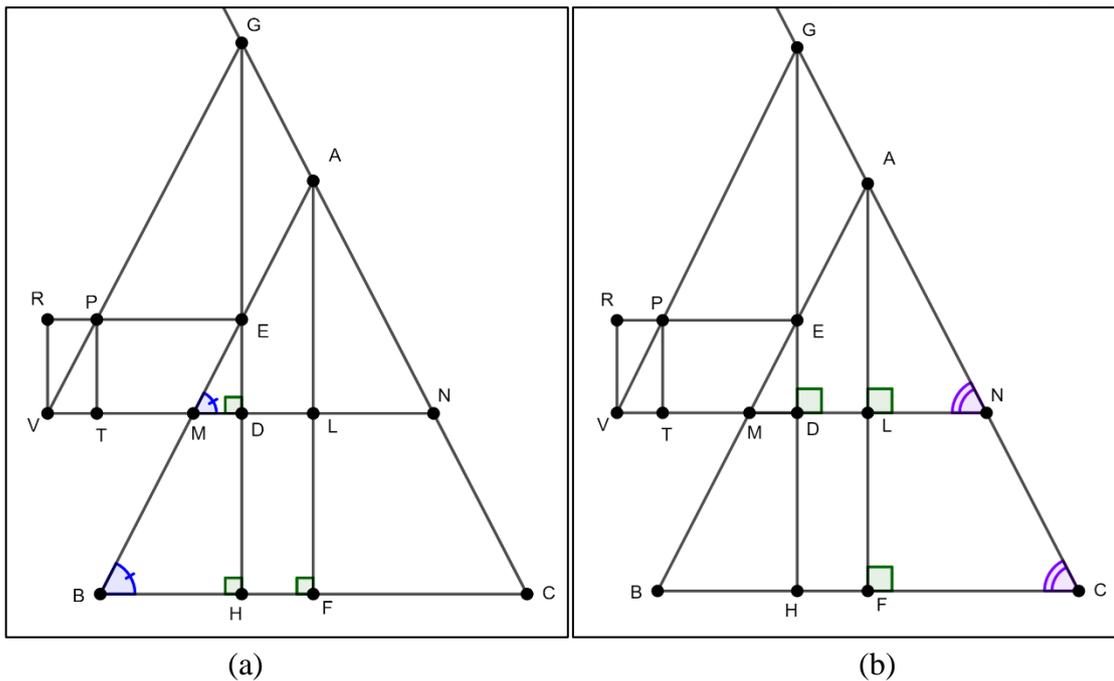
Sabe-se que MN é paralelo a BC e AF é paralelo a EH , então os ângulos \widehat{ABF} e \widehat{EMD} são congruentes por serem ângulos correspondentes entre paralelas, os ângulos \widehat{AFB} e \widehat{EHB} são congruentes por serem ângulos correspondentes entre paralelas, os ângulos \widehat{EDM} e \widehat{EHB} são congruentes por serem ângulos correspondentes entre paralelas, logo os ângulos \widehat{EDM} e \widehat{ABF} são congruentes (Figura 53a). Então, os triângulos ΔABF e ΔEDM são semelhantes pelo critério ângulo-ângulo, logo:

$$\frac{MD}{ED} = \frac{BF}{AF} \quad (7.1)$$

Da mesma maneira, DN é paralelo a FC e GD é paralelo a AF , os ângulos \widehat{GND} e \widehat{ACF} são congruentes, os ângulos \widehat{GDN} e \widehat{ALN} são congruentes, os ângulos \widehat{ALN} e \widehat{AFC} são congruentes por serem ângulos correspondentes entre paralelas, logo os ângulos \widehat{GDN} e \widehat{ACF} são congruentes. Então, os triângulos ΔDNG e ΔACF são semelhantes pelo critério ângulo-ângulo (Figura 53b), logo:

$$\frac{DN}{GD} = \frac{CF}{AF} \quad (7.2)$$

Figura 39. Semelhanças nos triângulos ($\triangle ABF \approx \triangle EDM$) e ($\triangle DNG \approx \triangle ACF$)



Fonte: Elaboração pela autora

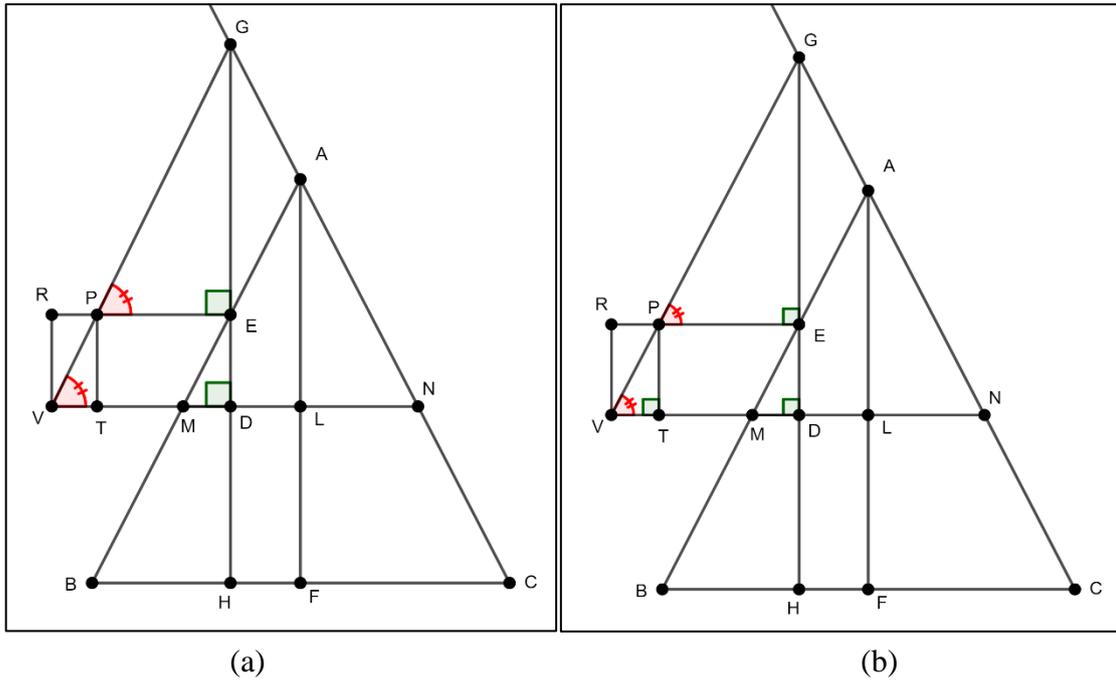
Sabe-se também por construção que EP é paralelo a DV , então os ângulos \widehat{GEP} e \widehat{GDV} são congruentes e os ângulos \widehat{GPE} e \widehat{GVD} são congruentes por serem ângulos correspondentes entre paralelas, então os triângulos $\triangle GEP$ e $\triangle GDV$ são semelhantes pelo critério ângulo-ângulo (Figura 40a), logo:

$$\frac{EP}{EG} = \frac{DV}{DG} \quad (7.3)$$

O segmento que passa pelos pontos colineares D , V e T é paralelo a EP e ED é paralelo a PT . Logo, os ângulos \widehat{EPG} e \widehat{DVG} são congruentes por serem correspondentes entre paralelas, os ângulos \widehat{GDV} e \widehat{PTV} são congruentes, os ângulos \widehat{GEP} e \widehat{GDV} são congruentes, logo os ângulos \widehat{GEP} e \widehat{PTV} são congruentes. Daí que os triângulos $\triangle GEP$ e $\triangle PTV$ são semelhantes pelo critério ângulo-ângulo (Figura 40b), logo:

$$\frac{VT}{TP} = \frac{EP}{EG} \quad (7.4)$$

Figura 40. Semelhanças nos triângulos ($\Delta GEP \approx \Delta GDV$) e ($\Delta GEP \approx \Delta PTV$)



Fonte: Elaboração pela autora

Ainda como os segmentos ED e PT têm o mesmo comprimento, já que são lados do retângulo $EDTP$, obtém-se:

$$VT = \frac{EP}{EG} \cdot ED \quad (7.5)$$

Logo, segundo Lopes (2011), a expressão correspondente a essa curva pode ser obtida da seguinte forma: dividindo (3.1) por $ED \cdot GD$ tem-se que,

$$\frac{KD^2}{ED \cdot GD} = \frac{MD \cdot DN}{ED \cdot GD} \quad (7.6)$$

Substituindo (7.1) e (7.2) em (7.6) encontra-se que:

$$\frac{KD^2}{ED \cdot GD} = \frac{BF}{AF} \cdot \frac{CF}{AF}, \text{ logo}$$

$$\frac{KD^2}{ED \cdot GD} = \frac{BF \cdot CF}{AF^2} \quad (7.7)$$

Segundo Estrada *et al.* (2000), a relação da equação (7.6) mostra que a razão entre o quadrado de lado KD e o retângulo de lados DE e DG é independente do ponto K pertencente à cônica. Ainda segundo esses autores, Apolônio não toma essa propriedade como sintoma da cônica.

Então, fazendo uso de (7) e (7.3) em (7.7), obten-se:

$$KD^2 = \frac{DV \cdot ED \cdot GD}{GD}$$

$$KD^2 = DV \cdot ED \quad (7.8)$$

Logo, a equação $KD^2 = DV \cdot ED$ é uma expressão geral para a curva, com DV representando valores diferentes. Agora, escrevendo DV em função da constante EP , temos que: $DV = EP + VT$. Assim, pode-se escrever (7.8) da seguinte maneira

$$KD^2 = ED(EP + VT) \quad (7.9)$$

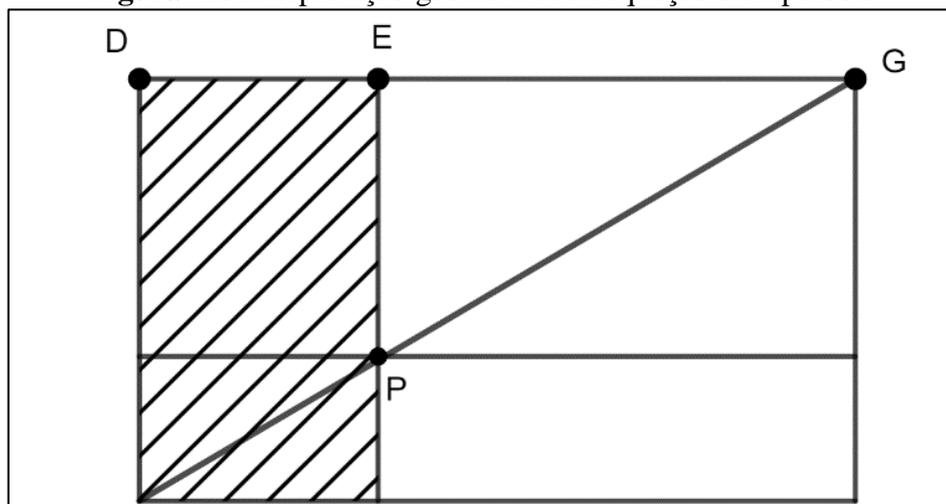
Ainda pela equação (7.5) podemos escrever (7.9) da seguinte maneira:

$$KD^2 = ED \left[EP + \left[\left(\frac{EP}{EG} \right) \cdot ED \right] \right] \text{ ou}$$

$$KD^2 = ED \cdot EP + \frac{EP}{EG} \cdot ED^2 \quad (7.10)$$

A equação, interpretada geometricamente (Figura 41), é o mesmo que dizer que a área do quadrado aplicado ao segmento KD é igual à área do retângulo de lado a EP e altura ED , mais algum valor, neste caso seria $\frac{EP}{EG} \cdot ED^2$ (o retângulo de lados $\frac{EP}{EG} \cdot ED$ e ED). Assim, a curva nesse caso é uma Hipérbole, termo originário do grego *yperboli*, que corresponde à aplicação de áreas por excesso (Estrada et al., 2000; Lopes, 2011).

Figura 41. Interpretação geométrica da equação da hipérbole

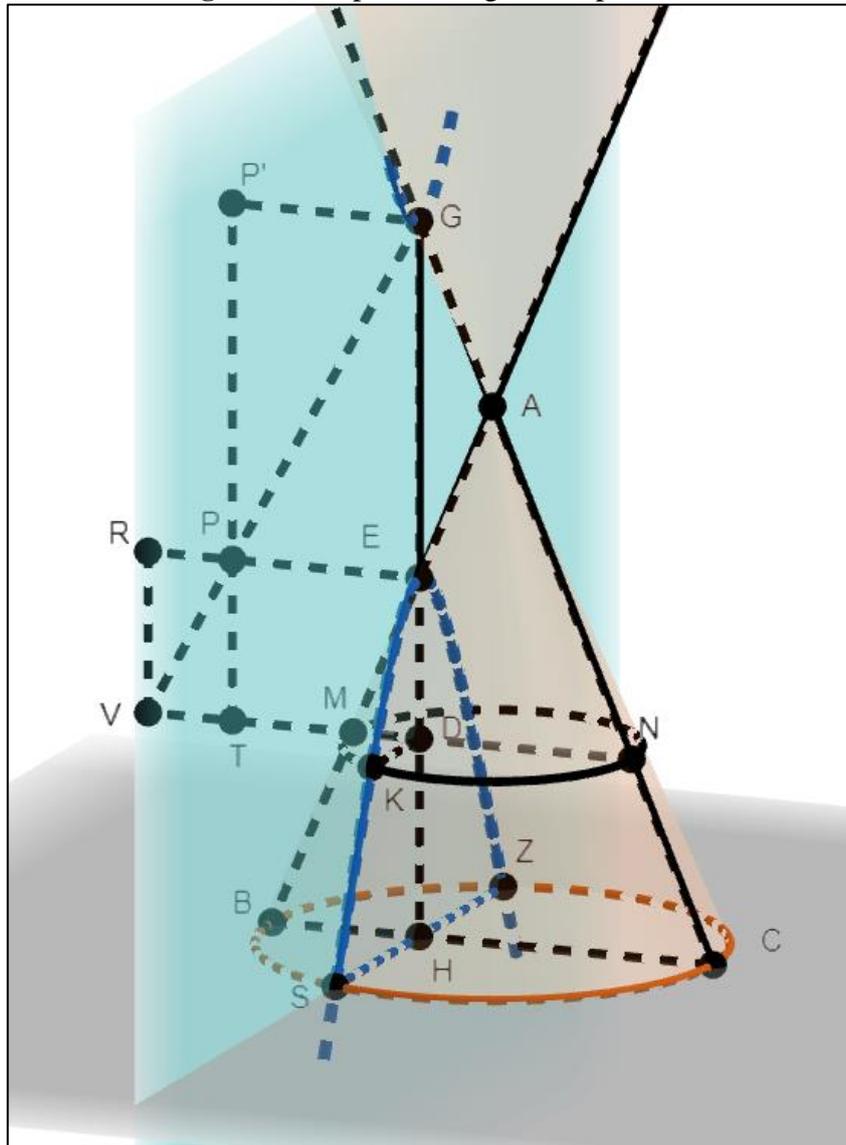


Fonte: Elaboração pela autora

Utilizando a linguagem usada atualmente, considere EP um parâmetro $EP = p$ e EG diâmetro $EG = d$ que irá representar o eixo transverso da Hipérbole, considerando ainda $KD = y$ e $ED = x$ (Figura 42), a equação (7.10) fica como:

