



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ**  
**INSTITUTO DE TECNOLOGIA**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA -**  
**PPGEE**

**PROJETO DE CONTROLE ROBUSTO DE ORDEM FRACIONÁRIA**  
**PARA SISTEMAS COM INCERTEZA PARAMÉTRICA.**

**MARCUS CIRO MARTINS GOMES**

**TD: 18/2024**

**BELÉM - PA**

**2024**

MARCUS CIRO MARTINS GOMES

PROJETO DE CONTROLE ROBUSTO DE ORDEM FRACIONÁRIA PARA  
SISTEMAS COM INCERTEZA PARAMÉTRICA.

Tese de doutorado submetida à Banca Examinadora do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica (PPGEE) da Universidade Federal do Pará (UFPA) para obtenção do Grau de Doutor em Engenharia Elétrica na área de Sistemas de Energia: Controle de sistemas.

Orientador: Prof. Dr. Carlos Tavares da Costa Júnior

Coorientador: Prof. Dr. Florindo Antônio de Carvalho Ayres Júnior

TD: 18/2024

BELÉM - PA

2024

**“PROJETO DE CONTROLE ROBUSTO DE ORDEM FRACIONÁRIA PARA  
SISTEMAS COM INCERTEZA PARAMÉTRICA”**

**AUTOR: MARCUS CIRO MARTINS GOMES**

TESE DE DOUTORADO SUBMETIDA À BANCA EXAMINADORA APROVADA PELO COLEGIADO DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA, SENDO JULGADA ADEQUADA PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM ENGENHARIA ELÉTRICA NA ÁREA DE SISTEMAS DE ENERGIA ELÉTRICA.

APROVADA EM: 21/10/2024

**BANCA EXAMINADORA:**

---

**Prof. Dr. Carlos Tavares da Costa Júnior**  
(Orientador - PPGEE/UFPA)

---

**Prof. Dr. Florindo Antônio Carvalho Ayres Júnior**  
(Coorientador - UFAM)

---

**Prof. Dr. Walter Barra Júnior**  
(Avaliador Interno - PPGEE/UFPA)

---

**Prof. Dr. André Maurício Damasceno Ferreira**  
(Avaliador Externo - IFPA)

---

**Prof. Dr. Ervin Kaminski Lenzi**  
(Avaliador Externo - UEPG)

---

**Prof. Dr. Blas Manuel Vinagre Jara**  
(Avaliador Externo - UNIVERSIDAD DE EXTREMADURA/ESPAÑA)

**VISTO:**

---

**Prof. Dr. Diego Lisboa Cardoso**  
(Coordenador do PPGEE/ITEC/UFPA)

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD  
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará  
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)**

---

M379p Martins Gomes, Marcus Ciro.  
Projeto de controle robusto de ordem fracionária para sistemas  
com incerteza paramétrica / Marcus Ciro Martins Gomes. — 2024.  
78 f. : il. color.

Orientador(a): Prof. Dr. Carlos Tavares da Costa Junior  
Coorientador(a): Prof. Dr. Florindo Antônio de Carvalho Ayres  
Junior  
Tese (Doutorado) - Universidade Federal do Pará, Instituto de  
Tecnologia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica,  
Belém, 2024.

1. Controle de ordem fracionária. 2. Controle robusto. 3.  
Incerteza paramétrica. 4. Sistema térmico. 5. Robustez. I.  
Título.

CDD 621.317

---

Dedico este trabalho à Iracema, Raimundo, Teresa e Santiago, meu avós *in memoriam*

# Agradecimentos

Agradeço meus pais, Ademar e Celeste Gomes pelo provimento de infraestrutura e investimento realizado ao longo de anos para minha formação acadêmica.

Agradeço meus orientadores Carlos Tavares da Costa Jr e Florindo Antonio de Carvalho Ayres Jr, pelo compartilhamento além de conhecimentos técnico-científicos, também experiências pessoais e alguns momentos de descontração.

Agradeço ainda aos amigos acumulados em anos de pós-graduação, dentre eles professores e alunos, os quais ainda pretendo levar a amizade: Thiago Cordeiro, Fabrício Nogueira, Paulo Nascimento, Anderson Roberto, Ítalo Flexa, Cleyson Amorim, Rubens Sichar, Cleonor Neves, Erick Rocha, Renan Landau, Tainara Dias, Raphael Teixeira, Eder Damasceno e os professores Walter Barra Jr, José Augusto Lima Barreiros e Jorge Roberto Brito de Souza(*in memoriam*).

E não menos importante, agradeço a minha família, através do meu filho Vinicius, que com a simples tarefa de existir me faz refletir a cada dia sobre a necessidade de auto-determinação nos objetivos almejados.

A todos, muito obrigado !

*" Avalia-se a inteligência  
de um individuo pela  
quantidade de incertezas  
que ele é capaz de suportar. "*

*Immanuel Kant - Filósofo alemão (1724 - 1804)*

# Resumo

Esta pesquisa apresenta uma nova metodologia que integra a Teoria de Controle de Ordem Fracionária com técnicas de Controle Robusto para lidar com a incerteza paramétrica, com o objetivo de melhorar o desempenho de sistemas incertos lineares invariantes no tempo com ordens inteiras ou fracionárias, referidos como Controle Robusto de Ordem Fracionária (FORC)). Ao contrário dos métodos tradicionais, esta abordagem proposta oferece uma nova formulação de projeto baseado em desigualdades, ampliando o escopo para descobrir soluções melhoradas através da otimização de programação linear. Conseqüentemente, os controladores de ordem fracionária são adaptados para garantir o desempenho transitório e de estado estacionário desejado em sistemas de malha fechada.

Para facilitar a implementação digital do controlador projetado, a discretização invariante de resposta ao impulso de diferenciadores de ordem fracionária (IRID-FOD) é usada para aproximar controladores de ordem fracionária a funções de transferência de ordem inteira. Além disso, caso necessário o método de redução de ordem de Hankel pode ser aplicado, tornando os controladores mais adequados para implantação em hardware. Testes experimentais realizados em um sistema térmico, juntamente com resultados de avaliação baseados em respostas no domínio do tempo e análise de robustez apoiada por índices de desempenho e análise de valor definido, demonstram o desempenho aprimorado e robusto da metodologia FORC proposta em comparação com o controle robusto clássico sob incerteza paramétrica.

**Palavras-chave:** Controle de Ordem Fracionária; Controle Robusto; Incerteza Paramétrica; Sistema Térmico; Robustez.

# Abstract

This research introduces a novel methodology that integrates fractional-order control theory with robust control techniques to address parametric uncertainty, aimed at enhancing the performance of linear time-invariant uncertain systems with integer or fractional orders, referred to as Fractional-Order Robust Control (FORC). Unlike traditional methods, this proposed approach offers a new formulation of inequalities-based design, broadening the scope for discovering improved solutions through linear programming optimization. Consequently, fractional-order controllers are tailored to ensure desired transient and steady-state performance in closed-loop systems.

In order to facilitate the digital implementation of the designed controller, the impulse response invariant discretization of fractional-order differentiators (IRID-FOD) is used to approximate fractional-order controllers to integer-order transfer functions. Additionally, the Hankel reduction order method is applied, making the controllers suitable for hardware deployment. Experimental tests conducted on a thermal system, along with assessment results based on time-domain responses and robustness analysis supported by performance indices and set value analysis, demonstrate the enhanced and robust performance of the proposed FORC methodology compared to classical robust control under parametric uncertainty.

**Keywords:** Fractional Order Control; Robust Control; Parametric Uncertainty; Thermal System; Robustness.

# Lista de Figuras

2.1	Regiões de estabilidade; (a): $0 < \alpha < 1$ ; (b): $1 < \alpha < 2$ . . . . .	11
3.1	Implementação de Controle Digital em Malha Fechada. . . . .	20
3.2	Fluxograma do Método de Controle Robusto de Ordem Fracionária. . . . .	23
3.3	Superfície de parametrização da frequência para o exemplo do FORC-PD. . . . .	24
3.4	Resposta ao degrau unitário para um controlador FORC-PD. . . . .	26
3.5	Resposta ao degrau para um controlador FORC-PI e planta fracionária. . . . .	29
4.1	Sistema térmico experimental de bancada. . . . .	32
4.2	Diagrama esquemático do sistema térmico de testes. . . . .	33
4.3	Resposta ao degrau para variação de potência de 50 a 75 Watts . . . . .	35
4.4	Superfície de parametrização de $[\omega_n^-, \omega_n^+]$ para FORC. . . . .	36
4.5	Resposta em frequência dos controlador FORC contínuo e discreto. . . . .	38
5.1	Respostas com modelos de 80 a 100 °C (tracejada) e 100 a 114 °C (contínua). . . . .	42
5.2	Sinais de controle com modelos de 80 a 100 °C (tracejada) e 100 a 114 °C (contínua). . . . .	43
5.3	Variação de referência $T = [50 \ 70]$ °C para ventilação em 12 V. . . . .	44
5.4	Variação degrau crescente para $[50 \ 54]$ °C e $[66 \ 70]$ °C. . . . .	45
5.5	Variação degrau decrescente para $[70 \ 66]$ °C e $T = [54 \ 50]$ °C. . . . .	46
5.6	Variação de referência $T = [50 \ 70]$ °C para ventilação em 9 V. . . . .	47
5.7	Variação de referência $T = [50 \ 70]$ °C para ventilação em 6 V. . . . .	47
5.8	Índice de desempenho ISE para $T = [50 \ 70]$ °C. . . . .	49
5.9	Índice de desempenho ITAE para $T = [50 \ 70]$ °C. . . . .	49
5.10	Índice de desempenho ISC para $T = [50 \ 70]$ °C. . . . .	50
5.11	Índice de desempenho ITAC para $T = [50 \ 70]$ °C. . . . .	50

---

5.12	Polígono para controlador de ordem fracionária em $\omega = 0.01\text{rad/s}$ . . . . .	53
5.13	Conjunto de valores de ordem fracionária robustamente estável. . . . .	53

# Lista de Tabelas

4.1	Parâmetros do Controlador Digital. . . . .	37
5.1	Valores dos índices para homogeneização em 12 V. . . . .	51
5.2	Valores dos índices para homogeneização em 9 V. . . . .	52
5.3	Valores dos índices para homogeneização em 6 V. . . . .	52

# Lista de Abreviaturas e Siglas

<b>PID</b>	<i>Proporcional + Integral + Derivativo</i>
<b>PD</b>	<i>Proporcional + Derivativo</i>
<b>PI</b>	<i>Proporcional + Integral</i>
<b>PID+FD</b>	<i>Proporcional + Integral + Derivativo com Filtro Derivativo</i>
<b>FOPD</b>	<i>Proporcional + Derivativo de Ordem Fracionária</i>
<b>LMI</b>	<i>Inequações Matriciais Lineares</i>
<b>FOC</b>	<i>Controle de Ordem Fracionária</i>
<b>RCBK</b>	<i>Controle Robusto Paramétrico de Battacharyya e Keel</i>
<b>FORC</b>	<i>Controle Robusto de Ordem Fracionária</i>
<b>IHM</b>	<i>Interface Homem-Máquina</i>
<b>ISE</b>	<i>Integral do erro ao quadrado</i>
<b>ITAE</b>	<i>Integral do módulo do erro ponderado pelo tempo</i>
<b>ISC</b>	<i>Integral do sinal de controle quadrático</i>
<b>ITAC</b>	<i>Integral do esforço de controle multiplicado pelo tempo</i>
<b>IRID</b>	<i>Discretização invariante de resposta ao impulso</i>
<b>FOD</b>	

# Lista de Símbolos

$s$	variável complexa " $s = j\omega$ "
$\alpha$	fator de ordem fracionária
$\omega_l$	Frequência baixa
$\omega_h$	Frequência alta
$\omega_{gc}$	Frequência de cruzamento de ganho
$\omega_{gp}$	Frequência de cruzamento de fase
$\xi, \zeta$	fator de amortecimento
$\omega_n, \omega_0$	Frequência natural
$T_s$	Período de Amostragem
$t_s$	Tempo de acomodação
$\sigma_i$	$i$ -ésima raiz de polinômio de denominador
$\Gamma$	função gama

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
1.1	Estado da Arte . . . . .	1
1.2	Objetivos . . . . .	5
1.2.1	Objetivo Geral . . . . .	5
1.2.2	Objetivos Específicos . . . . .	5
1.3	Estrutura do Trabalho . . . . .	6
<b>2</b>	<b>O Problema da Alocação de Polos de Ordem Fracionária</b>	<b>8</b>
2.1	Alocação Polinomial de Polos Clássica . . . . .	8
2.1.1	Cálculo dos Parâmetros de R, S e T . . . . .	9
2.2	Alocação de Polos de Ordem Fracionária . . . . .	10
2.3	Conclusão . . . . .	12
<b>3</b>	<b>O Problema da Alocação de Polos Robusta Paramétrica de Ordem Fracionária</b>	<b>13</b>
3.1	Preliminares . . . . .	13
3.1.1	Sistemas Intervalares e Estabilidade com Incerteza . . . . .	13
3.1.2	Metodologia Clássica de Controle Robusto com Incerteza Paramétrica . . . . .	15
3.2	Abordagem de Controle Robusto de Ordem Fracionária com Incerteza Paramétrica . . . . .	18
3.2.1	Metodologia de Sintonia de Controlador Robusto de Ordem Fracionária . . . . .	20
3.3	Exemplo Numérico 1: Sistema Integrador . . . . .	23
3.4	Exemplo Numérico 2: Sistema de Ordem Fracionária . . . . .	27
3.5	Conclusão . . . . .	29

---

<b>4</b>	<b>Aplicação da Metodologia em um Sistema Térmico Experimental</b>	<b>30</b>
4.1	Obtenção Experimental dos Parâmetros Intervalares . . . . .	30
4.1.1	Sistema Térmico Experimental . . . . .	30
4.1.2	Teste de Identificação paramétrica . . . . .	32
4.2	Aplicação da metodologia FORC . . . . .	34
4.3	Avaliação de desempenho robusto . . . . .	38
4.4	Conclusão . . . . .	39
<b>5</b>	<b>Resultados</b>	<b>40</b>
5.1	Testes em simulação computacional . . . . .	40
5.2	Teste experimentais em diferentes condições de operação e homogeneização de calor . . . . .	43
5.3	Análise de desempenho robusto . . . . .	48
5.3.1	índices de desempenho . . . . .	48
5.3.2	Conjunto de valores . . . . .	52
5.4	Conclusão . . . . .	54
<b>6</b>	<b>Conclusão</b>	<b>55</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>57</b>

# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1 Estado da Arte

Modelos de ordem fracionária têm sido empregados com sucesso para fornecer representações precisas de sistemas do mundo real como, por exemplo, dinâmicas epidemiológicas (OKPOSO et al., 2021), transferência de calor e massa (GUO et al., 2021), máquinas elétricas (ZAFAR; ALI; TUNÇ, 2021), processos químicos (KUMAR; ZEIDAN, 2021), entre outros. Consequentemente, estratégias de controle de ordem fracionária surgiram como alternativas aos tradicionais controladores de ordem inteira. Trabalhos recentes demonstraram que os controladores de ordem fracionária podem melhorar a estabilidade e o desempenho em sistemas de controle para diversas aplicações, tais como, sistemas de geração de energia de pequena escala (SILVA et al., 2024), (AYRES-JR. et al., 2018), conversores de potência (AYRES-JR et al., 2020), veículos elétricos (GEORGE; KAMAT; KURIAN, 2021) e servo-posicionamento pneumático (REN et al., 2019).

Embora a eficácia da modelagem e controle de ordem fracionária, ainda faltam ferramentas de análise e design em comparação com as contrapartes de ordem inteira. Em particular, embora as metodologias para obtenção da resposta transitória desejada estejam bem estabelecidas para sistemas lineares invariantes no tempo, ainda existem poucas soluções para sistemas de ordem fracionária, a maioria das quais restritas a uma classe específica de sistemas. Em Şenol e Demiroğlu (2019a) e Şenol e Demiroğlu (2019b), técnicas de "loop-shaping" são usadas para otimizar a aproximação da resposta de frequência de sistemas de controle com controladores de ordem fracionária para uma resposta desejada. O problema de posicionamento de polos para a atribuição exata da

localização de polos em malha fechada é proposto em [Khiabani e Babazadeh \(2016\)](#) para estruturas de controladores lead-lag em [Ayres-Jr et al. \(2020\)](#) para estruturas gerais de controladores resolvendo equações diofantinas. Em particular, este último propôs um posicionamento de polo de ordem fracionária baseado em funções de transferência de ordem comensuráveis e aplicou-o a um sistema conversor CC-CC Buck, onde vários testes, como referência de tensão e mudança de carga de resistência, foram realizados para avaliação da proposta de metodologia.

Apesar da grande relevância, os trabalhos citados não consideraram o problema do controle de ordem fracionária sob a consideração de sistemas com incertezas paramétricas. Um dos primeiros trabalhos sobre análise de robustez para sistemas de ordem fracionária é apresentado em [Tan, Özgüven e Özyetkin \(2009\)](#), que ilustra a inadequação do teorema de Kharitonov na análise da estabilidade robusta de polinômios intervalares cuja ordem seja fracionária. Adicionalmente, ainda neste trabalho é mostrado que o conjunto de valores de um polinômio intervalar não é um retângulo como é comumente observado para sistemas de controle com incerteza paramétrica de ordem inteira. É apresentado que caso da ordem fracionária, trata-se de um poliedro, cujo formato depende da ordem/fator fracionário. Várias abordagens para calcular o conjunto de valores da família de polinômios foram propostas a partir de então, como em [Gao \(2015\)](#) onde é proposta uma metodologia para verificar a estabilidade robusta de polinômios intervalares de ordem fracionária, determinando os vértices de seu conjunto de valores. E com base em uma função auxiliar e na condição de exclusão do zero é proposto avaliar um intervalo de frequência finito diferente das análises consolidadas. Da mesma forma, em [Ghorbani e Tavakoli-Kakhki \(2021\)](#) é apresentado uma nova função auxiliar para avaliar o conjunto de valores e a estabilidade robusta de polinômios intervalares de ordem fracionária. Já o conceito de conjunto de valores é estendido para analisar a  $\mathcal{D}$  estabilidade robusta de sistemas intervalares de ordem fracionária em [Mohsenipour e Jegarkandi \(2019\)](#). E, ainda, em [Matušů, Šenol e Pekař \(2019\)](#), a estabilidade robusta de polinômios de ordem fracionária com estruturas de incerteza complexas do tipo afins, multilineares e polinomiais, limitadas por conjuntos elipsoidais são analisadas graficamente através da abordagem gráfica usando a condição de exclusão do zero.

Mesmo que já existam avanços relevantes na análise de sistemas de ordem fracionária com incertezas de intervalo, conforme discutido nas referências acima, ainda faltam

abordagens eficazes para a colocação robusta de polos para esses sistemas. Em [Ghorbani, Tavakoli-Kakhki e Estarami \(2019\)](#), uma abordagem baseada em conjunto de valores é apresentada para analisar a estabilidade de sistemas de ordem fracionária com atraso de transporte e incertezas intervalares em malha fechada com controladores PID de ordem fracionária. Apesar dos resultados fornecerem uma ferramenta de análise eficaz para esse problema relevante, metodologias para sintonia dos controladores PID de ordem fracionária não são apresentadas no referido trabalho para garantir a estabilidade.

O princípio da raiz do argumento mínimo é outra maneira de verificar a estabilidade robusta de sistemas intervalares de ordem fracionária ([CHEN; AHN; PODLUBNY, 2006](#)). Com base nesse princípio é possível definir regiões de estabilidade robustas e estabelecer condições de estabilização ([BRAIM; MESQUINE, 2019](#)) incluindo condições baseadas em desigualdades de matriz linear ([LI; ZHU; MI, 2019](#)), ([N'DOYE et al., 2013](#)), ([CHEN et al., 2021](#)), ([LI; WANG, 2012](#)), ([CHEN et al., 2015](#)), ([ZHU; LU, 2021](#)), ([LI, 2020](#)), para sistemas intervalares de ordem fracionária com representações de pseudo-espço de estados. Já em [Ghorbani \(2021\)](#), o princípio da raiz do argumento mínimo é usado para investigar a estabilidade de sistemas intervalares e de ordem fracionária com incerteza.

Uma alternativa para simplificar a análise de estabilidade robusta é a utilização do *conformal mapping*, que consiste no mapeamento de potência de polinômios no plano complexo, de modo que a análise possa ser reduzida à avaliação do lugar da raiz de um polinômio de ordem inteira expandido ([ALAGOZ, 2017](#)). Nesse sentido, [Alagoz et al. \(2015\)](#) garante a validade do argumento raiz e das relações de magnitude sob mapeamento conforme e as implicações do teorema da borda para sistemas intervalares de ordem fracionária. Em [Alagoz \(2018\)](#), uma técnica de "busca de força-bruta" estabiliza sistemas com incerteza paramétrica de ordem fracionária, garantindo o princípio da raiz do argumento mínimo após o *conformal mapping*.

Em [Şenol et al. \(2014\)](#), o princípio da raiz do argumento mínimo e *conformal mapping* são usados para uma investigação numérica da estabilidade robusta de sistemas intervalares de ordem fracionária e com ordem fracionária incerta. A sintonia de controladores PID de ordem fracionária para sistemas de ordem fracionária com incertezas paramétricas é abordado em [Tufenkeci et al. \(2021\)](#) onde uma otimização do enxame de partículas é usada para obter o posicionamento da raiz do ângulo mínimo de todos os polinômios próximo a uma posição da raiz do ângulo mínimo alvo e para ajustar os cinco

parâmetros do PID de ordem fracionária.

No livro de [Sabatier et al. \(2015\)](#), o Capítulo 4 explora a comparação entre um controlador de ordem fracionária projetado usando Desigualdades de Matriz Linear (LMI) em uma abordagem de espaço de estados e equações de Riccati bem conhecidas. Da mesma forma, um artigo de [Li, Liu e Zhao \(2022\)](#) demonstra os controles  $H_\infty$  robustos em comparação com abordagens  $H_\infty$  padrão para sistemas de ordem fracionária. Em outro artigo de [Wang et al. \(2023\)](#), um controlador de ordem fracionária de modo deslizante é comparado, entre outros, a um controlador PID clássico. Além disso, em um artigo de [Abdulkhader, Jacob e Mathew \(2019\)](#), (2019), novos controladores PID de ordens fracionárias são propostos para resolver problemas de estabilidade em sistemas de energia. No entanto, há nestes trabalhos falta de clareza sobre como os parâmetros de controle são determinados. Além disso, algumas pesquisas têm se concentrado em métodos de controle robustos baseados em LMI que incorporam decomposição de valores singulares para controlar sistemas incertos de ordem fracionária, sem necessariamente abordar o cálculo fracionário para projeto de controle.

