SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ – UFPA
INSTITUTO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E CIENTÍFICA – IEMCI
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICAS – PPGECM

MARIA ALICE DE VASCONCELOS FEIO MESSIAS

TEORIAS COGNITIVAS DO PENSAMENTO MATEMÁTICO AVANÇADO E O PROCESSO DE CONSTRUÇÃO DO CONHECIMENTO: UM ESTUDO ENVOLVENDO OS CONCEITOS DE LIMITE E CONTINUIDADE

BELÉM – PA
2018

SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ – UFPA
INSTITUTO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E CIENTÍFICA – IEMCI
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICAS – PPGECM

MARIA ALICE DE VASCONCELOS FEIO MESSIAS

TEORIAS COGNITIVAS DO PENSAMENTO MATEMÁTICO AVANÇADO E O PROCESSO DE CONSTRUÇÃO DO CONHECIMENTO: UM ESTUDO ENVOLVENDO OS CONCEITOS DE LIMITE E CONTINUIDADE

Texto apresentado à banca examinadora do Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas, vinculado ao Instituto de Educação Matemática e Científica, da Universidade Federal do Pará, como exigência parcial para a obtenção do título de ***Doutora em Educação em Ciências e Matemáticas (Área de concentração: Educação Matemática)****.*

Orientação: ***Prof. Dr. João Cláudio Brandemberg.***

BELÉM – PA
2018

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

D278t De Vasconcelos Feio Messias, Maria Alice.
Teorias cognitivas do Pensamento Matemático Avançado e o processo de construção do conhecimento: um estudo envolvendo os conceitos de limite e continuidade / Maria Alice De Vasconcelos Feio Messias. — 2018.
184 f.

Orientador(a): Prof. Dr. João Cláudio Brandemberg
Tese (Doutorado) - Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas, Instituto de Educação Matemática e Científica, Universidade Federal do Pará, Belém, 2018.

1. Limite de uma Função. 2. Continuidade de uma Função. 3. Imagem Conceitual. 4. Decomposição Genética. 5. Teoria APOS. I. Título.

CDD 510.711

MARIA ALICE DE VASCONCELOS FEIO MESSIAS

TEORIAS COGNITIVAS DO PENSAMENTO MATEMÁTICO AVANÇADO E O PROCESSO DE CONSTRUÇÃO DO CONHECIMENTO: UM ESTUDO ENVOLVENDO OS CONCEITOS DE LIMITE E CONTINUIDADE

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. João Cláudio Brandemberg
ICEN/PPGECM - IEMCI (UFPA)
Orientador

Prof. Dr. Iran Abreu Mendes
Membro interno – PPGECM (IEMCI/UFPA)

Prof.ª Dra. Maria Lúcia Pessoa Chaves Rocha
Membro interno – PPGECM (IEMCI/UFPA)

Prof.ª Dra. Ana Carolina Costa Pereira
Membro externo
Universidade Estadual do Ceará - UECE

Prof.ª Dra. Acylena Coelho Costa
Membro externo
Universidade do Estado do Pará - UEPA

Prof.ª Dr. José Augusto Nunes Fernandes
Membro externo
Instituto de Ciências Exatas e Naturais
(ICEN/UFPA)

BELÉM – PA
2018

Aos meus pais, Nazário de Souza Messias (*In Memoriam)* e Maria da Glória Messias, pelos ensinamentos e amor incondicional.

AGRADECIMENTOS

A *Deus*, por me sustentar frente aos momentos difíceis enfrentados no decorrer deste curso, e por permitir que eu concluísse este trabalho.

Ao meu orientador, *Prof. Dr. João Cláudio Brandemberg*, pela confiança e dedicação depositados na realização de minha pesquisa.

Aos membros da banca examinadora, *Prof. Dr. Iran Abreu Mendes, Profª Dra. Maria Lúcia Pessoas Chaves Rocha, Profª Dra. Acylena Coelho Costa, Profª Dra. Ana Carolina Costa Pereira* e *Prof. Dr. José Augusto Nunes Fernandes*, pelos direcionamentos que contribuíram de maneira significativa para a conclusão deste trabalho.

À minha mãe, *Glória*, pelo amor incondicional, incentivo e apoio, dedicados a mim e a minha família.

Ao meu esposo, *Rodolfo*, por seu amor, compreensão e dedicação que tanto me motivaram a concluir esta jornada.

Aos meus filhos, *Maria Clara*, *Pedro e Sofia*, por me inspirarem diariamente e por me ensinarem o verdadeiro significado de amor incondicional.

Ao meu tio, *Antônio,* por seu apoio e cuidado com minha família, especialmente, com meus filhos.

A todos os meus familiares e amigos que me apoiaram durante essa caminhada.

Aos membros do Grupo de Estudos e Pesquisa em História e Ensino de Matemática (GEHEM) pelo companheirismo e amizade.

Aos professores do Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas (PPGECM/UFPA), por suas contribuições para com minha formação enquanto pesquisadora.

Aos colegas do curso de Pós – Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas, por compartilharem momentos de grande aprendizado ao longo desses anos.

Aos membros da secretaria do PPGCEM, especialmente, *Naldo* e *João*, por sua disponibilidade em me atender sempre que necessário.

A CAPES, pelo apoio financeiro durante o curso.

RESUMO

A pesquisa descrita nesse trabalho teve o objetivo de conjecturar sobre que estruturas e mecanismos mentais precisam ser construídos por um indivíduo de modo a possibilitá-lo compreender efetivamente os conceitos de limite e continuidade de uma função. Para tanto, dois estágios foram contemplados. No primeiro, a partir da teoria sobre imagem e definição conceitual (VINNER, 1991), foi efetivado um estudo preliminar, por meio do qual foram analisados os elementos que compuseram a imagem conceitual de estudantes de um curso de licenciatura em matemática no que tange a esses conceitos. Já no segundo estágio, é apresentada uma decomposição genética para limite e continuidade, tendo como referência esses objetos matemáticos, seu desenvolvimento histórico-conceitual, experiências docentes no âmbito do Cálculo, uma multiplicidade de compreensões relativas a esses conceitos, evidenciadas tanto em outros estudos quanto no primeiro estágio da pesquisa e, principalmente, os pressupostos da teoria APOS (DUBINSKY et al., 1984; ARNOON et al., 2014). Como principais resultados, observou-se que múltiplas compreensões sobre limite e continuidade foram evocadas no primeiro estágio da pesquisa, fato que desencadeou em reflexões quanto às partes que contemplaram a decomposição genética que, por sua vez, foi elaborada a partir de diferentes objetos matemáticos, tais como o de função, definição de limite, relação entre ε e δ, relação entre limites laterais e bilateral, propriedades de limite, limites envolvendo infinito, continuidade no ponto ou intervalo, dentre outros.

Palavras – Chave: Limite de uma Função, Continuidade de uma Função, Imagem Conceitual, Decomposição Genética, Teoria APOS.

ABSTRACT

The aim of this thesis was to conjecture about which mental structures and mechanisms need to be built by an individual in order to lead one to comprehend the concepts of limit and continuity of a function. For that, the research was organized in two stages. In the first stage, based on the theory of concept image and concept definition (VINNER, 1991), a preliminary study was developed, by which it was possible to analyze the elements that composed the concept image of mathematics students about such concepts. In the second stage, it was presented a genetic decomposition to limit and continuity, having as reference these mathematical objects, their historical-conceptual development, teaching experiences in the field of Calculus, multiple representations of such concepts and, specially, some assumptions of the APOS theory (DUBINSKY et al., 1984; ARNOON et al., 2014). As principle results, it was observed that various comprehensions about limit and continuity were evoked in the first stage, which led to reflections about the parts of the genetic decomposition that was elaborated from different mathematical objects, such as function, limit's definition, $\varepsilon - \delta$ relation, relation between lateral and bilateral limits, limit properties, limits involving infinity, continuity at a point and along an interval, among others.

Keywords: Limit of a Function, Continuity of a Function, Concept Image, Genetic Decomposition, APOS Theory.

RESUMÉ

La présente recherche visait à conjecturer sur quelles structures et quels mécanismes mentaux doivent être construits par un individu afin de lui permettre de comprendre efficacement les concepts de limite et de continuité d'une fonction. Pour ce faire, la recherche a été organisée en deux étapes. Dans la première, guidés par la théorie de l'image et la définition conceptuelle (VINNER, 1991), une étude préliminaire a été réalisée, à travers laquelle les éléments qui constitutifs de l'image conceptuelle des étudiants de premier cycle en mathématiques par rapport à ces concepts ont été analysés. Déjà, dans la deuxième étape, une décomposition génétique pour limite et continuité est présentée, ayant comme référence ces objets mathématiques, leur développement conceptuel-historique, expériences d'enseignement dans le champ du Calcul, une multiplicité de compréhensions liées à ces concepts, et, principalement, les hypothèses de la théorie APOS (DUBINSKY et al., 1984; ARNOON et al., 2014). Comme résultats principaux, il a été observé que plusieurs interprétations sur la limite et la continuité étaient évoquées au cours de la première étape, ce qui a rendu réflexions sur les parties qui envisageaient la décomposition génétique, laquelle a été élaborée à partir de différents objets mathématiques comme function, definition de limite, relation entre ε et δ, relations entre limites latérales et bilatérales, propriétés des limites, limites impliquant l'infini, continuité au point ou dans l'intervalle, parmi d'autres.

Mots-clés: Limite d'une Fonction, Continuité d'une Fonction, Image Conceptuelle, Décomposition Génétique, Théorie APOS.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

CONSIDERAÇÕES INICIAIS

A apreensão de conceitos matemáticos se apresenta como um processo que não depende, simplesmente, da memorização de definições e/ou de habilidades operatórias específicas. Consideramos, desse modo, as ações interiorizadas por um indivíduo sobre determinado conceito e, principalmente, os significados dados a essas ações, fundamentais para a compreensão de qualquer conhecimento matemático.

Nessa perspectiva, admitimos que a aprendizagem matemática esteja condicionada a um amplo conjunto de interações inerentes à sua própria composição (BRANDEMBERG, 2010). Assumimos, portanto, que para efetivamente compreender um conceito, é preciso refletir sobre ele, e buscar nele (e em diferentes contextos) a abstração por meio de suas representações, generalizações e sintetizações.

Ressaltamos, ainda, que o fato de muitos indivíduos executarem tarefas sem refletir, ou mesmo entender os conceitos nelas envolvidos, prejudica a compreensão de ideias matemáticas, e o consequente amadurecimento de construções mentais que contribuem para a formação de um pensamento mais matematicamente maduro e coerente com a teoria formal.

Frente a tais constatações, e diante das experiências que vivenciamos na docência em Cálculo, aprofundamos nossos estudos no que se refere à compreensão de estudantes acerca dos elementos que constituem essa área de conhecimento, de modo que as expressivas dificuldades inerentes ao entendimento sobre limite e continuidade[1], conforme apontado em diferentes estudos[2], motivou-nos a delimitar o campo de ação dessa pesquisa de doutorado à problemática da aprendizagem desses conceitos.

---

[1] Os termos ‘limite e continuidade’ e ‘limite e continuidade de uma função’ são utilizados indistintamente no decorrer do texto.

[2] Tais como Tall e Vinner (1981), Karatas et al. (2011), Amatangelo (2013), Mutlu e Aydin (2014), Oh (2014), dentre outros.

É importante ressaltarmos que os conceitos de limite e continuidade são de fundamental importância para a construção de uma base mais sólida da esfera de conhecimentos do Cálculo. O teorema do valor médio, por exemplo, é aplicável somente para funções contínuas. Sendo assim, antes de utilizá-lo, é preciso saber averiguar a continuidade da função em um dado intervalo ou domínio e, para tanto, verificar as condições para a existência do limite em determinado ponto. Qualquer fragilidade no que tange ao entendimento desses conceitos pode implicar, portanto, em dificuldades na aprendizagem de outros conteúdos no âmbito do Cálculo, fato que reitera a importância da pesquisa de doutorado a qual temos o intuito de apresentar nesse texto e que, por sua vez, foi norteada pela seguinte questão:

- **Que estruturas e mecanismos mentais precisam ser construídos de modo a permitir que estudantes alcancem um real entendimento sobre limite e continuidade de uma função?**

A referida questão norteadora foi delimitada a partir da relação entre o objeto da pesquisa e sua fundamentação teórica. Para respondê-la, desenvolvemos um estudo, cujo objetivo geral foi **conjecturar sobre que estruturas e mecanismos mentais precisam ser construídos por um indivíduo de modo a possibilitá-lo compreender efetivamente os conceitos de limite e continuidade.** Maiores esclarecimentos sobre esses aspectos foram contemplados na parte I desse trabalho a qual intitulamos *Traços de uma trajetória.* Apresentamos, também na parte I, as considerações metodológicas relativas ao estudo desenvolvido, bem como nossas justificativas para com sua relevância no âmbito das pesquisas vinculadas às áreas de Educação Matemática e Ensino de Ciências e Matemáticas no Brasil.

A partir de nossas escolhas teóricas, questão norteadora e objetivo dessa pesquisa, colocamo-nos sob a orientação da tese de que **um esquema que contemple estruturas e mecanismos mentais (que julgamos ser) necessários para a apreensão de um conceito por parte de um indivíduo precisa estar vinculado à evocação de múltiplas imagens conceituais coerentes sobre esse conceito nos diferentes contextos matemáticos.**

Na perspectiva da tese enunciada, organizamos a pesquisa em dois estágios. No primeiro, realizamos um estudo preliminar por meio do qual analisamos os elementos da imagem conceitual de estudantes de um curso de licenciatura em matemática no que se refere aos conceitos de limite e continuidade, tendo como suporte para análise a teoria sobre imagem e definição conceitual (VINNER, 1991).

As imagens conceituais evocadas pelos sujeitos investigados no 1º estágio nos permitiu identificar alguns dos conflitos e/ou dificuldades relativas à compreensão desses conceitos. Os resultados obtidos nesse estudo preliminar, aliados aos nossos conhecimentos sobre a teoria APOS[3] (DUBINSKY et al., 1984; ARNOON et al., 2014), levou-nos à efetivação do segundo estágio da pesquisa, em que estabelecemos esquemas mentais que contemplam estruturas e mecanismos, os quais julgamos necessários para promover a compreensão de estudantes a respeito dos objetos limite e continuidade de uma função.

Dedicamos a parte II desse trabalho, intitulada *Compreensões de estudantes sobre limite e continuidade à luz de teorias cognitivas do Pensamento Matemático Avançado*, à descrição dos estágios que constituíram a pesquisa e que, por sua vez, permitiram-nos refletir acerca da tese que nos orientou para que, também a partir dessas reflexões, fosse possível responder a nossa questão norteadora.

Nas considerações finais, esclarecemos algumas observações relativas aos resultados obtidos, bem como suas relações com os objetivos e questão delineados para o trabalho. Estabelecemos, também, as limitações desse estudo, bem como nossas expectativas para com suas contribuições no que se refere às pesquisas em Educação Matemática e Ensino de Ciências e Matemáticas efetivadas em nosso país.

---

[3] A sigla APOS refere-se aos termos em inglês *Action*, *Process, Object* e *Schema* e é pautada nos estudos de Piaget sobre Abstração Reflexiva. Maiores esclarecimentos sobre essa teoria são apresentados no capítulo 2.

PARTE I

TRAÇOS DE UMA TRAJETÓRIA

APRESENTAÇÃO

Dedicamos a primeira parte desse trabalho à descrição dos aspectos que nos levaram ao delineamento da pesquisa, os quais foram organizados conforme a seguir:

- No capítulo 1, apresentamos um breve relato sobre experiências vivenciadas na docência em Cálculo, bem como uma discussão apoiada na literatura da área no que se refere aos conhecimentos de estudantes sobre Limite e Continuidade, fato que nos permitiu definir o objeto de estudo de nossa pesquisa;
- No segundo capítulo, apresentamos nossa fundamentação teórica, a qual foi baseada em duas teorias cognitivas no âmbito do Pensamento Matemático Avançado. E, a partir da relação estabelecida entre o objeto de pesquisa e esse quadro teórico, enunciamos a questão que norteou o desenvolvimento de nosso estudo;
- Apoiados no objeto de estudo, quadro teórico e questão norteadora, concluímos, no capítulo 3, o delineamento da pesquisa, bem como elucidamos sua relevância em meio às produções nacionais vinculadas às áreas de Educação Matemática e Ensino de Ciências e Matemáticas.

Esclarecemos que os aspectos contemplados na primeira parte desse trabalho são de extrema importância, uma vez que nortearam a efetivação das etapas que constituíram os estágios dessa pesquisa de doutorado.

CAPÍTULO 1
Motivações para a escolha do objeto de estudo

1.1. Introdução

A escolha do objeto de estudo dessa pesquisa esteve fortemente ligada a experiências vivenciadas na docência em Cálculo, bem como em leituras realizadas sobre o conhecimento de estudantes em relação aos conceitos de Limite e Continuidade que, por sua vez, trouxeram consigo muitos dos aspectos que também observamos enquanto professores de Cálculo.

Dedicamos esse capítulo à descrição dessas experiências docentes. Traçamos, também, uma discussão acerca de *como*, do ponto de vista de diferentes estudos, os estudantes têm compreendido os conceitos de Limite e Continuidade. Esclarecermos, por fim, nosso objeto de pesquisa.

1.2. Um relato de experiência na docência em Cálculo: algumas motivações[4]

Na docência, minhas primeiras experiências foram como professora das disciplinas de *Cálculo I, Cálculo II* e *Análise Real*[5]. Naquele momento – sob a perspectiva docente – tive a oportunidade de identificar (e por que não vivenciar?) a multiplicidade das dificuldades inerentes ao processo de apreensão dos conceitos na esfera de conhecimentos do Cálculo.

Diante de minha experiência até aquele momento, entendi que eu precisava ir além das percepções adquiridas por meio da docência e das leituras prévias sobre ensino e aprendizagem de Cálculo, sobretudo, em termos conceituais. Optei, então, pelo ingresso no mestrado, a fim de amadurecer meu *ser* pesquisador e estudar com mais afinco aspectos relacionados ao processo de ensino e aprendizagem de um conceito em especial: o de limite de uma função, dada sua importância para o entendimento de outros conceitos adjacentes a ele e, também, por ter evidenciado

[4] Esse tópico será escrito na 1ª pessoa do singular, uma vez que se trata do relato de experiências docentes individuais que motivaram a autora desse trabalho a desenvolver sua pesquisa de doutorado.

[5] Disciplinas ministradas para os cursos de Engenharia Ambiental e Licenciatura em Matemática, ambos vinculados à Universidade do Estado do Pará.

que tal conhecimento tem se mostrado um fator de conflito em potencial para estudantes que cursam Cálculo I.

Os resultados obtidos em minha pesquisa de mestrado (MESSIAS, 2013), permitiram-me observar, principalmente, que a compreensão dos estudantes investigados sobre limite não era coerente com o que é estabelecido pela teoria formal. Aliás, muitos dos sujeitos estabeleceram relações, ainda que inconscientemente, entre limite e continuidade, fato que também observei enquanto docente[6].

Como professora de Cálculo, evidenciei que os estudantes apresentavam dificuldades em compreender a definição formal de limite de uma função, ainda que em um primeiro momento compreendessem a noção intuitiva. Além disso, a relação limite x continuidade também se configurou como um fator de conflito cognitivo (TALL; VINNER, 1981), especialmente quando alguns alunos condicionavam a existência do limite às condições de domínio da função, ou ainda, evocavam a ideia de que $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$. A compreensão dos alunos sobre continuidade era, muitas vezes, caracterizada por interpretações vinculadas a ideia de 'inteireza', ou seja, à ausência de 'saltos', 'buracos' ou 'quebras' no gráfico da função.

Observei, também, que o domínio da função, a presença de indeterminações, assíntotas, bem como a interpretação e cálculo de limites envolvendo o infinito se configuraram como fatores de conflito cognitivo para muitos estudantes que, por vezes, relacionavam tais conhecimentos à (des) continuidade da função.

Os resultados observados em minha dissertação de mestrado, bem como a experiência adquirida enquanto professora de Cálculo por meio da qual evidenciei que os estudantes têm dificuldades em entender efetivamente os conceitos de Limite e Continuidade, permitiram-me observar o quão relevante seria desenvolver, em uma tese de doutorado, um estudo que contribuísse para o processo de apreensão desses objetos matemáticos. Foi, então, em parceria com meu orientador, que busquei aprofundar a leitura acerca dessa temática, a fim de, inicialmente, levantar uma discussão sobre *como* os alunos entendem esses conceitos para, em seguida,

[6] Além de experiências docentes anteriores, atuei nos anos de 2014 e 2015, como professora substituta do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Maranhão (UFMA). Nessa instituição, ministrei disciplinas de Cálculo para os cursos de Licenciatura em Química, Licenciatura em Física e Química Industrial.

determinar de maneira contundente a escolha do objeto a ser investigado nessa pesquisa.

1.3. Conhecimentos de estudantes sobre limite e continuidade: o que diz a literatura da área?

Ao longo das últimas décadas, os conceitos de limite e continuidade têm se configurado como objetos de estudo em várias investigações no âmbito da educação matemática, dadas as expressivas dificuldades inerentes à sua compreensão. Dedicamos esse tópico à discussão sobre a multiplicidade dos conhecimentos que estudantes investigados em diferentes pesquisas têm mobilizado a respeito desses conceitos.

No que concerne às expressivas dificuldades relativas ao processo de apreensão do conceito de limite, por exemplo, evidenciamos em Cornu (1983) e Juter (2008), que o (não) entendimento dos elementos que constituem o campo conceitual dessa noção – tais como o conhecimento sobre sequências, séries, bem como as ideias de infinitamente pequeno, infinitamente grande e função – influenciam na formação de imagens conceituais nem sempre coerentes sobre limites.

Ressaltamos, em acordo com Cornu (1991), que o entendimento da noção de limite depende tanto da riqueza e complexidade do conceito quanto de aspectos cognitivos que não podem ser gerados puramente a partir de sua definição matemática, uma vez que a ideia de aproximação encontrada usualmente por meio de uma concepção dinâmica e a maneira como o conceito é colocado em prática para resolver problemas não estão exatamente ligados à sua definição formal.

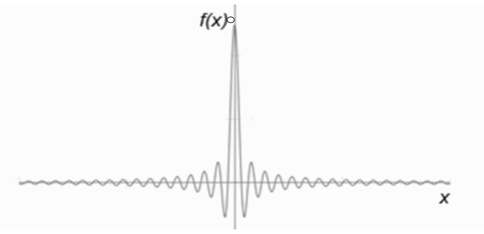
Os próprios termos ‘limite’ e ‘tender para’, segundo Cornu (1983, 1991), conduzem os estudantes a interpretações contraditórias do conceito, pautadas na ideia de aproximação em torno de um valor de x, sem alcançá-lo ou ultrapassá-lo. Nesse sentido, os estudantes costumam enfatizar essa aproximação no eixo das abscissas e não em torno de um valor limite no eixo das ordenadas.

Tall e Vinner (1981) reforçaram que a utilização de expressões como ‘se aproxima de’, ‘tende a’ ou ‘chega perto de’ conduz os alunos a uma percepção de que o valor de f em determinado ponto sempre difere do valor do limite de f nesse ponto, isto é, $\lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$. A ideia de aproximar-se de um valor no eixo x

também foi mobilizada pelos sujeitos investigados por Swinyard (2011) e em Przenioslo (2004). Nesses casos, observamos que o conceito de limite foi atrelado a uma compreensão de vizinhança ao longo dos intervalos $(L-\varepsilon,\, L+\varepsilon)$ e $(x-\delta, x+\delta)$.

Outros estudos – tais como o de Nascimento (2003), Jordaan (2005), Juter (2008), Sarvestani (2011), Denbel (2014) e Messias e Brandemberg (2015) – também apontaram em suas análises que os estudantes costumam mobilizar elementos que caracterizam o limite como sendo inalcançável e/ou intransponível (ideia de fronteira), uma vez que partem de uma compreensão dinâmica, na qual *a função se move em direção a um ponto qualquer sem, de fato, atingi-lo*. Em contrapartida, se tomarmos como exemplo a função $f(x)=\frac{1}{x}senx$, veremos que $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}senx=0$ e que esse valor de L é 'alcançado' ou 'ultrapassado' várias vezes no eixo das ordenadas (ver figura 1).

Figura 1 – Gráfico de $f(x)=\frac{1}{x}senx$



Fonte: Elaborado pela autora.

Outra mobilização comumente atrelada à ideia de movimento dada a função é a de que o valor do limite pode ser alcançado. Amatangelo (2013) observou, nesse sentido, que os estudantes consideram que *o valor da função em determinado ponto é sempre igual ao valor do limite nesse ponto, ou seja,* $lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$. A prática excessiva do cálculo de limites a partir do método de substituição, como por exemplo, acontece no caso das funções polinomiais, contribui para esse tipo de interpretação que, para Amatangelo (2013), configura-se como uma concepção potencialmente problemática, uma vez que pode levar os estudantes ao erro, dependendo da tarefa matemática que lhe for proposta. Cinestav e Lara-Chaves (1999), Cornu (1983), Przenioslo (2004) e Juter (2008) também apontaram mobilizações semelhantes a essa em seus estudos. Juter (2008) ressaltou ainda que muitos estudantes acabam, inclusive, por não saber diferenciar $f(x_0)$ de $\lim_{x \to x_0} f(x)$.

Cornu (1991), Zuchi (2005), Juter (2008), Rodriguez (2009) e Oh (2014) ressaltaram também que a ‘passagem’ da noção intuitiva para a definição formal, a relação entre ε e δ, e os quantificadores envolvidos na definição têm se configurado como fatores de conflito em potencial ao longo do processo de aprendizagem do conceito de limite. Isso porque, poucos estudantes conseguem correlacionar a definição formal com o dinamismo comumente utilizado para explicar que uma função f tem limite L quando $x \to x_0$ se a distância entre as imagens da função e L podem ser arbitrariamente pequenas e os valores de x, cada vez mais próximos de x_0. Nesse sentido, é comum que os estudantes resolvam problemas sobre limites sem, de fato, entender (ou explicar) o significado de sua definição.

Nascimento (2003), Nair (2009), e Messias e Brandemberg (2016) apontaram, ainda, que muitos estudantes evocam que indeterminações implicam na não existência do limite. Outras mobilizações, tais como a existência do $\lim_{x \to x_0} f(x)$ condicionada ao fato de $x_0 \in D_{f(x)}$ ou ainda à continuidade em x_0 também se fizeram presente em diferentes pesquisas[7]. Nessa perspectiva, ‘buracos’, ‘saltos’ ou ‘quebras’ no gráfico de uma função podem levar a esse tipo de evocação.

O cálculo de limite de funções escritas em mais de uma sentença tem se configurado como um fator de conflito em potencial, conforme destacado em Nascimento (2003), Maharaj (2010), Mutlu e Aydin (2013) e Brandemberg e Messias (2016). É comum, nesse caso, que os estudantes tenham dificuldades em calcular limites, ou ainda, que considerem que o mesmo não exista em determinado ponto. Isso porque funções definidas em partes normalmente despertam nos alunos a ideia de que suas representações gráficas apresentam saltos que, para eles, implicam na não existência do limite. Esse tipo de mobilização pode (ou não) levar um indivíduo a uma resposta equivocada, dependendo da tarefa que lhe for proposta. Vamos tomar como exemplo as funções $f(x)$ e $g(x)$, cujas representações gráficas encontram-se destacadas na figura 2.

[7] Tais como Cinestav e Lara-Chaves (1999), Przenioslo (2004), Jordaan (2005), Juter (2008), Karatas et al. (2011), Sarvestani (2011), Amatangelo (2013), Denbel (2014) e Messias e Brandemberg (2015, 2016).

Figura 2 – Representação gráfica de $f(x)$ e $g(x)$

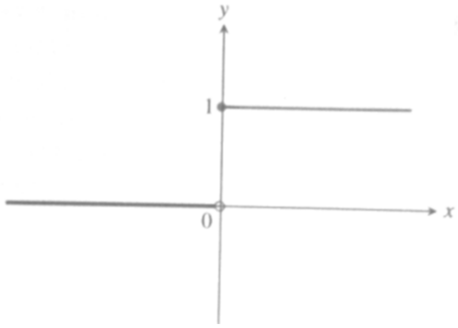


Fig. 2a- Gráfico de $f(x) = \begin{cases} 0, x < 0 \\ 1, x \geq 0 \end{cases}$
Fonte: Thomas (2002, p. 88)

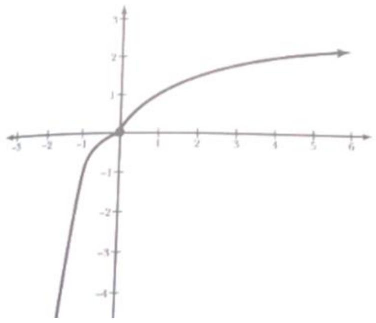


Fig. 2b - Gráfico de $g(x) = \begin{cases} x^3, x < 0 \\ \sqrt{x}, x \geq 0 \end{cases}$
Fonte: Kelley (2013, p. 131)

Na figura 2a temos a representação gráfica de $f(x) = \begin{cases} 0, x < 0 \\ 1, x \geq 0 \end{cases}$. Nesse caso específico, o $\lim_{x \to 0} f(x)$ não existe, uma vez que $\lim_{x \to 0^+} f(x) \neq \lim_{x \to 0^-} f(x)$. No entanto, caso um sujeito mobilize que uma *função definida em partes apresenta saltos em seu gráfico que, por sua vez, implicam na não existência do limite,* sua interpretação – ainda que equivocada – será suficiente para avaliar a existência do $\lim_{x \to 0} f(x)$, porém, o levará ao erro se solicitado que verifique o $\lim_{x \to 0} g(x)$, tal que $g(x) = \begin{cases} x^3, x < 0 \\ \sqrt{x}, x \geq 0 \end{cases}$ (ver figura 2b), já que $\lim_{x \to 0^+} g(x) = \lim_{x \to 0^-} g(x) = 0$, fato que garante a existência de $\lim_{x \to 0} g(x)$, independente da função estar definida em mais de uma sentença.

Nascimento (2003) e Mutlu e Aydin (2013) apontaram, também, que muitos estudantes consideram suficiente fazer uma investigação à direita e à esquerda de um ponto dado para verificar a existência do limite. Desse modo, é possível que um sujeito afirme, por exemplo, que as funções representadas nas figuras 2a e 2b têm limite quando $x \to 0$.

No que concerne à natureza do conceito de continuidade, Núñez et al. (1999), Amatangelo (2013), Jaykody (2015) e Jayakody e Zazkis (2015) apontaram que a maioria dos alunos mobiliza uma concepção dinâmica sobre o conceito, na qual dá-se direcionalidade, movimento e fluidez à função. Expressões do tipo ‘a função flui’, ‘a função se move sem interrupções’, ou ainda, ‘podemos desenhá-la sem levantar o lápis do papel’ representam esse tipo de entendimento sobre continuidade. Tal interpretação pode, segundo Tall e Vinner (1981), Cornu (1991) e Jayakody (2015), ser decorrente do próprio uso coloquial do termo *continuidade*.

Essa ideia de movimento atrelada à função implica, para muitos estudantes, na compreensão de que sua representação gráfica não apresenta ‘saltos’, ‘buracos’ ou ‘quebras’, fato que, para eles, tem se constituído como condição necessária para garantir a continuidade, conforme destacado por Tall e Vinner (1981), Vinner (1987), Núñez et al. (1999), Karatas et al. (2011), Jayakody (2015), Jayakody e Zazkis (2015), Messias e Brandemberg (2015), dentre outros. A presença de assíntotas na representação gráfica de determinadas funções também é interpretada como uma ‘causa’ para a descontinuidade da função, uma vez que implica em um ‘salto’.

Brandemberg e Messias (2016) ressaltaram que, para muitos alunos, o fato de uma função estar escrita em partes implica em ‘buracos’, ‘saltos’ ou ‘quebras’ em seu gráfico e, consequentemente, em algum ponto ou intervalo de descontinuidade na função. Nesses termos, as funções $h(x)$, $t(x)$, destacadas na figura 3, seriam admitidas como descontínuas, em virtude da presença de ‘buracos’ e/ou ‘saltos’ em suas representações gráficas.

Figura 3 – Representação gráfica de $h(x)$ e $t(x)$

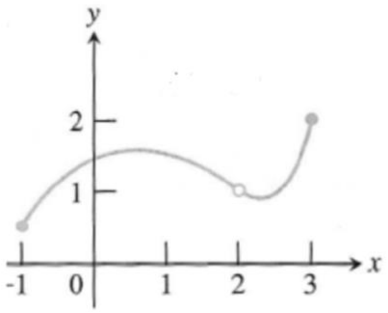


Fig. 3a – Gráfico de $h(x)$
Fonte: Thomas (2002)

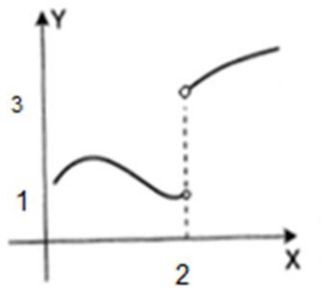


Fig. 3b – Gráfico de $t(x)$
Fonte: Elaborado pela autora

Vamos analisar essas funções sob duas perspectivas: a primeira, a partir da compreensão de continuidade no ponto e a segunda, de continuidade em um intervalo. O fato é que as funções representadas nas figuras 3a e 3b não estão definidas em $x = 2$, logo, não podemos avaliar a continuidade nesse ponto, mas é possível afirmar que elas são contínuas em cada ponto de seu domínio, porém, não são contínuas, por exemplo, em cada ponto do intervalo $(1,3)$.

Em seus trabalhos, Tall e Vinner (1981), Vinner (1987) e Cornu (1991) apontaram que os estudantes costumam ter o entendimento de que uma função descontínua é constituída por 'partes que não se encontram'. Aliás, concepções espontâneas sobre continuidade corroboram para interpretações do tipo 'o gráfico está em um único pedaço' ou 'desenhamos o gráfico sem tirar o lápis do papel'. Para Cornu (1991) e Jayakody (2015), fica claro que os estudantes confundem *continuidade* com *conectividade*. Essa compreensão equivocada do conceito se configura como uma concepção potencialmente problemática, já que pode levar um indivíduo à ideia de que uma função f *é contínua em um ponto* p *se* $p \in D_f$[8].

Tall e Vinner (1981), Vinner (1987), Amatangelo (2013), Denbel (2014) e Jayakody (2015) destacaram que, em geral, os estudantes condicionam a continuidade em determinado ponto à existência do limite nesse ponto. Entendemos que essa interpretação possa contribuir para que a relação *limite x continuidade* se configure como um fator de conflito em potencial. Vamos considerar, para fins de exemplificação, as funções representadas na figura 4.

Figura 4 – Representação gráfica de $s(x)$ e $v(x)$

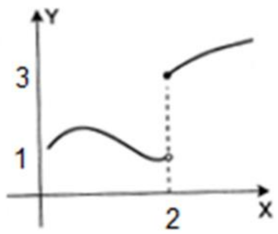


Fig. 4a – Gráfico de $s(x)$
Fonte: Juter (2008)

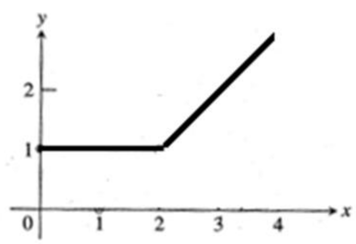


Fig. 4b – Gráfico de $v(x)$
Fonte: Elaborado pela autora

Uma compreensão que condicione a continuidade em um ponto à existência do limite nesse ponto seria suficiente para que um sujeito respondesse que a função da figura 4a não é contínua em $x = 2$, uma vez que $f(2) = 3$ e que $\lim_{x\to 2} s(x)$ não existe, pois $\lim_{x\to 2^+} s(x) \neq \lim_{x\to 2^-} s(x)$. Na perspectiva desse mesmo raciocínio, o sujeito poderia afirmar que a função da figura 4b não é contínua em $x = 0$ porque o limite não existe quando $x \to 0$. Sendo assim, a menos que ele evocasse o conceito de continuidade na extremidade à direita ou à esquerda de um ponto, ele avaliaria a continuidade em $x = 0$ de maneira equivocada.

Jayakody (2015) e Jayakody e Zazkis (2015) refletiram sobre a maneira como o conceito de continuidade é comumente introduzido nas aulas e, também, em

[8] Vinner (1987), Amatangelo (2013), Denbel (2014), Jayakody (2015) e Jayaody e Zazkis (2015) observaram evocações semelhantes a essa em suas pesquisas.

materiais de estudo de Cálculo. Desse modo, admitiram que a primeira condição a ser verificada no teste de continuidade – a de que $f(p)$ existe – pode levar estudantes a uma interpretação equivocada sobre esse conceito. Nessa perspectiva, o domínio da função pode se configurar como um fator de conflito cognitivo, uma vez que pode levar à compreensão de que *uma função que não esteja definida em um ponto p, é descontínua nesse ponto* que, por sua vez, entra em conflito com o entendimento de que a *continuidade em um ponto p não pode ser analisada se* $D_f = \{x \in IR, x \neq p\}$.

Mediante o que fora apontado nesse tópico, observamos que os estudantes de Cálculo investigados em diferentes estudos têm mobilizado uma pluralidade de interpretações sobre limite e continuidade de uma função. Apresentamos, no tópico subsequente, algumas considerações prévias concernentes ao entendimento acerca de tais conceitos que, aliadas às experiências docentes anteriormente descritas, permitiram-nos definir o objeto da pesquisa.

1.4. Considerações sobre o capítulo

Sob o ponto de vista de diferentes estudos, evidenciamos a multiplicidade de compreensões que estudantes têm demonstrado sobre limite e continuidade de uma função. Foi possível, nesse sentido, sintetizá-las e organizá-las conforme suas semelhanças quanto a interpretações relativas a cada um desses conceitos (ver quadros 1 e 2).

Quadro 1 – Compreensões relativas ao conceito de limite

Tipos de Compreensões	**Quem discutiu?**
Concepção dinâmica → atribui-se ‘movimento’ a função → *tende a; se aproxima de*; *chega perto de*; aproximação em torno de x_0.	Tall e Vinner (1981), Cornu (1983), Cornu (1991), Cottril et al. (1996), Przenioslo (2004), Sarvestani (2011), Swinyard (2011), Amatangelo (2013), Denbel (2014), Oh (2014)
Limite é inalcançável → $\lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$	Tall e Vinner (1981), Cornu (1983), Cornu (1991), Cinestav e Lara-Chaves (1999), Nascimento (2003), Jordaan (2005), Juter (2008), Sarvestani (2011),

	Amatangelo (2013), Denbel (2014), Messias e Brandemberg (2015)
Limite é intransponível (fronteira)	Cornu (1983), Cornu (1991), Cinestav e Lara-Chaves (1999), Nascimento (2003), Juter (2008), Amatangelo (2013), Denbel (2014)
Limite de uma função em um ponto é sempre igual ao valor da função nesse ponto, ou seja, $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ (limite alcançável)	Cornu (1991), Cinestav e Lara-Chaves (1999), Przenioslo (2004), Juter (2008) Amatangelo (2013)
Confusões conceituais: $\lim_{x \to x_0} f(x)$ x $f(x_0)$.	Juter (2008)
Ideia de intervalo; Vizinhança ao longo dos intervalos $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ e $(x - \delta, x + \delta)$	Cornu(1991), Przenioslo (2004)
Discussões sobre o que ε e δ representam na definição de limite	Zuchi (2005), Juter (2008), Rodríguez (2009), Oh (2014)
Indeterminações implicam na não existência do limite.	Nascimento (2003), Nair (2009), Messias e Brandemberg (2016)
Existência do $\lim_{x \to x_0} f(x)$ condicionada ao fato de $x_0 \in D_{f(x)}$.	Przenioslo (2004), Jordaan (2005), Karatas et al. (2011), Denbel (2014), Messias e Brandemberg (2015)
Existência do $\lim_{x \to x_0} f(x)$ condicionada à continuidade em x_0.	Cinestav e Lara-Chaves (1999), Przenioslo (2004), Jordaan (2005), Juter (2008), Sarvestani (2011), Swinyard (2011), Amatangelo (2013), Denbel (2014), Messias e Brandemberg (2015, 2016)
Dificuldades de calcular limites de funções definidas em partes	Nascimento (2003), Maharaj (2010), Mutlu e Aydin (2013), Brandemberg e Messias (2016)
Uma investigação à direita e à esquerda de um ponto dado é suficiente para verificar a existência do limite.	Nascimento (2003), Mutlu e Aydin (2013)

Fonte: Elaborado pela autora.

Observamos, mediante a síntese apresentada no quadro 1, que o conhecimento de estudantes sobre limite é pautado, sobretudo, em interpretações dinâmicas desse conceito. Além disso, a questão de sua existência tem se configurado como um fator de conflito em potencial para estudantes de Cálculo.

No que concerne ao conceito de continuidade, sintetizamos diferentes mobilizações no quadro 2 (a seguir).

Quadro 2 – Compreensões relativas ao conceito de continuidade

Tipos de Compreensões	**Quem discutiu?**
Concepção dinâmica de continuidade: direcionalidade e movimento da função	Núñez et al. (1999), Amatangelo (2013), Jayakody (2015), Jayakody e Zazkis (2015)
‘saltos’ ou ‘buracos’ ou ‘quebras’ na representação gráfica da função implica na descontinuidade da função.	Tall e Vinner (1981), Cornu (1991), Vinner (1987), Núñez et al. (1999), Karatas et al. (2011), Jayakody (2015), Jayakody e Zazkis (2015), Messias e Brandemberg (2015)
Interpretações que mobilizem a ideia de que funções definidas em partes são descontínuas; A função não é dada em uma fórmula única.	Tall e Vinner (1981), Nascimento (2003), Brandemberg e Messias (2016)
Descontinuidade → ‘A função tem duas partes que não se encontram; o gráfico não está em um único pedaço’.	Tall e Vinner (1981) Vinner (1987), Cornu (1991)
Continuidade atrelada à ideia de inteireza; fluidez; desenhamos o gráfico sem ‘tirar o lápis do papel’.	Tall e Vinner (1981),Vinner (1987), Cornu (1991), Núñez et al. (1999), Karatas et al. (2011), Amatangelo (2013), Jayakody (2015), Jayakody e Zazkis (2015)
Uma função f é contínua em um ponto p se $p \in D_f$.	Tall e Vinner (1981), Vinner (1987), Amatangelo (2013), Denbel (2014), Jayakody (2015) Jayakody e Zazkis (2015)
Continuidade condicionada à existência do limite em determinado ponto	Tall e Vinner (1981), Vinner (1987), Amatangelo (2013), Denbel (2014), Jayakody (2015)
Os termos *continuidade* e *conectividade* são interpretados de maneira semelhante.	Cornu (1991), Jayakody (2015)

Uso coloquial do termo *continuidade* → inteireza da função.	Tall e Vinner (1981), Cornu (1991), Kayakody
Funções que apresentam assíntotas em suas representações gráficas → descontinuidade.	Jaykody (2015)
Teste de continuidade x entendimento sobre continuidade	Jayakody (2015), Jayakody e Zazkis (2015)

Fonte: Elaborado pela autora.

Observamos que a compreensão de estudantes sobre continuidade encontra-se vinculada a uma concepção natural, na qual é atribuído direcionalidade, movimento, fluidez e inteireza à função. Além disso, ficou evidente nos apontamentos da literatura revisada que as condições que implicam na (des) continuidade de uma função em um ponto ou ao longo de um intervalo são interpretadas de maneira equivocada pelos estudantes.

Desse modo, ficou clara, para nós, a importância de desenvolver uma pesquisa que contemplasse como objeto **a compreensão de estudantes sobre limite e continuidade de uma função**, devido à relevância desses conhecimentos para a aprendizagem no âmbito do Cálculo e, também, ao fato de muitos estudantes apresentarem dificuldades provenientes de interpretações equivocadas sobre esses conceitos.

CAPÍTULO 2

Do quadro teórico à questão de pesquisa

2.1. Introdução

Dedicamos esse capítulo à apresentação de aspectos relacionados às teorias sobre imagem e definição conceitual (VINNER, 1991) e APOS (DUBINSKY et al., 1984; ARNOON et al., 2014) que, por sua vez, se constituíram como nossa fundamentação teórica. Refletimos sobre como essas duas teorias no âmbito do Pensamento Matemático Avançado (PMA), aliadas ao objeto de pesquisa, contribuíram para a formulação da questão norteadora e tese que orientaram esse trabalho.

2.2. Teorias Cognitivas do Pensamento Matemático Avançado

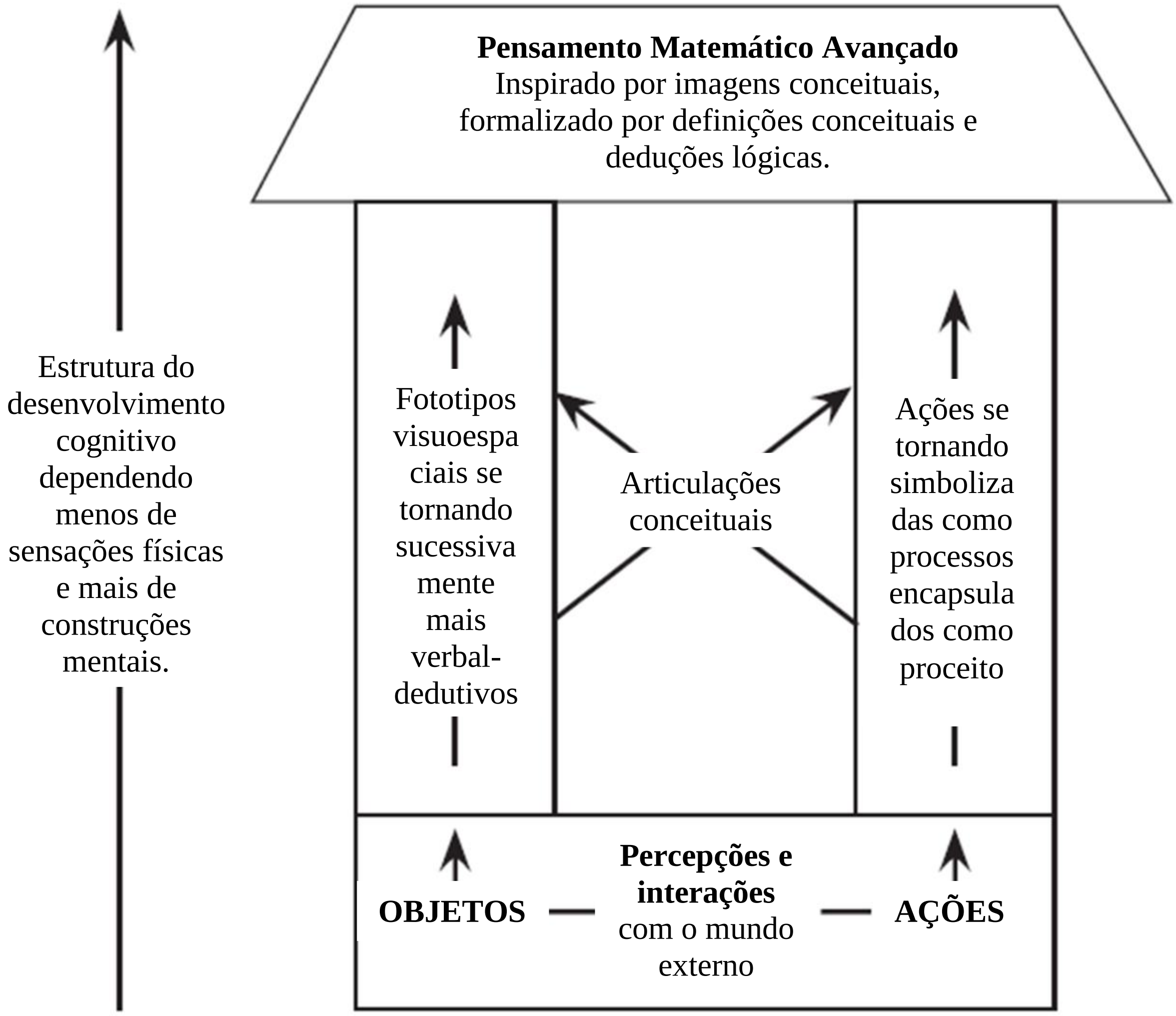
2.2.1. A natureza do Pensamento Matemático Avançado

Ao longo das últimas décadas, muito tem sido discutido sobre PMA e – ainda que não haja exatamente um acordo acerca do que tal fraseologia, de fato, representa (EDWARDS; DUBINSKY; MCDONALD, 2005) – existe certo entendimento no que concerne à importância de processos como a abstração, generalização, sintetização, dentre outros, para o amadurecimento do pensamento matemático de um indivíduo (TALL, 1991; DREYFUS, 1991; SELDEN; SELDEN, 2005; HAREL; SELDEN; SELDEN, 2015).

Tall (1991, 1992) enfatizou que o *movimento em direção ao pensamento matemático avançado*[9] envolve uma reconstrução cognitiva por meio da difícil transição entre uma compreensão matemática mais intuitiva, baseada em experiências, e outra mais formal, pautada em definições e deduções lógicas. Nesse sentido, entendemos que o amadurecimento matemático de um indivíduo esteja intimamente ligado a um desenvolvimento cognitivo que precisa depender mais de construções mentais que de sensações físicas, conforme o esquema de Tall (1995) destacado na figura 5.

[9] Tradução da expressão *'the move to advanced mathematical thinking'*.

Figura 5 – Amadurecimento cognitivo



Fonte: Tall (1995, p. 4, traduzido pela autora)

É importante ressaltarmos que esse amadurecimento cognitivo não acontece da mesma maneira para todos os indivíduos, isso porque, não há uma única maneira de pensar sobre dado conhecimento matemático, mas uma pluralidade de modos, culturalmente desenvolvidos, que dependem do contexto do qual fazem parte.

Na perspectiva de Tall e Vinner (1981), a matemática pode assumir tanto a característica de atividade mental quanto de sistema formal que são representados, respectivamente, pela imagem conceitual do indivíduo acerca de um conceito e a definição conceitual estabelecida pela comunidade matemática. O pensamento matemático avançado é, desse modo, inspirado por imagens conceituais que são formalizadas por meio de definições conceituais e deduções lógicas (TALL, 1995).

Entendemos, assim como Dreyfus (1991), que essa pluralidade nos modos de pensar esteja atrelada a uma longa interação entre os mais diversos processos mentais inerentes ao pensamento matemático, seja ele elementar ou avançado, sem que haja, inclusive, distinção entre muitos desses processos, ainda que o foco do PMA, segundo ele, esteja nas abstrações relativas às definições e deduções lógicas.

O processo de representação, dentre outros a que Dreyfus (1991) se refere, é de fundamental importância para a aprendizagem matemática, especialmente, quando o indivíduo consegue agregar várias imagens a determinado conceito, ou seja, múltiplas representações que – desde que não entrem em conflito umas com as outras – podem possibilitar maior flexibilidade na resolução de problemas em diferentes contextos matemáticos.

Para Dreyfus (1991), além da representação, outros processos – como os de generalização e sintetização – são fundamentais para que a abstração seja alcançada por um indivíduo e, por conseguinte, o PMA. Generalizar, nesse sentido, significa identificar padrões a partir de particularidades relativas a determinado conhecimento matemático, de maneira a expandir seus domínios de validade. Sintetizar é combinar ou compor partes tal que se constituam em uma totalidade, uma entidade. Quando um sujeito consegue formar uma noção abstrata acerca de determinado conceito, podemos dizer – de acordo com Dreyfus (1991) – que ele, enfim, domina esse conceito.

Nesse sentido, Ervinck (1991) ressalta a importância da criatividade como parte constituinte da natureza do PMA, uma vez que pode contribuir para o desenvolvimento da teoria matemática tanto por meio de conjecturas construídas por meio de experiências oriundas de diferentes contextos matemáticos quanto na formulação final da matemática como um sistema dedutivo de ideias e provas claramente definidas e construídas.

A criatividade matemática se faz presente quando um indivíduo consegue, dentre outras habilidades, formular uma definição a partir de conceitos que garantem tanto sua utilidade quanto a de outro(s) objeto(s) matemático(s) ou quando ele é capaz de escolher palavras e símbolos apropriados para fins de representação de conceitos. Desse modo, entendemos que a criatividade seja intrínseca aos diferentes processos mentais que constituem a essência do pensamento matemático.

Em Edwards, Dubinsky e McDonald (2005), o pensamento matemático avançado é definido como um pensamento que demanda um raciocínio dedutivo e rigoroso acerca de noções matemáticas que não são inteiramente acessíveis por meio de nossos sentidos. Para esses autores, não há um momento específico da experiência educacional de um indivíduo em que o PMA se inicie, uma vez que este depende de contínuas (trans)formações do pensamento que transcendem, porém não ignoram, experiências anteriores ou intuições provenientes de um raciocínio matemático mais elementar. Observamos que a definição de Edwards, Dubinsky e McDonald (2005) compartilha elementos semelhantes aos apontamentos de Tall (1991, 1992, 1995) e Dreyfus (1991) sobre a natureza do PMA.

Ao considerarmos que o pensamento matemático de natureza avançada depende da habilidade do indivíduo em estabelecer conexões entre os mais variados processos mentais, voltamo-nos para duas perspectivas teóricas vinculadas ao desenvolvimento cognitivo no âmbito do PMA: a teoria sobre imagem e definição conceitual (VINNER, 1991) e a teoria APOS (DUBINSKY et al., 1984; ARNOON et al., 2014).