$$y^2 = xp + \frac{p}{d}x^2$$

Figura 42. Hipérbole segundo Apolônio

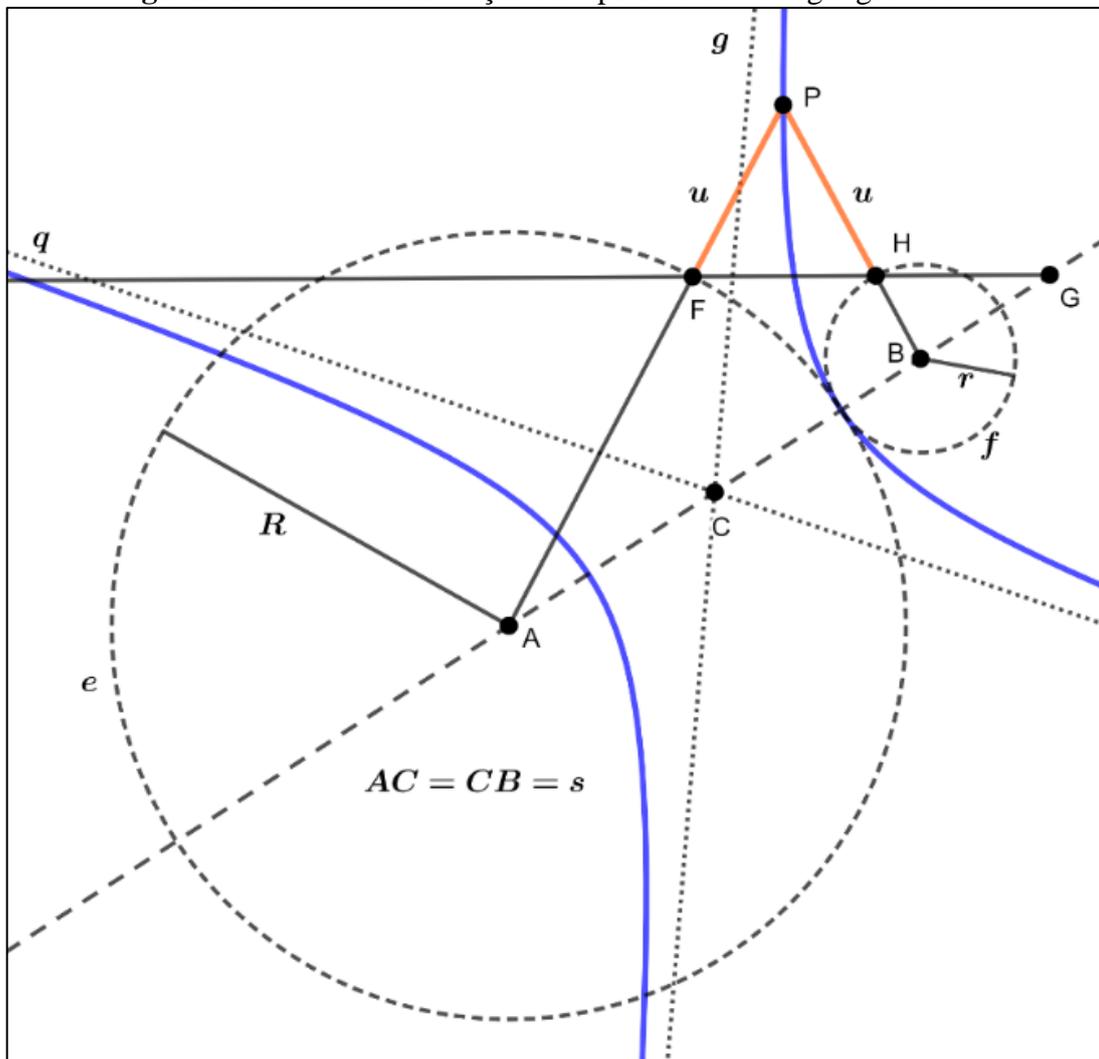


Fonte: Elaboração pela autora

Para seguir com o estudo da Hipérbole, vamos considerar a seguinte definição: “Para todos os pontos que pertencem a uma Hipérbole, a diferença entre as distâncias que mantêm dos focos é constante, ou seja, atendem à condição $AP - BP = 2d$. A Hipérbole possui dois ramos que não se cruzam e possui dois focos (Smith, 2013).

Nesse sentido, sejam A e B dois pontos arbitrários pertencentes a um plano, que representam os focos da curva. C é o ponto médio entre A e B , então podemos dizer que $AC = s$ y $CB = s$, logo $AB = 2s$. As retas e y g são às assíntotas da curva. Seja e uma circunferência centrada no ponto A e raio $R = s + d$, e f uma circunferência centrada no ponto B e raio $r = s - d$. G é o ponto de intersecção da reta que passa por A e B , e as tangentes comuns das circunferências e y f . A distância d é a semidiferença entre a distância de um ponto da Hipérbole aos dois focos $d = \frac{AP-AB}{2}$. O ponto F é o ponto de intersecção de AP com a circunferência, e H é o ponto de intersecção de PB com a circunferência f . Chamemos de $FP = u$ e $HP = u$, logo $FP = HP$, então o triângulo ΔPFH é isósceles (Figura 43)

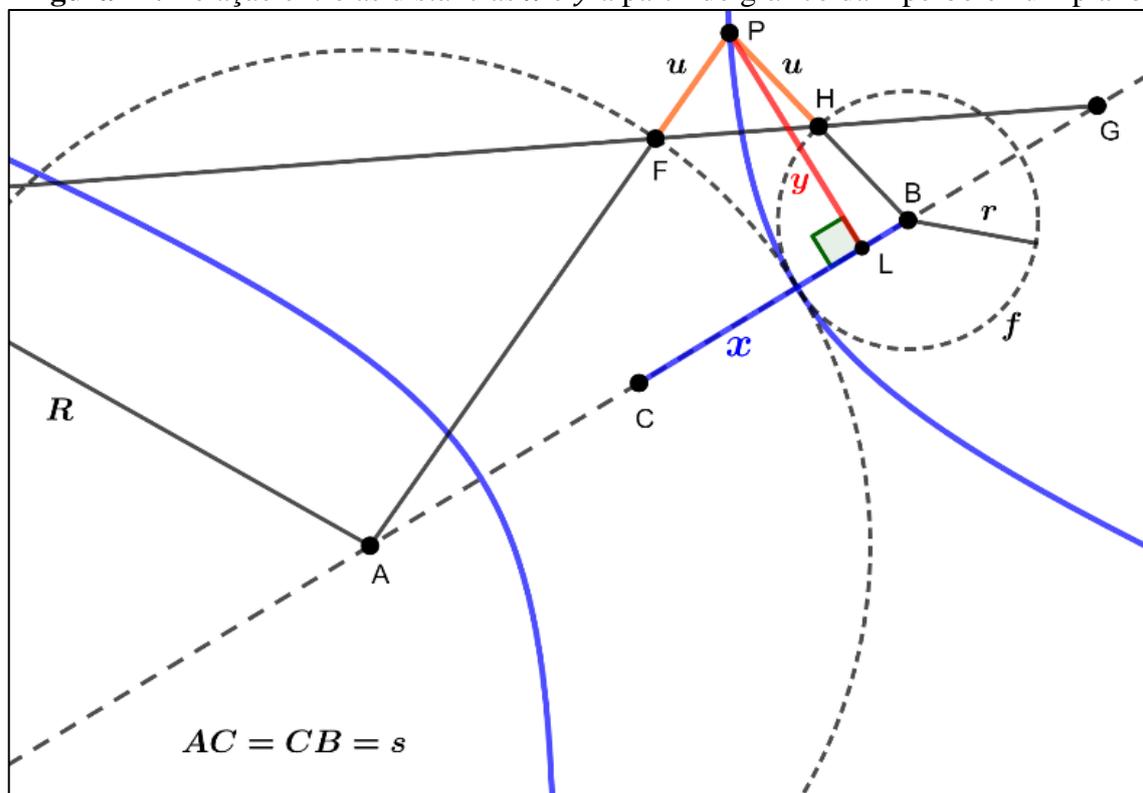
Figura 43. Gráfico da definição da hipérbole como lugar geométrico



Fonte: Elaborado pela autora

Então, queremos encontrar a relação³⁰ entre as distâncias x e y . Ou seja, uma equação que expressa a relação entre as distâncias x e y (Figura 44).

Figura 44. Relação entre as distâncias x e y a partir do gráfico da hipérbole num plano



Fonte: Elaborado pela autora

Segundo Smith (2013), para determinar essa equação, usaremos uma rota muito semelhante àquela que usamos para determinar a equação da Elipse (Figura 45). Considerando as figuras 58 e 59, temos que ter em mente as seguintes relações:

$$\cos(180^\circ - \theta) = -\cos \theta \quad (8)$$

$$x = CP \cos \theta \quad (8.1)$$

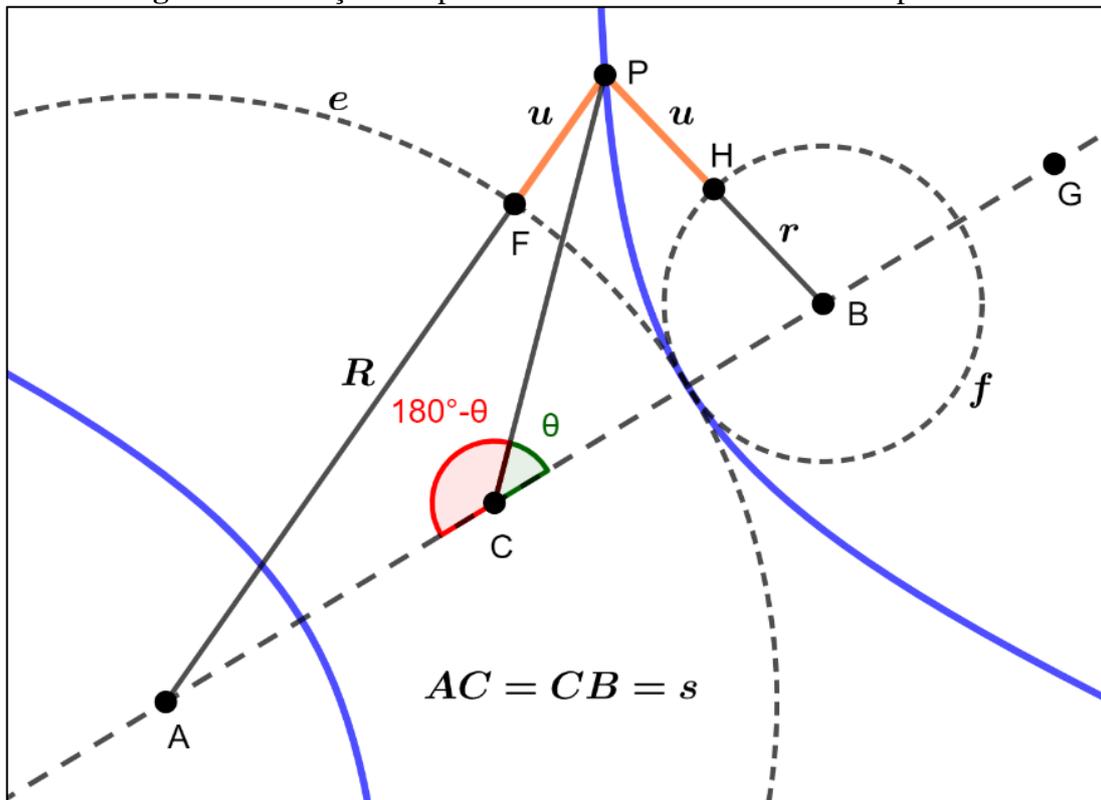
$$y = CP \sin \theta \quad (8.2)$$

O triângulo PLC é retângulo, portanto, podemos usar o teorema de Pitágoras da seguinte maneira:

$$y^2 = (CP)^2 - x^2 \quad (8.3)$$

³⁰ Toda fórmula é um registro escrito em forma de equação, da relação entre quantidades que podem ser medidas. Neste caso, as distâncias x e y .

Figura 45. Relações do ponto P com os focos e centro da hipérbole



Fonte: Elaborado pela autora

Então, aplicando a lei dos cossenos³¹ ao triângulo ΔPCB

$$(BP)^2 = (CP)^2 + (CB)^2 - (CP)(CB) \cos \theta \quad (8.4)$$

Substituindo os valores de BP e CB , fica:

$$(r + u)^2 = (CP)^2 + (s)^2 - 2(CP)(s) \cos \theta$$

Desenvolvendo $(r + u)^2$:

$$r^2 + 2ru + u^2 = (CP)^2 + (s)^2 - 2(CP)(s) \cos \theta$$

Porém, $r = s - d$, logo

$$(s - d)^2 + 2(s - d)u + u^2 = (CP)^2 + (s)^2 - 2(CP)(s) \cos \theta$$

Desenvolvendo $(s - d)^2$ e agrupando termos semelhantes, temos:

³¹ A lei dos cossenos é usada para encontrar as partes que faltam em um triângulo oblíquo (não um triângulo retângulo) quando as medidas dos dois lados e a medida do ângulo incluído são conhecidas. $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$.

$$s^2 - 2sd + d^2 + 2su - 2du + u^2 = (CP)^2 + (s)^2 - 2(CP)(s) \cos \theta$$

$$d^2 + u^2 - 2sd + 2su - 2du = (CP)^2 - 2(CP)(s) \cos \theta \quad (8.5)$$

Logo, aplicando a lei dos cossenos ao triângulo ΔPCA , temos:

$$(AP)^2 = (CP)^2 + (CA)^2 - 2(CP)(CA) \cos(180^\circ - \theta)$$

Substituindo os valores de AP , CA e (8) fica:

$$(R + u)^2 = (CP)^2 + (s)^2 + 2(CP)(s) \cos \theta$$

Desenvolvendo $(R + u)^2$:

$$R^2 + 2Ru + u^2 = (CP)^2 + (s)^2 - 2(CP)(s) \cos \theta$$

Porém, $R = s + d$, logo

$$(s + d)^2 + 2(s + d)u + u^2 = (CP)^2 + (s)^2 - 2(CP)(s) \cos \theta$$

Desenvolvendo $(s + d)^2$ e agrupando termos semelhantes, temos:

$$s^2 + 2sd + d^2 + 2su + 2du + u^2 = (CP)^2 + (s)^2 - 2(CP)(s) \cos \theta$$

$$d^2 + u^2 + 2sd + 2su + 2du = (CP)^2 + 2(CP)(s) \cos \theta \quad (8.6)$$

Agora somamos as equações (8.5) e (8.6) temos que:

$$d^2 + u^2 - 2sd + 2su - 2du = (CP)^2 - 2(CP)(s) \cos \theta$$

$$+ \frac{d^2 + u^2 + 2sd + 2su + 2du = (CP)^2 + 2(CP)(s) \cos(\theta)}{2d^2 + 2u^2 + 4su = 2(CP)^2}$$

Se dividirmos ambos os membros da igualdade por 2, obtemos:

$$d^2 + u^2 + 2su = (CP)^2 \quad (8.7)$$

Subtraindo a equação (8.5) de (8.6), obtemos

$$d^2 + u^2 - 2sd + 2su - 2du = (CP)^2 - 2(CP)(s) \cos \theta$$

$$- \frac{d^2 + u^2 + 2sd + 2su + 2du = (CP)^2 + 2(CP)(s) \cos(\theta)}{4sd + 4du = 4(CP)(s) \cos \theta}$$

Se dividirmos ambos os membros da igualdade por 4, obtemos:

$$sd + du = (CP)(s) \cos \theta \quad (8.8)$$

Porque $x = (CP) \cos \theta$, podemos escrever a equação (8.8) da seguinte maneira

$$sd + du = xs$$

Se dividirmos ambos os membros da igualdade por d , obtemos:

$$s + u = \frac{xs}{d} \Rightarrow u = \frac{xs}{d} - s \Rightarrow u = \frac{xs - sd}{d}$$

$$u = \frac{s(x-d)}{d} \quad (8.9)$$

Agora vamos voltar à equação (8.3)

$$y^2 = (CP)^2 - x^2$$

Substituindo os valores de CP (8.7):

$$y^2 = d^2 + u^2 + 2su - x^2$$

Agora substituindo o valor de u (8.9):

$$y^2 = d^2 + \left[\frac{s(x-d)}{d} \right]^2 + 2s \left[\frac{s(x-d)}{d} \right] - x^2$$

$$y^2 = d^2 + \frac{s^2(x-d)^2}{d^2} + \frac{2s^2(x-d)}{d} - x^2$$

Desenvolvendo $(x-d)^2$

$$y^2 = d^2 + \frac{s^2(x^2 - 2xd + d^2)}{d^2} + \frac{2s^2x}{d} - \frac{2s^2d}{d} - x^2$$

Desenvolvendo $s^2(x^2 - 2xd + d^2)$ e multiplicando ambos os membros da igualdade por d^2 , obtemos:

$$y^2 d^2 = d^4 + s^2 x^2 - 2xds^2 + s^2 d^2 + 2xds^2 - x^2 d^2 - 2s^2 d^2$$

$$y^2 d^2 = s^2 x^2 - x^2 d^2 = d^4 - s^2 d^2$$

$$y^2 d^2 = x^2 (s^2 - d^2) - d^2 (s^2 - d^2)$$

Se dividirmos ambos os membros da igualdade por $d^2(s^2 - d^2)$, obtemos:

$$\frac{x^2 (s^2 - d^2)}{d^2 (s^2 - d^2)} - \frac{y^2 d^2}{d^2 (s^2 - d^2)} = \frac{d^2 (s^2 - d^2)}{d^2 (s^2 - d^2)}$$

$$\frac{x^2}{d^2} - \frac{y^2}{(s^2 - d^2)} = 1 \quad (8.10)$$

Na expressão na equação (8.10), considerando $a = d$ e $b = s^2 - d^2$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b} = 1 \quad (8.11)$$

Para chegar na expressão semelhante à equação da Hipérbole encontrada em livros didáticos (Lima, 2015):