Com base em uma extensa exploração do tema proposto, torna-se evidente que um número substancial de publicações na última década empregou predominantemente formulações de espaço de estados e vários métodos de controle projetados para sistemas com modelos de ordem fracionária. No entanto, há uma notável escassez de pesquisas que adotem abordagens de função de transferência enquanto lidam com incertezas estruturadas de forma direta e abrangente, o que poderia aumentar a robustez do procedimento de projeto. Em vista disso, neste trabalho, o método de sintonia de controladores de ordem fracionária proposto preenche essa lacuna ao hibridizar dois grandes áreas de controle: ordem fracionária e controle robusto para sistemas sob incerteza paramétrica. Esta abordagem hibridizada aproveita as vantagens inerentes de ambas as abordagens e aplica-as a sistemas lineares com modelos de função de transferência, sejam estas dinâmicas de ordem inteira ou fracionária.

Além disso, a implementação experimental serve como uma validação valiosa dos testes de malha fechada propostos, diferenciando-o de alguns artigos confinados a resultados de simulação com formulações complexas e de compreensão desafiadora. Por exemplo, o artigo de [Pachauri et al. \(2023\)](#) emprega uma abordagem de função de transferência e um algoritmo de ciclo da água para ajustar os parâmetros de controle, mas carece da validação

experimental apresentada neste estudo, bem como [Cortés-Romero, Delgado-Aguilera e Jimenez-Triana \(2020\)](#), entre outros.

## 1.2 Objetivos

### 1.2.1 Objetivo Geral

Este presente trabalho tem como objetivo investigar a aplicação da ordem fracionária para controladores robustos em malha fechada com sistemas sob incerteza paramétrica representada por funções de transferência com coeficiente intervalares dos polinômios segundo metodologia proposta baseada em análise de superfícies tridimensionais que permita determinar a região intervalar de frequência natural e do fator de amortecimento desejado  $\xi$  que satisfaça os requisitos de projeto no domínio do tempo, como sobressinal máximo e tempo de acomodação desejado por meio de abordagem de otimização de programação linear. A metodologia proposta é verificada por meio de testes experimentais para controle de temperatura de uma bancada de testes de um Sistema Térmico. Conforme discutido em [Martins-Gomes et al. \(2024\)](#), os resultados apresentados na implementação deste controlador robusto de ordem fracionária considerando incertezas paramétricas com respostas de saída e sinais de controle em malha fechada com robustez, corroborando as conclusões desta tese. As principais contribuições desta pesquisa são destacadas a seguir.

### 1.2.2 Objetivos Específicos

- Uma nova metodologia para projeto de controladores de ordem fracionária utilizando posicionamento de polos de ordem fracionária intervalar, visando melhorar o desempenho na resposta transitória do sistema e reduzir os esforços do sinal de controle em sistemas lineares invariantes no tempo sujeito à incerteza paramétricas;
- A metodologia proposta estabelece a região para varredura visual da frequência intervalar com base na fórmula de tempo de acomodação projetada e região de estabilidade do fator fracionário  $\alpha$  apresentada em [Merrikh-Bayat e Karimi-Ghartemani \(2008\)](#);
- A metodologia proposta reduz o conservadorismo do projeto de controle, uma vez que permite uma mudança na região de estabilidade, levando a uma região de

desempenho mais flexível do que as abordagens de controle robusto clássicas;

- A metodologia proposta busca atender às especificações de desempenho intervalares exigidas para processos de ordem inteira ou fracionária, empregando estruturas de controlador de ordem fracionária escolhida arbitrariamente pelo projetista e com base nas ações de controle desejadas.

### 1.3 Estrutura do Trabalho

A escrita desta monografia está organizado em seis capítulos, o trabalho está estruturada como se segue:

- Capítulo 2: Os Problemas da alocação de polos clássica e de ordem fracionária são apresentados, bem como suas bases e conceitos teóricos sobre alocação de polos convencional e sua extensão à ordem fracionária;
- Capítulo 3: O Problema do projeto de controle robusto com a presença de incerteza paramétrica de Ordem Fracionária é formulado e proposto na forma de metodologia de sintonia de controlador, onde se compara a teoria clássica sobre incerteza paramétrica estruturada com a proposta atual, onde é evidenciada a diferença de ambas. Dois exemplos numéricos finalizam o capítulo e delineiam os passos segundo este método de projeto;
- Capítulo 4: Aplicação da metodologia proposta em um Sistema Térmico experimental é apresentado. Por meio deste sistema são detalhados os resultados de identificação de resposta ao degrau para obtenção de modelos do tipo função de transferência em diferentes condições de operação e condições baixa, média e alta homogeneização da circulação ativa de ar em 6, 9 e 12 V, respectivamente, estabelecendo incertezas paramétricas. Bem como os cálculos para a obtenção dos coeficientes do controlador segundo a metodologia robusta fracionária.
- Capítulo 5: Resultados são apresentados por meio de testes experimentais realizados segundo a aplicação da proposta da técnica de sintonia robusta de ordem fracionária aplicada ao sistema térmico de bancada acompanhada com as avaliações tanto dos desempenhos do domínio do tempo e quanto de índices de desempenho afim de

quantificar a robustez do método proposto quando comparado ao método de controle robusto paramétrico clássico.

- Capítulo 6: Por fim, as conclusões deste trabalho são apresentadas com uma síntese das principais inferências dos resultados analisados e sugestões de possíveis trabalhos futuros.
- Ao final deste trabalho são apresentados alguns artigos de pesquisas que foram, e vem sendo, desenvolvidas durante a discência deste doutorado até o momento.

## Capítulo 2

# O Problema da Alocação de Polos de Ordem Fracionária

O bem conhecido problema do posicionamento de polos é um método rápido, direto e bastante compreensivo de sintonia de controladores tanto em tempo contínuo quanto em metodologias em tempo discreto. O tema já bastante apresentado de forma didática difundida na literatura como em [Åström e Hägglund \(1995\)](#) e [Landau e Zito \(2006\)](#) tem como sua principal característica a escolha polinomial de um desempenho desejado atrelado a um par de polos complexos conjugados que determinam a dinâmica dominante de malha fechada e com um controlador convencional de ordem inteira. O problema da alocação de polos também já foi abordado para controladores de ordem fracionária em [Ayres-Jr et al. \(2020\)](#) onde a metodologia de sintonia ali proposta apresenta uma extensão do projeto clássico permitindo o posicionamento de polos dominantes fracionários dentro de uma região de estabilidade estendida. Ambos os métodos são sumarizados nas seções seguintes.

### 2.1 Alocação Polinomial de Polos Clássica

Quando se deseja projetar um controlador com objetivos de regulação, a estrutura de alocação de polos RST é uma das mais consolidadas, onde normalmente para determinação do polinômio característico de malha fechada na variável complexa " $s = j\omega$ ",  $P(s) = 1 + p_1s + p_2s^2 + \dots$ , consiste em considerar o sistema em malha fechada dominantemente de segunda ordem, para o qual se especifica, geralmente tempo de subida ou

de acomodação e um máximo sobre-sinal que sejam obtidos através de parâmetros tais como frequência natural  $\omega_0$  e fator de acomodação  $\zeta$ , relacionados com tal dinâmica aproximadamente de segunda ordem. Assim, o polinômio  $P(s)$  pode ser fatorado como: polos dominantes, nomeadamente como  $P_D(s)$  e por polos mais rápidos que os dominantes, denominados polos auxiliares  $P_F(s)$ , fatoradamente tendo-se  $P(s) = P_D(s)P_F(s)$  (LANDAU; ZITO, 2006). Sabendo-se que os parâmetros  $\omega_0$  e  $\zeta$ , influenciam diretamente a resposta dinâmica transitória, e uma vez tendo seus valores conhecidos, procede-se para o cálculo dos coeficientes do polinômio  $P(s)$  e  $P_D(s)$  que podem ser calculados segundo uma sistema de segunda ordem padrão, como  $P_D = s^2 + 2\zeta\omega_0s + \omega_0^2$ .

### 2.1.1 Cálculo dos Parâmetros de R, S e T

Uma vez tendo-se o polinômio  $P(s)$  especificado, o cálculo dos polinômios  $R(s)$  e  $S(s)$  é realizado de acordo com a equação diofantina em (2.1), sendo os polinômios  $B(s) = b_ms^m + \dots + b_1s + b_0$  e  $A(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0$ , numerador e denominador conhecido do processo.

$$A(s)S(s) + B(s)R(s) = P(s) \quad (2.1)$$

Sendo desconhecidos os polinômios do controlador  $R(s) = r_0 + r_1s + \dots + r_{n_R}s^{n_R}$  e  $S(s) = 1 + s_1s + \dots + s_{n_S}s^{n_S}$ , faz-se  $T(s) = R(0)$  para fins de regulação de saída e rejeição de perturbação (COELHO; JERONYMO; ARAUJO, 2019). A solução para a Equação (2.1), realiza-se a seguinte formulação matricial na Equação (2.2).

$$\begin{pmatrix} s_1 \\ s_1 \\ \vdots \\ s_{n_S} \\ r_0 \\ r_1 \\ \vdots \\ r_{n_R} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 & b_0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & a_1 & \cdots & \vdots & b_1 & b_0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & a_2 & \cdots & 0 & \vdots & b_1 & \cdots & b_0 \\ a_n & \vdots & \cdots & a_1 & b_m & \vdots & \cdots & b_1 \\ 0 & \cdots & \cdots & a_2 & 0 & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_n & 0 & 0 & \cdots & b_m \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_{n_P} \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

## 2.2 Alocação de Polos de Ordem Fracionária

O estudo de modelagem controle e estabilidade de sistemas de ordem fracionária é baseado em soluções de equações diferenciais ou funções de transferência no domínio de Laplace. A definição de Caputo de operador fracionário é uma das mais difundidas na área de modelagem e controle de ordem fracionária. Complementada por Podlubny (1998) possibilita o uso de ordem inteira baseada em condições iniciais e permite funções de transferência de ordem fracionária para representar sistemas dinâmicos. Para sistemas de ordem inteira é bem estabelecido que um sistema é Hurwitz-estável se, e somente se, todos os polos estão localizados no semiplano esquerdo do plano-S. Entretanto, para sistemas de ordem fracionária os limites de estabilidade dependem da ordem fracionária ( $\alpha$ ) do sistema. A análise de estabilidade fracionária é realizada aplicando-se o *Teorema de Matignon*, descrito a seguir (MONJE et al., 2010) (MALTI; MOREAU; KHEMANE, 2008).

**Teorema 1** - [Teorema de Matignon] Considere  $\sigma_i$  para  $i = 1, \dots, n$ , sejam as raízes do polinômio do denominador da função de transferência mostrado na equação (2.3).

$$G(s) := \frac{B(s)}{A(s)} := \frac{\sum_{i=0}^n b_i s^{i\alpha}}{\sum_{i=0}^n a_i s^{i\alpha}} \quad (2.3)$$

$G(s)$  é estável se, e somente se, as seguintes condições restritas à  $\angle\sigma_i \in [-\pi, \pi]$  rad para todos valores de  $i$  tal que:

$$|\angle\sigma_i| > \alpha \frac{\pi}{2} \quad (2.4)$$

Para funções de transferência comensuráveis, como em (2.3), a região em que  $\sigma_i$  deve estar localizada para assegurar a estabilidade é mostrada na Figura 2.1.

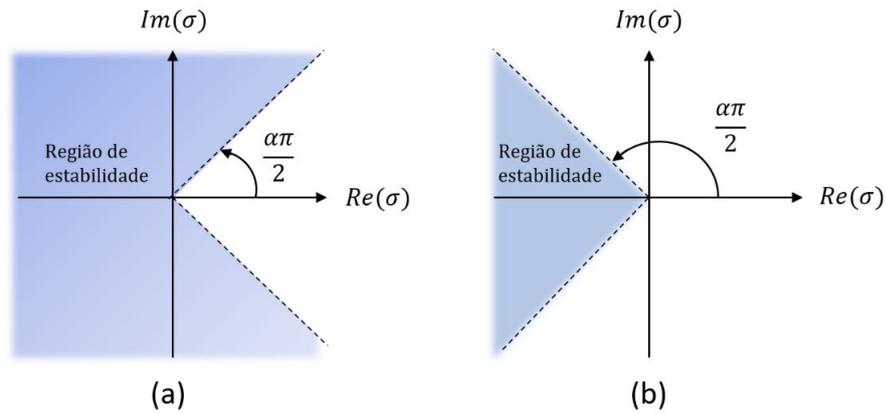


Figura 2.1: Regiões de estabilidade; (a):  $0 < \alpha < 1$ ; (b):  $1 < \alpha < 2$

Fonte: Adaptado de Valério e Costa (2013).

Para este procedimento os autores propuseram como sintonia de controladores, a atribuição de polos dominantes fracionários de funções de transferência comensuráveis de 3 termos baseado em um algoritmo de análise da plotagem de duas curvas (tempo de acomodação versus fator de amortecimento e acomodação versus fator de amortecimento) para encontrar os valores dos parâmetros do comportamento de ordem fracionária desejado.

A partir das escolhas de máximo sobressinal, tempo de acomodação e frequência natural para o projeto, deve produzir as curvas para determinados valores da ordem fracionária ( $0 < \alpha < 2$ ), uma varredura em uma região de valores de fator de amortecimento  $\xi$  usando a Equação (2.5) de resposta ao degrau de sistemas de ordem fracionária e obtida por meio de transformada inversa de Laplace. Com base na análise destas curva e valores escolhidos de especificações previamente, os parâmetros: fator de amortecimento  $\xi$  e ordem fracionária  $\alpha$  podem ser determinados.

$$\begin{aligned}
 y(t) = & \frac{(\xi - \sqrt{\xi^2 - 1})}{2\sqrt{\xi^2 - 1}} E_{\alpha,\alpha}[(-\xi\omega_n^\alpha - \omega_n^\alpha\sqrt{\xi^2 - 1})t^\alpha] t^{-\frac{\alpha-1}{\alpha}} \\
 & - \frac{(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})}{2\sqrt{\xi^2 - 1}} E_{\alpha,\alpha}[(-\xi\omega_n^\alpha + \omega_n^\alpha\sqrt{\xi^2 - 1})t^\alpha] t^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} + 1
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

Logo que é selecionada a estrutura do controlador de ordem fracionária de acordo com a ação de controle desejada: proporcional, integral, derivativa, ou suas variantes. Se possível encontrada uma solução da equação diofantina similar ao caso de ordem inteira será obtido. Por fim, antecedendo à implementação e teste de desempenho, é aplicado uma aproximação para obtenção de um controlador contínuo de ordem inteira equivalente.

Como exemplo a comumente utilizada aproximação de Oustaloup (MONJE et al., 2010), visto nas Equações (2.6), (2.7) e (2.8), ou também pelo método da discretização invariante de resposta impulsiva de integradores/diferenciadores de ordem fracionária (do inglês *Impulse response invariant discretization of fractional-order integrators/differentiators - IRID-FOD*) (CHEN; AHN; PODLUBNY, 2006), o qual já inclui uma etapa de discretização do controlador e aproxima uma função de transferência irracional contínua  $s^\alpha$ , onde "s" é a variável da transformada de Laplace e " $\alpha$ " é um número real no intervalo de  $(-1,1)$ . Sendo  $s^\alpha$  é chamado de diferenciador de ordem fracionária se  $0 < \alpha < 1$  e de integrador de ordem fracionária se  $-1 < \alpha < 0$  (Chen, 2024).

$$s^\alpha \approx C \prod_{m=1}^N \frac{1 + \frac{s}{\omega_{z,m}}}{1 + \frac{s}{\omega_{p,m}}} \quad (2.6)$$

$$\omega_{z,m} = \omega_l \left( \frac{\omega_h}{\omega_l} \right)^{\frac{2m-1-\alpha}{2N}} \quad (2.7)$$

$$\omega_{p,m} = \omega_l \left( \frac{\omega_h}{\omega_l} \right)^{\frac{2m-1+\alpha}{2N}} \quad (2.8)$$

## 2.3 Conclusão

Neste capítulo foi apresentado de forma direta as abordagens de controle baseadas em posicionamento de polos tanto clássica, já bastante consolidada como ferramenta amplamente utilizada e intuitiva na sintonia de controladores, tanto no domínio do tempo discreto quanto contínuo. Adicionalmente, foi apresentada a extensão da técnica convencional onde alocação de polos é realizada com uso de controladores de ordem fracionária, sendo que tal uso apresentou como fatores de melhoria de desempenho a possibilidade de modificar a região de estabilidade do sistema em malha portanto também de características de sua resposta transitória. No capítulo a seguir o estudo é seguido para generalização intervalar paramétrica da alocação de polos segundo uma abordagem via programação linear definindo característica de incertezas do processo e robustez no procedimento de sintonia do controlador, sendo estendido ao caso de polinômios de ordem-fracionária da proposta deste trabalho.

# Capítulo 3

## O Problema da Alocação de Polos Robusta Paramétrica de Ordem Fracionária

Neste capítulo, realiza-se uma breve contextualização sobre o controle robusto com a abordagem de presença de incertezas paramétricas estruturadas, seguindo de sua formulação básica, definição das inequações de restrições e método de solução de otimização convexa.

Adicionalmente, diante deste contexto é apresentada a metodologia proposta com base na técnica clássica e uma hibridização com a teoria de controle de ordem fracionária, onde são destacadas as etapas de procedimento, especificações intervalares, seleção de estrutura de controlador, formação de inequações de restrições e cálculo de otimização convexa para a estrutura fracionária.

### 3.1 Preliminares

#### 3.1.1 Sistemas Intervalares e Estabilidade com Incerteza

A abordagem de controle robusto clássico para um sistema incerto é sucintamente apresentado nesta seção com base em [Keel e Bhattacharyya \(1998\)](#). Sistemas incertos neste tipo de abordagem são representados por modelos paramétricos com incertezas estruturadas. Sendo um sistema linear e invariante no tempo tais representações são

realizadas por intervalos nos coeficientes apresentando valores mínimos e máximos ao invés de um único valor.

Para tal, basta que um único parâmetro em uma equação diferencial, em um polinômio de numerador/denominador de uma função de transferência ou em uma representação em espaço de estados de um sistema dinâmico não seja um único valor, mas sim um intervalo, então uma família de sistemas é verificada. Na indústria é comum referir-se a isso como um conjunto de condições de operação.

Sistemas dinâmicos apresentam incerteza paramétrica se existe um modelo matemático para descrever o comportamento de parâmetros que não são exatamente conhecidos ou que sofrem perturbação. Por exemplo, equações diferenciais podem possuir incertezas paramétricas, como mostrado na Equação (3.1).

$$f(y(t), \dot{y}(t), \ddot{y}(t), \dots, \overset{(n)}{y}(t), u(t), \dot{u}(t), \ddot{u}(t), \dots, \overset{(m)}{y}(t), \bar{q}) = 0 \quad (3.1)$$

onde  $\bar{q} = (\bar{q}_1, \dots, \bar{q}_r)$ ,  $q_i \in \mathbb{R}$ , para  $i = 1, \dots, r$  é um vetor de parâmetros incertos..

Um sistema incerto pode também ser representado por uma função de transferência estritamente própria de coeficientes intervalares, como na Equação (3.2), sendo  $m < n$ .

$$\bar{G}(s, \bar{q}) := \frac{B(s)}{A(s)} := \frac{\bar{b}_m s^m + \dots + \bar{b}_1 s + \bar{b}_0}{s^n + \bar{a}_{n-1} s^{n-1} + \dots + \bar{a}_1 s + \bar{a}_0}. \quad (3.2)$$

onde  $\bar{b}_i$  e  $\bar{a}_i$  são intervalos numéricos dos coeficientes dos polinômios de denominador (3.3) e numerador (3.4), respectivamente, devido à representação da incerteza. Se o parâmetro incerto  $q_i$  aparece em mais de um coeficiente, pode ser apresentado como função linear, afim, polinomial, etc. (MUELLER, 2011). Por questão de definição de representação, neste trabalho os sobrescritos, “-” e “+” são usados para denotar valores mínimos e máximos em um intervalo.

$$d(s, a(\bar{q})) = \sum_{j=1}^n [a_j^-, a_j^+] s^j \quad (3.3)$$

$$n(s, b(\bar{q})) = \sum_{j=1}^n [b_j^-, b_j^+] s^j \quad (3.4)$$

Dentre os principais contribuições para avaliação de estabilidade destes tipos de

sistemas pode ser utilizada para avaliação de estabilidade o teorema de Kharitonov, o qual define, em resumo, que para toda uma infinidade de número de funções de transferência entre um intervalo paramétrico deve possuir raízes posicionadas no semiplano esquerdo do plano- $s$ . O teorema de Kharitonov define que é desnecessário e/ou inviável verificar toda a infinidade de polinômios para garantir a estabilidade robusta do sistema (KEEL; BHATTACHARYYA, 1998). É condição suficiente checar a estabilidade de quatro polinômios, denominados polinômios de Kharitonov (3.5), que seguem uma regra de formação baseada nos coeficientes intervalares do denominador da função de transferência incerta em (3.6).

$$\begin{aligned}
 K_1(s) &= p_0^- + p_1^- s + p_2^+ s^2 + p_3^+ s^3 + \dots \\
 K_2(s) &= p_0^- + p_1^+ s + p_2^+ s^2 + p_3^- s^3 + \dots \\
 K_3(s) &= p_0^+ + p_1^- s + p_2^- s^2 + p_3^+ s^3 + \dots \\
 K_4(s) &= p_0^+ + p_1^+ s + p_2^- s^2 + p_3^- s^3 + \dots
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

$$p(s) = [p_n^-, p_n^+] s^n + [p_{n-1}^-, p_{n-1}^+] s^{n-1} + \dots + [p_1^-, p_1^+] s + [p_0^-, p_0^+] \tag{3.6}$$

onde  $p_i^-$  e  $p_i^+$  são valores máximos e mínimos do intervalo numérico, respectivamente. De acordo com Barmish e Jury (1994), assumindo que a família dos polinômios tem um grau constante e pode ser calculados, os seguintes polinômios em (3.5) podem ser usados para verificar se os sistemas incertos são robustamente estáveis. Tal condição é satisfeita se, e somente se, todos os polinômios de Kharitonov são Hurwitz.