Optamos por tal perspectiva teórica por assumirmos que entender um conceito significa assimilá-lo sob a forma de um esquema apropriado, constituído por descrições, organizações e exemplificações de estruturas mentais, que levam um indivíduo a formar uma imagem conceitual coerente acerca de determinado conhecimento matemático. A articulação entre o objeto de estudo e essa fundamentação teórica foi essencial para que pudéssemos delinear nossa pesquisa.

2.2.2. Imagem Conceitual e Definição Conceitual

Os termos imagem conceitual e definição conceitual são, respectivamente, traduções de *concept image* e *concept definition*. Enquanto o primeiro refere-se à 'imagem do conceito', isto é, diferentes representações atreladas a determinado objeto matemático, o segundo, está vinculado à ideia de 'definição do conceito' que, por sua vez, significa a forma (em palavras) como um objeto pode ser descrito, seja por um indivíduo ou pela própria comunidade matemática.

Sob o ponto de vista dessa teoria, entendemos que para resolver uma tarefa que envolva determinado conceito matemático, um indivíduo precisa recorrer a diferentes processos associados a esse conceito. Admitimos, nesse sentido, que seu entendimento depende da maneira como esse indivíduo age sobre os conhecimentos que são mobilizados diante do que lhe é solicitado, de como ele enxerga as abstrações matemáticas envolvidas nos diferentes contextos e, principalmente, do modo como sua memória é estimulada a formar associações não verbais, isto é, imagens conceituais, baseadas em representações visuais, figuras mentais, impressões, propriedades e experiências anteriores de aprendizagem.

Esclarecemos, nesse sentido, que o entendimento de um conceito não se restringe à simples evocação de sua linguagem simbólica, ou ainda, da reprodução de definições. Na verdade, entender um conceito significa formar uma imagem conceitual coerente para ele (VINNER, 1991). Isso porque, propriedades e/ou interpretações contraditórias podem levar um sujeito à composição de uma imagem conceitual sobre determinado conhecimento matemático que não esteja em acordo com sua respectiva teoria formal.

É importante mencionarmos que quando um sujeito é colocado diante de uma situação matemática, diferentes partes de sua imagem conceitual (IC) podem ser ativadas. A porção da IC de um indivíduo que é ativada mediante determinada tarefa é denominada de imagem conceitual evocada (ICE). A ICE não representa, necessariamente, tudo o que um sujeito sabe sobre determinado conhecimento (VINNER, 1991), uma vez que ele pode (ou não) mobilizar outros elementos conforme o contexto matemático em que tal conhecimento esteja inserido.

O conceito de limite, por exemplo, é usualmente interpretado como um processo de aproximação, por meio do qual é possível observar que $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Esse tipo de compreensão pode estar vinculada à prática excessiva de calcular limites de funções contínuas e, como uma parte integrante da imagem conceitual de um sujeito, poderá (ou não) levá-lo ao erro, dependendo da tarefa matemática que lhe for solicitada.

Desse modo, estamos em acordo com Tall e Vinner (1981) no que concerne à importância de que diferentes atributos mentais associados a um conceito constituam a imagem conceitual de um indivíduo, uma vez que a complexidade de seu entendimento depende de sua habilidade em estabelecer conexões entre seus possíveis esquemas mentais relativos a esse conceito.

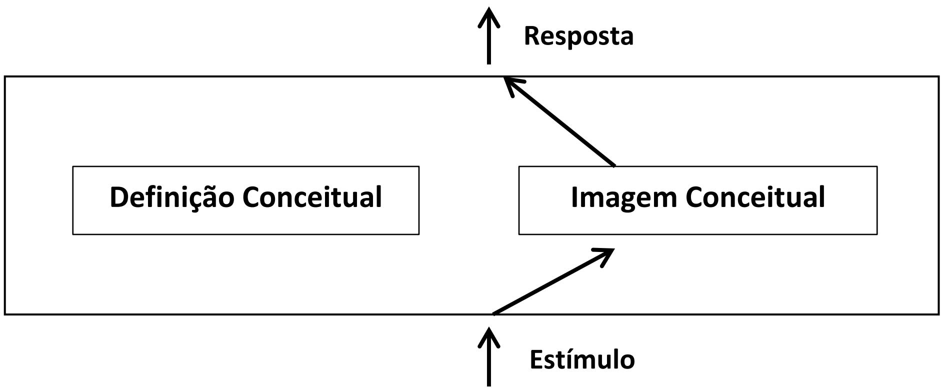
É importante ressaltar que as possíveis imagens conceituais sobre determinado conhecimento matemático podem ser traduzidas em forma de definição conceitual pessoal (DCP) que, por sua vez, é a forma em palavras utilizada para especificar um conceito, sendo de tal modo, uma fraseologia própria ao indivíduo (TALL; VINNER, 1981; VINNER, 1991). A DCP pode, ou não, diferir da definição conceitual formal (DCF)[10].

Sobre a relação entre imagem e definição conceitual, admitimos que ambas pontuem a distinção entre a matemática enquanto atividade mental e como sistema formal que se referem, respectivamente, aos processos cognitivos pelo qual determinado conhecimento é concebido e, aos conceitos matemáticos quando formalmente definidos.

Nessa perspectiva, concordamos com Brandemberg (2010) no sentido de que seja possível que um indivíduo crie uma ou várias representações para determinado conceito matemático, de modo que é apoiado nessas representações mentais que seus modelos pessoais de representações simbólicas para esse conceito são ampliados. Sendo assim, assumimos que a imagem conceitual seja constituída de múltiplas representações acerca de um conhecimento e que esta poderá sofrer modificações à medida que um indivíduo amadurece matematicamente.

Vinner (1991) apresentou esquemas por meio dos quais conjecturou sobre como o sistema cognitivo de um indivíduo funciona quando precisa solucionar uma tarefa matemática. Destacamos, a seguir, uma ilustração para o que, nessa perspectiva, representaria uma resposta intuitiva.

Figura 6 – Resposta intuitiva (VINNER, 1991)



Fonte: Vinner (1991, p. 73, traduzido pela autora).

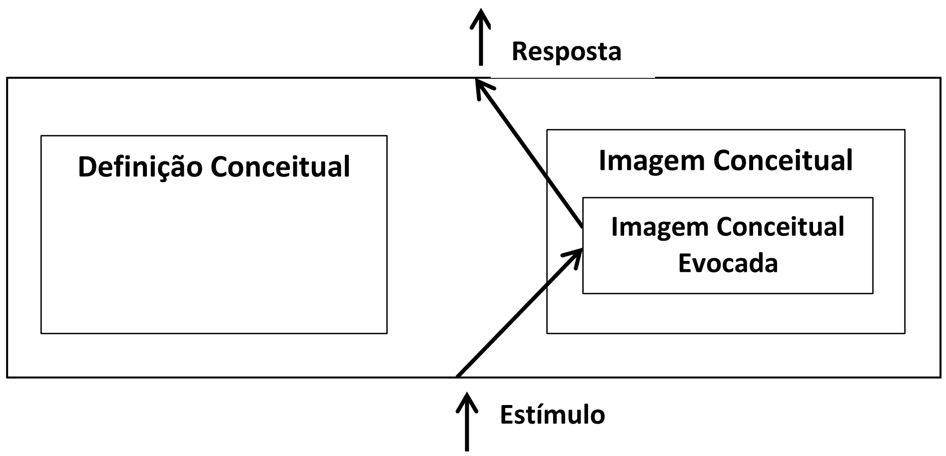
Uma resposta intuitiva, conforme ilustrado na figura 6, traz consigo somente elementos constituintes da imagem conceitual de um sujeito, sem que seja

[10] Tall e Vinner (1981) e Vinner (1991) utilizam a expressão definição conceitual formal para se referir a uma definição que seja estabelecida/aceita pela comunidade científica.

estabelecida de maneira consciente qualquer relação com aspectos da sua teoria formal, ou seja, sem que os elementos constituintes da definição conceitual sejam consultados. Isso acontece porque não é da natureza de nosso sistema cognitivo consultar definições tanto para formar uma imagem conceitual acerca de um conceito quanto para resolver uma tarefa cognitiva (VINNER, 1991).

Conforme mencionamos anteriormente, a resposta dada por um sujeito a uma tarefa matemática traz consigo os elementos de sua imagem conceitual evocada, isto é, da parte de sua imagem conceitual que foi ativada frente ao estímulo recebido. Por isso, ilustramos a resposta intuitiva, conforme destacamos na figura 7:

Figura 7 – Resposta Intuitiva adaptada de Vinner (1991)

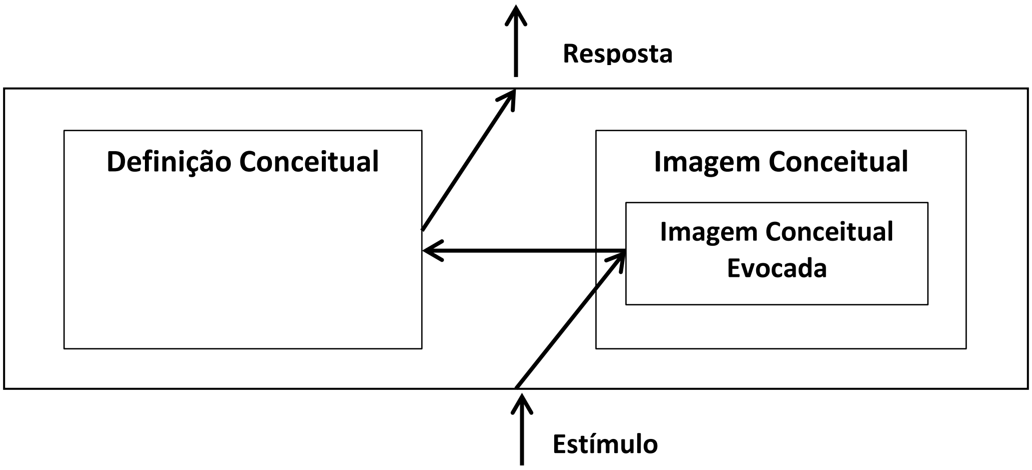


Fonte: Adaptado de Vinner (1991)

Entendemos que a imagem conceitual evocada por um indivíduo não representa, necessariamente, tudo o que ele sabe sobre determinado conhecimento (VINNER, 1991). Isso porque, outros elementos de sua imagem conceitual poderão (ou não) ser mobilizados, dependendo do contexto matemático a que este sujeito esteja submetido. Por isso, na figura 7 a ICE é representada como um subconjunto da Imagem Conceitual.

Além da resposta intuitiva, Vinner (1991) fez referência à dedução pós-pensamento intuitivo. Ambas têm em comum o fato de o sujeito buscar, incialmente, os elementos de sua imagem conceitual para responder o que lhes foi solicitado A principal diferença entre elas é o fato de que a primeira representa uma resposta a um estímulo tendo em vista unicamente as evocações pessoais de um sujeito, enquanto na segunda, observamos um processo de dedução por meio da busca por informações relativas à (parte da) definição conceitual formal que, por sua vez, pode (ou não) ser colocada em palavras pelo indivíduo por meio da definição conceitual pessoal. Destacamos na figura 8 a ilustração da dedução pós-pensamento intuitivo:

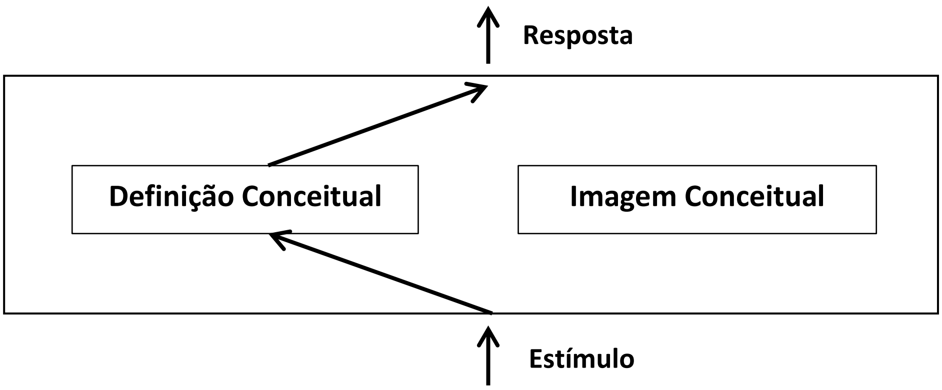
Figura 8 – Dedução pós-pensamento intuitivo



Fonte: Adaptado de Vinner (1991).

Ao contrário da resposta intuitiva e da dedução pós-pensamento intuitivo, uma dedução puramente formal não traz consigo elementos da imagem conceitual do sujeito. Ela reproduz, exclusivamente, a definição conceitual formal para fins de solucionar o que seja solicitado, conforme destacamos na figura 9 (a seguir):

Figura 9 – Dedução puramente formal

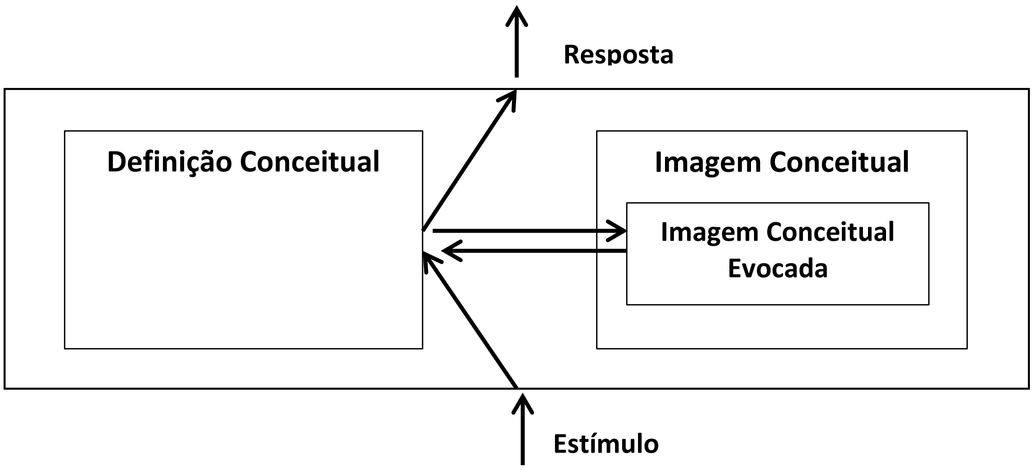


Fonte: Vinner (1991, p. 72, traduzido pela autora)

Entendemos, no entanto, que a resposta dada por um sujeito a determinada tarefa matemática sempre contemplará elementos de sua imagem conceitual, ainda que ele também se apoie explicitamente na teoria formal para solucioná-la. Desse modo, não admitimos que seja possível para um indivíduo resolver uma atividade a partir de uma dedução puramente formal.

Outra possibilidade de interação entre imagem e definição conceitual é apresentada na figura 10 (a seguir), na qual observamos que a resposta ao estimulo é pautada na definição conceitual que, por sua vez, interage com os elementos da imagem conceitual evocada.

Figura 10 – Interação entre Definição e Imagem Conceitual



Fonte: Adaptado de Vinner (1991).

É importante ressaltarmos que múltiplas representações sobre um mesmo conceito podem coexistir na imagem conceitual de um indivíduo, sendo que quando constituídas por propriedades ou interpretações contraditórias, as suas evocações poderão levá-lo a uma compreensão incoerente acerca de determinado conhecimento. Um sujeito pode, inclusive, evocar diferentes imagens conceituais em situações matemáticas diversas. Sendo assim, enquanto as partes inconsistentes de sua IC não forem mobilizadas simultaneamente, elas continuarão coexistindo.

Uma imagem conceitual evocada em um contexto específico pode, portanto, possibilitar-nos verificar conflitos relacionados à apreensão de determinado conhecimento matemático, de modo que **o entendimento de um indivíduo sobre um conceito depende de sua habilidade em estabelecer conexões coerentes entre os elementos que compõem sua imagem conceitual [HIPÓTESE H1].**

É nessa perspectiva que a teoria APOS, destacada no tópico subsequente, é inserida em nossa pesquisa, uma vez que esta parte da ideia de que o conhecimento matemático é apreendido mediante a construção e organização de estruturas e mecanismos mentais que auxiliam o indivíduo a solucionar problemas em diferentes contextos (DUBINSKY; McDONALD, 2001). Admitimos, nesse sentido, que as construções mentais de um sujeito definem as características dos elementos que compõem sua imagem conceitual relativa a determinado conceito.

2.2.3. Teoria APOS

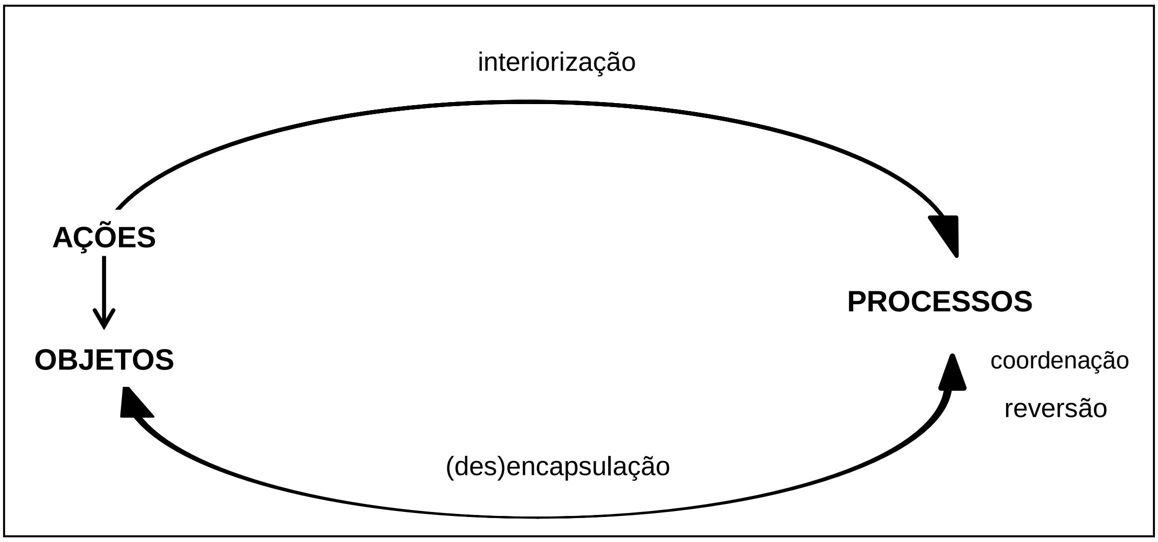
Tendo como base os estudos de Piaget sobre abstração reflexiva[11], a teoria APOS é um quadro teórico utilizado para explicar como indivíduos constroem mentalmente seu entendimento sobre determinado conceito matemático. Nessa perspectiva, temos que essa teoria traz consigo a contextualização de mecanismos mentais, tais como a *interiorização, coordenação, reversão, encapsulação, generalização, e tematização*, para o âmbito do PMA, no sentido de levar um sujeito à construção, por meio desses mecanismos, de estruturas mentais relacionadas a um conceito, isto é, de Ações, Processos, Objetos e Esquemas.

À luz da teoria APOS, admitimos que quando um indivíduo é confrontado com um contexto matemático específico, ele evoca um Esquema e faz uso de seus componentes, seja para mediar o processo de aquisição de um novo conhecimento ou para solucionar alguma tarefa proposta. Nesse sentido, os conceitos matemáticos, tais como os de limite e continuidade, são primeiramente concebidos por meio de Ações sobre um ou mais Objetos pré-existentes. Ao serem interiorizadas, as Ações formam Processos que, por sua vez, são encapsulados em forma de Objetos e/ou desencapsulados de volta ao Processo pelo qual foram concebidos. São as Ações, Processos e Objetos que compõem um Esquema (ver figura 11).

---

[11] Na perspectiva da construção de objetos mentais e de ações mentais sobre esses objetos (DUBNSKY, 1991).

Figura 11 – A composição de um esquema



Fonte: Arnon (2014, p. 18, traduzido pela autora).

Mediante a figura 11, entendemos que seja a partir da manipulação de objetos físicos ou mentais previamente construídos que um sujeito forma Ações. E, à medida que este tem controle sobre suas Ações, elas são interiorizadas como Processo, momento em que ele passa a ter consciência acerca dessas Ações, fato que o permite refletir sobre elas e combiná-las entre si e, inclusive, entre outras Ações.

A encapsulação acontece quando o sujeito consegue entender o Processo como uma estrutura estática e, desse momento em diante, pode realizar Ações sobre tal estrutura que, por sua vez, passa a assumir o status de Objeto. É possível que muitos processos cognitivos estejam envolvidos nessa construção. Um ou mais Objetos podem ser desencapsulados – por meio da reversão – e seus respectivos Processos, coordenados de maneira a formar um novo Objeto.

Um Esquema sobre determinado conceito matemático é dinâmico, e sua coerência é determinada pela habilidade de um indivíduo em verificar as situações matemáticas em que deve utilizá-lo. É uma coleção de Ações, Processos, Objetos e, inclusive, de outros Esquemas. Essa estrutura mental pode diferir de um indivíduo para outro – uma vez que diferentes tipos de relações entre seus componentes podem ser construídas – e não precisa ser necessariamente evocada em toda e qualquer situação que envolva uma mesma ideia matemática, já que o aprendizado matemático não se desenvolve de maneira linear (ARNON et al., 2014). Por meio do mecanismo da tematização, transformações sobre um Esquema podem ser articuladas, a fim de levá-lo, inicialmente*,* ao status de Objeto e, posteriormente*,* a assimilação de outras ideias matemáticas adjacentes a tal estrutura.

Ressaltamos que um Esquema pode ser uma importante ferramenta para entender como o conhecimento matemático é estruturado na mente do indivíduo, já que é possível prever as condições para o aprendizado de um conceito a partir de modelos que conjecturem sobre suas construções mentais. Ao modelo hipotético que descreve as estruturas e mecanismos mentais que um indivíduo pode precisar construir para entender um conceito matemático específico damos o nome de decomposição genética. (ARNON *et al.*, 2014).

Uma decomposição genética é, incialmente, uma hipótese. Sua formulação preliminar é baseada nas experiências dos pesquisadores em termos de ensino e aprendizagem do conceito em questão, e no próprio conhecimento que têm acerca desse conteúdo e de seu desenvolvimento histórico conceitual. Um entendimento sólido sobre a teoria APOS e a leitura de pesquisas anteriores que contemplem a compreensão de estudantes acerca da temática escolhida também contribuem para a elaboração de decomposições genéticas (ARNON, 2014).

Esse modelo contempla uma descrição das ‘transformAções' que um sujeito precisa realizar em um Objeto mental pré-existente para que a construção de um novo conceito matemático seja possível, ou seja, por meio de uma decomposição genética, conjecturamos sobre como Ações, Processos e Objetos podem ser organizados para formar Esquemas coerentes que viabilizem a apreensão de um conceito. Sendo assim, ela se apresenta como um modelo de epistemologia e cognição matemática (ROA-FUENTES; OKTAÇ, 2010).

Uma decomposição genética referente a determinado conhecimento matemático não é necessariamente única. Isso porque o entendimento de um conceito não acontece da mesma maneira para diferentes indivíduos. No entanto, é possível utilizá-la como um modelo geral que descreve possíveis trajetórias para a construção de um conceito por parte de um grupo de indivíduos. Ela pode servir como um instrumento diagnóstico que auxilia na elaboração de instruções de ensino que considerem os possíveis caminhos cognitivos a serem percorridos por um ou mais estudantes no decorrer do processo de aquisição de um conceito.

Consideramos que a Decomposição Genética seja um modelo de epistemologia e cognição matemática, por meio do qual entendemos **ser possível**

conjecturar acerca das estruturas e mecanismos mentais (que julgamos ser) necessários para a compreensão de determinado conhecimento matemático [HIPÓTESE H2], fato que pode permitir a composição de imagens conceituais coerentes acerca dele.

Ressaltamos que a definição de uma fundamentação teórica para essa pesquisa, aliada à escolha de nosso de estudo, levou-nos à formulação de nossa questão norteadora e da tese que orientou esse trabalho, conforme destacamos a seguir.

2.3. Considerações sobre o capítulo

Conforme mencionamos anteriormente, ficou evidente para nós a importância de desenvolver uma pesquisa que contemplasse como objeto **a compreensão de estudantes sobre limite e continuidade de uma função.** Ressaltamos, também, que o quadro teórico apresentado no decorrer desse capítulo, permitiu-nos escrever duas hipóteses:

> [H1] – O entendimento de um indivíduo sobre um conceito depende de sua habilidade em estabelecer conexões coerentes entre os elementos que compõem sua imagem conceitual;
>
> [H2] – É possível conjecturar acerca das estruturas e mecanismos mentais (que julgamos ser) necessários para a compreensão de determinado conhecimento matemático.

Tendo em vista nosso objeto de pesquisa, bem como as hipóteses [H1] e [H2], colocamo-nos orientados sob a tese de que **um esquema que contemple estruturas e mecanismos mentais (que julgamos ser) necessários para a apreensão de um conceito por parte de um indivíduo precisa estar vinculado à evocação de múltiplas imagens conceituais coerentes sobre esse conceito nos diferentes contextos matemáticos.**

. Nessa perspectiva, desenvolvemos nosso estudo norteados pela seguinte pergunta:

- **Que estruturas e mecanismos mentais precisam ser construídos de modo a permitir que estudantes alcancem um real entendimento sobre limite e continuidade de uma função?**

A referida questão norteou, portanto, essa pesquisa, cujas considerações metodológicas são delineadas no capítulo seguinte.

CAPÍTULO 3

Delineamento da pesquisa

3.1. Introdução

Dedicamos esse capítulo ao delineamento da pesquisa por meio da apresentação de nossas considerações teórico - metodológicas. Elucidamos, também, a relevância de nosso estudo em meio às teses e dissertações defendidas no âmbito de Programas de Pós – Graduação, vinculados às áreas de Educação Matemática e Ensino de Ciências e Matemática.

3.2. Considerações gerais sobre a pesquisa

Esta foi uma pesquisa de natureza qualitativa, do tipo descritiva, que nos permitiu desenvolver uma análise acerca da compreensão sobre limite e continuidade de uma função, por meio da qual efetivamos:

- Conjecturas acerca do modo como o sistema cognitivo de um indivíduo pode funcionar quando este executa tarefas envolvendo esses conceitos (1º estágio da pesquisa);
- Reflexões sobre que mecanismos e estruturas mentais precisam ser construídos por estudantes para que seja possível levá-los a um entendimento efetivo acerca desses conceitos (2º estágio da pesquisa).

Entendemos, assim como Strauss e Corbin (1998), que o termo ‘pesquisa qualitativa’ está relacionado a “qualquer tipo de pesquisa que produza resultados não alcançados através de procedimentos estatísticos ou de outros meios de quantificação” (p. 23). Por isso, o enfoque qualitativo de nosso estudo esteve vinculado, principalmente, ao fato de <u>não nos preocuparmos em quantificar resultados</u>, mas sim em <u>descrevê-los e interpretá-los</u>, de maneira a <u>produzir significados</u> para nosso objeto de pesquisa (FREITAS; JABBOUR, 2011).

Para Gil (2008) e Freitas e Jabbour (2011), uma pesquisa descritiva tem como principal objetivo descrever características de dada população ou fenômeno ou, ainda, de estabelecer relações entre variáveis, tendo como uma de suas características mais expressivas a utilização de técnicas padronizadas para a coleta de dados. Por isso, admitimos que esse estudo tenha se configurado como descritivo, uma vez que nossa investigação se debruçou em uma descrição de características de determinado fenômeno de interesse, nesse caso, a compreensão de estudantes sobre limite e continuidade de uma função.

A relação estabelecida entre o objeto de pesquisa e a fundamentação teórica desse trabalho nos levou à formulação da tese, bem como da questão norteadora que orientaram esse estudo que, conforme mencionamos anteriormente, teve o objetivo geral de **conjecturar sobre que estruturas e mecanismos mentais precisam ser construídos por um indivíduo de modo a possibilitá-lo compreender efetivamente os conceitos de limite e continuidade.** Elegemos, ainda, como objetivos específicos:

- Analisar os elementos que compõem a Imagem Conceitual de estudantes de licenciatura em matemática no que se refere aos conceitos de limite e continuidade;
- Estabelecer uma decomposição genética que contemple mecanismos e estruturas mentais que possam viabilizar a compreensão de estudantes sobre limite e continuidade;

Para que os referidos objetivos fossem alcançados, essa pesquisa foi organizada em dois estágios. No primeiro, efetivamos um estudo preliminar por meio do qual conjeturamos sobre as imagens conceituais evocadas por estudantes de licenciatura em matemática sobre limite e continuidade, enquanto no segundo, apresentamos uma decomposição genética que contempla os (possíveis) mecanismos e estruturas mentais que admitimos ser necessários para o entendimento efetivo desses conceitos.

O primeiro estágio foi constituído de quatro etapas, conforme descrevemos a seguir:

[1ª etapa] – Elaboração dos questionários[12]

Foram elaborados três questionários (Apêndice A, B e C), de modo que o foco do primeiro questionário (Q1) foi, principalmente, a interpretação geométrica de situações relacionadas ao conceito de limite.

Por meio do segundo questionário (Q2), objetivamos investigar as definições conceituais pessoais sobre limite de uma função em determinado ponto e, também, sobre limites envolvendo infinito.

As tarefas solicitadas no terceiro questionário (Q3) levaram os sujeitos investigados a refletir sobre situações específicas concernentes à ideia de continuidade e sua relação com o conceito de limite.

[2ª etapa] – Delimitação dos sujeitos a serem investigados

Tendo em vista o objeto de pesquisa, entendemos que os sujeitos investigados por meio de nossa investigação precisariam ser estudantes do curso de licenciatura em matemática que, necessariamente, já tivessem concluído a disciplina de Cálculo I. Isso porque:

- Ainda que a disciplina de Cálculo I seja comum a muitos cursos da área de exatas, admitimos que seja nos cursos de licenciatura e/ou bacharelado em matemática que os conceitos de limite e continuidade tenham grande expressividade no que se refere à construção de objetos matemáticos no âmbito do Cálculo[13].
- Era preciso que os sujeitos investigados conhecessem quaisquer aspectos sobre limite e continuidade. Por isso, optamos por selecionar estudantes que tivessem concluído um curso de Cálculo I[14].

Nessas condições, solicitamos, inicialmente, a participação de 15 estudantes do 5º semestre do curso de licenciatura em matemática de uma universidade pública

[12] Os instrumentos de investigação são apresentados na parte II desse trabalho.

[13] Como as experiências docentes da autora desse trabalho no que se refere ao ensino de Cálculo estão vinculadas ao curso de licenciatura em matemática, optamos por definir que os sujeitos investigados fossem discentes desse curso, e não de bacharelado em matemática.

[14] Alunos que, porventura, estivessem cursando a disciplina Análise Real não foram incluídos em nossa pesquisa, uma vez que essa disciplina está relacionada a uma abordagem mais rigorosa dos conceitos de Cálculo, fato que possivelmente influenciaria nas respostas dos sujeitos para os questionários que, por sua vez, foram elaborados tendo em vista a forma como tais conceitos são abordados no âmbito do Cálculo, e não da Análise.

localizada em Belém (Pará)[15]. No entanto, apenas cinco deles responderam às tarefas que compuseram cada um dos questionários. Os demais, não compareceram em todos os momentos que foram agendados previamente para que tais atividades fossem realizadas. Por isso, o estudo preliminar que foi efetivado na terceira etapa do primeiro estágio contou com a participação de cinco sujeitos.

[3ª etapa] – Estudo preliminar sobre imagens conceituais

Cinco sujeitos investigados, definidos conforme as especificações destacadas na etapa anterior, responderam aos questionários individualmente. A investigação aconteceu durante três encontros de aproximadamente 50 minutos de duração, agendados previamente com cada sujeito investigado. Optamos por não intervir enquanto eles resolviam as questões e solicitamos que eles incluíssem o máximo de informações possível em suas respostas.

Ressaltamos, mais uma vez, que esses sujeitos já haviam cursado a disciplina Cálculo I e, consequentemente, estudado tópicos relativos aos conceitos de limite e continuidade de uma função.

[4ª etapa] – Análise e interpretação dos resultados obtidos no estudo preliminar

As respostas dadas pelos sujeitos investigados às tarefas solicitadas nos questionários permitiram-nos conjecturar acerca dos elementos que foram evocados em suas imagens conceituais ao resolverem tarefas relacionadas a limite e continuidade. Nossas análises foram fundamentadas, portanto, nos apontamentos de Vinner (1991) sobre imagem e definição conceitual.

No segundo estágio de nossa pesquisa, elaboramos uma decomposição genética relativa aos conceitos de limite e continuidade. Ressaltamos que a DG foi estabelecida a partir de nossas experiências na docência em Cálculo, dos apontamentos da literatura sobre a compreensão de estudantes sobre tais objetos matemáticos, de nosso aprofundamento teórico relativo à teoria APOS e, também, de nossas observações quanto aos elementos que compuseram as imagens conceituais evocadas pelos sujeitos investigados em nosso estudo preliminar. Aspectos concernentes ao desenvolvimento histórico dos referidos conceitos também foram considerados.

[15] Referimo-nos à Universidade do Estado do Pará.

Reiteramos a relevância do segundo estágio dessa pesquisa, por meio do qual foi possível elucidarmos reflexões acerca de nosso objeto de estudo. Para viabilizar o entendimento do leitor, traçamos maiores esclarecimentos acerca de cada uma das etapas contempladas nos dois estágios na parte II desse trabalho[16], cuja relevância no contexto das pesquisas produzidas em nosso país é apontada no tópico subsequente.

3.3. A teoria APOS como fundamentação teórica de teses e dissertações nacionais: reiterando a relevância da pesquisa

Apresentamos nesse tópico uma revisão de literatura, na qual tomamos como fonte de dados, pesquisas que contemplaram a teoria APOS em seu quadro teórico. As informações foram coletadas mediante os trabalhos indexados no Catálogo de Teses e Dissertações da CAPES[17].

O termo 'Teoria APOS' foi definido como chave de pesquisa, de maneira que consideramos os trabalhos desenvolvidos em Programas de Pós-Graduação vinculados à área de Educação Matemática ou Ensino de Ciências e Matemática. A leitura desse material nos permitiu verificar como essa fundamentação teórica foi relacionada aos objetos de estudo desses trabalhos. A partir de nosso critério de busca, observamos que onze trabalhos, defendidos no período de 2010 a 2017, tiveram a teoria APOS como quadro teórico. Foram 8 dissertações e 3 teses, conforme elencamos no quadro 3 (a seguir):

Quadro 3 – Teses/Dissertações defendidas no Brasil que tiveram a teoria APOS como perspectiva teórica

Ano	Material	Programa	Autor (a)	Título	Orientador
2010	Dissertação	Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática PUC (SP)	Rogério Osvaldo Chaparin	Concepções de divisibilidade de alunos do 1º ano do Ensino Médio sob o ponto de vista da teoria APOS	Profª Dra. Silvia Dias Alcântara Machado

[16] Referimo-nos aos capítulos 4 e 5.
[17] Disponível em http://catalogodeteses.capes.gov.br/catalogo-teses/#!/; O último acesso a esse banco de dados foi realizado em 03 de julho de 2018, portanto, é possível que outros trabalhos possam ter sido inseridos nessa plataforma após essa data.

2010	Dissertação	Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática PUC (SP)	Eneias de Almeida Prado	Alunos que completaram um curso de extensão em Álgebra Linear e suas concepções sobre base de um espaço vetorial	Profª Dra. Silvia Dias Alcântara Machado
2012	Dissertação	Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática PUC (SP)	Natália Coelho Soares	As operações com números naturais e alunos em dificuldades do 8º ano do Ensino Fundamental	Profª Dra. Silvia Dias Alcântara Machado
2012	Dissertação	Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática PUC (SP)	Fábio Rodrigues de Siqueira	A programação no Ensino Médio como recurso de aprendizagem dos zeros da função polinomial do 2º grau	Profª Dra. Celina Aparecida Almeida Pereira Abar
2012	Dissertação	Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática Universidade Estadual de Londrina	Henrique Rizek Elias	Dificuldades de estudantes de licenciatura em matemática na compreensão de conceitos de grupo e/ou isomorfismo de grupos	Profª Dra. Angela Marta Pereira das Dores Savioli
2013	Dissertação	Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática PUC (SP)	Fernanda Fuentes Azambuja	Divisibilidade de polinômios no Ensino Médio via generalização da ideia de divisibilidade de números inteiros	Profª Dra. Silvia Dias Alcântara Machado
2014	Tese	Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática PUC (SP)	Joelma Iamac Nomura	Esquemas cognitivos e mente matemática inerentes ao objeto matemático autovalor e autovetor: traçando diferenciais na formação do engenheiro	Profª Dra. Barbara Lutaif Bianchini
2016	Dissertação	Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática Universidade Estadual de Londrina	Marcelo Silva de Jesus	Um estudo das concepções de licenciandos em matemática, à luz da teoria APOS, a respeito do conceito de anel	Profª Dra. Angela Marta Pereira das Dores Savioli
2016	Dissertação	Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática	Mariany Layne de Souza	Dependência e Independência Linear: um estudo a respeito das	Profª Dra. Angela Marta Pereira das Dores Savioli

		Universidade Estadual de Londrina		dificuldades e concepções de licenciandos em matemática	
2016	Tese	Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática PUC (SP)	Maria Eliana Santana da Cruz Silva	Concepções de transformação linear por estudantes de licenciatura em matemática	Profª Dra. Silvia Dias Alcântara Machado
2017	Tese	Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática Centro Universitário Franciscano (Santa Maria/RS)	Janice Rachelli	Compreensões dos conceitos de derivada clássica e derivada fraca: análise segundo o modelo cognitivo APOS	Profª Dra. Vanilde Bisognin Coorientadora: Profª Dra. Silvia Maria de Aguiar Isaia

Fonte: Elaborado pela autora

Mediante as informações disponibilizadas no quadro 3, evidenciamos que, no período de 2010 a 2017, as pesquisas efetivadas nos termos da busca realizada encontram-se distribuídas conforme os itens de (i) a (iii):

(i) 5 dissertações e 2 teses foram produzidas no Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC/SP;

(ii) 3 dissertações foram defendidas no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Estadual de Londrina (UEL);

(iii) 1 tese foi defendida no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática do Centro Universitário Franciscano (Santa Maria/RS);

Evidenciamos, nesse sentido, que as (poucas) pesquisas que contemplaram a teoria APOS como fundamentação teórica foram produzidas em programas de pós-graduação vinculados a instituições localizadas no eixo sul/sudeste do Brasil, sendo a maioria delas provenientes do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC (SP), fato que reforça a necessidade de estender esse tipo de discussão para outras regiões do país.

No que concerne aos estudos efetivados por meio das pesquisas elencadas no quadro 3, evidenciamos que, dentre as oito dissertações de mestrado defendidas, duas tiveram como objetos de estudo conhecimentos (conteúdos, conceitos) da Álgebra Abstrata; Elias (2012) investigou as dificuldades de estudantes de licenciatura e bacharelado em matemática na compreensão dos conceitos de Grupo e Isomorfismo de Grupos, e Jesus (2016), as concepções de licenciandos em matemática acerca do conceito de Anel.

Elias (2012), por meio de entrevistas semiestruturadas, identificou que dificuldades relativas ao conceito de Grupo e/ou Isomorfismo de Grupos foram manifestadas pelos estudantes investigados em sua pesquisa. Suas análises foram fundamentadas pela teoria APOS, além de ter trazido, também, elementos da teoria da reificação. Nesse sentido, as interpretações do autor acerca das compreensões evocadas sobre esses objetos matemáticos foram direcionadas por tais perspectivas teóricas.

Mais especificadamente, no que concerne à teoria APOS, evidenciamos que Elias (2012) analisou as compreensões dos sujeitos sobre grupos e/ou isomorfismo de grupos, categorizando-as conforme as estruturas mentais estabelecidas na Decomposição Genética (DG) apresentada em seu trabalho. Desse modo, o autor identificou – por meio das respostas dos estudantes – que os elementos de suas compreensões sobre esses conhecimentos matemáticos foram predominantemente elementares.

Jesus (2016), por sua vez, construiu uma Decomposição Genética para o conceito de anel e, a partir dela, analisou os registros escritos dos sujeitos de sua pesquisa, obtidos por meio de tarefas envolvendo esse conhecimento matemático. O autor interpretou as concepções dos estudantes conforme as estruturas mentais previstas na DG elaborada, classificando-as, portanto, como Ações, Processos, Objetos ou Esquemas.

Em seus resultados, Jesus (2016) identificou que as concepções dos estudantes relativas ao conceito de Anel se configuraram, sobretudo, como elementares, o que na perspectiva de sua decomposição genética, significa que os sujeitos demonstravam ter apenas memorizado procedimentos e regras, fato que os levou a lidar com o objeto matemático de maneira elementar.

Verificamos, ainda no quadro 3, que duas dissertações e duas teses tiveram como objeto de pesquisa a compreensão de conhecimentos matemáticos no âmbito da Álgebra Linear.

As dissertações de Prado (2010) e Souza (2016) apresentaram, respectivamente, uma investigação relativa à compreensão de estudantes sobre a base de um IR-espaço vetorial e um estudo acerca das dificuldades de licenciandos em matemática no que se refere aos conceitos de dependência e independência linear. Já a tese de Nomura (2014) teve como objeto de investigação a construção do objeto matemático autovalor e autovetor e suas implicações na formação de estudantes de engenharia, enquanto a tese de Silva (2016) investigou a concepção de estudantes de licenciatura em matemática sobre transformação linear.

Em sua dissertação, Prado (2010) construiu uma decomposição genética para a noção de base sob a perspectiva de conjunto maximal de vetores linearmente independentes, de conjunto minimal de vetores geradores, e da justaposição entre eles. Os resultados foram obtidos por meio de entrevistas semiestruturadas, de modo que, em suas análises, o autor interpretou as respostas dos sujeitos, classificando-as em concepção-ação, concepção-processo ou concepção-objeto e verificou se tais concepções foram (ou como foram) incorporadas a esquemas relativos ao conceito de base, ou seja, se os estudantes conseguiam fazer uso dos diferentes pontos de vista atrelados a esse conhecimento matemático indistintamente.

Souza (2016) investigou as concepções e dificuldades de licenciandos em matemática relacionadas ao conceito de dependência e independência linear. Para tanto, a autora solicitou que fosse respondido um questionário constituído por tarefas envolvendo tal conhecimento. Suas análises foram norteadas pela teoria APOS, fato que a permitiu verificar os elementos que constituíram os conhecimentos dos sujeitos investigados acerca dos referidos conceitos. De modo geral, a autora observou que as concepções dos alunos se restringiram, sobretudo, ao âmbito de Ações, ou seja, a maioria deles apresentou uma noção bastante elementar de dependência e independência linear.

Já em sua pesquisa, Nomura (2014) investigou as estruturas cognitivas inerentes à construção dos conceitos de autovalor e autovetor por parte de estudantes de engenharia em diferentes etapas de sua formação. Ressaltamos que, dentre os trabalhos desenvolvidos junto a alunos de graduação, a tese de Nomura (2014) foi a única que não esteve voltada para os cursos de licenciatura ou bacharelado em matemática. A autora construiu uma decomposição genética que, por sua vez, foi utilizada como um instrumento diagnóstico, permitindo-a averiguar as características das concepções dos sujeitos a partir dos pressupostos da teoria APOS quanto aos mecanismos e estruturas mentais relativas aos objetos matemáticos autovalor e autovetor. Foi possível observarmos, nesse sentido, que os estudantes apresentaram, sobretudo, uma compreensão elementar acerca desses conceitos.

Em sua tese, Silva (2016) verificou as concepções sobre transformação linear, construídas por licenciandos em matemática durante um curso de álgebra linear. As atividades desenvolvidas junto aos sujeitos da pesquisa foram organizadas conforme os pressupostos da engenharia didática, de maneira que os resultados obtidos pela autora foram analisados conforme os apontamentos da teoria APOS sobre os mecanismos e estruturas envolvidos na construção de esquemas relativos a um conhecimento.

Silva (2016) destacou que os estudantes não conseguiram, de fato, alcançar uma concepção-objeto sobre a noção de transformação linear. Ainda assim, suas construções acerca de tal objeto matemático não se restringiram ao campo das Ações. E, mesmo que os sujeitos não tenham alcançado certos níveis de abstração, a autora evidenciou que suas concepções não se configuraram, necessariamente, como elementares.

O único trabalho que teve um conceito no âmbito do Cálculo como parte constituinte de seu objeto de pesquisa foi a tese de Rachelli (2017). Em seu estudo, a autora teve como objetivo investigar como os conceitos de derivada clássica e derivada fraca foram apreendidos por estudantes de um curso de mestrado. Ressaltamos que, dentre os estudos que foram destacados no quadro 3, este foi o único que teve como sujeitos de pesquisa alunos de pós-graduação. Rachelli (2017) elaborou uma decomposição genética, na qual foram descritas possíveis construções mentais relativas a esses objetos matemáticos. Desse modo, suas análises foram realizadas com o intuito de averiguar se (ou de que modo) os sujeitos investigados conseguiam estabelecer relações entre Ações, Processos e Objetos, de maneira a construir esquemas coerentes sobre derivada clássica e derivada fraca.

Os estudos apresentados nas dissertações de Chaparin (2010), Siqueira (2012) e Azambuja (2013) foram apoiados nos pressupostos da teoria APOS e tiveram em comum o fato de vincularem-na ao conhecimento matemático de estudantes de Ensino Médio (EM).

Chaparin (2010) investigou a concepção de alunos do 1º ano do EM sobre divisibilidade de números naturais. Os sujeitos investigados em seu estudo foram submetidos a uma sequência de atividades e, a partir das respostas dadas por eles, o autor verificou suas compreensões relativas a esse conceito. As análises dos resultados obtidos por Chaparin (2010) foram norteadas pela teoria APOS, de modo que o autor observou que a maioria dos estudantes apresentou uma concepção-ação sobre divisibilidade, pautada em algoritmos, procedimentos e, principalmente, vinculada à ação de dividir. Isso quer dizer que seus conhecimentos sobre o referido objeto matemático se mostraram bastante limitados.

Em sua pesquisa, Siqueira (2012) investigou como um algoritmo convertido para o ambiente computacional poderia auxiliar estudantes do 1º ano do EM na aprendizagem dos processos de obtenção de zeros da função quadrática. O autor analisou o desempenho dos sujeitos de sua pesquisa nas tarefas que lhes foram solicitadas tendo como referência a teoria APOS, na qual a apreensão do conhecimento é vinculado à construção e organização de Ações, Processos e Objetos em Esquemas. Siqueira (2012) enfatizou em suas análises se (e como) os alunos desenvolveram as referidas estruturas mentais para o objeto matemático em questão, fato que o permitiu avaliar se seus objetivos para com as atividades propostas foram alcançados.

Azambuja (2013) verificou de que modo retomar o conceito de divisibilidade de números inteiros viabilizaria a compreensão de estudantes do EM no que tange à divisibilidade de polinômios. Entendemos que a autora se baseou em algumas considerações acerca da teoria APOS, dentre as quais, a de que entendimento sobre determinado conhecimento matemático se inicia a partir da manipulação de objetos físicos ou mentais previamente construídos. Isso porque, organizou as atividades propostas no decorrer de sua pesquisa a partir de uma ideia matemática que já era de conhecimento dos alunos (divisibilidade de números inteiros), a fim de levá-los a compreensão de outro objeto matemático (divisibilidade de polinômios).

Dentre os trabalhos levantados no quadro 3, o de Soares (2012) foi o único que teve a teoria APOS relacionada a um objeto de pesquisa voltado para e Ensino Fundamental (EF). A autora teve como objetivo verificar se estudantes do 8º ano aprofundariam seus conhecimentos sobre operações com números naturais através do uso de tecnologias não usuais em sala de aula. As análises das construções dos sujeitos de sua pesquisa foram norteadas pela teoria APOS. Nesse sentido, Soares (2012) averiguou se suas concepções se caracterizavam como Ações, Processos, Objetos, ou ainda, como se constituiriam seus esquemas para o referido conhecimento matemático.

Tendo em vista o que fora apontado acerca das teses e dissertações defendidas nas áreas de Educação Matemática e Ensino de Ciências e Matemática que tiveram a teoria APOS como parte constituinte de seu quadro teórico, elaboramos o quadro 4, no qual, em síntese, destacamos as principais características das pesquisas apresentadas nesses trabalhos.

Quadro 4 – Caracterização das teses e dissertações que contemplaram a Teoria APOS como quadro teórico (2010 – 2017)

Material	**Objeto de Pesquisa**	**Objeto Matemático**	**Total de Trabalhos**
Dissertação	Concepções/Compreensões de estudantes de Ensino Médio sobre determinado conceito matemático	Conceito de divisibilidade	1
		Divisibilidade de polinômios	1
		Zeros de função quadrática	1
	Concepções/Compreensões de estudantes de Ensino Fundamental sobre determinado conceito matemático	Operações com números inteiros	1
	Concepções/Compreensões de estudantes de Ensino Superior sobre determinado conceito matemático	Conceito de grupo e Isomorfismo grupos	1
		Conceito de anel	1
		Base de um espaço vetorial	1
		Dependência e independência linear	1
Tese	Concepções/Compreensões de estudantes de Ensino Médio sobre determinado conceito matemático	-	-
	Concepções/Compreensões de estudantes de Ensino Fundamental sobre determinado conceito matemático	-	-
	Concepções/Compreensões de estudantes de graduação e pós-graduação sobre determinado conceito matemático	Autovalor e autovetor	1
		Transformação linear	1
		Derivada clássica e derivada fraca	1
Total Geral			**11**

Fonte: Elaborado pela autora.

Verificamos, mediante o quadro 4, que na maioria das pesquisas realizadas, os autores optaram por investigar as concepções/compreensões de estudantes de nível superior acerca de determinado objeto matemático (total de sete trabalhos). E, nesse sentido, chamamos atenção para o fato de esses objetos estarem inseridos, principalmente, no eixo de conhecimentos da Álgebra Linear ou da Álgebra Abstrata. Além disso, grande parte dos materiais encontrados em nossa busca foram dissertações de mestrado (total de oito trabalhos).

Ressaltamos, ainda, que nenhum dos trabalhos elencados no quadro 3 teve como objeto de estudo a compreensão de estudantes sobre limite e continuidade de uma função, fato que reitera a relevância de nosso estudo no contexto das pesquisas produzidas no Brasil.

3.4. Alguns encaminhamentos

O delineamento de nossa pesquisa – a partir da escolha do objeto de estudo, perspectiva teórica e, sob a orientação da tese e questão norteadora – foi de fundamental importância para a organização de cada uma das etapas que a constituíram, além de permitir que o leitor tenha um melhor entendimento acerca de nossas intenções para com a realização da mesma.

A fim de complementar as informações aqui destacadas, explicitamos, no decorrer da parte II desse trabalho, a descrição dos dois estágios contemplados em nosso estudo, de modo que, nossos apontamentos acerca de cada uma das etapas que o constituíram, possibilitaram-nos tanto responder a questão norteadora quanto alcançar os objetivos traçados para a pesquisa.

PARTE II

COMPREENSÕES DE ESTUDANTES SOBRE LIMITE E CONTINUIDADE À LUZ DE TEORIAS COGNITIVAS DO PENSAMENTO MATEMÁTICO AVANÇADO

APRESENTAÇÃO

Dedicamos a segunda parte desse trabalho à descrição dos dois estágios que constituíram a pesquisa, os quais são apresentados conforme a seguir:

- No capítulo 4, destacamos o estudo preliminar efetivado em nossa pesquisa, por meio do qual investigamos a compreensão de cinco estudantes do curso de licenciatura em matemática no que se refere aos conceitos de limite e continuidade, tendo como suporte a teoria cognitiva sobre Imagem e Definição Conceitual (VINNER, 1991);

- Apresentamos, no capítulo 5, a decomposição genética relativa aos conceitos de limite e continuidade de uma função, bem como traçamos algumas reflexões acerca de seus elementos, relacionando-os com possíveis discussões a serem contempladas no decorrer do processo de ensino de tais conhecimentos.

Ressaltamos que os aspetos discutidos no decorrer da segunda parte desse trabalho nos permitiram responder a nossa questão de pesquisa, reiterando sua relevância e de seus e possibilitando-nos refletir acerca da tese que orientou esse estudo.

CAPÍTULO 4

Limite e continuidade: um estudo preliminar sobre imagens conceituais

4.1. Introdução

Apresentamos nesse capítulo a descrição do estudo preliminar realizado, por meio do qual conjecturamos sobre a compreensão de cinco estudantes do curso de licenciatura em matemática no que tange aos conceitos de limite e continuidade de uma função, tendo como suporte a teoria cognitiva sobre imagem e definição conceitual (VINNER, 1991).

A fim de obter o máximo de informações possível acerca das imagens conceituais evocadas pelos estudantes investigados, elaboramos três questionários (Apêndice A, B e C). A elaboração desses instrumentos foi norteada por nossas experiências na docência em Cálculo e, também, nos apontamentos da literatura da área no que se refere à compreensão de estudantes sobre os conceitos de limite e continuidade.

