UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E CIENTÍFICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICAS

FRANCISCA JANICE DOS SANTOS FORTALEZA

UMA *GEOMETRIA PARA ENSINAR*:
elementos do saber profissional do professor que ensina matemática (1870-1920)

BELÉM - PA
2021

FRANCISCA JANICE DOS SANTOS FORTALEZA

UMA *GEOMETRIA PARA ENSINAR*:
elementos do saber profissional do professor que ensina matemática (1870-1920)

Texto apresentado à banca examinadora do Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas, vinculado ao Instituto de Educação Matemática e Científica, da Universidade Federal do Pará, como exigência parcial para a obtenção do título de Doutora em Educação em ciências e Matemática – Área de concentração: Educação matemática.

Orientadora: Profª. Dr.ª Maria Lúcia Pessoa Chaves Rocha.
Coorientador: Prof. Dr. Wagner Rodrigues Valente.

BELÉM-PA
2021

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBDSistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará

Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

F736g Fortaleza, Francisca Janice dos Santos.
Uma geometria para ensinar: elementos do saber profissional do professor que ensina matemática (1870-1920) / Francisca Janice dos Santos Fortaleza. —2021.
214 f.: il. color.

Orientador(a): Profª. Dra. Maria Lúcia Pessoa Chaves Rocha
Coorientador(a): Prof. Dr. Wagner Rodrigues ValenteTese (Doutorado) - Universidade Federal do Pará, Instituto de Educação Matemática e Científica, Programa dePós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas, Belém, 2021.

1. Geometria para ensinar. 2. Saberes profissionais do professor. 3. Primeiros anos escolares. 4. Formaçãode professores. 5. História da educação matemática. I. Título.

CDD 371.102

FRANCISCA JANICE DOS SANTOS FORTALEZA

UMA *GEOMETRIA PARA ENSINAR*:
elementos do saber profissional do professor que ensina matemática (1870-1920)

Texto apresentado à banca examinadora do Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas, vinculado ao Instituto de Educação Matemática e Científica, da Universidade Federal do Pará, como exigência parcial para a obtenção do título de Doutora em Educação em ciências e Matemática – Área de concentração: Educação matemática.

Orientadora: Profª. Dr.ª Maria Lúcia Pessoa Chaves Rocha.
Coorientador: Prof. Dr. Wagner Rodrigues Valente.

Data de Avaliação: 16 de abril de 2021.

Banca Examinadora:

Profa. Dra. Maria Lúcia Pessoa Chaves Rocha - PPGECM/UFPA - Orientadora

Prof. Dr. Wagner Rodrigues Valente - PPGES/UNIFESP – Coorientador
Membro externo

Prof. Dr. José Jerônimo de Alencar Alves – PPGECM/UFPA
Membro interno

Prof. Dr. João Cláudio Brandemberg – PPGECM/UFPA
Membro interno

Prof.ª Dr.ª Luciane de Fatima Bertini – PPGES/UNIFESP
Membro externo

Prof. Dr. Benedito Fialho Machado – SEDUC/PA
Membro externo

Às brasileiras e aos brasileiros...

... professoras e professores que ensinam geometria nos primeiros anos escolares;

... professoras e professores de matemática que ensinam geometria.

A todas as professoras e a todos os professores que formam professores.

A quem estuda e pesquisa na área da *História da educação matemática*.

AGRADECIMENTOS

A *Deus*, pela constante proteção ao longo de toda a minha vida, por me mostrar o caminho a seguir durante os momentos de dúvidas e incertezas ao longo dessa jornada na pós-graduação, e por ter posto ao meu lado pessoas maravilhosas que estiveram constantemente apoiando-me, incentivando-me e orientando-me.

À *Universidade Federal do Pará*, pela formação que me proporcionou durante os últimos 12 anos da minha vida, e por tornar possível que eu chegasse muito além do que sonhei um dia.

Ao *Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas* (*PPGECM*), pela oportunidade de cursar o doutorado. Em especial, ao coordenador, o *Prof. Dr. Iran Mendes*, por todo o seu incentivo e oportunidades concedidas.

À minha querida orientadora, *Profª Drª. Maria Lúcia Pessoa Chaves Rocha*, por sempre confiar no meu potencial acadêmico, por todo apoio, toda motivação e atenção dedicados a mim durante esses cinco anos na pós-graduação.

Ao *Prof. Dr. Wagner Rodrigues Valente*, que também atuou como orientador incansável dessa pesquisa de doutoramento, pela disponibilidade, por compartilhar ideias, pelo exemplo e incentivo.

Ao *Prof. Dr. Iran Abreu Mendes*, que desde o mestrado foi um grande incentivador do meu crescimento acadêmico. Seu apoio e seu direcionamento para a minha estadia no Grupo de Pesquisa em História da Educação Matemática (GHEMAT-SP) em 2019.1 foram fundamentais para o desenvolvimento desta pesquisa. Obrigada pelas oportunidades.

Aos membros da banca examinadora, da qualificação e/ou da defesa, os Professores Doutores *José Jerônimo de Alencar Alves*, *Iran Abreu Mendes; João Cláudio Brandemberg*; *Luciane de Fatima Bertini e Benedito Fialho Machado*, pelas importantes contribuições que colaboraram significativamente para a elaboração deste texto doutoral. E também, ao *Prof. Dr. Carlos Aldemir Farias da Silva*, por seus direcionamentos no primeiro Seminário Avançado da pesquisa.

À *Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior* (CAPES), pelo apoio financeiro durante o curso de douramento.

Aos colegas/amigos e professores do Grupo de Estudos em História e Ensino da Matemática (GEHEM), especialmente ao professor *Brandemberg*, que ao longo desses três anos de doutorado foram suporte, incentivando-me e contribuindo para meu crescimento acadêmico e profissional.

Aos colegas/amigos e professores do GHEMAT-SP, pelas leituras e contribuições dadas ao meu texto enquanto lá estive.

À *Profª Drª Silvia Alicia Martinez*, pela gentileza de ter-nos disponibilizado um dos manuais de Pedagogia que compuseram nosso *corpus* de fontes de pesquisa.

Aos profissionais que atuam na secretaria do *PPGECM*, em especial ao *João*, ao *Naldo*, ao *Rosemberg* e ao *Higson*, pela atenção e disponibilidade.

À minha supervisora de estágio de docência, *Maria Alice Messias*. Obrigada por todo seu apoio, incentivo e confiança nessa etapa da minha formação.

À bibliotecária da Biblioteca do Livro Didático e Coleções Especiais da Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo (FEUSP), *Maria José*, pela disponibilidade e atenção sempre que precisei.

Aos funcionários responsáveis pelo arquivo do Instituto de Educação do Estado do Pará (IEEP), pela atenção e confiança.

Ao amigo, *Luis Andrés Castillo B.*, que muito me ajudou com traduções.

Ao meu amado esposo, *Fábio*, pelas inúmeras palavras e atitudes de incentivo, por ter sido minha base em cada momento de angústia e dúvida, por me ouvir sempre que eu estava feliz por mais uma seção do texto concluída e quando as incertezas sobre como prosseguir na redação da pesquisa me afligiam. Obrigada por sempre me dar todo suporte para que esse sonho do doutorado se tornasse possível, pelo companheirismo durante cada dia dessa trajetória.

Aos meus amados pais, *Josimar* e *Vanelice*, que não mediram esforços para que eu tivesse a oportunidade de estudar e conquistar meus objetivos. Obrigada por terem confiado em mim e permitido a minha ausência do nosso lar aos 16 anos para buscar meus sonhos, o que me trouxe até este momento de imensurável conquista acadêmica, profissional e pessoal.

Às minhas amadas irmãs, *Jamiles, Joice e Jaires*, por sonharem comigo, pelo incentivo, carinho e companheirismo. *Jamiles*, obrigada pelos *abstracts* de sempre.

Aos meus sobrinhos que tanto amo, *Yago*, *João Lucas*, *Yzago* e *Maria Luiza*, que, na inocência da sua infância, deram-me força com seus risos, beijos, abraços e “eu te amo, tia Jane”.

A toda a minha família Fortaleza, em especial, a minhas tias *Luza*, *Nira, Lene* e *Maria*, aos meus primos *Rodrigo*, *Gleucyvania* e *Josinara* - que tanto me motivaram desde muito cedo, pelas palavras de amor e incentivo.

A toda a minha família Santos, especialmente aos meus avós, *José* e *Francisca*, e aos meus tios, *Maria* e *Francisco*, e aos meus primos *Fernando, Vinicius* e *Rhian*, que me receberam em sua casa e me trataram com tanto amor e cuidado enquanto estive participando do GHEMAT-SP no primeiro semestre de 2019.

Aos meus demais tios Santos, *Cícera*, *Edimilson* e *Raimundo*, e aos meus primos, *Emerson*, *Beatriz*, *Ramires* e *Raila*, que também foram fundamentais para que eu pudesse realizar o sonho de estar no GHEMAT-SP, por seu carinho, cuidado, preocupação e incentivo. Titia, obrigada por todo o seu amor e apoio.

À família do meu esposo, os meus sogros, em especial, pelo carinho e apoio.

Às queridas amigas conquistadas na pós-graduação, *Ediele*, *Willa* e *Eunice*, as quais contribuíram de forma muito especial para meu sucesso nessa jornada acadêmica.

Aos meus amados amigos de sempre, pelas palavras constantes de incentivo e apoio. Em especial, *Gabriela*, *Nadino*, *Vânea*, *Juci, Natália*, *Kariny, Henrique, Fátima, John*.

RESUMO

O objetivo geral desta pesquisa de doutoramento consiste em caracterizar uma *geometria para ensinar* a partir de manuais de Pedagogia direcionados à formação de professores dos primeiros anos escolares no Brasil entre 1870 e 1920. Para alcançarmos tal objetivo, apoiamo-nos nas reflexões viabilizadas pelo seguinte questionamento: que geometria se constituiu como ferramenta de trabalho do professor que ensinou matemática em tempos de método intuitivo no Brasil? O aporte teórico-metodológico no qual nos fundamentamos para o desenvolvimento da escrita deste texto trata dos saberes das profissões do ensino e da formação de professores que foram sendo sistematizados e objetivados em cada período histórico-educacional. A partir de tais referenciais, ancoramo-nos especificamente às categorias teóricas de *matemática a ensinar* e *matemática para ensinar*, de modo que nosso objeto de estudo consiste na *geometria para ensinar* que pudemos sistematizar a partir de diferentes manuais de Pedagogia, materiais que são nossas fontes de pesquisa. Para desenvolver essa sistematização, recorremos ao processo metodológico que indica como transformar informações dispersas em saberes objetivados. A partir da realização das etapas de recompilação, comparação e sistematização, concluímos que todos os manuais de Pedagogia que compuseram nossas fontes de pesquisa apresentam sistematizações que orientam o trabalho pedagógico do professor *para* ensinar geometria, algumas possuem maior aprofundamento sistemático que outras em termos de constituição e objetivação de uma *geometria para ensinar*, mas todas são específicas para formar o professor *para* ensinar essa matéria escolar. Os elementos que consideramos como constituintes da geometria que é ferramenta de trabalho do professor apresentam consensos e convergem para uma mesma ideia sobre o que deve saber o professor *para* ensinar geometria nos primeiros anos escolares. Isso nos permitiu sistematizar uma *geometria para ensinar* característica da formação institucional de professores dos primeiros anos escolares no Brasil entre 1870 e 1920, a qual está pautada em elementos da geometria euclidiana; mobiliza materiais de ensino tais como uma coleção de formas sólidas; recorre à marcha de ensino analítica-sintética, o que significa que as formas geométricas são ensinadas do todo para as partes e que, estudadas estas, faz-se o movimento das partes para o todo, graduando da geometria espacial para a plana e em seguida, de modo inverso; os conteúdos são apresentados aos alunos a partir da mobilização daqueles materiais, estimulando o uso dos sentidos para a construção de percepções sobre as formas; estimula-se a generalização gradualmente. Esses elementos articulam-se, configurando princípios do método intuitivo reelaborados *para* o ensino de geometria, associando-se ao ideário pedagógico ao qual os autores dos manuais se dizem filiados. Portanto, essa *geometria para ensinar* está pautada na articulação e mútua dependência entre a *geometria a ensinar* mobilizada e os saberes *para* ensinar geometria, de modo que a maneira como acontecem essas articulações e mobilizações caracteriza essa geometria como intuitiva, o que nos permite sustentar que entre 1870 e 1920 a cultura escolar elaborou e manteve estável na formação dos professores dos primeiros anos escolares uma ferramenta de trabalho do professor relativamente à docência em geometria que pode ser caracterizada como *geometria intuitiva para ensinar*.

Palavras-chave: *História da educação matemática*. Formação de professores. Primeiros anos escolares. Saberes profissionais do professor. *Geometria para ensinar*.

ABSTRACT

The general objective of this doctoral research consist in characterize a geometry for teaching from Pedagogy manuals directed to the formation of teachers of the first school years in Brazil between 1870 and 1920.To we reach this goal, we rely on the enabled reflections by the following questioning: what geometry was constituted as a working tool by the teacher who taught mathematics in times of intuitive method in Brazil? The reference theoretical-methodological on which we base ourselves for the development of the writing of this text that deals with the knowledge of the teaching professions and teacher training that have been systematized and objectified in each historical-educational period. Based on such references, we agree specifically to the theoretical categories of *mathematics to teach and mathematics for teaching,* so that our object of study consists of geometry for teaching that we were able to systematize from different Pedagogy manuals, materials that are our sources of research. To develop this systematization, we used the methodological process that indicates how to transform dispersed information into objectified knowledge. From the completion of the stages of recompilation, comparison and systematization, we concluded that all Pedagogy manuals that composed our sources of research present systematizations that guide the pedagogical work of the teacher for teaching geometry, some have greater systematic depth than others in terms of constitution and objectification of a geometry for teaching, but all are specific to form the teacher for teaching this school subject. The elements that we consider as constituents of the geometry that is the teacher's work tool present consensus and converge to the same idea about what the teacher must know for teaching geometry in the first school years. This allowed us to systematize a geometry for teaching characteristic of the institutional training of teachers of the first school years in Brazil between 1870 and 1920, which is based on elements of Euclidean geometry; mobilizes teaching materials such as a collection of solid forms; makes use of the teaching order analytical-synthetic, which means that geometric shapes are taught from the whole to the parts and that, when studied, the parts are moved to the whole, graduating from spatial geometry to flat and then, conversely; the contents are presented to the students from the mobilization of those materials, stimulating the use of the senses to construction of perceptions about the forms; generalization is gradually encouraged. These elements are articulated, configuring principles of the intuitive method elaborated for the teaching of geometry, associating with the pedagogical ideas to which the authors of the manuals say they are affiliated. Therefore, this geometry for teaching is based on the articulation and mutual dependence between the geometry to teach mobilized and the knowledge for teaching geometry, so that the way as happen these joints and mobilizations characterizes this geometry as intuitive, which allows us sustain that between in the 1870s and 1920s, school culture developed and maintained stable in teacher training of first school years a working tool for teachers regarding teaching in geometry, which can be characterized as intuitive geometry for teaching.

Keywords: History of mathematical education. Teacher training. First school years. Professional knowledge of the teacher. Geometry for teaching.

ÍNDICE DE QUADROS

SUMÁRIO

CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Ao ingressar no mestrado no Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas (PPGECM), da Universidade Federal do Pará (UFPA), no ano de 2015, passei a conhecer uma área de pesquisa cujo material de leitura não conhecia, a *História da educação matemática*. Ao ouvir tal expressão, pensei tratar-se de uma área da Educação Matemática que abordasse sua história, os aspectos da constituição da Educação Matemática como área de pesquisa.

A primeira iniciativa de escrever sobre temáticas da área deu-se por meio da tentativa de realizar um inventário das pesquisas brasileiras sobre *História da educação matemática* na formação de professores. Nesse momento, o foco da discussão das leituras realizadas, tais como Valente (2010, 2013a), estava na importância de tal história na formação do professor de matemática, destacando que, "na medida em que cresce a produção ligada à História da educação matemática, possibilita-se a construção de um movimento mais e mais incisivo para incorporar esses saberes na formação do professor de matemática" (VALENTE, 2013a, p. 949), o que de fato foi acontecendo, como apontam Brito e Miorim (2016).

Fui, então, compreendendo que essa *História da educação matemática* não era uma história da área Educação Matemática, mas estava relacionada à historicização dos processos de ensino e de aprendizagem específicos da escola, sendo caracterizada, nas palavras de Valente (2013b, p. 32-33), "como a representação construída sobre os processos e dinâmicas elaborados ao longo do tempo na produção da matemática escolar em termos de seu ensino e aprendizagem". Mas, considerando a importância da presença desses aspectos na formação do professor de matemática, também não nos caberia uma *História da educação matemática* que constitua a representação[1] de processos e dinâmicas da própria formação do professor que ensinou essa matemática escolar, buscando que matemática pode ter sido produzida como ferramenta de trabalho daquele professor? Certamente, sim. Mas, vamos construindo uma engrenagem a cada pesquisa.

[1] De acordo com Chartier (2002), a representação é o modo pelo qual uma realidade social é significada por um indivíduo ou grupos sociais. "Então, tal como a entendo, a noção de representação não está longe do real nem do social. [...] As representações possuem uma energia própria, e tentam convencer que o mundo, a sociedade ou o passado é exatamente o que elas dizem que é" (CHARTIER, 2011, p. 23).

O contato com a *História da educação matemática* deu-se por intermédio da minha orientadora, professora Dr.ª Maria Lúcia Pessoa Chaves Rocha e do professor Dr. Iran Abreu Mendes em conversas no âmbito das reuniões do Grupo de Estudos em História e Ensino da Matemática (GEHEM/PPGECM), do qual faço parte. Nesse período, o professor Dr. Iran Mendes desenvolvia pesquisa junto a um projeto temático que abrangia pesquisadores de todo o Brasil.

Este projeto intitulava-se “A constituição dos saberes elementares matemáticos: a aritmética, a geometria e o desenho no curso primário em perspectiva histórico-comparativa, 1890-1970” e era coordenado pelo professor Wagner Rodrigues Valente, que também coordena o Grupo de Pesquisa em História da Educação Matemática do Brasil (GHEMAT - Brasil). Então, dediquei-me a estudar as pesquisas desenvolvidas por esse grupo e desenvolvi minha dissertação nesta área, discorrendo sobre o processo de escolarização da matemática (aritmética, geometria e desenho) nos Grupos Escolares paraenses entre 1899 e 1930, período em que os processos e dinâmicas que circundavam a matemática da escola primária paraense, em termos de ensino e aprendizagem, evidenciavam diretrizes cujos princípios perpassavam pela ideia de desenvolver um ensino em que a aprendizagem se desse a partir da percepção dos alunos, partindo do concreto ao abstrato.

Assim, é importante que saibamos, também, como acontecia a formação dos professores para atuarem nessa perspectiva. Eles estudariam sobre os processos de ensino e aprendizagem de maneira genérica sem, contudo, aprender sobre a matemática para o ensino que pode ser elaborada por eles, mobilizando a matemática escolar? Ou lhes era atribuída uma matemática específica para seu ofício de ensinar que integrava efetivamente os conteúdos escolares a esses processos? Esse é um questionamento pertinente quando se conhecem as diretivas estabelecidas no contexto dos primeiros anos escolares para os professores ensinarem matemática, o qual foi se construindo ao longo da minha formação.

A partir da elaboração da dissertação, meu interesse por leituras da *História da educação matemática* se intensificou e passei a me identificar cada vez mais com as temáticas das produções. Assim, embora não integrando efetivamente o GHEMAT, dediquei-me a essa área no doutorado, em consonância com os projetos de pesquisas desenvolvidos por este Grupo de âmbito nacional.

Em meio ao processo de definição do projeto de pesquisa doutoral, participei da Primeira Escola de Estudos Avançados em janeiro de 2018, ocorrida na UFPA, onde tomei conhecimento de outro projeto de pesquisa de âmbito nacional do GHEMAT-Brasil e do seu referencial. Este projeto é intitulado "A Matemática na Formação de Professores e no Ensino: processos e dinâmicas de produção de um saber profissional[2], 1890-1990"[3] e tem como objetivo "Investigar os processos e dinâmicas de constituição do saber profissional do professor que ensina matemática no período compreendido entre 1890-1990" (VALENTE; BERTINI; PINTO; MORAIS, 2017, p. 30). Deparei-me, então, com a possibilidade de pesquisar como aquela matemática específica do ofício do professor foi se construindo em cada momento histórico e contribuindo para a constituição do saber profissional.

Sob influência do referencial adotado pelas pesquisas do referido Projeto, ao longo de 2018 o meu projeto de pesquisa doutoral foi se delineando de forma a abordar o saber profissional do professor que ensina matemática. No primeiro semestre de 2019, participei da equipe de trabalho do GHEMAT em São Paulo, tendo a oportunidade de ter versões do meu projeto de pesquisa sendo discutidas pelo Grupo. A partir das contribuições, considerando que já existia afinidade teórica e pelo apoio da minha orientadora, o meu[4] projeto foi direcionado ao Projeto Temático do Grupo. Assim, a escolha por estudarmos os saberes profissionais nesta pesquisa de doutoramento justifica-se pelo seu alinhamento com este Projeto, de modo que essa escolha viabiliza-nos refletir sobre aqueles questionamentos que, a partir da escrita da dissertação, como mencionamos, vínhamos formulando sobre como se dava a formação do professor para atuar naqueles termos que a pesquisa do mestrado evidenciou, sobre quais saberes deveriam formar o professor para ensinar matemática naquele período.

Consideramos que pesquisas sobre a constituição histórica de saberes profissionais do professor são importantes para a formação de professores que ensinam matemática atualmente, por compreendermos que, a partir do entendimento de que historicamente foram elaborados saberes específicos para docência em

---

[2] No Capítulo II discutiremos o saber profissional do professor nos termos teóricos aos quais esta pesquisa se alinha. Por hora, podemos dizer que o saber profissional do professor advém dos saberes que compõem a sua formação como objeto, saberes *a* ensinar, ou como ferramenta, saberes *para* ensinar, de seu trabalho (HOFSTETTER; SCHNEUWLY, 2017).

[3] O projeto é financiando pela Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) na modalidade auxílio temático. Maiores informações sobre o projeto podem ser lidas no endereço: http://www.bv.fapesp.br/pt/auxilios/98879/a-matematica-na-formacao-de-professores-e-no-ensino-processos-e-dinamicas-de-producao-de-um-saber-p/.

[4] A partir daqui será usada a primeira pessoa do plural, pois diversos sujeitos, entre pesquisadores e pós-graduandos, contribuíram para com a elaboração desta tese.

matemática, os professores reconheçam-se como tais, que eles possuem saberes próprios da sua profissão e que isso os diferencia dos matemáticos. Os professores necessitam "compreender que heranças reelaboradas o seu ofício traz de outros tempos e que estão presentes na sua prática pedagógica cotidiana", sabendo que são herdeiros dos saberes sistematizados para os professores de matemática e não para os matemáticos (VALENTE, 2010, p. 133).

E ainda, tendo em vista que "há questões de representação do passado do ofício do professor de matemática que estão consolidadas e que, certamente, constituem entrave ao bom desempenho das atividades profissionais dos professores" (VALENTE, 2010, p. 134), é importante construirmos representações sobre o ofício do professor que reconheçam que houve um processo de constituição histórica de saberes para a docência em matemática, os quais possam corroborar para a ressignificação do que precisa saber o professor para que desempenhe bem o ofício de ensinar.

Preocupando-se com os processos e dinâmicas de constituição do saber profissional do professor que ensina matemática, o Projeto Temático do GHEMAT, que mencionamos, está dividido em quatro eixos temáticos que condensam a amplitude temática do referido Projeto. O primeiro eixo tem como subtemática "os *experts* e os ensinos de matemática nos primeiros anos escolares" e atém-se

> aos personagens, *experts*, que tiveram participação ativa nos processos e dinâmicas de sistematização dos saberes matemáticos para a formação de professores. Intenta-se reconstruir trajetórias que possam evidenciar a participação desses *experts* na elaboração da *matemática a ensinar* e da *matemática para ensinar* presentes na formação de professores e no ensino (VALENTE; BERTINI; PINTO; MORAIS, 2017, p. 34).

Os *experts* são considerados como personagens que contribuíram sobremaneira para os processos e dinâmicas de sistematização dos saberes profissionais, mas o foco do Projeto não está na história deles por si só, mas sobretudo nas sistematizações que eles realizaram em torno dos saberes profissionais do professor que ensina matemática e como tais saberes estiveram presentes nas disputas por legitimação das suas propostas. Assim, "que papel tiveram os *experts* na elaboração dos saberes profissionais do professor que ensina matemática?" (VALENTE; BERTINI; PINTO; MORAIS, 2017, p. 34) é a questão que os autores apontam como orientadora deste eixo.

O segundo eixo trata dos “Processos de elaboração da *matemática a ensinar* nos primeiros anos escolares”, subtemática que abarca pesquisas cujas discussões tratam do processo de constituição das diferentes rubricas referentes à matemática que compunha os primeiros anos escolares no período compreendido entre 1890 e 1990. Nas palavras dos autores, “este eixo congrega pesquisas que analisam historicamente os processos de constituição de matérias de ensino nos primeiros anos escolares tendo em vista a matemática” (VALENTE; BERTINI; PINTO; MORAIS; 2017, p. 36).

Entre as rubricas que ganham destaque nesse processo estão Cálculo, Aritmética, Desenho Linear, Desenho, Geometria. Vale destacar que essas matérias não são tratadas como áreas matemáticas ao redor das quais se organiza uma listagem de conteúdos em torno da própria matemática, mas sim como resultantes de processos e dinâmicas que inter-relacionam o saber matemático e as ciências da educação, o que bem mostra a pesquisa de doutoramento de Pinheiro (2017), que, embora não tenha usado o referencial de saberes profissionais do projeto temático de que falamos, evidenciou uma aritmética sob medida elaborada em tempos de pedagogia científica.

A subtemática do terceiro eixo consiste em “A matemática na formação de professores para os primeiros anos escolares: a constituição da *matemática para ensinar*” e envolve pesquisas que tratam das sistematizações específicas para a orientação das ações dos professores que ensinavam matemática. A sistematização de

> saberes sobre o aluno e suas maneiras de aprender matemática, saberes sobre as práticas de ensino, ou seja, métodos, procedimentos, dispositivos, assim como saberes sobre modalidades de organização e gestão dos saberes matemáticos, planos de estudos e finalidades das diferentes propostas curriculares (VALENTE; BERTINI; PINTO; MORAIS, 2017, p. 38).

Esta pesquisa de doutoramento tem maior afinidade com esse eixo temático, caracterizando um saber específico do professor que ensina geometria, uma das rubricas cujo processo de constituição nos primeiros anos escolares é estudado pelas pesquisas do primeiro eixo de que falamos. Isso evidencia o trânsito entre os diferentes eixos temáticos anunciado pelos elaboradores do Projeto na busca pela caracterização do profissional professor que ensina matemática, dados os processos e dinâmicas de sua produção.

O quarto eixo tem como subtemática “Professores que ensinam matemática e a matemática ensinada”, contemplando “a produção realizada no espaço escolar que conjuga a interação entre professores, alunos e saberes, [...] [tendo] em conta uma das dimensões da prática pedagógica: a matemática ensinada[5] nos primeiros anos escolares” (VALENTE; BERTINI; PINTO; MORAIS, 2017, p. 34; 40).

Diversos trabalhos que apresentam resultados parciais das pesquisas ancoradas a esse Projeto estão sendo apresentados e publicados em anais de eventos e revistas científicas da área, como aponta Maciel (2019). A pesquisa de doutoramento desta autora é exemplo dessas pesquisas, apresentando resultados também vinculados ao referido Projeto, os quais tratam da caracterização de elementos de uma *aritmética para ensinar* em manuais pedagógicos das décadas finais do século XIX e iniciais do século XX.

A partir do desenvolvimento de todas essas pesquisas, os resultados do Projeto poderão caracterizar a constituição histórica do saber profissional do professor que ensina matemática, como ela se comportou em diferentes momentos da história da educação brasileira no período de 1890 a 1990. Quando se tinha em ascendência determinada vaga pedagógica, como se caracterizava o saber profissional do professor naquela época. Do método intuitivo ao movimento da matemática moderna, quais foram os comportamentos do saber profissional do professor que ensina matemática. Se hoje ainda há insistentes questionamentos sobre como as teorias que buscam nortear o ensino do professor de diferentes áreas podem ser direcionadas especificamente para a formação do professor de modo que ele disponha de uma matemática característica do seu ofício, os resultados do Projeto, congregando as pesquisas vinculadas a ele, destacarão como isso se constituiu no período indicado.

Assim, será possível construir, a partir do Projeto como um todo, a argumentação que sustentará a hipótese firmada por seus autores acerca da existência de uma *matemática a ensinar* e, sobretudo, de *uma matemática para ensinar* que caracteriza o saber próprio do ofício do professor. Então, será possível

[5] “Como matemática ensinada considera-se, neste estudo, aquela objetivada nos registros dos documentos escolares, aquela que resulta das relações estabelecidas no ambiente escolar e que ganha visibilidade por meio desses registros. A pesquisa leva em consideração como fontes documentais os cadernos escolares, diários de classe, provas e exames” (VALENTE, BERTINI, PINTO; MORAIS, 2017, p. 40).

dizer como se constituiu a ferramenta de trabalho do professor que ensinava matemática no ensino primário brasileiro entre 1890 e 1990. Mais que mostrar como se constitui essa ferramenta, esperamos entender que ferramenta era essa, quais eram suas características.

Para isso, as diferentes pesquisas que compreendem o Projeto citado perpassarão pelas diferentes matérias de ensino referentes à matemática que integravam os primeiros anos escolares, sobretudo a aritmética, a geometria e o desenho. Considerando as especificidades do eixo três que já destacamos, esta pesquisa de doutoramento contribui com o Projeto Temático à medida que intenta caracterizar uma *geometria para ensinar*, a qual integrará a historicização de uma *matemática para ensinar* nos primeiros anos escolares no Brasil no período supracitado. Então, a escolha por escrever sobre os saberes profissionais do professor *para* ensinar geometria, sobretudo uma *geometria para ensinar*, deu-se no sentido de colaborar com a caracterização de uma *matemática para ensinar* conforme propõe o Projeto Temático.

A partir do desenvolvimento das referidas pesquisas, observamos que a análise em perspectiva histórica de documentos da cultura escolar[6], sobretudo referente à formação de professores, pode nos revelar que, ao longo do tempo, foi acontecendo a sistematização de saberes profissionais do professor, os quais foram sendo institucionalizados com vistas a promover a sua profissionalização[7].

Essa análise histórica voltada para manuais de Pedagogia[8] que compuseram a formação do professor dos primeiros anos escolares pode revelar como historicamente o saber profissional de tal professor foi se constituindo, haja vista que os referidos manuais, entre tantas coisas, tratavam de orientações específicas para o ensino das diferentes matérias que integravam as profissões do ensino e da formação. Particularmente, tais manuais instruíam o professor acerca de aspectos relacionados

[6] Julia (2001) delineia a cultura escolar afirmando que esta poderia ser descrita "como um conjunto de *normas* que definem conhecimentos a ensinar e condutas a inculcar, e um conjunto de *práticas* que permitem a transmissão desses conhecimentos e a incorporação desses comportamentos", ressaltando que essas normas e práticas obedecem às finalidades variáveis ao longo do tempo (JULIA, 2001, p. 10).

[7] A partir de pesquisas sobre como acontece a profissionalização de uma atividade ocupacional (MACHADO, 1995; BOURDONCLE, 2000), podemos notar que, nesse processo, um aspecto essencial é a consolidação de um "corpo esotérico de conhecimento" (MACHADO, 1995). Neste texto, atemo-nos à elaboração histórica desse corpo de saberes próprio da profissão do professor que ensina matemática.

[8] Ao longo deste texto, evidenciaremos a relação entre manuais de Pedagogia e a constituição do saber profissional do professor que ensina matemática, justificando a escolha de tais fontes.

ao ensino das rubricas que representavam a matemática, tais como a aritmética e a geometria.

A partir de Prost (1996), Valente (2007) afirma que as questões dos historiadores são legítimas quando fazem com que sua disciplina avance. Assim, para desenvolver suas pesquisas, o historiador da *educação matemática* precisa de questões que agreguem novidades sobre a compreensão do processo histórico e a dinâmica de constituição da matemática escolar e da matemática da formação do professor que deve ensiná-la. Para que haja fontes de pesquisa, é necessário que se determinem questões sobre os documentos do passado (VALENTE, 2007).

Como sinalizamos, os documentos do passado aos quais dedicamos nossa questão são os manuais de Pedagogia dirigidos à ou que circularam na formação do professor dos primeiros anos escolares. Diante disso, esta tese de doutoramento foi desenvolvida de forma a responder a uma questão que nos inquieta a respeito do que esses manuais podem efetivamente apresentar a respeito da geometria como ferramenta de trabalho do professor: que geometria é possível caracterizar como um saber específico para formar professores dos primeiros anos escolares entre 1870 e 1920?

Esse é o período que esta pesquisa de doutoramento compreende, no qual prevaleceu como proposta orientadora do ensino das diferentes rubricas dos primeiros anos escolares brasileiros, inclusive da geometria, o método intuitivo[9]. Pesquisas como a de Leme da Silva e Valente (2013) têm apontado que, dentro desse período, houve a existência de uma geometria intuitiva no ensino primário. Então, tomamos como hipótese de trabalho que, a partir da publicação de apropriações[10] ou de traduções[11] de manuais de Pedagogia direcionados à formação de professores dos primeiros anos escolares, entre 1870 e 1920, objetivou-se em tais manuais e institucionalizou-se nos cursos de formação dos professores dos primeiros anos escolares uma geometria elaborada pela cultura escolar especificamente para

---

[9] No capítulo 3, discorremos acerca do método intuitivo

[10] "A apropriação, tal como a entendemos, tem por objetivo uma história social das interpretações, remetidas para as suas determinações fundamentais (que são sociais, institucionais, culturais) e inscritas nas práticas específicas que as produzem" (CHARTIER, 2002, p. 26). Tendo em vista esta proposição de Roger Chartier, Valente (2019c, p. 59) escreve que a apropriação "designa um consumo criativo, dos modos de ver, ler, sentir das interpretações que todo sujeito constrói a partir de modelos que lhes são dados".

[11] Para além da tradução de um idioma para o outro, entendemos este termo no sentido atribuído por Burke (2016) de "tradução cultural", isto é, quando há a adaptação do que se aprendeu "às próprias necessidades e circunstâncias" (BURKE, 2016, p. 129).

formação desses professores. Em outras palavras, entre 1870 e 1920, a cultura escolar elaborou e manteve estável[12] na formação dos professores dos primeiros anos escolares uma ferramenta de trabalho do professor relativamente à docência em geometria que pode ser caracterizada como *geometria intuitiva para ensinar*.

Assim, nosso objetivo geral consiste em caracterizar uma *geometria para ensinar* a partir de manuais de Pedagogia direcionados à formação de professores dos primeiros anos escolares no Brasil entre 1870 e 1920, de modo que nosso objeto de estudo consiste na *geometria para ensinar* que poderemos sistematizar a partir de diferentes manuais segundo o referencial que adotamos. Diante de tal objetivo geral, delimitamos os seguintes objetivos específicos, os quais nos auxiliarão no alcance de tal objetivo para tornarmos tal *geometria para ensinar* inteligível[13]:

- Verificar a trajetória da geometria nos primeiros anos escolares no Brasil no período indicado;
- Averiguar a importância dos manuais de Pedagogia para constituição do saber profissional do professor que ensina matemática (1870-1920);
- Discutir as orientações direcionadas para o ensino de geometria objetivadas em manuais de Pedagogia dirigidos à formação de professores dos primeiros anos escolares brasileiros (1870-1920);
- Sistematizar elementos de uma *geometria para ensinar* recompilados de diferentes manuais de Pedagogia de modo a evidenciar uma *geometria para ensinar* constitutiva da formação dos professores dos primeiros anos escolares que circulou no Brasil entre 1870 e 1920.

Como já sinalizamos, a escolha de tal período deu-se pelo fato de que historiadores da educação apontam que ele constitui época da história em que esteve presente o ensino intuitivo. A propagação do método citado como vaga pedagógica admitida no cenário dos primeiros anos escolares do Brasil prevaleceu até meados de

---

[12] Quando usamos o termo estável, referimo-nos à ideia de que não houve variações consideráveis sobre o que os manuais propunham *para* ensinar geometria, indicando que suas orientações eram convergentes e consensuais.

[13] Segundo Geertz (2008), algo se torna inteligível quando é descrito com densidade. Mais que isso, para Chartier (2002, p. 21), há duas condições necessárias para que uma relação (entre signo e coisa significada) seja inteligível: “o conhecimento do signo enquanto signo, no seu distanciamento da coisa significada, e a existência de convenções partilhadas que regulam a relação do signo com a coisa”. Neste texto, o signo são as orientações para o ensino de geometria objetivadas nos manuais de Pedagogia, a *geometria para ensinar* é a coisa significada e as convenções partilhadas que regulam a relação entre ambos é o referencial teórico-metodológico que consideramos.

1920, quando as discussões sobre escola nova começaram a se disseminar intensamente (VALDEMARIN; CAMPOS, 2007).

Para além do que apresentamos nessas considerações iniciais, estruturamos esta tese de doutoramento em quatro capítulos, mais as considerações finais, em que relacionamos os objetivos propostos com a pesquisa desenvolvida e sistematizamos a resposta para nossa questão de pesquisa. O capítulo I discorre acerca da geometria nos primeiros anos escolares, evidenciando a trajetória desta rubrica no Brasil desde sua inserção neste nível de ensino até as primeiras décadas do século XX. Examinamos a geometria como tema de pesquisa da *História da educação matemática*, no âmbito do ensino e da formação de professores, e as apresentamos em busca de mostrar que não há pesquisas longitudinais que caracterizem a geometria como uma ferramenta de trabalho do professor que ensina matemática.

No capítulo II, discorremos acerca da matemática enquanto saber profissional do professor, discutindo os *saberes a ensinar* e *para ensinar* como propulsores das categorias teóricas que sustentam a caracterização do saber profissional do professor que ensina matemática: *a matemática a ensinar* e a *matemática para ensinar*. Considerando a especificidade desta tese de doutoramento em meio a esse contexto teórico, enfatizamos neste capítulo a geometria que se constitui como elemento do saber profissional do professor que ensina matemática, a qual é sua ferramenta de trabalho.

A modernização da pedagogia e o processo para sistematizar uma *geometria para ensinar* é o tema do capítulo III. Nele, abordamos a pedagogia intuitiva como promotora de modernização pedagógica nas décadas finas do século XIX e iniciais do século XX, em torno das quais pode ter-se sistematizado uma *geometria para ensinar* própria daquele período. Também discorremos acerca dos manuais de Pedagogia como detentores de sistematizações direcionadas à constituição do saber profissional do professor. Neste capítulo, explicamos, ainda, o processo de definição do *corpus* de manuais que tomamos como fonte de pesquisa e como procedemos para sistematizar elementos de uma *geometria para ensinar* em determinado período a partir de diferentes manuais de Pedagogia, de forma a caracterizar uma *geometria para ensinar* do período que esta pesquisa abrange.

O capítulo IV compreende a análise dos manuais que tomamos como fontes de pesquisa, de forma a sistematizarmos elementos de uma *geometria para ensinar* recompilados das orientações *para* ensinar geometria objetivadas para a formação de professores. Assim, caracterizamos uma *geometria para ensinar* a partir de manuais de Pedagogia direcionados à formação de professores dos primeiros anos escolares no Brasil entre 1870 e 1920.

CAPÍTULO I

A GEOMETRIA NA *HISTÓRIA DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA*

Este capítulo aborda a geometria nos primeiros anos escolares na perspectiva da *Histora da educação matemática*, evidenciando sua trajetória. Para além disso, também objetiva descrever pesquisas desenvolvidas nesse âmbito de estudo (área na qual esta tese de doutoramento se concentra) e que têm como tema de investigação a geometria do ensino ou da formação de professores. Também, relacionamos essas pesquisas ao que objetivamos com a elaboração desta tese de doutoramento, de maneira a mostrar que entre as teses e dissertações desenvolvidas em perspectiva histórica acerca da geometria dos primeiros anos escolares, ou da formação de seus professores, não há quem tenha se dedicado a estudá-la no contexto investigativo que admitimos.

1.1 A geometria como tema de pesquisa da *História da educação matemática*

Para a escrita desta seção, recorremos a dissertações e teses que abordam a geometria no âmbito do ensino ou da formação de professores dos primeiros anos escolares no período do método intuitivo no Brasil[14]. Para dialogar com tais estudos, também utilizamos o livro organizado pelos pesquisadores Wagner Rodrigues Valente e Maria Célia Leme da Silva, intitulado “A geometria nos primeiros anos escolares: história e perspectivas atuais”, a fim de apresentar uma visão geral acerca das condições de inserção e permanência da geometria do referido nível escolar, para o qual o professorando normalista era formado e para onde direcionava sua atuação, ou seja, onde ele mobilizaria seu saber profissional *para* ensinar geometria.

A opção por este livro deu-se por ele comportar discussões que abordam desde os primórdios do ensino de geometria nos primeiros anos escolares até as décadas iniciais do século XX, evidenciando, pela narrativa dos pesquisadores de referência da área, como a geometria foi se transformando em saber escolar em cada período histórico. Entretanto, mantivemos nosso foco nas discussões do período do método intuitivo, embora perpassemos pelo processo de inserção da geometria nos primeiros anos escolares.

---

[14] O processo de escolha dessas pesquisas será explicado logo adiante na seção 1.2.

A discussão sobre o ensino de geometria nos primeiros anos escolares no Brasil teve como referência textos de Condorcet[15], que foram adaptados no país logo nas primeiras décadas do século XIX (VALENTE; LEME da SILVA, 2014), o que evidencia a carência da produção nacional de obras voltadas para o ensino da geometria dos primeiros anos escolares, e, por conseguinte, ressalta que as ideias estrangeiras, neste caso as de origem francesa, corroboraram para a definição da geometria desse nível escolar no Brasil desde que se começou a discutir a inserção dessa matéria nas escolas primárias.

Para Condorcet, o ensino de geometria deveria ser articulado com a prática da agrimensura, da medição de terras. No entanto, a própria presença da geometria no rol de conteúdos de ensino estabelecido pela primeira legislação do ensino primário não foi imediata. A referida rubrica não fazia parte da versão inicial do projeto, cuja ênfase estava no ler, escrever e contar. Foi necessário um intenso debate entre os legisladores e 30 emendas até que se fosse definido o que deveria ser ensinado nos primeiros anos escolares (VALENTE; LEME da SILVA, 2014). A evidência dessa situação nos leva a refletir sobre os jogos de poder que envolvem a definição do que deve ser ensinado na escola, em particular sobre matemática, sobressaindo-se as ideias de quem tem mais poder e representatividade.

Não fazendo referência, mas em consonância com a proposta de Condorcet, o parlamentar Ferreira França[16] foi o primeiro a manifestar-se sobre o que de matemática se deveria ensinar. Este sugeriu a inclusão da geometria elementar, precisamente para que junto aos alunos fossem resolvidos problemas práticos, de pedreiro ou carpinteiro; propôs que esse deveria ser um saber escolar aprendido na

---

[15] “Nicolas Caritat, Marquês de Condorcet (1743-1794), matemático célebre, toma parte ativa na Revolução Francesa. Apresenta à Assembleia Legislativa, em nome do Comitê de Instrução Pública, um projeto de organização do ensino público. Suas propostas contêm o ideal de construção de uma escola conforme as orientações revolucionárias, cujo fim é a difusão do espírito iluminista. Em 1790, escreve as *Mémoires sur l´instruction publique*. Em seguida, apresenta o texto ao Comitê, a partir de sua instalação, em cinco de novembro de 1791. Condorcet propõe uma hierarquia das instituições escolares. Nela, o primeiro grau é formado por escolas primárias: uma escola para cada 400 habitantes: elas deverão ensinar os conhecimentos necessários a todos os cidadãos” (NIQUE; LELIÈVRE, 1990, p. 129-130, apud VALENTE, 2012, tradução do autor).

[16] “O médico Antônio Ferreira França (1771-1848), que nasceu e morreu na Bahia, lecionou até 1837 nesta faculdade (faculdade de medicina da Bahia) [...]. Formou-se em matemática, filosofia e medicina (1798) na Universidade de Coimbra. [...] Dava aulas de aritmética, geometria e grego. Foi médico da Santa Casa da Misericórdia, diretor do Liceu Provincial da Bahia, vereador e deputado. [...] Deixou apenas um manuscrito de ‘preleções de geometria’ e projetos legislativos” (BARROS, P., 1998, p. 436-437).

prática. Embora o deputado Augusto Xavier[17] tenha se posicionado contrariamente a essa manifestação, *argumentando que não havia professores com formação adequada para tanto*, seu colega parlamentar, Lino Coutinho, apoiou a ideia de Ferreira França sobre essa questão (VALENTE; LEME da SILVA, 2014, grifo nosso).

O destaque que damos ao argumento de Augusto Xavier é para chamar atenção para o fato de que, além da carência de manuais escolares para o ensino de geometria no Brasil do início do século XIX, também não havia, ainda, uma formação institucional[18] que preparasse o professor para ensinar as diferentes rubricas matemáticas, tampouco uma formação que atribuísse ao professorando saberes próprios do ofício de ensinar geometria.

O referido projeto foi aprovado ressaltando que "os professores ensinarão a ler, escrever, as quatro operações de aritmética prática de quebrados, decimais e proporções, *as noções mais gerais de geometria prática* (MOACYR, 1936, p. 189, grifo nosso). Nesse cenário, então, parece-nos que o ensino de geometria disposto pelos professores tinha referência nos conhecimentos advindos da experiência, da prática, e não em saberes sistematizados para o exercício da docência.

A geometria ficou determinada como saber para os primeiros anos escolares pela lei de 15 de novembro de 1827, e a característica que lhe foi atribuída foi de praticidade, no sentido de que seu ensino fosse útil ao exercício de determinadas profissões, tais como a medição de terreno, a agrimensura. Esse caráter técnico é o que caracteriza a representação da geometria prática voltada para primeiros anos de escolarização. No entanto, essa noção de prática vai se transformando e ganhando outros significados no âmbito escolar (VALENTE; LEME da SILVA, 2014).

No que se refere à presença da geometria nas escolas normais, Silvia Barros (2015) destaca o exemplo do atual estado de Minas Gerais, que entre 1895 e 1930, conforme quadro apresentado pela autora, contava com a geometria no conjunto de saberes disciplinares que integravam a formação da normalista, destacando a geometria plana e a espacial como a geometria que se manteve estável nas escolas normais brasileiras do final do século XIX e início do século XX.

[17] "Eleito deputado para Assembleia Geral Constituinte e Legislativa do Império do Brasil de 1823 pela província da Paraíba. Eleito deputado para Câmara dos Deputados na 1ª Legislatura, de 1826 a 1829, pela província da Paraíba" [Disponível em: https://arquivohistorico.camara.leg.br/index.php/dep-xavier-de-carvalho-2].

[18] "A Escola Normal da Província do Rio de Janeiro, em Niterói, foi a primeira Escola Normal criada no Brasil, em 1835, para formar professores primários" (FARIAS, 2014a, p. 17).

Conforme Silvia Barros (2015), comparando a incidência da geometria do campo disciplinar matemático nas escolas normais com a da aritmética e a do desenho, podemos observar reduzida presença de tal geometria. Assim, neste caso, as escolas normais não dispunham de uma área de estudo específica para a geometria, tendo esta que dividir lugar, por vezes, com a aritmética e com outras áreas como o desenho. Assim, podemos constatar que essa proximidade da geometria com o desenho, mencionada pela autora, não esteve presente apenas no ensino primário.

Segundo Valente e Leme da Silva (2014), Holanda Cavalcanti de Albuquerque[19] adaptou uma obra para atender à referida organização legislativa do ensino primário. Com o título *Princípios de desenho linear compreendendo os de geometria prática pelo método de ensino mútuo* (1829), já sugeria a estreita ligação que ambos (geometria e desenho) passaram a ter nesse período nos primeiros anos de escolarização. De acordo com o proposto, os alunos deveriam desenhar as figuras geométricas à mão livre, sendo precisos ao máximo possível; não eram feitas construções com instrumentos como régua e compasso. Valente e Leme da Silva (2014) concluem que a referida obra "revela um manual de desenho" (p. 29), o qual se faz notar como "um modelo para o ensino de geometria prática" (p. 29), a qual, por sua vez, terá tal caráter "se os alunos forem levados a trabalhar com as figuras geométricas" (VALENTE; LEME da SILVA, 2014, p. 29; 31). Como afirma D'Esquivel (2015), para o caso da escolarização da geometria, por muito tempo a geometria apenas servia ao ensino de desenho linear.

Portanto, "associar a esse ensino de geometria, a agrimensura, a medição de terrenos, como foi a intenção inicial, desde Condorcet, parece ter sido deixada de lado. O caráter prático é dado pelas construções de linhas, ângulos, de figuras [...]" (VALENTE; LEME da SILVA, 2014, p. 31). Com isso, a praticidade não é mais representada pelas atividades rurais e é a escola que passa a ser o âmbito em que a prática da geometria deve ser demonstrada, evidenciando que o significado de geometria prática se transformou e fez nascer uma geometria escolar. Mas mesmo no

[19] Antônio Francisco de Paula de Holanda Cavalcanti de Albuquerque, Visconde de Albuquerque, "Iniciou-se na carreira militar ainda criança, atingindo o posto de Tenente-Coronel, [...]. Conselheiro de Estado ocupou a pasta da Fazenda em quatro Gabinetes. [...] No Gabinete do Marquês de Olinda, em 1862, pela quarta e última vez, exerceu o cargo de Ministro da Fazenda. Chamado para outras pastas ocupou a da Marinha também por quatro períodos; dirigiu ainda as pastas da Guerra e do Império. "[Disponível em: http://www.fazenda.gov.br/acesso-a-informacao/institucional/galeria-de-ministros/pasta-imperio-primeiro-reinado-dom-pedro-i/pasta-imperio-primeiro-reinado-dom-pedro-i-ministros/antonio-francisco-de-paula-hollanda-cavalcanti-de-albuquerque].

trabalho com o desenho, ela ainda era justificada na escola como sendo adquirida para o exercício de profissões, agora urbanas (VALENTE; LEME da SILVA, 2014). Assim, percebemos que o caráter prático da geometria da escola primária se transforma, mas ainda quando esse sentido de prática ganha significado dentro da própria cultura escolar, ele também tem representatividade na vida social/profissional dos estudantes.

Com a produção e circulação de livros didáticos houve nova transformação de significado da geometria prática. Em destaque, o *Manual enciclopédico* de Emilio Monteverde[20], lançado em 1838, tratava de diversas matérias, inclusive da geometria, a qual ganhou nome de "definições geométricas". As definições geométricas estavam sempre acompanhadas de "aplicações", como por exemplo: "*Extensão* – é o espaço que ocupa qualquer corpo que se apresenta à vista. *Aplicação* – Se se puser, por exemplo um livro sobre a mesa, todo o lugar que nela ocupar será a sua extensão" (MONTEVERDE, 1879, p. 226 apud VALENTE; LEME da SILVA, 2014, p. 35, grifo do autor). Assim, o que Monteverde chama de "aplicações" são na verdade situações que ilustram ou exemplificam a caracterização dos elementos geométricos. Nesse sentido, aquela representação de uma geometria prática da proposta de Condorcet fica mais distante. "Mas, ainda, tem referências nas possíveis aplicações dos primeiros elementos do saber geométrico" (VALENTE; LEME da SILVA, 2014, p. 39).

Nas décadas finais do século XIX, a geometria dos primeiros anos escolares foi influenciada pela nova pedagogia que se instaurava, o método intuitivo, que provocou novas transformações (VALENTE; LEME da SILVA, 2014) e ganhou lugar, então, na organização da instrução pública denominada de grupos escolares (LEME da SILVA; VALENTE, 2014).

Sob a égide das ideias do método intuitivo, uma nova geometria é proposta para os primeiros anos escolares. Em parecer sobre o ensino primário em 1882, Rui Barbosa[21] enfatizou, sobre o ensino e geometria, que "é por meio de modelos

[20] "Aquiles Monteverde (1803-1881), um diplomata, escritor e pedagogo do século XIX que dedicou grande parte da sua vida [...] à instrução e educação da mocidade, e especialmente aos jovens que frequentavam as escolas primárias. Do rol de obras de sua autoria, sobressai aquela que [...] viria a ser uma das mais divulgadas e procuradas no referido século, intitulando-se Manual Enciclopédico para uso das escolas de instrução primária" (CORREIA, 2004, s.p.).

[21] "Rui Barbosa (Rui Barbosa de Oliveira), advogado, jornalista, jurista, político, diplomata, [...], nasceu em Salvador, BA, em 5 de novembro de 1849, e faleceu em Petrópolis, RJ, em 10 de março de 1923. Membro fundador [...] da Academia Brasileira de Letras. [...]. Deputado provincial, e depois geral, preconizou, juntamente com Joaquim Nabuco, a defesa do sistema federativo. [...]. Proclamada a República, Rui [...]. Eleito senador pela Bahia à Assembleia Constituinte [...] se conservaria até a morte, sucessivamente reeleito.

materiais, de construções gráficas, que há de ter entrada na escola o curso sempre concreto, intuitivo, figurado dos elementos desta ciência" (BARBOSA, 1947, p. 289 apud LEME da SILVA; VALENTE, 2014, p. 44). Os autores destacam outro ponto sobre a geometria, que é a introdução da taquimetria, a qual o parecerista define como "*concretização* da geometria, é o ensino da geometria pela evidência material, a acomodação da geometria às inteligências mais rudimentares: é a *lição de coisas* aplicada à medida das extensões e volumes" (BARBOSA, 1947, p. 290 apud LEME da SILVA; VALENTE, 2014, p. 44, grifo do autor).

Nesse período de transição entres os séculos XIX e XX, tanto o desenho quanto a geometria estabilizaram-se como saberes para a escola primária e gradativamente a geometria foi ganhando autonomia como disciplina escolar, obtendo lugar próprio no currículo em 1895 e se firmando como tal a partir da legislação educacional de 1925, tendo seu próprio programa de ensino e orientação pedagógica pautada no método intuitivo (D'ESQUIVEL, 2015).

Como afirmam Leme da Silva e Valente (2014), a partir do programa de ensino republicano de 1894, a geometria ganhou autonomia enquanto matéria de ensino e o adjetivo "prática", que a acompanhava desde a legislação de 1827, deixa de estar atrelado a sua determinação. Por outro lado, parecia muito próxima à matéria de desenho, e apenas esta constava no programa do primeiro ano escolar. "A geometria apresentada no programa inovador para os grupos escolares é desenvolvida do 2º ao 4º ano primário, [...] partindo da geometria plana e chegando à geometria espacial no 4º e último ano" (LEME da SILVA; VALENTE, 2014, p. 45-46). Assim, "relativamente ao ensino de geometria, coube à matéria desenho linear o papel de ser a porta de entrada desse saber para o currículo do curso primário brasileiro" (D'ESQUIVEL, 2019, p. 39).

Conforme Leme da Silva e Valente (2014), nesse contexto, o programa mencionou o uso de instrumentos como régua, compasso e transferidor para a construção de entes geométricos, o que deveria acontecer a partir do terceiro ano, pois nos dois primeiros eles seriam desenvolvidos à mão livre, com base na observação e repetição. O desenho é, então, considerado uma importante base para a geometria e que também potencializava a observação. Mas é preciso observar que

---

Na produção imensa de Rui Barbosa, [...] as traduções [...] das *Lições de coisas* de Calkins [...]. [Disponível em: http://www.academia.org.br/academicos/rui-barbosa/biografia].

a ele “cabe tão somente conhecer os elementos de cada figura, saber nomeá-las, sem invadir o domínio da ciência geometria, que deve ser ensinada por processos mais rigorosos” (LEME da SILVA; VALENTE, 2014, p. 46).

A aproximação entre o desenho e a geometria, nos termos explicados no parágrafo anterior, já se fazia presente em obras didáticas desde o final do Império, tal como *Desenho linear ou elementos de geometria prática popular* de autoria do Dr. Abílio Cesar Borges[22], cuja segunda edição foi publicada em 1882. Esta teve grande circulação e, embora o título sugira, ela não ensinava a desenhar, mas considerava o desenho como “algo preparatório ou preliminar para o ensino da geometria [e] [...] assim, [...] leva em conta o que estava assentado como desenho linear, desenho a mão livre, rumo à organização do saber geométrico” (LEME da SILVA; VALENTE, 2014, p. 52-53).

Nesse sentido, ao final do século XIX, o desenho aparece como um requisito necessário para o professor ensinar geometria, haja vista que as propostas para ensinar geometria demandavam outros saberes para além dos conteúdos geométricos, e o desenho, por exemplo, destaca-se como um novo “’ambiente’ para o professor ensinar geometria, caracterizando uma ‘nova’ *geometria para ensinar*” (CONCEIÇÃO, 2019, p. 67, grifos do autor). Neste ponto, destacamos que esta conclusão do autor está pautada nas informações contidas em relatórios oficiais elaborados por professores que foram enviados pelo Estado para participarem de estudos pedagógicos na Europa. Esses relatórios estavam voltados para a formação dos professores que já ensinavam (particularmente a geometria) no Rio de Janeiro.

Após o advento da República no Brasil, a obra didática que foi elaborada para os primeiros anos escolares que melhor pode nos ajudar a compreender como a geometria poderia constar na prática pedagógica dos professores desse nível de ensino, dada sua ampla circulação e aceitação, é intitulada *Primeiras noções de geometria prática*, de Freire[23], de 1894. Esta obra apresenta novas representações

[22] “Abílio Borges (1824-1891) nasce na Bahia e, em 1858, troca sua carreira de médico pela atividade educacional ao fundar, nesse ano, o Ginásio Baiano; em 1871, transfere-se para o Rio de Janeiro, instalando o Colégio Abílio. Em 1881, ganha de D. Pedro II o título de barão de Macaúbas. [...] Dr. Abílio César Borges protagonizou algumas iniciativas na esfera pública e privada, como forma de demonstrar princípios educativos que abraçara no que se refere aos métodos de ensino, aprendizagem da leitura e escrita, aritmética e geometria, educação infantil e castigos corporais, por exemplo” (VALENTE, 2012, p. 89).

[23] Olavo Freire da Silva “nasceu e viveu no Rio de Janeiro entre os anos 1869 e 1941” (p. 55). Sua formação aconteceu integralmente no Colégio Menezes Vieira. No Rio de Janeiro, “construíra sua carreira profissional, ocupando cargos institucionais de referência em ensino” (p. 19). Atuou “como

para o termo geometria prática, mas também mantém alguma relação com aquelas de períodos anteriores que destacamos (LEME da SILVA; VALENTE, 2014).

De acordo com D'Esquivel (2019), *Primeiras Noções de Geometria Prática* circulou por diversos estados por considerável período, sistematizando uma proposta didática para o ensino de geometria nos primeiros anos escolares. O conjunto de prescrições e procedimentos dessa proposta, tais como a ausência de definições formais, as referências a imagens do cotidiano e as aplicações práticas, foram integrantes de um repertório de saberes profissionais para o ensino de geometria em cada tempo histórico.

Iniciando pela geometria plana e indo até a espacial, assim como o programa de 1894, no primeiro capítulo da obra, Freire apresenta os conceitos, concomitantemente relacionando-os a objetos e ferramentas do cotidiano dos alunos e explicando como eles poderiam ser empregados em algumas profissões. No entanto, a partir do capítulo dois, as construções geométricas com os instrumentos mencionados, régua e compasso, ganham destaque e se fazem presente em todo o estudo da geometria plana. Então, Leme da Silva e Valente (2014) concluem:

> a geometria proposta no livro de Freire pode ser interpretada como uma *geometria prática*, na medida em que os conceitos estudados são relacionados com objetos da vida cotidiana, porém, a presença de construções geométricas de maneira contínua e crescente representa um novo enfoque para o caráter prático da geometria, ou seja, a praticidade na ação de construir objetos geométricos com régua e compasso (LEME da SILVA; VALENTE, 2014, p. 56).

Logo no início do século XX, a matéria geometria ganha novo significado para os primeiros anos escolares. O programa para os grupos escolares de 1905 evidencia a separação entre a geometria e o desenho. Estas deixaram de estar conectadas e ao desenho não competia mais traçar figuras geométricas, posto que isso ficou a cargo exclusivo da geometria. Nesse mesmo momento, outra mudança que provoca

professor primário no Gymnasio Fluminense (1888), Colégio São José (1889)" e foi professor da Escola Normal da Corte (p. 57), além de geógrafo. Desempenhou a função de conservador no "*Pedagogium*, órgão voltado à formação profissional do professor" (p. 19). Freire fez parte de um grupo socioprofissional que reunia professores e autores de livros escolares, que teve início na segunda metade do século XIX na Corte e na província fluminense (p. 22) e "alcançou grande sucesso editorial com a produção de uma série de obras voltadas ao ensino primário. De maneira específica, o livro *Primeiras Noções de Geometria Prática*" (p. 54) (D'ESQUIVEL, 2019, páginas diversas).

significativas alterações na geometria escolar é a inversão da ordem de como os conteúdos deveriam ser desenvolvidos. Nos dois primeiros anos escolares, era proposto o ensino das figuras geométricas espaciais e nos dois últimos, das planas (LEME da SILVA; VALENTE, 2014, p. 59).

As propostas para ensinar geometria analisadas por Conceição (2019) corroboram nesse sentido. Segundo o autor, já no final do século XIX novos saberes *para* ensinar são postos e com eles veio a indicação da inversão da marcha da geometria plana para a geometria espacial. Essa mudança “torna-se imperativa na proposta intuitiva, visto que o concreto, o conhecido da criança prevalece e, assim sendo, a exploração dos sólidos como ponto de partida é uma constante nas propostas” (CONCEIÇÃO, 2019, p. 67). “Esse encadeamento do plano para o espaço é mantido ao longo das reformas seguintes até meados do século XX” (LEME da SILVA; VALENTE, 2014, p. 59). Assim, notamos que os saberes *para* ensinar que estavam ganhando espaço no cenário educacional brasileiro possuíam tamanha representatividade que já interferiam na estruturação da geometria que deveria ser ensinada na escola primária.