### 3.1.2 Metodologia Clássica de Controle Robusto com Incerteza Paramétrica

Este projeto de sistema de controle baseado em modelos considera a incerteza como variação de parâmetros intervalares é realizado aplicando programação linear a um conjunto de restrições de desigualdades para encontrar uma solução para a formulação de um problema de otimização convexa. Declarando uma função de transferência incerta  $G(s, \bar{q})$  como (3.2) e considerando a estrutura do controlador com polinômios  $R(s)$  e  $S(s)$  com ordem fixa  $n_R$  e  $n_S$  de numerador e denominador, respectivamente como em (3.7),

um polinômio de malha fechada reproduz uma equação diofantina como em (3.8).

$$\begin{aligned} R(s) &= r_{n_R} s^{n_R} + r_{n_R-1} s^{n_R-1} + \dots + r_1 s + r_0 \\ S(s) &= s_{n_S} s^{n_S} + s_{n_S-1} s^{n_S-1} + \dots + s_1 s + s_0 \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} P_{\text{malha-fechada}}(s) &= d(s)S(s) + n(s)R(s) = [a_n^-, a_n^+] s_{n_S} s^{(n+n_S)} + \\ & [b_m^-, b_m^+] r_{n_R} s^{(m+n_R)} + \dots + ([a_0^-, a_0^+] s_0 + [b_0^-, b_0^+] r_0) \end{aligned} \quad (3.8)$$

Como pode ser visto, o polinômio de malha fechada agora exige que a aritmética intervalar seja usada para cálculo. Assim, assume-se não um único valor para as especificações de desempenho desejadas, mas um alvo relaxado, também definido como um intervalo contendo um conjunto limitado de desempenho necessário. Assim, cada coeficiente do polinômio desejado é um intervalo que depende de parâmetros incertos como em (3.9).

$$P_d(s) = [p_{n+n_S}^-, p_{n+n_S}^+] s^{(n+n_S)} + [p_{n+n_S-1}^-, p_{n+n_S-1}^+] s^{(n+n_S-1)} + \dots + [p_1^-, p_1^+] s + [p_0^-, p_0^+] \quad (3.9)$$

O problema de controle robusto (de ordem fixa) com presença de incertezas paramétricas é conduzido como um conjunto de inequações que definem restrições conforme descrito por (3.10), onde uma vez satisfeito tais restrições é garantido de que as raízes em malha fechada estão dentro da região polinomial desejada.

$$L \leq M \cdot X \leq H \quad (3.10)$$

onde os limites inferior e superior das inequações, sendo os vetores  $L$  e  $H$  são dependentes das especificações intervalares de desempenho,  $M$  é a matriz em função dos parâmetros intervalares do processo e  $X$  são os coeficientes (não intervalares) do controlador, conforme a seguir em (3.11).

$$\begin{bmatrix} p_{n+n_s}^- \\ p_{n+n_s-1}^- \\ p_{n+n_s-2}^- \\ \vdots \\ p_0^- \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} b_m & 0 & \dots & 0 & a_n & 0 & \dots & 0 \\ b_{m-1} & b_m & \ddots & 0 & a_{n-1} & a_n & \ddots & 0 \\ b_{m-2} & b_{m-1} & b_m & \vdots & a_{n-2} & a_{n-2} & a_n & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_0 & a_1 & \dots & a_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r_{n_r} \\ r_{n_r-1} \\ r_{n_r-2} \\ \vdots \\ r_0 \\ s_{n_s} \\ s_{n_s-1} \\ s_{n_s-2} \\ \vdots \\ s_0 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} p_{n+n_s}^+ \\ p_{n+n_s-1}^+ \\ p_{n+n_s-2}^+ \\ \vdots \\ p_0^+ \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

Para o procedimento na etapa de otimização, uma função custo apropriada que pode ser escolhida é a soma dos coeficientes do controlador. No entanto, outras funções custo podem ser selecionadas de acordo com as restrições como em [Podlubny \(1998\)](#). Por conseguinte, a formalização matemática em (3.12) pode ser resolvida como um problema de otimização via programação linear.

encontrar  $X$

que minimiza

$$F = \sum_{k=0}^{n_R} r_k + \sum_{w=0}^{n_S} s_w \quad (3.12)$$

$$\text{sujeito a } \begin{bmatrix} M([a^-, a^+], [b^-, b^+]) \\ -M([a^-, a^+], [b^-, b^+]) \end{bmatrix} X \leq \begin{bmatrix} H(p^+) \\ L(p^-) \end{bmatrix}.$$

Algumas variações podem ser feitas no procedimento de ajuste de otimização convexa como uma reformulação de uma esfera de Chebchev buscando soluções internas de politopos definidos por restrições como em [Neves et al. \(2020\)](#), uma abordagem de inequações matriciais lineares (LMI) como em [Saavedra et al. \(2024\)](#) e [Lan e Zhou \(2011\)](#) dentre outras, não sendo abordados aqui neste trabalho

Uma etapa essencial para o procedimento de controle robusto sujeito a incertezas paramétricas é a etapa de otimização convexa de programação linear, onde a solução é um dos vértices do politopo delimitado pelas restrições. Esta solução determina os

polos da função de transferência de malha fechada estritamente localizados limitados no semiplano esquerdo do plano-s. Entretanto, tal região-solução é suscetível de ser expandida ou comprimida conforme o emprego de teoria de polinômios e dos controladores de ordem fracionária (FOC), como objeto de estudo deste trabalho.

O foco deste trabalho é apresentar uma proposta de metodologia de sintonia de um controlador robusto, contudo ao contrário do projeto clássico de ordem inteira é empregado controladores de ordem fracionária por meio de uma proposição de reformulação da etapa de formação de inequações de restrições de maneira a buscar garantir uma "solução-alvo" de polos de malha fechada intervalares que traga melhorias de desempenho satisfazendo as especificações de projeto pelo controlador de ordem fracionária fixa alcançado.

Tal consideração pretende tirar vantagem de uma região diferente da alocação convencional de polos no plano-s em função da ordem fracionária do controlador. Este é o tópico principal apresentado na seção seguinte.

## 3.2 Abordagem de Controle Robusto de Ordem Fracionária com Incerteza Paramétrica

Como visto na seção anterior, o tema de controle robusto é uma alternativa valiosa dentro da teoria de controle moderno que aumenta a robustez do controle em malha fechada para sistemas sob incertezas ou distúrbios. De maneira que garanta estabilidade e desempenho especificado para toda a família de sistemas dentro do intervalo de incerteza paramétrica estruturada. No entanto, tais metodologias geralmente possuem uma etapa de otimização satisfazendo as restrições impostas pelas inequações e buscando soluções numa região de parâmetros que correspondam aos polos de malha fechada situados no plano S. E se a busca da solução desejável não corresponder exatamente ao semiplano esquerdo do plano S, com a mudança para uma ordem fracionária do controlador?

Em vista deste questionamento é investigado aqui a proposição de uma nova metodologia de sintonia de controladores de ordem fracionária para controle robusto paramétrico de maneira a trazer melhorias em relação à busca por estabilidade e desempenho aprimorados e reformulada nessa forma robusta hibridizada, a qual é nomeada de Controle Robusto de Ordem-Fracionária (do inglês *Fractional-Order Robust Control* - FORC). De acordo com o atual estado da arte relacionado a sistemas de ordem fracionária, este tipo

de controle tem estado presente em diversos tipos de aplicações, como a identificação de sistemas (CAI MIN; LI, 2019)(CAMPOS et al., 2024), e a aplicação de diversos modelos baseados nas possibilidades introduzidas pela presença do grau de liberdade adicional proporcionada pela aplicação de termos de derivadas e integrais fracionárias, aplicados bem sucedidamente por exemplo na modelagem de supercapacitores (PRASAD; MEHTA; KOTHARI, 2020), sistemas de potência (SILVA et al., 2024) (AYRES-JR. et al., 2018), entre outros. Neste artigo, os operadores diferenciais fracionários empregam a definição de Caputo devido à sua capacidade de representar sistemas dinâmicos com funções de transferência de ordem fracionária (CAPONETTO, 2010). Esta definição também permite o uso de ordem inteira com base nas condições iniciais, conforme descrito em Podlubny (1998). Neste tipo de estudo, a estabilidade e o amortecimento de sistemas lineares não dependem apenas do coeficiente de amortecimento  $\xi$ , mas também são afetados pelo fator de ordem fracionária " $\alpha$ "(MONJE et al., 2010).

De acordo com o Teorema de Matignon (MALTI; MOREAU; KHEMANE, 2008), um sistema é estável se a relação matemática cosseno for mantida em (3.13).

$$\xi > -\cos\left(\alpha\frac{\pi}{2}\right) \quad (3.13)$$

Atualmente, para fins de implementação prática a aplicação de sistemas de ordem fracionária exige métodos de aproximação para um sistema de ordem inteira como de Oustaloup (LI; ZHU; MI, 2019), que permite a implementação de métodos avançados de ajuste (DAS, 2011) ou pela discretização invariante de resposta ao impulso de derivadas de ordem fracionária (YangQuan Chen, 2023). Embora existam métodos para resolução de equações diferenciais fracionárias, as soluções de ordem inteira são mais conhecidas e possuem maior embasamento teórico na literatura para sistemas contínuos e de tempo discreto (VALÉRIO; COSTA, 2013).

De acordo com o postulado por Merrikh-Bayat e Karimi-Ghartemani (2008), uma expressão matemática para calcular o tempo de acomodação aproximado em função do fator de amortecimento, frequência natural, fator fracionária e função gama é fornecida em (3.14).

$$t_s = \left[ \frac{2|\xi| \operatorname{sen}(\alpha\pi) \Gamma(1 + \alpha)}{p\pi\omega_n} \right]^{\frac{1}{1+\alpha}} \quad (3.14)$$

onde o parâmetro " $p$ ", representa o perceptual de precisão da faixa do tempo de acomodação em uma resposta degrau padrão (os valores tipicamente usados são 0,02 e 0,05) e " $\Gamma$ ", a função gama relacionada com o fator fracionário  $\alpha$ , esta interessante equação explorada neste trabalho traz uma relação entre as especificações de tempo de acomodação e faixa de acomodação de regime permanente do sistema linear, permitindo o uso em metodologias de sintonia para sistemas de controle de ordem fracionária, em contrapartida da relação já bem conhecida para sistemas de ordem inteira relacionando linearmente fator de amortecimento e frequência natural.

Adicionalmente, a implementação digital do controlador é viável por uma estrutura canônica em malha fechada, onde o numerador  $Q(z)$ , o denominador  $W(z)$  e os polinômios de pré-filtro  $T(z)$  são definidos na equação (3.15) e pode ser observado sua estrutura na figura 3.1.

$$\begin{aligned} Q(z^{-1}) &= q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2} + \dots + q_n z^{-n} \\ W(z^{-1}) &= 1 + w_1 z^{-1} + w_2 z^{-2} + \dots + w_n z^{-n} \\ T(z^{-1}) &= Q(1) \end{aligned} \quad (3.15)$$

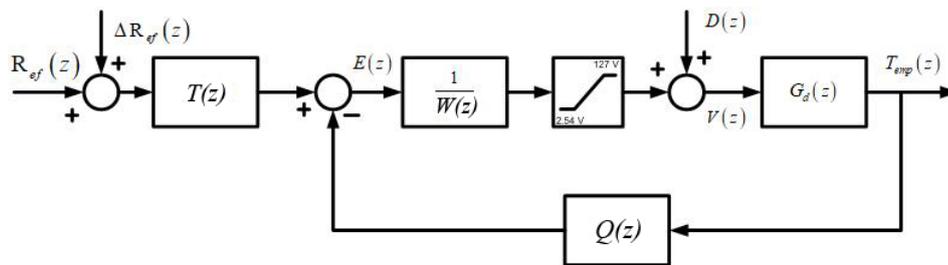


Figura 3.1: Implementação de Controle Digital em Malha Fechada.

### 3.2.1 Metodologia de Sintonia de Controlador Robusto de Ordem Fracionária

A metodologia proposta de projeto de controle neste trabalho é uma forma hibridizada do controle robusto paramétrico e a teoria de controle de ordem fracionária. O procedimento de parametrização de especificações de desempenho quanto à determinação dos intervalos paramétricos é auxiliado pela plotagem de superfícies tridimensionais cujos eixos são o tempo de estabilização versus fator de amortecimento e frequência

natural, afim de visualmente assistir ao projetista encontrar uma faixa adequada de valores de especificações desejadas para o comportamento do sistema com controle de ordem fracionária. Esta análise inicial define um problema paramétrico intervalar e visa melhorar o desempenho do controle robusto. O fluxograma da metodologia de controle proposta é esboçada na Figura 3.2, e as etapas delineadas a seguir fornecem mais informações sobre definições e escolhas.

**Início** - Como a metodologia proposta é adequada para projetar uma estrutura de controle robusta em relação às incertezas paramétricas, significa que os coeficientes nas funções de transferência são tratados como intervalos em vez de valores únicos. Conseqüentemente, as especificações de desempenho no domínio do tempo devem aderir à mesma consideração e mentalidade descritas nas etapas seguintes da metodologia.

**Passo 1** - Escolha a faixa de sobressinal máximo desejado. Intuitivamente, utiliza-se de zero a um valor máximo, contudo se o projetista não tiver nenhuma informação sobre o sistema a ser controlado, um teste de malha aberta pode ser executado ou um controle de malha fechada de ordem inteira previamente ajustado pode ser consultado. Em seguida, encontre o intervalo do fator de amortecimento " $\xi$ " como uma a exponencial clássica bem conhecida para o respectivo sobressinal solicitado e selecione um fator de ordem fracionária fixo, tipicamente:  $0 < \alpha < 1$  ou  $1 < \alpha < 2$  para a estrutura de controle de ordem fracionária (Li *et al.*, 2019).

**Passo 2** - Trace a superfície paramétrica do tempo de acomodação versus  $\xi$  versus  $\omega_n$  para o fator  $\alpha$  escolhido usando a Equação (3.14).

**Passo 3** - Obtenha a faixa de frequências naturais " $\omega_n$ " diretamente na superfície tridimensional do tempo de acomodação e de modo concordante com a faixa do fator de amortecimento escolhida e o comprometimento do tempo de acomodação desejado. Neste ponto, é importante considerar se as especificações desejadas precisam ser alteradas e os parâmetros  $\xi$  e  $\omega_n$  recalculados. Se necessário, retorne a etapa 1 acima; caso contrário, prossiga para a etapa 4.

**Passo 4** - De acordo ação de controle desejada determine a estrutura do controlador, definindo a ordem da função de transferência e por exemplo com um integrador para atender aos requisitos de erro nulo estado estacionário. Leve em consideração a influência do fator fracionária  $\alpha$  escolhido na formação dos polinômios do numerador e do denominador. Posteriormente, iguale a equação diofantina ao polinômio de malha fechada

característico ( $P_{CL}$ ), seguindo neste momento uma abordagem similar ao caso de ordem inteira, conforme demonstrado na Equação (3.16).

$$P_{CL}(s) = den [C_{forc}(s)G_{processo}(s)] + num [C_{forc}(s)G_{processo}(s)] \quad (3.16)$$

onde  $P_{CL}(s)$  representa o polinômio de malha fechada que pode ser aumentado com polos auxiliares se necessário para completar a ordem e se adequar à mesma ordem do polinômio de especificações alvo na equação diofantina, como um caso clássico de alocação de polos (Landau,2006). As funções de transferência  $C_{forc}(s)$  e  $G_{processo}(s)$  em variável de Laplace respectivos ao tempo contínuo são do controlador de ordem fracionária e de processo a controlar, respectivamente.

Construa um conjunto de restrições para o problema de otimização, conforme definido pelas desigualdades descritas na Equação (3.11). Estenda este conjunto para abranger uma equação diofantina organizada igualmente ao caso de alocação clássica de polos, considerando todos os intervalos de incerteza numérica inerentes ao problema. Posteriormente, de forma semelhante ao problema clássico de incerteza paramétrica, ele é resolvido por meio de otimização via programação linear. Os coeficientes fixos de ordem fracionária serão determinados caso existir uma solução para o problema de otimização convexa como na Equação (3.12).

**Passo 5** - Para fins de implementação, obter o controlador de ordem inteira equivalente aplicando o método de discretização invariante de resposta ao impulso de integradores/diferenciadores de ordem fracionária (IRID-FOD) (YangQuan Chen, 2023). Se os controladores de ordem fracionária exibirem uma ordem superior como resultado da aproximação de ordem inteira, por exemplo, excedendo a quarta ordem, prosseguir para a etapa 6. Caso contrário, seguir diretamente para a etapa 7.

**Passo 6** - Execute uma redução de ordem usando o método de Hankel, garantindo que nenhuma característica do controlador seja perdida. Posteriormente, o controlador estará pronto para ser embarcado em hardware caso seja aplicável a alguma aplicação específica ou simulação computacional.

**Passo 7** - Por fim, conduza testes em malha fechada para avaliar o desempenho do controlador por meio experimental ou simulação computacional. Se a versão obtida do controlador não atender aos critérios desejados, voltar ao passo 1 e considerar selecionar uma nova estrutura de controle ou ajustar as restrições de desempenho com menos

conservadorismo. Este processo iterativo permite refinar a sintonia do controlador até que o desempenho desejado seja alcançado.

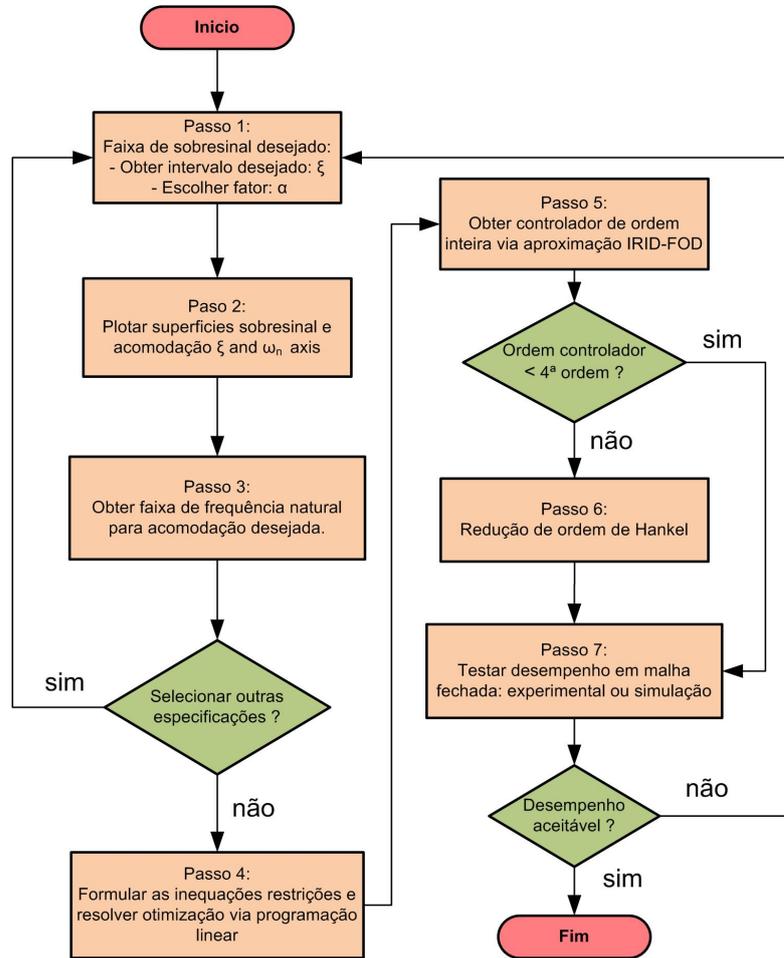


Figura 3.2: Fluxograma do Método de Controle Robusto de Ordem Fracionária.

### 3.3 Exemplo Numérico 1: Sistema Integrador

Considere a seguinte função de transferência em (3.17)

$$G(s) = \frac{b_0}{s} \quad (3.17)$$

onde  $b_0 \in [b_0^-, b_0^+] = [5; 10]$ ;

Neste exemplo, pretende-se derivar um controlador do tipo Proporcional + Derivativo (FOPD) robusto de ordem fracionária cuja estrutura foi escolhida arbitrariamente para fins de demonstração. O objetivo é alcançar um sistema em malha fechada que

atenda a um conjunto específico de requisitos, mesmo na presença de parâmetro incerto  $b_0 = [b_0^-, b_0^+]$ . Como primeiro passo opta-se por uma faixa inicial de sobressinal máximo de 1% a 62%, determinando assim a taxa de amortecimento correspondente em uma faixa de 0,15 a 0,8. Posteriormente, um fator de ordem fracionária  $\alpha = 0,5$  do controlador é selecionado, conforme descrito na etapa 1.

De acordo com a Equação (3.14), é possível traçar a superfície acerca do tempo de acomodação em relação ao fator de amortecimento ( $\xi$ ) e frequência natural ( $\omega_n$ ) mostrada na Figura 3.3. Efetivamente, foi escolhida a respectiva faixa de frequência natural de  $\omega_n = [1, 57; 7, 72]$  rad/s devido atender aos requisitos referentes à faixa de tempo de acomodação  $t_s = [0, 1; 10]$  segundos, considerando também o coeficiente de amortecimento desejado.

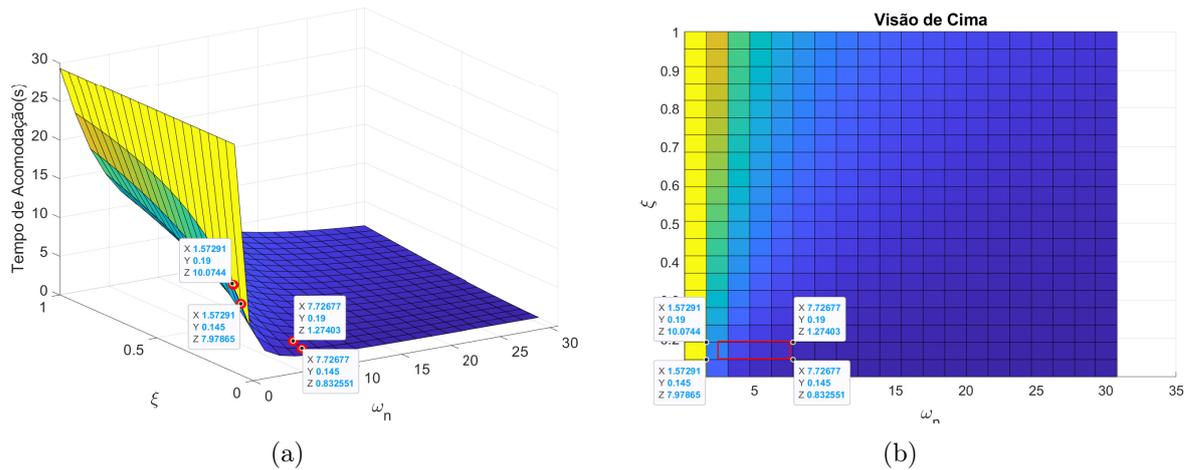


Figura 3.3: Superfície de parametrização da frequência para o exemplo do FORC-PD.

Assim, um polinômio alvo desejado pode ser escolhido como uma forma padrão pseudo-segunda ordem fracionária apresentada em [Merrikh-Bayat e Karimi-Ghartemani \(2008\)](#) e [Podlubny \(1998\)](#), e de acordo com a Equação (3.18) para o fator de ordem fracionária  $\alpha = 0,5$ . Os intervalos paramétricos definem os limites das desigualdades de restrição da formulação do problema de acordo com a ordem inteira na Subseção 2.2 e são particularizados para o exemplo abaixo.

$$P_d(s) = s^{2\alpha} + 2\xi_d\omega_n^\alpha s^\alpha + \omega_n^{2\alpha} = s + p_{d0.5}s^{0.5} + p_{d0} \quad (3.18)$$

onde  $p_{d0.5} = [0, 4710; 12, 3520]$  e  $p_{d0} = [2, 4649; 59, 5984]$ , uma vez escolhido a ordem fracionária  $\alpha = 0,5$ .