O foco do primeiro questionário (Q1) foi, principalmente, a interpretação geométrica de situações relacionadas ao conceito de limite, uma vez que todas as tarefas solicitadas trouxeram relações com representações visuais que levaram os sujeitos investigados a refletir sobre a questão da existência do limite ou, ainda, sobre o que ele significa, de maneira que as imagens conceituais evocadas ao longo da atividade nos permitissem conjecturar sobre suas compreensões relativas a esse conceito.

Por meio do segundo questionário (Q2), investigamos as definições conceituais pessoais sobre limite em determinado ponto e, também, sobre limites envolvendo infinito. As tarefas solicitadas nesse instrumento levaram os sujeitos a escrever definições que traduziram uma parte dos elementos de suas imagens conceituais e, também, a explicar situações específicas relacionadas ao estudo de limites, permitindo-nos verificar se suas definições conceituais pessoais estavam de acordo com a teoria formal.

As tarefas solicitadas no terceiro questionário (Q3) levaram os sujeitos investigados a refletir sobre situações específicas concernentes à ideia de continuidade e sua relação com o conceito de limite, possibilitando-nos conjecturar sobre os elementos que constituíram suas imagens conceituais acerca de tais conceitos.

Reiteramos que os cinco sujeitos investigados responderam aos questionários individualmente[18] e que todos eles já haviam concluído um curso de Cálculo I[19]. Agendamos três encontros de aproximadamente 50 minutos de duração com cada um deles. Optamos por não intervir enquanto eles resolviam as questões e solicitamos que eles incluíssem o máximo de informações possível em suas respostas[20]. Dedicamos o tópico subsequente à descrição dos instrumentos de investigação elaborados para esse estudo preliminar.

4.2. Os instrumentos de investigação

Conforme mencionado anteriormente, elaboramos três questionários. Cada um deles abordou uma parte específica dos conceitos de limite e/ou continuidade. Apresentamos, no quadro 5, o questionário Q1 e, em seguida, traçamos alguns comentários acerca de nossos objetivos e expectativas para cada uma das questões nele contidas.

Quadro 5 – Questionário Q1

1. Considere $f(x) = \frac{1}{2}x + 3$ e, com o auxílio de uma calculadora, complete a tabela a seguir:

x	3	3,5	3,99	3,999	4,001	4,01	4,1	4,5	5
$f(x)$									

a) Explique o que acontece com os valores de $f(x)$ à medida que tornamos os valores de x cada vez mais próximos de 4?
b) Determine $f(4)$.
c) Ilustre geometricamente a explicação dada em (a).

[18] Inicialmente, 15 alunos seriam investigados. No entanto, apenas 5 deles responderam a todos os questionários. Por isso, optamos por incluir em nosso trabalho somente a análise das imagens conceituais evocadas por esses sujeitos.
[19] Havia seis meses que os sujeitos investigados tinham concluído a disciplina Cálculo I.
[20] Não realizamos intervenções no momento em que os sujeitos resolviam as tarefas, pois não gostaríamos de exercer qualquer tipo de influência em suas respostas. Entendemos que, desse modo, suas evocações seriam mais espontâneas.

2. Observe os gráficos a seguir e responda:

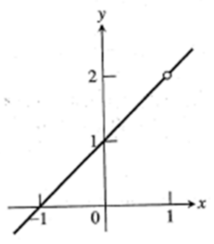


Fig 2.1

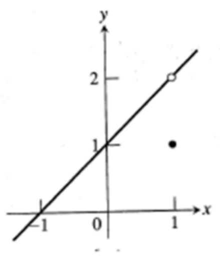


Fig 2.2

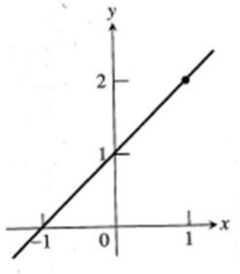


Fig 2.3

a) Qual o domínio de $f(x)$, $h(x)$ e $g(x)$?
b) Determine $f(1)$, $h(1)$ e $g(1)$.
c) Determine, se existirem, $\lim_{x\to 1} f(x)$, $\lim_{x\to 1} h(x)$ e $\lim_{x\to 1} g(x)$. Caso não existam, explique.

3. Observe o gráfico representado na figura 3.1 e, em seguida, avalie os limites em $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$ e $x = 4$. Justifique a existência (ou não) de cada um dos limites.

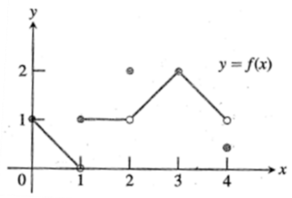


Fig. 3.1 – gráfico de $f(x)$.
Fonte: Thomas (2002)

4. Observe o gráfico de $f(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$ representado na figura 4.1

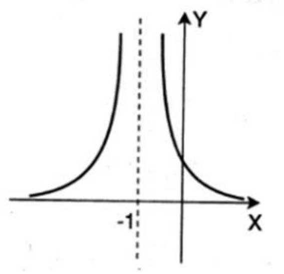


Fig. 4.1 – gráfico de $f(x)$
Fonte: Flemming e Gonçalves (2006)

a) Qual o domínio de $f(x)$?
b) Explique o que a reta de equações $x = -1$ representa no gráfico de $f(x)$.
c) O que acontece com $f(x)$ à medida que tornamos os valores de x cada vez mais próximos de -1, tanto pela direita quanto pela esquerda?

5. Observe o gráfico de $f(x) = \frac{x}{x^2-9}$ representado na figura 5.1:

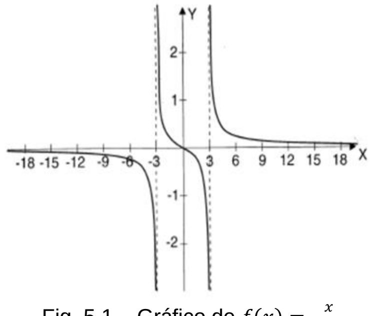


Fig. 5.1 – Gráfico de $f(x) = \frac{x}{x^2-9}$.
Fonte: Flemming e Gonçalves (2006).

a) Qual o domínio de $f(x)$?
b) Explique o que as retas de equações $x = -3$ e $x = 3$ representam no gráfico de $f(x)$.
c) O $\lim_{x\to -3} f(x)$ existe? Explique.
d) O que acontece com $f(x)$ à medida que tornamos os valores de x cada vez mais próximos de 3, tanto pela direita quanto pela esquerda?

6. Observe atentamente a figura 6.1, em torno de x_0 e de L. Explique o que você entendeu sobre essa representação.

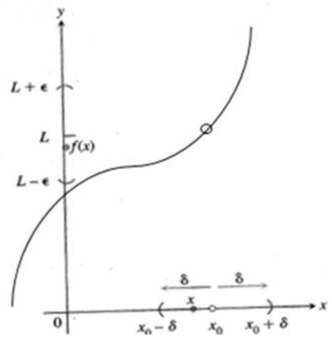


Fig. 6.1

Fonte: Elaborado pela autora.

Com a primeira questão do Q1, objetivamos verificar a forma em palavras utilizada para especificar o comportamento da função em torno de $x = 4$. Nossa expectativa, nesse sentido, foi averiguar se o termo 'limite' seria evocado e se elementos que o caracterizariam como inalcançável e/ou intransponível seriam mobilizados[21]. Almejamos, também, averiguar se os sujeitos evocariam a ideia de vizinhança, ou ainda, os intervalos $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$ e $(x_0-\delta, x_0+\delta)$, de maneira semelhante ao que fora apontado por Przenioslo (2004), especialmente, ao ilustrar geometricamente a explicação dada no item (a) da questão.

Na segunda questão, apresentamos nas figuras 2.1, 2.2 e 2.3, respectivamente, os gráficos das funções $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$, $h(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1}, x \neq 1 \\ 1, x = 1 \end{cases}$ e $g(x) = x+1$. Nosso objetivo foi observar se os sujeitos investigados identificariam o domínio dessas funções e o valor que cada uma delas assume em $x = 1$. Além disso, questionamos sobre a (não) existência dos limites de $f(x), h(x)$ e $g(x)$ quando $x \to 1$. Tivemos o intuito de verificar se seriam mobilizadas interpretações que condicionariam a existência do limite às condições de domínio da função[22].

Foi possível observar também se os sujeitos fariam referência aos limites laterais à esquerda e à direita de $x = 1$, ou ainda, se evocariam que o limite de $f(x)$ e $h(x)$ quando $x \to 1$ não existiria em virtude do 'buraco' nesse ponto. Para muitos

[21] Para maiores informações sobre discussões que envolvem interpretações semelhantes a essas, vide Tall e Vinner (1981), Cornu (1983), Cornu (1991), Cinestav e Lara-Chaves (1999), Nascimento (2003), Jordaan (2005), Juter (2008), Sarvestani (2011), Amatangelo (2013), Denbel (2014), Messias e Brandemberg (2015).
[22] Discussões acerca desse tipo de mobilização podem ser verificadas nos trabalhos de Przenioslo (2004), Jordaan (2005), Karatas et al. (2011), Denbel (2014) e Messias e Brandemberg (2015).

estudantes, tal situação implica na descontinuidade da função e, consequentemente, na não existência do limite[23].

Solicitamos que os sujeitos avaliassem os limites nos diferentes pontos do gráfico apresentado na terceira questão. Almejamos identificar suas mobilizações quanto às condições para a existência do limite em determinado ponto. Nossa expectativa foi verificar se eles evocariam imagens conceituais semelhantes às que esperamos para a segunda questão, ou seja, de que a existência do limite depende das condições de domínio[24] e/ou da continuidade da função[25].

Na quarta e quinta questão, solicitamos que os sujeitos analisassem os gráficos de $f(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$ e $f(x) = \frac{x}{x^2-9}$, respectivamente, a fim de identificar seus respectivos domínios e assíntotas, cujas equações eram $x = -1$, $x = -3$ e $x = 3$. Nosso objetivo foi verificar se os sujeitos entenderiam o significado das assíntotas no gráfico e se as relacionariam com o domínio da função. A ideia de descontinuidade poderia ser evocada, devido os gráficos não terem sido construídos 'em um único pedaço', tais como apontado em outras pesquisas[26]. Como sugerimos que fosse realizada uma análise à direita e à esquerda dos pontos dados, esperamos que os limites laterais e a (não) existência dos limites fossem evocados pelos sujeitos.

Na última questão, objetivamos verificar se os sujeitos investigados evocariam, através da representação gráfica, alguns elementos que compõem a definição de limite de uma função, os intervalos $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$ e $(x_0-\delta, x_0+\delta)$, se fariam referência ao fato de x_0 estar ou não definido no domínio da função, ou ainda, se mobilizariam a ideia de vizinhança[27]. Pretendemos, mediante as imagens conceituais evocadas nessa questão, conjecturar sobre o entendimento dos sujeitos acerca do que ε e δ representam na definição de limite, uma vez que a relação entre

[23] Nesse caso, suas evocações foram semelhantes àquelas discutidas em Przenioslo (2004), Jordaan (2005), Juter (2008), Sarvestani (2011), Swinyard (2011), Denbel (2014), Messias e Brandemberg (2015, 2016).

[24] Conforme também discutido em Tall e Vinner (1981), Vinner (1987), Cornu (1991), Núñez et al. (1999), Karatas et al. (2011), Jayakody (2015) e Jayakody e Zazkis (2015).

[25] De maneira semelhante ao que foi observado em Przenioslo (2004), Jordaan (2005), Juter (2008), Sarvestani (2011), Swinyard (2011), Denbel (2014), Messias e Brandemberg (2015, 2016).

[26] Referimo-nos, por exemplo, ao que fora apontado em Tall e Vinner (1981), Vinner (1987), Cornu (1991), Núñez et al. (1999), Karatas et al. (2011), Jayakody (2015), Jayakody e Zazkis (2015).

[27] De maneira semelhante ao que foi apontado em Przenioslo (2004).

ε e δ tem se configurado como um fator de expressivas dificuldades no processo de apreensão desse conceito[28].

A fim de complementar nossas análises acerca da compreensão dos estudantes sobre o conceito de limite de uma função, elaboramos o questionário Q2, conforme destacamos no quadro 6.

Quadro 6 – Questionário Q2

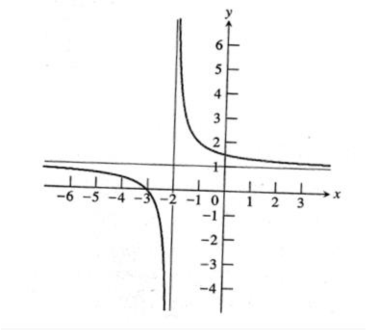
1. Considere a função definida a seguir e responda:

$$f(x) = \begin{cases} -x+1, & 0 \le x < 1 \\ 1, & 1 \le x < 2 \\ 2, & x = 2 \\ x-1, & 2 < x \le 3 \\ -x+5, & 3 < x < 4 \\ \frac{1}{2}, & x = 4 \end{cases}$$

(a) "O $\lim_{x\to 0} f(x)$ existe". Essa afirmativa é verdadeira ou falsa? Explique.
(b) Verifique se o $\lim_{x\to 1} f(x)$ existe. Explique.
(c) "O limite da função quando $x \to 2$ não existe". Você concorda com essa afirmação? Explique
(d) Determine o $\lim_{x\to 4} f(x)$.
(e) "$\lim_{x\to 3} f(x) = f(3)$". Essa sentença é verdadeira ou falsa? Explique sua resposta.

2. Explique o que você entende por $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$.

3. Considere a função $f(x) = \frac{x+3}{x+2}$. Observe sua representação gráfica:



(a) "A reta $y = 1$ é uma assíntota horizontal do gráfico de $f(x)$". Explique o que isso significa.

(b) "A reta $x = -2$ é uma assíntota vertical do gráfico de $f(x)$". Explique o que isso significa.

[28] Para maiores esclarecimentos acerca dessa discussão, sugerimos a leitura de Swinyard (2011) e Oh (2014).

4. Observe as figuras a seguir:

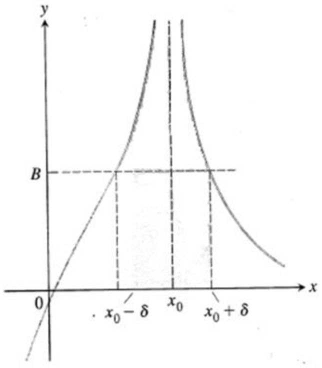


Fig. 4.1
Fonte: Thomas (2002)

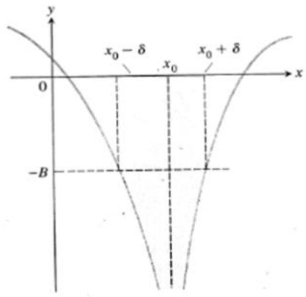


Fig. 4.2
Fonte: Thomas (2002)

5. Um estudante verificou, em um exercício de cálculo, que $\lim_{x \to x_0} f(x) = \frac{0}{0}$. Explique o que esse resultado significa. Se possível, dê exemplos que estejam em acordo com sua explicação.

Fonte: Elaborado pela autora

Na primeira questão, apresentamos uma função escrita em partes, para que os sujeitos avaliassem (e justificassem) a existência do limite em diferentes pontos. Essa mesma tarefa foi solicitada anteriormente sob outra perspectiva, já que a figura 3.1 do primeiro questionário representa a mesma função $f(x)$. Desse modo, objetivamos verificar se, da mesma maneira que em outras pesquisas, eles condicionariam a existência do limite às condições de domínio[29] e/ou continuidade da função[30].

Tivemos o intuito de investigar se o fato da função ser escrita em mais de uma sentença levaria os sujeitos a evocar que os limites da função nos pontos indicados não existiria[31], ou ainda, que a função não seria contínua. Almejamos, também, identificar se os limites laterais seriam mobilizados para verificar a existência do limite bilateral.

[29] Para maiores esclarecimentos acerca desse tipo de interpretação, sugerimos a leitura de Przenioslo (2004), Jordaan (2005), Karatas et al. (2011), Denbel (2014) e Messias e Brandemberg (2015).
[30] Interpretações que vinculam a existência do limite à continuidade da função foram discutidas em Cinestav e Lara-Chaves (1999), Przenioslo (2004), Jordaan (2005), Juter (2008), Swinyard (2011), Amatangelo (2013), Denbel (2014) e Messias e Brandemberg (2015, 2016).
[31] Discussões relativas a evocações como essa são realizadas em Nascimento (2003), Maharaj (2010), Mutlu e Aydin (2013) e Brandemberg e Messias (2016).

Na segunda questão, solicitamos que os sujeitos explicassem o que entendiam por $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$. O objetivo foi levá-los à escrita de uma definição conceitual pessoal, uma vez que a forma em palavras utilizada para descrever um conceito revela importantes características da imagem conceitual sobre ele. Dessa maneira, objetivamos verificar se interpretações como 'inalcançável' ou 'intransponível' seriam evocadas[32], ou ainda, se concepções dinâmicas relacionadas à natureza desse conceito constituiriam o pensamento dos sujeitos investigados[33].

Com a terceira questão, tivemos o intuito de verificar o entendimento dos sujeitos sobre limite envolvendo infinito, dada a dificuldade que muitos estudantes têm em compreendê-lo e, também, acerca do que as assíntotas horizontal e vertical que compõem o gráfico de $f(x) = \frac{x+3}{x+2}$ representariam para os estudantes. Nesse sentido, pretendemos identificar se a ideia de que $\lim_{x \to \infty} f(x) = 1$ e $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 1$ seria evocada para explicar a assíntota de equação $y = 1$ no item (a), bem como $\lim_{x \to -2^+} f(x) = \infty$ e $\lim_{x \to -2^-} f(x) = -\infty$ para explicar a assíntota de equação $x = -2$ no item (b) da questão, ou seja, almejamos verificar a compreensão dos sujeitos sobre a própria definição de assíntotas e sua relação com os limites envolvendo infinito. Pretendemos, também, verificar se as condições de domínio da referida função seriam evocadas em suas respostas.

Na quarta questão solicitamos, mais uma vez, que os sujeitos escrevessem uma definição pessoal, sendo que dessa vez, apresentamos duas figuras relacionadas às definições precisas de limites infinitos. Nosso intuito, nesse sentido, foi observar se os sujeitos evocariam a ideia de $f(x)$ estar 'arbitrariamente longe da origem', ou ainda, se estabeleceriam relações entre os elementos do intervalo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ e seus respectivos valores de $f(x)$, na expectativa de observar se os sujeitos fariam referência à linguagem matemática utilizada na definição de limite de uma função no ponto, dada a semelhança entre ambas.

Ressaltamos que não incluímos questões em que fosse preciso encontrar limites algebricamente em nenhum de nossos instrumentos de investigação, pois

---

[32] A ideia de limite inalcançável e/ou intransponível é discutida em diferentes estudos, tais como em Tall e Vinner (1981), Cornu (1983), Cornu (1991), Cinestav e Lara-Chaves (1999), Nascimento (2003), Jordaan (2005), Juter (2008), Sarvestani (2011), Amatangelo (2013), Denbel (2014), Messias e Brandemberg (2015).

[33] Discussões relativas à concepção dinâmica comumente atrelada ao conceito de limite são apresentadas em Tall e Vinner (1981), Cornu (1983), Cornu (1991), Cottrill et al. (1996), Przenioslo (2004), Sarvestani (2011), Swinyard (2011), Amatangelo (2013), Denbel (2014) e Oh (2014).

entendemos que quaisquer dificuldades apresentadas por eles em tarefas desse tipo não estariam, necessariamente, relacionadas à natureza desse conceito, e sim às práticas operatórias utilizadas para encontrá-los. Por isso, ao invés de encontrar limites indeterminados, solicitamos na 5ª questão de Q2, que os sujeitos explicassem o que eles entendiam por $\lim_{x \to x_0} f(x) = \frac{0}{0}$ e, se possível, exemplificassem situações que estivessem em acordo com a explicação dada.

Nosso objetivo foi observar se os termos 'descontinuidade removível', 'pontos de singularidade'[34] ou 'indeterminação' seriam evocados, ou ainda, se os sujeitos investigados condicionariam a existência do limite à ausência de indeterminações, conforme apontado em outras pesquisas[35]. Objetivamos, também, investigar se eles utilizariam representações gráficas para explicar o que uma indeterminação representa. Desse modo, nosso intuito foi verificar as mobilizações dos sujeitos em situações de ocorrência de indeterminações e não suas dificuldades quanto às técnicas para (se possível) 'eliminá-las'.

O questionário Q3 subsidiou nossa investigação acerca das imagens conceituais dos sujeitos sobre continuidade (ver quadro 7), permitindo-nos ter mais subsídios para conjecturar sobre as evocações dos sujeitos investigados no que tange a esse conceito.

Quadro 7– Questionário Q3

Questionário 3
1. É possível desenhar o gráfico de uma função, de maneira que o limite quando $x \to 4$ exista, e: a) A função seja descontínua em $x = 4$? Explique b) A função seja contínua em $x = 4$? Explique. c) A função não seja definida em $x = 4$? Explique. d) A função seja definida em $x = 4$? Explique. 2. É possível desenhar uma função descontínua que possua limite em cada ponto do domínio? Explique.

[34] De maneira semelhante ao que fora apontado por Jayakody (2015) e Jayakody e Zazkis (2015).
[35] Referimo-nos, por exemplo, aos trabalhos de Nascimento (2003), Jordaan (2005), Nair (2009) e Messias (2013).

3. É possível desenhar uma função contínua que não possua limite em um ponto qualquer de seu domínio? Explique.

4. Escreva uma definição pessoal para continuidade de uma função.

5. Observe o gráfico das funções $f(x)$ e $g(x)$ e responda a seguir:

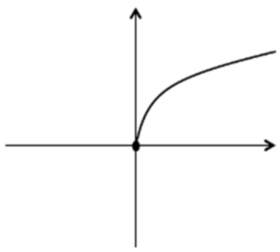


Fig 5.1 – Gráfico de $f(x)$
Fonte: Jayakody e Zazkis (2015)

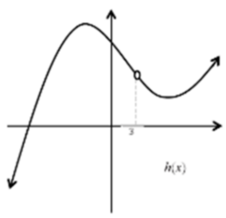


Fig 5.2 – Gráfico de $f(x)$
Fonte: Jayakody e Zazkis (2015)

a) A função representada na figura 5.1 é contínua? Explique.
b) $f(x)$ é contínua $x = -5$? Explique.
c) A função representada na figura 5.2 é contínua? Explique.

6. Observe os gráficos das funções. Avalie a continuidade nessas funções. Explique.

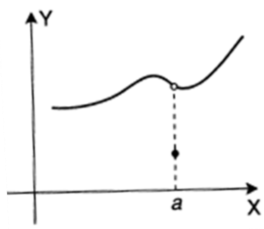


Fig.6.1. - Gráfico de $h(x)$
Fonte: Flemming e Gonçalves (2006)

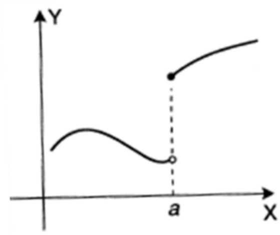


Fig. 6.2. - Gráfico de $g(x)$
Fonte: Flemming e Gonçalves (2006)

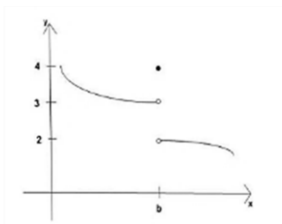


Fig. 6.3. - Gráfico de $f(x)$
Fonte: Messias (2013)

Fonte: Elaborado pela autora

Na primeira questão, baseamo-nos na investigação realizada por Amatangelo (2013) e solicitamos que os sujeitos verificassem a possibilidade de construir o gráfico de uma função a partir de algumas particularidades que, por sua vez, relacionavam domínio, limite e continuidade. Objetivamos, nesse sentido, verificar se os sujeitos investigados evocariam imagens conceituais que condicionariam a existência do limite às condições de domínio ou continuidade da função, tais como observamos em outras pesquisas[36]. Pretendemos, também, identificar se, em suas respostas, os sujeitos condicionariam continuidade à existência do limite[37].

[36] Referimo-nos aos estudos de Przenioslo (2004), Jordaan (2005), Amatangelo (2013), Denbel (2014), Messias e Brandemberg (2015), dentre outros.

[37] Conforme observamos nos resultados obtidos em Tall e Vinner (1981), Vinner (1987), Amatangelo (2013), Jayakody (2015) e Jayakody e Zazkis (2015).

Na segunda questão, os sujeitos precisaram desenhar o gráfico de uma função descontínua que possuísse limite em cada ponto do domínio e na terceira, desenhar uma função contínua que não possuísse limite em um ponto qualquer de seu domínio. Pretendemos verificar, por meio das explicações dadas, se os sujeitos mobilizariam em suas respostas que a ideia de que continuidade significa (i) existência do limite[38] ou de (ii) 'ausência de buracos ou saltos'; 'inteireza'[39]. Pretendemos observar, também, se os sujeitos relacionariam a não existência do limite em um ponto qualquer à ausência de 'saltos' no gráfico.

Na quarta questão solicitamos que os sujeitos escrevessem uma definição pessoal para continuidade. Assumimos que a forma em palavras utilizada por eles para descrever este conceito traria consigo elementos de suas imagens conceituais, fato que nos permitiria verificar se elas foram concebidas mediante propriedades ou interpretações contraditórias. Nossa expectativa foi de que a ideia de continuidade natural[40] seria mobilizada pelos indivíduos, além daquelas que prevemos para as tarefas dos itens anteriores de Q3.

Baseamos a quinta questão no estudo de Jayakody e Zazkis (2015). Na figura 5.1 do questionário Q3, $f(x)$ é definida em $[0, \infty)$. No item (a), solicitamos que os sujeitos explicassem se essa função era contínua e, nesse sentido, esperamos verificar se eles evocariam a ideia de 'inteireza' ou ausência de 'saltos' ou 'buracos'. Quando perguntamos no item (b) se a função era contínua em $x = -5$, tivemos o intuito de verificar se eles afirmariam: (i) que a função era descontínua, pois não estava definida nesse ponto, tais como observamos em outros estudos[41] ou (ii) que não poderíamos avaliar a continuidade nesse ponto, uma vez que $x = -5$ não pertencia ao domínio de $f(x)$.

Pretendemos verificar, ainda, se eles evocariam uma ideia semelhante à (ii) no item (c). Caso eles respondessem que a função $g(x)$ era descontínua em $x = 3$, então suas imagens conceituais estariam em conflito e, mais uma vez, a ideia de

[38] Nesse caso, suas respostas seriam semelhantes àquelas obtidas nos estudos de Cinestav e Lara-Chaves (1999), Przenioslo (2004), Jordaan (2005), Juter (2008), Sarvestani (2011), Swinyard (2011), Amatangelo (2013), Denbel (2014), Messias e Brandemberg (2015, 2016).
[39] Tais como discutido em Tall e Vinner (1981), Vinner (1987), Cornu (1991), Núñez et al. (1999), Karatas et al. (2011), Amatangelo (2013), Jayakody (2015) e Jayakody e Zazkis (2015).
[40] Nesse caso, suas evocações seriam semelhantes àquelas discutidas em Núñez et al. (1999).
[41] Referimo-nos, como exemplo, aos trabalhos de Karatas et al. (2011), Denbel (2014) e Jayakody e Zazkis (2015).

continuidade natural atrelada à uma concepção dinâmica de movimento e inteireza da função seria evocada.

Nosso objetivo com a sexta questão foi verificar, por meio das justificativas dos sujeitos investigados, o que eles entendiam por (des) contínuo e, ainda, se eles fariam referência aos limites laterais ou à ausência do limite quando $x \to a$ e $x \to b$ nas figuras 6.2 e 6.3, respectivamente. Não especificamos o ponto a ser analisado nas funções, pois gostaríamos de verificar se os sujeitos mobilizariam a ideia de continuidade no ponto arbitrário ou de continuidade ao longo de um intervalo. Foi nosso intuito, também, observar se os sujeitos justificariam a descontinuidade devido à presença de 'saltos' ou 'buracos' na função[42].

As imagens conceituais evocadas pelos estudantes por meio dos três instrumentos elaborados nos permitiram conjecturar sobre seu entendimento no que concerne aos conceitos de limite e continuidade. Apresentamos, no subtópico 4.3, a análise das respostas dos sujeitos investigados tendo em vista a teoria cognitiva sobre imagem e definição conceitual (VINNER, 1991).

4.3. Resultados à luz da teoria cognitiva sobre Imagem e Definição Conceitual

Conforme mencionamos, quando conhecemos os elementos que compõem a imagem conceitual de um indivíduo sobre um conceito, temos a oportunidade de conjecturar sobre os conflitos inerentes ao seu processo de apreensão, fato que pode nos auxiliar na busca por estratégias que possam viabilizar sua compreensão. Por isso, atribuímos grande relevância ao estudo preliminar efetivado em nossa pesquisa.

Apresentamos, a seguir, a análise das imagens conceituais evocadas pelos sujeitos investigados[43] ao resolverem o primeiro questionário:

4.3.1. Imagens Conceituais Evocadas no Q1

Na primeira questão do Q1, solicitamos que os sujeitos considerassem a função $f(x) = \frac{1}{2}x + 3$ e respondessem os itens de (a) a (c), conforme a seguir:

a) Explique o que acontece com os valores de $f(x)$ à medida que tomamos os valores de x cada vez mais próximos de 4?;

[42] De maneira semelhante ao que fora observado por Tall e Vinner (1981), Vinner (1987), Núñez et al. (1999), Karatas et al. (2011), Amatangelo (2013), Jayakody e Zazkis (2015), dentre outros.
[43] Os estudantes são identificados nesse trabalho como S1, S2, S3, S4 e S5.

b) Determina $f(4)$;

c) Ilustre geometricamente a explicação dada em (a).

Todos os estudantes responderam o item (a), sendo que dois deles fizeram uma análise somente à esquerda de $x = 4$. Os outros sujeitos realizaram uma análise à direita e à esquerda de $x = 4$. Eles também utilizaram termos como ‘tender para’ e ‘se aproxima de’ para explicar o comportamento de $f(x)$ em torno desse ponto, conforme evidenciamos nas respostas dos sujeitos S2 e S5 (ver quadro 8).

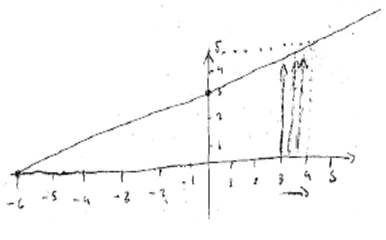
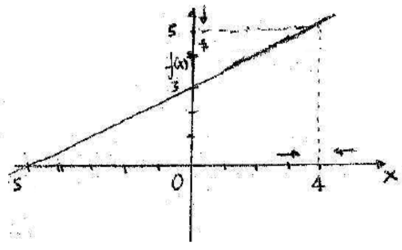
Quadro 8 – Respostas dadas ao item (a) da 1ª questão de Q1

Sujeito	Resposta
S2	Pelo lado esquerdo, ou seja, valores menores que 4 f(x) tende a 5. Pelo lado direito, ou seja, valores maiores que 4 f(x) tende a 5.
S5	À medida que os valores de x se aproximam de 4, a tendência é que os valores de f(x) aumentem.

Fonte: Anotações dos sujeitos investigados.

Todos os estudantes determinaram $f(4) = 5$ no item (b). Dois sujeitos não responderam ao item (c). Dentre os que ilustraram geometricamente a resposta dada em (a), somente S4 mostrou em sua ilustração a análise à esquerda e à direita de $x = 4$. O estudante S1, apesar de ter realizado uma análise em torno de $x = 4$ no item (a), destacou apenas uma aproximação à esquerda desse ponto em sua ilustração, conforme exemplificamos no quadro a seguir:

Quadro 9 – Ilustrações geométricas do item (c) da 1ª questão de Q1

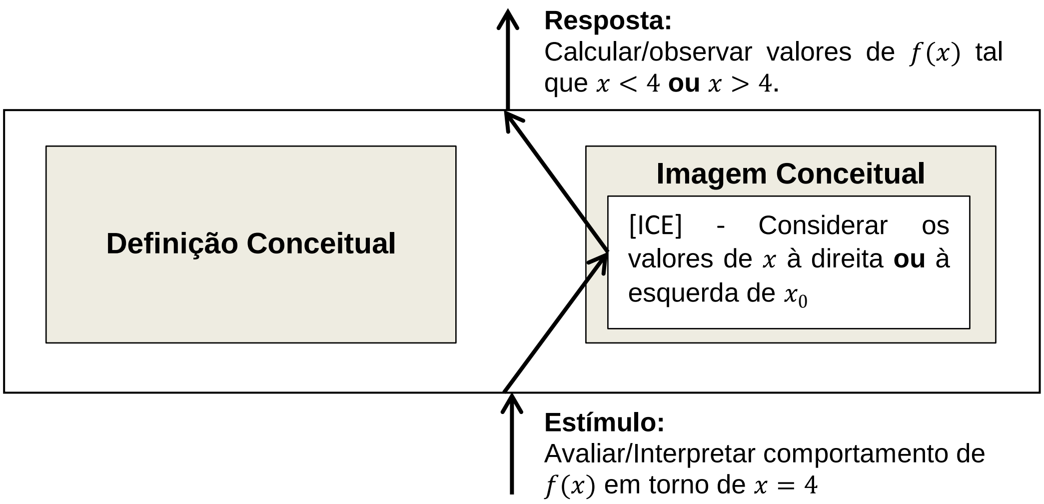
Sujeito	Resposta	Sujeito	Resposta
S1		S4	

Fonte: Anotações dos sujeitos investigados.

Observamos, mediante as respostas dadas à primeira questão, que os estudantes não evocaram o termo ‘limite’, mas mobilizaram termos como ‘tende a’ e ‘se aproxima de’ que, por sua vez, podem levá-los a caracterizar o limite como sendo inalcançável e/ou intransponível, conforme apontado em outros estudos[44]. Ressaltamos que os sujeitos não evocaram a ideia de vizinhança ou os intervalos $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$ e $(x-\delta, x+\delta)$ em suas explicações e ilustrações apresentadas, respectivamente, nos itens (a) e (c) da primeira questão.

De maneira geral, os sujeitos responderam intuitivamente ao que fora solicitado na primeira questão, uma vez que não mobilizaram em suas respostas elementos da definição conceitual de limite de uma função. Tendo como referência a representação de Vinner (1991) para uma resposta intuitiva, construímos esquemas para simular nossas conjecturas acerca das imagens conceituais evocadas pelos estudantes investigados na primeira questão do Q1 (ver figuras 12 e 13).

Figura 12 – Resposta Intuitiva 1 para a 1ª questão de Q1[45]

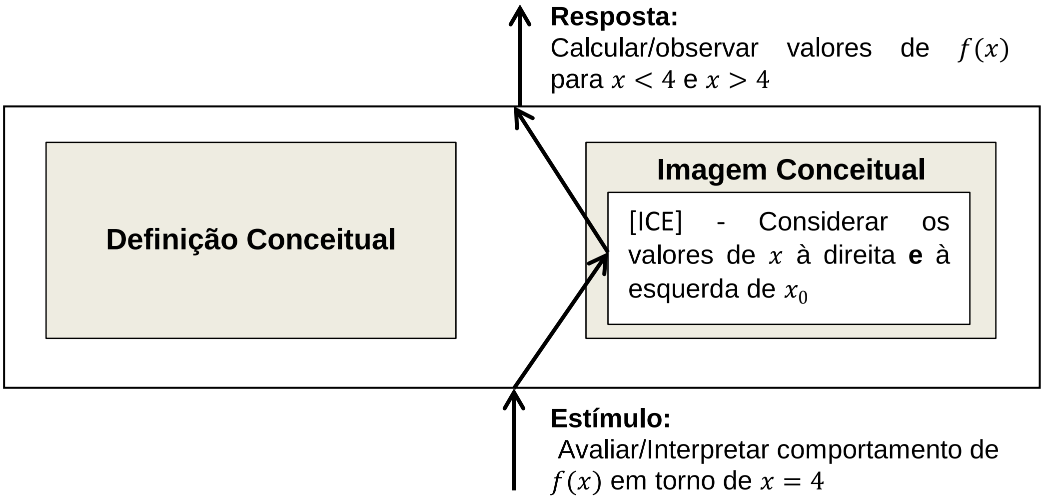


Fonte: Elaborado pela autora

[44] Referimo-nos aos estudos de Tall e Vinner (1981), Cornu (1983), Cinestav e Lara-Chaves (1999), Nascimento (2003), Jordaan (2005), Juter (2008), Sarvestani (2011), Amatangelo (2013), Denbel (2014) e Messias e Brandemberg (2015).

[45] O fato da definição conceitual não estar preenchida nessa e em outras ilustrações no decorrer desse trabalho não significa, necessariamente, que o indivíduo não tenha conhecimento algum sobre elementos da teoria formal. Existe a possibilidade de tais elementos não terem sido evocados. Além disso, optamos por não incluir uma definição para fins de visualização, pois essas figuras representam conjecturas acerca do funcionamento do sistema cognitivo dos sujeitos e, portanto, não podemos afirmar o modo como eles apreenderam (ou se apreenderam) a definição formal relativa a determinado objeto matemático.

Figura 13 – Resposta Intuitiva 2 para a 1ª questão de Q1



Fonte: Elaborado pela autora

Na segunda questão de Q1, disponibilizamos somente os gráficos das funções $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$, $h(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1}, x \neq 1 \\ 1, \ x = 1 \end{cases}$ e $g(x) = x + 1$ e solicitamos que eles respondessem os itens a seguir:

(a) Qual o domínio de $f(x)$, $h(x)$ e $g(x)$?

(b) Determine $f(1)$, $h(1)$ e $g(1)$.

(c) Determine, se existirem, $\lim_{x\to 1} f(x)$, $\lim_{x\to 1} h(x)$ e $\lim_{x\to 1} g(x)$. Caso não existam, explique.

Os estudantes S1, S2 e S4 identificaram os domínios de $f(x)$, $h(x)$ e $g(x)$ corretamente, ou seja, responderam que $D_f = IR - \{1\}$, $D_h = IR$, e $D_g = IR$. Os sujeitos S3 e S5 apresentaram respostas semelhantes e completamente incorretas. Por meio de suas anotações, verificamos que foram atribuídos ao domínio das funções os valores de x e y interceptados pelo gráfico de cada uma delas, ou seja, -1 e 1. Para fins de exemplificação, destacamos no quadro 10 as respostas dos sujeitos S2 e S3.

Quadro 10 – Respostas dadas ao item (a) da 2ª questão de Q1

Sujeito	Resposta	Sujeito	Resposta
S2	Dom $f(x) = \{x \in R / x \neq 1\}$. Dom $h(x) = R$ Dom $g(x) = R$	**S3**	o domínio de $f(x)$, $g(x)$ e $h(x)$ é 1 e -1.

Fonte: Anotações dos sujeitos investigados.

Somente S2 e S4 responderam ao item (b) corretamente. Ou seja, que $f(1) = \nexists$, $h(1) = 1$ e $g(1) = 2$. Já os sujeitos S1, S3 e S5 visualizaram as retas como representações da função $x + 1$ e, a partir de sua escrita algébrica, calcularam os valores de $f(1)$, $g(1)$ e $h(1)$. Como exemplo, apresentamos no quadro 11 as respostas de S1 e S4.

Quadro 11 – Respostas dadas ao item (b) da 2ª questão de Q1

Sujeito	Resposta	Sujeito	Resposta
S1	$F(1) = 1+1 = 2$ $h(1) = 1+1 = 2$ $G(1) = 1+1 = 2$	**S4**	$f(1) = \nexists$ (Não está definido) $h(1) = 1$ $g(1) = 2$

Fonte: Anotações dos sujeitos investigados.

Quanto ao item (c) da segunda questão, os sujeitos S3, S4 e S5 deram respostas corretas, isto é, que $\lim_{x\to 1} f(x) = 2$, $\lim_{x\to 1} h(x) = 2$ e $\lim_{x\to 1} g(x) = 2$. No entanto, S3 e S5, baseados em suas respostas no item (b), consideraram que $f(x) = h(x) = g(x) = x + 1$ e, ao calcularem os limites por substituição, obtiveram a resposta correta (ainda que tenham interpretado a questão de forma incoerente).

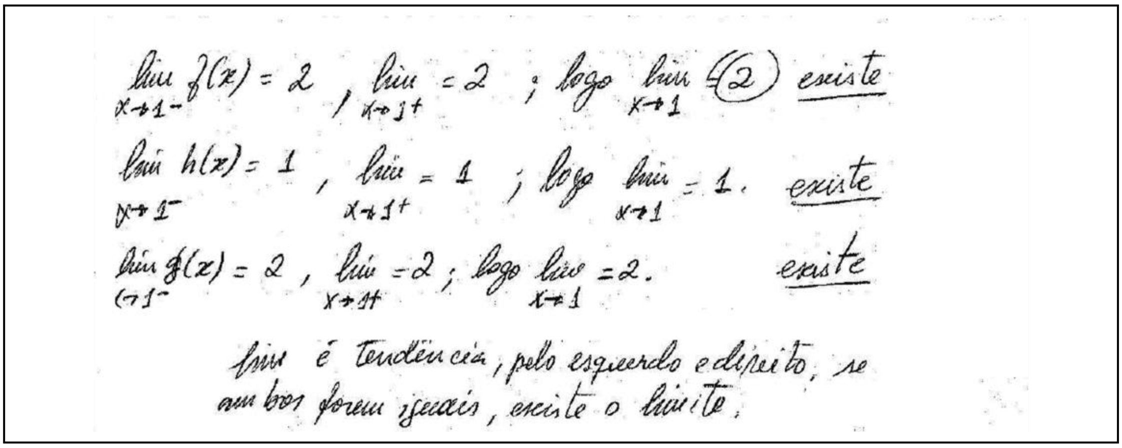
Evidenciamos que o sujeito S1 condicionou a existência do limite em determinado ponto à continuidade nesse ponto. Compreensões semelhantes a essa têm sido apontadas em diferentes estudos[46]. Além disso, S1 respondeu que $\lim_{x\to 1} h(x) = 1$, ou seja, ele também pode ter evocado que $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. Já

[46] Tais como Cinestav e Lara-Chaves (1999), Przenioslo (2004), Jordaan (2005), Juter (2006), Denbel (2014) e Messias e Brandemberg (2015, 2016).

S2, apesar de não ter respondido pertinentemente o $\lim_{x\to 1} h(x)$, utilizou os limites laterais para justificar a existência de L.

Como a resposta de S2 foi a que mais nos possibilitou fazer conjecturas no que tange aos elementos de sua imagem conceitual evocada, optamos por destacá-la no quadro 12.

Quadro 12 – Resposta dada ao item (c) da 2ª questão de Q1



$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 2$, $\lim_{x\to 1^+} = 2$; logo $\lim_{x\to 1} = 2$ existe

$\lim_{x\to 1^-} h(x) = 1$, $\lim_{x\to 1^+} = 1$; logo $\lim_{x\to 1} = 1$. existe

$\lim_{x\to 1^-} g(x) = 2$, $\lim_{x\to 1^+} = 2$; logo $\lim_{x\to 1} = 2$. existe

lim é tendência, pelo esquerdo e direito, se ambos forem iguais, existe o limite.

Fonte: Anotações dos sujeitos investigados

Consideremos a análise da resposta de S2 em três partes:

- Primeiro, fica claro que o sujeito entende o fato de que L existe se seus limites laterais existirem e forem iguais e que, desse modo, $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = L$.
- Segundo, é possível que S2 tenha considerado $\lim_{x\to 1} h(x) = 1$ devido $f(1) = 1$. Nesse caso, ele pode ter evocado que $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, sendo essa interpretação semelhante aquelas obtidas em outros estudos[47].
- Por fim, o sujeito escreveu uma definição conceitual pessoal para limite, na qual observamos a ideia de limite vinculada a uma aproximação em torno de um valor L.

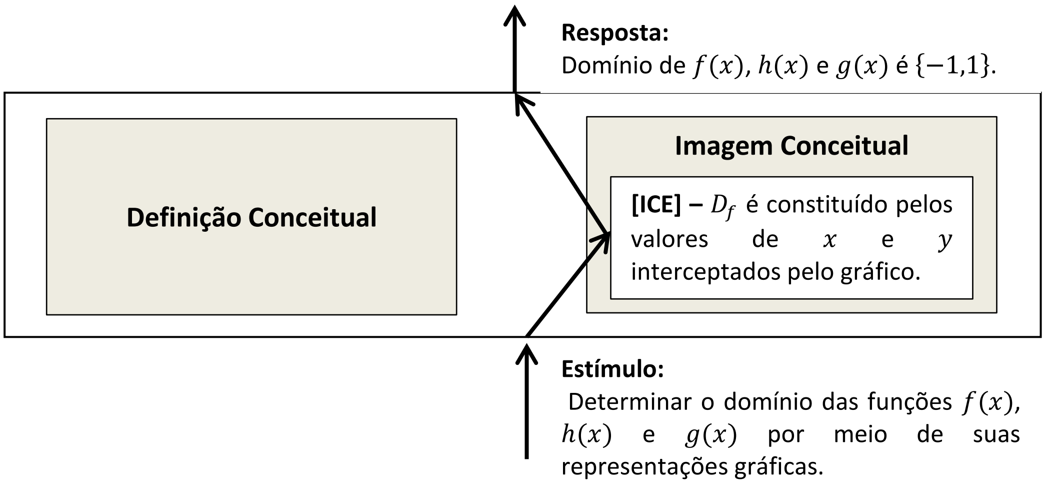
Finalmente, ressaltamos que, ainda que não tenha sido nosso objetivo verificar na 2ª questão elementos da imagem conceitual dos sujeitos a respeito do

[47] Referimo-nos, nesse caso, aos trabalhos de Cornu (1983), Cinestav e Lara-Chaves (1999), Przenioslo (2004), Juter (2008) e Amatangelo (2013).

conceito de continuidade, foi possível identificarmos – por meio da resposta de S1 – que para ele, 'quebras' no gráfico implicam na descontinuidade da função[48].

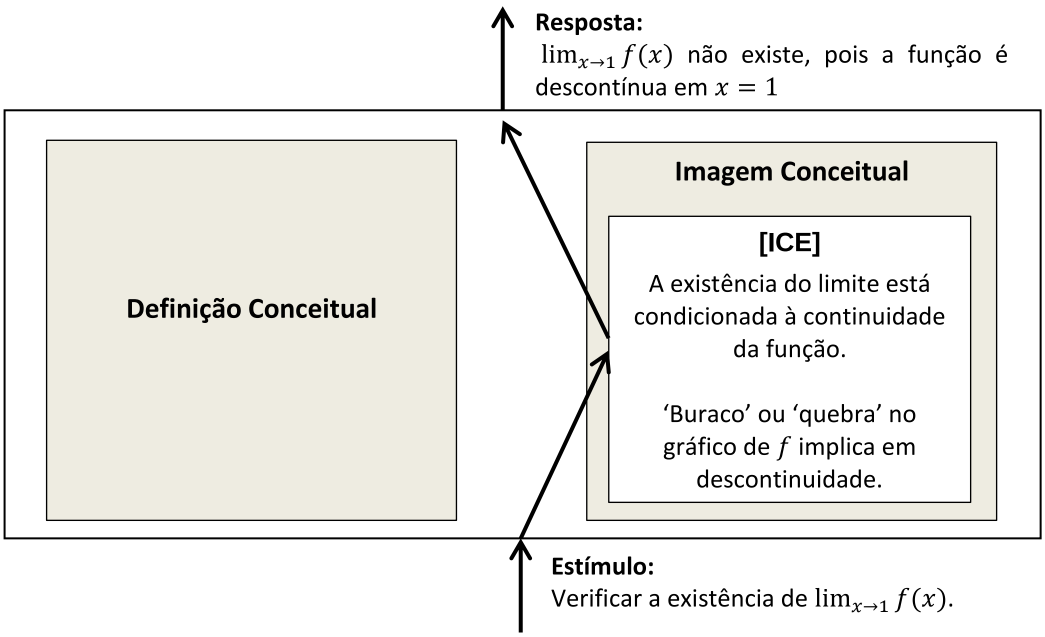
Observamos, também, que três dos sujeitos investigados não tiveram dificuldades em identificar o domínio da função ou verificar o valor da função no ponto. No entanto, encontrar o valor do limite (ou justificar sua inexistência) se configurou como fator de conflito para alguns deles. Podemos ilustrar suas respostas, conforme a seguir:

Figura 14 – Resposta Intuitiva 1 para a 2º questão de Q1



Fonte: Elaborado pela autora

Figura 15 – Resposta Intuitiva 2 para a 2ª questão de Q1



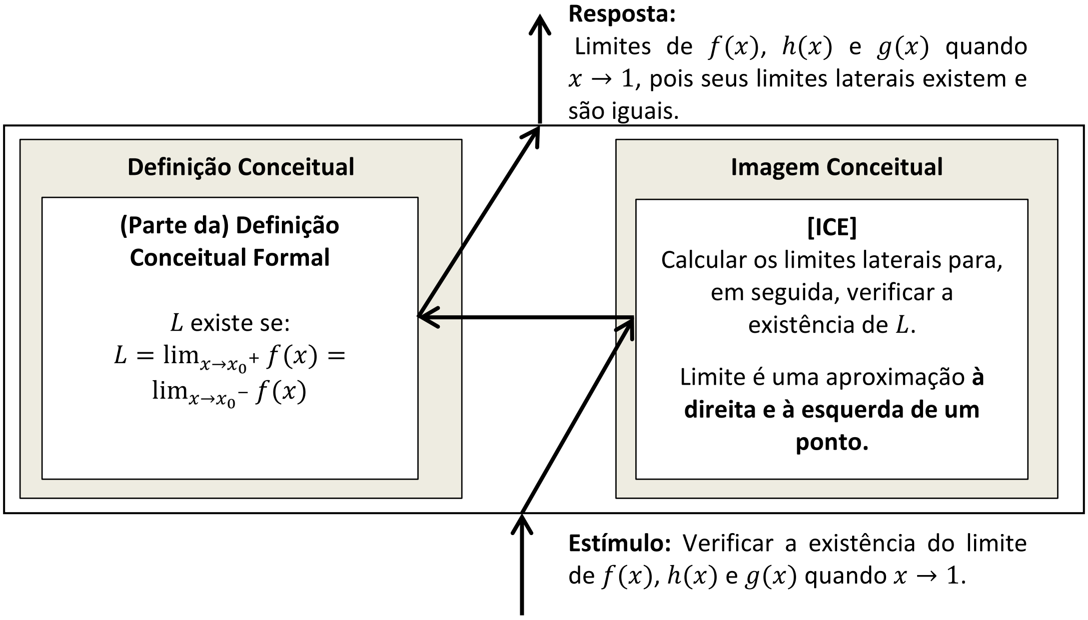
Fonte: Elaborado pela autora

[48] Tais como apontado por Tall e Vinner (1981), Vinner (1987), Cornu (1991), Núñez et al. (1999), Karatas et al. (2011), Jayakody (2015), Jayakody e Zazkis (2015) e Messias e Brandemberg (2015).

De maneira semelhante à primeira questão, os sujeitos investigados apresentaram na segunda questão de Q1, sobretudo, respostas puramente intuitivas. Isso porque, é difícil treinar nosso sistema cognitivo a consultar definições enquanto se resolve uma tarefa, afinal, é de sua natureza ser intuitivo (VINNER, 1991).

Ainda assim, identificamos que S2 buscou suporte em sua definição conceitual de limite de uma função (ou parte dela) para justificar seu raciocínio, resolução e resposta à tarefa solicitada. Conjecturamos que a resposta de S2 à segunda questão tenha se configurado como uma dedução pós-pensamento intuitivo (VINNER, 1991)[49], uma vez que observamos um processo de dedução por meio da busca por informações relativas à (parte da) definição conceitual formal. Apresentamos, na figura 16, uma ilustração para a resposta do sujeito S2.

Figura 16 – Dedução Intuitiva 1 para a 2ª questão de Q1

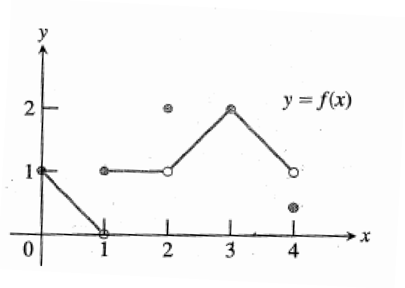


Fonte: Elaborado pela autora

Na terceira questão do Q1, solicitamos que os estudantes avaliassem e justificassem a (não) existência do limite nos pontos $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$ e $x = 4$, tendo em vista o gráfico da função representado na figura 17.

[49] Utilizaremos a expressão Dedução Intuitiva sempre que fizermos referência à ideia de *Dedução Pós-Pensamento Intuitivo* de Vinner (1991).

Figura 17 – Gráfico de $f(x)$ (3ª questão - Q1)



Fonte: Instrumento de pesquisa – questionário Q1.

O sujeito S3 foi o único que não respondeu a questão. Já as respostas de S5 não trazem justificativas, apenas afirmações quanto a (não) existência do limite. Ressaltamos, nesse sentido, que suas soluções, com exceção daquelas referentes aos pontos $x = 2$ e $x = 4$, estavam incorretas. Mais uma vez, S1 evocou a existência do limite condicionada à continuidade da função.

O sujeito S2 respondeu e justificou corretamente a (não) existência dos limites nos pontos $x = 1$, $x = 2$ e $x = 3$. No entanto, verificar a existência do limite nas extremidades se configurou como um fator de conflito cognitivo para esse estudante, uma vez que ele não observou que como a função não estava definida para $x < 0$ e $x > 4$, então $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ e $\lim_{x\to 4^+} f(x)$ não existiam, logo, não há valor de L quando $x \to 0$ e $x \to 4$. O sujeito S4 foi o único que avaliou a (não) existência do limite para todos os pontos solicitados na terceira questão. Em suas justificativas, ele evocou os limites laterais e mencionou que o fato de $\lim_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$ não implica na não existência do limite[50].