Em meados da segunda década do século XX, o programa dos primeiros anos escolares passou a integrar uma nova matéria: formas. Esta era direcionada aos dois primeiros anos escolares, enquanto a matéria geometria reservava-se aos dois últimos anos. Evidenciando o encadeamento descrito no parágrafo anterior, o ensino das formas, prático e intuitivo, deveria começar “pela comparação entre esfera, cubo e cilindro e, em seguida, estudam-se as superfícies dos sólidos (quadrado, retângulo, triângulo)” (LEME da SILVA; VALENTE, 2014, p. 59). As construções geométricas e a determinação de área das figuras planas de forma prática compreendiam a geometria do terceiro ano, enquanto no quarto, o destaque era para introdução da taquimetria. Conforme os autores citados, essa relação entre formas e geometria permaneceu até 1949, sendo característica do período da escola nova.

Nesse sentido, Leme da Silva e Valente (2014) observam que o estudo de figuras geométricas é separado em dois momentos, que se diferem nos seus propósitos. Enquanto “para os dois primeiros anos, a matéria *formas*, configurada como ensino intuitivo, prático, de exploração, manipulação de objetos, sem denominações e sem construções a serem cobradas pelos alunos”, nos dois últimos anos escolares, “a matéria geometria, caracterizada por definições, propriedades geométricas, construções com utilização de régua e compasso e medidas de áreas e volumes" (LEME da SILVA; VALENTE, 2014, p. 60-61, grifo dos autores).

Considerando provas de alunos de grupos escolares paulistas de 1890 a 1930, Barreiros (2011) destaca que, contrariando o que as orientações educacionais determinavam – isto é, que o ensino fosse prático e intuitivo –, na prática era cobrado que os alunos decorassem definições, propriedades e construções geométricas. Portanto, o autor conclui que a apropriação do método intuitivo pelos professores da escola primária ocorreu lentamente. É válido destacar que Barreiros (2011) menciona que as provas apresentavam semelhança com a obra de Freire, o que julgamos estar associado com essa conclusão do autor, já que ele mesmo aponta que o manual de Freire apresentava uma complexidade crescente nos problemas apresentados, distanciando-se cada vez mais da praticidade, sem adotar o método intuitivo.

Em se tratando do que era proposto, esse encadeamento de matérias que separava formas e geometria, assim como o anterior, em que o desenho no primeiro ano servia de apoio à geometria dos anos seguintes de escolarização primária, é marca reveladora de uma nova organização escolar, a qual articulava-se intimamente com o que era proposto pelo método intuitivo e das lições de coisas; assim como a inversão da ordem do "plano para o espaço" para "do espaço para o plano", haja vista que nesse contexto "é preciso salientar a vaga do ensino intuitivo, das lições das coisas, da importância para a observação, considerando que o mundo que a criança observa é tridimensional" (LEME da SILVA; VALENTE, 2014, p. 63).

No entanto, como expressam os autores, novos tempos se iniciam e a geometria dos primeiros anos escolares é ressignificada, de modo que "os tempos atuais se mostram herdeiros do passado. Dos embates e das propostas de épocas longínquas e também próximas" (VALENTE, 2014, p. 133). Portanto, percebemos que a geometria que habita a cultura escolar se reinventa ao longo do tempo, mas as relações entre práticas, apropriações e representações que envolvem a sua circulação contribuem para a conservação do que mais é representativo para esse ambiente.

Nesta seção pudemos ter uma visão geral de como a geometria se constituiu como saber dos primeiros anos escolares, desde a primeira legislação da instrução brasileira, de 1827, até as primeiras décadas do século XIX. Observamos, em alguma medida, de que forma a geometria escolar esteve representada nas legislações, em programas de ensino e em manuais didáticos. Logo que introduzida no programa escolar, à geometria foi atribuído caráter prático, o qual foi se ressignificando ao longo dos anos, estando atrelado principalmente à vaga pedagógica que se disseminou na cultura escolar em cada tempo histórico. Do sentido prático que remete ao exercício do ofício de algumas profissões; passando pelo desenho linear à mão livre, em que a prática era demonstrada no próprio âmbito escolar; e pelas construções geométricas, sendo destacadas as matérias desenho linear ou formas como pilares para o ensino da geometria nos primeiros anos escolares nesse percurso histórico-educacional.

Ao longo desta seção, também observamos que as pesquisas já desenvolvidas que tratam da geometria na perspectiva da *História da educação matemática* abordam-na, em grande medida, sob um viés que mostra suas características no âmbito do ensino, destacando os aspectos que desde meados da primeira metade do século XIX até o início do século XX, em particular, compõem a *geometria a ensinar*, um dos objetos de trabalho do professor dos primeiros anos escolares.

Nesse contexto de investigação, pouco se tem tratado sobre a geometria que está presente na formação do professor de forma a atribuir-lhe saberes característicos de sua profissão, a *geometria para ensinar*, uma das ferramentas de trabalho que a formação do professor deve assegurar-lhe. Isso continuará a ser destacado na seção a seguir, quando vamos destacar as teses e dissertações, que mencionamos nesta seção que findamos, segundo os interesses deste capítulo, relacionando-as às pretensões desta pesquisa de maneira a evidenciar o ineditismo do que queremos escrever nesta tese de doutoramento.

1.2 Relacionando as pesquisas sobre geometria na *História da educação matemática* a esta pesquisa de doutoramento

Para realizarmos o levantamento de tais pesquisas, consultamos o catálogo de teses e dissertações da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES). Para tanto, usamos como palavras-chave as interseções entre “geometria” AND “saberes para ensinar”; “geometria” AND “primeiros anos escolares”; “geometria” AND “ensino primário”; “geometria” AND “escola normal” e “geometria” AND “manuais pedagógicos”, para otimizar os resultados na ferramenta de busca. Além deste catálogo, recorremos à coleção Teses e Dissertações em *História da Educação Matemática* que consta no repositório do GHEMAT.

Refinamos ambas as buscas lendo os títulos e os resumos para separar as pesquisas que de fato focavam na rubrica geometria no âmbito do ensino ou da formação de professores dos primeiros anos escolares em perspectiva histórica e que se reportavam ou abrangiam o período do método intuitivo. Não consideramos as pesquisas de períodos posteriores, haja vista que apenas pelo fato dessas investigações estarem situadas em um período diferente do que abrangemos nesta tese de doutoramento, já podemos dizer que esta pesquisa se difere daquelas, pois, em conformidade com leituras da história cultural, da história das disciplinas escolares e da cultura escolar, sabemos que em cada momento histórico os saberes e matérias escolares sedimentados são próprios daquele período, costumando estar atrelados ao discurso pedagógico em voga. No quadro 1, a seguir, consta a interseção entre as dissertações e teses localizadas no referido repositório e no catálogo da CAPES.

Quadro 1 - Pesquisas que, considerando o período do método intuitivo, focam na geometria como tema de pesquisa

Tipo da pesquisa	**Título**	**Autor**	**Ano**
Dissertação	O ensino de geometria nos grupos escolares do Estado de São Paulo (1890 a 1930)	Manoel Francisco Barreiros	2011
Dissertação	O ensino de geometria na formação de professores primários em Minas Gerais entre as décadas de 1890 e 1940	Silvia de Castro Barros	2015
Dissertação	O ensino de desenho e geometria para a escola primária na Bahia (1835-1925)	Márcio Oliveira D'Esquivel	2015
Tese	Primeiras noções de geometria prática (1894 - 1966): a obra e as mudanças no saber profissional do professor que ensina geometria	Márcio Oliveira D’Esquivel	2019
Tese	*Experts* em educação[24]: circulação e sistematização de saberes geométricos para a formação de professores (Rio de Janeiro, final do século XIX)[25]	Gabriel Luís Conceição	2019

Fonte: Elaborado pela autora.

As pesquisas elencadas no quadro 1, ilustrado anteriormente, têm como foco de investigação a geometria nos contextos do ensino ou da formação de professores no período do método intuitivo no Brasil. Esse refinamento nos levou ao total de 05

[24] “Os ‘*experts* em educação’ são, desde sua concepção mais elementar, momento em que se identifica a constituição do campo ‘ciências da educação’, sujeitos cujo posicionamento político se legitima por meio da produção de saberes em atendimento a uma demanda prática daquele que o reconheceu como tal, o Estado. Tais saberes elaborados levando-se em conta a *expertise* inicial, as experiências e saberes do *expert* ou grupo de *experts*, resultam em novos saberes em resposta à sua convocatória” (MORAIS, 2019, p. 11).

[25] O foco de investigação da tese de Conceição (2019) não é precisamente a rubrica geometria, mas sim os saberes geométricos atrelados aos trabalhos manuais e ao desenho. Mas, como o autor aborda estes como propostas de *geometria para ensinar*, consideramos tal pesquisa relevante para a composição deste capítulo.

pesquisas – três dissertações e duas teses –. as quais estão elencadas em ordem cronológica de produção, haja vista que o que delas nos interessa corresponde a um mesmo período histórico, o do método intuitivo.

Considerando as três dissertações e duas teses que elencamos no quadro 1, todas estão vinculadas a projetos amplos de investigação, o que mostra que a revisão da literatura que realizamos compreende pesquisas orientadas pelos pesquisadores que, sendo integrantes de tais projetos de alguma forma, discutem com maior consistência a geometria no ensino e/ou na formação de professores dos primeiros anos escolares no período que consideramos. No quadro 2, a seguir, observamos as principais características das pesquisas mencionadas.

Quadro 2 – Principais características das dissertações e teses

Tipo da pesquisa/ Autor	**Período que abrange**	**Nível de ensino abordado**	**Fonte de pesquisa**	**Foco de investigação**
Dissertação/ Barreiros (2011)	De 1890 a 1930 – Método intuitivo	Primário	Revista de Ensino; manuais didáticos de geometria e exames finais	O ensino de geometria nos grupos escolares paulistas
Dissertação/ Silvia Barros (2015)	De 1890 a 1940 – Método intuitivo a Escola nova	Escola normal	Legislação da escola normal; cadernos; livros didáticos; Revista de Ensino de MG.	O ensino de geometria na formação de professores primários mineiros
Dissertação/ D'Esquivel (2015)	De 1825 a 1925 – do ensino mútuo a escola ativa	Ensino primário	Legislação; livros e manuais didáticos; revistas e exames.	O processo de escolarização do desenho e da geometria
Tese/ D'Esquivel (2019)	De 1894 a 1966 - Método intuitivo a Escola nova	Formação de professores atuantes no ensino primário	A obra *Primeiras Noções de Geometria Prática*	O saber profissional do professor que ensina geometria pela obra *Primeiras Noções de Geometria Prática*
Tese/ Conceição (2019)	Final do século XIX - Método intuitivo	Formação de professores atuantes no ensino primário	Relatórios oficiais do Estado do RJ e a Revista Pedagógica	A sistematização de saberes geométricos por *experts* em educação para a formação de professores no RJ no final do século XIX

Fonte: Elaborado pela autora.

Para tratarmos dessas teses e dissertações na perspectiva de compará-las a esta tese de doutoramento, voltamo-nos ao quadro 2, que identificamos anteriormente, no qual sintetizamos, além da identificação do tipo de pesquisa e autor, as principais informações que as distanciariam ou aproximariam da tese aqui realizada, tendo em conta a elaboração de um trabalho da *História da educação matemática*: período que abrange, nível de ensino abordado, fontes de pesquisa e foco de investigação.

Ao observarmos o parâmetro inicial, de imediato notamos que o período compreendido pelas pesquisas apresentadas aborda o tempo do método intuitivo (Barreiros [2011]) ou um período que o compreende (Silvia Barros [2015]; D'Esquivel [2015]; D'Esquivel [2019] e Conceição [2019]). Sabemos, então, que é o mesmo período que temos em conta para a elaboração desta tese. No entanto, observamos que os referidos trabalhos expressam representações da realidade da cultura escolar primária (Barreiros [2011]; D'Esquivel [2015]) ou da formação de professores que estão em exercício (D'Esquivel [2019] e Conceição [2019]). Quando o nível de ensino é a escola normal (Silvia Barros [2015]), as fontes de pesquisa e o foco de investigação, assim como das demais, diferem-se do trabalho de doutoramento que queremos desenvolver, como podemos constatar ao associá-lo ao quadro 2 anteriormente apresentado.

Considerando o período compreendido, o nível de ensino abordado e o foco de investigação das referidas pesquisas, as teses de D'Esquivel (2019) e Conceição (2019) são as que mais se aproximam desta pesquisa de doutoramento, também por tratarem do saber profissional do professor a partir de referências acerca da constituição histórica de saberes específicos da docência. Mas ressaltamos que, embora o ensino esteja atrelado à formação, as fontes consideradas pelos autores têm um nível de objetivação diferente das nossas, isto é, o que há de sistematizado nelas não o foi feito para integrar intencionalmente a formação institucional do professor, de modo que em ambos os casos, de D'Esquivel (2019) e Conceição (2019), o discurso educacional especializado é direcionado, sobretudo, a professores que já atuavam no ensino primário, incrementando, possivelmente e não necessariamente, elementos de saberes profissionais dos discursos à atuação deles.

D'Esquivel (2019) tem sua pesquisa direcionada especificamente para o saber profissional do professor que ensina geometria pela obra *Primeiras Lições de*

Geometria Prática, de autoria de Olavo Freire, evidenciando-a como uma ferramenta de trabalho do professor que ensina geometria que vai se transformando ao longo das diversas edições (1894 a 1966), caracterizando um saber profissional próprio de cada tempo histórico. De modo análogo, as fontes de pesquisa de Conceição (2019, p. 25) são “canal de objetivação inicial das propostas” e servem à constituição do saber profissional do professor que já estava em exercício.

De outro modo, as fontes que são consideradas por esta pesquisa de doutoramento eram características da constituição do saber profissional do professor durante a sua formação institucional. É da perspectiva de manuais de Pedagogia utilizados nas escolas normais que queremos sistematizar uma *geometria para ensinar* como ferramenta de trabalho do professor formado em tempos do método intuitivo.

As teses que acabamos de mencionar adotaram fontes que lhes possibilitaram captar alguns elementos do saber profissional do professor *para* ensinar geometria, tais como a necessidade de domínio do desenho ou de trabalhos manuais, a utilização de régua, compasso e transferidor. Esses elementos são fragmentos do saber profissional do professor *para* ensinar geometria, que, no caso, eram direcionados a ele quando já estava em exercício docente, de forma que dão alguns direcionamentos sobre o que o professor que atuava no ensino primário deveria ter domínio *para* ensinar geometria, mas não sistematizam uma geometria como elemento do saber profissional de um dado tempo.

Portanto, as teses de Conceição (2019) e D’Esquivel (2019) captaram alguns elementos do saber profissional do professor, mas não os congregaram como um saber da formação de um período histórico-educacional particular. Nesta pesquisa de doutoramento, tendo em conta manuais de Pedagogia, o foco investigativo está justamente em buscar sistematizar uma *geometria para ensinar* que integrou a formação institucional do professor de um tempo específico, do método intuitivo, na qual poderá, ou não, constar esses elementos que as referidas teses mencionam.

Assim, entendemos que embora haja pesquisas que compreendam o período que nos propomos a investigar e que tratem da geometria no âmbito do ensino ou da formação, nenhuma delas esteve preocupada em discorrer sobre a geometria elaborada, sistematizada e institucionalizada na condição de saber específico do professor. Tampouco esses estudos se debruçaram sobre o modo como a geometria foi objetivada para a formação de professores dos primeiros anos escolares em manuais de Pedagogia, nos quais a geometria estava envolta no ideário das ciências da educação que, a partir das décadas finais do século XIX, disseminaram a ideia de que, para se ensinar determinada matéria, não bastava mais ter domínio apenas dos seus conceitos e conteúdos próprios.

Observamos, de modo mais sintético, a partir dos objetivos ou questões norteadoras das pesquisas elencadas, que estão expressos no quadro 3, adiante, que todas se diferem em alguma medida da pesquisa de doutoramento que materializamos neste texto. Ao observarmos tais objetivos, evidenciamos mais uma vez que não há pesquisas longitudinais que caracterizem a geometria como um saber próprio do professor, como uma ferramenta de seu trabalho.

Quadro 3 - Objetivos ou questões das pesquisas

Autor	Objetivo ou questão de pesquisa
Barreiros (2011)	Investigar o processo de ensino de geometria no curso primário dos Grupos Escolares do Estado de São Paulo no período de 1890 a 1930
Silvia Barros (2015)	Quais conteúdos de geometria eram ensinados aos futuros professores nas escolas normais? Como esse saber foi tratado na formação dos professores para as escolas primárias? Com quais finalidades?
D'Esquivel (2015)	Analisar o processo de escolarização dos conhecimentos de Desenho e de Geometria na Bahia, no período compreendido entre os anos 1835 e 1925
D'Esquivel (2019)	Não localizamos
Conceição (2019)	Analisar a sistematização dos saberes geométricos para a formação de professores, no final do século XIX, postos em circulação no Rio De Janeiro pelos professores Amélia Fernandes da Costa, Luiz Augusto dos Reis e Manoel José Pereira Frazão

Fonte: Elaborado pela autora.

Assim, reafirmamos que o desenvolvimento desta tese de doutoramento justifica-se também pelo ineditismo de tratar em perspectiva histórica elementos do saber profissional do professor que ensina matemática nos primeiros anos escolares a partir de manuais de Pedagogia, contribuindo para que à *geometria para ensinar* seja atribuído caráter epistemológico de saber. Esta geometria deve estar além de uma geometria cercada de didáticas especiais não assimiladas, isto é, de uma geometria direcionada para o ensino, mas que se mantém isolada do que se admite teoricamente sobre os processos de ensino e aprendizagem, os quais também têm seu estudo dissociado do conteúdo disciplinar.

A revisão da literatura que apresentamos também nos permite observar um mapeamento das pesquisas sobre geometria no âmbito da *História da educação matemática*, o qual está atrelado, sobretudo, à alocação institucional dos pesquisadores do GHEMAT - Brasil. Isso nos permite concluir que este Grupo é responsável, por meio dos seus projetos de pesquisa, pelos trabalhos de maior referência nessa área, particularmente os que tratam sobre geometria.

Ao longo deste capítulo, traçamos a trajetória da geometria nos primeiros anos escolares, apresentamos do que falam pesquisas *stricto sensu* relacionadas à geometria no âmbito do ensino ou da formação de professores desse nível escolar, em perspectiva histórica. Com isso, pudemos destacar que esta tese de doutoramento acrescenta à *História da educação matemática* uma perspectiva de geometria na formação de professores que ainda não foi abordada em pesquisas de forma mais aprofundada, uma geometria sistematizada como ferramenta de trabalho do professor que foi objetivada em manuais de Pedagogia chancelados pelo uso nas escolas normais. Desse modo, cabe-nos discorrer teoricamente sobre o que entendemos por *geometria para ensinar* como elemento do saber profissional do professor que ensina matemática nos primeiros anos escolares. Seguimos com essa discussão no próximo capítulo.

CAPÍTULO II

A MATEMÁTICA COMO UM SABER PROFISSIONAL

As expressões "saber profissional" e "*geometria para ensinar*" são destaques na escrita deste texto. Neste capítulo, então, tecemos nosso entendimento acerca de suas definições, de modo a discorrer, particularmente, acerca da *geometria para ensinar* como elemento do saber profissional do professor. Adentramos na compreensão de saberes *a* ensinar e *para ensinar*, dos quais nossos referenciais depreendem as categorias teóricas de *matemática a ensinar* e *matemática para ensinar*, que nos fundamentam na determinação do que denominamos de *geometria para ensinar*, uma ferramenta de trabalho do professor que ensina matemática nos primeiros anos escolares.

2.1 Saber profissional do professor e saber objetivado

A partir de pesquisas sobre o processo de profissionalização de uma atividade ocupacional (MACHADO, 1995; BOURDONCLE, 2000), podemos notar que, para tanto, um aspecto essencial é a consolidação de um "corpo esotérico de conhecimento" (MACHADO, 1995), isto é, um conjunto de saberes que são de acesso restrito da profissão. Este corpo de saberes "deve funcionar como uma *caixa preta*, ou seja, contendo segredos e técnicas profissionais invioláveis e indecifráveis por leigos, mas ao mesmo tempo com uma visibilidade social acessível a este mesmo público" (MACHADO, 1995, p. 21, grifo da autora). É sobre o conhecimento necessário para que se ensine, "que é específico para os professores, que repousa em grande medida a sua profissionalização" (BOURDONCLE, 2000, p. 123). Ao desenvolvermos esta pesquisa de doutoramento, voltamos nossa atenção para a elaboração histórica desse corpo de saberes próprio da profissão do professor que ensina matemática nos primeiros anos escolares.

Estudos de Valente, Bertini e Morais (2017a; 2017b; 2018) permitem concluir que, desde a última década do século XX, inventários analíticos sobre as pesquisas referentes à formação de professores vêm apontando críticas à formação centrada no campo disciplinar. Ao mesmo tempo, essas pesquisas apontam a necessidade de que sejam elaborados saberes específicos para o exercício do ofício docente, saberes próprios do professor.

De outra parte, também citando os inventários das pesquisas sobre formação de professores, os autores destacam que esses estudos, ao buscarem elementos para além do campo disciplinar, têm reforçado "os ingredientes subjetivos do processo formativo, colocando em evidência diferentes saberes (em realidade, *conhecimentos*) que deveriam participar da formação profissional dos professores" (VALENTE; BERTINI; MORAIS, 2017b, p. 226, grifo dos autores). No entanto:

> [...] em alguma medida, é possível dizer que esses mesmos inventários [...] vêm apontando certa insatisfação com essa perspectiva de investigação (que considera os saberes da ação[26]). E isso se manifesta justamente pelos limites que os *saberes da ação* encerram: a dificuldade posta para a sua sistematização e formalização com vistas à sua transmissão-comunicação-circulação-apropriação[27] (VALENTE, 2019a, p. 16, grifo do autor).

Assim, conforme Valente, Bertini e Morais (2017a), as pesquisas sobre a formação de professores das últimas décadas, de algum modo, também buscaram captar ingredientes que, ao longo do tempo, pudessem ser sistematizados, objetivados e institucionalizados, de modo a comporem a formação do professor. No entanto, dizem os autores, esse processo não é simples e precisa ser analisado de forma mais ampla:

> não cabe pensar que as transformações disciplinares que implicariam na incorporação de conhecimentos advindos de um rol de pesquisas elaboradas nos últimos 20, 30 anos, ocorreriam por simples ajuntamento de novos conteúdos e temas. Há que se pensar num movimento maior, em escala temporal mais alargada, que possibilite a análise desses processos e verificação de como vão sendo constituídos os saberes profissionais da docência tendo em conta os movimentos de construção de campos disciplinares, das relações entre as disciplinas da formação inicial de professores de matemática, oriundas do campo matemático, com aquelas vindas das ciências da educação (VALENTE; BERTINI; MORAIS, 2017a, p. 56-57).

Então, interessa ao projeto amplo citado nas considerações iniciais, ao qual nos ancoramos, a análise histórica de um período mais extenso, no qual seja possível

[26] "Na caracterização [...] dos *saberes da ação*, o autor (BARBIER, 2014) debruça-se sobre os saberes que o sujeito detém, para tais saberes ligam-se capacidades, conhecimentos, competências, atitudes, profissionalidades" (VALENTE, 2019a, p. 13, grifo do autor).

[27] Transmissão-comunicação-circulação-apropriação são características dos saberes objetivados apresentadas por Barbier (1996) e citadas por Hofstetter e Schneuwly (2017).

estudar o movimento de sistematização, objetivação e institucionalização de saberes constituintes do saber profissional do professor. Com isso, o foco deixa de estar nos saberes da prática, da ação, e passa a se situar nos saberes elaborados historicamente que interferiram na formação profissional do professor no âmbito das instituições formadoras.

Em consonância com Hofstetter e Schneuwly (2017), não intentamos abordar o saber do "ponto de vista da prática [...] a partir da mobilização no fazer; diferentemente disso, colocamos os saberes formalizados no centro de nossas reflexões, tentando conceitualizar o seu papel nas profissões do ensino e da formação" (HOFSTETTER; SCHNEUWLY, 2017, p. 131). Assim, "interessa-nos, [...], aquele cunhado como *saber objetivado*" (VALENTE, 2019a, p. 4, grifo do autor). Mas, o que entendemos por saberes? E por saberes objetivados?

Considerando o referencial que trata dos saberes profissionais do professor, o qual está no centro das discussões e produções do GHEMAT atualmente e advém de sistematizações desenvolvidas na Suíça pela Equipe de Pesquisa em História das Ciências da Educação (ERHISE) da Universidade de Genebra, como indica Valente (2018a), os saberes são conhecimentos que podem se fundamentar em si próprios, de maneira a possibilitar a identificação de propriedades neles mesmos. Conforme Pastré, Vergnaud e Mayen (2006), os saberes "constituem conjuntos de enunciados coerentes e reconhecidos por uma comunidade científica ou profissional. Adquirindo então um lugar central na aprendizagem intencional" (PASTRÉ; VERGNAUD; MAYEN, 2006, p. 156, apud HOFSTETTER; SCHNEUWLY, 2017, p. 107-108). Assim, os saberes são os conhecimentos que são sistematizados visando intencionalmente integrar, no nosso caso, a formação do professor.

Então, cabe enfatizar que, em termos teórico-metodológicos, conhecimento e saber diferenciam-se nesta pesquisa. Conforme Valente, Bertini e Morais (2017a), o primeiro refere-se a aspectos subjetivos, tais como as experiências que o sujeito viveu; o segundo origina-se da sistematização consensual "passível de generalização e objetivação, produto cultural historicamente institucionalizado cujo intento é a sistematização e organização de determinados conhecimentos com o fim de propiciar a sua comunicação" (VALENTE; BERTINI; MORAIS, 2017a, p. 55). Então, conhecimento está relacionado ao que o sujeito mobiliza na sua ação conforme suas experiências; o saber, ao que é sistematizado e institucionalizado com fins específicos para determinada comunidade.

Desse modo, parece-nos fundamental que entendamos “as implicações da conceituação dos saberes, em termos de *saberes objetivados* e *saberes da ação* para a pesquisa, para a pesquisa educacional e, em particular, para as pesquisas sobre a formação de professores” (VALENTE, 2019a, p. 12). Considerando especificamente o significado da palavra saber para a discussão sobre o processo de formação e de ensino, Hofstetter e Schneuwly (2017) destacam duas significações apresentadas por Barbier (1996). De acordo com Leme da Silva (2017), tais significações apontam a palavra saber em duas zonas semânticas distintas, cujos objetos e regras também diferem.

Essas significações são: “o campo dos saberes incorporados” e “o campo dos saberes objetivados”. A zona semântica de “o campo dos saberes incorporados” está relacionada às capacidades, aos conhecimentos, às competências, às aptidões, às atitudes e às profissionalidades. O que caracteriza o referente desse campo são os componentes identitários, os quais só têm sua realidade destacada quando é materializado por meio da apreciação de um comportamento, de uma prática ou de ações (BARBIER, 1996, apud LEME da SILVA, 2017).

A zona semântica que compreende “o campo dos saberes objetivados” relaciona-se com a cultura, as regras e os valores. Esse campo tem suas realidades expressas por representações que geram enunciados. Os saberes objetivados “podem ser considerados duplamente como enunciados: de um lado eles formalizam uma representação do real sobre o real, de outra parte eles enunciam uma correspondência, uma ligação entre esta representação e o objeto representado” (BARBIER, 1996, p. 9-10 apud LEME da SILVA, 2017, p. 890). Portanto, consideramos que os saberes objetivados “mostram-se como discursos sistematizados, prontos para serem mobilizados, com capacidade para circularem. São comunicáveis de modo que se possa deles fazer uso e apropriação em diferentes contextos” (VALENTE, 2019a, p. 10).

Os saberes profissionais do professor, em particular para a docência em geometria, referem-se àqueles que passam por um processo de sistematização e são objetivados para comporem a sua formação. Tais saberes caracterizam, identificam a profissão docente entre as demais (VALENTE, 2016). Reforçamos que esses saberes profissionais relacionam-se aos saberes *a* ensinar e saberes *para* ensinar, de modo que “ambos os saberes se constituem como saberes da formação de professores, mas a *expertise* profissional, o que caracteriza a profissão de professor é a posse dos *saberes para ensinar*" (VALENTE, 2018a, p. 20, grifo do autor), pois, são estes os saberes que essencialmente formam o professor *para* ensinar (HOFSTETTER; SCHNEUWLY, 2017). Assim como Conceição (2019), esta pesquisa também entende que os saberes profissionais são aqueles que personalizam o profissional que exerce o ofício de ensinar.

Quando pensamos em estudar a formação do professor, em particular do que ensina matemática, e mais especificamente a geometria, não podemos pensar que sua formação deve se concentrar apenas no conteúdo disciplinar que por ele será ensinado, mas também nos elementos que se fazem necessários para que o ensino se transforme em aprendizagem, como afirma Chervel (1990). Dessa forma, ao intentarmos discorrer sobre a constituição dos saberes que compõem a formação do professor, precisamos mobilizar os saberes *a* ensinar e os saberes *para* ensinar, os quais, segundo Valente (2017a), compõem os saberes profissionais do educador matemático e emanam dos estudos pedagógicos, sendo que o saber profissional do professor é representado neste contexto pela articulação entre esses dois saberes.

Os saberes *a* ensinar são admitidos por Hofstetter e Schneuwly (2017) como objeto essencial do trabalho do professor, que, vindos do campo disciplinar, determinam o que o professor deve ensinar. Tais saberes têm sua origem atrelada à produção das disciplinas universitárias tradicionais, tal como a matemática, dos "diferentes campos científicos considerados importantes para a formação de professores" (BERTINI; MORAIS; VALENTE, 2017, p. 11). Em síntese, tais saberes mantêm "vínculo com as disciplinas universitárias científicas, com campos específicos do saber produzido fora da escola e constituem objeto de trabalho do professor" (VALENTE, 2017a, p. 214). Ademais, o saber *a* ensinar pode ser "explicitado principalmente por planos de estudos ou currículos, por manuais, dispositivos de formação, textos prescritivos de diferentes tipos" (BRONCKART; MACHADO, 2005 apud HOFSTETTER; SCHNEUWLY, 2017, p. 132).

De outra parte, é preciso não reduzir os saberes *a* ensinar, tratados como objeto de trabalho de professor, a uma listagem de conteúdos, pois, assim como as disciplinas escolares não devem ser consideradas como "uma vulgarização científica", tampouco como uma adaptação da ciência para a escola, mas sim como algo que "foi historicamente criado pela própria escola, na escola e para a escola" (CHERVEL, 1990, p. 181), tais saberes *a* ensinar foram organizados intencionalmente para serem o objeto de ensino que configura o objeto de trabalho do professor, sendo carregados, assim, de elementos que devem ser voltados especificamente para esse fim. Assim, considerando "a égide de um movimento pedagógico internacional [...] diferentes *saberes a ensinar* na formação do professor do curso primário articulam-se com a produção de saberes pedagógicos, de saberes para ensinar" (BERTINI; MORAIS; VALENTE, 2017, p. 42). Por isso, precisamos ter em mente que os saberes *a* ensinar não chegam à condição de objeto de trabalho do professor do mesmo modo como o campo disciplinar tradicional os apresenta.

Os saberes *para* ensinar são admitidos por Hofstetter e Schneuwly (2017) como ferramenta do trabalho do professor, sendo necessários para que se efetive o ofício de ensinar. Tais saberes são aqueles que caracterizam fundamentalmente o exercício do professor, são próprios para ele (VALENTE; BERTINI; MORAIS, 2018). No entanto, como já mencionamos, esses saberes permanecem em articulação com os saberes *a* ensinar, já que estes também compõem a constituição do saber profissional dos professores (VALENTE, 2018b). Os saberes *para* ensinar têm sua especificidade voltada para a docência e referem-se àqueles saberes próprios para serem mobilizados pelo professor no exercício do seu ofício de ensinar (BERTINI; MORAIS; VALENTE, 2017). "Assim, se o 'saber a ensinar' constitui o objeto de trabalho docente, o 'saber para ensinar' traduz-se como um saber capaz de tomar esse objeto constituindo-o como um *ensinável*, um saber como instrumento de trabalho" (VALENTE, 2017a, p. 216, grifo do autor).

Valente (2017b) apresenta os saberes *para* ensinar como aqueles que tratam do objeto de trabalho do professor (que inclui os saberes *a* ensinar), das práticas de ensino (entre as quais estão os métodos e procedimentos) e das determinações institucionais do seu campo profissional. Assim, do mesmo modo que não reduzimos os saberes *a* ensinar a uma listagem de conteúdos, é importante que não tomemos os saberes *para* ensinar como apenas metodologias. Estas são apenas um dos elementos que os compõem. Como afirmam Hofstetter e Schneuwly (2017) tais saberes

> tratam-se principalmente de saberes sobre o "objeto" do trabalho de ensino e de formação (os saberes sobre os saberes *a* ensinar, sobre o aluno, o adulto, seus conhecimentos, seu desenvolvimento, as maneiras de aprender etc.), sobre as práticas de ensino (métodos, procedimentos, dispositivos, escolha dos saberes *a* ensinar, modalidades de organização e de gestão) e sobre a instituição que define seu campo de atividade profissional (planos de estudos,

> instruções, finalidades, [...]) (HOFSTETTER; SCHNEUWLY, 2017, p. 134, grifo dos autores).

Tendo em vista essa compreensão de que os saberes *para* ensinar não se reduzem a metodologias, podemos utilizá-la para entender, por exemplo, o motivo pelo qual um conteúdo deve ser ensinado de determinada maneira e não de outra, como aponta Conceição (2019). Em tempos de método intuitivo, por exemplo, ensinar a partir do concreto é um saber *para* ensinar que o professor deveria possuir e que pontuava a ideia de que a mobilização dos sentidos, o desenvolvimento da percepção dos alunos sobre aquele objeto, é o ponto de partida para a construção da ideia do aluno sobre o conteúdo que se pretende ensinar. Então, não bastaria apenas saber que o ponto de partida do processo de ensino precisaria ser o concreto, mas também o porquê disso.

Corroborando com as assertivas sobre os saberes *a* ensinar e saberes *para* ensinar que colocamos em destaque, Borer (2017) designa esses primeiros como saberes que são oriundos dos campos disciplinares universitários, e assim os chama também de saberes disciplinares. Os saberes *para* ensinar são tomados como aqueles que constituem o campo profissional, e também os chama de saberes profissionais. Dessa forma, os saberes *para* ensinar são o instrumental de trabalho que o professor adquire na sua formação e utiliza para que os saberes *a* ensinar possam ser alcançados pelos alunos conforme propõe a instituição a que ele atende.

Portanto, o saber profissional do professor está pautado na existência, mútua dependência e articulação de saberes *a* ensinar e *para* ensinar objetivados para a sua formação profissional. Como afirmam Valente, Bertini, Pinto e Morais (2017, p. 9, grifo dos autores), os saberes profissionais referem-se aos “saberes de formação de professores dado pela articulação entre os *saberes a ensinar* e os *saberes para ensinar*”. Também admitimos que esses saberes são multiformes:

> [...] que cada tempo histórico-pedagógico estabelece e sedimenta ideários de formação de professores, a partir de lutas de hegemonia para o estabelecimento de saberes considerados como importantes para a formação profissional dos professores, para o seu exercício docente. O estabelecimento desses saberes, por meio de sua circulação e apropriação pelos diferentes atores [...] promove a sua objetivação e busca a sua institucionalização no rol dos saberes para a formação de professores (LIMA; VALENTE, 2019, p. 936).

Desse modo, esta pesquisa de doutoramento se concentrará em um tempo histórico-pedagógico (o do método intuitivo), considerando uma perspectiva específica de objetivação de saberes para a formação do professor que ensina matemática nos primeiros anos escolares, aquela pautada em manuais de Pedagogia, os quais foram chancelados pelo uso nas escolas normais brasileiras.

Um novo ideário pedagógico veio se decantando ao longo do século XIX e promovendo, a partir de expedições realizadas por diversos países, a circulação internacional de novas ideias pedagógicas, como indicam Conceição (2019) e D'Esquivel (2019). Então, é possível admitir que, ao final deste século, período que esta pesquisa abrange, já estavam postas em manuais de Pedagogia as objetivações dessas ideias como saberes profissionais.

Em particular, considerando o lugar de onde falamos, a *História da educação matemática*, admitimos que a constituição histórica do saber profissional do professor que ensina matemática envolve a existência de uma *matemática a ensinar* e de uma *matemática para ensinar*, sobre as quais discorreremos na seção a seguir.

2.2 Dos saberes *a* ensinar e *para* ensinar à *matemática a ensinar* e *para ensinar*: saberes profissionais do professor que ensina matemática

A formação do professor no campo disciplinar matemático deve ser consistente, mas, também, a formação matemática não pode ser entendida como condição única e suficiente para o exercício do ofício de ensinar. Como afirma Valente (2016), "novos saberes são elencados como fundamentais para a formação específica de professores, para a formação do profissional da docência" (VALENTE, 2016, p. 3-4). Nesse sentido, aparecem dois aspectos que corroboram para a formação do professor: o campo disciplinar e o profissional. Estes, no entanto, não permanecem em efetiva articulação no cenário atual, de modo que é recorrente a discussão entre professores em formação nas licenciaturas e estudantes de pós-graduação, em particular no âmbito da Educação Matemática, acerca da dicotomia entre o que é proposto sobre os processos de ensino e os conteúdos disciplinares. O mais comum são discursos sobre teorias de ensino, raramente se discute como efetivamente integrar a matemática escolar a elas. Essas discussões são tratadas, por exemplo, em pesquisas desenvolvidas por Fiorentini e Ana Oliveira (2013); Ana Oliveira e Fiorentini (2015), e Valente (2005).

De outra parte, relatos de experiência, e até mesmo pesquisas da pós-graduação, apontam estratégias de professores de matemática, ou daqueles que a ensinam nos primeiros anos escolares, que são bem-sucedidas ao proporem o ensino dessa disciplina escolar de forma a extrapolar a simples exposição verbal de uma listagem de conteúdos a serem decorados. Mas essas experiências, seja nos relatos ou nas pesquisas, estão dispersas por diferentes contextos, de forma que apresentam informações carregadas da subjetividade dos sujeitos que as viveram e experenciaram. Tais experiências não são sistematizadas para serem passível de circulação e apropriação por outros professores independentemente do contexto.

Sistematizações não são simples e precisam de tempo para acontecer. São processos que podem mostrar como acontecem as relações entre as disciplinas específicas da matemática que integram a formação inicial dos professores e aquelas que são oriundas das ciências da educação (VALENTE; BERTINI; MORAIS, 2017a). Assim, é preciso que estudemos em perspectiva histórica como experiências docentes foram sendo sistematizadas e caracterizaram o saber profissional do professor que ensina matemática, o qual tem em conta a integração entre a matemática elaborada pela e para a escola e as ciências da educação, mutuamente dependentes.

Tendo em vista os saberes constitutivos das profissões do ensino e da formação que Hofstetter e Schneuwly (2017) admitem, os saberes *a* e *para* ensinar, objeto e ferramenta de trabalho do professor, respectivamente, é possível que compreendamos o processo histórico de constituição dos saberes profissionais do professor. Em particular, temos um instrumental teórico que nos possibilita estudar as dinâmicas de elaboração e objetivação de uma matemática específica do ofício de ensinar, que foi se sedimentando em cada período histórico-pedagógico e se tornando multiforme ao longo do tempo.

Apropriando-se das sistematizações feitas pelo grupo suíço citado, referentes aos saberes profissionais do professor, Bertini, Morais e Valente (2017) construíram hipóteses teóricas de trabalho que admitem a existência de *matemática a e para ensinar* como elementos que constituem o saber profissional do professor que ensina matemática, em particular nos primeiros anos escolares. Esses saberes fundamentam o reconhecimento de professores “como profissionais especialistas no trato do saber matemático para ensinar alunos dos primeiros anos escolares (ensino) ou para preparar professores para atuarem nos primeiros anos escolares (formação)” (MACIEL, 2019, p. 67).

Tais hipóteses advogam que cada tempo histórico possui suas próprias concepções "sobre formação de professores, sobre a matemática presente nessa formação, sobre a matemática que será ser [sic] ensinada" (LIMA; VALENTE, 2019, p. 937), denotando a ambas as concepções de matemática a condição de categorias que são elaboradas por processos históricos (VALENTE, 2019c). De acordo com este autor, o saber profissional do professor que ensina matemática nos primeiros anos escolares "remete ao saber de formação, institucionalizado, dado historicamente pela articulação entre *saberes para ensinar* e os *saberes a ensinar*" (VALENTE, 2019c, p. 52). Corroborando com esse entendimento, Valente (2019b) afirma que

> as pesquisas sobre o saber profissional do professor de matemática em perspectiva histórica intentam evidenciar e tornar inteligíveis as mudanças relativamente à *matemática a ensinar* e à *matemática para ensinar*. Ambas, como se mencionou, mostram-se articuladas ao longo tempo. Cabe ao historiador da educação matemática, na verdade, uma tripla tarefa: caracterizar essas matemáticas e mostrar como elas estão relacionadas (VALENTE, 2019b, p. 18).

Desse modo, cabe-nos destacar o que caracteriza a *matemática a ensinar* e como ela se relaciona com os saberes *para* ensinar matemática[28] de modo a compor a *matemática para ensinar*. De modo mais preciso, poderemos mostrar como a primeira está articulada à segunda ao evidenciarmos a *geometria para ensinar* objetivada em manuais de Pedagogia utilizados para compor a formação dos professores primários em tempos de método intuitivo no Brasil.

Antes de adentramos à discussão sobre *matemática a ensinar* e *matemática para ensinar*, consideramos necessário mencionar a distinção entre *matemática para ensinar* e saberes *para* ensinar matemática. De acordo com Bertini, Morais e Valente (2017, p. 68), esse último termo refere-se ao "conjunto de saberes colocados na grade de formação de professores [...], eles seriam o saber de formação do professor". Então, consideramos que saberes *para* ensinar matemática são saberes *para* ensinar direcionados para a elaboração de uma matemática que seja ferramenta de trabalho do professor, que, juntamente com a *matemática a ensinar*, são elementos constituintes dessa ferramenta. "De modo diferente, a 'matemática *para* ensinar'

[28] "Caberia mencionar distinções possíveis de serem feitas para os termos 'saber *para* ensinar matemática' e 'matemática para ensinar'. No primeiro caso, ao que parece, poderiam ser arrolados um conjunto de saberes colocados na grade de formação de professores. Todo esse conjunto comportaria o que poderia atender por 'saber *para* ensinar matemática', eles seriam o saber de formação do professor. De modo diferente, a 'matemática *para* ensinar' refere-se a objetivação de um saber matemático" (BERTINI; MORAIS; VALENTE, 2017, p. 68).

refere-se a objetivação de um saber matemático” (BERTINI; MORAIS; VALENTE, 2017, p. 68), a qual já é resultado da articulação estabelecida entre esses saberes, como melhor discutiremos adiante.

A partir da leitura de Valente (2017a), podemos caracterizar a *matemática a ensinar* como aquela que, considerando as dinâmicas de transformação histórica, está inserida na formação dos professores que ensinam matemática por meio das disciplinas constitutivas da sua formação sob as diferentes rubricas que compõem a matemática; como afirmam Maciel e Valente (2018), é “originária do campo disciplinar matemático, tida como um objeto de ensino” (MACIEL; VALENTE, 2018, p. 168). Ela reúne os conteúdos do campo da matemática que os professores que estão em processo de formação irão ensinar em cada época (VALENTE, 2019b), sendo, também, devedora “das finalidades atribuídas à escola, da pedagogia reinante num tempo escolar, das concepções vigentes sobre matemática, dentre vários outros determinantes” (VALENTE, 2019c, p. 53).

Assim, precisamos ter em conta que “a escola, em cada época, com finalidades que atendem a cada tempo, parametriza-se por normas e práticas que reorganizam os saberes presentes no ensino e na formação de professores” (VALENTE, 2019b, p. 18). Dessa forma, a *matemática a ensinar* não se reduz a uma listagem de conteúdos imutável ao longo dos anos. Ao final do século XIX, por exemplo, novas referências foram sendo apropriadas pela instrução pública paulista, instruções essas que lapidaram saberes *para* ensinar matemática que passaram a integrar a formação de professores primários, sendo sistematizadas apropriações vindas de Pestalozzi e seus seguidores. Já não bastava mais saber matemática, os algoritmos da aritmética ou as propriedades da geometria euclidiana, “o *saber para ensinar* matemática constitui-se a partir desse tempo como ciência de formas intuitivas para a docência dos primeiros passos de aritmética e geometria” (BERTINI; MORAIS; VALENTE, 2017, p. 41, grifo dos autores).

Há pesquisas de doutoramento já concluídas que, embora não tenham usado o referencial de saberes profissionais, de *matemática a ensinar* e *matemática para ensinar*, evidenciam que a matemática que é objeto de trabalho do professor pode ser estruturada para o ensino de forma a ter *status* epistemológico com outras características, que não seja pautado unicamente nos elementos lógico-racionais próprios da matemática. A tese de Marcus Oliveira (2017a), por exemplo, concluiu que a aritmética da escola primária, no final do século XIX e início do XX, deixou de ser propedêutica e abstrata e passou a ser utilitarista e intuitiva. O autor observou a constituição de uma aritmética intuitiva, mostrando que o saber escolar é definido, também, pela vaga pedagógica de cada tempo histórico.

Já a tese de Pinheiro (2017) mostrou a constituição de uma aritmética elaborada em tempos de pedagogia científica, entre 1920 e 1950. Conforme a autora, “não se tratava [...] de *lubrificar* conteúdos aritméticos, mas de uma alteração epistemológica no âmbito da cultura escolar, da constituição de uma aritmética escolar, criada na escola, pela escola e para a escola: uma *aritmética sob medida*” (PINHEIRO, 2017, p. 190, grifo da autora). Essa aritmética seguia uma ordem psicológica em detrimento da lógica interna da matemática, conclui a autora. Assim, podemos perceber que o processo de sistematização da *matemática a ensinar* tem em conta outros elementos além do *status* epistemológico da matemática do matemático.

De outra parte, quando falamos da *matemática a ensinar* que está presente nos primeiros anos escolares, atribuímos a ela o caráter de saber de cultura geral, pois integra a formação de toda e qualquer criança que passa por esse âmbito de escolarização, objeto de trabalho do professor. Assim, “a *matemática a ensinar*, como um saber a ensinar, por si só, não constitui um saber profissional do professor, a sua posse não distingue o profissional da docência de outros ofícios” (VALENTE, 2019c, p. 54, grifo do autor). Ter domínio apenas do objeto de trabalho não é suficiente para o profissional da docência exercer seu ofício de ensinar. Outros saberes característicos da profissão são necessários, os saberes *para* ensinar que são a ferramenta de trabalho do professor (PINTO; NOVAES, 2018), que não são de cultura geral (VALENTE, 2019c).

Essa ferramenta de trabalho do professor que ensina matemática é a *matemática para ensinar*, que é “um saber específico, de cultura profissional, próprio à formação do futuro docente” (VALENTE, 2019c, p. 54), a qual partiu da integração entre os saberes *para* ensinar matemática e a *matemática a ensinar* e tornou-se uma imbricação desses saberes. Compõe-se de saberes didático-pedagógicos objetivados especificamente para o ensino da matemática (VALENTE, 2017a), ou, de outra forma, é fruto de saberes *para* ensinar que mobilizam a *matemática a ensinar* para sistematizar um saber próprio do professor que a ensina.

A *matemática para ensinar* constitui-se pela sistematização de saberes *para* ensinar com foco na matemática que é objeto de ensino. Essa matemática que é ferramenta de trabalho do professor é elaborada pelo ofício da docência a partir da *expertise* do professor de cada momento histórico, pois é à profissão docente que cabe construir “saberes *para* ensinar que tomam por objeto os saberes *a* ensinar, sua apropriação pelos formandos assim como os procedimentos de ensino e de formação” (HOFSTETTER; SCHNEUWLY, 2017, p. 137, grifo dos autores). Então, consideramos que em cada período em que se instaurou um saber *para* ensinar ou se fez necessário reestruturar o ensino, o ofício docente elaborou uma *matemática para ensinar* que atendesse à demanda daquele momento histórico. Assim, a *matemática para ensinar* é “fruto de reelaboração ao longo do tempo, pelo ofício da docência, de saberes para ensinar matemática, objetivando em cada época histórica, uma ferramenta para ensinar matemática” (MACIEL; VALENTE, 2018, p. 168).

A tese de Maciel (2019), que tem como referencial de análise o saber profissional do professor que ensina matemática e fontes de pesquisa manuais de aritmética e de pedagogia, mostrou que, ao longo de 1880 a 1920, se constituiu uma *aritmética para ensinar* na qual se sobressaíram como elementos de tal saber: “multiplicação tradicional para ensinar”; “multiplicação tradicional-intuitiva para ensinar”; “multiplicação intuitiva para ensinar”; e “multiplicação intuitiva-sob medida para ensinar”. E um “cálculo oral para ensinar”. A caracterização desses elementos do saber profissional do professor que ensina aritmética deu-se pela análise de categorias como a apresentação, a explicação, a graduação, a articulação, a generalização, a avaliação dos conteúdos e elementos dos saberes *a* ensinar e *para* ensinar. Assim:

> [...] é preciso ressaltar, que a admissão da existência da *matemática para ensinar* não implica em sua autonomia. Sendo um saber específico, um saber profissional da docência, uma ferramenta do ofício do professor, articula-se tal ferramenta com o objeto de ensino, a matemática a ensinar. Cabe somente à profissão docente a posse de um saber para ensinar: uma *matemática para ensinar*. [...]. Será esse saber específico dos professores, um dos elementos que caracterizam a profissão docente (VALENTE, 2019c, p. 54, grifo do autor).

A partir da compreensão de que a constituição de saberes profissionais do professor que ensina matemática considera a *matemática para ensinar*, a *matemática a ensinar*, seus processos de elaboração e as dinâmicas que promovem a articulação entre elas, é possível que superemos a ideia de que o professor precisa saber apenas matemática e alguns elementos didático-pedagógicos, cujo percurso de elaboração não lhe atribui *status* epistemológico de saber. Podemos, então, avançar “para além da ideia de que a formação é [o] somatório de bom conhecimento matemático com didáticas específicas de conteúdos. [Estudos] apontam para a necessidade de consolidação de rubricas na formação de professores”, as quais “sejam objetivadas como saberes, *saberes para ensinar*, *matemática para ensinar*” (LIMA; VALENTE, 2019, p. 937, grifo dos autores).

Diante disso, percebemos que o saber profissional do professor que ensina matemática constitui-se por meio da articulação entre *matemática a ensinar* e *matemática para ensinar*. Essa articulação é permanente, mas para a constituição do saber profissional do professor que ensina matemática sobressai-se a *matemática para ensinar* como sendo a característica própria de posse do ofício docente.

Portanto, o saber profissional do professor que ensina matemática não é um somatório de saber matemático e didáticas especiais. Sim! É preciso ter sólida formação matemática, que aliás não é neutra das lutas de representações (CHARTIER, 2002), como se deu sua elaboração para que ela se constituísse como *matemática a ensinar*. Sim! É importante que se tenha conhecimento sólido das didáticas especiais. No entanto, para além disso é imprescindível pensar na matemática como ferramenta de trabalho do professor, uma *matemática para ensinar* que tenha *status* epistemológico de saber, isto é, que teve um processo de elaboração definido por quem tem a *expertise* necessária ao exercício da docência, foi sistematizada e objetivada com o fim de constituir o saber profissional do professor, sendo chancelada pela sua institucionalidade, marcando, “de formas visíveis e perpetuadas, a existência do grupo, da classe ou da comunidade” (CHARTIER, 2002, p. 23), do professor que ensina matemática.

Particularmente, queremos mostrar, com a realização desta pesquisa de doutoramento, que *geometria para ensinar* objetivou-se para a formação de professores primários e marcou a caracterização profissional do professor que ensinou geometria em tempos de método intuitivo no Brasil. A seguir, vamos discutir o que, nesta pesquisa, efetivamente entendemos por *geometria para ensinar*.

2.3 A geometria que se constitui como elemento do saber profissional do professor que ensina matemática

Como vimos na seção anterior, o saber profissional do professor que ensina matemática pauta-se na existência de uma *matemática para ensinar* que está em articulação com uma *matemática a ensinar.* Desse modo, cabe-nos sintetizar nesta seção que a geometria que se constitui como ferramenta de trabalho, um dos elementos do saber profissional do professor que ensina matemática, está ligada a uma *geometria a ensinar*, a *geometria para ensinar*.

Vale esclarecer, de início, que quando usamos esta expressão não estamos nos referindo à geometria que, em sua perspectiva epistemológica de saber disciplinar da matemática enquanto área científica, é proposta para a formação de professores. A denotação empregada ao termo *geometria para ensinar* não é o que se aprenderia de geometria na escola normal para poder ensinar os saberes geométricos no ensino primário. A compreensão de *geometria para ensinar* que empregamos nesta tese de doutoramento se reporta à articulação da *geometria a ensinar* aos saberes *para* ensiná-la, de modo que pensamos em uma geometria que seja ferramenta de trabalho do professor, seu instrumental do exercício do ofício de ensinar

De acordo com Maria Oliveira (2015), "uma perspectiva da *profissionalidade* pode ser então pensada como a construção do saber para ensinar a partir do saber a ensinar" (OLIVEIRA, Maria, 2015, p. 192, grifo da autora). É dessa forma que pensamos a constituição da *geometria para ensinar*, elaborada pelos saberes *para* ensinar tendo em conta a mobilização dos saberes *a* ensinar. Isso não significa impor ao professor que está em formação um conjunto de didáticas especiais, para que fique a cargo dele utilizá-las quando do ensino de geometria. Trata-se de uma geometria que é sistematizada para ser ferramenta de trabalho do professor, em particular a que compôs, por meio de manuais de Pedagogia, a formação institucional que o preparou para o ofício de ensinar nos primeiros anos escolares em tempos de método intuitivo.

A *geometria para ensinar* não se caracteriza como orientações *para* ensinar geometria de cunho geral, como, por exemplo, dizer que o ensino de geometria deve ser dado do concreto para o abstrato. Orientações como essas são o que estamos chamando de saberes *para* ensinar (indicados para o ensino de) geometria. No caso da *geometria para ensinar* é necessário que se determine o que isso significa especificamente para o ensino de geometria. Nesse sentido, uma apropriação desses saberes poderia sistematizar uma *geometria para ensinar* em que, tratando-se da geometria da escola primária, ir do concreto para o abstrato signifique iniciar pelas formas sólidas e seguir a ordem de abstração das formas, passando para as formas superficiais, lineares, chegando ao ponto. E nesse contexto, indicar que cada forma é apresentada primeiramente a partir dos materiais de ensino recomendados e, tendo em vista as percepções desenvolvidas a partir disso, levar os alunos a construírem a ideia abstrata sobre as formas.

Analogamente, considerando ainda esse elemento de ordem, para sistematizar uma *geometria para ensinar* não bastaria dizer que o professor deve ensinar geometria numa marcha analítica, por exemplo. Seria necessário especificar isso tendo em conta a *geometria a ensinar*, de modo a explicar que se considera a *geometria a ensinar* como um todo e que isso significaria partir das formas espaciais para as planas. Mas esses não são os únicos elementos que constituem uma *geometria para ensinar*. Além de estruturar a geometria conforme os saberes *para* ensiná-la, corroboram para essa constituição as especificações sobre que materiais de ensino são específicos para ensinar geometria. Ademais, faz parte desse processo saber como e em que momento mobilizá-los. De que maneira apresentar os conteúdos de ensino aos alunos, quando apresentar as propriedades, em que momento e como conduzir a generalizações e construção da ideia abstrata, também são elementos que contribuem para o processo de sistematização e caracterização de uma *geometria para ensinar*.

Queremos mostrar que saberes como esses estão atrelados aos manuais de Pedagogia, os quais corroboram para a formação profissional do professor que ensina matemática. Esse material propicia a este professor o acesso a um “corpo esotérico” de saberes que são característicos da profissão. Sendo assim, tais saberes não são de cultura geral e aprendidos por todos que passam pela escolarização, mas sim da formação para o exercício da docência, o que está na *caixa preta* da essência do ser professor que ensina geometria.

Portanto, a *geometria para ensinar* que esta pesquisa de doutoramento evidenciará, elemento do saber profissional do professor que ensina matemática, é uma geometria sistematizada para a formação de professores. Seus elementos estão postos em manuais de Pedagogia cuja institucionalização foi chancelada pelo uso escolar. Sua constituição resulta da reelaboração de saberes *para* ensinar geometria[29]

[29] Análogo a saberes *para* ensinar matemática: “um conjunto de saberes colocados na grade de formação de professores. [...] eles seriam o saber de formação do professor” (BERTINI; MORAIS; VALENTE, 2017, p. 68). Então, consideramos que saberes *para* ensinar geometria são saberes *para* ensinar que podem ser mobilizados para o ensino de diferentes matérias, inclusive e particularmente a geometria.

que o ofício da docência realiza em cada tempo histórico-educacional, mobilizando nesse processo a *geometria a ensinar* e objetivando, com essa reelaboração, uma *geometria para ensinar*.

Tendo em vista o entendimento acerca de *geometria para ensinar* que apresentamos acima, destacamos que a questão que norteou a escrita desta pesquisa de doutoramento interroga: **que geometria se constituiu como ferramenta de trabalho do professor que ensinou matemática em tempos de método intuitivo no Brasil?** Considerando a importância desse contexto histórico-educacional para o desenvolvimento desta pesquisa, no próximo capítulo discorremos sobre a modernização pedagógica referente a tal método de ensino e como manuais de Pedagogia constituem-se como portadores desse elemento do saber profissional do professor.

CAPÍTULO III

A MODERNIZAÇÃO DA PEDAGOGIA E PROCESSO DE SISTEMATIZAÇÃO DE UMA *GEOMETRIA PARA ENSINAR*

Este capítulo apresenta os processos de ensino que caracterizaram a modernização pedagógica pela qual as escolas, de formação e de ensino, passaram nas décadas finais do século XIX e iniciais do século XX. Discorremos, então, sobre o método intuitivo. Nesse contexto, circulavam nos âmbitos de formação de professores manuais de Pedagogia que carregavam consigo elementos do saber profissional do professor, em particular daquele que ensinava matemática nos primeiros anos escolares, institucionalizando tais saberes e, em muitos casos, capítulos ou seções dedicadas a orientar o professor *para* ensinar geometria. Neste capítulo, também descrevemos as características de tais manuais que os colocaram na condição de fontes de pesquisa para esta tese de doutoramento, e explicamos como, a partir deles, vamos apresentar uma sistematização de uma *geometria para ensinar*, considerando que as orientações *para* ensinar geometria entre 1870 e 1920 se mantiveram estáveis nesse período.

3.1 Pedagogia intuitiva: elementos de uma modernização pedagógica

Se considerarmos que a palavra pedagogia se refere à “ciência da educação” (PONTES, 1873, p. 3)[30] ou que “é o conjunto de princípios que regem a *educação das crianças*, e das leis que sobre esses princípios se formam para praticar o *ensino*” (AFFREIXO; FREIRE, 1890, p. 6, grifos do autor), com a expressão “pedagogia intuitiva” estaríamos expandindo a ideia de intuição para além dos processos de ensino, ampliando sua abrangência a todos os âmbitos da educação. De fato, o método intuitivo emergiu das tentativas de resgate social promovidas pela pedagogia progressiva[31], mas a denotação de “pedagogia intuitiva” refere-se à pedagogia

[30] Todas as citações das obras deste autor, assim como das demais fontes que foram escritas em português, foram transcritas utilizando a grafia atual das palavras em português.

[31] A pedagogia progressiva tem em conta “o desenvolvimento progressivo da sociedade, o regime educativo se democratiza e a operação pedagógica se torna construtiva e adaptativa” (COELHO, 1891, p. 69).

metodológica, que trata "dos meios empregados pelo professor em cada ramo do ensino" (AFFREIXO; FREIRE, 1890, p. 6).

A nossa fala inicial sobre a pedagogia intuitiva tem como referência os manuais de Pedagogia que utilizamos como fonte de pesquisa, como também outros manuais de Pedagogia que, embora não tenham capítulos ou seções dedicadas a sistematizar orientações *para* ensinar geometria, falam sobre os principais atores que desenvolveram sistematicamente o processo de ensino intuitivo. Para além disso, trouxemos pesquisas de historiadores da educação e da educação matemática para situarmos a inserção, propagação e características de tal perspectiva de ensino no Brasil. Os manuais de Pedagogia orientam o professor sobre a intuição no processo formativo institucionalizado, enquanto as pesquisas demonstram a ideia que se propagou dela, o que não significa que umas destoam das outras.

O termo "método" agregado a "intuitivo" é de uso comum e nos é muito familiar. No entanto, as leituras dos manuais de Pedagogia nos levaram a refletir sobre a terminologia "método intuitivo", haja vista que alguns autores, sobretudo Coelho (1891; 1892; 1907), fazem distinção enfática entre método e processo. Conforme Coelho (1891), "alguns livros de pedagogia confundem, em geral, processos com métodos, ou antes não conseguiram ainda estabelecer, de uma maneira nítida e bem clara, a distinção entre as ideias, aliás fundamentais, de maneira e ordem." (COELHO, 1891, p. 365). Assim, a maneira como os objetos de ensino são apresentados corresponde a processos, e a ordem, ao método.