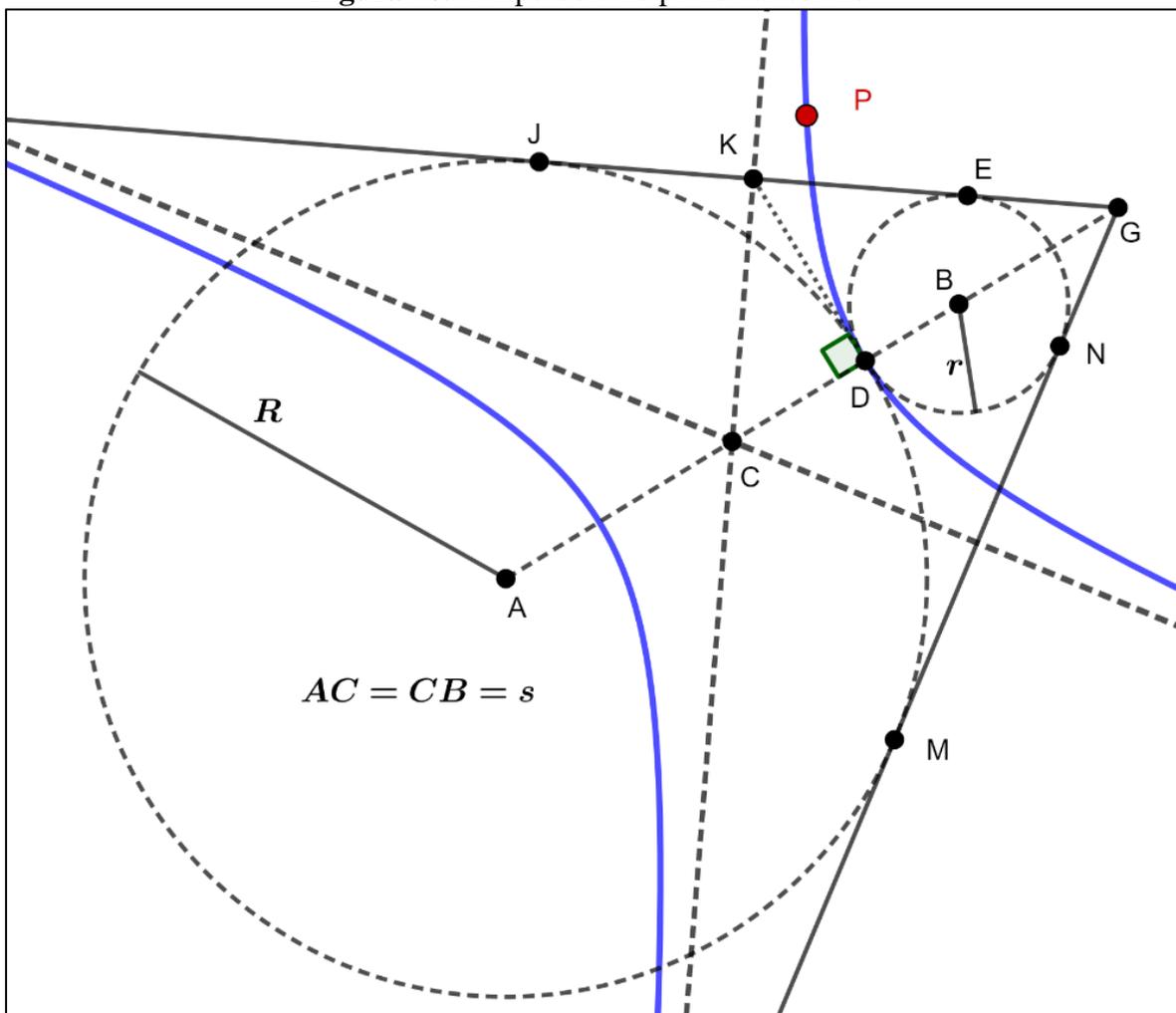
$$b = s^2 - d^2 \Rightarrow b^2 = \sqrt{s^2 - d^2}$$

Logo, podemos escrever (8.11) da seguinte maneira

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (8.12)$$

Dessa forma, segundo Smith (2013), a expressão $(s^2 - d^2)$ é o quadrado da distância entre o ponto de intersecção das duas circunferências, neste caso o ponto D (que é um vértice da Hipérbole) e o ponto K , que é o ponto médio entre os pontos de tangência (J e E). Na equação (8.12) a representa a distância CD e b é a distância DK (Figura 46)

Figura 46. A hipérbole no plano cartesiano



Fonte: Elaborado pela autora

Neste capítulo, apresentamos uma revisão analítica-epistemológica das seções cônicas, explorando as contribuições fundamentais de Menêmo e Apolônio de Perga. Percorremos o desenvolvimento histórico que culminou nas definições geométricas da Parábola, Elipse e Hipérbole como lugares geométricos. Essa trajetória nos permitiu compreender como esses conceitos, inicialmente formulados em contextos puramente geométricos, evoluíram ao longo dos séculos, culminando nas abordagens algébricas modernas que permeiam o ensino da Geometria Analítica.

Observamos que, apesar da relevância histórica e epistemológica desse percurso, os livros didáticos contemporâneos, como o de Lima (2015), tendem a apresentar as seções cônicas de forma excessivamente simplificada, priorizando a “álgebra de coordenadas”. Esse enfoque, embora eficaz para a resolução de problemas práticos, oculta os aspectos históricos e conceituais que fundamentam essas curvas. Essa lacuna na abordagem didática resulta em um aprendizado descontextualizado, que não valoriza o caráter criativo e o rigor matemático que permeiam o desenvolvimento das seções cônicas desde os tempos de Menêmo e Apolônio.

Com base nesse cenário, o próximo capítulo será dedicado à proposição de uma abordagem didática que resgate os fundamentos históricos e epistemológicos das seções cônicas, promovendo uma integração entre os aspectos geométricos e algébricos. Além disso, será detalhado uma abordagem de ensino que incorpora o uso do GeoGebra como ferramenta pedagógica, com o objetivo de enriquecer o processo de ensino e aprendizagem. O GeoGebra será utilizado para explorar conceitos como a *Orthotome*, *Oxytome* e *Amblytome*, relacionando-os diretamente às definições modernas da Parábola, Elipse e Hipérbole.

Essa proposta buscará promover uma aprendizagem compreensiva e interativa, abordando os conceitos, propriedades e equações das cônicas. Ao integrar a tecnologia com a história da Matemática, esperamos oferecer subsídios para uma formação docente mais robusta e conectada às demandas do ensino contemporâneo. No próximo capítulo, destacaremos como essas abordagens podem ser implementadas na Licenciatura em Matemática, visando capacitar futuros professores para explorar as seções cônicas de forma criativa, contextualizada e interdisciplinar, contribuindo para um ensino mais significativo e alinhado às necessidades dos estudantes do século XXI.

4

Correlações Históricas, Epistemológicas e Escolares das Cônicas

O objetivo deste capítulo é analisar como os aportes históricos de Menêmo e Apolônio, referentes às seções cônicas, dialogam com o conteúdo escolarizado encontrado em livros de Geometria Analítica de nível superior. Buscamos identificar convergências e divergências na forma como as cônicas são apresentadas e exploradas, considerando tanto seus aspectos históricos quanto didáticos. Para essa análise, foram consultados livros em três idiomas: em português, Geometria Analítica e Álgebra Linear de Lima (2015) e Vectores e Geometria Analítica de Winterle (2014); em inglês, Analytic Geometry de Riddle (1996); e, em espanhol, Curso Breve de Geometria Analítica de Bernardo (1969) e Geometria Analítica de Lehmann (2012). Apesar das semelhanças nos tratamentos didáticos entre os diferentes textos, a análise comparativa basear-se-á principalmente no livro de Winterle (2014).

No capítulo anterior, vimos que o estudo das cônicas teve origem na geometria espacial, com as curvas sendo geradas pela interseção de um plano com cones de diferentes tipos. Menêmo explorou três tipos de cones, enquanto Apolônio investigou um cone de duas folhas. Suas definições sobre a geração das superfícies dos cones retos e oblíquos encontram-se no livro I de sua obra *As Cônicas*. A seguir, destacamos três definições essenciais do cone descritas por Apolônio, que fundamentam essa análise.

Definição 1: Se de um ponto não localizado no plano de uma circunferência for traçada uma linha reta prolongada em ambas as direções e, permanecendo o ponto fixo, a linha feita percorre a circunferência até retornar ao ponto de sua posição inicial, chamo de “superfície cônica” aquela que, descrita pela reta, é composta por duas superfícies opostas no vértice que se estendem até o infinito, igual à reta geradora; e chamo o ponto fixo de “vértice” da superfície, e a reta traçada por ele e o centro do círculo de “eixo” (Eecke, 1963 p.3).

Definição 2: Chamo de “cone” a figura delimitada pelo círculo e pela superfície cônica situada entre o vértice e a circunferência do círculo; “vértice” do cone o ponto que é o próprio vértice de sua superfície; “eixo” do cone a linha traçada do vértice ao centro do círculo; e a “base” o círculo (Eecke, 1963 p.4).

Definição 3: Dentre os cones, chamo de retos aqueles que têm os eixos perpendiculares às bases, e oblíquos a aqueles que não têm os eixos perpendiculares às bases (Eecke, 1963 p.4).

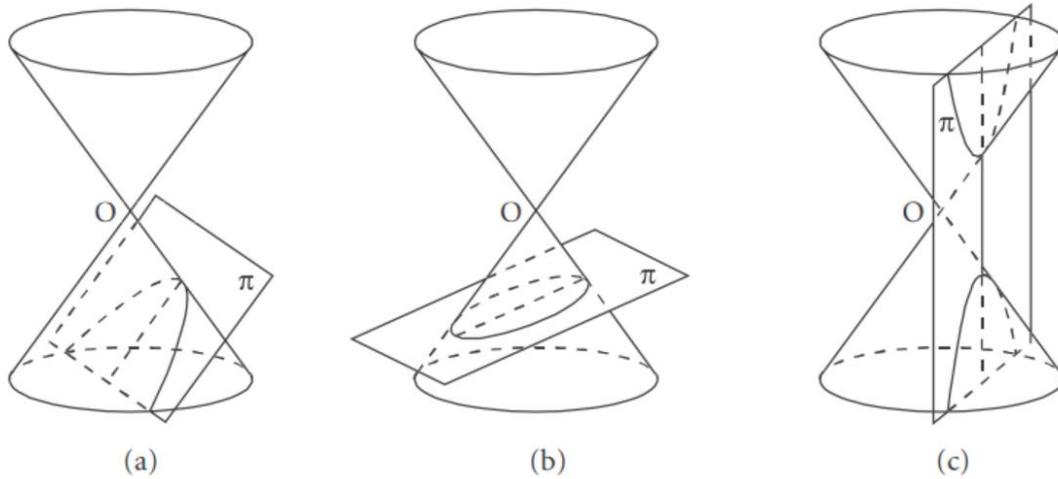
De forma semelhante, Winterle inicia o capítulo 8, dedicado às seções cônicas, com um primeiro subcapítulo intitulado “As seções cônicas”. Nesse trecho, o autor introduz a origem das cônicas e explica como essas curvas podem ser geradas pela interseção de um plano com um cone de duas folhas (Figura 47). Winterle (2014) define a superfície cônica circular infinita como sendo formada por duas folhas separadas no vértice, estabelecendo assim a base geométrica para o estudo das cônicas:

Sejam duas retas e e g concorrentes em O e não perpendiculares. Conservamos fixa a reta e e façamos g girar 360° em torno de e mantendo constante o ângulo entre as retas. Nessas condições, a reta g gera uma superfície cônica circular formada por duas folhas separadas pelo vértice O . A reta g é chamada geratriz da superfície cônica, e a reta e , eixo da superfície (p. 167).

Chama-se **seção cônica**, ou simplesmente **cônica**, o conjunto de pontos que formam a interseção de um plano com a superfície cônica. Quando uma superfície cônica é seccionada por um plano qualquer que não passa pelo vértice O , a cônica será:

- Uma parábola, se π for paralelo a uma geratriz da superfície (a);
- Uma elipse, se π não for paralelo a uma geratriz e intercepta apenas uma das folhas da superfície (ou uma circunferência, se π for perpendicular ao eixo) (b).
- Uma hipérbole, se π não é paralelo a uma geratriz e intercepta as duas folhas da superfície. A hipérbole deve ser vista como uma curva só, constituída de dois ramos, um em cada folha da superfície (c).

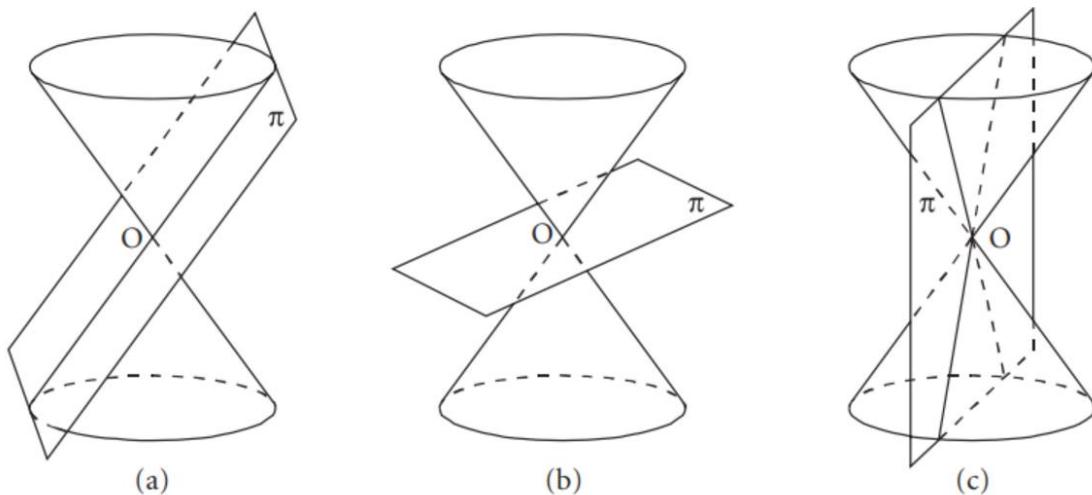
Figura 47. Seções Cônicas em Winterle



Fonte: Winterle (2014, p. 167)

Winterle (2014) faz uma observação crucial: as cônicas descritas anteriormente devem ser entendidas como ilimitadas, ou seja, compostas por duas folhas que se estendem indefinidamente em ambas as direções. Essa concepção é fundamental, pois, caso o plano secante seja transladado paralelamente até atingir o vértice O , as cônicas se tornam “degeneradas”. Nesse contexto, podem ser observados três casos distintos: (a) **uma reta**, se o plano secante contém apenas uma geratriz do cone; (b) **um ponto**, caso o plano seja paralelo à base do cone; e (c) **duas retas**, quando o plano secante contém apenas o eixo do cone.

Figura 48. Cônicas degeneradas em Winterle



Fonte: Winterle (2014, p. 168)

SUGESTÕES PARA SALA DE AULA

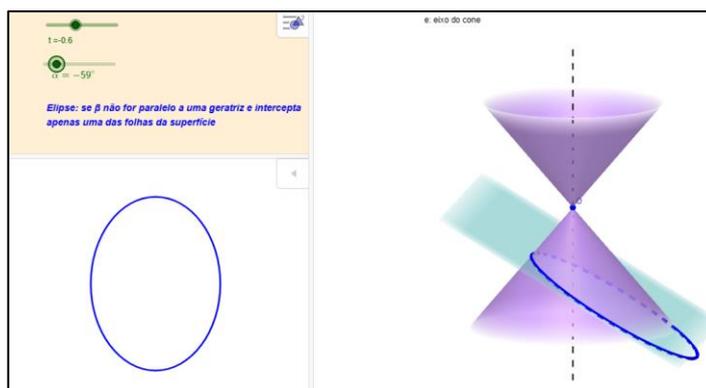
Para o estudo das cônicas, sugerimos ao professor inicie explicando a origem das seções cônicas ou simplesmente das cônicas tomando como referência o desenvolvimento histórico e epistemológico apresentado no capítulo 3; com destaque a como elas podem ser geradas a partir da interseção de um plano com um cone de duas folhas. Em seguida, sugerimos ao professor que use o GeoGebra na Janela de Visualização 3D. Em um primeiro momento para explorar as definições de cone propostas por Apolônio e por Winterle.

Sugerimos ao professor explorar o arquivo chamado “Cone de duas folhas”³², nele encontra-se duas retas, uma reta AO e uma reta AC , esta última percorre em sua totalidade a circunferência de radio OB . Recomendamos ativar a opção “Exibir Rastro” à reta AC para olhar o que Apolônio e Winterle chamam de “superfície cônica”, ou seja, aquela que é descrita pela reta, é composta por duas superfícies opostas no vértice que se estendem até o infinito. Desta maneira, a reta AO é o eixo do cone, é a reta AC é chamada de geratriz da superfície cônica e o ponto A é o vértice do cone.