Para o exemplo de controle robusto de PD de ordem fracionária, é escolhida uma estrutura semelhante à apresentada na Equação (3.19). Esta estrutura introduz dois parâmetros de controle, nomeadamente  $C_{0,5}$  e  $C_0$ , que precisam ser determinados para o caso dado. O objetivo é calcular valores apropriados para estes parâmetros para alcançar o comportamento de controle desejado, garantindo ao mesmo tempo robustez e atendendo aos requisitos de desempenho especificados.

$$C(s) = C_{0,5}s^{0,5} + C_0 \quad (3.19)$$

Considerando a família de processos representada por  $G(s)$  na Equação (3.17), que é caracterizada por valores infinitos do único parâmetro intervalar  $b_0$ , e o controlador  $C(s)$  definido na Equação (3.19), um polinômio característico de malha fechada  $P_{CL}(s)$  emerge como resultado. Este polinômio é expresso na forma de uma equação diofantina, conforme mostrado na Equação (3.20) a seguir. Esta formulação engloba a relação entre o processo e o controlador.

$$P(s) = s + ([b_0^-, b_0^+] C_{0,5}) s^{0,5} + ([b_0^-, b_0^+] C_0) \quad (3.20)$$

Similarmente à abordagem adotada na subseção 3.1 (Keel & Bhattacharyya, 1998), o processo envolve a formulação de um conjunto de desigualdades lineares, conforme expresso na Equação (3.21). Essas desigualdades orientam o processo de otimização da programação linear para determinar os parâmetros do controlador. O objetivo é encontrar valores de parâmetros que atendam às restrições de intervalo impostas pelos alvos desejados e atendam às especificações de controle no domínio do tempo e com robustez.

$$\begin{bmatrix} p_{d0,5}^- \\ p_{d0,5}^- \\ p_{d0}^- \\ p_{d0}^- \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} b_0^- & 0 \\ b_0^+ & 0 \\ 0 & b_0^- \\ 0 & b_0^+ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_{0,5} \\ C_0 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} p_{d0,5}^+ \\ p_{d0,5}^+ \\ p_{d0}^+ \\ p_{d0}^+ \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

Um problema de programação linear padrão é configurado para minimizar o funcional  $F = C_{0,5} + C_0$ . Assim que obtida solução do problema de otimização via programação linear, são encontrados os parâmetros do controlador  $C_{0,5} = 0,0942$  e

$C_0 = 0,4930$ . Com este controle de ordem fracionária alcançado, uma aproximação "IRID-FOD" é realizada para obter uma função de transferência discreta de ordem inteira em (3.22) de acordo com os passos 5 e 6 realizados sem maiores dificuldades, não necessitando uma redução de ordem de Hankel.

$$C(z) = \frac{1,50z - 1,007}{z - 0,2865} \quad (3.22)$$

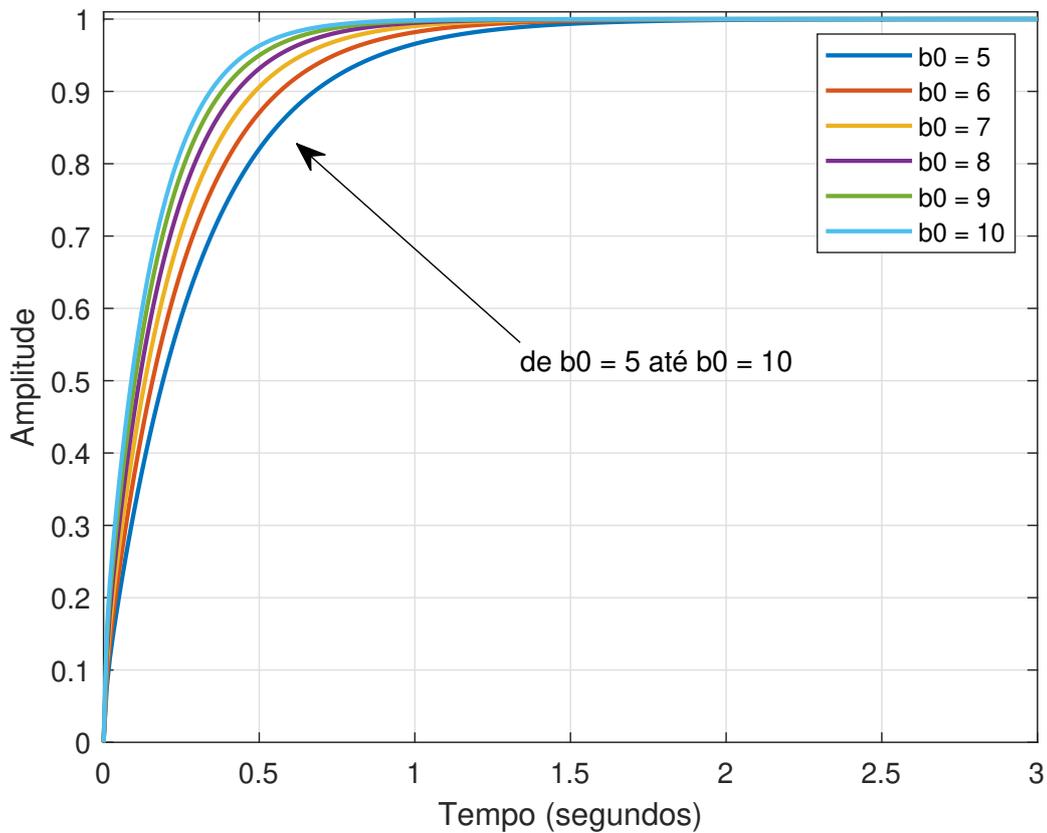


Figura 3.4: Resposta ao degrau unitário para um controlador FORC-PD.

Foi realizado um teste de resposta degrau unitário em malha fechada para a família de plantas: sistema integrador,  $G(s)$  deste exemplo, considerando a incerteza paramétrica no numerador da função de transferência e também o controlador  $C(s)$  obtido seguindo a metodologia de sintonia proposta (como apresentado no passo 8). O resultado conforme observado na Figura 3.4 destacando-se os tempos de acomodação dentro do intervalo paramétrico. Embora nenhum sobressinal seja apresentado, as especificações: tempo de acomodação e sobressinal máximo foram atendidas satisfatoriamente pelo controlador  $C(s)$ . Tal resposta demonstra robustez quanto ao atendimento dos requisitos de projeto apesar

da incerteza paramétrica que interfere no comportamento dinâmico do processo. Neste exemplo, a planta integradora garante uma resposta de estado estacionário zero devido à sua natureza tipo 1 para um sinal de referência do tipo degrau.

### 3.4 Exemplo Numérico 2: Sistema de Ordem Fracionária

Neste exemplo é explorado um emprego da metodologia FORC aplicada a um sistema de ordem fracionária com pseudo-segunda ordem de fator fracionário  $\alpha = 0.8$ . O sistema é derivado de uma pesquisa de identificação paramétrica de ordem fracionária apresentada em [Campos et al. \(2024\)](#) a partir da qual neste trabalho foi entendida à consideração de incertezas paramétricas intervalares reproduzidas em três parâmetros  $b_0$ ,  $a_1$  e  $a_0$ , conforme apresentado na Equação (3.23).

$$G(s) = \frac{[b_0^-, b_0^+]}{s^{1,6} + [a_1^-, a_1^+] * s^{0,8} + [a_0^-, a_0^+]} \quad (3.23)$$

onde os parâmetros incertos tem os seguintes valores:  $b_0 = [529, 935; 652, 722]$ ,  $a_1 = [9, 8728; 11, 12]$  e  $a_0 = [252, 35; 310, 82]$ .

A estrutura de controlador para este teste numérico é selecionada para obtenção de uma desejável resposta com erro de regime permanente nulo. Para tal, um polo na origem (de ordem inteira) deve ser introduzida no denominador da função de transferência para garantir esta ação de controle, conforme Equação (3.24). O número de parâmetros e o grau de cada termo pode ser escolhido de maneira que com o igualamento do polinômio desejado de especificações  $P_d = (s^{2\alpha} + 2\xi\omega_n s^\alpha + \omega_n)(s + p_{aux})$  e o polinômio de malha fechada provoque o casamento de termos de todos os graus na equação diofantina formada. O fator fracionário utilizado aqui é de  $\alpha = 0,2$  com alguns fatores omitidos propositalmente para casamento de ordens com o  $P_d$  deste exemplo que são as potências em ordem decrescente: 1.8, 1.6, 1, 0.8 e 0, resultando em cinco parâmetros de controlador.

$$G(s) = \frac{C_{18}s^{1,8} + C_{16}s^{1,6} + C_{1}s + C_{08}s^{0,8} + C_0}{s} \quad (3.24)$$

Considerando os passos 1, 2 e 3 da metodologia FORC, uma faixa de fator de amortecimento  $\xi = [0, 7; 0, 91]$  foi obtida de maneira a garantir sobressinal não excedente

a 5% no espaço fracionário obtendo a partir da curva de superfície frequência natural  $\omega_n = [6.93, 2285.53]$  rad/s para um tempo de acomodação desejado não superior a 0,5 segundo. O conjunto de restrições formulados para o problema de programação linear é mostrado na Equação (3.25).

$$\begin{bmatrix} p_{18}^- - a_1^- \\ p_{d18}^- - a_1^- \\ p_{d18}^- - a_1^+ \\ p_{d18}^- - a_1^+ \\ p_{16}^- \\ p_{d16}^- \\ p_{d1}^- - a_0^- \\ p_{d1}^- - a_0^- \\ p_{d1}^- - a_0^+ \\ p_{d1}^- - a_0^+ \\ p_{d08}^- \\ p_{d08}^- \\ p_{d0}^- \\ p_{d0}^- \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} b_0^- & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_0^+ & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_0^- & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_0^+ & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_0^- & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_0^+ & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_0^- & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_0^+ & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_0^- & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_0^+ & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_0^- & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_0^+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_0^- \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_0^+ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_{1.8} \\ C_{1.6} \\ C_1 \\ C_{0.8} \\ C_0 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} p_{18}^+ - a_1^- \\ p_{d18}^+ - a_1^- \\ p_{d18}^+ - a_1^+ \\ p_{d18}^+ - a_1^+ \\ p_{16}^+ \\ p_{d16}^+ \\ p_{d1}^+ - a_0^- \\ p_{d1}^+ - a_0^- \\ p_{d1}^+ - a_0^+ \\ p_{d1}^+ - a_0^+ \\ p_{d08}^+ \\ p_{d08}^+ \\ p_{d0}^+ \\ p_{d0}^+ \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

O problema tratou de minimizar o funcional  $F = C_{18} + C_{16} + C_1 + C_{08} + C_0$ , similar ao caso clássico de ordem inteira. Assim que obtida solução do problema de otimização via programação linear, foram encontrados os parâmetros do controlador como:  $C_{18} = -0,010876, C_{16} = 0,23556s, C_1 = -0,31293, C_{08} = 0,65343$  e  $C_0 = 11,329$ .

Na Figura 3.5 é apresentada a resposta ao degrau de amplitude 2, ocorrido no instante 0,1 segundo para três plantas: com valores mínimos, médios e máximos de seus parâmetros intervalares. Pode ser observada uma resposta com comportamento sub-amortecido com atendimento das especificações no domínio do tempo, tanto com controlador quanto a planta no plano-S fracionário. Os toolboxes FOMCON e FOTF de MATLAB/Mathworks ( [Aleksei Tepljakov, 2023](#)) dedicadas à modelagem e controle de ordem fracionária de sistemas dinâmicos auxiliaram nos cálculos deste exemplo.

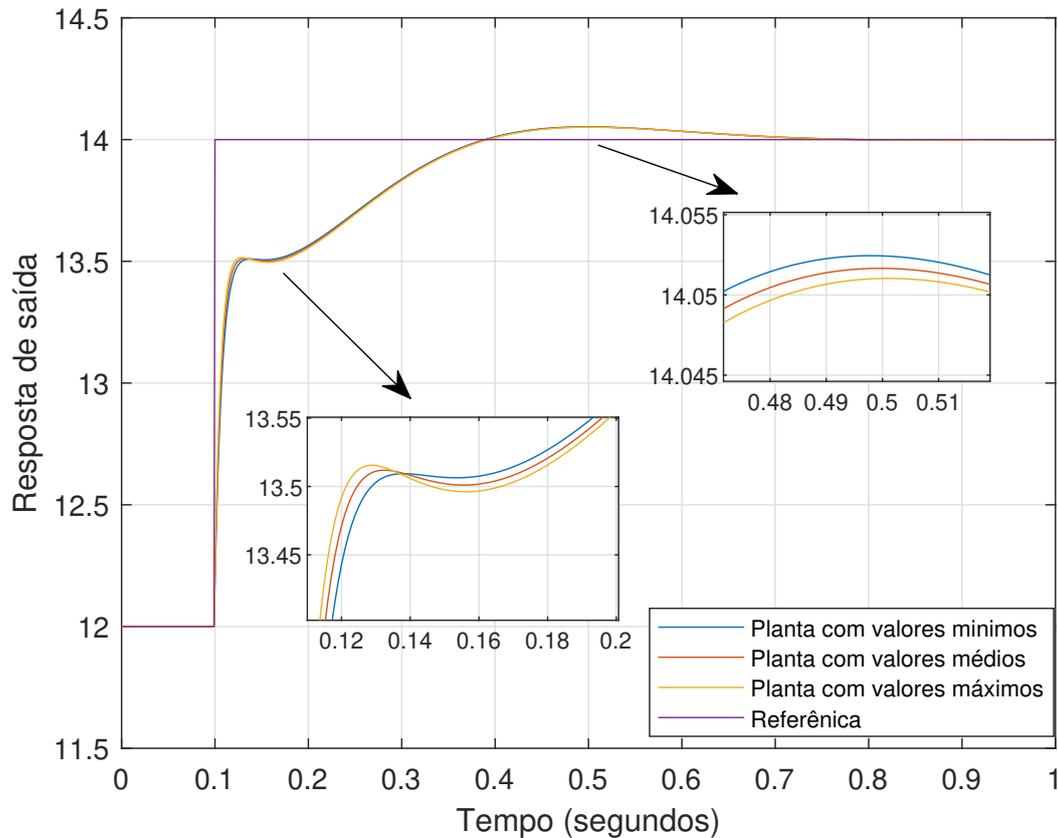


Figura 3.5: Reposta ao degrau para um controlador FORC-PI e planta fracionária.

### 3.5 Conclusão

Neste capítulo, foram apresentados alguns conceitos sobre a teoria de sintonia de controladores robustos de sistema com incerteza paramétrica. Também foi abordado a inclusão de controladores de ordem fracionária neste contexto segundo uma proposta de metodologia de sintonia afim de se obter uma melhora desempenho em sistemas de ordem inteira com incerteza paramétrica, onde foi apresentado um fluxograma e descrição das etapas de sintonia do controlador denominado de FORC - *controle robusto de ordem fracionária*. Por fim, dois exemplos numéricos ilustrativo foram usados para fins de aplicação da metodologia proposta utilizando uma estrutura PD (Proporcional + derivativa) e uma planta de 1ª ordem com um parâmetro incerto, demonstrando o atendimento do controlador às especificações para toda a família de processos além de outro exemplo com estrutura PI em uma planta de ordem fracionária apresentando conformidade com especificações de projeto.

# Capítulo 4

## Aplicação da Metodologia em um Sistema Térmico Experimental

O estudo de caso para aplicação da metodologia de sintonia do controlador FORC proposto é apresentado neste capítulo para controle de temperatura em um protótipo de sistema térmico de bancada. Os testes que foram configurados, juntamente com o aparato experimental do processo térmico são também descritos. Foram realizados testes práticos para fins de identificação de modelo paramétrico intervalar, seguidos de implementação de controle em malha fechada segundo a metodologia FORC de desempenho das respostas do processo no domínio do tempo e apresentação dos índices para avaliação de desempenho da robustez nos pontos de operação explorados no teste para os sinais de erro e de controle.

### 4.1 Obtenção Experimental dos Parâmetros Intervalares

#### 4.1.1 Sistema Térmico Experimental

Processos dinâmicos com transferência e armazenamento de calor são usualmente denominados de sistemas térmicos. A temperatura mais alta é a principal maneira de verificar o calor armazenado nos materiais. Para tal, transferências de energia na forma por condução, convecção (ou transferência de massa) e radiação são formas de verificar os fluxos de calor. Segundo cada característica resumida a seguir:

- A transferência de calor por condução ocorre quando existe uma diferença de tempe-

ratura em um objeto. Como exemplo, o fluxo de calor que ocorre através da parede de um edifício se a temperatura interna for maior (ou menor) que a temperatura externa;

- A transferência de calor por convecção envolve o fluxo de calor em um líquido ou gás, como quando um ventilador produz ar frio sobre um objeto quente, o ar carrega parte do calor do objeto;
- A transferência de calor por radiação, como a transferência condutiva, é causada por uma diferença de temperatura entre os objetos e não requer um meio físico para o fluxo de calor, com capacidade de fluir através do vácuo.

Na Figura 4.1 é apresentado o sistema térmico utilizado nos testes experimentais realizados deste trabalho. Este sistema de bancada utilizado para implementação da lei de controle de forma digital e aquisição com registro de dados de saída e atuação é composto por uma caixa isolada termicamente que abriga uma lâmpada de 252 Watts como atuador e um ventilador de 12 Volts funcionando como homogeneizador de calor. Além disso, o protótipo possui uma interface de usuário em um computador com programação baseado em linguagem Python para monitoramento e gravação de dados, e ainda facilita a comunicação de dados entre o microcontrolador, o sensor de temperatura LM35 e os circuitos de acionamento/controlado.

Já na seguinte Figura 4.2, um diagrama esquemático detalhado ilustra as interconexões entre vários componentes. O elemento principal do sistema é um microcontrolador ATMEL ATmega328p que atua como processador da lei do controlador digital embarcada. Este microcontrolador mantém comunicação com a interface do usuário a uma taxa de amostragem de 1 segundo e gerencia o acionamento do processo, bem como o sinal de realimentação do sensor. O acionamento do atuador é implementado usando um circuito monofásico baseado em TRIAC, com capacidade de controle preciso de disparo do ângulo de fase. Também um circuito de detecção de passagem por zero envia um sinal de pulso digital ao detectar cruzamentos de zero, sendo útil para chaves estáticas com controle de fase com necessária base de tempo. Além disso, dentro do sistema, uma lâmpada realiza propriamente a atuação pois fornece o aquecimento necessário dentro do gabinete, enquanto uma ventilação forçada instalado internamente tem função principal homogeneizar a distribuição da temperatura.

O sensor de temperatura LM35 utilizado tem seu uso bem difundido e é conhecido pela sua precisão de  $1 \text{ mV}/^{\circ}\text{C}$  (1 milivolt por graus Celsius). Esses sensores são suficientes para acomodar uma ampla faixa de valores de temperatura nos testes práticos realizados neste estudo, garantindo assim a operação confiável do sistema em condições variáveis de temperatura. Ademais, diversas fontes de energia são responsáveis por alimentar e operar todo o conjunto: uma fonte de 12 V DC para a ventilação homogeneizadora de temperatura (que pode ser desabilitada para testes de perturbação), uma fonte de 5 V para o sensor de temperatura LM35 e uma fonte CA de 127 V para o circuito de controle de fase do atuador e entrega controlada para a lâmpada.

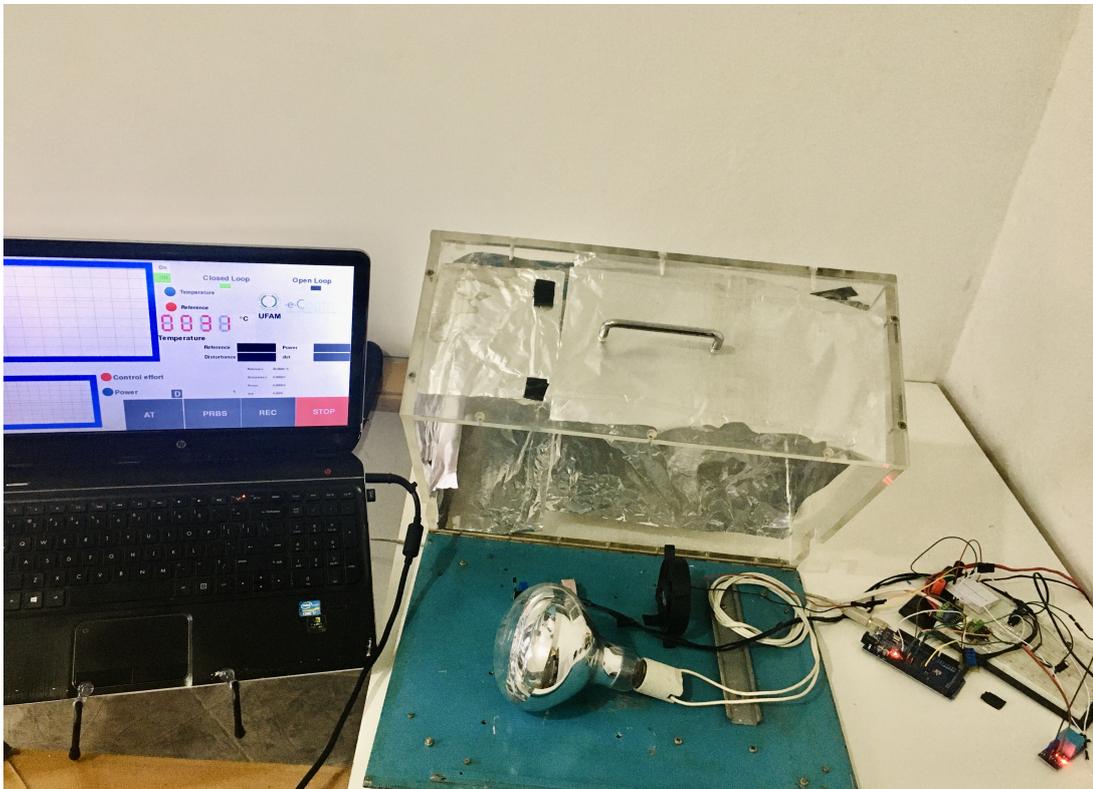


Figura 4.1: Sistema térmico experimental de bancada.

#### 4.1.2 Teste de Identificação paramétrica

Para prosseguir com o projeto baseado em modelo, alguns testes de identificação de resposta ao degrau e estimativa de parâmetros com mínimos quadrados foram feitos alterando a atuação da potência como entrada no processo. Conseqüentemente, uma família de modelos é reunida as quais descrevem os pontos de toda faixa de operação excursionada para o processo, representando assim por valores máximos e mínimos de

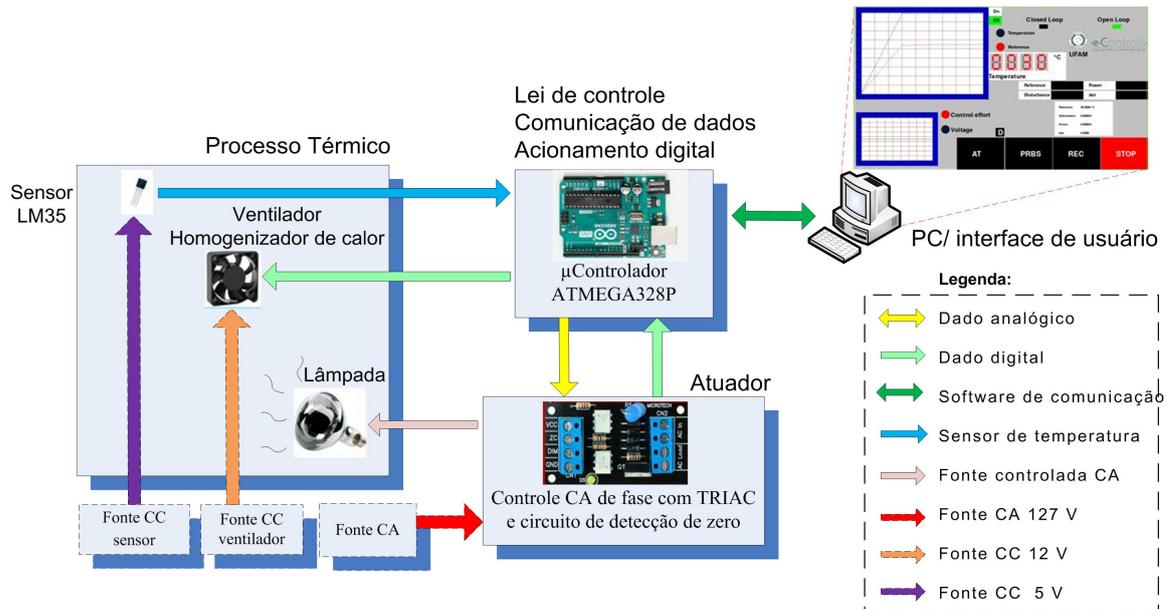


Figura 4.2: Diagrama esquemático do sistema térmico de testes.

cada parâmetro obtido, as incertezas paramétricas.

