UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E CIENTÍFICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM DOCÊNCIA EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICAS – MESTRADO PROFISSIONAL

ELIZEU CANTÃO DE JESUS CALANDRINI NETO

ENSINO DE FUNÇÕES PARA LICENCIANDOS EM MATEMÁTICA COM USO DO SOFTWARE GEOGEBRA

BELÉM
2021

ELIZEU CANTÃO DE JESUS CALANDRINI NETO

ENSINO DE FUNÇÕES PARA LICENCIANDOS EM MATEMÁTICA COM USO DO SOFTWARE GEOGEBRA

Dissertação apresentado ao Programa de Pós-graduação em Docência em Educação em Ciências e Matemáticas, do Instituto de Educação Matemática e Científica, da Universidade Federal do Pará, como requisito para obtenção do título de Mestre em Educação em Ciências e Matemáticas.
Área de concentração: Ensino, Aprendizagem e Formação de Professores de Ciências e Matemática.
Linha de Pesquisa: Ensino e Aprendizagem de Ciências e Matemática para a Educação Cidadã.
Orientador: Prof. Dr. Osvaldo dos Santos Barros.

BELÉM
2021

ELIZEU CANTÃO DE JESUS CALANDRINI NETO

ENSINO DE FUNÇÕES PARA LICENCIANDOS EM MATEMÁTICA COM USO DO SOFTWARE GEOGEBRA

Este exemplar corresponde à redação de defesa de dissertação a ser defendida por Elizeu Cantão de Jesus Calandrini Neto sob aprovação da Comissão Julgadora.

Banca Examinadora

____
Prof. Dr. Osvaldo dos Santos Barros - IEMCI/UFPA
Orientador

____
Prof. Dr. Erasmo Borges de Souza Filho - IEMCI/UFPA
Membro Interno

____
Prof. Dr. Manuel de Jesus dos Santos Costa - PROFMAT/UFPA
Membro Externo

____
Prof. Dr. Rubenvaldo Monteiro Pereira – UFPA/Cametá
Professor Convidado

Data de aprovação: _____/_____/_____

Conceito: _________________________

BELÉM
2021

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

N469e Neto, Elizeu Cantão de Jesus Calandrini.
Ensino de funções para licenciandos em matemática com uso do software Geogebra / Elizeu Cantão de Jesus Calandrini Neto. — 2021.
208 f. : il. color.

Orientador(a): Prof. Dr. Osvaldo dos Santos Barros
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Pará, Instituto de Educação Matemática e Científica, Programa de Pós-Graduação em Docência em Educação em Ciências e Matemáticas, Belém, 2021.

1. Matemática e Tecnologia. 2. Ensino de Funções. 3. Geogebra. 4. PCNA – Nivelamento. I. Título.

CDD 510

DEDICATÓRIA

Aos meus pais Elizeu C. Filho e Maria de Jesus.

Às minhas irmãs Élem Sara e Elisângela.

À minha sobrinha Helena Vitória.

À minha tia Maria Amélia.

Dedico.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus pela proteção e por estar comigo nos momentos mais difíceis da vida, por nunca deixar minha fé se esgotar e meus sonhos se perderem.

A toda minha família, em especial ao meu pai Elizeu Calandrini Filho por todas as manhãs que humildemente me levou de bicicleta até o terminal para que eu pudesse realizar minhas viagens até Belém, serei sempre grato e honrado em ter um pai tão fantástico, a minha mãe Maria de Jesus da Silva Calandrini pelo apoio incondicional e dedicação para auxiliar nos meus estudos e pelo incentivo para nunca desistir dos meus sonhos.

As minhas irmãs Elisângela de Jesus da Silva Calandrini e Élem Sara da Silva Calandrini pela paciência e apoio nos momentos em precisei de tempo e espaço para estudar.

Ao meu cunhado John Lenno, por todo o apoio nos momentos em que precisei, quando eu chegava cansado da viagem e você ia me buscar no terminal.

A minha tia de coração Carmem Pinheiro que me ajudou desde o início da minha trajetória no mestrado.

A minha tia Maria Amélia pelo apoio incondicional, pelo abrigo e por cuidar de mim durante minha permanência em Belém enquanto estava estudando as disciplinas do mestrado.

Aos professores por todo conhecimento a mim repassado, que foram base e me habilitaram para chegar até o mestrado.

Ao Laboratório de Ensino de Matemática da Amazônia Tocantina (LEMAT) em especial ao meu orientador, Prof. Dr. Osvaldo dos Santos Barros pelo incentivo a continuidade dos meus estudos e por proporcionar grandes experiências no desenvolvimento de projetos e exposições do laboratório.

A minha amiga Daniela Vilhena, por me incentivar e estar presente em todos os momentos dessa caminhada acadêmica, desde a graduação até o mestrado, sem seu apoio eu não teria conseguido.

A minha amiga Ranielle Afonso Pinheiro, por estar presente e dividir esse sonho de mestrado, sendo uma das principais incentivadoras e também companhia nas viagens semanais para Belém.

Agradeço a todos que de forma direta ou indireta ajudaram na minha formação e conclusão deste curso!

Elizeu Cantão de Jesus Calandrini Neto

EPÍGRAFE

“Cada docente pode encontrar sua forma mais adequada de integrar as várias tecnologias e s muitos procedimentos metodológicos. Mas também é importante que amplie, que aprenda a dominar as formas de comunicação interpessoal/grupal e as de comunicação audiovisual/telemática”.

José Manuel Moran

RESUMO

A motivação para desenvolver esse estudo surgiu a partir de algumas limitações que os alunos apresentam quanto à compreensão do conteúdo de funções polinomiais no ensino médio e, por conseguinte, das dificuldades que apresentam ao ingressarem no ensino superior, nos cursos de ciências exatas, mais especificamente nas disciplinas de Cálculo Diferencial. Assim, com objetivo de contribuir com a superação dos problemas de aprendizagem nos estudos das funções polinomiais, nos utilizamos das contribuições das novas tecnologias para o ensino de matemática, propondo um material didático voltado ao ensino de funções polinomiais com uso do software Geogebra como recurso didático, para auxiliar no entendimento desses conteúdos e suas propriedades, visando elevar os índices de aproveitamento de estudos nas disciplinas de cálculo diferencial. A metodologia do estudo divide-se em quatro etapas, sendo elas: estudo de caso na disciplina Didática da Matemática, com turma do curso de licenciatura da Matemática da Universidade Federal do Pará - UFPA, Campus Abaetetuba; estudo de caso com aplicação de oficina didática para os alunos ingressantes nos cursos de ciências exatas do campus de Abaetetuba, participantes do Programa de Cursos de Nivelamento da Aprendizagem - PCNA – Nivelamento em Matemática e Física; criação de um caderno de atividades, montado em formato digital (e-book) e disponibilizado no site do Laboratório de Ensino da Matemática da Amazônia Tocantina – LEMAT, por último a aplicação de aulas on-line, disponíveis no canal do LEMAT GETNOMA, na plataforma You Tube. Os resultados obtidos fortalecem a ideia de que trabalhar o ensino de matemática a partir do uso de novas tecnologias que facilitem a transmissão de conhecimento de forma simples e dinâmica favorece o aprendizado de funções polinomiais.

Palavras chaves: Matemática e Tecnologia. Ensino de Funções. Geogebra. PCNA – Nivelamento.

ABSTRACT

The motivation to develop this study arose from some limitations that students have regarding the understanding of the content of polynomial functions in high school and, therefore, the difficulties they present when entering higher education, in exact science courses, more specifically in the Differential Calculus disciplines. Thus, in order to contribute to the overcoming of learning problems in the studies of polynomial functions, we used the contributions of new technologies for the teaching of mathematics, proposing a teaching material aimed at teaching polynomial functions using the Geogebra software as a teaching resource , to assist in the understanding of these contents and their properties, aiming to raise the rates of use of studies in the disciplines of differential calculus. The study methodology is divided into four stages, namely: a case study in the Didactics of Mathematics discipline, with a class from the Mathematics Licentiate Course at the Federal University of Pará - UFPA, Campus Abaetetuba; case study with application of a didactic workshop for students entering exact science courses on the Abaetetuba campus, participants of the Learning Leveling Courses Program - PCNA - Leveling in Mathematics and Physics; creation of a notebook of activities, assembled in digital format (e-book) and made available on the website of the Tocantina Amazon Mathematics Teaching Laboratory – LEMAT, finally, the application of online classes, available on the LEMAT GETNOMA channel, on You Tube platform. The results obtained strengthen the idea that working on teaching mathematics from the use of new technologies that facilitate the transmission of knowledge in a simple and dynamic way favors the learning of polynomial functions.

Key words: Mathematics and Technology. Teaching Functions. Geogebra. PCNA - Leveling.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ABREVEATURAS E SIGLAS

PCNA	Programa de Cursos de Nivelamento da Aprendizagem
LEMAT	Laboratório de Ensino de Matemática da Amazônia Tocantina
UFPA	Universidade Federal do Para
DTIC	Divisão de Tecnologia da informação e Comunicação
GEPEMe	Grupo de estudos e pesquisa Memória, Formação e Tecnologia
GETNOMA	Grupo de Estudos e Pesquisas das Práticas Etnomatematicas na Amazônia
LAPRADI	Laboratório de Práticas Docentes Interdisciplinares
PPGDOC	Programa de Pós-Graduação em Docência em Educação em Ciências e Matemática
IEMCI	Instituto de Educação Matemática e Científica
PIBIC	Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica
PIBID	Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência
UNAMA	Universidade da Amazônia
UEPA	Universidade do Estado do Pará
ENEM	Exame Nacional do Ensino Médio
PROUNI	Programa Universidade para Todos
ABNT	Associação Brasileira de Normas Técnicas
SAEST	Superintendência de Assistência Estudantil
BNCC	Base Nacional Comum Curricular
GEPECC	Grupo de Estudos e Pesquisas das Práticas Educativas de Canaã dos Carajas

SUMÁRIO

MEMORIAL ACADÊMICO – Obstáculos, motivação e influências

OS PRIMEIROS PASSOS NA VIDA ESCOLAR

O presente memorial relata parte da minha trajetória no Ensino Básico, cursos de iniciação técnica e formação acadêmica, evidenciando as influências que me proporcionaram associar o ensino e a aprendizagem da Matemática com a utilização das tecnologias digitais, que culmina com meu ingresso no Programa de Pós-Graduação em Docência em Educação em Ciências e Matemática – PPGDOC, do Instituto de Educação Matemática e Científica – IEMCI, da Universidade Federal do Pará – UFPA/Campus Belém.

Meu nome é Elizeu Cantão de Jesus Calandrini Neto, Abaetetubense, sou filho de: Elizeu Cantão de Jesus Calandrini Filho, carpinteiro, nascido no município de Muaná, sediado na ilha do Marajó-PA e Maria de Jesus da Silva Calandrini, costureira, nascida no rio Jarumã, na região das Ilhas de Abaetetuba-PA. Meus pais tiveram três filhos, sendo eu o filho do meio e duas irmãs, meus pais são de família humilde e trabalharam muito para conquistar a casa própria e criar os filhos, eu e minhas irmãs tivemos uma infância bem difícil, no entanto, nossos pais sempre fizeram de tudo para não deixar faltar nada, tudo em casa era feito sob medida e a regra sempre foi economizar o máximo possível, pensando no dia de amanhã.

Minha rotina na infância e adolescência foi bem restrita, meus pais sempre foram muito amorosos, porém muito rigorosos também, principalmente quando o assunto era brincar fora de casa, isso gerou alguns conflitos e desconfortos que aos poucos foram sendo solucionados na base do diálogo.

Meu pai sempre me contava de como eu ganhava presentes muito bonitos, carros de todas as formas e cores que no dia seguinte já estavam todos desmontados, pois eu sempre tive muita curiosidade e desmontava todos os brinquedos para ver como eram por dentro. De fato, essa característica de ser curioso eu ainda trago comigo e até hoje eu ainda desmonto muita coisa, mas agora é para ver problemas e conserta-los, principalmente equipamentos eletrônicos e de informática.

Meu início na vida escolar foi em uma escolinha bem humilde próximo ao bairro onde moro, era conhecida carinhosamente como “Casulo” e atualmente é a E.M.E.I.E.F CARLAIDE CARDOSO FERREIRA JORGE, foi nessa escolinha que tive o primeiro contato com professoras muito queridas que muito me ensinaram e ajudaram nos meus primeiros passos da vida escolar. Dentre as professoras da escola, uma em especial acompanha até hoje meus passos e se sente muito feliz por não ter esquecido dela.

Entre os anos de 1995 a 1997 na E.E. DE 1º GRAU ANEXO LAURA DOS SANTOS RIBEIRO, comecei a cursar meu ensino fundamental, que hoje chamamos de ensino fundamental menor, esse foi um período quando notei uma facilidade para fazer cálculos, meu boletim de matemática da 1ª série tinha somente notas só notas 10,0 e era a única matéria que eu não precisava estudar muito, já as outras eu sempre utilizava a repetição para tentar memorizar as respostas, pois não tinha muito empenho para aprender de verdade, mas a matemática eu fazia rápido porque sabia e gostava.

Em 1998 fui transferido para a E.E.E.F. PROFª. ESMERINA BOU HABIB para fazer a 4ª série, essa escola pública tinha um nível de ensino considerado razoável quando comparado as outras escolas do município, com professores muito dedicados que sempre me incentivaram a estudar e superar as dificuldades. Eu era um bom aluno e tirava notas boas, apesar de que por vezes troquei aulas de português para jogar futebol na quadra, porém entregava todos os trabalhos e me dedicava nas provas e nunca repeti de ano.

Em cada avanço é possível perceber que não somos mais os mesmos, temos cada vez mais responsabilidades e queremos mostrar o melhor de nós para nossos pais. Lembro que meus trabalhos da escola eram sempre elogiados, começando pela capa que eu personalizava com desenhos e pinturas que tinham relação com cada matéria, as professoras adoravam e por muitas vezes chegaram a pedir para ficar com o meu trabalho, eu gostava muito de desenhar e fazia com muito carinho cada capa, pois como meus pais não me deixavam sair muito de casa. Sempre sobrava muito tempo e eu tentava preencher com atividades que eu gostava, uma dessas atividades era pegar figurinhas de desenho animado e ampliar em cartolinas, cheguei até a ampliar a foto do meu pai assinando o livro registro no dia do seu casamento.

Nos anos que permaneci no Ensino Fundamental foram bem interessantes, pois não tínhamos os recursos que temos nos dias de hoje como: acesso a computadores, a internet e cópias xerográficas nas escolas, ou seja, todos os trabalhos tinham que ser feitos manuscritos, indo à biblioteca da escola ou na biblioteca pública para pesquisar os assuntos e retirar o que precisávamos. Dessa forma o trabalho em equipe era fundamental para poder fazer essas tarefas. A troca de conhecimentos e aprendizagem tinha outra dinâmica, pois não haviam as plataformas de busca como o google para nos salvar. As pesquisar eram feiras retirando vários trechos de alguns livros para poder montar os trabalhos e em uma dessas várias idas à biblioteca, que eu li meu primeiro livro completo.

Em 2002, meu último ano no Ensino Fundamental ficou marcado por querer fazer tudo que era possível na escola, era a despedida de um lugar que convivi durante anos e que ia deixar saudades. Lembro que participei da feira de ciências da escola, dos jogos internos de futsal e jogos intercolegiais de futsal. Foi um ano incrível quando tudo o que era possível fazer, foi feito e o sentimento de dever cumprido era o melhor de tudo.

Em 2003 comecei a cursar o Ensino Médio na E.E.E.F.M PROFª. BENVINDA DE ARAÚJO PONTES, foi um período complicado, muitas mudanças e adaptações, novos amigos, novas perspectivas, professores e metodologias diferentes, foi um primeiro ano difícil. O nível de ensino exigido era muito maior do que eu imaginava que fosse, mas em meio a todas essas mudanças consegui me adaptar e conviver em um novo ambiente escolar, fiz novos amigos que gostavam muito de esportes assim como eu, dessa forma foi crescendo em mim uma admiração e vontade de ser profissional de Educação Física.

Haviam várias modalidades de esporte na escola, no entanto, o futsal era o único que eu jogava por prazer, minha posição habitual era goleiro e sempre me esforcei para conquistar uma das vagas que eram oferecidas todos os anos para as seleções de futsal da escola, outros esportes como voleibol, basquete e atletismo eu fazia só em período de prova. Nesse período eu entendi que uma forma de associar o que eu gostava de fazer com uma profissão para seguir era estudando para passar no curso de Educação Física, isso me faria ficar perto do que eu gostava e muitas vezes me inspirei nos próprios professores da escola.

O primeiro ano do ensino médio era considerado um divisor de águas, pois era quando que tínhamos que escolher um curso de interesse para poder fazer as inscrições nos vestibulares das principais universidades da região. Pesquisei em qual delas tinha o curso de Educação Física para poder me inscrever. Nesse período utilizávamos o Processo Seletivo Seriado (PRISE), da Universidade do estado do Pará

– UEPA, como método de ingresso no ensino superior, no qual se realizava uma prova a cada ano, durante os três anos de duração do Ensino Médio e ao final do terceiro ano, obtinha-se, ou não a pontuação necessária para ingressar no ensino superior. Em meio as possibilidades, apostei na ideia de fazer o curso de Educação Física no município de Tucuruí, no polo universitário da UEPA, pois muitos amigos meus falavam que iam fazer vestibular para essa cidade.

Durante o primeiro ano do Ensino Médio fiz a prova me preparando apenas com os estudos que tive na escola e em casa, no segundo já estudei em um cursinho solidário que funcionava a noite na Escola Municipal Acendendo as Luzes - CEPAL, no último ano, com muito esforço, estudei em um cursinho particular pensando que para ingressar no curso superior que eu queria, tinha que estudar muito e conseguir uma boa nota.

Sem dúvida, ser professor de Educação Física era a profissão que eu queria ter, contudo, no último ano do ensino médio tive uma notícia bem difícil de digerir que complicou muito a caminhada rumo ao sonho de cursar Educação Física, meu pai, em uma conversa muito franca comigo, falou que não poderia me sustentar em um curso que fosse fora de nossa cidade, visto que o curso seria em Tucuruí. A realidade que ele vivia não permitia dar conta de sustentar a casa e os meus estudos, nessas condições tive que fazer algumas renuncias.

Desanimado com a situação que estava enfrentando, resolvi pesquisar um curso que pudesse ser realizado no município de Abaetetuba ou em um lugar mais próximos, onde pudesse, diariamente, ir e voltar para casa. Foi então que encontrei o Programa Universidade Para Todos - ProUni, oferecido pelo Governo Federal que promovia o acesso às universidades particulares brasileiras para estudantes de baixa renda que estudavam o ensino médio, exclusivamente em escola pública.

O INGRESSO NO ENSINO TÉCNICO E TECNÓLOGO

Em 2005 terminei o ensino médio e em 2006 fui aprovado no curso de Gestão Empresarial oferecido pela Universidade da Amazônia – UNAMA utilizando a nota que obtive no Exame Nacional do Ensino Médio - Enem. Inicialmente os estudos seriam na cidade de Belém do Pará, no entanto, não foi possível atingir o número mínimo de inscritos no curso e a turma não foi formada. Assim foram oferecidas duas opções:

continuar no polo da UNAMA localizada na Rodovia BR 316, em Belém, ou fazer o curso no polo do município de Barcarena. Assim, optei pelo curso no polo de Barcarena, devido ser próximo à Abaetetuba, reduzindo custos com transporte e outras despesas.

O curso de Gestão Empresarial foi ofertado em regime semipresencial, dessa forma eu não precisaria ir todos os dias estudar em Barcarena e em algumas oportunidades utilizava o laboratório de informática no polo de Abaetetuba[1] para fazer as atividades on-line. Os exercícios feitos no curso sempre utilizávamos computadores, isso fez com que eu me aproximasse dos estudos da informática que era uma área da qual estava aprendendo e buscando ampliar meus conhecimentos.

O curso de Gestão Empresarial durou dois anos em virtude de ser um curso superior de formação especifica. Nesse período trabalhei em um Cyber Café[2] para poder pagar minhas passagens e materiais de estudo, foi nesse trabalho que aprendi sobre os recursos da informática e adquirir conhecimentos que me fizeram gostar ainda mais do uso das novas tecnologias. Essa experiência no Cyber Café me ajudou bastante nos estudos, pois eu sempre recebia trabalhos de universitários da UFPA – Campus de Abaetetuba para digitar, formatar e aplicar as regras da Associação Brasileira de Normas Técnicas - ABNT, a partir das leituras dos trabalhos tive contato com uma linguagem mais formal e isso me ajudou bastante na construção do projeto final do meu curso.

A descoberta das tecnologias de informática durante a realização do curso de Gestão Empresarial, substituiu os sonhos de ser professor de Educação Física e me fez embarcar em novos sonhos e em outras perspectivas para o futuro. Também preciso enfatizar a enorme experiência que adquirir durante o período que trabalhei no Cyber, nele aprendi técnicas de digitação, formatação de computadores e instalação de programas, bem como o conhecimento de todas as peças que compõem um computador.

---

1 A UNAMA mantinha um polo de formação no município de Abaetetuba, porém não oferecia o curso de Gestão Empresaria.

2 Trabalhei por dois anos como atendente, foi quando aprendi alguns elementos de manutenção de máquinas como: formatação, instalação de programas, digitação e formatação de documentos, entre outras atividades.

Em 2009 influenciado pela obtenção de conhecimento a respeito da informática me inscrevi no Curso Técnico em Informática oferecido pela Escola Cristo Trabalhador, para pessoas de baixa renda, foi nesse momento que passei a conhecer a tecnologia de uma forma mais intensa e aprofundada, vendo a riqueza dos recursos e a lógica de programação.

Os cursos de Gestão Empresarial e Técnico em Informática abriram as portas para muitas oportunidades de trabalho e em uma delas fui convidado para gerenciar a escola Miriti Informática[3], foi essa experiência que me possibilitou associar os conhecimentos de gestão aos conhecimentos de informática, pois além de fazer a gerencia financeira dos alunos, também era responsável por coordenar a equipe que cuidava da manutenção das maquinas e dos programas utilizados nas aulas de informática.

Em 2011 ingressei em um cursinho pré-vestibular pensando em prosseguir na área da informática, agora fazendo curso superior. Retomei a dinâmica de estudos em grupo para prestar os exames do vestibular, agora para o curso de Sistema de Informação oferecido pela UFPA na cidade de Marabá. Infelizmente não conquistei uma das vagas ofertadas. Posteriormente prestei exames para o curso de Licenciatura em Matemática oferecido pela UFPA no campus de Abaetetuba, cidade onde resido e que ficaria muito mais prático eu adaptar minha vida estando perto de casa.

O INÍCIO DA CAMINHADA ACADÊMICA DENTRO DA UFPA

A aprovação veio em 2013, ingressei no curso de Licenciatura em Matemática pela UFPA e durante o primeiro semestre, fui selecionado como bolsista voluntário na Divisão de Tecnologia da Informação e Comunicação – DTIC, sob orientação do analista de sistemas Marco Aurélio Capela. Esse setor, no campus de Abaetetuba foi ponto fundamental naquele momento, aprendi muitas sobre tecnologia em arquitetura de rede, processamentos e servidores. Após seis meses fazendo serviço voluntário passei a ser bolsistas remunerado, tendo uma rotina de trabalho me fez transitar por todos os ambientes do campus e conhecer seu funcionamento e estrutura.

---

3 Atuava como gerente administrativo, formador de novos professores de informática e cuidava da gerencia da equipe de manutenção dos computadores e programas da escola.

Durante o curso de matemática, participei de alguns projetos de ensino, pesquisa e extensão oferecidos pela UFPA que foram de fundamental importância para o meu desenvolvimento acadêmico, a experiência adquirida com os professores e responsáveis pelos projetos me proporcionou um aprendizado em diversas práticas e mostrou que universidade vai muito além da prática docente, envolve práticas sociais e culturais que são raízes muito fortes na minha região que é o baixo Tocantins e dentre esses projetos que participei citarei os mais significativos.

O primeiro projeto que atuei foi no Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência – PIBID Diversidade, coordenado pela prof. Drª. Mara Rita Duarte de Oliveira no ano de 2014, uma excelente professora que conheci por intermédio do setor de tecnologia da UFPA, nesse programa tive contato com discussões sobre a realidade da educação básica e os debates sobre a educação do campo, pois o programa articula as regiões do Baixo Tocantins e também do Sul e Sudeste do Pará (Transamazônica). O intuído do Projeto é estimular a Iniciação à Docência como uma estratégia teórico-metodológico nesse processo formativo, pois possibilita aos alunos ingressantes nos cursos de licenciatura a vivência pedagógica necessária para a formação de educadores comprometidos com uma nova forma de pensar e fazer a educação.

O ato de assimilar o que se aprende como discente e poder exercitar em projetos durante o curso, gera um processo de transformação e amadurecimento do discente de forma mais efetiva, os trabalhos desenvolvidos e relatórios conduzem a uma melhor escrita acadêmica e fortalece a percepção de análise dos textos. Esses foram pontos importantes que pude perceber durante o projeto, o que muito ajudou no meu desenvolvimento e além disso o PIBID desenvolvia vários momentos de encontros e reflexão para os discentes participantes do projeto.