Para fins de exemplificação, destacamos no quadro 13 as respostas dos sujeitos S2 e S4:

Quadro 13 - Respostas para a 3ª questão de Q1

Sujeito S2	$(x=0) \to 0^- = ?$ e $0^+ = 1 \to$ não posso afirmar $(x=1) \to 1^- = 0$ e $1^+ = 1 \to$ não existe $(x=2) \to 2^- = 1$ e $2^+ = 1 \to$ existe (1). $(x=3) \to 3^- = 2$ e $3^+ = 2 \to$ existe (2). $(x=4) \to 4^- = 1$ e $4^+ = ? \to$ não posso afirmar.

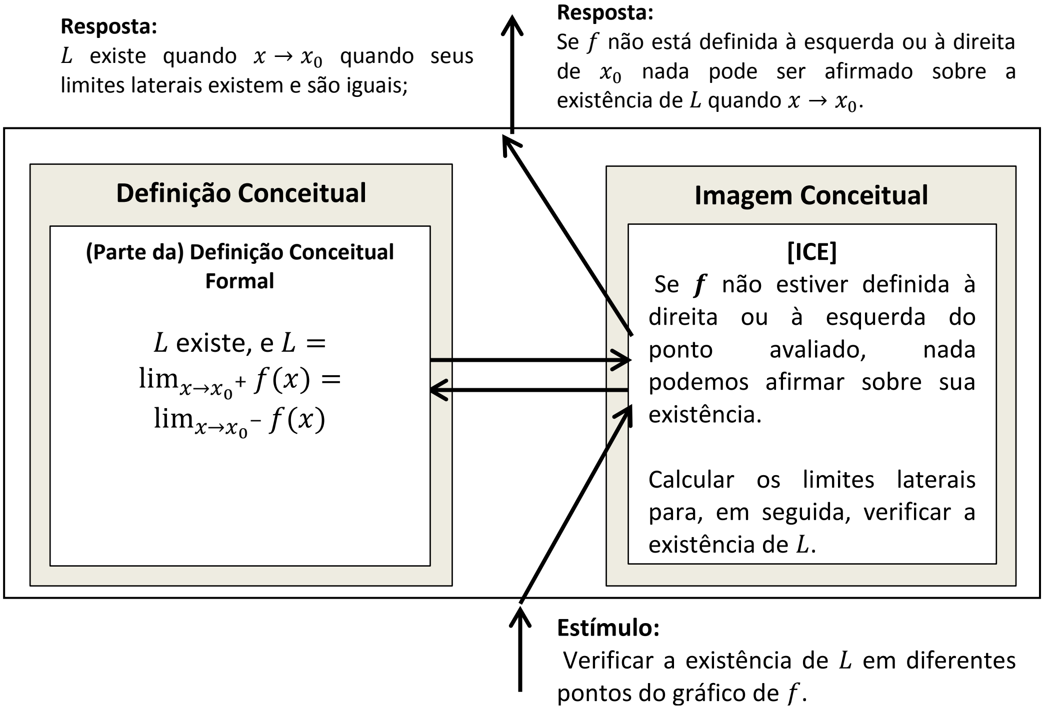
[50] Supomos que ele tenha se confundido na escrita de sua justificativa, uma vez que para $x = 2$, ele menciona que $f(1) = 2$, quando na verdade $f(2) = 2$. Como seus argumentos foram coerentes, entendemos que por falta de atenção ele possa ter cometido esse erro.

Sujeito S4	$\lim_{x \to 0} f(x) = \nexists$, pois embora exista o limite pela direita, a função não é def. pela esquerda, portanto, não existe $\lim_{x \to 0} f(x)$ $\lim_{x \to 1} f(x) = \nexists$, porque os limites laterais são diferentes $\lim_{x \to 2} f(x) = 1$, embora e $f(1) = 2$ os limites laterais existem e são iguais à 1 $\lim_{x \to 3} f(x) = 2$, já que os limites laterais existem e são iguais $\lim_{x \to 4} f(x) = \nexists^{(*)}$, somente existe o limite à esquerda de 4 e não existe também o limite à direita de 4, como são diferentes conclui-se em (*)

Fonte: Anotações dos sujeitos investigados

Ainda no que se refere à terceira questão, reforçamos que alguns sujeitos evocaram os limites laterais em suas respostas para justificar a (não) existência dos limites solicitados. Além disso, a ideia de que o limite existe em determinado ponto se a função for contínua nesse ponto também foi evocada. Interpretações semelhantes a essa foram apontadas em outras pesquisas[51]. Podemos, de maneira geral, ilustrar as evocações dos sujeitos conforme as figuras subsequentes:

Figura 18 – Dedução Parcial-Intuitiva 1 para a 3ª questão de Q1



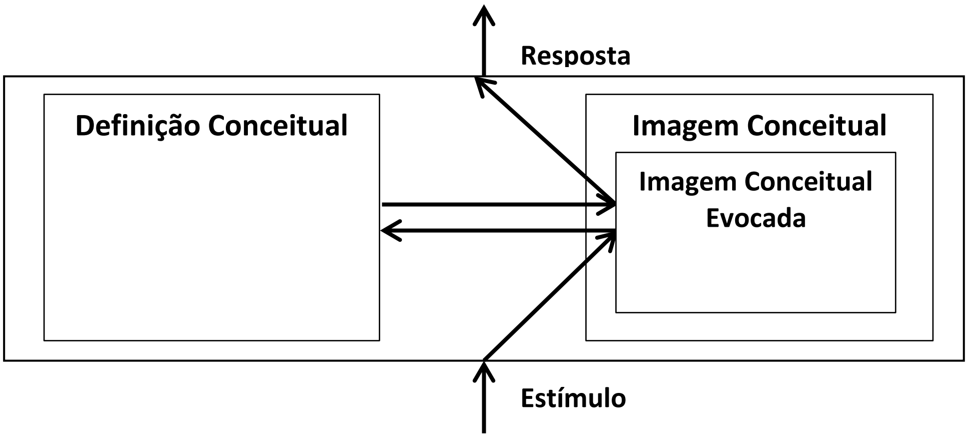
Fonte: Elaborado pela autora

[51] Dentre os quais, destacamos: Cinestav e Lara-Chaves (1999), Przenioslo (2004), Jordaan (2005), Juter (2008), Sarvestani (2011), Swinyard (2011), Amatangelo (2013), Denbel (2014) e Messias e Brandemberg (2015).

Na figura 18, realizamos uma adaptação da representação de dedução intuitiva de Vinner (1991), chamando-a de Dedução Parcial Intuitiva. Isso porque, é possível observar que o sujeito S2 mobilizou elementos de sua imagem conceitual (IC), buscou informações na definição conceitual formal, porém ele voltou a consultar parte de sua IC para, por fim, responder a tarefa que for solicitada. Ressaltamos, nesse sentido, que suas ICEs entraram em conflito, levando-o a uma resposta equivocada sobre a (não) existência de limite nas extremidades do domínio de f.

Para fins de generalização, a Dedução Parcial-Intuitiva pode ser representada conforme a figura 19.

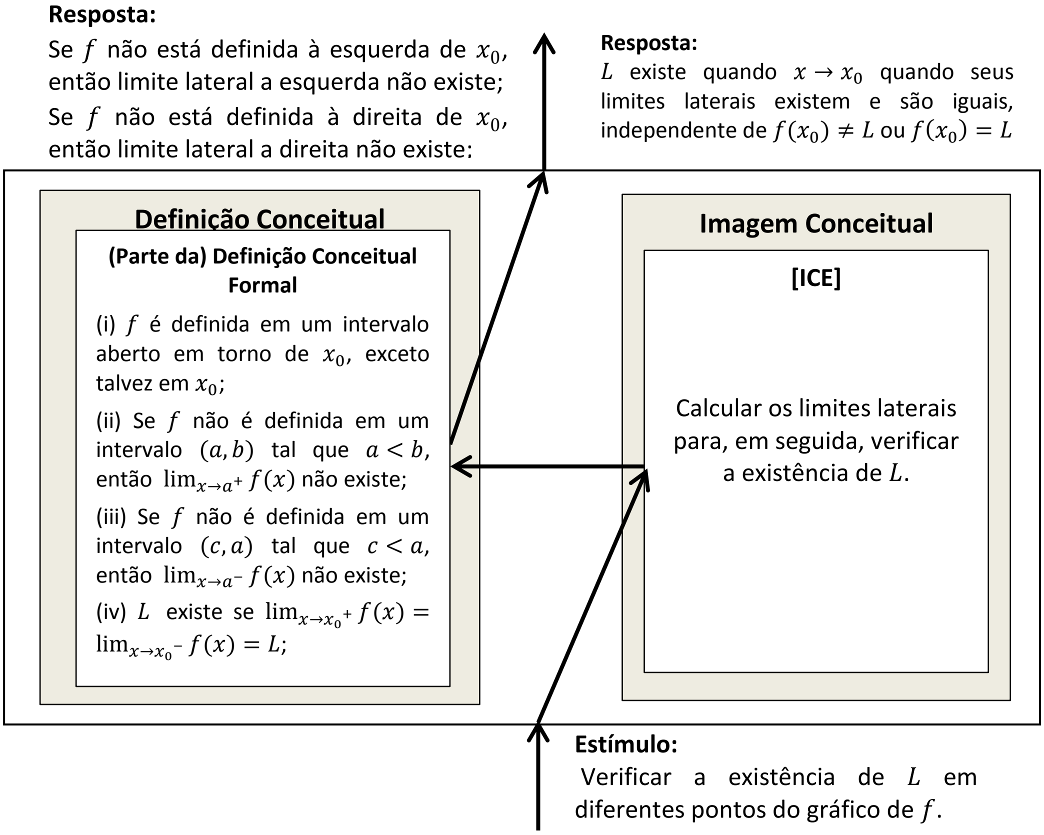
Figura 19 – Dedução Parcial-Intuitiva



Fonte: Elaborado pela autora

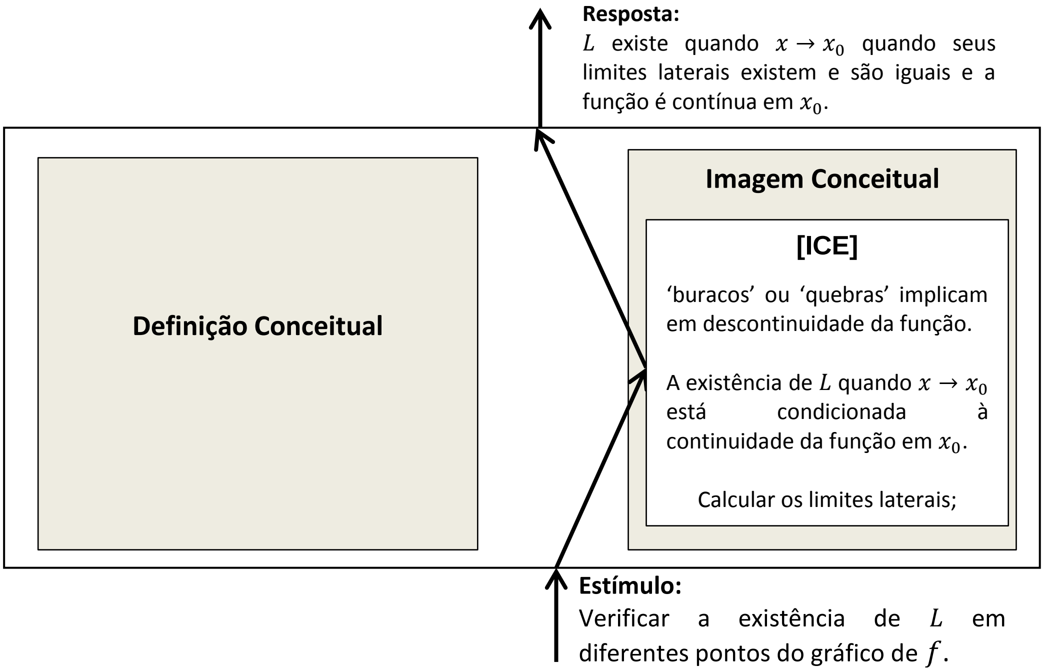
Conforme mencionamos anteriormente, os limites laterais foram mobilizados nas respostas de alguns sujeitos investigados. Ilustramos nas figuras 20 e 21, respectivamente, uma resposta coerente para a terceira questão e outra, incoerente, sendo que em ambas temos como elemento da ICE a ideia de limites laterais.

Figura 20 – Dedução intuitiva 1 para a 3ª questão de Q1



Fonte: Elaborado pela autora

Figura 21 – Resposta Intuitiva 1 para a 3ª questão de Q1

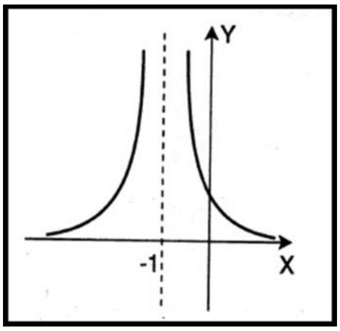


Fonte: Elaborado pela autora

A dedução intuitiva ilustrada na figura 20 representa a resposta do sujeito S2, enquanto na figura 21 ilustramos a resposta intuitiva do sujeito S1. Em ambas, suas imagens conceituais evocadas foram pautadas na ideia de limites laterais, no entanto, somente o sujeito S2 respondeu de maneira coerente o que foi solicitado na tarefa, demonstrando, inclusive, entendimento sobre alguns elementos que constituem a definição de limite.

Já para o sujeito S1, a existência do limite estava condicionada à continuidade da função que, para ele, significava ausência de 'buracos' ou 'quebras' no gráfico. Ressaltamos que evocações semelhantes a essa foram identificadas em alguns dos estudos elencados no segundo capítulo[52].

No que concerne à quarta questão de Q1, disponibilizamos o gráfico de $f(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$ e solicitamos que os sujeitos respondessem os itens de (a) a (c), conforme as instruções:



a) Qual o domínio de $f(x)$?

b) Explique o que a reta de equação $x = -1$ representa no gráfico de $f(x)$;

c) O que acontece com $f(x)$ à medida que tornamos os valores de x cada vez mais próximos de -1, tanto pela direita quanto pela esquerda?

Os sujeitos S1, S2 e S4 responderam corretamente o item (a), ou seja, escreveram que $D_f = \left\{x \in \frac{IR}{x} \neq -1\right\}$. S3 e S5, de maneira semelhante à primeira questão, demonstraram dificuldades em identificar o domínio de uma função e, nesse caso, afirmaram que $D_f = \{-1\}$, relacionando D_f à equação da assíntota destacada no gráfico.

No que concerne ao item (b), dois sujeitos responderam que a equação $x = -1$ era uma assíntota e um estudante afirmou que a reta seria o eixo da assíntota, de modo que apenas S4 e S5 apresentaram uma explicação para o que tal reta representava no gráfico de $f(x)$. Nesse sentido, ressaltamos que S5 mobilizou a ideia de limites laterais – atribuindo movimento a tais objetos. Já o

[52] Referimo-nos, nesse caso, às discussões realizadas em Tall e Vinner (1981), Karatas et al. (2011), Swinyard (2011), Amatangelo (2013), Messias e Brandemberg (2015), Jayakody (2015) e Jayakody e Zazkis (2015).

sujeito S4 evocou partes da definição conceitual formal de assíntota vertical, bem como uma concepção dinâmica, na qual foi atrelado movimento à função de maneira semelhante ao que fora apontado em outros estudos[53].

Ao explicar o que a reta de equação $x = -1$ representava no gráfico de $f(x)$, os sujeitos S1 e S2 não evocaram o termo assíntota. Em sua resposta, evidenciamos que S1 relacionou a reta a um limite, no qual a função se aproxima de -1, porém tal ponto não pode ser ‘tocado’. Nesse sentido, evidenciamos que ele enfatizou uma aproximação no eixo das abscissas.

Destacamos, também, que o sujeito S2 evocou a ideia de descontinuidade, atrelando-a a reta. É possível, nesse sentido, que a falta de ‘inteireza’ da função em $x = 1$ tenha levado o aluno a esse tipo de evocação[54].

Para fins de exemplificação, destacamos no quadro 14 as respostas dadas pelos sujeitos S1, S2 e S4 para o item (b) da 4ª questão.

Quadro 14 - Respostas para o item (b) da 4ª questão de Q1

Sujeito S1	um limite, no qual as funções nunca ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~ tocaram no ponto -1.
Sujeito S2	Esta função não tem continuidade quando $x = -1$, ele é o limite para a não continuidade da função.
Sujeito S4	A assíntota de $f(x)$, ou seja, na medida que appoximarmos x de -1, a função se aproxima de $+\infty$, nunca chegando a um valor fixo.

Fonte: Anotações dos sujeitos investigados.

No item (c) da quarta questão, todos os estudantes interpretaram o gráfico de maneira semelhante, ou seja, apontaram que o limite da função quando $x \to -1$ tende ao ∞. Ressaltamos, nesse sentido, que eles mobilizaram os limites laterais para responder a questão, bem como expressões do tipo ‘tende à’ ou ‘se aproxima de’ para fazer referência ao limite (ver quadro 15).

[53] Tais como: Tall e Vinner (1981), Cornu (1983), Cottrill et al. (1996), Przenioslo (2004), Sarvestani (2011), Swinyard (2011^), Amatangelo (2013), Denbel (2014), Oh (2014), dentre outros.
[54] Interpretações semelhantes a essa são discutidas em Tall e Vinner (1981), Vinner (1987), Cornu (1991), Núñez et al (1999), dentre outros.

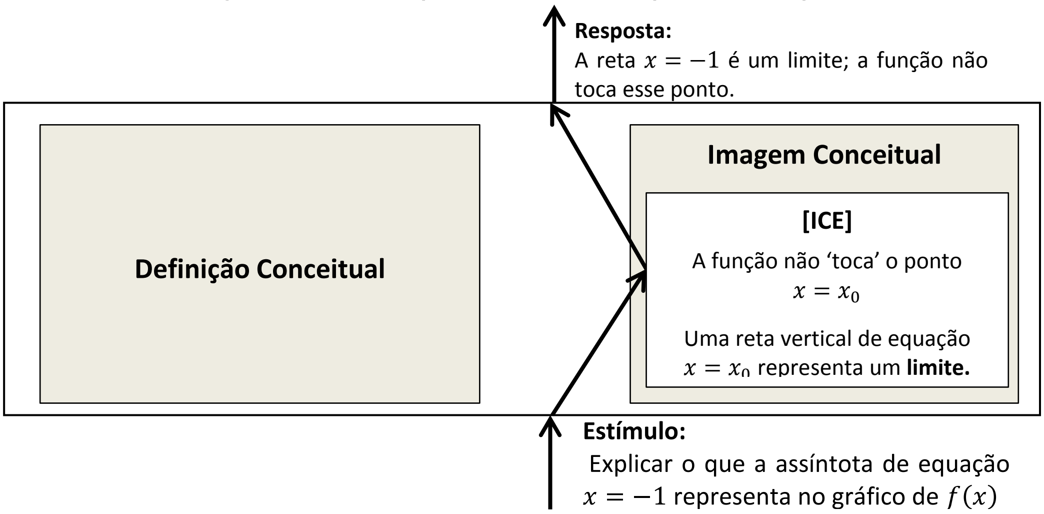
Quadro 15 - Respostas para o item (c) da 4ª questão de Q1

Sujeito S4	O valor de $f(x)$ tende a $+\infty$, como foi dito na resolução de "b".
Sujeito S5	$\lim\limits_{x \to -1^-} \frac{1}{(x+1)^2} = +\infty$ $\lim\limits_{x \to 1^+} \frac{1}{(x+1)^2} = +\infty$ À medida que os limites de $f(x)$ se aproximam da assíntota pela esquerda e pela direita, a tendência é ir para o infinito positivo

Fonte: Anotações dos sujeitos investigados.

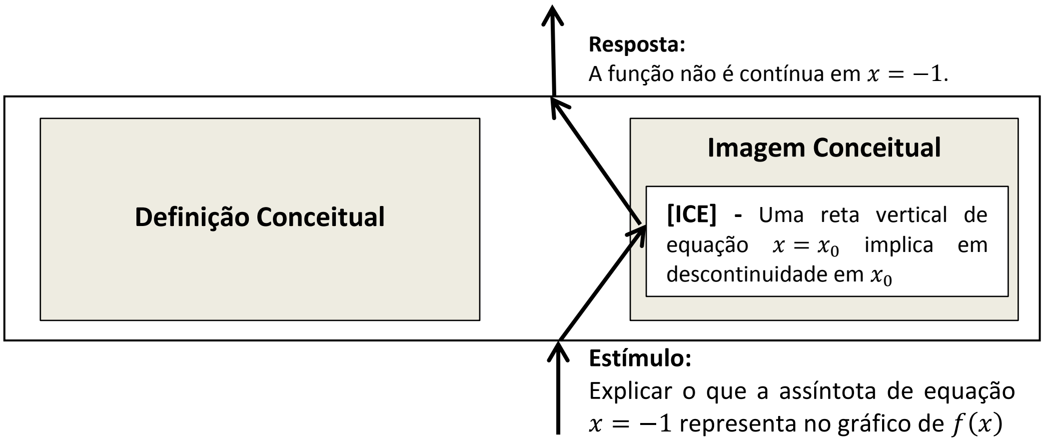
As explicações dadas pelos estudantes na quarta questão de Q1 se configuraram, sobretudo, como intuitivas, com exceção de S4 que evocou tanto elementos de sua imagem conceitual quanto aspectos inerentes à teoria formal. Ilustramos nas figuras 22, 23 e 24 mobilizações que se fizeram presentes nas respostas intuitivas dos sujeitos no que concerne à reta assíntota e ao que ela representava para eles no gráfico da função.

Figura 22 – Resposta intuitiva 1 para a 4ª questão de Q1



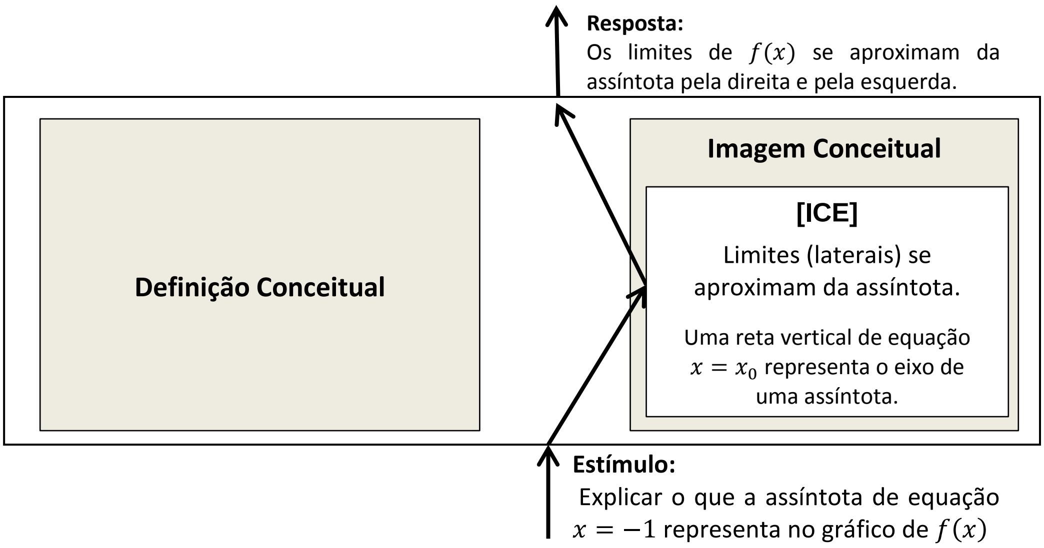
Fonte: Elaborado pela autora

Figura 23 - Resposta intuitiva 2 para a 4ª questão de Q1



Fonte: Elaborado pela autora

Figura 24 - Resposta intuitiva 3 para a 4ª questão de Q1



Fonte: Elaborado pela autora

As respostas intuitivas, representadas pelas figuras 22, 23 e 24, trazem consigo interpretações que relacionam limite, continuidade e assíntotas. Isso porque, a reta $x = -1$ destacada no gráfico de $f(x)$ implicou em evocações vinculadas a:

(i) Ideia de aproximação da função em relação a um valor de x, sem alcançá-lo;

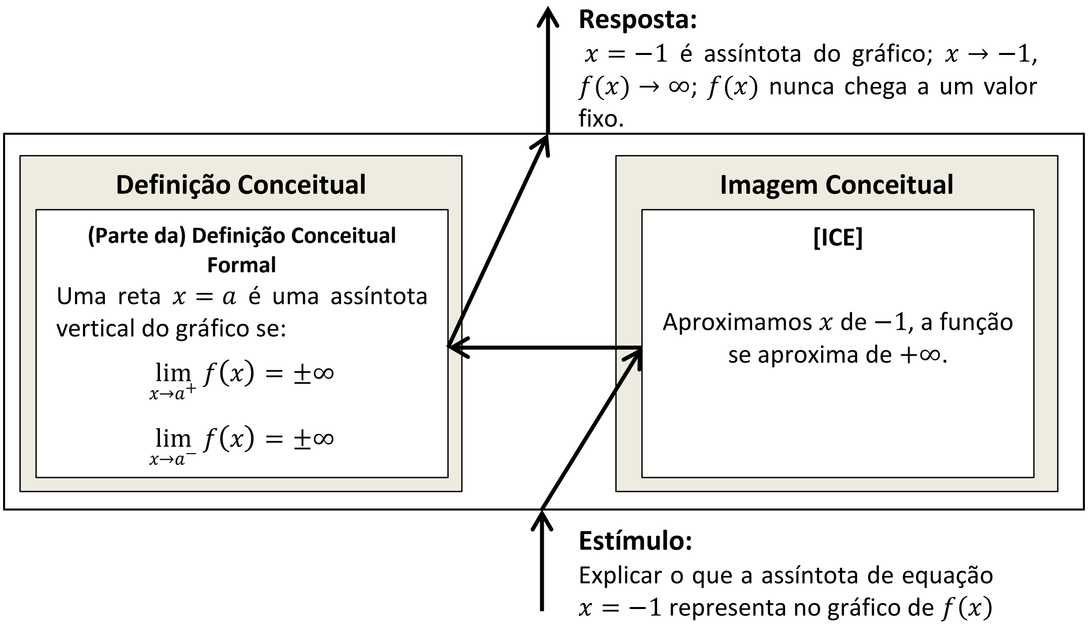
(ii) Ideia de aproximação dos limites à direita e à esquerda da assíntota vertical;

(iii) Descontinuidade da função no ponto em que a assíntota vertical intercepta o eixo das abscissas;

No que concerne ao item (i), evidenciamos a evocação de uma concepção dinâmica, na qual foi atribuído movimento à função. Nesse sentido, nossos resultados se aproximam daqueles obtidos em diferentes estudos[55]. Em (ii), observamos que foi atribuído movimento aos limites laterais em direção à assíntota vertical. Em (iii), foi mobilizada a ideia de que uma assíntota de equação $x = x_0$ no gráfico de uma função implica na descontinuidade no ponto x_0 (falta de 'inteireza' na função).

Conforme mencionamos anteriormente, identificamos que o sujeito S4 mobilizou uma definição conceitual de assíntota para responder o que foi solicitado na questão. Ilustramos, na figura 25, uma dedução intuitiva para a resposta desse sujeito, cujos elementos trouxeram consigo tanto uma concepção dinâmica do conceito de limite[56] quanto parte da definição de assíntota vertical.

Figura 25 – Dedução intuitiva 1 para a 4ª questão de Q1



Fonte: Elaborado pela autora

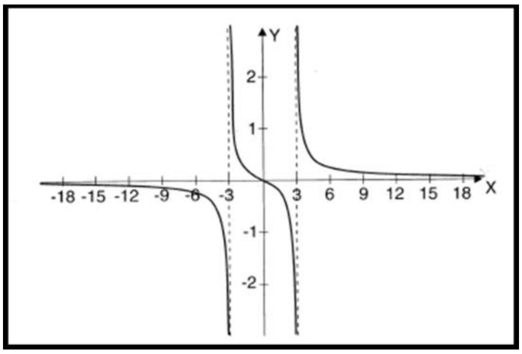
A quinta questão de Q1 foi elaborada tendo em vista objetivos semelhantes aos da questão anterior. Ou seja, tivemos a intenção de verificar o entendimento dos sujeitos investigados sobre assíntotas, bem como se eles as relacionariam ao

---

[55] Referimo-nos, nesse caso, aos trabalhos de Tall e Vinner (1981), Przenioslo (2004), Sarvestani (2011), Amatangelo (2013)

[56] Resultados semelhantes foram obtidos por Tall e Vinner (1981), Cornu (1983), Cottrill et al. (1996), Przenioslo (2004), Sarvestani (2011), Swinyard (2011), Amatangelo (2013), Denbel (2014) e Oh (2014).

domínio, à existência do limite ou ainda à (des) continuidade da função mediante o que lhes foi solicitado nos itens de (a) a (d), conforme destacamos a seguir:



a) Qual o domínio de $f(x)$?
b) Explique o que as retas de equações $x = -3$ e $x = 3$ representam no gráfico de $f(x)$.
c) O $\lim_{x \to -3} f(x)$ existe? Explique.
d) O que acontece com $f(x)$ à medida que tornamos os valores de x cada vez mais próximos de 3, tanto pela direita quanto pela esquerda?

Os sujeitos S1, S2 e S4 responderam ao item (a) corretamente, ou seja, afirmaram que $D_f = \{x \in IR/x \neq -3 \; e \; x \neq 3\}$. Mais uma vez, S3 e S5 evocaram a ideia de que o domínio da função era constituído pelos valores de x que seu gráfico interceptava no eixo cartesiano, sendo assim, para esses estudantes $D_f = \{0\}$.

Em se tratando do item (b), quatro estudantes afirmaram que as retas $x = -3$ e $x = 3$ eram assíntotas verticais de $f(x)$, porém não explicaram o que ambas representavam no gráfico da função. Já a resposta do sujeito S2 trouxe consigo elementos que relacionavam tais retas ao domínio da função, além de ter mobilizado os limites laterais para justificar a não existência de L quando $x \to -3$ e $x \to 3$. Como exemplo, vejamos as respostas de S2 e S3 no quadro a seguir:

Quadro 16 - Respostas para o item (b) da 5ª questão de Q1

Sujeito S2	A não existência de domínio para estes valores; Em ambos os casos seus limites são diferentes: $\lim_{x \to -3^-} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x \to -3^+} f(x) = +\infty$, logo $\lim_{x \to -3} f(x) = \nexists$. $\lim_{x \to 3^-} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x \to 3^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \to 3} f(x) = \nexists$.
Sujeito S3	As retas $x = -3$ e $x = 3$ são assíntotas

Fonte: Anotações dos sujeitos investigados.

Todos os sujeitos evocaram os limites laterais para responder o que foi solicitado no item (c) da quinta questão. Dessa maneira, todos eles afirmaram que $\lim_{x \to -3} f(x)$ não existia em virtude de seus limites laterais serem diferentes.

Consideramos que, de modo geral, não houve dificuldades por parte dos sujeitos em interpretar, a partir do gráfico da função, a (não) existência do limite. Como exemplo, apresentamos no quadro 17 as respostas de S4 e S5 para essa questão.

Quadro 17 - Respostas para o item (c) da 5ª questão de Q1

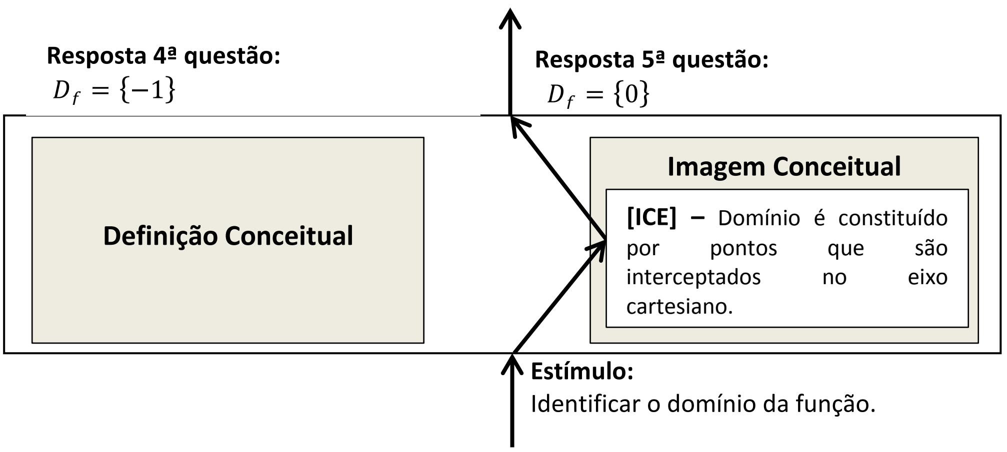
Sujeito S4	Tendem a $\pm\infty$, que de certa forma não dá em nada.
Sujeito S5	$\lim_{x \to -3^-} \frac{x}{x^2-9} = -\infty$ $\lim_{x \to -3^+} \frac{x}{x^2-9} = +\infty$ O limite da função não exis-te pois são diferentes.

Fonte: Anotações dos sujeitos investigados.

De maneira semelhante ao item (c), os sujeitos fizeram uma análise à direita e à esquerda do ponto solicitado no item (d), sendo que três deles evocaram de maneira explícita o termo ‘limites laterais’. Ressaltamos que todos eles apontaram que $f(x) \to +\infty$ quando $x \to 3^+$ e $f(x) \to -\infty$ quando $x \to 3^-$.

Admitimos que identificar o domínio de uma função se configurou como um fator de conflito cognitivo. Isso porque, observamos que S3 e S5 mobilizaram interpretações sobre domínio que os levaram a respostas incoerentes. Nas questões 4 e 5, ambos relacionaram o domínio da função ao valor de x interceptado pela assíntota. Na figura 26 conjecturamos acerca da resposta desses sujeitos.

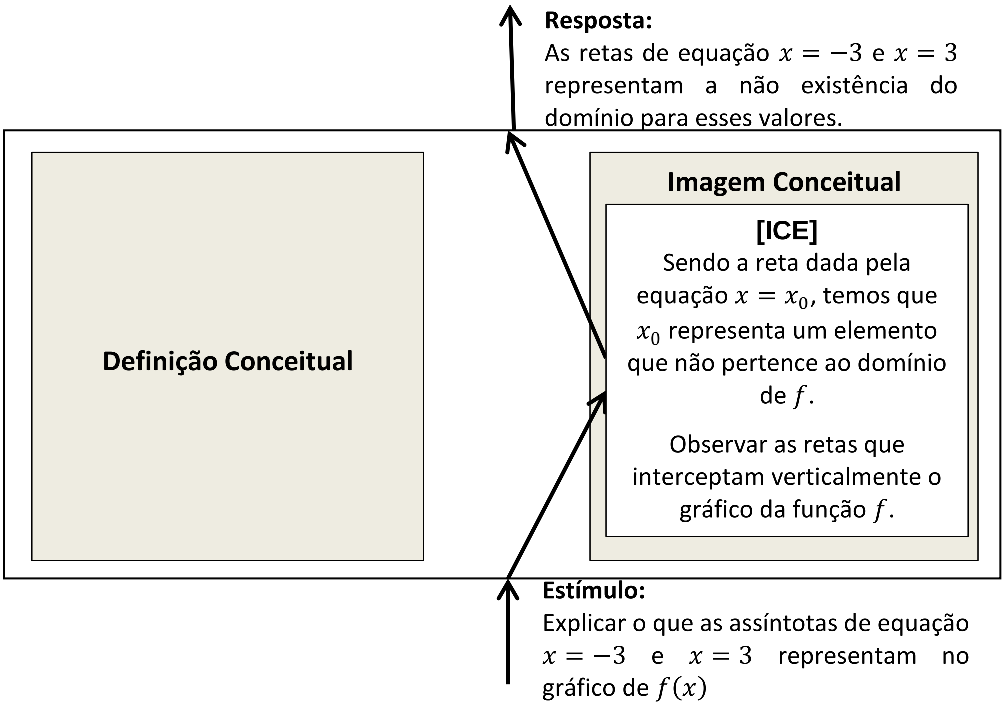
Figura 26 – Resposta intuitiva para o item (a) da 4ª e 5ª questão de Q1



Fonte: Elaborado pela autora

Além das imagens conceituais evocadas sobre assíntotas verticais ilustradas em figuras anteriores (ver figuras 22 a 25), observamos que S2 mobilizou a ideia de que tais retas interceptavam os valores que não pertenciam ao domínio da função, conforme representamos na figura 27.

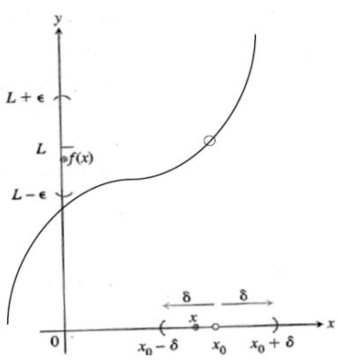
Figura 27 – Resposta intuitiva 1 da 5ª questão de Q1



Fonte: Elaborado pela autora

No que se refere à sexta questão de Q1, solicitamos que os sujeitos explicassem a representação ilustrada na figura 28, tendo em vista os intervalos em torno de L e x_0:

Figura 28 – Ilustração (6ª questão – Q1)



Fonte: Instrumento de investigação – Questionário Q1

Não foi possível verificar, mediante as respostas dos sujeitos, evocações que nos permitissem conjecturar acerca de entendimento deles sobre o que ε e δ representam na definição de limite. Isso porque, a representação gráfica disponibilizada na questão não levou a mobilização de tais elementos nas explicações dadas. Interpretações relacionadas à vizinhança e/ou intervalos não foram evocadas de maneira explícita por nenhum dos estudantes

O sujeito S1 evocou a expressão 'espaço determinado', a qual acreditamos estar possivelmente relacionada com os intervalos $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ e $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ destacados na representação gráfica. Aliás, a primeira parte da resposta desse sujeito – 'x_0 tende a L' – reforça a ideia de aproximação no eixo das abscissas e não em torno de um valor limite no eixo das ordenadas.

S3 e S5 evocaram elementos semelhantes em suas respostas. A ideia de *aproximar-se de um valor de L à medida que x tende a x_0* foi mobilizada, ou seja, a compreensão desses estudantes a respeito do conceito de limite está vinculada a uma concepção dinâmica, tal como destacado em alguns dos estudos mencionados no segundo capítulo[57].

O sujeito S4 afirmou que a figura disponibilizada na sexta questão representava 'o limite de $f(x)$ quando x tende a x_0', sendo que o próprio estudante admitiu não compreender 'o tratamento algébrico do limite, comprovando que ele existe'. Já S2 evocou que a questão da existência do limite está vinculada aos limites laterais. Admitimos, desse modo, que esse estudante tenha feito uma análise em torno de x_0. Verificamos que, ao contrário dos resultados de Nascimento (2003) e Mutlu e Aydin (2013), para S2, uma investigação à direita e à esquerda de um ponto qualquer não é suficiente para verificar a existência do limite.

O sujeito S2 também atrelou a (des) continuidade da função em um ponto às condições de domínio da função para esse ponto, tendo como evocação a ideia de que f é contínua em p se $p \in D_f$[58] e de que 'saltos', 'buracos' ou 'quebras' implicam em descontinuidade[59].

---

[57] Tais como Tall e Vinner (1981), Przenioslo (2004), Sarvestani (2011), Amatangelo (2013), dentre outros.

[58] Evocações semelhantes a essa foram observadas nos estudos de Tall e Vinner (1981), Vinner (1987), Amtangelo (2013), Denbel (2014), Jayakody (2015) e Jayakody e Zazkis (2015).

[59] Resultados semelhantes a esse foram obtidos por Tall e Vinner (1981), Vinner (1987), Cornu (19991), Karatas et al. (2011), Jayakody e Zazkis (2015), Messias e Brandemberg (2015), dentre outros.

Destacamos, para fins de exemplificação, as respostas dos sujeitos S1, S2 e S5 (ver quadro 18).

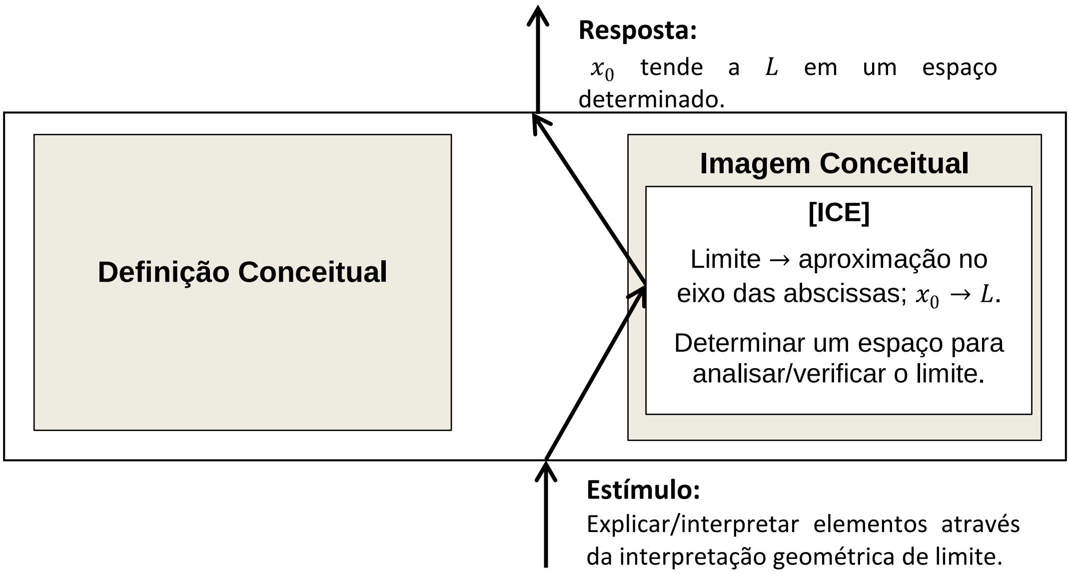
Quadro 18 - Respostas para a 6ª questão de Q1

Sujeito S1	X_0 tende a L, mas em um espaço determinado.
Sujeito S2	Para a ~~existência~~ de limite temos: $\lim_{x_0 \to x_0^-} f(x) = L$ e $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L$, logo $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$, Existe limite. Mas, Domínio $f(x_0) = \{x \in R / x \neq x_0\}$, ou seja, não há continuidade ~~p/~~ nesta função não existe uma relação p/ $x = x_0$.
Sujeito S5	À medida que os valores de x tendem à x_0 pela esquerda, os valores de L se aproximam. À medida que os valores de x tendem à x_0 pela direita, os valores de L se aproximam.

Fonte: Anotações dos sujeitos investigados.

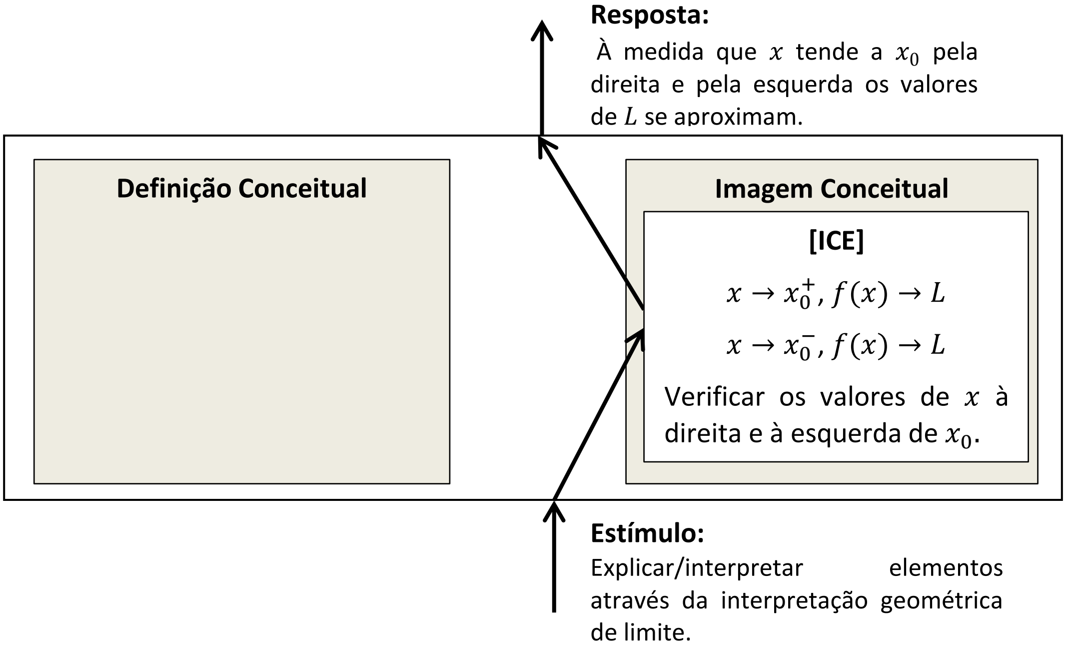
Os elementos da imagem conceitual que foram evocados pelos estudantes na sexta questão de Q1 foram ilustrados nas figuras 29, 30 e 31.

Figura 29 – Resposta intuitiva 1 da 6ª questão de Q1



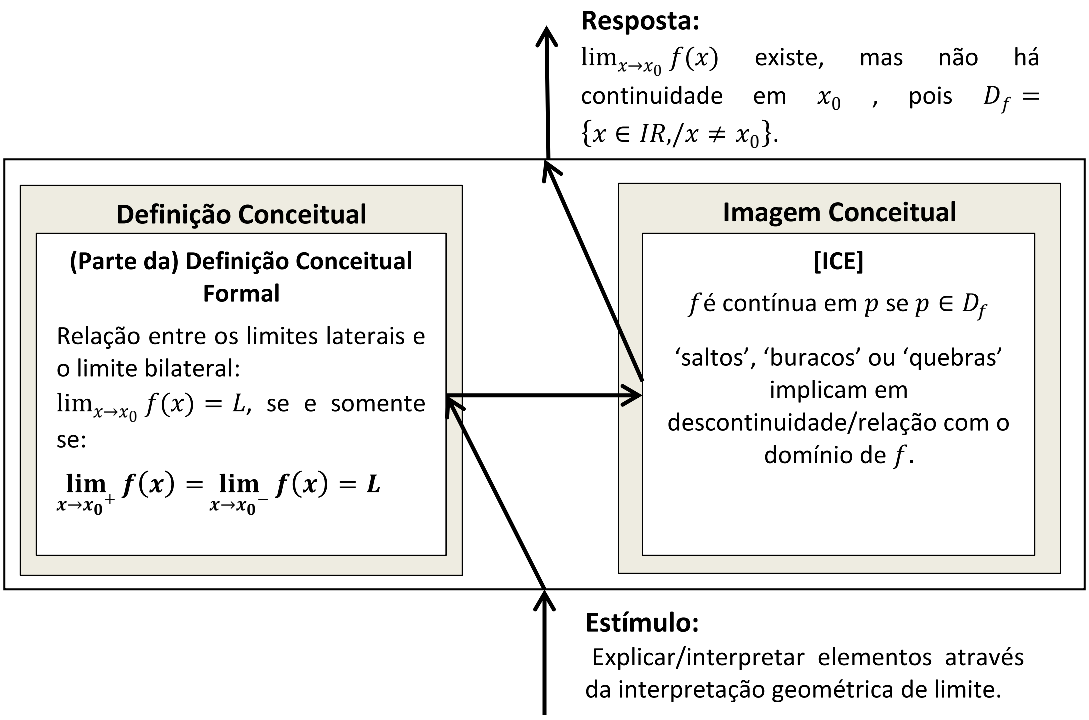
Fonte: Elaborado pela autora

Figura 30 – Resposta intuitiva 2 da 6ª questão de Q1



Fonte: Elaborado pela autora

Figura 31 – Intuição Dedutiva 1 da 6ª questão de Q1

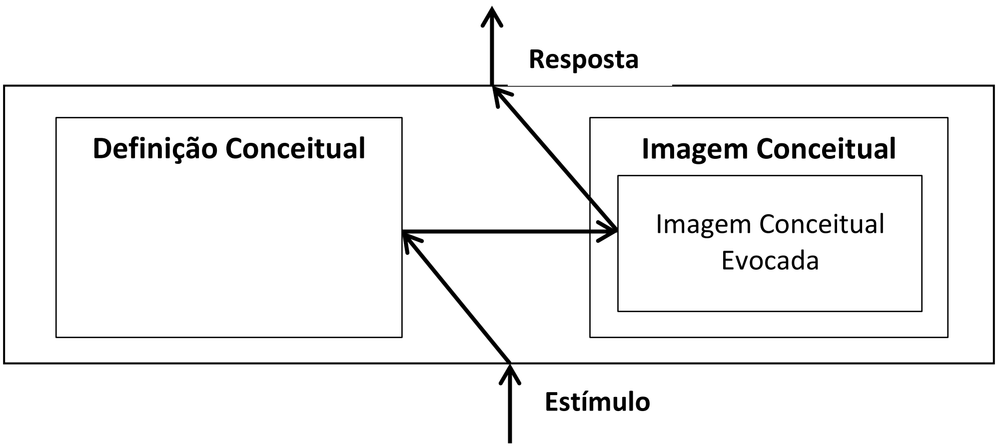


Fonte: Elaborado pela autora

As respostas intuitivas dos sujeitos para a sexta questão foram pautadas, sobretudo, em uma concepção dinâmica de aproximação em torno de um ponto, sendo que no caso específico da figura 29, verificamos que tal aproximação foi vinculada exclusivamente ao eixo das abscissas e não em torno de um valor limite no eixo das ordenadas. Já a figura 30, traz a ideia de movimento tanto em torno de x_0 quanto em torno de L. De todo modo, obtivemos respostas que contemplaram exclusivamente elementos da imagem conceitual dos sujeitos, sem que houvesse qualquer relação explícita com (parte de) definições matemáticas relacionadas à teoria formal.

No que concerne à figura 31, realizamos uma adaptação da representação da dedução pós-pensamento intuitivo de Vinner (1991), chamando-a de intuição pós-pensamento dedutivo, ou simplesmente, de intuição dedutiva. Isso porque, evidenciamos que o sujeito S2 baseou parte de sua resposta em elementos provenientes da teoria formal (relação entre limites laterais e o limite bilateral), porém voltou-se para (parte de) sua imagem conceitual na qual ele evocou uma relação entre continuidade em um ponto e domínio de função. Para fins de generalização, a intuição dedutiva pode ser representada, conforme a figura 32.

Figura 32 – Intuição dedutiva



Fonte: Elaborado pela autora

Conforme mencionamos anteriormente, o foco de Q1 foi, sobretudo, a interpretação geométrica de situações relativas ao conceito de limite, de modo que todas as questões trouxeram representações visuais que tinham como objetivo levar os sujeitos investigados a refletir sobre diferentes aspectos inerentes a esse conceito (existência do limite, relação entre limite, domínio da função e continuidade, etc...).

Com o segundo questionário (Q2), objetivamos investigar as definições conceituais pessoais dos estudantes sobre limite no ponto e, também, sobre limites envolvendo infinito. Os resultados obtidos mediante esse instrumento complementaram nossas observações relativas à Q1. Apresentamos, no tópico subsequente, a análise das respostas dadas pelos sujeitos investigados às tarefas solicitadas.

4.3.2. Imagens Conceituais Evocadas no Q2

O segundo questionário foi constituído por cinco questões. Na primeira, disponibilizamos uma função definida em partes e solicitamos que os estudantes respondessem os itens de (a) a (e), conforme a seguir:

$$f(x) = \begin{cases} -x+1, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & 1 \leq x < 2 \\ 2, & x = 2 \\ x-1, & 2 < x \leq 3 \\ -x+5, & 3 < x < 4 \\ \frac{1}{2}, & x = 4 \end{cases}$$

(a) "O $\lim_{x \to 0} f(x)$ existe". Essa afirmativa é verdadeira ou falsa? Explique.

(b) Verifique se o $\lim_{x \to 1} f(x)$ existe. Explique.

(c) "O limite da função quando $x \to 2$ não existe". Você concorda com essa afirmação? Explique.

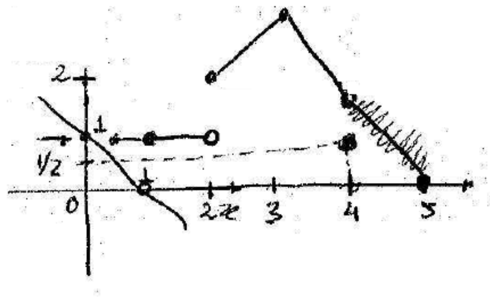
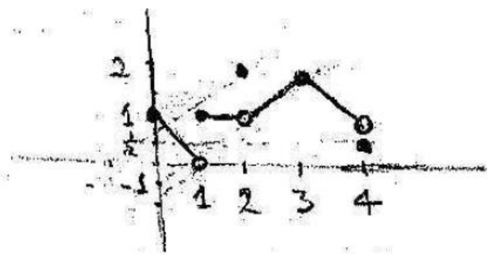
(d) Determine o $\lim_{x \to 4} f(x)$.

(e) "$\lim_{x \to 3} f(x) = f(3)$". Essa sentença é verdadeira ou falsa? Explique sua resposta.