Para estes testes foram realizadas três configurações para distribuição de homogeneização do calor através do sinal digital de acionamento do ventilador: 6V, 9V e 12V, estabelecendo condições de baixa, média e alta circulação de calor. Para cada uma dessas condições foram realizadas duas excitações de potência com variações em degraus crescentes e duas decrescentes para fornecer quatro dinâmicas de  $80^{\circ}\text{C}$  a  $100^{\circ}\text{C}$  e de  $100^{\circ}\text{C}$  a  $114^{\circ}\text{C}$ , e as respectivas variações em degraus decrescentes, dando assim origem a quatro funções de transferência. Tais testes produziram um conjunto de 12 modelos dos quais foram extraídas variações paramétricas em um teste de 7.000 segundos para cada resposta ao degrau.

A função de transferência com incerteza paramétrica (e de ordem inteira) obtida do sistema térmico é apresentada em (4.1), onde  $b_1$ ,  $b_0$ ,  $a_1$  e  $a_0$  são dados por (4.2) a (4.5). Seu intervalo paramétrico é definido pelos valores mínimos e máximos de uma família de 12 funções de transferência do processo de identificação. Esta escolha de ordem do processo se deu pela necessidade de capturar características dinâmicas adicionais, como leves oscilações e amortecimento observados no processo experimental, que não poderia ser representados em um modelo de primeira ordem. Em sistemas térmicos com múltiplos componentes de inércia térmica de comportamento não linear para toda a faixa de temperatura como observado, a resposta pode apresentar comportamentos dinâmicos diferentes. Assim, o uso de uma função de transferência de segunda ordem proporciona um modelo mais

preciso, refletindo melhor a realidade observada em experimentos e permitindo uma análise procurando minimizar os erros de modelagem para os projetos de controle.

$$G(s) = \frac{b_1 s + b_0}{s^2 + a_1 s + a_0} \quad (4.1)$$

$$b_1 = [b_1^-, b_1^+] = [0, 00096275; 0, 0029] \quad (4.2)$$

$$b_0 = [b_0^-, b_0^+] = [0, 040048; 0, 47707] \cdot 10^{-5} \quad (4.3)$$

$$a_1 = [a_1^-, a_1^+] = [0, 0032; 0, 0198] \quad (4.4)$$

$$a_0 = [a_0^-, a_0^+] = [0, 046891; 0, 78605] \cdot 10^{-5} \quad (4.5)$$

A Figura 4.3(a) exibe o conjunto de dados experimentais de respostas ao degrau em malha aberta para uma homogeneização do calor do ventilador de 12 V do sistema térmico. Essas respostas mostram variações no comportamento dinâmico sob diferentes condições operacionais de temperatura e se mostram adequadas para representar as incertezas no projeto de controle robusto baseado em modelo.

Conforme observado em nas respostas dos modelos diante à variação de degrau unitário na Figura 4.3(b), as respostas ao degrau unitário do sistema térmico revelam características distintas, incluindo um ganho estático e tempos transitórios lentos de cerca de 3.000 segundos. Estas características são evidentes no comportamento monotônico do modelo de segunda ordem capturado.

## 4.2 Aplicação da metodologia FORC

A metodologia de sintonia FORC proposta e aplicada neste estudo se baseou no modelo com incerteza paramétrica obtido por identificação experimental de malha aberta apresentado na seção anterior, e correspondente à família de funções de transferências, observada na Equação (4.1), do sistemas térmico de testes.

Uma ordem fracionária foi escolhida como  $\alpha = 0,5$  para manter uma região de estabilidade mais ampla, em relação ao semi-plano esquerdo do plano-s padrão para ordem inteira, de acordo com a teoria de sistemas de ordem fracionária ( $0 < \alpha < 1$ ) (MONJE et al., 2010), e também satisfazendo o passo 1 da metodologia proposta ilustrada na Figura 3.2. Embora o projetista tenha uma livre seleção deste fator, neste trabalho fez-se

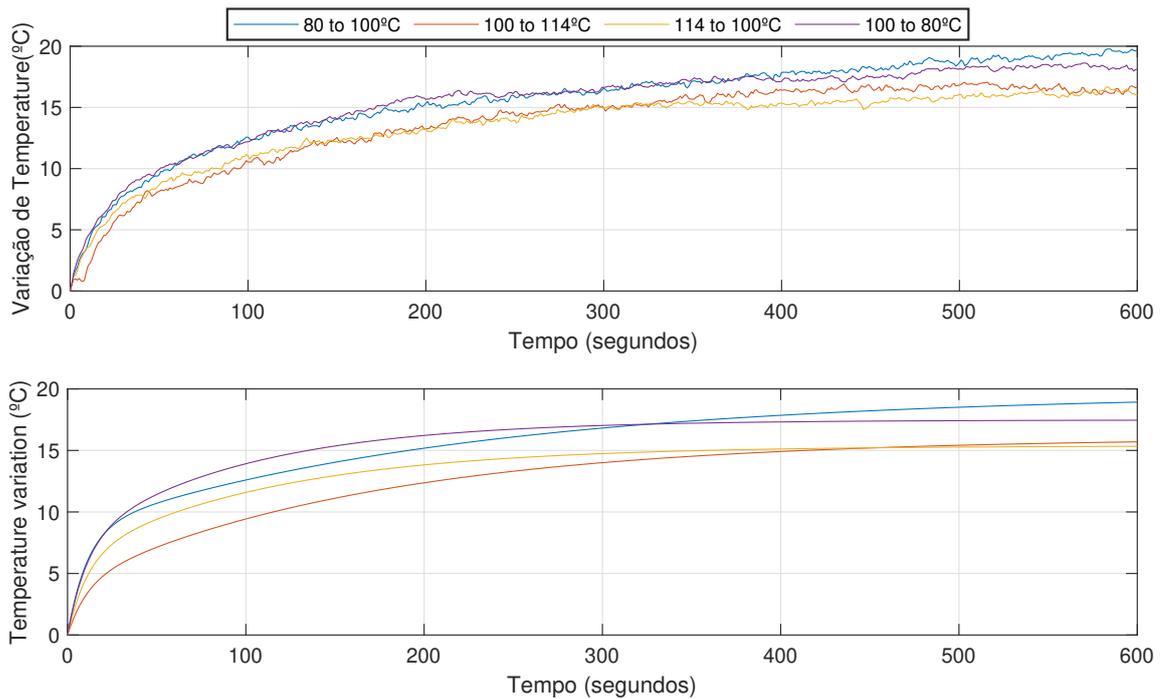
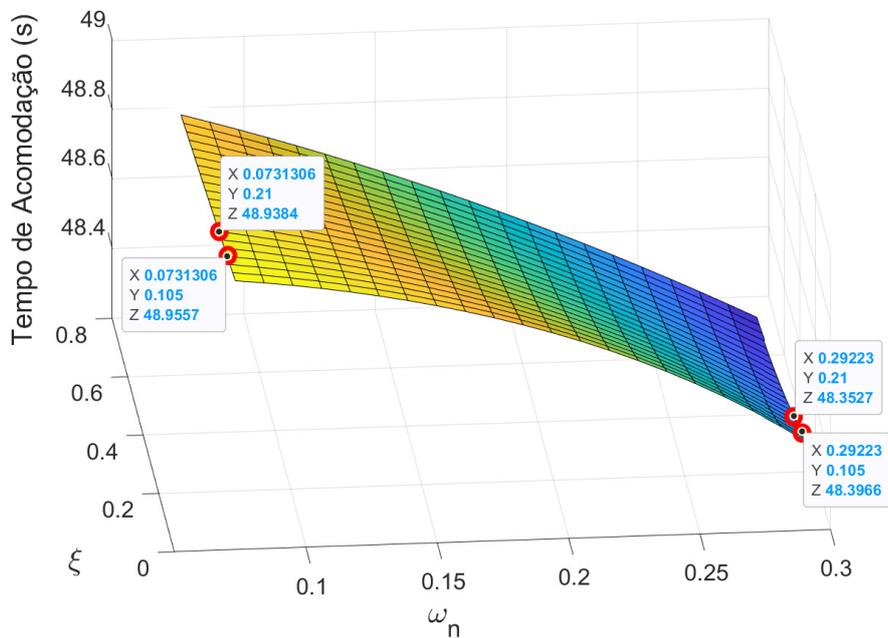


Figura 4.3: Resposta ao degrau para variação de potência de 50 a 75 Watts

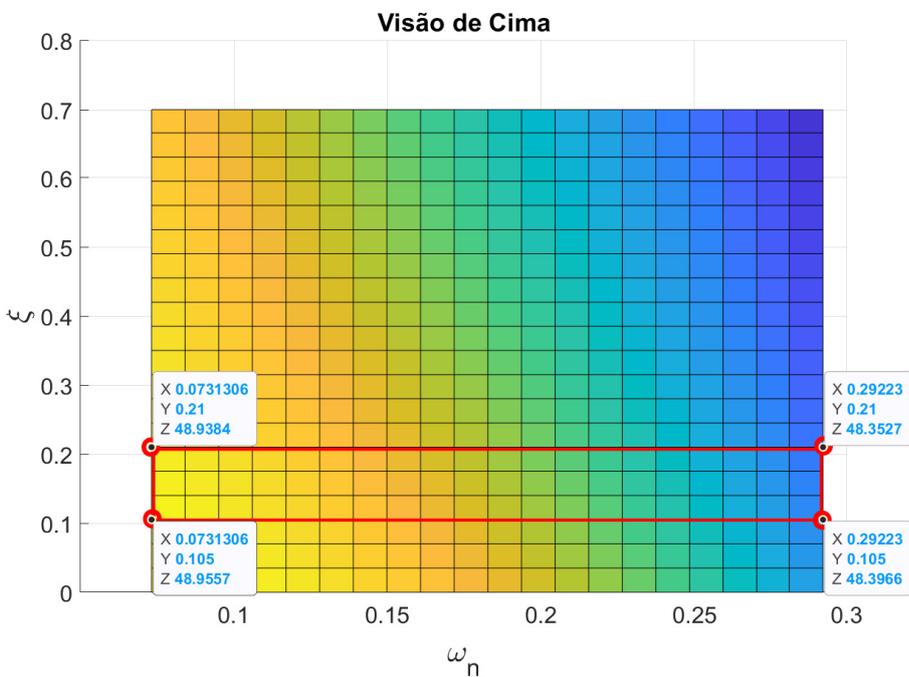
uma escolha comumente utilizada em vários artigos em aplicações de controle fracionário pesquisados até o presente momento, como por exemplo em [Ayres-Jr. et al. \(2018\)](#) e [N'Doye et al. \(2013\)](#).

Do mesmo modo, devido a natureza do tipo de sistema a controlar uma escolha não conservadora de sobressinal máximo selecionado de 50% e um tempo de acomodação rápido desejável entre 10 e 600 segundos, cumprindo assim o passo 1 da metodologia proposta. Na Figura 4.4, uma superfície tridimensional com tempo de acomodação versus os eixos de frequência natural e fator de amortecimento são representadas para o fator de ordem fracionária  $\alpha = 0,5$ . Como parte da etapa 3, os valores intervalares de frequência natural selecionados foram  $\omega_n = [0,0731; 0,2922]$  rad para uma faixa de fator de amortecimento de  $\xi_d = [0,2; 0,8]$ . Esta faixa de frequência deve ser selecionada para atender ao sobressinal máximo e ao tempo de acomodação especificados, respeitando a faixa do fator de amortecimento calculado e em consulta à respectiva superfície plotada.

Para ter paridade de condições de teste experimentais em comparação de técnicas de sintonia, um erro de regime permanente zero é desejável com ação integral dos controladores. Para tal, selecionou-se uma estrutura PI (proporcional+integral) para a sintonia RCBK -  $C_{RCBK}(s)$  ((4.6)) e a estrutura do controlador de ordem fracionária -  $C_{FORC}(s)$  é fornecida na Equação (4.7) para  $\alpha = 0,5$ . Como pode ser observado, quatro parâmetros



(a)



(b)

Figura 4.4: Superfície de parametrização de  $[\omega_n^-, \omega_n^+]$  para FORC.

Tabela 4.1: Parâmetros do Controlador Digital.

Parâmetros	FORC	RCBK
$q_2$	28,82	
$q_1$	-41,21	72,93
$q_0$	-1,5961	70,09
$w_1$	12,71	
$w_0$	-1,135	-1
$T$	0,1352	0,6101

do controlador são utilizados.

$$C_{PI-RCBK}(s) = \frac{c_0 + c_1 s}{s} \quad (4.6)$$

$$C_{FORC}(s) = \frac{c_{1,5} s^{1,5} + c_1 s + c_{0,5} s^{0,5} + c_0}{s} \quad (4.7)$$

Em seguida, depois de realizar a aproximação/discretização de ordem inteira via método IRID-FOD e aplicar a ordem de redução de Hankel à função de transferência de ordem fracionária, a metodologia proposta produziu os seguintes valores de coeficiente de controlador de ordem fracionária da Equação (4.7):  $C_{1,5} = 15,1921$ ,  $C_1 = 12,5826$ ,  $C_{0,5} = 0,9116$  e  $C_0 = 0,3333$ .

Os coeficientes do controlador em forma digital para os controladores PI-RCBK e PI-FORC, utilizando um período de amostragem de 1 segundo para todos experimentos e implementações em hardware, são fornecidos na Tabela 4.1. Estes valores representam os resultados práticos da metodologia e são utilizados para implementação por meio de equações de diferenças e qualquer análise teórica de sistemas lineares invariantes no tempo posterior caso necessária.

O gráfico de resposta em frequência de Bode apresentado na Figura 4.5 ilustra as características de magnitude e fase de uma função de transferência de ordem fracionária em tempo contínuo, comparando-as com sua contraparte discreta aproximada de ordem inteira. Observa-se que, em uma faixa significativa de frequências, a curva da função fracionária exibe comportamento semelhante à sua versão discretizada, validando a eficácia do processo de aproximação e manutenção das características de ação de controle integral. Essa similaridade sugere que, mesmo com a discretização para implementação em sistemas digitais, as propriedades dinâmicas essenciais da função de transferência original de ordem fracionária são preservadas. O alinhamento entre as respostas indica a possibilidade de replicar com precisão as propriedades desejadas de sistemas fracionários usando o método

IRID-FOD de aproximação de ordem inteira, facilitando sua aplicação prática em controle digital de sistemas.

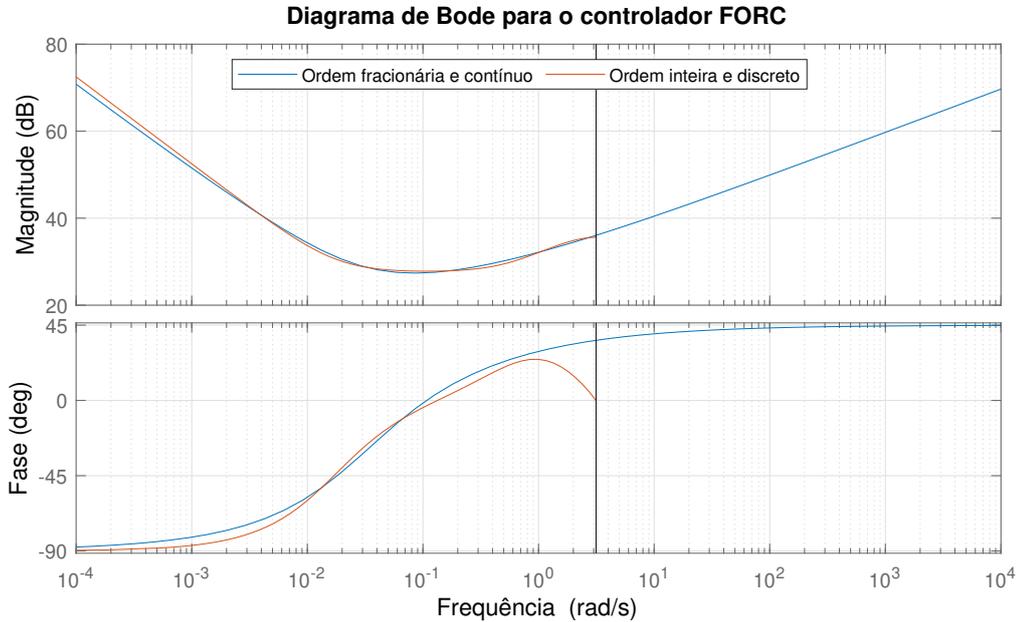


Figura 4.5: Resposta em frequência dos controlador FORC contínuo e discreto.

### 4.3 Avaliação de desempenho robusto

Para auxiliar na avaliação do desempenho robusto da metodologia proposta, são calculados as integrais de índices de desempenho para temperatura de resposta e esforço de controle do sistema. O ISE (do inglês *integral square error*) na Equação (4.8) calcula a integral do erro ao quadrado. O ITAE (do inglês *Integral of time multiplied Absolute Error*) avalia o erro ponderado pelo tempo calculado como na Equação (4.9). O ITAC (do inglês *Integral of time multiplied Absolute control signal*) contabiliza o esforço de controle multiplicado pelo tempo conforme a Equação (4.10). Por fim, o ISC ((do inglês *integral square control signal*)) quantifica a integral do sinal de controle quadrático de acordo com a Equação (4.11). Todos estes índices de desempenho são determinados na comparação entre os métodos de sintonia FORC e RCBK em todas as condições de operação estabelecidas em testes experimentais no sistema térmico.

$$ISE = \int_0^{\infty} e^2(t) dx \quad (4.8)$$

$$ITAE = \int_0^{\infty} t|e(t)| dx \quad (4.9)$$

$$ITAC = \int_0^{\infty} t|u(t)| dx \quad (4.10)$$

$$ISC = \int_0^{\infty} u^2(t) dx \quad (4.11)$$

onde  $e(t)$  e  $u(t)$  são o sinal de erro atuante e o sinal de controle do atuador do sistema em malha fechada, respectivamente

## 4.4 Conclusão

Neste capítulo foi abordado a aplicação da proposta de metodologia de controle fracionário robusto com incerteza paramétrica em um sistema térmico experimental de bancada. A apresentação e descrição do *hardware* do sistema de teste foi apresentada com detalhes sobre atuação de sinal de controle e comunicação para registro de dados experimentais. Adicionalmente, foi mostrado o procedimento para identificação para obtenção de modelos dinâmicos lineares do tipo função de transferência em diferentes condições de operação, permitindo a consideração da incerteza paramétrica incorporada ao processo. Ainda, a metodologia é inteiramente aplicada em cada uma das etapas elucidadas no Capítulo 3, onde foi permitida a obtenção de um controlador com características de ação integral e com introdução de especificações de desempenho desejadas. Finalizando este capítulo, são apresentados as fórmulas de cálculo para quantificação do desempenho robusto em comparação da técnica proposta e o método de sintonia de controle robusto robusto via programação linear clássico. Os valores numéricos obtidos calculados como resultados para cada controlador avaliado serão apresentados no capítulo seguinte.

# Capítulo 5

## Resultados

Neste capítulo são abordados os resultados experimentais obtidos no sistema térmico de bancada apresentado no Capítulo 4, a partir de variações de referência de temperatura realizadas entre 50°C e 70°C, com incrementos de 4 °C, seguidos de uma diminuição de 70°C para 50°C em passos decrescentes também de 4°C. Em seguida, três conjuntos de experimentos foram conduzidos sob diversas condições de homogeneização de calor, categorizadas especificamente como alta, média e baixa. Essas condições corresponderam respectivamente ao acionamento de um ventilador com 12V, 9V e 6V, para cada conjunto de experimentos. O sistema experimental em malha fechada foi equipado com dois controladores, sendo eles FORC (Controle Robusto de Ordem Fracionária) e RCBK (Controle Robusto Paramétrico de Bhattacharyya e Keel, implementando uma estrutura Proporcional+Integral). Esses controladores foram escolhidos para fins de comparação, e a metodologia de sintonia foi baseada em um modelo incerto obtido através de identificação experimental em malha aberta como visto na subseção anterior, que corresponde à família de funções de transferência descritas em (4.1) para o sistema térmico banco de testes de sistemas.

### 5.1 Testes em simulação computacional

Nesta seção, são apresentados testes em simulações computacionais da metodologia proposta em malha fechada, aplicada ao modelo incerto do sistema térmico experimental descrito na seção 4.1. Em paralelo, afim de verificar qual melhor estrutura para fins de avaliação contra uma metodologia clássica, são foram realizadas duas sintonias com

o projeto robusto paramétrico RCBK: de um controlador PI com dois parâmetros e, adicionalmente, de um controlador PID com filtro derivativo (FD) com quatro parâmetros. As especificações de desempenho similares para as três sintonias de controladores são discutidas, juntamente com as estruturas e as formulações matemáticas na forma de otimização convexa por meio de programação linear para os casos clássicos de controladores PI e PID+FD, ambos no contexto do método RCBK. Primeiramente para uma especificação de desempenho equiparada à metodologia FORC proposta, as mesmas condições desejadas foram estabelecidas para os projetos robustos paramétricos clássicos (RCBK) tanto de PI como para o PID com filtro derivativo, ou seja, para tempos de acomodação especificou-se 10 a 600 segundos e como sobressinais máximos até 50 %. Seguindo a metodologia clássica de formulação de problema com robustez paramétrica de ordem inteira conforme apontado na seção 3.1, e de acordo com as estruturas de controle segundo as Equações (5.1) e (5.2), foram definidas inequações de restrições para o formulação da otimização via programação linear similarmente na Equação (3.11) com : 14 linhas para o projeto do PI - RCBK e 30 linhas para controlador PID com filtro. Similarmente comparando ao controlador FORC projetado segundo apresentado na Seção 3.2 obteve em seu projeto um total de 38 linhas. As verificações dos tempos computacionais de cálculo de cada controlador revelaram uma relação com a quantidade de linhas da formulação da otimização convexa, sendo: , 0.013382, 0.105687 e 0.220883 segundos, para os controladores PI-RCBK, PID+FD-RCBK e FORC, respectivamente.

$$C_{PI-RCBK}(s) = \frac{c_0 + c_1s}{s} \quad (5.1)$$

$$C_{PID+filtro-RCBK}(s) = \frac{c_0 + c_1s + c_2s^2}{s(s + d_1)} \quad (5.2)$$

$$C_{FORC}(s) = \frac{c_0 + c_{0,5}s^{0,5} + c_1s + c_{1,5}s^{1,5}}{s} \quad (5.3)$$

Foram obtidos os seguintes valores de parâmetros para o controlador PI-RCBK  $c_1 = 67.4111$   $e c_0 = 2.8477$  e para o controlador PID+FD  $c_2 = -167.4129$ ,  $c_1 = 272.8061$ ,  $c_0 = 24.6067$   $e d_1 = 50, 3597$  (conforme Seção 3.2 para o FORC  $C_{1,5} = 15, 1921$ ,  $C_1 = 12, 5826$ ,  $C_{0,5} = 0, 9116$  e  $C_0 = 0, 3333$ ). Na Figura 5.1 são apresentados os resultados respostas de saída em malha fechada à variação degrau unitário no sinal de referência considerando os três controladores sintonizados e comparando-se para dois modelos extremos sendo os

modelos identificados de 80 a 100 °C (linha tracejada) e 100 a 114 °C de subida (linha continua) para ventilação em 12 V, de acordo com Seção 4.1).