Ainda em 2014 participei como voluntário foi no Laboratório de Práticas Docente Interdisciplinares (LAPRADI), ele tinha como principal objetivo oportunizar aos alunos do curso de licenciatura do Campus Universitário de Abaetetuba a vivência pedagógica necessária a profissionalização docente, a partir da articulação das atividades didático-pedagógicas desenvolvidas nas disciplinas Estágio e Práticas de Ensino com a realidade educacional das escolas públicas do Município de Abaetetuba. Quem estava à frente do projeto era a prof. Drª. Mara Rita Duarte de

Oliveira, pessoa que muito me incentivou na busca por novos conhecimento e novas práticas.

Em 2015 participei do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica (PIBIC) sob orientação do Prof. Dr. Manoel de Jesus dos Santos Costa, foi à porta de entrada para unir as duas áreas de conhecimento que tenho afinidade, possibilitando trabalhar a matemática a partir de um Software desenvolvido para fazer simulações de cálculos envolvendo diversas grandezas. O trabalho desenvolvido no PIBIC foi o Cálculo Computacional Aplicado, onde utilizei o programa Matlab para fazer cálculo de área utilizando métodos de integração por aproximação, como foi o caso do Método dos Trapézios e Método de Simpson, bem como suas adaptações, essa experiência foi sem dúvida uma das mais significativas no meu período de graduando e futuramente seria expandido se tornaria o meu TCC.

Após o término da minha participação no projeto PIBIC em 2016, fui convidado pelo Prof. Dr. Osvaldo dos Santos Barros para participar como bolsista do Laboratório de Ensino de Matemática da Amazônia Tocantina – LEMAT, laboratório de práticas matemáticas destinadas ao ensino, pesquisa e extensão no campus universitário de Abaetetuba. Nesse espaço que, em princípio, foi criado para promover o ensino sobre a Educação Matemática, logo tomou proporções bastante significativas, agregando projetos e programas de fundamental importância para os discentes que estudam ciências exatas na UFPA/ campus Abaetetuba, como é o caso do Programa Integrado de Apoio ao Ensino, Pesquisa e Extensão - PROINT, PCNA e Subprograma de Apoio à Infraestrutura de Laboratórios de Ensino de Graduação – Pgrad LABINFRA que são alguns dos programas existentes na UFPA, além de oficinas e minicursos promovidos periodicamente no espaço.

O LEMAT é um dos espaços dentro da UFPA que me permitiu crescer e ter novas visões enquanto futuro professor de matemática; os eventos, desenvolvimento de projetos e discussões promovidos nesse espaço ajudaram a me posicionar em relação à linha de trabalho que eu pretendia seguir e abriu as portas para participar de muitas Atividades dentro e fora da UFPA.

Dentre muitas atividades e ventos promovidos pelo LEMAT, existe dois principais que são: A semana da Matemática de Abaetetuba – SEMAT e o Encontro Paraense de Etnomatemática, aos quais tenho muito orgulho de ter ajudado a promover tanto na coordenação, quanto como expositor de trabalhos de pesquisa, minicursos, oficinas, mediador de palestras e de mesa redonda destinadas aos participantes dos eventos.

Em paralelo aos projetos que participei e a proximidade que tive com os professores nesses projetos, proporcionaram alguns convites para participar de grupos de estudos formados dentro da UFPA, esses grupos tem como finalidade o compartilhamento de estudos específicos que visam a socialização do saber através de debates e discussões de textos acadêmicos.

O primeiro grupo de estudos que participei foi o Grupo de estudos e pesquisa Memória, Formação e Tecnologia – GEPEMe, que desenvolve estudos e pesquisas sobre memória de professores, formação docente e tecnologias da comunicação e da informação, discutimos temas relacionados a formação de professores que atuam na educação básica, assim como na educação quilombola, juventude e outros temas. Esse grupo de estudo vem colaborando no processo de formação continuado dos professores da região abaetetubense com o intuito de contribuir com uma proposta educacional dialógica e emancipadora, a prof. Drª. Mara Rita Duarte me integrou ao grupo em 2016 e a partir dessa data participei de eventos, encontros, seminários e outras atividades ligadas ao grupo de estudos.

2017 foi um ano muito intenso em minha jornada acadêmica, a rotina de projetos de pesquisa, grupos de estudos, aulas do último semestre, escrita e orientações de TCC, fizeram desse ano um dos mais difíceis, o que fez toda a diferença para conseguir concluir tudo foi a pesquisa desenvolvida no PIBIC, pois a pesquisa foi ampliada e assim tornou-se o meu trabalho de conclusão de curso com o título CÁLCULO COMPUTACIONAL APLICADO A UMA INTEGRAL. O TCC foi defendido com conceito EXCELENTE diante de uma enorme plateia montada pelo Prod. Dr. Manoel de Jesus dos Santos Costa e pelo Prof. Dr. Romulo Lima durante a maratona de defesa de seus orientandos.

Ainda 2017, após terminar meu curso de matemática, fui convidado para participar do Grupo de Estudos e Pesquisas das Práticas Etnomatematicas na Amazônia - GETNOMA, que é formado por professores, estudantes de pós-graduação, graduação e professores da Educação Básica, tem como temática o ensino da matemática e suas relações com as práticas culturais. O grupo de pesquisa tem suas reuniões e trabalhos desenvolvidos dentro do LEMAT, isso facilitou muito para a minha permanência, pois já era um espaço que eu frequentava e apenas dei continuidade nas atividades que eu já desenvolvia naquele espaço.

No mesmo período que passei a frequentar o grupo de estudos GETNOMA eu comecei a fazer parte do LEMAT como professor colaborador, continuando projetos que eram desenvolvidos no período em que eu era bolsista, outras atividades também foram agregadas como participar de bancas de conclusão de curso, co-orientar trabalhos relacionados a tecnologia e educação matemática, participar de mesas de discussão e ajudar a coordenar a Semana da Matemática – SEMAT, que é um dos eventos significativos que o LEMAT realiza todos os anos. O fato de conhecer a dinâmica do laboratório e identificação com os membros sem dúvida contribuiu muito para o meu processo de formação e vivencia de novas práticas no âmbito acadêmico.

O LEMAT me proporcionou uma nova visão sobre o ensino de matemática, pois a partir das práticas realizadas e dos ensinamentos adquiridos foi possível fazer a construção de uma identidade voltada para o ensino de matemática com o uso de tecnologia e passei a desenvolver aulas com essa temática para oferecer suporte para os alunos do Programa de Cursos de Nivelamento da Aprendizagem – (PCNA).

Esse suporte é fundamental para os alunos que ingressam na universidade, pois as dificuldades enfrentadas no começo de um curso de ciências exatas são muito grandes, essa realidade eu enfrentei sem apoio de um PCNA no início da minha graduação em 2013, não havia um programa especifico dentro da UFPA/Abaetetuba que disponibilizasse esse suporte para os alunos e de certa forma me fez querer fazer algo diferente para os que estavam passando pela mesma realidade que eu passei quando entrei no curso.

DESAFIOS E OPORTUNIDADES NA PÓS-GRADUAÇÃO

A convivência no LEMAT realizando projetos, eventos voltados para as ciências exatas e o envolvimento com professores e estudantes de pós-graduação do grupo GETNOMA me proporcionou a oportunidade de desenvolver um projeto pensando na continuidade dos estudos, nesse período fui muito incentivado para fazer a prova de seleção para o mestrado profissional.

Os estudos para a prova de mestrado foram marcados pela descoberta de olhares voltados para a reflexão sobre o ensino e as primeiras ideias sobre professor pesquisador e reflexivo de sua própria prática. Segundo Schon (1983), a ideia do profissional reflexivo está na forma pela qual esse profissional enfrenta as diversas situações, as quais não possuem um padrão de resolução técnica, o que induz o profissional a buscar novos caminhos para tentar solucionar determinados problemas, moldando desse modo a ideia do professor pesquisador/reflexivo de sua própria prática educacional.

A partir do contato com os textos disponibilizados para a prova foi possível mergulhar em novas concepções sobre o ensino. Os dias de estudo foram premiados com a aprovação no mestrado e ingresso no Programa de Pós-Graduação Em Docência em Educação em Ciências e Matemáticas – Mestrado Profissional – PPGDOC, na área de educação matemática

Em 2018 durante os estudos no mestrado encontrei disciplinas bem desafiadoras, discutir educação a partir de autores que são referências e teorias fundamentadas foi algo bem deficitário em minha graduação que era voltada para a matemática pura e aplicada, poucas disciplinas pedagógicas e de educação matemática foram ofertadas no curso de licenciatura em matemática oferecido na UFPA campus Abaetetuba. O pouco contato que tive com essas disciplinas na graduação me fizeram sentir dificuldade para dialogar com meus colegas sobre educação e vivencias.

No decorrer do mestrado participei de algumas bancas de qualificação e defesa de mestrado, obtendo experiência e conhecimento sobre essas etapas do mestrado. Também participei de estudos avançados sobre educação matemática que foram muito importantes para o meu desenvolvimento e muitas referências que utilizei em minha dissertação foram obtidas a partir da participação nesses momentos de aprendizagem que o mestrado oferece.

O contato com novos pensamentos e leituras voltadas para a educação me permitiram fazer uma reflexão sobre minhas ações enquanto educador, sobre os métodos que ensino que utilizava e as metodologias empregadas. Para Schon (1992), a reflexão na ação está na relação direta com toda ação presente, ou seja, o conhecimento na ação que pode ser entendido como a produção de uma pausa para refletir em meio à ação presente, vendo métodos e analisando perspectivas para melhorar a relação ensino/aprendizagem.

De acordo com Tacca (2009), torna-se importante que no processo de ensino/aprendizagem, que os professores assumam os desafios de pensar formas de investigação diversas, chegando a fazer diferentes tentativas. A importância que tem o professor refletir sobre sua própria prática e os desafios de pensar novas formas de investigação serviram de motivação em minha pesquisa para a dissertação de mestrado.

A partir dessas reflexões e algumas conversas com meu orientados, foi possível organizar ideias para o meu produto educacional, que tivesse a aplicação de uma metodologia diferenciada e o uso de tecnologia na educação com ênfase nas práticas didáticas. A utilização da tecnologia para auxiliar no processo educativo é uma tendência que ganha força a cada dia, no entanto não deve ser considerado como ponto central, e sim como recurso que dinamiza as aulas tornando-as mais agradável.

Aliado a importância da prática reflexiva do professor e o interesse pelas novas tecnologias presentes no ambiente educacional atual, é possível investigar e refletir sobre novos métodos de ensino que utilize a tecnologia para potencializar o processo de ensino/aprendizagem, foi pensando nisso que utilizei como intensão de pesquisa a utilização de um software que pudesse auxiliar no ensino de funções matemáticas.

O pensamento de continuar fazendo uso da tecnologia para ensinar matemática me levou a escolher o software Geogebra para intermediar minhas ações didáticas, por ser um software de geometria dinâmica que utilizei na graduação e de fácil acesso por ser um software gratuito, auxiliar na construção e no entendimento de vários elementos matemáticos, tornando as aulas mais interessantes e dinâmicas.

Para ter um domínio maior sobre o software Geogebra, participei da 14ª edição do Curso de Difusão de Conhecimento intitulado Curso de GeoGebra, na modalidade a distância, oferecido pela Unespar campus de Apucarana, afim de investigar as potencialidades do Geogebra para o ensino de matemática. Aprendi muito sobre as funcionalidades desse software e ao qual me dediquei durante a produção do meu produto educacional para esse mestrado profissional.

Stenhouse (1987) defende a ideia da investigação do professor na perspectiva da pesquisa-ação, trata-se de um primeiro suporte que é chamado atitude investigativa, ou seja, o professor fica predisposto para analisar sua própria pratica de uma forma crítica e sistemática, em outras palavras, o professor questiona e faz a manutenção do estado de dúvida.

Em virtude da pandemia provocada pelo SARS-CoV-2 (Novo Corona Vírus) foi preciso adaptar algumas ações de pesquisa para poder concluir esse trabalho, pois com o fechamento das universidades e o isolamento social ficou impraticável fazer o que tinha sido planejado com meu orientador, foi então que surgiu a ideia de fazer parte do produto em aulas virtuais, por tanto deixo vocês com a leitura de minha produção acadêmica resultante do mestrado profissional em educação matemática.

APRESENTAÇÃO

O trabalho aqui exposto é resultado de uma pesquisa realizada na UFPA, no campus universitário de Abaetetuba, como exigência à obtenção do título de mestre, pelo Programa de Pós-Graduação em Docência em Educação em Ciências e Matemática – PPGDOC, do Instituto de Educação Matemática e Científica – IEMCI, da Universidade Federal do Pará – UFPA/Campus Belém. Essa pesquisa tem o objetivo de elaborar um produto educacional destinado ao ensino de matemática, relacionando as tecnologias informáticas e o ensino de funções polinomiais, para recém ingressos nos cursos de ciências exatas que estudam as disciplinas de cálculo diferencial.

Estrutura do Trabalho

Além do Memorial contando parte da minha história de vida e caminhada acadêmica, esse trabalho apresenta seis seções que descrevemos a seguir: Seção 1 **–** Aborda a fundamentação teórica sobre a matemática, a tecnologia, e suas relações com a Educação Matemática, centrando nas tendências: Etnomatemática e Matemática e Tecnologia; Seção 2 – Aborda o software Geogebra, trazendo parte do seu histórico, funcionalidade e suas relações com o ensino de matemática, Seção 3 – Contém os percurso metodológico utilizado na pesquisa, situando o lócus da pesquisa, os sujeitos participantes, tipo de pesquisa, bem como sua metodologia; Seção 4 – Apresenta as experiências vividas no Campus Universitário de Abaetetuba, relatando experiências na disciplina Didática da Matemática ministrada aos alunos da turma de matemática 2015, além do seminário e a oficina realizada para os alunos do PCNA; Seção 5 – A construção do caderno de atividades e a aplicação de aulas on-line para o PCNA 2020; por fim, a Seção 6 – Traz a estrutura do produto educacional proposto nesse trabalho, identificando os pontos importantes da estrutura didática desse produto.

INTRODUÇÃO

As novas tecnologias de informática e comunicação vêm modificando significativamente as relações sociais, visto que em cada segmento da sociedade, torna-se cada vez mais frequente a interlocução, por meio do uso de recursos, como: computadores, celulares, tablets e smartphones. A escola frente a essa realidade não pode ficar excluída, devendo, o quanto antes, apropriar-se dos avanços tecnológicos e incorporá-los as práticas docentes.

De acordo com Lévy (1999), o impacto das tecnologias da informação e comunicação estabelece uma nova forma de pensar sobre o mundo que vem transformando distâncias, processos de comunicação e interação social, produtos e instrumentos que mediavam as ações dos sujeitos entre si e desses com o meio em que vivem. Assim, é comum, atualmente, que algumas competências adquiridas por uma pessoa no começo de seu percurso profissional, sofram mudanças quanto às práticas e os recursos materiais disponíveis, antes mesmo do fim de sua carreira, pois as tecnologias avançam de forma acelerada.

Gravina, et al. (2012) afirma que:

> Hoje, a variedade de recursos que temos à nossa disposição permite o avanço na discussão que trata de inserir a escola na *cultura do virtual*. A tecnologia digital coloca à nossa disposição ferramentas interativas que incorporam *sistemas dinâmicos de representação* na forma de objetos *concretoabstratos.* São concretos porque existem na tela do computador e podem ser manipulados e são abstratos porque respondem às nossas elaborações e construções mentais (GRAVINA, et al., 2012, p. 14).

A entrada dos recursos tecnológicos no ambiente escolar, exige-se dos professores uma nova postura frente à prática pedagógica. Conhecer as novas formas de aprender, ensinar e reconstruir conhecimentos, torna-se fundamental para a formação docente. Por meio dessas orientações é possível que o profissional se torne mais conscientes de seu compromisso, expressando sua criatividade e transformando seu ambiente escolar. (LÉVY, 1999, p.172)

A Problemática

O ensino de matemática, de modo geral, ainda é trabalhado a partir do tripé: apresentação dos conteúdos, exercícios pontuais dos conceitos e avaliação objetiva. O professor, em muitos casos, se utiliza dos livros didáticos como referência para suas aulas e quase não lança mão do uso de recursos tecnológicos disponíveis para apresentar os conteúdos disciplinares aos seus alunos (SILVA e GORGE, 2020, p. 53).

Compreendemos que para encaminharmos a reestruturação do ensino e aprendizagem da matemática escolar, os processos de ensino e aprendizagem devem ser dinâmicos, possibilitando a interação dos conteúdos disciplinares com outras áreas do conhecimento, assim como, promovendo o uso diversificado de instrumentos didáticos motivadores da aprendizagem. Nessa perspectiva, o ensino por ser dinâmico sofre constantes atualizações, novas formas de ensinar são criadas e o professor deve acompanhar tais atualizações (SILVA e GORGE, 2020, p. 53).

Alguns professores de matemática ainda primam pela manutenção de métodos de ensino aprendidos durante o período de formação inicial, ou no exercício da profissão, tornando o ensino preso a métodos antigos e limitados, como é o uso do livro didático com o repasse do conteúdo no quadro (MARIA e AMILTON, 2021, p. 2).

Isso dificulta a inserção de novas estratégias que potencializam a aprendizagem do aluno. Nesse sentido, as práticas e métodos utilizados favorecem a disseminação da ideia que a matemática é uma matéria difícil e pouco atraente. (FREIRE, et. al., 2011, p. 80).

Segundo Rosemar (2013, p. 215), nessa perspectiva, a forma com que o docente realiza seu trabalho é fundamental para vencer esse desafio de inserir movos métodos de ensino a sua prática. No entanto, uma resistência que os professores apresentam em sua prática docente é o uso dos recursos tecnológicos em suas aulas, por estarem presos a falsos paradigmas em relação a tecnologia e a sua aplicação na prática docente, ou seja, um professor que ainda tem dificuldade em usar as TIC’s na prática cotidiana e, sobretudo, em se apropriar delas para uso didático pedagógico.

Pensando nesse problema, que se faz presente no atual processo de ensino e aprendizagem da matemática escolar, onde existe uma dificuldade por parte dos professores para utilizarem os recursos tecnológicos que auxiliem a prática docente, que propomos discutir o uso do software Geogebra, com foco no estudo das funções polinomiais, assim como possibilitar a interação desse recurso tecnológico com a experiência cotidiana dos alunos a partir das práticas etnomatemáticas.

Assim, na perspectiva de inclusão de recursos tecnológicos nas aulas de matemática, levantamos o seguinte questionamento: Como o uso de softwares e aplicativos que tratam de conceitos matemáticos, podem ser utilizados em aulas presenciais e virtuais, favorecendo a aprendizagem e o exercício de conceitos e propriedades dos elementos matemáticos e suas relações operatórias?

Para responder a esse questionamento, apontamos como hipótese de trabalho, usar o software Geogebra como recurso didático que possibilitará uma melhor aprendizagem de funções polinomiais em nível de graduação, a partir de um caderno de atividades montado em formato digital (e-book) contendo conceitos, propriedades, características, tutoriais e exercícios que possibilitam um melhor entendimento sobre o comportamento de algumas funções, em especial o estudo sobre as condições de determinação do domínio e imagem de uma função polinomial.

Os Objetivos

Esse estudo, então, que visa contribuir com os estudantes que ingressam nos cursos de ciências exatas do campus da UFPA em Abaetetuba, para que tenham sucesso nas disciplinas de cálculo, traz como objetivo geral: Estruturar e implementar estratégias didáticas de inclusão de recursos tecnológicos nas aulas de matemática, partindo do software Geogebra, para exercitar a compreensão e manipulação de conceitos, elementos e propriedades nos estudos das funções polinomiais, aplicadas às disciplinas de cálculo diferencial.

No encaminhamento das composições didática e da estrutura de pesquisa que nos propomos nesse estudo, apontamos alguns objetivos específicos, norteadores das nossas ações:

- Utilizar novas tecnologias aproximando o ensino de matemática e as novas tendências metodológicas;

- Evidenciar o potencial do Geogebra como recurso didático para o ensino de funções em aulas presenciais e on-line.
- Elaborar caderno de atividades destinado ao ensino de funções polinomiais e trigonométricas que utilize o software Geogebra como recurso pedagógico para auxiliar no entendimento dos conceitos e propriedades matemáticas presentes nos conteúdos de função polinomial.

A Metodologia

Esta proposta de trabalho foi realizada em quatro etapas, que aqui descrevemos de maneira resumida, sendo elas respectivamente: Impressões iniciais na disciplina Didática da Matemática; elaboração de um caderno de atividades, aplicação de oficina de ensino e aprendizagem e postagem de vídeo-aulas.

Para iniciarmos nossas proposições, foi necessário fazer um levantamento das possibilidades de utilização do Geogebra em aulas de matemática e compreendermos o alcance de uma proposta de utilização desses recursos em proposições didáticas. Assim, participamos da disciplina Didática da Matemática realizada junto à turma do curso de licenciatura em Matemática, do ano de 2015, do campus de Abaetetuba.

Nessa disciplina de 60 horas, as estruturas didáticas voltadas ao ensino da Matemática foram aplicadas ao exercício de atividades elaboradas pelos estudantes, tendo com temática situações trazidas das suas vivências. Os estudantes foram distribuídos em equipes e trabalharam a descrição e tratamentos de dados, na forma de gráficos construídos no Geogebra.

A partir das impressões iniciais obtidas com as práticas na disciplina Didática da Matemática, realizamos uma oficina didática para os alunos ingressantes nos cursos de ciências exatas do campus de Abaetetuba, participantes do Programa de Cursos de Nivelamento da Aprendizagem - PCNA – Nivelamento em Matemática e Física.

Essa oficina foi realizada no período anterior ao início do ano letivo de 2019, de acordo com a programação do PCNA e contou com a participação de cerca de 80 alunos de três curso do campus de Abaetetuba.

Para a oficina com alunos do PCNA elaboramos um caderno de atividades, montado em formato digital (e-book) e disponibilizado no site do Laboratório de Ensino da Matemática da Amazônia Tocantina – LEMAT. Como material complementar às aulas presenciais, elaboramos vídeo aulas, que encontram-se disponíveis no site do LEMAT (https://www.osvaldosb.com/sala-de-estudos-1).

Com a ocorrência da pandemia do novo corona vírus – COVID 19, o distanciamento social levou à implantação do ensino remoto na UFPA, o que possibilitou a realização de aulas virtuais que contaram com a participação de estudantes de outros campi da UFPA, além de inscritos de outras universidades do Brasil, públicas e privadas, mostrando a importância e o alcance do projeto PCNA e o uso dos recursos tecnológicos para o ensino da matemática.

A partir dessas ações reforçamos nossa compreensão do Software de Geometria Dinâmica Geogebra, como recurso que permite o estudo de vários conteúdos matemáticos, a partir das visualizações dinâmicas para o processo de construção gráfica das funções e o uso de ferramentas que manipulam os gráficos, revelando características que não ficam evidentes para os estudantes quando colocadas de forma fixa em quadro bidimensional, comum às salas de aula, ou em material apostilado.

Ressaltamos também, que o caderno de atividades e as aulas virtuais, compõem o produto educacional, objeto-resultado desse estudo, estão acessíveis no site do LEMAT (https://www.osvaldosb.com/sala-de-estudos-1) como materiais de apoio ao PCNA realizado na UFPA/ Campus Abaetetuba.

1 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Nessa seção faremos a relação da matemática com a tecnologia, vendo as novas tendências didáticas e metodologias que emergem com o emprego da tecnologia no ensino da matemática, vendo a influência que os novos recursos tecnológicos exercem sobre as novas práticas de ensino e aprendizagem escolar.

A partir da abordagem feita sobre a matemática e a tecnologia, contemplaremos alguns autores que discutem o ensino de matemática e a etnomatemática, voltando o olhar para o cotidiano escolar, revelando alguns desafios e dificuldade relacionados ao ensino de matemática nas escolas, traçando as relações e papéis que cada personagem exerce (professor, aluno e escola) na construção do conhecimento matemático.

1.1 MATEMÁTICA E TECNOLOGIA

As Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação atualmente exercem um grande impacto e influência em relação ao emprego de novos métodos de ensino e aprendizagem. De fato, é preciso compreender que os computadores, notebooks e smartphones já são realidades presentes em muitas escolas no Brasil e no mundo, porém eles por si só não possuem a capacidade de ensinar o aluno, mas podem ser utilizados como recurso para auxiliar o professor nesse processo (SANTOS, 2018, p. 56)

Com a crescente valorização das tecnologias educacionais, agentes como: o aluno, o professor, a escola e a sociedade se beneficiam dessas práticas, uma vez que o conhecimento tecnológico quando aplicado de forma correta transforma o saber e práticas tradicionais de ensino, tornando as aulas dinâmicas e de fácil assimilação (SACCOL; SCHLEMMER; BARBOSA, 2011).

> [...] A escola, mais do que nunca, precisa se apropriar das novas linguagens audiovisuais e informáticas, bem como de suas interfaces, para atender a constantes exigências do mundo contemporâneo que, por sua vez, requer uma sintonia cada vez mais afinada com os conhecimentos, não só cientifico, mas também quanto aos valores étnico-culturais. Pois a escola é, especialmente, o lugar onde tudo isso

> pode ser sentido e vivido, como reflexo da sociedade em que os jovens estão inseridos (BETTEGA, 2010, p.15).