A intuição é atribuída a processos e o método é difundido entre tais manuais como analítico ou sintético, sendo caracterizados, respectivamente, como "aquele que se avança do todo [...] para as partes" e "aquele em que se avança das partes [...] para o todo" (COELHO, 1907, p. 56). Como afirma Coelho (1891), o processo de composição e recomposição. Então, que determinante vamos usar para intuitivo? Voltamos a Pontes (1873) e vimos que ele diz que "em acepção pedagógica *método* é o complexo de meios a empregar, e ordem a seguir no ensino. [...] e *processos* certos meios acessórios, quase sempre mecânicos, que cada método pode empregar" (PONTES, 1873, p. 93, grifos do autor).

Considerando também que "os processos são os meios práticos que o método emprega para atingir seu objetivo" (CARRÉ; LIQUIER, 1920, p. 257, tradução livre[32]),

[32] O mesmo é válido para todas as citações destes autores.

entendemos que os processos fazem parte do método e quando o método se dá pela aplicação de processos intuitivos, podemos chamá-lo de método por intuição (AI[33], 1907) ou método intuitivo, como escrevem Affreixo e Freire (1890) e Carré e Liquier (1920), expressão que iremos utilizar. Ademais, tomamos tal notação haja vista que a aproximação teórica e prática desenvolvida por Pestalozzi, que nos levou ao que chamamos de método intuitivo, teve em conta tanto a maneira quanto a ordem de construção dos processos de ensino.

Os princípios que fundamentam o método intuitivo levaram séculos para se decantar e serem sistematizados de forma a integrar a cultura escolar. Do século XVII ao XIX, Commenius, Rousseau, Pestalozzi e Froebel foram notórios pedagogistas que representam diferentes fases desse movimento. Como afirma Coelho (1891, p. 93, grifos do autor), “Commenius e outros *fixam* as leis gerais; Rousseau *vulgariza-as*, [...]; Pestalozzi inicia a sua *aplicação prática*, [...]; Froebel [...] iniciando uma primeira *aplicação sistemática* dos princípios da pedagogia moderna”, a qual proclamava a operação educativa que “fazia surgir para o aluno a prescrição de se iniciar no saber, partindo do conhecimento das coisas do universo, isto é, recebendo essas *lições de coisas*, hoje tão proclamadas, e que ele (Commenius) foi um dos primeiros a preconizar” (COELHO, 1891, p. 74, grifo do autor).

A pedagogia progressiva preconizava que as camadas mais populares tivessem acesso à instrução. Ademais, o que deveria ser ensinado deveria ter caráter prático e utilitário, e para que o ensino fosse concretizado se fazia necessária uma formação específica para os professores, surgindo então a ideia de escola normal. Essas ideias já começavam a se reproduzir com Commenius no século XVII. Posteriormente, Rousseau transformou essas ideias de forma a vulgarizá-las fazendo notar que sua aplicação era possível, mas ainda assim ficou apenas no campo teórico (COELHO, 1891).

Quando Pestalozzi se apropria da obra de Commenius e Rousseau, sendo ele um ser imbuído de sentimentalismo e ações sociais de filantropia, fez dessas ações um meio pelo qual os princípios da pedagogia moderna pudessem ser aplicados na

[33] AI é uma abreviação que usaremos neste texto para se referir ao manual *Lições de Pedagogia*, haja vista que esta não tem autor definido, mas afirma que foi colecionado por uma Amigo da Instrução. Dessa forma, nas referências não aparecerá AI. Esta aparecerá iniciada pelo título do manual, conforme determina a ABNT.

prática. Suas aplicações fizeram-no defender que para que o ensino acontecesse satisfatoriamente era necessário

> que as cousas [sejam] apresentadas antes das palavras, que a intuição é a base do conhecimento, se deve respeitar a espontaneidade da criança, que a escola deve ser envolvida em doce e perene alegria; em Berthoud[34], aplica o método que "eleva a criança das próprias intuições às ideias abstratas"; em todos os seus institutos orienta os processos de aplicação prática, dirigindo-se por princípios teóricos tais como - que o ensino deve começar pelos elementos mais simples e que é sagrada a individualidade da criança e que se deve desenhar antes de escrever e que o cálculo há de ensinar-se com objetos materiais e que ao trabalho do espirito se deverá associar o manual, etc., etc. (COELHO, 1891, p. 90).

Todas essas ideias não eram novas, não foram exatamente formuladas por Pestalozzi. Estas são "os grandes dogmas da pedagogia progressiva" que, embora já fossem proclamados ao mundo desde o século XVII, ainda se mantinham longe da vida prática (COELHO, 1891, p. p. 90), mas nesse momento eram defendidas com base em aplicações práticas. No entanto, esse foi apenas o primeiro momento de uma tentativa de sistematização, sendo ainda incompleta. Segundo Paroz (1883), não se pode esperar que Pestalozzi tenha estabelecido um sistema que fosse completo ou que se aproximasse à perfeição, pois "ele mal deu mais do que a matéria-prima de seu sistema, e é em seus discípulos que devemos buscar seu desenvolvimento" (PAROZ, 1883, p. 296).

Portanto, Pestalozzi tornou-se grande e ilustre não por introduzir novas ideias, novos princípios, ou por ter desenvolvido processos práticos precisos, mas por ter sido o primeiro pedagogista a tomar a iniciativa e persistir na realização de tão difícil processo. Tal personalidade se pôs a serviço da escola e tornou-se a "síntese de uma notável fase da vida histórica e, por isso, o seu nome será para sempre lembrado" (COELHO, 1891, p. 88). Os ensinamentos de Pestalozzi e seus estabelecimentos de ensino não o fazem extraordinário, mas ele presenteou o mundo com ideias novas e capazes de se desenvolver ainda mais. Ele substituiu a "cultura superficial e mecânica do século XVIII, que apenas treinava o homem", por "uma educação em harmonia

---

[34] *Berthoud Elementary School* localizava-se no cantão de Berna e era "frequentada por crianças de quatro e oito anos". Pestalozzi aplicou suas experiências em tal escola de 1799 a 1804 (PAROZ, 1883, p. 310, tradução livre).

com as necessidades e leis da natureza humana. Foi um ótimo trabalho, no qual tudo tinha que ser criado" (PAROZ, 1883, p. 346, tradução livre[35]).

Essa criação precisou ser teórica, como também prática. A necessidade de compreender como acontece o desenvolvimento natural do pensamento humano correspondeu ao lado teórico, enquanto o prático exigiu a fundação de "estabelecimentos de ensino, criar métodos de ensino e fazer experimentos adequados para verificar a excelência dos princípios descobertos pela observação e reflexão" (PAROZ, 1883, p. 346). Sobretudo no lado prático, Pestalozzi foi pioneiro, construiu seu próprio caminho. Como afirma Paroz (1883), ele é "o tronco da árvore educacional que cresceu no local limpo por Rousseau. A sujeição da educação às leis de nossa naturalidade tornou sua obra indestrutível, porque repousa sobre uma verdade eterna" (PAROZ, 1883, p. 346-347).

O método que Pestalozzi conseguiu formular, destaca Paroz (1883), pode ter seu princípio fundamental formulado da seguinte forma: "*O desenvolvimento da natureza humana está sujeito ao império das leis naturais, que qualquer boa educação deve cumprir*" (PAROZ, 1883, p. 315-316, grifo do autor), o que, segundo o autor, exige que, "*para estabelecer um bom método de ensino (e educação), é necessário conhecer nossa natureza e seus processos gerais e particulares no desenvolvimento do indivíduo*." (PAROZ, 1883, p. 316, grifo do autor). Essa ideia constitui a base psicológica sobre a qual Pestalozzi propõe seus princípios, os quais orientam o educador a: "seguir uma caminhada lenta e gradual" (p. 316); "procurar nos objetos que circundam a criança ou que são em sua esfera, os exercícios adequados para desenvolvê-la" (p. 316-317); que "todos começam com um elemento ao qual estão ligados novos conceitos que, por sua vez, apoiam os outros" (p. 317). Concluindo a apresentação destes, Paroz (1883) destaca:

> Visto que nosso conhecimento surge do exercício de nossas faculdades sobre os objetos que nos cercam, segue-se que a observação (*Anschauung*), cujo resultado é uma intuição das coisas, é a fonte de todo o nosso conhecimento. O educador que deseja se conformar às leis da natureza, portanto, terá que começar a ensinar todos os ramos por meios intuitivos, e continuá-los até que a inteligência seja forte o suficiente para se elevar sem esforço às noções abstratas que emergem (p. 317) da própria essência do conhecimento adquirido pela inteligência (PAROZ, 1883, p. 317-318).

---

[35] O mesmo é válido para todas as citações deste autor.

Paroz (1883) dá voz a Pestalozzi a partir do que ele chama de “testamento educacional” desta personalidade. A fala de Pestalozzi apresentada por Paroz (1883) ressalta a importância dos objetos e dos sentidos das crianças para que as faculdades intelectuais sejam despertadas, de modo a seguir o desenvolvimento natural das ideias. No exercício de exame e estudo dos objetos que despertam os sentidos, “começamos com os objetos mais simples, depois passamos às suas qualidades, aos seus atos; depois estudamos suas partes, seu uso, as comparamos para chegar a ideias de gêneros, classes, [...] seguindo nestes exercícios uma caminhada gradual” (PESTALOZZI apud PAROZ, 1883, p. 338).

De acordo com Coelho (1891), a concepção pedagógica de Pestalozzi ainda era revestida de indefinição e precisava alcançar, tanto na teoria quanto na prática, um estado bem sistematizado. “E, com efeito, assim foi. Pertence a Froebel, discípulo de Pestalozzi, a honra de iniciar essa grande e memorável fase histórica, fazendo suceder período de valiosa frutificação pedagógica ao da sua brilhante floração” (COELHO, 1891, p. 91-92). Froebel deu continuidade ao trabalho do seu mestre e desenvolveu os primeiros níveis de sistematização dos princípios da pedagogia moderna que iniciaram com Commenius no século XVII. Froebel sistematizou a geometria e a aritmética da escola infantil, e contribuiu para o desenvolvimento da educação tecnológica e artística. Empregou um material apropriado para isso, tais como arcos e pranchetas, de forma que seu sistema “tem todos os caracteres de uma primeira tentativa de sistematização pedagógica” (COELHO, 1891, p. 92).

Coelho (1891) destaca que, mesmo tendo caráter sistemático, o sistema froebeliano é incompleto. O que fundamenta tal afirmativa são os fatos de este sistema ter sido desenvolvido apenas para um período da vida educativa, o infantil; a fragmentação dos pontos de vistas considerados; e o fato de Froebel ser o agente que concebe e também aplica os fundamentos do seu sistema, ou seja, “a função especulativa que cria, e a função ativa que aplica, encontraram-se confundidas na individualidade do mesmo homem” (COELHO, 1891, p. 101). Esse fato nos permite constatar que mesmo com Froebel os princípios do método intuitivo ainda não tinham uma sistematização completa, não estavam objetivados de forma a ter seu uso acessível por professores de qualquer contexto.

Como afirma Coelho (1891), “a ideia froebeliana deve ser considerada como um primeiro esforço que opera a evolução para arrancar o espírito humano desse vago sentimentalismo do período pestalozziano, e entrar nos domínios de uma coordenação racional perfeita" (COELHO, 1891, p. 91-93). No entanto, Froebel conseguiu organizar na medida que lhe foi possível uma ideia sistemática a partir de suas experiências para que tais princípios pudessem ser aplicados na prática. A partir de então, os manuais de Pedagogia já lançavam mão desses princípios de forma que seus autores os direcionavam para a prática dos professores, sobretudo primários. Se pensarmos como Coelho (1891), uma pessoa fazia e outra poderia aplicar, o que fez com que o método intuitivo se tornasse cada vez mais sistematizado e ganhasse caráter de objetivação. Esse fazer era baseado na *expertise* inerente à profissão de professor.

Ao observamos esse encadeamento de acontecimentos, é inevitável que não enxerguemos o processo de sistematização do método intuitivo como elemento do saber profissional do professor, em particular do professor que ensina matemática, ou seja, a epistemologia de tal processo de ensino. Houve uma demanda de uma parte da sociedade por educação para todos e, para que a instrução pudesse acontecer, propuseram-se princípios que se limitaram ao campo teórico por longo período devido à atuação da elite social que não permitiu sua concretização. Entretanto, Pestalozzi e Froebel criaram seus próprios meios de aplicar tais princípios na prática, o primeiro de forma mais elementar e o segundo de forma sistemática. Mas tais aplicações só foram consideradas como processo educativo quando as ideias sobre a organização de ensino e a forma de acesso a ele começaram a se propagar pela sociedade educacional em geral e os princípios do método intuitivo tiveram sua sistematização cada vez mais consolidada, sendo objetivados em manuais de Pedagogia que formavam professores que os utilizariam na prática.

Os manuais de Pedagogia contribuíam para com a formação dos professores primários, sobretudo em termos de saberes *para* ensinar, e o método intuitivo, ou a intuição, estava presente em tais manuais em tal condição, em particular nos manuais que consideramos como fontes de pesquisa neste trabalho. A começar pelo manual de Pontes (1873), observamos que os princípios relativos aos alunos e aos objetos de ensino estavam permeados de ideias intuitivas. O autor indica, por exemplo, que "deve o professor primeiro proceder de uma maneira intuitiva" e que, tendo em conta os objetos de ensino, "se deve seguir a marcha natural da inteligência humana partindo do conhecido para o desconhecido. [...] Desenvolver sempre a matéria do ensino de maneira, que o que é fácil e simples preceda o que é difícil e complicado" (PONTES, 1873, p. 90-92).

O destaque ao método intuitivo feito por Affreixo e Freire (1890) está no exercício dos sentidos como principal instrumento de desenvolvimento do ensino real e instrumental. De acordo com os autores, “o termo intuição quer dizer propriamente: a força do conhecer pela vista; tomando porém a vista pelo mais excelente dos sentidos, deu-se ao termo *intuição* o significado de: força de conhecer por qualquer dos sentidos” (AFFREIXO; FREIRE, 1890, p. 165). Assim, “temos pois um *método intuitivo*, [...] o qual *só é aplicável* quando se faz o ensino de doutrinas cujos *objetos são sensíveis* e *estão realmente representados por instrumentos* próprios” (AFFREIXO; FREIRE, 1890, p. 166, grifos do autor).

Devido ao significado literal do termo “intuição” remetê-lo apenas ao sentido da visão, Coelho (1892) usa a expressão “empírico” por considerar que assim está se referindo a todos os sentidos. Mas, considerando a denotação de Affreixo e Freire (1873), mencionada acima, usaremos a expressão intuitivo mesmo quando nos reportarmos a Coelho (1892), também porque, “aos processos empíricos também se dá o nome de intuitivos” (COELHO, 1907, p. 62). Coelho (1892) chama de intuitivo o processo que oferece aos sentidos dos alunos o objeto da ideia que se quer desenvolver, sendo que este deve ser presentativo, isto é, objeto cuja extensão real pode ser vista com todas as suas propriedades, mas que também pode ser representada por um artefato tangível de três dimensões ou por meio da linha e da cor.

Logo, o ensino intuitivo “acontece quando os elementos [utilizados para a apresentação do objeto de ensino] são, quer os objetos, *reais* e palpáveis, das noções, quer a *pintura* desses objetos” (COELHO, 1907, p. 59, grifos do autor). Assim, os manuais de Pedagogia adentraram o século XX com a mesma ideia de método intuitivo, mas trazendo novas apropriações que originam novas sistematizações de elementos do saber profissional do professor. Nesse ponto, percebemos que o despertar dos sentidos pode ser feito não apenas por objetos concretos e tangíveis, mas também por meio de figuras que os representem.

O manual colecionado pelo AI (1907) destaca que o professor que tem em conta o método intuitivo dá preferência ao exercício dos sentidos dos alunos. Mas, Carré e Liquier (1920), como já havia feito Coelho (1892; 1907), vão além disso e já sistematizam a ideia de tal método ligado a saberes escolares[36], em particular a geometria. Carré e Liquier (1920), por exemplo, orientam sobre como ensinar o que é um círculo: “em vez de dar a eles, faça uma geometria oral: [...] desenharei uma circunferência no quadro-negro; mais simplesmente, mostrarei a eles objetos de forma circular que estão ao seu alcance: o disco do relógio, [...], os botões de suas roupas” (CARRÉ; LIQUIER. 1920, p. 265-266).

Assim, afirmam os autores, os alunos terão uma ideia de círculo de forma mais simples, mas ainda com pouca precisão do rigor geométrico. Por isso, Coelho (1892; 1907) chama a atenção para a importância de o método intuitivo ser empregado com mais ênfase nos primeiros anos escolares, para que em fases escolares posteriores os alunos já tenham essas ideias preliminares e entendam as propriedades matemáticas, o rigor geométrico em particular, com mais facilidade.

O método intuitivo propagou-se "na Alemanha nos anos finais do século XVIII e era, em grande medida, decorrente da influência da Pedagogia de Henri Pestalozzi, um de seus preconizadores e divulgadores” (PINHEIRO; VALENTE, 2013, p. 03; SAVIANI, 2006). Até meados do século seguinte, tal método disseminou-se por parte significativa das escolas europeias, bem como nos Estados Unidos (PINHEIRO; VALENTE, 2013, p. 03). De acordo com Carneiro (2014a, p. 13; 2014b, p. 26), essa ideia “difundiu-se no Brasil a partir dos anos sessenta do século XIX”, mais precisamente “nas três últimas décadas do século XIX e início do XX, fazendo parte das diversas propostas de reformas de ensino federais e estaduais. Suas diretrizes vigoraram no Brasil até meados da década de 1920 (CARNEIRO, 2014a, p. 13). Já Valdemarin (2001) é mais precisa e afirma que as lições de coisas foram adotadas no ensino brasileiro na década de 1880.

De acordo com Souza (2000), “o *método intuitivo*, conhecido também como *lições de coisas*, consistiu no núcleo principal da renovação pedagógica” (SOUZA, 2000, p. 12, grifo da autora). No Brasil, para além da modernização escolar, esse método de ensino representava “a pretensão de criar, por meio da renovação da instrução, as condições necessárias às transformações sociais, políticas e econômicas que se avolumam no final do Império” (VALDEMARIN, 2001, p. 159).

[36] Um importante manual que também fez sistematização e circulou amplamente pela escola primaria Brasileira foi um intitulado Primeiras Lições de Coisas, de autoria de Norman Allisson Calkins e traduzido para o português por Rui Barbosa em 1886.

A renovação trazida pelo método intuitivo para a instrução primária brasileira “pode ser detectada na legislação educacional, no debate e na circulação de ideias entre educadores [...], na tradução e importação de um grande número de manuais, [...], e na divulgação através de textos específicos” (VALDEMARIN, 2001, p. 159). Leme da Silva, Trindade, D’Esquivel e Marcus Oliveira (2017, p. 23) afirmam que os princípios de tal método, “em maior ou menor medida, comporão as orientações pedagógicas das reformas educacionais e de livros didáticos”. Especificamente, Valdemarin (2006) menciona sua prescrição como método a ser adotado em um colégio da Corte e sua popularização por Rui Barbosa a partir de 1882 a partir da Reforma do Ensino Primário e de várias Instituições Complementares da Instrução Pública e a tradução do manual Primeiras Lições de Coisas, que já mencionamos. De acordo com Valdemarin (2001),

> O novo método pode ser sintetizado em dois termos: observar e trabalhar. Observar significa progredir da percepção para a ideia, do concreto para o abstrato, dos sentidos para a inteligência, dos dados para o julgamento. Trabalhar consiste em fazer do ensino e da educação na infância uma oportunidade para a realização de atividades concretas, similares àquelas da vida adulta. Aliando observação e trabalho numa mesma atividade, o método intuitivo pretende direcionar o desenvolvimento da criança de modo que a observação gere o raciocínio e o trabalho prepare o futuro produtor, tornando indissociáveis pensar e construir (VALDEMARIN, 2001, p. 158-159).

Assim, percebemos que a utilização dos sentidos para despertar a inteligência da criança numa marcha da percepção para a ideia e do concreto para o abstrato se mantém na representação de método intuitivo que passou a circular no Brasil a partir das décadas finais do século XX, como também aponta Souza (2000). Também, tal método postula que “é mais natural aprender primeiro o concreto e depois o abstraio e o todo antes das partes” (VALDEMARIN, 2001, p. 163).

Para corroborar com tal assertiva, recorremos a Zanata (2012), que afirma que o método intuitivo tem, entre seus princípios, a ideia de “partir do conhecido ao desconhecido, do concreto ao abstrato, ou do particular ao geral, da visão intuitiva à compreensão geral” (ZANATA, 2012, p. 107). Esse processo deve ser feito associando o que está sendo ensinado com outros elementos cujo conhecimento seja natural para os alunos, de modo que se chegue ao ponto em que seja possível reunir os pontos de vistas alcançados na consciência do aluno. Dessa forma, “a base desse método foi a ideia de percepção sensorial. [...] Caracteriza-se por oferecer dados sensíveis à observação, indo do particular ao geral, do concreto experienciado ao racional, chegando aos conceitos abstratos” (ZANATA, 2012, p. 107).

Assim, a prática pedagógica baseada no método intuitivo considera que “o conhecimento das coisas que nos rodeiam é possível pelo fato de termos *sentidos* que fazem a ligação entre o objeto a ser conhecido e o sujeito que o conhece, criando as ideias” (VALDEMARIN, 2006, p. 171, grifo nosso), o que faz necessária a utilização de objetos didáticos criados com fins educativos que sejam de conhecimento do aluno, como também de fatos que integram a vida do estudante para a promoção da aprendizagem, ou formulação da ideias (VALDEMARIN, 2006).

Ao falarmos sobre a pedagogia intuitiva nesta seção, entendemos o processo de sistematização do método intuitivo, o qual se consolidou como elemento essencial do saber profissional dos professores das diversas áreas escolares da segunda metade do século XIX para o início do século XX. Nesta tese de doutoramento, tendo em conta essa consolidação, destacaremos como foram sistematizados saberes profissionais do professor que ensina matemática, em particular geometria, nesse mesmo período. Mais especificamente, sistematizaremos uma *geometria para ensinar* que se caracterizou como elemento do saber profissional de tal professor nesse período, admitindo como hipótese de trabalho a existência e a manutenção estável de uma *geometria intuitiva para ensinar*.

Nesta seção, apresentamos as principais características da pedagogia intuitiva. No que cabe considerar para esta pesquisa de doutoramento, o método intuitivo esteve presente em manuais de Pedagogia que integravam a formação de tais professores e, em muitos casos, tais manuais pautavam orientações específicas *para* ensinar geometria. Então, na seção a seguir vamos escrever sobre esses materiais como fonte para caracterização de um saber particular do professor que ensina matemática, a *geometria para ensinar*.

3.2 Manuais de Pedagogia e o saber profissional do professor que ensina matemática: fontes para a caracterização de uma *geometria para ensinar*

A partir da leitura de Choppin (2009), percebemos a diversidade lexical que existe em torno das expressões atribuídas ao livro escolar. Apenas nos países de identidade linguística portuguesa, há referências a livros didáticos, manuais escolares e textos didáticos. É difícil, e em alguns casos impossível, determinar o que os diferencia, mas é importante ressaltar que tais expressões não são equivalentes (CHOPPIN, 2009). Assim, antes de discorrermos sobre os motivos pelos quais os manuais de Pedagogia são capazes de nos revelar saberes profissionais do professor, vamos esclarecer o que estamos compreendendo como tais.

Considerando que o glossário elaborado pelo GHEMAT em 2016 entende que manuais pedagógicos têm como "objetivo orientar e mediar a prática ou o ofício de ensinar em torno de um saber ou conjunto de saberes, como é o caso dos saberes elementares matemáticos" (GHEMAT, 2016, s.p.), poderíamos denominar nossas fontes de manuais pedagógicos, pois, afinal, elas também tinham esse objetivo. Também poderíamos denominá-los de tal forma por serem "um material impresso (de didática, pedagogia, metodologia geral) destinado ao processo de ensino e de formação de futuros professores" (SILVA, 2017, p. 22). No entanto, nós tratamos de um caso particular de tais manuais, aqueles cujo título destaca a palavra "pedagogia", por isso, utilizamos a expressão manuais de Pedagogia[37], mas sem, jamais, perder de vista a "pluralidade de matérias profissionalizantes" (SILVA, 2017, p. 35), como a aritmética e a geometria, que tais manuais compreendem.

A formação de professores para atuarem nos primeiros anos escolares desenvolveu-se e passou a ter maior consistência nas décadas finais do século XIX (PINTASSILGO, 2006). Nesse período, a disciplina pedagogia, afirmam Martinez e Lopes (2011), passou a ter notável destaque no âmbito da escola normal à medida que era em torno dela que as demais disciplinas deveriam se articular, "representando, [...] a especificidade do curso de formação de professores" (MARTINEZ; LOPES, 2011, p. 2). Entre as indagações que, segundo Boto (2018), movem boa parte desses manuais estão: "haveria a possibilidade de assegurar estratégias que, se bem observadas, auxiliassem a ensinar bem? Quais os segredos da construção da boa aula?" (BOTO, 2018, p. 167).

Junto a esse desenvolvimento da formação de tais professores, esse tempo pedagógico também assistiu ao surgimento de manuais de Pedagogia, cujos primeiros títulos dos quais se tem conhecimento são da década de 1870 (SILVA, 2005), os quais transformaram-se em um importante instrumento de circulação das ideias que propunham novas práticas de ensino, que iam de encontro àquelas consideradas

[37] Assim como Silva (2017), "usamos em nossa definição o termo 'manuais' porque ele remete para o conteúdo 'posto à mão' dos estudantes, em suas aulas" (SILVA, 2017, p. 25).

como tradicionais (PINTASSILGO, 2006). De acordo com Perez (2012) a existência desses manuais nesse período é devida a “dois fatores: a expansão da escola e a normatização e institucionalização da formação de professores, através da instituição de escolas normais” (PEREZ, 2012, p. 62).

As diversas edições dos manuais de Pedagogia de José Augusto Coelho, por exemplo, configuram-se como obras de referência desse período, como também das primeiras décadas do século XX, quando a idealização por sistematizar e fazer circular as ideias e propostas práticas que permeavam as formações de professores do referido nível escolar incentivou a publicação de tais materiais (PINTASSILGO, 2006), os quais mediavam o contato dos professores em formação na escola normal “com a ciência da educação, com os conteúdos e saberes entendidos como necessários ao exercício da profissão” (PEREZ, 2012, p. 63).

No que se refere à realidade brasileira, Tanuri (2000) afirma que, nas duas últimas décadas do século XIX, as escolas normais ofertavam uma formação pedagógica reduzida, sendo que a produção bibliográfica brasileira era escassa, do mesmo modo que até mesmo as traduções eram raras, o que “contribui para explicar a reduzida formação profissional das escolas normais nesse período” (TANURI, 2000, p. 67). Mas, ainda assim, não podemos negar que os manuais de formação eram responsáveis pela circulação de saberes especializados e “permitem entrever o campo de significados teóricos e normativos, compartilhados por professores em diferentes países” (SOUZA, 2013, p. 261).

Da leitura de Perez (2012), podemos obter a informação de que a primeira tradução e produção brasileira de manuais de Pedagogia, foram, respectivamente, a obra de Daligault (1865) e o *Compêndio de Pedagogia* de Carlos Augusto Soares Brasil. Ainda no século XIX, Tanuri (2000) também aponta o lançamento da obra *Pedagogia e Metodologia* de Camilo Passalacqua (1887), e Maciel e Valente (2018) dão destaque ao manual de Silva Pontes (1873) por considerá-lo pioneiro “na sistematização dos saberes profissionais da docência, com uso nas escolas normais do Rio de Janeiro e de São Paulo” (MACIEL; VALENTE, 2018, p. 170). Até a década de 1920, muitos manuais ainda eram “assinados por autores estrangeiros, notadamente os portugueses e franceses” (SILVA, 2005, p. 327).

Assim sendo, os manuais de Pedagogia podem ser detentores de uma sistematização das práticas inovadoras, pautadas no método intuitivo, o que, como exemplifica Pintassilgo (2006), consideram passíveis de generalização. Logo, esse objeto material da cultura escolar exerceu dois papéis simultâneos, foi instrumento de inovação que atribuiu legitimidade às ideias e práticas, e fez socializar e afirmar o profissional professor, atribuindo-lhe um conjunto de saberes que se articulavam: o saber, o saber-fazer e o saber-ser (PINTASSILGO, 2006).

Dentre as finalidades que podem ser atribuídas aos manuais de Pedagogia, a que surge em primeiro lugar é a que lhe confere caráter de instrumento formador, visto que eles pretendiam introduzir os professorandos nas diretrizes que a emergente ciência da educação (a pedagogia) propunha, recompilando, para tanto, um conjunto de saberes que deveriam ser próprios do professor, saberes específicos que eram considerados necessários ao exercício do ofício de ensinar. Esses saberes atribuem ao professorado “uma linguagem especializada, só acessível aos nela iniciados” (PINTASSILGO, 2006, p. 198).

Logo, percebemos que, embora nas décadas finais do século XIX houvesse escassez de manuais de Pedagogia no Brasil, estes eram os responsáveis por propiciar ao futuro professor dos primeiros anos escolares, fosse diretamente por meio da matéria pedagogia no curso de formação ou indiretamente por meio de palestras pedagógicas que o diretor da escola normal proferia a partir da apropriação de tais manuais, uma formação específica para o exercício do ofício de ensinar.

Assim, observamos que, a partir do final do século XIX, os discursos pedagógicos se fizeram ler na formação dos professores dos primeiros anos escolares como saberes próprios do ofício de ensinar, tendo suas sistematizações expressas por manuais de Pedagogia. “Hoje, esses manuais tornam-se documentos imprescindíveis para a compreensão desses saberes que circulavam no interior das fronteiras nacionais ou fora delas” (MARTINEZ; LOPES, 2011). Como afirma Perez (2012), esses manuais são importantes nesse processo, sobretudo, por seus objetos serem os saberes e práticas que estruturaram a carreira e a formação dos professores.

Nesse período, o domínio dos conteúdos disciplinares a serem ensinados já não era mais considerado como suficiente ao exercício da docência, como já observamos em Pontes (1873). Então, os manuais de Pedagogia “produziram e fizeram circular saberes sobre o ofício de ensinar, tomando-os como temas a serem explicados durante as aulas nas Escolas Normais” (SILVA, 2005, p. 53). O discurso educacional sobre esses saberes passou a requerer para a atividade de ensinar princípios de ordem teórica, de forma que

> a pedagogia, apropriando-se de saberes advindos de outros campos do conhecimento (especialmente da biologia e da psicologia), vinha progressivamente apresentada como uma ciência das coisas da educação. [...] O saber pedagógico ganhava, progressivamente, estatuto de conhecimento científico; e se fazia marcar por um discurso explicitamente prescritivo (BOTO, 2010, p. 17-18).

Assim, “pode-se dizer que a ciência da educação que se instaura no século XIX é bastante tributária desses tratados enciclopédicos que se propunham a desvendar os segredos da ação pedagógica, à luz das conquistas da ciência” (BOTO, 2007, p. 2). Os manuais de Pedagogia reuniam, mesmo que aparentemente de forma sintética, o que era considerado essencial para os professores, e nesse contexto de ciência pedagógica os saberes que os integravam eram advindos da pedagogia, da filosofia, da sociologia, da biologia e de outras áreas científicas que pudessem contribuir para a definição das funções dos professores, dos alunos e os métodos que deveriam ser empregados (SILVA, 2005).

Mesmo diante das lutas de representações (CHARTIER, 2002), os manuais de Pedagogia se fizeram veículos responsáveis por materializar essas novas ideias sobre a arte de ensinar com caráter científico e integrá-los nas escolas de formação de professores. Esses manuais podem ser considerados como instrumentos que contribuíram para que a ciência da educação se consolidasse nesse meio, sistematizando os princípios que atribuíam ao professor um saber especializado (PINTASSILGO, 2006), “organizando saberes especializados e autorizando modos de atuação próprios dessa categoria profissional” (CATANI; SILVA, 2007, s.p.).

Percebemos, então, que, a partir das duas últimas décadas do século XIX, os professores primários brasileiros passaram a ter uma formação que considerava aspectos das ciências da educação, proporcionando-lhes a constituição de saberes profissionais que os caracterizasse como professores. No que se refere a São Paulo, por exemplo, em se tratando dos elementos do saber profissional do professor que ensina matemática, a partir desse período,

> o *saber para ensinar matemática* nos primeiros anos escolares envolve o domínio não só de algoritmos ligados às operações fundamentais da aritmética, ou mesmo conhecimentos sobre a geometria euclidiana. O *saber para ensinar* matemática constitui-se a partir desse tempo como ciências de formas intuitivas para a docência dos primeiros passos da aritmética e da geometria (BERTINI; MORAIS; VALENTE, 2017, p. 41, grifo dos autores).

Esses saberes *para* ensinar matemática tiveram sua sistematização apresentada aos futuros professores primários a partir de manuais de Pedagogia, possibilitando no período de método intuitivo a objetivação de uma matemática específica para a formação do professor, a qual incluiu estes saberes como característicos da profissão de ensinar. Cabe-nos nesta tese de doutoramento caracterizar que matemática era essa, especificamente, qual era essa *geometria para ensinar*.

De acordo com Silva (2005), os manuais de Pedagogia “colocaram em comunicação saberes teóricos e práticos, relacionando-os a diferentes áreas do saber” (SILVA, 2005, p. 21). Podemos observar isso no manual de Affreixo e Freire (1890), por exemplo. Logo no início de seu manual, os autores afirmam: “e, porque estudamos os métodos especiais de ensino, por sua grande extensão, carecem de ser dispostos sistematicamente, classificá-lo-emos de modo mais conveniente a um proveitoso estudo da pedagogia” (AFFREIXO; FREIRE, 1890, p. 11).

Por essa disposição sistemática dos métodos, os autores apresentam diretivas específicas para o ensino de diferentes saberes escolares, tais como as rubricas matemáticas aritmética e geometria. Com isso eles sistematizam saberes *para* ensinar particulares do professor que ensina matemática, em particular, apresentam orientações *para* ensinar geometria, à medida que relacionam a *geometria a ensinar* aos saberes *para* ensiná-la. Portanto, reconhecemos os manuais de Pedagogia “como fonte e objeto ricos para a história da profissionalização docente e dos saberes a sustentam” (SILVA, 2005, p. 35).

Diante das ideias sobre as quais discorremos nesta seção, constatamos que os manuais de Pedagogia podem ser detentores de elementos profissionais dos professores dos primeiros anos escolares, em particular de professores que ensinaram matemática nos primeiros anos escolares nas três décadas finais do século XIX e nas duas iniciais do centenário seguinte. Desse modo, evidenciamos por que elegemos como fontes de pesquisa manuais de Pedagogia. Na seção a seguir, vamos explicar quais manuais, dentre tantos, compuseram o *corpus* de fontes.

3.3 A definição do *corpus* de manuais de Pedagogia para a caracterização de uma *geometria para ensinar*

Quando nossos caminhos na pesquisa nos levaram a caracterizar uma *geometria para ensinar*, observamos na literatura da história da educação, como a mencionada na seção anterior, que os manuais de Pedagogia direcionados à formação de professores para atuarem nos primeiros anos escolares são portadores de elementos de saberes profissionais. Mais especificamente, na *História da educação matemática,* a tese de Maciel (2019) explicita a riqueza material que tais manuais oferecem à caracterização de elementos do saber profissional do professor que ensina matemática, ao utilizá-los para caracterizar uma *aritmética para ensinar*.

A pesquisa de Maciel (2019) permitiu-nos fazer um primeiro levantamento de manuais de Pedagogia cujas diretivas pautavam-se, também, em saberes profissionais do professor que ensina matemática. No entanto, logo observamos que, dos cinco manuais que a autora considerou como fonte de pesquisa, apenas o de Antonio Marciano da Silva Pontes, dos quatro que pudemos compulsar, possui capítulo ou seções que sistematizam orientações *para* ensinar geometria. Então, ampliamos nossa busca tendo em conta a literatura da história da educação e identificamos dezenove manuais de Pedagogia que foram direcionados para a formação dos professores dos primeiros anos escolares no Brasil entre 1870 e 1920 (Ver lista no Apêndice A).

De posse desses títulos, buscamos por sua localização para, então, verificarmos quais abrangiam diretivas para o ensino de geometria, e desse modo poderiam contribuir para a caracterização de uma *geometria para ensinar* do período que estudamos. Direcionamos a primeira iniciativa de busca ao Repositório do GHEMAT no domínio da Universidade Federal de Santa Catarina. Localizamos, então, os seguintes manuais de Pedagogia: *Curso Prático de Pedagogia,* de Jean-Baptiste Daligault (1870); *Compêndio de Pedagogia* Prática, de Joaquim José de Araújo (1886); *Princípios de Pedagogia*, de José Augusto Coelho (1891, 1892); e *Curso de Pedagogia*, de Helvécio de Andrade (1913). Após realizarmos uma leitura prévia desse material, já tendo em vista a lente teórica na qual nos sustentamos, percebemos que, dentre esses títulos, apenas o tomo II da obra de Augusto Coelho (1892) possuía capítulo dedicado a orientar o professor *para* ensinar geometria. Então, seguimos a busca.

Ao inserir em um navegador de *internet* o título de um manual que Farias (2014a) indica que foi referência para a formação de professores na Escola Normal da Província do Rio de Janeiro, verificamos que há uma cópia de *Théorique e Pratique* *de Pédagogie et de Méthodologie* de Braun (1872) disponível em meio eletrônico, sendo que o volume II de tal obra também possui capítulo com diretivas sobre o desenvolvimento do trabalho pedagógico do professor *para* ensinar geometria.

A maioria das pesquisas consultadas, tais como Silva (2005), Perez (2012), Silva (2017) e Maciel (2019), cuja fonte e/ou objeto de estudo são manuais de Pedagogia, indicam que o acesso a exemplares desse material está disponível no acervo da Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo (FEUSP). Assim, realizamos diversas visitas ao local em busca dos exemplares identificados na literatura e de outros mais que pudessem ser de interesse da nossa área de pesquisa. Nessas oportunidades, pudemos compulsar as obras elencadas no quadro 4, apresentado adiante.

Quadro 4 – Manuais de Pedagogia identificados na FEUSP (1870-1920)

Título	**Autor**	**Ano**
Compêndio de Pedagogia	Antonio Marciano da Silva Pontes	1873
Curso Prático de Pedagogia	Jean Baptiste Daligault	1884
Pedagogia e Metodologia	Camillo Passalacqua	1887
Princípios de Pedagogia	José Augusto Coelho	1892
Manual Prático de Pedagogia	José Augusto Coelho	Entre 1892 e 1907
Lições de Pedagogia	Valentim Magalhães	1900
Lições de Pedagogia	Sem autor	1907
Noções de Pedagogia Elementar	José Augusto Coelho	1907
Compêndio de Pedagogia	Dario Vellozo	1907
Compêndio de Pedagogia Escolar	Feliciano Bittencourt	1908
Princípios de Pedagogia: ensaios	Antonio de Sampaio Dória	1914
Traité de pédagogie scolaire	Irénée Carré.; Roger Liquier,	1920

Fonte: Elaborado pela autora.

Após uma análise prévia desse material, tendo em conta o referencial que trata dos saberes profissionais do professor, sobretudo dos primeiros anos escolares, selecionamos para digitalização aqueles que possuíam títulos ou seções que anunciavam tratar de orientações direcionadas à formação do professor *para* ensinar geometria, tais como método de geometria e ensino da geometria. Desse modo, os títulos selecionados foram aqueles que aparecem em destaque no quadro 4, acima.

Os manuais que não estão em destaque no quadro citado não foram selecionados por não apresentarem na sua composição títulos ou seções como os mencionados acima, voltados especificamente para orientar o professor *para* ensinar geometria. Nesse período, muitos manuais de Pedagogia, fossem eles elaborados por autores brasileiros ou títulos estrangeiros, davam destaque, entre as rubricas matemáticas, para a aritmética, possuindo seções especificamente com esse título ou com temas como cálculo, por exemplo. Assim, podemos notar que as orientações *para* ensinar geometria não possuíam, nos manuais do período de 1870 a 1920, a mesma representatividade e imponência que as rubricas aritméticas, as quais aparecem mais consolidadas nessas fontes.

O *Curso Prático de Pedagogia* de Jean Baptiste Daligault (1884), por exemplo, não faz referência a processos formativos relacionados ao ensino de geometria, especificamente, ainda que o faça para a aritmética. Do mesmo modo, podemos citar também o *Compêndio de Pedagogia Escolar* de Feliciano Bittencourt (1908), que dispõe de diversas diretivas que orientam o professor sobre os métodos e processos de ensino, como quando explica acerca da generalização e abstração, mas que também não se dedica a sistematizar uma formação específica *para* ensinar geometria. Porém, destacamos que a geometria era matéria integrante do currículo dos primeiros anos escolares e de escolas normais por todo o Brasil nesse período, e, embora não com mesmo destaque que a aritmética, vários manuais pautavam a sistematização de orientações *para* ensiná-la.

Em Belém, cidade da nossa instituição, UFPA, visitamos o setor de obras raras da Biblioteca Arthur Vianna na Fundação Cultural do Estado do Pará e após consultarmos seus catálogos não foi possível identificar nenhum manual dessa natureza. No Arquivo Público do Estado do Pará, assim como no setor de obras raras da Biblioteca Central da UFPA também nos deparamos com a mesma situação. Ao visitarmos o Instituto de Educação do Estado do Pará, a antiga Escola Normal do Pará, não foi possível o acesso a um catálogo do arquivo que contém o acervo de tal escola, então precisamos folhear os livros lá disponíveis um a um, o que nos permitiu localizar os seguintes manuais que fazem menção à pedagogia: *La Science de L'Éducation*, de A. Bain (1894); *Histoire Universalle de la Pédagogie*, de Paroz (1893) e *Princípios de Pedagogia*, de José Augusto Coelho, o tomo II de 1892, que já mencionamos. Destes, o manual que consideramos para compor o nosso *corpus* de fontes, pelos motivos mencionados anteriormente, foi *Princípios de Pedagogia*. Assim, torna-se visível a ampla circulação de tal manual pelas escolas normais brasileiras.

Não localizamos manuais de Pedagogia que já não tivessem sido citados na literatura. De outra parte, nem todos aqueles identificados foram localizados nas bibliotecas e arquivos que visitamos, de modo que as obras *Compêndio de Pedagogia*, de Braulio Cordeiro (1874) e *Elementos de Pedagogia*, de José Maria Graça Affreixo e Henrique Freire (1890) não foram encontradas. O primeiro manual foi utilizado pelo professor Dr. José Carlos Araújo em suas pesquisas. Ao trocarmos *e-mails* com este pesquisador sobre o manual de Cordeiro, soubemos que nele “nada se encontra” especificamente sobre o ensino de geometria.

Por outro lado, uma bibliotecária da FEUSP nos indicou que seria possível comprar uma cópia digitalizada do segundo manual na Biblioteca Nacional de Portugal. Entrei em contato, mas a edição que estava disponível, de 1875, não possui indícios de que dispunha de orientações específicas para formar o professor *para* ensinar geometria. No entanto, Martinez e Lopes (2011) dão indícios de que a edição de 1890 de *Elementos de Pedagogia* apresenta tais orientações. Assim, entramos em contato a professora Dr.ª Silvia Alicia Martinez, que na sua pesquisa de pós-doutorado utilizou tal manual. A pesquisadora gentilmente nos disponibilizou a digitalização de capítulos do material que apresentam diretivas formativas para o professor ensinar matemática. Então, conseguimos ter em mãos os manuais do quadro 5, a seguir.

Desse modo, conjunto de manuais que utilizamos para caracterizar uma *geometria para ensinar* que constituiu a formação dos professores dos primeiros anos escolares no Brasil entre 1870 e 1920 é composto pelo que está expresso no quadro 5, que apresentamos na página seguinte. A escolha desses manuais de Pedagogia específicos deu-se por alguns fatores que vínhamos mencionando. A opção por esses manuais aconteceu, primeiramente, por eles terem circulado por escolas normais brasileiras no período que a pesquisa compreende. Por isso, temos a quarta coluna no referido quadro 5, para mostrarmos pesquisas que indicam esses manuais como referências de formação de professores.

Quadro 5 – Manuais de Pedagogia que compõem o corpus de fontes de pesquisa

Ano de publicação	Autor	Manual[38]	Onde esteve presente[39]
1872	Thomas Braun	Cours Théorique e Pratique de Pédagogie et de Méthodologie	Escola Normal da Província do Rio de Janeiro (FARIAS, 2014a).
1873	Antonio Marciano da Silva Pontes	Compêndio de Pedagogia	Escola Norma de SC, de SP (MACIEL, 2019) e do RJ (TREVISAN, 2011).
1890	José Maria Graça Affreixo e Henrique Freire	Elementos de Pedagogia	Escola Normal da Corte, de Niterói e de Campos (MARTINEZ; LOPES, 2011).
1892	José Augusto Coelho	Princípios de Pedagogia	Escolas normais brasileiras (BOTO, 2018); Escola Normal de SP (TREVISAN, 2011; CARVALHO, 2007) e do PA
[Entre 1892 e 1907] - s.d.	José Augusto Coelho	Manual Prático de Pedagogia	Escola Normal Primária de Piracicaba (NERY, 2014); Escola Normal de SP
1907	José Augusto Coelho	Noções de pedagogia Elementar	Escolar normais brasileiras (BOTO, 2014, 2018)
1907	Sem autor (AI)	Lições de Pedagogia	Escola Normal de SP (TREVISAN, 2011)
1920	Irénée Carré e Roger Liquier	Traité de Pédagogie Scolaire	Escola Normal de SP (TREVISAN, 2011) e do RJ (SALVADOR, 2016)

Fonte: Elaborado pela autora.

Para caracterizar a *geometria para ensinar* de determinado tempo histórico, é importante que a fonte privilegiada para tanto seja sistematizadora de práticas formativas dos professores dos primeiros anos escolares do período, e tenha transitado por suas instituições formadoras. De acordo com Marcus Oliveira (2018), “a circulação só pode ser caracterizada se existir algo para ser difundido e, por consequência, recepcionado. A recepção é outro elemento caracterizador e legitimador da circulação” (OLIVEIRA, Marcus, 2018, p. 14). No caso das nossas fontes de pesquisa, o processo de circulação está bem definido, de modo que houve a produção de manuais de Pedagogia e, também, instituições formadoras de professores que, dentro do sistema legal de comunicação, receberam-nos, adotaram-nos, concretizando um elemento configurador de um processo de circulação, que é a

[38] Ilustramos as capas dos manuais no apêndice B.

[39] Destacamos que os locais que indicamos são aqueles que já foram apontados por pesquisadores da história da educação ou que conseguimos identificar, mas é possível que esses manuais tenham circulado em outras escolas normais.

"dinâmica demanda/oferta, ou melhor consumidor/produtor" (OLIVEIRA, Marcus, 2018, p. 26).

Outros fatores que consideramos para a escolha dos manuais destacados no quadro 5, anteriormente apresentado, são: correspondem a materiais que tratam da formação do professor tendo em vista as ciências da educação que se instituíram em finais do século XIX; foram publicados no período em que a formação desses professores começou a se consolidar no Brasil e o método intuitivo esteve em prevalência, quando a tese de Marcus Oliveira (2017a) identifica a existência de uma aritmética intuitiva; e, sobretudo, possuem em seu *corpus* capítulos ou seções com títulos, tais como: "método da geometria", "apresentação pedagógica das formas geométricas", "ensino da geometria", "metodologia e processologia da geometria", que de imediato podemos dizer que orientam o professor *para* ensinar geometria. No capítulo IV desta tese, discutiremos essas orientações e como elas podem nos levar a sistematizar uma *geometria para ensinar*.

De posse desse material, precisamos compreender como proceder de forma que dele possamos tornar inteligível uma *geometria para ensinar* que esteve presente na formação dos professores dos primeiros anos escolares no Brasil entre 1870 e 1920. Desse modo, após coletarmos, separarmos e selecionarmos os manuais de Pedagogia para compor a caracterização de tal geometria, recorremos a Valente (2018b, 2020) para nos orientarmos sobre os procedimentos que podemos ter em conta para transformar as orientações *para* ensinar geometria dispersas nesses manuais, no período mencionado, em uma *geometria para ensinar* que se constituiu como elemento do saber profissional dos professores supracitados nesse período. Isso será discutido na seção a seguir.

3.4 Sistematização de uma *geometria para ensinar* a partir de diferentes manuais de Pedagogia

Tendo em vista a escolha das categorias teóricas de *matemática a ensinar* e *matemática para ensinar*, das quais decorrem a compreensão de *geometria para ensinar* que tratamos nesta pesquisa, Valente (2018b) destaca a necessidade de adotarmos um percurso metodológico que nos permita transformar informações dispersas em saberes sistematizados. Para definir como poderemos proceder com essa condução, o autor questiona: "Como, tendo em consideração esse posicionamento teórico, é possível analisar historicamente os processos de elaboração do saber profissional do professor que ensina matemática?" (VALENTE, 2018b, p. 379). Então, vamos agora discorrer sobre a possibilidade de análise que consideramos para caracterizar uma *geometria para ensinar* que é elemento do saber profissional do professor que ensinou matemática em tempos de método intuitivo no Brasil.

A obra de Peter Burke, intitulada *What is the History of Knowledge?* mostra como ao longo do tempo as informações que estão dispersas sobre determinada temática são transformadas em saber, como a objetividade[40] das informações foi sendo construída no decorrer da história, conforme a tradução do título na publicação em espanhol, *¿Qué es la historia del conocimiento? – Como la información dispersa se ha convertido en saber consolidado a lo largo de la historia*, sugere. O autor utiliza a metáfora de Lévi-Strauss, "cru" e "cozido", para se referir à informação[41] e ao saber, respectivamente, ao longo do livro, em que o "cozimento" é o processo em que as informações são transformadas em saber. Esse processo de produção de saber (cozimento) pode ser resumido em uma única palavra: sistematização (BURKE, 2016). Segundo Valente (2018b, p. 380), "a temática da obra leva-nos a refletir sobre como investigar processos de sistematização de informações que levam à constituição dos saberes.

Este autor se apropriou das ideias de Burke (2016), sobretudo das referências de processos de transformação de informação dispersas em saber, as quais sugerem quatro fases componentes da sistematização: recompilação, análise, disseminação e emprego. Essa apropriação deu-se com o objetivo de "apontar como informações sobre experiências docentes vão sendo transformadas em saber ao longo da história da educação", sendo, desse modo, "possível considerar etapas como recompilação de experiências docentes, análise comparativa dos conhecimentos dos docentes, sistematização e uso dos conhecimentos como saberes" (VALENTE, 2018b, p. 380). Então, a análise histórica dos processos de constituição do saber profissional do

[40] Objetividade "pode ser entendida como uma tentativa de separar o conhecimento (saber) do conhecedor e, dessa forma, apresentar uma 'visão isenta'" (BURKE, 2016, p. 72).

[41] "Claro que a informação é apenas relativamente crua, na medida em que os chamados 'dados' não são de maneira alguma fornecidos objetivamente, e sim considerados e processados por mentes humanas repletas de suposições e preconceitos (BURKE, 2016, p. 19). [...] O processo de transformação do 'cru' para o 'cozido' já se iniciou [na coleta (compilação)]" (BURKE, 2016, p. 75).

professor que ensina matemática nos primeiros anos escolares pode ser metodologicamente realizada a partir dessas três etapas.

A primeira delas, sabendo que "as experiências docentes, para fins de análise histórica do saber profissional do professor, encontram-se em documentação variada" (VALENTE, 2020, p. 6):

> envolve a seleção e separação de informações relatadas em revistas pedagógicas; organizadas em livros didáticos e manuais pedagógicos; normatizadas em leis do ensino; contidas em documentação pessoal de alunos e professores; materializadas em dispositivos pedagógicos para o ensino dentre outros tipos de documentação passíveis de evidenciar informações sobre o trabalho pedagógico dos professores. O conjunto obtido de tal procedimento de pesquisa representa uma coleção de conhecimentos dispersos num dado tempo histórico (VALENTE, 2018b, 380).

Nesta etapa do processo de sistematização, assim como nas demais mencionadas, sobre as quais falaremos a seguir, Valente (2018b) usa as expressões experiências ou conhecimentos docentes. Como mencionamos na segunda seção do capítulo anterior, nosso entendimento de conhecimento, em termos teórico-metodológicos, é atrelado ao que está carregado da subjetividade de quem o experenciou, de maneira que não é possível apresentá-lo de forma separada do sujeito que lhe é conhecedor, ele não é visto como isento deste. Portanto, o conhecimento está "diretamente ligado às experiências acumuladas pelo sujeito, saberes da sua ação no mundo, das práticas da sua vida cotidiana" (VALENTE, 2020, p. 5).

No caso da nossa pesquisa, as fontes privilegiadas são manuais de Pedagogia, nos quais já observamos um nível de objetivação do saber, em que é possível notar a independência do saber do conhecedor (BURKE, 2016). Os conhecimentos e as experiências já dão lugar à sistematização feita pelos diferentes autores. Os saberes objetivados, aqueles que "mostram-se como discursos sistematizados, prontos para serem mobilizados, com capacidade para circularem. [Que] são comunicáveis de modo que se possa deles fazer uso e apropriação em diferentes contextos" (VALENTE, 2019a, p. 10), são observáveis nesses manuais.

Como discorremos na seção 3.2, os manuais de Pedagogia apresentavam especificações para o ensino de diferentes matérias escolares, as quais eram apresentadas de forma a auxiliar a constituição do saber profissional de qualquer professor, pois elas não consistiam em saberes da prática, mas em saberes elaborados com o fim de que qualquer professorando pudesse deles se apropriar e fosse capaz de mobilizá-los em qualquer que fosse o contexto.

Tais manuais integravam a formação institucional do professor dos primeiros anos escolares. Disso já entendemos que cada um deles era portador de sistematizações de informações dispersas, de saberes, os quais entendemos como originários da sistematização consensual “passível de generalização e objetivação, produto cultural historicamente institucionalizado cujo intento é a sistematização e organização de determinados conhecimentos com o fim de propiciar a sua comunicação” (VALENTE; BERTINI; MORAIS, 2017a, p. 55)

Mas, se os manuais já expressavam saberes objetivados, o que iremos sistematizar? Se considerarmos o momento e o local em que cada manual foi utilizado, ali circulou a sua objetivação particular, mas em um período mais amplo, em que diferentes manuais foram utilizados em um espaço cuja finalidade era a mesma (formar professores), cada manual pode ser considerado como informação dispersa dentro desse contexto espaço-temporal.

Distintos manuais de pedagogia estiveram presentes pelas diversas escolas normais brasileiras. Admitindo que em cada uma delas se fez presente um manual diferente, a formação *para* ensinar geometria que se fez notar em cada instituição formadora corresponde ao que o respectivo autor sistematizou. Por ser usado para formar professores, em particular *para* ensinar geometria, de modo que o que eles propunham estava sistematizado, passível de circulação e apropriação, esses manuais pautavam saberes objetivados. No entanto, cada um ficava restrito a certas instituições, cidades e estados, enquanto outros eram reservados a outras. Assim, individualmente, onde atuavam, os manuais carregavam saberes sistematizados, mas se pensarmos no Brasil como um todo, eles se mantinham dispersos em espaço e tempo, considerando o período de 1890 a 1930, no caso particular desta pesquisa.

Cada obra representa a sistematização das experiências do seu respectivo autor, mas para sabermos se essas experiências sistematizadas por eles ganharam “circulação em outros lugares nesse tempo escolar revelando-se como um saber” (VALENTE, 2020, p. 907), precisamos analisar um conjunto de diferentes manuais desse determinado período. Então, podemos desenvolver uma sistematização que desprenda o autor da sua experiência, que, embora já sistematizada, não representa o saber daquele tempo escolar. A sistematização a que queremos chegar é justamente essa, a de um saber de um período histórico-educacional, esperando que, apesar de terem sido produzidos em contextos variados, esses manuais apresentem convergências plausíveis de serem conduzidas à sistematização de uma *geometria para ensinar*, um saber objetivado desse período (VALENTE, 2020).

Assim, na nossa pesquisa, podemos reescrever, por ora, a *recompilação de experiências docentes* como *recompilação de manuais de Pedagogia.* Em cada momento histórico, como no período de prevalência do método intuitivo, a análise de um conjunto desses manuais pode revelar elementos do saber profissional do professor que prevaleceram ou que se mantiveram estáveis naquela época, o que nos leva à segunda etapa do processo de transformação de informações dispersas em saber, *análise comparativa dos conhecimentos dos docentes*, a qual:

> visa promover uma nova seleção no âmbito do inventário elaborado anteriormente, com a montagem da coleção de conhecimentos dispersos num dado tempo da história da educação escolar. Tal seleção envolve um novo inventário, agora composto pela separação daquelas informações sobre experiências docentes que se mostram convergentes do ponto de vista da orientação para o trabalho do professor. Por este procedimento de pesquisa tem-se a possibilidade de que sejam reveladas tendências de assentamento de propostas e construção de consensos pedagógicos sobre o que deve o professor saber para a realização de seu ofício (VALENTE, 2018b, 381).

Essa análise, que interpretamos no momento como *análise comparativa dos manuais de Pedagogia,* demanda-nos um novo inventário, que expresse as convergências acerca da constituição do saber profissional do professor, a qual poderá nos revelar se se manteve um consenso entre os manuais sobre tal saber no período estudado e em que termos isso aconteceu. Poderemos discutir, assim, se, e em que pontos os diferentes manuais são consensuais no que se refere às orientações *para* ensinar geometria, aos elementos do saber profissional do professor que ensinava geometria em tempos de método intuitivo no Brasil.

Ressaltamos que quando afirmamos que a partir da análise comparativa precisamos identificar consensos pedagógicos, não significa, necessariamente, que todos os manuais, no caso desta tese de doutoramento, deveriam dizer a mesma coisa, mas sim que naquele período predominava um mesmo entendimento sobre o que o professor deveria saber para ensinar geometria. Dizer que houve consenso entre esses manuais significa que eles fizeram circular uma mesma ideia sobre os elementos do saber profissional do professor que ensina geometria, que naquele período prevaleceu um ideário de formação de professores *para* ensinar geometria que esteve representado na maioria dos manuais, o que pode ser evidenciado pelos consensos que podem ser estabelecidos entre eles. Portanto, quando dizemos que há consenso sobre determinado elemento da *geometria para ensinar*, é porque ele foi o que mais circulou no período, caracterizando a proposta da maioria dos manuais, ou de todos, para formar professores *para* ensinar geometria.

Havendo os consensos, poderemos dizer, então, se é possível que se tenha estabelecido uma *vulgata* nesse contexto. Se os manuais se mostrarem consensuais, poderemos conduzir "à organização da matemática para ensinar, saber objetivado, ingrediente do saber profissional do professor [...] Em caso negativo, [...] não demonstrando qualquer convergência, não serão passíveis de se transformarem em saber" (VALENTE, 2020, p. 909). No caso desta pesquisa, se não houver convergências entre os manuais, não poderemos sistematizar uma *geometria para ensinar* que possa ser vista como um saber objetivado representante de um período, pois cada manual teria sua sistematização particular e suas ideias seriam de circulação restrita. Se uma ideai não circulou, ela não é passível de apropriação, logo não está objetivada.

Vale, também, esclarecermos o que entendemos por *vulgata*. Este é um fenômeno caracterizado por Chervel (1990) como a estabilização do que contém em um manual escolar que é tido como parâmetro para a elaboração dos demais de uma mesma disciplina por um logo período, de forma que todos dizem praticamente as mesmas coisas. Como afirma o autor, "em cada época, o ensino dispensado pelos professores é, grosso modo, idêntico, para a mesma disciplina e para o mesmo nível. Todos os manuais ou quase todos dizem então a mesma coisa, ou quase isso". Essas similaridades podem ser observadas nos seguintes termos: "os conceitos ensinados, a terminologia adotada, a coleção de rubricas e capítulos, a organização do *corpus* de conhecimentos, mesmo os exemplos utilizados ou os tipos de exercícios praticados são idênticos, com variações aproximadas" (CHERVEL, 1990, p. 203).

A última etapa do processo proposto, no caso desta pesquisa, para transformar sistematizações para a formação do professor expressas em manuais dispersos em saber profissional do professor do período que esses manuais compreendem, é a *sistematização e análise do uso dos conhecimentos como saberes*. Nessa etapa:

> cabe ao pesquisador ou grupo de pesquisadores, organizar a partir da etapa anterior, uma assepsia de elementos subjetivos e conjunturais dos consensos pedagógicos, de modo a que os conhecimentos

> possam ser vistos com caráter passível de generalização e de uso, isto é, como saber. De outra parte, a análise inclui, de modo conjunto, a verificação em instâncias normativas e/ou didático-pedagógicas da ocorrência de uso dos elementos sistematizados pelo pesquisador (VALENTE, 2018b, 381).

Reescrevemos esta etapa como *sistematização dos elementos do saber profissional do professor*, pois, embora Valente (2018b) indique que "sistematização e análise de uso são procedimentos realizados concomitantemente" (VALENTE, 2018b, p. 381), no caso das nossas fontes de pesquisa, manuais de Pedagogia que circularam na formação institucional do professor visando a sua profissionalização, já estão inclusas em instâncias normativas e/ou didático-pedagógicas. Nesta fase, organizaremos os elementos do saber profissional do professor que se mostraram convergentes nos manuais de Pedagogia do período estudado, caracterizando um elemento do saber profissional do professor que represente o período e não apenas um manual, o qual independe de autores ou manuais.

Desse modo, cada manual expressa orientações *para* ensinar geometria objetivadas pelo respectivo autor, das quais consideramos possível extrair elementos[42] que corroboram para a sistematização de uma *geometria para ensinar*. Essas orientações estão sistematizadas, mas estão dispersas, pois dentro de certo contexto espaço-temporal cada manual expõe um fragmento do todo que permeou aquele período. Então, uma *geometria para ensinar* será dada pela sistematização dos elementos que cada manual expressou, tendo em conta que a análise comparativa de tais elementos os evidencie como consensuais.