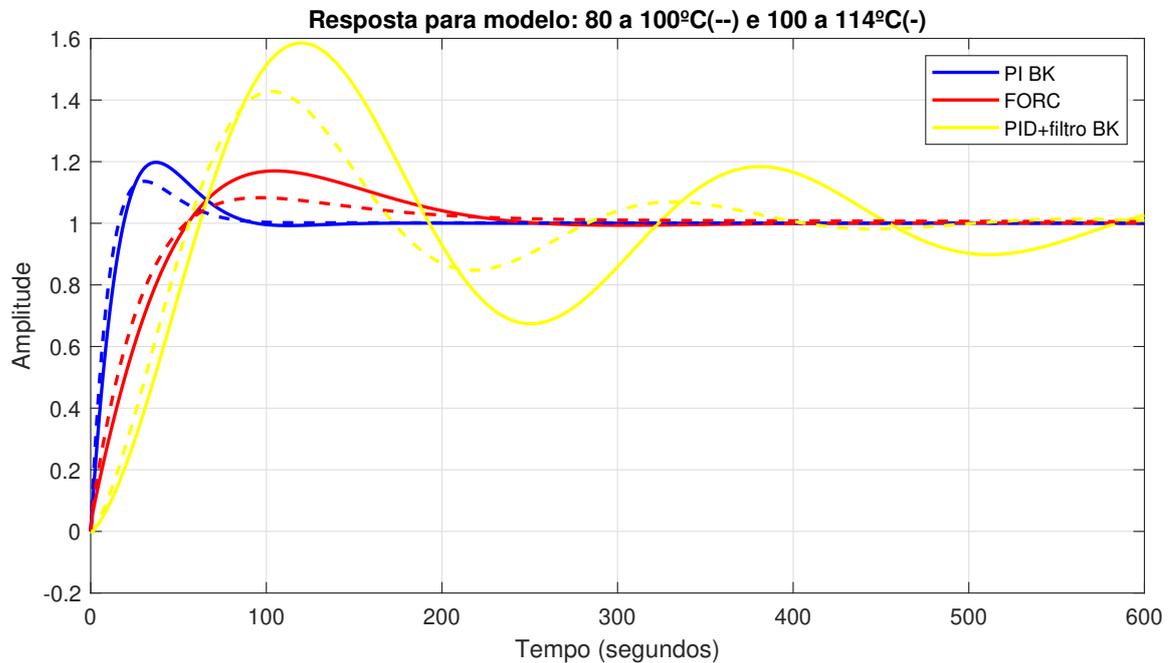


Figura 5.1: Respostas com modelos de 80 a 100 °C (tracejada) e 100 a 114 °C (continua).

Na Figura 5.3 os respectivos sinais de controle do teste de variação degrau unitário no sinal de referência são observados para o teste com dos dois modelos identificados.

Diante dos resultados das simulações computacionais, verificou-se que todos os controladores conseguiram atender às especificações de não ultrapassagem de 50% de sobressinal e tempo máximo de 600 segundos. No entanto, observou-se um tempo de acomodação mais prolongado e uma maior suscetibilidade às variações paramétricas, com uma diferença de 200 segundos em dois pontos de operação distintos, além de um comportamento aleatório acentuado de aproximadamente 0,0234 rad/s no controlador PID+FD para ambos os modelos extremos de variação de temperatura. Em comparação, o controlador PI-RCBK e o FORC apresentaram respostas mais rápidas e sobressinais máximos inferiores a 20%.

Adicionalmente, embora o controlador PI-RCBK tenha demonstrado um tempo de acomodação mais rápido, ele exibiu um sinal de controle mais agressivo, com maior amplitude e esforço, além de uma oscilação observada com sub-sinal para o modelo identificado na faixa de 80 a 100 °C. Por outro lado, o FORC mostrou-se mais robusto, com menores variações de desempenho diante às mudanças paramétricas.

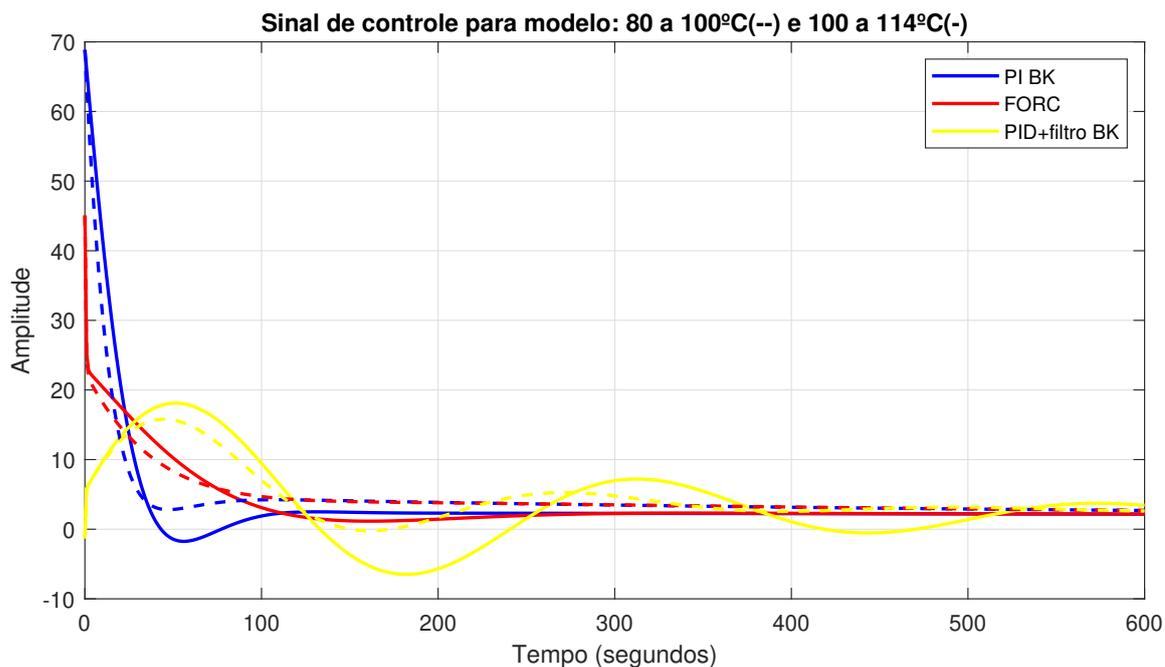


Figura 5.2: Sinais de controle com modelos de 80 a 100 °C (tracejada) e 100 a 114 °C (contínua).

Portanto, justificou-se a viabilidade de prosseguir com testes experimentais mais extensos comparando apenas os controladores PI-RCBK (com dois parâmetros) e FORC (com quatro parâmetros), descartando o controlador PID+FD (com quatro parâmetros) para fins de comparação no sistema térmico de bancada.

## 5.2 Teste experimentais em diferentes condições de operação e homogeneização de calor

A Figura ?? ilustra o teste completo de variação do sinal de referência de temperatura para homogeneização de calor com ventilador operando em alta velocidade (12 V). Inicialmente, o sistema térmico está a 50°C, e variações em degraus positivos de 4°C é introduzida a cada 1000 segundos para ambos os controladores sintonizados, FORC e RCBK, e respectivamente variações degrau negativo a partir de 6000 segundos. A resposta da temperatura em °C é exibida na parte superior da figura, enquanto o sinal de controle em watts é mostrado na parte inferior.

Pode ser observado que a abordagem FORC proposta atende consistentemente aos objetivos de projeto tanto para as variações crescentes quanto decrescentes no sinal

de referência de temperatura, alcançando um tempo de estabilização inferior a 500 s e mantendo uma resposta dinâmica monotônica sem sobressinal. Por outro lado, a abordagem de controle RCBK, embora também atenda aos parâmetros de projeto, exibe uma estratégia de controle com ações de controle de maiores amplitudes, resultando em uma resposta um pouco mais rápida, a despeito de um sobressinal proeminente e uma pequena oscilação.

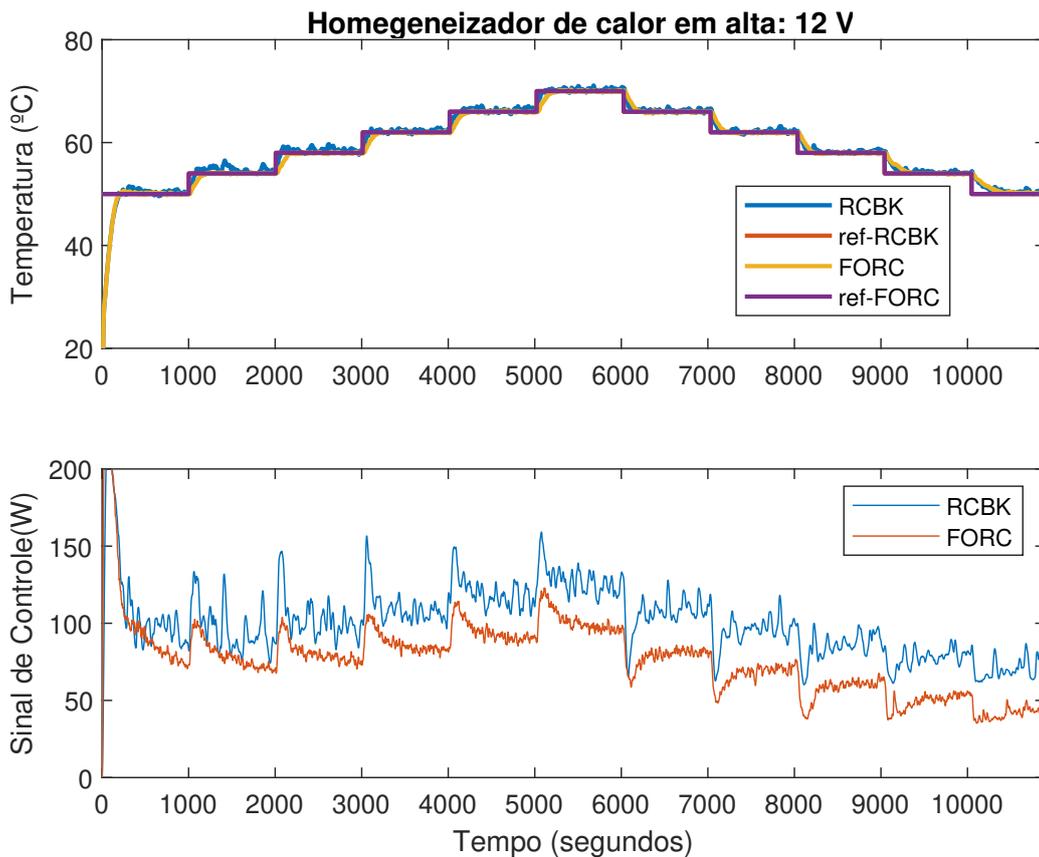


Figura 5.3: Variação de referência  $T = [50 \ 70]$  °C para ventilação em 12 V.

Utilizando uma averiguação dos casos extremos nesta discussão, especificamente a primeira e a última resposta à variação degrau crescente na referência de malha fechada ocorridos nos instantes 1000 e 5000 segundos, respectivamente conforme foi observado na Figura ??, é ilustrado na Figura 5.4. Na Figura 5.4(a), uma resposta ao degrau de 4 °C (de 50 a 54 °C) é exibida, e na Figura 5.4(b), o sinal de controle correspondente tanto para o RCBK quanto para o proposto FORC é retratado.

A observação destes resultados deixa compreensível que a proposta de projeto do FORC atinge um tempo de estabilização de 400 segundos, o que é um pouco menos agressivo em comparação com os 350 segundos mais rápidos do RCBK, a custo de uma

indesejável oscilação presente. Na Figura 5.4(c), é apresentada a resposta à variação de referência de  $66\text{ }^{\circ}\text{C}$  a  $70\text{ }^{\circ}\text{C}$ , mostrando uma dinâmica mais rápida, com o RCBK exibindo menos oscilação que no caso anterior, e um sinal de controle de maior intensidade que o FORC. Os respectivos sinais de controle são observados na Figura 5.4(d). Além disso, para ambos os estímulos extremos, o FORC proposto demonstra esforços de controle mais planos e com amplitudes menores, destacando uma característica melhorada desta metodologia em comparação com a clássica.

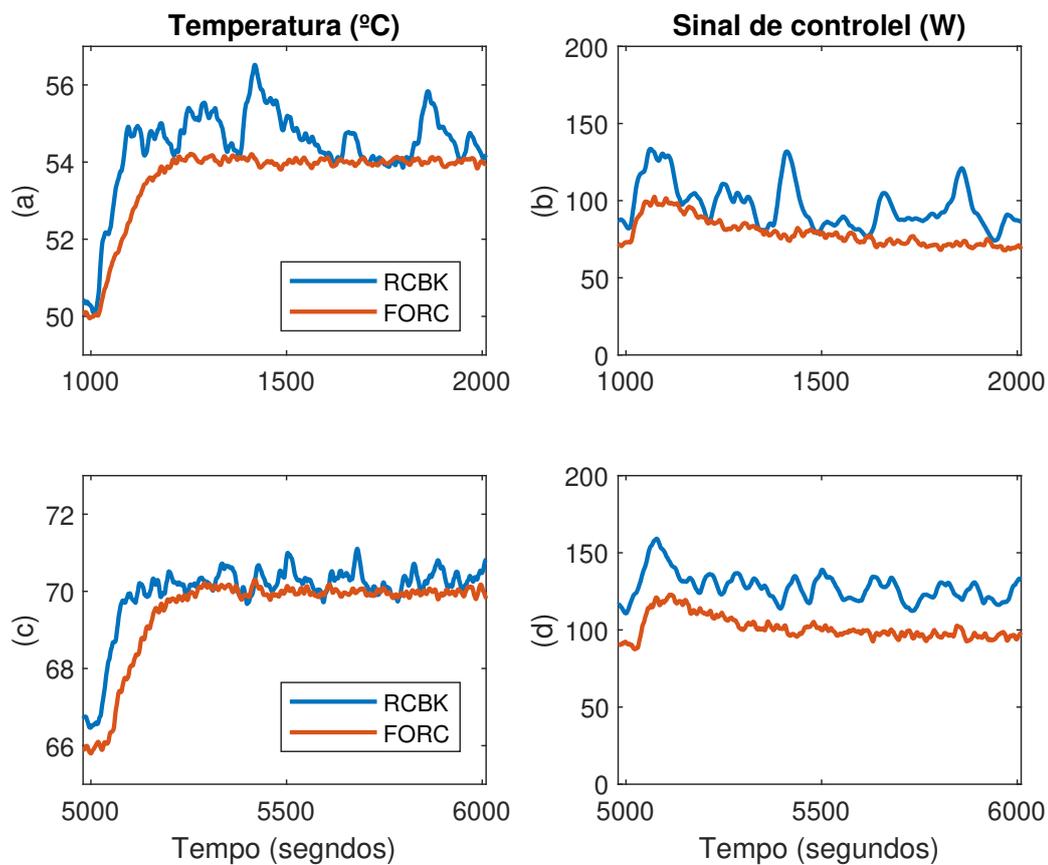


Figura 5.4: Variação degrau crescente para  $[50\ 54]\text{ }^{\circ}\text{C}$  e  $[66\ 70]\text{ }^{\circ}\text{C}$ .

Na Figura 5.5 são exibidas duas respostas ao degrau decrescente de  $4^{\circ}\text{C}$  no sinal de referência de temperatura, realizando a transição de  $70^{\circ}\text{C}$  para  $66^{\circ}\text{C}$  na Figura 5.5(a) e de  $54\text{ }^{\circ}\text{C}$  para  $50\text{ }^{\circ}\text{C}$  na 5.5(c), juntamente com o sinal de controle correspondentes nas Figuras 5.5(b) 5.5(d) para ambos os controladores sintonizados. Notavelmente, tanto as técnicas FORC quanto o RCBK alcançam um tempo de acomodação de aproximadamente 300 s. No entanto, a sintonia RCBK apresenta variações mais pronunciadas na sua resposta. Além disso, na Figura 5.5(b) e 5.5(d), a metodologia de sintonia FORC mantém consistentemente um sinal de controle com menor intensidade, tendo os comportamentos

em regimes permanente do sistema e transitório aproximados.

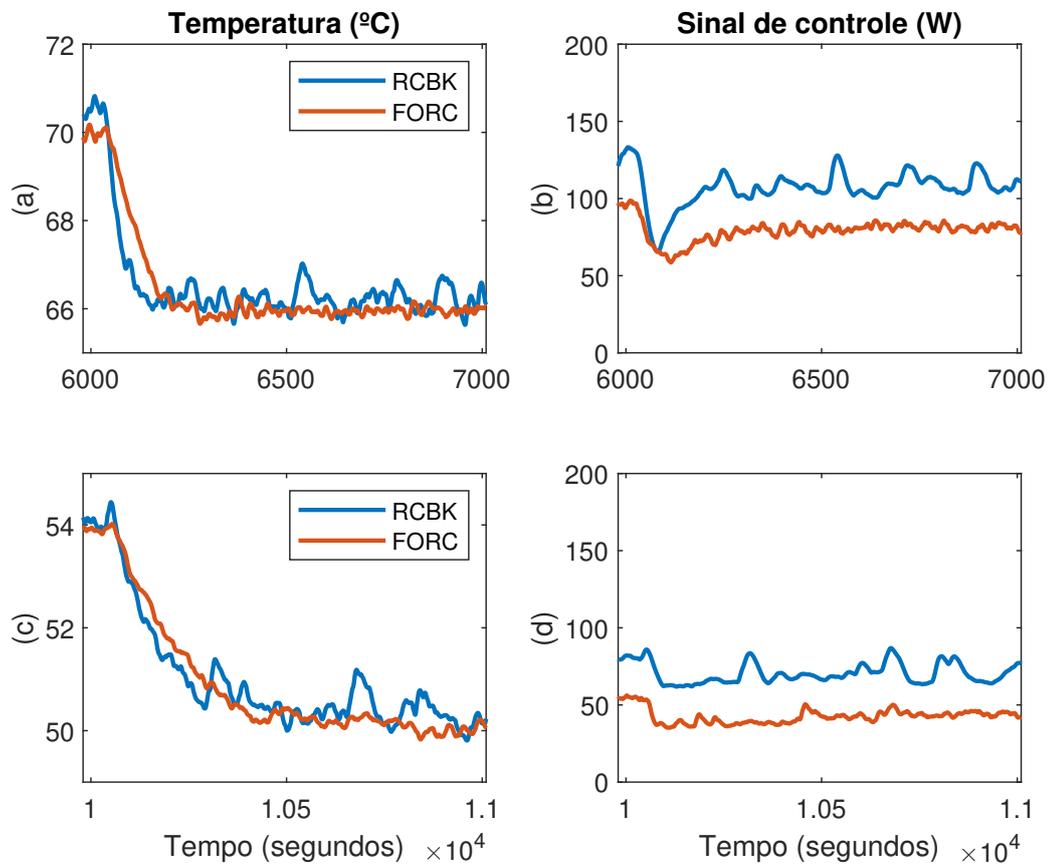
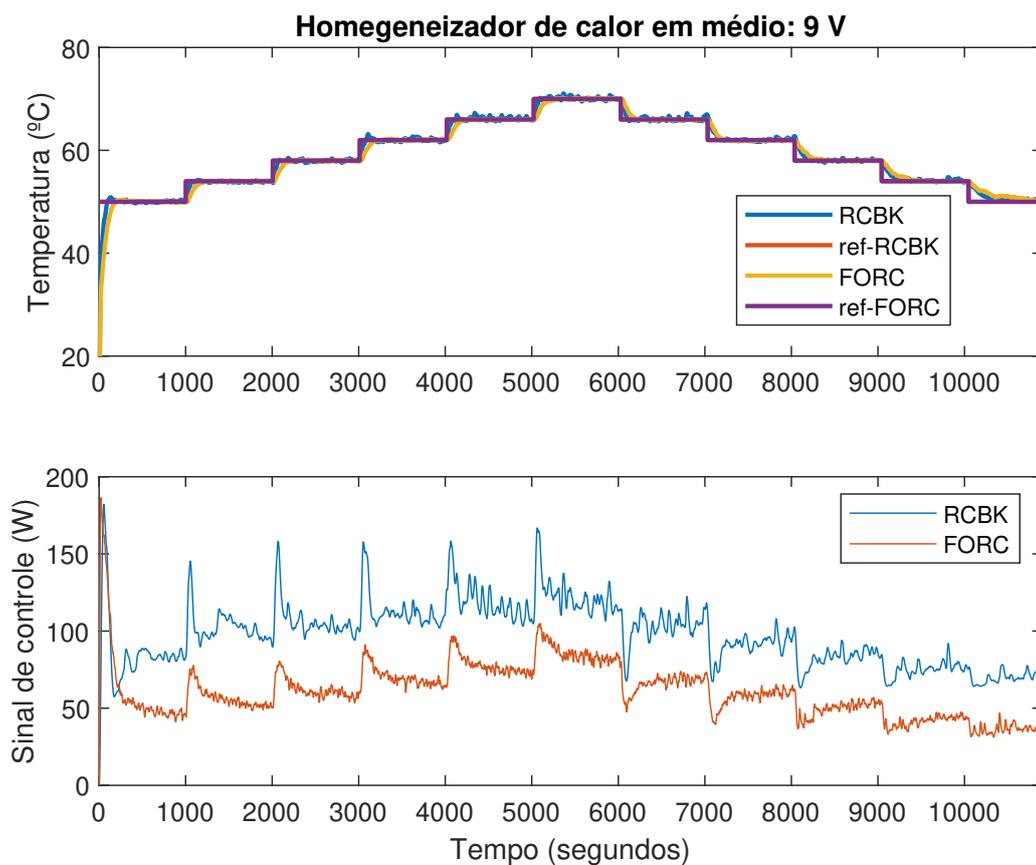
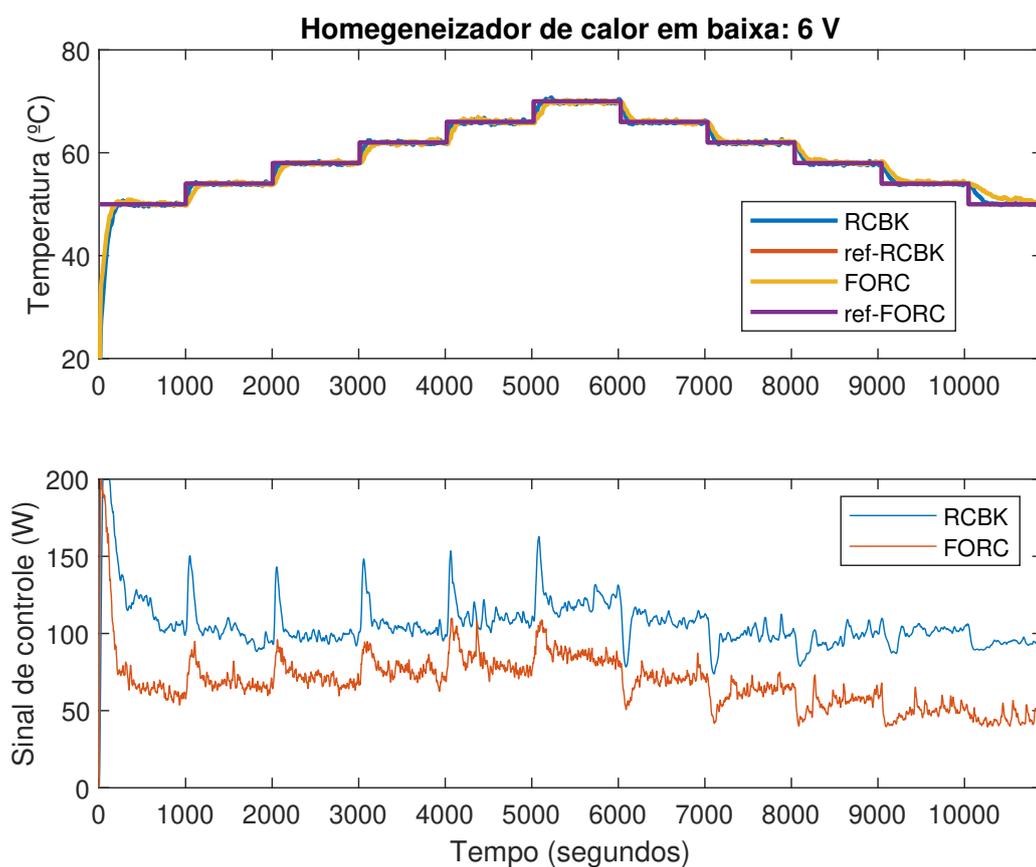


Figura 5.5: Variação degrau decrescente para  $[70 \ 66] \text{ } ^\circ\text{C}$  e  $T = [54 \ 50] \text{ } ^\circ\text{C}$ .