É importante ressaltar que essa mesma tarefa foi solicitada na terceira questão de Q1 sob outra perspectiva, uma vez que os estudantes – sem terem sido informados acerca da lei de formação da função – avaliaram a (não) existência dos limites em diferentes pontos por meio da representação gráfica de $f(x)$.

Ressaltamos que S2 e S4 construíram uma representação gráfica para a função, utilizando-a como suporte para responder o que foi solicitado na questão. No entanto, apenas o gráfico desenhado por S4 estava correto (ver quadro 19).

Quadro 19 – Construções gráficas para a 1ª questão de Q2

Representação gráfica de S2	Representação Gráfica de S4
	

Fonte: Construções gráficas obtidas na 1ª questão de Q2

No item (a) da 1ª questão, verificamos que os sujeitos S1 e S2 alegaram que o $\lim_{x\to 0} f(x)$ existia. Suas justificativas, respectivamente, fizeram referência à definição de limite (sem muitos detalhes) e aos limites laterais (à direita e à esquerda de $x = 0$). Ressaltamos que todas as respostas de S2 para a primeira questão foram norteadas por sua representação gráfica pessoal equivocada para $f(x)$, conforme destacamos no quadro 19, no qual foi possível identificarmos que, para esse sujeito, a função estaria definida para $x < 0$, fato que o permitiu calcular o limite à esquerda de $x = 0$. Desse modo, entendemos que S2 atrelou a existência de L quando $x \to x_0$ ao fato dos limites laterais à direita e à esquerda existirem e serem iguais, ou seja, nesse caso foi gráfico construído por ele que se configurou como um fator de conflito.

Os sujeitos S3, S4 e S5 responderam que $\lim_{x\to 0} f(x)$ não existia, porém suas justificativas não foram coerentes. S3, por exemplo, substituiu $x = 0$ em todas as 'equações' que constituíam $f(x)$ ao longo de seu domínio, utilizando o fato dos valores dos limites obtidos por ele serem diferentes para justificar sua resposta. Nesse caso, verificamos que ele desconsiderou as partes da forma algébrica da função que não apresentavam a variável x. De todo modo, evidenciamos que os estudantes tiveram dificuldades em calcular limites de funções definidas em mais de uma sentença[60].

O sujeito S4 evocou o teorema do confronto para justificar a não existência de $\lim_{x\to 0} f(x)$ no item (a). Nesse sentido, entendemos que o estudante – ao construir o gráfico (ver quadro 18) – visualizou diferentes funções que não estavam em acordo

60 Discussões acerca desse tipo de conflito podem ser encontradas em Nascimento (2003), Maharaj (2010), Mutlu e Aydin (2013), Brandemberg e Messias (2016).

com o estabelecido pelo referido teorema. Ainda assim, foi possível verificarmos elementos atrelados à existência dos limites laterais e ao fato da função estar (ou não) definida em determinado intervalo.

Já a justificativa de S5, não trouxe elementos claros para a análise, porém conjecturamos que seu raciocínio tenha sido semelhante ao do sujeito S3, uma vez que ele mencionou a expressão ‘limites das equações’, fato que para nós fez referência à forma como $f(x)$ estaria definida ao longo de seu domínio. Para fins de exemplificação, destacamos no quadro 20 as respostas dos sujeitos S1, S2 e S4 para a referida questão:

Quadro 20– Respostas para o item (a) da 1ª questão de Q2

Sujeito	Afirmação	Resposta/Justificativa	
S1	$\lim_{x\to 0} f(x)$ existe.	V	$\lim_{x\to 0} -x+1 = 1$, é verdadeira pelas definições de limite
S2	$\lim_{x\to 0} f(x)$ existe.	V	$\lim_{x\to 0} f(x) = 1$; $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$ > limite Existe $= 1$
S4	$\lim_{x\to 0} f(x)$ existe.	F	Falsa, pois utilizando o Teorema do Confronto o $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$ e $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \nexists$, logo, como o limite à esquerda de zero não existe, não existe também o limite bilateral, Portanto $\lim_{x\to 0} f(x) = \nexists$

Fonte: Anotação dos sujeitos investigados

No que concerne aos outros itens da 1ª questão de Q2, observamos que os sujeitos investigados evocaram elementos semelhantes ao item (a). Nesse sentido, ressaltamos que em (b), três estudantes responderam a questão corretamente (ou seja, que $\lim_{x\to 1} f(x)$ não existia), porém apenas dois deles justificaram suas respostas de maneira coerente.

A resposta de S3 foi semelhante a do item (a), isso porque ele substituiu $x = 1$ em todas as ‘equações’ de $f(x)$, utilizando o fato dos limites obtidos serem diferentes para justificar sua resposta. Mais uma vez, a justificativa de S5 não trouxe elementos claros para a análise, todavia, conjecturamos que seu raciocínio tenha sido semelhante ao de S3.

As anotações de S1 nos chamou atenção, uma vez que ele atrelou a existência do limite ao fato da função ser, segundo ele, constante. Ele não evocou os limites laterais e considerou apenas a forma algébrica da função para $x \leq 1$, ou seja, $f(x) = 1$ para verificar se $\lim_{x \to 1} f(x)$ existia. Nesse sentido, sua justificativa foi pautada na ideia de que se $\mathrm{f(x) = c}$, então $\lim_{\mathrm{x \to c}} \mathrm{f(x)}$ existe.

Como exemplo, destacamos as respostas dos sujeitos S1, S3 e S4 para o item (b) da primeira questão (ver quadro 21).

Quadro 21– Respostas para o item (b) da 1ª questão de Q2

Sujeito	Afirmação	Resposta/Justificativa
S1	$\lim_{x \to 1} f(x)$ existe.	$\lim_{x \to 1} 1$ = existe, pois 1 é constante, não temos variavel X
S3	$\lim_{x \to 1} f(x)$ não existe.	$\lim_{x \to 1} -x+1 = 0$ $\lim_{x \to 1} 1 = 1$ $\lim_{x \to 2} 2 = 2$ $\lim_{x \to 1} x-1 = 0$ $\lim_{x \to 1} -x+5 = 4$ $\lim_{x \to 1} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ O limite não existe, pois o limite de $(-x+5)$ não satisfaz a sua condição.
S4	$\lim_{x \to 1} f(x)$ não existe.	O $\lim_{x \to 1} f(x) = \nexists$ devido os limites bilaterais serem diferentes: $\lim_{x \to 1^-} f(x) = 0 \neq 1 = \lim_{x \to 1^+} f(x)$

Fonte: Anotação dos sujeitos investigados

No que concerne ao item (c) da 1ª questão de Q2, três sujeitos afirmaram que o $\lim_{x \to 2} f(x)$ não existia, porém somente o sujeito S4 apresentou uma justificativa na qual foram mobilizados os limites laterais, à direita e à esquerda de $x = 2$. As justificativas dadas pelos sujeitos foram semelhantes aos itens anteriores. Observamos, mais uma vez, que para S1 a existência do limite está atrelada ao fato da função ser constante, sendo essa uma das evocações mais latentes nessa questão, resultado este que diferiu, inclusive, das interpretações relativas à questão da (não) existência do limite que foram apontadas nas pesquisas que compuseram o quadro 1 (destacado no segundo capítulo desse trabalho).

Apesar de S2 não ter respondido a questão corretamente, evidenciamos que ele evocou os limites laterais em todas as questões em que precisou verificar a existência do limite. Entendemos que, nesse caso específico, sua resposta incorreta tenha sido influenciada por sua construção gráfica equivocada para a função $f(x)$. Admitimos, portanto, que a relação entre existência do limite e os limites laterais foi pertinentemente estabelecida por esse sujeito nas atividades em que foram solicitadas. Ainda assim, ficou evidente sua dificuldade em construir o gráfico de uma função escrita em mais de uma sentença. Vejamos no quadro 22, as respostas de S1 e S2 para o item (c) da segunda questão.

Quadro 22 – Respostas para o item (c) da 1ª questão de Q2

Sujeito	**Afirmação**	**Resposta/ Justificativa**	
S1	$\lim_{x\to 2} f(x)$ não existe.	**F**	não Concordo, pois $\lim_{x\to 2} 2$, é similar ao exemplo da letra b) em que 2 é uma constante.
S2	$\lim_{x\to 2} f(x)$ não existe.	**V**	$\lim_{x\to 2^-} f(x) = 1$ e $\lim_{x\to 2^+} f(x) = 2$ $\lim_{x\to 2} f(x) = \nexists$ | limites esquerda e direita divergem

Fonte: Anotações dos sujeitos investigados

Em se tratando do item (d), verificamos que ao determinar o $\lim_{x\to 4} f(x)$, apenas o sujeito S4 apontou para a não existência do limite em virtude da função não estar definida à direita de $x = 4$. S2, de maneira semelhante a uma de suas respostas para o primeiro questionário, evocou a ideia de que não podemos definir um limite em determinado ponto se a função não estiver definida à direita ou à esquerda desse ponto. As respostas de S1, S3 e S5 para esse item foram semelhantes àquelas dadas aos demais itens da questão 1 de Q2 (ver exemplos no quadro 23).

Quadro 23 – Respostas para o item (d) da 1ª questão de Q2

Sujeito	Resposta	Justificativa
S2	$\lim_{x \to 4} f\ (x)$ não pode ser definido	$\lim_{x \to 4^-} f(x) = 1/2$ e $\lim_{x \to 4^+} f(x) = ?$ $\lim_{x \to 4} f(x) =$ não tem como eu definir. não está definido o conjunto domínio para valores maiores que 4
S3	$\lim_{x \to 4} f(x)$ admite diferentes valores	$\lim_{x \to 4} -x+1 = -3$ $\lim_{x \to 4} -x+5 = 1$ $\lim_{x \to 4} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ $\lim_{x \to 4} 1 = 1$ $\lim_{x \to 4} 2 = 2$ $\lim_{x \to 4} x-1 = 3$
S4	$\lim_{x \to 4} f(x)$ não existe	Pelo Teorema do Confronto temos: $\lim_{x \to 4^-} f(x) = 1$ e $\lim_{x \to 4^+} f(x) = \nexists$. Como $\lim_{x \to 4^-} f(x) \neq \lim_{x \to 4^+} f(x)$ o $\lim_{x \to 4} f(x) = \nexists$

Fonte: Anotações dos sujeitos investigados

Finalmente, no que concerne ao item (e) da primeira questão, verificamos que somente S3 afirmou que a sentença era falsa, ou seja, para o estudante $\lim_{x \to 3} f(x) \neq f(3)$. Para todos os demais, $\lim_{x \to 3} f(x) = f(3)$.

Os sujeitos S2 e S4 foram os únicos que evocaram os limites laterais para verificar/calcular $\lim_{x \to 3} f(x)$, ainda que, mais uma vez, S4 tenha vinculado sua justificativa ao Teorema do Confronto. Ambos também não tiveram dificuldades em verificar que $\lim_{x \to 3} f(x) = f(3)$. S1 respondeu à questão corretamente, porém sua justificativa não foi pertinente, uma vez que para calcular o limite, ele considerou apenas a forma algébrica da função definida para $x \leq 3$, isto é, $f(x) = x - 1$. Desse modo, sua imagem conceitual evocada, ainda que completamente equivocada, foi suficiente para fazê-lo concluir que $\lim_{x \to 3} f(x) = f(3)$.

S3 foi o único que não concordou com o fato de $\lim_{x \to 3} f(x) = f(3)$, porém sua justificativa não trouxe elementos suficientes para analisarmos o porquê. De todo modo, conjecturamos que ela tenha seguido seus raciocínios para os itens anteriores, ou seja, ele pode ter substituído $x = 3$ em todas as formas algébricas que constituíam $f(x)$, independente de seu domínio.

S5 deixou claro seu entendimento acerca do que significa calcular o limite de uma função, mobilizando a ideia de que ‘devemos substituir o valor para qual x tende’ na função. Essa evocação o levou a conclusão de que $\lim_{x\to 3} f(x) = f(3)$. Admitimos, no entanto, que sua imagem conceitual evocada possa ter uma dimensão ainda maior, uma vez que, poderia tê-lo levado à generalização de que $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ sempre será verdadeiro (limite alcançável), ou ainda, à uma confusão conceitual no que tange ao que $\lim_{x\to x_0} f(x)$ e $f(x_0)$ significam.

Destacamos a seguir, para fins de exemplificação, as respostas de S1, S4 e S5.

Quadro 24 – Respostas para o item (e) da 1ª questão de Q2

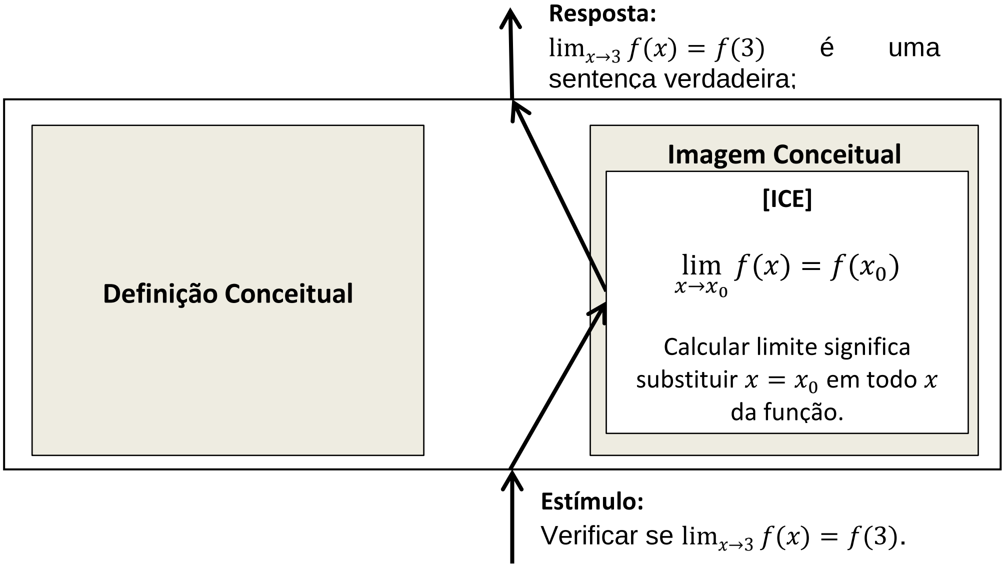
Sujeito	**Afirmação**	**Resposta/ Justificativa**	
S1	$\lim_{x\to 3} f(x) = f(3)$	V	$\lim_{x\to 3} F(x) = F(3)$ é verdadeira pois os pontos são iguais $\lim_{x\to 3} x-1 = \boxed{2}$ $F(3) = 3-1 = \boxed{2}$
S4	$\lim_{x\to 3} f(x) = f(3)$	V	Verdadeira, pois calculando os limites laterais temos $\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^+} f(x) = 3$, logo, pelo Teorema do confronto $\lim_{x\to 3} f(x)$ existe e é igual à 2. E calculando o $f(3)$ que é definido na função temos $f(3) = 2 = \lim_{x\to 3} f(x)$. Portanto a sentença é verdadeira.
S5	$\lim_{x\to 3} f(x) = f(3)$	V	A sentença é verdadeira pois, para calcularmos o limite de determinada função, devemos substituir o valor para qual x tende no x presente na função.

Fonte: Anotações dos sujeitos investigados

As imagens conceituais evocadas na primeira questão de Q2 trouxeram consigo uma multiplicidade de elementos que levaram os sujeitos a justificativas equivocadas para o que lhes foi solicitado. Mais uma vez, reiteramos que o fato da função estar definida em partes foi um fator de conflito cognitivo para os sujeitos e ressaltamos que alguns dos que responderam de maneira equivocada a essa questão não tiveram dificuldade em interpretar o gráfico dessa mesma função na terceira questão de Q1.

Apresentamos, nas figuras subsequentes, as ilustrações para imagens conceituais evocadas pelos estudantes, bem como traçamos breves considerações acerca do que cada uma delas representa. Ressaltamos que as respostas de alguns sujeitos assemelham-se a evocações previamente discutidas e, portanto, ilustradas anteriormente.

Figura 33 – Resposta intuitiva 1 da 1ª questão de Q2

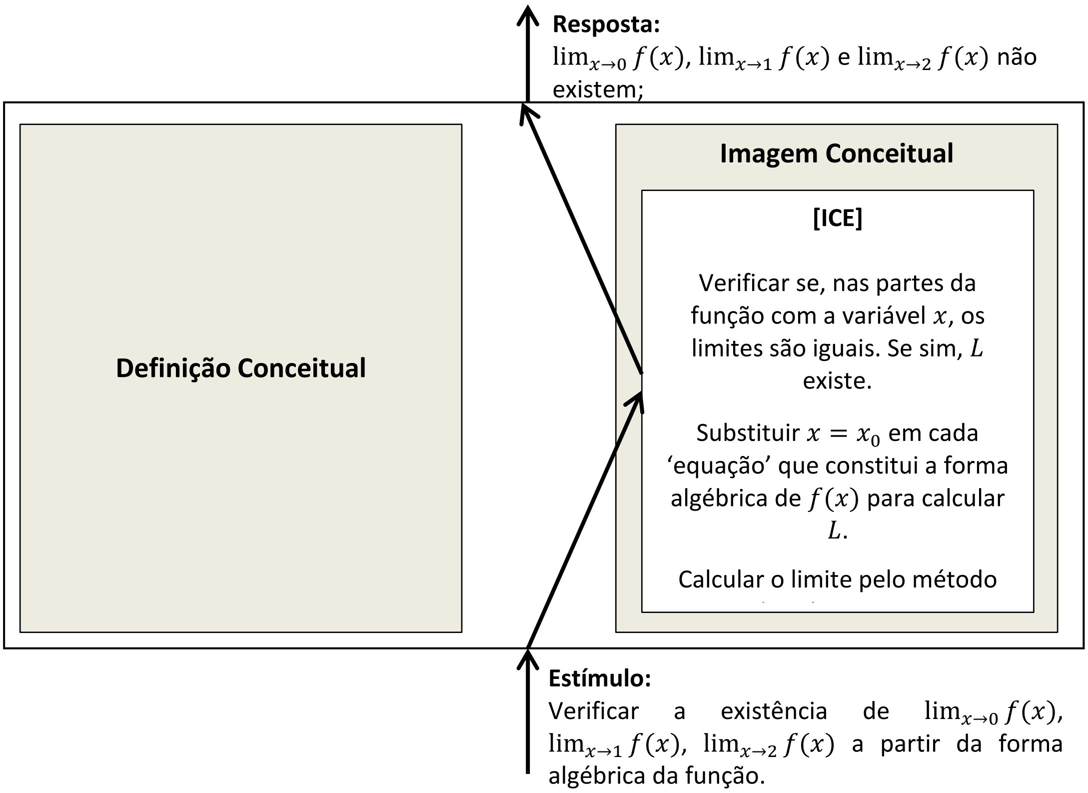


Fonte: Elaborado pela autora

Na resposta intuitiva, ilustrada na figura 33, fazemos referência à resposta do sujeito S5 ao item (e) da primeira questão. Tal imagem conceitual evocada traz consigo conflitos, sobretudo, relacionados ao que $\lim_{x\to x_0} f(x)$ e $f(x_0)$ significam. É possível, ainda, que o próprio entendimento de S5 sobre continuidade esteja vinculado unicamente à condição de que $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

No que concerne às respostas do sujeito S3 para os itens de (a) a (c) da 1ª questão de Q2, verificamos que estas se caracterizaram como intuitivas, já que o estudante não mobilizou elementos da definição conceitual para justificar a (não) existência do limite solicitado. As interpretações que compuseram sua imagem conceitual levaram-no a uma justificativa equivocada. Ficou evidente, também, que os limites laterais não foram mobilizados pelo sujeito em nenhum dos itens solicitados na questão (ver figura 34).

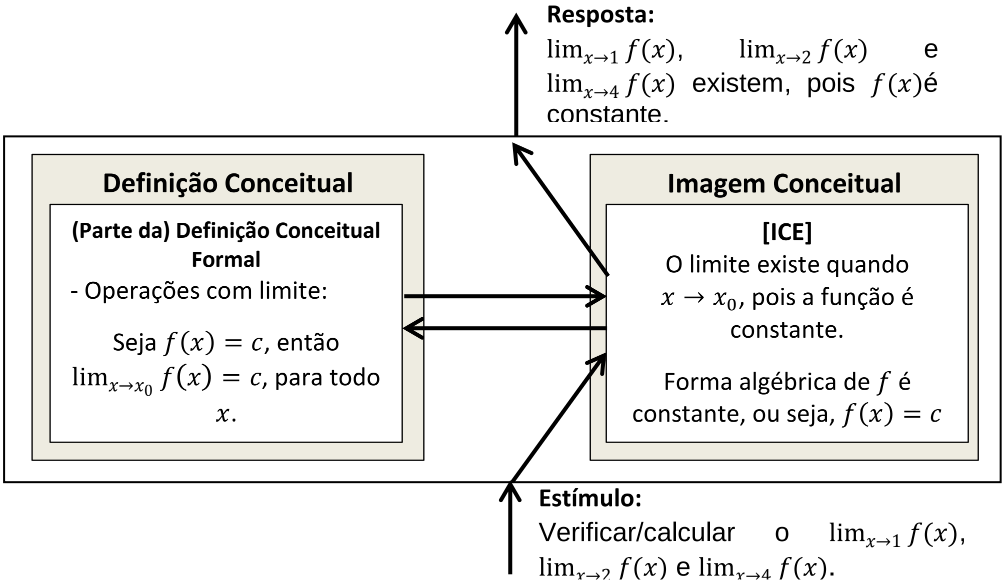
Figura 34 – Resposta intuitiva 2 da 1ª questão de Q2



Fonte: Elaborado pela autora

Calcular o limite de uma função escrita em mais de uma sentença se configurou, para a maioria dos sujeitos investigados, como um fator de conflito cognitivo. Destacamos, nesse sentido, as respostas de S1 para os itens de (b) a (d), nos quais ele atrelou a existência do limite ao fato da forma algébrica de $f(x)$ ser constante em determinados pontos do domínio, conforme destacamos na ver figura 35.

Figura 35 – Dedução Parcial-Intuitiva 1 da 1ª questão de Q2

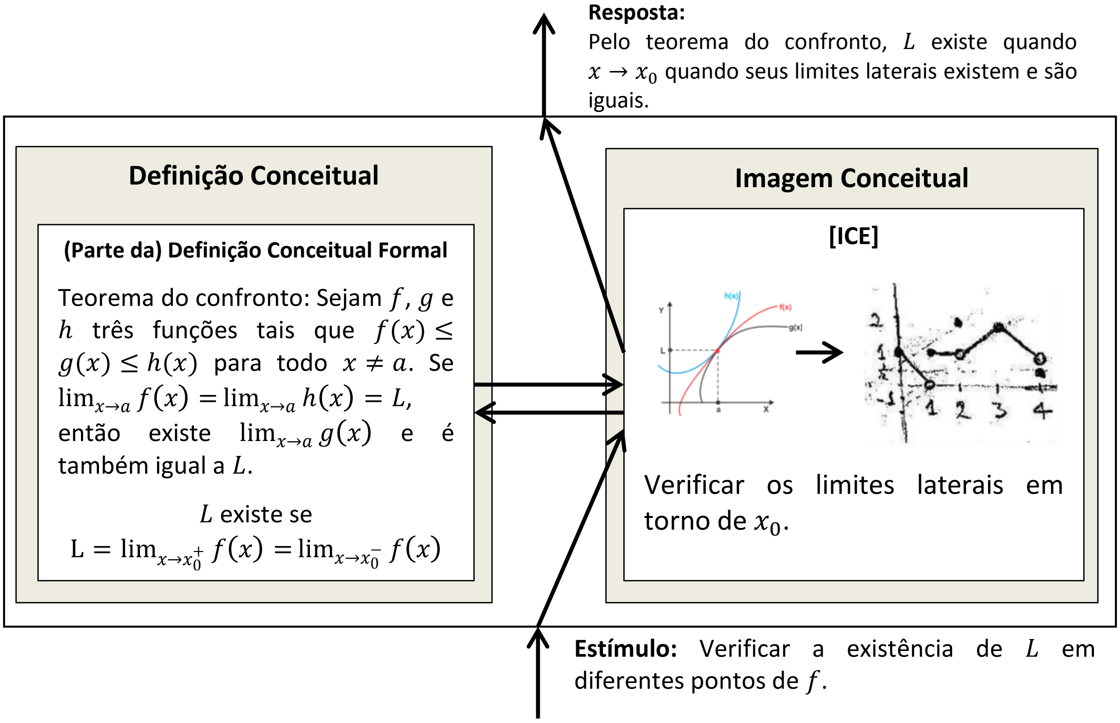


Fonte: Elaborado pela autora

Evidenciamos, também, que o sujeito S4 evocou o teorema do confronto, atrelando-o aos limites laterais em suas justificativas relacionadas à (não) existência do limite. Desse modo, é importante ressaltar que o aluno – ao verificar se $\lim_{x\to x_0} f(x)$ – considerou que a forma algébrica da função definida para os valores em torno de x_0 (seu domínio de interesse) estaria limitada superiormente e inferiormente por duas funções que convergiam para um mesmo valor limite. Ou seja, ele enxergou as formas algébricas de uma função escrita em partes como diferentes funções que atendiam ao que é estabelecido no referido teorema.

Vejamos na figura 36 uma possível ilustração para as evocações de S4 para os itens solicitados na questão 1.

Figura 36 – Dedução Parcial - Intuitiva 2 da 1ª questão de Q2



Fonte: Elaborado pela autora

No que concerne à segunda questão de Q2, solicitamos que os estudantes explicassem o que entendiam por $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$. Suas respostas nos permitiram verificar o entendimento dos sujeitos acerca do conceito de limite por meio das imagens conceituais evocadas em suas explicações. Nosso principal objetivo, nesse sentido, obter suas definições conceituais pessoais. Vejamos, no quadro a seguir, as anotações dos sujeitos investigados para essa questão.

Quadro 25 – Respostas para a 2ª questão de Q2

Sujeito	Resposta
S1	Quando $x \to x_0$, tem um certo ponto L_0 que é seu correspondente em y.
S2	Qualquer valor que você colocar no sentido esquerdo, e também direito, tendem para o mesmo limite, no caso L. Então existe um limite para x quando $x \to x_0$ e é L.

S3	o $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$, é quando o limite da função $f(x)$, onde x tende a x_0 é igual ao um determinado valor, como L.
S4	Entendo como uma aproximação de $x_0 \in D(f)$ pelos extremos $-x$ e $+x$, que pela relação funcional provoca também uma aproximação de extremos $-y$ e $+y$ do ponto L que pode estar ou não no contradomínio (ou imagem devido a incerteza) na função.
S5	Para tal raciocínio, podemos cosiderar uma reta cujo comprimento é L. Assim, para calcular o limite da função representada pela reta, devemos partir de um valor final (x) para um valor inicial (x_0).

Fonte: Anotações dos sujeitos investigados

Observamos que S1 atrelou L a relação funcional, estabelecida a partir dos elementos dos eixos das abscissas e ordenadas. Ressaltamos, nesse sentido, que evocações como essa podem levar a confusões conceituais entre $\lim_{x \to x_0} f(x)$ e $f(x_0)$.

Já o sujeito S2 evocou a ideia de aproximação à direita e à esquerda de um ponto x_0, cujos valores correspondentes no eixo y tendiam a L. Verificamos, desse modo, que ele trouxe, em sua resposta, elementos que faziam referência aos limites laterais em sua definição conceitual pessoal sobre limite, além de uma concepção dinâmica de movimento, de maneira semelhante a outros estudos[61].

S3 apresentou uma 'tradução' para $\lim_{x \to x_0} f(x)$, no entanto, sua definição conceitual pessoal não trouxe elementos suficientes para que pudéssemos conjecturar sobre a parte de sua imagem conceitual que foi ativada para responder o que lhe foi solicitado na questão. Ainda assim, verificamos que o estudante estabelece uma relação, na qual $f(x)$ assume um valor limite em virtude de $x \to x_0$.

Verificamos que S4, de maneira semelhante a S2, evocou elementos que relacionam o conceito de limite a ideia de aproximação. Sendo que em sua resposta, foi possível verificarmos ainda a ideia de relação funcional e, também, uma confusão acerca do que contradomínio e imagem significam. Identificamos, ainda, que suas imagens conceituais evocadas entraram em conflito, uma vez que em um primeiro momento ele considera $x_0 \in D_f$ e, em seguida, que L pode (ou não) estar no contradomínio da função. Verificamos, também, que o sujeito evocou a noção de

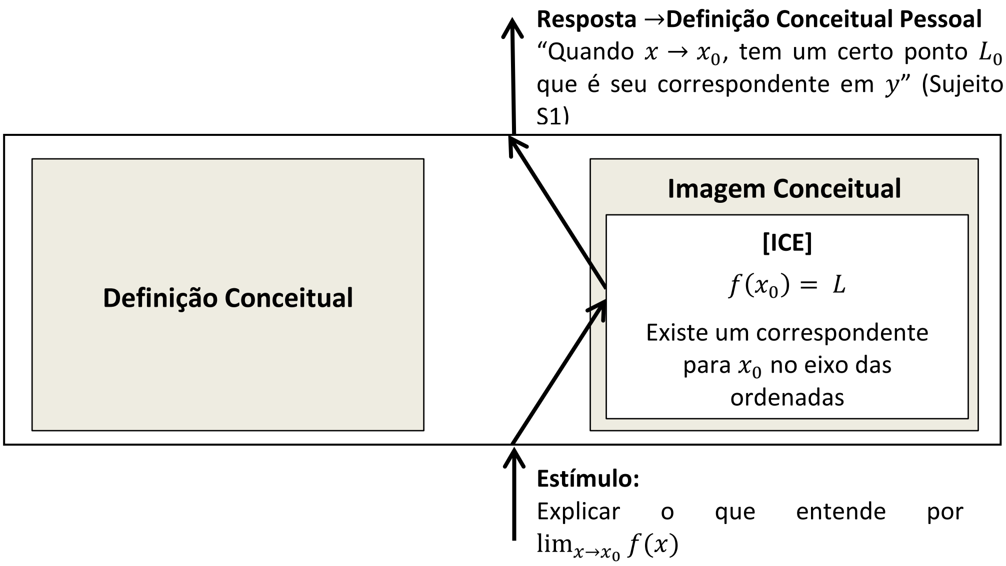
[61] Tais como Tall e Vinner (1981), Cornu (1983), Cornu (1991), Cottril et al. (1996), Przenioslo (2004), Sarvestani (2011), Swinyard (2011), Amatangelo (2013), Denbel (2014), Oh (2014).

intervalo por meio dos termos $-x$, $+x$ e $-y, +y$ em torno, respectivamente, de x_0 e L. Evidenciamos, nesse sentido, que para S4, o conceito de limite envolve uma concepção dinâmica de movimento/aproximação a partir dos intervalos estabelecidos nos eixos das abscissas e ordenadas.

Finalmente, encontramos na resposta de S5 uma evocação que não havíamos previsto, uma vez que o sujeito mobilizou elementos que não tínhamos observado, até então, em nossa prática como professores de Cálculo e que, também, não foram apontados em nenhum dos estudos que compuseram o levantamento bibliográfico acerca da interpretação de estudantes sobre o conceito de limite e continuidade apresentado no primeiro capítulo. Para esse sujeito, L representa uma reta, cujo comprimento pode ser obtido pela subtração entre as posições final e inicial.

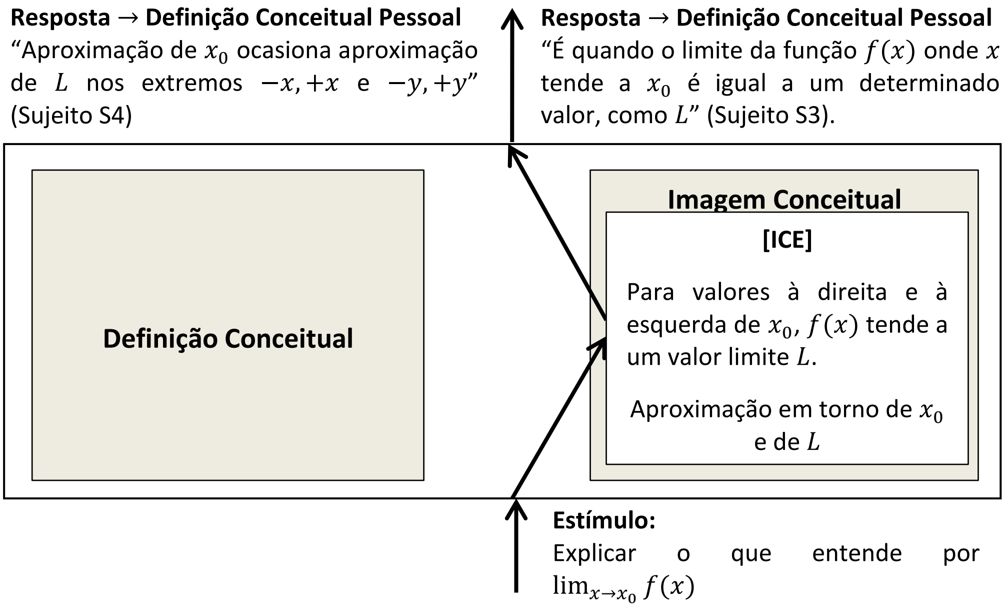
De modo geral, as respostas dos sujeitos para a segunda questão foram, sobretudo, intuitivas (ver figuras 37, 38 e 39).

Figura 37 – Resposta intuitiva 1 para a 2ª questão de Q2



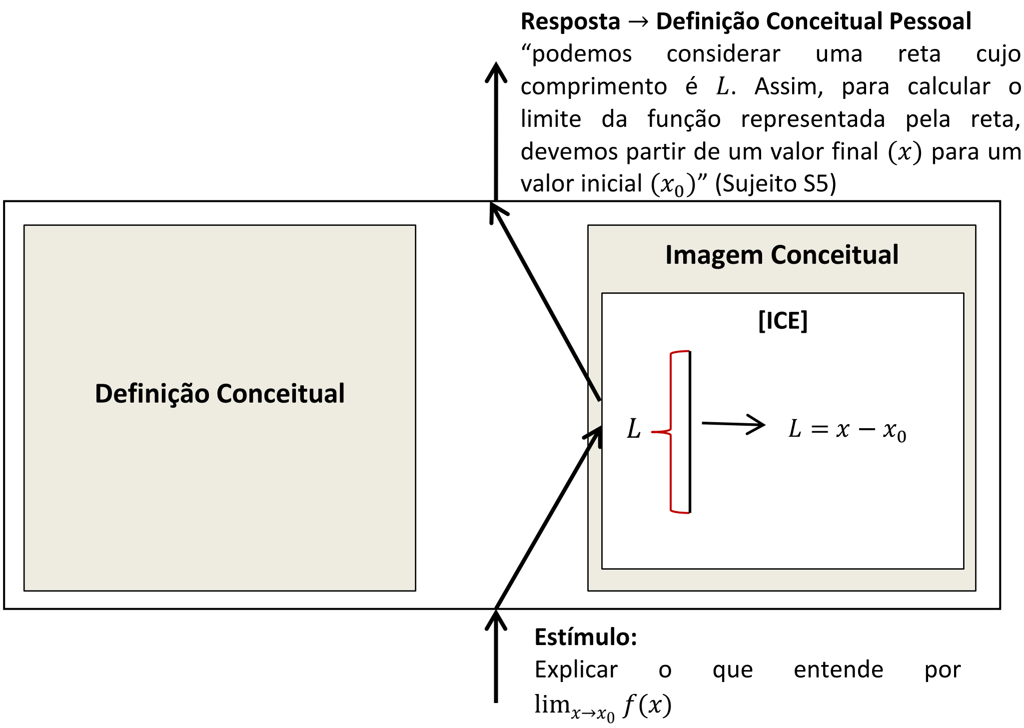
Fonte: Elaborado pela autora

Figura 38 – Resposta intuitiva 2 para a 2ª questão de Q2



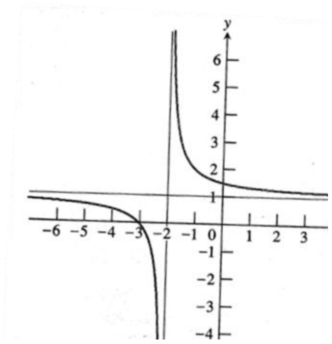
Fonte: Elaborado pela autora

Figura 39 – Resposta intuitiva 3 para a 2ª questão de Q2



Fonte: Elaborado pela autora

Na terceira questão de Q2, solicitamos que os estudantes considerassem a representação gráfica de $f(x) = \frac{x+3}{x+2}$ e respondessem os itens (a) e (b) conforme a seguir:



(a) “A reta $y = 1$ é uma assíntota horizontal do gráfico de $f(x)$”. Explique o que isso significa.

(b) “A reta $x = -2$ é uma assíntota vertical do gráfico de $f(x)$”. Explique o que isso significa.

Nosso principal objetivo foi investigar o entendimento dos alunos sobre assíntotas e sua relação com limites envolvendo infinito. Nesse sentido, S2 e S3 relacionaram as assíntotas com as condições de domínio e contradomínio da função. O sujeito S2 escreveu que $y = 1$ e $x = -2$ não pertenciam, respectivamente, aos conjuntos CD_f e D_f. E S3, além de fazer tal relação em sua resposta, evocou uma concepção dinâmica de movimento atrelada à $f(x)$.

O sujeito S1 relacionou as assíntotas com a ideia de barreira, a qual ele se referiu como “um limite” que não permite que determinados valores sejam ‘alcançados’ pela função. Desse modo, verificamos na resposta de S1 uma interpretação pautada no movimento dado à função.

S5 mobilizou termos que revelaram uma interpretação voltada para a translação de eixo, cuja origem passa a ser $O'(-2,1)$. Além disso, S5 também atribuiu dinamismo à função, uma vez que afirmou que tais retas restringiam o movimento de f. O único sujeito que evocou elementos da definição de assíntota – vertical e horizontal – foi S4. Em suas explicações, ele relacionou tais retas com limites envolvendo infinito.

Como as imagens conceituais evocadas pelos sujeitos nessa questão foram compostas por uma pluralidade de elementos, optamos por destacar a resposta de todos eles no quadro 26.

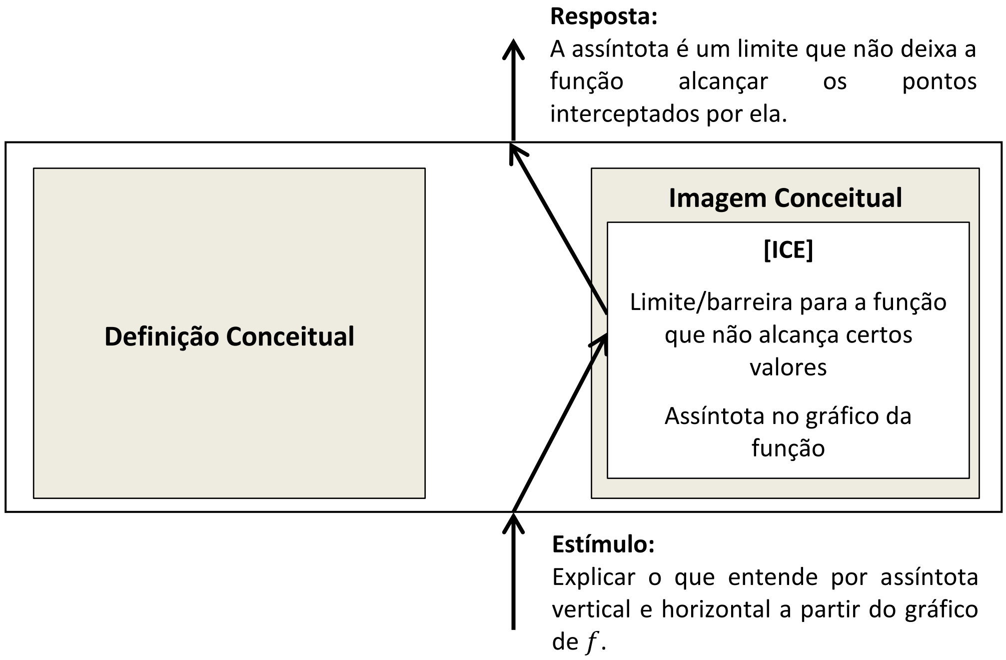
Quadro 26 – Respostas para a 3ª questão de Q2

Sujeito	Resposta	
	Item (a)	**Item (b)**
S1	Seria uma espécie de limite para a função, onde ela nunca terá valores menores que 1 em Y	Um limite onde a função não apresentava valores maiores que −2 em X.
S2	$1 = \frac{x+3}{x+2}$ $x+2 = x+3$ $x-x = 3-2$ $\boxed{0x = 1}$ não existe definição do conjunto imagem p/ $y=1$, ou seja, $Im = \{y \in R / y \neq 1\}$.	$f(-2) = \frac{-2+3}{-2+2=0}$ ~~não~~ é condição de ~~indeterminação~~ indefinição, logo não existe valores definido para $x = -2$; pela esquerda tende a $-\infty$ e pela direita a $+\infty$. $Dom = \{x \in R / x \neq -2\}$.
S3	Ela explica onde o gráfico da função mais se aproxima e também que o valor $y = 1$ não está no contra domínio	A assíntota ela, aqui também, explica onde o gráfico da função mais se aproxima, e também explica que o valor de $x = 1$ não está no domínio
S4	Que o $\lim_{x \to \infty} f(x) = 1$. Em escrito: que na medida que tomarmos valores muito grandes ou muito pequenos (negativos) a função se aproxima de 1	Que o $\lim_{x \to -2} f(x) = \nexists$ mas que a função se aproxima de valores muito grandes $(+\infty)$, quando x se aproxima pela direita de -2 e que ao mesmo tempo se aproxima de valores muito pequenos $(-\infty)$, quando x se aproxima pela esquerda de -2.
S5	Significa que o eixo dos abcissos se deslocou 1 unidade para cima determinando assim um "novo" e restringido movimento ao gráfico	Significa que o eixo dos ordenados se deslocou 2 unidades para a esquerda determinando assim um "novo" e restringido movimento ao gráfico

Fonte: Anotações dos sujeitos investigados

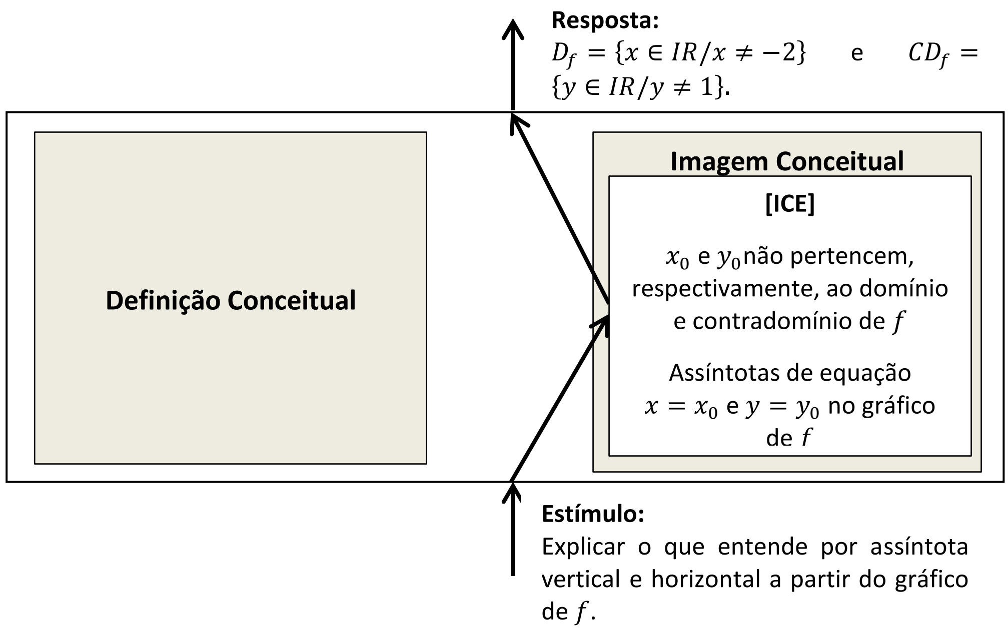
As respostas dos estudantes para a terceira questão se configuraram como intuitivas, com exceção da do sujeito S4. Conjecturamos nas figuras 40, 41 e 42 possíveis ilustrações do raciocínio dos estudantes tendo em vista suas respostas intuitivas para os itens (a) e (b).

Figura 40 – Resposta intuitiva 1 para a 3ª questão de Q2



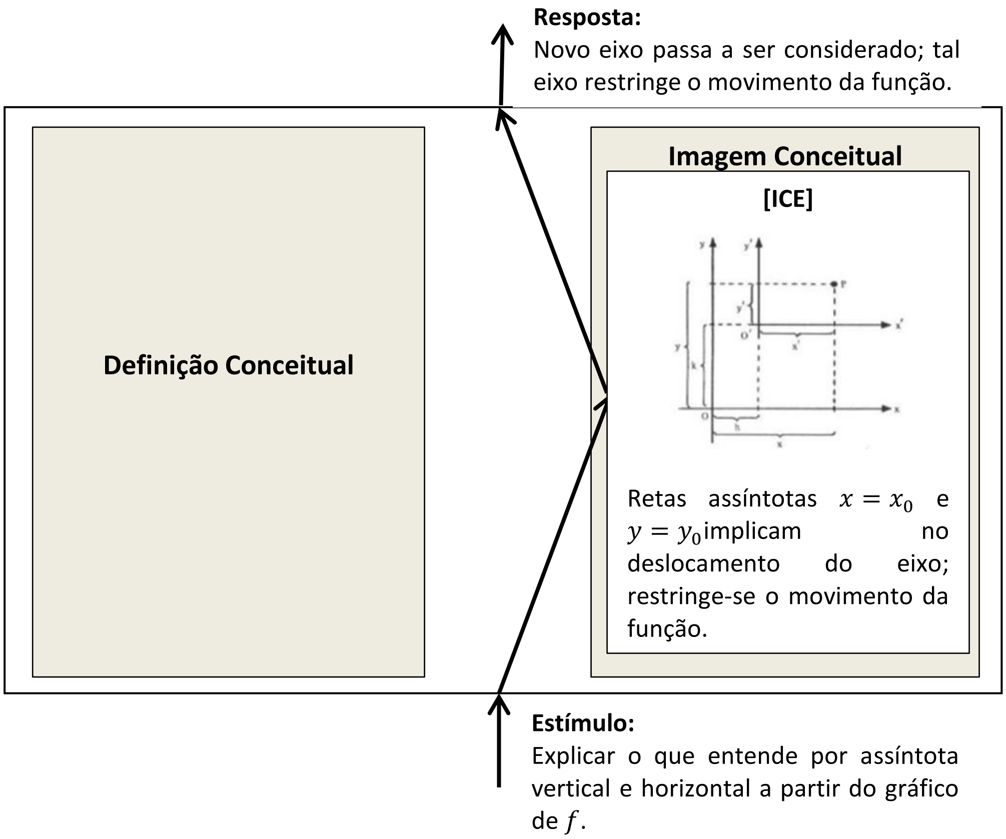
Fonte: Elaborado pela autora

Figura 41 – Resposta intuitiva 2 para a 3ª questão de Q2



Fonte: Elaborado pela autora

Figura 42 – Resposta intuitiva 3 para a 3ª questão de Q2



Fonte: Elaborado pela autora

As respostas intuitivas dos estudantes para a terceira questão, destacadas nas figuras 40, 41 e 42, trouxeram consigo elementos que caracterizaram as assíntotas como uma barreira que impede que determinados pontos sejam alcançados, que provocam um deslocamento de eixos que restringe o movimento da função ou, ainda, que exclui pontos do domínio e/ou contradomínio da função.

As expressões grifadas representam, de maneira explícita, uma concepção dinâmica atribuída à função. Já a relação das assíntotas com domínio e/ou contradomínio desencadeou na resposta de um estudante a ideia de aproximação à direita e à esquerda dos pontos que não pertenciam ao D_f ou CD_f. Nesse caso, além do movimento, observamos a evocação de vizinhança..

É importante ressaltar que S4 foi o único que não apresentou uma resposta exclusivamente intuitiva. Isso porque, conjecturamos que ele tenha mobilizado tanto elementos de sua imagem conceitual quanto da definição de assíntotas horizontal e vertical, conforme destacamos na figura 43.

Figura 43 – Dedução Intuitiva 1 para a 3ª questão de Q2

Resposta (a): Quando tomamos valores muito grandes ou muito pequenos a função se aproxima de 1; $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = b$

Resposta (b): À medida que nos aproximamos de $x = 2$ pela direita $f(x)$ chega perto de valores muito grandes. Pela esquerda de $x = 2$, $f(x)$ tende para valores muito pequenos; $\lim_{x\to x_0} f(x)$ não existe.

Definição Conceitual

(Parte da) Definição Conceitual Formal

Uma reta $y = y_0$ é assíntota horizontal de f se $\lim_{x\to\infty} f(x) = b$ ou $\lim_{x\to-\infty} f(x) = b$

Uma reta $x = x_0$ é assíntota vertical de f se $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \pm\infty$ ou $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \pm\infty$.

Imagem Conceitual

[ICE]

$+\infty$ (valores muito grandes); $-\infty$ (valores muito pequenos)

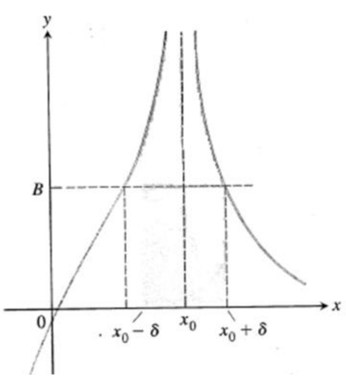
Limite é uma aproximação;

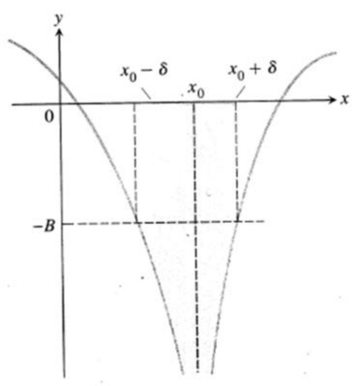
As assíntotas horizontal e vertical estão atreladas aos limites envolvendo infinito.

Estímulo:
Explicar o que entende por assíntota vertical e horizontal a partir do gráfico de f.

Fonte: Elaborado pela autora

Na quarta questão de Q2, solicitamos que os sujeitos escrevessem definições conceituais pessoais para $\lim_{x\to x_0} f(x)$, tendo como suporte as representações visuais de limites infinitos destacadas a seguir:





Conforme destacamos anteriormente, nosso objetivo com a questão foi verificar se as evocações dos sujeitos, mobilizadas a partir de suas definições conceituais pessoais sobre limite, estariam em acordo com a definição de limites infinitos.

Verificamos que a maioria dos estudantes evocou respostas exclusivamente intuitivas para o que lhes foi solicitado. O sujeito S1, por exemplo, mobilizou os intervalos $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ para enfatizar a aproximação em torno de x_0, fato que pôde ser observado em algumas das expressões utilizadas pelo aluno para escrever sua definição conceitual pessoal (tais como, 'tenderá' ou 'à direita de' e 'à esquerda de').

Ressaltamos, também, que a escrita da definição conceitual pessoal tanto de S1 quanto de S3 foi pautada em uma compreensão sobre limites na qual ambos afirmaram que nos itens (a) e (b), respectivamente, $\lim_{x \to x_0} f(x) = B$ e $\lim_{x \to x_0} f(x) = -B$. Portanto, conforme previmos quando elaboramos a questão, a (parte da) imagem conceitual desses sujeitos que foi ativada mediante as representações gráficas apresentadas foi a de limite de uma função no ponto, e não a de limites infinitos, na qual:

(i) $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$, se para cada real positivo B, existe um $\delta > 0$, tal que para todo x, $0 < |x - x_0| < \delta \to f(x) > B$;

(ii) $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$, se para cada real negativo $-B$, existe um $\delta > 0$, tal que para todo x, $0 < |x - x_0| < \delta \to f(x) < -B$;

A ideia de limites infinitos foi mobilizada nas respostas dos outros três estudantes. Sendo que, no caso de S2, observamos a evocação dos limites laterais (em torno de x_0) e bilateral, no qual o sujeito escreveu $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$ e $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$.

Na resposta de S4, verificamos a mobilização explícita da ideia de aproximação em torno de um ponto (nesse caso, x_0), bem como a compreensão de que, respectivamente nos itens (a) e (b), ocorre o crescimento e o decrescimento de $f(x)$. A esse (de) crescimento da função o sujeito S4 vinculou sua definição conceitual pessoal de limites infinitos.

Finalmente, no que concerne à resposta de S5, evidenciamos que o estudante evocou os termos 'infinito positivo' e 'infinito negativo' ao referir-se ao fato do gráfico da função, em cada uma das figuras, indicar que $f(x)$ estava arbitrariamente longe da origem e tendendo, respectivamente, para $+\infty$ e $-\infty$. A ideia de aproximação à direita e à esquerda do ‘ponto de chegada’ x_0 também foi mobilizada em sua definição conceitual pessoal.

A escrita da definição conceitual pessoal a partir das figuras nos permitiu observar aspectos relativos à compreensão dos sujeitos sobre limites infinitos. No quadro a seguir, exemplificamos algumas dessas definições.