Observação importante para o professor, na Janela de Visualização 3D, encontra-se uma ferramenta de construção chamada de “Cone”, a figura geométrica obtida são todos cones retos. Para representar cones oblíquos é necessário utilizar o comando “Superfície” na Janela de Álgebra. No recurso “Cone reto e oblíquo”³³ é possível explorar tanto um cone reto como oblíquo mediante os controles deslizantes.

Seguidamente, sugerimos ao professor explorar as seções cônicas, ou seja, quando as curvas são originadas quando um cone é seccionado por um plano no recurso chamado de “Explorando Seções Cônicas”³⁴. Nele encontra-se dois controles deslizantes na parte esquerda, o controle deslizante α é o ângulo de inclinação formado entre o plano e o eixo do cone e o controle deslizante t translada o plano mantendo a inclinação; e a representação no plano da curva gerada. Na parte direita encontra-se o cone, o plano e a curva na Janela de Visualização 3D. Recomendamos ao professor variar os controles deslizantes e observar a cônica obtida, então dessa interação podem surgir questões como:

- (1) Qual deve ser a posição do plano em relação ao cone para se obter uma **elipse**?
- (2) Qual deve ser a posição do plano em relação ao cone para se obter uma **hipérbole**?
- (3) Qual deve ser a posição do plano em relação ao cone para se obter uma **parábola**?
- (4) Se o plano for paralelo á base do cone, qual é a curva obtida?



³² Disponível em <https://www.geogebra.org/classic/v3cm3ndx>

³³ Disponível em <https://www.geogebra.org/classic/k4xpq8ee>

³⁴ Disponível em: <https://www.geogebra.org/classic/txetr6x>. O recurso “Explorando seções cônicas” foi adaptado a partir de <https://www.geogebra.org/m/hy5hkvf3>

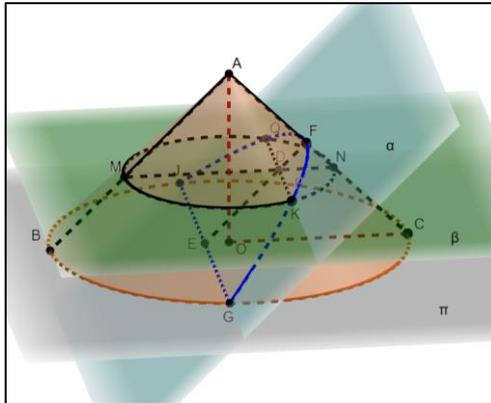
Neste recurso também é possível explorar as chamadas cônicas degeneradas que são mencionadas em Winterle. Recomendamos ao professor discutir com os estudantes a posição do plano em relação ao cone em cada caso.

A seguir, no Quadro 7, são apresentadas as definições da parábola segundo Menêmo, Apolônio e Smith, com base no desenvolvimento histórico e epistemológico discutido no capítulo anterior. Além disso, a definição dessa cônica no livro didático *Vectores e Geometria Analítica* de Winterle (2014) também é destacada, permitindo uma análise comparativa entre as perspectivas históricas e a abordagem contemporânea dos livros didáticos.

Quadro 7. Definições da Parábola

Definição da Parábola por Menêmo
<p>Menêmo considerou um cone circular reto apoiado sobre o plano π que possui um ângulo reto no vértice A. O segmento BC é o diâmetro da circunferência c da base do cone. O ponto F está sobre a geratriz AC e por ele trace um plano α perpendicular a AC. Da interseção do cone com o plano α obtemos a curva p, que Menêmo chamou de <i>Orthotome</i>. Além disso, o ponto O é o centro do cone. Agora temos um ponto K sobre a curva p que seja diferente de F, e por esse ponto incidiremos o plano β paralelo ao plano π. A interseção do cone com o plano β é a circunferência g. A interseção de g com as geratrizes AC e AB são os pontos N e M, respectivamente. Temos então que o segmento MN é o diâmetro de g.</p>

$$KD^2 = 2DF \cdot FA^{35}$$

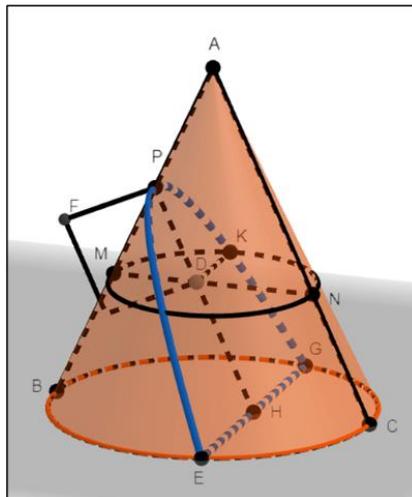


Definição da Parábola por Apôlonio

Apolônio define a parábola no seu primeiro livro na proposição XI da seguinte maneira:

Se um cone for cortado por um plano que passa pelo eixo, e se for cortado por outro plano que corta a base do cone ao longo de uma linha perpendicular à base do triângulo que passa pelo eixo; se, além disso, o diâmetro da seção for paralelo a um dos lados do triângulo que passa pelo eixo, o quadrado de qualquer reta traçada a partir da seção do cone, paralela à seção comum do plano secante e da base do cone, até o diâmetro da seção, equivale ao retângulo delimitado pela linha que ele corta no diâmetro, na lateral do topo da seção, e por uma determinada linha cuja relação com a linha localizada entre o ângulo do cone e do vértice da seção é igual ao do quadrado da base do triângulo que passa pelo eixo até o retângulo delimitado pelos dois lados restantes do triângulo. Chamaremos tal seção de parábola (p. 21).

$$KD^2 = PF \cdot PD^{36}$$



Definição da Parábola por Smith (2013)

Uma parábola é definida como o conjunto de pontos, em um plano, que estão à mesma distância de um ponto (o foco) e de uma reta (a diretriz), logo se cumpre $FD = BD$

³⁵ O desenvolvimento matemático para determinar esta expressão da parábola foi descrita na seção 3.2

³⁶ O desenvolvimento matemático para determinar esta expressão da parábola foi descrita na seção 3.2

Eixo: é a reta e que passa por F e é perpendicular a d . É fácil ver pela própria definição de parábola que essa curva é simétrica em relação ao seu eixo.

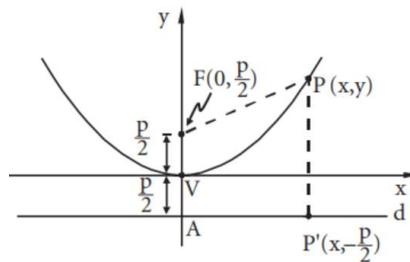
Vértice: é o ponto V de interseção da parábola com o seu eixo.

Equações reduzidas

Seja a parábola de vértice $V(0,0)$. Consideremos dois casos:

1) O eixo da parábola e o eixo dos y

Seja $P(x, y)$ um ponto qualquer da parábola de foco $F(0, \frac{p}{2})$ e diretriz de equação $y = -\frac{p}{2}$



A definição de parábola expressa pela igualdade (1) é equivalente a

$$|\overline{FP}| = |\overline{P'P}|$$

Como $P'(x, \frac{p}{2}) \in d$, vem

$$\left| (x - 0, y - \frac{p}{2}) \right| = \left| (x - x, y + \frac{p}{2}) \right|$$

Ou

$$\sqrt{(x - 0)^2 + (y - \frac{p}{2})^2} = \sqrt{(x - x)^2 + (y + \frac{p}{2})^2}$$

Elevando ambos os membros ao quadrado, obtemos

$$(x - 0)^2 + (y - \frac{p}{2})^2 = (x - x)^2 + (y + \frac{p}{2})^2$$

Ou

$$x^2 + y^2 - py + \frac{p^2}{4} = y^2 + py + \frac{p^2}{4}$$

Ou simplesmente

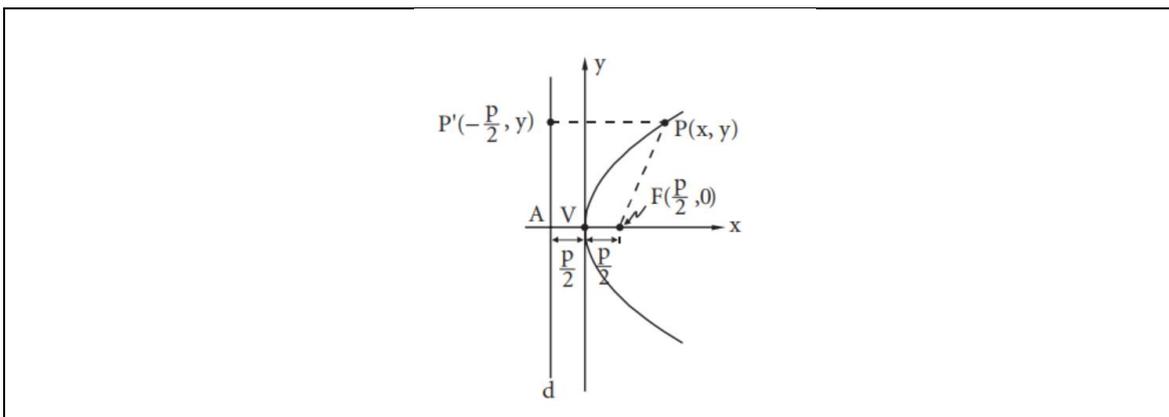
$$x^2 = 2py$$

Que é a equação reduzida para este caso.

2) O eixo da parábola é o eixo dos x

Seja $P(x, y)$ um ponto qualquer da parábola, de foco $F(\frac{p}{2}, 0)$ e diretriz $x = -\frac{p}{2}$ obteremos, de forma análoga ao caso 1, a equação reduzida

$$y^2 = 2px$$



Observando os quadros acima podemos constatar que as definições da Parábola refletem os diferentes contextos históricos em que foram formuladas, mas que possuem a mesma finalidade teórica, determinar a equação da parábola. Na época em que Menêmo e Apolônio realizaram os estudos referentes a esta curva, o desenvolvimento da matemática tinha um enfoque geométrico.

Por um lado, Menêmo baseou-se o estudo da *Orthotome* (parábola), a curva gerada pela interseção de um plano que corta perpendicularmente a geratriz de um cone que têm no vértice um ângulo reto. Ele determinou a expressão matemática que define a parábola mediante um ponto K qualquer da curva e a relação entre dois segmentos perpendiculares (KD e DF) pertencentes ao mesmo plano da curva. Assim sendo, a relação é determinada da seguinte maneira: “Dado um ponto K qualquer da curva, o quadrado de lado KD é o dobro do retângulo de lado PD PA ($KD^2 = 2PA \cdot PD$)” (Estrada et al., 2000). Usando a linguagem de hoje podemos escrever a expressão matemática como: $x^2 = 2py$.

Por outro lado, para definir a parábola Apolônio primeiro cortou o cone de duas folhas por um plano paralelo a uma das geratrizes do cone através do eixo da curva. O geômetra determinou a expressão matemática que define a seção cônica mediante um ponto K qualquer da curva, a relação entre as distancias de dois segmentos perpendiculares, estes são KD e PD , e outro segmento PF ($KD^2 = PF \cdot PD$). PF é um parametro de suma importancia que Apolônio introduz em seus estudos da parábola; ele guarda relação com os lados do cone, ou seja, $PF = \frac{BC^2}{AB \cdot AC}$. Usando a linguagem de hoje podemos escrever a expressão matemática como: $x^2 = ly$. Assim sendo, a relação matemática é determinada da seguinte maneira: “A área do quadrado de lado KD é igual à área do retângulo de lados PF e PD ”.

Tanto Menêcmo quanto Apolônio fizeram seus estudos sobre a parábola com foco na geometria espacial, considerando elementos tanto do cone quanto do plano que geram essa curva. Suas contribuições representam um embrião para a geometria analítica. Especialmente Apolônio, o geômetra, fez um estudo brilhante sobre cônicas e algumas de suas contribuições são utilizadas até hoje em dia.

SUGESTÕES PARA SALA DE AULA

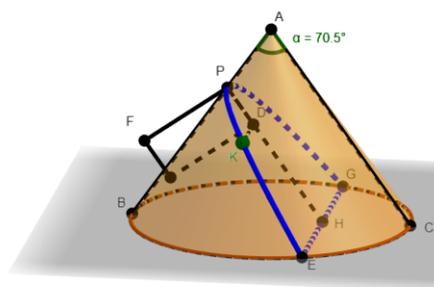
Dada a similitud nos metodos de Menêcmo quanto de Apolônio para determinar a equação reduzida da parábola, sugerimos ao professor explorar o recurso do GeoGebra chamado “Seções cônicas: Parábola”³⁷. A partir dele é possível explicar a interpretação geométrica de cada expressão matemática, facilitando a compreensão deste conceito matemático. Sugerimos ainda que o professor use o recurso e a explicação abordada no sub apartado 3.1 e 3.2 do capítulo anterior.

Definição da Parábola segundo Menêcmo

Se $\alpha = 90^\circ$ Dado um ponto K qualquer da curva,
 $KD^2 = 2PA \cdot PD$ o quadrado de lado KD é o dobro
 $KD^2 = (2,8) \cdot (1,6)$ do retângulo de lado $PA \cdot PD$
 $6 = 9$

Definição da Parábola segundo Apolônio

$KD^2 = PF \cdot PD$ Dado um ponto K qualquer da curva:
 $KD^2 = (3,7) \cdot (1,6)$ a área do quadrado de lado KD
 $6 = 6$ é igual à área do retângulo de
 lados $PF \cdot PD$

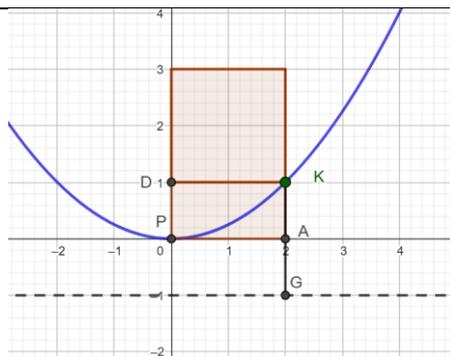


Ainda sugerimos ao professor discutir com seus estudantes a relação entre as expressões matemáticas obtidas por Menêcmo e Apolônio e a encontrada no livro didático de geometria analítica de Winterle (2014): $x^2 = 2py$ (quando o eixo da parábola e o eixo dos y) mediante o uso do GeoGebra.

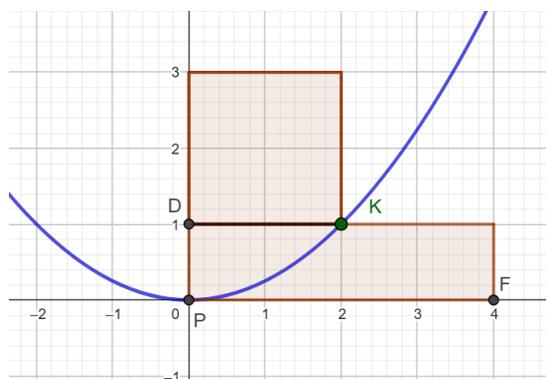
Da proposição de Apolônio surgiu a conhecida equação reduzida da parábola com vértice na origem e eixo no eixo das abscissas: $x^2 = ly$, onde “ l ” é chamado de *latus rectum* ou parâmetro, que geralmente é representado por $2p$ e às vezes por $4p$.

Assim sendo, sugerimos ao professor discutir com os estudantes o parâmetro (que pode ser l , $2p$ ou $4p$) na equação da Parábola. No caso de Menêcmo e Apolônio, o parâmetro da expressão matemática da parábola tem relação com o vértice do cone e os extremos da base do cone. Assim, para visualizar a relação matemática no plano cartesiano, ambos partiram de casos particulares, ou seja, quando a projeção ortogonal (ponto D) do ponto K da parábola sobre o eixo da curva coincide com o foco da parábola e $PD = 1$, então para Menêcmo o parâmetro p é igual a PA ($p = PA$), sendo PA a distância do vértice da curva à o vértice do cone, logo $KD = PA$. Nessas condições, se cumpre que o quadrado de lado KD é o dobro do retângulo de lado $PD \cdot PA$, ou dito de outra forma, para que a distância do ponto K ao foco (KD) seja igual à distância do ponto K à diretriz (KG) da parábola, $KG = 2PA$ deve ser cumprido.