Testes semelhantes de resposta ao degrau crescente e decrescente foram conduzidos sob diferentes condições de homogeneização de calor, especificamente em velocidades médias e baixas do ventilador correspondentes a 9V e 6V. Os resultados desses experimentos são apresentados respectivamente na Figura 5.6 e 5.7 para as respostas de temperatura e respectivos sinais de controle adquiridos do experimento em malha fechada com ambos os controladores analisados individualmente.

Figura 5.6: Variação de referência  $T = [50 \ 70]$  °C para ventilação em 9 V.Figura 5.7: Variação de referência  $T = [50 \ 70]$  °C para ventilação em 6 V.

Nos resultados de respostas em experimentos para as condições de média e baixa ventilação de homogeneização de ar, sensíveis diferenças foram observadas ao longo dos testes de variação de referência, ainda observando-se a característica de proeminentes amplitudes antes à acomodação da resposta de temperatura para o controle RCBK. Entretanto se reafirma a solidez de um melhor desempenho para o sinal de controle do controlador FORC permanecendo com valores de amplitude mais baixos e consequente menor gasto energético para toda a faixa de condições de operação excursionada nos testes.

## 5.3 Análise de desempenho robusto

### 5.3.1 índices de desempenho

A quantificação do desempenho dos controladores testados de acordo com os índices de desempenho cujos cálculos foram apresentados na Seção 4.3 e são aqui calculados para os sinais de erro (erro = referência - resposta de temperatura) e sinais de controle. Os quatro critérios ISE, ITAE, ISC e ITAC são apresentados nas Figuras 5.8 a 5.11 incorporando as três condições de homogeneização de calor com velocidade alta, média e baixa; para um total de três testes em dez de respostas ao degrau cada um, segundo uma variação de temperatura na faixa crescente de 50 a 70°C e decrescente de 70 a 50°C, com incrementos e decrementos de 4°C no sinal de referência de temperatura de malha fechada. Os conjuntos de dados observados nas Figuras 5.5, 5.6 e 5.7 são usados como base para este cálculo.

No eixo horizontal, a mudança na variável da referência  $T_{ref}$  é indicada como pontos de subida: 1-(50-54), 2-(54-58), 3-(58-62), 4-(62-66), 5-(66-70) °C e descida: 1-(70-66), 2-(66-62), 3-(62-58), 4-(58-54), 5-(54-50) °C, enquanto os valores dos índices são representados no eixo das abcissas.

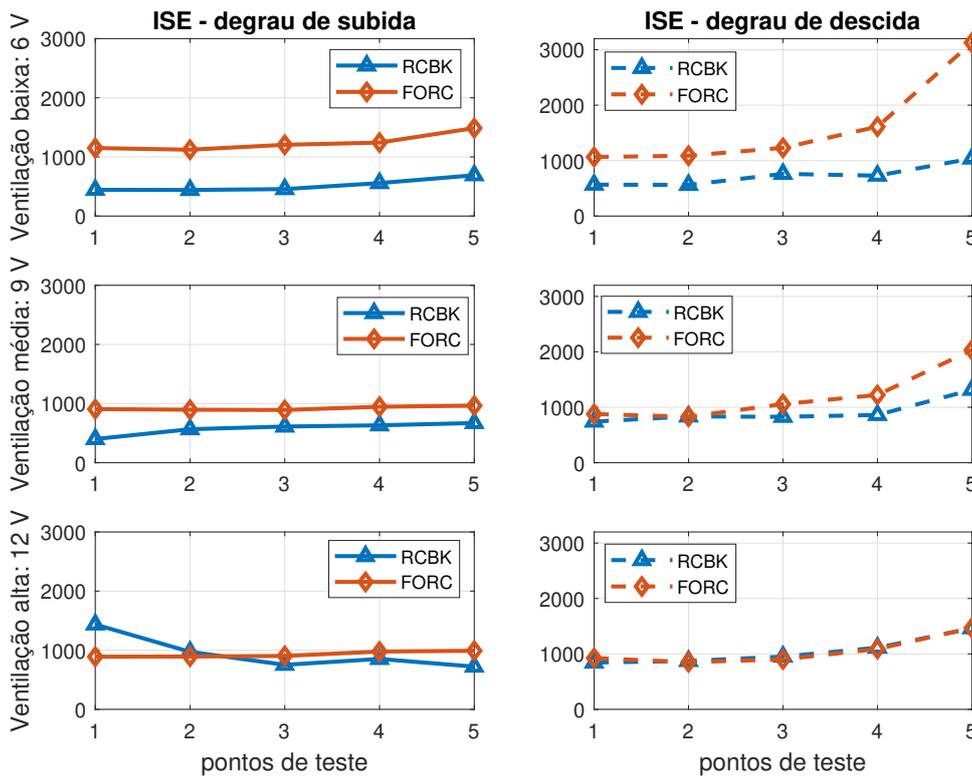


Figura 5.8: Índice de desempenho ISE para  $T = [50 \ 70] \text{ } ^\circ\text{C}$ .

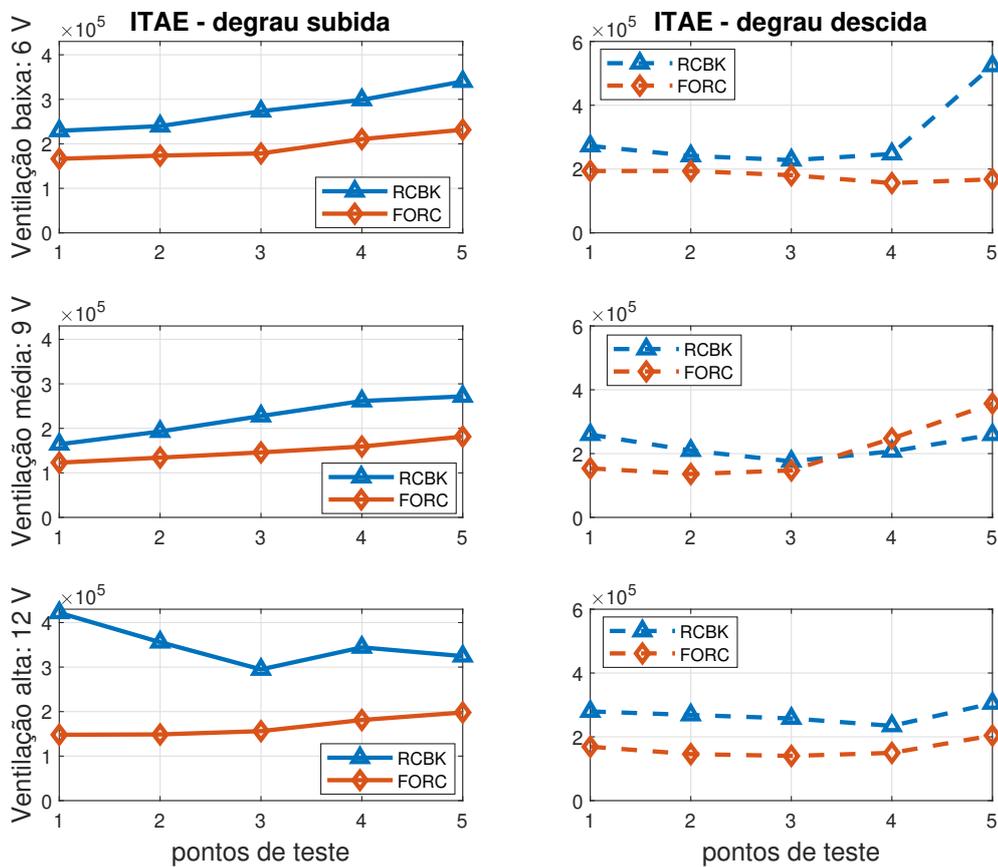


Figura 5.9: Índice de desempenho ITAE para  $T = [50 \ 70] \text{ } ^\circ\text{C}$ .

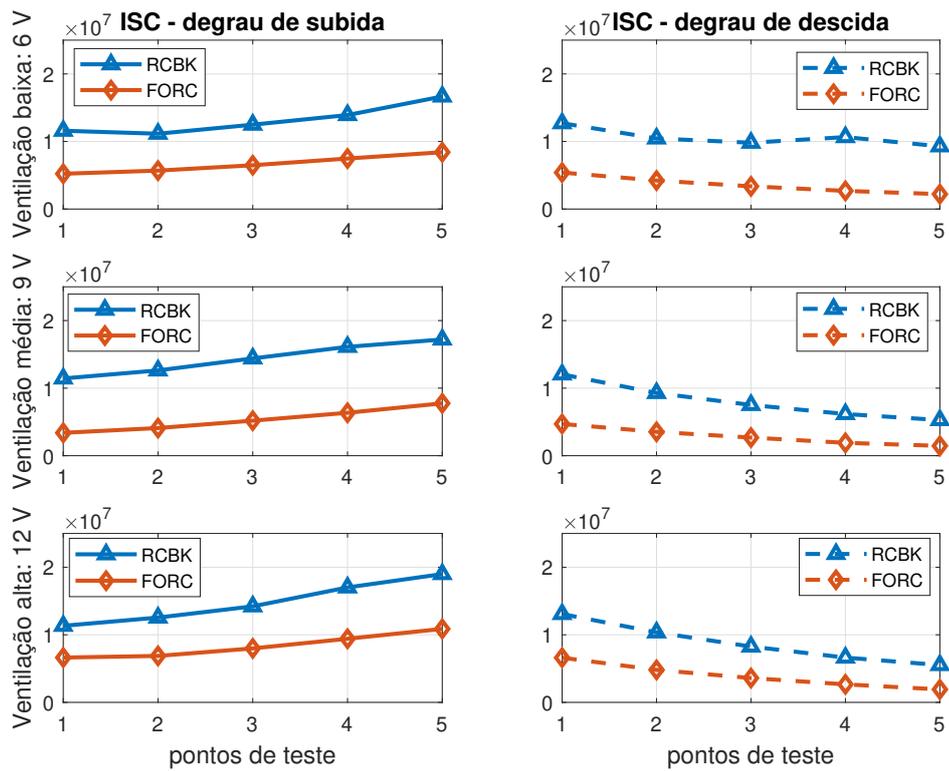


Figura 5.10: Índice de desempenho ISC para  $T = [50 \ 70] \text{ }^\circ\text{C}$ .

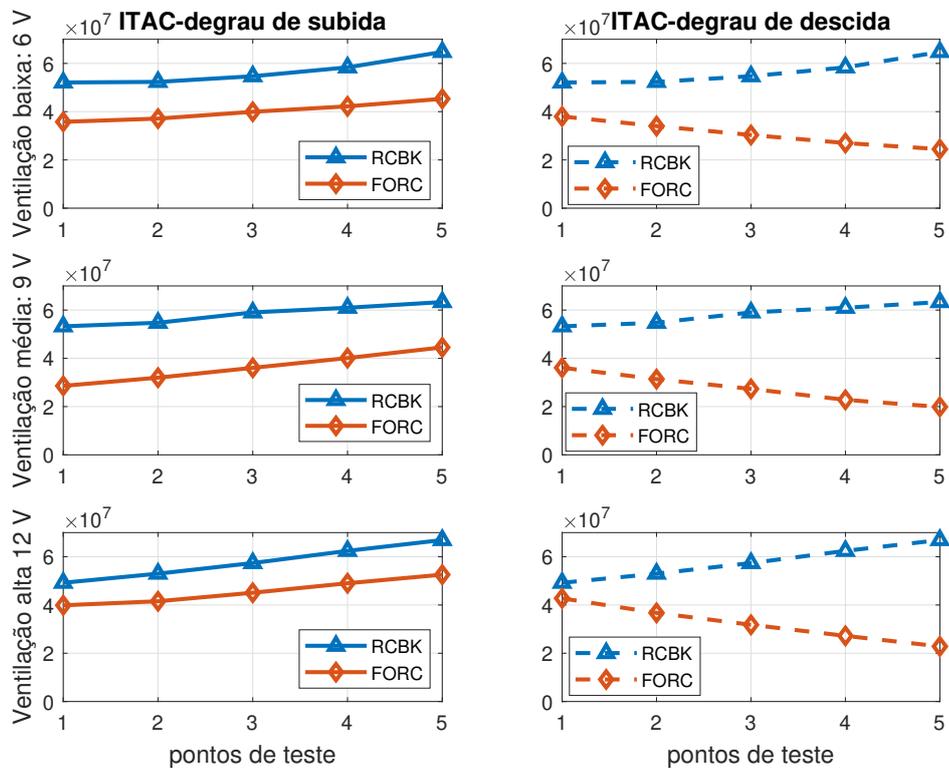


Figura 5.11: Índice de desempenho ITAC para  $T = [50 \ 70] \text{ }^\circ\text{C}$ .

Nas Figuras 5.8 e 5.9, os critérios ISE e ITAE são fornecidos respectivamente, cujos valores observados com a resposta em malha fechada pela abordagem FORC apresentam valores mais elevados para os critérios ISE devido à agressividade do RCBK nos pontos testados com condições de ventilação baixa e média de homogeneização de calor, equalizando-se aproximadamente para ventilação de 12 V nos testes de resposta aos degraus de referência crescentes e semelhantemente decrescentes. Para os critério ITAE, já é notada uma melhor desempenho com a abordagem FORC o qual apresenta valores mais baixos nos pontos de operação para os testes de degraus crescentes e decrescentes.

O ISC e ITAC fornecidos em Figura 5.10 e 5.11 para o sinal de controle, respectivamente, mostram os valores adquiridos com a resposta em malha fechada. A abordagem FORC proposta é mostrada em valores abaixo daqueles fornecidos pelo RCBK em todos os pontos testados experimentalmente em etapas crescentes e decrescentes. Tal comportamento proporcionou menor esforço de controle, reduzindo o gasto energético obtido com a metodologia proposta.

Além disso, informações tabulares correspondentes aos índices plotados nas Figuras 5.8 a 5.11 foram fornecidas para dar suporte à avaliação do desempenho robusto. Estas Tabelas 5.1, 5.2 e 5.3, correspondem a diferentes condições de homogeneização de calor, nomeadamente condições altas (12 V), médias (9 V) e baixas velocidades(6 V), respectivamente.

Tabela 5.1: Valores dos índices para homogeneização em 12 V.

Critério	Controlador	degraus crescentes					degraus decrescentes				
		1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
ISE	<i>RCBK</i>	1435.5	972.9	753.3	852.6	722.7	844.6	872.7	951.5	1112.6	1462.9
	<i>FORC</i>	890.7	893.6	903.8	977.4	991.1	925.4	851	900.7	1089	1468.8
ITAE	<i>RCBK</i> ( $\times 10^5$ )	4.22	3.55	2.94	3.44	3.24	2.79	2.68	2.57	2.34	3.05
	<i>FORC</i> ( $\times 10^5$ )	1.47	1.48	1.56	1.81	1.98	1.69	1.45	1.40	1.49	2.04
ISC	<i>RCBK</i> ( $\times 10^7$ )	1.13	1.25	1.42	1.70	1.89	1.30	1.03	0.82	0.66	0.55
	<i>FORC</i> ( $\times 10^7$ )	0.66	0.68	0.79	0.94	1.08	0.66	0.48	0.35	0.26	0.19
ITAC	<i>RCBK</i> ( $\times 10^7$ )	4.92	5.29	5.73	6.24	6.69	5.79	5.15	4.65	4.19	3.77
	<i>FORC</i> ( $\times 10^7$ )	3.98	4.15	4.50	4.90	5.25	4.27	3.67	3.17	2.72	2.28

A análise dos valores numéricos nestas tabelas permite uma fácil comparação do desempenho dos controladores aplicados sob diversas condições de circulação de calor. Notavelmente, o método RCBK apresenta maior sensibilidade a mudanças no valor ISE, passando de 1435 para 390 quando a ventoinha faz a transição de 12 V para 9 V, por exemplo. Em contrapartida, o método FORC mantém valores consistentes, como ISE = 890 para uma homogeneização operando em 12 V, enquanto apresenta 900 para 9 V.

Tabela 5.2: Valores dos índices para homogeneização em 9 V.

Critério	Controlador	degraus crescentes					degraus decrescentes				
		1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
ISE	$RCBK(x10^3)$	0.39	0.56	0.61	0.63	0.67	0.74	0.83	0.82	0.86	1.31
	$FORC(x10^3)$	0.90	0.89	0.89	0.94	0.96	0.87	0.82	1.05	1.22	2.03
ITAE	$RCBK(x10^5)$	1.64	1.92	2.27	2.61	2.71	2.59	2.09	1.75	2.07	2.59
	$FORC(x10^5)$	1.22	1.34	1.45	1.59	1.81	1.53	1.35	1.47	2.47	3.56
ISC	$RCBK(x10^7)$	3.38	4.09	5.18	6.35	7.74	4.69	3.53	2.68	1.90	1.45
	$FORC(x10^7)$	1.14	1.26	1.43	1.61	1.71	1.20	0.92	0.75	0.61	0.52
ITAC	$RCBK(x10^7)$	5.32	5.47	5.90	6.09	6.33	5.60	4.95	4.49	4.08	3.79
	$FORC(x10^7)$	2.85	3.19	3.6	4.01	4.45	3.60	3.13	2.73	2.27	1.98

Tabela 5.3: Valores dos índices para homogeneização em 6 V.

Critério	Controlador	degraus crescentes					degraus decrescentes				
		1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
ISE	$RCBK(x10^3)$	0.44	0.44	0.45	0.55	0.68	0.56	0.56	0.76	0.72	1.03
	$FORC(x10^3)$	1.14	1.12	1.20	1.24	1.48	1.06	1.08	1.23	1.61	3.12
ITAE	$RCBK(x10^5)$	2.29	2.39	2.73	2.98	3.40	2.72	2.41	2.27	2.47	5.23
	$FORC(x10^5)$	1.66	1.73	1.78	2.10	2.31	1.93	1.93	1.80	1.56	1.67
ISC	$RCBK(x10^7)$	1.15	1.11	1.24	1.39	1.66	1.27	1.04	0.98	1.06	0.92
	$FORC(x10^7)$	0.52	0.56	0.64	0.74	0.84	0.53	0.42	0.33	0.26	0.22
ITAC	$RCBK(x10^7)$	5.20	5.23	5.46	5.83	6.47	5.79	5.29	5.22	5.41	5.03
	$FORC(x10^7)$	3.57	3.71	3.99	4.22	4.53	3.79	3.40	3.03	2.70	2.44

Da mesma forma, os valores do ITAE variam de 2,73 a 3,03 para ventiladores operando em 9 V e 6 V, destacando um comportamento mais plano do método de sintonia FORC sob diferentes condições. Para valores de ISC e ITAC se verifica que os da sintonia do controlador proposto mantêm-se abaixo da metodologia clássica nos pontos de operação testados para degraus de subida e descida.

### 5.3.2 Conjunto de valores

Uma análise adicional robusta foi realizada considerando o conjunto de valores do controlador de ordem fracionária com base metodologia proposta e no processo paramétrico incerto. Um procedimento proposto por [Tan, Özgüven e Özyetkin \(2009\)](#) foi seguido nesta análise para compor o conjunto de valores de uma família de polinômios intervalares de ordem fracionária que depende do processo paramétrico incerto rerepresentado pela função de transferência em (4.1) e do controlador de ordem fracionária sintonizado na Equação (4.7).