Quadro 27 – Respostas para a 4ª questão de Q2

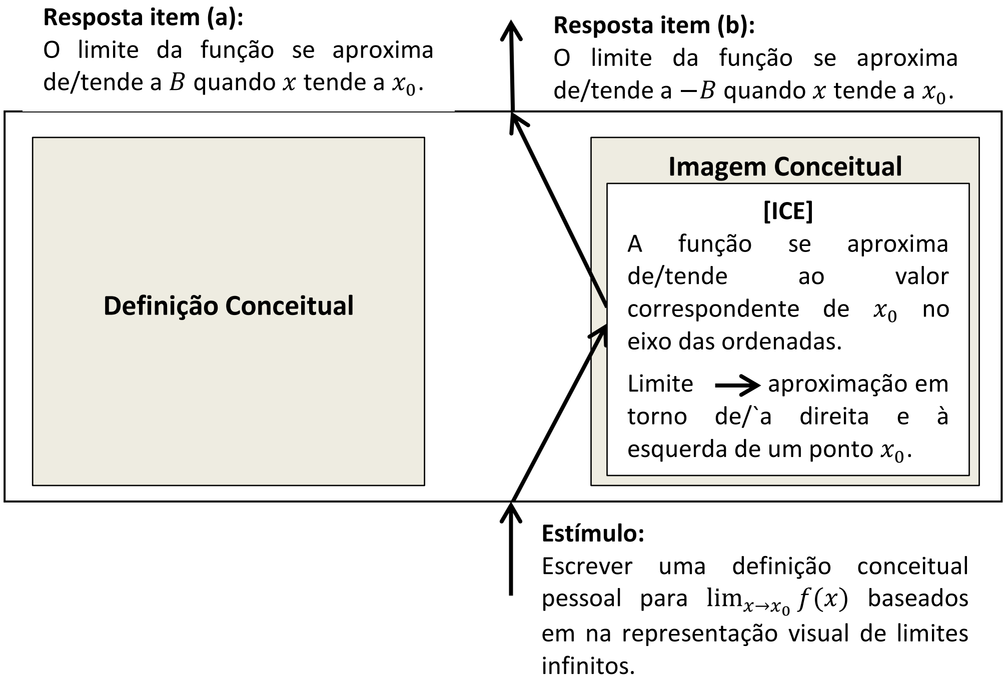
Sujeito	**Resposta**	
	Item (a)	**Item (b)**
S2	$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$ logo, $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$	$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty$ logo, $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$.
S3	O limite da função $f(x)$, onde x tende a x_0, tem como o limite igual a B. $\lim_{x \to x_0} f(x) = B$	O limite da função $f(x)$, onde x tende a x_0, tem como limite igual a $-B$. $\lim_{x \to x_0} f(x) = -B$.
S4	Que o limite de $f(x)$, quando x se aproxima de x_0 pela direita e pela esquerda cresce sem limites (que chamamos amigavelmente de $+\infty$)	Que o limite de $f(x)$ quando x se aproxima de x_0 pela direita e esquerda decresce sem limite (onde chamamos de $-\infty$)

Fonte: Anotações dos sujeitos investigados

Conjecturamos, a partir da análise que realizamos frente às evocações dos sujeitos investigados, que suas respostas tenham sido intuitivas, ou seja, foram norteadas, exclusivamente, por elementos de suas imagens conceituais. Ressaltamos que a maioria dos estudantes apresentou uma interpretação dinâmica, na qual a ideia de limite foi vinculada à noção de movimento em ‘direção’ ao infinito, ou ainda, em torno de um valor determinado.

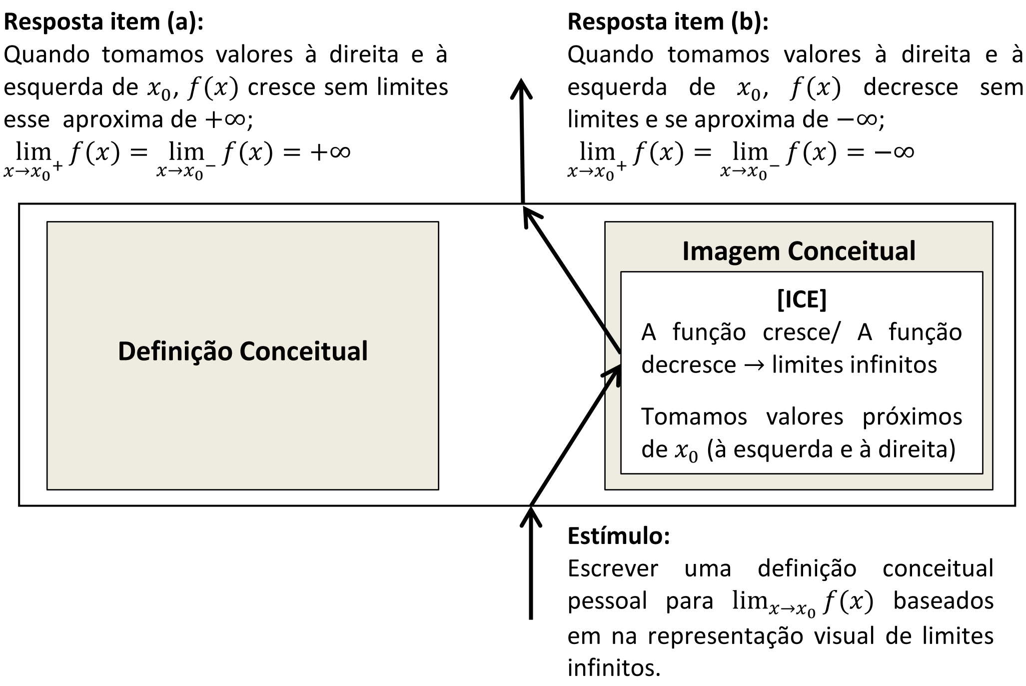
Apresentamos, nas figuras 44 e 45, possíveis ilustrações para as repostas dadas pelos sujeitos para a quarta questão de Q2.

Figura 44 – Resposta intuitiva 1 para a 4ª questão de Q2



Fonte: Elaborado pela autora

Figura 45 – Resposta intuitiva 2 para a 4ª questão de Q2



Fonte: Elaborado pela autora

No que se refere à quinta questão, solicitamos que os estudantes explicassem o que o resultado $\lim_{x \to x_0} f(x) = \frac{0}{0}$ significava e, caso fosse possível, que eles apresentassem um exemplo que estivesse em acordo com a explicação dada. Objetivamos com essa tarefa verificar se os termos ‘descontinuidade removível’, ‘pontos de singularidade’ ou ‘indeterminação’ seriam evocados.

Verificamos que nenhum dos estudantes atrelou a existência dos limites à ausência de indeterminações, porém destacaram a importância de ‘mecanismos matemáticos’ e ‘manipulações algébricas’ para ‘tirar’ a indeterminação e, enfim, encontrar o limite da função em determinado ponto. Vejamos a resposta de alguns dos sujeitos no quadro 28 (a seguir).

Quadro 28 – Respostas para a 5ª questão de Q2

Sujeito	Resposta
S1	Este resultado significa uma indeterminaçaõ, onde não dá para afirmar que f(x) tem limite sem uma manipulaçaõ algébrica. Ex: $\lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2}$
S4	Provavelmente e uma função com um "buraco", um ponto não definido na sua lei de formação, ainda não investiguei, mas é a minha melhor hipótese, já que eles usam para casos simples de quociente de funções algébricas cujo o domínio do denominador não abrange o zero da função. Ex: $\lim_{x \to -1} \frac{x^2+x+1}{x+1}$
S5	O resultado determinado pelo estudante se trata de uma indeterminação. Isso significa que o limite da função não será reconhecido se não for utilizado um mecanismo matemático que saia da indeterminação. Ex: $\lim_{x \to 2} \frac{x-2}{x^2-4} = \frac{2-2}{2^2-4} = \frac{0}{0}$ (indeterminação)

Fonte: Anotações dos sujeitos investigados.

O sujeito S4 vinculou a indeterminação à presença de ‘buracos’ no gráfico e às condições de domínio da função, especialmente no caso da emergência de denominadores nulos e S3 evocou a necessidade de verificar a existência do limite por meio dos limites laterais.

Os exemplos apresentados pelos estudantes foram bem parecidos, uma vez que representavam limites de funções racionais do tipo $\lim_{x\to a}\frac{x^2-a^2}{x-a}$ ou $\lim_{x\to a}\frac{x-a}{x^2-a^2}$ sendo tais funções bastante comuns em exercícios propostos em livros de Cálculo. S4 representou um $\lim_{x\to x_0} f(x) = \frac{1}{0}$, fato que reforçou a ênfase dada pelo aluno nos casos em que o cálculo de limite ocasiona na emergência de denominadores nulos.

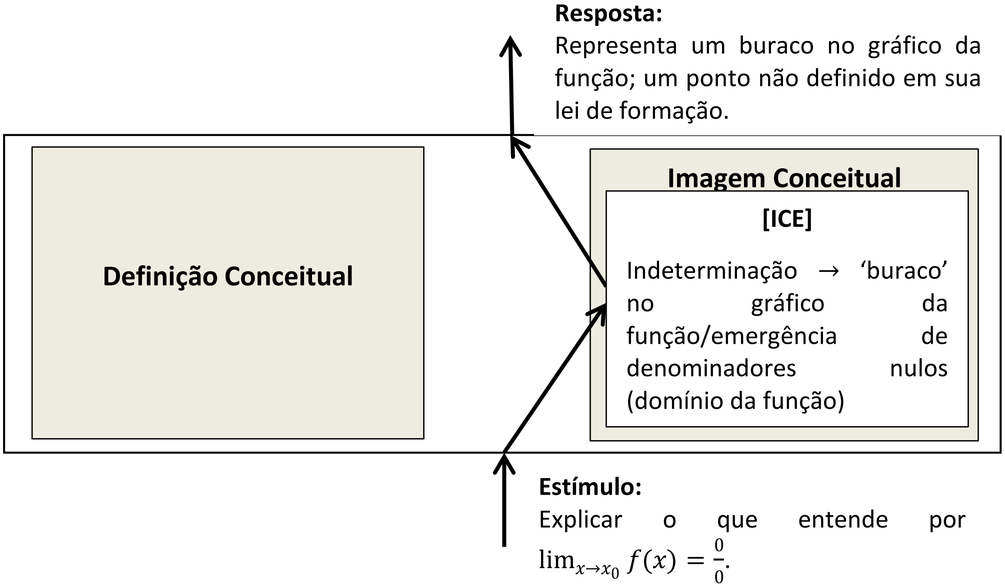
O sujeito S3 apresentou como exemplo o $\lim_{x\to -1}\frac{x+1}{-x-1}$, levando-nos a refletir acerca de duas situações:

(i) O limite apresentado poderia ser reescrito como $\lim_{x\to -1}\frac{x+1}{(-1)(x+1)}$. Sendo assim, $\lim_{x\to -1}\frac{1}{-1} = -1$. Isto é, o limite existia e era igual a -1, ao contrário do que fora apontado pelo estudante;

(ii) É possível que esse estudante tenha mobilizado a representação de uma assíntota vertical, uma vez que conjecturou que indeterminações resultam em limites que tendem para $+\infty$ ou $-\infty$ quando $x \to x_0$ (pela direita ou pela esquerda).

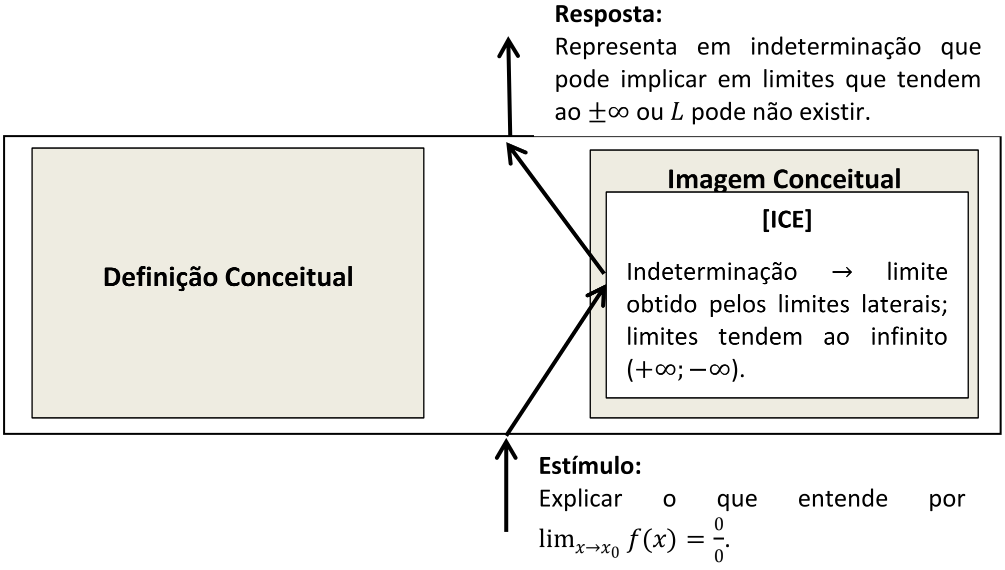
De modo geral, conjecturamos que os sujeitos investigados tenham evocado imagens conceituais parecidas sobre indeterminação. Ilustramos nas figuras 46 e 47 possíveis representações das respostas dos estudantes para a quinta questão de Q2.

Figura 46 – Resposta intuitiva 1 para a 5ª questão de Q2



Fonte: Elaborado pela autora

Figura 47 – Resposta intuitiva 2 para a 5ª questão de Q2



Fonte: Elaborado pela autora

Conforme mencionamos anteriormente, nosso objetivo com Q2 foi, sobretudo, investigar as definições conceituais pessoais dos estudantes investigados sobre limite de uma função no ponto e, também, limites infinitos. Para tanto, solicitamos em diferentes tarefas a explicação de situações específicas relacionadas a esses conhecimentos.

Com o terceiro questionário (Q3), nosso intuito foi conjecturar, a partir das anotações dos sujeitos, sobre os elementos contemplados em suas imagens conceituais a respeito da ideia de continuidade e suas (possíveis) relações com o conceito de limite. Apresentamos os resultados obtidos por meio desse instrumento no tópico subsequente.

4.3.3. Imagens Conceituais Evocadas no Q3

O terceiro questionário foi composto por seis questões. Na primeira questão, perguntamos se era possível desenhar o gráfico de uma função, em que $\lim_{x \to 4} f(x)$ existia, conforme as condições estabelecidas em cada item de (a) a (d):

a) A função seja descontínua em $x = 4$? Explique

b) A função seja contínua em $x = 4$? Explique.

c) A função não seja definida em $x = 4$? Explique.

d) A função seja definida em $x = 4$? Explique.

No item (a), somente S5 afirmou não ser possível construir uma função descontínua em $x = 4$, cujo limite existe quando $x \to 4$. Conjecturamos que esse sujeito tenha evocado para a descontinuidade em um ponto uma representação gráfica com 'salto' nesse ponto[62]. Isso porque, nas condições apontadas pelo sujeito (ver quadro 29), o limite bilateral não existiria e a função seria descontínua nesse ponto.

Quadro 29 – Resposta dada para o item (a) da 1ª questão de Q3

> Não, pois uma função descontínua não leva em conta a existência dos limites laterais.

Fonte: Anotações do sujeito S5

O sujeito S3 afirmou ser possível construir uma função conforme as condições estabelecidas no item (a). Em sua resposta, ficou claro que para ele a existência do limite não está necessariamente atrelada à continuidade. E, ainda que não tenha evocado explicitamente, conjecturamos que S3 tenha interpretado, assim como S1 e S4, que a descontinuidade dessa função seria representada por um 'buraco' em $f(4)$ que não influenciaria a questão da existência do limite quando $x \to 4$. Evidenciamos, assim, uma imagem conceitual que poderia ser adjacente a tal interpretação: se p não pertence ao domínio de f, então a função é descontínua em p. Como exemplo, apresentamos no quadro 30 a resposta do sujeito S4.

Quadro 30 – Resposta dada para o item (a) da 1ª questão de Q3

> Sim. O gráfico terá um "buraco" ou "bola vazia" em $f(4)$

Fonte: Anotações do sujeito S4

O sujeito S2 afirmou ser possível a construção do gráfico de uma função conforme as condições estabelecidas no item (a). Nesse caso, ele sugeriu como

[62] Evocações semelhantes a essa são discutidas em Tall e Vinner (1981), Vinner (1987), Núñez et al. (1999), Karatas et al. (2011), Jayakody (2015), Jayakody e Zazkis (2015) e Messias e Brandemberg (2015).

exemplo $f(x) = \begin{cases} x+2, x \neq 4 \\ 3, \quad\quad x = 4 \end{cases}$. Ressaltamos a coerência da resposta de S2, já que essa função é descontínua em $x = 4$, ainda que $\{4\} \in D_f$, e $\lim_{x \to 4} f(x)$ existe.

No item (b), todos os estudantes consideraram ser possível construir uma função f nas condições estabelecidas, ou seja, $\lim_{x \to 4} f(x)$ existe e f é contínua em $x = 4$. Mais uma vez, as respostas de S1 e S4 foram parecidas. Isso porque, em suas justificativas eles reforçam a ideia de continuidade atrelada à ausência de 'buracos' no gráfico da função. Já S2 destacou a função $f(x) = x + 2$ como um exemplo de função contínua em $x = 4$ e, cujo limite existe quando $x \to 4$.

A imagem conceitual evocada pelo sujeito S5 foi pautada claramente na interpretação de que uma função f é contínua em um ponto p se $p \in D_f$[63]. A justificativa de S3 para a questão foi norteada por uma compreensão sobre continuidade vinculada à fluidez e inteireza da função, já que para o sujeito, é possível 'construir o gráfico de uma função contínua normalmente', conforme destacamos no quadro 31.

Quadro 31 – Resposta dada para o item (b) da 1ª questão de Q3

Sim, pois se a função é contínua pode-se montar o gráfico normalmente.

Fonte: Anotações do sujeito S3.

No item (c), os sujeitos S3 e S5 responderam não ser possível construir o gráfico de uma função tendo em vista as condições estabelecidas ($\lim_{x \to 4} f(x)$ existe; $f(x)$ não é definida em $x = 4$). A imagem conceitual evocada por ambos foi pautada na compreensão de que a existência do limite em determinado ponto depende desse ponto estar definido no domínio da função, tal como foi apontado nos estudos mencionados no 1º capítulo[64].

Consideramos que a resposta de S2 não apresentou elementos suficientes para que pudéssemos conjecturar acerca de sua imagem conceitual evocada sobre limite e, especialmente, continuidade de uma função. Ainda assim, observamos que,

[63] Maiores esclarecimentos acerca dessa discussão, sugerimos a leitura de Tall e Vinner (1981), Vinner (1987), Amatangelo (2013), Denbel (2014), Jayakody (2015) e Jayakody e Zazkis (2015).
[64] Referimo-nos, por exemplo, a Przenioslo (2004), Jordaan (2005), Karatas et al. (2011), Denbel (2014), Messias e Brandemberg (2015).

a partir da condição estabelecida no item c ($\lim_{x\to 4} f(x)$ existe; $f(x)$ não é definida em $x = 4$), S2 pensou na função racional $f(x) = \frac{x}{x-4}$, porém não fez quaisquer considerações sobre seu limite quando $x \to 4$.

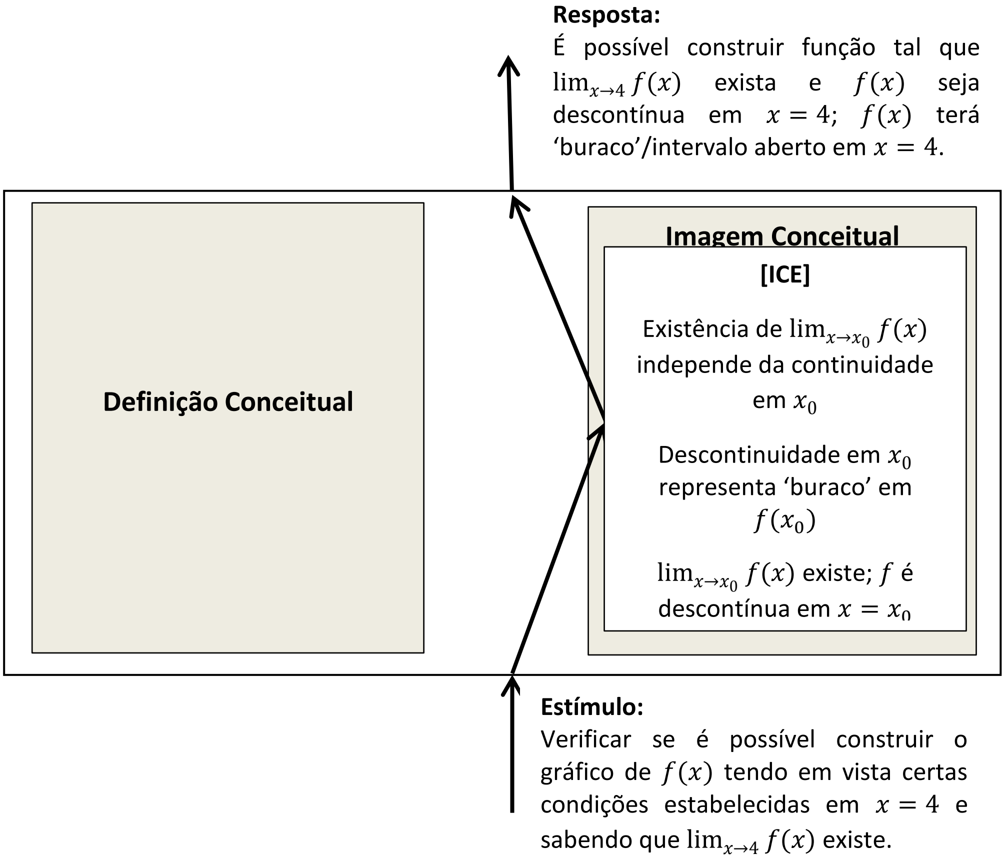
Todos os sujeitos afirmaram ser possível construir uma função tendo em vista as condições estabelecidas no item (d). De maneira semelhante a itens anteriores, S3 evocou a ideia de que a existência do limite em um ponto está atrelada à necessidade desse ponto estar definido no domínio da função.

A resposta de S5 não nos permitiu conjecturar acerca de sua imagem conceitual evocada, uma vez que ele fez referência às definições de função e limite, sem quaisquer esclarecimentos sobre como essa teoria formal mobilizada justificaria a construção do gráfico de uma função mediante as condições estabelecidas no item (d). Já S1, justificou que ‘todos os elementos no eixo x teriam correspondentes em y’.

S2 apontou para a semelhança em relação ao item (b), no qual ele apresentou um exemplo de uma função polinomial de 1º grau (portanto, contínua em todo seu domínio). Já S4, sugeriu uma função em que o ponto $(4, f(4))$ seria definido.

As imagens conceituais evocadas pelos estudantes na 1ª questão de Q3 foram pautadas, sobretudo, em interpretações que relacionavam existência do limite, continuidade no ponto e domínio da função. Apresentamos, nesse sentido, possíveis ilustrações para as respostas apresentadas pelos sujeitos investigados na referida questão (ver figuras 48, 49 e 50).

Figura 48 – Resposta intuitiva 1 para a 1ª questão de Q3

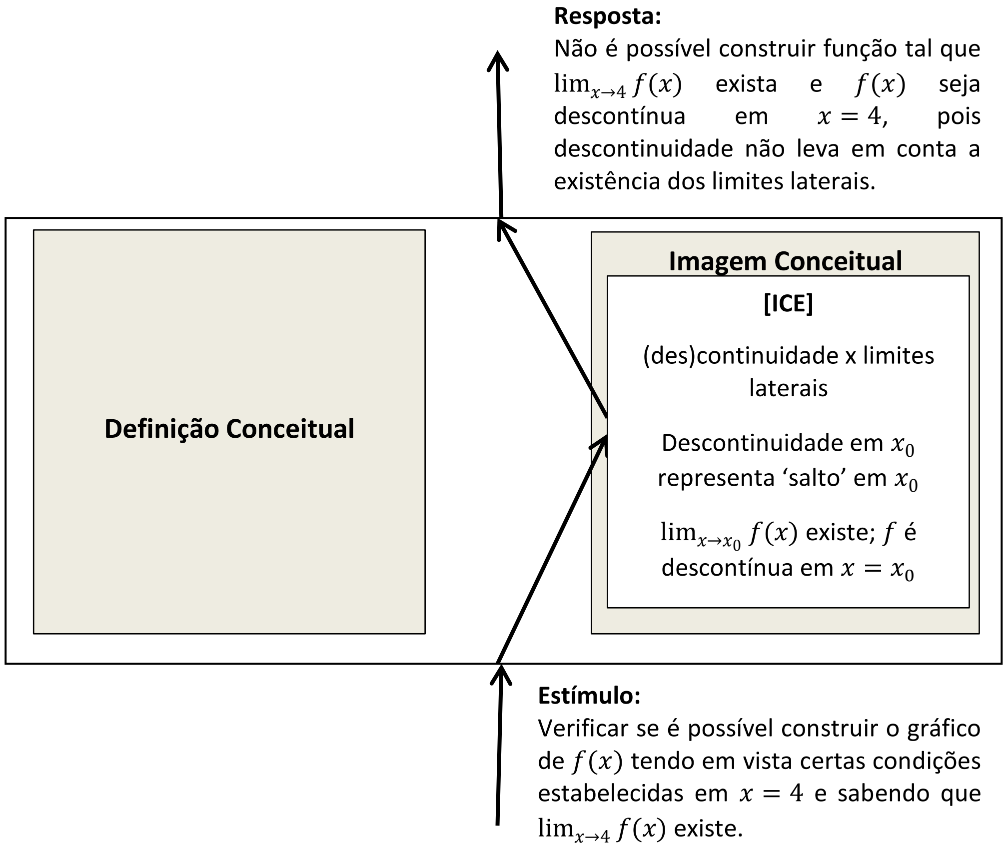


Fonte: Elaborado pela autora

Ilustramos, na figura 48, uma resposta pautada na compreensão de continuidade vinculada à 'inteireza'/conectividade da função, isto é, uma imagem de ausência de 'quebras' ou 'buracos' em sua representação gráfica. Esse tipo de interpretação pode levar um estudante à generalização da ideia de que se p não pertence ao domínio de f, então a função é descontínua em p. Conforme mencionamos anteriormente, nesses termos, a continuidade da função em determinado ponto estaria atrelada às condições de domínio de f para esse ponto.

Outra imagem conceitual adjacente a essa noção de 'inteireza' e fluidez atribuídas à função contínua (no ponto ou ao longo de um intervalo) é a de ausência de 'saltos' em sua representação gráfica (ver figura 49). Entretanto, o fato de um sujeito evocar tal imagem não garante que ele, necessariamente e simultaneamente, tenha a compreensão de que o gráfico de uma função contínua não tem 'buracos' ou 'quebras'.

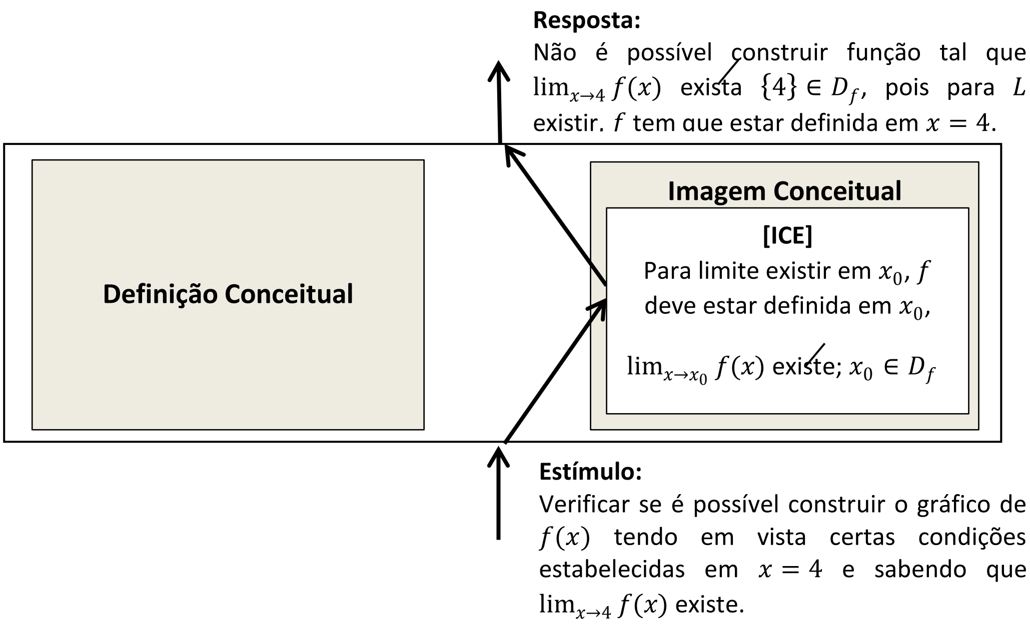
Figura 49 – Resposta intuitiva 2 para a 1ª questão de Q3



Fonte: Elaborado pela autora

Evidenciamos também que interpretações que relacionavam existência do limite ao domínio da função constituíram a imagem conceitual evocada de alguns sujeitos, conforme ilustramos na figura 50.

Figura 50 – Resposta intuitiva 3 para a 1ª questão de Q3



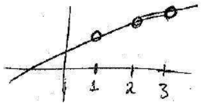
Fonte: Elaborado pela autora

Na segunda questão de Q3 perguntamos aos sujeitos se era possível desenhar uma função descontínua que tivesse limite em cada ponto de seu domínio. As imagens conceituais evocadas foram constituídas de elementos semelhantes aos da questão anterior. Ressaltamos, nesse sentido, que dois sujeitos, S1 e S5, afirmaram não ser possível construir uma função que fosse descontínua e tivesse limite em todos os pontos de seu domínio. Em suas justificativas, evidenciamos, mais uma vez, a imagem 'sem saltos' para a continuidade de uma função. Além disso, S1 evocou de maneira explícita que o salto implica em limites laterais diferentes e, consequentemente, a não existência do limite.

Já os sujeitos S2, S3 e S4 afirmaram ser possível construir uma função que estivesse em acordo com as condições estabelecidas na questão. Suas justificativas foram pautadas na ideia de que um 'buraco' representaria uma função descontínua, fato que não influenciaria na (não) existência do limite. S2, inclusive, exemplificou de maneira explícita essa compreensão.

Como exemplo, destacamos no quadro 32 as respostas que os sujeitos S2 e S5 deram para a 2ª questão.

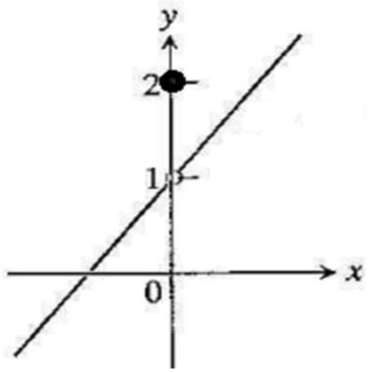
Quadro 32 – Respostas dadas para a 2ª questão de Q3

Sujeito	**Resposta**
S2	Sim é possível Ex.:  ⇒ ∃ limite nos pontos 1, 2 e 3 e ~~não des~~ a função é descontínua
S5	Não, pois uma função descontínua não possui limite em pontos do domínio.

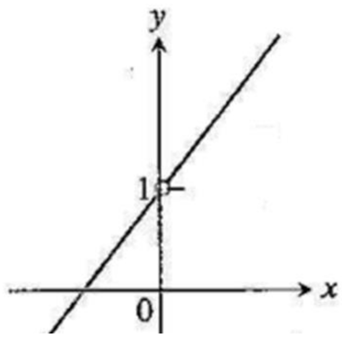
Fonte: Resposta dos sujeitos investigados.

A parte da imagem conceitual dos sujeitos que foi ativada – tanto nessa questão quanto na anterior – fez com que nós pudéssemos pensar em algumas representações gráficas as quais acreditamos que possam ilustrar suas evocações (até então) sobre descontinuidade de uma função em determinado ponto:

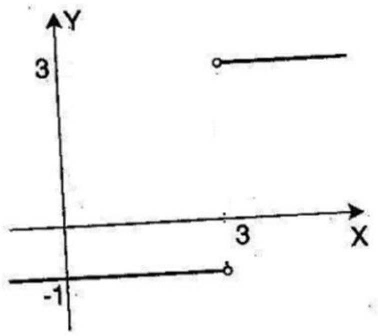
(i) Quando $x_0 \in D_f$, $\lim_{x \to x_0} f(x)$ existe e $\lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$



(ii) Quando $x_0 \notin D_f$ e seu gráfico possui um intervalo aberto (‘buracos’)

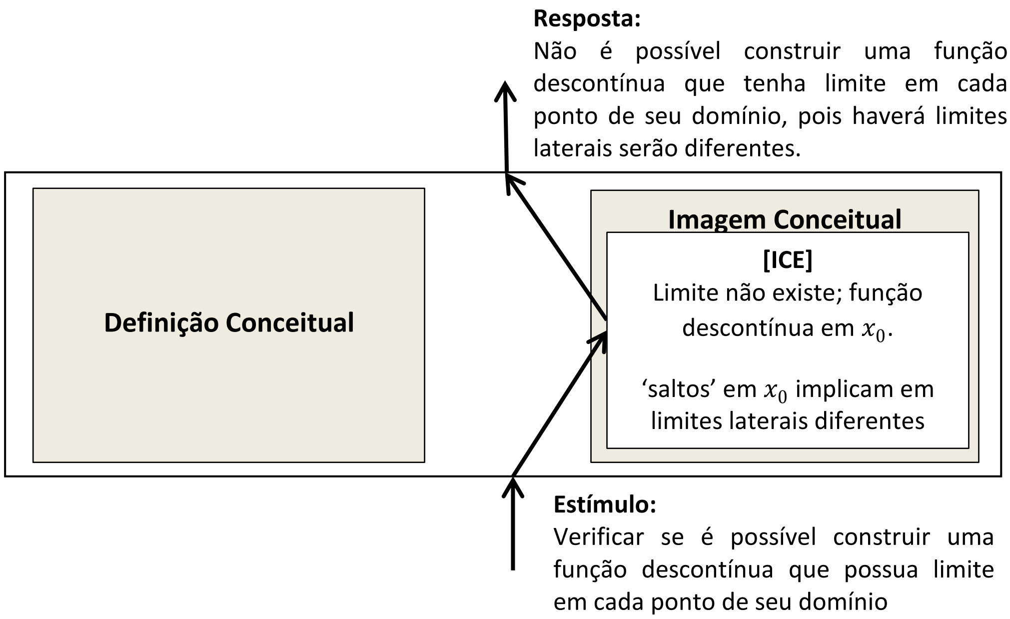


(iii) A existência de saltos na função/limites laterais diferentes



As respostas (predominantemente) intuitivas dos sujeitos para a 2ª questão de Q3 foram semelhantes às da 1ª questão. Por isso, elaboramos somente a figura 51 que representa a evocação de S1 sobre a presença de saltos, sua relação com os limites laterais e, consequentemente, com a existência do limite bilateral.

Figura 51 – Resposta intuitiva 1 para a 2ª questão de Q3

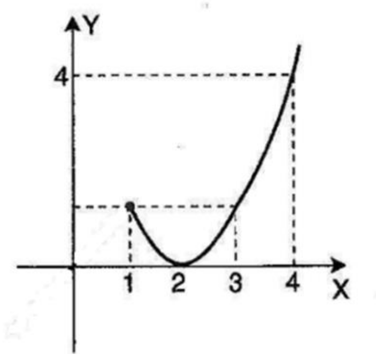


Fonte: Elaborado pela autora

Na terceira questão perguntamos aos alunos se era possível construir uma função que fosse contínua e não possuísse limite em um ponto qualquer de seu domínio. Observamos que S1, S2, S3 e S5 afirmaram não ser possível construir uma função que contemplasse as condições estabelecidas na questão. Nesse sentido, evidenciamos que:

- Para S1, se f é contínua, então para todo x, existe um $f(x)$ correspondente, fato que implica na existência do limite em qualquer ponto do domínio;
- Para S2, a continuidade da função em x_0 depende de $x_0 \in D_f$, além da existência do limite quando $x \to x_0$;
- Para S3 e S5, se f é contínua, então ela necessariamente tem limite em todos os pontos de seu domínio.

Verificamos que as imagens conceituais desses sujeitos foram pautadas na ideia de que uma função f é contínua em um ponto p se $p \in D_f$. Além disso, observamos que, para eles, a continuidade em um ponto depende da existência do limite. Nesse sentido, evidenciamos, por exemplo, que o conceito de continuidade na extremidade à direita ou à esquerda de um ponto não fez parte das imagens conceituais dos sujeitos investigados. Seria possível, mediante a evocação desse conceito, que uma função fosse construída tendo em vista as condições estabelecidas na terceira questão, conforme destacamos na representação gráfica da função a seguir, na qual $\lim_{x \to 1} f(x)$ não existe, porém a função é contínua em $x = 1$:



O sujeito S2 foi o único que afirmou ser possível construir uma função contínua que não possuísse limite em qualquer ponto de seu domínio. Porém, sua justificativa não se mostrou coerente, uma fez que ele mencionou a possibilidade de $\lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$, o que, na verdade, poderia implicar na descontinuidade da função em x_0.

Para fins de exemplificação, apresentamos as respostas de alguns dos sujeitos investigados para a terceira questão no quadro a seguir:

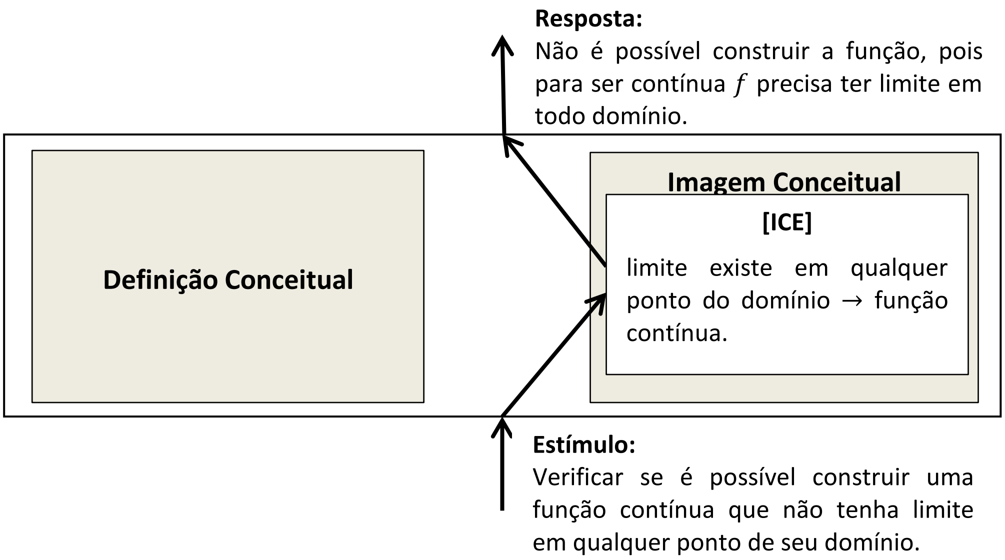
Quadro 33 – Respostas dadas para a 3ª questão de Q3

Sujeito	Resposta
S1	Não, pois todo ponto do domínio terá correspondentes nos eixos, então todo ponto terá limite.
S2	Não é possível, pois contraria a condição de função contínua. Definição função contínua: • ter limite e; • ser definido no ponto.
S5	Não, pois uma função contínua exige que seus limites sejam definidos em pontos quaisquer do domínio.

Fonte: Resposta dos sujeitos investigados.

Ressaltamos que, novamente, as respostas dos sujeitos se configuraram como intuitivas e foram constituídas por elementos semelhantes àqueles evocados nas questões anteriores de Q3. Ainda assim, consideramos importante destacar a figura 52, na qual ilustramos a relação de dependência estabelecida pelos sujeitos investigados em relação aos conceitos de limite e continuidade.

Figura 52 – Resposta intuitiva 1 para a 3ª questão de Q3

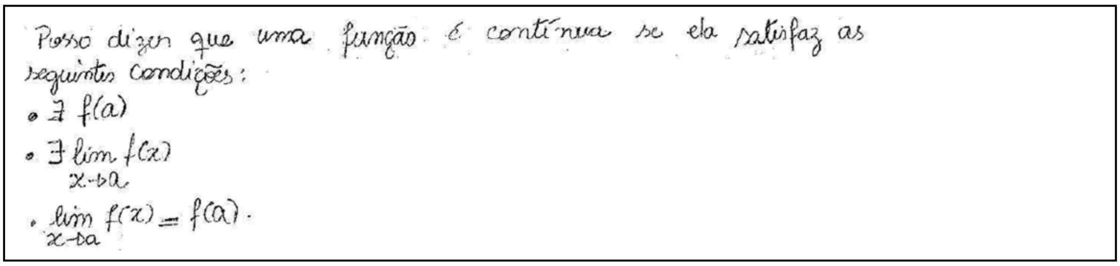


Fonte: Elaborado pela autora

Na quarta questão de Q3 solicitamos que os estudantes escrevessem uma definição conceitual pessoal para continuidade de uma função, já que assumimos que a forma em palavras utilizadas para descrever um conceito traz consigo elementos que, por sua vez, caracterizam a imagem conceitual de um indivíduo.

Quatro sujeitos – S2, S3, S4 e S5 – escreveram definições conceituais pessoais baseados no conhecido 'teste de continuidade' que é comumente apesentado em livros de Cálculo e no qual são estabelecidas condições para que uma função seja contínua em um ponto x_0: (i) $f(x_0)$ existe, (ii) $\lim_{x\to x_0} f(x)$ existe e (iii) $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. Reiteramos que o entendimento sobre continuidade pautado nesse 'teste' pode levar os estudantes a interpretações equivocadas acerca do conceito, conduzindo-os ao erro dependendo da tarefa matemática que lhes for solicitada[65]. Como exemplo, vejamos a resposta do sujeito S3 no quadro a seguir:

Quadro 34 – Resposta dada para a 4ª questão de Q3


Posso dizer que uma função é contínua se ela satisfaz as seguintes condições:

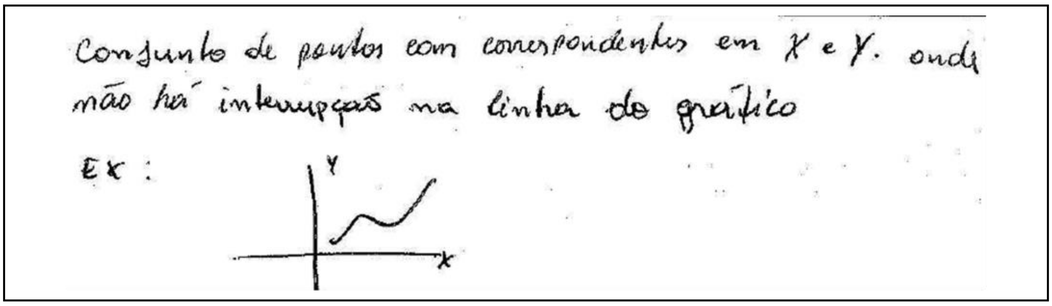
- $\exists\, f(a)$
- $\exists \lim_{x\to a} f(x)$
- $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Fonte: Anotações do sujeito S3.

A definição conceitual pessoal de S1 foi norteada por evocações que vinculam a continuidade à ideia de 'inteireza', 'fluidez' da função que, por sua vez, não 'tem interrupções' em sua representação gráfica. Evidenciamos, também, que para esse sujeito, uma função contínua é constituída por 'um conjunto de pontos com correspondentes em x e y'. Ou seja, não tem 'buracos', 'quebras' ou 'saltos', conforme destacamos no quadro 35.

[65] Acerca dessa discussão, sugerimos a leitura de Jayakody (2015) e Jayakody e Zazkis (2015).

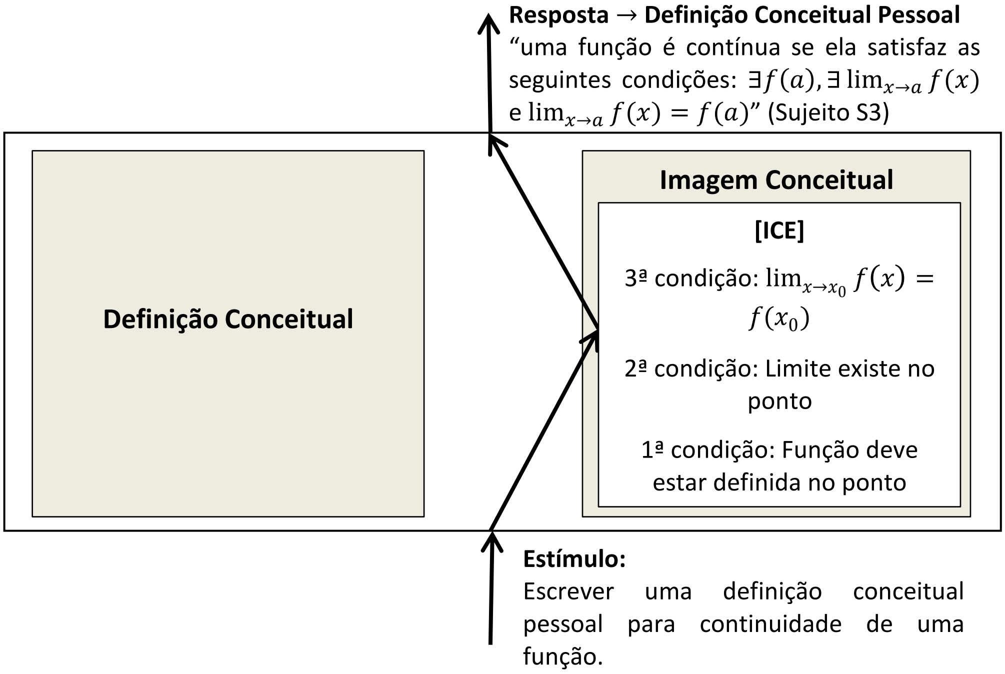
Quadro 35 – Resposta dada para a 4ª questão de Q3



Fonte: Anotações do sujeito S1.

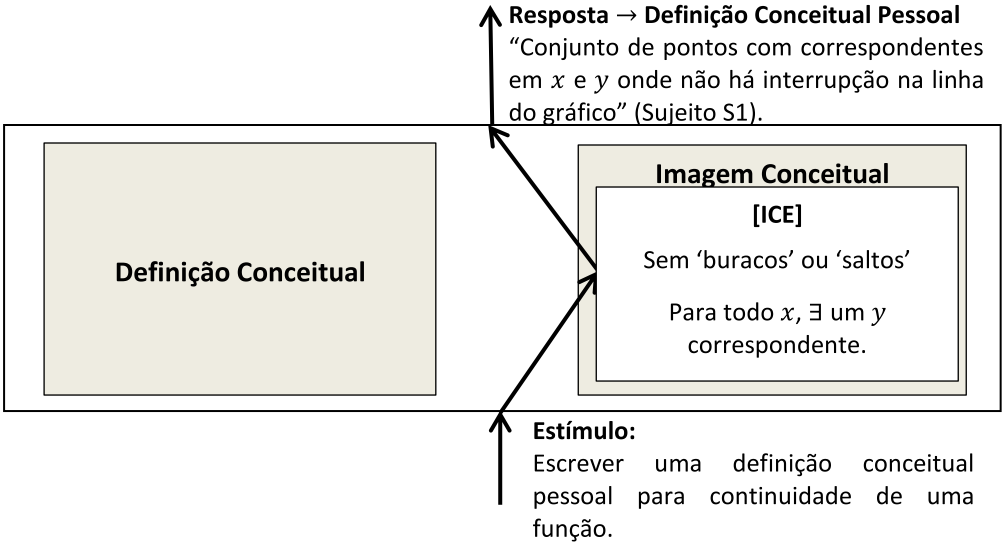
As definições escritas pelos estudantes na 4ª questão foram, na verdade, uma ‘tradução’ de suas evocações em questões anteriores, isto é, da parte da imagem conceitual que foi ativada (ver figuras 53 e 54).

Figura 53 – Resposta intuitiva 1 para a 4ª questão de Q3



Fonte: Elaborado pela autora

Figura 54 – Resposta intuitiva 1 para a 4ª questão de Q3



Fonte: Elaborado pela autora

No que se refere à quinta questão, solicitamos que os sujeitos observassem os gráficos das funções $f(x)$ e $g(x)$ e, em seguida, que respondessem os itens de (a) a (c), conforme quadro 36:

Quadro 36 – 5ª questão de Q3

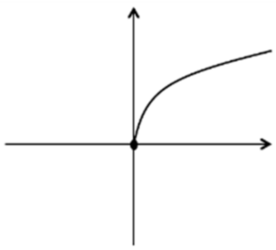


Fig 4.1 – Gráfico de $f(x)$
Fonte: Jayakody e Zazkis (2015)

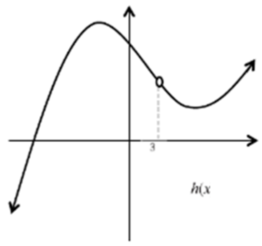


Fig 4.2 – Gráfico de $g(x)$
Fonte: Jayakody e Zazkis (2015)

a) A função representada na figura 4.1 é contínua? Explique.
b) $f(x)$ é contínua em $x = -5$? Explique.
c) A função representada na figura 4.2 é contínua? Explique.

Fonte: Parte do questionário Q3.

No que concerne ao item (a), somente o sujeito S2 afirmou que a função $f(x)$ não era contínua. Para esse estudante, a função precisa ser contínua 'num todo' e, segundo ele, não há continuidade para $x < 0$ (ver quadro 37).

Quadro 37 – Resposta dada para o item (a) da 5ª questão de Q3

> Não. Para quem leva em consideração que a função tende para o infinito na direção direita, tudo bem para a continuidade. Porém, observa-se que a função não continua para a esquerda parando na origem, neste caso não há a continuidade e no geral tem de haver a continuidade num todo

Fonte: Anotações do sujeito S2.

Tendo em vista sua justificativa, bem como sua definição conceitual pessoal para continuidade de uma função, entendemos que, para S2:

- Para a função ser contínua ela precisa estar definida em IR;
- Continuidade no ponto: a função precisa estar definida nesse ponto;
- A continuidade depende da existência do limite.

Todos os outros sujeitos investigados afirmaram que $f(x)$ era contínua no item (a). A justificativa de S1, por exemplo, foi pautada na existência dos limites para todo x pertencente ao intervalo $[0, +\infty)$, conforme destacamos no quadro 38:

Quadro 38 – Resposta dada para o item (a) da 5ª questão de Q3

> Sim, para valores em que $x \geq 0$ ela sempre terá limites.

Fonte: Anotações do sujeito S1.

Mediante a definição conceitual pessoal de S1 para continuidade de uma função destacada, bem como suas respostas para o item (a) e, também, para questões anteriores de Q3, conjecturamos que para esse sujeito:

- Uma função é contínua se sua representação gráfica não apresenta ‘interrupções’, ou seja, não há ‘buracos’, ‘quebras ou ‘saltos’;
- Os termos *continuidade* e *conectividade* são interpretados de maneira semelhante[66];
- Continuidade da função é atrelada à ideia de inteireza; fluidez.

[66] Sugerimos a leitura de Cornu (1991) e Jayakody e Zazkis (2015).

O sujeito S4 afirmou que $f(x)$ era contínua, devido tal função estar definida para $x > 0$, bem como $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, para todo $x_0 > 0$. Tal justificativa está em acordo com a definição conceitual pessoal apresentada pelo sujeito na questão anterior. Destacamos, a seguir, a resposta de S4 para a referida questão.

Quadro 39 – Resposta dada para o item (a) da 5ª questão de Q3

> Sim, pois f é definida para $x>0$ os limites de $f(x)$ para os pontos maiores de 0 existem e para todo $f(x)$, $x>0$, temos
> $f(x) = \lim_{x \to x_0} f(x)$

Fonte: Anotações do sujeito S4.

As justificativas de S3 e S5 não nos permitiram traçar reflexões acerca de muitos elementos de sua compreensão sobre função contínua, ainda que, para S3, a continuidade na origem da função pode ser uma condição para caracterizá-la como contínua. É importante ressaltar que esses dois sujeitos evocaram o 'teste de continuidade' quando apresentaram uma definição conceitual pessoal, porém não fizeram referência a esse 'teste' em suas justificativas para o item (a).

No que concerne ao item (b), verificamos que apenas S2 afirmou que $f(x)$ era contínua em $x = -5$. Nesse sentido, ressaltamos que identificar o domínio da função se configurou como um fator de conflito cognitivo, uma vez que para esse sujeito, não havia 'restrição em IR^-' e, por isso, $f(x)$ seria contínua. Nesse sentido, o fato da função não estar definida para valores negativos não foi levado em consideração pelo sujeito. É possível que para ele 'sem restrições' signifique sem 'saltos', 'buracos' ou 'quebras' (ver quadro 40).

Quadro 40 – Resposta dada para o item (b) da 5ª questão de Q3

> como não há nenhuma restrição em R^-, então é contínua

Fonte: Anotações do sujeito S4.