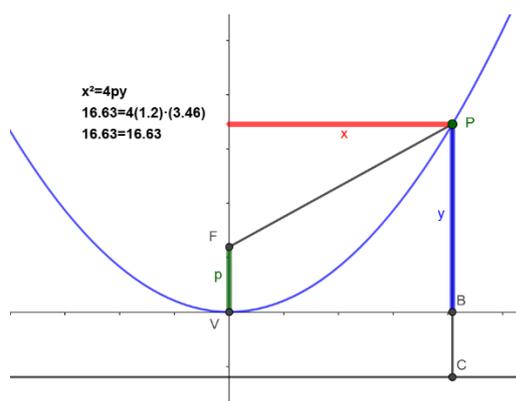
³⁷ Disponível em: <https://www.geogebra.org/classic/mwx9vv9v>



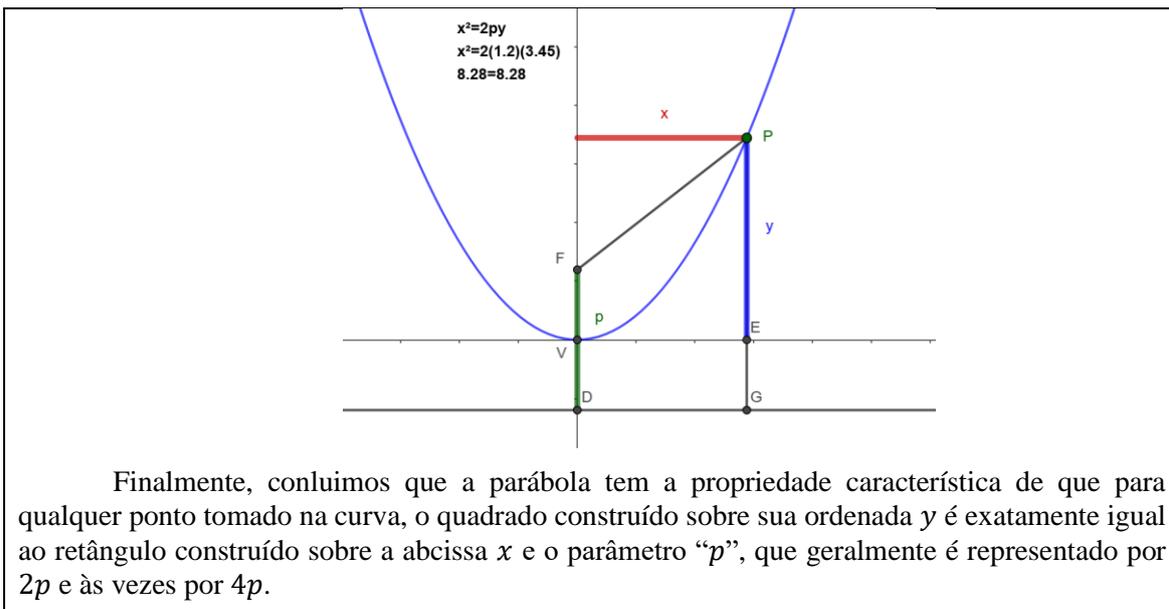
Para Apolônio, o parametro l é igual a PF ($l = PF$), é aquele parametro que o geometra em seus estudos da parábola; ele guarda relação com os lados do cone, ou seja, $PF = \frac{BC^2}{AB \cdot AC}$. Logo se $PD = 1$ se cumpre que $KD^2 = PF^2$. Nessas condições, se cumpre que: a área do quadrado de lado KD é igual à área do retângulo de lados PF e PD .



Agora, tanto Smith (2013) como Winterle (2014) definem a parábola mediante a relação do ponto da curva com o foco e a diretriz. No primeiro caso a relação matemática obtida foi: $x^2 = 4py$. Apesar de utilizar uma definição muito próxima daquela estudada nos livros didáticos, para determinar a equação da parábola, Smith utiliza elementos próprios da geometria, isso porque não baseia seu estudo nas coordenadas do ponto da curva em um plano cartesiano. Assim sendo, Smith considerou o parâmetro p como a distância do vértice ao foco da cônica ($p = FV$).



No segundo caso a relação matemática obtida foi: $x^2 = 2py$. Para determinar esta equação reduzida da cônica Winterle utiliza métodos da geometria analítica, tais como, o teorema da distância entre dois pontos e o teorema referindo-se à distância d de uma linha reta a um ponto. Em seu estudo, Winterle considerou o parâmetro p como a distância do foco da cônica a um ponto da diretriz ($p = FD$).



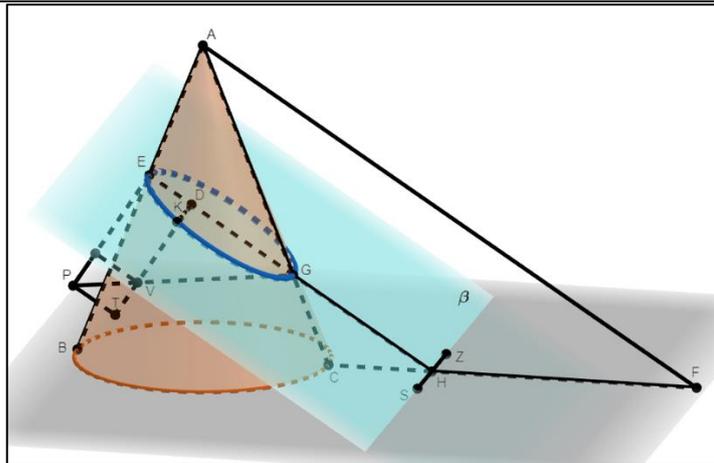
Finalmente, concluímos que a parábola tem a propriedade característica de que para qualquer ponto tomado na curva, o quadrado construído sobre sua ordenada y é exatamente igual ao retângulo construído sobre a abscissa x e o parâmetro “ p ”, que geralmente é representado por $2p$ e às vezes por $4p$.

Em seguida, no Quadro 8, são apresentadas as definições da elipse conforme Menêmo, Apolônio e Smith, com base no desenvolvimento histórico e epistemológico explorado no capítulo anterior. Adicionalmente, é incluída a definição dessa cônica no livro didático *Vectores e Geometria Analítica* de Winterle (2014), possibilitando uma análise comparativa entre as abordagens históricas e a exposição encontrada nos materiais didáticos contemporâneos.

Quadro 8. Definições da Elipse

Definição da Elipse por Menêmo
<p>Menêmo utilizou um cone reto que tem o ângulo agudo no vértice, ou seja, que é um cone <i>oxigonal</i>. Então, seja um cone circular reto apoiado sobre o plano π que possui um ângulo agudo no vértice A. O segmento BC é o diâmetro da circunferência base do cone. O ponto F está sobre a geratriz AC e por ele trace um plano α perpendicular a AC. Da interseção do cone com o plano α obtemos a curva p, a qual Menêmo chamou de <i>Oxytome</i>. Agora temos um ponto K sobre a curva p que seja diferente de F e por esse ponto incidiremos o plano β paralelo ao plano π. A interseção do cone com o plano β é a circunferência g. A interseção de g com as geratrizes AC e AB são os pontos N e M, respectivamente. Temos, então, que o segmento MN é o diâmetro de g.</p> $KD^2 = (EF - DF) \frac{BJ \cdot JC \cdot DF}{EJ \cdot JF}^{38}$

³⁸ O desenvolvimento matemático para determinar esta expressão da elipse foi descrita na seção 3.3



Definição da Elipse por Smith (2013)

“Uma Elipse é definida como o conjunto de todos os pontos do plano que atendem à condição $AP + BP = 2r$ e que estão em um único plano, onde A e B são os focos da Elipse” (Smith, 2013).

Nesse sentido, sejam A e B dois pontos arbitrários pertencentes a um plano. Escolhemos alguma distância arbitrária, maior do que a distância entre A e B . Definimos r como metade dessa distância, então a distância em si seria $2r$, daí $AP + BP = 2r$. C é o ponto médio entre A e B . Então, é do nosso interesse investigar as características da Elipse⁴², especialmente a relação entre as distâncias x e y .

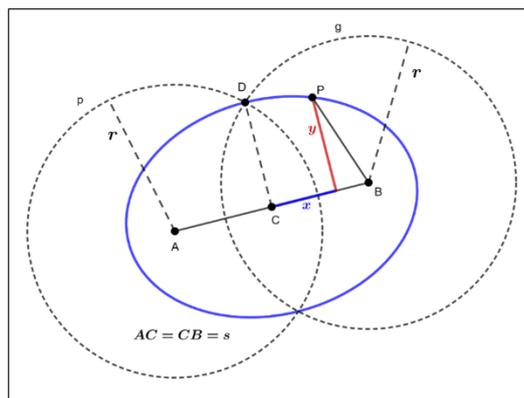
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Para chegar na expressão semelhante à equação da Elipse encontrada em livros didáticos (Lima, 2015):

$$b = r^2 - s^2 \Rightarrow b^2 = \sqrt{r^2 - s^2}$$

Logo:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

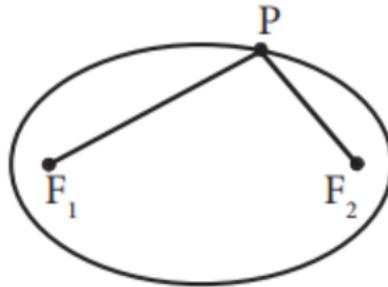


Definição da Elipse por Winterle (2014)

⁴² Toda fórmula é um registro escrito em forma de equação, da relação entre quantidades que podem ser medidas. Neste caso, as distâncias x e y

Elipse é o conjunto de todos os pontos de um plano cuja soma das distâncias a dois pontos fixos desse plano é constante. Consideremos no plano dois pontos distintos, F_1 e F_2 , tal que a distância $d(F_1, F_2) = 2c$, e um número real positivo a com $2a > 2c$. Chamando de $2a$ a constante da definição, um ponto P pertence à elipse se, e somente se:

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$$



Elementos

Focos: são os pontos F_1 e F_2 .

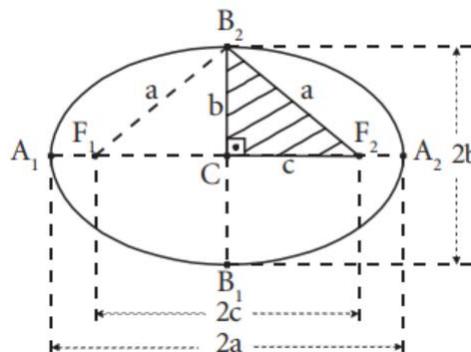
Distância focal: é a distância $2c$ entre os focos.

Centro: é o ponto médio C do segmento F_1F_2 .

Eixo maior: é o segmento A_1A_2 de comprimento $2a$ (este segmento contém os focos).

Eixo menor: é o segmento B_1B_2 de comprimento $2b$ e perpendicular a A_1A_2 no seu ponto médio.

Vértices: são os pontos A_1, A_2, B_1 e B_2 .



Pela figura, é imediato que $B_2F_2 = a$, pois $B_2F_1 + B_2F_2 = 2a$ (definição de elipse) e $B_2F_1 = B_2F_2$. Logo, do triângulo retângulo B_2CF_2 vem:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

A igualdade mostra que $b < a$ e $c < a$

Excentricidade da elipse é o número real

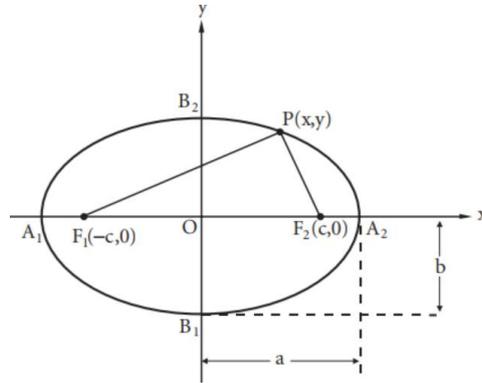
$$e = \frac{c}{a} \quad (0 < e < 1)$$

A excentricidade é responsável pela “forma” da elipse: elipses com excentricidade perto de 0 (zero) são aproximadamente circulares, enquanto elipses com excentricidade próxima de 1 são

“achatadas”. Por outro lado, fixada uma excentricidade, por exemplo, $e = \frac{1}{2}$, todas as infinitas elipses com esta excentricidade têm a mesma forma (diferem apenas pelo tamanho).

Equações reduzidas

Seja a elipse de centro $C(0,0)$, consideremos que o eixo maior está sobre o eixo dos x . Seja $P(x,y)$ um ponto qualquer de uma elipse de focos $F_1(-c, 0)$ e $F_2(c, 0)$,



pela definição tem-se que:

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a \text{ ou } |\overline{F_1P}| + |\overline{F_2P}| = 2a$$

Ou em coordenadas:

$$|(x + c, y - 0)| + |(x - c, y - 0)| = 2a$$

$$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} + \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = 2a$$

$$\sqrt{x^2 + y^2 + 2cx + c^2} = 2a - \sqrt{x^2 + y^2 - 2cx + c^2}$$

$$\left(\sqrt{x^2 + y^2 + 2cx + c^2}\right)^2 = \left(2a - \sqrt{x^2 + y^2 - 2cx + c^2}\right)^2$$

$$x^2 + y^2 + 2cx + c^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{x^2 + y^2 - 2cx + c^2} + x^2 + y^2 - 2cx + c^2$$

$$a\sqrt{x^2 + y^2 - 2cx + c^2} = a^2 - cx$$

$$a^2(x^2 + y^2 - 2cx + c^2) = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2$$

$$a^2x^2 + a^2y^2 - 2a^2cx + a^2c^2 = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2$$

$$a^2x^2 - c^2x^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2$$

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

Como por (2) tem-se que $a^2 - c^2 = b^2$, resulta

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

Dividendo ambos os membros da equação por a^2b^2 , vem

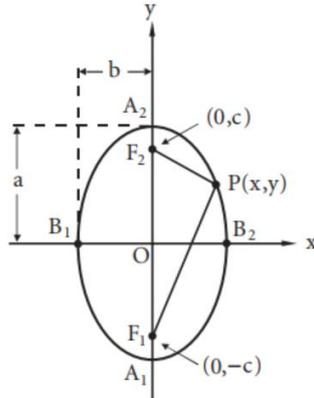
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Que é a equação reduzida para este caso

Se o eixo maior está sobre o eixo dos x

Observando a figura e com o procedimento análogo ao primer caso, obteremos a equação reduzida

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

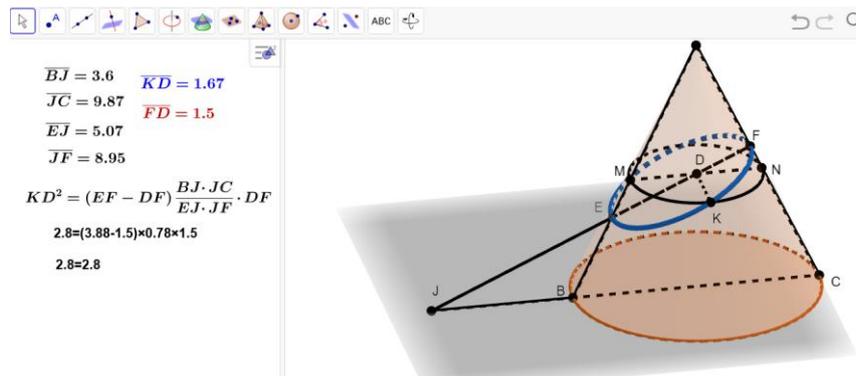


Para o caso da Elipse, Menêmo determinou a expressão matemática que define esta curva da seguinte maneira: $KD^2 = (EF - DF) \frac{BJ \cdot JC \cdot DF}{EJ \cdot JF}$. Neste caso, as relações formadas por KD , DF (ambas variáveis), EF (extremos da elipse) e uma constante que pode ser chamada de $k = \frac{BJ \cdot JC}{EJ \cdot JF}$. Assim sendo, se cumpre que: dado um ponto qualquer K da curva, o quadrado de lado KD é igual a diferença dos lados EF e DF por um k por DF .

No caso de Apolônio, para definir a elipse o geômetra primeiro cortou o cone de duas folhas por suas dois geratrizes. Apolônio chegou à expressão matemática que define a seção cônica: $KD^2 = (ED \cdot EP) - \frac{EP}{EG} \cdot ED^2$. Assim sendo, a interpretação geométrica desta expressão matemática é a seguinte: “a área do quadrado aplicado ao segmento KD é igual à área do retângulo de lado a EP e altura ED , menos algum valor, neste caso seria $\frac{EP}{EG} \cdot ED^2$ ”. Para determinar a equação da elipse, Apolônio baseou-se num parâmetro muito importante que ele introduz. Neste caso seria EP , que pode ser obtido mediante a relação $\frac{EG}{EP} = \frac{ED \cdot DG}{KD^2}$, logo, $EP = \frac{KD^2 \cdot EG}{ED \cdot DG}$.

SUGESTÕES PARA SALA DE AULA

Menêcmo utilizou elementos do cone e da curva para determinar a expressão matemática que define a elipse. Sugerimos ao professor explorar o recurso do GeoGebra chamado “Elipse segundo Menêcmo”⁴³, que permite visualizar e comprovar a equação da elipse conforme proposta por esse matemático. Essa abordagem não apenas auxilia na compreensão histórica e geométrica da elipse, mas também conecta o conceito às suas origens, promovendo um aprendizado mais significativo. Além disso, sugerimos que o professor utilize o recurso e a explicação abordada na subseção 3.3 do capítulo anterior, para enriquecer a discussão e aprofundar a relação entre os conceitos históricos e matemáticos.