As constantes transformações ocasionadas pelas tecnologias digitais, tem impacto direto no funcionamento da sociedade, pois a partir da inserção de novas tecnologias em sala de aula, os alunos precisam ser preparados para atuar em um mercado de trabalho em constantes mudanças, onde ele terá que se adequar as profissões que ainda não existem, para usar tecnologias que ainda não foram inventadas e para resolver problemas que ainda não conhecemos, assim sendo, a maioria das futuras profissões envolverá de forma direta ou indireta a computação e tecnologias digitais (BRASIL, 2017, p. 475).

> As tecnologias digitais móveis provocam mudanças profundas na educação presencial e a distância. Na presencial, desenraizam o conceito de ensino/aprendizagem localizado e temporalizado. Podemos aprender desde vários lugares, ao mesmo tempo, *on* e *off-line*, juntos e separados. Na educação a distância permitem o equilíbrio entre a aprendizagem individual e a colaborativa, de forma que os alunos de qualquer lugar podem aprender em grupo, em rede, da forma flexível e adequada para cada aluno. (MORAN, 2013, p. 30).

As tecnologias, com o uso de softwares educacionais contribuem de maneira significativa para a aprendizagem dos alunos, sendo visto como um dos principais agentes de transformação da sociedade pelas modificações que exercem nos meios de produção e por suas consequências no cotidiano das pessoas.

Segundo a BNCC:

> Contudo, também é imprescindível que a escola compreenda e incorpore mais as novas linguagens e seus modos de funcionamento, desvendando possibilidades de comunicação (e também de manipulação), e que eduque para usos mais democráticos das tecnologias e para uma participação mais consciente na cultura digital. Ao aproveitar o potencial de comunicação do universo digital, a escola pode instituir novos modos de promover a aprendizagem, a interação e o compartilhamento de significados entre professores e estudantes (BRASIL, 2017. p. 63)

Os ambientes educacionais propícios à utilização das tecnologias digitais criam situações que induzem os alunos a serem agentes investigativos, conduzindo-os a levantarem hipóteses e buscarem possíveis soluções de problemas, a partir do uso de softwares na educação.

Atualmente existem muitos aplicativos e softwares destinados a promover o ensino de matemática em sala de aula de maneira dinâmica e mais atrativa aos alunos, com o propósito de tornar mais acessível: a compreensão dos conceitos e propriedades dos elementos matemáticos. O software de geometria dinâmica Geogebra é um programa que vem sendo utilizado com muita frequência no ensino de conteúdos matemáticos, os estudos e produções cientificas sobre a utilização desse recurso, aumentam significativamente a cada ano.

Gravina (2012), afirma que:

> A tecnologia digital coloca à nossa disposição diferentes ferramentas interativas que descortinam na tela do computador objetos dinâmicos e manipuláveis. E isso vem mostrando interessantes reflexos nas pesquisas em Educação Matemática, especialmente naquelas que têm foco nos imbricados processos de aprendizagem e de desenvolvimento cognitivo nos quais aspectos individuais e sociais se fazem presentes (GRAVINA, et al., 2012, p.13).

Uma estratégia que visa amenizar algumas dificuldades encontradas, despertar o interesse e facilitar o processo de ensino e aprendizagem é o uso de softwares e aplicativos no ensino de matemática, para realizar as visualizações gráficas, interpretações de propriedades e definições de funções.

Segundo Borba e Penteado (2012):

> O acesso à informática deve ser visto como um direito e, portanto, nas escolas públicas e particulares o estudante deve poder usufruir de uma educação que no momento atual inclua, no mínimo, uma “alfabetização tecnológica”. Tal alfabetização deve ser vista não como um Curso de Informática, mas, sim, como um aprender a ler essa nova mídia. Assim o computador deve estar inserido em atividades essenciais, tais como aprender a ler, escrever, compreender textos, entender gráficos, contar, desenvolver noções espaciais etc. (BORBA e PENTEADO, 2012, p.17).

As relações de reciprocidade na educação vêm sendo mais valorizadas ultimamente. As experiências com os alunos tornam-se fundamentais para proporcional ao professor a oportunidade de deixar de ser um mero transmissor de informação e passar a ter novos olhares para desenvolver novas formas de aprendizagem que possa estimular o aluno a ter um pensamento criativo e um fazer colaborativo. (FREIRE, et. al., 2011, p.84)

A possibilidade de utilizar as tecnologias digitais como via de comunicação entre professor e aluno torna-se cada vez mais relevante, tendo em vista que esse contato acaba despertando o interesse no momento em que os envolvidos possam a compartilhar informações relevantes ao ensino de matemática, possibilitando assim a troca de experiências. (SILVA, 2016, p. 29)

1.2 ENSINO DE MATEMÁTICA E A ETNOMATEMATICA

A Matemática é definida por Davis & Hersh (1995), como a "ciência da quantidade e do espaço" sendo conhecidas em sua forma mais simples como: Aritmética e Geometria. A primeira trata das várias espécies de regras de operação sobre números, estudando as várias situações do cotidiano em que são utilizadas. A Geometria, por sua vez, trata parcialmente de questões sobre medidas do espaço, além de tratar, também, de aspectos do espaço que possuem forte apelo estético e sendo ensinada segundo os esquemas apresentados por Euclides (300 a.C.), apresenta-se como uma ciência dedutiva (DAVIS & HERSH, 1995, p.25-26).

Para D'Anbrosio (2009), a matemática tem sido conceituada como a ciência dos números e das formas, caracterizada pelas relações e medidas, das inferências e suas características que norteiam a precisão, o rigor e a exatidão. E como tal, muitos professores e alunos ainda preservam esse ponto de vista em relação a matemática como uma matéria altamente rigorosa e cheia de regras.

Segundo Bishop (1999), a matemática é uma das disciplinas mais trabalhadas na escola, ao mesmo tempo em que é uma das menos compreendidas. Para o seu estudo são dispensadas as maiores cargas horárias se comparadas às demais disciplinas, excluindo-se o estudo da língua materna. Essa carga horária é, em muitos casos, pouco ou mal aproveitada em função do grande número de exercícios de repetição que são aplicados aos alunos, voltados à mecanização de suas maneiras de interpretar as relações matemáticas presentes em situações ideais, ou retiradas de um cotidiano "modificado" para a obtenção de resultados que evidenciam processos de manipulação de algoritmos, sem qualquer importância às implicações dessa sistemática sobre a realidade estudada.

Conforme Bishop (1999) essa aprendizagem baseada na mecanização das práticas matemáticas, moldadas em um restrito grupo de situações, envolvendo valores e condições ideais, tem como único propósito suprir as necessidades internas da própria Matemática. Nessa perspectiva, o ensino da Matemática centra-se na aplicação de exercícios, que "preparam" para outras sequências de exercícios, que por sua vez servirão para os seguintes, numa gradual elevação do nível de dificuldades de resolução dos problemas propostos.

A perspectiva, de relacionar os conteúdos matemáticos às representações das práticas culturais é uma forma de estabelecer ligações entre os conceitos e a identidade dos estudantes. Sendo, então, necessário ao ensino da matemática, por seu caráter de contextualização, tratar do uso das tecnologias para impulsionar essa interação entre matemática e cotidiano, como uma maneira criativa de oferecer aos alunos uma nova face do ensino da matemática escolar.

Barros, (2004.a) afirma que:

> No processo de contextualização da matemática escolar, é fundamental uma ampla visão da realidade em estudo. Porém, definir realidade não é uma tarefa muito fácil, haja vista que o próprio conceito é relativo e mutável, concebido, em geral, de forma diferenciada por cada grupo/segmento/individuo, pertencente a um ou mais grupos sociais. (BARROS, 2004.a. p. 30)

Sem liberdade criativa que impulsiona o senso de investigação no ensino da Matemática, o aluno passa a ser secundário no processo de ensino e aprendizagem e o rigor do cumprimento dos conteúdos e dos processos rígidos de avaliação, manifestam-se superiores aos objetivos da aprendizagem (BISHOP, 1999).

No exercício dessa matemática criativa e dinâmica, uma das alternativas é a relação da matemática com as práticas culturais, a partir da qual podemos compreender as dinâmicas da sociedade amazônica, que numa visão geral, observa-se que passa por grandes transformações, onde o desenvolvimento cultural, econômico, tecnológico e social necessita de uma nova postura que adeque o processo de ensino/aprendizagem aos novos mecanismos de apoio as práticas pedagógicas, em especial o ensino de matemática, tendo em vista que os números são tão essenciais, assim como saber ler e escrever e quase sempre está em tudo o que fazemos, implícita ou explicitamente (BRITO, M., LUCENA, I., SILVA, F. 2006, p. 5).

Saberes matemáticos essenciais como quantificar, calcular, fazer operações, medir, analisar gráficos, fazer tabelas, entre outros, proporcionam aos alunos aprenderem a utilizar e a incorporar os mais diversos instrumentos didático-científicos e tecnológicos, entre os quais podemos citar a calculadora, o termômetro, o smartphone e computadores (BRITO, M., LUCENA, I., SILVA, F. 2006, p. 5).

Nesse contexto, faz-se necessário integrar as práticas de ensino com os princípios da Etnomatemática, que procura aproximar conceitos e conteúdos matemáticos às experiências vivenciadas pelas populações identificadas em grupos sociais, criando a possibilidade da utilização da matemática (escolar/cientifica) como uma ferramenta cultural para o seu próprio processo de ensino/aprendizagem permitindo considerar de forma efetiva a inclusão destes grupos na apropriação do conhecimento sistematizado a partir de um processo de globalização (BRITO, M., LUCENA, I., SILVA, F. 2006, p. 6)

> A abordagem etnomatemática vai além do subsídio metodológico para o ensino da Matemática no contexto escolar. Não se trata, apenas, da melhoria do processo ensino/aprendizagem da Matemática, mas de desafiar e contestar o domínio de saberes e a valorização desse domínio por alguns, sob pena de destruir outros de seus próprios valores, gerando desigualdades e desrespeitos na vida das populações, extermínios de uns para ascensão de outros dentro das sociedades. Portanto, a construção ao etnomatemática para o trabalho pedagógico é, sobretudo, uma proposta essencial à ética humana (LUCENA, 2005, p.19).

2 O GEOGEBRA NO ENSINO DE MATEMÁTICA

Nessa seção falaremos sobre o software Geogebra, sua interface, ferramentas e algumas possibilidades para a utilização e aplicação no ensino de matemática. Além de um panorama de dissertações que demonstram as contribuições do Geogebra para o ensino de matemática,

O GeoGebra é um software de geometria dinâmica livre disponível no endereço eletrônico https://www.geogebra.org/, é destinado a todos os níveis de ensino que reúne geometria, álgebra, planilha de cálculo, gráficos, probabilidade, estatística e cálculos simbólicos em um único pacote. Suas ferramentas são fáceis de se usar e permite a construção de diversos objetos geométricos como: pontos, vetores, segmentos, retas, secções cônicas, gráficos representativos de funções e curvas parametrizadas; esses objetos matemáticos podem ser modificados dinamicamente a partir de uma interface gráfica que permite a interação do usuário com o software a partir de conceitos matemáticos e comandos de programação contidos no software.

O software Geogebra permite a inserção de valores, coordenadas e comandos que podem ser introduzidos diretamente em sua zona gráfica ou a partir da utilização do teclado no campo de entrada, além da vantagem de podermos trabalhar utilizando variáveis vinculadas a números, vetores e pontos. Dentre as várias possibilidades que o GeoGebra possui para a criação, podemos citar a facilidade de se trabalhar com funções, desde o nível básico até a determinação de derivadas e integrais, além de oferecer um conjunto de comandos relacionados com análise matemática, álgebra, álgebra linear, geometria analítica, matemática financeira, entre outros (SILVA, 2016, p. 50).

A palavra Geogebra vem da aglutinação das palavras (Geometria e Álgebra), esse software foi criado por Markus Hohenwarter para poder ser introduzido em um ambiente de sala de aula. O projeto piloto do software foi iniciado em 2001, na Universität Salzburg, já seu desenvolvimento foi realizado na Florida Atlantic University, sua característica principal se dá por ser um software/aplicativo, ou seja, é um programa multiplataforma que pode ser usado tanto em computadores quanto em celulares e tabletes.

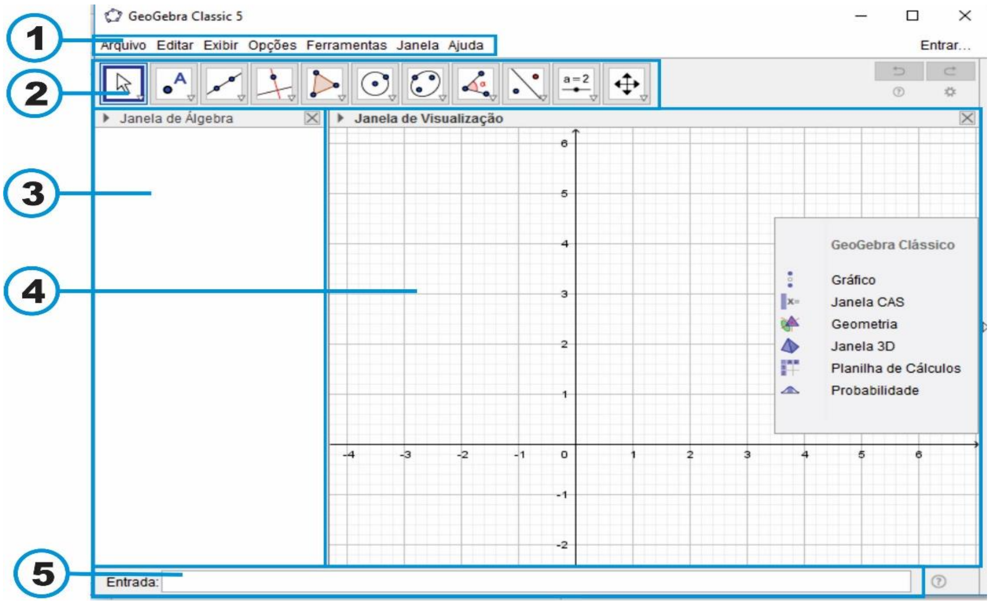
O software Geogebra permite realizar construções geométricas com a utilização de pontos, retas, segmentos de reta, polígonos etc., assim como permite inserir funções e alterar todos esses objetos dinamicamente após a construção estar finalizada. Portanto, o software Geogebra é capaz de lidar com variáveis para números, pontos, vetores, derivar e integrar funções, oferecer ainda comandos para se encontrar raízes e pontos extremos de uma função.

Atualmente o software Geogebra possui uma comunidade de milhões de usuários em praticamente todos os países e se tornou um líder na área de softwares de matemática dinâmica, apoiando o ensino e a aprendizagem em Ciência, Tecnologia, Engenharia e Matemática. Muitos trabalhos têm sido desenvolvidos utilizando o software Geogebra, como o Curso Básico e Avançado de Geogebra promovido pela Universidade Estadual do Paraná (UNESPAR - APUCARANA) disponível no site https://ogeogebra.com.br/cursos/, seu curso básico está na 17ª edição e o curso avançado na 1ª edição.

2.1 APRESENTAÇÃO DO SOFTWARE

A versão escolhida para o desenvolvimento desse trabalho foi o **Geogebra Clássico 5**, ele possui uma interface composta pelos seguintes elementos: 1 - Barra de Menus, 2 - Barra de Ferramentas, 3 - Janela de Álgebra, 4 - Janela de Visualização e 5 - Campo de Entrada de comandos. Esses cinco elementos são fundamentais para poder fazer um bom uso dos diversos recursos disponíveis nesse software.

FIGURA 01 – *Interface do GEOGEBRA*



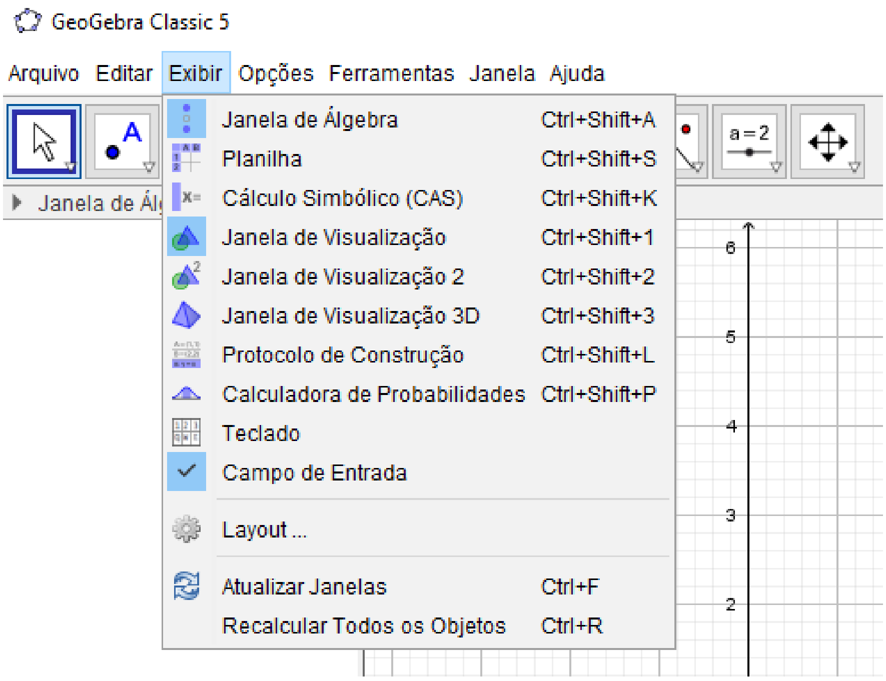
Fonte: *Acervo do autor, 2021.*

2.1.1 Barra de Menus

A Barra de menus está localizada na parte superior da zona gráfica, ela é composta pelos menus: Arquivo, Editar, Exibir, Opções, Ferramentas, Janela e Ajuda. Em cada opção existente na Barra de Menus existe uma lista de opções onde é possível manipular e personalizar a interface do Geogebra.

O *menu Exibir* merece um destaque especial, pois o mesmo possibilita a personalização da interface do Geogebra, é a partir desse menu que podemos exibir ou esconder diferentes elementos a exemplo da Janela de Álgebra, Janela Planilha, Janela Cálculo Simbólico (CAS), Janela de Visualização, Janela de Visualização 2, Janela de Visualização 3D, Protocolo de Construção, Calculadora de Probabilidades, Teclado e Campo de Entrada. Para ter acesso a essas opções na interface do Geogebra basta marcar/desmarcar o item no *menu exibir* (FRISKE, Et. al., 2016, p. 7).

FIGURA 02 – *Itens do Menu Exibir*

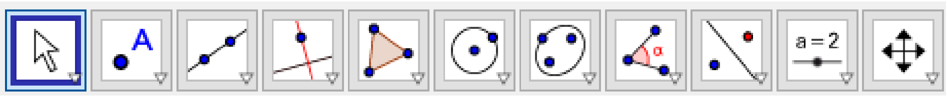


Fonte: *Acervo do autor, 2021.*

2.1.2 Barra de Ferramentas

Na barra de ferramentas encontramos todas as ferramentas necessárias para fazer as construções de objetos matemáticos, ela está dividida em 11 ícones com várias ferramentas auxiliares que serão vistas com mais detalhes a seguir.

FIGURA 03 – *Barra de Ferramentas*



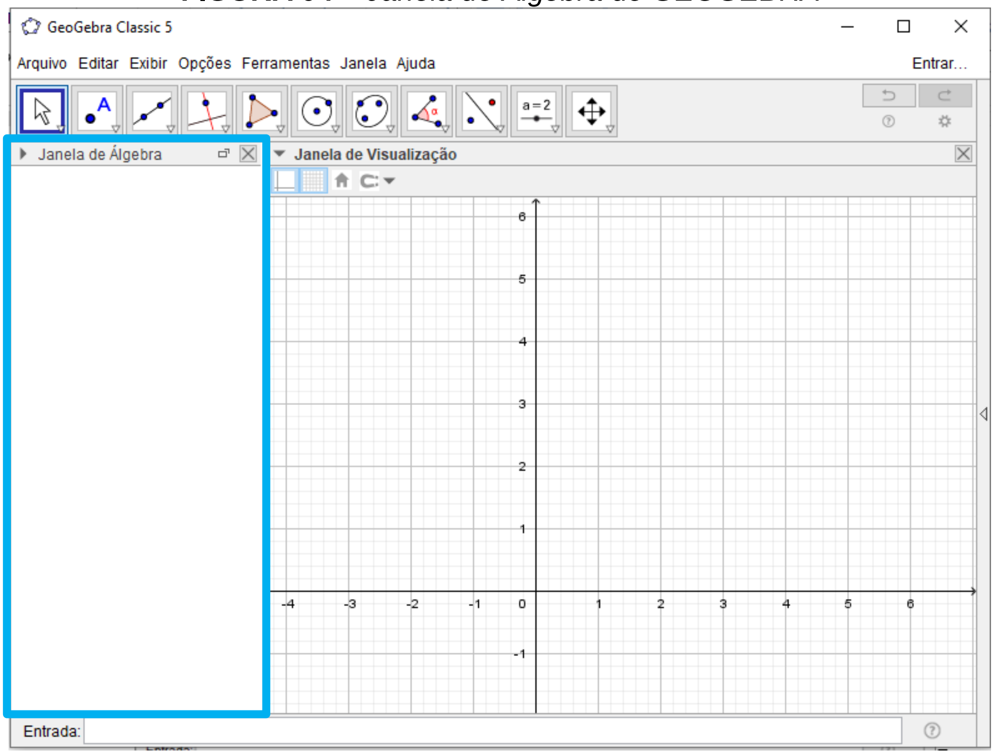
Fonte: *Acervo do autor, 2021.*

Cada botão possui várias ferramentas que possuem uma certa relação entre si. Para acessar essas ferramentas basta clicar ou ficar posicionado com a seta do mouse em cima da seta para baixo localizada no canto inferior direito do botão, dessa forma aparecera as várias ferramentas disponíveis (FRISKE, Et. al., 2016, p. 7).

2.1.3 Janela de Álgebra

A janela de Álgebra é responsável por mostrar informações relacionadas aos dados inseridos pelos usuários na Janela de Visualização e na Caixa de Entrada tais como valores, coordenadas, equações, funções etc. A cada operação feita pelo usuário os dados são registrados em ordem de criação na Janela de Álgebra, facilitando assim a visualização dos dados numéricos e algébricos dos objetos construídos pelo usuário.

FIGURA 04 – *Janela de Álgebra do GEOGEBRA*

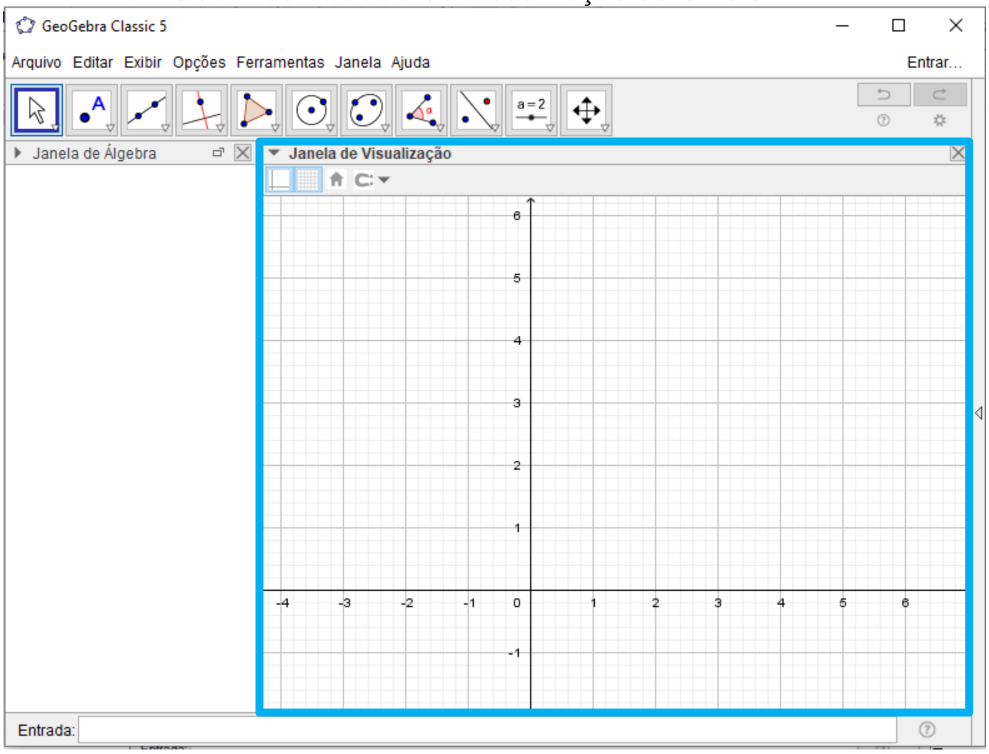


Fonte: *Acervo do autor, 2021.*

2.1.4 Janela de Visualização

A Janela de Visualização é responsável por representar as construções como: os gráficos de pontos, funções, vetores, segmentos, polígonos, retas, cônicas no plano 2D e espaço 3D. A alteração nesse ambiente gráfico pode ser feita a partir do toque do mouse, podendo fazer desde simples verificações até modificações na estrutura das construções.