Os outros sujeitos investigados afirmaram que a função não seria contínua. Isso porque, *não havia correspondentes em y para $x = -5$* (ICE S1) ou porque *$f(-5)$ e $lim_{x \to -5} f(x)$ não existem* (ICE S4), ou ainda, devido o ponto não ser fechado no gráfico de $f(x)$ (ICE S3) e não ser possível que todos os valores de y existam para $x = -5$ (ICE S5). De modo geral, tais justificativas tem como imagem conceitual adjacente a ideia de continuidade da função atrelada às condições de domínio da função. Finalmente, no item (c) observamos que todos os sujeitos justificaram a não continuidade da função $g(x)$ em $x = 3$ devido a função não estar definida nesse ponto. Como exemplo, destacamos no quadro a seguir algumas das respostas dos sujeitos investigados para essa questão.

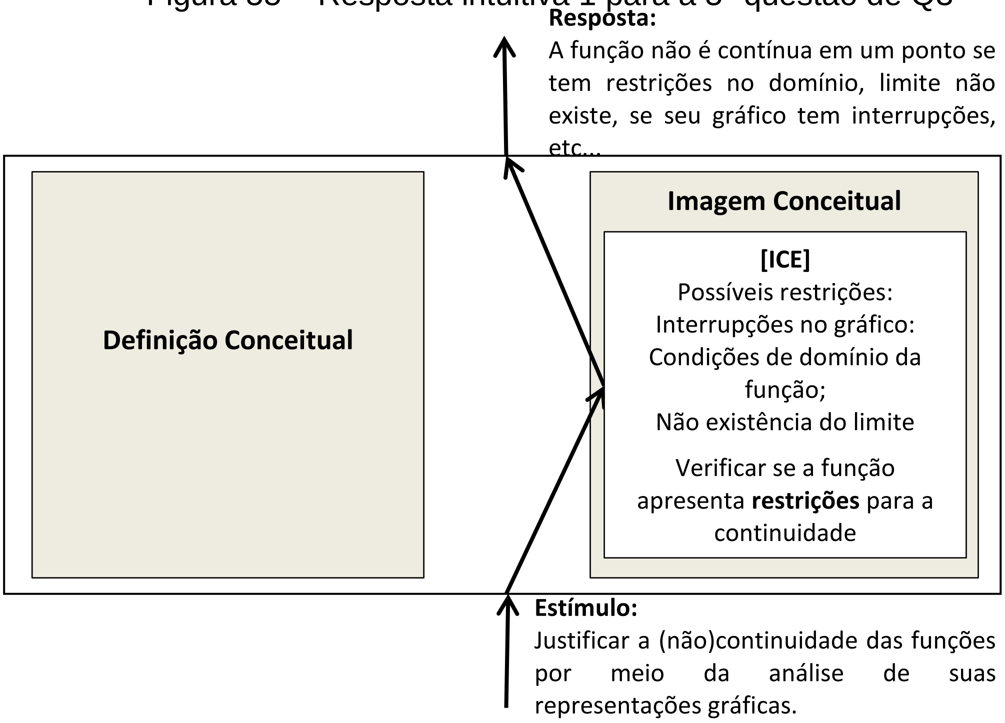
Quadro 41 – Respostas para o item (c) da 5ª questão de Q3

Sujeito	Resposta
S1	é contínua exceto no ponto X=3, pois este é um intervalo aberto.
S4	Não, pois g(3) não é definida na função

Fonte: Anotações dos sujeitos investigados.

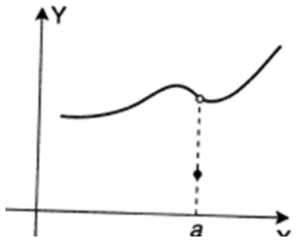
De modo geral, as respostas dos estudantes para a quinta questão podem ser representadas pelas figuras 51, 52 e 53. Ainda assim, complementamos nossas interpretações por meio da figura 55.

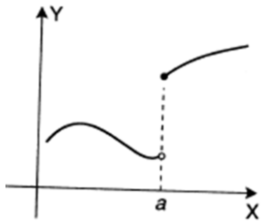
Figura 55 – Resposta intuitiva 1 para a 5ª questão de Q3

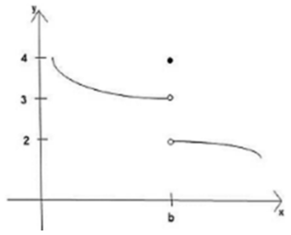


Fonte: Elaborado pela autora

Finalmente, na sexta questão, solicitamos que os sujeitos avaliassem a continuidade de três funções, cujas representações gráficas são destacadas a seguir:







As respostas dos sujeitos para a sexta questão de Q3 foram pautadas em imagens conceituais sobre continuidade semelhantes àquelas evocadas em questões anteriores, fato que reitera que suas compreensões relativas a esse conceito estão, sobretudo, atreladas à:

(i) Ideia de conectividade. Observamos tal compreensão na resposta de S5 que justificou a descontinuidade da função no ponto devido 'a distância entre os intervalos', ou seja, ao 'salto' no ponto $x = a$;

(ii) Ausência de 'saltos', 'buracos' ou 'quebras' na representação gráfica da função. Esse tipo de imagem conceitual evocada se mostrou presente nas respostas dos sujeitos, configurando-se, em suas percepções, como uma condição essencial para a continuidade da função no ponto;

(iii) Condição de domínio da função. A necessidade de a função estar definida no ponto para que esta seja contínua foi uma das imagens conceituais mais evocadas pelos sujeitos em Q3;

(iv) Existência do limite. Muitas das respostas dos sujeitos foram pautadas em uma compreensão que vinculava a continuidade da função à existência do limite em qualquer ponto de seu domínio.

Para fins de exemplificação, listamos no quadro 42, as respostas de S1 e S4 para a questão.

Quadro 42 – Respostas para a 6ª questão de Q3

Sujeito	Resposta
S1	todos as funções são descontínuas, pois há "buracos" na função.
S4	h(x) não é contínua em a, pois embora h(a) seja definida $h(a) \neq \lim_{x \to a} h(x)$, g(x) não é contínua em a pois o $\lim_{x \to a} g(x) = \varnothing$ f(x) não é contínua em a pois o $\lim_{x \to a} f(x) = \varnothing$

Fonte: Anotações dos sujeitos investigados

As respostas dos sujeitos investigados na sexta questão foram pautadas em imagens conceituais que também foram evocadas em questões anteriores. Nesse sentido, consideramos que a figura 55 (destacada anteriormente) também pode ilustrar o entendimento deles acerca do conceito de continuidade de uma função.

4.4. Considerações sobre o capítulo

No decorrer desse capítulo, analisamos as respostas dadas pelos estudantes às atividades solicitadas em três questionários, fato que nos permitiu conjecturar acerca dos elementos constituintes de suas imagens conceituais no que tange aos conceitos de limite e continuidade de uma função.

Optamos, nesse sentido, por construir possíveis ilustrações que representassem o pensamento dos sujeitos investigados, de modo a destacar a parte de suas imagens conceituais que foi ativada mediante os estímulos apresentados, isto é, as tarefas solicitadas em cada questão.

Reiteramos que nossas análises sobre a compreensão desses sujeitos foram norteadas pelos apontamentos teóricos de Vinner (1991). Além disso, estabelecemos conexões entre nosso estudo e outras pesquisas que tiveram como objeto de investigação a compreensão de estudantes sobre limite e continuidade. A pluralidade de interpretações acerca desses conceitos tem sido discutida em diferentes pesquisas, conforme apresentamos nos quadros 1 e 2 que, por sua vez, levaram-nos às seguintes considerações prévias:

- O conhecimento de estudantes sobre limite é pautado, sobretudo, em interpretações dinâmicas desse conceito;
- A questão da existência do limite é um fator de conflito em potencial para estudantes de Cálculo;
- A compreensão de estudantes sobre continuidade encontra-se vinculada a uma concepção natural, na qual é atribuído direcionalidade, movimento, fluidez e inteireza à função;
- As condições que implicam na (des) continuidade de uma função em um ponto ou ao longo de um intervalo são interpretadas de maneira equivocada pelos estudantes;
- A relação entre limite e continuidade é comumente mobilizada (de maneira consciente ou inconsciente) por estudantes ao resolverem tarefas envolvendo tais conceitos.

Essas considerações prévias, bem como nossa experiência docente no âmbito do Cálculo, foram fundamentais para que pudéssemos efetivar o estudo preliminar que nos possibilitou **alcançar o primeiro objetivo específico estabelecido para essa pesquisa**[67], uma vez que analisamos os (possíveis) elementos das imagens conceituais dos sujeitos investigados sobre limite e continuidade de uma função (e outros conceitos adjacentes). Evidenciamos, nesse sentido, que seus conhecimentos foram pautados, sobretudo, nas seguintes compreensões:

(i) Relacionadas ao conceito de limite de uma função

[C1] – A existência do limite depende dos limites laterais;

[C2] – $\lim_{x\to x_0} f(x)$ existe se $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$ e $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$ existem e são iguais e se $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$;

[C3] - $\lim_{x\to x_0} f(x)$ existe se $x_0 \in D_f$;

[67] O primeiro objetivo específico de nossa pesquisa consistiu em analisar os elementos que compõem a imagem conceitual de estudantes de licenciatura em matemática no que se refere aos conceitos de limite e continuidade.

[C4] - Saltos' implicam em limites laterais diferentes e, consequentemente, na não existência do limite;

[C5] – O limite representa uma aproximação no eixo das abscissas;

[C6] - $x \to x_0^+$ e $x \to x_0^-$ implica que $f(x) \to L$;

[C7] – O limite é uma aproximação em torno/à direita e à esquerda de x_0 que implica em uma aproximação de f em relação a um valor de y correspondente;

[C8] – Limites infinitos: à medida que tomamos valores próximos de x_0 a função cresce ou decresce;

[C9] – Teorema do confronto: L existe quando $x \to x_0$ se os limites laterais existem e estes são iguais;

[C10] – Para calcular o limite de uma função escrita em partes quando $x \to x_0$, basta fazer $x = x_0$ em todas as equações que compõem $f(x)$;

[C11] – L é o correspondente em y para $x = x_0$; $f(x_0) = L$;

[C12] - $\lim_{x \to x_0} f(x)$ significa que quando $x \to x_0$ pela direita e pela esquerda $f(x) \to L$;

[C13] – $\lim_{x \to x_0} f(x)$ será sempre igual a $f(x_0)$;

[C14] – L e o comprimento de uma reta;

(ii) Relacionadas ao conceito de continuidade de uma função

[C15] – f é contínua em x_0 se $x_0 \in D_f$;

[C16] – A continuidade de uma função em um ponto depende da existência do limite nesse ponto;

[C17] – A descontinuidade em um ponto representa um 'buraco' em x_0;

[C18] – A descontinuidade no ponto implica em 'salto' no gráfico da função;

[C19] – f é contínua se todo valor de x apresentar um correspondente em y;

[C20] – f é contínua se não apresentar 'saltos ou 'buracos' em sua representação gráfica;

[C21] – Continuidade = Conectividade.

(iii) No que concerne à relação entre limite e continuidade de uma função

[C22] – Se o limite existe em qualquer ponto do domínio então a função é contínua;

[C23] – 'Buraco' ou 'quebra' na representação gráfica de uma função implica em descontinuidade; descontinuidade implica na não existência do limite;

[C24] – A existência do limite independe da continuidade da função no ponto;

(iv) No que concerne à relação entre limite/continuidade e outros conceitos adjacentes

[C25] – Uma indeterminação implica em um ‘buraco’ no gráfico da função que, por sua vez, representa a emergência de um denominador nulo;

[C26] – Uma indeterminação implica na obtenção do limite por meio dos limites laterais;

[C27] – Uma indeterminação implica na emergência de limites tendendo para o infinito;

[C28] – Uma reta assíntota representa um ‘limite’/uma ‘barreira’ que impede que a função toque determinado ponto; não deixa a função alcançar o ponto por ela interceptado;

[C29] – Uma reta assíntota representa descontinuidade na função;

[C30] – A presença de uma reta assíntota implica no cálculo de limite por meio de uma aproximação à direita e à esquerda dessa reta;

[C31] – Uma reta de equação $x = x_0$ é uma assíntota vertical se $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \pm\infty$ e $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \pm\infty$;

[C32] – Se a reta de equação $x = x_0$ é uma assíntota vertical, então $\cancel{x}_0 \in D_f$; Se a reta de equação $y = y_0$ é uma assíntota horizontal, então $y_0 \in\!\!\!/ D_f$;

[C33] – Uma reta assíntota no gráfico de uma função representa um deslocamento de eixos e restringe o movimento da função;

[C34] – Uma assíntota (vertical ou horizontal) implica na emergência de limites envolvendo infinito;

Reiteramos que quando solicitamos a um indivíduo que resolva uma tarefa, parte de sua imagem conceitual é ativada. É possível que todo o conhecimento desse sujeito acerca de um conceito matemático seja representado pela imagem conceitual que foi evocada ou, dependendo do que lhe for solicitado em outra tarefa, ele pode mobilizar outros conhecimentos. Isso quer dizer que, não necessariamente, as compreensões elencadas de [C1] a [C34] foram mobilizadas simultaneamente.

Desse modo, admitimos que ainda que um sujeito investigado não tenha evocado qualquer uma dessas compreensões, é possível que em outro momento ele a utilize para resolver outra tarefa. Isso porque, cada uma das compreensões que constituíram as imagens conceituais dos estudantes que participaram de nosso estudo preliminar esteve relacionada com os conceitos de limite e/ou continuidade de uma função.

Ressaltamos, também, que as compreensões mobilizadas pelos sujeitos investigados estiveram em acordo com as considerações prévias que traçamos a partir das interpretações sobre limite e continuidade que têm sido apontadas em diferentes pesquisas. Isso porque:

- De fato, o conhecimento dos sujeitos investigados sobre limite mostrou-se pautado em interpretações dinâmicas desse conceito, principalmente, quando o descreveram como um processo de aproximação em torno de um valor tanto no eixo das abscissas quanto no eixo das ordenadas;

- Os sujeitos investigados vincularam a existência do limite às condições de domínio, à continuidade da função, à ausência de ‘saltos’ e/ou ‘buracos’, e isto reforça que a existência do limite se configurou como um fator de conflito cognitivo para esses estudantes;

- A compreensão dos sujeitos investigados sobre continuidade mostrou-se vinculada à ideia de conectividade. Foi possível observarmos, nesse sentido, que a ideia de ‘inteireza’ esteve atrelada à imagem ‘sem saltos ou buracos’ que foi evocada em diferentes tarefas contempladas em nosso estudo preliminar.

- Observamos, também, que condições que implicam na (des) continuidade de uma função em um ponto ou ao longo de um intervalo foram equivocadamente apontadas por alguns dos sujeitos investigados, especialmente, quando evocados aspectos relativos ao domínio da função, à existência do limite, às retas assíntotas, dentre outros conhecimentos adjacentes a esse conceito.

Reiteramos que os resultados obtidos em nossa investigação foram de grande relevância no sentido de nos permitirem verificar possíveis conflitos que permeiam as imagens conceituais de estudantes de Cálculo no que tange aos conceitos de limite e continuidade de uma função. Esses resultados, aliados aos nossos conhecimentos sobre a teoria APOS, levou-nos à efetivação do segundo estágio da pesquisa, o qual apresentamos no capítulo seguinte.

CAPÍTULO 5

A construção dos conceitos de limite e continuidade na perspectiva da teoria APOS

5.1. Introdução

Dedicamos esse capítulo à apresentação da decomposição genética relativa aos conceitos de limite e continuidade de uma função, conforme previmos nas considerações metodológicas. Nossa expectativa foi a de que pudéssemos refletir sobre as possíveis construções mentais que devem compor esse modelo de epistemologia e cognição matemática, de modo a nos possibilitar alcançar os objetivos traçados, responder à questão norteadora e validar a tese enunciada.

Optamos por organizar a elaboração da decomposição genética em duas partes. A primeira parte foi dedicada ao conceito de limite, e a segunda, ao conceito de continuidade. Ressaltamos que sua elaboração foi baseada em nosso conhecimento acerca desses objetos matemáticos, de seu desenvolvimento histórico-conceitual e, também, nas compreensões de [C1] a [C34] elencadas no capítulo anterior. Nosso entendimento sobre a teoria APOS, bem como experiências docentes anteriores no âmbito do Cálculo, também exerceram grande influência na composição dos mecanismos e estruturas mentais contemplados na DG.

Apresentamos, nos itens subsequentes, os elementos que compuseram cada uma das partes da decomposição genética prevista para esse trabalho.

5.2. Parte I – Conceito de limite de uma função

Para a elaboração da parte I da decomposição genética, tomamos, inicialmente, as compreensões de [C1] a [C14], evocadas pelos sujeitos investigados no primeiro estágio de nossa pesquisa, de modo que as aglutinamos quanto à natureza do conceito de limite, (não) existência do limite e outras compreensões.

A seguir, traçamos algumas considerações prévias frente às compreensões evocadas.

(i) Quanto à natureza do conceito de limite

Incluímos nesse grupo as seguintes compreensões: **[C5]** O limite representa uma aproximação no eixo das abscissas; **[C6]** $x \to x_0^+$ e $x \to x_0^-$ implica que $f(x) \to L$; **[C7]** O limite é uma aproximação em torno/à direita e à esquerda de x_0 que implica em uma aproximação de f em relação a um valor de y correspondente; **[C11]** L é o correspondente em y para $x = x_0$; $f(x_0) = L$; **[C12]** $\lim_{x \to x_0} f(x)$ significa que quando $x \to x_0$ pela direita e pela esquerda $f(x) \to L$; **[C13]** $\lim_{x \to x_0} f(x)$ será sempre igual a $f(x_0)$ e **[C14]** L é o comprimento de uma reta.

As compreensões [C5], [C6], [C7] e [C12] estão vinculadas à ideia de aproximação em torno de um ponto, sendo que [C5] pode se constituir como um fator de conflito em potencial, uma vez que restringe essa aproximação ao eixo das abscissas. Ponderamos, nesse sentido, que os seguintes aspectos podem ser considerados no decorrer de apreensão do conceito de limite:

- Avaliar uma função $f(x)$ em sucessivos pontos em torno de x_0;
- Avaliar uma função $f(x)$ em sucessivos pontos em torno de $f(x_0)$;
- Relacionar entre si os sucessivos pontos em torno de x_0 e $f(x_0)$;

Admitimos que as compreensões [C11] e [C13] estejam, possivelmente, vinculadas à prática excessiva do cálculo de limite de funções contínuas. É comum, nesse sentido, que muitos estudantes não consigam diferenciar $\lim_{x \to x_0} f(x)$ e $f(x_0)$. Entendemos, portanto, que tal prática precisa ser diversificada, de modo a:

- Relacionar o $\lim_{x \to x_0} f(x)$ e $f(x_0)$ de diferentes funções para que o sujeito perceba que nem sempre $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$;
- Solicitar que o aluno interprete limites a partir de diferentes representações;

Finalmente, a compreensão evocada em [C14] nos chamou atenção para a importância de estabelecer uma discussão frente às múltiplas interpretações e representações de limite.

(ii) Quanto à (não) existência do limite

Incluímos nesse grupo as quatro compreensões, a saber: **[C1]** A existência do limite depende dos limites laterais; **[C2]** $\lim_{x \to x_0} f(x)$ existe se $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ e $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ existem e são iguais e se $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$; **[C3]** $\lim_{x \to x_0} f(x)$ existe se $x_0 \in D_f$; **[C4]** Saltos implicam em limites laterais diferentes e, consequentemente, na não existência do limite; **[C9]** Teorema do confronto: L existe quando $x \to x_0$ se os limites laterais existem e estes são iguais;.

Evidenciamos, mediante tais compreensões, que as imagens conceituais dos sujeitos investigados foram constituídas, principalmente, por evocações relacionadas aos limites laterais. Reiteramos, nesse sentido que:

- Seja preciso avaliar a (não) existência do limite em diferentes situações e, a partir de múltiplas representações;
- O teorema do confronto, e sua relação com a existência do limite de uma função f, cujo domínio de interesse é limitado por duas funções que convergem para o mesmo limite, devem ser discutidos por meio de práticas que enfatizem essa relação;
- "O que os 'saltos' no gráfico da função representam?" – Esse questionamento deve ser levantado, pois, em geral, é vinculado a interpretações incoerentes sobre a relação entre domínio, limite e continuidade.

A compreensão evocada em [C3] tem constituído parte da imagem conceitual de muitos estudantes de Cálculo. Entendemos, nesse sentido, que:

- Mais uma vez, a prática excessiva do cálculo de limite de funções contínuas pode levar a esse tipo de compreensão;
- A interpretação da definição de limite sob o ponto de vista geométrico pode trazer esclarecimentos sobre a incoerência de tal compreensão;

(iii) Outras compreensões

Foram incluídas nesse grupo as compreensões **[C8]** Limites infinitos: à medida que tomamos valores próximos de x_0, a função cresce ou decresce e **[C10]** Para calcular o limite de uma função escrita em partes quando $x \to x_0$, basta fazer $x = x_0$ em todas as equações que compõem $f(x)$.

Em se tratando de [C8], consideramos importante que discussões que envolvam a concepção dos estudantes sobre infinito estejam vinculadas não somente às práticas operatórias, mas também, à interpretação geométrica tanto da definição formal quanto de outros objetos matemáticos, como por exemplo, da ideia de assíntotas.

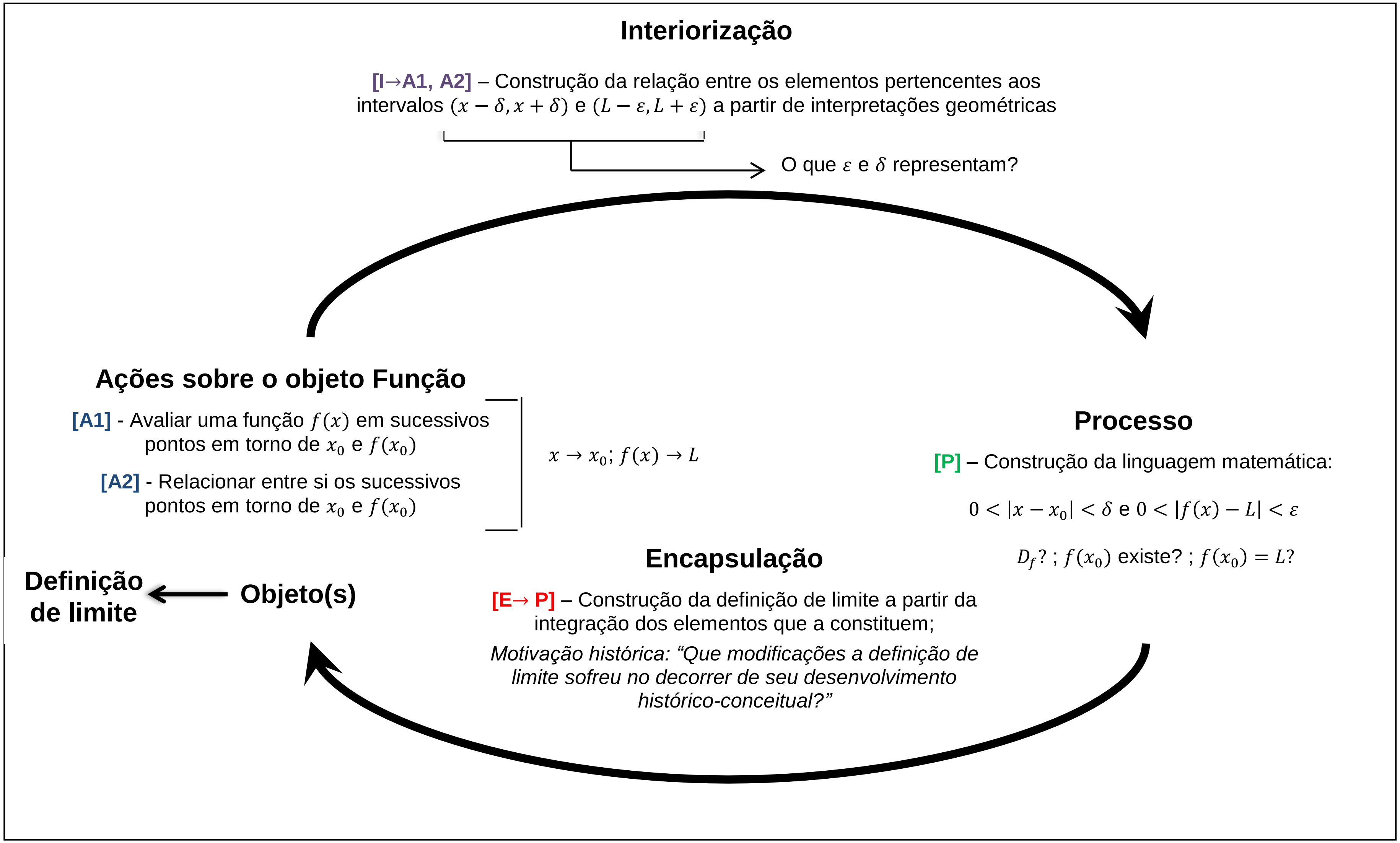
Tendo em vista a compreensão [C10], evidenciamos que o cálculo de limites de funções escritas em mais de uma sentença tem se configurado como um fator de conflito em potencial. Nesse sentido:

- Reflexões do tipo ‘existe diferença entre $x \to x_0$ e $x = x_0$?’ precisam ser levantadas no decorrer do processo de apreensão do conceito de limite;
- O cálculo de limite de uma função escrita em partes precisa contemplar reflexões relativas às suas formas algébrica e geométrica, domínio e imagem.

A partir de nossas considerações prévias acerca das compreensões sobre o conceito de limite, evocadas no primeiro estágio de nossa pesquisa, elaboramos um esboço da parte I da decomposição genética, a qual é constituída por múltiplas construções mentais.

Apresentamos nas figuras 56 a 61, distribuídas no decorrer desse capítulo, conjecturas acerca de construções mentais relativas ao conceito de limite de uma função (que julgamos ser) necessárias para compor a decomposição genética prevista em nossa pesquisa.

Figura 56 – Esquema 1: definição de limite de uma função



Fonte: Elaborado pela autora

O Esquema 1 é constituído de mecanismos e estruturas mentais que julgamos necessários para a construção do objeto definição de limite de uma função e de suas diferentes representações, conforme esclarecermos a seguir:

- No que concerne às Ações **[A1]** e **[A2]**, admitimos que um sujeito precise incialmente, avaliar diferentes funções em sucessivos pontos em torno de x_0 e $f(x_0)$ (**exceto talvez em $\boldsymbol{x_0}$ e $\boldsymbol{f(x_0)}$**), relacionando-os de maneira que seja possível alcançar a compreensão da linguagem matemática $x \to x_0$ e $f(x) \to L$. O termo 'Limite' também pode ser introduzido ao sujeito. Ressaltamos, nesse sentido, a importância de tais Ações serem realizadas mediante múltiplas representações de funções (forma algébrica, gráfico, tabela).

- A partir de **[I→A1, A2],** isto é, da Interiorização de **[A1]** e **[A2],** pretendemos a construção da relação entre os elementos pertencentes aos intervalos $(x - \delta, x + \delta)$ e $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$. Para tanto, consideramos coerente que o sujeito parta da representação gráfica de uma determinada função, de modo que ele seja levado a generalizá-la. É importante que o indivíduo consiga compreender o que ε e δ representam em seus respectivos intervalos.

- Em **[P]**, admitimos a importância de elaborar uma linguagem matemática mais próxima da definição formal. Desse modo, a partir das construções anteriores, acreditamos ser possível realizar a escrita de $0 < |x - x_0| < \delta$ e $0 < |f(x) - L| < \varepsilon$, bem como interpretações relativas aos elementos que compõem a definição de limite de uma função. Destacamos, nesse sentido, alguns questionamentos que podem ser levantados nesse momento: "x_0 deve pertencer ao domínio de f?"; "$f(x_0)$ precisa existir?"; "$f(x_0)$ é sempre igual a L?".

- Na encapsulação **[E→ P]**, prevemos a construção da definição de limite a partir da integração dos elementos que as constitui (o termo função, domínio, os intervalos, ε, δ, etc...). Discussões relativas às modificações que a definição de limite de uma função sofreu no decorrer de seu desenvolvimento histórico podem viabilizar a apreensão desse conceito, de modo a permitir que os estudantes amadureçam matematicamente e, principalmente, que a definição de limite de uma função se constitua como um Objeto.

Para complementar o Esquema 1 e, com o intuito de promover a formulação de compreensões coerentes sobre o conceito de limite, elaboramos outros quatro esquemas, a saber:

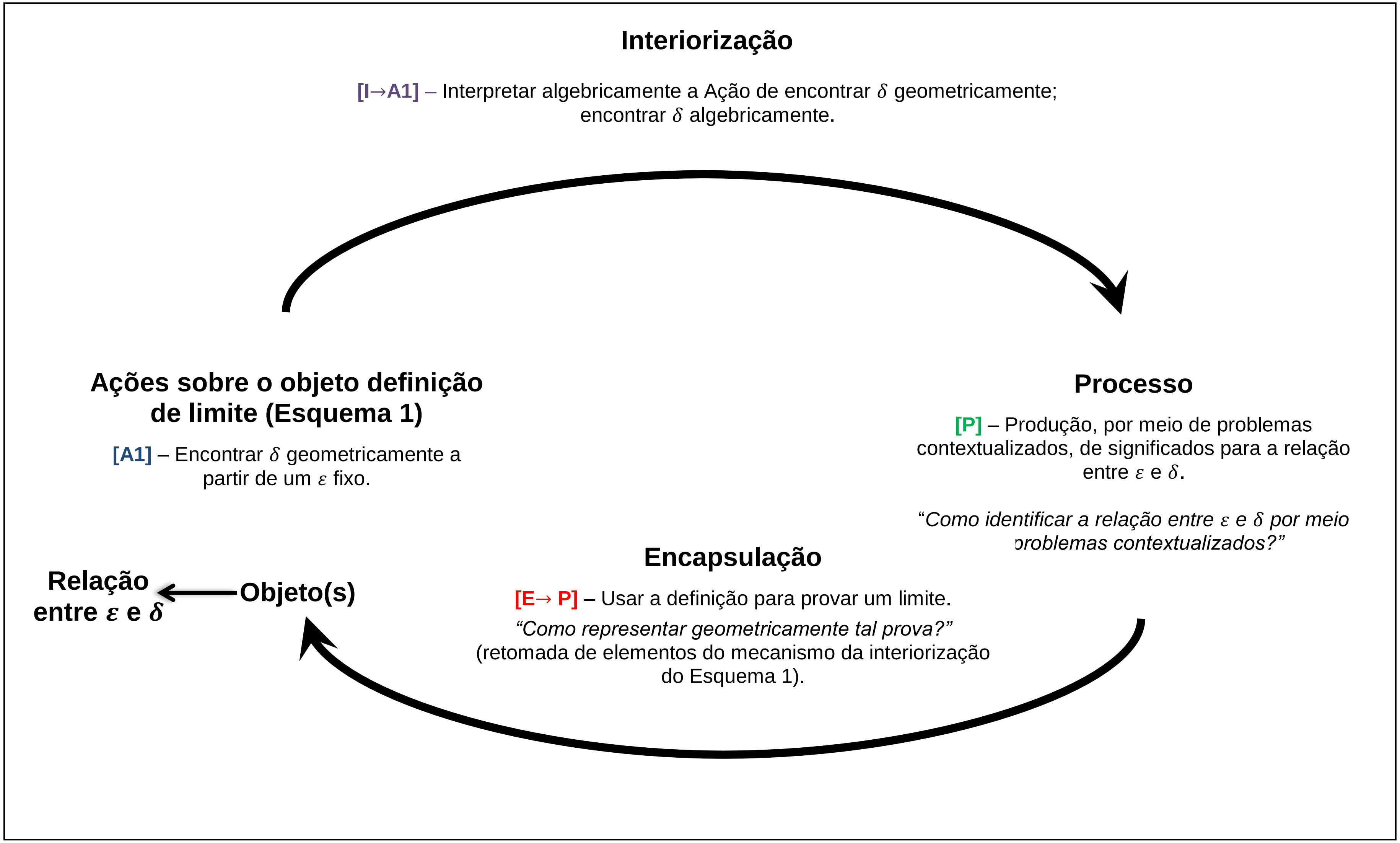
- A relação entre ε e δ (Esquema 2);
- Relação entre os limites laterais e bilateral (Esquema 3);
- Propriedades de limites (Esquema 4);
- Limites envolvendo infinito (Esquema 5);

A relação entre ε e δ, conforme identificamos por meio de nosso estudo preliminar e, também, em diferentes pesquisas[68], tem se configurado como um fator de conflito cognitivo para muitos estudantes de Cálculo. Por isso, admitimos a necessidade de tal relação (e o que ela representa) ser incluída na primeira parte da decomposição genética.

Conjecturamos, desse modo, sobre que construções mentais poderiam ser estabelecidas sobre o objeto definição de limite (previamente construída no Esquema 1), de maneira a possibilitar o amadurecimento do objeto relação entre ε e δ. Nesse sentido, entendemos que Ações como determinar Épsilons e Deltas, tanto algebricamente quanto geometricamente, deveriam ser contempladas no Esquema 2 (ver figura 57).

[68] Conforme destacamos no item 1.3 do primeiro capítulo.

Figura 57 – Esquema 2: relação entre ε e δ



Fonte: Elaborado pela autora

O Esquema 2 é constituído de construções mentais realizadas sobre um objeto pré-definido, nesse caso, a definição de limite, de modo que procuramos enfatizar a relação entre ε e δ tanto em termos algébricos quanto em termos geométricos. Vejamos, a seguir, nossas considerações quanto às estruturas e mecanismos envolvidos nesse Esquema.

- A partir da Ação **[A1],** pretendemos a construção inicial da ideia de que o objeto limite de uma função é norteado por uma relação, entre elementos pertencentes aos intervalos $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$ e $(x-\delta, x+\delta)$, que parte do eixo das ordenadas para o eixo das abscissas (e não o contrário), de modo a auxiliar o indivíduo a distinguir os conceitos de limite de função e função e, principalmente, estender a compreensão da ideia previamente estabelecida por meio do mecanismo da interiorização do Esquema I, isto é, a de que $\mathrm{f(x)}$ permanece em $(\mathrm{L}-\varepsilon, \mathrm{L}+\varepsilon)$, para todos $\mathrm{x} \neq \mathrm{x}_0$ pertencente a $(\mathrm{x}-\delta, \mathrm{x}+\delta)$.
- Em **[I→A1],** admitimos a importância de discutir uma mesma ideia matemática por meio de diferentes representações, de modo a ampliar a compreensão de um indivíduo. Por isso, consideramos coerente interpretar algebricamente **[A1],** bem como encontrar δ algebricamente (de forma independente de sua representação geométrica) para que, enfim, o indivíduo passe a ter controle sobre suas Ações sobre o objeto definição de limite, internalizando-as como um Processo que envolve, dentre outros aspectos, a relação entre ε e δ.
- As ações interiorizadas permitem que, a partir de **[P],** sejam associados significados para a relação entre ε e δ por meio de problemas contextualizados que enfatizem não somente tais elementos, mas principalmente, a forma como estes estão relacionados. Mais uma vez, é importante vincular essa discussão ao Esquema 1, isto é, ao Objeto definição de limite.
- Em **[E→ P],** previmos a utilização da definição para provar determinado limite, de maneira a destacar e relacionar entre si todos os elementos que a constituem. Admitimos, mais uma vez, a importância de entender o que tal prova representa geometricamente, por meio da retomada do mecanismo da interiorização do Esquema 1, fato que, a nosso ver, possibilitará uma construção efetiva do Objeto *relação entre* ε *e* δ.

Ressaltamos que os Esquemas 1 e 2 podem, também, constituir-se como um único Esquema. Para tanto, os elementos contemplados no Esquema 2 precisariam ser organizados de modo a serem construídos por meio dos mecanismos da *desencapsulação, reversão e coordenação* que, por sua vez, seriam incorporados ao Esquema 1. Nessa perspectiva, entendemos que seja possível incorporarmos ao Esquema 1 os elementos que constituíram **[A1]**, **[I→A1]** e **[P]** do Esquema 2, a partir da desencapsulação do Objeto definição de limite via reversão, isto é, **[D→ O via R]**.

Em **[D→ O via R]**, previmos que a compreensão do indivíduo sobre limite seja norteada por uma relação (que parte do eixo das ordenadas para o eixo das abscissas) entre os elementos pertencentes aos intervalos $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$ e $(x-\delta, x+\delta)$. Nesse sentido, admitimos a importância de discutir essa ideia nos termos geométrico e algébrico, tendo em vista os seguintes aspectos:

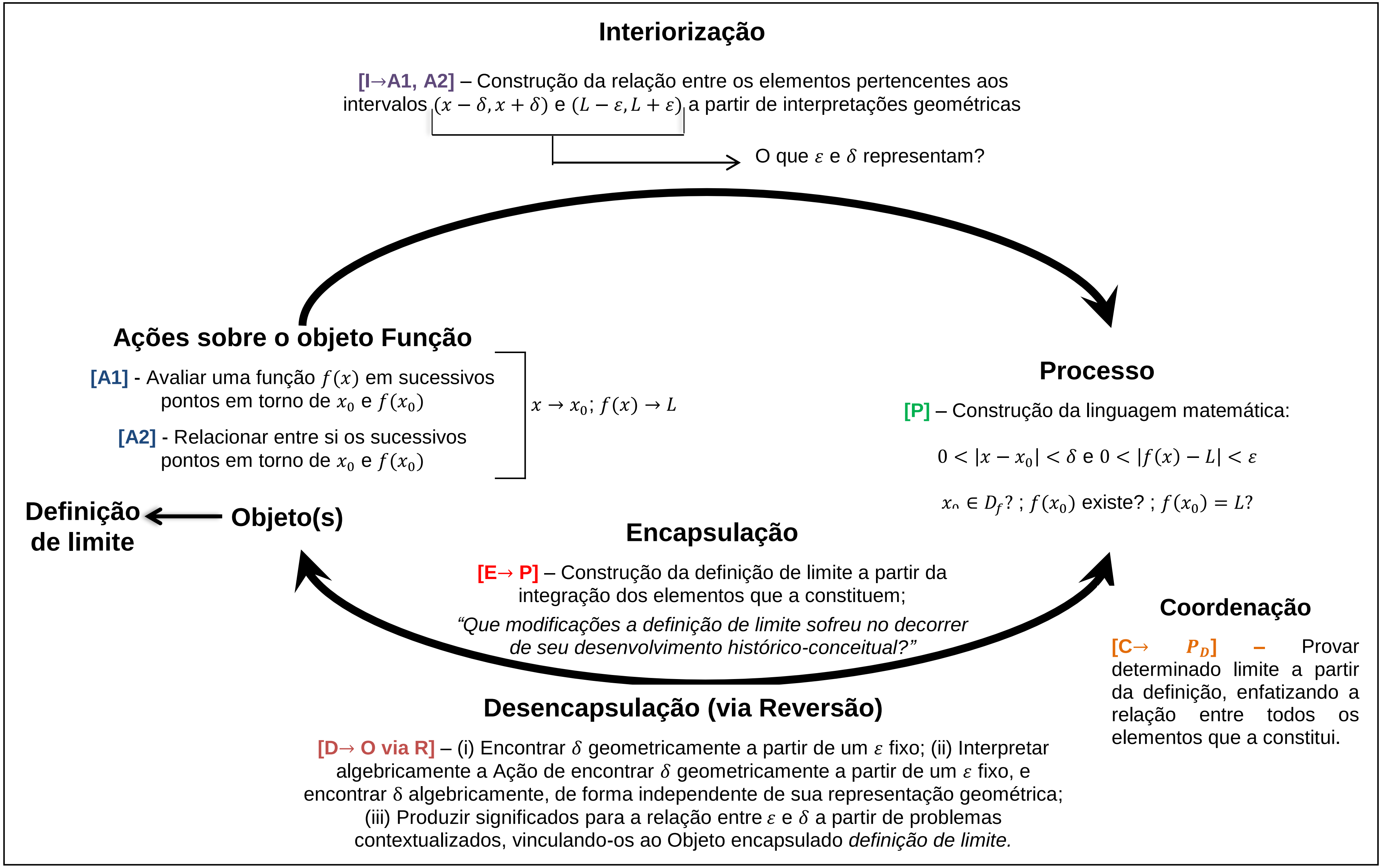
(i) Encontrar δ geometricamente a partir de um ε fixo (conforme a ação **[A1]** do Esquema 2);

(ii) Interpretar algebricamente a Ação de encontrar δ geometricamente a partir de um ε fixo, e encontrar δ algebricamente, de forma independente de sua representação geométrica (de modo semelhante a **[I→A1]** do Esquema 2);

(iii) Produzir significados para a relação entre ε e δ a partir de problemas contextualizados, vinculando-os ao Objeto encapsulado definição de limite (conforme **[P]** do Esquema 2).

Finalmente, é possível coordenar os Processos constituídos por meio da desencapsulação, isto é, efetivar **[C→ P_D],** de maneira a complementar o entendimento sobre o Objeto definição de limite. Nesse sentido, incluímos a utilização da definição para provar determinado limite, enfatizando a relação entre todos os elementos que a constituem. Destacamos, na figura 58, a integração entre os Esquemas 1 e 2, conforme os mecanismos de desencapsulação, reversão e coordenação descritos.

Figura 58 – Integração Esquemas 1 e 2



Fonte: Elaborado pela autora

Admitimos, que a parte constituinte da parte I de nossa decomposição genética precisava de um Esquema que estivesse voltado para a construção de estruturas e mecanismos mentais vinculados à questão da (não) existência do limite que, conforme destacamos nesse trabalho, tem se configurado como um fator de conflito cognitivo para muitos estudantes de Cálculo.

Conjecturamos, desse modo, sobre que construções mentais poderiam ser estabelecidas, de maneira a possibilitar a apreensão do Objeto relação entre limites laterais e bilateral. Para tanto, entendemos que Ações como avaliar uma função à direita e/ou à esquerda de determinado ponto (independente desse porto pertencer ao domínio de f) deveriam ser contempladas no Esquema 3. Reiteramos, nesse sentido, a importância de incorporarmos ao referido esquema diferentes contextos a serem avaliados, bem como múltiplas representações de uma função.

Esclarecemos, ainda, que o Esquema 3 (ver figura 59) será retomado, principalmente, na parte 2 de nossa decomposição genética, a qual foi dedicada à apreensão do conceito de continuidade de uma função.

Figura 59 – Esquema 3: Relação entre os limites laterais e bilateral

Interiorização

[I→A1] – A partir das Ações em **A1:**

(i) Discutir o comportamento de $f(x)$ quando esta fica arbitrariamente próxima de L_1 conforme x se aproxima de a, sabendo que $f(x)$ é definida em (a, b), em que $a < b$;

(ii) Discutir o comportamento de $f(x)$ quando esta fica arbitrariamente próxima de L_2 conforme x se aproxima de a, sabendo que $f(x)$ é definida em (c, a), em que $c < a$;

Ações sobre o objeto limite de uma função

[A1] – Avaliar, a partir de diferentes representações, o comportamento de várias funções à direita e à esquerda de um dado ponto (que não necessariamente pertença ao domínio dessas funções).

Processo

[P] – Construção/compreensão do conceito de *limites laterais*.

(i) Introdução dos termos *limites laterais* (à direita e à esquerda de um ponto);

(ii) Utilização da linguagem matemática: $\lim_{x\to a^+} f(x) = L_1$ e $\lim_{x\to a^-} f(x) = L_2$;

(iii) Comparação entre L_1 e L_2.

"Os limites laterais são sempre iguais?"; "Como interpretá-los graficamente?"

Encapsulação

[E→ P] – Construção da ideia prevista no teorema que trata sobre a relação entre os limites laterais e bilateral.

Obs: Construir a linguagem matemática para tal relação, isto é:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L \leftrightarrow \lim_{x\to x_0^+} f(x) = L \ e \ \lim_{x\to x_0^-} f(x) = L$$

Limites laterais x Limite bilateral ← **Objeto(s)**

Fonte: Elaborado pela autora

O Esquema 3 foi constituído por construções mentais realizadas sobre o Objeto limite de uma função. Enfatizamos, nesse sentido, a discussão acerca de sua (não) existência, tendo em vista a relação entre os limites laterais e o bilateral. A seguir, traçamos algumas considerações acerca das estruturas e mecanismos mentais contemplados nesse esquema.

- A Ação **[A1]** de avaliar o comportamento de diferentes funções (e suas múltiplas representações) à direita e à esquerda de determinado ponto (definido ou não no domínio) foi prevista com intuito de levar o indivíduo a retomar elementos vinculados ao objeto limite de uma função. Nesse caso específico, entendemos que seja importante visualizar que $x_0 \in (x-\delta, x+\delta)$, que $f(x)$ é definida em $(x-\delta, x+\delta)$, exceto talvez em x_0. A partir de uma pluralidade de Ações do tipo **[A1],** é possível generalizar a ideia de que $x-\delta=c$, $x_0=a$ e $x+\delta=b$ e, portanto, que $f(x)$ é definida nos intervalos (c,a) e (a,b), sendo $c<a<b$ e $a,b,c \in IR$.

- Em **[I→A1],** admitimos a importância de ampliar a compreensão do indivíduo no que tange ao comportamento de uma função quando esta fica arbitrariamente próxima de: (i) um limite L_1 à medida que x se aproxima de a, sendo $f(x)$ é definida em (a,b) e $a<b$ e de (ii) um limite L_2 à medida que x se aproxima de a, sendo $f(x)$ é definida em (c,a) e $c<a$. É possível que, nesse momento, o sujeito perceba que, não necessariamente, $L_1=L_2$, sendo importante que **[I→A1]** contemple tanto interpretações analíticas quanto geométricas de limites.

- Entendemos que a interiorização de **[A1]** possa levar um indivíduo à construção de **[P]** e**,** a partir dele, da compreensão do conceito de limites laterais, de sua notação matemática, ou seja, $\lim_{x\to x_0^+} f(x)=L_1$ e $\lim_{x\to x_0^-} f(x)=L_2$ e, especialmente, do fato de que não necessariamente $L_1=L_2$. A interpretação geométrica da relação entre os limites laterais também pode ser incorporada ao esquema a partir de **[P].** Nesse momento, é provável que algumas propriedades de limites sejam, mesmo que inconscientemente, incorporadas à imagem conceitual do sujeito[69].

- Na encapsulação, ou seja, em **[E→ P]**, previmos a construção do teorema que trata da relação entre os limites laterais e a existência do limite bilateral, enfatizando sua unicidade em meio a diferentes representações e sua notação matemática para que, enfim, tal relação alcance o status de Objeto na mente de um indivíduo.

Tendo a definição de limite, a relação entre ε e δ e entre os limites laterais e o bilateral como objetos pré-definidos, é possível avançar para a construção de um esquema que contemple as propriedades inerentes a esse conceito, tais como os teoremas que tratam das regras operatórias do limite, do cálculo de limite de funções polinomiais e de funções racionais (com denominadores não nulos), o teorema do confronto (e suas aplicações), limites envolvendo funções trigonométricas, dentre outras situações, as quais apresentamos no esquema 4 (ver Figura 60).

[69] Dedicamos o esquema 4 à construção de mecanismos e processos mentais vinculados a tais propriedades. Nesse sentido, evitaríamos que a generalização equivocada de práticas operatórias fosse atrelada a interpretações sobre a natureza do conceito de limite.

Figura 60 – Esquema 4: propriedades de limite

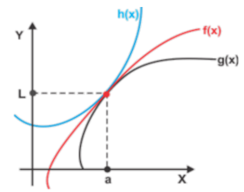
Interiorização

[I→A1, A2, A3] – Encontrar limites a partir das propriedades operatórias estabelecidas e interpretá-los geometricamente (*Que generalizações podem ser feitas quanto ao cálculo de limites de funções polinomiais ou racionais de denominadores não nulos? E no caso das funções trigonométricas?)*

Processo

[P] – Obtenção do limite de funções racionais *(quando, por substituição, obtém-se um denominador nulo?)*.

E quando os valores de uma função f estiverem limitados por outras duas funções, digamos, g e h?



Motivação: Qual a relação do teorema do confronto com os limites laterais?

Encapsulação

[E→ P] – Retomar as compreensões sobre o conceito de limite relacionando-as com suas propriedades.

Quando o limite existe? Como representá-lo? Quais as relações entre sua definição formal e propriedades? O que denominadores nulos representam? Etc...

Ações sobre o objeto limite de uma função

[A1] – Interpretar a regra da soma a partir da definição formal de limite (*Que relações podem ser estabelecidas com o limite da diferença?)*

[A2] – Interpretar a regra do produto a partir da definição formal de limite (*Que relações podem ser estabelecidas com a regra da multiplicação pela constante? E se a função for constante?)*

[A3] – Interpretar a regra do quociente a partir da definição formal de limite.

Motivação histórica: Identificar a influência da notação de Leibniz nas provas relativas a essas Ações.

Propriedades de limite ← **Objeto(s)**

Fonte: Elaborado pela autora

No Esquema 4 foram contempladas construções mentais relacionadas ao Objeto propriedades de limite. Enfatizamos, nesse sentido, a discussão acerca de regras operatórias a partir de conhecimentos previamente estabelecidos. A seguir, traçamos algumas considerações acerca dos elementos incorporados a esse esquema.

- As Ações **[A1], [A2] e [A3]** foram relacionadas às regras operatórias de limite. Nesse sentido, previmos relacioná-las com a definição de limite (previamente construída em esquemas anteriores). Entendemos que o indivíduo precisa compreender, por exemplo, o porquê de $\lim_{x \to x_0} f(x) + g(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x) = L + M$, sendo $L, M \in IR$, e não simplesmente memorizá-la de forma desconectada dos elementos matemáticos vinculados a esse conceito (fato que contribui para a lacuna entre teoria formal e práticas operatórias envolvendo cálculo de limites). Como motivação, pensamos em relacionar as referidas Ações ao Cálculo de Leibniz, especialmente no que tange a notação matemática utilizada.

- Consideramos importante que a interiorização das Ações, isto é, **[I→A1, A2, A3],** leve o sujeito a encontrar limites (inclusive de funções trigonométricas e de funções definidas em mais de uma sentença) a partir das propriedades operatórias estabelecidas, interpretando-os geometricamente. A partir dessas práticas, é possível buscar a generalização no que se refere ao cálculo de limite de funções polinomiais e racionais (que não resultem em denominadores nulos), uma vez que ambos podem ser calculados por substituição. Nesse sentido, é importante reiterar (por meio das atividades propostas) que nem sempre $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ e, portanto, é preciso entender que limite e função não são um mesmo objeto matemático.

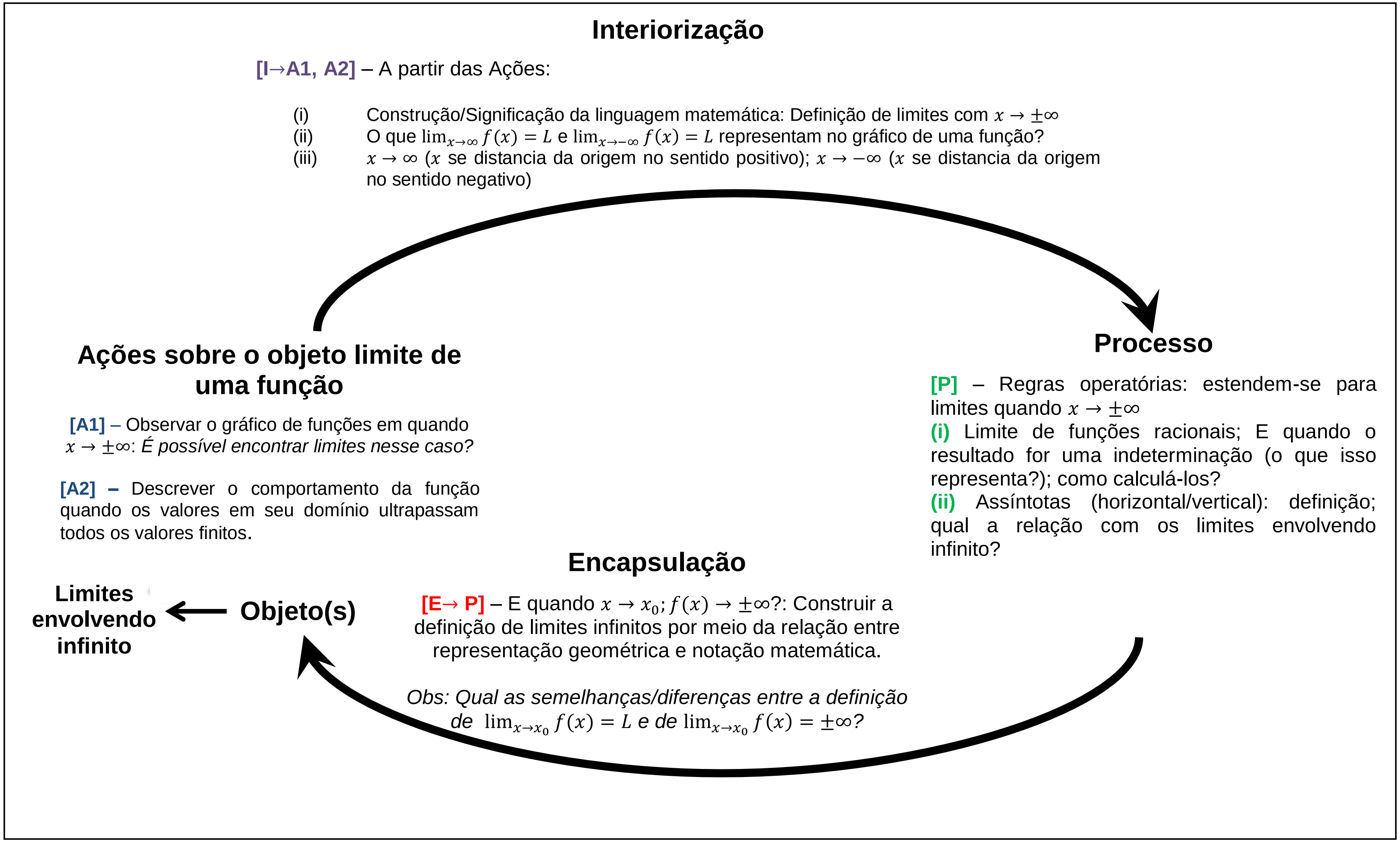
- **[P]** traz consigo a ênfase em duas situações que podem ser associadas às ações interiorizadas: o cálculo de limite de funções racionais (que implique na emergência de denominador nulo) e a interpretação do teorema do confronto, enquanto alternativa para encontrar o limite de uma função $f(x)$ que seja limitada por outras duas funções, digamos, $g(x)$ e $h(x)$. Nosso intuito é o de ampliar a compreensão sobre limite e não somente condicioná-lo à mera substituição de valores de x, ou à prática de eliminação de denominadores nulos. Admitimos, nesse sentido, a importância de levar um indivíduo a entender o que uma indeterminação pode representar nesse contexto[70]. Entendemos que traçar conexões entre tais situações e a representação algébrica e geométrica de limites laterais seja uma boa estratégia para expandir as situações matemáticas que podem ser vinculadas a esse conceito.