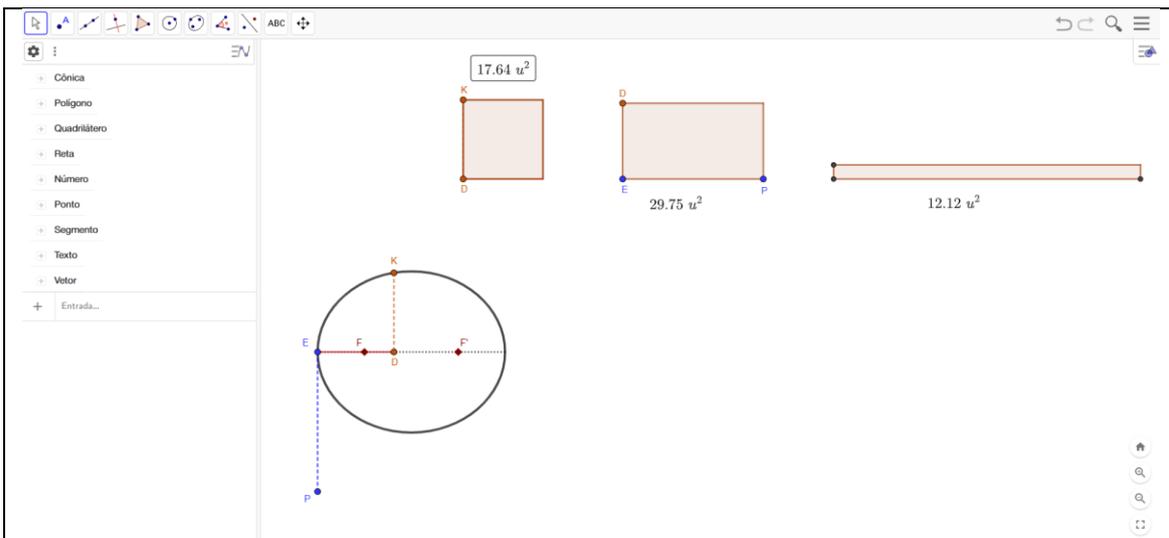


O uso do GeoGebra nessa abordagem possibilita a interação dinâmica com as figuras geométricas, permitindo ao professor e aos alunos visualizarem, manipularem e explorarem as propriedades das cônicas em tempo real. Por meio dessa ferramenta, os conceitos que tradicionalmente são apresentados de forma estática em livros didáticos ganham vida, facilitando a compreensão de tópicos como a relação entre os elementos do cone, a interseção com planos e a geração das curvas. Essa interação também contribui para a construção de um conhecimento mais visual e experimental, essencial para o entendimento de conceitos abstratos.

O recurso⁴⁴ no GeoGebra a seguir, que explora a relação entre as áreas do quadrado de KD^2 , a diferença entre as áreas dos retângulos de lados ED e EP ; e o retângulo de lados EG/EP e ED^2 , oferece um excelente ponto de partida para uma abordagem didática interativa. A seguir, apresento sugestões para o professor explorar esse recurso, bem como as potencialidades de integrar o estudo da elipse a partir do livro didático:

⁴³ Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/kkb9wqaw>

⁴⁴ Disponível em: <https://www.geogebra.org/classic/ttnfx57u>



A exploração da Relação entre Áreas com os alunos, pode iniciar pedindo que analisem como as áreas do quadrado KD e dos retângulos estão relacionadas, com base na diferença entre as áreas dos dois retângulos. Essa relação pode ser relacionada à geometria analítica, principalmente ao estudo das equações das cônicas. Através da manipulação do modelo no GeoGebra, os alunos podem perceber como as propriedades geométricas se manifestam em diferentes configurações.

Depois se sugere investigar as propriedades da Elipse, assim sendo o professor pode fazer um paralelo entre as áreas desses quadrados e retângulos e a fórmula da elipse, considerando as relações geométricas associadas à elipse. Por exemplo, pode-se discutir como a fórmula da elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ pode ser vista como uma expressão de uma área, e como a relação entre os parâmetros a e b é refletida na interação entre essas áreas.

Logo, pode ser o momento de Conjectura e Experimentação, o professor pode incentivar os alunos a fazerem conjecturas sobre as relações entre as áreas à medida que manipulam o modelo. Um exemplo de questão seria: O que acontece com as áreas dos retângulos à medida que os segmentos ED , EP e EG variam? Como isso pode nos ajudar a entender o comportamento de uma elipse em termos de suas dimensões principais?

O professor pode usar o modelo do GeoGebra para explicar e ilustrar as definições de uma elipse contidas no livro didático. O livro didático pode apresentar a elipse em termos de focos e distâncias, enquanto o GeoGebra proporciona uma forma dinâmica de visualizar como esses conceitos se aplicam a uma configuração geométrica real.

O livro didático, como o de Winterle (2014), oferece uma explicação algébrica e analítica das cônicas. Ao conectar essas explicações com a visualização gráfica proporcionada pelo GeoGebra, o professor pode ajudar os alunos a entenderem melhor como a geometria analítica e a geometria clássica (baseada em construções e relações de áreas) se complementam. O estudo das áreas dos retângulos pode ser vinculado à compreensão das equações da elipse, enriquecendo o ensino teórico com uma abordagem prática.

A relação entre áreas, como apresentada no GeoGebra, pode ser uma forma eficaz de explorar as propriedades geométricas da elipse, como a simetria, o comprimento dos eixos, e a relação entre o semi-eixo maior e o semi-eixo menor. Essas propriedades são fundamentais no estudo da elipse, e o GeoGebra oferece uma visualização prática que facilita a compreensão desses conceitos. O livro didático pode ser usado para aprofundar esses conceitos, enquanto o GeoGebra torna o estudo mais interativo.

Ao integrar o GeoGebra com as definições e propriedades apresentadas no livro didático, o professor pode estimular o pensamento crítico dos alunos. Eles podem ser desafiados a comparar

as explicações algébricas com as representações gráficas, desenvolvendo habilidades para analisar e compreender como as equações matemáticas refletem as propriedades geométricas.

Além disso, a utilização do GeoGebra promove uma metodologia ativa, onde os alunos podem assumir um papel protagonista no processo de aprendizagem. Ao explorar a elipse segundo Menêcmo, por exemplo, os estudantes podem formular hipóteses, testar diferentes configurações e verificar os resultados, consolidando assim o vínculo entre a matemática e suas aplicações práticas. Essa abordagem também favorece a inclusão de diferentes estilos de aprendizagem, atendendo tanto a alunos mais visuais quanto àqueles que preferem experimentar para aprender.

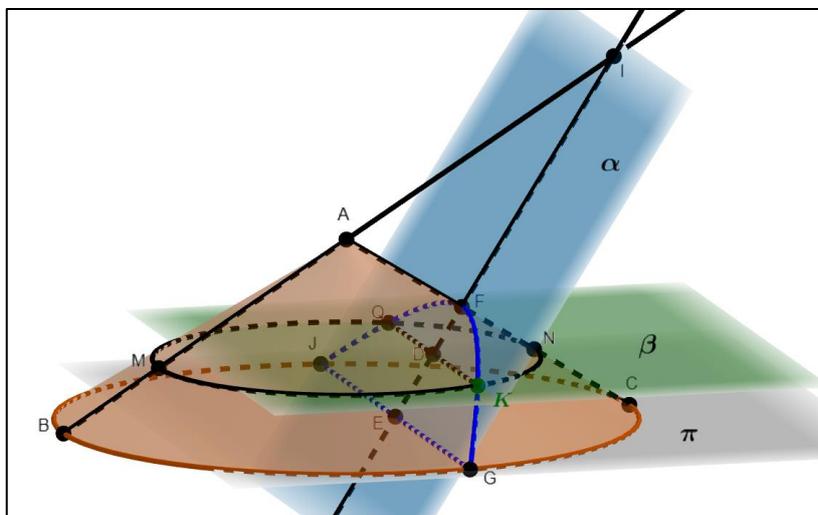
No Quadro 9, são apresentadas as definições da hipérbole segundo Menêcmo, Apolônio e Smith, fundamentadas no desenvolvimento histórico e epistemológico discutido no capítulo anterior. Complementarmente, inclui-se a definição dessa cônica no livro didático *Vectores e Geometria Analítica* de Winterle (2014), permitindo uma análise comparativa entre as interpretações históricas e a abordagem presente nos materiais didáticos modernos.

Quadro 9. Definições da Hipérbole

Definição da Hipérbole por Menêcmo

Menêcmo utilizou um cone *amblygonal*, ou seja, um cone que têm o ângulo obtuso no vértice para determinar o *symptome* da Hipérbole. Sssim, seja um cone circular reto apoiado sobre o plano π que possui um ângulo obtuso no vértice A . O segmento BC é o diâmetro da circunferência base do cone. O ponto F está sobre a geratriz AC e por ele trace um plano α perpendicular a AC . Da interseção do cone com o plano α obtemos a curva p , a qual Menêcmo chamou de *Amblytome*. Agora, temos um ponto K sobre a curva p que seja diferente de F e por esse ponto incidiremos o plano β paralelo ao plano π . A interseção do cone com o plano β é a circunferencia g . A interseção de g com as geratrizes AC e AB são os pontos N e M , respectivamente. Temos então que o segmento MN é o diâmetro de g .

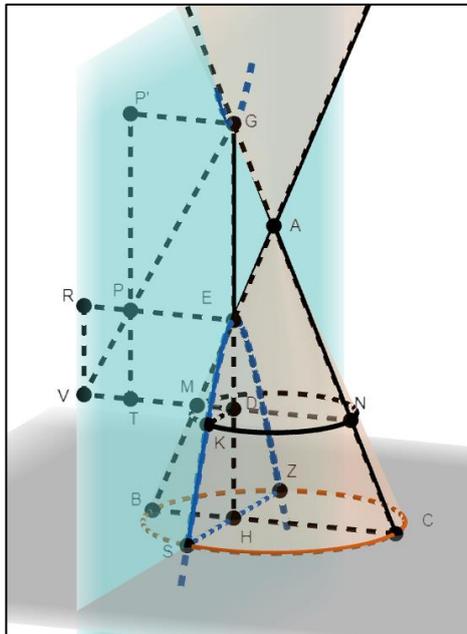
$$KD^2 = (DF + FI) \cdot \frac{EB \cdot DF \cdot EC}{EI \cdot EF}$$



Definição da Hipérbole por Apolônio

Se um cone for cortado por um plano que passa pelo eixo, e se for cortado por outro plano que corta a base do cone ao longo de uma linha perpendicular à base do triângulo que passa pelo eixo; se, além disso, o diâmetro estendido da seção encontra um dos lados do triângulo que passa pelo eixo além do vértice do cone, o quadrado de qualquer linha reta traçada a partir da seção, paralela à seção comum do plano secante e da base do cone, até o diâmetro da seção, será equivalente a uma área, aplicada ao longo de uma determinada reta, com a qual a relação da reta localizada no prolongamento do diâmetro da seção, e subtendendo o ângulo externo do triângulo, é igual à razão entre o quadrado da linha traçada do topo do cone, paralela ao diâmetro da seção, até a base do triângulo, e o retângulo delimitado sob os segmentos da base, determinado pela reta linha desenhada; área que tem como largura a linha cortada no diâmetro por esta primeira linha, ao lado do vértice da seção, e acrescida de um número que, à semelhança do retângulo delimitado pela linha que subtende o ângulo exterior do triângulo, e pelo parâmetro, é colocado de forma semelhante. Chamamos tal seção de hipérbole (p. 24-25).

$$KD^2 = ED \cdot EP + \frac{EP}{EG} \cdot ED^2$$



Definição da Hipérbole por Smith (2013)

Para todos os pontos que pertencem a uma Hipérbole, a diferença entre as distâncias que mantêm dos focos é constante, ou seja, atendem à condição $AP - BP = 2d$. A Hipérbole possui dois ramos que não se cruzam e possui dois focos. sejam A e B dois pontos arbitrários pertencentes a um plano, que representam os focos da curva. C é o ponto médio entre A e B , então podemos dizer que $AC = s$ e $CB = s$, logo $AB = 2s$. As retas e e g são às assíntotas da curva. Então, queremos encontrar a relação entre as distâncias x e y . Ou seja, uma equação que expressa a relação entre as distâncias x e y .

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Distância focal: é a distância $2c$ entre os focos.

Centro: é o ponto médio C do segmento F_1F_2

Vértices: são os pontos A_1 e A_2 .

Eixo real ou transverso: é o segmento A_1A_2 de comprimento $2a$.

Equações reduzidas

Seja a hipérbole de centro $C(0,0)$. Consideraremos dois casos:

1) O eixo real está sobre o eixo dos x

Seja $P(x, y)$ um ponto qualquer de uma hipérbole de focos $F_1(-c, 0)$ e $F_2(c, 0)$. Pela definição tem-se:

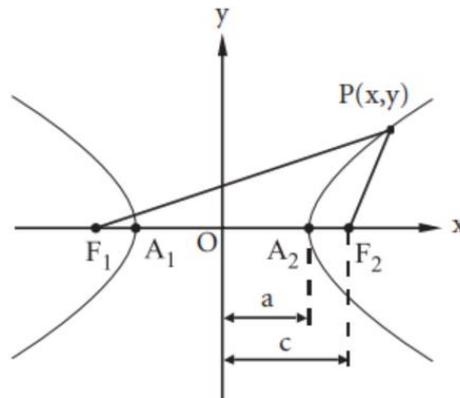
$$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a$$

Ou, em coordenadas,

$$\left| \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} - \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} \right| = 2a$$

Com o procedimento de simplificação análogo ao que foi usado na dedução da equação da elipse, e lembrado que $c^2 = a^2 + b^2$, chegamos à equação:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

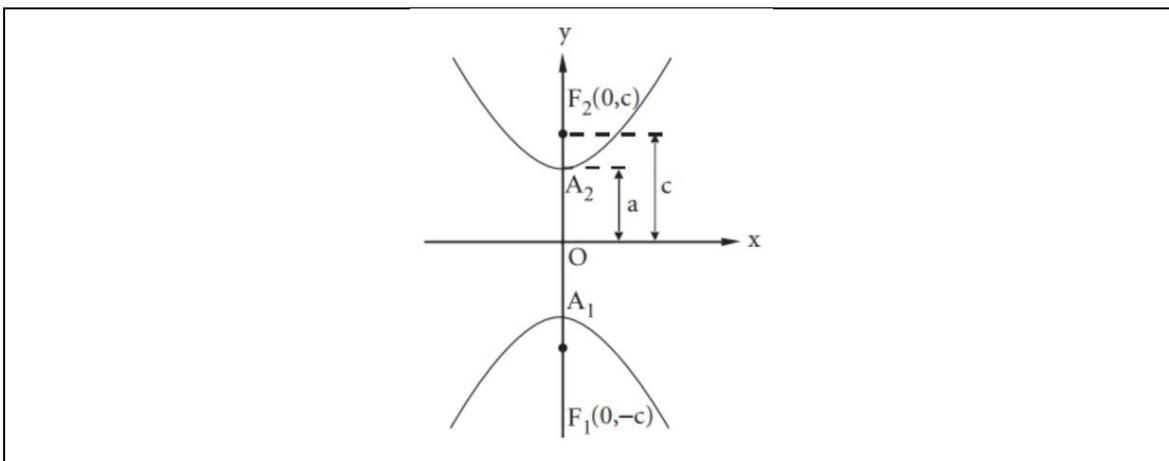


Que é a *equação reduzida* para este caso

2) O eixo real está sobre o eixo dos y

Observando a figura a seguir, com procedimento análogo ao 1º caso, obtemos a equação reduzida:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$



Menêcio utilizou um método análogo ao aplicado na determinação da elipse para obter uma expressão matemática que define a hipérbole. A equação derivada por ele é: $KD^2 = (FI + DF) \frac{EB \cdot EC \cdot DF}{EI \cdot EF}$. Nesse contexto, as relações geométricas são estabelecidas entre KD , DF (ambas variáveis), FI (extremos da hipérbole) e uma constante que pode ser representada por $k = \frac{EB \cdot EC}{EI \cdot EF}$. Com base nisso, cumpre-se que, dado um ponto qualquer K pertencente à curva, o quadrado do lado KD igual à soma dos segmentos FI e DF multiplicada pela constante k e pelo comprimento DF . Essa abordagem ressalta a importância das relações entre as áreas associadas e os segmentos gerados pela curva.