FIGURA 05 – *Janela de Visualização do GEOGEBRA*



Fonte: *Acervo do autor, 2021.*

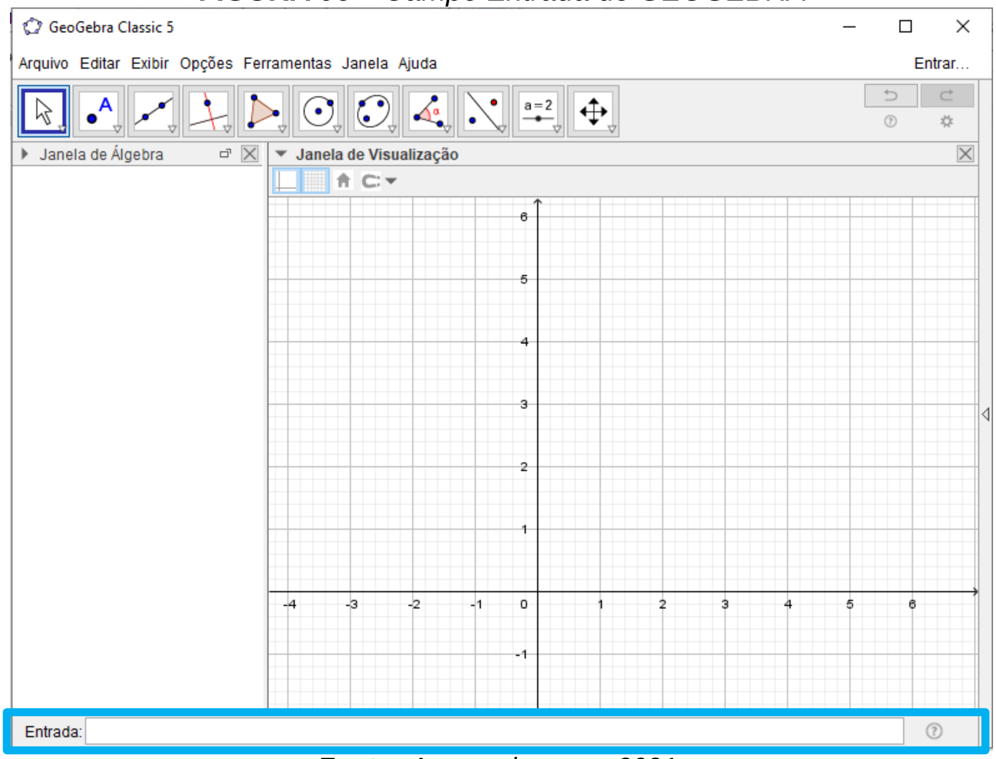
Para configurar a Janela de Visualização do Geogebra clique com o botão direito do mouse em algum espaço em branco da Janela de Visualização, em seguida no menu que aparece, clique na última opção chamada *Janela de Visualização*. A partir da janela (Preferências da Janela de Visualização) podemos alterar inúmeras propriedades como: dimensões, eixos, malha, unidades, distância, entre outras. (FRISKE, Et. al., 2016, p. 8)

2.1.5 Campo Entrada

A entrada de comandos, conhecida como *Campo Entrada* é responsável por possibilitar a inserção de comandos que fazem a mesma função dos itens da barra de ferramentas utilizando para isso apenas o teclado.

A inserção de comando depende de parâmetros específicos do Geogebra, dessa forma, para facilitar o seu manuseio pelo usuário é disponibilizado função autocompletar, ou seja, quando o usuário começa a digitar determinado texto como integral, derivada ou função, uma série de opções é mostrada, indicando os possíveis modos de se utilizar aquele comando e também os elementos necessários para que seja possível fazer a inserção correta do comando.

FIGURA 06 – *Campo Entrada do GEOGEBRA*



Fonte: *Acervo do autor, 2021.*

O Geogebra possui inúmeros comando que podem ser inseridos no Campo Entrada, entre eles estão comando para inserir: funções matemáticas, cálculo de áreas, comando 3D, álgebra, estatística, matemática financeira, probabilidade, transformações, vetores, matrizes, lógica, programação, etc.

2.2 O SOFTWARE GEOGEBRA E O ENSINO DE FUNÇÕES

O uso de softwares no ensino de funções vem aumentado a cada ano que passa, as mídias digitais e a facilitação de acesso a trabalhos acadêmicos disponíveis em bibliotecas universitárias digitais e acervos estaduais, nacionais e internacionais tem contribuído para a difusão de trabalhos envolvendo o uso de softwares para favorecer o ensino de funções como: Função Afim, Função Quadrática, Função Modular, Função Exponencial, Função Logarítmica e Funções Trigonométricas.

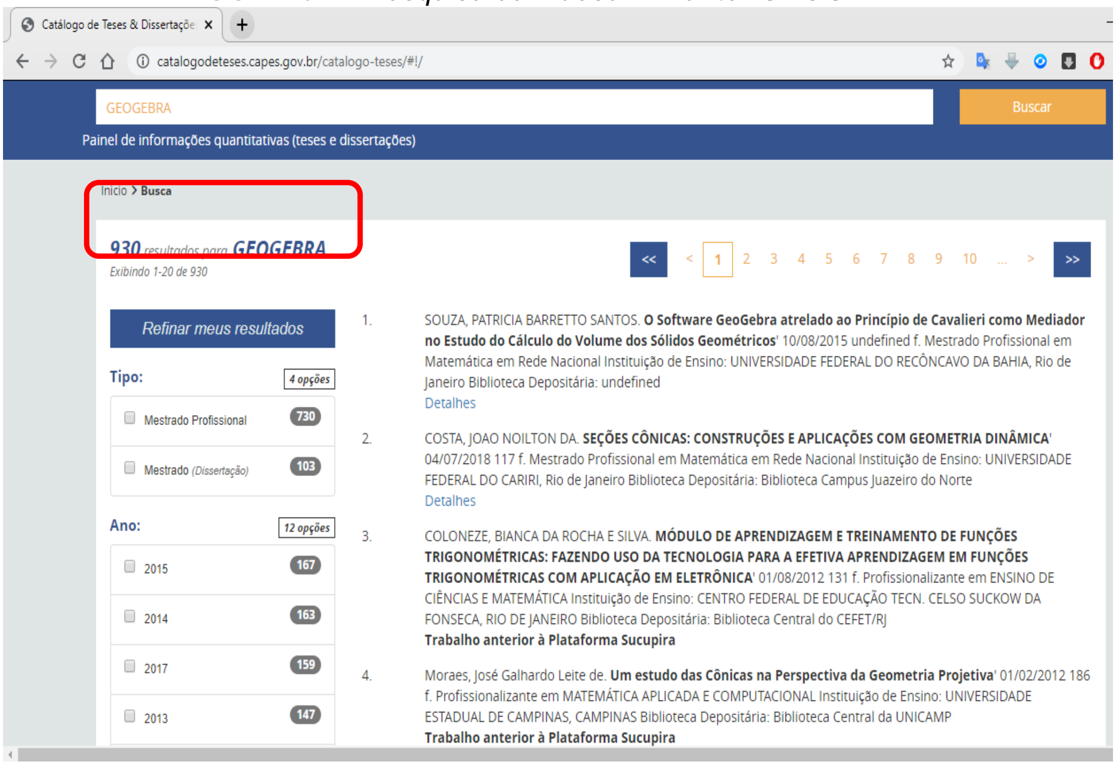
Segundo Catharina (2016), as principais características que destacam o software Geogebra quando comprado com os demais softwares de geometria dinâmica disponíveis atualmente são: o fato de ser um software gratuito, por ser utilizado por muitos autores e instituições em trabalhos acadêmicos demonstrando uma maior afinidade da academia com esse software, é um software trabalhado em vários idiomas e permite a abordagem de conteúdos matemáticos que vão desde o ensino fundamental, passando pelo ensino médio até a chegada no ensino superior.

A fim de obter um panorama sobre os trabalhos acadêmicos que utilizam o Geogebra aplicado ao ensino de funções e como estava sendo abordado esses conteúdos, foi realizado um pequeno levantamento bibliográfico em um acervo virtual de teses e dissertações.

As dissertações utilizadas nessa pesquisa estão disponíveis no Banco de Teses e dissertações da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoas de Nível Superior (CAPES) e foram pesquisadas compreendendo o período de 2015 a 2017, pretende-se com o presente estudo compreender de que forma o software Geogebra está sendo utilizado e quais contribuições ele fornece para o ensino de matemática em especial no ensino de funções.

No processo de construção de uma compreensão em relação ao uso do software Geogebra no ensino de funções, utilizamos como mecanismo de busca o banco de teses e dissertações da capes, através da plataforma digital Sucupira, durante o processo de pesquisa, foi utilizado o descritor “GEOGEBRA” e foram encontrados 930 arquivos.

FIGURA 07 – *Pesquisa com descriminante “GEOGEBRA”*



Fonte: *Capes, 2021.*

A partir do resultado encontrado, o processo metodológico foi dividido em quatro etapas que listaremos a segui.

1 – Utilização dos filtros disponibilizados pela Capes para encontrar trabalhos relacionados ao ensino de matemática com a utilização do software Geogebra.

2 – Seleção de dissertações utilizando o título para identificar os trabalhos que utilizam o Geogebra para o ensino de funções.

3 – Seleção de dissertações a partir da leitura do resumo, discriminando as funções existentes em cada trabalho.

4 – Análise dos estudos das funções encontradas utilizando as três etapas anteriores.

2.2.1 Filtragem Capes

A plataforma Capes oferece alguns recursos de filtragem de resultados com o intuito de buscar um melhor refinamento das pesquisas realizadas, dessa forma foram utilizados alguns filtro de pesquisa que ajudaram no refinamento da dissertações encontradas proporcionando uma melhor aproximação com o estudo pretendido que é a associação do Geogebra no processo de ensino dos conteúdos matemáticos. Dessa forma foram utilizados os seguintes filtros mostrados na tabela a seguir:

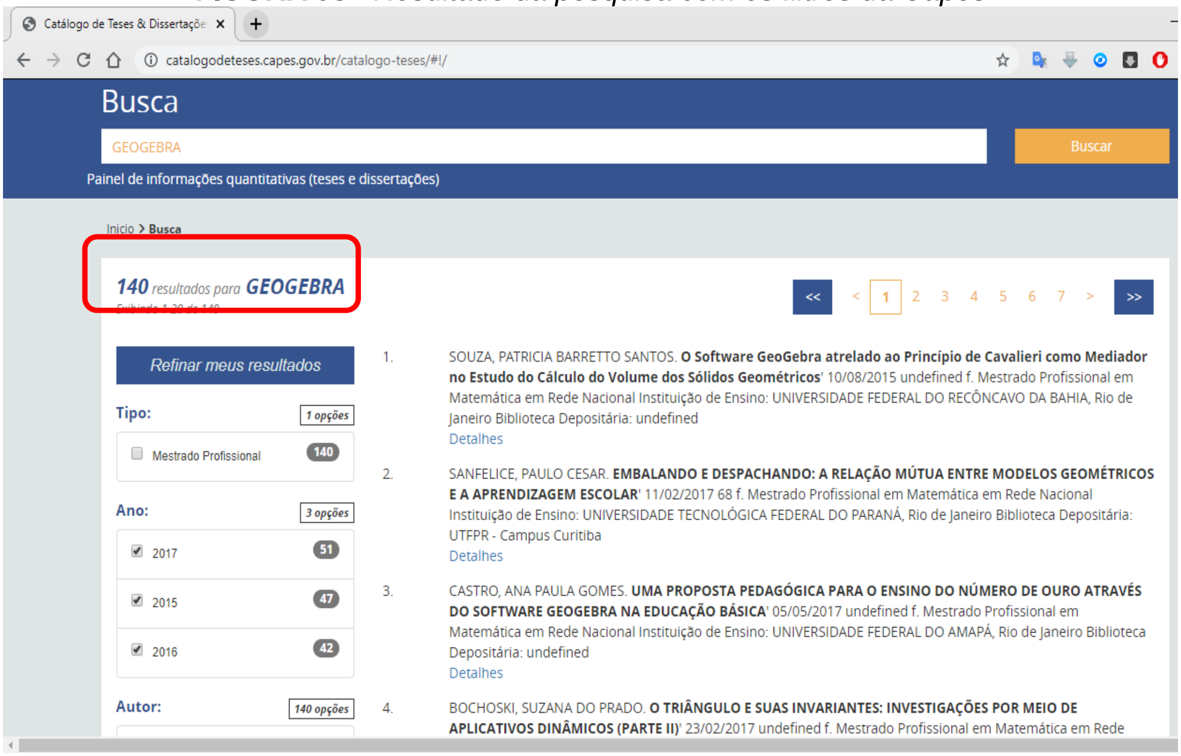
TABELA 1 - *Filtros disponibilizados pela Capes*

FILTROS	ASPECTO DO FILTRO
ANO DE PRODUÇÃO	2015 a 2017
GRANDE ÁREA DE CONHECIMENTO	Ciências Exatas e da Terra
ÁREA DE CONHECIMENTO	Matemática
ÁREA DE CONCENTRAÇÃO	Ensino de matemática

Fonte: *Acervo do autor, 2021.*

A partir dos filtros descritos na tabela (1) foi obtido o resultado de 140 dissertações, sendo 47 no ano de 2015, 42 em 2016 e 51 em 2017. As dissertações encontradas continham assuntos aleatórios relacionados à álgebra, aritmética e geometria, as três grandes áreas da matemática, necessitando assim de um novo recurso para a análise desses trabalhos.

FIGURA 08 - *Resultado da pesquisa com os filtros da Capes*



Fonte: *Capes, 2021.*

2.2.2 Seleção de Dissertações por Título

Nessa etapa da pesquisa a filtragem foi direcionada ao foco dos estudos, com os resultados obtidos na primeira etapa foi realizada uma nova análise a partir das 140 dissertações encontradas, foi aplicada a seleção dos trabalhos levando em consideração os títulos das dissertações relacionados ao conteúdo de funções. Após essa análise, encontramos 41 dissertações que tinham no título a afinidade com o conteúdo de função, a seguir mostraremos a partir da tabela (2), a divisão dessas dissertações nos três anos pesquisados.

TABELA 2 – *Divisão de dissertações por ano*

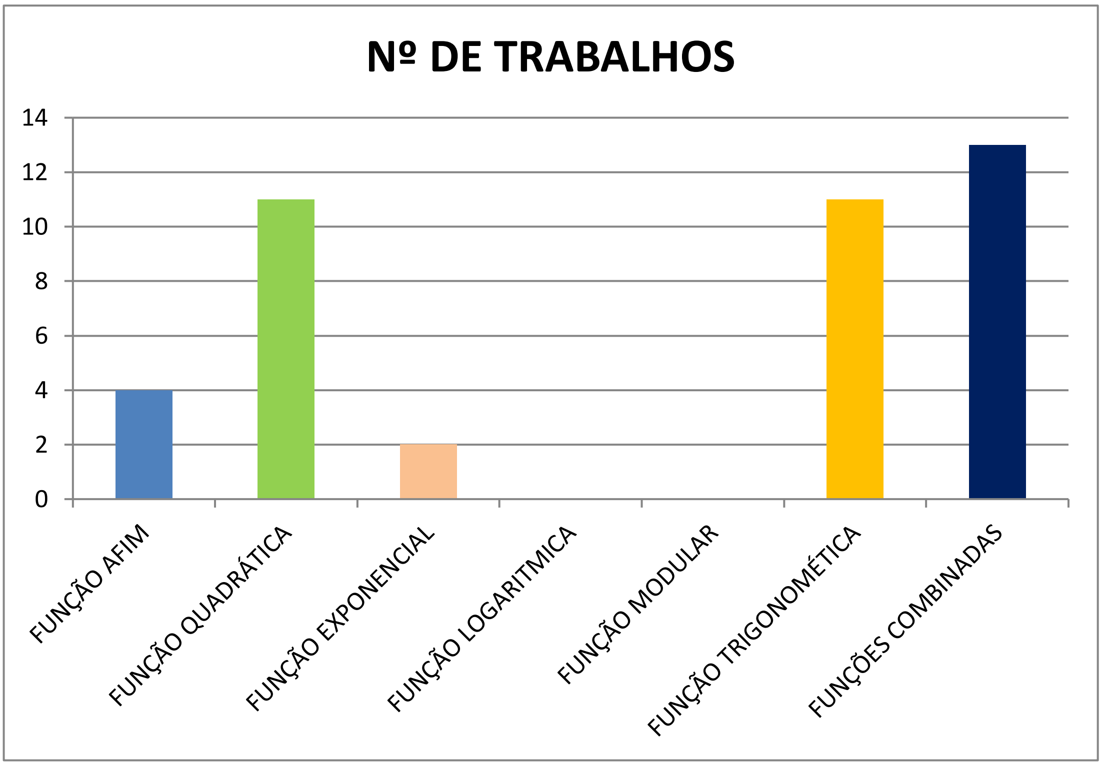
ANO DE PUBLICAÇÃO	2015	2016	2017
Nº DE TRABALHOS	14	13	14

Fonte: *Acervo do autor, 2021.*

2.2.3 Seleção de Dissertação por Resumo

Com a pesquisa direcionada ao foco deste artigo que é o ensino de funções utilizando o software Geogebra, a terceira etapa foi realizada fazendo uma leitura dos resumos das 41 dissertações selecionadas na etapa anterior, a partir da leitura foi possível identificar qual função era predominante em cada trabalho e ainda identificar trabalhos que envolviam mais de uma função. Com essa análise encontramos quais as funções estavam ensinadas a partir do uso do Geogebra como ferramenta de dinamização do ensino/aprendizagem. O gráfico a seguir ilustra os resultados obtidos com a análise dos resumos.

FIGURA 09 – *Seleção de trabalhos por função*



Fonte: *Acervo do autor, 2021.*

Nessa etapa da construção do panorama sobre as dissertações que envolvem o ensino de funções com a utilização do Geogebra, foi possível perceber que existe uma predominância de trabalhos cujo foco não é centrado em apenas uma função, no entanto algumas funções ainda não são trabalhadas utilizando o Geogebra, podemos destacar a função logarítmica e a função modular, as quais não foram encontradas em trabalhos que evidenciassem o ensino dessas funções com a utilização do Geogebra. Também notou-se que nenhum dos trabalhos encontrados consegue contemplar todas as funções, no máximo foi trabalhado com duas funções e essas são levadas em alguns casos ao esgotamento de suas possibilidades.

A partir desse levantamento de informações a respeito do uso do Geogebra no ensino de funções, surgiu a possibilidade de estar trabalhando com esse software para produzir um material que contemplasse todas as funções estudadas na matemática e pudesse ser útil para o desenvolvimento acadêmico dos alunos que ingressam nos cursos de ciências exatas.

3 PERCURSO DA PESQUISA

Nesta seção trataremos dos procedimentos metodológicos utilizados para o desenvolvimento da pesquisa, apontando: a finalidade da pesquisa, os objetivos, a abordagem, o método de raciocínio e os procedimentos de levantamento dos dados.

Segundo Prodanov e Freitas (2013), a investigação cientifica depende de um conjunto de procedimentos intelectuais e técnicos para que os objetivos da pesquisa possam ser atingidos, no caso a produção do conhecimento, dessa forma deve-se ter bem definido os métodos e os procedimentos adequados para distinguir o conhecimento cientifico do conhecimento popular.

Sobre o conhecimento popular, Lakatos e Marconi (2003), afirmam que:

> O conhecimento vulgar ou popular, às vezes denominado senso comum, não se distingue do conhecimento científico nem pela veracidade nem pela natureza do objeto conhecido: o que os diferencia é a forma, o modo ou o método e os instrumentos do "conhecer", (LAKATOS; MARCONI, 2003, p.76).

3.1 TIPO DE PESQUISA

Em conformidade com os estudos adquiridos sobre o conhecimento cientifico, a presente pesquisa tem finalidade aplicada, de natureza explicativa, com abordagem qualitativa, utiliza-se do método hipotético-dedutivo, fundamentada a partir de estudos de caso.

Sobre o estudo de caso, Gil (2008), afirma que:

> O estudo de caso é caracterizado pelo estudo profundo e exaustivo de um ou de poucos objetos, de maneira a permitir o seu conhecimento amplo e detalhado, tarefa praticamente impossível mediante os outros tipos de delineamentos considerados, (GIL, 2008, p. 57).

3.2 SITUANDO O LOCUS DA PESQUISA[4]

O Campus Universitário de Abaetetuba, também, conhecido como Campus do Baixo Tocantins, foi implantado em 1987, sob a coordenação da professora Conceição Solano, indicada a esse cargo pelo reitor da época, o Profº. José Seixas Lourenço. O campus se localiza no município de Abaetetuba que é composto por mais de 60 ilhas bastante povoadas, 30 comunidades que vivem à beira da estrada, além da cidade, zona urbana, com quase aproximadamente 170 mil habitantes, segundo o último censo do IBGE.

FIGURA 10 – *Campus Universitário de Abaetetuba-Pa*

Fonte: *facebook.com/UFPA-Campus-Universitrio-de-Abaetetuba*

Os primeiros cursos de graduação ofertados no Campus de Abaetetuba foram às licenciaturas em Matemática, Letras, Pedagogia, História e Geografia, todos em regime intervalar (atual Período Intensivo). As aulas eram ministradas nas escolas cedidas na época pela prefeitura municipal local, por meio de parceria com a UFPA, o que se tornou de fundamental importância para a implantação do Campus, pois, além de oferecer espaço físico para o desenvolvimento dos cursos, alojamento para professores, doou também as terras para a construção do campus. Através desta parceria, o campus pode contar, ainda, com a cedência de servidores municipais para apoio administrativo como vigilantes, secretários e motoristas.

4 Fonte: http://cubt.ufpa.br/index.php/historico

Cursos - Dos cursos de graduação que começaram no Campus, apenas o de Matemática, Letras Língua Portuguesa e Pedagogia continuam suas atividades, os mais recentes são os cursos de Engenharia Industrial, Educação do Campo, Serviço Social, Física e Letras Espanhol.

3.2.1 Laboratório de Ensino de Matemática da Amazônia Tocantina

O Laboratório de Ensino de Matemática da Amazônia Tocantina (LEMAT) é um espaço de atividades de ensino, pesquisa e extensão que foi criado para contribuir com a melhoria da formação inicial e continuada de professores das escolas da rede pública e privada, bem como prestar auxílio para alunos do ensino fundamental e médio, promovendo uma interação entre o Campus universitário de Abaetetuba e as escolas da região da Amazônia Tocantina, de modo a promover a troca de experiências entre docentes e discentes dos cursos de Ciências Exatas, assim como alunos e professores das escolas da região.

FIGURA 11 – *Inauguração do Laboratório LEMAT*

Fonte: *osvaldosb.com*

As práticas realizadas no LEMAT visam instrumentalizar os discentes do curso de Licenciatura em Matemática com metodologias de ensino alternativas, proporcionado a melhoria do processo de ensino e aprendizagem, orientando para a construção e utilização de materiais didáticos manipuláveis, jogos didáticos e da inserção de novas tecnologias no ensino de matemática.

O LEMAT é um ambiente destinado a promover o diálogo com intuito de somar esforços para desenvolver alternativas para o aperfeiçoamento de futuros professores. As metodologias utilizadas no LEMAT são contextualizadas, interdisciplinares e desenvolvidas a partir de projetos realizados pelos discentes dos cursos de ciências exatas durante sua caminhada acadêmica, tornando o discente um sujeito ativo no processo de construção de metodologias alternativas e aprendizagem significativa.

A Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologias, Campus de Abaetetuba - FACET, o Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede – PROFMAT de Abaetetuba e a Superintendência de Assistência Estudantil (SAEST) são parceiros do LEMAT e colaboram para ajudar o LEMAT a disponibilizar atividades como: eventos de matemática, minicursos, palestras, encontros de estudantes, mesas redondas, seminários, plantões de aula, espaço de pesquisa, eventos culturais, caravanas escolas e feiras de ciências. Essas atividades no LEMAT são supervisionadas por bolsistas, estagiários, voluntários e professores colaboradores compromissados com o desenvolvimento e divulgação do conhecimento matemático.

FIGURA 12 – *Eventos Realizados pelo LEMAT*

Fonte: *osvandosb.com*

Existe alguns grupos de estudos vinculados ao LEMAT como é o caso do Grupo de Estudos das Práticas Etnomatemática da Amazônia Tocantina- GETNOMA que desenvolve ações de estudos e pesquisa que tratam da identidade das práticas matemáticas dos grupos: de ribeirinhos, agricultores, quilombolas e urbanos da Amazônia Tocantina. Também está presente o grupo de Astronomia SÍRIUS, que estuda os fundamentos da Astronomia para elaborar proposições metodológicas para a difusão dos conhecimentos sobre o cosmo em espaços escolares e não escolares.

Recentemente foi vinculado ao LEMAT o Grupo de Estudos e Pesquisas das Práticas Educativas de Canaã dos Carajas - GEPECC, que tem por finalidade, estudar a implementação e a proposição de metodologias para a educação básica no nos espaços escolares e não escolares do município de Canaã dos Carajás.