Nesta aplicação da metodologia FORC, o polígono obtido a partir da construção do

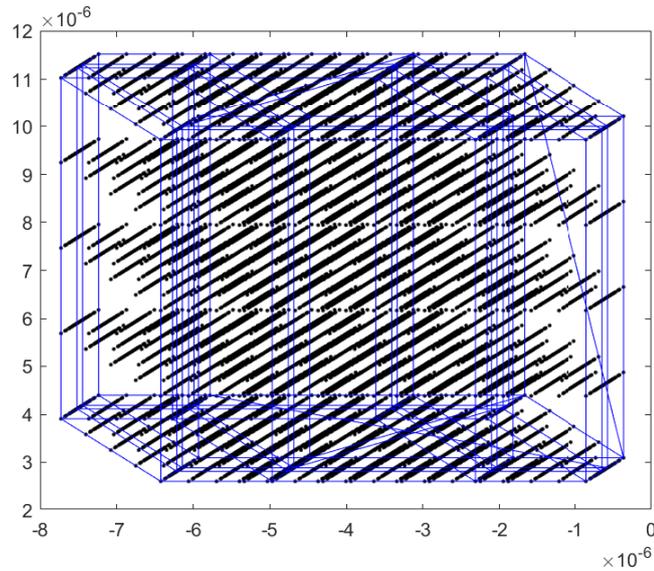


Figura 5.12: Polígono para controlador de ordem fracionária em  $\omega = 0.01\text{rad/s}$ .

conjunto de valores do polinômio de malha fechada de ordem fracionária em  $\omega = 0,01\text{rad/s}$  é mostrado na Figura 5.12 demonstrando não recair sobre um retângulo como o caso de ordem inteira. As linhas sólidas representam as arestas externas que limitam o polígono definido conforme observado, e os vértices são os pontos de junção entre as arestas. Esta imagem do conjunto de valores em um única frequência, possui 64 vértices e 192 arestas, é usada para o teste da estabilidade robusta dos controlador proposto.

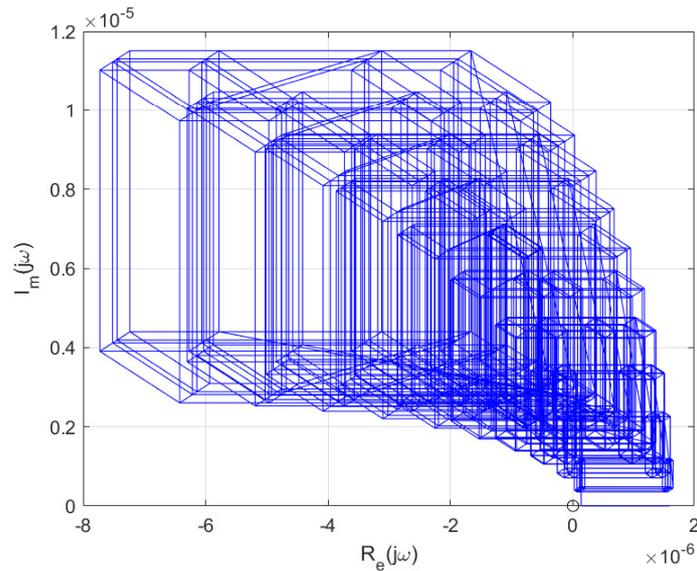


Figura 5.13: Conjunto de valores de ordem fracionária robustamente estável.

O conjunto de valores do polinômio de malha fechada  $P_C L(s) = p_3 s^3 + p_2,5 s^{2,5} + p_2 s^2 + p_1,5 s^{1,5} + p_1 s + p_0,5 s^{0,5} + p_0$  para  $0 < \omega < 0.01$  é mostrado na Figura 5.13 onde se

vê que o valor definido não inclui o zero; portanto, a função de transferência em malha fechada com a metodologia proposta controlador de ordem fracionária é robustamente estável.

## 5.4 Conclusão

Neste capítulo, foram apresentados os resultados de testes experimentais conduzidos em um sistema térmico de bancada, onde foram impostas variações de condições de operação do sistema a partir da excursão de temperatura em uma faixa de 50 a 70 °C, bem como variações de condições de homogeneização de calor produzidas pela ventilação forçada em três condições de alta, média e baixa velocidade, de onde foram analisados resposta de temperatura e esforços de controle. Por fim, a avaliação dos desempenhos primeiramente foi realizada utilizando a quantificação dos índices ISE, ITAE, ISC, ITAC para os erros de resposta e sinal de controle, respectivamente. Em seguida, uma análise de conjuntos de valores estendidos para famílias de polinômios de ordem fracionaria foi efetuada.

# Capítulo 6

## Conclusão

Este trabalho apresentou uma nova metodologia para projeto de controladores robustos de sistemas sujeitos a incertezas paramétricas segundo uma formulação de forma híbrida com uma estrutura de controle de ordem fracionária. Esta metodologia proposta de Controle Robusto de Ordem Fracionária (FORC) demonstra melhorias significativas no comportamento dinâmico do sistema térmico e na eficiência energética em comparação com a técnica clássica robusta paramétrica (RCBK). A implementação do FORC permitiu obter resultados que demonstraram reduzir os esforços de controle e, ao mesmo tempo, melhora o desempenho do sistema em várias condições de operação de temperatura e homogeneização de calor de um sistema térmico experimental, conforme evidenciado pelos índices ISE e ITAE, bem como pela análise de sinais de esforço de controle via ISC e ITAC.

Este trabalho contribuiu para a área ao estudar o efeito da extensão da região de estabilidade no plano-s por meio de controladores fracionários e fornecer as formulações matemáticas por meio de sintonia de otimização convexa do tipo programação linear. Apesar dos resultados promissores desta metodologia, existem limitações a serem reconhecidas, como a não garantia generalizada de obtenção de soluções na etapa de programação linear para todas as faixas numéricas de incertezas intervalares e também o não englobamento matemático de tratamento para sistemas com tempo morto.

Para direções de pesquisas futuras, sugere-se explorar métodos de inteligência computacional para selecionar fatores de ordem fracionária, e também avaliar diferentes técnicas de otimização convexa, além de investigar métodos de sintonia de controladores coordenadas para sistemas de ordem fracionária e com atraso de transporte. Além disso, a integração do controle de ordem fracionária com técnicas avançadas, como modo desli-

zante e controle adaptativo, apresenta oportunidades interessantes para futuras melhorias adicionais de investigação.

O presente trabalho ressalta o potencial das metodologias de controle de ordem fracionária, este trabalhou investigou, para melhorar o desempenho do sistema e a eficiência energética de controle. Embora muitos desafios permaneçam, os resultados deste trabalho têm implicações substanciais para o incremental avanço teórico em aplicações práticas do projeto de sistemas de controle.

# Referências Bibliográficas

Aleksei Tepljakov. *FOMCON toolbox for MATLAB is dedicated to fractional-order modeling and control of dynamic systems*. 2023. Available in: <<https://github.com/extall/fomcon-matlab/releases/tag/v1.50.4>>. Accessed: September 11, 2023. 28

ABDULKHADER, H. K.; JACOB, J.; MATHEW, A. T. Robust type-2 fuzzy fractional order pid controller for dynamic stability enhancement of power system having res based microgrid penetration. *International Journal of Electrical Power & Energy Systems*, Elsevier, v. 110, p. 357–371, 2019. 4

ALAGOZ, B. B. Hurwitz stability analysis of fractional order LTI systems according to principal characteristic equations. *ISA Transactions*, ISA - Instrumentation, Systems, and Automation Society, v. 70, p. 7–15, 9 2017. ISSN 00190578. 3

ALAGOZ, B. B. Fractional order linear time invariant system stabilization by brute-force search. *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, SAGE Publications Ltd, v. 40, p. 1447–1456, 3 2018. ISSN 01423312. 3

ALAGOZ, B. B.; YEROGLU, C.; SENOL, B.; ATES, A. Probabilistic robust stabilization of fractional order systems with interval uncertainty. *ISA Transactions*, ISA - Instrumentation, Systems, and Automation Society, v. 57, p. 101–110, 2015. ISSN 00190578. 3

ÅSTRÖM, K. J.; HÄGGLUND, T. *PID controllers: theory, design, and tuning*. 2. ed. [S.l.]: Instrument society of America Research Triangle Park, NC, 1995. 8

AYRES-JR., F. A. d. C.; JUNIOR, C. T. d. C.; MEDEIROS, R. L. P. d.; JUNIOR, W. B.; NEVES, C. C. d.; LENZI, M. K.; VERONEZE, G. D. M. A fractional order power system stabilizer applied on a small-scale generation system. *Energies*, v. 11, n. 8, 2018. ISSN 1996-1073. 1, 19, 35

AYRES-JR, F. A. de C.; BESSA, I.; PEREIRA, V. M. B.; da Silva Farias, N. J.; de Menezes, A. R.; de Medeiros, R. L.; CHAVES, J. E.; LENZI, M. K.; da Costa, C. T. Fractional order pole placement for a buck converter based on commensurable transfer function. *ISA Transactions*, 2020. ISSN 0019-0578. 1, 2, 8

BARMISH, B. R.; JURY, E. New tools for robustness of linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, New York, NY: Institute of Electrical and Electronics Engineers, 1963-, v. 39, n. 12, p. 2525–2525, 1994. 15

BRAIM, A. B.; MESQUINE, F. Pole assignment for continuous-time fractional order systems. *International Journal of Systems Science*, v. 50, n. 11, p. 2113–2125, 2019. 3

- CAI MIN; LI, C. *Theory and numerical approximations of fractional integrals and derivatives*. [S.l.]: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2019. (Other titles in applied mathematics 161). ISBN 9781611975871,1611975875. [19](#)
- CAMPOS, M. W.; AYRES-JR, F. A.; BESSA, I. V. de; MEDEIROS, R. L. de; MARTINS, P. R.; LENZI, E. kaminski; FILHO, E. J.; VILCHEZ, J. R.; JR, V. F. L. Fractional-order identification system based on sundaresan's technique. *Chaos, Solitons & Fractals*, Elsevier, v. 185, p. 115132, 2024. [19](#), [27](#)
- CAPONETTO, R. *Fractional Order Systems: Modeling and Control Applications*. [S.l.]: World Scientific Publishing Company, 2010. (World Scientific Series on Nonlinear Science: Series A). ISBN 9789814304207. [19](#)
- CHEN, L.; WU, R.; HE, Y.; YIN, L. Robust stability and stabilization of fractional-order linear systems with polytopic uncertainties. *Applied Mathematics and Computation*, Elsevier Inc., v. 257, p. 274–284, apr 2015. ISSN 00963003. [3](#)
- CHEN, L.; WU, R.; YUAN, L.; YIN, L.; CHEN, Y.; XU, S. Guaranteed cost control of fractional-order linear uncertain systems with time-varying delay. *Optimal Control Applications and Methods*, Wiley Online Library, v. 42, n. 4, p. 1102–1118, 2021. [3](#)
- CHEN, Y. Q.; AHN, H. S.; PODLUBNY, I. Robust stability check of fractional order linear time invariant systems with interval uncertainties. *Signal Processing*, v. 86, p. 2611–2618, 10 2006. ISSN 01651684. [3](#), [12](#)
- COELHO, A.; JERONYMO, D.; ARAUJO, R. *Sistemas dinâmicos controle classico e preditivo discreto*. [S.l.: s.n.], 2019. [9](#)
- CORTÉS-ROMERO, J.; DELGADO-AGUILERA, E.; JIMENEZ-TRIANA, A. Robust fractional active disturbance rejection control: A unified approach. *ISA transactions*, Elsevier, v. 107, p. 63–77, 2020. [5](#)
- DAS, S. *Functional fractional calculus*. [S.l.]: Springer, 2011. v. 1. [19](#)
- GAO, Z. Robust stabilization criterion of fractional-order controllers for interval fractional-order plants. *Automatica*, Elsevier Ltd, v. 61, p. 9–17, 11 2015. ISSN 00051098. [2](#)
- GEORGE, M. A.; KAMAT, D. V.; KURIAN, C. P. Electronically tunable aco based fuzzy fopid controller for effective speed control of electric vehicle. *IEEE Access*, IEEE, v. 9, p. 73392–73412, 2021. [1](#)
- GHORBANI, M. Robust stability analysis of interval fractional-order plants by fractional-order controllers: an approach to reduce additional calculation. *International Journal of General Systems*, Taylor and Francis Ltd., v. 50, p. 1–25, 2021. ISSN 15635104. [3](#)
- GHORBANI, M.; TAVAKOLI-KAKHKI, M. Robust stability analysis of uncertain incommensurate fractional order quasi-polynomials in the presence of interval fractional orders and interval coefficients. *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, SAGE Publications Ltd, v. 43, p. 1117–1125, 3 2021. ISSN 01423312. [2](#)

- GHORBANI, M.; TAVAKOLI-KAKHKI, M.; ESTARAMI, A. A. Robust fopid stabilization of retarded type fractional order plants with interval uncertainties and interval time delay. *Journal of the Franklin Institute*, Elsevier, v. 356, n. 16, p. 9302–9329, 2019. [3](#)
- GUO, B.; RAZA, A.; AL-KHALED, K.; KHAN, S. U.; FARID, S.; WANG, Y.; KHAN, M. I.; MALIK, M. Y.; SALEEM, S. Fractional-order simulations for heat and mass transfer analysis confined by elliptic inclined plate with slip effects: A comparative fractional analysis. *Case Studies in Thermal Engineering*, Elsevier Ltd, v. 28, 12 2021. ISSN 2214157X. [1](#)
- KEEL, L.; BHATTACHARYYA, S. Robust control design via linear programming. In: *Proceedings of IEEE TENCON '98. IEEE Region 10 International Conference on Global Connectivity in Energy, Computer, Communication and Control (Cat. No.98CH36229)*. [S.l.: s.n.], 1998. v. 1, p. 208–213. [13](#), [15](#)
- KHIABANI, A. G.; BABAZADEH, R. Design of robust fractional-order lead-lag controller for uncertain systems. *IET Control Theory and Applications*, Institution of Engineering and Technology, v. 10, n. 18, p. 2447–2455, dec 2016. ISSN 17518652. [2](#)
- KUMAR, S.; ZEIDAN, D. An efficient mittag-leffler kernel approach for time-fractional advection-reaction-diffusion equation. *Applied Numerical Mathematics*, Elsevier B.V., v. 170, p. 190–207, 12 2021. ISSN 01689274. [1](#)
- LAN, Y.-H.; ZHOU, Y. Lmi-based robust control of fractional-order uncertain linear systems. *Computers & Mathematics with Applications*, Elsevier, v. 62, n. 3, p. 1460–1471, 2011. [17](#)
- LANDAU, I. D.; ZITO, G. *Digital control systems: design, identification and implementation*. [S.l.]: Springer, 2006. v. 130. [8](#), [9](#)
- LI, B.; LIU, Y.; ZHAO, X. Robust h control for fractional order systems with order  $\alpha$  ( $0 < \alpha < 1$ ). *Fractal and Fractional*, MDPI, v. 6, n. 2, p. 86, 2022. [4](#)
- LI, C.; WANG, J. Robust stability and stabilization of fractional order interval systems with coupling relationships: The  $0 < \alpha < 1$  case. *Journal of the Franklin Institute*, v. 349, n. 7, p. 2406–2419, sep 2012. ISSN 00160032. [3](#)
- LI, S.; ZHU, Y.; MI, J. Robust control and stability bound analysis for a class of LTI fractional order uncertain systems with  $0 < \alpha < 1$ . *IEEE Access*, Institute of Electrical and Electronics Engineers Inc., v. 7, p. 140723–140733, 2019. ISSN 21693536. [3](#), [19](#)
- LI, Y. Robust stabilization of nonlinear fractional order interconnected systems based on t-s fuzzy model. *Complexity*, Hindawi Limited, v. 2020, 2020. ISSN 10990526. [3](#)
- MALTI, R.; MOREAU, X.; KHEMANE, F. Resonance of fractional transfer functions of the second kind. In: *3th IFAC Workshop on Fractional Differentiation and its Applications*. [S.l.: s.n.], 2008. p. 1–6. [10](#), [19](#)
- MARTINS-GOMES, M. C.; AYRES-JUNIOR, F. A. de C.; COSTA-JUNIOR, C. T. da; BESSA, I. V. de; FARIAS, R. L. d. S. d. M. N. J.; SILVA, L. E.; JUNIOR, V. F. de L. Fractional-order robust control design under parametric uncertain approach. *ISA transactions*, Elsevier, v. 153, p. 420–432, 2024. [5](#)

MATU<sup>U</sup>, R.; SENOL, B.; PEKA<sup>R</sup>, L. Value-set-based approach to robust stability analysis for ellipsoidal families of fractional-order polynomials with complicated uncertainty structure. *Applied Sciences (Switzerland)*, MDPI AG, v. 9, 12 2019. ISSN 20763417. [2](#)

MERRIKH-BAYAT, F.; KARIMI-GHARTEMANI, M. Some properties of three-term fractional order system. *Fractional Calculus and Applied Analysis*, v. 11, n. 3, p. 317–328, 2008. [5](#), [19](#), [24](#)

MOHSENIPOUR, R.; JEGARKANDI, M. F. Robust  $\mathcal{D}$ -stability analysis of fractional order interval systems of commensurate and incommensurate orders. *IET Control Theory and Applications*, Institution of Engineering and Technology, v. 13, n. 8, p. 1039–1050, 2019. ISSN 17518652. [2](#)

MONJE, C. A.; CHEN, Y.; VINAGRE, B. M.; XUE, D.; FELIU-BATLLE, V. *Fractional-order Systems and Controls, Fundamentals and Applications*. [S.l.]: Springer-Verlag London, 2010. ISBN 978-1-84996-334-3. [10](#), [12](#), [19](#), [34](#)

MUELLER, A. *Recent Advances in Robust Control: Theory and Applications in Robotics and Electromechanics*. [S.l.]: BoD–Books on Demand, 2011. [14](#)

N'DOYE, I.; DAROUACH, M.; ZASADZINSKI, M.; RADHY, N. E. Robust stabilization of uncertain descriptor fractional-order systems. *Automatica*, v. 49, n. 6, p. 1907–1913, jun 2013. ISSN 00051098. [3](#), [35](#)

NEVES, C. C. das; JUNIOR, W. B.; MEDEIROS, R. L. P. d.; AYRES-JUNIOR, F. A. C.; BESSA, I. V.; BESSA, I. V.; VERONEZE, G. de M.; SILVA, L. E. S. e; FARIAS, N. J. S. Direct form digital robust rst control based on chebyshev sphere optimization applied in a dc-dc power converter. *Energies*, v. 13, n. 15, p. 3810, 2020. ISSN 1996-1073. [17](#)

OKPOSO, N. I.; ADEWOLE, M. O.; OKPOSO, E. N.; OJARIKRE, H. I.; ABDULLAH, F. A. A mathematical study on a fractional covid-19 transmission model within the framework of nonsingular and nonlocal kernel. *Chaos, Solitons and Fractals*, Elsevier Ltd, v. 152, 11 2021. ISSN 09600779. [1](#)

PACHAURI, N.; THANGAVEL, V.; SURESH, V.; KANTIPUDI, M. P.; KOTB, H.; TRIPATHI, R. N.; BAJAJ, M. A robust fractional-order control scheme for pv-penetrated grid-connected microgrid. *Mathematics*, MDPI, v. 11, n. 6, p. 1283, 2023. [4](#)

PODLUBNY, I. *Fractional Differential Equations: An Introduction to Fractional Derivatives, Fractional Differential Equations, to Methods of Their Solution and Some of Their Applications*. [S.l.]: Elsevier Science, 1998. (Mathematics in Science and Engineering). ISBN 9780080531984. [10](#), [17](#), [19](#), [24](#)

PRASAD, R.; MEHTA, U.; KOTHARI, K. Fractional impedance of supercapacitor: an extended investigation. *International Journal of Dynamics and Control*, 2020. ISSN 21952698. [19](#)

REN, H.-P.; WANG, X.; FAN, J.-T.; KAYNAK, O. Fractional order sliding mode control of a pneumatic position servo system. *Journal of the Franklin Institute*, Elsevier, v. 356, n. 12, p. 6160–6174, 2019. [1](#)

- SAAVEDRA, A. C. M.; JUNIOR, W. B.; MEDEIROS, R. L. P. d.; JUNIOR, C. R.; GOMES, A. S. Experimental evaluation of the robust controllers applied on a single inductor multiple output dc-dc buck converter to minimize cross regulation considering parametric uncertainties and cpl power variations. *Energies*, MDPI, v. 17, n. 14, p. 3359, 2024. [17](#)
- SABATIER, J.; LANUSSE, P.; MELCHIOR, P.; OUSTALOUP, A. Fractional order differentiation and robust control design. *Intelligent systems, control and automation: science and engineering*, Springer, v. 77, p. 13–18, 2015. [4](#)
- ŞENOL, B.; ATES, A.; ALAGOZ, B. B.; YEROGLU, C. A numerical investigation for robust stability of fractional-order uncertain systems. *ISA Transactions*, ISA - Instrumentation, Systems, and Automation Society, v. 53, p. 189–198, 2014. ISSN 00190578. [3](#)
- ŞENOL, B.; DEMİROĞLU, U. Fractional order proportional derivative control for first order plus time delay plants: achieving phase and gain specifications simultaneously. *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, SAGE Publications Sage UK: London, England, v. 41, n. 15, p. 4358–4369, 2019. [1](#)
- ŞENOL, B.; DEMİROĞLU, U. Frequency frame approach on loop shaping of first order plus time delay systems using fractional order PI controller. *ISA Transactions*, v. 86, p. 192–200, 2019. [1](#)
- SILVA, C. S. D.; SILVA, N. J. F. D.; JÚNIOR, F. A. A.; MEDEIROS, R. L.; SILVA, L. E. E.; LUCENA, V. F. Experimental implementation of hydraulic turbine dynamics and a fractional order speed governor controller on a small-scale power system. *IEEE Access*, IEEE, 2024. [1](#), [19](#)
- TAN, N.; ÖZGÜVEN, O. F.; ÖZYETKİN, M. M. Robust stability analysis of fractional order interval polynomials. *ISA Transactions*, ISA - Instrumentation, Systems, and Automation Society, v. 48, p. 166–172, 2009. ISSN 00190578. [2](#), [52](#)
- TUFENKCI, S.; SENOL, B.; MATUŠŮ, R.; ALAGOZ, B. B. Optimal  $V$ -plane robust stabilization method for interval uncertain fractional order PID control systems. *Fractal and Fractional*, MDPI AG, v. 5, p. 1–21, 3 2021. ISSN 25043110. [3](#)
- VALÉRIO, D.; COSTA, J. da. *An Introduction to Fractional Control*. [S.l.]: Institution of Engineering and Technology, 2013. (Control, Robotics and Sensors Series). ISBN 9781849195454. [11](#), [19](#)
- WANG, G.; ZHOU, Y.; NI, L.; APHALE, S. S. Robust fractional-order fast terminal sliding mode control with fixed-time reaching law for high-performance nanopositioning. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, Wiley Online Library, v. 33, n. 4, p. 2596–2614, 2023. [4](#)
- YangQuan Chen. *Impulse response invariant discretization of fractional order integrators/differentiators*. 2023. Available in: <https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/21342-impulse-response-invariant-discretization-of-fractional-order-integrators-differentiators>. Accessed: September 2, 2023. [19](#), [22](#)

ZAFAR, Z. U. A.; ALI, N.; TUNÇ, C. Mathematical modeling and analysis of fractional-order brushless dc motor. *Advances in Difference Equations*, v. 2021, p. 433, 12 2021. ISSN 1687-1847. Disponível em: <<https://advancesindifferenceequations.springeropen.com/articles/10.1186/s13662-021-03587-3>>. 1

ZHU, Z.; LU, J. G. Robust stability and stabilization of hybrid fractional-order multi-dimensional systems with interval uncertainties: An LMI approach. *Applied Mathematics and Computation*, Elsevier Inc., v. 401, jul 2021. ISSN 00963003. 3