Considerando a especificidade desta pesquisa de doutoramento, que objetiva caracterizar uma *geometria para ensinar* a partir de manuais de Pedagogia direcionados à formação de professores dos primeiros anos escolares no Brasil entre 1870 e 1920, refinamos as denominações das etapas metodológicas, reescrevendo-as da seguinte forma: *recompilação de elementos de uma geometria para ensinar em manuais de Pedagogia*, *análise comparativa dos elementos de uma geometria para ensinar em manuais de Pedagogia* e *sistematização de elementos de uma geometria para ensinar nos primeiros anos escolares do Brasil entre 1890 e 1920*, as quais comporão as seções do capítulo 4, a seguir, que culminará com a caracterização de uma *geometria para ensinar* no período indicado.

---

[42] Falaremos sobre esses elementos na seção 4.2 do capítulo a seguir.

CAPÍTULO IV

OS MANUAIS DE PEDAGOGIA E A SISTEMATIZAÇÃO DE UMA *GEOMETRIA PARA ENSINAR*

Tendo em conta o que apresentamos nos capítulos anteriores, este capítulo tem por objetivo sistematizar uma *geometria para ensinar* de modo a evidenciar sua caracterização construída a partir das orientações prescritas por manuais de Pedagogia direcionados à formação de professores dos primeiros anos escolares no Brasil entre 1870 e 1920. Busca-se, portanto, mostrar que geometria se constituiu como ferramenta de trabalho do professor que ensinou matemática nos primeiros anos escolares em tempos de método intuitivo no Brasil.

Para tanto, reunimos os manuais de Pedagogia que tomamos como fonte de pesquisa e recompilamos as orientações *para* ensinar geometria que cada um dispõe. Em seguida, comparamos tais manuais tendo em vista elementos que consideramos necessários à constituição de uma *geometria para ensinar*. Com base em tal comparação, pudemos vislumbrar as convergências existentes entre tais manuais e, então, sistematizar essa *geometria* própria do período que estudamos, a geometria que se acentuou como ferramenta de trabalho do professor que ensinou matemática em tempos de método intuitivo no Brasil.

4.1 Recompilando elementos de uma *geometria para ensinar* em manuais de Pedagogia

Para recompilarmos os elementos de uma *geometria para ensinar*, atemo-nos, sobretudo, às seções ou capítulos de cada manual que se direcionam a apresentar sistematizações específicas de uma geometria para o exercício do ofício de ensinar. No entanto, também consideramos os saberes *para* ensinar geometria que são discutidos ao longo da composição dos manuais e que corroboram para a elaboração das orientações *para* ensinar geometria sistematizadas neles.

Essa recompilação não é apenas descritiva, haja vista que ela implicará na discussão dos elementos da *geometria para ensinar* expressos nas referidas orientações de cada manual. Assim, realizamos a referida recompilação de cada manual tendo em vista verificar as seguintes questões: o que o(s) autor(es) indica(m) que deve ser ensinado de geometria? O que o(s) autor(es) indica(m) que o professor deve saber *para* ensinar essa geometria?

Antecedendo esse processo, apresentamos uma menção biográfica do respectivo autor e descrevemos a estruturação do material, de modo que possamos perceber como as orientações *para* ensinar geometria estão dispostas frente à estrutura de cada manual. A ordem em que tratamos da recompilação é crescente, considerando a data de publicação, o que nos possibilita perceber o processo de constituição dessas orientações conforme o ideário de formação profissional do professor em instituições próprias se consolidava.

4.1.1 BRAUN, Thomas. *Cours Téorique et Pratique de Pédagogie et de Méthodologie*. v. 2. Liège: H. Dessain, Imprimeur-Libraire, 1872b.

Johan Thomas Braun nasceu na Bélgica no ano de 1814 e faleceu em 1906. Foi "professor de Metodologia e Pedagogia na Escola Normal de Nívelles. Inspetor de Escolas Normais (TREVISAN; PEREIRA, 2013, p. 228). No Brasil, a Escola Normal da Província do Rio de Janeiro tomou a obra *Cours Théorique e Pratique de Pédagogie et de Méthodologie* de Braun como referência para a elaboração do seu currículo para formar professores. Ademais, o Jornal "A instrução Pública" já havia publicado, em 1872, artigos deste autor, incluindo "O ensino primário e seus métodos", "Aritmética - exemplos de ensino prático" e "Aritmética - frações ordinárias", os quais já consistiam em traduções da referida obra (FARIAS, 2014a).

Cours Théorique e Pratique de Pédagogie et de Méthodologie, ao que pudemos levantar, foi publicado em três volumes. O terceiro discorre principalmente sobre quem é o professor e suas relações com seus superiores, pais dos alunos e colegas. O primeiro volume aborda princípios gerais da educação, abrangendo a educação física e intelectual. Também faz apontamentos sobre metodologia em geral, nos quais destaca princípios didáticos que dizem respeito aos alunos, orientando que tanto quanto possível deve-se proceder de maneira intuitiva e que "os alunos devem ser orientados de forma a alcançá-los por si próprios, por assim dizer, pelas próprias reflexões e com base nos conhecimentos já adquiridos, para adquirirem a nova noção que se deseja comunicar-lhes" (BRAUN, 1872a, p. 228, tradução livre[43]).

[43] O mesmo é válido para as demais citações deste autor.

O autor também destaca princípios relativos aos objetos de ensino, enfatizando que estes sejam organizados do conhecido para o desconhecido e que "trate o assunto do ensino de modo que o fácil e o simples preceda o difícil e o complicado" (BRAUN, 1872a, p. 242). Essas orientações direcionam o trabalho pedagógico do professor *para* ensinar as diferentes matérias escolares e apresentam-se como ferramentas de seu trabalho. Assim, associamo-las aos saberes *para* ensinar, de modo que poderemos observar de que modo essas diretivas contribuem para a sistematização das orientações do autor específicas *para* ensinar geometria.

É no segundo volume que Braun (1872b) sistematiza essas orientações para o futuro professor ensinar as diferentes matérias escolares, oferecendo-lhe títulos formativos, tais como "método de religião", "método de leitura mecânica", "método de leitura expressivo", "método de escrita", "método aritmético" e "*método para ensinar sólidos ou formas geométricas*", no qual focaremos, sobretudo, nossa atenção, em busca, inicialmente, de recompilar diretivas que orientam o trabalho pedagógico do professor *para* ensinar geometria, as quais corroboram para que possamos sistematizar uma *geometria para ensinar*.

Logo na introdução, Braun (1872b) indica que o processo de ensino no qual ele busca referência para a escrita de tal título foi introduzido por J. Schmid[44], indicando, inclusive, a obra em que este autor sistematiza tal processo: *Os Elementos da Forma e do Tamanho de acordo com os Princípios de Pestalozzi*. Assim, percebemos que as filiações pedagógicas de Braun estão alinhadas a Pestalozzi, e, portanto, devem estar pautadas no método intuitivo.

Tendo em vista suas referências, Braun (1872b) destaca que o objetivo de se ensinar as formas geométricas é fazer o aluno entender os objetos na sua forma e, também, cada uma de suas partes, "ou ainda ter corpos considerados em seu todo e em suas partes, a fim de chegar, por estudo e comparação, a um conhecimento exato das proporções, posições, reuniões, da divisão de figuras, linhas e ângulos" (BRAUN, 1872b, p. 657). Essa indicação do autor evidencia que as formas geométricas não devem ser ensinadas isoladamente e que pelo estudo delas em seu todo e em suas

[44] "Joseph Schmid (1786-1851), ex-aluno e professor de Matemática nos institutos de Pestalozzi por quase duas décadas" (OLIVEIRA, Marcus, 2017b, p. 1006). "Com Schmid morando em Paris desde 1825, o pedagogo suíço encontrou nisso uma nova oportunidade de fazer circular em Paris o seu método intuitivo. Foi o que aconteceu. De 1826 a pelo menos 1848, Schmid difundiu em Paris o sistema de ensino de Pestalozzi para o estudo da matemática". Em 1848, publicou na França um escrito intitulado *Introduction des mathématiques dans l'instruction populaire* (OLIVEIRA, Marcus, 2017b, p. 1019).

partes, aludindo a processos de decomposição e recomposição, os elementos que compõem uma forma podem ser comparados e as propriedades que a definem, evidenciadas. Assim, percebemos que a sistematização do que está sendo ensinado faz parte do trabalho pedagógico do professor orientado pelas diretivas de Braun (1872b).

Segundo Braun (1872b), o *método para ensinar sólidos ou formas geométricas* é muito simples. O autor orienta que a primeira lição a ser tratada pelo professor deve ser iniciada examinando sólidos. No entanto, esta lição deve ser apresentada "após algumas explicações preliminares de pontos, linhas, arestas, ângulos, faces, cantos, etc." (BRAUN, 1872b, p. 659). Então, embora o ensino de geometria deva iniciar pelos sólidos, o professor precisa, primeiramente, segundo as diretivas do autor, falar brevemente sobre linhas, arestas, ângulos, faces, vértices, mas sem explicações aprofundadas, já que esses elementos serão objetos de ensino mais adiante. Braun (1872b) concentra sua atenção em elaborar orientações que iniciam o ensino pelas formas sólidas, perpassando preliminarmente por aqueles elementos iniciais para posteriormente os alunos poderem identificá-los na composição das formas, de modo que o estudo dos sólidos acontece do todo para as partes. O autor não sistematiza orientações *para* ensinar cada uma dessas formas, somente para o cubo, como exemplo, sobre o qual falaremos a seguir.

A orientação do autor para tanto está organizada em um formato de perguntas e respostas, em que indica as perguntas que o professor deve fazer e simula as respostas a serem dadas pelos alunos para cada uma delas, da seguinte forma:

> Professora (apontando para um cubo). - O que é isso?
> Aluna. - É uma coisa, um objeto, um corpo (BRAUN, 1872b, p. 664).

Esse é o diálogo inicial, a partir do qual podemos perceber que, segundo as orientações de Braun (1872b), no estudo das formas sólidas, o professor deve apresentar o objeto de ensino utilizando como recurso uma forma concreta que represente aquele ente geométrico que está sendo estudado. Ademais, é notório o quão demandado é o uso dos sentidos dos alunos para acompanharem o diálogo que o professor vai estabelecer em torno do objeto que lhes foi posto à vista. Podemos notar, ainda, que o cubo é inicialmente apresentado como um todo não decomposto.

Após indicar ao professorando que se deve começar o ensino do cubo apresentando um objeto concreto que seja representativo dele e questionando o que é aquilo, esperando que o aluno o considere como um corpo, Braun (1872b) segue as instruções para o professorando sobre o ensino do cubo da seguinte maneira:

> P. - Como você chama isso (mostrar um canto)?
> A. - Isso é chamado de canto.
> P. - Quantos cantos você percebe neste corpo?
> A. - Este corpo tem oito cantos.
> P. – Mostre eles.
> A. - Um, dois, três, quatro, cinco, seis, sete, oito cantos.
> P. - Isso é bom; mas agora observe esses quatro cantos (mostrando os quatro cantos no topo) e me diga em que posição eles estão.
> A. - Esses quatro cantos estão na parte superior do corpo.
> P. - E esses (mostrando os quatro cantos embaixo)?
> A. - Esses estão no fundo.
> P. - Quem pode repetir o que acabamos de dizer sobre os cantos deste corpo?
> A. - Este corpo tem oito cantos ao todo: quatro na parte superior e quatro na parte inferior.
> P. - Diga quantas vezes tem quatro cantos.
> A. - Este corpo tem duas vezes quatro cantos (BRAUN, 1872b, p. 664).

Como está posto no excerto acima, após apresentar o cubo como um todo, a orientação é para que o professor apresente seus vértices de forma muito perceptiva, o que fica evidente com o uso dos verbos “mostrar” e “apontar”, que indicam a necessidade de que os alunos exercitem seus sentidos sobre um objeto material relacionado ao objeto de ensino que lhe está sendo apresentado. Com o diálogo acima, é possível percebermos que Braun (1872b) já começa a direcionar o professor para que este leve os alunos a perceberem os elementos que compõem o cubo, iniciando um processo de decomposição que corrobora para que as propriedades que definem o cubo comecem a ser observadas.

Dessa forma, já deve ficar destacado para os alunos, até este momento, que o cubo é um corpo que possui oito vértices, o que eles mesmos foram descobrindo ao examinarem, direcionados pelo professor, o objeto material que representa o ente geométrico que é objeto de ensino. Essa ideia de que os alunos observem os elementos que compõem o cubo confirma-se na sequência do diálogo que orienta o trabalho pedagógico do professor:

> P. - Como é chamada essa parte do corpo (mostrar uma face)?
> A. - Esta parte do corpo é chamada de face.
> P.- Conte as faces que notar neste corpo e diga quantas são.
> A. (contando). - Uma, duas, três, quatro, cinco, seis; existem seis lados neste corpo.
> P. Onde elas estão localizadas?

> A. - Uma está virada para cima, outra para baixo; existem quatro ao lado (BRAUN, 1872b, p. 664-665).

A partir do excerto destacado acima, podemos constatar que Braun (1872b) continua a desenvolver nesse diálogo diretivo a ideia de decomposição do cubo, de modo que, até então, os alunos poderão perceber que o cubo tem oito vértices e seis faces. Novamente, o processo se dá a partir do exercício dos sentidos sobre o objeto material que está sendo utilizado como representante do ente geométrico estudado. O autor segue com esse raciocínio:

> P. - Atenção. Aqui, onde duas faces se encontram, é o que eu chamo ...?
> A. Uma aresta.
> P. - Quantas arestas este corpo tem?
> A. - Este corpo possui doze arestas.
> P. - Se você comparar essas arestas entre si, o que você nota em relação ao comprimento?
> A. Percebo que um é tão longo quanto o outro. Todas as doze arestas são igualmente longas.
> P. - Por quantas arestas cada uma das seis faces deste corpo é limitada?
> A. - Cada uma dessas seis faces é delimitada por quatro arestas.
> P. - E quantas arestas se encontram em cada canto?
> A. Em cada canto encontram-se três arestas (BRAUN, 1872b, p. 665).

Nessa oportunidade, os alunos já podem perceber que o cubo tem oito vértices, seis faces e doze arestas, as quais se formam a partir do encontro de duas faces e têm todas o mesmo comprimento. E dessa forma, os alunos vão aprendendo de quais elementos o cubo é composto e as propriedades que o caracterizam. O objeto de ensino que o diálogo diretivo do autor almeja alcançar é o cubo, mas, a partir do desencadeamento da ideia de decomposição do cubo, o autor conduz o professor a desenvolver com os alunos a sistematização da ideia do que é quadrado, que é o nome dado à face que delimita o cubo, que, justaposta a outras, forma as arestas.

Para chegar à definição de quadrado a partir do estudo do cubo, Braun (1872b) sugere a seguinte continuação para a lição, pautada nesse diálogo que direciona o trabalho pedagógico do professor *para* ensinar geometria, em particular o cubo:

> P. - Observe: cada face delimitada por linhas é uma figura. Essas figuras têm seus nomes após o número de linhas pelo qual são limitadas.
> Como chamamos as figuras que limitam este corpo?
> A. Estas são figuras de quatro lados.

> P. - O encontro de dois desses lados forma um ângulo, e como cada um desses lados é perpendicular ao outro, eles formam um ângulo reto.
> Quantos ângulos retos existem, portanto, para cada uma dessas faces?
> A. - Existem quatro ângulos retos para cada uma dessas faces.
> [...]
> Vamos ver se você consegue repetir o que acabei de te falar, como podemos chamar cada rosto que limita esse corpo?
> A. - Cada face que limita este corpo pode ser chamada de face de quatro lados, quadrangular, regular e equiângulo.
> P. - Por que se chama: face de quatro lados?
> A. - Chama-se assim, porque tem quatro lados, nem mais nem menos.
> P. - E por que o chama de quadrangular?
> A. - Porque tem quatro ângulos.
> P. - E regular?
> A. - Porque os lados são todos do mesmo tamanho.
> P. - O que você quer dizer com equiângulo lateral?
> A. – Isso significa uma face que tem quatro ângulos retos.
> P. - Figuras como esta, com quatro lados iguais e ângulos retos, são chamadas de quadrados.
> O que chamamos agora de quadrado?
> A. - Um quadrado é uma figura que tem quatro lados iguais e quatro ângulos retos (BRAUN, 1872b, p. 665-667).

Como mostra o excerto acima, Braun (1872b) organiza um diálogo que, partindo do exame dos materiais concretos, faz os alunos perceberem quais são as propriedades que determinam o que é o quadrado, chegando na sistematização dessa ideia. Esta é construída gradativamente, lançando mão do que os alunos já conhecem, congregando as informações que os alunos vão descobrindo pela observação: cada face é delimitada por quatro linhas, que são chamadas de lados; os quais, dois a dois, encontram-se formando um ângulo interno à figura de noventa graus; cada face possui quatro ângulos desse tipo; até o aluno ser capaz de concluir que um quadrado é uma figura que tem quatro lados iguais e quatro ângulos retos.

Assim, como o objeto de ensino em foco é o cubo, essa informação corrobora para que os alunos compreendam que o cubo tem oito vértices, seis faces e doze arestas, sendo que essas faces são denominadas de quadrado. Seguindo a organização do diálogo diretivo, Braun (1872b) destaca os termos em que o quadrado atua na construção da ideia de cubo:

> P. Por quantas dessas figuras esse corpo é limitado?
> A. - É limitado por seis quadrados iguais.
> P. - Qual a posição de cada uma das faces deste corpo em relação àquelas às quais está unido?
> A. - Cada face é perpendicular às faces que toca.

> P. - Quantas outras faces são tocadas de cada lado?
> A. - Cada lado toca quatro outros lados.
> P. - Quantas faces não toca?
> A. - Só tem um que ela não toca.
> P. - Qual a posição dele em relação a isso?
> A. - Fica do lado oposto.
> P. - Qual a posição das bordas, ao colocar o corpo sobre a mesa, em uma das faces?
> A. - As quatro bordas na parte inferior e acima são horizontais, enquanto as quatro bordas laterais são verticais.
> P. - Chamamos este corpo de cubo.
> Quem agora se sente capaz de descrever o cubo? - Antes de começar, vamos desenhar o cubo colocado em diferentes posições (BRAUN, 1872b, p. 667).

Com o diálogo que aparece no fragmento da lição *para* ensinar cubo, retratado acima, Braun (1872b) finaliza o processo de constituição da ideia de cubo. Nessa finalização, é evidenciado que o cubo é limitado por seis quadrados iguais, que são perpendiculares aos que tocam. Até chegar a esse ponto, o autor parte do cubo como um todo e vai desencadeando da observação, nessa ordem, a ideia de vértice, face, arestas, quadrado. Resgatando essas ideias construídas no processo de decomposição do cubo durante o diálogo estabelecido, podemos perceber que o autor vai evidenciando as propriedades que caracterizam o cubo, de modo que, ao final, o cubo aparece como um corpo que é formado por oito vértices, seis quadrados e doze arestas, as quais se formam pelo encontro perpendicular entre dois quadrados.

Na realidade, essa lição direcionada *para* ensinar cubo, a qual deve ser tida como exemplo para o ensino das demais formas, certamente não acontecerá literalmente como está posta, sobretudo por os alunos possivelmente não apresentarem as mesmas repostas. Porém, ela direciona o professor a desenvolver o ensino das formas geométricas, sobretudo as sólidas, seguindo os princípios estabelecidos nesses diálogos: utilizar materiais concretos que representem o objeto de ensino, apresentando, a partir destes, a forma como um todo e fazendo os alunos exercitarem seus sentidos e desenvolverem percepções sobre como é este objeto, as formas geométricas que o constituem, até chegar à sistematização da ideia em abstrato que o define.

Os assuntos referentes aos sólidos geométricos que o autor apresenta como objeto de ensino são, nessa ordem: cubo, paralelepípedo, prisma triangular, pirâmide, cilindro, cone, pirâmide quadrada, tetraedro ou pirâmide quadrada, dodecaedro e esfera. Após o estudo de cada um desses corpos, seguindo a ideia posta para o ensino de cubo, Braun (1872b) orienta que os alunos os descrevam “e os mais avançados farão o desenho no quadro” (BRAUN, 1872b, p. 659). Assim, percebemos que o desencadeamento da percepção dos alunos sobre aqueles objetos, ao examinarem sua forma, corrobora para que suas propriedades sejam gradativamente evidenciadas, de modo que, se ao concluir o estudo de uma forma os alunos devem ser capazes de desenhá-la no quadro, como indica o autor, exige que eles tenham em mente as propriedades que a definem e sejam capazes de realizar generalizações sobre elas. Logo, também pela comparação, o aluno deverá saber quais elementos compõe aquele corpo, quais devem ser suas medidas, como eles precisam ser justapostos, etc.

Após o professor ensinar sobre cada um desses sólidos, Braun (1872b) indica que os prismas triangulares, os cilindros, os cones e os dodecaedros sejam comparados acerca dos seguintes aspectos: os nomes dos sólidos, as faces, os vértices, as arestas, os ângulos e a direção das arestas em relação à posição que ocupam entre elas. O autor não apresenta detalhes sobre como proceder com essas comparações, mas esta estratégia mostra-se como forte elemento norteador do trabalho pedagógico do professor orientado pela proposição de Braun (1872b).

Este autor salienta que, no processo de ensino dos corpos geométricos, o professor deve “incentivar os alunos a procurarem produtos da natureza ou da arte, cuja forma corresponda a um ou outro dos corpos explicados” (BRAUN, 1872b, p. 661), atividade que, ao que percebemos, incentiva a comparação e exercita a percepção, incentivando a mobilização dos sentidos para tanto, mas que também contribui para que o aluno realize generalizações sobre as propriedades das formas estudadas. Braun (1872b) apresenta como exemplo desse movimento de buscar em espaços cotidianos objetos que tenham formas associadas às geométricas estudadas, à sala de aula e seus objetos. Segundo o autor, “o interior desta sala tem a forma de um paralelepípedo. A montagem das vigas do teto lembra uma pirâmide truncada. [...]. as janelas, a porta, os tampos das mesas formam retângulos. A chave parece um cilindro terminado por um cone; etc.” (BRAUN, 1872b, p. 661).

Essas instruções que Braun (1872b) dá ao professorando reforçam a importância da comparação e, consequentemente, da utilização dos sentidos para associar a forma geométrica com objetos concretos. No entanto, precisamos destacar que essa orientação específica serve, literalmente, para uma sala de aula particular, não sendo possível o professorando mobilizá-las em qualquer contexto de ensino.

Porém, norteiam-no no sentido de que tipo de situações e contextos podem ser explorados no ensino das formas geométricas.

Braun (1872b) dá sequência às suas orientações voltando o foco para outros objetos de ensino: ponto, linha, faces e corpos. O autor divide o ensino desses conteúdos em graus, e no primeiro deles o objeto de ensino é o ponto, sendo tomado como elemento de partida. Como afirma o autor, “trataremos primeiro das qualidades do ponto e, em seguida, das posições de um ponto em relação aos outros” (BRAUN, 1872b, p. 661). Como, segundo o autor, a união dos pontos está associada a linhas, o segundo grau compreende explicações sobre as linhas, da seguinte forma: definição da linha, a linha reta, a linha curva, a linha curta ou longa, a linha horizontal, vertical e perpendicular, a linha oblíqua e a linha paralela.

Após as crianças aprenderem a desenhar linhas e fazê-las encontrar-se em uma de suas extremidades, passa-se ao terceiro grau, segundo as orientações de Braun (1872b), quando é desencadeado o estudo dos ângulos. Nessa oportunidade, conforme o autor, explica-se sobre vértices e lados do ângulo, diversos tipos de ângulos, fazendo a “indicação de objetos nos quais os diferentes ângulos estão localizados” (BRAUN, 1872b, p. 662). Assim, recorrer a objetos associados ao que está sendo ensinado é indicação recorrente nas orientações do autor, reforçando a importância da comparação no desencadeamento da generalização a partir da percepção gerada pela utilização dos objetos. O quarto grau tem como objeto de ensino os ângulos opostos pelo vértice, adjacentes etc., ideia que deve ser introduzida, segundo Braun (1872b), a partir do desenho, feito pelo professor no quadro, de duas linhas que se cruzam.

O estudo dos ângulos é seguido, conforme destaca o autor, pelo quinto grau, o qual compreende as figuras planas. A primeira atividade, nesse processo orientado por Braun (1872b), é explicar o que significa uma figura geométrica, tratando sobre os diferentes tipos de triângulos. Passa-se, então, ao sexto grau desse processo, em que os primeiros objetos de ensino a serem tratados são quadrados e poliedros, o que evidencia o movimento entre a ida do todo para as partes e das partes para o todo. Em seguida, deve-se acontecer o ensino das formas geradas por linhas retas e linhas curvas. Assim, diferente da marcha de ensino das formas associadas à geometria espacial, que acontece do todo para as partes, quando o foco do ensino são as formas associadas à geometria plana, a marcha evidenciada é das partes para o todo: ponto, linha, formas superficiais e retorno aos poliedros.

Após apresentar todas essas orientações para o professorando ensinar geometria, Braun (1872b) atenta diretamente para os materiais que ele considera como necessários para o ensino das formas geométricas segundo as suas diretivas. Então, o autor destaca que “deve haver na sala de aula um compasso de tamanho adequado, uma régua e um esquadro” (BRAUN, 1872b, p. 663). Além desses instrumentos, “também deve haver os seguintes sólidos de papelão ou madeira: um cubo, um prisma, um cone, uma pirâmide, um cilindro, uma esfera, um dodecaedro, um tetraedro, vários poliedros, etc.” (BRAUN, 1872b, p. 663). Nas orientações *para* ensinar geometria que o ator apresenta, esses materiais são mobilizados para apresentar o objeto de ensino ao aluno, para introduzir a ideia abstrata que se quer construir sobre ele. Mas também perpassam todo o processo de ensino, corroborando para a realização de comparações, generalizações e construção da compreensão abstrata de tal objeto de ensino.

Portanto, iniciar o processo de ensino das formas geométricas pela utilização de objetos concretos que estimulam os alunos a desenvolverem percepções sobre o que está sendo ensinado, seguindo uma ordem do todo para as partes nas formas associadas à geometria espacial, e das partes para o todo nas formas associadas a geometria plana, constitui elemento essencial das orientações *para* ensinar geometria, revelando a tentativa de reelaborar saberes *para* ensinar pautados no método intuitivo, mobilizando a geometria que é objeto de ensino, processo que contribui para que identifiquemos elementos de uma *geometria para ensinar*.

4.1.2 PONTES, Antonio Marciano da Silva. *Compêndio de pedagogia*: para uso dos alunos da escola normal da província do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro: Typ. da Reforma, 1873.[45]

Antonio Marciano da Silva Pontes nasceu na província de Minas Gerais em 1836. Embora seus pais o tenham incentivado a seguir carreira religiosa, Silva Pontes não se sentiu à vontade em tal segmento e mudou-se para o Rio de Janeiro, onde ingressou no magistério, atuando como professor do curso de humanidades em diversos colégios (BLAKE, 1883).

[45] Publicamos uma análise preliminar deste manual (FORTALEZA; ROCHA, 2020b) nos anais do V Encontro Nacional de Pesquisa em História Da Educação Matemática, como resultado parcial desta tese de doutoramento.

Na sua província natal, Silva Pontes exerceu o cargo de secretário do governo e secretário da polícia (BLAKE, 1883), mas foi no Rio de Janeiro que a sua carreira no âmbito do magistério ganhou notoriedade. Além de atuar em colégios, a partir de 1868, este autor passou a ocupar a primeira cadeira[46] de Pedagogia na Escola Normal da Província do Rio de Janeiro, quando “elaborou apostilas para suas aulas inspirado no ‘Cours théorique et pratique de pédagogie et de méthodologie’, de Thomas Braun” (FARIAS, 2016, p. 120-121), a partir das quais Silva Pontes elaborou *Compêndio de Pedagogia* (FARIAS, 2014a).

Na capa deste manual, na segunda edição de 1873, estão estampadas as principais credenciais de Silva Pontes relacionadas ao magistério: “professor vitalício da 1ª cadeira da mesma escola (Escola Normal da Província do Rio de Janeiro), diretor do Liceu Niteroiense, ex-membro do conselho de instrução pública da corte” (PONTES, 1873, p. 1).

Em 1883, Silva Pontes era “membro do conselho da instrução pública e diretor do curso da escola normal para o sexo masculino, em Niterói” (BLAKE, 1883, p. 254). Assim, podemos perceber a notoriedade que esta personalidade exerceu no âmbito educacional da província do Rio de Janeiro, particularmente na formação de professores dos primeiros anos escolares. Nesta pesquisa, vamos nos ater especificamente às contribuições de *Compêndio de Pedagogia* para a constituição dos saberes profissionais do professor para ensinar geometria.

A obra mencionada tem sua estrutura dividida em três partes. A primeira é composta por dois capítulos, que apresentam, respectivamente, noções preliminares e qualidades do professor. Neste primeiro capítulo, Pontes (1873) discorre acerca da importância e da finalidade da educação, diferenciando-a da instrução. Segundo o autor, ambas fazem farte da pedagogia, mas “a educação propriamente dita “é, o desenvolvimento e direção das faculdades do homem, e a instrução, [...] é, a aquisição de conhecimentos”, sendo a instrução um ramo da educação (PONTES, 1873, p. 6). No capítulo II da primeira parte, Pontes (1873) elenca e descreve doze qualidades que ele considera que devem ser requeridas de um professor, entre as quais estão prudência, bondade, paciência e firmeza.

[46] “Tal cadeira era constituída por: Língua Nacional (gramática teórica e prática, redação e estylos); *Pedagogia (metodologia teórica e prática de todas as matérias do ensino primário*) e Caligrafia (exercícios)” (FARIAS, 2014a, p. 7, grifo nosso).

A segunda parte aborda a educação em três capítulos, os quais destacam, respectivamente, os seguintes aspectos: físico, que abrange a higiene das escolas, a ginástica e a educação dos sentidos; moral, que aborda a consciência moral, a vontade e a sensibilidade; e intelectual, que dá destaque para a atenção, a percepção, juízo e comparação, raciocínio e memória. Considerando que Pontes (1873) afirma que a instrução está relacionada à aquisição de conhecimentos, entendemos que os aspectos destacados neste terceiro capítulo da segunda parte de *Compêndio de Pedagogia* correspondem a ferramentas que podem contribuir para o desenvolvimento do trabalho pedagógico do professor *para* ensinar as diferentes matérias escolares, caracterizando-se, assim, como saberes *para* ensinar que integram a cultura profissional do professor formado por este manual.

Esses saberes tornam-se mais notórios na terceira parte da referida obra, quando Pontes (1873), nos três primeiros capítulos, discorre, respectivamente, sobre instrução, metodologia geral e metodologia especial. O autor relaciona instrução com transmissão de conhecimentos aos alunos, e destaca que “os princípios fundamentais da educação, na parte relativa à instrução, se dividem em três classes: princípios relativos; 1º ao professor; 2º aos discípulos; 3º aos objetos de ensino” (PONTES, 1873, p. 87). Então, o autor apresenta orientações sobre como proceder em cada uma dessas classes.

No capítulo de metodologia geral, Pontes (1873) discorre sobre método e processos, ideias das quais falamos na seção 3.1. O capítulo que trata da metodologia especial já apresenta direcionamentos específicos para o professor ensinar leitura aos alunos. Os capítulos que seguem têm essa mesma finalidade: orientar o professorando para ensinar as diferentes matérias curriculares, buscando organizar os saberes *a* ensinar conforme preconizam saberes *para* ensinar. Isso acontece do capítulo IV ao capítulo X, o qual Pontes (1873) intitula de *Ensino da Geometria Plana*. Os capítulos XI e XII encerram o manual *Compêndio de Pedagogia*, abordando, respectivamente, a organização geral da escola e a disciplina da escola.

No capítulo *Ensino de Geometria Plana*, Pontes (1873) sistematiza orientações que direcionam o professor quanto ao ensino de geometria nos primeiros anos escolares, assegurando-lhe ferramentas de trabalho que efetivamente preparassem-no para ensinar a geometria nesse nível escolar do seu tempo. Para isso, para além de mobilizar a *geometria a ensinar*, o autor apresenta excertos do que ele indica ser o programa de ensino estabelecido pelo “Regimento interno das escolas primárias, expedido pela Diretoria da instrução em 5 de abril do corrente ano” (Pontes, 1873, p. 170).

Com isso, percebemos que Pontes (1873) organiza diretivas formativas que se baseiam diretamente no que está proposto para a escola à qual essa formação prepara o professor. Embora reconhecesse que o professor, para ensinar, precisaria saber mais que o conteúdo das disciplinas tradicionais, tais como as rubricas matemáticas, Pontes (1873) ainda estava muito atrelado à geometria que é objeto de ensino. Todavia, o autor deixa evidente, desde o prólogo do manual, que seu objetivo ao elaborá-lo consiste em contribuir com uma produção nacional para a formação profissional do professor na escola normal.

Como mencionado, o título do capítulo em que Pontes (1873) sistematiza orientações formativas para o professorando ensinar geometria é *Ensino da Geometria Plana*. Logo, percebemos que a *geometria a ensinar* que é apresentada como objeto de trabalho do professor se restringe à geometria plana, o que fica evidente nos excertos apresentados pelo autor. Antes de transcrever estes fragmentos, o autor destaca que o professor deve considerar para o ensino a ordem em que os conteúdos estão dispostos: linhas retas, ângulos, triângulos, quadrilátero, e polígonos quaisquer; círculo, arcos, cordas, diâmetros, tangentes, secantes, ângulos, medição da circunferência e da superfície do círculo.

Dessa forma, percebemos que a primeira orientação do autor, para seguir do conteúdo “linhas” até os “polígonos quaisquer”, dispõe de uma marcha de composição, das partes para o todo, em que se inicia pelas linhas até chegar às superfícies lineares por elas delimitadas. Já no que se refere ao ensino do círculo e de seus elementos, é perceptível que se segue do todo para as partes, haja vista que primeiro se deve ensinar o círculo e depois seus integrantes, até chegar à circunferência que o limita.

Ao ensinar a geometria plana, os professorandos não deveriam apresentar demonstrações aos alunos, mas manter um ensino intuitivo e gráfico. Nesse processo, é pela apresentação de exemplos relacionados à indústria ou à arte, que o professor precisa começar a aula, apresentando-os antes dos teoremas, “e a cada proposição ajuntará as aplicações mais úteis, a fim de fazer compreender a verdade que quiser demonstrar” (PONTES, 1873, p. 171-172). Aqui, notamos que o autor empreende orientações para o ensino de geometria plana que despertam sua utilidade frente às atividades da vida do aluno.

A sistematização que Pontes (1873) realizou para agregar à formação do professor uma geometria mais característica dela, também sugere que para desenvolver o processo de ensino da geometria dos primeiros anos escolares se tenha à disposição uma coleção de figuras sólidas que viabilizem o estudo intuitivo, "pois, além de tornar muito menos áridas as lições, parece ser o único meio de pôr ao alcance da inteligência das crianças, incapazes ainda de abstrações, demonstrações aliás facílimas pela intuição dos objetos" (PONTES, 1873, p. 172).

Assim, Pontes (1873) leva o professor a entender que o ensino intuitivo é importante por tornar a apresentação dos objetos geométricos de ensino mais agradável e interessante, e por viabilizar ao aluno a compreensão das demonstrações e chegar a abstrações, as quais eles são incapazes, segundo o autor, de fazer sem a preparação dada à sua inteligência pelo estudo perceptivo dos objetos geométricos de ensino.

Pontes (1873) orienta que o professorando deve entender que é preciso fazer com que os alunos, sozinhos, identifiquem, nas produções da natureza ou da arte, as formas que sejam correspondentes às explanadas. Como afirma o autor, "é muito conveniente que o professor, como aconselha T. Braun[47], faça os meninos por si mesmos achar nos produtos da natureza ou da arte, as formas correspondentes aos corpos explicados" (PONTES, 1873, p. 172). Essa busca por localizar as formas já estudadas nos parece ser um primeiro passo de generalização, haja vista que tais formas já deveriam ter sido apresentadas perceptivelmente, por meio das coleções de figuras sólidas, às quais o professor deveria ter acesso, e explicadas pelo professor.

Essa ideia de iniciar a generalização nesse processo torna-se ainda mais clara quando Pontes (1873) aponta em seguida que se "deve fazê-los considerar os objetos em seu todo e em suas partes, a fim de chegarem pela comparação a um conhecimento exato das proporções, das posições, da reunião, da divisão das figuras, das linhas e dos ângulos" (PONTES, 1873, p. 72). Essa orientação evidencia que os alunos deveriam ir além da noção mais elementar da percepção e conhecer as propriedades que atribuem a determinada forma geométrica suas características próprias. Nesse processo, em que se segue da percepção à generalização, a análise

[47] "nas décadas finais do século XIX, com relação às práticas de ensino de Aritmética na formação de professores, vimos que, a partir dos anos de 1870, foi recomendado o método intuitivo, inspirado na obra *Cours théorique et pratique de pédagogie et de méthodologie*, de Thomas Braun" (FARIAS, 2014b, p. 109). De acordo com as lições de Thomas Braun analisadas por Farias (2014a), entendemos que este pedagogista era alinhado à pedagogia intuitiva.

e a síntese das formas geométricas parecem fazer sentido como elementos constituintes do saber profissional do professor, a partir dos quais pode-se, respectivamente, apresentar as formas geométricas e construir uma ideia abstrata sobre elas.

Pontes (1873) ainda orienta que se “deve provocar a atenção, a reflexão e a invenção, incitando os alunos a *formularem um juízo pronto e seguro* sobre objetos de todas as formas, que lhes sejam apresentados” (PONTES, 1873, p. 172-173, grifo nosso). Desse modo, percebemos que o autor denota que, pela intuição, pode-se chegar a generalizações dos objetos geométricos estudados e que o ensino intuitivo é capaz de levar a inteligência do aluno à abstração.

Pela estruturação do que deve ser ensinado de geometria, é possível observarmos que, para determinados conteúdos, a marcha de ensino aparece do todo para as partes e, para outros, das partes para o todo, o que mostra que não há uma uniformização universal com as orientações do autor que pontuam o estudo intuitivo dos objetos de ensino, que nesse caso deveriam ser estudados do todo para as partes, do concreto para o abstrato.

A forma de apresentação dos conteúdos por meio de coleção de figuras sólidas e o indicativo de generalização por meio da comparação e do estímulo da inteligência à abstração, assinalam uma concordância com a proposição feita pelo autor de desenvolver um estudo intuitivo. Pontes (1873) ainda fala dos princípios do método intuitivo nas orientações *para* ensinar geometria, mas não organiza efetivamente uma geometria formativa em torno deles.

Diante das orientações de Pontes (1873) *para* ensinar geometria plana, percebemos que, antes da constituição da geometria como ferramenta de trabalho, é imprescindível conhecer a geometria que é objeto de trabalho, e, então, agregá-la a um conjunto de saberes oriundos das ciências da educação. Portanto, a partir do manual de Pontes (1873), percebemos que, se é possível sistematizar uma *geometria para ensinar*, antes é preciso deixar evidente *a geometria a ensinar* e os saberes pedagógicos que circundam o momento histórico-educacional e integram a formação institucional do professor. Assim, no manual citado, a presença da geometria do ensino dos primeiros anos escolares na formação parece ter duas funções na constituição do saber profissional do professor: de dar-lhe ciência da geometria que compreende seu objeto de trabalho e de tentar agregá-la a saberes *para* ensinar, compondo orientações *para* ensiná-la.

4.1.3 AFFREIXO, Graça.; FREIRE, Henrique. *Elementos de Pedagogia*: para uso do magistério primário portuguez. 8. ed. Lisboa: Livraria Ferreira, 1890.[48]

José Maria Graça Affreixo nasceu em 1842 em Ovar, Portugal, e faleceu em Lisboa, em 1919. As suas formações mais destacadas aconteceram no Seminário de Santarém, Portugal, na Escola Normal de Lisboa e na Faculdade de Direito. Como sinalizamos, ele atuou como professor primário, mas também exerceu a docência em São Vicente de Lisboa, onde tornou-se professor vitalício, na Escola Normal, na Escola Central para o sexo masculino da cidade de Lisboa, nos cursos preparatórios para ingresso nos liceus. Também atuou na organização de revistas educacionais e foi subinspetor de ensino primário (SILVA, 2005, p. 341). Graça Affreixo ainda foi "delegado na Conferência Escolar reunida no Ministério do Reino em 1869 (PEREZ, 2012, p. 67).

Henrique Augusto da Cunha Soares Freire nasceu em 1842 em Trafaria, Portugal, e faleceu em São Brás de Alportel, mesmo país, em 1908 (SILVA, 2005). O estudo de Martinez e Lopes (2011) informa que Henrique Freire ingressou nos estudos em Portugal no Liceu Municipal de Setúbal e chegou a integrar um grupo de ex-alunos da Escola Normal de Lisboa, que foi a primeira geração que ganhou notoriedade no contexto educacional português. Já Silva (2005) afirma que, também no país de origem, Freire estudou na Escola Normal Primária de Marvilha, concordando que Henrique Freire agregou uma elite de professores dos primeiros anos escolares formada em uma escola normal.

Segundo Silva (2005), Henrique Freire ocupou-se em diversas funções entre as quais destacamos que foi professor primário em diversas ocasiões (em Grândola, Almada, Lisboa e Funchal), atuou na Escola Normal de Ovar e na Casa Pia de Lisboa, foi subinspetor da instrução primária em Leira e subinspetor escolar em Faro.

Graça Affreixo e Henrique Freire conheceram-se "nas primeiras conferências pedagógicas de Lisboa" (AFFREIXO; FREIRE, 1886, s.p. apud SILVA, 2005, p. 314) e em 1870 assinaram juntos o manual *Elementos de Pedagogia*. É indiscutível que "eles representam a primeira geração de docentes com formação profissional para o

[48] Uma análise deste manual e sua comparação com Coelho (1892) foi apresentada no II Congreso Virtual Iberoamericano de Formación de Profesores e o texto está em avaliação na Revista REMATEC.

magistério, fundamentando as bases da instrução primária e do ensino normal em seu país nas décadas finais do século XIX" (SILVA, 2005, p. 301).

Assim, percebemos que os dois profissionais destacados, para além da dedicação a atividades acadêmicas, ocuparam diversos cargos no magistério, em diferentes localidades, e ainda "tiveram intensa atividade editorial, exercendo papéis importantes na imprensa pedagógica e publicando livros de reconhecida relevância sobre o pensamento pedagógico da época" (MARTINEZ; LOPES, 2011, p. 2-3).

O manual *Elementos de Pedagogia* teve sua publicação justificada por reunir "de forma simples e acessível, todos os saberes úteis aos futuros professores", pautados na Pedagogia demandada pelos cursos de formação docente, por volta de 1870 (SILVA, 2005, p. 321). Portanto, percebemos que as experiências desses autores nesse meio educacional lhes renderam compilações e sistematizações de saberes para a formação profissional do professor, saberes modernizadores, elaboradas especificamente para formar professores.

A obra mencionada, cujas partes voltadas às orientações *para* ensinar geometria serão focalizadas (partes essas que recompilam elementos que direcionam o trabalho pedagógico do professor *para* ensinar geometria), conforme já mencionamos, é composta por dezesseis capítulos, os quais abordam desde aspectos mais gerais da educação, mais conceituais, até saberes formativos específicos *para* ensinar diferentes rubricas escolares.

O texto introdutório envolve discussões acerca da definição de educação, pedagogia, metodologia e instrução. O primeiro capítulo aborda o "estado da natureza", destacando temas como a luta pela existência, a tradição histórica e os fatores e princípios da educação. O segundo capítulo é dedicado a falar sobre a escola, sua utilidade e necessidade social, a classificação de escolas e as disciplinas que nelas devem ser ensinadas.

No capítulo III, o destaque é dado ao material escolar, quando são especificados diferentes objetos cujo conhecimento e domínio de uso revelam-se como elementos constituintes do saber profissional do professor *para* ensinar as diferentes disciplinas escolares, especificando os materiais que consideram mais úteis e adequados para colaborarem com a estruturação do ensino, tais como o termômetro e o barômetro, sólidos geométricos e contadores mecânicos.

Os capítulos IV, V, VI, VII e VIII discorrem, respectivamente, sobre os professores, a disciplina (no sentido de ordem e organização escolar), a educação física, educação moral e educação intelectual. O capítulo IX é intitulado *Da metodologia em geral*. Neste, os elementos que relacionamos a saberes *para* ensinar já se configuram mais diretamente como ferramenta de trabalho do professor que podem ser efetivamente mobilizados pelo professor no exercício da docência, tais como: a caracterização das marchas analítica e sintética, a coordenação entre as matérias e a graduação que deve obedecer, e o processo intuitivo. Mesmo neste capítulo, o autor ainda não orienta como utilizá-los de forma específica quando do ensino de uma matéria escolar em particular.

Essas diretivas passam a ser tratadas nos capítulos X ao XII, e, nos capítulos XIII, XIV, XV e XVI, os autores discorrem, respectivamente, sobre o desenvolvimento físico, razão e ordem, psicologia e sociologia. Voltando aos capítulos que tratam de diretivas para o ensino das matérias escolares, observamos que o décimo versa acerca da importância do ensino de leitura e escrita, focando em especificidades como generalidades do método da leitura e método da escrita. O capítulo XI intitula-se *Humanidades*. Neste, Affreixo e Freire (1890) abordam temas como a língua materna e apresentam diretivas para se desenvolver o ensino de geografia e história.

O capítulo XII tem como título *Dos elementos de ciências*, que os autores caracterizam como "um grupo de conhecimentos que entram o cálculo, a estética o estudo da natureza e seus similares (AFFREIXO; FREIRE, 1890, p. 220). Assim, é nesse capítulo que os autores sistematizam orientações específicas *para* ensinar as rubricas matemáticas, em particular a geometria. No entanto, antes de adentrar essas diretivas específicas *para* ensinar geometria, Affreixo e Freire (1890) já apresentam indícios de ferramentas de trabalho, saberes *para* ensinar, que corroborarão para a constituição dessas orientações, conforme vínhamos observando ao longo da descrição de *Elementos de Pedagogia*.

O espaço dado às explicações acerca do material escolar, em particular aqueles que os autores denominam "de material pedagógico, material de ensino, ou auxiliares de ensino" (AFFREIXO; FREIRE, 1890, p. 51), anuncia a relevância que estes empreendem na constituição do saber profissional do professor, em particular do que ensina matemática nos primeiros anos escolares. Os autores destacam a importância de aproximar o material escolar e os materiais de ensino em relação ao método.

Considerando o contexto histórico em que estavam inseridos, Affreixo e Freire (1890) atribuem às aplicações práticas fundamental importância para o desenvolvimento do processo de ensino, desfazendo-se, por outro lado, da pura memorização. Como afirmam os autores, mal aproveitado é “o tempo gasto em exercícios de memória em que a inteligência não vai interessada, ou em meras especulações teóricas de que nada se aproveita” (AFFREIXO; FREIRE, 1890, p. 40). Assim, nem a memorização e tampouco a exposição de argumentações teóricas são consideradas estratégias efetivas *para* ensinar os objetos de ensino das disciplinas escolares no final do século XIX. Em seu lugar, as atividades práticas são o que se recomenda.

Logo, de acordo com o que é proposto por esses autores, ensinar o aluno por meio da memorização ou explanação de aspectos teóricos acerca dos objetos de ensino não são formas de ensinar que devem integrar o saber do professor *para* ensinar a geometria, em particular, mas sim a ideia de exercícios dinâmicos e práticos.

Assim, para desenvolver o ensino neste tempo escolar, Affreixo e Freire (1890) destacam como necessários “processos que requerem uma coleção tal de objetos, que, não sendo anteriormente dispostos e estudados, deixarão o professor embaraçado e lhe inutilizarão os métodos desejados” (AFFREIXO; FREIRE, 1890, p. 41). Então, percebemos que os autores evidenciam a necessidade de que, durante a sua formação, o professor seja instruído acerca da utilização dos materiais de ensino e de como eles podem ser utilizados na disposição dos processos de ensino que ora se apresentam como mais efetivos, integrando a constituição do saber profissional do professor.

Tendo os professores conhecido e estudado acerca do uso dos referidos objetos durante a sua formação, sendo instruídos a como mobilizá-los no exercício do seu ofício de ensinar, eles deveriam ter acesso a eles no seu futuro ambiente de trabalho. Assim, os autores afirmam que “os processos reais e instrumentais no ensino demandam que as escolas estejam munidas de uma grande quantidade de objetos” (AFFREIXO; FREIRE, 1890, p. 51), o que mostra a relevância atribuída a esses objetos no cenário educacional que congrega a formação de professores e o ensino nos primeiros anos escolares.

Em se tratando, ainda, dos materiais de ensino, Affreixo e Freire (1890) destacam que seu manual aborda os principais, de forma que o destaque está para aqueles que podem ser usados “a propósito do método aplicável a cada disciplina” (AFFREIXO; FREIRE, 1890, p. 52). Sobre a obtenção de tal material, os autores esclarecem que há alguns que podem ser produzidos na própria escola. Observamos a aplicação dessa sugestão no caso dos objetos que podem ser utilizados a propósito do método aplicável à geometria.

Segundo os autores, “os sólidos geométricos podem obter-se na própria escola por meio de exercícios de cartonagem” (AFFREIXO; FREIRE, 1890, p. 52), como eles explicam ao tratarem especificamente do ensino de geometria. Assim, percebemos que o conhecimento e domínio sobre os modos de usar os materiais de ensino, e até mesmo de confeccioná-los, revelam-se como saberes *para* ensinar geometria que podem vir a integrar a sistematização de uma *geometria para ensinar*, elemento do saber profissional do professor que ensina matemática nos primeiros anos escolares.

O destaque dado por Affreixo e Freire (1890) à seção que trata da descrição dos materiais de ensino que o professor deveria conhecer para ensinar as rubricas matemáticas intitula-se “Pesos e medidas, sólidos geométricos, contadores mecânicos”. Esses objetos têm seu uso sugerido pelos autores por eles considerarem que

> Não há nenhuma criança capaz de compreender teoricamente a grandeza relativa das capacidades e volumes; nem se pode dizer, que haja ensino abstrato, neste ramo de conhecimentos, porque só se abstrai por meio da observação e o aluno, sem ver sólidos, não pode abstrair nenhuma ideia (AFFREIXO; FREIRE, 1890, p. 52).

Diante dessa assertiva, podemos notar que Affreixo e Freire (1890) demonstram que o professor precisa saber que, *para* ensinar geometria, em particular, não se deve iniciar o estudo dos conteúdos de ensino por meio de definições e generalizações que tornam o que se pretende ensinar mais abstrato. Para que os alunos consigam chegar à abstração acerca do que lhe é ensinado, é preciso, primeiro, observar algo tangível que viabilize que sua compreensão vá do concreto para o abstrato, quando serão capazes de entender determinado sólido geométrico, por exemplo, sem que este objeto esteja necessariamente diante dele. Essa ideia de estruturação do ensino de geometria revela-se como elemento do saber profissional do professor que o instrui como apresentar os conteúdos de ensino e como levar os alunos a chegarem a generalizações e construírem ideias abstratas acerca de tais conteúdos.

Assim, Affreixo e Freire (1890) sinalizam a importância da observação para se desenvolver o ensino, em particular da geometria, nos primeiros anos escolares, destacando, ainda, que “no ensino primário o caminho a seguir é sempre do empirismo para a abstração ou racionalismo” (AFFREIXO; FREIRE, 1890, p. 169). Os autores afirmam que especulações que correspondem à simples abstração são postas de lado, de modo que orientam que “seja o *bom* professor cuidadoso em empregar a intuição, sempre que puder empregar o ensino real e instrumental, e fará de seus alunos excelentes observadores” (AFFREIXO; FREIRE, 1890, p. 169, grifo nosso). Assim, o professor deve saber que, *para* ensinar geometria, a observação de objetos representantes dos conteúdos de ensino deve ser o primeiro passo a ser dado no processo de ensino.

Diante disso, Affreixo e Freire (1890) anunciam aos professorandos que, para ser bom professor, é importante utilizar a intuição, e, ao lançar mão do processo de ensino intuitivo, a utilização dos materiais de ensino serve para apresentar os conteúdos das matérias escolares, em particular os conteúdos relativos à geometria, de forma que o empirismo, o concreto, seja a base que impulsiona a abstração dos conteúdos. Portanto, é possível que percebamos a presença de princípios do método intuitivo nas orientações *para* ensinar geometria sistematizadas pelos autores, que os princípios do método intuitivo eras elementos que o professor precisava saber *para* ensinar geometria naquele tempo escolar.

Ao tratar de sistematizações específicas *para* ensinar geometria, Affreixo e Freire (1890) reafirmam essa ideia da prática, que estava relacionada a mobilização de materiais de ensino para promover a dinâmica da aula, como elemento de grande relevância para o desenvolvimento dos processos de ensino nos primeiros anos escolares. Os autores destacam que “esta recomendação não nos cansamos de repetir a propósito da geometria; os conhecimentos geométricos não se transmitirão proficuamente de outra maneira” (AFFREIXO; FREIRE, 1890, p. 229). Assim, os autores dirigem-se para as ferramentas que poderiam orientar o professor para desenvolver o ensino, as quais relacionamos aos saberes *para* ensinar e que já haviam sido recomendadas ao longo do manual para o ensino de geometria, destacando que o professor deve ensinar geometria de forma prática, o que é considerado um elemento essencial para o ensino de tal matéria escolar, posto que viabiliza que os conhecimentos geométricos sejam aprendidos de forma mais efetiva.

Tendo em vista esta importância da atividade prática para desenvolver o processo de ensino nas aulas de geometria, Affreixo e Freire (1890) orientam que “o primeiro cuidado do professor será que os alunos *fixem bem a forma* das figuras que *vão aprender*” (AFFREIXO; FREIRE, 1890, p. 229, grifo nosso). Essa diretiva evidencia que, ao iniciar o ensino dos conhecimentos geométricos, o professor deve recorrer ao concreto, não se atendo a explanações sobre as formas geométricas, acerca de suas propriedades em abstrato, e deixar a cargo dos alunos simplesmente perceber como essas formas são. Também podemos destacar que, ao recomendar que no início do estudo das figuras geométricas o professor deve levar o aluno a fixar suas formas, os autores fazem notar uma marcha de ensino para a geometria que segue do todo para as partes, introduzindo o assunto de forma analítica: para que se fixe a forma da figura, é preciso, primeiro, que ela seja apresentada no seu todo.

A apresentação das formas geométricas, segundo as orientações de Affreixo e Freire (1890), pode ser feita a partir de objetos concretos ou de exemplos retirados da arte ou da natureza. Conforme os autores, “o *círculo*, o *quadrado*, o *triângulo*, e o *retângulo* são tão vulgares na natureza e nas artes, que por toda a parte, na escola, na rua, em casa, [...] a juventude os têm sob os olhos” (AFFREIXO; FREIRE, 1890, p. 229, grifos do autor). Assim, o professorando é orientado a explorar as formas que os alunos já conhecem do seu dia a dia para introduzir, pela percepção, o ensino da *geometria a ensinar*, de modo que de imediato os alunos poderão dar nome às formas que eles já conhecem, e apenas ao longo do processo de ensino irão aprendendo suas propriedades, adquirindo a ideia abstrata acerca do que seja o círculo, o quadrado, o triângulo e o retângulo, sendo capazes de entendê-los sem uma representação tangível associada a eles.

Nesses pontos destacados, uma das diretivas que corroboram para a sistematização dessas orientações *para* ensinar geometria é a marcha analítico-sintética, “quando caminhamos da análise para a síntese” (AFFREIXO; FREIRE, 1890, p. 154). Os autores recomendam essa marcha por considerarem “que em nenhum ensino se faz exclusivamente análises, nem exclusivamente sínteses” (AFFREIXO; FREIRE, 1890, p. 153) e que “em regra os métodos analítico-sintéticos se devem preferir no ensino primário, por serem os mais próprios a cultivar os hábitos da reflexão, e a dar às crianças a certeza de que aprenderam” (AFFREIXO; FREIRE, 1890, p. 154).

De acordo com os autores, assim como o ensino do círculo, do quadrado, do triângulo e do retângulo, “se procederá com o volume ou a capacidade. O *cubo*, o *cilindro*, o *paralelepípedo*, os *prismas* e as *pirâmides* são fáceis de ensinar intuitivamente” (AFFREIXO; FREIRE, 1890, p. 229, grifos do autor). Assim, os autores sinalizam a importância do despertar dos sentidos e dos materiais de ensino de geometria para os professores dos primeiros anos escolares desenvolverem as atividades de ensino de geometria, de modo que, ao indicarem que estas formas geométricas sejam ensinadas intuitivamente, estão sugerindo que por essas diretivas o ensino é real e instrumental, “em que os exercícios práticos com objetos à vista são a alma e a vida da aula” (AFFREIXO; FREIRE, 1890, p. 156).

Os autores recomendam que as disciplinas que compõem o programa, em particular a geometria, devem ser coordenadas “de modo que sempre se parta: Do princípio para a conclusão. *Do conhecido para o desconhecido*. Do fácil para o difícil. *Do concreto para o abstrato*. Do exemplo para a regra” (AFFREIXO; FREIRE, 1890, p. 155, grifo nosso), o que mostra a coordenação de princípios de método intuitivo desde a sugestão para a elaboração do programa de ensino aos saberes *para* ensinar destacados pelos autores nas orientações específicas *para* ensinar geometria.

Affreixo e Freire (1890) afirmam que “nada mais útil para o ensino das formas do que possuir a escola uma boa coleção de sólidos geométricos talhados em madeira” (AFFREIXO; FREIRE, 1890, p. 229). Com isso, os autores recomendam o uso do material de Froebel[49], caracterizando-o como excelente. Assim, os autores evidenciam a notabilidade da utilização de materiais de ensino *para* ensinar geometria, considerando que “os sentidos põem a alma em relação imediata com os objetos que rodeiam o indivíduo, e acusam, de um modo claro, muitas condições de existência e propriedades dos mesmos objetos” (AFFREIXO; FREIRE, 1890, p. 165), reafirmando que o método intuitivo corrobora para a sistematização de suas orientações *para* ensinar geometria.

As orientações *para* ensinar geometria sistematizadas por Affreixo e Freire (1890) são complementadas com sugestões de exercícios de cartonagem, descrevendo-os como “excelentes para fixar as formas geométricas, sem enfado, antes em ar de recreio muito aprazível” (AFFREIXO; FREIRE, 1890, p. 229). Assim, esses exercícios parecem funcionar como uma atividade em que se exercita o que já foi explicado, corroborando na prática para a visualização das propriedades e para a compreensão em abstrato das formas geométricas.

Nesse sentido, os exercícios de cartonagem contribuem para que se possa

[49] Reforçamos que o material de Froebel, que ele chamou de “dons”, inclui “um conjunto de esferas, cubos e cilindros de madeira. [...] um cubo constituído de oito cubos acoplados. [...] bastões, [...] um cubo dividido em vinte e um tijolos; [...], um cubo composto de dezoito tijolos” (HEILAND, 2010, p. 32, 35, 36).

observar, nas orientações *para* ensinar geometria, a fase final da marcha de ensino defendida pelos autores, a analítica-sintética, pois, para essas atividades, deveria ser adquirido um material em que “os sólidos geométricos vendem-se planificados em cartão, de modo *que ao aluno fica o trabalho de recorte e da união das arestas*, colando-as” (AFFREIXO; FREIRE, 1890, p. 229-230, grifo nosso). Assim, para fixar o que foi estudado nas aulas de geometria acerca de sólidos geométricos os alunos confeccioná-los-iam a partir das figuras planas que os compõem.

Outra proposta do tipo de exercício mencionado é sugerida de ser realizada com outros materiais, mas, também evidenciam a ideia destacada no parágrafo anterior. Affreixo e Freire (1890) afirmam que é possível, facilmente, conseguir ter acesso a “placas de cortiça bem lisa, na qual *os alunos possam desenhar as bases dos sólidos, indicando as arestas e as alturas,* por meio de arames e de fios de retrós fixos aos arames, ou a base por meio de alfinetes” (AFFREIXO; FREIRE, 1890, p. 230, grifo nosso), o que evidencia que esta é uma atividade de fixação que, a partir da manipulação de formas geométricas concretas, corrobora para a visualização das propriedades e generalização das formas geométricas ideais.

4.1.4 OS MANUAIS DE JOSÉ AUGUSTO COELHO

José Augusto Coelho nasceu em Sendim, Portugal, em meados do século XIX (BOTO, 2010). Segundo o site da cidade Tabuaço[50], a qual integra Sendim, esse professor e pedagogista português é considerado como figura notável, cuja obra, em particular *Princípios de Pedagogia*, *Manual Prático de Pedagogia* e *Noções de Pedagogia Elementar*, representa as bases que fundamentaram a sistematização da pedagogia como ciência naquele país. Augusto Coelho tinha ampla cultura científica e filosófica, tornando-se, então, pioneiro da escola moderna.

Os estudos de Boto (2007; 2010) destacam que Augusto Coelho buscou agregar à arte de ensinar aspectos das ciências da educação, tornando-se o autor que “melhor representou a busca de racionalização da Pedagogia” (BOTO, 2010, p. 20). Podemos observar isso na escrita do próprio autor, quando no volume I de *Princípios de Pedagogia* destaca que, “combinando os dados da psicologia com o princípio de identidade entre a evolução do indivíduo e da raça, poderia sistematizar-

[50] Disponível em: https://www.cm-tabuaco.pt. Acesso em: 23 mar. 2020.

se a ciência pedagógica [...]” (COELHO, 1891, p. VIII). Boto (2014; 2018) também caracteriza as obras deste autor como manuais modernos de formação de professores.