O LEMAT tem como patrono o Professor Ademar Carcaes, que foi Formador de professores de Matemática e Pedagogia, por muitos anos na UFPA, sendo importante colaborador da interiorização da UFPA, ministrando disciplinas em diversos municípios do Pará.

FIGURA 13 – *Placa em homenagem ao Professor Ademar Cascaes*

Fonte: *osvaldosb.com*

3.3 CONHECENDO OS SUJEITOS DA PESQUISA

3.3.1 Turma de Matemática 2015

Como sujeitos de pesquisa, foi escolhido os discentes da turma de Licenciatura Plena em Matemática do ano de 2015 (noturno) da Universidade Federal do Pará – UFPA/Campus de Abaetetuba, composta por 28 discentes, sendo um misto entre discentes da própria turma e discentes de turmas anteriores que foram integrados a esta. A escolha da turma para essa pesquisa foi em virtude de estarem cursando o último ano do curso de graduação, dessa forma, são sujeitos que já possuem conhecimentos sobre os conceitos matemáticos e poderiam ser colocados em debate refletir sobre estratégias metodológicas e didáticas para o ensino de funções.

3.3.2 Discentes do PCNA

Também foram escolhidos como sujeitos de pesquisa os discentes do Programa de Cursos de Nivelamento da Aprendizagem – (PCNA), esses discentes em sua totalidade são calouros[5] dos cursos de Matemática, Física e Engenharia Industrial do UFPA/Campus Abaetetuba, que tem a oportunidade de receber uma preparação inicial (conhecida como pré-cálculo) para poder enfrentar algumas disciplinas que exigem um conhecimento melhor sobre o cálculo.

FIGURA 14 – *Programa de Cursos de Nivelamento da Aprendizagem*

PCNA - ABAETETUBA
Física e Matemática

Fonte: *osvaldosb.com/pcna-abaetetuba*

[5] Calouros é como são chamados os alunos que passam no vestibular e ingressam na Universidade

O PCNA é realizado em parceria com o Laboratório de Ensino de Matemática da Amazônia Tocantina - LEMAT e a Superintendência de Assistência Estudantil (SAEST), sua dinâmica consiste na realização de aulas, minicursos e oficinas mediadas por bolsistas do LEMAT, ou seja, discentes que estão entre o terceiro e sétimo semestre de graduação. Esses bolsistas são responsáveis por elaborar e executar aulas diferenciadas para proporcionar uma melhor compreensão sobre alguns assuntos como função, limite, derivada, física básica e etc. O PCNA é realizado no sempre antes do início das aulas e também no período de férias do meio do ano.

As atividades do PCNA se estendem por todo o semestre com atendimento aos discentes por meio do Plantão de Dúvidas, onde os bolsistas do LEMAT ficam disponíveis para tirar dúvidas sobre assuntos relacionados ao cálculo, ou seja, o PCNA não é apenas um reforço, trata-se de um instrumento que transforma a vida do estudante que nele ingressam na UFPA, pois, muitos entram nos cursos desestimulados pelas lacunas de aprendizagem que trazem do ensino básico, e se não forem apoiados podem vir a ter problemas no desenvolvimento académico.

3.4 ETAPAS DA PESQUISA

PRIMEIRA ETAPA

A primeira etapa desta pesquisa se dá pela realização de um estudo de caso na UFPA/ Campus Abaetetuba, com os discentes da turma de Matemática 2015 por intermédio da disciplina Didática da Matemática, nessa etapa serão ministradas aulas visando relacionar a didática da matemática a partir do ensino de funções utilizando o Geogebra como recurso didático. Após ministrar as aulas, será realizado um seminário onde os discentes irão ministrar uma aula, apresentando um plano de aula utilizando o Geogebra no ensino de funções, contextualizando a matemática com o cotidiano amazônico e aspectos presentes na região e a partir dessa interação será feito um levantamento desses planos de aula que serão apresentados e fazer a composição de um material teste sobre o ensino de funções utilizando o Geogebra como recurso didático em sala de aula.

A metodologia utilizada nesse estudo de caso foi dividida em três momentos para facilitar o entendimento, a coleta de informações a respeito do que estava sendo aprendido, se aquele aprendizado seria significativo para aqueles futuros professores e ainda se eles utilizariam aqueles métodos didáticos em suas aulas futuramente exercendo a função de professor. Dessa forma a metodologia ficou dividida da seguinte forma: o primeiro momento foi destinado as aulas expositivas com os conceitos de funções, o segundo momento para as aulas com tutoriais de criação com o Geogebra e o terceiro momento foi o seminário de apresentação de trabalhos utilizando o Geogebra.

SEGUNDA ETAPA

A partir das impressões iniciais obtidas com as práticas na disciplina Didática da Matemática e da construção do material teste, será feito outro estudo de caso a partir da realização de uma oficina didática ministrada para os alunos do Programa de Cursos de Nivelamento da Aprendizagem – (PCNA) disponibilizado para os calouros dos cursos de Licenciatura em Matemática, Física, Engenharia Industrial e Educação do Campo por intermédio do Laboratório de Ensino da Matemática da Amazônia Tocantina – LEMAT. Essa etapa de testagem será fundamental para ter uma noção sobre o comportamento dos alunos na utilização de um material especifico sobre funções e o uso de um recurso tecnológico para visualizar de forma dinâmica e prática o comportamento das funções a partir da variação do domínio e imagem. Para avaliar essa etapa, será realizada uma prova sobre os conteúdos abordados na oficina para fazer a análise das dificuldades dos alunos.

TERCEIRA ETAPA

Essa etapa será a construção de um caderno de atividades elaborado a partir das dificuldades encontradas na primeira oficina para o PCNA, o caderno de atividades contará com um manual sobre o uso do Geogebra e suas principais ferramentas, conteúdos sobre funções (afim, quadrática, modular, exponencial, logarítmica e trigonométrica), tutoriais de criação de gráfico de funções no Geogebra e exercícios dando ênfase ao domínio da função, visando o aproveitamento das habilidades adquiridas para compreender melhor o comportamento gráfico das funções nos estudos de limite e derivada, estudos esses que são repassados para os discentes no primeiro ano da graduação.

QUARTA ETAPA

Como última etapa serão ministradas aulas on-line a partir da plataforma digital Google Meet e pelo canal do Laboratório de Ensino de Matemática da Amazônia Tocantina (OSVALDO BARROS LEMAT) no Youtube (https://www.youtube.com/channel/UCqxljBeBGwNlmTj9Mf3pEMA), serão três aulas abordando as principais características e propriedades de funções, comportamento gráfico e estudo do domínio e imagem das funções. Essa série de aulas fazem parte das atividades do Programa de Cursos de Nivelamento da Aprendizagem – (PCNA) que sofreu uma adaptação para ser realizado de forma on-line em meio a pandemia da Covid-19 (corona vírus) que afetou o mundo no início do ano de 2020.

Ao final das aulas os discentes tecerão comentários sobre a experiência de utilizar o software Geogebra em aulas on-line para fazer o estudo dos gráficos, domínio e imagem das funções, se a utilização desse recurso tecnológico ajudou para um melhor entendimento das funções estudas e seu potencial para a compreensão de outros conteúdos.

4 AS EXPERIÊNCIAS NO CAMPUS DE ABAETETUBA

Nessa seção será abordada as vivencias realizadas na Universidade Federal do Pará, campus Universitário de Abaetetuba, fazendo um levantamento das possibilidades de utilização do Geogebra a partir da participação na disciplina Didática da Matemática onde foi tratado temáticas e situações trazidas das vivências dos alunos, culminando na realização de uma oficina didática para 80 alunos ingressantes nos cursos de ciências exatas do campus de Abaetetuba.

4.1 DISCIPLINA DIDÁTICA DA MATEMÁTICA

O estudo de caso feito na Universidade Federal do Pará / Campus Abaetetuba, com os discentes da turma de Matemática 2015 por intermédio da disciplina Didática da Matemática, ministrada pelo Prof. Dr. Osvaldo dos Santos Barros. A proposta da disciplina foi mostrar diferentes formas didáticas de se ensinar matemática a partir da utilização da tecnologia para facilitar a troca de informações e a transmissão do conhecimento matemático, priorizando os conceitos matemáticos utilizados no ensino de funções, verificando as estratégias e possibilidades de se ensinar funções a partir do uso da tecnologia.

A metodologia utilizada na disciplina Didática da Matemática foi dividida em duas etapas, uma que contemplou o estudo teórico sobre a didática na matemática, baseado em leituras de livros e artigos contidos na ementa da disciplina e a outra etapa destinada ao uso do Geogebra no ensino de funções, fazendo a ligação do que foi aprendido na teoria, aplicado a partir do uso de um recurso tecnológico utilizado de forma didática na perspectiva de um assunto especifico da matemática que é o ensino de funções. Utilizaremos nesse estudo apenas a etapa que trata do ensino de funções utilizando o Geogebra como recurso tecnológico.

4.1.1 As Aulas Utilizando o Geogebra

As aulas para a turma de Matemática 2015 eram ministradas a noite com início às 19 horas e término as 21:30 horas, esse tempo foi dividido em dois momentos, o primeiro momento tinha duração de 75 minutos e era destinado a leitura e discussões de textos referente ao estudo teórico sobre a didática da matemática, em cada aula ministrada pelo professor Osvaldo ele cobrava um relatório da aula anterior, esse método ele já utiliza a algum tempo e faz parte de sua metodologia de ensino. Equipes foram formadas e cada uma ficava responsável por conduzir as leituras e discussões referentes ao capítulo de livro ou texto usado na aula.

FIGURA 15 – *Aula de Didática da Matemática com o Prof. Dr. Osvaldo Barros*

Fonte: *Acervo do autor, 2021.*

O segundo momento da aula tinha duração de 60 minutos, era destinado a utilização do Geogebra como recurso didático, durante a aula os discentes eram estimulados a pensar em formas e métodos para poder inserir esse recurso tecnológico de forma didática. O assunto contemplado para essas aulas foi o estudo de funções, sendo destinado uma aula para discutir o estudo de cada função, a ordem das funções estudadas foi a função afim, quadrática, modular, exponencial, logarítmica e por último a trigonométrica.

A dinâmica das aulas consistia em um debate inicial sobre os conceitos e propriedades de cada função, nesse momento era dado um espaço para os discentes discutirem sobre o assunto e dividirem suas experiências trazidas do ensino médio, bem como a forma com que enxergavam as características de cada função. Depois do debate era repassado o conteúdo no quadro de forma clara e objetiva, em seguida utilizávamos o Geogebra para analisar cada propriedade, como no caso da função afim, onde a alteração dos coeficientes angular e linear modificam o comportamento de uma reta, essas variações eram percebidas de forma dinâmica e exercitadas no software.

Durante as aulas foi utilizado o Geogebra tanto no computador como no smartphone, dessa forma o aprendizado era mais significativo, pois muitos discente não tinham computador para levar para as aulas ou tinham medo de levar por estudarem a noite e tinham receio de serem assaltados, porém a maioria possuía smartphone com sistema operacional compatível com as versões do Geogebra.

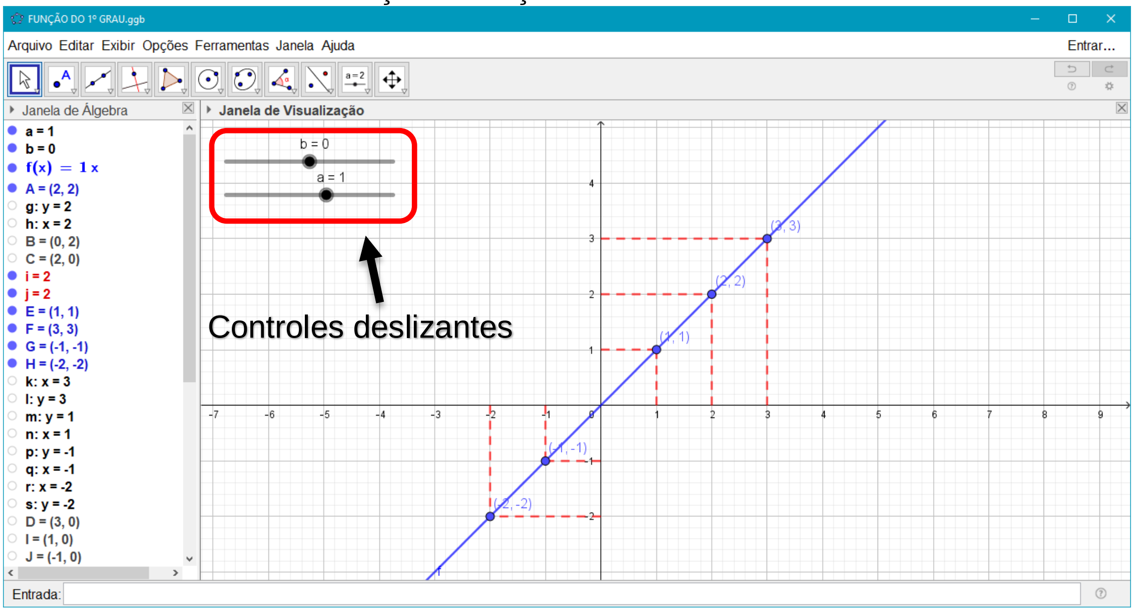
FIGURA 16 – *Utilização do Geogebra no ensino de função*

Fonte: *Acervo do autor, 2021.*

As construções realizadas no Geogebra eram feitas passo a passo e na medida em que os discentes executavam as ações, novos passos eram inseridos e nos casos de dúvida era feito o comentário a respeito das ferramentas que estavam sendo usadas e as possíveis formas de utiliza-las. Durante a construção das funções, suas propriedades e características eram visualizadas e comentadas pelos discentes e isso contribuía muito no desenvolvimento das atividades.

O Geogebra nos possibilita construir funções que podem ser tanto estáticas quanto moveis, sendo assim, utilizávamos as funções genéricas, a exemplo da função Afim $f(x) = ax + b$, dessa forma foi possível criar controles deslizantes para esses coeficientes que ao ser movimentados modificava o comportamento da função, podendo ser melhor analisada.

FIGURA 17 – *Construção da função afim utilizando controles deslizantes*



Fonte: *Acervo do autor, 2021.*

4.1.2 Tutoriais de Criação de Funções Passo a Passo

A medida em que os discentes entendiam a dinâmica das aulas, aprendiam as ferramentas do Geogebra e aplicavam no ensino de funções, novas tarefas eram agregadas para aprimorar suas habilidades, foi então que utilizamos os tutoriais de criação, que se trata de um conjunto de rotinas enumeradas de tal forma que o discente pudesse construir a função passo a passo, que se feito de maneira correta obtinha o mesmo resultado contido no tutorial.

FIGURA 18 – *Tutorial de construção do Ciclo Trigonométrico*

Fonte: *Acervo do autor, 2021.*

A utilização de tutoriais foi importante para o desenvolvimento do estudo sobre funções e a utilização do software Geogebra, pois foi possível identificar entre os discentes, aqueles que já conseguiam realizar as tarefas e os que tinham dificuldade ou não tinham assimilado a utilização de alguma ferramenta do Geogebra. Quando era identificado que um ou mais discentes estavam com dificuldades, era feito um acompanhamento mais minucioso para poder identificar a dificuldade e poder corrigi-la.

4.1.3 Seminário dos Planos de Aula

O seminário de apresentação dos planos de aula produzidos pelos discentes da turma de matemática 2015 da UFPA foi realizado na sala 03 do bloco de Ciências Exatas (FACET) do campus de Abaetetuba. A turma havia sido dividida em equipes de 4 ou 5 pessoas que apresentariam um plano de aula, trabalhando os conceitos de função utilizando o Geogebra, fazendo aplicações desses conceitos em rotinas que são presentes no nosso contexto amazônico.

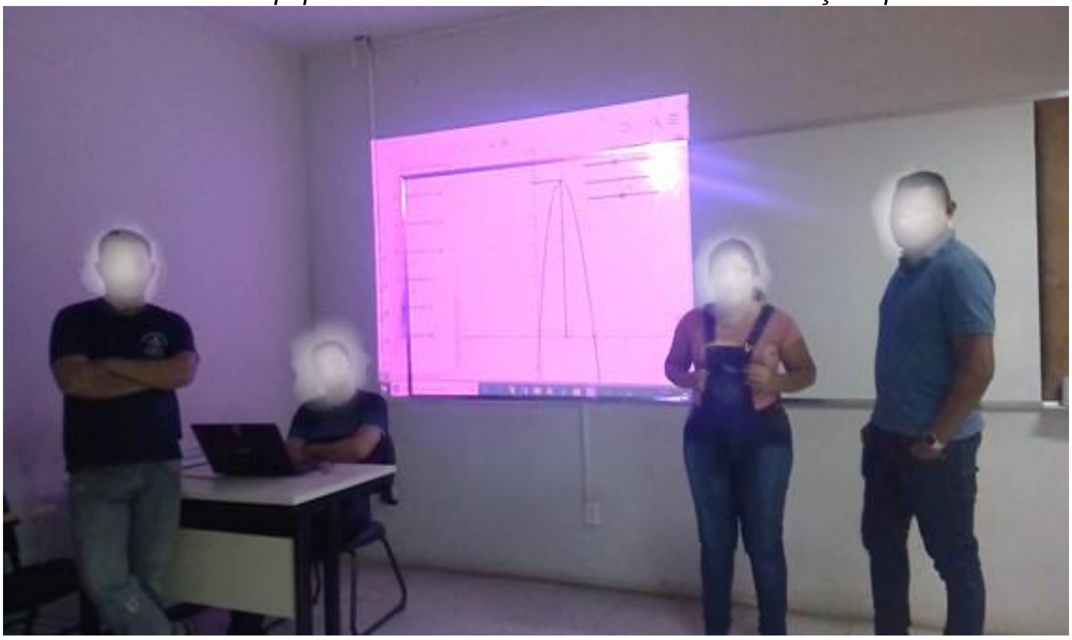
O tempo de apresentação disponibilizado para cada equipe era de 30 minutos, nesse momento os discentes comentaram um pouco sobre os seus planos de aula, o tipo de função que seria utilizada e fizeram a aplicada da metodologia de ensino da função escolhida utilizando o Geogebra. Dentre os trabalhos apresentados foram selecionados três para serem expostos nesse estudo, são eles:

Equipe 1: O Cálculo de área utilizando a função quadrática

A equipe responsável pela apresentação justificou o uso do tema em questão por acreditarem que o conteúdo sendo abordado dessa forma possa trazer uma melhor compreensão para o aluno sobre o uso da função quadrática, que não se limita apenas a encontrar valores de máximo, mínimo e raízes da função.

O objetivo da equipe foi demostrar que é possível fazer e compreender o cálculo de área utilizando a função quadrática, identificando a estrutura da função quando aplicada na obtenção de uma área especifica e diferenciando das demais funções matemáticas.

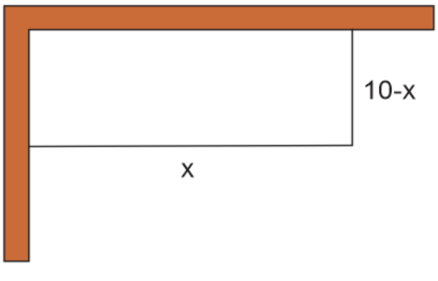
FIGURA 19 – *Equipe 1: O Cálculo de área utilizando a função quadrática*



Fonte: *Acervo do autor, 2021.*

A equipe utilizou a seguinte questão para apresentar sua proposta didática de utilização do Geogebra no ensino da função do 2º grau.

Questão: Uma pessoa tem cachorros e está interessada em montar e cercar um canil de forma retangular no quintal de sua casa, para tanto ela compra 10 metros de cerca, utiliza a cerca e o espaço já cercado ao fazer o canil no canto do quintal utilizando os muros como lados do retângulo.



Para solucionar a questão era preciso encontrar o x que fosse satisfatório afim de ter um melhor aproveitamento da cerca de 10m obtendo a maior área possível para o canil, dessa forma foi preciso fazer o cálculo de área onde a equipe obteve a seguinte equação:

$$Area = b * h \tag{1}$$

$$Area = x * (10 - x) \tag{2}$$

$$Area = -x^2 + 10x \tag{3}$$

A equipe apresentou como prática didática, a utilização de comandos inseridos no campo de entrada do Geogebra para poder solucionar o problema em questão, a partir da inserção desses comandos foram criados os seguintes elementos matemáticos descritos na tabela a seguir:

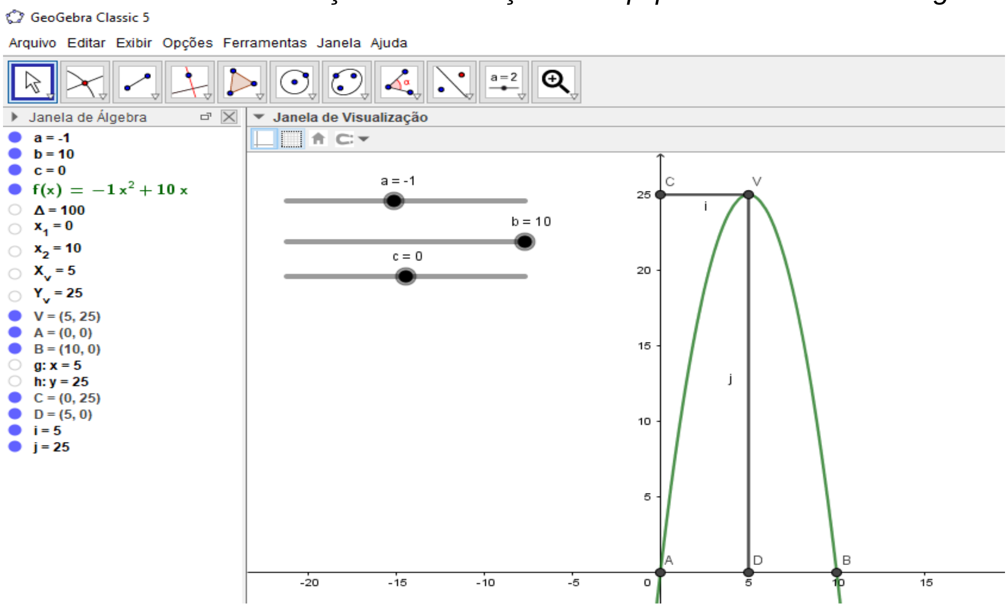
TABELA 3 – *Comandos para Geogebra*

COMANDOS DE ENTRADA	
Coeficientes	(Controles deslizantes) A, B e C
Função do 2º grau	$f(x)=a*x^2+b*x+c$
Discriminante	$\Delta=b^2-4*a*c$
Primeira solução	x_1=(-b +sqrt(Δ))/2*a
Segunda solução	x_2=(-b -sqrt(Δ))/2*a
Vértice de x	x_v=-b/2*a
Vértice de y	y_v=-Δ/4*a
Ponto correspondente ao Vértice da equação	V=(x_v, y_v)

Fonte: *Acervo do autor, 2021.*

A resolução da questão proposta não estava relacionada apenas a encontra o x_1 e x_2, a solução para o problema em questão estava na obtenção dos valores de x_v e y_v, onde o x_v representa o tamanho que o x assume para ser solução e o y_v mostra a área que a figura terá quando assumir esse x como solução do problema. Logo a solução encontrada para o problema foi: x=5 e a área=25

FIGURA 20 – *Demonstração da resolução da equipe 1 utilizando o Geogebra*



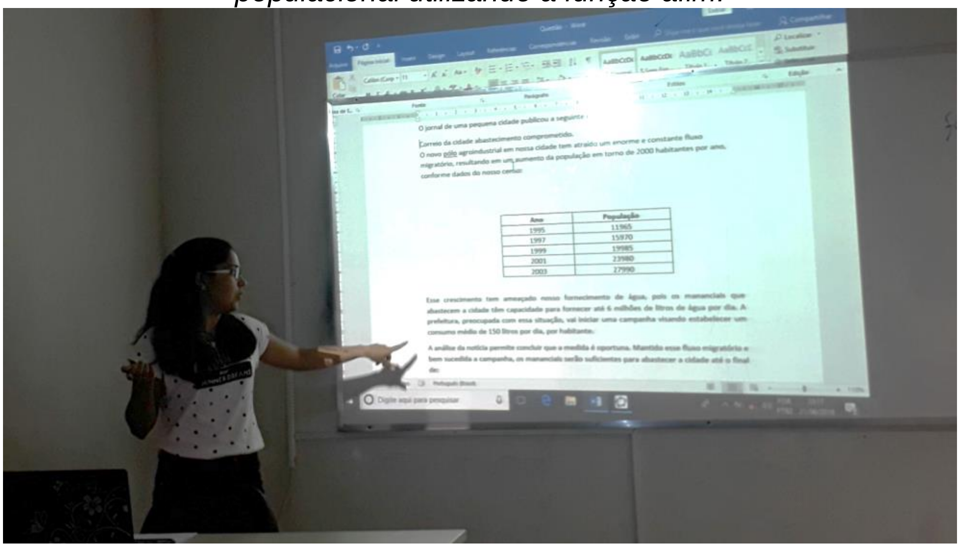
Fonte: *Adaptação da equipe 1, 2021.*

Equipe 2: Investimento em saneamento básico de acordo com o crescimento populacional utilizando a função do afim.