- Na encapsulação, ou seja, em **[E→ P],** propusemos a retomada de elementos previstos nos esquemas anteriores, por meio de reflexões acerca da existência do limite, de sua relação com limites laterais, com práticas operatórias utilizadas para calcular limites de diferentes funções, dentre outros. Conjecturamos que, dessa maneira, seja possível promover a construção do Objeto propriedades de limite, bem como de expandir os domínios de validade desse conceito por meio da generalização e abstração dos elementos que o constituem, tendo em vista uma pluralidade de contextos e múltiplas representações.

Finalmente, a fim de complementar a parte I de nossa decomposição genética, elaboramos o esquema 5 que, por sua vez, foi constituído de elementos vinculados à construção do objeto limites envolvendo infinito, conforme destacamos na figura 61.

[70] Esclarecemos que as associações a serem vinculadas a [P] estão fortemente relacionadas a ideias atreladas ao conceito de limite, como é o caso da indeterminação (e o que ela representa) que pode se configurar como um fator em conflito cognitivo, como foi o caso de nosso estudo preliminar, em que alguns estudantes evocaram as compreensões **[C25]** Uma indeterminação implica em um ‘buraco’ no gráfico da função que, por sua vez, representa a emergência de um denominador nulo, **[C26]** Uma indeterminação implica na obtenção do limite por meio dos limites laterais e **[C27]** Uma indeterminação implica na emergência de limites tendendo para o infinito.

Figura 61 – Esquema 5: limites envolvendo infinito



Fonte: Elaborado pela autora

Conjecturamos, no Esquema 5, sobre construções mentais que pudessem viabilizar a apreensão do Objeto limites envolvendo infinito. Enfatizamos, nesse sentido, discussões sobre o que $\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$ e $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = L$ significam, sua relação com outros conceitos, como o de assíntotas vertical e horizontal, sua representação geométrica, dentre outros aspectos. Vejamos, a seguir, algumas considerações relativas aos elementos incorporados a esse esquema.

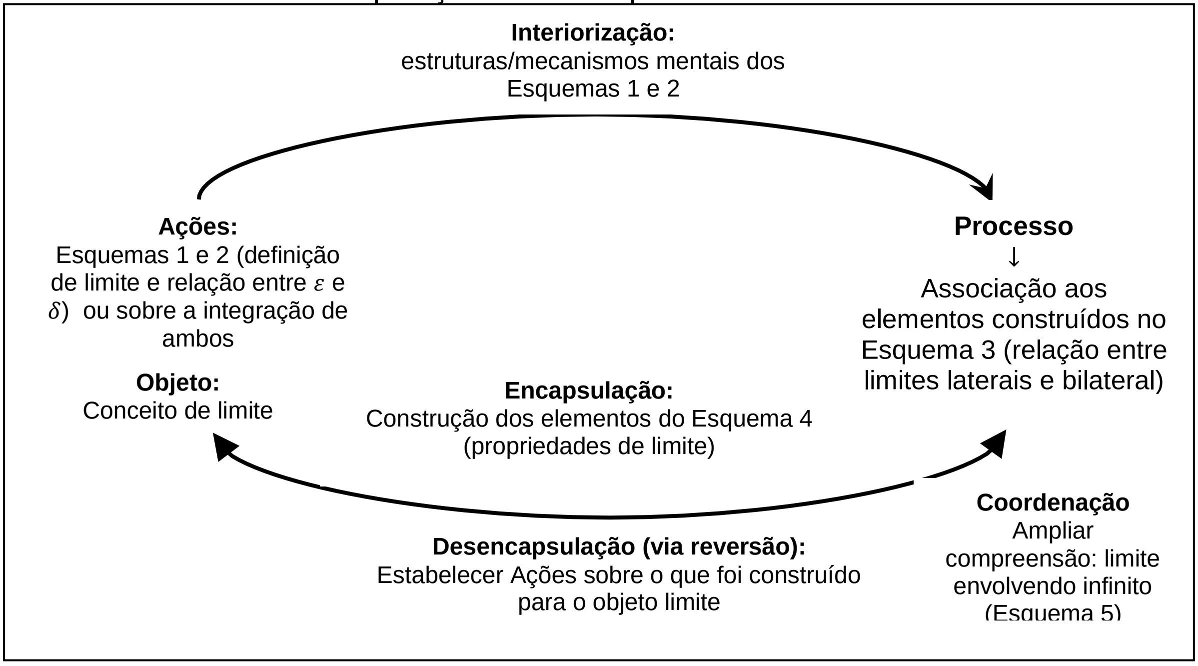
- As Ações **[A1]** e **[A2]** foram relacionadas à observação do comportamento de funções quando $x \to \pm\infty$, de modo a avaliar o que acontece quando **os valores do domínio ultrapassam todos os valores finitos**. Nossa expectativa é a de que, por meio dessas ações, o indivíduo possa construir certa compreensão acerca da ideia de $x \to \pm\infty$ e, especialmente, de como tal comportamento pode ser visualizado, tendo em vista a representação gráfica de diferentes funções.
- Consideramos fundamental que o mecanismo de interiorização das Ações, ou seja, **[I→A1, A2]** leve o indivíduo a construir a definição de limites quando $x \to \pm\infty$, de maneira a compreender a ideia de $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = L$, tanto em termos algébricos quanto geométricos. Nesse sentido, admitimos a importância de vincular a tais situações a ideia de x se distanciar da origem (no sentido positivo ou negativo) à medida que $f(x) \to L$.
- Nossa expectativa para **[P]** é a de que o indivíduo consiga estender, a partir do que fora construído por meio do mecanismo da interiorização, as regras operatórias (estabelecidas previamente no Esquema 4) para o cálculo de limites envolvendo o infinito, bem como o cálculo e interpretação de limites de funções racionais quando $x \to \pm\infty$ (inclusive no caso de emergência de indeterminações). Previmos, também, a construção da definição e representação de assíntotas (horizontais e verticais)[71], de maneira a estabelecer a relação com os limites quando $x \to \pm\infty$ e com a ideia de limites infinitos, cuja definição foi incluída como um elemento constituinte do mecanismo da encapsulação.

[71] As compreensões **[C28]** a **[C34]** (ver páginas 141 e 142), evocadas em nosso estudo preliminar, trouxeram consigo elementos incoerentes sobre o conceito de assíntotas. Por isso, admitimos a importância de enfatizar a produção de significados para esse objeto matemático.

- Na encapsulação, isto é, **[E→ P],** propusemos a construção da definição de limites infinitos a partir da relação entre sua representação geométrica e notação matemática, de maneira semelhante à forma como a definição de limite foi construída no Esquema 1. Admitimos, ainda, a importância de comparar as definições de $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ e de $\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$, tendo em vista que muitos estudantes não costumam fazer distinção entre ambas, conforme evidenciamos, inclusive, em nosso estudo preliminar. Conjecturamos que, dessa maneira, seja possível apreender o objeto limites envolvendo infinito em meio a múltiplos contextos e representações.

A parte I de nossa decomposição genética foi composta de cinco esquemas, por meio dos quais previmos a construção dos objetos (definição de limite, relação entre ε e δ, entre limites laterais e bilateral, propriedades de limite e limites envolvendo infinito) que podem levar a apreensão do conceito de limite por meio da formação de imagens conceituais coerentes sobre múltiplos elementos e representações que constituem esse objeto matemático. Destacamos, finalmente, a ilustração da parte I da DG:

Figura 62 – Formação de um Esquema a partir dos elementos da Decomposição Genética para o conceito de limite



Fonte: Elaborado pela autora

A segunda parte de nossa decomposição genética foi dedicada à construção do conceito de continuidade de uma função. Novamente, tomamos as compreensões evocadas pelos sujeitos investigados no primeiro estágio de nossa pesquisa como motivação para a elaboração da DG, conforme esclarecemos no subtópico a seguir.

5.3. Parte II – Conceito de continuidade de uma função

Para a elaboração da parte II da decomposição genética, tomamos, inicialmente, as compreensões de [C15] a [C25], evocadas pelos sujeitos investigados no primeiro estágio de nossa pesquisa. A seguir, traçamos algumas considerações prévias sobre os elementos que compuseram tais compreensões:

As evocações sobre continuidade estiveram, de algum modo, relacionadas à **[C21]**, em que continuidade = conectividade. Ou seja, os sujeitos investigados atrelaram esse conceito à ausência de 'interrupções', tais como 'saltos', 'buracos' ou 'quebras' na representação gráfica da função, conforme elucidamos nas compreensões **[C15]** f é contínua em x_0 se $x_0 \in D_f$; **[C17]** A descontinuidade em um ponto representa um 'buraco' em x_0; **[C18]** A descontinuidade implica em 'salto' no gráfico da função; **[C19]** f é contínua se todo valor de x apresentar um correspondente em y; **[C20]** f é contínua se não apresentar 'saltos ou buracos' em sua representação gráfica.

Ressaltamos, também, que a relação entre limite e continuidade também se fez presente dentre as compreensões evocadas pelos sujeitos investigados em nosso estudo preliminar. Esse foi o caso de **[C16]** A continuidade de uma função em um ponto depende da existência do limite nesse ponto; **[C23]** Se o limite existe em qualquer ponto do domínio então a função é contínua; **[C24]** 'Buraco' ou 'quebra' na representação gráfica de uma função implica em descontinuidade; descontinuidade implica na não existência do limite; **[C25]** A existência do limite independe da continuidade da função no ponto.

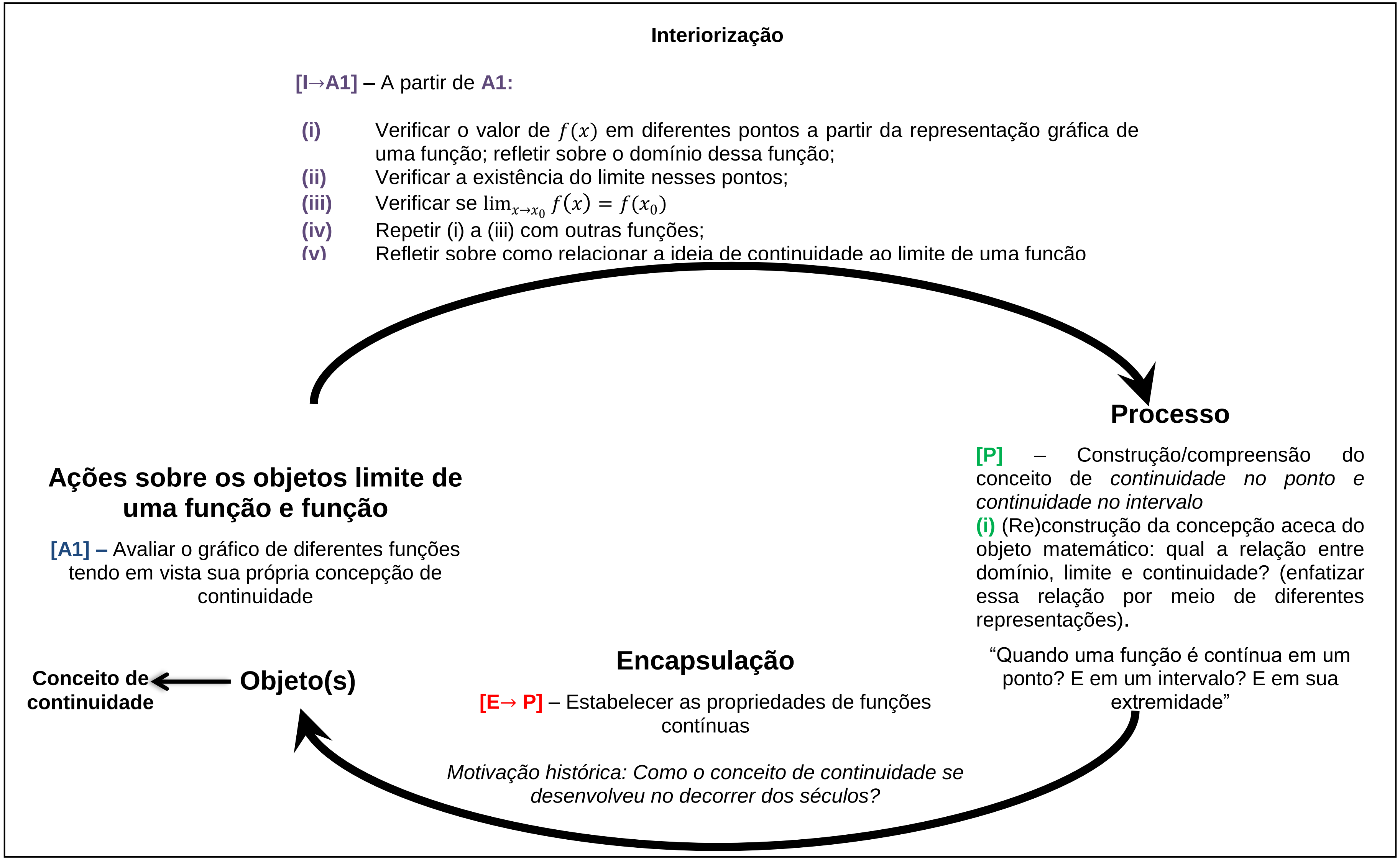
Tendo em vista as compreensões mencionadas acima, avaliamos algumas possibilidades no que tange ao processo de apreensão do conceito de continuidade, a saber:

- Desvincular esse conceito de uma concepção natural, na qual identificamos a ideia de 'inteireza', 'fluidez'; 'conectividade';

- Promover reflexões acerca do domínio da função: É possível avaliar a continuidade em um ponto se este não estiver definido no domínio da função?
- Avaliar a continuidade de diferentes funções a partir de sua representação gráfica e forma algébrica: Saltos e buracos implicam, de fato, em descontinuidade no ponto?
- Continuidade no ponto e continuidade no intervalo: identificá-las por meio da representação gráfica e analítica das funções;
- Discutir, em diferentes contextos (inclusive por meio da definição formal), a relação entre limite e continuidade?

Tendo em vista tais compreensões sobre continuidade, elaboramos a parte II da decomposição genética, a qual é constituída por múltiplas construções mentais (que julgamos ser) necessárias para a apreensão desse conceito, conforme destacamos na figura 63.

Figura 63 – Esquema : conceito de continuidade



Fonte: Elaborado pela autora

Conjecturamos, no Esquema da figura 63, sobre construções que pudessem viabilizar a apreensão do Objeto continuidade de uma função. Partimos, para tanto, da relação desse conceito com os de função e limite que, nesse caso, foram considerados objetos pré-definidos, ou seja, conhecimentos prévios necessários para a apreensão da ideia de continuidade. Vejamos, a seguir, como se deu a organização das estruturas e mecanismos mentais previstos para esse esquema:

- A Ação **[A1]** parte da compreensão geométrica de diferentes funções tendo em vista a concepção prévia (intuitiva e, provavelmente, natural) do sujeito sobre continuidade. É possível que imagens conceituais incoerentes sejam evocadas, fato que pode permitir que o professor esteja ciente dos elementos que, provavelmente, norteará o entendimento do indivíduo acerca desse conceito. Optamos, nesse momento, por incorporar somente a perspectiva geométrica, uma vez que o foco de **[A1]** esteve fortemente ligado ao modo como uma função pode ser 'visualizada' no que tange à sua continuidade.

- Uma vez levantados diferentes elementos constituintes da concepção prévia (intuitiva e, provavelmente, natural) de um sujeito sobre continuidade, julgamos necessário confrontá-los com conhecimentos da teoria formal que estejam vinculados a esse conceito. Consideramos fundamental, nesse sentido, que o mecanismo de interiorização de **[A1]**, isto é **[I→A1],** seja estruturado de modo a levar o indivíduo a refletir acerca de aspectos como domínio, valor da função no ponto, existência do limite, $lim_{x \to x_0} f(x)$, assíntotas verticais e horizontais*,* de modo que a refletir se a ideia de continuidade está (ou não) relacionada a tais objetos. É possível, a partir de **[I→A1]**, que uma concepção previamente evocada sobre esse conceito seja 'descartada' ou 'reconstruída', tendo em vista quaisquer reflexões que sejam efetivadas.

- Nossa expectativa para **[P]** é a de que o indivíduo, tendo em vista as ações internalizadas, consiga realizar uma (re) construção sobre a ideia de continuidade, de maneira a produzir significados para esse conceito, tanto no que se refere a um determinado ponto do domínio da função quanto ao longo de um intervalo e, principalmente, relacioná-la (de forma clara e consciente) com o objeto limite de uma função. Entendemos que, nesse momento, é preciso que múltiplas representações sejam incorporadas a essa (re) construção, fato que pode possibilitar que o sujeito adquira não somente uma compreensão puramente geométrica do conceito, mas também que ele escreva uma definição mais precisa para continuidade no ponto ou em um intervalo.

- Na encapsulação, isto é, **[E→ P],** propusemos levantar a discussão acerca de propriedades de funções contínuas, bem como sobre o desenvolvimento histórico da ideia de continuidade, relacionando-o com o que é, atualmente, estabelecido pela comunidade científica[72]. Conjecturamos que, dessa maneira, seja possível ampliar a compreensão do indivíduo sobre esse conceito em meio a diferentes contextos, representações e, inclusive, concepções inerentes à sua construção histórica.

A parte II da decomposição genética foi composta pelo esquema ilustrado na figura 63, por meio do qual previmos a construção do Objeto conceito de continuidade a partir de estruturas e mecanismos mentais que julgamos necessários para promover a formação de imagens conceituais coerentes sobre esse conhecimento matemático, relacionando-o a múltiplos elementos e representações.

Ressaltamos que as estruturas e mecanismos mentais que compuseram as partes I e II foram incorporados a um esquema único, de modo a enfatizar a forma como os elementos constituintes do processo de construção dos conceitos de limite e continuidade (os quais conjecturamos por meio dos esquemas ilustrados nas figuras 56 a 63) podem ser relacionados, conforme esclarecemos no tópico seguinte.

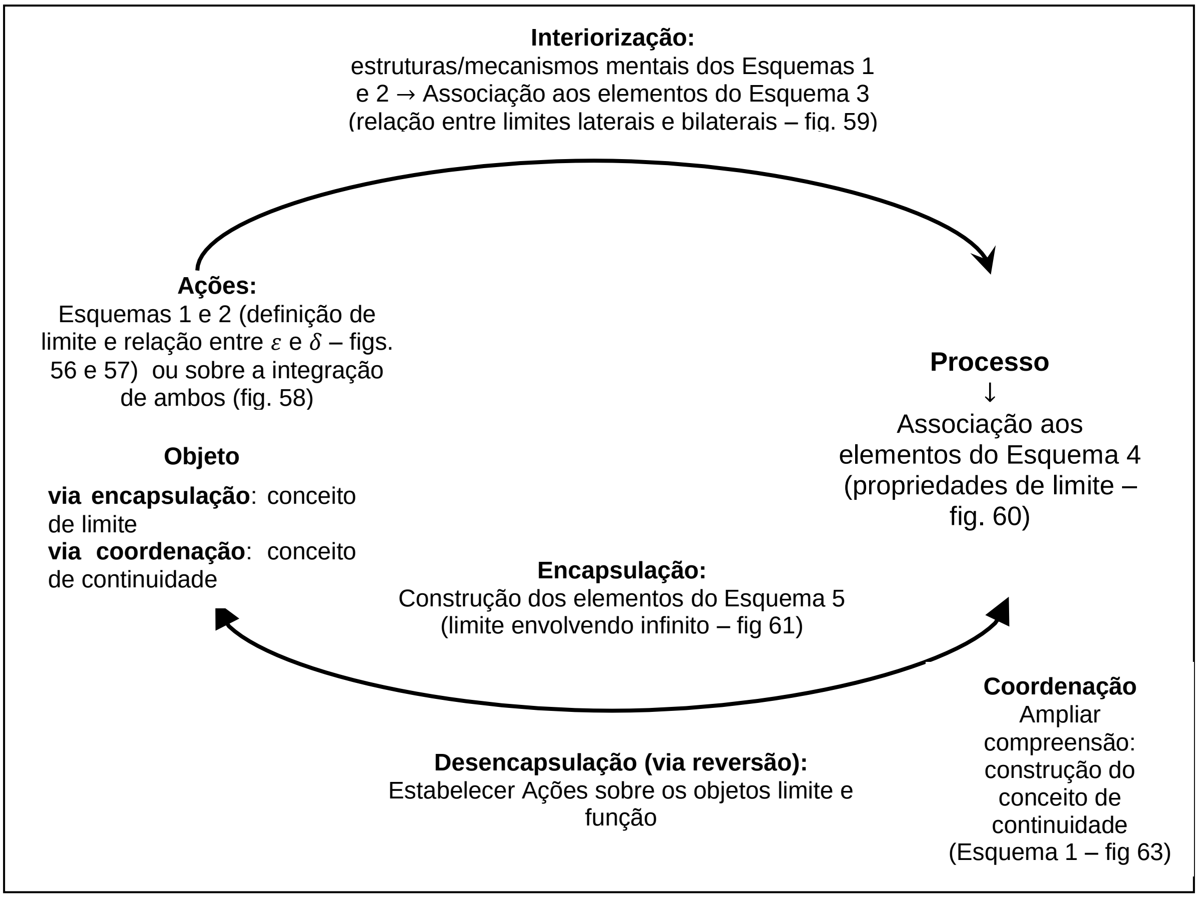
5.4. Considerações sobre o capítulo

A conexão dos elementos constituintes das partes I e II nos permitiu a formulação de um único esquema por meio do qual integramos as estruturas e mecanismos mentais explicitados no decorrer desse capítulo e que, por sua vez, foram ilustrados nas figuras 56 a 63. Nossa expectativa é de que seja possível viabilizar uma compreensão efetiva dos conceitos de limite e continuidade de uma

[72] Como exemplo, é possível solicitar a um indivíduo que avalie se a concepção de Euller sobre continuidade está em acordo com o que é definido na teoria formal. E, a partir de suas considerações, (re) construir esse conceito, ampliando sua compreensão, de modo a alcançar o máximo de abstração possível acerca desse objeto matemático.

função a partir dessas construções. Em outras palavras, o referido esquema representou a decomposição genética, cuja formulação **foi prevista em nosso segundo objetivo específico[73].**

Figura 64 – Decomposição Genética para limite e continuidade



Fonte: Elaborado pela autora

Ressaltamos que essa decomposição genética, enquanto modelo de epistemologia e cognição matemática, foi elaborada tendo em vista nossas experiências docentes, os apontamentos da literatura sobre a compreensão de estudantes acerca de tais objetos matemáticos, o aprofundamento teórico relativo à teoria APOS e, também, as observações que realizamos quanto aos elementos que compuseram as imagens conceituais evocadas pelos sujeitos investigados no estudo preliminar. Incluímos, ainda, alguns aspectos concernentes ao desenvolvimento histórico dos referidos conceitos.

[73] O segundo objetivo específico de nossa pesquisa consistiu em estabelecer uma decomposição genética que contemple mecanismos e estruturas mentais que possam viabilizar a compreensão de estudantes sobre limite e continuidade.

Reiteramos, finalmente, a relevância desse capítulo, por meio do qual foi possível traçarmos reflexões e conjecturas sobre os elementos que, a nosso ver, precisam ser vinculados ao processo de apreensão dos conceitos de limite e continuidade, de modo a possibilitar uma aprendizagem efetiva desses conhecimentos em uma pluralidade de contextos matemáticos.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Contemplamos, nesse trabalho, nossas considerações relativas a uma pesquisa de doutorado desenvolvida no âmbito do Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas (PPGECM) da Universidade Federal do Pará (UFPA). Norteamo-nos, nesse sentido, na seguinte pergunta: **Que estruturas e mecanismos mentais precisam ser construídos de modo a permitir que estudantes alcancem um real entendimento sobre limite e continuidade de uma função?**

Conforme apresentamos na parte I desse trabalho, a referida questão norteadora foi delimitada a partir da relação entre nosso objeto de pesquisa – a compreensão de estudantes sobre limite e continuidade de uma função – e nosso quadro teórico, constituído pela teoria sobre imagem e definição conceitual (VINNER, 1991) e teoria APOS (DUBINSKY et al., 1984; ARNOON et al., 2014). Para respondê-la, realizamos um estudo, cujo objetivo foi **conjecturar sobre que estruturas e mecanismos mentais precisam ser construídos por um indivíduo de modo a possibilitá-lo compreender efetivamente os conceitos de limite e continuidade.** Para tanto, organizamos a pesquisa em dois estágios:

- No primeiro, efetivamos um estudo preliminar por meio do qual foi possível conjecturamos sobre os elementos constituintes da imagem conceitual de estudantes do curso de licenciatura em matemática no que tange aos conceitos de limite e continuidade de uma função. Nessa perspectiva, apoiamo-nos na teoria sobre Imagem e Definição Conceitual de Vinner (1991) para sistematizar e analisar os resultados obtidos.
- No segundo, elaboramos uma decomposição genética para os conceitos de limite e continuidade de uma função. Por meio desse modelo, traçamos reflexões acerca de possíveis estruturas e mecanismos mentais os quais admitimos ser necessários para a aprendizagem desses conceitos. Baseamo-nos, para tanto, nos apontamentos de Dubinsky et al. (1984) e Arnoon et al. (2014) sobre a teoria APOS.

No que concerne ao primeiro estágio, evidenciamos, a partir das respostas dos sujeitos investigados, que suas imagens conceituais evocadas sobre limite foram pautadas, sobretudo, em interpretações dinâmicas desse conceito. Além disso, a existência do limite esteve vinculada, em algumas das evocações, à continuidade da função, às condições de domínio, ou ainda, à ausência de 'saltos' e/ou 'buracos' na representação gráfica da função, configurando-se, portanto, como um fator de conflito cognitivo para esses sujeitos.

Ainda no que tange ao estudo preliminar, verificamos que a compreensão dos estudantes sobre continuidade esteve vinculada, principalmente, à ideia de conectividade. Nesse sentido, uma concepção de inteireza atrelada à imagem 'sem saltos ou buracos' fez parte de suas imagens conceituais. Observamos, também, que as condições que implicam na (des) continuidade em um ponto ou ao longo de um intervalo foram equivocadamente apontadas por alguns dos sujeitos investigados.

Reiteramos que os resultados obtidos no primeiro estágio foram de grande relevância no sentido de nos permitirem verificar possíveis conflitos intrínsecos às imagens conceituais de estudantes de Cálculo sobre limite e continuidade de uma função. A multiplicidade de elementos evocados no que se refere a esses conceitos (e outros a eles adjacentes) pôde ser evidenciada por meio das 34 compreensões que identificamos a partir da análise das respostas dos sujeitos investigados nessa investigação[74], fato que nos levou à confirmação de nossa hipótese [H1], ou seja, de que **o entendimento de um indivíduo sobre um conceito depende de sua habilidade em estabelecer conexões coerentes entre os elementos que compõem sua imagem conceitual.**

No segundo estágio, elaboramos uma decomposição genética para os conceitos de limite e continuidade de uma função. Por meio desse modelo, traçamos reflexões sobre uma pluralidade de construções mentais as quais assumimos ser de grande importância para que um indivíduo compreenda efetivamente tais objetos. Baseamo-nos, para tanto, nos apontamentos da teoria APOS, bem como nas 34 compreensões elencadas no estágio anterior.

A decomposição genética foi organizada em duas partes. Na primeira, elaboramos cinco esquemas, por meio dos quais previmos a construção dos Objetos

[74] Conforme destacamos no item 4.4 desse trabalho.

definição de limite, relação entre ε e δ, relação entre limites laterais e bilateral, propriedades de limite e limites envolvendo infinito, incorporando-os, em seguida, a uma única estrutura mental que, por sua vez, admitimos poder levar um indivíduo à apreensão do objeto conceito de limite.

Na segunda parte, previmos um esquema para continuidade, o qual foi elaborado a partir de Ações sobre os Objetos limite e função. Em seguida, integramos os elementos que constituíram as partes I e II, relacionando-os por meio de estruturas e mecanismos mentais vinculados a tais conceitos.

A partir do que foi efetivado no segundo estágio de nossa pesquisa, confirmamos a hipótese [H2] e, nesse sentido, reiteramos que a decomposição genética seja um modelo de epistemologia e cognição matemática que nos permite **conjecturar sobre as estruturas e mecanismos mentais (que julgamos ser) necessários para a compreensão de determinado conhecimento matemático**.

Alcançamos, portanto, a validação da tese que orientou essa pesquisa. Desse modo, admitimos que **um esquema que contemple estruturas e mecanismos mentais (que julgamos ser) necessários para a apreensão de um conceito por parte de um indivíduo precisa estar vinculado à evocação de múltiplas imagens conceituais coerentes sobre esse conceito nos diferentes contextos matemáticos**. Por isso, refletimos sobre que evocações precisariam ser aliadas às Ações, Processos, Objetos e, inclusive, Esquemas que, por sua vez, se configuraram como parte constituinte da Decomposição Genética elaborada.

Embora esse estudo tenha nos permitido alcançar importantes resultados para o contexto das pesquisas em Educação em Ciências e Matemáticas e Educação Matemática no Brasil, admitimos suas limitações, no sentido de que não realizamos uma experimentação da decomposição genética (a fim de refiná-la e/ou de ampliar seus elementos) ou executamos, efetivamente, uma instrução para o ensino de limite e continuidade de uma função norteada pela decomposição genética elaborada. Entendemos, no entanto, que esse seja um próximo passo a ser desempenhado em nossas pesquisas futuras que tenham como objeto de investigação a compreensão desses conceitos.

Reiteramos, portanto, que esse trabalho contém importantes contribuições para futuros estudos sobre o tema abordado, bem como para a elaboração de instrumentos avaliativos e materiais instrucionais sobre a aprendizagem dos conceitos de limite e continuidade nos cursos de licenciatura e bacharelado em matemática.

Ressaltamos, ainda, a importância de ter trazido para discussão elementos concernentes à teoria sobre imagem e definição conceitual e teoria APOS, fato que pode contribuir para a expansão de pesquisas que contemplem tais perspectivas teóricas e articulem-nas à aprendizagem de diferentes conceitos matemáticos.

Salientamos, por fim, a relevância desse trabalho no que tange aos estudos efetivados no âmbito do PMA, especialmente, em se tratando da compreensão dos conceitos de limite e continuidade, os quais são de grande importância para a aprendizagem de outros conceitos pertencentes à esfera de conhecimentos do Cálculo.

REFERÊNCIAS

AMATANGELO, Miriam Lynne. **Student understanding of limit and continuity at a point: a look at four potentially problematic conceptions**. 2013. 112f. Dissertação (Mestrado em Artes), Bringham Young University (Utah/USA), 2013.

ARNON *et al*. **APOS Theory –** a framework for research and curriculum development in mathematics education. New York: Springer, 2014

AZAMBUJO, F.F. **Divisibilidade de polinômios no Ensino Médio via generalização da ideia de divisibilidade de números inteiros.** 2013. 222f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2013.

BRANDEMBERG, J.C. **Uma análise histórico-epistemológica do conceito de grupo**. São Paulo: Livraria da Física (ED), 2010.

BRANDEMBERG, J. C. ; MESSIAS, M. A. V. F. . Imagem Conceitual e Definição Conceitual: uma reflexão sobre a aprendizagem de conceitos matemáticos. In: Francisco Regis Vieira Alves; Ana Carolina Costa Pereira. (Org.). Ciências e Matemática: investigações no ensino. 1ed.Curitiba: CRV, 2016, p. 15-28.

CINVESTAV, F.H; LARA-CHAVEZ, H. Limits, continuity and discontinuity of functions from two points of view: that of the teachers and that of the students. In: BILLS, L (ED). **Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics,** v. 19, p. 49 – 54, jun.1999.

CHAPARIN, R.O. **Concepções de divisibilidade de alunos do 1º ano do Ensino Médio sob o ponto de vista da teoria APOS.** 2010. 148f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2010.

CORNU, B. ***Apprentissage de la notion de limite – conceptions et obstacles***. Tese de doutorado (matemática). Université Scientifique et Medicale de Grenoble, 1983.

_________. Limits. **In: Advanced Mathematical Thinking** *(ed. David Tall)*. Kluwer publications, 1991.

COTRILL *et al*. Understanding the limit concept: beginning with a coordinate process schema. *In:* **Journal of mathematical behavior**, vol. 15, 1996, p. 167 – 192.

EDWARDS, B.S; DUBINSKY, E. MCDONALD, M.A. Advanced Mathematical Thinking. **Mathematical Thinking and Learning – An international journal**, v. 7, n. 1, 2005, p. 15 - 25.

DENBEL, D.G. Students misconceptions of the limit concept in a first Calculus course. **Journal of Education and Practice**, v.5, nº34, 2014.

DREYFUS, T. Advanced mathematical thinking processes. In: TALL, D (ED.). **Advanced Mathematical Thinking**. Dordretch: Kluwer publications, p. 25-41.1991.

DUBINSKY, Ed. Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In: TALL, D. (Ed). **Advanced Mathematical Thinking.** Kluwer Academic Publishers, 1991, p. 95 – 123.

DUBINSKY, Ed.; MCDONALD, M.A. APOS: A Constructivist Theory of Learning in Undergraduate Mathematics Education Research. In: HOLTON, D. (ED). **The Teaching and Learning of Mathematics at the University Level.** Kluwer Academic Publishers, 2001, p. 273-280.

ELIAS, H.R. **Dificuldades de estudantes de licenciatura em matemática na compreensão de conceitos de grupo e/ou isomorfismo de grupos**. 2012. 154f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2012.

ERVYNCK, G. Mathematical creativity. In: TALL, D (ED.). **Advanced Mathematical Thinking**. Dordretch: Kluwer publications, p. 42 - 53.1991.

FLEMMING, D.M; GONÇALVES, M.B. **Cálculo A: funções, limite, derivação, integração**. São Paulo: Pearson, 2006.

FREITAS, W.R.S; JABBOUR, C. J. Utilizando estudo de caso(s) como estratégia de pesquisa qualitativa: boas práticas e sugestões. **ESTUDO & DEBATE**, Lajeado, v. 18, n. 2, p. 7 – 22, 2011.

GIL, A.C. **Métodos e técnicas de pesquisa social.** São Paulo: Atlas, 2008.

JAYAKODY, G. **University first year students' discourse on continuous functions: A commoginitive interpretation.** 2015. 276f. Tese (Doutorado em filosofia) – Programa de Educação Matemática, Simon Fraser University, 2015.

JAYAKODY,G; ZAZKIS, R. Continuous problem of function continuity. **For the Learning of Mathematics**, New Brunswick (Canada), v. 35, p. 8 – 14, março, 2015.

JESUS, M.S. **Um estudo das concepções de licenciandos em matemática, à luz da teoria APOS, a respeito do conceito de anel**. 2016. 137f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2016.

JORDAAN, T. **Misconceptions of the limit concept in a mathematics course for engineering students.** Dissertação de mestrado (educação matemática). University of South Africa, 2005.

JUTER, K. **Learning limits of function:** students' conceptual development. Saarbrücken: VDM Verlag Dr. Müller, 2008.

KARATAS et al. A cross-age study of students' understanding of limit and continuity concepts. **BOLEMA**, Rio Claro (SP), v. 24, nº 38, p. 245 a 264, abril, 2011.

MESSIAS, M. A. V. F. **Um estudo exploratório sobre a imagem conceitual de estudantes universitários acerca do conceito de limite de função**. 2013. 133f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemáticas) – Instituto de Educação Matemática e Científica, Universidade Federal do Pará, Belém, 2013.

MESSIAS, M. A. V. F; BRANDEMBERG, J.C. Um estudo exploratório sobre as evocações de estudantes universitários acerca do conceito de limite de função. **REVEMAT**, Florianópolis (SC), v.9, n.1, p.191 – 209, ago., 2014.

______________________. Discussões sobre a relação entre limite e continuidade de uma função: investigando imagens conceituais. **BOLEMA**, Rio Claro (SP), v. 29, n.53, p. 1224 – 1241, dez., 2015.

MUTLU, C; AYDIN,S. Students understanding of the concepto f limit of a function in vocational high School mathematics. **The Online Journal of Science and Tecnology**, v.3, n. 1, p. 145 – 152, jul. 2013.

NAIR, G.S. **College students' concept image of asymptotes, limits and continuity of rational functions.** Tese de doutorado (filosofia). Ohio State University, 2010.

NASCIMENTO, D.M. **Metodologia do trabalho científico: teoria e prática.** Belo Horizonte (MG): Fórum, 2008.

NASCIMENTO, J.C **. O conceito de limite em Cálculo: Obstáculos e dificuldades de aprendizagem no contexto do ensino superior de matemática**. 2003. 337f. Tese (Doutorado em Psicologia) – Departamento de Psicologia, UFPE, 2003.

NOMURA, J.I. **Esquemas cognitivos e *mente matemática* inerentes ao objeto matemático autovalor e autovetor: traçando diferenciais na formação do engenheiro.** 2014**.** 349f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2014.

NÚÑEZ et al. Embodied cognition as grounding for situatedness and context in mathematics education. **Educational Studies in Mathematics,** Netherlands, v. 39, p. 45 – 65, 1999.

OH, H.Y. A study on limit teaching in the college analysis major. **Korean Journal of Math,** v. 22, n. 1, p. 169 – 180, 2014.

PONTE, J. C. Estudos de caso em educação matemática. **BOLEMA**, Rio Claro (SP), v. 19, n.25, p. 1 – 23, 2006.

PRADO, E.A. **Alunos que completaram um curso de extensão em Álgebra Linear e suas concepções sobre base de um espaço vetorial.** 2010. 186f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2010.

PRZENIOSLO, M. Images of the limit of function formed in the course of mathematical studies in the university. **Educational Studies in Mathematics,** Netherlands, v. 55, p. 103 – 132, 2004.

RODRÍGUEZ, Mabel. Consideraciones didácticas para la enseñanza del límite funcional. *In: Memorias Del 10º Simposio de Educación Matemática*. Chivilcoy – Buenos Aires – Argentina, p. 92 – 98, 2009.

ROA-FUENTES, S; OKTAÇ, A. Construcción de una decomposición genética: Análisis teórico del concepto transformación lineal. **Revista Latino-americana de Investigación Matemática Educativa,** n.13, v.1, p. 89-112.

SARVESTANI, A.K. **Contemplating problems taken from history of limits as a way to improve students' understanding of the limit concept**. 2011. 162f. Tese de Doutorado, Universiteit Van Amsterdam, 2011.

SWINYARD, C. Reinventing the formal definition of limits: the case of Amy and Mike. **Journal of Mathematical Behavior**, v. 31, p. 93 – 114, 2011.

SILVA, M.E.S.C. **Concepções de transformação linear por estudantes de licenciatura em matemática.** 2016. 128f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2016.

SIQUEIRA, F.R. **A programação no Ensino Médio como recurso de aprendizagem dos zeros da função polinomial do 2º grau.** 2012. 125f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2012.

SOARES, N.C. **As operações com números naturais e alunos em dificuldades do 8º ano do Ensino Fundamental.** 2012. 123f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2012.

SOUZA, M. L. **Dependência e Independência Linear: um estudo a respeito das dificuldades e concepções de licenciandos em matemática.** 2016. 128f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2016.

STRAUSS, A; CORBIN, J. **Pesquisa qualitative: técnicas e procedimentos para o desenvolvimento de teoria fundamentada.** Porto Alegre (RS): Artmed, 2008.

TALL, D; VINNER, S. Concept image and concept definition with particular reference to limits and continuity. **Educational Studies in Mathematics***,* n. 12, 1981, p. 151 – 169

TALL et al. What is the Object of the Encapsulation Process?. **Journal of Mathematical Behavior**, v. 18, p. 223 – 241, 2000.

THOMAS, G.B. *Cálculo*. São Paulo: Addison Wesley, vol 1, 2002

VINNER, S. Continuous functions and reasoning in college students**. In Bergeron, J. (ED)** ***Proceedings of the international conference on the psychology of mathematics education (PME)****,* 1987, vol. 1, pp. 177 – 183.

ZUCHI, I. **A abordagem do conceito de limite via sequência didática: do ambiente lápis e papel ao ambiente computacional.** Tese de doutorado (engenharia de produção). UFSC, 2005.

APÊNDICE A

QUESTIONÁRIO Q1

1. Considere $f(x) = \frac{1}{2}x + 3$ e, com o auxílio de uma calculadora, complete a tabela a seguir:

x	3	3,5	3,99	3,999	4,001	4,01	4,1	4,5	5
$f(x)$									

a) Explique o que acontece com os valores de $f(x)$ à medida que tornamos os valores de x cada vez mais próximos de 4?
b) Determine $f(4)$.
c) Ilustre geometricamente a explicação dada em (a).

2. Observe os gráficos a seguir e responda:

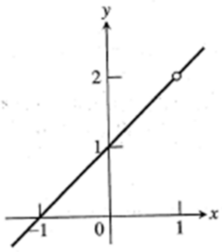


Fig 2.1 - f(x)

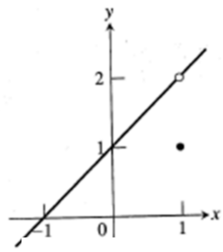


Fig 2.2 - h(x)

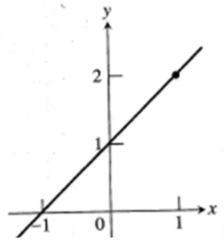
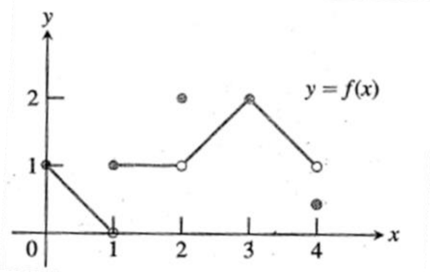


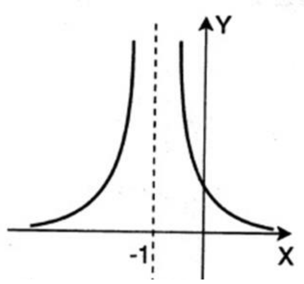
Fig 2.3 – g(x)

a) Qual o domínio de $f(x)$, $h(x)$ e $g(x)$?
b) Determine $f(1)$, $h(1)$ e $g(1)$.
c) Determine, se existirem, $\lim_{x\to 1} f(x)$, $\lim_{x\to 1} h(x)$ e $\lim_{x\to 1} g(x)$. Caso não existam, explique.

3. Observe o gráfico representado na figura 3.1 e, em seguida, avalie os limites em $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$ e $x = 4$. Justifique a existência (ou não) de cada um dos limites.



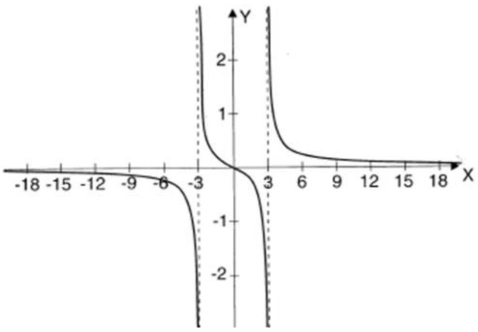
4. Observe o gráfico de $f(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$ representado na figura 4.1:



Fonte: Flemming e Gonçalves (2006)

a) Qual o domínio de $f(x)$?
b) Explique o que a reta de equações $x = -1$ representa no gráfico de $f(x)$.
c) O que acontece com $f(x)$ à medida que tornamos os valores de x cada vez mais próximos de -1, tanto pela direita quanto pela esquerda?

5. Observe o gráfico de $f(x) = \frac{x}{x^2-9}$ representado na figura 5.1:



Fonte: Flemming e Gonçalves (2006).

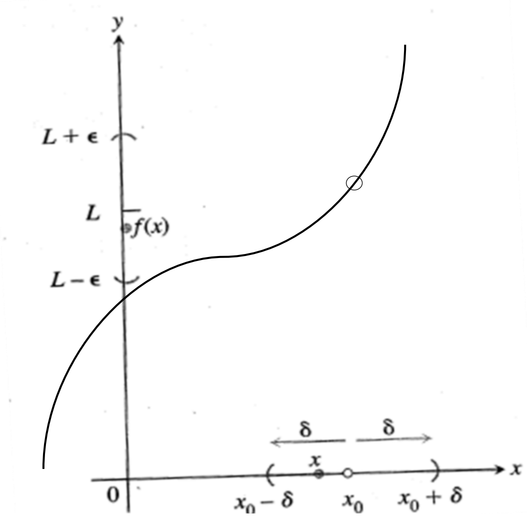
a) Qual o domínio de $f(x)$?

b) Explique o que as retas de equações $x = -3$ e $x = 3$ representam no gráfico de $f(x)$.

c) O $\lim_{x \to -3} f(x)$ existe? Explique.

d) O que acontece com $f(x)$ à medida que tornamos os valores de x cada vez mais próximos de 3, tanto pela direita quanto pela esquerda?

6. Observe atentamente a figura 5.1, em torno de x_0 e de L. Explique o que você entendeu sobre essa representação.



APÊNDICE B

QUESTIONÁRIO Q2

1. Considere a função definida a seguir e responda:

$$f(x) = \begin{cases} -x+1, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & 1 \leq x < 2 \\ 2, & x = 2 \\ x-1, & 2 < x \leq 3 \\ -x+5, & 3 < x < 4 \\ \frac{1}{2}, & x = 4 \end{cases}$$

(a) “O $\lim_{x \to 0} f(x)$ existe”. Essa afirmativa é verdadeira ou falsa? Explique.

(b) Verifique se o $\lim_{x \to 1} f(x)$ existe. Explique.

(c) “O limite da função quando $x \to 2$ não existe”. Você concorda com essa afirmação? Explique.

(d) Determine o $\lim_{x \to 4} f(x)$.

(e) "$\lim_{x \to 3} f(x) = f(3)$”. Essa sentença é verdadeira ou falsa? Explique sua resposta.

2. Explique o que você entende por $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$.

3. Considere a função $f(x) = \frac{x+3}{x+2}$. Observe sua representação gráfica:

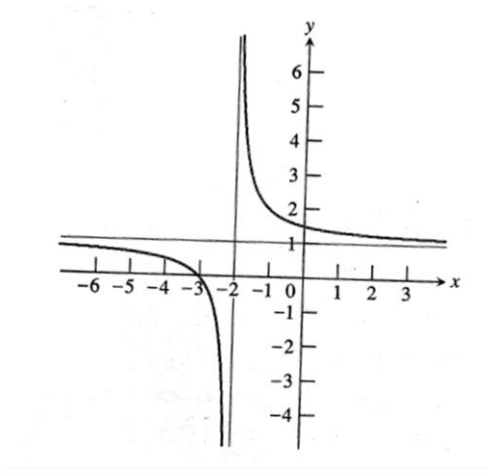


Fig. 3.1. Gráfico de f(x)
Fonte: Thomas (2002)

(a) “A reta $y = 1$ é uma assíntota horizontal do gráfico de $f(x)$”. Explique o que isso significa.

(b) “A reta $x = -2$ é uma assíntota vertical do gráfico de $f(x)$”. Explique o que isso significa.

4. Observe as figuras a seguir:

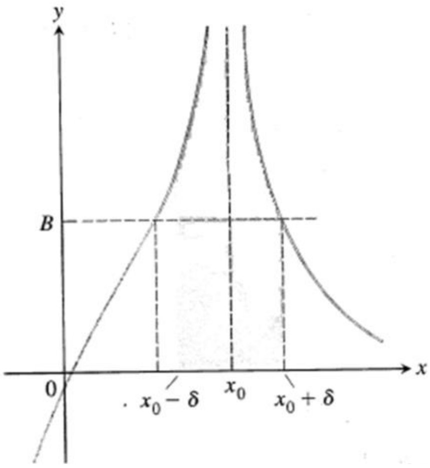


Fig. 4.1
Fonte: Thomas (2002)

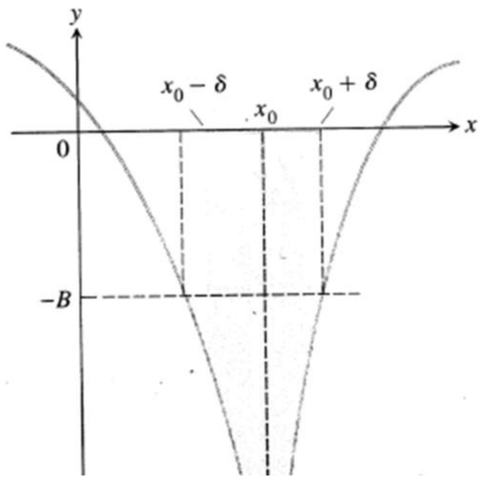


Fig. 4.2
Fonte: Thomas (2002)

(a) Escreva uma definição pessoal de $\lim_{x \to x_0} f(x)$, baseando-se na figura 4.1;

(b) Escreva uma definição pessoal de $\lim_{x \to x_0} f(x)$, baseando-se na figura 4.2.

5. Um estudante verificou, em um exercício de cálculo, que $\lim_{x \to x_0} f(x) = \frac{0}{0}$. Explique o que esse resultado significa. Se possível, dê exemplos que estejam em acordo com sua explicação.

APÊNDICE C

QUESTIONÁRIO Q3

1. É possível desenhar o gráfico de uma função, de maneira que o limite quando $x \to 4$ exista, e:
a) A função seja descontínua em $x = 4$? Explique
b) A função seja contínua em $x = 4$? Explique.
c) A função não seja definida em $x = 4$? Explique.
d) A função seja definida em $x = 4$? Explique.

2. É possível desenhar uma função descontínua que possua limite em cada ponto do domínio? Explique.

3. É possível desenhar uma função contínua que não possua limite em um ponto qualquer de seu domínio? Explique.

4. Escreva uma definição pessoal para continuidade de uma função.

5. Observe o gráfico das funções $f(x)$ e $g(x)$ e responda a seguir:

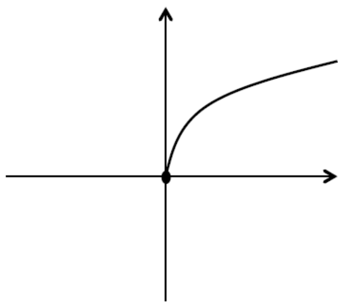


Fig 4.1 – Gráfico de $f(x)$
Fonte: Jayakody e Zazkis (2015)

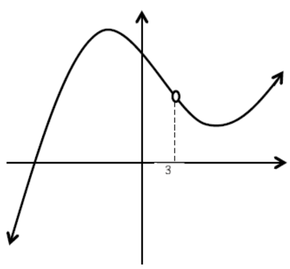


Fig 4.2 – Gráfico de $g(x)$
Fonte: Jayakody e Zazkis (2015)

a) A função representada na figura 4.1 é contínua? Explique.
b) $f(x)$ é contínua em $x = -5$? Explique.
c) A função representada na figura 4.2 é contínua? Explique.

6. Observe os gráficos das funções. Avalie a continuidade nessas funções. Explique.

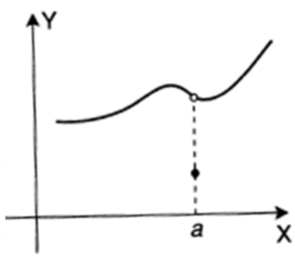


Fig. 6.1. - Gráfico de $h(x)$
Fonte: Flemming e Gonçalves (2006)

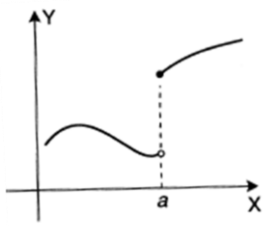


Fig. 6.2 - Gráfico de $g(x)$
Fonte: Flemming e Gonçalves (2006)

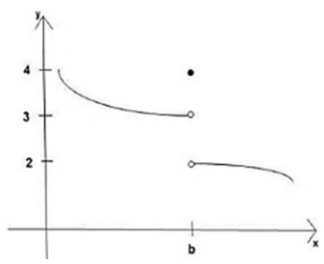


Fig. 6.3 - Gráfico de $f(x)$
Fonte: Messias (2013)