Por outro lado, Silva, Gallego e Vicentini (2014) destacam que Augusto Coelho, diferentemente dos autores de manuais de Pedagogia que se tornaram mais conhecidos e construíram uma carreira de sucesso no magistério, “desenvolveu relações conturbadas com seus colegas e acabou sendo, de certa forma, pouco lembrado, não obstante ter lecionado em Escola Normal e ter escrito textos de Pedagogia” (SILVA; GALLEGO; VICENTINI, 2014, p. 140). Esse tipo de relação, afirmam as autoras, fizeram com que Augusto Coelho tenha morrido praticamente no esquecimento, o que contradiz os importantes feitos que lhes são atribuídos, tal como o de ser o precursor português da pedagogia de caráter científico.

A origem desse aparente paradoxo, apontam Silva, Gallego e Vicentini (2014), pode estar relacionada aos jogos de poder do período, nos quais Augusto Coelho pode ter sido, de alguma forma, marginalizado. Esses jogos são “construídos nas malhas das redes de sociabilidade informal e institucional, que marcam as carreiras e o protagonismo dos indivíduos que influenciam o funcionamento das instituições” (SILVA; GALLEGO; VICENTINI, 2014, p. 142). Assim, por mais inovadores que os princípios pedagógicos pautados nos manuais de Augusto Coelho fossem, seu reconhecimento dependia da chancela atribuída pelas relações de poder.

O que deixava tal personalidade à margem dessas articulações era o fato de ele “não [ter] formação acadêmica universitária, não surgindo como freqüentador de nenhuma das inúmeras tertúlias que reúnem as principais figuras intelectuais e políticas da época” (SILVA; GALLEGO; VICENTINI, 2014, p. 142). De acordo com Boto (2010), em decorrência da ausência de formação universitária, Augusto Coelho foi ofuscado pelas relações de poder, “o que explicava também sua figura pouco conhecida do grande público. Sua obra, todavia, é uma evidência indelével do vasto repertório pedagógico que desenvolveu ao longo de uma vida dedicada à educação” (BOTO, 2010, p. 20).

As produções de Augusto Coelho procuravam “transformar em modos e em roteiros prescritivos uma vasta e complexa filosofia da educação” (BOTO, 2007, p. 7). Ele preocupava-se em “indicar caminhos para uso específico de situações concretas de ensino. *Tratava-se de um pensamento que, abstraído das realidades da sala de aula, pretendia chegar a elas*” (BOTO, 2010, p. 27, grifo nosso). Desse modo, é notória a sua busca por sistematizar realidades pedagógicas de modo a atribuir-lhe caráter científico.

Essa atitude o coloca, em Portugal, entre os "principais nomes da Pedagogia auto-proclamada científica", que, para além do método, preocupa-se com "mecanismos biológicos, psicológicos, cognitivos e sociais; que, entrelaçados, permitiriam uma interpretação mais ampla do fenômeno educativo" (BOTO, 2010, p. 27-28). Com isso, "o seu trabalho contribuiu para a formação de várias gerações de professores primários e para a consolidação de uma determinada concepção de "pedagogia" (SILVA; GALLEGO; VICENTINI, 2014, p. 143).

Estas autoras destacam que Augusto Coelho, além de escrever manuais para a formação de professores primários, também ministrou aulas para estes nas escolas normais. O pedagogista também foi diretor de Escola Normal em Portugal (SILVA; GALLEGO; VICENTINI, 2014, p. 139). Mesmo não especificando a instituição ou nível de escolarização, Boto (2007) afirma que o autor também foi professor de Filosofia e de História, e também "redator político do jornal *Atualidade* no Porto; onde também participa, em 1880, [...] como membro fundador da Sociedade de Geografia Comercial" (BOTO, 2007, p. 2-3, grifo da autora).

Naquela cidade, Augusto Coelho foi convidado, em 1882, para ser professor da recentemente instalada Escola Normal do Porto, onde foi "responsável pela cadeira de Ciências Físico-Químicas e, posteriormente, pela própria matéria de Pedagogia. Colaborou, desde então, em inúmeros periódicos – sobressaindo-se *O Ginasta* e a *Revista Pedagógica*" (BOTO, 2007, p. 3, grifos da autora). Também contribuiu com diversas publicações pedagógicas "dentre as quais se destacam a *Revista Pedagógica* e a *Educação Nacional* (BOTO, 2010, p. 20, grifos da autora).

Passados doze anos, em 1894, Augusto Coelho transferiu-se para Lisboa, onde se tornou professor da Escola Normal da Capital. Após sua morte, em meados da primeira metade do século XX, a *Revista Escolar* publicou, em 1935, "um conjunto de artigos sobre [o autor], expressando a tese segundo a qual [ele] teria sido, para o caso português, um expoente da Pedagogia autoproclamada científica" (BOTO, 2007, p. 3).

Mesmo que tenha acontecido após a sua morte, Augusto Coelho obteve reconhecimento. Suas ideias e suas obras continuaram a ser reconhecidas ao longo do século XX. Apenas ao que temos notícia, seu pensamento pedagógico foi o tema de uma dissertação defendida em 1995 na Universidade do Minho por Manuel Lázaro Ferreira Fernandes. No Brasil, ao longo das duas primeiras décadas do século XXI, a pesquisadora Carlota Boto tem destacado a notória contribuição deste pedagogista português para as primeiras iniciativas de sistematização da pedagogia científica na transição do século XIX para o século XX, tanto em Portugal, quanto no Brasil. Seus manuais tratavam, ainda, de um conjunto de saberes próprios para a formação do professor para ensinar as diferentes matérias, em particular a geometria.

4.1.4.1 COELHO, José Augusto. Princípios de pedagogia. Tomo II. São Paulo: Teixeira & Irmão Editores, 1892.[51]

Princípios de Pedagogia é uma obra composta por quatro volumes, ou tomos, como aparece nas capas das diferentes publicações. No Brasil, os quatro tomos de *Princípios de Pedagogia* foram publicados entre 1891 e 1893 pela editora paulistana Teixeira & Irmãos, como aponta Trevisan (2011). A pesquisa desta autora apresenta descrição sumária dos quatro tomos que compõem *Princípios de Pedagogia* de Augusto Coelho. Nessa pesquisa de doutoramento, detemo-nos à análise do Tomo II[52], no qual o autor apresenta sistematização de orientações *para* ensinar geometria. Como mencionado, esse tomo é composto por 450 páginas que compreendem a parte III da obra, com os Livros I, II e III.

O Livro I trata da educação intelectual em geral e é composto por cinco capítulos. O primeiro aborda aptidões intelectuais e destaca os fins da educação intelectual, sendo o meio intelectual o destaque do segundo. Os capítulos III e IV discorrem acerca de temas que contribuem para orientar a prática do professor, revelando-se como elementos que atribuem saberes profissionais ao professor dos primeiros anos escolares, em particular *para* ensinar geometria. O terceiro abrange processos, maneiras de proceder em relação à educação intelectual, indicando diferentes formas de apresentar ao aluno a ideia de pirâmide, por exemplo.

O quarto capítulo trata da metodologia na educação intelectual, destacando elementos que auxiliam o professor acerca da ordem a seguir no desenvolvimento das ideias dos conteúdos de ensino, quando Coelho (1892) discorre sobre análise e síntese. O autor destaca que, independentemente do caminho que optemos por seguir, “essas são as condições fundamentais de todo o método [...]: - Em seguir do

[51] Um artigo em que realizamos uma análise preliminar deste manual (FORTALEZA; VALENTE, 2019) foi publicado em uma Edição Especial - História da Educação Matemática, da Revista VIDYA.
[52] Sempre que nos referirmos a *Princípios de Pedagogia*, estaremos nos reportando ao Tomo II desta obra.

homogêneo para o heterogêneo. – [...] Em avançar do conhecido para o desconhecido. – Em marcha do mais simples para o menos simples" (COELHO, 1892, p. 79).

O capítulo V encerra o Livro I de *Princípios de Pedagogia* destacando a diferença entre instrução primária e secundária, níveis de ensino para os quais os Livros II e III, respectivamente, sistematizam orientações específicas a fim de formar o professor *para* ensinar as diferentes matérias escolares. Assim, o Livro II aborda a instrução primária, apresentando considerações preliminares e três seções. A primeira contém dois capítulos, os quais orientam como proceder *para* ensinar os saberes matemáticos, geometria e cálculo aritmético, respectivamente. A segunda aborda zoologia e botânica no primeiro capítulo, cosmologia e mineralogia no Capítulo II e química no terceiro capítulo. A terceira seção trata de física, astronomia e sociologia. Para encerrar o Tomo II do manual citado, o Livro III elabora orientações *para* ensinar as matérias do ensino secundário, de maneira análoga ao que fez no livro anterior.

Ainda nas considerações preliminares do Livro II, antes de adentrar as orientações específicas *para* ensinar geometria, Coelho (1892) já afirma que "as formas geométricas entrarão, [...] na esfera da instrução primária, mercê da propriedade, a elas inerente, de poderem ser substituídas pelas próprias coexistências reais de que são a extensão em abstrato" (COELHO, 1892, p. 150). Assim, o autor sinaliza que nos primeiros anos escolares o professor deve ensinar as formas geométricas ideias a partir de formas reais que delas sejam representativas.

Ao iniciar a Seção I, Capítulo I, em que o autor sistematiza a apresentação pedagógica da geometria (a qual ele divide em dois momentos gerais, em que um primeiro trata das formas geométricas em si e o segundo das relações de equivalência entre tais formas), Coelho (1892), de modo mais específico, indica ao professor como tratar a geometria na escola, tendo em vista a maneira como considera esse saber científico:

> As formas geométricas, consideradas como objeto de ciência, são coexistências ideais de elementos e, portanto, concretos que deverão ser oferecidos ao aluno para ele os decompor em abstratos; esses abstratos componentes serão, por seu turno, novos concretos, que importará decompor igualmente em outros abstratos; estes decompor-se-ão em outros etc. Ao passo que tais decomposições parciais se vão operando, recomposições paralelas irão constituindo as formas geométricas à custa de outras mais simples. Assim, passando constantemente do concreto para o abstrato e do abstrato para o concreto, isto é, empregando a ordem "analítico-sintética-objetiva", o

> aluno dar-se-á conta das formas geométricas mais essenciais, na sua composição fundamental (COELHO, 1892, p. 157).

Essas orientações para o ensino de geometria que são sistematizadas pelo autor insistem na prescrição de elementos que fogem à rotina tradicional de ensino, indicando para a educação primária um trabalho pedagógico que se inicie por elementos concretos, que o autor chama de coexistências geométricas, dos quais os alunos possam decompor o abstrato. Mas o que ora é abstrato poderá vir a ser concreto e “ao passo que tais decomposições parciais se vão operando, recomposições paralelas irão constituindo as formas geométricas à custa de outras mais simples” (COELHO, 1892, p. 158).

Em páginas anteriores, Coelho (1892) exemplificou, em diferentes temas, esse saber que o professor deveria utilizar, tendo em vista as recomposições e passagens, as idas e vindas do concreto-abstrato-concreto, ou seja, a marcha de ensino “analítico-sintética-objetiva”. Citemos um exemplo vinculado à geometria:

> A ideia de cubo e do quadrado, que é a face do cubo; e da linha reta, que é a sua aresta, podem ser apresentadas ao aluno de maneiras diversas – mais ou menos vivas; e, assim, podem ser, quer concretizadas nos próprios objetos, quer objetivadas por meio de um desenho colorido, quer significadas pela palavra escrita etc. Mas, a ordem em que numa primeira apresentação tais ideias hão de ser oferecidas ao aluno será inflexivelmente a mesma, e consistirá em o seu espírito passar – do cubo para a superfície e da superfície para a linha. Ora, a razão deste fato está no seguinte: o método corresponde à ordem natural das ideias, e como é fatal esta ordem, pois exprime a própria coordenação pré-estabelecida do universo, na sua essência não pode ser alterado; o processo, porém, sendo uma maneira de dizer ou de obrar, se pretende inocular uma verdade qualquer na alma do aluno, há de adaptar-se melhor às circunstâncias do agente, do paciente, do objeto de ensino etc. Por isso, certo educador será mais vivo, enquanto um outro, será mais frio; este empregará com maior insistência os processos objetivos empíricos; aquele será mais formalista na exposição do pensamento [...] (COELHO, 1892, p. 73).

Dessa maneira, o trabalho pedagógico do professor deverá incluir um saber objetivo relativo à ordem a seguir no ensino. Suas particularidades, aquelas particularidades da situação do ensino etc., isto é, elementos de subjetividade de uma situação didática, poderão concorrer para mudanças, mas a ordem do saber deverá ser tomada como invariante. Assim, tendo em vista o instrumental teórico-metodológico de análise mencionado anteriormente, o saber *para* ensinar geometria está dado por uma ordem, mais que isso, pode constituir-se como um elemento importante da sistematização de *geometria para ensinar*. Desse modo, tomando o exemplo mencionado acima, define-se como um ensino que parte do cubo para a aresta. Tal saber leva em conta as subjetividades que cercam o ato educativo. É o que se pode depreender do que pondera Coelho (1892) um pouco mais adiante, ao afirmar que

> Pode-se, pois, concluir que a *personalidade* pedagógica estará principalmente nessa processologia especial derivada do seu caráter, processologia que, sem alterar as leis fundamentais da processologia geral, revestirá certos modos de ser particulares e, portanto, será mais ou menos clara ou impressionadora (COELHO, 1892, p. 73-74, grifo do autor).

No entanto, o elemento “ordem” reflete um modo pré-estabelecido do universo, e essas subjetividades deverão estar sujeitas a esse elemento:

> Como anteriormente se disse, se o elemento “ordem” é essencialmente rígido, por isso que traduz a inflexibilidade da harmonia universal, o elemento “maneira de apresentar ideia” pode variar com as aptidões do educador, sendo até na identificação entre professor e uma certa maneira pessoal de apresentar essas ideias que consiste a essência da sua personalidade profissional (COELHO, 1892, p. 160).

Ao finalizar as orientações preliminares sobre o ensino de geometria, o autor reafirma que a apresentação pedagógica das formas geométricas deve avançar “do concreto para o abstrato, isto é, das que são mais complexas para as que o são menos [...]” (COELHO, 1892, p. 159). Assim, percebemos que a ordem estabelecida para o estudo das formas associa o concreto ao que é mais complexo e o que é abstrato ao que o é menos, o que evidencia um saber específico *para* ensinar geometria que associa as formas sólidas ao concreto e complexo e as superficiais, lineares e o ponto ao que é de ordem superior de abstração e inferior de complexidade.

Isso mostra que a marcha de aprendizagem da geometria proposta pelo autor não segue a habitual, mas sim uma que esteja em acordo com o modo que, para o aluno, faz mais sentido. O que para o campo disciplinar da geometria pode ser entendido como mais complexo, a exemplo a geometria espacial, o autor sugere que tem maior concretude e que é mais fácil para o aluno aprendê-lo, tornando-se adequado que o ensino seja iniciado por essa área da geometria; o que é mais simples para a geometria, tomando como extremo o ponto, é mais difícil para o aluno aprender, pois o exercício de abstração exige maior esforço por ser abstrato de terceira ordem, e deve ser o último elemento a ser tratado no processo de ensino. Assim, Coelho (1892) evidencia, em sua sistematização de saberes para formar o professor *para* ensinar geometria, uma marcha de ensino que avança do fácil para o difícil, que na proposta do autor se concretiza como das formas sólidas para as superficiais, desta para as linhas e desta para o ponto.

Então, a apresentação das formas geométricas na proposta de uma geometria específica do professor que Coelho (1892) sistematiza inicia-se pelas formas sólidas "por serem as mais concretas" (COELHO, 1892, p. 160). O autor apresenta orientações gerais sobre como tais formas devem ser tratadas, tais como concretizadas em madeira e com faces coloridas com cores diferentes, "a fim de apresentarem mais vivamente a distinção das relações entre elas" (COELHO, 1892, p. 160). Então, para ensinar as formas sólidas, o professor deve ter em conta que os sentidos dos alunos devem ser estimulados nesse processo de apresentação do objeto de ensino, pois, pela observação, as relações entre as faces de um sólido podem ser estabelecidas pelas diferentes cores nelas pintadas.

O material do sistema froebeliano[53], então, é indicado pelo autor como indispensável para o desenvolvimento do processo de ensino das formas geométricas. Para determinar qual a forma geométrica pela qual se deve dar início ao ensino das sólidas, Coelho (1892) também recorre a Froebel, apropria-se das ideias deste pedagogista sobre este tema e propõe que os sólidos sejam estudados em três séries. A sistematização da primeira, a exemplo, mostra-se como ferramenta do ensino de geometria nos anos iniciais e está detalhada em lições ao professor da seguinte forma:

> Inicie-se a apresentação das formas sólidas pela "esfera" seguindo-se-lhe todas quantas daí possamos derivar.
> A ESFERA: apresente-se esta forma, oferecendo-a concretizada numa esfera de matéria leve e de uma só cor; isto não só para facilmente poder manusear-se, mas para se objetivar ao aluno como completamente homogênea. A criança dever executar com ela vários jogos infantis e fixar-lhe bem a redondeza.
> O CUBO:

[53] Tendo em vista seus materiais de ensino, Frobel propõe decompô-los "em materiais de diversas formas (sólidos, superfícies, linhas e pontos) e descreve suas relações separando os quatro tipos de material (análise) e depois os recombinando (síntese) (HEILAND, 2010, p. 36).

> *Derivação*: será derivado da esfera, operando-se nela seis secções convenientemente dirigidas.
> O educador deverá realizar uma tal operação diante do educando, fazendo sentir como uma forma se gera da outra.
> *Apresentação do cubo e suas relações*:
> a) O cubo será oferecido ao aluno como um todo não decomposto;
> b) Apresentação das relações de quantidade entre dois cubos, limitando-se estas às relações de igualdade ou desigualdade entre eles.
> *Decomposição e recomposição do cubo em formas sólidas*:
> a) Decomposição do cubo em oito cubos iguais;
> b) Recomposição do cubo com esses elementos;
> c) Relações de igualdade ou desigualdade entre dois cubos, objetivadas no fato de um deles ser composto de igual ou maior número de cubos iguais;
> d) Decomposição do cubo em maior número deles
> (...)
> Outras formas sólidas poderão ser convenientemente derivadas e apresentadas, pertencendo a esta série (COELHO, 1892, p. 162-163, grifos do autor).

Percebemos que o autor expõe orientações *para* ensinar geometria em que podemos observar a imbricação entre a geometria que deve ser ensinada e o que o professor precisa saber *para* ensinar geometria. Ou seja, a compreensão dessas orientações demanda necessariamente o domínio dos objetos de ensino, o que fica explícito quando Augusto Coelho instrui o professor a apresentar o cubo como uma derivação da esfera e estabelece que isso deve ser feito a partir da inserção de “seis secções convenientemente dirigidas” (COELHO, 1892, p. 162).

As orientações *para* ensinar geometria apresentadas pelo autor, determinam que se deve partir dos sólidos, em particular, da esfera. Assim, também o fez Froebel. Coelho (1892) afirma que Froebel, seguindo o princípio evolutivo do homogêneo para o heterogêneo, indica que se inicie pela esfera, por ela ser o sólido mais homogêneo, uma vez que é composta por uma única superfície, não possuindo ângulos, arestas, bases e tampouco vértices, e desse sólido se passaria ao cubo e dele se chegaria aos demais sólidos geométricos.

No entanto, como mencionamos, Coelho (1892) não segue exatamente essa indicação. Ele se apropria da ideia de Froebel e propõe que desde o mais cedo possível se habitue o aluno à ideia de que os sólidos redondos são o limite dos poliedros. Então, propõe a sistematização do estudo dos sólidos geométricos a partir da derivação paralela dos três sólidos redondos (esfera, cilindro e cone), originando três séries de sólidos poliédricos que o autor considera como fundamentais. Essa é a marcha do ensino exemplificada na lição da 1ª. série, apresentada anteriormente.

Nela, da esfera, Coelho (1892) organiza a derivação do cubo e demais hexágonos. Na segunda série de sólidos, as diretivas do autor orientam o professor a seguir o mesmo raciocínio sugerido na primeira série, sendo o cilindro a forma que dá início ao processo de ensino, o qual deve ser apresentado em uma forma sólida concretizada em madeira, “tendo a superfície redonda de uma só cor e de cor diferentes as superfícies circulares”, com o objetivo de “tornar bem viva a heterogeneidade essencial entre essas duas ordens de superfícies” (COELHO, 1892, p. 163). Aplicando ao cilindro seções “convenientemente dirigidas”, deriva-se dele o prisma, apresentando-o e comparando-o a outro prisma em termos de igualdade e desigualdade, relacionando o prisma aos sólidos já estudados, como também se deve ter feito com o cilindro, operando decomposições em primas triangulares e recomposições do prisma primitivo.

A terceira série de sólidos tem como sólido inicial o cone, o qual, assim como os anteriores, deve ser apresentado por meio de um cone de madeira, sendo que cada espécie de superfície deve ser colorida com uma cor. Nesse processo, “o professor empregará todos os meios para tornar bem viva a forma do cone. Relações de forma entre o cone e as figuras anteriores” (COELHO, 1892, p. 164). Nesta série, o cone é o sólido primitivo do qual se deriva a pirâmide por meio de seções “convenientemente dirigidas”. Analogamente aos sólidos derivados das séries anteriores, a pirâmide deve ser apresentada, comparada com outra pirâmide e com as formas anteriores, e realizada a decomposição e recomposição em pirâmides.

Assim, em se tratando das lições que correspondem às três séries de sólidos, para o início de cada processo de derivação, faz-se necessária a utilização de um material concreto na forma de sólido redondo, e quando se opera a derivação dele em um poliedro, o sólido em si, não mais a coexistência geométrica, passa a ser o concreto no processo de decomposição e recomposição das formas geométricas.

Portanto, para o caso da primeira série, por exemplo, a partir do material concreto representativo da esfera se derivaria o cubo. Chegando-se ao cubo, a compreensão de abstrata da esfera se tornaria concreta. Do cubo, derivar-se-ia o paralelepípedo, e outras formas sólidas possíveis, de modo que, ao se “demonstrar” o paralelepípedo o entendimento de cubo em abstrato já seria considerado como o concreto do qual se deriva o paralelepípedo.

A sistematização organizada por Coelho (1892) para o ensino de geometria, a apresentação pedagógica das formas geométricas considera que se deve partir do concreto para o abstrato. Nesse processo, considerando as ideias de Froebel, como ele mesmo aponta, as faces das formas geométricas concretas deveriam ser de diferentes cores, para que a distinção entre elas se tornasse visualmente evidente, destacando o que é homogêneo do que é heterogêneo.

Assim, a dinâmica das cores dos objetos é elemento fundamental que o professor precisa saber *para* ensinar geometria, considerando as orientações *para* que Augusto Coelho sistematiza no manual em questão, sendo que a esfera deveria ser de uma única cor, por ser um corpo homogêneo formado por uma superfície; o cilindro de cores diferentes, uma para a superfície redonda e cor diferente para as superfícies circulares; assim como o cone com a superfície redonda e a circular de cores diferentes. Dessa maneira, as cores discriminavam os diferentes elementos de um sólido geométrico.

Coelho (1892) indica que o processo pelo qual o aluno primário entrará em contato com as formas geométricas deve partir do empírico e nos períodos imediatos se empregaria o empírico-conceitual, evidenciado o princípio do concreto para o abstrato. Como diz o autor, as formas geométricas concretizadas em sólidos de madeira devem ser o meio pelo qual a instrução do aluno do ensino primário se inicia, mas posteriormente é preciso substituir essas coexistências geométricas pelo desenho das próprias figuras, para assim fazê-lo compreender na forma abstrata os aspectos conceituais.

Ao finalizar o estudo das formas sólidas, Coelho (1892) afirma que “tais são as formas sólidas que nos parece deverem constituir a base da primeira instrução geométrica” (COELHO, 1892, p. 165). Portanto, o autor deixa claro que marcha de ensino deve ter seu início marcado pelas formas sólidas. Destas, segue-se para o ensino das formas superficiais, as quais o autor classifica como abstratos de 1ª ordem, “que, aglomerados de certa maneira, concorrem para constituir formas sólidas; deverão, portanto, derivar-se delas por meio de seções operadas nestas formas e convenientemente dirigidas” (COELHO, 1892, p. 165). Assim, o autor orienta que o professor deve ensinar as formas superficiais como derivadas das sólidas.

Novamente, Coelho (1892) recomenda como indispensável a apresentação das formas por meio de figuras concretizadas em madeira. Como para as formas sólidas não se iniciou o processo de ensino por uma forma aleatória, do mesmo modo se procede para as superficiais. Então, o autor justifica que “se o primeiro poliedro apresentado foi o cubo, claro é que a primeira superfície a oferecer ao aluno será a face do cubo; é, pois, naturalismo e de bom método, iniciar pela apresentação dos quadrados” (COELHO, 1892, p. 165).

A orientação do autor sobre como fazer a derivação do quadrado do cubo aponta que este deve ser seccionado em placas de mínima espessura, “de maneira que as seções sejam paralelas entre si e a duas faces opostas” (COELHO, 1892, p. 165). Com esta prescrição, fica mais uma vez evidente o domínio que o professor que ensina geometria nos primeiros anos escolares precisa ter acerca da *geometria a ensinar*.

Com a derivação do quadrado do cubo, este pode ser decomposto em quadrados. Analogamente aos sólidos, dada a apresentação do quadrado, deve-se estabelecer comparação entre dois quadrados, decompor um quadrado em quadrados menores e recompor o quadrado original. Além disso, Coelho (1892) orienta que seja realizada a combinação de quadrados, combinando dois quadrados em ângulo diedro e três em ângulo sólido, comparando ângulos diedros entre si, como também ângulos sólidos, destacando agudo, retos e obtusos. Com esse processo, notamos uma movimentação para recompor o cubo, mas desta vez estudando-o a partir de elementos de ordem abstrata superior, o quadrado e os ângulos formados por suas combinações.

As orientações seguem justamente prescrevendo a recomposição do cubo por meio de quadrados originados dele, a qual pode operar-se “quer unindo seis quadrados entre si, de modo a formarem o cubo, quer sobrepondo muitos quadrados” (COELHO, 1892, p. 166). Com esse processo, o autor indica que ocorrerá a concretização do cubo, de modo que este pode ser explicado como uma síntese de quadrados, faces, e ângulos diedros e sólidos, poderá ser estabelecida a relação de igualdade entre todas as faces e todos os ângulos de um mesmo cubo.

Conforme Coelho (1892), em todo esse processo, o futuro professor deve observar que “decompusemos o cubo nos abstratos imediatos – os quadrados; analisamos esses abstratos; comparamo-los entre si; recompusemos com eles o cubo, apresentando-o como uma síntese clara e distinta da superfície” (COELHO, 1892, p. 166). Assim, a recomposição apresenta-se como elemento a partir do qual o professor pode indicar propriedades e sinalizar a generalização e compreensão em abstrato dos objetos geométricos. Mas o autor ainda acrescenta: “ao passo que operamos esta decomposição e recomposição no objeto do saber, fomos espontaneamente organizando essas noções geométricas – ideias ou relações gerais, que constituem o próprio saber" (COELHO, 1892, p. 166), o que atribui também à decomposição importante papel no processo de organização das ideias acerca das formas geométricas.

O raciocínio utilizado por Coelho (1892) para sistematizar o ensino do quadrado a partir do cubo, e recompor o cubo a partir de quadrados evidenciando as propriedades possíveis, é o mesmo que segue nas diretivas acerca do ensino das demais formas superficiais, derivando-as de uma sólida e as recompondo. Isso acontece de modo que o retângulo deve ser derivado do paralelogramo retangular, e esse retângulo comparado com outros retângulos, decomposto em retângulos menores e recomposto, comparado com quadrado. E, ainda, estabelecer as combinações entre retângulos formando ângulos diedros e de dois retângulos e um quadrado compondo um ângulo sólido.

Por fim, o autor orienta a recomposição de paralelepípedos a partir de retângulos e quadrados, de modo que passa a ser possível "caracterizar o paralelepípedo por meio das faces componentes e relações entre elas, de modo que para o aluno apareça, agora, transformado numa síntese clara e distinta de superfícies e de ângulos diedros ou sólidos e de faces e bases" (COELHO, 1892, p. 166). Portanto, a síntese revela-se mais uma vez na sistematização de Coelho (1892) como importante elemento do processo de apresentação das propriedades das formas geométricas e da generalização destas.

De modo análogo seguem as orientações para ensinar o triângulo, sendo este derivado da pirâmide, especificamente de suas faces laterais. Seguido da comparação entre triângulos, decomposição em triângulos menores e recomposição, comparação do triângulo com figuras anteriores, combinações de três triângulos para formarem um ângulo sólido e de dois formando um ângulo diedro. Para finalizar o estudo do triângulo, é feita a recomposição de pirâmides triangulares por meio de triângulos, quando o professor pode destacar o "caráter de suas faces (da pirâmide), dos seus diedros, dos seus ângulos sólidos, constituindo tudo, agora, uma síntese objetiva – clara e distinta" (COELHO, 1892, p. 168), o que nos leva a mesma conclusão do parágrafo anterior.

As diretivas que Coelho (1892) apresenta para o ensino de superfícies limitadas por curvas seguem o raciocínio já descrito. O autor orienta que tais superfícies sejam derivadas do cone por meio de seções "convenientemente dirigidas". É dado destaque para apresentação de superfícies circulares e suas relações, indicando a decomposição do círculo em setores, segmentos e comparando com as formas anteriores. Como de costume, finaliza-se com a recomposição, neste caso, de sólidos por meio de círculos e figuras estudadas anteriormente. Assim, Coelho (1892) sugere e orienta que seja realizada a recomposição do cilindro, considerando círculos para as bases e uma superfície cilíndrica, e a recomposição do cone, não apresentando detalhes sobre esta.

Com o estudo das superfícies curvas, que também envolve sólidos, Coelho (1892) finaliza as orientações formativas sobre como proceder para ensinar as formas superficiais. Na sequência, inicia-se o estudo das formas lineares, sendo que "lineares e retas podem ser representadas por pequenas hastes de madeira; as formas curvas sê-lo-ão por fios de ferro polido" (COELHO, 1892, p. 169). Portanto, as orientações do autor que corroboram para a constituição de uma *geometria para ensinar* determinam que a apresentação das formas lineares também seja realizada a partir do uso de materiais concretos.

As linhas retas, orienta Coelho (1892), podem ser ensinadas como derivação de qualquer superfície, "supondo-a seccionada em fitas de pequena largura, por meio de secções paralelas entre si" (COELHO, 1892, p. 170). A apresentação de linhas retas e suas relações orienta que seja realizada a comparação entre duas linhas e da linha com outras formas estudadas anteriormente; a combinação de linhas deve acontecer de modo a dispor linhas retas formando ângulos (agudos, retos e obtusos) e destacando suas posições relativas (perpendiculares, oblíquas ou paralelas).

Como as linhas já são abstratos de segunda ordem, as recomposições decorrentes do seu estudo corroboram para a composição de superfícies e formas sólidas. Para a recomposição de superfícies a partir de linhas, Coelho (1892) orienta que seja realizada a recomposição de triângulos, quadrados, "unindo linhas pelas suas extremidades. Pode apresentar-se esta recomposição, unindo as hastes cilíndricas de madeira por meio de esfera de cortiça" (COELHO, 1892, p. 170), o que evidencia o uso de materiais concretos também no processo de recomposição das formas, quando afirma o "caráter dos elementos lineares que coexistem nas figuras assim formadas: lados dos polígonos, diagonais, ângulos dos polígonos [...] etc., etc." (COELHO, 1892, p. 170). Isto, por sua vez, evidencia que, mesmo que intuitivamente, o professor deve dar destaque, nesse processo, para as propriedades que sustentam as formas superficiais, momento em que a compreensão em abstrato é construída, completando a ordem do concreto para o abstrato.

Na recomposição das formas sólidas por meio de superfícies construídas por linhas, Coelho (1892) orienta para a recomposição do cubo, do paralelepípedo, da pirâmide e de prismas, “unindo hastes de madeira em ordem a constituírem superfícies e associando estas em formas sólidas” (COELHO, 1892, p. 171). Essa sugestão nos remete ao que concluímos no parágrafo acima, de modo que, neste caso, o foco está para a compreensão do “caráter dos elementos lineares que entram na composição das formas sólidas: arestas dos polígonos, diagonais, ângulos retilíneos nas faces ou bases dos polígonos, raios das bases [...]” (COELHO, 1892, p. 171).

Coelho (1892) conclui as orientações das formas lineares retas ressaltando as relações estabelecidas entre as formas abstratas de diferentes ordens no processo destacado: “como é fácil de ver, por meio de linhas ou abstratos de 2ª. ordem recompusemos superfícies ou abstratos de 1ª. ordem e por meio de abstratos de 1ª. ordem reconstruímos as formas sólidas”, as quais passam a ser estudadas, agora, “como uma síntese, clara e definida, de linhas associadas para formarem sólidos [...]” (COELHO, 1892, p. 171). Na lógica interna da geometria, a ordem linha, superfície e sólido é que faz sentido, mas na sistematização do autor essa marcha representa um retorno aos elementos já estudados empiricamente para só então, nessa análise, atribuir propriedades e estabelecer generalizações.

O estudo das linhas curvas finaliza o que é tratado sobre formas lineares. Neste caso, as linhas devem ser apresentadas como derivação de superfícies curvas. “Assim, a circunferência pode derivar-se do círculo, destacando no contorno de uma superfície circular, um anel de ferro que a abrace em redor” (COELHO, 1892, p. 171). Logo, percebemos o quão relevante são os objetos concretos para a apresentação das formas geométricas nas orientações *para* ensinar geometria sistematizadas pelo autor. Como nos casos anteriores, Coelho (1892) indica que seja realizada a comparação entre duas linhas e da linha curva com outras formas; a combinação de duas circunferências (concêntricas, etc.), de circunferências com reta, tais como linhas secantes à circunferência; tangentes, etc. No caso das linhas curvas, a recomposição recomendada pelo autor envolve superfícies limitadas por linhas curvas e sólidos cuja composição conta com superfícies curvas. Assim, os sólidos cuja recomposição deve dar-se a partir do estudo das linhas curvas são o cone e o cilindro.

O estudo dos pontos encerra as orientações *para* ensinar as formas geométricas, a partir do qual será possível recompor as formas já estudadas a partir de recomposições sucessivas. Como nas formas anteriores, Coelho (1892, p. 172) indica que os pontos podem ser representados por objetos concretos, tais como “conchas, esferas de cortiça, etc.”, destacando que “os pontos são abstratos de 3ª. ordem que, associando-se, formam [...] abstratos de 2ª. ordem, que reunindo-se, formam [...], finalmente, abstratos de 1ª ordem, as quais, agregando-se, constituem as formas sólidas” (COELHO, 1892, p. 172), ideia que vinha sendo construída ao longo das orientações que congregam saberes que corroboram para a constituição de uma geometria específica da docência, uma *geometria para ensinar.*

A derivação dos pontos pode ocorrer, segundo orienta Coelho (1892), a partir da seção de “uma haste cilíndrica em pequenas poções destinadas a representarem outros pontos” (COELHO, 1892, p. 172). Assim, reafirma-se que, para introduzir a ideia de ponto, elemento primitivo da geometria euclidiana, o qual tem a maior ordem de abstração, segundo aponta o autor, é possível recorrer a objetos concretos, dos quais se possa depreender o ponto na sua natureza ideal. Augusto Coelho (1892) sugere que o ponto seja comparado com linhas e superfícies, e que pontos sejam combinados de maneira a compor linhas retas ou curvas no plano. Para isso, orienta o autor, “basta dispô-los, sobre um pequeno quadro preto, de várias maneiras, produzindo assim outras figuras planas” (COELHO, 1892, p. 172).

Coelho (1892) também indica que sejam realizadas combinações de pontos de modo a formar linhas retas e curvas no espaço. “Poderemos, neste caso, representar os pontos por pequenas contas de vidro; enfiadas em fios de arame, gerarão as linhas” (COELHO, 1892, p. 173). Para finalizar as combinações de pontos, o autor indica combiná-los para gerarem linhas cuja combinação entre si forme ângulos no plano e no espaço. Assim, percebemos que a ideia de ponto é muito trabalhada nessas atividades, levando o aluno a compreendê-lo e percebê-lo na composição das linhas, tanto no plano quanto no espaço. Mais que isso, Coelho (1892) afirma que “as formas sólidas podem constituir-se por meio de pontos, combinando entre si hastes de arame em que estejam enfiadas pequenas contas de vidro” (COELHO, 1892, p. 172). Logo, percebemos uma forma de voltar do ponto a formas sólidas, em que a racionalização das formas geométricas estudadas é baseada no concreto. “Assim, as formas sólidas virão a recompor-se por meio de seus elementos primitivos, apresentando-se ao aluno como agregado de pontos” (COELHO, 1892, p. 173).

Como podemos observar ao longo das orientações que Augusto Coelho (1892) sistematiza com vistas a proporcionar ao professor um saber específico *para* ensinar geometria, a marcha do concreto para o abstrato é desenvolvida por decomposições e recomposições das formas geométricas, seguindo das formas sólidas para as superficiais, destas para as lineares e destas ao ponto, e quando se chega no estudo deste realizam-se recomposições que atribuem novos significados para as formas já estudadas, evidenciando suas propriedades. Assim, a recomposição de formas geométricas por meio de pontos segue destes para a "recomposição de linhas; recomposição de superfícies por meio de linhas formadas por pontos; recomposição de sólidos, por meio de superfícies constituídas por aqueles elementos" (COELHO, 1892, p. 173). Ademais, o autor aponta que seja indicado o "caráter dos pontos que figuram nas superfícies e sólidos: centro de polígonos; centro de círculos; centro de poliedros; etc." (COELHO, 1892, p. 173).

Essas orientações sistematizadas *para* ensinar as formas geométricas que o autor apresenta de forma tão detalhada, e que acabamos de analisar, são concluídas pela argumentação do autor com o professor em favor da validade de utilização do saber colocado nas lições, ponderando que

> Assim, no que acabamos de dizer, o leitor pode, decerto, notar como é que, na esfera objetiva, uma dada forma concreta se há de decompor nos abstratos que a compõe e estes nos que, por seu turno, se associam para os formar e estes noutros etc. Assim, objeto da ciência geométrica foi apresentado ao aluno por meio de uma longa série de decomposições e recomposições parciais, acabando por se reconstituir em formas as mais concretas como são os sólidos, por meio de formas as mais abstratas como são os pontos (COELHO, 1892, p. 173-174).

Ainda argumentando com o professor em favor das lições que sistematiza para ensinar geometria no curso primário, Coelho (1892) pondera que as lições que tratam as formas geométricas por meio da manipulação, decompondo-as e recompondo-as, permitem a aprendizagem e incorporação de conceitos da geometria, em acordo com as concepções de época. Assim, "a par desta decomposição e recomposição constante do objeto da ciência geométrica, avançou na esfera subjetiva, a organização de noções gerais, quer sejam ideias de objetos, quer relações entre os seus elementos (COELHO, 1892, p. 174). Portanto, os saberes *para* ensinar geometria que integram as orientações sistematizadas por Coelho (1892) empregam a utilização de objetos concretos que corroboram para uma marcha do concreto para o abstrato, das formas geométricas sólidas até o ponto, da noção intuitiva à generalização das propriedades e entendimento da ideia abstrata acerca das formas, operando-se por decomposição e recomposição.

Ao finalizar o estudo das formas geométricas, Coelho (1892) considera “que [o aluno] já conhece de uma maneira elementar uma boa porção de objetos que compõem o objeto geral de que se ocupa a ciência geométrica” (COELHO, 1892, p. 175). Diante disso, o autor indica que devemos passa a considerar estabelecer relações entre os elementos das formas geométricas de maior aplicação prática. Em particular, Coelho (1892) afirma que a ciência geométrica “propõe-se, com efeito, como fim último, *medir* extensões por meio de outras extensões, isto é, determinar certas relações de equivalência entre formas, servindo uma delas de unidade”. (COELHO, 1892, p. 177, grifo do autor). Assim, o autor passa à sistematização de orientações *para* ensinar as relações de equivalência entre as formas geométricas e apresenta diretivas, sob o título de “Apresentação pedagógica, para o ensino de comprimentos, áreas e volumes”.

Para o estudo do comprimento, Coelho (1892) orienta que é preciso considerarmos a unidade linear de medida, o metro, como objeto acessível aos sentidos, e do mesmo modo as extensões lineares que desejemos medir. Para instruir sobre como ensinar a medir as extensões lineares, o autor indica que primeiramente seja apresentada a unidade de comprimento adotada, o metro, e que o aluno determine, na prática, a medida de extensões deste tipo, tais como o comprimento da sala de aula ou da fachada do edifício.

Em seguida, deve-se apresentar aos alunos os submúltiplos do metro linear, e, então, medir extensões lineares cujo comprimento corresponda a submúltiplos do metro, como a carteira e o livro. Após mensurar a extensão linear de objetos presentes aos sentidos, deve-se escrever no quadro os números que representam tais medidas. Dessa forma, destaca Coelho (1892), todo esse processo de ensino é empírico e fácil de executar, ou seja, baseia-se em medidas reais de objetos ali presentes. Essas medidas particulares realizadas nesse processo podem ser fixadas e generalizadas, de forma que o aluno passe a relacionar qualquer extensão linear de natureza das estudadas a certa unidade de medida (COELHO, 1892).

Após o estudo das medidas de extensões lineares, Coelho (1892) indica que passemos às medidas das extensões superficiais, apresentando a unidade de superfície representada em um objeto, trabalhando com os elementos que estejam presentes aos sentidos dos alunos. Assim, os casos de medidas de superfícies que o autor orienta que sejam trabalhados são iniciados pela “apresentação do metro quadrado, mostrando-o representado por uma prancheta de madeira” (COELHO, 1892, p. 179). Diante de tal objeto, passamos à medida dos seus lados usando o metro linear já estudado, e em seguida determinar de forma experimental a “relação que existe entre o número de decímetros e centímetros e milímetros do metro quadrado e o número de decímetros e centímetros e milímetros do metro linear” (COELHO, 1892, p. 179).

Augusto Coelho (1892) destaca que quando, a partir da determinação experimental, o aluno já estiver com a ideia de metro quadrado e seus submúltiplos bem definida na sua mente, o professor poderá propor o seguinte *problema*: “dada uma superfície retangular, no jardim da escola, medi-la *diretamente* por meio do metro quadrado” (COELHO, 1892, p. 179, grifo do autor). Esse medir *diretamente* mostra-se como uma forma de medida empírica em que cada metro quadrado da área do jardim da escola será calculado por essa unidade até que toda a área seja determinada. No entanto, essa estratégia pode mostrar-se insuficiente nesse processo, e caberá ao professor substituir essa medição direta, em que se aplica o metro quadrado sobre a superfície cuja área se quer obter pela relação indireta, ou seja, “mostrar que a medida por meio de tal unidade (quadrado) se obtém – multiplicando o número de vezes que a unidade linear entrar em um dos lados da superfície retangular pelo número de vezes que entra no lado contíguo” (COELHO, 1892, p. 179, grifo do autor)

Assim, Coelho (1892) evidencia que *para* ensinar as medidas das formas lineares é preciso focar em medidas determinadas na prática, recorrendo a objetos reais concretizados sobre diversas formas, mas, que, para além disso, cabe destacar como é possível calcular as medidas, em particular a área, sem precisar medir cada metro quadrado, ou unidade quadrada que o compõe. Logo, ao substituir a medida direta pela indireta, o aluno pode chegar à generalização das medidas de superfície, de modo que entenderá que toda superfície quadrada ou retangular, não apenas a do jardim, pode ser calculada pela multiplicação entre a medida linear de um lado e a medida linear de outro lado que o toca. Portanto, o ensino dessas medidas marcha do concreto para o abstrato.

Após essas explicações de caráter mais geral, Coelho (1892) orienta como prosseguir *para* ensinar a medir superfícies retangulares, triangulares, paralelogramos quaisquer, polígonos regulares, polígonos quaisquer e superfície circular. Em praticamente todos os casos, as diretivas apresentadas pelo autor determinam que sejam calculadas as áreas de superfícies do jardim que possuam essas formas, mas Coelho (1892) também apresenta a determinação de área de certas formas a partir de outras já estabelecidas.

As superfícies retangulares, presentes no jardim, na sala, etc., devem ser medidas indiretamente, já a superfície do triângulo deve ser apresentada a partir da medida da área do retângulo, como sendo metade deste, ou seja, “metade do produto da base pela altura” (COELHO, 1892, p. 180). Ao desenvolver tal ideia, é possível que a medida de superfícies triangulares traçadas no jardim seja calculada, e, também, “medir a superfície lateral da pirâmide quadrada, [...], etc. Será fácil mostrar igualmente qual deve ser a área total da pirâmide” (COELHO, 1892, p. 180).

Sobre as medidas de capacidade, Coelho (1892) afirma que estas, assim como as superficiais, podem ser calculadas direta ou indiretamente, destacando que “a medida direta tem lugar em alguns casos práticos, como, por exemplo, quando se medem pequenas porções de secos ou líquidos, tomando o litro para unidade de medida; em todos os casos, as medidas volumétricas são indiretas” (COELHO, 1892, p. 182). Portanto, as medidas diretas têm por unidade fundamental o litro e seus submúltiplos, e o metro cúbico deve ser apresentado ao aluno, “mostrando-o”, e estes seus submúltiplos são indicados para o cálculo de medidas indiretas de capacidade, como do paralelepípedo retângulo, prismas triangulares retos e outros quaisquer, cilindros, pirâmides, cones e esferas.

Analogamente aos cálculos de áreas, Coelho (1892) orienta que o cálculo do volume das diferentes formas sólidas seja dado com base em outra medida conhecida anteriormente. Para medir o volume do paralelepípedo, o centímetro cúbico deve ser apresentado e o paralelepípedo decomposto em sólidos que meçam um centímetro cúbico. Ao recompor o sólido original, “determinar-se-á facilmente, medindo as arestas, a relação existente entre o número de centímetros cúbicos contidos no paralelepípedo e o produto da base em centímetros quadrados pela altura em centímetros lineares (COELHO, 1892, p. 183).

Assim, pela decomposição em pequenos sólidos de um centímetro cúbico e recomposição do paralelepípedo, Coelho (1892) orienta que se evidencie que o volume de tal sólido é dado pelo produto entre a área da base e a altura. Já a medida do volume do prisma deverá ser apresentada a partir da expressão volumétrica do paralelepípedo, a do cilindro e a dos tetraedros tendo em vista a medida do volume do prisma, das pirâmides em geral a partir do tetraedro, do cone, considerando sua relação com a pirâmide.

Augusto Coelho (1892) destaca que neste processo de estudo das relações de equivalência não se deve adentrar, a princípio, nos múltiplos das unidades determinadas devido ao fato de que a compreensão destes demanda uma ação conceitual do aluno, pois, “para que se tenha [...] ideia nítida do que seja, por exemplo, um quilômetro linear[54] é indispensável [...] a faculdade de construir um agregado de extensões, perfeitamente ideal” (COELHO, 1892, p. 185). Mas, após todo o estudo decorrente das orientações apresentadas, conclui o autor, esses múltiplos devem ser apresentados, sendo que a representação gráfica das figuras deve ser predominante, de modo que “o educando ir-se-á afastando do meio empírico [...] devendo as relações entre as unidades de medida e as diferentes formas da extensão ser-lhe apresentadas sob um ponto de vista conceitual [...]” (COELHO, 1892, p. 185).

Logo adiante nas suas orientações, Coelho (1892) ressalta essa ideia de desprender-se gradativamente do empírico, do concreto, afirmando que “naturalmente, a apresentação das formas geométricas terá, pouco a pouco, abandonado a concretização primitiva – demasiadamente empírica, para adquirir uma forma empírico-conceitual” (COELHO, 1892, p. 186). Então, o ponto de chegada da marcha do concreto para o abstrato começa a ganhar sentido no processo de ensino sugerido pelo autor, de modo que, ao concluir tal processo “em vez de sólidos de madeira e de desenhos de formas, os fenômenos geométricos serão representados no quadro preto pelo processo vulgarmente em uso” (COELHO, 1892, p. 186). Assim, a racionalização dos objetos de ensino acontece gradualmente, sendo que o uso do quadro colabora para a generalização e abstração da geometria estudada.

Portanto, Coelho (1892) sistematiza orientações *para* ensinar as relações de equivalência que recorrem ao conhecido para desenvolver a compreensão do que é desconhecido. Do concreto e das medições experimentais as relações indiretas vão sendo estabelecidas e, quando conhecidas, são utilizadas como referência para introduzir novas noções de medidas geométricas. Portanto, revelam-se saberes *para* ensinar geometria que corroboram para a sistematização de uma *geometria para ensinar* organizada do concreto (objetos materiais) para o abstrato, do conhecido para o desconhecido.

[54] “O que se conclui em relação ao quilômetro linear, é ainda mais verdade para qualquer das outras unidades de medida, quer superfície, quer cúbicas” (COELHO, 1892, p. 185).

A análise da “apresentação pedagógica, na instrução primária, das formas geométricas”, contidas na Seção I, do Capítulo I, do Tomo II de *Manuais de Pedagogia*, sobretudo no estudo das formas geométricas, mostrou-nos um diálogo de Coelho com Froebel. Augusto Coelho intenta, assim, melhor sistematizar um saber como ferramenta a ser utilizada pelo professor, de modo a contemplar aspectos matemáticos e considerar os sólidos geométricos tratados como derivados uns dos outros, bem como aqueles vindos da pedagogia de seu tempo, a vaga pedagógica intuitiva.

A análise do referido manual de Augusto Coelho nos revelou que ele considerava a geometria como uma matéria de ensino estabelecida e consolidada na formação de professores primários, dado o tratamento que o autor emprega à sistematização da “apresentação pedagógica das formas geométricas”, destacando orientações para o ensino de geometria que consideram a que deve ser ensinada como pressuposto.

Assim, observamos que o autor não se alinha à rotina de ensino tradicional, mas elabora uma “apresentação pedagógica das formas geométricas” na qual observamos interdependência entre saberes *a* ensinar e *para* ensinar para a constituição do saber profissional do professor, entre a geometria que deve ser ensinada e saberes *para* ensinar geometria, elemento do saber profissional do professor que ensina matemática.

4.1.4.2 COELHO, José Augusto. Manual Prático de Pedagogia. Porto: Livraria e Editora José Figueirinhas Júnior, [entre 1892 e 1907].[55]

Ao compulsarmos o *Manual Prático de Pedagogia para uso dos professores em geral e em especial dos professores de ensino médio e primário*[56], notamos que não consta na obra sua data de publicação. No entanto, podemos inferir que esta deve estar entre 1892 e 1907, pois no manual *Noções de Pedagogia Elementar*, que data de 1907, Augusto Coelho indica a leitura do *Manual Prático de Pedagogia*, e este, por sua vez, recomenda a leitura de *Princípios de Pedagogia*, de 1892.

A partir da introdução, *Manual Prático de Pedagogia* conta com dois títulos, “Didática Geral” e “Didática Especial”, os quais são divididos em seções, subseções e

---

[55] Uma análise deste manual (FORTALEZA; ROCHA, 2020a) foi publicada no ACERVO – Boletim do Centro de Documentação do GHEMAT-SP, São Paulo.
[56] Reportar-nos-emos a tal manual apenas como *Manual Prático de Pedagogia*.

capítulos. O primeiro título possui três seções, as quais abordam aspectos gerais para formar o professor que associamos a saberes *para* ensinar. A primeira seção trata de objeto de ensino, a segunda e a terceira abordam, respectivamente, métodos e processos de ensino. O título Didática Especial também é dividido em três seções, as quais tratam, nesta ordem, do ensino das ciências nos institutos docentes de caráter geral, do ensino das línguas e do ensino das aplicações técnicas nesses institutos.

Na Subseção II da Seção I, do título Didática Especial, Coelho (s.d.) escreve, acerca do que ele chama de "ciências concretas", sendo as ciências dos agregados as primeiras das quais ele fala, que se ocupam de "tudo quanto se compreende por esta denominação – *agregados reais* ou *ideais*, isto é, as moléculas, os minerais, [...] e, como uma abstração ideal, as formas do espaço" (COELHO, s.d., p. 299, grifo do autor). Nesse momento, ao afirmar que "estes agregados são, é evidente, verdadeiros concretos que podem decompor-se por análise e recompor-se por síntese" (p. 299), notamos elementos dos saberes *para* ensinar geometria que podem compor a estruturação de uma *geometria para ensinar*.

Em se tratando das ciências dos agregados, Coelho (s.d.) as relaciona aos processos de ensino como um campo em que se pode aplicar com facilidade processos empíricos, pois correspondem a realidades tangíveis, "de objetos capazes de influir nos nossos sentidos pelas suas propriedades" (COELHO, s.d., p. 305). Essas são considerações que destacam a mobilização dos sentidos junto à tangibilidade de objetos para a compreensão de suas propriedades em abstrato, as quais podemos considerar como saberes *para* ensinar geometria.

Augusto Coelho (s.d.) organizou, no segundo título de *Manual Prático de Pedagogia*, instruções formativas que apresentavam especificações para o ensino de diferentes matérias escolares, que eram apresentadas de forma a contribuírem para a constituição do saber profissional de qualquer professor. A sistematização referente à geometria está posta pelo autor no manual em questão sob o título "ensino da geometria sistêmica". De início, o autor se dispõe a explicar o objeto da geometria sistêmica, caracterizando-o como "a *extensão* em abstrato, isto é, a própria extensão dos seres, reais e resistentes, considerada em toda a sua pureza ideal (COELHO, s.d., p. 305-306, grifo do autor). O autor não explica o que seria "toda a sua pureza ideal", mas podemos entender que seja a totalidade das propriedades inerentes à extensão em abstrato.

Em termos didáticos, a extensão em abstrato consiste em um objeto ideal que deverá ser compreendido e que, nas palavras do autor, há de aparecer à inteligência do aluno, há de ter sua compreensão construída na mente do aluno, partindo de forma gradual das próprias formas concretas e reais, dos sólidos geométricos. Com isso, o autor já indica que o ensino de geometria deve acontecer a partir das formas cuja extensão real representa o "palpável". Então, completa que essa é a justificativa para "a prática pedagógica de iniciar, nas escolas infantis, a apresentação das formas geométricas puras pela apresentação dessas formas concretizadas em sólidos" (COELHO, s.d., p. 306). Percebemos, aqui, que o emprego de objetos tangíveis e a ideia de iniciar pelos sólidos são elementos que corroboram para a caracterização de uma *geometria para ensinar*.

Essa característica que mobiliza as formas geométricas concretizadas em sólidos para dar início à graduação do ensino de geometria são referendadas pelo autor no sistema froebeliano. Assim, podemos perceber que Coelho (s.d.) sugere lançar mão de pressupostos teóricos vindos de Froebel[57] e transforma-os em procedimentos didáticos que se caracterizam como ferramenta do trabalho do professor *para* ensinar geometria.

Coelho (s.d.) defende que o mundo da extensão seja limitado de acordo com o objeto geral de ensino a ser tratado, "pois que a extensão em *abstrato* não é propriamente um elemento componente desse objeto, mas um elemento dele derivado por via da abstração operada nos seus elementos reais" (COELHO, s.d., p. 306, grifo do autor). Com isso, percebemos o cuidado necessário para que não se confunda o objeto real utilizado no ensino com a abstração decorrente dele, o que mostra o quão necessário é o domínio da geometria que deve ser ensinada, haja vista que, nesse processo, o professor deve conhecer a geometria que vai ensinar em um nível que o permita não limitá-la ao estudo operado em elementos reais, e, ainda, que o permita enxergar que a extensão em abstrato é uma construção ideal, que não está posta, mas que pode ser depreendida de tais elementos.

[57] Reforçamos que "o que interessa a Fröbel é sempre a mediação, a integração, a revelação recíproca do eu e do objeto, da criança e do brinquedo, do aluno e da matéria ensinada, visando apreender o vínculo que os fundamenta reciprocamente: não há sujeito sem objeto, não há realidade externa se o homem não está lá para estruturá-la" (HEILAND, 2010, p. 21). Assim, modelo educativo de Froebel forma a criança "[...] por meio de um contato ativo com as formas elementares que revelam e simbolizam a "generalidade" dos objetos em questão" (HEILAND, 2010, p. 33).

Ainda sobre a ideia de limitar o estudo da extensão conforme o objeto de ensino, o autor afirma que “uma primeira limitação circunscreverá o objeto de geometria a apresentar ao aluno – ao da geometria *métrica*; por outro lado, o da *planimetria* irá apenas até ao estudo das seções cônicas e o da *estereometria* até ao das formas sólidas àquelas correlativas” (COELHO, s.d., p. 306, grifos do autor). O autor ainda complementa afirmando que “dado o caráter do objeto de ensino a ministrar ao aluno nos institutos docentes de caráter geral [...] só temos, é evidente, a considerar a geometria métrica” (COELHO, s.d., p. 308-309).

Essas considerações sobre a limitação da geometria a ser tomada como objeto de ensino, que envolve as formas geométricas planas e espaciais e suas respectivas medidas, reiteram que o saber profissional do professor para ensinar geometria constitui-se, também, necessariamente, do domínio que deve ser ensinada, pois, enquanto o autor trata de diretivas que formam o professor especificamente para a prática de ensinar geometria, também se preocupa em estabelecer conexão com a geometria que deve ser ensinada.

Tendo limitado o objeto geral do ensino da geometria na formação do professor dos primeiros anos escolares, Coelho (s.d., p. 307) apresenta como as formas geométricas se decompõem: “1°- As formas sólidas – em superficiais; 2° - As superficiais – em linhas; 3° - As linhas em pontos”. Essa decomposição não é explicada pelo autor como ordem metódica, como ele explicita mais adiante, mas é elemento constituinte do saber profissional do professor, haja vista que será mobilizada por este para a promoção do ensino de geometria.

Dada a compreensão desse processo, Coelho (s.d., p. 307) enfatiza que “cada um desses abstratos principais pode, agora, decompor-se em novos elementos; e assim: os sólidos decompõem-se em ângulos diedros, em ângulos sólidos, etc; as superfícies, quando limitadas, nas linhas limitantes, em ângulos diedros”. Logo, o autor esclarece mais ainda sobre como pode dar-se a decomposição após ter conhecimento do todo (das formas sólidas aos pontos), que pode decompor um cubo em quadrados, por exemplo, explicando ângulos sólidos, diedros, os quais são formados pelo mínimo de três e duas faces adjacentes, respectivamente.

Ao tratar especificamente da ordem metódica dos elementos da geometria, o autor a divide em duas fases. Vale destacar que essas fases não se referem a uma aula ou ao ensino de um conteúdo geométrico específico, e sim ordenam todo o conteúdo da matéria. Na primeira delas, a orientação é para “operar-se, *avançando* *do concreto para o abstrato por via de decomposição e recomposições sucessivas* das formas geométricas” (COELHO, s.d., p. 310, grifo nosso). O autor anuncia que devemos apresentar aos alunos o seguinte:

> 1.° As formas da extensão em si e, neste caso –
> a) As formas sólidas, como são: o cilindro, a esfera, o cone, etc.;
> b) As formas superficiais, como são: o quadrado, o triângulo, etc.;
> c) As formas lineares;
> d) Os pontos (COELHO, s.d., p. 310).

A indicação de seguir do concreto para o abstrato, numa marcha analítica dos objetos geométricos, apresenta-se em dois sentidos. Um, refere-se à utilização de objetos tangíveis, concretos, até que se chegue à conceituação, e o outro, à seriação estabelecida pela ordem de abstração dos elementos geométricos. Conforme Coelho (1892), o professor deve iniciar o aprendizado geométrico pelas formas sólidas “por serem as mais concretas” (COELHO, 1892, p. 162). Assim, o processo de análise que leva do todo para as partes, segundo a visão de Coelho (s.d.), é uma forma de seguir do concreto para o abstrato, já que o autor considera as formas sólidas as mais concretas, as planas como abstratos de primeira ordem, as lineares de segunda e o ponto como abstrato de terceira ordem (COELHO, 1892).

Logo, a decomposição media a passagem do concreto (formas sólidas e objetos tangíveis) para o abstrato (ponto, quando também se recorre a objetos tangíveis) de toda a geometria que compõe a matéria de ensino, e também de cada elemento individualmente; e a recomposição vai mediando gradualmente a passagem do abstrato (ponto) ao concreto (formas sólidas) à medida que cada elemento que vai sendo estudado naquele processo colabora para a compreensão do anterior em abstrato, agora entendido como a compreensão sistematizada das formas dada pela generalização das propriedades evidenciadas no processo.

Isso significa que, nesse momento da primeira fase, enquanto está indo das formas espaciais ao ponto, do concreto ao abstrato, para cada objeto de ensino também se está seguindo do abstrato ao concreto, pois a cada forma que se decompõe, ao recompô-la já é agregada à sua compreensão elementos abstratos de outra ordem, cujo conhecimento já foi dado. Ao decompor o cubo, por exemplo, estudar o quadrado a partir dele e em seguida recompô-lo, suas propriedades já podem começar a ser observadas, ele já pode ser entendido como uma composição de quadrados congruentes.

Como apresentado, as primeiras formas geométricas a serem ensinadas deveriam ser aquelas que possuem objeto representativo tangível, isto é, os sólidos. Assim, a marcha de ensino acontece do concreto para o abstrato, quando são realizadas decomposições e recomposições, a partir das quais a compreensão das propriedades abstratas vai sendo gradativamente construída. Para o segundo momento da primeira fase, o autor destaca as relações de equivalência entre as formas geométricas. Relações entre: linhas e a unidade linear; superfícies e a sua respectiva unidade, as áreas; capacidade e sua unidade, os volumes, indicando que o ensino de tais equivalências inclui praticamente todo o sistema métrico decimal. Nesse momento, percebemos um movimento do abstrato ao concreto em relação à ordem de abstração das medidas das figuras geométricas.