Apolônio, por sua vez, também utilizou um método semelhante ao empregado para a elipse na determinação da expressão matemática que define a hipérbole. A equação formulada por ele é: $KD^2 = (ED \cdot EP) + \frac{EP}{EG} \cdot ED^2$. A interpretação geométrica dessa expressão revela que “a área do quadrado aplicado ao segmento KD é igual à área do retângulo de base EP e altura ED , somada a um segundo termo, que é dado por $\frac{EP}{EG} \cdot ED^2$ ”. Essa formulação destaca a relação entre as áreas e os comprimentos dos segmentos envolvidos, reforçando a abordagem geométrica característica das seções cônicas.

Além disso, para determinar a equação da hipérbole, Apolônio introduziu um parâmetro fundamental, EP , que desempenha um papel central na definição da curva. Esse parâmetro pode ser calculado por meio da relação: $\frac{EP}{EG} = \frac{BF \cdot FC}{AF^2}$, o que implica que, $EP = \frac{BF \cdot FC \cdot EG}{AF^2}$. Essa introdução de parâmetros não apenas facilitou a compreensão da hipérbole no contexto de seções cônicas, mas também permitiu uma conexão direta com outras definições

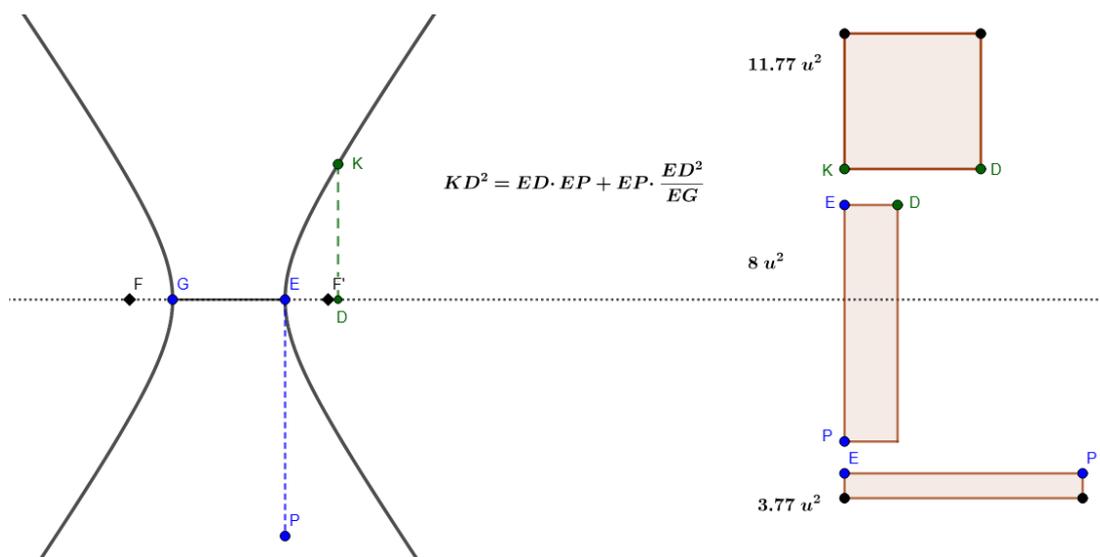
matemáticas, como a da elipse. A utilização de proporções e áreas reforça o vínculo entre os métodos geométricos e as expressões analíticas.

SUGESTÕES PARA SALA DE AULA

Menêmo utilizou elementos geométricos do cone e das curvas geradas por suas interseções para determinar a expressão matemática que define a hipérbole. Sua abordagem destaca a relação entre os segmentos envolvidos e as áreas associadas, estabelecendo fundamentos importantes para o estudo das seções cônicas.

Sugerimos que o professor explore o recurso do GeoGebra chamado "Hipérbole segundo Apolônio"⁴⁵, que permite a visualização dinâmica e a comprovação da equação da hipérbole conforme proposta por esse matemático. Esse recurso oferece uma oportunidade valiosa de conectar a geometria com as origens históricas do conceito, ajudando os estudantes a compreenderem a construção lógica e visual da hipérbole no contexto da matemática antiga.

A utilização desse recurso no ensino tem várias potencialidades. Primeiramente, possibilita aos estudantes observar, de maneira interativa, como a hipérbole emerge das interseções entre um plano e um cone. Além disso, o professor pode destacar como Apolônio utilizava proporções e relações geométricas para derivar expressões matemáticas, promovendo uma abordagem investigativa e reflexiva. Essa prática não apenas facilita a compreensão geométrica, mas também incentiva os alunos a valorizarem o papel da história na evolução do conhecimento matemático.



Adicionalmente, sugerimos que o professor complemente essa exploração com a explicação abordada na subseção 3.4 do capítulo anterior. Nesse ponto, são discutidas as conexões entre os conceitos históricos e os aspectos matemáticos formais, permitindo um aprofundamento ainda maior. Essa integração entre recursos digitais, como o GeoGebra, e o conteúdo teórico do livro didático contribui para enriquecer a discussão em sala de aula, promovendo um aprendizado mais significativo e contextualizado.

Por fim, ao explorar a hipérbole segundo Apolônio, os estudantes poderão perceber como as ideias matemáticas se desenvolveram a partir de problemas concretos e métodos geométricos. Essa perspectiva histórica, aliada ao uso de ferramentas tecnológicas, torna o aprendizado mais engajante e permite uma compreensão mais profunda das conexões entre geometria, álgebra e história da matemática.

⁴⁵ Disponível em: <https://www.geogebra.org/classic/dr9aph7p>

Ao longo deste capítulo, explorou-se as cônicas – parábola, elipse e hipérbole – sob uma perspectiva histórica, epistemológica e escolar, destacando as contribuições de matemáticos como Menêmo e Apolônio e a correlação dos conceitos das cônicas nos livros didáticos. As definições e métodos propostos por Menêmo e Apolônio revelaram o papel central das cônicas na história da matemática, não apenas como objetos geométricos, mas também como ferramentas fundamentais para o desenvolvimento de conceitos algébricos e analíticos.

Nesse contexto, a integração de recursos tecnológicos, como o GeoGebra, pode potencializar ainda mais o ensino das cônicas, pois permite uma exploração dinâmica e interativa das relações geométricas supracitadas. Os recursos apresentados nas sugestões da aula tornam acessíveis conceitos abstratos e promoveram a visualização de propriedades e equações de maneira mais clara e envolvente. Além disso, o GeoGebra pode possibilitar nos estudantes investigarem, manipularem e comprovarem relações matemáticas, favorecendo um aprendizado ativo e colaborativo. Essa abordagem também incentiva a conexão entre a teoria matemática e sua representação gráfica, fortalecendo habilidades analíticas e visuais.

No entanto, desafios podem surgir para o professor de matemática ao implementar essas abordagens. A utilização da História da Matemática exige planejamento cuidadoso, não apenas para integrar os conteúdos históricos ao currículo, mas também para adaptar a linguagem e os exemplos ao nível de compreensão dos estudantes. Além disso, o uso de ferramentas tecnológicas como o GeoGebra pode demandar que o professor tenha domínio técnico sobre o software e capacidade de propor atividades que articulassem de forma significativa o recurso com os objetivos pedagógicos.

Outro desafio é superar uma visão tradicional do ensino, frequentemente limitada à aplicação de fórmulas e procedimentos. Para incorporar a história e a tecnologia de maneira eficaz, consideramos que se deve fomentar um ambiente em que a matemática fosse vista como um campo vivo e em constante evolução, e não apenas como um conjunto de regras prontas. Isso demanda uma formação contínua, reflexão sobre práticas pedagógicas e a busca por estratégias que equilibrassem rigor conceitual e didático.

Em síntese, o estudo das cônicas, ancorado em uma perspectiva histórica e apoiado por recursos tecnológicos, como o GeoGebra, pode oferecer ao professor de matemática um leque rico de possibilidades para inovar e aprofundar o ensino. Apesar dos desafios, essa

abordagem consideramos que pode contribuir significativamente para o engajamento dos estudantes, para a valorização da história da matemática como componente essencial do aprendizado e para a construção de uma compreensão mais ampla e significativa das cônicas.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

As considerações finais deste trabalho têm como objetivo sintetizar e refletir sobre o percurso investigativo percorrido ao longo da pesquisa, destacando os principais achados, contribuições e limitações; e apontar caminhos e possibilidades para estudos futuros. Este capítulo representa um marco conclusivo, consolidando os esforços realizados na interseção entre História da Matemática, Tecnologias Digitais e ensino de matemática. Ao longo da jornada investigativa, buscamos explorar o modo como esses elementos, interligados, podem contribuir para uma educação matemática mais rica, crítica e contextualizada, capaz de atender às demandas pedagógicas contemporâneas e promover transformações significativas nas práticas docentes.

No entanto, as considerações finais não se limitam a uma síntese descritiva. Elas também assumem um caráter reflexivo, analisando as implicações práticas e teóricas dos resultados obtidos e reafirmando a relevância do estudo tanto para a formação inicial de professores quanto para o desenvolvimento de estratégias inovadoras no ensino da matemática. Por meio desse encerramento, buscamos valorizar os caminhos percorridos, evidenciar os aprendizados alcançados e lançar luz sobre possibilidades que podem ampliar os horizontes dessa área de pesquisa.

Desde o preâmbulo deste trabalho, foram apresentados os fundamentos que justificaram a escolha do tema e os caminhos metodológicos trilhados para a sua abordagem. A síntese inicial da trajetória acadêmica da autora desta tese e das motivações para a pesquisa revelou não apenas a relevância da temática, mas também o compromisso com uma investigação que pudesse dialogar com diferentes perspectivas teóricas e práticas no campo do ensino da matemática. Nesse sentido, o trabalho estrutura-se de forma a proporcionar uma visão integrada dos múltiplos elementos que compõem sua essência, garantindo coerência e profundidade na análise.

O Capítulo 1 foi dedicado à construção de uma base teórica sólida, com a realização de uma ampla revisão de literatura que englobou tanto fontes internacionais quanto nacionais. A análise de produções acadêmico-científicas provenientes dos Anais do HTEM e do SNHM evidenciou tendências significativas e lacunas ainda existentes no campo. Adicionalmente, o levantamento de teses e dissertações disponíveis no CREPHIMat

reforçou a importância de estudos mais aprofundados sobre a relação entre História da Matemática e o ensino dessa disciplina. Esse levantamento permitiu não apenas compreender as bases do tema investigado, mas também identificar potenciais contribuições que podem subsidiar práticas pedagógicas mais eficazes.

No Capítulo 2, o foco da pesquisa foi direcionado para a interseção entre História da Matemática e Tecnologias Digitais no ensino, com ênfase no uso do GeoGebra como ferramenta de apoio pedagógico. A abordagem fundamentou-se em bases epistemológicas que reconhecem a história como um acionador cognitivo, capaz de estimular o pensamento crítico e criativo dos estudantes. O uso do GeoGebra, em particular, foi explorado como um ambiente dinâmico que facilita a interação entre os conceitos históricos e a prática matemática contemporânea. Esse capítulo evidenciou o potencial de aliar história e tecnologia para enriquecer o processo de ensino e aprendizagem, propondo caminhos para integrar essas dimensões em contextos escolares e universitários.

O Capítulo 3 apresentou uma investigação detalhada sobre as origens das cônicas, abordando a evolução de conceitos desde Menêmo até Apolônio. Ao explorar as noções de Orthotome, Oxytome e Amblytome, a pesquisa revelou o modo como o estudo dessas curvas foi sendo gradualmente sofisticado, passando de uma abordagem geométrica inicial para uma compreensão algébrica mais avançada. A análise histórica e epistemológica destacou a importância de compreender essas evoluções como um recurso pedagógico valioso, que pode contribuir para uma maior contextualização dos conteúdos abordados na geometria analítica. Esse aprofundamento busca ir além do ensino tradicional, promovendo uma visão mais ampla e integrada das cônicas.

No Capítulo 4, o trabalho culminou em uma proposta didática que visa conectar as noções históricas das cônicas ao ensino de geometria analítica, oferecendo estratégias para desenvolver processos de aprendizagem mais significativos. A proposta incluiu a análise de conceitos, propriedades e equações relacionadas às cônicas; e explorou métodos de resolução que dialogam com as unidades temáticas dos livros de geometria analítica. Ao alinhar história e ensino, o capítulo destacou a viabilidade de práticas pedagógicas inovadoras, capazes de ressignificar o aprendizado desses conteúdos no Ensino Superior, promovendo maior engajamento e compreensão por parte dos estudantes.

Os resultados alcançados nesta pesquisa demonstraram o potencial transformador da articulação entre História da Matemática, Tecnologias Digitais e ensino. Entretanto, é

importante reconhecer que o estudo possui limitações, sobretudo no que diz respeito à amplitude do escopo e à possibilidade de generalização dos resultados. Essas limitações, contudo, abrem espaço para novas investigações que possam aprofundar os temas aqui explorados e ampliar o alcance de suas contribuições.

Concluimos que o diálogo entre História da Matemática, Tecnologias Digitais e ensino é essencial para promover práticas pedagógicas mais integradoras e reflexivas, capazes de enriquecer o ensino da matemática e atender às demandas de uma educação contemporânea. Essa articulação valoriza a história como uma dimensão indispensável do saber matemático, ao mesmo tempo que inspira abordagens criativas e contextualizadas que transformam o aprendizado em uma experiência mais significativa e relevante.

BIBLIOGRAFIA REFERENCIADA

AGUILAR, M. (2012). Aprendizaje y Tecnologías de Información y Comunicación: Hacia nuevos escenarios educativos. **Revista Latinoamericana de Ciencias Sociales, Niñez y Juventud**, 10 (2), pp. 801-811.

AGUILAR, Mario Sánchez; ZAVALA, Juan Molina. (2015). The difference as an analysis tool of the change of geometric magnitudes: the case of the circle. In: Seventh European Summer University on the History and Epistemology in Mathematics Education, Anais [...], Copenhagen: Denmark, 2015

ALVES, Francisco Regis. **Discussão dos Métodos Arábicos para a Resolução da Cúbica com suporte computacional**. Trabalho apresentado no IX Seminário Nacional de História da Matemática, Aracaju, Brasil 2011.

ALVES, Francisco Regis; BRASILEIRO, Rui Eduardo. **História e Tecnologia no Ensino: sobre o Teorema Fundamental da Álgebra – TFA**. Trabalho apresentado no XI Seminário Nacional de História da Matemática, Natal, Brasil 2015.

ALVES, Verusca. **Um estudo sobre os conhecimentos matemáticos mobilizados no manuseio do instrumento círculos de proporção de William Oughtred**. 153f. 2019. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática). Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará. 2019.

ANDRADE, Luciana Vieira. **História da matemática e tecnologias da informação e da comunicação no ensino de função**. 251f. 2017. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Naturais e Matemática). Universidade Federal do Rio Grande do Norte. 2017.

BORBA, M. C.; PENTEADO, M. G. **Informática e Educação Matemática**. 3.ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2007.

BORBA, M. C.; SCUCUGLIA, R.; GADANIDIS, G. **Fases das Tecnologias Digitais: sala de aula e internet em movimento**. 1. ed. 1. reimp. Belo Horizonte: Autêntica, 2015.

BORBA, M. C.; SOUTO, D. L. P.; CANEDO JUNIOR, N. R. **Vídeos na Educação Matemática: Paulo Freire e a quinta fase das tecnologias digitais**. Belo Horizonte: Autêntica, 2022.

BORBA, Marcelo.; VILLARREAL, Monica. **Humans-With-Media and the Reorganization of Mathematical Thinking: information and communication technologies, modeling, experimentation and visualization**. New York: Springer, v. 9, 2005.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 1974.

BRASILEIRO, Rui Eduardo; ALVES, Francisco Regis. **Redescobrimos Ceva e Menelaus em dimensão três**. Trabalho apresentado no XI Seminário Nacional de História da Matemática, Natal, Brasil 2015.

BRUGNERA, Elisângela Dias. **O uso da história da matemática e do GeoGebra para o ensino e aprendizado da geometria analítica com ênfase no estudo de retas**. Tese

(Doutora em Educação em Ciências e Matemática). Universidade Federal de Mato Grosso. 2018.

CAGLAYAN, Gunhan. Exploring the lunes of Hippocrates in a dynamic geometry environment, *BSHM Bulletin: Journal of the British Society for the History of Mathematics*, v. 31, n.2, p. 144-153, 2016. DOI: 10.1080/17498430.2015.1122301

CASTILLO, Luis Andrés.; Sánchez, Ivonne. C.; Mendes, Iran Abreu. Relações entre Tecnologias e História nos Anais do Seminário Nacional de História da Matemática. **Revista Prática Docente**, v. 8, n. 2, p. 1-15, 2023. DOI: 10.23926/RPD.2023.v8.n2.e23040.id667.