A equipe responsável pela apresentação justificou o uso do tema em questão por se tratar de uma abordagem cotidiana que pode ocorrer em qualquer cidade da nossa região, relacionando o crescimento populacional com os investimentos em infraestrutura realizados para o saneamento básico em uma determinada cidade.

O objetivo da equipe foi demostrar que é possível fazer uma comparação do crescimento populacional com os investimentos em saneamento básico a partir da utilização da função afim, identificando se os investimentos feitos por uma determinada prefeitura correspondiam ao crescimento de sua população.

FIGURA 21 – *Equipe 2: Investimento em saneamento básico de acordo com o crescimento populacional utilizando a função afim.*



Fonte: *Acervo do autor, 2021.*

A equipe utilizou a seguinte questão do ENEM-2014 para apresentar sua proposta didática de utilização do Geogebra no ensino da função do afim.

ENEM-2014: O jornal de uma pequena cidade publicou a seguinte notícia:

CORREIO DA CIDADE

O novo pólo agroindustrial em nossa cidade tem atraído um enorme e constante fluxo migratório, resultando em um aumento da população em torno de <u>2000 habitantes por ano</u>, conforme dados do nosso censo:

Ano	População
1995	11.965
1997	15.970
1999	19.985
2001	23.980
2003	27.990

Esse crescimento tem ameaçado nosso fornecimento de água, pois os mananciais que abastecem a cidade têm capacidade para fornecer até 6 milhões de litros de água por dia. A prefeitura, preocupada com essa situação, vai iniciar uma campanha visando estabelecer um consumo médio de 150 litros por dia, por habitante.

A análise da notícia permite concluir que a medida é oportuna. Mantido esse fluxo migratório e bem sucedida a campanha, os mananciais serão suficientes para abastecer a cidade até o final de:

a) 2005.

b) 2006.

c) 2007.

d) 2008.

e) 2009.

A solução proposta pela equipe consiste primeiramente na obtenção da função que regeria o crescimento da população, e posteriormente a inserção dessa função no Geogebra, desse modo utilizaram a seguinte equação.

$$Maximo\ de\ habitantes = \frac{6.000.000}{150} = 40.000 \tag{4}$$

Sendo o ano de 2003 a referência atual de acordo com o senso, e a cada ano a população cresce em 2000 pessoas, logo a função encontrada foi:

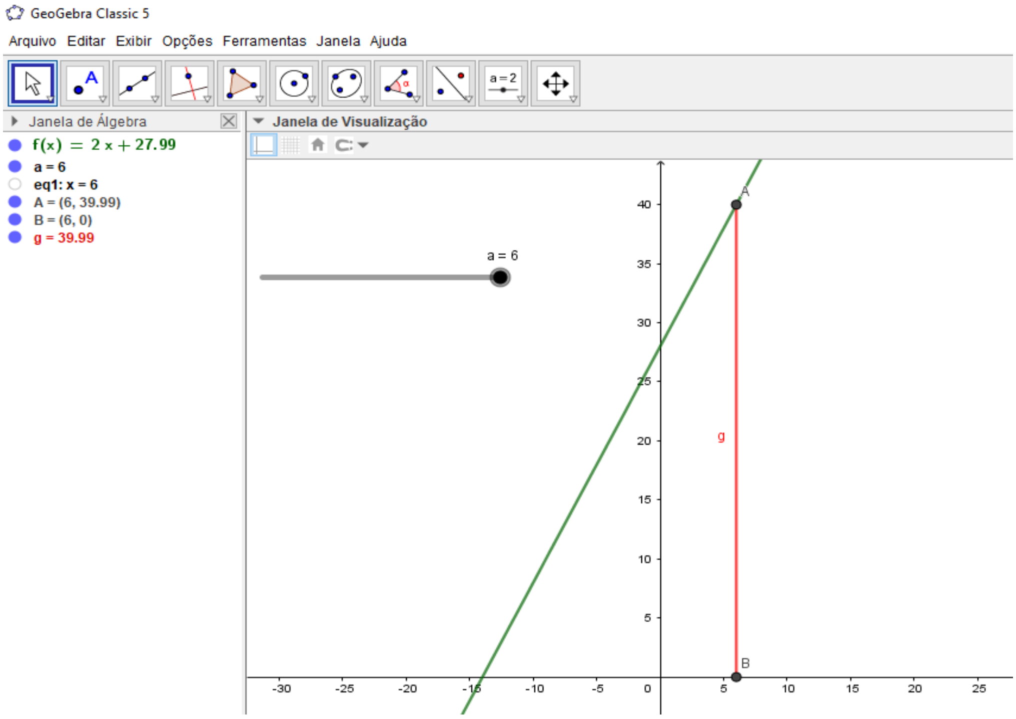
$$f(x) = 2000x + 27990 \tag{5}$$

Para facilitar a compreensão e inserção da função no Geogebra, a mesma foi adaptada, sendo dividida por 1000, logo ficou da seguinte forma:

$$f(x) = 2x + 27{,}99 \tag{6}$$

A partir da obtenção do máximo de habitantes e da função que regeria esse crescimento, foi utilizado o Geogebra para montar o gráfico dessa função e fazer a dinamização do crescimento populacional utilizando os controles deslizantes disponíveis no Geogebra. A construção gráfica da equipe demonstrou que de acordo com a função encontrada, o limite de abastecimento por habitantes seria atingido em 6 anos, logo fazendo a soma do ano de 2003 mais os 6 anos previsto na construção do Geogebra encontrou-se o ano de 2009 como solução para o problema.

FIGURA 22 – *Demonstração da resolução da equipe 2 utilizando o Geogebra*



Fonte: *Adaptação da equipe 2, 2021.*

Equipe 3: Custo Relacionado ao Consumo de Açaí utilizando a função afim

A equipe responsável pela apresentação justificou o uso do tema em questão por se tratar de uma prática muito conhecida no cotidiano abaetetubense que é o comércio do açaí[6], fruto muito consumido na cidade e faz parte do cardápio no almoço e jantar da maioria dos cidadãos abaetetubenses.

O objetivo da equipe foi demostrar que é possível fazer uso da função afim no cotidiano, aplicando a mesma na compra e venda de açaí e fazendo a demonstração dessa relação a partir da utilização do Geogebra a fim de produzir um melhor entendimento ao aluno sobre a utilização de funções matemáticas no cotidiano.

FIGURA 23 – *Equipe 3: Custo relacionado ao consumo de açaí utilizando a função polinomial do 1º grau.*

Fonte: *Acervo do autor, 2021.*

A equipe utilizou a seguinte questão para apresentar sua proposta didática de utilização do Geogebra no ensino da função do 1º grau a partir do consumo de açaí.

Questão: O custo de açaí na região abaetetubense é de R$ 5,00 por litro. Determine a equação que expresse o custo em função da quantidade e esboce o gráfico da função.

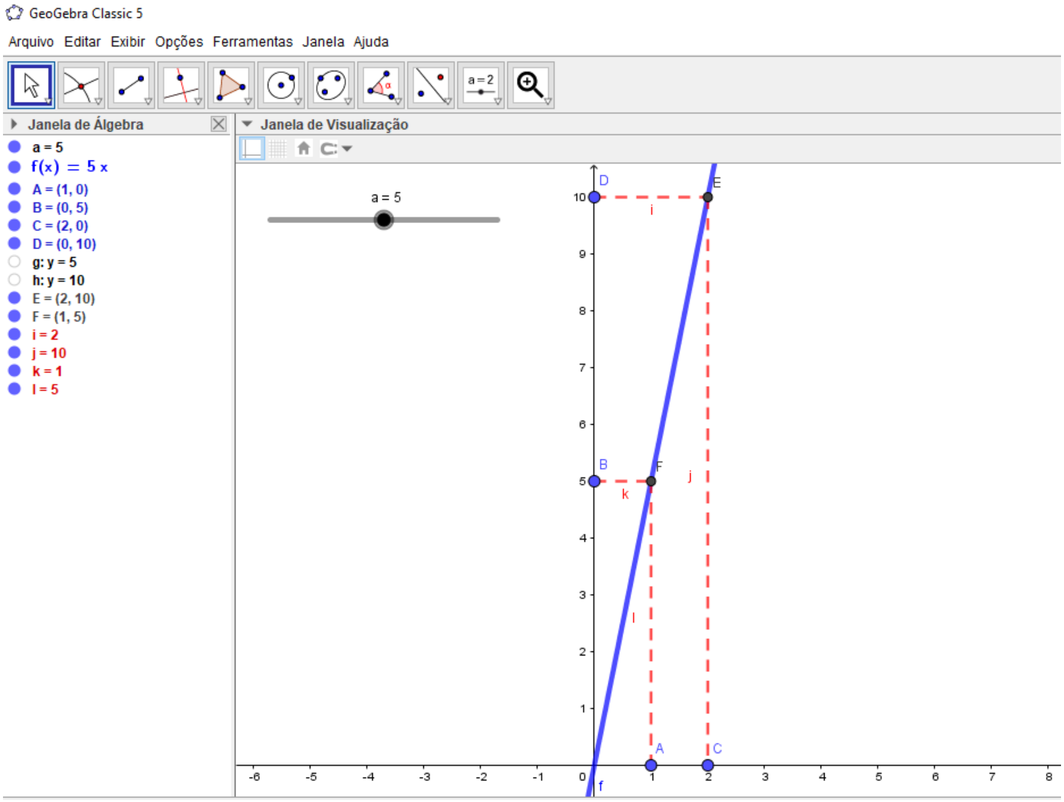
A solução proposta pela equipe consiste primeiramente na obtenção da função que rege o custo para consumo de açaí, e posteriormente a inserção dessa função no Geogebra, sendo assim, de acordo com a questão utilizada, foi construída a seguinte função.

[6] O açaí, também conhecido como juçara, assai ou açaí-do-pará, é um fruto que cresce nas palmeiras da região amazônica na América do Sul, atualmente sendo considerado um superalimento por ser uma fonte calórica, rica em antioxidantes e nutrientes com poder anti-inflamatório. Este fruto é parecido com a uva de cor roxa e o nome científico é *Euterpe oleracea.*

$$f(x) = 5x \tag{7}$$

Após a obtenção da função que regeria o custo para o consumo de açaí, foi utilizado o Geogebra para montar o gráfico dessa função e observar o comportamento do custo de acordo com o consumo do açaí.

FIGURA 24 – *Demonstração da resolução da equipe 3 utilizando o Geogebra*



Fonte: *Adaptação da equipe 3, 2021.*

4.2 OFICINA PARA OS ALUNOS DO PCNA 2019.1

A oficina para os alunos do PCNA foi elaborada com o objetivo de analisar a aceitação do Geogebra para o ensino de funções, pois alguns desses estudantes entram na universidade sem saber que existe softwares que podem ser usados como auxilio em aulas de matemática. A oficina foi pensada também para fazer uma testagem dos métodos sugeridos pelos discentes da turma de Matemática 2015 no momento do seminário, onde surgiram várias abordagem e métodos diferentes de ensinar funções com o Geogebra.

A oficina foi idealizada para ter duração de dois dias e a metodologia utilizada foi dividida em dois momentos, sendo eles: A criação do material didático no laboratório LEMAT e a execução da oficina que tratará da apresentação e manuseio do Geogebra no ensino de funções. Para a realização dessa oficina foi levado em consideração aspectos como: o curto espaço de tempo disponibilizado para apresentação e manuseio do Geogebra com os discentes, a adaptação da oficina para poder ser ministrada no Auditório do Campus de Abaetetuba em virtude da quantidade de alunos inscritos no PCNA e a disponibilidades dos recursos oferecidos pelo LEMAT para a realização da oficina.

4.2.1 Criação do Material Didático no Laboratório LEMAT

A partir das experiências obtidas na disciplina Didática da Matemática, ministrada para os discentes da turma de Matemática 2015 da UFPA/Campus Abaetetuba, foi possível evidenciar que a maioria dos trabalhos apresentados no seminário apontou para o uso do Geogebra no ensino das funções afim e quadrática, essas foram as funções mais exploradas no sentido de mostrar com riqueza de detalhes as propriedades dessas funções associadas ao cotidiano dos discentes e a realidade presente na região Amazônica Tocantina.

Desse modo foi realizado um pequeno estudo sobre as funções afim e quadrática, suas características, propriedades e suas visualizações no Geogebra, associado a esse estudo utilizamos também alguns procedimentos adotados pelos discentes nas apresentações do seminário de didática da matemática.

Com o auxílio dos bolsistas do PCNA, do professor Osvaldo Barros e dos estudos realizados com discentes da turma de Matemática 2015 criamos um material didático com conceitos e propriedades das funções afim e quadrática, trazendo gráficos e exercícios preparados para serem executados em um ambiente computacional proporcionado pelo Geogebra. Esse material foi integrado ao caderno de estudos oferecido pelo LEMAT aos alunos do PCNA, pois, a cada edição esse caderno é atualizado e melhorado de acordo com as experiências obtidas durante a execução das edições anteriores do PCNA.

FIGURA 25 – *Caderno de matemática do PCNA 2019*

Fonte: *Acervo do autor, 2021.*

4.2.2 Execução da Oficina

Durante a Semana do Calouro[7], foi realizada a oficina "ENSINO DE FUNÇÕES AFIM E QUADRÁTICA COM O USO DO SOFTWARE GEOGEBRA" como parte integrante de um conjunto de atividades realizadas no PCNA 2019. A oficina foi destinada aos calouros dos cursos de Matemática, Física e Engenharia Industrial que ingressaram na UFPA/Campus Abaetetuba no ano de 2019, as inscrições foram feitas previamente no momento da habilitação dos calouros e não era obrigatória, ou seja, a oficina e o PCNA como um todo foram ministrados apenas para os calouros interessados em participar e se matricularam no momento de sua habilitação.

[7] A Semana do Calouro é um evento promovido pela UFPA que tem por finalidade fazer a apresentação da instituição aos alunos ingressos nos cursos oferecidos pela mesma, bem como a interação com os espaços físicos, faculdades e grupos presentes e atuantes na instituição.

FIGURA 26 - *Oficina “ENSINO DE FUNÇÕES AFIM E QUADRÁTICA COM O USO DO SOFTWARE GEOGEBRA"*

Fonte: *Acervo do autor, 2021.*

4.2.3 Aprendendo e Manuseando o Geogebra

O primeiro dia de oficina foi destinado para a apresentação do software Geogebra para os alunos do PCNA, mostrando suas funcionalidades, nesse momento os alunos tiveram contato com o software, dessa forma pode ser feito o download e a instalação tanto para o computador quanto para o smartphone, ou seja, foi utilizando o Geogebra para smartphone também, tento em vista que a oficina foi realizada no auditório central da UFPA e não possui o auxílio de computadores nesse espaço, dessa forma foi pedido para que no dia da oficina os alunos levassem seus notebooks para instalar o Geogebra e quem não pudesse levar ou não possuísse um, poderia fazer a instalação no seu próprio smartphone.

O contato com o Geogebra despertou a curiosidade dos alunos para saber como seria a aula a partir do uso desse recurso tecnológico ao fazer a manipulação das ferramentas na criação de um ponto, na criação de uma reta, na criação e manipulação dos controles deslizantes, na intersecção entre dois objetos, no segmento de reta, entre outros. Dessa maneira os alunos começaram a ter noção de como seriam os estudos sobre os conceitos de função a partir do uso do Geogebra, então foi possível avançar bastante na manipulação do software depois que eles conseguiram compreender a lógica de funcionamento do mesmo, isso facilitou muito o trabalho das etapas seguintes.

FIGURA 27 – *Manuseando ferramentas e comandos no Geogebra*

Fonte: *Acervo do autor, 2021.*

4.2.4 Ensino de Funções Utilizando o Geogebra

O segundo dia de oficina foi destinado para ensinar os conceitos de funções e suas características a partir da visualização do comportamento das funções construídas no Geogebra, para realizar essa tarefa foram utilizados todos os conhecimentos que foram repassados na aula anterior, reforçando o entendimento sobre o manuseio do Geogebra e ampliado na criação dos gráficos de funções.

Seguindo uma metodologia já utilizada na turma de Matemática 2015, foi debatido primeiramente os conceitos da função do primeiro grau, dando ênfase a pontos principais como: o domínio, a imagem, os coeficientes (angular e linear), as variáveis dependentes e independentes, bem como o sinal da função, após o debate esses conceitos e propriedades foram explorados no Geogebra para melhorar o entendimento das movimentações gráficas, isso é o que se chama de geometria dinâmica.

As movimentações gráficas foram melhor exploradas com a utilização dos controles deslizantes para os coeficientes "a" e "b" na função $f(x) = ax + b$, dessa forma, cada vez que os controles deslizantes são alterados o valor dos coeficientes são modificados, produzindo um movimentação desejada que ajuda a compreender melhor o papel que cada coeficiente exerce na função e aspectos como o sinal do coeficiente angular pode ser trabalhado na prática, pois quando o controle deslizante referente ao coeficiente angular “a” fica com sinal negativo a função fica decrescente e quando alteramos esse controle para valores positivos a função fica crescente.

FIGURA 28 - *Utilizando os controles deslizantes na função do 1º grau*

Fonte: *Acervo do autor, 2021.*

A medida em que ficava evidente o entendimento dos recursos do Geogebra e dos conceitos de função por parte dos alunos, novas ferramentas eram inseridas de acordo com o andamento da oficina, sendo assim, após o estudo da função do primeiro grau, foi iniciado o debate sobre a função do segundo grau antes de repassar os conceitos e propriedades.

As discussões e dúvidas dos alunos eram sobre a presença do coeficiente “c”, a variável “x” elevado ao expoente 2 e o discriminante Δ, foram os novos desafios para serem ensinado no Geogebra, pois ele possui comandos específicos para poder inserir as funções, no caso da função do segundo grau a formula digitada na caixa de entrada foi $f(x) = ax\text{^}2 + bx + c$, para poder aparecer a função $f(x) = ax^2 + bx + c$ na janela de álgebra.

FIGURA 29 – *Demonstração da variação do Δ (Delta) na função do 2º grau*

Fonte: *Acervo do autor, 2021.*

Após o repasse dos conteúdos das funções de 1º e 2º grau, foram realizados alguns exercícios contidos no material didático, são problemas envolvendo funções cuja resolução pode ser facilmente visualizada utilizando os recursos disponíveis no Geogebra. Além de fazer uma testagem dos conteúdos ensinados durante a oficina, os exercícios ajudaram a esclarecer algumas dúvidas que não foram contempladas nas explicações.

Os exercícios foram manipular no Geogebra de forma satisfatória para o nível de instrução aplicado na oficina, foi observado alguns problemas durante o desenvolvimento da oficina como: dificuldade do manuseio do smartphone por parte dos alunos e pouca memória disponível no smartphone para instalar e executar o aplicativo, no entanto, todas essas dificuldades foram resolvidas durante a oficina.

5 A CONSTRUÇÃO DO CADERNO DE ATIVIDADES E APLICAÇÃO DE AULAS ON-LINE PARA O PCNA 2020

Nessa seção será abordado o processo de construção do caderno de atividades desenvolvido para auxiliar o processo de aprendizagem sobre o uso do software Geogebra, bem como o ensino de funções, mostrando um pouco das dificuldades e desafio no processo de criação e os caminhos traçados em busca de um conteúdo atrativo e de fácil compreensão.

A culminância dessa seção se dá pela aplicação de aulas on-line para o PCNA 2020 sobre o ensino de funções com o uso do software Geogebra, mostrando os desafios e perspectivas de ministrar aulas de matemática a partir de plataformas digitais em tempos de pandemia.

5.1 A CONSTRUÇÃO DO CADERNO DE ATIVIDADES

A partir das dificuldades encontradas pelos discentes durante a realização da oficina ministrada para o PCNA-2019, foi possível elencar alguns conteúdos para criar o caderno de atividades, trata-se de um material didático destinado ao ensino de funções em nível de graduação, contendo conceitos, propriedades, características, tutoriais e exercícios que irão possibilitar um melhor entendimento sobre o comportamento de algumas funções estudadas na matemática, em especial o estudo sobre o domínio e imagem de uma função descrita no $\mathbb{R}^2$.

No processo de criação desse material, foi utilizado um recurso tecnológico para dar suporte para as visualizações e possibilitar uma visão dinâmica do processo de construção gráfica das funções. O recurso utilizado foi o software Geogebra que por facilitar a manipulação de ferramentas que modificam o comportamento das funções que podem ser visualizadas de forma dinâmica, facilitou a criação de um conteúdo atrativo, fácil de ser manipulado e entendido, revelando características que não ficam bem claras para o aluno quando colocadas de forma fixa em quadro branco ou em material apostilado.

Além do conteúdo relacionado ao estudo de funções, foi inserido um manual de introdução ao Geogebra, são instruções de como utilizar suas ferramentas e como visualizar os conceitos matemáticos presentes nessas ferramentas que serão de fundamental importância para o desenvolvimento das atividades, exercícios e tutoriais presentes nesse caderno.

FIGURA 30 – *Capa do Caderno de Atividades*

Fonte: *Acervo do autor, 2021.*

O caderno de atividades traz para o discente um diálogo que incentiva a busca por situações que despertem a curiosidade, pois ao trabalhar com um software de geometria dinâmica o discente experimenta diversas situações em que ele pode estar testando os conceitos e propriedades matemáticas de forma clara e objetiva. O dinamismo do software Geogebra permite a mudança de variáveis que impacta no comportamento gráfico das funções, dessa forma é possível mostrar onde cada propriedade começa e termina, e assim espera-se que o discente crie um interesse maior pelo conteúdo estudado.

Durante a criação do material foram experimentadas várias formas de estar transmitindo o conhecimento matemático sobre funções utilizando o Geogebra, a partir desses experimentos foi desenvolvida uma sequência de passos e comandos que tornou bem acessível a linguagem presente nas instruções do caderno de atividades.

A preocupação para não tornar o caderno de atividades um mero manual de instrução levou a criação de diálogos realizados ao logo das construções, induzindo os alunos a experimentarem as diversas situações e possibilidades que o Geogebra pode proporcionar para no estudo de funções.

Características como a movimentação da função a partir da alteração de seus coeficientes foram bem exploradas a partir da utilização de controles deslizantes que promovem essa movimentação dinâmica das funções. Essa movimentação possibilitou a visualização da variação do discriminante Delta no momento exato em que ele varia de duas raízes reais e diferente até não possuir uma raiz real.

O Caderno de atividades foi montado em formato digital (e-book) e disponibilizado no site do Laboratório de Ensino da Matemática da Amazônia Tocantina – LEMAT (https://www.osvaldosb.com/sala-de-estudos-1), dessa maneira o material pode ser facilmente acessado e consultado a medida em que seja necessário.

5.2 AS AULAS ON-LINE NO GOOGLE MEET E YOUTUBE

Com a ocorrência da pandemia do novo corona vírus – COVID 19, o distanciamento social levou à implantação do ensino remoto na UFPA, o que possibilitou a realização de aulas virtuais que contaram com a participação de estudantes de outros campi da UFPA, além de inscritos de outras universidades do Brasil, públicas e privadas, mostrando a importância e o alcance do projeto PCNA e o uso dos recursos tecnológicos para o ensino da matemática.

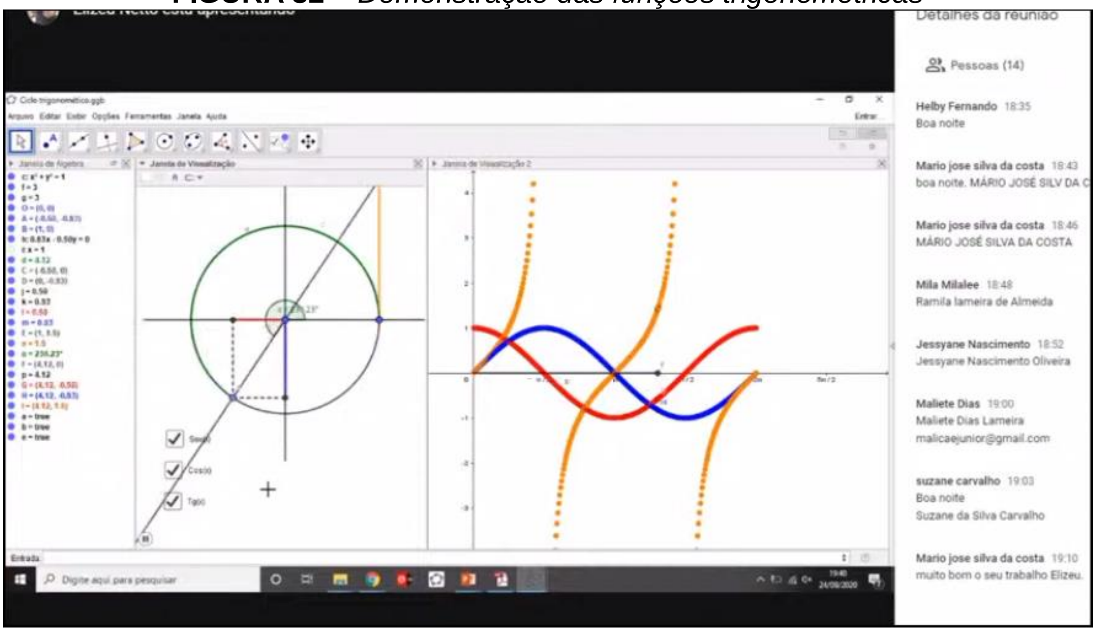
As aulas on-line foram realizadas com a ajuda do coordenador do LEMAT, o Prof. Dr. Osvaldo dos Santos Barros, que mediou as aulas e estava dando o suporte técnico para poder disponibilizar o conteúdo tanto no Google Meet, quanto na plataforma do Youtube. A partir desse suporte foi possível ministrar as aulas fazendo a interação entre o conteúdo de funções repassado em slides no Power Point, as construções realizadas no Geogebra e a participação dos discentes com perguntas e curiosidades no chat do Google Meet e do Youtube, dessa forma foi possível dialogar abertamente sobre pontos importantes que muitas vezes passam despercebidos pelo discente e colaboram para que ele venha a ter dificuldade no entendimento do assunto.