Na segunda fase da ordem metódica dos elementos da geometria, “se deve descer do abstrato para o concreto operando como que uma decomposição geral do objeto da ciência” (COELHO, s.d., p. 311). Com isso, percebemos que o autor propõe que o ensino se dê em um primeiro momento do concreto para o abstrato, mas que desse abstrato se volte ao concreto. Tem-se, então, que, para se compreender a geometria (*a ensinar*) como um todo, é preciso avançar no sentido concreto-abstrato-concreto, em que este último concreto seria a concretização da compreensão sistematizada da geometria. Segundo o autor, nessa ida do abstrato ao concreto “será então apresentada a geometria métrica *verdadeiramente sistematizada* como ciência já constituída” (COELHO, s.d., p. 311, grifo do autor).

Essas orientações congregam saberes *para* ensinar geometria que demonstram que as decomposições dos objetos tangíveis podem levar do concreto ao abstrato, que se concretiza à medida que o objeto for compreendido, e as recomposições possibilitem ir do abstrato ao concreto, compreendido agora por meio das propriedades abstratas.

De acordo com Coelho (s.d.), as formas geométricas têm que ser analisadas somente sob os seguintes aspectos: “1°. Num dado momento da sua existência, isto é, como formas *realizadas*, considerando – a) Os *elementos* constitutivos desses formas; b) A *associação* desses elementos em ordem a constituí-las” (COELHO, s.d., p. 307, grifos do autor). Assim, podemos perceber que a análise desse aspecto pode ser viabilizada pelo processo de decomposição e recomposição dos objetos geométricos ao longo do processo de ensino, o qual avança de acordo com a ordem crescente de abstração das formas apresentadas pelo autor. Esse processo depois segue a marcha decrescente, sendo que, a partir do estudo do cubo, por exemplo, é possível despertar o entendimento dessa forma e, ao decompô-la, destacar os elementos que a compõem, e, ao recompô-la, associar tais elementos destacando que o ponto compõe as linhas, estas, as formas planas e estas, as espaciais.

O segundo aspecto a ser analisado consiste "nas variações por que podem passar essas formas, supondo-as geradas pelo movimento de um ponto ou de uma linha ou de uma superfície, deslocando-se no espaço" (COELHO, s.d., p. 307). Nesse sentido, se movimentarmos uma linha das quatro de mesma medida que formam quatro ângulos congruentes e limitam um quadrado, este não terá mais tal forma. Assim, a análise dessas variações pode ficar mais evidente no processo de recomposição das formas geométricas, quando já se conhece os abstratos de todas as ordens, indo do abstrato ao concreto, compreendido então a partir da recomposição de formas abstratas de ordem superior.

Ao passar do abstrato ao concreto, e apresentar a geometria como ciência constituída, o autor afirma que, assim, ofereceremos ao aluno "as experiências empíricas primitivas, destinadas a servir de pondo de partida à geometria" (COELHO, s.d., p. 311). Sobre as propriedades primitivas, o autor afirma que estas são em número muito restrito, que são "destinadas a caracterizar propriedades evidentes, alguns princípios incontestáveis acerca da sobreposição de retas ou planos [...]. Essas propriedades são verdadeiramente *empíricas*", isto é, são noções primitivas que não possuem definição específica, mas que são o ponto de partida para a construção dos conhecimentos referentes à geometria (COELHO, s.d., p. 309, grifo do autor). Essas experiências empíricas primitivas podem ser construídas principalmente no processo de recomposição das formas, quando o marco de partida é o ponto.

As outras propriedades sobre as quais se passará a ter conhecimento quando for apresentada a geometria sistematizada, são as propriedades derivadas, as quais "constituem a quase totalidade da ciência, são extraídas daquelas [as primitivas] pela força do raciocínio". Trata-se de propriedades aceitas como verdadeiras ou demonstráveis (COELHO, s.d., p. 309-310). Essas propriedades devem ser consideradas: "a) Acerca das formas *isoladas*, passando das linhas às superfícies e das superfícies aos sólidos", o que pode ser percebido na recomposição das formas: da linha ao quadrado e deste ao cubo, por exemplo; e, também, "b) Acerca das formas *comparadas*, sob os pontos de vista de igualdade, semelhança, equivalência e simetria” (COELHO, s.d., p. 311, grifos do autor). Então, conhecidas as propriedades primitivas e derivadas, as formas isoladas e comparadas, certamente se desencadeará a generalização das propriedades das formas estudadas, chegando a sua compreensão em abstrato.

Sobre os processos educativos, considerando as duas fases da ordenação metódica que destacamos, o autor afirma que, “na primeira fase, a apresentação por meio dos sólidos froebelianos está naturalmente indicada; na segunda, está a apresentação por meio de figuras traçadas no quadro” (COELHO, s.d., p. 311). Então, na primeira fase, as formas tangíveis auxiliam no avanço do concreto ao abstrato, das formas sólidas ao ponto; enquanto na segunda, parte-se do abstrato ao concreto por meio da recomposição gráfica das formas, de maneira a concretizar a compreensão dos aspectos abstratos que sistematizam a geometria enquanto ciência já constituída.

De outra parte, a função educativa do estudo de geometria “apura admiravelmente, no aluno, poder de *abstração e dedução*” (COELHO, s.d., p. 311, grifo do autor). Desse modo, o autor justifica o ensino da geometria destacando que a sua compreensão viabiliza a sua capacidade de abstração e dedução em relação aos saberes de outras áreas.

Na análise do “ensino da geometria sistêmica”, percebemos que Coelho (s.d.) evidenciou sua filiação a Froebel, particularmente no que se refere à utilização de formas geométricas concretas como ponto de partida para o ensino de geometria nas escolas infantis, para que se pudesse desprender o abstrato do concreto, gradualmente. Assim, observamos que Augusto Coelho (s.d.) contempla, na constituição do saber profissional do professor que ensina matemática, aspectos da pedagogia contemporânea a ele, os quais remetem ao método intuitivo.

O autor sistematiza um saber voltado para o ofício do professor em que a marcha do concreto para o abstrato instrui não apenas a utilizar objetos concretos, mas também a graduar o ensino de acordo com a maneira como as formas geométricas se decompõem, indo das formas sólidas ao ponto, decompondo-as e recompondo-as sucessivamente. No entanto, essas características remetem apenas a uma fase da ordenação metódica proposta pelo autor. Há uma segunda fase em que se deve partir do abstrato ao concreto, o que pode ser caracterizado como o momento de concretização do abstrato.

Portanto, as orientações *para* ensinar geometria sistematizadas por Augusto Coelho (s.d.) estão pautadas, em um primeiro momento, na utilização dos sólidos concretos que viabilizem o avanço do concreto para o abstrato, por meio de decomposição e recomposição, a qual vai possibilitando, nesse processo, uma volta gradual do abstrato ao concreto para cada forma geométrica, à medida que os objetos geométricos vão aumentando a ordem de abstração.

No segundo momento, considerando a geometria como “ciência construída”, passa-se do abstrato ao concreto, não mais por meio dos sólidos froebelianos, mas desenvolvendo figuras no quadro, o que faz com que esse concreto final seja caracterizado como a compreensão da geometria sistematizada. Nesse ponto, a geometria específica da formação do professor orienta-o para, nesse processo, conduzir os alunos a, por si só, analisarem as formas geométricas num dado momento de sua existência, considerando os elementos que as compõem e a associação destes na constituição dessas formas, além das variações pelas quais tais formas podem passar.

O autor demonstrou que elaboração de orientações *para* ensinar geometria requer geometria que deve ser ensinada como pressuposto. Percebemos, também, que a obra de Coelho (s.d.) se alinha à perspectiva pedagógica de sua época que considerava que saber apenas os conteúdos não era mais suficiente para ensinar. Mais que apresentar princípios de ordem teórica, Augusto Coelho (s.d.) sistematiza tais princípios no *Manual Prático de Pedagogia* segundo os conteúdos de ensino, evidenciando que a modernização pedagógica os requeria como mutuamente dependentes na constituição do saber profissional do professor.

4.1.4.3 COELHO, José Augusto. Noções de pedagogia elementar. Lisboa: Livraria Moderna, 1907.[58]

O manual *Noções de Pedagogia Elementar* é estruturado em três partes, as quais estão divididas em seções e subdivididas em capítulos. A primeira parte trata de aspectos gerias referentes à escola, tais como sua instalação, meios de instrução, agentes de ensino e alunos. Quando fala acerca dos meios de instrução, o autor

[58] Um artigo de nossa autoria (FORTALEZA; ROCHA, [2020]) com a análise preliminar deste manual, sua comparação com as realizadas dos demais manuais de Augusto Coelho e o ensaio da sistematização de uma *geometria para ensinar* deste autor, foi aceito para publicação na Revista Ensino em Re-Vista para ser publicado ano de 2021.

afirma que o ensino de geometria deve contar com “coleção geral das formas geométricas elementares” (COELHO, 1907, p. 26), o que nos leva a entender que o uso de objetos representativos deveria compor o arcabouço didático que a formação do professor que ensinava geometria lhe proporcionava. No capítulo III da seção II, Augusto Coelho (1907) apresenta saberes que orientam o processor sobre diversas possibilidades de ensino, são saberes *para* ensinar referentes a métodos, processos e formas de ensino, quando fala dos métodos analítico e sintético, e do processo empírico, que corresponde ao método intuitivo.

A Parte II de *Noções de Pedagogia Elementar* trata das metodologias e processologias especiais, em que o autor direciona as ferramentas atribuídas ao trabalho pedagógico do professor, as quais correspondem aos saberes *para* ensinar, relativos ao ensino das diferentes matérias escolares. A primeira subseção da Seção I da Parte II aborda a metodologia e processologia das ciências teóricas, em que Augusto Coelho (1907) sistematiza orientações particulares *para* ensinar geometria, aritmética, zoologia, botânica, minerologia, cosmologia, química, astronomia, física e sociologia. A segunda subseção apresenta diretivas para o ensino do que o autor chama de ciências de aplicações e operações técnicas, na qual está inserida a metodologia e processologia especiais do desenho, da escrita e da leitura. A Parte III do referido manual aborda a educação em geral e especial, abordando a educação nos aspectos físico, intelectual, moral e estético; e a evolução geral das ideias educativas, envolvendo as idades hindu-semítica, greco-italiota e latino-germânica.

Augusto Coelho (1907) insere a geometria no campo das ciências teóricas, no Capítulo I da Subseção I, pois em seu objeto predominam principalmente elementos teóricos. Essa rubrica matemática é definida pelo autor como “a ciência das *formas da extensão* e suas relações” (COELHO, 1907, p. 81, grifo do autor). Então, estes são os objetos matemáticos que compõem as orientações *para* ensinar geometria elaboradas pelo autor para compor a formação dos professores para ensinarem matemática dos primeiros anos escolares.

O processo de ensino que o autor emprega na sistematização das orientações *para* ensinar geometria é o empírico e real, o qual está associado ao ensino intuitivo. Desse modo, as formas geométricas devem ter sua abstração caracterizada em “porções de matéria” que representem a forma abstrata, “tornando-as assim de alguma maneira tangíveis e reais” (COELHO, 1907, p. 84). Para a concretização desse processo, o autor indica o uso do material froebeliano ou de outros objetos que tenham sido adaptados para esse objetivo.

A marcha que rege a ordenação da geometria nas orientações *para* ensinar geometria que Coelho (1907) sistematiza é perfeitamente pedagógica. Isso significa que não é em torno da lógica puramente matemática que esse saber deve ser apresentado aos alunos. O que precisa ser considerado é a ordem que faz sentido para o entendimento deles. Assim, o autor orienta começar pelas formas e, somente depois abordar suas relações.

No que se refere ao ensino das formas, “serão, em primeiro lugar, apresentadas ao aluno as *sólidas*, depois as *superficiais*, depois as *lineares*, e por último, os *pontos*, avançando-se assim do *concreto para o abstrato*” (COELHO, 1907, p. 84-85, grifos do autor). Logo, percebemos que a utilização dos materiais froebelianos, a exemplo, é processo que introduz as noções geométricas espaciais aos sentidos dos alunos. A compreensão dos sólidos inicia-se pelo uso do objeto tangível, mas este é apenas o real que representa o ideal, isto é, o entendimento dos sólidos em abstrato. Então, o avanço do concreto ao abstrato se dá tanto nas formas da extensão como um todo, indo do espaço ao ponto, quanto no estudo das formas individuais, como as sólidas.

Notamos que na marcha em que Coelho (1907) dispõe as formas geométricas, as sólidas, primeiras a serem ensinadas, devem ser apresentadas por meio do uso de objetos concretos, e a compreensão das formas superficiais demanda o conhecimento das sólidas, as lineares, o das superficiais e os pontos, o das lineares. Assim, o entendimento de uma forma vai sendo desencadeado a partir da compreensão em abstrato da forma estudada anteriormente.

Quanto às relações de equivalência entre as formas, tem-se as relações entre as lineares como as indicadas para iniciar a ordem metódica. Depois, a relações entre as superficiais, e, finalizando, entre as sólidas e entre os volumes, evidenciando, assim, uma marcha do abstrato ao concreto. “Assim, o aluno, em toda a geometria, passará primeiro do concreto para o abstrato e depois do abstrato para o concreto” (COELHO, 1907, p. 85).

Para orientar o professor de maneira mais detalhada sobre como apresentar as formas da extensão, Augusto Coelho (1907) organizou em séries os procedimentos, deixando claro que a ordem a seguir deve ser respeitada. Já sabemos que o ensino da geometria, segundo o autor, inicia-se pelas formas espaciais. Dentre estas, a primeira a ser tratada na I série de sólidos é a esfera, a qual deve ser mostrada ao aluno delineada em madeira e de uma só cor, “devendo a criança executar com ela vários jogos infantis” (COELHO, 1907, p. 85). O uso da única cor poderá ressaltar aos alunos que a esfera possui uma única superfície. Assim, a dinâmica do uso de cores nas formas é saber *para* ensinar geometria que integra as orientações sistematizadas por Coelho (1907).

O cubo precisa ser ensinado como derivação da esfera. A composição deste deve ser feita a partir da inserção de “seis seções convenientemente dirigidas” (COELHO, 1907, p. 85), as quais só podem ser feitas corretamente por quem tem conhecimento sobre as propriedades do cubo, o que mostra a importância do domínio da geometria que deve ser ensinada para que se compreenda a constituição das orientações propostas pelo autor. Este objeto geométrico será, pela sistematização de Coelho (1907), mostrado ao aluno como um todo, comparado com outro em relação de igualdade e desigualdade, decomposto em cubos menores e reposto novamente, quando as operações de análise e síntese ficam, respectivamente, evidentes.

A última forma ensinada na I série de sólidos catalogada por Augusto Coelho é o paralelepípedo retangular, “o qual será gerado do cubo, decompondo-o em sólidos por meio de três divisões horizontais e uma vertical, convenientemente dirigida” (COELHO, 1907, p. 86). A apresentação deste paralelepípedo dar-se-á de modo análogo ao do cubo: mostrado primeiramente como um todo concreto, em seguida comparado com o cubo. Sua decomposição inclui cubos e paralelepípedos e por fim o sólido primitivo será recomposto.

O cilindro é a forma geométrica sólida que inicia a II série de sólidos. Dele, o prisma deve ser derivado, segundo Coelho (1907). Diferentes prismas são apresentados, de forma que, no processo de decomposição, um prisma hexagonal, a exemplo, pode ser transformado em prismas triangulares. Como nos casos anteriores, finaliza-se a apresentação com a recomposição do prisma do qual se fez derivar os demais.

A III série compreende dois sólidos: o cone e a pirâmide, sendo o primeiro o objeto primitivo, cuja apresentação ocorre, de acordo com o que indica Coelho (1907), “por meio de um cone de madeira, empregando a professora todos os meios para a criança lhe fixar a forma” (COELHO, 1907, p. 87). Assim, o objeto representativo do cone propicia ao aluno conhecer os elementos constitutivos deste, o que facilita que posteriormente ela depreenda as propriedades em abstrato desse concreto que lhe foi apresentado.

A pirâmide é apresentada como uma derivação do cone, sendo isto feito por meio da orientação que se repete para esse processo: “seções convenientemente dirigidas”. Isso ressalta a importância do domínio da geometria que deve ser ensinada para que o saber profissional do professor seja consistente, de modo a evidenciar que, assim como para ser professor de matemática não é suficiente ter conhecimento sobre a disciplina, também não é suficiente dominar saberes *para* ensinar sem ter propriedade sobre a matemática que pode ser mobilizada a partir deles.

A apresentação da pirâmide segue raciocínio análogo ao dos sólidos anteriormente mencionados. O aluno deve conhecê-la primeiramente como um todo, sem ainda discutir as suas classificações. Pirâmides da mesma espécie são comparadas, na proposição de Coelho (1907), segundo as relações de igualdade e desigualdade. Em seguida, a comparação se dá entre a pirâmide e os demais sólidos já apresentados.

Então, passa-se à decomposição, cujas espécies, embora não se tenha insistido, devem ser de pirâmide de qualquer tipo em triangulares. Finalizando a terceira série de sólidos, realiza-se a recomposição deste objeto geométrico de ensino. Encerra-se, assim, o ensino dos sólidos, que, em três séries, deve ter cada uma um sólido de referência apresentado por meio de objetos tangíveis, a partir dos quais derivam-se outros por meio das seções convenientemente dirigidas.

O estudo da pirâmide é seguido das formas superficiais, as quais seguem uma ordem de abstração imediatamente superior. As superfícies geométricas devem ser “concretizadas em pequenas superfícies de madeira – variadamente coloridas, como as usadas no sistema de Fröebel” (COELHO, 1907, p. 87). Desse modo, novamente notamos a filiação de Augusto Coelho a Froebel ao sistematizar a geometria como ferramenta de trabalho do professor, destacando os objetos de Froebel como elementos constituintes do saber profissional do professor *para* ensinar geometria.

Outro desses elementos que se destaca também na definição do que o professor deve saber *para* ensinar as formas superficiais é a ordem. Coelho (1907) deixa claro que a marcha a ser seguida deve ser: quadrado, retângulo, triângulo e polígonos em geral, de forma que estes últimos sejam entendidos como derivações de formas sólidas já estudadas.

Realizando seções dirigidas no cubo, o quadrado será apresentado como sendo derivado daquele, como um abstrato do cubo. Diferentes quadrados devem ser associados de maneira que novos concretos sejam formados a partir deles, quando é oportuno apresentar aos alunos a formação dos ângulos diedros, sólidos e as relações entre os elementos que os constituem. Como afirma Coelho (1907), sendo o quadrado apresentado como um abstrato do cubo, “passará o aluno a *recompor*, por meio de quadrados, o cubo e, transformando-se assim numa *síntese clara e definida*, será caracterizado pelo lado das faces, dos ângulos diedros, dos ângulos sólidos, etc., etc.” (COELHO, 1907, p. 88, grifos do autor).

Nas orientações de Coelho (1907), a derivação do retângulo deve ter como sólido primitivo o paralelepípedo. Sua apresentação, seguindo o raciocínio já mencionado para o caso do quadrado, deve destacá-lo como elemento que compõe o paralelepípedo, de modo a destacar os ângulos como combinações de retângulos. Por fim, esses agrupamentos devem recompor o sólido primitivo.

A pirâmide é a forma sólida que deve dar origem ao triângulo. A apresentação deste deve contar com a comparação de diferentes triângulos em termos de igualdade ou desigualdade, assim como com as figuras já apresentadas. A combinação entre triângulos deve ser realizada, de modo a formar ângulos diedros ou triedros. “Em seguida, passar-se-á a caracterizar nos sólidos, já estudados, as superfícies triangulares, isto é, as faces das pirâmides, os seus diedros, os seus ângulos sólidos, etc., etc.” (COELHO, 1907, p. 88). Os polígonos em geral terão vários polígonos regulares como primitivo, seguindo a mesma lógica de apresentação já descrita para os demais casos das formas superficiais.

Nesses processos que compõem a formação do professor acerca do ensino destas formas – quadrado, retângulo, triângulos e polígonos em geral –, percebemos que a decomposição e a recomposição são elementos do saber profissional do professor *para* ensinar geometria que viabilizam, respectivamente, a ida do concreto (sólido tangível) ao abstrato (superfície) e do abstrato (superfície) ao concreto (o sólido como objeto geométrico), quando é possível perceber a apresentação de propriedades referentes ao quadrado, como por exemplo a implicação dos ângulos diedros e das faces para sua composição.

O elemento ordem é novamente destacado ao iniciar a sistematização das orientações *para* ensinar as formas lineares, as quais seguem as superficiais e são imediatamente abstratas a estas, afirma Coelho (1907). A apresentação das formas lineares pode ser feita com o auxílio de “hastes de madeira – quando retas, e por fios de ferro – quando curvas” (COELHO, 1907, p. 89).

As primeiras a serem estudas, segundo Coelho (1907), devem ser as linhas retas, sendo apresentadas como derivadas de uma forma superficial da qual elas sejam denotadas como seus componentes abstratos. A comparação com as demais formas já estudadas também deve ser feita, mas há uma novidade nesse processo em relação aos anteriores, o uso da lousa. Nesta, será viável observar combinações entre as linhas retas de forma a caracterizar os ângulos que essas combinações podem formar, as situações de paralelismo, perpendicularidade, etc.

Após esse processo, recomposições sucessivas são sistematizadas por Coelho (1907). As superfícies deverão ser recompostas a partir da justaposição de linhas, as quais serão destacadas como "elementos lineares dessa superfície, tais como – lados dos polígonos, diagonais, [...]" (COELHO, 1907, p. 89). Após as linhas serem justapostas e comporem formas superficiais, as quais já passam a ter suas propriedades evidenciadas, "*recompor-se-ão formas sólidas* à custa das superficiais e naquelas serão caracterizadas as arestas, diagonais, ângulos retilíneos, ângulos sólidos, etc., etc." (COELHO, 1907, p. 89, grifo do autor). No que se refere às orientações para o ensino das linhas curvas, serão realizadas operações análogas às anteriores, podendo ser derivadas de superfícies curvas, tais como a base do cone circular.

A última "forma" geométrica para a qual Coelho (1907) sistematiza orientações para a formação do professor é o ponto, a mais abstrata de todas, abstrata de terceira ordem. Este deverá ser representado "por objetos, como conchas, esferas de cortiça, etc." (COELHO, 1907, p. 90). O processo para ensiná-los instrui que os pontos podem ser derivados da linha a partir de seções em pequenas porções. Alinhando estas em série, a linha pode ser recomposta, "com estas as superfícies, com estas os sólidos – caracterizando nas linhas, superfícies e sólidos, os pontos geométricos notáveis, como são os vértices dos ângulos [...]" (COELHO, 1907, p. 90).

Assim, na sistematização de orientações *para* ensinar geometria que envolvem das superfícies lineares ao ponto, torna-se ainda mais perceptível que, *para* ensinar geometria, o professor deve ter em conta que a aprendizagem de uma nova forma geométrica pode atribuir consistência à compreensão das anteriores enquanto objetos geométricos, sendo possível averiguar as propriedades de cada um.

As formas sólidas são apresentadas a partir de objetos concretos, as superficiais são derivadas destas e, ao serem recompostas, novos significados são atribuídos às sólidas, quando é possível fazer notar que o cubo tem faces e ângulos diedros e triedros, por exemplo. Quando as linhas são depreendidas de formas superficiais, elas são justapostas de forma a recompor a primitiva, e esta ganha novos sentidos, como a compreensão de que ela possui lados e ângulos retilíneos. E o estudo dos pontos leva-os a também recomporem-se formando-se linhas, as quais formam superfícies e sólidos, as quais, por seu turno, têm novas propriedades evidenciadas.

Assim, ao retornar ao cubo, por exemplo, este pode ser notado como uma forma sólida formada por faces, ângulos, arestas e vértices. Isso evidencia novamente a importância do processo de decomposição e recomposição, da ida do concreto ao abstrato e do abstrato ao concreto como elementos que o professor deve saber *para* ensinar geometria, segundo o que orienta Coelho (1907).

Quanto à sistematização da apresentação das relações de equivalência entre as formas da extensão, as quais o autor afirma serem as mais úteis na prática, deve-se dispor os elementos constitutivos de tais relações do abstrato ao concreto, haja vista que, segundo Coelho (1907), ao estudar o ponto, já se tem ideia do abstrato e essa volta deste ao concreto "completa [...] o ciclo natural na ordem de equivalência metal" (COELHO, 1907, p. 85).

Essa marcha indica ao professor que o estudo das referidas relações deve iniciar-se pelos comprimentos, seguidos das áreas e estas do volume. As orientações para o ensino dos comprimentos designam que estes sejam apresentados a partir do metro linear e de seus submúltiplos, e estes devem ser aplicados diante do aluno na medição de "diversas extensões, como o comprimento e largura da sala de aula, do jardim, etc." (COELHO, 1907, p. 90).

Feito isso, segue-se para as orientações *para* ensinar área, desenvolvendo o mesmo raciocínio descrito anteriormente: deverá apresentar os múltiplos e submúltiplos do metro quadrado, relação entre estes e as medidas de comprimento, seguido da medição da área de objetos retangulares, como a mesa do professor, de modo a destacar que esta área se dá pela multiplicação entre a base e altura. Para além do cálculo da área de objetos como o mencionado, o professor deve saber que é necessário, para esse processo, medir diversas superfícies de variadas formas, afirma Coelho (1907).

Com o estabelecimento da compreensão do processo do cálculo da área de formas retangulares, a área do triângulo deve ser apresentada como metade da do retângulo, fazendo a medição de superfícies triangulares presentes no jardim ou as faces das pirâmides. As orientações de Coelho (1907) para os procedimentos da área do paralelogramo e dos polígonos regulares são análogas a esta, sempre sendo calculada a partir da composição da área de figuras já estudadas, aplicadas à área de objetos concretos e em seguida à área das faces de formas sólidas, tais como o paralelepípedo.

As orientações procedimentais para o ensino de volumes determinam que estes também devem ser apresentados primeiramente de forma direta e depois de forma indireta, segundo Coelho (1907). Para isso, após a apresentação do metro cúbico e de seus submúltiplos, deve-se associar o decímetro cúbico ao litro, e é por meio deste que as medidas diretas devem ser feitas, conforme a sistematização do autor. A medição do volume de paralelepípedos retangulares deve ser calculada dividindo este em partes iguais a um centímetro cúbico, por exemplo.

Já os prismas triangulares são apresentados como metade do paralelepípedo, e, assim, o volume de um associa-se ao do outro. Os prismas quaisquer devem ser entendidos como uma composição de prismas triangulares, e como o volume destes já foi estudado, pode-se calcular o volume de prismas quaisquer. “E analogamente se procederá para com os cilindros, as esferas, etc.” (COELHO, 1907, p. 93).

Assim, percebemos que a sistematização de orientações realizadas por Coelho (1907) para compor a constituição do saber profissional do professor que está em formação, no ponto que trata das apresentação das relações de equivalência entre as formas de extensão, tem em conta que a consolidação da compreensão acerca de um objeto de estudo é fundamental para que se estude o próximo, haja vista que o já apresentado é elemento primitivo do qual se faz derivar a explicação para a compreensão do seguinte. Ademais, notamos que a formação geométrica do professor precisa ser bem definida, visto que as orientações *para* ensinar geometria elaboradas por Coelho (1907) não ensinam propriamente a geometria, mas como ensiná-la, sendo, esta, mobilizada por saberes *para* ensiná-la.

A ida do abstrato ao concreto (comprimento – área - volume) dá-se devido ao fato de o autor considerar que o abstrato já foi compreendido, pois os pontos formam as linhas retas, das quais se mede o comprimento, o qual mede os lados das figuras superficiais para a definição de área e das sólidas para o volume. O cálculo de comprimentos, áreas e volumes vai retomando, respectivamente, o estudo das formas lineares, superficiais e sólidas, de forma a consolidar as propriedades destas.

O abstrato, em “do abstrato ao concreto”, de que o autor fala refere-se à ordem de abstração necessária ao entendimento do comprimento, da área e do volume como entes geométricos, de modo que desde o ensino do comprimento é orientado que se faça a medição do comprimento de espaços reais além do cálculo de comprimento de objetos geométricos, de área de retângulos ou do volume de paralelepípedos, por exemplo.

4.1.5 LIÇÕES de pedagogia: colleccionadas por um amigo da instrução. Rio de Janeiro: Livraria Francisco Alves, 1907.

O manual *Lições de Pedagogia* que tratamos nesta seção não possui identificação de autoria, apenas a indicação de que tais lições são colecionadas por um “amigo da instrução pública”, de tal forma que pesquisas tais como a de Silva (2005) se referem à autoria de tal manual como “amigo da instrução”. Este manual foi publicado por uma das maiores editoras de livros escolares de sua época, a Livraria Francisco Alves, no ano de 1907.

Lições de Pedagogia colecionadas por um “amigo da instrução pública” é um manual breve, contendo 78 páginas que distribuem diferentes diretivas que orientam o professor na sua formação acerca de aspectos que envolvem o exercício da sua profissão. As lições começam com definição de métodos, destacando que este se refere à ordem que se estabelece para apresentar os objetos de ensino aos alunos, e segue discorrendo sobre os métodos analítico e sintético, dos quais já falamos neste texto. O autor, “amigo da instrução pública”, vai apresentando ao longo do manual outros direcionamentos que julgamos como saberes *para* ensinar, tais como o processo de ensino intuitivo, método por intuição, que corroboram para a constituição das orientações *para* ensinar as diferentes matérias escolares.

Na sequência, o “amigo da instrução pública” apresenta diretivas que formam o professor sobre como proceder ao ensinar tais matérias. Então, ele sistematiza orientações sobre o ensino: da língua pátria, da aritmética, da geometria, da geografia, da história, das ciências físicas e naturais, do desenho, de trabalhos de agulha e da moral. O autor dá sequência ao manual discorrendo acerca dos aspectos físicos da escola, da organização pedagógica da escola, dos jardins da infância, que deveriam ser frequentados por crianças de dois a três anos, e dos asilos, destacando que “no jardim da infância, o professor dá aos meninos papel, cera, barro mole, diferentes sólidos geométricos, e deixa-os recortar, moldar, imitar, explicando-lhes sempre as semelhanças, os termos próprios [...]” (AI, 1907, p. 68). As lições colecionadas pelo “amigo da instrução pública” finalizam o manual com considerações sobre as instituições conhecidas como grupos escolares.

A sistematização elaborada pelo autor para orientar o professorando *para* ensinar geometria inicia destacando a prática como elemento indispensável a todos os processos de ensino, e que “o primeiro cuidado do professor será que os alunos fixem bem a forma das figuras que lhes forem apresentadas. O círculo, o quadrado, o triângulo, o retângulo, são tão vulgares na natureza e nas artes [...] a juventude os tem sob seus olhos” (AI, 1907, p. 21). Assim, percebemos que o autor indica ao professorando que se deve, de início, recorrer a objetos concretos que podem ser identificados pelos alunos em sua volta para apresentar as formas geométricas, de modo que tais formas sejam oferecidas primeiramente como um todo não decomposto, o que está em acordo com a ideia que o autor defende de que “o método analítico é o mais conveniente às investigações científicas” (AI, 1907, p. 9). Nesse processo, as formas em si devem ser reconhecidas pelos alunos de maneira que eles possam associar as formas geométricas aos seus respectivos nomes, mesmo que, em um primeiro momento, sem ter noção de suas propriedades.

O “amigo da instrução pública” segue suas orientações discorrendo acerca de como ensinar as formas espaciais. Segundo o autor, “o cubo, o cilindro e o paralelepípedo, os prismas e as pirâmides são fáceis de ensinar intuitivamente” (AI, 1907, p. 22). Desse modo, o autor orienta que as formas sólidas sejam apresentadas aos alunos a partir de objetos concretos que os representem, que sejam conhecidos e explorados por eles a partir da observação, do uso dos seus sentidos, e que, a partir da comparação, chegue-se à generalização de suas propriedades, aos seus elementos abstratos. Portanto, apresentar as formas geométricas por meio do uso de objetos concretos e ensiná-las numa marcha que segue do concreto para o abstrato são elementos que compõem a sistematização de orientações *para* ensinar geometria que entendemos como elementos da constituição de uma *geometria para ensinar*.

Essas orientações *para* ensinar geometria por processos intuitivos segue sendo destacada pelo autor. O “amigo da instrução pública” afirma que “nada mais útil para o ensino das formas, do que possuir a escola uma boa coleção de sólidos geométricos talhados em madeira, para tornar o estudo intuitivo” (AI, 1907, p. 22), justificando que esse material, “além de tornar muito menos áridas as lições, parece ser o único meio de pôr ao alcance da inteligência das crianças, incapazes ainda de abstrações, demonstrações aliás facílimas pela intuição dos objetos" (AI, 1907, p. 22).

Assim, o "amigo da instrução pública" sugere ao professorando que, ao introduzir sólidos de madeira no início do processo de ensino de tais formas geométricas, os alunos poderão explorá-las e será mais acessível a eles chegar a abstrações depreendendo-as intuitivamente do que está à sua vista. Logo, um saber *para* ensinar geometria que o professor deve ter é o de manipular as formas geométricas concretizadas em madeira de modo a levar o aluno a observar e perceber seus elementos constituintes e as propriedades que viabilizam sua compreensão em abstrato.

O autor destaca que "o professor se esforçará por tornar agradável e compreensível o estudo dessa disciplina" (AI, 1907, p. 22), evidenciando a importância de que as formas geométricas sejam verdadeiramente compreendidas pelos alunos. Seguindo para a conclusão do processo de ensino, o autor orienta que o professor "mandará o aluno copiar do mesmo tamanho ou maiores as figuras que lhe mostrar, e fá-lo-á repetir as que não tiverem sido regularmente traçadas" (AI, 1907, p. 22), exercício que se revela como uma oportunidade de evidenciar propriedades e chegar a generalizações, ponto em que o aluno pode compreender a geometria estudada em sua forma ideal, abstrata.

Para finalizar, após essa atividade de copiar as figuras, o autor destaca que "finalmente [o professor] explicará a sua utilidade e aplicações práticas (das formas geométricas)" (AI, 1907, p. 22). Essa indicação do autor sugere que sua preocupação está para além de levar os alunos a aprenderem as formas geométricas do concreto até se chegar a sua compreensão em abstrato. O autor também se preocupa com a utilidade do ensino de geometria para o aluno na sua vida fora da escola.

Diante da análise das orientações *para* ensinar geometria que o "amigo da instrução púbica" (1907) sistematizou, percebemos que estas compreendem a geometria que deve ser ensinada e o que o autor considera que o professor precisa saber *para* ensinar essa geometria, buscando associar esses elementos, orientando o professor a desenvolver o ensino das formas geométricas de forma intuitiva, recorrendo a objetos concretos para introduzir o estudo de tais conteúdos, os quais posteriormente devem ser explicados e sua compreensão em abstrato construída.

4.1.6 CARRÉ, I. ; LIQUIER, R. *Traité de Pedagogie Scolaire*. Paris: Librairie Armand Colin, 15. ed., 1920.

Jean-Baptiste Irénée Carré nasceu na França, precisamente na localidade de Sormonne, no ano de 1829 (DUBOIS; BRUTER, 2002). Este pedagogo francês foi diretor de colégio e Reitor da Universidade de Paris, além de historiador do mundo antigo (TREVISAN; PEREIRA, 2013). Carré frequentou a escola primária de sua cidade natal e depois frequentou a faculdade em Charleville. Aos 22 anos, ingressou no Liceu em Tours como professor, e após dois anos tornou-se professor-tutor. “Ele continuou sua carreira como professor substituto de filosofia em Rennes (1863), depois como terceiro professor em Douai (1864)” (DUBOIS; BRUTER, 2002, p. 51).

Ao adentrar a carreira administrativa, Irénée Carré foi nomeado inspetor acadêmico em diversas localidades: Vesoul (1869), Moulins (1872), Méziêres (1873). Sete anos depois, em Lille, tornou-se diretor departamental da educação primária do Norte, título recém-criado e único fora da capital francesa. Seguindo nessa área de atuação profissional, Irénée Carré foi “delegado ao cargo de Inspetor-Geral em 1882, foi nomeado Inspetor-Geral da Educação Primária em janeiro de 1885 e permaneceu neste cargo até sua aposentadoria em 1892” (DUBOIS; BRUTER, 2002, p. 51).

Sobre o colega com o qual Irénée Carré assina *Tratado de Pedagogia*, Roger Liquier, as pesquisas que falam sobre o referido manual, tais como as de Silva (2005) e de Trevisan (2011), indicam que este pedagogista “foi diretor da Escola Normal de Avignon (França) (TREVISAN, 2011, p. 154).

O *Tratado de Pedagogia* de Carré e Liquier (1920) foi escrito com intuito de “condensar tudo o que era necessário para um bom professor conhecer” (CARRÉ; LIQUIER, 1920, p. VI). Os autores destacam que esse conhecimento que o professor deve possuir precisa “ser baseado em um conhecimento suficiente da psicologia, ou seja, a natureza do jogo das faculdades que deve ser implementado” (CARRÉ; LIQUIER, 1920, p. VI-VII). No entanto, Carré e Liquier (1920) defendem que, para além desses aspectos do desenvolvimento psicológico, o professor deve saber como uma aula é elaborada, de que forma a organização do ensino deve ser realizada, “em que forma [o ensino] deve ser dado; quais são os métodos e procedimentos, dependendo da idade dos alunos ou das disciplinas, mais especificamente para recomendar; sobre quais fundamentos se senta uma disciplina” (CARRÉ; LIQUIER,1920, p. VII).

Diante desse entendimento, Carré e Liquier (1920) dividem *Tratado de Pedagogia* em duas partes, as quais abordam os temas acima, respectivamente, nas partes teórica e prática. Segundo os autores, essas duas partes são complementares, pois para ser um "educador" é preciso dominar ambas. Ter domínio apenas dos conteúdos de ensino e experiência na sala de aula limitaria o professor a substituir "uma cultura inteligente e frutífera das faculdades da criança por um treinamento vão e estéril" (CARRÉ; LIQUIER, 1920, p. VII); e um professor que é somente um psicólogo ou que se concentra apenas na teoria "poderia muito facilmente perder de vista as praticidades do ensino" (CARRÉ; LIQUIER, 1920, p. VII).

Portanto, Carré e Liquier (1920) já evidenciam sua preocupação em sistematizar saberes que sejam próprios à profissão docente, saberes profissionais que resultem da articulação entre saberes sobre o que ensinar, as experiências de ensino e acerca de como desenvolver a inteligência da criança de forma que o que lhe é ensinado passe a ter sentido e significado para ela. Logo, percebemos que os autores se reportam a ferramentas que norteiam o trabalho pedagógico do professor, que relacionamos aos saberes *para* ensinar, e buscam organizar articulações entre tais saberes e os saberes *a* ensinar, de modo que, na "Parte Teórica", o autor aborda a educação intelectual, destacando a educação dos sentidos e as faculdades de desenvolvimento, por exemplo, e na "Parte Prática" restringe tais aspectos aos processos de ensino e agrega a essas discussões os saberes *a* ensinar de diferentes matérias escolares, sistematizando orientações *para* ensinar os diferentes temas do programa, em particular, as rubricas matemáticas: aritmética e geometria.

A "Parte Teórica" inicia-se logo após as "Notas Preliminares" e trata da psicologia aplicada à educação, sendo dividida em educação física, intelectual e moral, temas que compõem dezenove capítulos. A Parte Prática aborda os aspectos mais particulares da escola, apresentando princípios gerais, que compreendem seis capítulos, dentre os quais está o IV, em que Carré e Liquier (1920) discorrem acerca de métodos e processos de ensino e destaca o método intuitivo. E, também, sistematizam orientações *para* ensinar as diversas matérias do programa pautadas nos saberes já destacados, abordando no capítulo XIV a aritmética e a geometria, sendo que as orientações *para* ensinar especificamente geometria estão na seção VIII deste capítulo.

Ao iniciar as discussões sobre o que o professor deve saber *para* ensinar geometria, Carré e Liquier (1920) já sinalizam que suas orientações estarão pautadas nos fundamentos do método intuitivo, ao escreverem na descrição da referida seção VIII: “Geometria. Ensino todo intuitivo e prático” (CARRÉ; LIQUIER, 1920, p. 425). De início, os autores já esclarecem ao professorando que a geometria que está presente nos primeiros anos escolares não é equivalente à geometria clássica, a qual está pautada em uma extensa sequência de teoremas que devem ser demonstrados. A geometria desses anos que iniciam a escolarização das crianças, afirmam Carré e Liquier (1920), inclui apenas as principais noções sobre as formas geométricas e de suas respectivas medidas, e deve ser ensinada partindo do concreto, por meio de atividades práticas.

Essa asserção dos autores evidencia que a geometria que será objeto de trabalho do atual professorando é uma geometria que está filiada ao campo disciplinar matemático, mas que também é moldada pela cultura escolar de cada tempo histórico. Isso mostra o que discutimos na seção 2.2 sobre a *geometria a ensinar* não ser uma cópia fidedigna da geometria que constitui o campo disciplinar matemático. A partir do que Carré e Liquier (1920) propõem, podemos observar que a geometria que deve ser ensinada que compõe as orientações específicas *para* ensinar geometria, são as principais formas geométricas e as medidas que as envolvem, seguindo uma perspectiva pedagógica.

Os autores despertam a atenção para a ideia de que essa “delimitação” da geometria para os primeiros anos escolares, às vezes, é chamada de *taquimetria*, nome que, segundo eles, mostra-se mais adequado a modéstia do seu objeto. Portanto, o termo *taquimetria* parece não se restringir à medida das extensões e volume, mas também agrega o estudo das formas geométricas que antecede tais medições, aplicando os ideais da pedagogia intuitiva.

Após esclarecerem que geometria se configurará como objeto de trabalho do professorando e que será mobilizada por eles na sistematização das orientações *para* ensinar tal geometria, Carré e Liquier (1920) direcionam sua atenção para tanto, fazendo referência à “pedagogia do ensino geométrico” de Pierre Leyssenne[59]. Os

[59] “Começou sua carreira como professor de matemática [...] escreveu livros didáticos voltados para a escola primária sobre aritmética e geometria, os quais fizeram grande sucesso editorial desde as primeiras edições (SIQUEIRA FILHO; LEGROS, 2016, p. 30). “O limusino Pierre Leyssenne (1827-1916), autor de muitos livros de aritmética, é um ator importante no ensino de matemática primário desde o início da Terceira República (1870-1940)” (LEGROS; MOYON, 2015, p. 3, tradução livre). Foi Inspetor Geral do ensino primário francês e publicou sobre o ensino de geometria e aritmética no Dicionário de Pedagogia organizado por Ferdinand Buisson (D’ENFERT, 2014). De acordo com Siqueira Filho e Legros (2016), há vestígios do método intuitivo em obras de aritmética de

autores afirmam que "se quisermos fazer geometria com as crianças pequenas, [...] iremos proscrever definições e evitaremos falar de linhas e figuras abstratas" (CARRÉ; LIQUIER, 1920, p. 426). Assim, percebemos que o primeiro contato do aluno com a geometria na escola, isto é, a forma como o professor deve lhes apresentar os objetos geométricos de ensino, segundo os autores, não deve requerer de imediato definições e o exercício de generalização, de abstração.

Também, ao mencionarem que devemos evitar o estudo de linhas e figuras abstratas de início, entendemos que os autores se referem às formas superficiais e lineares, de modo que o ensino das formas geométricas começaria pelas formas sólidas. Portanto, a ordem a seguir na apresentação das formas geométricas a serem ensinadas pelo professor, apresenta-se como relevante elemento que corrobora para a caracterização das orientações *para* ensinar geometria e para a sistematização da *geometria para ensinar* do período em que tais orientações circularam.

Conforme as diretivas *para* ensinar geometria destacadas por Carré e Liquier (1920), de início os alunos precisam ter contato com objetos concretos que representem as formas geométricas. Primeiro, "vamos levar sólidos de madeira, terra, papelão; vamos colocá-los nas mãos das crianças" (CARRÉ; LIQUIER, 1920, p. 426). Então, após os alunos manipularem tais objetos, observarem-nos bem, verem-nos postos em todas as direções, "vamos dizer a eles que isso é uma linha, isso é um ângulo, isso é um quadrado, isso é um círculo, etc., e vamos fazê-los desenhar essa linha, esse ângulo, esse quadrado, esse círculo" (CARRÉ; LIQUIER, 1920, p. 426).

Assim, as orientações dos autores destacam que o trabalho pedagógico do professor quando do ensino de geometria deverá pautar-se inicialmente na disponibilização de atividades que possibilitem aos alunos despertar seus sentidos e desenvolver percepções acerca das formas geométricas representadas por objetos concretos que podem ser manipulados e observados pelos alunos, de forma que, dos sólidos de madeira, por exemplo, possa-se depreender a ideia de sólidos e das superfícies e linhas que se agregam para compô-los.

Ainda, podemos destacar que, embora de início devamos "proscrever definições e evitaremos falar de linhas e figuras abstratas" (CARRÉ; LIQUIER, 1920, p. 426), como já mencionamos, após apresentar os objetos concretos representativos das formas sólidas poderemos, de sua manipulação, pela reprodução das formas,

Leyssenne, de modo a afirmarem que, para o autor, o emprego do método intuitivo parece ser importante para os alunos mais jovens, do curso primário elementar.

extrair a ideia de linha, quadrado, etc., como indicam os autores, o que evidencia que, *para* ensinar geometria, o professorando não poderá deter-se à representação concreta, mas a partir desta desenvolver a construção da ideia abstrata das formas, o que caracteriza uma ordem de ensino do concreto para o abstrato, a qual está associada ao método intuitivo.

Carré e Liquier (1920) seguem destacando que, no desenvolvimento do processo de ensino de geometria, o professor pode prosseguir levantando questionamentos para os alunos. Os autores orientam que o professor não pode perder de vista a ideia de que as perguntas sugeridas devem sempre se referir ao que as crianças "aprenderam em outro lugar, ou o que elas podem ver ou encontrar por si mesmas", tais como: "qual é a maior dessas duas faces? Quantas vezes o comprimento é maior que a largura? Etc". Perguntas como essas, segundo os autores, "podem responder por intuição, por hábito, por reflexão, e para as quais qualquer resposta está sujeita à verificação imediata" (CARRÉ; LIQUIER, 1920, p. 426). Atividades como essa também caracterizam a ideia de ensino prático mencionada anteriormente, sobre a qual o professorando precisa ter domínio, segundo as orientações de Carré e Liquier (1920), *para* ensinar geometria nos primeiros anos escolares.

Sobre o aprofundamento do raciocínio acerca da geometria estudada, até se chagar às definições, conforme os anos escolares avançam, os autores concluem que

> em classes muito elementares, devemos limitar-nos a mostrar às crianças corpos geométricos simples, analisá-los à sua frente, nomear as partes que as constituem, medindo-as pela visão ou pelo medidor, fazendo-lhes apenas perguntas que despertam sua atenção, sua inteligência e sua sagacidade. Esse ensino deve ser apenas uma lição das coisas aplicadas, como todas as outras, a objetos concretos, mas objetos de formas regulares e mensuráveis (CARRÉ; LIQUIER, 1920, p. 426).

No entanto, conforme os anos escolares forem passando e o alunos já estiverem em uma idade aproximada de dez anos, "o ensino da geometria deve assumir um caráter menos rudimentar e estar sujeito a regras mais precisas e claras" (CARRÉ; LIQUIER, 1920, p. 426). Portanto, segundo as orientações *para* ensinar geometria sistematizadas pelos autores, a ideia do desenvolvimento do ensino seguindo da exploração do concreto para a construção da ideia abstrata é desenvolvida ao longo dos primeiros anos escolares, de modo que o professorando aprenderia que os objetos de ensino devem ser apresentados ao aluno pelo concreto, desenvolvendo a percepção sobre tais objetos e ao longo do tempo ir conduzindo ao desenvolvimento do raciocínio e da construção da ideia abstrata, realizando generalizações e apresentando definições.

Carré e Liquier (1920) destacam que a geometria escolar deve oferecer vantagens ao aluno. Segundo os autores, tal geometria “deve primeiro facilitar a compreensão do sistema métrico, depois dar-lhe os meios para avaliar todas as superfícies e todos os volumes que se apresentam nos usos da vida” (CARRÉ; LIQUIER, 1920, p. 427), haja vista que as medidas das formas geométricas integram os objetos de ensino delimitados pelos autores para os primeiros anos escolares, e calcular comprimentos, áreas e volumes exercitaria o estudo do sistema métrico.

E ainda, os autores acrescentam como vantagem da geometria que deve ser ensinada na escola, o fato de que esta serve “como um guia para o estudo da ciência essencialmente prática, topografia, [...] e desenho linear” (CARRÉ; LIQUIER, 1920, p. 427). Assim, percebemos que a geometria que seria ensinada pelo atual professorando, conforme sugerem Carré e Liquier (1920), poderia contribuir para o desenvolvimento do ensino de outras matérias escolares, de modo que pensamos em uma que contribui para ensinar topografia ou desenho linear, já que tais conteúdos de ensino seriam tratados ao ensinar a geometria.

Por outro lado, ao finalizar a seção em que constam as orientações específicas *para* ensinar geometria, Carré e Liquier (1920) destacam a correlação da geometria, em alguns aspectos, com o sistema métrico, o desenho e os trabalhos manuais. Nesse ponto, os autores afirmam que “este ensino todo intuitivo de geometria encontra uma auxiliar natural no ensino de desenho e trabalhos manuais, com os quais se funde” (CARRÉ; LIQUIER, 1920, p. 427). Portanto, essas matérias, desenho e trabalhos manuais, as quais os autores adjetivam como acessórias, parecem ser recursos que contribuem com o desenvolvimento do trabalho pedagógico do professor *para* ensinar geometria.

Nesse sentido, apontam Carré e Liquier (1920), “com a ajuda de um estudo gráfico, vemos que um triângulo é metade de um retângulo com a mesma base e da mesma altura; que qualquer paralelogramo tem a mesma superfície que um retângulo da mesma base e altura” (CARRÉ; LIQUIER, 1920, p. 427). Assim, a partir do estudo gráfico, do desenho linear, os alunos poderiam observar que a área de uma forma geométrica pode ser calculada a partir do cálculo da área de outra que eles já conhecem.

Essa ideia será ainda mais evidente para os alunos, afirmam Carré e Liquier (1920), se os professores recorressem ao uso de materiais, tais como o papelão, “que dobramos ou cortamos para sobrepor peças corretamente, e muitas vezes acontecerá que as crianças, em seus exercícios de corte e dobramento, descubram por si mesmas, [...] as propriedades de certas figuras” (CARRÉ; LIQUIER, 1920, p. 427). Com essa atividade, as crianças “estarão maravilhosamente preparadas para entender as explicações que podem ser dadas a elas” (CARRÉ; LIQUIER, 1920, p. 427). Assim, as atividades gráfica e prática, do desenho e do trabalho manual, respectivamente, mostram-se como recursos a partir dos quais as generalizações podem ser estabelecidas e as propriedades aprendidas pelos alunos, corroborando para o entendimento em abstrato da geometria que deve ser ensinada.

Os autores apontam que os professores poderão proceder da mesma forma para com os sólidos, de modo que, por exemplo, segundo Carré e Liquier (1920), para o estudo do volume do prisma, pode-se utilizar papelão e cortá-lo adequadamente, e, ao compará-lo com a pirâmide, “concluir que o volume de uma pirâmide triangular é obtido multiplicando a superfície de sua base por um terço de sua altura” (CARRÉ; LIQUIER, 1920, p. 428). Logo, observamos a existência de um desenho linear *para* ensinar geometria e de trabalhos manuais *para* ensinar geometria como elementos que também corroboram para a sistematização das orientações *para* ensinar geometria realizada por Carré e Liquier (1920), as quais integraram o trabalho pedagógico do professor *para* ensinar geometria e podem compor a sistematização de uma *geometria para ensinar* de um período escolar.

Com a recompilação da geometria que deve ser ensinada e do que o professor precisa saber *para* ensinar essa geometria, a partir das orientações de Carré e Liquier (1920), finalizamos esta seção em que analisamos individualmente todos os manuais de Pedagogia que admitimos como fonte de pesquisa em busca de recompilar o que eles propunham como aquilo que deveria saber o professor dos primeiros anos escolares *para* ensinar geometria.

Considerando as orientações *para* ensinar geometria sistematizadas por todos os autores, para as quais a recompilação desta seção esteve voltada, sintetizamos o que eles indicam sobre o que deve ser ensinado de geometria e o que eles propõem que o professor deve saber *para* ensinar geometria, elaborando o quadro 6, a seguir.

Quadro 6 – Síntese do que se deve ensinar de geometria e o que o professor deve saber *para* ensinar geometria.

Autor	**O que deve ser ensinado de geometria**	**O que o professor deve saber *para* ensinar geometria**
Braun (1872b)	Elementos da geometria espacial e da geometria plana	- O objeto de ensino deve ser apresentado a partir do uso de uma forma concreta que o represente; - O uso dos sentidos dos alunos precisa ser estimulado; - O processo de ensino inicia-se examinando formas sólidas; - Primeiro ensina-se as formas no seu todo, depois decompõe-nas em suas partes, que voltam a recompor o todo; - Ao longo do processo de ensino é importante realizar comparações e evidenciar propriedades.
Pontes (1873)	Elementos da geometria plana	- Não se deve iniciar a aula apresentando demonstrações; - O ensino é viabilizado pelo uso de formas concretas; - O uso dos sentidos dos alunos precisa ser estimulado; - A intuição dos objetos facilita as demonstrações; - Deve-se fazer com que os alunos considerem os objetos em seu todo e em suas partes; - Ao longo do processo de ensino é importante realizar comparações e evidenciar propriedades.
Affreixo e Freire (1890)	Elementos da geometria espacial e da geometria plana	- Para ensinar é importante conhecer materiais de ensino e como mobilizá-los; - É preciso que os alunos fixem as formas que irão aprender; - O uso dos sentidos dos alunos precisa ser estimulado; - A observação dos materiais concretos antecede a abstração.
Coelho (1892)	Elementos da geometria espacial e da geometria plana, incluindo comprimento, áreas e volumes	- O ensino de geometria deve ser introduzido com o uso de formas geométricas concretizadas em madeira; - Os materiais de ensino que representam formas sólidas devem ser coloridos quando sua superfície for composta por diferentes tipos de formas; - O uso dos sentidos dos alunos precisa ser estimulado; - A ordem a seguir no ensino das formas geométricas é das espaciais para as superficiais, destas para as linhas e destas para o ponto; - Nessa ordem, as formas geométricas devem ser ensinadas do todo para as partes, de modo que à medida que as decomposições forem acontecendo, deve-se operar recomposições paralelamente; - O ensino de comprimentos, áreas e volumes deve ser feito inicialmente na prática, medindo objetos específicos, mas que gradualmente os algoritmos desses cálculos devem ser apresentados.
Coelho (s.d.)	Elementos da geometria espacial e da geometria plana, incluindo comprimento, áreas e volumes	- O ensino deve partir das formas concretizadas em sólidos para a compreensão ideal de tal objeto geométrico; - Os sólidos são as primeiras que devem ser ensinadas, seguidas as superficiais, estas das lineares e estas dos pontos; - O uso dos sentidos dos alunos precisa ser estimulado; - O avanço no processo de ensino precisa acontecer do concreto para o abstrato, por meio de decomposições e recomposições sucessivas;

		- Não se pode confundir o objeto real utilizado no ensino com a abstração decorrente dele.
Coelho (1907)	Elementos da geometria espacial e da geometria plana, incluindo comprimento, áreas e volumes	- As formas geométricas devem ter sua abstração concretizada em materiais concretos; - O ensino deve partir desses materiais concretos, chegando ao abstrato; - Os materiais de ensino que representam formas sólidas devem ser coloridos quando sua superfície for composta por diferentes tipos de formas; - O uso dos sentidos dos alunos precisa ser estimulado; - Primeiro deve apresentar as formas geométricas e depois suas relações equivalência; - A ordem a seguir é das formas sólidas para as superficiais, destas para as lineares e destas para o ponto, realizando decomposições e recomposições sucessivas. - O ensino de comprimentos, áreas e volumes deve ser feito inicialmente na prática, medindo objetos específicos, mas que gradualmente os algoritmos desses cálculos devem ser apresentados.
AI (1907)	Elementos da geometria espacial e da geometria plana	- As formas geométricas sejam apresentadas a partir de objetos concretos; - O aluno deve fixar bem as formas estudadas; - O uso dos sentidos dos alunos precisa ser estimulado; - A exploração das formas geométricas concretas torna mais acessível ao aluno chegar à abstrações;
Carré e Liquier (1920)	Elementos da geometria espacial e da geometria plana, incluindo comprimento, áreas e volumes	- Não se deve iniciar o processo de ensino com definições, mas utilizando representações de formas geométricas concretizadas em materiais concretos; - O uso dos sentidos dos alunos precisa ser estimulado; - Deve-se começar o processo de ensino pelo estudo de sólidos de madeira e que, a partir de ampla observação de tais formas, mostrar o que é linha, ângulo e formas superficiais; - Deve-se partir da percepção para a construção da ideia abstrata; - Pode-se recorrer ao desenho e a trabalhos manuais para ensinar a medir as formas.

Fonte: elaborado pela autora

A partir da leitura do quadro 6, ilustrado anteriormente, podemos constatar que, de 1870 a 1920, houve, na formação desses professores, a circulação de ideias pedagógicas específicas *para* ensinar geometria. A seguir, vamos comparar tais manuais de acordo com os parâmetros que apresentaremos na discussão adiante, de modo a evidenciarmos se há consensos e convergências entre essas ideias que circularam em diferentes contextos.

4.2 Análise comparativa dos elementos de uma *geometria para ensinar* em manuais de Pedagogia

Tendo em vista as recompilações realizadas na seção anterior, analisá-las-emos comparativamente nesta seção. Para determinarmos os parâmetros que subsidiaram essa comparação, remetemo-nos aos conceitos de *geometria a ensinar e para ensinar* que nossa base teórico-metodológica nos oferece. Discutimos que a *geometria a ensinar* está atrelada ao campo disciplinar matemático e é o objeto de trabalho do professor, a geometria que por ele é ensinada. Por outro lado, a constituição da *geometria para ensinar* resulta da reelaboração de saberes *para* ensinar geometria em cada tempo histórico-educacional, mobilizando, nesse processo, a *geometria a ensinar*, configurando uma ferramenta de trabalho do professor *para* ensinar geometria.

Portanto, considerando esse entendimento teórico, admitimos que, para sistematizarmos uma *geometria para ensinar*, deve ser possível que extraiamos da recompilação os elementos que entendemos como constituintes dessa *geometria*: a *geometria a ensinar* e os saberes *para* ensinar geometria. Após análise do quadro 6, apresentado anteriormente, podemos observar que nas orientações *para* ensinar geometria sistematizadas pelos autores é possível identificar elementos que nossa lente teórica nos permite considerar como *geometria a ensinar* e saberes *para* ensinar geometria, observamos que ambos se confirmaram como parâmetros para essa análise comparativa.

Os saberes *para* ensinar geometria que se fizeram notar como elementos constituintes de uma *geometria para ensinar* são: os materiais de ensino indicados, a marcha de ensino, o processo de apresentação e o de generalização e, também, contamos com o pedagogista de referência[60]. Esses são os critérios comparativos e vamos observar como eles atuam na constituição de uma *geometria para ensinar*.

Afinal, a partir da identificação de tais elementos em cada manual, podemos dizer que eles convergem para uma mesma ideia acerca do trabalho pedagógico do

[60] O pedagogista de referência pode não fazer parte diretamente da constituição da geometria em questão, mas sua identificação sinaliza a filiação do autor do manual a determinado ideário pedagógico, no qual pode estar fundamentada a sistematização das orientações *para* ensinar geometria.

professor *para* ensinar geometria? Essa discussão acontece ao compararmos as características desses elementos para posteriormente determinarmos que consenso sobre elas pode ter sido estabelecido ente 1870 e 1920, de forma a caracterizar a geometria como ferramenta de trabalho do professor que ensinou matemática nesse período e não apenas o que está em cada manual de Pedagogia.

O nosso contexto de pesquisa é a formação institucional de professores dos primeiros anos escolares. Assim, essa comparação deu-se apenas entre os manuais que elegemos como fonte de pesquisa, os quais consideramos como representantes deste contexto e que poderão subsidiar a sistematização de uma *geometria para ensinar* representante deste cenário no período de 1890 a 1920. Para iniciar esse processo de análise comparativa, apresentamos o quadro 6, a seguir.

Quadro 7 – A *geometria a ensinar* mobilizada

Manual	***Geometria a ensinar* mobilizada**
Braun (1872b)	Formas geométricas planas e espaciais.
Pontes (1873)	Formas geométricas planas.
Affreixo e Freire (1890)	Formas geométricas planas e espaciais.
Coelho (1892)	Formas geométricas planas e espaciais e suas medidas.
Coelho (s.d.)	Formas geométricas planas e espaciais e suas medidas.
Coelho (1907)	Formas geométricas planas e espaciais e suas medidas.
AI (1907)	Formas geométricas planas e espaciais.
Carré e Liquier (1920)	Formas geométricas planas e espaciais e suas medidas.

Fonte: Elaborado pela autora.

A partir do quadro 6, ilustrado anteriormente, podemos comparar o primeiro elemento que entendemos como integrante da constituição de uma *geometria para ensinar*, que é a *geometria a ensinar* que se destaca na recompilação das orientações *para* ensinar geometria sistematizadas pelos autores, cujos manuais admitimos como fonte de pesquisa. De pronto, pelo quadro mencionado, percebemos que os manuais convergem nesse ponto, de modo que todos mobilizam as formas geométricas, abrangendo elementos da geometria plana e da geometria espacial.

Apenas o manual de Pontes (1873) se atém apenas à geometria plana, mas como este autor se fundamenta em Thomas Braun e o manual de Braun (1872b) dá grande destaque às formas espaciais, entendemos que é possível estabelecer um consenso entre todos os manuais no que se refere à *geometria a ensinar*, de modo que é possível destacar que as formas geométricas planas e espaciais são conteúdos que, independentemente da estruturação estabelecida, mantiveram-se estáveis nas sistematizações das orientações *para* ensinar geometria que se configuraram na formação institucional dos professores dos primeiros anos escolares no Brasil entre 1870 e 1920. Para discutirmos o segundo parâmetro, elaboramos o quadro 7 a seguir.