CASTILLO, Luis Andrés; SÁNCHEZ, Ivonne C.; MENDES, Iran Abreu. Descrição comentada das pesquisas sobre História da Matemática e Tecnologias no Ensino de Matemática nos Anais do HTEM . **Revista de Educação Matemática**, v. 20, n. 01, p. e023100, 2023. DOI: 10.37001/remat25269062v20id478.

CASTILLO, Luis Andrés; Mendes, Iran Abreu. El uso del ambiente virtual CREPHIMat para promover la historia en la enseñanza de la Matemática. **PARADIGMA**, v. 41, n. 2, p. 88–115, 2020. DOI: 10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2020.p88-115.id833. Disponível em: <http://revistaparadigma.online/ojs/index.php/paradigma/article/view/833>.

CASTILLO, Luis Andrés; Mendes, Iran Abreu. O CREPHIMat como um ambiente virtual sobre as pesquisas em história da Matemática. **REMATEC**, n. 32, p. 163–176, 2019. DOI: 10.37084/REMATEC.1980-3141.2019.n32.p163-176.id210. Disponível em: <http://www.rematec.net.br/index.php/rematec/article/view/210>.

DIKOVIC, L. **Applications GeoGebra into teaching some topics of mathematics at the college level**. *Computer Science and Information Systems*, v. 6, n. 2, p. 191-203, 2009.

DRIJVERS, Paul. Empirical Evidence for Benefit? Reviewing Quantitative Research on the Use of Digital Tools in Mathematics Education. *In: ICME-13 Monographs*. p. 161–175, 2018 DOI: 10.1007/978-3-319-76575-4_9. Disponível em: http://link.springer.com/10.1007/978-3-319-76575-4_9.

DUVAL, R.. Representation, vision and visualization: Cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning. In **Proceedings of the twentyfirst annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education**, pages 3 — 26. 1999

EECKE, Paul Ver. **Les coniques d'apollonius de perge**. 1963.

ESTRADA, Maria; SÁ, Carlos; QUEIRÓ, João; COSTA, Maria. **História da Matemática**. Universidade Aberta, 2000.

FERREIRA, Luciano. **Uma proposta de ensino de geometria hiperbólica: “construção do plano de poincaré” com o uso do software GeoGebra**. 291f. 2011. Dissertação (Mestrado em Educação para a Ciência e a Matemática). Universidade Estadual de Maringá. 2011.

GADANIDIS, George; DE CARVALHO BORBA, Marcelo; DA SILVA, Ricardo Scucuglia Rodrigues. **Fases das tecnologias digitais em Educação Matemática: sala de aula e internet em movimento**. Autêntica, 2016.

GIL, Antonio Carlos. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 4. ed. São Paulo: Atlas, 2008.

GIL, Rita Sidmar. **Formação de professores de matemática: conexões didáticas entre matemática, história e arquitetura**. 282f. 2013. Tese (Doutora em Educação). Universidade Federal do Rio Grande do Norte. 2013.

GOMES, Anna; DE SOUSA, Giselle Costa. Apontamentos de temas geométricos para Atividades-Históricas-com-Tecnologias. **Boletim Cearense de Educação e História da Matemática**. v. 8, n. 22, p. 117-130, 2021.

GOULART, Thais Maria Barbosa. **Os “Elementos” de Euclides visitam o ensino fundamental: análise de tarefas matemáticas pautadas na história da matemática e desenvolvidas no software GeoGebra**. 198 f. 2020. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) – Instituto de Ciências Exatas e Biológicas, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2020.

HOHENWARTER, M. Multiple representations and GeoGebra-based learning environments. **Revista Iberoamericana de Educación Matemática (Unión)**. N. 39, p.11-18, 2014.

HOHENWARTER, M.; FUCHS, K. Combination of dynamic geometry, algebra and calculus in the software system GeoGebra. En C. Sárvári (Ed.), **Proceedings of Computer Algebra Systems and Dynamic Geometry Systems in Mathematics Teaching Conference**. Pecs, Hungria: Universidad de Pecs, 2004.

HOHENWARTER, Markus. **GeoGebra Um sistema de software para dinâmica Geometria e álgebra do plano**. Dissertação, Faculdade de Ciências Naturais da Universidade Paris Lodron de Salzburgo, Salzburgo, p. 236f, 2002.

IEZZI, Gelson. **Fundamentos de matemática elementar, 7: Geometria Analítica**. 6. ed. São Paulo: Atual, 2013.

JACYNTHO, Luiz Antônio; CARVALHO, Luiz Mariano. **Atividades no GeoGebra sobre demonstrações de Arquimedes e Barrow**. Trabalho apresentado no IV Colóquio de História e Tecnologia no Ensino de Matemática, Rio de Janeiro, Brasil 2008.

JANKVIST, Uffe Thomas; GERANIOU, Eirini. “Whiteboxing” the Content of a Formal Mathematical Text in a Dynamic Geometry Environment. **Digital Experiences in Mathematics Education**, v. 7, p. 222-246, 2021. <https://doi.org/10.1007/s40751-021-00088-6>

KIDRON, Ivy. Polynomial approximation of functions: Historical perspective and new tools. **International Journal of Computers for Mathematical Learning**. v. 3, n. 8, p. 299-331, 2003

LABORDE, C. (1997). **Cabri Géométra o una nueva relación con la geometría**. En L. Puig (Eds.), Investigar y enseñar. Variedades de la educación matemática (pp. 33-48), Madrid: Una empresa docente.

- LIMA, Elon. **Geometria analítica e álgebra linear**. 2 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2015.
- LOPES, Juracélio. **Cônicas e Aplicações**. Dissertação. Universidade Estadual Paulista. Rio Claro, 170f. 2011.
- LOSADA-LISTE, R. **GeoGebra: la eficiencia de la intuición**. La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española, v. 10, n. 1, p, 223-239, 2007.
- MEADOWS, M.; CANIGLIA J. That was then... This is now: Utilizing the history of mathematics and dynamic geometry software. **International Journal of Education in Mathematics, Science, and Technology (IJEMST)**, v. 9, n. 2, p. 198-212, 2021
<https://doi.org/10.46328/ijemst.110>
- MENDES, Iran Abreu. A investigação Histórica como Agente de Cognição Matemática na sala de aula. *In*: Mendes, Iran Abreu; FOSSA, John; NÁPOLES VALDÉS, Juan E. (org.). **A História como um Agente de Cognição na Educação Matemática**. Porto Alegre: Editora Sulina, 2006. p. 79–136.
- MENDES, Iran Abreu. **História da matemática no ensino: Entre trajetórias profissionais, epistemológicas e pesquisas**. São Paulo: Livraria da Física/SBHMat, 2015.
- MENDES, Iran Abreu. **História da matemática no ensino: Entre trajetórias profissionais, epistemológicas e pesquisas**. São Paulo: Livraria da Física/SBHMat, 2015.
- MENDES, Iran Abreu. **Investigação Histórica no Ensino da Matemática**. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, 2009.
- MENDES, Iran Abreu. **Usos da história no ensino de Matemática: reflexões e experiências**. 3. ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2022.
- MOD, Luiz Felipe. **O objeto matemático triângulo em teoremas de Regiomontanus: um estudo de suas demonstrações mediado pelo GeoGebra**. 105f. 2016. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. 2016.
- NEVES, Ranúzy Borges. **Uma introdução ao estudo das funções trigonométricas com recursos artísticos e seminários sobre a história da matemática no 2º ano do ensino médio**. 153f. 2019. Dissertação (Mestre em Ensino de Ciências Exatas). Universidade Federal de São Carlos. 2019.
- OLIVEIRA, José Damião. **Geometria do compasso (1797) de Mascheroni (1750-1800) em atividades com o GeoGebra**. 222f. 2014. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Naturais e Matemática). Universidade Federal do Rio Grande do Norte. 2014.
- PEREIRA, Giancarlo; GOMES, Cristiane Ruiz. **Teorema de Carnot uma validação com geometria dinâmica**. Trabalho apresentado no XIII Seminário Nacional de História da Matemática, Ceará, Brasil 2019.
- PRATA FILHO, Gilson Abdala. **Teorema de Pitágoras a partir da história da matemática: análises epistemológicas de atividades em turmas do 9º ano da rede pública**. 140f. 2018. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática). Instituto Federal do Espírito Santo. 2018.

PREINER, Judith. **Introducing Dynamic Mathematics Software to Mathematics Teachers: the Case of GeoGebra**. Dissertação, Faculdade de Ciências Naturais da Universidade Paris Lodron de Salzburgo, Salzburgo, 265f, 2008

PRIETO, Juan Luis. GeoGebra en diferentes escenarios de actuación. **Revista Electrónica Conocimiento Libre y Licenciamiento (CLIC)**, v. 7, n. 14, p. 9-23, 2016.

RADFORD, Luis. De la teoría de la objetivación. **Revista Latinoamericana de Etnomatemática**, v. 7, n. 2, p. 132-150, 2014.

RAMÍREZ-GALARZA, Ana. **Geometría Analítica Una introducción a la geometría**. 1ª edición electrónica. UNAM, 2011.

ROJANO, Teresa. El futuro de las tecnologías digitales en la educación Matemática : prospectiva a 30 años de investigación intensiva en el campo. **Educación Matemática, [S. l.]**, v. Especial, n. 25 años, p. 11–30, 2014. DOI: 10.24844/EM. Disponível em: <http://www.revista-educacion-matematica.org.mx/descargas/Esp-1-1.pdf>.

SÁNCHEZ, Ivonne C.; BRANDEMBERG, João Cláudio. **História da matemática com tecnologias digitais: uma aliança possível para o ensino do teorema de Pitágoras**. Trabalho apresentado no XIII Seminário Nacional de História da Matemática, Ceará, Brasil 2019.

SÁNCHEZ, Ivonne C.; BRANDEMBERG, João Cláudio; CASTILLO, Luis Andrés. La objetivación de la noción de sector circular en el trabajo matemático con GeoGebra. **Revista Paradigma** (Extra 2), v.XLI, p. 448 – 475, 2020.

SÁNCHEZ, Ivonne C.; PRIETO, Juan Luis. El aprendizaje geométrico en la elaboración de simuladores con GeoGebra. El caso de elwin. **Acta Latinoamericana de Matemática Educativa**. v. 32, n. 2, p. 27-36, 2019.

SÁNCHEZ, Ivonne. C. **Aprendizagem geométrica em torno das ideias presentes na simulação de um motor a dois tempos no GeoGebra: um estudo de caso**. Dissertação, Programa de Pós-graduação em Educação em Ciências e Matemáticas - Instituto de Educação Matemática e Científica, Universidade Federal do Pará, Belém, p. 84f, 2020.

SÁNCHEZ, Ivonne. C., PRIETO, Juan Luis. GeoGebra como una herramienta de experimentación con la Matemática en un contexto de simulación. Trabalho apresentado nas **II Jornadas de Investigación Estudiantil de la Facultad de Humanidades y Educación**. Abril, Maracaibo, p. 57-64. 2016.

SÁNCHEZ, Ivonne C.; CASTILLO, Luis Andrés; LOPES, Thiago Beirigo. Revisão e análise bibliométrica sobre o GeoGebra em pesquisas e ensino da matemática. **Revista Areté | Revista Amazônica de Ensino de Ciências**, Manaus, v. 19, n. 33, p. e23002, 2023. <https://doi.org/10.59666/Arete.1984-7505.v19.n33.3728>

SÁNCHEZ, Ivonne. C.; CASTILLO, Luis Andrés.; MENDES, Iran Abreu. Historia de las matemáticas y tecnologías digitales: ¿qué tratan tres décadas de tesis y disertaciones? **PARADIGMA**. 2021.

SÁNCHEZ, Ivonne. C.; PRIETO, Juan Luis. Procesos de objetivación alrededor de las

ideas geométricas en la elaboración de simuladores con GeoGebra. **PNA** v. 14, n. 1, p. 55-83. 2019.

SÁNCHEZ, Ivonne. C.; SÁNCHEZ-NOROÑO, Irene. Elaboración de un simulador con GeoGebra para la enseñanza de la física. El caso de la ley de coulomb. Trabalho apresentado em **II Encuentro de Clubes GeoGebra del Estado Zulia**. Junio, Venezuela, p. 209-2023, 2016.

SÁNCHEZ-NOROÑO, Irene; Sánchez, Ivonne C.; GUTIÉRREZ, Rafael.; DÍAZ-URDANETA, Stephanie.; Prieto, Juan Luis.; CASTILLO, Luis Andrés. (2020). Proyecto club GeoGebra una respuesta a la necesidad de constitución como actores de la educación matemática. **Pesquisas e Práticas Educativas**, v. 1, p. 1-23, 2020.
<https://doi.org/10.47321/PePE.2675-5149.2020.1.e202019>.

SEVERINO, Antônio Joaquim. **Metodologia do trabalho científico** [livro eletrônico]. 1. ed. São Paulo: Cortez, 2013.

SILVA FILHO, Luiz da. **Cônicas: apreciando uma obra-prima da matemática**. Dissertação. Universidade Federal do Ceara. 143f.2015.

SILVA, Alison Luan da. **História da matemática, tecnologias digitais e investigação matemática no ensino de unidades temáticas de matemática da BNCC para o 8º ano**. 247f. 2019. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Naturais e Matemática). Universidade Federal do Rio Grande do Norte. 2019.

SILVA, Maria Deusa Ferreira da. **Os métodos para calcular áreas e volumes de Eudoxo e Arquimedes: um olhar sob a perspectiva histórica fazendo o uso das novas tecnologias**. Trabalho apresentado no VI Colóquio de História e Tecnologia no Ensino de Matemática, São Carlos, Brasil 2013.

SOUSA, Giselle Costa de. Experiências com GeoGebra e seu papel na aliança entre HM, TDIC e IM. **Revista de Matemática, Ensino e Cultura**. vol. 16, no 37, p. 140-159, 2021.

SOUSA, Giselle Costa de. **Aliança entre história da matemática e tecnologias digitais na educação matemática**. São Paulo: Livraria da Física, 2023.

SOUSA, Giselle Costa de. Uso da história da matemática e tecnologias de informação e da comunicação: alianças possíveis e potenciais para o ensino de matemática. Trabalho apresentado em XII Encontro Nacional de Educação Matemática. Junho, São Paulo, p. 1-13, 2016.

THOMSEN, M. Working with Euclid's geometry in GeoGebra – experiencing embedded discourses. Bringing Nordic Mathematics Education into the Future: Proceedings of NORMA 20, The Ninth Nordic Conference on Mathematics Education, 2021, 257–265.

URBANEJA, Pedro Miguel. **El dominio de las secciones cónicas Apolonio**. RBA, 2017.

WALDOMIRO, Tatiana. **Abordagem histórico – epistemológico do ensino da geometria fazendo uso da geometria dinâmica**. 90f. 2011. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Universidade de São Paulo. 2011.

WINTERLE, Paulo. STEINBRUCH, Alfredo. **Geometria Analítica**. Makron Books, São Paulo, 2000.

WINTERLE, Paulo. **Vetores e Geometria Analítica**. 2. ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2014.

ZENGİN, Yılmaz. (2018). Incorporating the dynamic mathematics software GeoGebra into a history of mathematics course. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, v. 49, n. 7, p.1083–1098, <https://doi.org/10.1080/0020739X.2018.1431850>

ZEYNIVANDNEZHAD, Fereshteh; MOUSAVI, Amin; KOTABE, Hiroki. The Mediating Effect of Study Approaches between Perceptions of Mathematics and Experiences Using Digital Technologies. *Computers in the Schools*, v. 37, n. 3, p. 168–195, 2020. DOI: 10.1080/07380569.2020.1793050. Disponível em: <https://www.tandfonline.com/doi/full/10.1080/07380569.2020.1793050>

Bibliografia Consultada

BARBOSA, Bruna; SILVA, Clediane; BRANT, Felipe; SAPUNARU, Raquel. **A Geometria de René Descartes**. Tradução, introdução e comentários. 2a edição. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2017.

DESCARTES, René. **Discurso do método & Ensaios**. Editora Unesp, 2020.

BERNARDO, Emiliano. **Curso breve de geometria analítica**. Tradução, segunda edición. Editorial MIR, Moscu, 1969.

LEHMANN, Charles H. **Geometría Analítica**. México: Limusa, 2012.

BOULOS, Paulo; CAMARGO, Ivan. **Geometria analítica: um tratamento vetorial**. 3a edição. Editora Pearson Education, 2005.

CARPINTEYRO, Eduardo. **Geometría analítica**. Grupo editoria PATRIA, México, 2016.

LINTZ, Rubens G. *História da Matemática*. Vol 1. Editora FUURB, Blumenau, 1999.

LIMA, Elon. **Geometria Analítica e Álgebra linear**. 2.ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2015.

RIDDLE, Douglas. **Analytic Geometry**. 6.ed. PWS Publishing Company, Boston, 1996.

VITTAL, P. R. *Analytical Geometry 2D and 3D*. PEARSON, Delhi, 2013