FIGURA 31 – *Aulas on-line para o PCNA*

Fonte: *Acervo do autor, 2021.*

Durante as aulas foi possível abordar com detalhes o comportamento gráfico e a relação entre o domínio e a imagem das funções, pois as construções realizadas no Geogebra permitiram que o discente estivesse diretamente ligado ao conteúdo enquanto eram feitos os comandos de construção. Ao explicar como cada ferramenta do Geogebra funciona, também estamos ensinando os conceitos matemáticos que regem aquela determinada ferramenta, dessa forma o discente estava sempre em contato com os conteúdos matemáticos, tanto na parte teórica quanto na parte prática.

FIGURA 32 – *Demonstração das funções trigonométricas*



Fonte: *Acervo do autor, 2021.*

5.2.1 Avaliação das aulas on-line e principais impressões dos discentes

As aulas on-line possibilitaram um olhar diferenciado tanto para os conteúdos matemáticos quanto para o uso de recursos tecnológicos no ensino de matemática, mas para comprovar de fato a existência dessa relação, convidamos os discentes presentes na última aula para tecerem comentários sobre as aulas e a experiência com o software Geogebra, dessa forma seria possível mensurar o impacto que as aulas exerceram sobre os discentes.

A proposta de diálogo foi elaborada da seguinte maneira, ao final da última aula foi feita a pergunta para os discentes: A partir do que foi estudado nessas três aulas, qual sua opinião sobre o uso de softwares no ensino de matemática e que impacto exerceu no seu processo de aprendizagem no estudo de funções? Dentre as contribuições que obtivemos, separamos três para expor na integra nesse trabalho.

Avaliação aluno 1: " Em tempos de pandemia mundial, não estamos tendo outra escolha a não ser realizar essas aulas on-line, na minha opinião as aulas que assisti ontem e hoje sobre o Geogebra, é uma ferramenta que vem com a intensão de facilitar a vida do estudante, porém, dependendo dos métodos utilizados para realizar essas atividades on-line. Os alunos além de saber mexer no aplicativo tem que saber o que está fazendo, e o professor precisa dar espaço para cada um fazer parte das aulas apesar das dificuldades".

Avaliação aluno 2: "Prof. Neto, sabe o que eu achei interessante também, é que tipo, antes o Geogebra ele estava sendo ensinado de forma presencial e agora foi interessante porque você usa uma ferramenta tecnológica na tecnologia, que são as aulas remotas e isso é muito mais interessante entendeu? Eu achei superinteressante, porque tipo é a primeira vez e ao meu ver deu super certo e acho que foi bem gratificante tanto para nós alunos quanto para você de estar trabalhando esse conteúdo dessa maneira, acho que contribuiu bastante".

Avaliação aluno 3: "Esse curso foi bem interessante, pois o que foi dito é verdade, muitas vezes vemos disciplinas que nos despertam interesse por usar uma ferramenta a mais. Só que como tem que ser cumprido a disciplina em determinado tempo, não é bem explorado as ferramentas disponíveis. Essas ferramentas ajudam muito, ressalto a aula sobre trigonometria que facilita demais o entendimento. Chega o cérebro sorrir. Rs"

A partir dessas ações reforçamos nossa compreensão do Software de Geometria Dinâmica Geogebra, como recurso que permite o estudo de vários conteúdos matemáticos, a partir das visualizações dinâmicas para o processo de construção gráfica das funções e o uso de ferramentas que manipulam os gráficos, revelando características que não ficam evidentes para os estudantes quando colocadas de forma fixa em quadro bidimensional, comum às salas de aula, ou em material apostilado.

5.3 RESULTADOS

A partir do diálogo feito com os discentes durante as aulas on-line para o PCNA 2020, podemos perceber que o uso do software Geogebra no ensino de funções despertou o interesse por mostrar de forma simples e prática o comportamento das funções, facilitando a compreensão dos conceitos e propriedades matemáticas presentes em cada função como a variação dos coeficientes, a visualização clara do domínio e imagem da função a partir das movimentações realizadas no gráfico, a compreensão de variável dependente e variável independente, a noção primitiva de limite que dá base para o estudo das disciplinas de cálculo, bem como outras características que podemos perceber nas falas dos discentes.

Foi possível perceber durante os relatos dos discentes que ainda existe uma preocupação muito grande com a quantidade de conteúdo relacionado ao tempo disponível para a realização das disciplinas, esses relatos ajudam a entender a realidade do discente durante seu curso e mostra que a utilização de softwares em aulas de matemática podem ser um importante aliado para diminuir a pressão exercida pela relação conteúdo/tempo, tornando a aprendizagem mais significativa e prazerosa.

A importância das aulas on-line e da utilização de recursos tecnológicos que possibilitem um melhor entendimento dos conteúdos matemáticos ficou bem evidente nas falas dos discentes, pois as aulas foram muito uteis, principalmente quando falamos da atual situação mundial, onde a presença de um vírus mortal que já matou milhares de pessoas no mundo impede a realização de aulas presenciais.

É importante ressaltar que o cenário ao que estamos expondo nesse trabalho é válido quando o professor tem o cuidado e sensibilidade para mostrar as ferramentas do Geogebra de forma simples e clara, “linkando” os conceitos matemáticos atrelado a essas ferramentas e possibilitando que o aluno interaja na dinâmica das aulas, sendo um agente ativo no processo de construção do conhecimento.

6 ESTRUTURA DO PRODUTO

ÍNDICE

6.1 APRESENTAÇÃO

O **CADERNO DE ATIVIDADES VIRTUAL "ENSINO DE FUNÇÕES COM O GEOGEBRA NO PCNA"** é um produto educacional que foi construído a partir de uma pesquisa realizada para o Mestrado Profissional do Programa de Pós-Graduação em Docência em Ciências e Matemáticas – PPGDOC, realizado no Instituto de Educação Matemática e Científica da Universidade Federal do Pará – IEMCI/UFPA.

Esse caderno de atividades é um material didático destinado ao ensino de funções em nível de graduação contendo conceitos, propriedades, características, tutoriais e exercícios que irão possibilitar um melhor entendimento sobre o comportamento de algumas funções estudadas na matemática, em especial o estudo sobre o domínio de uma função descrita no $\mathbb{R}^2$.

O Caderno de atividades conta com uma série de tutoriais passo a passo que auxiliam na construção de gráficos de função para poder ser utilizados para aprimorar os estudos. Esse material será disponibilizado de forma digital e acessível no site do LEMAT (https://www.osvaldosb.com/sala-de-estudos-1) como materiais de apoio ao PCNA realizado na UFPA/ Campus Abaetetuba e ainda vídeo aulas explicando o funcionamento do Geogebra e a criação dos gráficos das funções.

Utilizaremos nesse material um recurso tecnológico que irá auxiliar as visualizações e possibilitar uma visão dinâmica do processo de construção gráfica das funções. O recurso tecnologia denominado Geogebra, é um software de geometria dinâmica que permite o estudo de vários conteúdos matemáticos e possibilita a manipulação de ferramentas que modificam o comportamento das funções que podem ser visualizadas de forma dinâmica, revelando características que não ficam bem claras para o aluno quando colocadas de forma fixa em quadro branco ou em material apostilado.

Além do conteúdo relacionado ao estudo de funções, o caderno de atividade conta com um manual de orientação ao uso do Geogebra, são instruções de utilização das ferramentas presentes no Geogebra que serão de fundamental importância para o desenvolvimento das atividades, exercícios e tutoriais presentes nesse caderno.

A motivação para montar um material que tivesse conteúdos de matemática feitos a partir do software Geogebra surgiu durante uma conversar com os bolsistas do Programa de Cursos de nivelamento da aprendizagem – (PCNA), onde analisamos o perfil do aluno que ingressa na universidade e se depara com o desafio de relacionar a matemática que ele aprendeu no ensino médio com a matemática presente na universidade. A utilização do Geogebra como ferramenta de auxílio na construção desse material foi pensada com o intuído de introduzir uma ferramenta que será muito útil para os alunos de graduação, esse software possui uma vasta gama de recursos que podem ser explorados para exemplificar o comportamento das funções, os gráficos e como são criados.

O caderno de atividades contém quatro capítulos, onde o primeiro capítulo traz alguns tópicos sobre o ensino de matemática e algumas tendências como a tecnologia na matemática e a etnomatemática, o segundo capítulo traz um panorama sobre o Geogebra, mostrando suas ferramentas, modo de instalação, layout e instruções para manuseio desse software, o terceiro capítulo contém noções básicas sobre funções, dando ênfase para o Domínio, Contradomínio e Imagem da função, o quarto capítulo são as aplicações realizadas no Geogebra a partir de conceitos e propriedades das funções (afim, quadrática, modular, exponencial, logarítmica e trigonométrica).

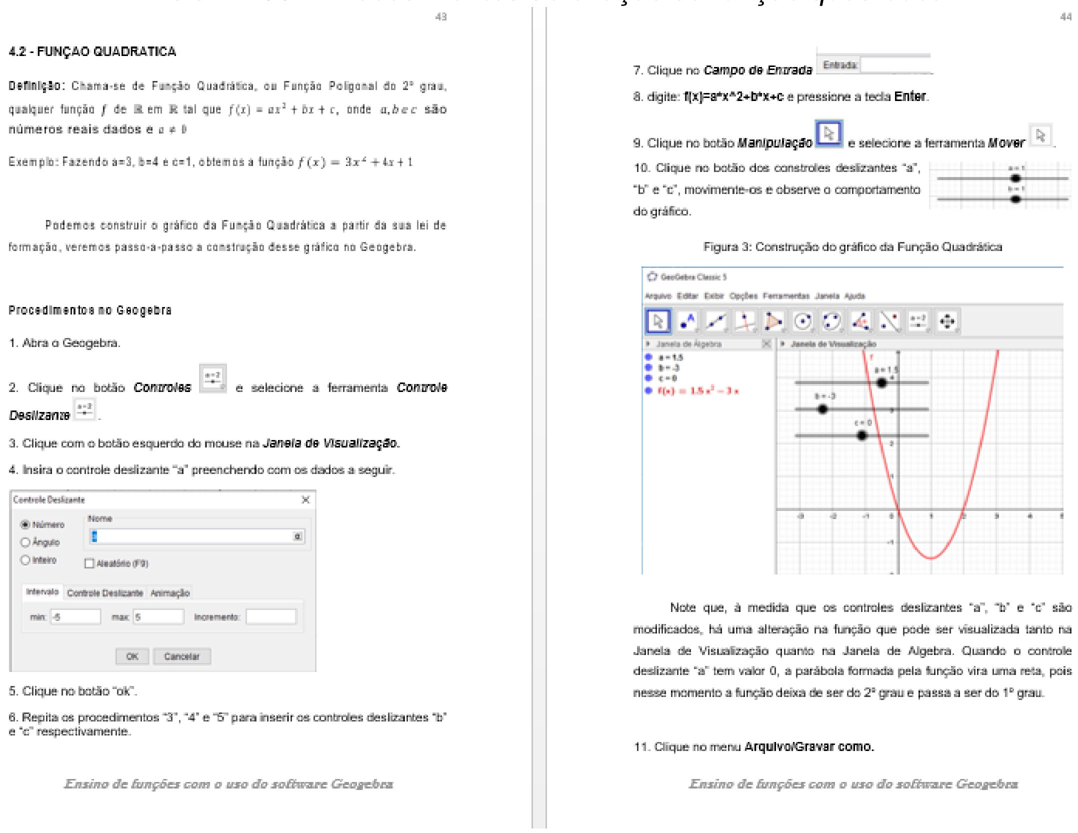
Espera-se que a partir da utilização desse caderno de atividades os alunos possam preencher algumas lacunas deixadas durante sua trajetória no ensino médio escolar, sendo possível explorar possibilidades e aspectos das funções matemáticas através das atividades dinâmicas que serão realizadas no Geogebra. As manipulações no Geogebra são ordenadas e direcionadas para instigar a curiosidade e mostrar características que não ficam muito claras para os alunos quando são expostas em modo estático em quadro branco.

6.2 PROCEDIMENTOS E CRIAÇÕES NO GEOGEBRA

Os procedimentos de criação das funções no Geogebra seguem um padrão de aprendizagem e conhecimento tanto das funções matemáticas quanto das ferramentas do próprio software, dessa forma são utilizados novos recursos e maneiras diferentes de manipulação das ferramentas à medida em que o aluno avança na realização das atividades. A realização progressiva dessas atividades e a forma com que novas ferramentas vão surgindo no decorrer desse processo fazem com que a aprendizagem não se torne exaustiva e muitas vezes repetitiva.

Ao final dos procedimentos de criação de cada função existe uma ilustração da função criada, dando a oportunidade para o aluno comparar a sua criação com a do caderno de atividades e também para fazer possíveis correções caso o aluno por algum motivo não tenha conseguido alcançar o objetivo da criação. A figura 33 mostra os procedimentos de criação de uma das atividades presentes no caderno de atividades que é a criação da função quadrática.

FIGURA 33 – *Procedimentos de criação da função quadrática*


43

4.2 - FUNÇAO QUADRATICA

Definição: Chama-se de Função Quadrática, ou Função Polignal do 2º grau, qualquer função f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ tal que $f(x) = ax^2 + bx + c$, onde a, b e c são números reais dados e $a \neq 0$

Exemplo: Fazendo a=3, b=4 e c=1, obtemos a função $f(x) = 3x^2 + 4x + 1$

Podemos construir o gráfico da Função Quadrática a partir da sua lei de formação, veremos passo-a-passo a construção desse gráfico no Geogebra.

Procedimentos no Geogebra

1. Abra o Geogebra.
2. Clique no botão ***Controles*** e selecione a ferramenta ***Controle Deslizante***.
3. Clique com o botão esquerdo do mouse na ***Janela de Visualização***.
4. Insira o controle deslizante "a" preenchendo com os dados a seguir.

5. Clique no botão "ok".
6. Repita os procedimentos "3", "4" e "5" para inserir os controles deslizantes "b" e "c" respectivamente.

Ensino de funções com o uso do software Geogebra

44

7. Clique no ***Campo de Entrada***
8. digite: **f(x)=a*x^2+b*x+c** e pressione a tecla **Enter**.
9. Clique no botão ***Manipulação*** e selecione a ferramenta ***Mover***.
10. Clique no botão dos constroles deslizantes "a", "b" e "c", movimente-os e observe o comportamento do gráfico.

Figura 3: Construção do gráfico da Função Quadrática

Note que, à medida que os controles deslizantes "a", "b" e "c" são modificados, há uma alteração na função que pode ser visualizada tanto na Janela de Visualização quanto na Janela de Algebra. Quando o controle deslizante "a" tem valor 0, a parábola formada pela função vira uma reta, pois nesse momento a função deixa de ser do 2º grau e passa a ser do 1º grau.

11. Clique no menu **Arquivo/Gravar como.**

Ensino de funções com o uso do software Geogebra

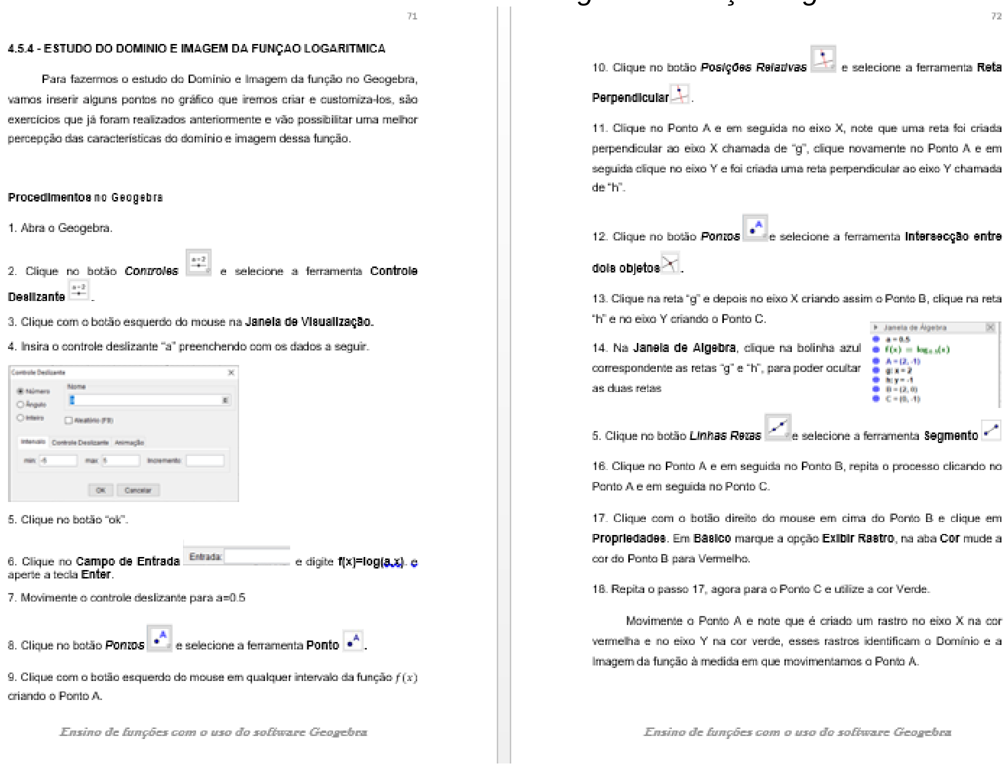
Fonte: *Acervo do autor, 2021.*

A associação do nome da ferramenta e sua respectiva imagem durante processo de construção, favorece a familiarização e compreensão dos comandos para serem aplicados no Geogebra, esse método de exposição das informações referente aos passos a serem realizados no Geogebra foi empregado levando em consideração a arquitetura de vários trabalhos vistos ao longo da pesquisa produção desse produto educacional e foram fundamentais para a obtenção de um processo de instrução didático e simplificado.

Todas as atividades contidas nesse caderno são orientadas para serem salvas pelo aluno, pois são atividades progressivas e em vários momentos o aluno precisara acessar um arquivo já construído para poder dar continuidade em suas criações. A opção por utilizar criações feitas anteriormente pelo aluno faz com que ele não pule etapas ou negligencie conteúdos importantes para seu aprendizado tanto de funções quando do software Geogebra.

Várias propriedades e caraterísticas de funções podem ser bem observadas durante a realização das atividades desse caderno, porém foi dado ênfase no estudo do domínio e imagem das funções, dessa forma, sempre que o aluno termina as atividades de criação de cada função, uma atividade extra é feita voltada para o estudo do domínio e imagem da função, mostrando caraterísticas relevantes para obter um com entendimento sobre o assunto.

FIGURA 34 – *Estudo do domínio e imagem da função logarítmica*



71

4.5.4 - ESTUDO DO DOMINIO E IMAGEM DA FUNÇAO LOGARITMICA

Para fazermos o estudo do Domínio e Imagem da função no Geogebra, vamos inserir alguns pontos no gráfico que iremos criar e customiza-los, são exercícios que já foram realizados anteriormente e vão possibilitar uma melhor percepção das características do domínio e imagem dessa função.

Procedimentos no Geogebra

1. Abra o Geogebra.

2. Clique no botão ***Controles*** e selecione a ferramenta **Controle Deslizante**.

3. Clique com o botão esquerdo do mouse na **Janela de Visualização.**

4. Insira o controle deslizante "a" preenchendo com os dados a seguir.

5. Clique no botão "ok".

6. Clique no **Campo de Entrada** Entrada: e digite **f(x)=log(a,x)**. e aperte a tecla **Enter**.

7. Movimente o controle deslizante para a=0.5

8. Clique no botão ***Pontos*** e selecione a ferramenta **Ponto**.

9. Clique com o botão esquerdo do mouse em qualquer intervalo da função $f(x)$ criando o Ponto A.

Ensino de funções com o uso do software Geogebra

72

10. Clique no botão ***Posições Relativas*** e selecione a ferramenta **Reta Perpendicular**.

11. Clique no Ponto A e em seguida no eixo X, note que uma reta foi criada perpendicular ao eixo X chamada de "g", clique novamente no Ponto A e em seguida clique no eixo Y e foi criada uma reta perpendicular ao eixo Y chamada de "h".

12. Clique no botão ***Pontos*** e selecione a ferramenta **Intersecção entre dois objetos**.

13. Clique na reta "g" e depois no eixo X criando assim o Ponto B, clique na reta "h" e no eixo Y criando o Ponto C.

14. Na **Janela de Algebra**, clique na bolinha azul correspondente as retas "g" e "h", para poder ocultar as duas retas

5. Clique no botão ***Linhas Retas*** e selecione a ferramenta **Segmento**.

16. Clique no Ponto A e em seguida no Ponto B, repita o processo clicando no Ponto A e em seguida no Ponto C.

17. Clique com o botão direito do mouse em cima do Ponto B e clique em **Propriedades**. Em **Básico** marque a opção **Exibir Rastro**, na aba **Cor** mude a cor do Ponto B para Vermelho.

18. Repita o passo 17, agora para o Ponto C e utilize a cor Verde.

Movimente o Ponto A e note que é criado um rastro no eixo X na cor vermelha e no eixo Y na cor verde, esses rastros identificam o Domínio e a Imagem da função à medida em que movimentamos o Ponto A.

Ensino de funções com o uso do software Geogebra

Fonte: *Acervo do autor, 2021.*

7 CONCLUSÃO

As etapas realizadas neste trabalho foram de fundamental importância para o desenvolvimento de novas práticas e visões diferentes em relação ao uso da tecnologia no ensino de matemática, foi a partir dessas atividades realizadas no PCNA-Abaetetuba que o LEMAT pode expandir o alcance de suas aulas, chegando até a abranger outros municípios do estado do Pará com as aulas on-line realizadas no canal do youtube durante a pandemia da COVID-19.

A importância de se ter um espaço que possa disponibilizar suporte e melhores condições de permanência de discentes ingressões em cursos de ciências exatas como o PCNA agrega um valor significativo para as universidades, pois ajuda a diminui os índices de desistência e evasão provocados pelo choque de realidade que esses discentes sentem quando são confrontados com disciplinas que exigem uma gama de conhecimentos prévios, que por várias motivos alguns desses alunos não puderam contemplados com esses saberes no ensino médio, ou se chegaram a ser contemplados foi de uma forma muito superficial.

Fortalecer iniciativas como os Laboratórios de ensino e os PCNA's dentro das universidades é de fundamental importância para o crescimento acadêmico de todos os envolvidos, pois a partir das práticas de ensino desenvolvidas nesses espações e projetos que motivam o professor a buscar novas formas de se ensinar e de fato ser um agente pesquisador e reflexivo de sua própria prática, assim como incentiva os alunos a buscarem mais conhecimento, partilhando saberes e construindo uma visão mais clara e sólida de seu papel na sociedade como futuros formadores.

Trabalhar o ensino de matemática a partir do uso de novas tecnologias que facilitem a transmissão de conhecimento de forma simples e dinâmica não é uma tarefa tão simples, requer dedicação e sensibilidade do professor para poder conectar o uso das tecnologias digitais (que nem sempre são triviais) aos conteúdos matemáticos. O professor precisa ter o controle tanto das ferramentas utilizadas quanto do ambiente de ensino para poder transmitir o conhecimento de forma adequada e assim alcançar os resultados desejados.

A pesquisa feita sobre o Geogebra foi muito importante para poder conhecer melhor esse software de geometria dinâmica, suas potencialidades e como está sendo utilizado no ensino de matemática. As dissertações encontradas serviram como base para encontrar o método mais adequado para produzir as atividades de construção das funções de forma didática e com uma linguagem de fácil compreensão, facilitando a compreensão do aluno e tornando o material atrativo.

A metodologia feita em etapas possibilitou a uma melhor obtenção e troca de conhecimento entre os diversos níveis do processo de formação de futuros professores, passando pela turma de Matemática 2015 que estavam na fase de conclusão do curso, os bolsistas do LEMAT que estavam na metade do curso e os alunos do PCNA que estavam ingressando nos cursos de ciências exatas.

As aulas na disciplina didática da matemática ministrada na turma de Matemática 2015 proporcionou um momento de diálogo com os discentes que resultou na produção de algumas práticas didáticas que puderam ser utilizadas na construção do primeiro material sobre as funções do primeiro e segundo grau utilizando o Geogebra. Esse primeiro material pode ser utilizado nas oficinas do PCNA, obtendo assim uma primeira impressão da importância a respeito do uso da tecnologia nas aulas de matemática.