Quadro 8 – Materiais de ensino indicados e/ou mobilizados

Manual	Materiais de ensino
Braun (1872b)	Espaços familiares, como a sala de aula, produtos da natureza e das artes; compasso, régua, esquadro, sólidos de papelão ou madeira: um cubo, um prisma, um cone, uma pirâmide, um cilindro, uma esfera e vários poliedros, e o quadro.
Pontes (1873)	Produtos da natureza e das artes e coleção de figuras sólidas.
Affreixo e Freire (1890)	Produtos da natureza e das artes; sólidos de madeira; sólidos planificados em cartão e placas de cortiça.
Coelho (1892)	Sólidos de madeira: esfera, cilindro, etc.; placas e hastes de madeira; fios de ferro; esferas de cortiça, quadro preto, etc.
Coelho (s.d.)	Formas concretas e reais; quadro.
Coelho (1907)	Sólidos de madeira: esfera, cone, etc.; placas e hastes de madeira, fios de ferro; esferas de cortiça, quadro preto, etc.
AI (1907)	Produtos da natureza e das artes e coleção de sólidos geométricos talhados em madeira.
Carré e Liquier (1920)	Objetos concretos que representem as formas geométricas: sólidos de madeira, terra, papelão.

Fonte: Elaborado pela autora.

Como notamos no quadro 7, o segundo parâmetro de comparação entre nossas fontes de pesquisa integra o que chamamos de saberes *para* ensinar geometria, começando pelos materiais de ensino que os autores indicam para serem utilizados e/ou mobilizam nas suas sistematizações que orientam o trabalho pedagógico do professor *para* ensinar geometria. No referido quadro, apresentamos tais objetos que foram evidenciados na recompilação que realizamos a partir de cada manual.

Ao observarmos a síntese da recompilação dos manuais estudados no aspecto materiais de ensino, constatamos que alguns (BRAUN, 1872b; COELHO, 1892; 1907) falam de tais objetos de forma mais detalhada que outros (PONTES, 1873; COELHO, s.d.), mas também fica evidente que todos destacam que, *para* ensinar geometria, devem ser utilizadas representações de formas geométricas concretizadas em madeira, papelão ou cortiça. Portanto, é possível que apontemos mais um consenso entre os manuais de Pedagogia que estudamos. Para discutirmos o próximo parâmetro, vamos ao quadro 8, a seguir.

Quadro 9 – Marcha geral seguida na mobilização da *geometria a ensinar* nas orientações *para* ensinar geometria

Manual	Marcha seguida na mobilização da *geometria a ensinar*
Braun (1872b)	Da geometria espacial para a geometria plana, realizando decomposições e recomposições sucessivas das formas
Pontes (1873)	Geometria plana
Affreixo e Freire (1890)	Da geometria plana para a geometria espacial
Coelho (1892)	Da geometria espacial para a geometria plana, realizando decomposições e recomposições sucessivas das formas
Coelho (s.d.)	Da geometria espacial para a geometria plana, realizando decomposições e recomposições sucessivas das formas
Coelho (1907)	Da geometria espacial para a geometria plana, realizando decomposições e recomposições sucessivas das formas
Al (1907)	Da geometria plana para a geometria espacial
Carré e Liquier (1920)	Da geometria espacial para a geometria plana

Fonte: Elaborado pela autora.

O terceiro elemento que elegemos como parâmetro para esta análise comparativa é a marcha geral de ensino, a ordem sugerida para estruturar os componentes do objeto de ensino. Quando falamos "marcha geral de ensino", estamos remetendo-nos à graduação entre geometria plana e espacial. Optamos por essa expressão devido ao fato de as orientações *para* ensinar geometria elaboradas pelos autores dos manuais não adentrarem na estruturação dos saberes que integram cada uma dessas áreas em termos de sua organização em séries ou anos escolares, como graduam os programas de ensino, por exemplo.

Para melhor visibilidade do que propõem os autores dos manuais sobre este aspecto, convidamos o leitor a observar o quadro 8, apresentado anteriormente. A partir do que está posto neste quadro, destacamos que a ordem como os autores mobilizam os conteúdos que compõem a *geometria a ensinar*, tratada nas orientações *para* ensinar geometria que eles sistematizam, não é unânime. Considerando toda a geometria admitida na elaboração dessas diretivas, a maioria dos manuais (BRAUN, 1872b; COELHO, 1892, s.d.; 1907; CARRÉ; LIQUIER, 1920) aborda primeiro o ensino dos elementos da geometria espacial e depois da geometria plana, seguindo uma marcha geral de mobilização da *geometria*, do todo para as partes, considerando que as formas espaciais são compostas pelas planas.

No entanto, tendo em vista o modo como se desenvolve o processo de ensino, a marcha sintética também se manifesta nas orientações propostas pelos autores mencionados, pois ao passo que o todo é apresentado e que as partes que o formam forem sendo ensinadas, a forma espacial vai sendo recomposta. Assim, podemos caracterizar a marcha geral de ensino abordada pelos autores em destaque nas sistematizações que definem o trabalho pedagógico do professor *para* ensinar geometria, como analítica-sintética, como o próprio Augusto Coelho anuncia em seus manuais.

A marcha analítica-sintética também é indicada por Affreixo e Freire (1890) como a mais adequada para o ensino primário. No entanto, esses autores parecem não a considerar para a marcha geral de mobilização da *geometria a ensinar* como um todo, já que mencionam primeiramente a geometria plana e depois a espacial. Assim, parece que os autores se referem a cada forma geométrica individualmente no caso da geometria plana, como destacamos na recompilação de seu manual, e deixam a cargo do professor organizar um trabalho pedagógico para o ensino das formas espaciais que desenvolva a marcha analítica, já que as orientações elaboradas por eles não dispõem de detalhes neste ponto e a sintética aparece no processo de construção de sólidos. Analogamente acontece com o manual de AI (1907), que indica que a melhor opção é a marcha analítica, mas mobiliza nas suas diretivas o ensino das formas planas antes das espaciais.

As orientações *para* ensinar geometria de Affreixo e Freire (1890) e AI (1907) são muito sucintas e não falam explicitamente que se deve ensinar primeiro a geometria plana e depois a espacial, eles apenas as acionam nesta ordem nas suas diretivas formativas. Como ambos os manuais mencionam que a marcha analítica-sintética e analítica, respectivamente, são as melhores opções, o professor poderia desenvolver uma ideia de trabalho pedagógico para o ensino de geometria, a partir desses manuais, que, embora tratasse primeiramente da geometria plana e depois da espacial, poderia realizar análise e síntese no ensino das formas planas. Apresentando-as, dessa forma, como um todo não decomposto, recompondo-as ao passo que estudam as partes que os formam, linhas e ângulos, etc., e análise e síntese no estudo das formas espaciais, estudando as formas no seu todo e em suas partes, recompondo-as, dado o conhecimento das faces, arestas, etc.

Esse movimento entre análise e síntese no ensino das formas geométricas espaciais está evidente em manuais que melhor detalham suas diretivas para o ensino de geometria. Como vimos em 4.1.1, a marcha geral de mobilização da *geometria a ensinar* como um todo nas orientações *para* ensinar geometria sistematizadas por Braun (1872b) é analítica, o autor indica primeiro o ensino das formas espaciais e depois das planas. No entanto, como fica evidente na lição do cubo, o primeiro movimento no ensino das formas espaciais é de análise, mostra-se o cubo e vai-se decompondo-o, mas também, apresentadas as formas que o compõem, realiza-se o movimento de síntese, explicando como estas se organizam na composição do cubo. Por outro lado, o ensino das formas planas nas orientações de Braun (1872b) está ordenado das partes para o todo: ponto, linha, ângulos, formas superficiais.

O manual de Pontes (1873) é o único que aborda apenas formas geométricas planas na sua sistematização sobre o ensino de geometria, mas, ainda assim, é possível observarmos que as formas geométricas planas limitadas por linhas retas estão dispostas em uma marcha sintética: linha, ângulo, quadrado, triângulos, etc.; enquanto a superfície curva em uma ordem analítica: círculo, arco, corda, ângulo, circunferência. Portanto, percebemos que, de todo modo, todos os manuais analisados são convergentes nesse movimento entre marcha analítica e sintética, considerando a ordem que os autores indicam e/ou em que mobilizam o objeto de trabalho do professor nas orientações sistematizadas para formá-lo *para* ensinar geometria.

No entanto, cabe destacar que não há consenso entre todos os autores do ponto de vista da sequência estabelecida entre geometria plana e espacial. A maioria dos manuais segue uma graduação da geometria espacial para a plana, mas alguns optam pela ordem inversa. Em ambos os casos, há o movimento entre análise e síntese, mas, no primeiro caso, a ideia de análise é aplicada à *geometria a ensinar* como um todo, considerando a espacial e a plana, apresentando esta a partir da decomposição das formas daquela. Por outro lado, na segunda situação, o movimento entre análise e síntese demonstra ser aplicado às formas individualmente, iniciando a análise por aquelas que são traçadas no plano. De todo modo, a maioria dos manuais segue uma graduação da geometria espacial para a plana, o que nos permite considerar que essa foi a marcha que prevaleceu no período.

O terceiro saber *para* ensinar geometria que consideramos como parâmetro para essa análise comparativa, o quarto elemento abordado nesse processo, é o modo como a geometria que é objeto de trabalho do professor deve ser apresentada aos alunos, segundo o que nossas fontes de pesquisa apresentam para a formação do professor dos primeiros anos escolares. Para facilitar a realização desta comparação, elaboramos o quadro 9, a seguir:

Quadro 10 - Processo de apresentação dos objetos de ensino

Manual	Processo de apresentação dos objetos de ensino
Braun (1872b)	Por meio de objetos concretos postos à vista dos alunos.
Pontes (1873)	Por meio de objetos concretos, e exemplos da indústria e das artes.
Affreixo e Freire (1890)	Por meio de objetos concretos, e exemplos da natureza e das artes.
Coelho (1892)	Por meio de objetos concretos e seu manuseio em jogos; a partir de seções convenientemente dirigidas que façam derivar uma forma de outra já apresentada; sólidos de superfície homogênea apresentados em uma só cor e, para sólidos formados por superfícies diferentes, cada uma de uma cor.
Coelho (s.d.)	Por meio de objetos concretos.
Coelho (1907)	Por meio de objetos concretos e seu manuseio em jogos; a partir de seções convenientemente dirigidas que façam derivar uma forma de outra já apresentada; a esfera pintada de uma só cor.
AI (1907)	Por meio de objetos concretos, e exemplos da natureza e das artes.
Carré e Liquier (1920)	Por meio de objetos concretos.

Fonte: Elaborado pela autora.

Quando analisamos o quadro 7, materiais de ensino indicados e/ou mobilizados (a presentado na página 157), observamos que todos os manuais destacam que, *para* ensinar geometria, devem ser utilizadas representações de formas geométricas concretizadas em madeira, papelão, cortiça, etc. Mas, para além de saber que recursos utilizar, é preciso que se discuta como utilizá-los e em que momento do processo de ensino essa mobilização deve ser feita, de acordo com as orientações que os autores sistematizam para formar os professores dos primeiros anos escolares. Isso faz com que entendamos que esses materiais não são apenas recursos. Eles são elementos que detêm saberes que orientam a prática do professor.

Tendo em vista o quadro 9, apresentado anteriormente, podemos discutir sobre a função dos materiais de ensino, haja vista que fica evidente que há convergências entre os manuais no sentido de que os objetos de ensino devem ser apresentados aos alunos a partir da utilização daqueles materiais. Assim, embora alguns autores sejam mais detalhistas que outros, é consenso entre eles que o professor deve apresentar aos alunos a geometria que é seu objeto de trabalho a partir de objetos concretos que despertem a percepção dos estudantes sobre a geometria que está sendo ensinada, não pelas explanações dos conceitos em sua forma sistematizada.

Assim, esse consenso vai além da utilização dos objetos por si só, tratando-os, de outra forma, como representantes materiais de um ideário pedagógico, considerando o modo como deveriam ser utilizados e em que momento do processo de ensino precisariam ser mobilizados. São materiais que “condensam saberes”, remetendo-nos à expressão empregada por Rezende e Valente (2020) para se referir a materiais que “são elaborados de modo a materializar concepções de ensino, de aprendizagem” (REZENDE; VALENTE, 2020, p. 43).

O último saber *para* ensinar geometria, e quinto critério, que consideramos como elemento constituinte de uma *geometria para ensinar* e elegemos como parâmetro para a análise comparativa das nossas fontes de pesquisa, o qual extraímos da recompilação que realizamos das orientações *para* ensinar geometria sistematizadas em cada manual, é o processo de generalização da *geometria a ensinar* mobilizada. Para discutirmos essa questão, convidamos o leitor a observar o quadro 10, que apresentamos a seguir.

Quadro 11 – Processo de generalização

Manual	Processo de generalização dos objetos de ensino
Braun (1872b)	A generalização não é mencionada explicitamente, mas aparece no processo de comparação dos objetos geométricos de ensino, no movimento de recomposição das formas, e no desenhar no quadro das formas estudadas.
Pontes (1873)	A generalização não é mencionada explicitamente, mas aparece no processo de comparação dos objetos geométricos de ensino.
Affreixo e Freire (1890)	A generalização não é mencionada explicitamente, mas os saberes *para* ensinar geometria mostram que a abstração e a síntese são pontos de chegada do processo de ensino, e isso pode ser observado nos exercícios de cartonagem, quando os sólidos geométricos são confeccionados e há o destaque dos elementos constituintes de tais formas na sua composição.
Coelho (1892)	A generalização não é citada de forma explícita, mas pode ser observada nas recomposições, em que, embora as operações sejam feitas com objetos, as propriedades que determinam as formas geométricas são destacadas. Também pela comparação. Orientação para formular a expressão da área de polígonos, tais como o produto entre a base e a altura de um paralelogramo, expressões de volume, e escrevê-las no quadro.
Coelho (s.d.)	Recomposição das formas. Tracejo de figuras no quadro.
Coelho (1907)	Não há generalização citada diretamente, mas pode ser observada nas recomposições, em que, embora as operações sejam feitas com objetos, as propriedades que determinam as formas geométricas são destacadas. Também pela comparação. Orientação para formular a expressão da área de polígonos, tais como o produto ente a base e a altura de uma retângulo, e expressões de volume.
Al (1907)	A generalização não é mencionada explicitamente, mas aparece no processo de reprodução e comparação das formas.
Carré e Liquier (1920)	A generalização não é mencionada explicitamente, mas aparece no processo de reprodução e comparação das formas.

Fonte: Elaborado pela autora.

A primeira questão que consideramos, no caso das generalizações, é se, de alguma maneira, há, na proposta dos autores, a indicação de que o futuro professor dos primeiros anos escolares leve os alunos a realizar generalizações, apresente propriedades, definições e conduza a abstrações.

Voltando-nos para o quadro 10, percebemos que as orientações *para* ensinar geometria, sistematizadas pelos autores destacados, direcionam para a generalização das formas geométricas que a princípio foram apresentadas pela manipulação do concreto. Portanto, mesmo que não esteja escrito nos manuais que determinado momento do processo de ensino caracteriza a apresentação das propriedades que definem essas formas, a generalização do objeto de ensino, todos os manuais convergem para que o ponto de chegada da atividade de ensino seja a construção da ideia abstrata do que se ensinou inicialmente pelo concreto.

A comparação e a recomposição das formas são as estratégias que mais evidenciam isso. Pela comparação, o aluno pode perceber quais são as propriedades que definem determinada forma geométrica, e que uma forma só será considerada daquele tipo quando possuir todas elas. Assim, poderá construir a ideia de que, por exemplo, todo quadrado possui quatro lados congruentes formados por linhas retas e quatro ângulos de noventa graus, mas também que nem todos os quadrados são iguais em termos de tamanho dos lados. Comparar formas geométricas da mesma natureza, em termos de igualdade e desigualdade, ou entre formas de naturezas diferentes, no que se refere, também, ao formato da figura, corrobora para que os alunos construam uma imagem ideal de cada forma e do que a define. Para identificar uma forma geométrica específica dentro de um conjunto de objetos é preciso que o aluno reconheça em uma forma as propriedades daquela que ele deseja encontrar, exercitando a constituição dessa imagem abstrata do objeto geométrico de ensino.

A síntese, que é o movimento de recomposição, que vai acontecendo gradual e sucessivamente em relação à análise, como explicamos ao compararmos os elementos do quadro anterior, também contribui para que essa imagem abstrata seja construída pelo aluno, assim como a reprodução gráfica das formas. Por esses processos, o aluno exercita sua compreensão sobre as propriedades que definem dada forma, pois, para recompor um cubo, por exemplo, exige que ele saiba que vai precisar de seis quadrados congruentes que devem ser agrupados formando ângulos triedros, oito vértices e doze arestas.

Nesse exercício do raciocínio, o aluno pode chegar a generalizações e a construir uma compreensão em abstrato, uma imagem ideal daquela forma. Portanto, o processo de generalização não está descrito de forma explícita em todos os manuais analisados, mas as orientações dos autores sinalizam que isso acontece via síntese, recomposição das formas, comparação ou reprodução gráfica, evidenciando suas propriedades e desprendendo o abstrato dos materiais concretos. Assim, apresentar as formas geométricas a partir do concreto e desenvolver um processo de ensino que leve à generalização sobre elas é consenso entre os referidos manuais.

A partir das comparações dos elementos, do processo de apresentação e de generalização, percebemos que estes são reveladores de uma graduação para o ensino de geometria que põe o concreto e o conhecido antes do abstrato e desconhecido, respectivamente. Isso evidencia uma ordem em que o desenvolvimento da percepção sobre os objetos de ensino antecede as definições na constituição da *geometria para ensinar* que vamos sistematizar.

O sexto e último elemento que elegemos como parâmetro de comparação são os pedagogistas nos quais os autores anunciam que buscam referência para a sistematização das orientações *para* ensinar geometria expressas nos manuais que admitimos como fonte de pesquisa. Como já mencionamos, esse elemento de comparação não é propriamente integrante da constituição de uma *geometria para ensinar*, como os demais que discutimos nesta seção, mas suas ideias o são. Sua identificação sinaliza a filiação do autor do manual a determinado ideário pedagógico, no qual pode estar fundamentada a sistematização das orientações *para* ensinar geometria sistematizadas pelos autores, das quais recompilamos esse elemento.

Quadro 12 – Pedagogista de referência

Manual	**Pedagogista de referência**
Braun (1872b)	Joseph Schmid
Pontes (1873)	Thomas Braun
Affreixo e Freire (1890)	Froebel
Coelho (1892)	Froebel
Coelho (s.d.)	Froebel
Coelho (1907)	Froebel
Al (1907)	–
Carré e Liquier (1920)	Pierre Leyssenne

Fonte: Elaborado pela autora.

Ao observarmos o quadro 11, acima ilustrado, constatamos que praticamente todos os autores mencionam pedagogistas nos quais buscaram referência para sistematizar suas orientações *para* ensinar geometria. Também é notório que, entre as referências destacadas, a que é mais recorrente entre os autores das nossas fontes de pesquisa, e um dos pedagogistas mais reconhecidos na atualidade, é Friedrich Froebel, sobre o qual falamos na seção 3.1. Assim, percebemos de imediato que Affreixo e Freire (1890) e Coelho (1892; s.d.; 1907) fundamentam-se em um ideário pedagógico pautado no método intuitivo, já que Froebel é forte representante dessa vaga pedagógica, discípulo de Pestalozzi, o propulsor do uso do método intuitivo nos primeiros anos escolares, como melhor destacamos na seção indicada.

Os elos que formam a corrente pedagógica da qual participam Pontes (1873) e Braun (1872b) também levam a Pestalozzi, como consta nas notas biográficas dos pedagogistas de referência desses autores das nossas fontes de pesquisa. A referência na qual Pontes (1892) se baseia é justamente o próprio Thomas Braun, e Braun (1872b) menciona que se baseia na obra de Joseph Schmid, que, por sua vez, foi aluno nos institutos de Pestalozzi, discípulo deste e propagador do método intuitivo, particularmente do “sistema de ensino de Pestalozzi para o estudo da matemática” (OLIVEIRA, Marcus, 2017b, p. 1019).

Carré e Liquier (1920) mencionam os estudos de Pierre Leyssenne, o qual tem nos seus escritos vestígios do método intuitivo. Apenas o manual de AI (1907) não menciona filiação a algum pedagogista mais renomado naquele cenário histórico-educacional. No entanto, assim como todos os demais, faz referência ao método intuitivo nas suas orientações *para* ensinar geometria, no seu caso, mesmo sem citar tais personalidades, o que evidencia a disseminação dos processos intuitivos entre os autores de manuais de Pedagogia dirigidos à formação institucional de professores nas décadas iniciais do século XX. Portanto, percebemos que o ideário pedagógico do método intuitivo circundou a sistematização de saberes para o professor ensinar geometria em todos os manuais que consideramos como fonte de pesquisa.

Comparando os manuais de Pedagogia de modo geral, a partir das recompilações apresentadas na seção anterior a esta, destacamos que aqueles que demarcam os dois extremos do período de estudo que consideramos sugerem estratégias de ensino muito semelhantes. Nesse sentido, percebemos que Braun (1872) e Carré e Liquier (1920) orientam que o futuro professor faça perguntas aos alunos sobre as características dos objetos de ensino, as quais eles possam responder pela observação ou manipulação de objetos concretos, e que determinarão as propriedades do que está sendo ensinado. Ademais, *Lições de Pedagogia* (1907), especificamente no ponto que toca as orientações *para* ensinar geometria, apresenta excertos dos manuais de Affreixo e Freire (1890) e de Pontes (1873), que, por sua vez compila aspectos das orientações sistematizadas por Braun (1872).

Logo, constatamos que as ideias que intentam organizar um saber específico para o exercício da docência do professor que ensina geometria, em particular, já vinham sendo construídas desde Braun (1872) e foram se decantando e sendo sistematicamente dispostas nos manuais de Pedagogia, sobretudo nos exemplos das obras de Augusto Coelho, e circularam por diversos contextos de formação de professores. Concluímos que essas ideias sobre o que o professor deveria saber *para* ensinar geometria mostram-se convergentes, há consensos entre elas[61] nos aspectos que consideramos como elementos que corroboram para a constituição de uma *geometria para ensinar*.

Assim é possível dizer que esses manuais compõem entre si uma *vulgata* (CHERVEL, 1990) acerca das orientações *para* ensinar geometria. Portanto, podemos afirmar a existência de uma ferramenta de trabalho do professor *para* ensinar geometria passível de circulação e uso, mesmo que algumas sejam mais sistemáticas que outras, em termos de configuração de uma *geometria para ensinar*. Então, podemos sistematizá-la, de maneira que, independentemente do autor ou do manual, ela pode ser denotada como uma *geometria para ensinar* que se mostra como saber objetivado representante do período compreendido entre 1870 e 1920. Logo, passamos a essa sistematização.

4.3 Sistematização dos elementos de uma *geometria para ensinar* nos primeiros anos escolares no Brasil entre 1870 e 1920: caracterização de uma *geometria para ensinar*

Sistematizar os elementos de uma *geometria para ensinar* significa, nesta pesquisa, organizar as ideias que mais circularam sobre o que o professor precisava saber *para* ensinar geometria naquele período, as quais são observadas nos

[61] Quando dizemos que há convergências e consensos sobre o que os manuais propõem para o trabalho pedagógico do professor *para* ensinar geometria, não estamos sinalizando que são todos iguais em tudo que propõem. De outra forma, existem algumas pequenas variações entre eles, como vimos no elemento marcha de ensino. Mas sabemos que essas diferenças são observadas mesmo quando há a ocorrência do fenômeno de *vulgata*. Segundo Chervel (1990, p. 203, grifo nosso), quando há *vulgata*, “Todos os manuais ou **quase todos dizem** então **a mesma coisa**, **ou quase isso** [...] são essas variações aproximadas [...] que podem justificar a publicação de novos manuais”.

consensos pedagógicos, destacando e estabelecendo articulações entre a *geometria a ensinar* e os saberes *para* ensinar geometria apontados na análise comparativa.

Para esse processo de sistematização, não consideramos os elementos subjetivos, que são aqueles que não são comuns a maioria dos manuais, ou seja, que circularam de forma restrita e não fazem parte do consenso, os quais podem estar ligados a uma situação ou a um contexto particular do autor do manual, fatores que impedem ou dificultam o saber de ser comunicável e mobilizado em qualquer contexto (VALENTE, 2019a). Ressaltamos que isso não significa que elementos que não fizerem parte do consenso não podem ser mobilizados. Significa, sim, que eles tiveram uma circulação restrita ao público de um dado espaço.

Assim, fizemos perceber as formas objetivadas e vamos elaborar um saber objetivado, de maneira a não nos atermos a autores ou a manuais, mas à constituição de tal *geometria* que se manteve estável em determinado período, particularmente ente 1870 e 1920. Essa sistematização permitirá apresentar uma *geometria para ensinar* objetivada, que nestes tempos esteve passível de circulação e uso em qualquer contexto.

Destacadas as convergências e os consensos que discutimos na análise comparativa, a sistematização dessa *geometria para ensinar* que vamos realizar nesta tese considera os parâmetros que definiram a comparação realizada, os quais entendemos como os elementos constituintes da *geometria para ensinar* objetivada para o contexto da formação de professores dos primeiros anos escolares no Brasil, a partir de manuais de Pedagogia que circularam entre 1870 e 1920. Assim, a primeira noção que precisamos ter em conta refere-se à *geometria a ensinar* que os autores mobilizaram enquanto elaboravam as orientações *para* ensinar geometria que deveriam integrar a formação do professor.

Como admitimos que a geometria do ensino dos primeiros anos escolares, que é objeto de trabalho do professor que atua nesse nível escolar, integra a constituição da geometria que é ferramenta de trabalho do professor e estava disposta na sua formação institucional, antes de sistematizarmos reelaborações históricas de saberes *para* ensinar geometria para objetivarmos a *geometria para ensinar* desse contexto, vamos destacar que *geometria a ensinar* é mobilizada nesse processo. A geometria na qual está pautado o objeto de trabalho do professor que compõe a geometria que é ferramenta de seu trabalho é constituída por elementos[62] da geometria euclidiana.

Assim, essa é a base geométrica que se configurou como elemento do saber profissional do professor que ensinou matemática naquela época, que, agregada aos saberes *para* ensinar geometria, constituem uma *geometria para ensinar*. Portanto, o professor que ensinou geometria nesse período precisaria ter domínio sobre essa área da geometria, para que, quando os objetos de ensino fossem mencionados nas orientações *para* ensinar geometria, ele entendesse efetivamente do que se tratava. Mas também deveria compreender que o modo como aparece nas orientações *para* ensinar geometria não é uma cópia da geometria euclidiana.

Ter entendimento sobre formas geométricas, planas e espaciais, e as relações e propriedades que as fundamentam enquanto ente matemático era o mínimo de geometria que o professor deveria conhecer para que tivesse domínio sobre a geometria como ferramenta de trabalho. Portanto, essa é a geometria que vamos mobilizar nessa sistematização, mas sempre cientes de que, embora ela esteja atrelada ao campo disciplinar matemático, para estar na escola e ter *status* de saber *a* ensinar, ela passou por transformações impostas pela cultura escolar. A *geometria a ensinar* é um saber oriundo do campo disciplinar, mas o que é objeto de trabalho do professor não é definido por ele.

Considerando que, para sistematizar uma *geometria para ensinar*, não podemos deixar margem para elementos que impeçam sua circulação e seu uso em qualquer contexto, é preciso que consideremos, neste ponto, apenas os materiais de ensino que podem ser utilizados em qualquer sala de aula. Assim, na elaboração da *geometria para ensinar* que aqui realizamos, esses materiais que representam saberes sobre o trabalho pedagógico do professor são: uma coleção de formas sólidas, que podem ser talhadas em madeira ou feitas de papelão: esferas, cubos, cilindros, pirâmides, cones; placas e hastes de madeira, fios de ferro, esfera de cortiça e o quadro negro.

Essas formas concretizadas em diferentes materiais não são recursos os quais são indicados para o ensino de geometria, eles são objetos que caracterizam um ideário pedagógico que se contrapõe à imediata memorização dos conteúdos de

[62] Usamos a expressão "elementos da geometria euclidiana" devido ao fato de a forma como os conteúdos estão dispostos não corresponder necessariamente à lógica de estruturação euclidiana. Os conceitos referem-se à geometria euclidiana, mas a sua organização é própria do contexto de estudo.

ensino. Eles condensam saberes que orientam o trabalho pedagógico do professor. Por isso, vamos discutir com que finalidades e em que momento do processo de ensino eles devem ser utilizados, já que não são entendidos por si só.

Sobre a marcha de ensino, como discutimos na seção anterior, mesmo os manuais que mobilizam a geometria que é objeto de ensino na ordem da geometria plana para espacial também indicam a marcha analítica-sintética ou a analítica como a mais adequada para ser adotada na escola primária. Essas ideias não foram desenvolvidas detalhadamente nas orientações *para* ensinar geometria sistematizadas nos referidos manuais, já que essas diretivas foram apresentadas de forma sucinta por eles.

Por outro lado, a maioria dos manuais indica e/ou mobiliza a geometria que é objeto de trabalho do professor em uma marcha analítica-sintética, sistematizando orientações *para* ensinar geometria que detalham explicitamente a apropriação dos autores sobre análise e síntese no ensino de geometria, sobretudo os manuais de José augusto Coelho, que, tendo aprofundado o detalhamento sobre o trabalho pedagógico do professor *para* ensinar essa matéria escolar, pode ter suas orientações caracterizadas como uma *geometria para ensinar*. Portanto, a marcha geral para a estruturação da geometria que podemos considerar como consenso para sistematizar a *geometria para ensinar* representante do período compreendido entre 1870 e 1920 é a ordem da geometria espacial para a geometria plana, de modo a haver um movimento sucessivo entre análise e síntese no desenrolar da sistematização dessa geometria que é ferramenta de trabalho do professor.

A marcha específica mobilizada para as formas geométricas que se acentuou como consenso nesse período é do todo para as partes, da geometria espacial para a plana. No entanto, para os elementos que envolvem as formas superficiais, alguns autores mobilizaram os objetos de ensino das partes para o todo, isto é, do ponto para as formas superficiais. Outros, por outro lado, optaram pela ordem inversa, enquanto terceiros não detalharam a marcha a seguir. Portanto, sistematizamos uma *geometria para ensinar* que mobiliza as formas espaciais antes das planas, que apresenta as planas como decomposição das espaciais. Porém, dada a apresentação das formas sólidas, temos duas ideias sobre a ordem de ensino dos elementos das formas planas que circularam nesse período: formas planas, linhas e ponto; e ponto, linhas, e formas planas.

Ambas as ideias estão pautadas nas orientações de que se proceda do fácil para o difícil, do conhecido para o desconhecido e do concreto para o abstrato. Nesses processos, essas duas últimas graduações se mantêm, mas o que é fácil e o que é difícil parece ser diferente nos dois casos, não sendo possível notar absoluto consenso sobre o que é fácil e o que é difícil entre os autores. Na primeira, considera-se que os objetos geométricos de ensino devem ser apresentados de acordo com a marcha crescente do grau de abstração das formas geométricas, dos elementos que para serem entendidos como ente ideal exigem menor exercício de abstração para aqueles que demandem maior.

A segunda não expressa justificativa pedagógica, mas parece ainda estar atrelada à ordem estabelecida pela lógica matemática, a qual se preocupa com como se dá a constituição interna do campo disciplinar, fundamentando-se nas bases epistemológicas do próprio conhecimento matemático. Assim, a lógica matemática não é definida pela *expertise* de quem integra a cultura escolar, mas pelo matemático. No entanto, mesmo estando atrelados a essa ideia de estruturação da matemática que é objeto de trabalho do professor, nos manuais de Pedagogia há articulação com as ideias pedagógicas. As principais são sobre a exploração da percepção dos alunos, partindo do conhecido para o desconhecido e do concreto para o abstrato, em que o concreto se restringe aos objetos tangíveis e não se estende à ordem de abstração das formas. Considerando que a mobilização da marcha: formas planas, lineares e ponto, foi elaborada com mais detalhamento e com maior grau sistemático, além de ter circulado em mais regiões, sistematizamos uma *geometria para ensinar*, para representar o período mencionado, que a considera, partindo inicialmente das formas sólidas.

Portanto, a marcha de ensino que empregamos na sistematização também condensa saberes profissionais, pois não é uma ordem aleatória ou disciplinar que estrutura o ensino de geometria, mas uma sequência determinada por princípios pedagógicos que estabelecem que o que é mais fácil para o aluno aprender é o que exige um exercício de abstração mais simples, sendo os objetos de ensino graduados numa marcha crescente do grau de abstração das formas geométricas: formas espaciais, formas planas, linhas e ponto. Assim, essa marcha representa saberes que designam que o trabalho pedagógico do professor deve proceder do fácil - o que é mais simples para o aluno aprender, para o difícil; do conhecido para o desconhecido;

do concreto para o abstrato. Isso nos leva a refletir sobre os processos de apresentação e generalização.

O processo de apresentação dos objetos de ensino que admitimos para a sistematização da *geometria para ensinar* é aquele destacado como consenso na análise comparativa dos elementos que recompilamos das orientações *para* ensinar geometria: a geometria que é objeto de trabalho do professor deve ser apresentada aos alunos a partir de materiais concretos utilizados para o ensino, já mencionados, que despertem a percepção dos estudantes sobre a geometria que está sendo ensinada. Isso nos revela que a apresentação é um saber orientador da prática do professor, pois ela expressa a ideia de que o ensino de geometria não deve iniciar por definições e discussão de propriedades, mas pelo concreto, pelo conhecido.

Do mesmo modo, seguimos com a ideia consensual de que, mesmo recorrendo a materiais tangíveis, as propriedades que definem o que está sendo estudado devem ser gradualmente discutidas com os alunos, de maneira que se desenvolva a sua generalização, corroborando para que o aluno construa a ideia abstrata sobre o que está sendo ensinado. A comparação e a síntese, a recomposição das formas geométricas, são meios para desenvolver esse raciocínio. A generalização é elemento do saber profissional do professor *para* ensinar geometria, pois ela determina como o professor pode proceder para não se manter no concreto, no perceptível, chegando ao "outro lado da ponte" do caminho que leva do concreto para o abstrato, do conhecido para o desconhecido.

Os elementos que vínhamos discutindo no decorrer desta seção são saberes constituintes da *geometria para ensinar* que se manteve estável em manuais de Pedagogia da formação de professores dos primeiros anos escolares no Brasil entre 1870 e 1920. Então, cabe-nos organizar esses consensos pedagógicos condensadores de saberes orientadores da prática profissional do professor, os quais revelam um mesmo ideário sobre o que o professor deveria saber *para* ensinar geometria. Articulamo-los, para, assim, apresentarmos a sistematização dessa *geometria para ensinar*, o que evidenciamos[63] a seguir.

[63] Ressaltamos que o que está posto a seguir são os consensos que estabelecemos entre o que todos os manuais estudados propõem sobre o ensino de geometria. Nós apenas sistematizamos essas orientações, de modo que não são concepções formadas aleatoriamente por nós.

Nos primeiros anos escolares, a geometria que é objeto de trabalho do professor pode ter seu ensino iniciado pela esfera[64]. Os saberes representados pelos materiais de ensino indicam que eles são o subsídio da apresentação dos conteúdos de ensino. Então, primeiramente, deve ser posto diante dos alunos um material de ensino que represente concretamente esse ente geométrico. Para melhor despertar a atenção do aluno sobre como é a forma da esfera, é importante que ela seja de apenas uma cor, de modo que, ao manipulá-la e observá-la em diversas direções, o aluno possa perceber e fixar em sua mente que ela é um corpo redondo cuja superfície é homogênea, graduando, assim, o ensino do que é homogêneo para o heterogêneo. Para despertar a percepção dos alunos sobre essas características, o professor pode questioná-los: Se colocarmos esse objeto no chão, ele rola? Teremos a mesma visão do objeto ao observamo-lo de diferentes direções? Assim, podemos perceber que o desenvolvimento da percepção é um saber condensado nos materiais de ensino, os quais relacionam-se com a marcha, a apresentação, a generalização.

Após explorar a forma da esfera a partir de um objeto correspondente concretizado em matéria sólida, o professor deve apresentar o cubo de maneira análoga. Começa mostrando o objeto tangível correspondente a este ente geométrico para que os alunos possam examiná-lo e perceber que forma tem um cubo. Após os alunos estarem familiarizados com isso, o professor deverá comparar dois cubos de tamanhos diferentes, destacando as relações de igualdade ou desigualdade, de maneira que o aluno entenda o que se mantém naquela forma independente do seu tamanho. Nesse processo, questionamentos, tais como: (apontando para dois cubos do mesmo tamanho) esse corpo tem a mesma forma desse outro? (Apontando para dois cubos de tamanhos diferentes) Esse corpo tem a mesma forma desse outro? Ainda, um cubo precisa ser decomposto em oito cubos iguais, e tendo os alunos observado essa operação, o professor faz a recomposição do cubo original.

Com essa atividade, o professor deve assegurar que os alunos, a partir do despertar dos seus sentidos, da observação e da reflexão, viabilizado pelos materiais de ensino, entendam qual é a forma de um objeto geométrico chamado cubo. Esse é um processo em que não se deve apresentar suas definições. A partir deste objeto, o

[64] Não podemos dizer que há absoluto consenso entre todos os autores sobre a esfera ser o ponto de partida do ensino da geometria, haja vista que na maioria dos manuais não há especificação sobre por qual objeto de ensino começar. No entanto, os manuais que especificam isso indicam que a esfera deve ser a primeira forma geométrica a ser ensinada. Então, iniciamos essa sistematização por ela.

aluno vai fixar como é a forma de um cubo e perceber os elementos que se mantêm entre duas formas para que ambas sejam consideradas cubo. O paralelepípedo retângulo tem seu ensino disposto segundo essas mesmas diretrizes, sendo que a comparação a ser realizada está para além de entre duas destas formas. O paralelepípedo deve ser comparado, também, com o cubo, de modo a destacar o que lhes faz semelhantes ou diferentes.

O próximo objeto de ensino a ser explorado é o cilindro. Este deve ser apresentado a partir de uma forma que o represente concretizada em madeira, por exemplo. Como o cilindro é composto por superfícies de naturezas diferentes, é importante que a redonda seja de uma cor e a circular de outra, para que seja perceptível ao aluno as diferentes naturezas de formas que envolvem o formato do cilindro e como esse se apresenta. Para estimular essa percepção, o professor pode questionar os alunos: a visão que podemos ter do objeto é sempre a mesma ou varia de acordo com a posição de onde o observamos? Se colocarmos esse objeto nessa posição (colocar o objeto representante do cilindro sobre a forma circular), enxergaremos a forma da mesma maneira que vemos nessa posição (posicionar o objeto sobre parte redonda)? Ele pode rolar ao ser posto em alguma dessas posições?

O professor precisa, ainda, relacionar o cilindro aos objetos geométricos de ensino estudados anteriormente. De maneira análoga, deve acontecer o ensino do prisma: expor diante dos alunos objetos concretos que representem os diferentes prismas, levá-los a fixar como são essas formas, comparar os prismas com as formas anteriores, decompor um prisma hexagonal em triangulares e recompor o original, mostrando como um prisma pode ser composto por outros prismas.

A sexta forma geométrica a ser ensinada é o cone. Como no processo de ensino das formas anteriores, o cone deve ser apresentado a partir de um objeto concreto que o represente e corrobore para que os alunos despertem seus sentidos sobre a forma denominada cone. Analogamente ao caso do cilindro, a superfície redonda desta forma deve estar em uma cor e a circular em outra, contribuindo para que os alunos desenvolvam a percepção sobre os diferentes tipos de forma que compõem a forma do cone. Para isso, o professor pode questionar os alunos: a visão que podemos ter do objeto é sempre a mesma ou varia de acordo com a posição em que o observamos? Se colocarmos esse objeto nessa posição (colocar o objeto representante do cone sobre a forma circular), enxergaremos a forma da mesma maneira que vemos nessa posição (posicionar o objeto sobre parte redonda)? Ele pode rolar ao ser posto em alguma dessas posições?

Nesta primeira atividade que envolve o estudo do cone, o principal foco é que os alunos assentem na sua mente como é a forma do cone. Deste, o professor deve dar prosseguimento ao processo de ensino com a pirâmide, a qual deve ser exposta e explorada nos mesmos termos que os entes geométricos discutidos anteriormente: iniciar o estudo com objetos concretos que representem diferentes pirâmides, comparar duas destas, relacionar a forma da pirâmide àquelas já ensinadas, decompor uma pirâmide acima da triangular em triangulares e recompor a primitiva a partir destas. Com o estudo da referida forma, encerram-se os sólidos geométricos que são objeto de ensino, mas estes devem ser retomados para dar prosseguimento ao ensino da geometria, adentrando, a partir de então, nos elementos da geometria plana.

Para iniciar o ensino das formas superficiais, o professor precisa retomar a geometria que já é conhecida pelo aluno. Então, primeiramente, recorre ao cubo para, a partir dele, apresentar o quadrado. É necessário que o professor ponha diante dos alunos um cubo que possa ser decomposto em seis quadrados. Assim, os alunos poderão observar a forma que tem um quadrado e a planificação do cubo. Expandindo o estudo da forma do quadrado, o professor estabelece relações de igualdade ou desigualdade entre dois quadrados, seguindo com a decomposição de um quadrado maior em quadrados menores, recompondo, em seguida, o quadrado original.

Diante da decomposição do cubo em quadrados, a forma do quadrado é apresentada aos alunos e as propriedades do sólido primitivo começam a ser percebidas, de maneira que os alunos já podem construir a ideia de que as partes que compõem o cubo são seis quadrados e que, portanto, o cubo possui seis faces. Então, para estimular o desenvolvimento da percepção sobre a composição do cubo, o professor pode questionar: de que maneira precisamos agrupar esses seis quadrados para que obtenhamos um cubo? Em seguida, o professor passa a operar, diante do aluno, combinações entre quadrados, formando ângulos diedro e triedro, classificando-os em reto, agudo ou obtuso. Cabe ao professor destacar, neste momento, que, para formar um cubo, os quadrados precisam combinar-se formando ângulos diedros retos e triedros retângulos.

Assim, a forma cúbica deve ser recomposta por meio de quadrados, fazendo um movimento claro de síntese, que corrobora para que o aluno desenvolva o entendimento de que a forma de um cubo se delineia pela combinação de seis faces quadráticas, que delimitam ângulos diedros e triedros, e que todos esses elementos precisam ser iguais entre si. Então, a ideia abstrata de cubo pode começar a ser gradualmente desenvolvida: uma forma sólida que possui seis faces iguais que se agrupam formando ângulos triedros retângulos. Portanto, o professor deve apresentar a forma do quadrado a partir do cubo, mas, após conhecer tal forma superficial, é preciso voltar ao cubo destacando as propriedades dele que até então podem ser evidenciadas.

Enquanto que, para apresentar o quadrado ao aluno, o professor tem que retomar o cubo e decompô-lo, para expor o objeto de ensino denominado retângulo, é preciso recorrer a algo com que os alunos já estejam familiarizados e que seja capaz de viabilizar esse processo de pôr essa forma abstrata de primeira ordem à vista dos estudantes. Então, o ponto de partida para o ensino do retângulo é o paralelepípedo retângulo. Para tanto, o professor deve expor aos alunos um objeto concreto que represente esse sólido geométrico que possa ser decomposto e, então, decompor o paralelepípedo em retângulos, tornando perceptível ao aluno a forma que representa tal ente geométrico.

Após os alunos estarem familiarizados com a forma do retângulo, o professor precisa comparar retângulos estabelecendo relações de igualdade ou desigualdade, decompor um retângulo em retângulos menores e, em seguida, recompor o primitivo. Ao prosseguir com a decomposição do sólido que deu origem ao retângulo, a atenção dos alunos deve ser despertada para o fato de que também há quadrados na estrutura que caracteriza o paralelepípedo. O professor pode despertar a atenção dos alunos para tanto questionando-os: (apontando para o quadrado decomposto do paralelepípedo) como se chama essa forma? Todas as partes do paralelepípedo são iguais? Então, passa a comparar quadrados e retângulos, sendo possível desenvolver a percepção do aluno, nesse processo, perguntando: (mostrando um quadrado e um retângulo) o que é igual e o que é diferente entre essas duas formas?

Depois de os alunos conhecerem a forma do retângulo, o professor deve iniciar a preparação para a recomposição do paralelepípedo retângulo a partir do qual a forma do retângulo foi apresentada. Então, passa a combinar dois retângulos em ângulos diedros, e dois retângulos e um quadrado formando ângulos triedros, mostrando as relações geométricas que podem ser estabelecidas entre tais formas. Com essa atividade, o objeto mencionado deve ser recomposto ajuntando-se quatro retângulos e dois quadrados, de modo a mostrar para o aluno que um paralelepípedo retângulo é composto de seis faces, sendo quatro delas retângulos e duas quadrados, os quais precisam ter seus lados do mesmo tamanho que o menor lado do retângulo. E ainda, que os quadrados precisam ser combinados com os ângulos diedros retos formados pela união de todos os retângulos, compondo quatro ângulos triedros retângulos em lados opostos. Assim, o professor deve evidenciar as propriedades que definem o paralelepípedo, levando os alunos a construírem gradualmente a ideia abstrata dessa forma geométrica, comparando-a com a ideia de cubo.

Seguindo esse processo de ensino, o triângulo é a próxima forma geométrica que o professor precisa apresentar aos alunos. Para tanto, o sólido geométrico que os alunos já conhecem que deve ser considerado como ponto de partida para o ensino de algo desconhecido, é a pirâmide. O professor deve mostrar novamente aos alunos um objeto concreto que corresponda à forma de uma pirâmide, o qual possa ter suas faces laterais decompostas. Essas faces são triangulares e é pela sua observação que o aluno vai construir a ideia de como é a forma de um triângulo. Após os alunos estarem familiarizados com essa figura geométrica, é necessário que o professor destaque para eles relações de igualdade e desigualdade entre dois triângulos, mostre como um triângulo pode ser decomposto em triângulos menores e ter sua forma primitiva recomposta, e compare o triângulo com as formas que já são conhecidas pelos alunos, as quais foram apresentadas ao longo do processo de ensino de geometria.

Quando os alunos conhecerem a forma que representa um triângulo, o professor deve fazer combinações de dois e três destes, formando ângulos diedros e triedros, respectivamente. Assim, o professor oferece à vista dos alunos elementos que viabilizam a recomposição de uma pirâmide, os quais corroboram para que as propriedades desta forma geométrica comecem a ser observadas e compreendidas pelos alunos. Para o caso de uma pirâmide triangular, por exemplo, o professor precisa despertar a atenção dos alunos para que a composição deste sólido geométrico demanda quatro triângulos congruentes que se agrupam formando ângulos triedros. Desse modo, o professor parte da pirâmide para ensinar a forma do triângulo e, dado o conhecimento deste, volta ao sólido original para desenvolver a percepção dos alunos sobre suas propriedades e levá-los a construir gradualmente a ideia abstrata de uma pirâmide.

Com a exposição do triângulo partindo da pirâmide e a introdução das propriedades que definem a pirâmide como ente geométrico ideal, encerra-se o estudo da forma das figuras planas limitadas por linhas retas. O ensino de geometria deve prosseguir com as formas planas limitadas por linhas curvas. No caso dos primeiros anos escolares, o círculo ganha protagonismo. O professor pode apresentar o círculo a partir do cilindro ou do cone, extraindo a superfície circular desta forma geométrica espacial e mostrando para o aluno a forma que corresponde a um círculo.

Tendo conhecido, então, a forma do círculo, os alunos devem observar a comparação entre dois círculos e sua decomposição em setores e segmentos, como também relacioná-lo com as formas já conhecidas por meio dos estudos anteriores. Ao entenderem, os alunos, a forma circular, a recomposição dos sólidos cuja forma possui superfície(es) circular(es) deve ser realizada, pois a partir de tal compreensão as propriedades do cone e do cilindro podem começar a ser destacadas, de modo a evidenciar que o cone e o cilindro têm bases circulares, e construir a imagem ideal de tais corpos geométricos. O círculo encerra o ensino das formas planas, e o ensino da geometria nos primeiros anos escolares segue com o estudo das linhas.

Para ensinar as formas lineares retas, o professor pode aplicar seções paralelas entre si a uma superfície já estudada, fazendo desta derivar, diante do aluno, uma forma que represente a linha reta. Estas também podem ser apresentadas por meio de hastes cilíndricas cuja forma associa-se com uma linha reta. Com a noção de linha construída pelos alunos, duas linhas devem ser comparadas entre si, em termos de igualdade e desigualdade, e sua forma comparada com aquelas já conhecidas pelos anos nos processos anteriores. Então, o professor deve oferecer à vista do aluno combinações entre duas linhas retas, levando-os a desenvolver sua percepção sobre a ideia de ângulos agudos, retos e obtusos, bem como acerca de ângulos iguais ou não. Essa combinação entre linhas representadas pelas hastes obtidas deve se estender de modo a destacar como se formam linhas perpendiculares, oblíquas ou paralelas.

As formas superficiais, abstratas de primeira ordem, quando apresentadas, devem ser mobilizadas para recomporem as formas sólidas. Analogamente, ao expor as formas lineares, abstratas de segunda ordem, estas devem ser utilizadas em um processo de recomposição das formas superficiais, de modo que as propriedades dessas formas comecem a ser evidenciadas e as das sólidas ganhem mais elementos para a construção de sua ideia abstrata pelos alunos.

Ao perceberem e abstraírem as combinações das linhas, os alunos estão aptos a estudar a recomposição de formas superficiais estudadas. O triângulo e o quadrado podem ter uma representação concreta construída pela união das hastes cilíndricas que se associam à ideia de linhas. Assim, o professor deve destacar, pela exposição da composição das formas, que o triângulo possui três lados lineares retos que se agrupam formando ângulos lineares cuja soma interna deve corresponder a 180 graus; e o quadrado tem seus lados definidos por quatro linhas iguais que se organizam formando quatro ângulos retos. Tendo em vista essas construções, o professor deve mostrar o que são diagonais em um quadrado, e apótemas e perímetros em ambos os polígonos, seguindo o raciocínio para o ensino dos demais.

Após usar a compreensão da forma da linha para recompor polígonos, o professor precisa voltar a recompor formas sólidas manipulando os materiais indicados, de modo a destacar que alinhas formam as superfícies e estas, sólidos geométricos. Assim, o cubo, o paralelepípedo, o prisma, etc., poderão ter mais propriedades evidenciadas, de maneira que as arestas sejam associadas a linhas e o cubo, por exemplo, seja compreendido, até então, como uma forma sólida formada por seis faces quadradas iguais que se agrupam formando ângulos triedros retângulos, e doze arestas, que são retas lineares. A percepção do aluno sobre tal forma deve ser desenvolvida para que ele alcance uma compreensão que vá além da percepção de como é um cubo, e que torne possível desenvolver uma ideia sobre esta forma, uma ideia que, a partir da simples pronúncia da palavra “cubo”, seja capaz de remetê-lo àquela forma e às propriedades que a definem.

Depois de ensinar sobre as linhas retas, levar os alunos a observarem que a associação entre elas gera superfícies planas e que o agrupamento destas forma sólidos, ou seja, que os sólidos poliédricos são formados por formas planas, que por sua vez são compostas de linhas retas; o professor deverá ensinar, também, acerca de linhas curvas. Para isso, os objetos concretos representantes das superfícies curvas podem ser utilizados como ponto de partida, indo de uma forma conhecida a outra desconhecida, de maneira a destacar a circunferência a partir do círculo. Para tanto, pode-se utilizar um fio de ferro para contornar uma forma circular e gerar um objeto que represente a forma de uma circunferência. Após os alunos estarem familiarizados com essa forma, o professor poderá estabelecer relações de igualdade ou não entre duas circunferências e compará-las com as formas já conhecidas, que foram objeto de estudo anteriormente.

Para viabilizar a recomposição de superfícies que têm sua forma limitada por linhas curvas e de sólidos que possuem na sua formação superfícies curvas, o professor deve mostrar aos alunos como circunferências e retas podem se combinar, apontando linhas secantes e tangentes à circunferência, e, também, destacando outros elementos destas, tais como raios, cordas e diâmetros. Então, o professor pode recompor o círculo, e depois o cone e o cilindro, podendo configurar as linhas curvas das bases de tais sólidos geométricos como circunferência.

O último conteúdo geométrico a ser apresentado para os alunos dos primeiros anos escolares é o ponto, abstrato de terceira ordem. Para expô-lo, o professor pode utilizar objetos concretos cuja forma esteja associada ao ponto, como também decompor a haste cilíndrica, à qual se recorreu para apresentar linhas anteriormente, em porções que remetam ao formato do ponto. Construída a percepção sobre este ente geométrico, o professor deve compará-lo com linhas, superfícies e sólidos e realizar, diante do estudante, a recomposição das linhas a partir do agrupamento de pontos, expondo as linhas como agregado de pontos, as superfícies como combinações de linhas e os sólidos como união de superfícies. Nesse processo de recomposição, o professor deve despertar a construção da ideia abstrata do que é um ponto e destacar o que eles significam nas linhas, superfícies e sólidos, os vértices dos ângulos e os centros dos polígonos.

Feito o estudo do ponto, a partir da recomposição do cubo, por exemplo, o professor deve destacá-lo, enfim, como uma forma sólida formada por seis faces quadradas iguais que se agrupam formando ângulos triedros retângulos, doze arestas e oito vértices. Portanto, nessa perspectiva de geometria como ferramenta de trabalho do professor, é a partir do estudo de elementos da geometria plana que a geometria espacial ganha sentido ideal, pois é à medida que as formas superficiais são conhecidas que as propriedades das sólidas podem ser destacadas. Com a recomposição das formas sólidas partindo do ponto, o professor finaliza o ensino da geometria destinada aos primeiros anos escolares. Nesse movimento de decomposição e recomposição, as formas já conhecidas e os objetos concretos representantes de todas as formas estudadas são sempre o ponto de partida para o ensino das desconhecidas.

No quadro 12, a seguir, sintetizamos os elementos constitutivos da *geometria para ensinar* que sistematizamos, como também, destacamos suas convergências:

Quadro 13 – Síntese dos elementos constitutivos da *geometria para ensinar* que sistematizamos e suas convergências

Elementos	Pontos de convergência
Geometria a ensinar	A *geometria a ensinar mobilizada pelos autores converge* para elementos da geometria euclidiana.
Materiais de ensino	Coleção de formas sólidas, que podem ser talhadas em madeira ou feitos de papelão: esferas, cubos, cilindros, pirâmides, cones; placas e hastes de madeira, fios de ferro, esfera de cortiça e o quadro negro.
Marcha de ensino	A marcha de ensino revelou-se como elemento constitutivo de uma *geometria para ensinar*, mas em temos da ordem a seguir entre geometria plana e espacial não houve convergência unânime. No entanto, tal unanimidade foi percebida em relação ao movimento entre análise e síntese e, por quase todos os manuais seguirem da geometria espacial para a plana, consideramos que houve consenso sobre essa ordem. A graduação dos objetos de ensino do conhecido para o desconhecido, do concreto para o abstrato, também é consenso.
Apresentação	É consenso que os objetos de ensino não sejam apresentados a partir de definições, mas sim, dos materiais de ensino, dos saberes que eles representam.
Generalização	A ideia de generalização converge para a realização de comparação e recomposição das formas geométricas.
Filiação pedagógica	Método intuitivo.

Fonte: elaborado pela autora

Ao longo desta seção, explicamos e discutimos os elementos que defendemos como constituintes[65] da *geometria para ensinar* que se manteve estável em manuais de Pedagogia da formação de professores dos primeiros anos escolares no Brasil entre 1870 e 1920, os quais estão dispostos no quadro 12. Principalmente, sistematizamos as articulações estabelecidas entre tais elementos que nos possibilitaram expressar essa *geometria para ensinar* como saber objetivado, a qual está pautada em diretivas explícitas e específicas para a constituição de uma geometria que é ferramenta de trabalho do professor, organizando efetivamente uma geometria formativa em torno de um ideário pedagógico.

Como discutimos, a base teórico-metodológica na qual nos fundamentamos permitiu-nos enxergar a *geometria a ensinar* como elemento constitutivo da *geometria para ensinar*, o qual se mantém em articulação com saberes *para* ensinar geometria. Os materiais de ensino destacados para a apresentação das formas geométricas condensam saberes para a prática do professor que orientam sobre a necessidade de iniciar a graduação de ensino pelo conhecido, pelo concreto, pela mobilização dos

---

[65] Esses são os elementos que a nossa ótica de pesquisa nos permitiu observar nos manuais que consideramos como fonte de pesquisa, de maneira que não podemos assegurá-los como elementos constituintes da *geometria para ensinar* elaborada para ou em qualquer contexto.

sentidos sobre o objeto de ensino. Então, esses elementos da *geometria para ensinar* não se mostram como recursos, como pudemos ver na sistematização. De outra forma, eles são saberes que compõem um modelo pedagógico que configura uma metodologia para o ensino intuitivo de geometria, que, articulados, constituem uma *geometria para ensinar*.

Neste capítulo, exploramos manuais de Pedagogia em busca de fazer evidenciar o que eles propunham para o trabalho pedagógico do professor *para* ensinar geometria. Nesse processo, recompilamos orientações nas quais pudemos identificar elementos constituintes de uma *geometria para ensinar*, que em alguns manuais articulavam-se a ponto de expressarem uma geometria para ser ferramenta de trabalho do professor. Isso nos permitiu concluir que, de 1870 a 1920, houve, na formação dos professores dos primeiros anos escolares, a circulação de ideias pedagógicas específicas *para* ensinar geometria, umas com maior aprofundamento sistemático que outras, mas todas visando preparar o professor para o exercício da docência específico em geometria.

Comparamos esses elementos e constatamos que essas ideias sobre o que o professor deveria saber *para* ensinar geometria mostram-se convergentes nos aspectos que consideramos constituintes de uma *geometria para ensinar*, o que nos possibilitou sistematizar uma *geometria para ensinar* característica da formação institucional de professores dos primeiros anos escolares no Brasil entre 1870 e 1920. Tal geometria teve suas características expressas nesta seção, as quais nos permitem concluir que houve, historicamente, a elaboração de uma *geometria intuitiva para ensinar* e nos permitem admitir como verdadeira a hipótese que admitimos inicialmente. Tudo isso nos leva a defender que a pesquisa que realizamos sustenta a tese de que, entre 1870 e 1920, a cultura escolar elaborou e manteve estável, na formação dos professores dos primeiros anos escolares, uma ferramenta de trabalho do professor relativamente à docência em geometria que pode ser caracterizada como *geometria intuitiva para ensinar*.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

No âmbito da Educação Matemática, a formação de professores que ensinam matemática é foco de diversas investigações. Muito se discute sobre o formato “3 + 1”, que normalmente segrega as disciplinas pedagógicas das específicas da matemática. Também há questionamentos que põem em debate o fato de que os professores dos primeiros anos escolares não têm uma formação matemática consistente, tendo uma formação inicial pautada em aspectos teóricos e metodológicos que não mobilizam efetivamente a matemática que será objeto de trabalho do professor. Assim, essas pesquisas permitem-nos refletir que a formação do professor licenciado em matemática proporciona-lhe ampla formação nessa área, mas a formação pedagógica, que costuma ser cumprida apenas devido às exigências normativas, não é valorizada e acontece de forma desconectada da específica.

Não estamos defendendo que a formação pedagógica se sobreponha à específica da matemática ou que esta deve ser estudada superficialmente. Estamos destacando que essas duas áreas que integram a formação do professor não podem ser segregadas, mas, sim, que devem estar em constante articulação, propiciando ao professor um conjunto de saberes que lhe permita ser caraterizado como tal, saberes que sejam específicos de sua profissão. Essa ideia também se estende à formação dos professores que ensinam matemática nos primeiros anos escolares, que, por outro lado, se detém a aspectos teóricos e metodológicos dispersos da matemática que será objeto de ensino.

Essa tensão que se tem entre os campos disciplinares e profissionais pode ser estudada a partir da constituição histórica dos saberes que envolvem as profissões do ensino da formação, de modo que seja possível perceber os processos e dinâmicas que envolveram essas áreas e suas relações em cada tempo histórico. Na perspectiva da *História da educação matemática*, podemos pensar como esses processos foram acontecendo historicamente.

Estudos históricos, como no caso desta pesquisa de doutoramento, mostram que, no período de 1870 a 1920, havia articulação entre o campo disciplinar matemático e as ciências da educação, a qual mostrava-se pautada na elaboração de uma *geometria a ensinar* e de uma *geometria para ensinar*. Esta pesquisa é um estudo histórico em que refletimos sobre a constituição histórica de uma geometria que possa ser caracterizada como ferramenta de trabalho do professor que ensina matemática nos primeiros anos escolares, a qual é elemento constituinte do seu saber profissional. Assim, mostramos que a tensão mencionada acima nem sempre esteve presente na formação do professor.

Quando as décadas finais do século XIX contemplaram as ideias do método intuitivo, a geometria dos primeiros anos escolares foi sendo ressignificada de forma a aderir às ideias dessa vaga pedagógica que se instaurava em diversos países. Isso nos leva a refletir sobre como a formação do professor do referido nível escolar preparava-o para habituar-se a ensinar no contexto desse ideário pedagógico, o qual permeava os primeiros anos de escolarização, o que nos leva a pensar em caracterizar a ferramenta de trabalho do professor *para* ensinar geometria disposta na sua formação institucional nesse período.

Na formação de professores, como mencionamos na revisão da literatura, a geometria esteve pouco presente, se compararmos ao destaque que a aritmética possuía, em termos de rubricas matemáticas. Mas, assim como a geometria foi se consolidando como matéria nos primeiros anos escolares, nas escolas normais também foi acontecendo o mesmo. A geometria da formação das normalistas correspondia a aspectos da geometria euclidiana, geometria plana e a espacial. Diversos manuais de geometria foram destinados a essas instituições formadoras.

No entanto, quando pensamos em uma geometria que seja ferramenta de trabalho do professor, esses manuais não se mostram propícios a se configurarem como fontes de pesquisa viáveis, pois estão preocupados em sistematizar a geometria conforme o campo disciplinar matemático determina, sem preocupação em orientar sobre o processo de ensino. Os manuais que se sobressaem como materiais de essencial valor para esse estudo são os manuais de Pedagogia, os quais pontuavam elementos da formação profissional do professor, orientando sobre os métodos e processos de ensino, o professor, os alunos, a escola...

Neles, não há aparente tensão entre os campos disciplinares tradicionais e o pedagógico, mas sim a elaboração de orientações que, no mínimo, sistematizam orientações *para* ensinar geometria pautando saberes *para* ensiná-*la*, mas que chegam a, também, sistematizar a geometria como ferramenta de trabalho do professor dos primeiros anos escolares, articulando efetivamente a *geometria a ensinar* e os saberes *para* ensiná-*la*.

No contexto internacional, houve a produção de muitos manuais de Pedagogia a partir de meados do século XIX. No Brasil, sobretudo a partir das três últimas décadas deste século, começou-se a adotar manuais elaborados em países como França e Portugal, como também se passou a publicar obras escritas por brasileiros, como no caso do *Compêndio de Pedagogia* de Antonio Marciano da Silva Pontes. No entanto, muitos dos manuais, importados ou produzidos no Brasil, não dispunham, em seu *corpus*, de sistematizações que tratavam especificamente sobre a formação *para* ensinar geometria. As rubricas matemáticas que mais estavam pautadas nessas elaborações eram temas da aritmética, tais como cálculo, ou o próprio título de aritmética.

Percebemos, assim, que a geometria não possuía nos manuais de Pedagogia o mesmo destaque que aquelas rubricas de aritmética, já mais consolidadas, embora a geometria fizesse parte do currículo dos primeiros anos escolares e de escolas normais por todo o Brasil no mesmo período, 1870 a 1920. Entretanto, houve representativo número de manuais em que os autores se dispuseram a elaborar uma formação específica *para* ensinar geometria, e foi a eles que nos ancoramos para caracterizar a *geometria para ensinar* que integrou a formação dos professores dos primeiros anos escolares no Brasil no tempo escolar mencionado.

Considerando o que Gabriel Luís da Conceição destacou em sua tese de doutoramento, sobre a necessidade do domínio do desenho ou de trabalhos manuais na configuração de uma *geometria para ensinar* própria de tempos do método intuitivo, observamos que, nos manuais que configuraram a formação dos normalistas, as únicas orientações que mencionaram tais elementos como auxiliares do ensino de geometria foram sistematizadas por Irénée Carré e Roger Liquier na publicação de 1920. As fontes a partir das quais o pesquisador obteve essa conclusão são de finais do século XIX e sua publicação não era direcionada para a formação institucional do professor, mas para aqueles que estavam no exercício da profissão.

Assim, percebemos que os saberes propostos para constituir uma ferramenta de trabalho do professor *para* ensinar geometria levam tempo para se decantar e chegar às instituições formadoras de forma objetivada. Para além disso, notamos que esse processo está associado à disposição do autor de cada manual para contribuir com a sedimentação desses saberes, haja vista que muitos, apresentando uma compilação do que outros propunham, apontaram o caminho, mas não se dedicaram a aprofundar suas orientações com os detalhes que deveriam pautar as articulações necessárias à efetiva constituição de uma *geometria para ensinar*.

Nesta pesquisa de doutoramento, organizamos as orientações *para* ensinar geometria e reelaboramos os saberes *para* ensiná-*la* destacados nessas diretivas, mobilizando a *geometria a ensinar* na qual estão pautadas, sistematizando uma *geometria para ensinar* representante do período de 1870 a 1920. Com isso, podemos responder à questão de pesquisa que direcionou a escrita deste texto: que geometria se constituiu como ferramenta de trabalho do professor que ensinou matemática em tempos de método intuitivo no Brasil? E, também, evidenciar o cumprimento do nosso objetivo de caracterizar *uma geometria para ensinar* a partir de manuais de Pedagogia direcionados à formação de professores dos primeiros anos escolares no Brasil entre 1870 e 1920.

Para dizermos que geometria se constituiu como ferramenta de trabalho do professor que ensinou matemática em tempos de método intuitivo no Brasil, destacamos os elementos que a integram e como eles caracterizam-se e articulam-se para constituir essa *geometria para ensinar.* Como vimos, esses elementos convergem para o seguinte: a *geometria a ensinar* está pautada em elementos da geometria euclidiana; os materiais de ensino são: uma coleção de formas sólidas, que podem ser talhadas em madeira ou feitos de papelão: esferas, cubos, cilindros, pirâmides, cones; placas e hastes de madeira, fios de ferro, esfera de cortiça e o quadro negro; a marcha de ensino é analítica-sintética, o que significa que as formas geométricas são ensinadas do todo para as partes e depois faz-se o movimento inverso, os conteúdos são graduados do concreto para o abstrato, do conhecido para o desconhecido.

E ainda, a geometria tem seus conteúdos apresentados aos alunos a partir da mobilização daqueles materiais de ensino, estimulando o uso dos sentidos para a construção de percepções sobre as formas; a generalização acontece gradualmente. Esses elementos articulam-se configurando princípios do método intuitivo reelaborados *para* o ensino de geometria, associando-se ao ideário pedagógico ao qual os autores dos manuais se dizem filiados.

Assim, percebemos o destaque que os materiais de ensino possuem na constituição da *geometria para ensinar*. São utilizados na apresentação dos objetos de ensino porque representam saberes que determinam que os sentidos dos alunos sobre o que se deseja que ele aprenda devem ser explorados, que o concreto e o conhecido precisam ser oferecidos aos alunos de início e que gradualmente se construa a ideia abstrata e se chegue ao desconhecido, compondo uma marcha que se ordena do concreto para o abstrato, do conhecido para o desconhecido, ensinando as formas como decomposição de outras e estudando as propriedades por sua recomposição.

Logo, nessa *geometria para ensinar*, oferecer dados sensíveis à observação corresponde à articulação entre a *geometria a ensinar* e os materiais de ensino, de modo a apresentá-los ao aluno como representantes do ente geométrico que se espera que o aluno aprenda. Desenvolver a percepção sobre as formas compostas de superfícies de natureza diferentes tendo em vista o colorido das partes que as compõem, como no caso do cilindro e do cone, mostrando as formas em diferentes posições, explorando a decomposição e a recomposição das formas dos objetos concretamente, etc., também são saberes sedimentados nos materiais de ensino.

Partir do homogêneo para o heterogêneo associa-se a estudar primeiramente os sólidos compostos por uma superfície heterogênea, iniciando pela esfera, e seguir para os sólidos que são limitados por superfícies de diferentes naturezas, como o cilindro e o cone; ir do conhecido para o desconhecido significa oferecer aos alunos objetos geométricos cujas formas sejam familiares para eles, desses fazer derivar outras formas menos conhecidas por eles, que por sua vez são a fonte primitiva na qual o ensino de novas formas se apoia. Tal processo se ordena da seguinte forma: oferece-se aos sentidos dos alunos um cubo, sendo essa uma forma conhecida, essa forma é utilizada para ensinar o quadrado, este para apresentar a linha e esta, o ponto, por exemplo. Tais procedimentos podem ser notados detalhadamente na sistematização que realizamos anteriormente.

Seguir do concreto para o abstrato está pautado na articulação entre os elementos da *geometria a ensinar*, os materiais de ensino, a marcha de ensino na qual tal geometria é mobilizada e nos processos de apresentação e generalização. Essa articulação ocorre no desenvolvimento da percepção dos alunos sobre a forma em si, representada pelo concreto, apresentando as propriedades do ente geométrico gradualmente à medida que as suas partes são exploradas, até que se alcancem os elementos necessários à generalização e construção da ideia abstrata acerca dele.

Mais precisamente, isso está presente, por exemplo, na apresentação do cubo pela forma concreta que o representa, a posterior decomposição do cubo em quadrados, destes em linhas e destas em pontos e na recomposição sucessiva que explora quadrado como face do cubo, a linha como lado do quadrado, os ângulos como combinações de linhas e faces, e o ponto, até que se chegue gradualmente à conclusão de que pontos geram linhas, estas associam-se formando ângulos, cujo vértice é um ponto. E ainda, que o quadrado possui todos os lados iguais e ângulos de noventa graus e que o cubo é uma forma sólida que possui seis faces quadradas iguais que se agrupam formando ângulos triedros retângulos, doze arestas e oito vértices.

Nesse processo, as compreensões iniciais são estimuladas pela observação, pela percepção, mas estas impulsionam e viabilizam a sistematização da ideia abstrata. Partir do concreto para o abstrato também significa seguir dos elementos que possuem maior concretude, as formas sólidas, para aqueles que, para serem entendidos como ente ideal, exigem maior exercício de abstração, como o ponto.

Como destacamos, para além da *geometria a ensinar*, os elementos constitutivos desse saber são: os materiais de ensino, a marcha de ensino, o processo de apresentação e o de generalização. A marcha de ensino, em termos da graduação entre geometria espacial e plana, é o único que não é unânime. No entanto, ela revela-se como elemento de uma *geometria para ensinar* e pudemos estabelecer um consenso para seguir da geometria espacial para a plana, considerando que a maioria dos manuais possui essa abordagem.

Esses elementos e suas articulações convergem para a filiação pedagógica dos autores dos manuais, o método intuitivo. Os materiais de ensino são o elemento constitutivo da *geometria para ensinar* que mais expressivamente associam-na à vaga pedagógica intuitiva. Eles condensam saberes associados ao princípio da marcha de ensino, oferecendo o concreto, o associável ao conhecido, e à chegada dessa marcha, subsidiando o enunciado das propriedades e a compreensão em abstrato dos objetos de ensino.

Assim, esses materiais representam saberes associados ao desenvolvimento da percepção, no processo de apresentação, e da construção ideal do objeto de ensino, no processo de generalização. G*eometria a ensinar*, materiais de ensino, a graduação do ensino, a forma como os conteúdos são apresentados e a maneira como conduzir a generalização, são elementos do saber profissional do professor que, articulados, constituem a *geometria para ensinar.* Considerando a natureza de suas convergências, como discutimos, pode-se afirmar que tais elementos estão pautados no método intuitivo.

Assim, a *geometria para ensinar* que se manteve estável na formação de professores dos primeiros anos escolares no Brasil entre 1890 e 1920, a qual sistematizamos como a ferramenta de trabalho do professor *para* ensinar geometria representante dessa época, é devedora de princípios do método intuitivo, vaga pedagógica que circulou ampla e fortemente nesse nível escolar no período supracitado. Os autores dos manuais de Pedagogia que analisamos mencionaram esses princípios e indicaram a utilização do método intuitivo *para* ensinar geometria. Alguns chegaram a orientar especificamente sobre como aplicá-los ao ensino de geometria. Nesta pesquisa, reelaboramos essas orientações, mobilizando efetivamente a *geometria a* ensinar, expressando o que aqueles princípios significam no processo de constituição de uma geometria que é ferramenta de trabalho do professor.

Portanto, diante dos elementos que caracterizam a *geometria para ensinar* que sistematizamos, sobre os quais discorremos nas últimas páginas, podemos afirmar que a geometria que se constituiu como ferramenta de trabalho do professor que ensinou matemática em tempos de método intuitivo no Brasil está pautada na articulação e mútua dependência entre a *geometria a ensinar* mobilizada e os saberes *para* ensinar geometria que discutimos, de modo que a maneira como acontecem essas articulações e mobilizações caracteriza a *geometria para ensinar* sistematizada a partir de manuais de Pedagogia, direcionados à formação de professores dos primeiros anos escolares no Brasil entre 1870 e 1920, como intuitiva, o que nos permite sustentar a tese de que, nesse período, a cultura escolar elaborou e manteve estável, na formação dos professores dos primeiros anos escolares, uma ferramenta de trabalho do professor relativamente à docência em geometria que pode ser caracterizada como *geometria intuitiva para ensinar*.

Isso nos permite refletir sobre as alterações nos processos e dinâmicas de elaboração da matemática do ensino e da formação, haja vista que, em tempos escolares que antecederam a vaga intuitiva, o professor ensinava a partir de livros de aritmética ou geometria. Estes estavam pautados no raciocínio matemático, nas definições e pontuavam a memorização como meio a partir do qual os alunos aprenderiam matemática. Em tempos de método intuitivo, o saber profissional do professor *para* ensinar geometria foi alterado. A utilização de materiais de ensino passou a atribuir novos saberes para o trabalho pedagógico do professor. A mera reprodução do que estava nos livros de matemática foi substituída por esferas, cubos, cilindros, cones, etc., que, concretizados em diversos materiais, que configuram novas ferramentas de trabalho do professor para ensinar geometria, as quais são elementos constituintes de uma *geometria para ensinar*.

Ao concluir esta pesquisa de doutoramento, pusemo-nos a refletir sobre suas contribuições para a formação de professores que ensinam matemática, acerca da importância de caracterizar elementos do saber profissional do professor, particularmente dos primeiros anos escolares, *para* ensinar geometria. Então, concluímos que a contribuição mais notória que podemos apontar neste momento é a corroboração para a construção da identidade docente, do ser professor. Pusemos em destaque a existência histórica de saberes característicos da profissão do professor, os quais evidenciam a importância de se diferenciar o professor que ensina matemática do matemático.

Identificar e caracterizar uma *geometria para ensinar* mostra que, historicamente, foram elaborados saberes direcionados ao exercício da docência. A partir de sua *expertise*, professores sistematizaram saberes com capacidade para circularem e serem mobilizados em diferentes contextos, constituindo, para a formação do professor, saberes específicos desta, que a diferenciam da formação do matemático. Assim, nossa pesquisa contribui para o entendimento de que o ser professor é resultado de uma construção histórica, que precisa ser reconhecida para a constituição da identidade docente.

Ser possível sistematizar uma *geometria para ensinar* mostra que no período que estudamos os saberes que formavam o professor *para* ensinar geometria eram elaborados por quem tem *expertise* sobre o assunto, ou seja, quem está imerso na cultura escolar. Podemos perceber que ao longo do tempo a cultura escolar vai produzindo saberes, particularmente, para a formação de professores que ensinam matemática. Os processos de elaboração desses saberes são dinâmicos. Esses saberes são multiformes, se reinventam ao longo do tempo, mas também carregam elementos de permanência, mesmo que as dinâmicas resultantes das relações entre prática, apropriação e apropriação os ressignifique ao longo do tempo.

Os saberes da formação do professor que ensina matemática estão alinhados à perspectiva educacional de cada período histórico-educacional, mas eles têm origem no mesmo ambiente: a cultura escolar. Assim, a formação do professor que ensina matemática atualmente também é devedora de saberes que são resultados das sistematizações das experiências de quem integra a cultura escolar de tempos mais distantes, como também recentes.

Os saberes da formação do professor que ensina matemática na atualidade também são uma elaboração histórica desenvolvida no âmbito da cultura escolar. Esta cultura também é produtora de saberes para formar professores *para* ensinar matemática. Logo, ao pensarmos em estudar a geometria do ensino e/ou da formação de professores hoje, não devemos nos reportar ao campo disciplinar matemático, mas sim, concentramo-nos em mostrar que há uma *geometria para ensinar* que é ferramenta de trabalho do professor, a qual se constitui a partir de embates da cultura escolar com outras culturas, particularmente, com os campos da educação e da matemática.

Especificamente, caracterizar uma *geometria intuitiva para ensinar* colabora para que o professor perceba que foram acontecendo mudanças ao longo do tempo em torno dos saberes profissionais *para* ensinar geometria, mas que também há permanências decorrentes dessa ferramenta de trabalho do professor, e que essas permanências dessa *geometria intuitiva para ensinar* podem fazer sentido na constituição do seu saber profissional *para* ensinar geometria conforme as diretivas oficiais determinam atualmente.

Quando discutimos a constituição histórica do saber profissional do professor que ensina matemática, entendemos a *matemática a ensinar* e a *matemática para ensinar* como mutuamente dependentes, em que a *geometria para ensinar*, em particular, é uma ferramenta de trabalho de tal professor que se caracteriza como elemento do seu saber profissional. Outro elemento que corrobora para a constituição desse saber profissional é a *geometria a ensinar*. Esta geometria não foi nosso foco principal de investigação nesta pesquisa, de modo que não nos ativemos diretamente aos porquês da seleção dos conteúdos, às suas finalidades ou à sua estruturação. No entanto, ao tratar da *geometria para ensinar*, a geometria característica da formação do professor, também podemos – e isso mostrou-se ser inevitável – destacar a geometria do ensino, a *geometria a ensinar* mobilizada na elaboração da *geometria para ensinar*.

Na caracterização dessa *geometria* que realizamos, não comparamos a *geometria a ensinar* mobilizada pelos autores dos manuais com aquela que estava posta nos programas de ensino da mesma época, não analisamos se a marcha empregada nesse processo é a mesma que as diretrizes da escola primária determinavam, se os materiais de ensino e a forma de utilizá-los são consonantes. Essas são questões que futuramente podem ser desenvolvidas na escrita de outros textos que se dediquem a estudar como os saberes que estão presentes no âmbito da formação estão articulados com aqueles que se destacam na esfera do ensino.

Ademais, a pesquisa que realizamos exigiu-nos focar nas convergências sobre o que o professor precisava saber *para* ensinar geometria, de modo que foi possível estabelecermos consensos entre as propostas de diferentes autores e pudemos sistematizar uma *geometria para ensinar* representante do período de 1870 a 1920. Mas, mesmo quando há *vulgata*, como aprendemos com André Chervel, há pequenas diferenciações. Então, embora tenhamos nos dedicado às convergências, não significa que não houve transformações nesse mesmo período. Entre estas, as que julgamos, até o momento, como as que mais se sobressaem para serem estudadas são as apropriações da ordem que vai do concreto para o abstrato, análise e síntese para a sistematização das orientações *para* ensinar geometria, ou a *geometria para ensinar*, elaboradas nesse período.

REFERÊNCIAS

AFFREIXO, J. M. da G.; FREIRE, H. **Elementos de Pedagogia**: para uso do magistério primário portuguez. 8. ed. Lisboa: Livraria Ferreira, 1890.

ARAÚJO, J. C. S. Manuais Pedagógicos em Comparação: Cours Pratique de Pédagogie, de Daligault (1851), e Compêndio de Pedagogia, de B. J. M. Cordeiro (1874). **Cadernos de História da Educação**, [*s.i.*], v. 17, n. 1, p. 101-115, 2015. Disponível em: http://www.seer.ufu.br/index.php/che/article/view/42299. Acesso em: 23 jun. 2020.

BARREIROS, M. F. **O ensino de geometria nos grupos escolares do Estado de São Paulo (1890 a 1930)**. 2011. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Bandeirantes de São Paulo, São Paulo, 2011.

BARROS, S. de C. de. **O ensino de geometria na formação de professores primários em Minas Gerais entre as décadas de 1890 e 1940**. 2015. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2015.

BARROS, P. M. de. Alvorecer de uma nova ciência: a medicina tropicalista baiana. **História, Ciências, Saúde,** Manguinhos, v. 4, n. 3, p. 411-459, 1998.

BERTINI, L. de F.; MORAIS, R. dos S.; VALENTE, W. R. **A Matemática a ensinar e a Matemática para ensinar**: novos estudos sobre a formação de professores. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2017.

BITTENCOURT, F. P. **Compêndio de Pedagogia Escolar**. Rio de Janeiro: Livraria Francisco Alves, 1908.

BLAKE, A. V. A. S. **Dicionário bibliográfico brasileiro**. v. 1. Rio de Janeiro: Tipografia Nacional, 1883. Disponível em: https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/126126. Acesso em: 13 jul. 2020.

BORER, V. L. Saberes: uma questão crucial para a institucionalização da formação de professores. *In*: HOFSTETTER, R.; VALENTE, W. R. (Orgs.) **Saberes em (trans)formação:** tema central da formação de professores. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2017. p. 173-199.

BOTO, C. A arte de tornar ciência o ofício de ensinar: compêndios pedagógicos de Augusto Coelho. *In*: REUNIÃO ANUAL DA ANPED, 30, 2007, Caxambu. **Anais eletrônicos** [...]. Caxambu: [*s.i.*], 2007. Disponível em: http://30reuniao.anped.org.br/trabalhos/GT02-2850--Int.pdf. Acesso em: 11 out. 2019.

BOTO, C. J. M. C. dos R. A. Compêndios pedagógicos de Augusto Coelho (1850-1925): a arte de tornar ciência o ofício de ensinar. **História da Educação**, ASPHE/FaE/UFPel, Pelotas, v. 14, n. 30, p. 9-60, 2010. Disponível em: https://seer.ufrgs.br/asphe/article/view/28910. Acesso em: 27 mai. 2019.

BOTO, C. J. M. C. A liturgia da escola moderna: saberes, valores, atitudes e exemplos. **História da Educação**, Porto Alegre, v. 18, n. 44, p. 99-127, 2014. Disponível em: https://seer.ufrgs.br/asphe/article/view/45765. Acesso em: 11 out. 2019.

BOTO, C. J. M. C. dos R. A civilização escolar pelos compêndios didáticos de formação de professores. **Educar em Revista**, Curitiba, v. 34, n. 70, p. 155-178, 2018. Disponível em: http://www.scielo.br/pdf/er/v34n70/0104-4060-er-34-70-155.pdf. Acesso em: 21 mai. 2019.

BOURDONCLE, R. Professionnalisation, formes et dispositifs. **Recherche et Formation**, [*s.i.*], n. 35, 2000. Disponível em: https://www.persee.fr/issue/refor_0988-1824_2000_num_35_1. Acesso em: 28 fev. 2019.

BRAUN, T. **Cours téorique et pratique de pédagogie et de méthodologie**. v. 1. Liège: H. Dessain, Imprimeur-Libraire, 1872a.

BRAUN, T. **Cours téorique et pratique de pédagogie et de méthodologie**. v. 2. Liège: H. Dessain, Imprimeur-Libraire, 1872b.

BRITO, A. de J.; MIORIM, M. A. A institucionalização da História da Educação Matemática. *In*: GARNICA, A. V. M. **Pesquisa em história da educação matemática no Brasil**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2016. (Coleção história da matemática para professores). p. 67-92.

BURKE, P. **O que é história do conhecimento?** 1. ed. São Paulo: Editora Unesp, 2016.

CARNEIRO, R. dos S. **Aritmética primário no túnel do tempo**. Vassouras, 2014a. 35p. Disponível em: http://www.uss.br/arquivos;jsessionid=136F9347E3BF6D3DD252D6ED4E5F81E5/posgraduacao/strictosensu/educacaoMatematica/produto/2014/Rogerio_Carneiro_produto_Fim.pdf. Acesso em: 30 ago. 2016.

CARNEIRO, R. dos S. **O método intuitivo na aritmética primária de Calkins e Trajano**. 2014b. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Programa de Pós-Graduação *Stricto Sensu* do Mestrado Profissional em Educação Matemática da Universidade Severino Sombra, Vassouras, 2016.

CARRÉ, I. ; LIQUIER, R. **Traité de Pedagogie Scolaire**. Paris: Librairie Armand Colin, 15. ed., 1920.

CARVALHO, M. M. C. de. Manuais de Pedagogia, materialidade do impresso e circulação de modelos pedagógicos no Brasil. **Revista Colombiana de Educação**, Bogotá, n. 52, 2007. Disponível em: https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=413635246007. Acesso em: 11 out. 2019.

CATANI, D. B; SILVA, V. B. da. Memória e história da profissão dos professores: as representações sobre o trabalho docente nos manuais pedagógicos. **Educação em foco**, Juiz de fora, MG, v. 12, n. 1, 2007. Disponível em:

http://www.ufjf.br/revistaedufoco/files/2009/10/343o-2-Ana-Maria-_7_1.pdf. Acesso em: 29 mai. 2019

CHARTIER, R. **A história cultural:** entre práticas e representações. 2. ed. Lisboa: Difel, 2002.

CHARTIER, R. Defesa e ilustração da noção de representação. **Fronteiras**, Dourados, MS, v. 13, n. 24, p. 15-29, 2011. Disponível em:http://www.ufrgs.br/gthistoriaculturalrs/nocaoderepresentacao.pdf. Acesso em: 22 abr. 2019.

CHERVEL, A. História das disciplinas escolares: reflexões sobre um campo de pesquisa. **Teoria & Educação**, Porto Alegre, v. 2, p. 177-229,1990. Disponível em: http://moodle.fct.unl.pt/pluginfile.php/122510/mod_resource/content/0/Leituras/Chervel01.pdf. Acesso em: 23 out. 2015.

CHOPPIN, A. O manual escolar: uma falsa evidência histórica. Tradução de Maria Helena C. Basto. **História da Educação**, Pelotas, v. 13, n. 27 p. 9-75, 2009. Disponível em: https://seer.ufrgs.br/asphe/article/view/29026. Acesso em: 01 mai. 2018.

COELHO, J. A. **Princípios de pedagogia**. Tomo I. São Paulo: Teixeira & Irmão Editores, 1891.

COELHO, J. A. **Princípios de pedagogia**. Tomo II. São Paulo: Teixeira & Irmão Editores, 1892.

COELHO, J. A. **Manual Prático de Pedagogia**. Porto: Livraria e Editora José Figueirinhas Júnior, [entre 1892 e 1907].

COELHO, J. A. **Noções de pedagogia elementar**. Lisboa: Livraria Moderna, 1907.

CONCEIÇÃO, G. L. da. ***Experts* em educação:** circulação e sistematização de saberes geométricos para a formação de professores (Rio de Janeiro, final do século XIX). 2019. Tese (Doutorado em Educação e Saúde na Infância e na Adolescência) – Departamento de Educação da Escola de Filosofia, Letras e Ciências Humanas, Universidade Federal de São Paulo, Guarulhos, 2019.

CONGRESO VIRTUAL IBEROAMERICANO DE FORMACIÓN DE PROFESORES, 2., 2020, evento virtual. Apresentação oral. Evento virtual: Universidade Federal do Rio Grande do Norte, 2020. Disponível em: https://youtu.be/INRw_DJUwqs.

CORREIA, S. C. de L. C. **O manual enciclopédico de Aquiles Monteverde**. 2004. Tese (Doutorado em Estudos Portugueses) - Universidade de Aveiro, Portugal, 2004. Disponível em: http://hdl.handle.net/10773/16562. Acesso em 28 fev. 2020.

D’ENFERT, R. O ensino de matemática nas escolas primárias na França (1880 - 1960): implicações socioculturais de uma escola de massas. Tradução de Maria Célia Leme da Silva e Maria Cristina de Araújo Oliveira. **Caminhos da Educação Matemática em Revista**, [*s.i.*], v. 1, n.1, 2014. Disponível em:

https://aplicacoes.ifs.edu.br/periodicos/index.php/caminhos_da_educacao_matematica/article/view/14. Acesso em: 29 out. de 2020.

D'ESQUIVEL, M. O. **O ensino de desenho e geometria para a escola primária na Bahia (1835-1925)**. 2015. Dissertação (Mestrado em Educação Científica e Formação de Professores) – Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, Jequié, 2015.

D'ESQUIVEL, M. O. **Primeiras Noções de Geometria Prática (1894-1966)**: a obra e as mudanças no saber profissional do professor que ensina geometria. 2019. Tese (Doutorado em Educação e Saúde na Infância e na Adolescência) – Departamento de Educação da Escola de Filosofia, Letras e Ciências Humanas, Universidade Federal de São Paulo, Guarulhos, 2019.

DALIGAUT, J. B. **Curso Prático de Pedagogia**. Santa Catarina: Tipografia de Ribeiro e Caminha, 1870.

DUBOIS, P. ; BRUTER, A. **Le Dictionnaire de pédagogie et d´instruction primaire de Ferdinand Buisson**: Répertoire biographique des auteurs. Paris: INRP, 2002. Disponível em: https://www.persee.fr/issue/inrp_0000-0000_2002_ant_17_1. Acesso em 22 set. 2020.

FARIAS, K. S. C. dos S. **Práticas mobilizadoras de cultura aritmética na formação de professores da escola normal da província do Rio de Janeiro (1868-1889**): ouvindo espectros imperiais. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Estadual de Campinas, Campinas, São Paulo, 2014a.

FARIAS, K. S. C. dos S. Práticas socioculturais de aritmética das escolas normal e primária na Província do Rio de Janeiro. **Currículo sem fronteiras**, [*s.i.*], v. 14, n. 3, p. 109-128, 2014b. Disponível em: http://www.curriculosemfronteiras.org/vol14iss3articles/farias.pdf. Acesso em: 13 jul. 2020.

FARIAS, K. S. C. dos S. Práticas aritméticas de professores da Escola Normal da Província do Rio de Janeiro. **Educação**: Teoria e Prática, Rio Claro, v. 26, n. 51, p. 112-125, 2016. Disponível em: http://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/educacao/article/view/9750/7688. Acesso em: 13 jul. 2020.

FIORENTINI, D.; OLIVEIRA, A. T. C. C. O Lugar das Matemáticas na Licenciatura em Matemática: que matemáticas e que práticas formativas? **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 27, n. 47, p. 917-938, dez. 2013. Disponível em: http://www.scielo.br/pdf/bolema/v27n47/11.pdf. Acesso em: 06 de nov. 2019.

FORTALEZA, F. J. dos S.; ROCHA, M. L. P. C. A geometria do ensino primário na formação de professores: elementos do saber profissional para ensinar geometria em um manual de Silva Pontes. *In*: ENCONTRO NACIONAL DE PESQUISA EM HISTÓRIA DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 05, 2020b, evento virtual. **Anais eletrônicos** [...]. Evento virtual: Universidade Federal do Rio Grande do Norte, 2020. Tema: História da educação matemática: panoramas curriculares e circulação de conhecimento. Disponível em: https://periodicos.ufms.br/index.php/ENAPHEM/article/view/12012/8017. Acesso em: 28 dez. 2021.

FORTALEZA, F. J. dos S.; ROCHA, M. L. P. C. Elementos do saber profissional do professor que ensina matemática: uma *geometria para ensinar* do Manual Prático de Pedagogia de José Augusto Coelho. **ACERVO** – **Boletim do Centro de Documentação do GHEMAT-SP**, São Paulo, v. 2, n. 2, p. 32-46, 2020a. Disponível em: http://acervo.ghemat.com.br/index.php/ACERVO-GHEMAT/article/view/18/12. Acesso em: 17 nov. 2020.

FORTALEZA, F. J. dos S.; ROCHA, M. L. P. C. Uma *geometria para ensinar* de José Augusto Coelho. **Ensino Em Re-Vista**, Uberlândia, MG, [2021]. (no prelo).

FORTALEZA, F. J. dos S.; VALENTE, V. R. Uma *geometria para ensinar* no curso primário: elementos do saber profissional da docência no manual de Coelho (1892). **VIDYA**, Santa Maria, v. 39, n. 2, p. 347-361. Disponível em: https://periodicos.ufn.edu.br/index.php/VIDYA/article/view/2831/2411. Acesso em: 16 jan. 2020.

GEERTZ, C. **A interpretação das culturas**. 1. ed., 13. reimpressão. Rio de Janeiro: LTC, 2008.

GHEMAT. **Glossário**. São Paulo: UFSC, 2016. Disponível em: https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/158952. Acesso em: 05 mar. 2018.

HEILAND, H. **Friedrich Fröbel**. Tradução: Ivanise Monfredini. Recife: Fundação Joaquim Nabuco, Editora Massangana, 2010. (Coleção Educadores).

HOFSTETTER, R.; SCHNEUWLY, B. Saberes: um tema fundamental para as profissões do ensino e da formação. *In*: HOFSTETTER, R.; VALENTE, W. R. (Orgs.) **Saberes em (trans)formação:** tema central da formação de professores. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2017. p. 113-172.

JULIA, D. A Cultura Escolar como Objeto Histórico. Trad. Gisele de Souza. **Revista Brasileira de História da Educação**, Campinas, v. 1, n. 1, p. 08-43, 2001. Disponível em: http://www.rbhe.sbhe.org.br/index.php/rbhe/article/view/273/281. Acesso em: 15 fev. 2016.

LEME da SILVA, M. C.; VALENTE, W. R. A geometria nos grupos escolares. *In*: LEME da SILVA, M. C.; VALENTE, W. R. (Orgs.). **A geometria nos primeiros anos escolares**: história e perspectivas atuais. Campinas: Papirus, 2014. p. 41-64.

LEME da SILVA, M. C. Saberes para ensinar matemática: um olhar para a formação do professor primário. **Acta Scientiae**, Canoas, v. 19, n. 6, p. 889-901, 2017. Disponível em: www.periodicos.ulbra.br/index.php/acta/article/download/3215/2713. Acesso em: 05 jun. 2018.

LEME da SILVA, M. C.; TRINDADE, D. de A.; D'ESQUIVEL, M. O.; OLIVEIRA, M. A. de. A matemática dos primeiros anos escolares e a circulação do método intuitivo nos livros didático. *In*: MENDES, I. A.; VALENTE, W. R. **A matemática dos**

primeiros anos escolares: curso primário, 1890-1970. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2017. p. 11-67.

LEME da SILVA, M. C.; VALENTE, W. R. Aritmética e geometria nos anos iniciais: o passado sempre presente. **Revista Educação em Questão**, Natal, v. 47, n. 33, p. 178-206, 2013. Disponível em: https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/156547. Acesso em 21 dez 2018.

LEME da SILVA, M. C.; VALENTE, W. R. (Orgs.). **A geometria nos primeiros anos escolares**: história e perspectivas atuais. Campinas: Papirus, 2014.

LEGROS, V.; MOYON, M. Mathématiques et Troisième République au diapason dans les manuels scolaires de Pierre Leyssenne. In: **COLLOQUE INTERNATIONAL L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES A L'ECOLE PRIMAIRE**, XIXe – XXe. SIECLE. 2015. ESPE de L'Académie de Limoges/IREM de Limoges. Disponível em: http://www.irem.unilim.fr/fileadmin/documents/conferences/150331_programme_resumes_final.pdf. Acesso em: 29 out. 2020.

LIÇÕES de pedagogia: colleccionadas por um amigo da instrução. Rio de Janeiro: Livraria Francisco Alves, 1907.

LIMA, E. B.; VALENTE, W. R. O saber profissional do professor que ensina matemática: considerações teórico-metodológicas. **Argumentos Pró-Educação**, Pouso Alegre, v. 4, n. 11, p. 928-943, 2019. Disponível em: http://ojs.univas.edu.br/index.php/argumentosproeducacao/article/view/500. Acesso em30 out. 2019.

MACHADO, M. H. Sociologia das profissões: uma contribuição ao debate teórico. *In*: **Profissões de saúde**: uma abordagem sociológica [online]. Rio de Janeiro: Editora FIOCRUZ, 1995, pp. 13-33.

MACIEL, V. B. **Elementos do saber profissional do professor que ensina matemática:** uma *aritmética para ensinar* nos manuais pedagógicos (1880 – 1920). 2019. Tese (Doutorado em ciências) - Programa de Pós-Graduação em Educação e Saúde na Infância e na Adolescência da Universidade Federal de São Paulo, Guarulhos, 2019.

MACIEL, V. B.; VALENTE, W. R. Elementos do saber profissional do professor que ensina matemática: o Compêndio de Pedagogia de Antônio Marciano da Silva Pontes. **Amazônia**, [*s.i.*], v. 14, n. 31, p. 165-180, 2018. Disponível em: https://periodicos.ufpa.br/index.php/revistaamazonia/index. Acesso em: 04 dez. 2018.

MARTINEZ, S. A.; LOPES, S. de C. a Contribuição de Henrique freire para a circulação das ideias pedagógicas no brasil e em Portugal no final de oitocentos. *In*: CONGRESSO BRASILEIRO DE HISTÓRIA DA EDUCAÇÃO, 6, 2011, Vitória. **Anais eletrônicos** [...] Vitória: Universidade Federal do Espírito Santo, 2011. Disponível em: http://www.sbhe.org.br/novo/congressos/cbhe6/anais_vi_cbhe/conteudo/res/trab_584.htm. Acesso em: 20 mai. 2019.

MOACYR, P. **A instrução e o Império**. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1936. Disponível em: http://www.brasiliana.com.br/obras/a-instrucao-e-o-imperio-1-vol/pagina/181/texto. Acesso em: 08 ago. 2018.

MORAIS, R. dos S. "Intelectual? Não", expert. **Acta Scientiae**, Canoas, v. 21, n. Especial, p. 3-12, 2019. Disponível em: https://repositorio.ufsc.br/xmlui/handle/123456789/201967. Acesso em 24 jan. 2020.

NERY, A. C. B. Biblioteca escolar, pedagogia e formação de professores: livros da Escola Normal de Piracicaba (1896-1951). **Linha mestra**, [*s.i.*], n. 24, 2014. Disponível em: https://repositorio.unesp.br/handle/11449/115345. Acesso em 11 out. 2018.

OLIVEIRA, A. T. de C. C. de; FIORENTINI, D. O papel e o lugar da didática específica na formação inicial do professor de matemática. *In*: REUNIÃO ANUAL DA ANPED, 37, 2015, Florianópolis. **Anais eletrônicos** [...]. Florianópolis: Universidade Federal de Santa Catarina, 2015. Disponível em: http://www.anped.org.br/sites/default/files/trabalho-gt19-4183.pdf. Acesso em: 11 out. 2019.

OLIVEIRA, Marcus. A. de. **A aritmética escolar e o método intuitivo**: um novo saber para o curso primário (1870 – 1920). Tese (Doutorado em ciências) - Programa de Pós-Graduação em Educação e Saúde na Infância e na Adolescência da Universidade Federal de São Paulo, Guarulhos, 2017a.

OLIVEIRA, Marcus. A. de. Circulação. v. 1. *In*: VALENTE, W. R. (Org.). **Cadernos de trabalho II**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2018.

OLIVEIRA, Marcus. A. de. *Pedagogia Intuitiva* da Escola Elementar de Pestalozzi: como se ensinava Aritmética? **Bolem**, Rio Claro, v. 31, n. 59, p. 1005-1031, 2017b. Disponível em: https://www.scielo.br/pdf/bolema/v31n59/0103-636X-bolema-31-59-1005.pdf. Acesso em: 27 nov. 2020.

OLIVEIRA, Maria. C. A. Profissionalidade para o ensino de geometria: um estudo a partir da legislação. **Revista de História da Educação Matemática**, [*s.i.*], ano 1, n. 1, 2015. Disponível em: http://histemat.com.br/index.php/HISTEMAT/article/view/14. Acesso em: 10 dez. 2019.

PAROZ, P. J. **Histoire universalle de la pédagogie**. Paris: Librairie CH. Delagrave, 1883.

PEREZ, T. T. **História da formação de professores em São Paulo (1875 - 1894)**: interseções entre os ideais de professor e de escola. 2012. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2012.

PINHEIRO, N. V. L. **A aritmética sob medida**: a matemática em tempos da pedagogia científica. 2017. Tese (Doutorado em ciências) - Programa de Pós-

Graduação em Educação e Saúde na Infância e na Adolescência da Universidade Federal de São Paulo, Guarulhos, 2017.

PINHEIRO, N. V. L.; VALENTE, W. R. Romper com a tradição e instalar o ensino intuitivo de matemática: os documentos dos arquivos da pioneira escola americana. *In*: CONGRESSO BRASILEIRO DE HISTÓRIA DA EDUCAÇÃO – CBHE, 07, 2013, Cuiabá. **Anais eletrônicos** [...]. Cuiabá: Universidade Federal do Mato Grosso**,** 2013. Tema: Circuitos e Fronteiras da História da Educação no Brasil. Disponível em: http://sbhe.org.br/novo/congressos/cbhe7/. Acesso em: 11 mar. 2016.

PINTASSILGO, J. Os manuais de pedagogia no primeiro terço do século XX: entre a tradição e a inovação. *In*: PINTASSILGO, J.; FREITAS, M. C. de; MOGARRO, M. J.; CARVALHO, M. M. C. de. (Orgs.). **História da Escola em Portugal e no Brasil**: circulação e apropriação de modelos culturais. Lisboa: Edições Colibri, p. 175-200, 2006.

PINTO, N. B.; NOVAES, B. W. D. Caracterização de saberes profissionais da matemática para ensinar nos primeiros anos escolares: anotações metodológicas. **Revista de História da Educação Matemática**, v. 4, n. 1, 2018. Disponível em: http://histemat.com.br/index.php/HISTEMAT/article/view/201. Acesso em: 30 out. 2019.

PONTES, A. M. da S. **Compêndio de pedagogia**: para uso dos alunos da escola normal da província do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro: Typ. da Reforma, 1873.

REZENDE, A. M. S. de; VALENTE, W. R. Materiais didáticos para o ensino de matemática: condensando saberes profissionais da docência. *In*: SANTOS, I. B. dos; BÚRIGO, E. Z.; VALENTE, W. R. (Orgs.). **Materiais didáticos e a história da educação matemática**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2020. p. 25-47.

SALVADOR, M. F. M. Buscando as metodologias utilizadas em aritmética na escola normal do Distrito Federal: 1899-1916. *In*: SEMINÁRIO TEMÁTICO, 14., 2016, Natal. **Anais eletrônicos** [...]. Natal: Universidade Federal do Rio Grande do Norte, 2016. Tema: Saberes elementares matemáticos do ensino primário (1890-1916): sobre o que tratam os Manuais Escolares? Disponível em: https://xivseminariotematico.paginas.ufsc.br/files/2016/05/SALVADOR_M_T2_vf.pdf. Acesso em: 24 mai. 2019.

SAVIANI, D. O legado educacional do “longo século XX” brasileiro. *In*: SAVIANI, D. (Org.) **O Legado educacional do século XX no Brasil.** 2. ed. Campinas: Autores Associados, 2006. (Educação contemporânea). p. 9-58.

SILVA, V. B. **Saberes em viagem nos manuais pedagógicos**: construções da escola em Portugal e o Brasil (1870 – 1970). 399f. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade de São Paulo, Faculdade de Educação, São Paulo, 2005.

SILVA, V. B. **A didática e os textos para formar professores**: o trabalho docente nos manuais pedagógicos (1870-1991). 110f. Tese (Livre Docência) – Universidade de São Paulo, Faculdade de Educação, São Paulo, 2017.

SILVA, V. B. da; GALLEGO, R. de C.; VICENTINI, P. P. Aprendendo a ensinar através dos livros: notas sobre a natureza e a produção dos manuais para professores (Brasil e em Portugal – 1870-1970**). Revista Brasileira de Educação em Geografia**, Campinas, São Paulo, v. 4, n. 8, p. 130-145. Campinas, 2014. Disponível em: http://www.revistaedugeo.com.br/ojs/index.php/revistaedugeo/article/view/243. Acesso em: 11 nov. 2019.

SIQUEIRA FILHO, M. G.; LEGROS, V. A Arithmética e o Método Intuitivo nos manuais escolares do ensino primário (médio e superior/complementar) no Brasil e na França no final do século XIX e início do Século XX. **Perspectiva**, Florianópolis, v. 34, n. 1, p. 15-40, 2016. Disponível em: https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/169137. Acesso em: 26 out. 2020.

SOUZA, R. F. de. Inovação educacional no século XIX: a construção do currículo da escola primária no Brasil. **Cadernos CEDES**. Centro de Estudos Educação e Sociedade, v. 20, n. 51, p. 9-28, 2000. Disponível em: http://repositorio.unesp.br/. Acesso em: 30 jul. 2015.

SOUZA, R. F. de. A formação do cidadão moderno: a seleção cultural para a escola primária nos manuais de Pedagogia (Brasil e Portugal, 1870 – 1920). **Rev. bras. hist. educ.**, Campinas-SP, v. 13, n. 3 (33), p. 257-283, 2013. Disponível em: http://periodicos.uem.br/ojs/index.php/rbhe/article/view/40797. Acesso em: 20 mai. 2019.

TANURI, L. M. História da formação de professores. **Revista Brasileira de Educação**, Rio de Janeiro, n. 15, p. 161-193, 2000. Disponível em: http://www.scielo.br/pdf/rbedu/n14/n14a05. Acesso em 20 mai. 2019.

TREVISAN, T. A. **História da disciplina Pedagogia nas escolas normais do Estado de São Paulo (1874-1959)**. 2011. 220f. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Filosofia e Ciências, Universidade Estadual Paulista, Marília, 2011.

TREVISAN, T. A.; PEREIRA, B. C. Leituras recomendadas para as Escolas Normais no Brasil e na França (século XIX): transferências culturais e de modelos pedagógicos. **Patrimônio e Memória**, São Paulo, v. 9, n. 1, 2013, p. 223-237. Disponível em: http://pem.assis.unesp.br/index.php/pem/article/view/315. Acesso em: 13 jul. 2020.

VALDEMARIN, V. T. Ensino da leitura no método intuitivo: as palavras como unidade de compreensão do sentido. **Educar**, Curitiba, n. 18, p. 157-182, 2001. Disponível em: http://www.scielo.br/pdf/er/n18/n18a10.pdf. Acesso em: 06 nov. 2019.

VALDEMARIN, V. T. Os sentidos e a experiência: professores, alunos e métodos de ensino. *In*: SAVIANI, D. **O Legado educacional do século XX no Brasil.** 2. ed. Campinas: Autores Associados, 2006. (Educação contemporânea). p. 164-203.

VALDEMARIN, V. T.; CAMPOS, D. G. dos S. Concepções pedagógicas e método de ensino: o manual didático *Processologia na Escola Primária*. **Paidéia**, Ribeirão Preto, v. 17, n. 38, p. 343–356, 2007. Disponível em: http://www.redalyc.org/home.oa. Acesso em: 29 ago. 2016.

VALENTE, W. R. Do engenheiro ao licenciado: subsídios para a história da profissionalização do professor de matemática no Brasil. **Revista Diálogo Educacional**, Curitiba, v. 5, n. 16, p. 75-94, 2005. Disponível em: https://periodicos.pucpr.br/index.php/dialogoeducacional/article/view/7946. Acesso em: 23 nov. 2012.

VALENTE, W. R. História da Educação Matemática: interrogações metodológicas. **Revemat**: Revista Eletrônica de Educação Matemática, Florianópolis, v. 2, n. 1, p. 28-49. 2007. Disponível em: https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/12990/12091. Acesso em: 25 jun. 2015.

VALENTE, W. R. História da educação matemática: considerações sobre suas potencialidades na formação do Professor de Matemática. **Bolema**: Boletim de Educação Matemática, Rio Claro, v. 23, n. 35A, p. 123-136, abr. 2010. Disponível em: http://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/index. Acesso em: 25 jun. 2015.

VALENTE, W. R. Tempos de império: a trajetória da geometria como um saber escolar para o curso primário. **Revista Brasileira de História da Educação**, Campinas, v. 12, n. 3, p. 73-94, 2012. Disponível em: http://periodicos.uem.br/ojs/index.php/rbhe/article/view/38813/20331. Acesso em 16 fev. 2016.

VALENTE, W. R. O Lugar da Matemática Escolar na Licenciatura em Matemática. **Bolema**: Boletim de Educação Matemática, Rio Claro, v. 27, n. 47, p. 939-953, 2013a. Disponível em: http://www.scielo.br/pdf/bolema/v27n47/12.pdf. Acesso em: 25 jun. 2015.

VALENTE, W. R. Oito temas sobre História da educação. **REMATEC**: Revista de Matemática, Ensino e Cultura, Natal (RN), ano 08, n. 12, p. 22-50, 2013b. Disponível em: https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/160384. Acesso em 14 mar. 2015.

VALENTE, W. R. A geometria no ensino fundamental I: uma geometria elaborada historicamente na escola. *In*: LEME da SILVA, M. C.; VALENTE, W. R. (Orgs.). **A geometria nos primeiros anos escolares**: história e perspectivas atuais. Campinas: Papirus, 2014.

VALENTE, W. R. Sobre a investigação dos saberes profissionais do professor de matemática: algumas reflexões para a pesquisa. **Caminhos da Educação Matemática em Revista**, [*s.i.*], v. 6, n. 1, 2016. Disponível em: https://aplicacoes.ifs.edu.br/periodicos/index.php/caminhos_da_educacao_matematica/article/view/96. Acesso em: 04 dez 2018.

VALENTE, W. R. Os saberes para ensinar matemática e a profissionalização do educador matemático. **Rev. Diálogo Educ**., Curitiba, v. 17, n. 51, 2017a. Disponível em: https://periodicos.pucpr.br/index.php/dialogoeducacional/index. Acesso em: 07 jun. 2018.

VALENTE, W. R. Dos livros didáticos para os cadernos de matemática: a emergência dos saberes profissionais. **Zetetiké**, Campinas, SP, v. 25, n. 2, 2017b. Disponível em: https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/index. Acesso em: 05 jun. 2018.

VALENTE, W. R. El saber profesional del profesor que enseña matemática: el futuro del pasado. **Revista Paradigma**, [*s.i.*], v. 39, n. Extra 1, 2018a. Disponível em: http://revistas.upel.edu.ve/index.php/paradigma/article/viewFile/6902/3972. Acesso em: 31 out. 2018.

VALENTE, W. R. Processos de Investigação Histórica da Constituição do Saber Profissional do Professor que Ensina Matemática. **Acta Scientiae**, Canoas, v. 20, n. 3, p. 377-385, 2018b. Disponível em: http://www.periodicos.ulbra.br/index.php/acta/article/viewFile/3906/3178. Acesso em: 31 out. 2018.

VALENTE, W. R. Saber objetivado e formação de professores: reflexões pedagógico-epistemológicas. **Revista História da Educação (Online)**, [*s.i.*], v. 23, p. 1-22, 2019a. Disponível em: https://seer.ufrgs.br/asphe/article/view/77747. Acesso em: 08 abr. 2019.

VALENTE, W. R. Que matemática para formar o futuro professor? História do saber profissional do professor que ensina matemática. Conferência. **Revista Exitus**, Santarém/PA, v. 9, n. 2, p. 15-25, 2019b. Disponível em: http://www.ufopa.edu.br/portaldeperiodicos/index.php/revistaexitus/article/view/852. Acesso em: 30 out. 2019.

VALENTE, W. R. Programas de ensino e manuais escolares como fontes para estudo da constituição da *matemática para ensinar.* **Alexandria**: Revista de Educação em Ciências e Tecnologia, Florianópolis, v. 12, n. 2, p. 51-63, 2019c. Disponível em: https://periodicos.ufsc.br/index.php/alexandria/article/view/1982-5153.2019v12n2p51. Acesso em: 29 nov. 2019.

VALENTE, W. R. Investigación sobre la Historia del Saber Profesional de los Docentes que Enseñan Matemáticas: Interrogatorios Metodológicos. **Revista Paradigma**, [*s.i.*], v. XLI, 2020, p. 900-911. Disponível em: http://revistaparadigma.online/ojs/index.php/paradigma/article/view/827/817. Acesso em: 04 jun. 2020.

VALENTE, W. R.; BERTINI, L. de F.; MORAIS, R. dos S. Os saberes profissionais do professor de matemática: contribuições da história da educação matemática. **Revista de investigação e divulgação em Educação Matemática**, Juiz de Fora, v. 1, n. 1, p. 49-61, jul./dez. 2017a. Disponível em: http://www.ufjf.br/ridema/files/2017/09/3-Os-saberes-profissionais.pdf. Acesso em: 31 out. 2018.

VALENTE, W. R.; BERTINI, L. de F.; MORAIS, R. dos S. Novos aportes teórico-metodológicos sobre os saberes profissionais na formação de professores que ensinam Matemática. **Acta Scientiae**, Canoas, v. 19, n. 2, p. 224-235, 2017b. Disponível em: http://www.periodicos.ulbra.br/index.php/acta/article/viewFile/2816/2299. Acesso em: 04 jul. 2018.

VALENTE, W. R.; BERTINI, L. de F.; MORAIS, R. dos S. As matemáticas na formação de professores e no ensino: investigações sobre a trajetória de um saber profissional. *In*: OLIVEIRA, A. M. P. de; ORTIGÃO, M. I. R. **Abordagens teóricas e metodológicas nas pesquisas em educação matemática**. Brasília, SBEM, 2018. *E*-book. Disponível em: http://www.sbem.com.br/files/ebook_.pdf. Acesso em: 19 dez. 2018. p. 75-89.

VALENTE, W. R.; BERTINI, L. F.; PINTO, N. B.; MORAIS, R. dos S. **A Matemática na Formação de Professores e no Ensino**: processos e dinâmicas de produção de um saber profissional, 1890-1990. Projeto de Pesquisa. São Paulo: FAPESP, 2017. Disponível em: http://bv.fapesp.br/pt/auxilios/98879/a-matematica-na-formacao-de-professores-e-no-ensino-processos-e-dinamicas-de-producao-de-um-saber-p/?q=17/15751-2. Acesso em 28 jan. 2019.

VALENTE, W. R.; LEME da SILVA, M. C. Primórdios do ensino de geometria nos anos iniciais. *In*: LEME da SILVA, M. C.; VALENTE, W. R. (Orgs.). **A geometria nos primeiros anos escolares**: história e perspectivas atuais. Campinas: Papirus, 2014. p. 17-39.

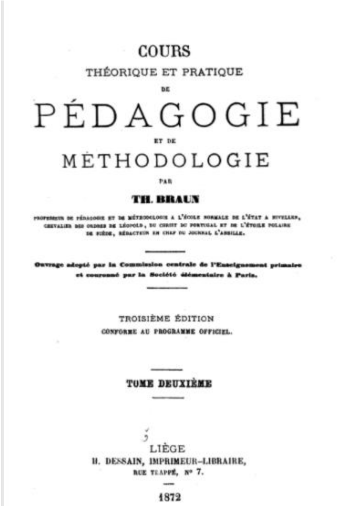
ZANATA, B. A. O legado de Pestalozzi, Herbart e Dewey para as práticas pedagógicas escolares. **Rev. Teoria e Prática da Educação**, [*s.i.*], v. 15, n. 1, p. 105-112, 2012. Disponível em: http://periodicos.uem.br/ojs/index.php/TeorPratEduc/index. Acesso em: 29 ago. 2016.

APÊNDICES

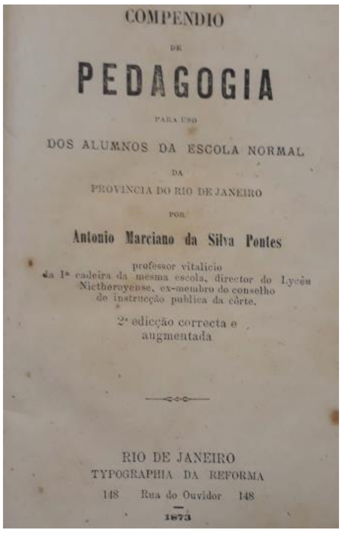
APÊNDICE A – Manuais de Pedagogia identificados na literatura da história da educação e da educação matemática, que integraram a formação de professores primário brasileiros (1870-1920)

Título	Autor	Ano
Cours Théorique e Pratique de Pédagogie et de Méthodologi	Thomas Braun	1872
Elementos de Pedagogia	José Maria de Graça Affreixo e Henrique Freire	890
Curso Prático de Pedagogia	Jean Baptiste Daligault	1874
Compêndio de Pedagogia	Braulio Cordeiro	1874
Compêndio de Pedagogia	Antonio Marciano da Silva Pontes	1873
Compêndio de Pedagogia Prático	Joaquim José de Araújo	1886
Pedagogia e Metodologia	Camillo Passalacqua	1887
Princípios de Pedagogia	José Augusto Coelho	1891
Princípios de Pedagogia	José Augusto Coelho	1892
Manual Prático de Pedagogia	José Augusto Coelho	Entre 1892 e 1907
Elementos de pedagogia	José Augusto Coelho	1894
Lições de Pedagogia	Valentim Magalhães	1900
Lições de Pedagogia	Sem autor	1907
Noções de pedagogia elementar	José Augusto Coelho	1907
Compêndio de Pedagogia	Dario Vellozo	1907
Compêndio de pedagogia escolar	Feliciano Bittencourt	1908
Curso de Pedagogia	Helvécio de Andrade	1913
Princípios de Pedagogia: ensaios	Antonio de Sampaio Dória	1914
Traité de pédagogie scolaire	Irénée Carré.; Roger Liquier,	1920

APÊNDICE B - Capas dos manuais de Pedagogia que constituem nosso *corpus* de fonte


COURS
THÉORIQUE ET PRATIQUE
DE
PÉDAGOGIE
ET DE
MÉTHODOLOGIE
PAR
TH. BRAUN
TROISIÈME ÉDITION
CONFORME AU PROGRAMME OFFICIEL.
TOME DEUXIÈME
LIÈGE
H. DESSAIN, IMPRIMEUR-LIBRAIRE,
RUE TRAPPÉ, N° 7.
1872

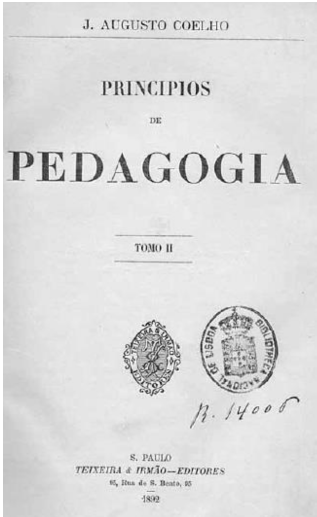
Braun (1872)


COMPENDIO
DE
PEDAGOGIA
PARA USO
DOS ALUMNOS DA ESCOLA NORMAL
DA
PROVINCIA DO RIO DE JANEIRO
POR
Antonio Marciano da Silva Pontes
professor vitalicio
da 1ª cadeira da mesma escola, director do Lycêu Nictheroyense, ex-membro do conselho de instrucção publica da côrte.
2ª edicção correcta e augmentada
RIO DE JANEIRO
TYPOGRAPHIA DA REFORMA
148 Rua do Ouvidor 148
1873

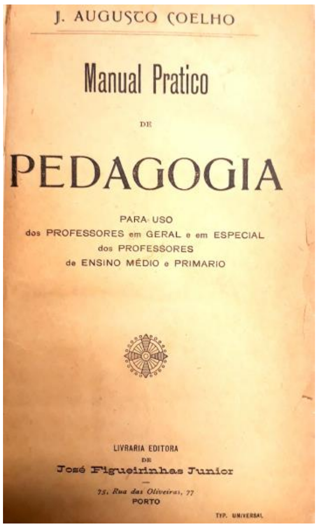
Pontes (1873)


ELEMENTOS
DE
PEDAGOGIA
PARA USO
DO
MAGISTERIO PRIMARIO PORTUGUEZ
COORDENADOS POR
GRAÇA AFFREIXO E HENRIQUE FREIRE
8.ª EDIÇÃO
LIVRARIA FERREIRA
132 — Rua Aurea — 138
LISBOA

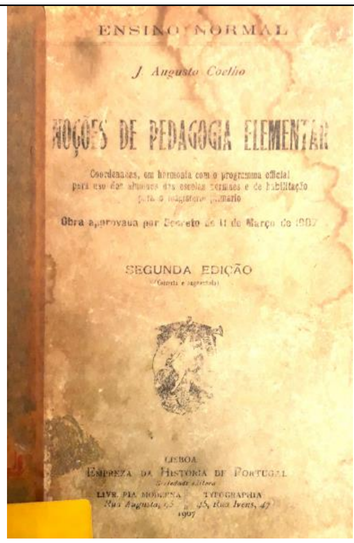
Affreixo e Freire (1890)


J. AUGUSTO COELHO
PRINCIPIOS
DE
PEDAGOGIA
TOMO II
S. PAULO
TEIXEIRA & IRMÃO—EDITORES
1892

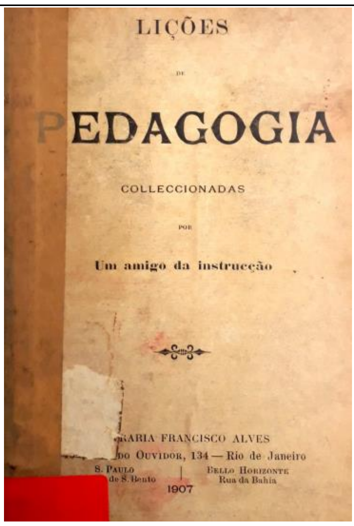
Coelho (1892)


J. AUGUSTO COELHO
Manual Pratico
DE
PEDAGOGIA
PARA USO
dos PROFESSORES em GERAL e em ESPECIAL
dos PROFESSORES
de ENSINO MÉDIO e PRIMARIO
LIVRARIA EDITORA
DE
José Figueirinhas Junior
75, Rua das Oliveiras, 77
PORTO

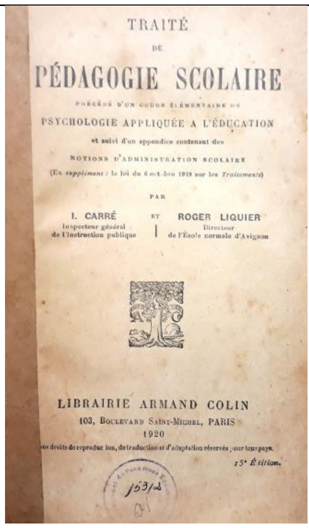
Coelho (s.d.)


ENSINO NORMAL
J. Augusto Coelho
NOÇÕES DE PEDAGOGIA ELEMENTAR
SEGUNDA EDIÇÃO
LISBOA
1907

Coelho (1907)


LIÇÕES
DE
PEDAGOGIA
COLLECCIONADAS
POR
Um amigo da instrucção
LIVRARIA FRANCISCO ALVES
Rua do Ouvidor, 134 — Rio de Janeiro
1907

AI (1907)


TRAITÉ
DE
PÉDAGOGIE SCOLAIRE
PSYCHOLOGIE APPLIQUÉE A L'ÉDUCATION
PAR
I. CARRÉ ET ROGER LIQUIER
LIBRAIRIE ARMAND COLIN
103, BOULEVARD SAINT-MICHEL, PARIS
1920

Carré e Liquier (1920)