As aulas on-line no canal do youtube foram um divisor de aguas para a conclusão das etapas desse trabalho, pois foi a melhor saída encontrada para contornar o distanciamento social provocado pela pandemia do novo corona-vírus (COVID-19), respeitando assim todas as restrições impostas pelo estado sem perder a qualidade e o rigor da pesquisa.

A realização desse trabalho foi muito importante para a minha formação acadêmica, uma vez que foi possível unir a matemática e a tecnologia, duas áreas que atuo e tenho grande afinidade. A oportunidade de trabalhar em algo que se gosta deixa o processo de pesquisa mais interessante e motivador, dessa forma busquei ao máximo encontrar meios para compartilhar meus conhecimentos, contribuindo com o Campus de Abaetetuba e o LEMAT no processo de formação de futuros professores.

Com a realização dessa pesquisa foi possível aproximar o ensino de matemática e as novas tendências metodológicas como: a utilização de softwares educacionais voltados para os conteúdos de funções e as aulas realizadas a partir de plataformas digitais como o Google Meet e o Youtube, ferramentas essas que foram essenciais para a realização desse trabalho.

O software Geogebra provou ser um excelente recurso didático para o ensino de funções tanto nas aulas presenciais como nas aulas on-line, seu poder de dinamizar as construções facilitou muito o repasse e a absorção dos conteúdos relacionados ao estudo de funções. As construções feitas no Geogebra realçaram o entendimento sobre o estudo do domínio e imagem das mais diversas funções, isso ajudou muitos alunos que ingressaram na universidade sem ter o devido domínio desses saberes.

A partir das experiências com a turma de Matemática 2015 e os alunos do PCNA foi possível produzir um caderno de atividades que com o auxílio do software Geogebra contemplou o ensino de funções poligonais e trigonométricas, contendo construções, conceitos e propriedades matemáticas presentes em cada função, ressaltando o entendimento sobre o domínio e imagem das funções, conteúdo esse que é de fundamental importância nas disciplinas de cálculo no ensino superior.

A aplicação das aulas presenciais e virtuais tiveram um impacto significativo na formação dos discentes envolvidos, pois com a experiência obtida nas aulas muitos desses alunos compreenderam bem a dinâmica do Geogebra como uma ferramenta de auxílio para o ensino de matemática e passaram a adotar o método em suas aulas e alguns começaram a construir seu TCC a partir das experiências obtidas com as aulas e oficinas ministradas, isso com certeza fortalece mais o sentimento de dever cumprido e colaboração com o LEMAT na construção de novas práticas e novos modelos didáticos de se ensinar matemática.

Os resultados obtidos com essa pesquisa e o produto educacional produzido a partir da mesma estão disponíveis para futuras intervenções nas etapas do PCNA-Abaetetuba, para os PCNA's de outros municípios e possíveis atividades de formação de professores ou até mesmo para faculdades de matemática, pois tanto a pesquisa quanto o produto ficaram disponíveis no site do LEMAT, assim como outros trabalhos que serão produzidos a partir desse.

Espero que esse trabalho contribua com muitos outros que surgirão, pois, o Geogebra é uma ferramenta fantástica e com muitas possibilidades de utilização em todos os níveis de ensino, do fundamental até o superior, sendo esse último pouco explorado atualmente. Embora esse projeto tenha se desenvolvido com ampla satisfação, o mesmo não se mostra concluído, pois será expandido para outras disciplinas além da didática da matemática, a pretensão é inserir e ampliar os estudos para outras disciplinas dentro da graduação a exemplo do cálculo I e II.

8 REFERÊNCIAS

BARROS, Osvaldo Santos. **Astronomia indígena dos Tembé-Tenetehara**, col. Introdução à Etnomatemática, Editor Geral Bernadete Barbosa Morey, Natal, RN, 2004.

_____. **Etnoastronomia Tembé-Tenetehara como Matriz de Abordagem (Etno)Matemática no Ensino Fundamental**. (Monografia – Orientação Iran Abreu Mendes). Belém, UFPA/NPADC, 2004.a.

BETTEGA, Maria H. S. **A educação continuada na era digital**. 2. ed São Paulo: Cortez, 2010. (Coleção questões da nossa época; v.18)

BISHOP, Alan J. **Enculturación matemática: La educación matemática desde uma perspectiva cultural**. Barcelona, Paidós, 1999.

BORBA, Marcelo A. e PENTEADO, Mirian G. **Informática e Educação Matemática** – 5. Ed. – Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2012. p.17.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**/ Secretaria de Educação. Brasília: Disponível em: http://www.basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf

BRITO, M., LUCENA, I., SILVA, F. **Etnomatemática e a Cultura Amazônica: Um Caminho para Fazer Matemática em Sala De Aula**. In Anais do SIPEMAT. Recife, Programa de Pós-Graduação em Educação-Centro de Educação – Universidade Federal de Pernambuco, 2006, 06p.

CATHARINA, Carlos R. C. **Uma Proposta para a Aprendizagem de Conceitos Trigonométricos no Ensino Fundamental**. (Dissertação - Orientador: Campos dos Goytacazes, UENF-RJ, 2017. p. 35.

D'AMBROSIO, Ubiratan. **Educação Matemática: Da teoria à prática**. – Campinas, SP: Papirus (Coleção Perspectivas em Educação Matemática), 17ª edição, 2009. p. 113.

Davis, P., e Hersh, R. (1995). **A experiência matemática.** 1.ed. Lisboa: Gradiva – 1995.

FREIRE, Wendel. **Tecnologia e Educação: as mídias na prática docente**... [et. al.]. 2. Ed. Rio de Janeiro: Wak Ed,. 2011.

FRISKE, Andréia. L. [et. al.] **Minicurso de Geogebra**. Santa Maria, UFSM, 2016. p. 7 a 10.

GIl, Antonio Carlos. **Métodos e técnicas de pesquisa social** – 6ª ed. - São Paulo: Atlas, 2008.

GRAVINA, Maria A. **Matemática, mídias digitais e didática: tripé para formação de professores de matemática** … [et. al.] Porto Alegre: Evangraf, 2012.

LAKATOS, Eva M. e MARCONI. M. A. **Fundamentos de metodologia científica** *1*, 5. ed. - São Paulo : Atlas 2003.

LÉVY, Pierre. **Cibercultura**. (Trad. Carlos Irineu da Costa). São Paulo: Editora 34, 1999. p.19

LUCENA, Isabel. **Educação Matemática, Ciência e Tradição:** Tudo no mesmo barco. Cnetro de Ciencias Sociais Aplicadas, 206f., Tese (Doutorado em Educação). Natal: UFRN/2005. p.9

MORAN, José Manuel. **Novas tecnologias e mediação pedagógica** / José Manuel Moran, Marcos T. Masetto, Marilda Aparecida Behrens. - Campinas, SP: Papirus – (Coleção Papirus Educação). 13ª Ed. 2007.

MORAN, José Manuel. **Desafios que as tecnologias digitais nos trazem**, Papirus, 21ª ed, 2013.

PRODANOV. Cleber C. e FREITAS. Ernani C. **Metodologia do trabalho científico [recurso eletrônico]: métodos e técnicas da pesquisa e do trabalho acadêmico** / 2. ed. – Novo Hamburgo: Feevale,2013.

REIS, Michel. S. **Resolução de problemas por matrizes: um caso de uso do whatsapp na eja do ensino médio** (Dissertação – Orientador: Dr. Osvaldo dos Santos Barros). Belém, UFPA, 2016. p. 29.

ROSEMAR, Rosa. **Trabalho Docente: dificuldades apontadas pelos professores no uso das tecnologias** – v. 1, n.1, Uberaba: Revista Encontro de Pesquisa em Educação, p. 214-227, 2013

SACCOL A., SCHLEMMER E. e BARBOSA J. **m-learming e u-learning – novas perspectivas da aprendizagem móvel e ubíqua**. São Paulo: Pearson, 2011.

SILVA, Karine, S. P. **A Construção de uma Sequência Didática utilizando o GeoGebra, a Teoria das Situações Didáticas e Modelagem Matemática para o Ensino das Funções Logarítmicas** (Dissertação – Orientador: Dr. Oscar Alfredo Paz La Torre) UNEB, 2016. p. 50.

SCHÖN, D. A. Formar professores como profissionais reflexivos. In: NÓVOA. A. (Org.). **Os professores e a sua formação**. Lisboa: Dom Quixote, 1992. pp. 77-91.

SCHÖN, D. **The reflective practitioner: how professionals think in action**. New York: Basic Books, 1983.

STENHOUSE. L. **La investigación como base da la enseñanza**. 6ª ed. Madrid, España: Morata. 2007.

TACCA, Maria Carmen V. R. **O professor investigador**: criando possibilidades para novas concepções e práticas sobre aprender. In: A Complexidade da Aprendizagem: destaque ao Ensino Superior. Campinas, SP: Editora Alínea, 2009.

SILVA, Calefe P. S. e GORGE, Wlellington J. **Tecnologias educacionais [recurso eletrônico]: uma abordagem contemporânea** – Maringá, PR: Uniedusul, 2020.

SANTOS, Alcinéia L. **A utilização do geogebra em situações diáticas para a aprendizagem de funções trigonométricas,** (Dissertação – Orientador: Dr. André Ricardo Magalhães) UNEB, 2018. p. 56.

MARIA A. P.; AMILTON L. G. **O ENSINO DA MATEMÁTICA NA PERSPECTIVA DAS METODOLOGIAS PROPOSTAS NAS DIRETRIZES CURRICULARES DO PARANÁ**. Disponível em: http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/716-4.pdf. Acesso em: 16 ago. 2021

Anexo

ENSINO DE FUNÇÕES

com o uso do Geogebra

Elizeu C. de Jesus Calandrini Neto

Osvaldo dos Santos Barros

LEMAT

Laboratório de Ensino de Matemática ds Amazônia Tocantina

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E CIENTÍFICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM DOCÊNCIA EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICAS – MESTRADO PROFISSIONAL

PRODUTO DIDÁTICO

Área de Concentração:
Ensino e Aprendizagem de ciências e matemática

Título:
ENSINO DE FUNÇÕES PARA LICENCIANDOS EM MATEMÁTICA COM USO DO SOFTWARE GEOGEBRA

BELÉM
2021

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD
Biblioteca do Instituto de Educação Matemática e Científica – Belém-PA

ÍNDICE

APRESENTAÇÃO

Prezado Cursista,

O **CADERNO DE ATIVIDADES "ENSINO DE FUNÇÕES COM O GEOGEBRA NO PCNA"** é um produto educacional que foi construído a partir de uma pesquisa realizada para o Mestrado Profissional do Programa de Pós-Graduação em Docência em Ciências e Matemáticas – PPGDOC, realizado no Instituto de Educação Matemática e Científica da Universidade Federal do Pará – IEMCI/UFPA.

Esse caderno de atividades é um material didático em formato e-book destinado ao ensino de funções em nível de graduação contendo conceitos, propriedades, características, tutoriais e exercícios que irão possibilitar um melhor entendimento sobre o comportamento de algumas funções estudadas na matemática, em especial o estudo sobre o domínio e imagem de uma função descrita no $\mathbb{R}^2$.

O Caderno de atividades conta com uma série de tutoriais passo a passo que auxiliam na construção de gráficos de função para poder ser utilizados para aprimorar os estudos. Esse material será disponibilizado de forma digital e acessível no site do LEMAT (https://www.osvaldosb.com/sala-de-estudos-1) como materiais de apoio ao PCNA realizado na UFPA/ Campus Abaetetuba e ainda vídeo aulas explicando o funcionamento do Geogebra e a criação dos gráficos das funções.

Utilizaremos nesse material um recurso tecnológico que irá auxiliar as visualizações e possibilitar uma visão dinâmica do processo de construção gráfica das funções. O recurso tecnologia denominado Geogebra, é um software de geometria dinâmica que permite o estudo de vários conteúdos matemáticos e possibilita a manipulação de ferramentas que modificam o comportamento das funções que podem ser visualizadas de forma dinâmica, revelando características que não ficam bem claras para o aluno quando colocadas de forma fixa em quadro branco ou em material apostilado.

Além do conteúdo relacionado ao estudo de funções, o caderno de atividade conta com um manual de orientação ao uso do Geogebra, são instruções de utilização das ferramentas presentes no Geogebra que serão de fundamental importância para o desenvolvimento das atividades, exercícios e tutoriais presentes nesse caderno.

A motivação para montar um material que tivesse conteúdos de matemática feitos a partir do software Geogebra surgiu durante uma conversar com os bolsistas do Programa de Cursos de nivelamento da aprendizagem – (PCNA), onde analisamos o perfil do aluno que ingressa na universidade e se depara com o desafio de relacionar a matemática que ele aprendeu no ensino médio com a matemática presente na universidade. A utilização do Geogebra como ferramenta de auxílio na construção desse material foi pensada com o intuído de introduzir uma ferramenta que será muito útil para os alunos de graduação, esse software possui muitos recursos que podem ser explorados para exemplificar o comportamento das funções, os gráficos e como são criados.

O caderno de atividades contém quatro capítulos, onde o primeiro capítulo traz alguns tópicos sobre o ensino de matemática e algumas tendências como a tecnologia na matemática e a etnomatemática, o segundo capítulo traz um panorama sobre o Geogebra, mostrando suas ferramentas, modo de instalação, layout e instruções para manuseio desse software, o terceiro capítulo contém noções básicas sobre funções, dando ênfase para o Domínio, Contradomínio e Imagem da função, o quarto capitulo são as aplicações realizadas no Geogebra a partir de conceitos e propriedades das funções (afim, quadrática, modular, exponencial, logarítmica e trigonométrica).

Espera-se que a partir da utilização desse caderno de atividades os alunos possam preencher algumas lacunas deixadas durante sua trajetória no ensino médio escolar, sendo possível explorar possibilidades e aspectos das funções matemáticas através das atividades dinâmicas que serão realizadas no Geogebra. As manipulações no Geogebra são ordenadas e direcionadas para instigar a curiosidade e mostrar características que não ficam muito claras para os alunos quando são expostas em modo estático em quadro branco.

1 – ENSINO DE MATEMÁTICA E TECNOLOGIA

A Matemática é definida por Davis & Hersh (1995), como a “ciência da quantidade e do espaço” sendo conhecidas em sua forma mais simples como: Aritmética e Geometria. A primeira trata das várias espécies de regras de operação sobre números, estudando as várias situações do cotidiano em que são utilizadas. A Geometria, por sua vez, trata parcialmente de questões sobre medidas do espaço, além de tratar, também, de aspectos do espaço que possuem forte apelo estético e sendo ensinada segundo os esquemas apresentados por Euclides (300 a.C.), apresenta-se como uma ciência dedutiva (DAVIS & HERSH, 1995, p.25-26).

1.1 – MATEMÁTICA E TECNOLOGIA

As Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação atualmente exercem um grande impacto e influência em relação ao emprego de novos métodos de ensino e aprendizagem. De fato, é preciso compreender que os computadores, notebooks e smartphones já são realidades presentes em muitas escolas no Brasil e no mundo, porém eles por si só não possuem a capacidade de ensinar o aluno, mas podem ser utilizados como recurso para auxiliar o professor nesse processo (SANTOS, 2018, p. 56)

Com a crescente valorização das tecnologias educacionais, agentes como: o aluno, o professor, a escola e a sociedade se beneficiam dessas práticas, uma vez que o conhecimento tecnológico quando aplicado de forma correta transforma o saber e práticas tradicionais de ensino, tornando as aulas dinâmicas e de fácil assimilação (SACCOL; SCHLEMMER; BARBOSA, 2011).

> [...] A escola, mais do que nunca, precisa se apropriar das novas linguagens audiovisuais e informáticas, bem como de suas interfaces, para atender a constantes exigências do mundo contemporâneo que, por sua vez, requer uma sintonia cada vez mais afinada com os conhecimentos, não só cientifico, mas também quanto aos valores étnico-culturais. Pois a escola é, especialmente, o lugar onde tudo isso pode ser sentido e vivido, como reflexo da sociedade em que os jovens estão inseridos (BETTEGA, 2010, p.15).

As constantes transformações ocasionadas pelas tecnologias digitais, tem impacto direto no funcionamento da sociedade, pois a partir da inserção de novas tecnologias em sala de aula, os alunos precisam ser preparados para atuar em um mercado de trabalho em constantes mudanças, onde ele terá que se adequar as profissões que ainda não existem, para usar tecnologias que ainda não foram inventadas e para resolver problemas que ainda não conhecemos, assim sendo, a maioria das futuras profissões envolverá de forma direta ou indireta a computação e tecnologias digitais (BRASIL, 2017, p. 475).

> As tecnologias digitais móveis provocam mudanças profundas na educação presencial e a distância. Na presencial, desenraizam o conceito de ensino/aprendizagem localizado e temporalizado. Podemos aprender desde vários lugares, ao mesmo tempo, *on* e *off-line*, juntos e separados. Na educação a distância permitem o equilíbrio entre a aprendizagem individual e a colaborativa, de forma que os alunos de qualquer lugar podem aprender em grupo, em rede, da forma flexível e adequada para cada aluno. (MORAN, 2013, p. 30).

As tecnologias, com o uso de softwares educacionais contribuem de maneira significativa para a aprendizagem dos alunos, sendo visto como um dos principais agentes de transformação da sociedade pelas modificações que exercem nos meios de produção e por suas consequências no cotidiano das pessoas.

Segundo a BNCC:

> Contudo, também é imprescindível que a escola compreenda e incorpore mais as novas linguagens e seus modos de funcionamento, desvendando possibilidades de comunicação (e também de manipulação), e que eduque para usos mais democráticos das tecnologias e para uma participação mais consciente na cultura digital. Ao aproveitar o potencial de comunicação do universo digital, a escola pode instituir novos modos de promover a aprendizagem, a interação e o compartilhamento de significados entre professores e estudantes (BRASIL, 2017. p. 63)

Os ambientes educacionais propícios à utilização das tecnologias digitais criam situações que induzem os alunos a serem agentes investigativos, conduzindo-os a levantarem hipóteses e buscarem possíveis soluções de problemas, a partir do uso de softwares na educação.

Atualmente existem muitos aplicativos e softwares destinados a promover o ensino de matemática em sala de aula de maneira dinâmica e mais atrativa aos alunos, com o propósito de tornar mais acessível: a compreensão dos conceitos e propriedades dos elementos matemáticos. O software de geometria dinâmica Geogebra é um programa que vem sendo utilizado com muita frequência no ensino de conteúdos matemáticos, os estudos e produções cientificas sobre a utilização desse recurso, aumentam significativamente a cada ano.

Gravina (2012), afirma que:

> A tecnologia digital coloca à nossa disposição diferentes ferramentas interativas que descortinam na tela do computador objetos dinâmicos e manipuláveis. E isso vem mostrando interessantes reflexos nas pesquisas em Educação Matemática, especialmente naquelas que têm foco nos imbricados processos de aprendizagem e de desenvolvimento cognitivo nos quais aspectos individuais e sociais se fazem presentes (GRAVINA, et al., 2012, p.13).

Uma estratégia que visa amenizar algumas dificuldades encontradas, despertar o interesse e facilitar o processo de ensino e aprendizagem é o uso de softwares e aplicativos no ensino de matemática, para realizar as visualizações gráficas, interpretações de propriedades e definições de funções.

Segundo Borba e Penteado (2012):

> O acesso à informática deve ser visto como um direito e, portanto, nas escolas públicas e particulares o estudante deve poder usufruir de uma educação que no momento atual inclua, no mínimo, uma “alfabetização tecnológica”. Tal alfabetização deve ser vista não como um Curso de Informática, mas, sim, como um aprender a ler essa nova mídia. Assim o computador deve estar inserido em atividades essenciais, tais como aprender a ler, escrever, compreender textos, entender gráficos, contar, desenvolver noções espaciais etc. (BORBA e PENTEADO, 2012, p.17).

As relações de reciprocidade na educação vêm sendo mais valorizadas ultimamente. As experiências com os alunos tornam-se fundamentais para proporcional ao professor a oportunidade de deixar de ser um mero transmissor de informação e passar a ter novos olhares para desenvolver novas formas de aprendizagem que possa estimular o aluno a ter um pensamento criativo e um fazer colaborativo. (FREIRE, et. al., 2011, p.84)

A possibilidade de utilizar as tecnologias digitais como via de comunicação entre professor e aluno torna-se cada vez mais relevante, tendo em vista que esse contato acaba despertando o interesse no momento em que os envolvidos possam a compartilhar informações relevantes ao ensino de matemática, possibilitando assim a troca de experiências. (SILVA, 2016, p. 29)

1.2 – ENSINO DE MATEMÁTICA E ETNOMATEMÁICA

A Matemática é definida por Davis & Hersh (1995), como a "ciência da quantidade e do espaço" sendo conhecidas em sua forma mais simples como: Aritmética e Geometria. A primeira trata das várias espécies de regras de operação sobre números, estudando as várias situações do cotidiano em que são utilizadas. A Geometria, por sua vez, trata parcialmente de questões sobre medidas do espaço, além de tratar, também, de aspectos do espaço que possuem forte apelo estético e sendo ensinada segundo os esquemas apresentados por Euclides (300 a.C.), apresenta-se como uma ciência dedutiva (DAVIS & HERSH, 1995, p.25-26).

Para D'Anbrosio (2009), a matemática tem sido conceituada como a ciência dos números e das formas, caracterizada pelas relações e medidas, das inferências e suas características que norteiam a precisão, o rigor e a exatidão. E como tal, muitos professores e alunos ainda preservam esse ponto de vista em relação a matemática como uma matéria altamente rigorosa e cheia de regras.

Segundo Bishop (1999), a matemática é uma das disciplinas mais trabalhadas na escola, ao mesmo tempo em que é uma das menos compreendidas. Para o seu estudo são dispensadas as maiores cargas horárias se comparadas às demais disciplinas, excluindo-se o estudo da língua materna. Essa carga horária é, em muitos casos, pouco ou mal aproveitada em função do grande número de exercícios de repetição que são aplicados aos alunos, voltados à mecanização de suas maneiras de interpretar as relações matemáticas presentes em situações ideais, ou retiradas de um cotidiano "modificado" para a obtenção de resultados que evidenciam processos de manipulação de algoritmos, sem qualquer importância às implicações dessa sistemática sobre a realidade estudada.

Conforme Bishop (1999) essa aprendizagem baseada na mecanização das práticas matemáticas, moldadas em um restrito grupo de situações, envolvendo valores e condições ideais, tem como único propósito suprir as necessidades internas da própria Matemática. Nessa perspectiva, o ensino da Matemática centra-se na aplicação de exercícios, que “preparam” para outras sequências de exercícios, que por sua vez servirão para os seguintes, numa gradual elevação do nível de dificuldades de resolução dos problemas propostos.

A perspectiva, de relacionar os conteúdos matemáticos às representações das práticas culturais é uma forma de estabelecer ligações entre os conceitos e a identidade dos estudantes. Sendo, então, necessário ao ensino da matemática, por seu caráter de contextualização, tratar do uso das tecnologias para impulsionar essa interação entre matemática e cotidiano, como uma maneira criativa de oferecer aos alunos uma nova face do ensino da matemática escolar.

Barros, (2004.a) afirma que:

> No processo de contextualização da matemática escolar, é fundamental uma ampla visão da realidade em estudo. Porém, definir realidade não é uma tarefa muito fácil, haja vista que o próprio conceito é relativo e mutável, concebido, em geral, de forma diferenciada por cada grupo/segmento/individuo, pertencente a um ou mais grupos sociais. (BARROS, 2004.a. p. 30)

Sem liberdade criativa que impulsiona o senso de investigação no ensino da Matemática, o aluno passa a ser secundário no processo de ensino e aprendizagem e o rigor do cumprimento dos conteúdos e dos processos rígidos de avaliação, manifestam-se superiores aos objetivos da aprendizagem (BISHOP, 1999).

No exercício dessa matemática criativa e dinâmica, uma das alternativas é a relação da matemática com as práticas culturais, a partir da qual podemos compreender as dinâmicas da sociedade amazônica, que numa visão geral, observa-se que passa por grandes transformações, onde o desenvolvimento cultural, econômico, tecnológico e social necessita de uma nova postura que adeque o processo de ensino/aprendizagem aos novos mecanismos de apoio as práticas pedagógicas, em especial o ensino de matemática, tendo em vista que os números são tão essenciais, assim como saber ler e escrever e quase sempre está em tudo o que fazemos, implícita ou explicitamente (BRITO, M., LUCENA, I., SILVA, F. 2006, p. 5).

Saberes matemáticos essenciais como quantificar, calcular, fazer operações, medir, analisar gráficos, fazer tabelas, entre outros, proporcionam aos alunos aprenderem a utilizar e a incorporar os mais diversos instrumentos didático-científicos e tecnológicos, entre os quais podemos citar a calculadora, o termômetro, o smartphone e computadores (BRITO, M., LUCENA, I., SILVA, F. 2006, p. 5).

Nesse contexto, faz-se necessário integrar as práticas de ensino com os princípios da Etnomatemática, que procura aproximar conceitos e conteúdos matemáticos às experiências vivenciadas pelas populações identificadas em grupos sociais, criando a possibilidade da utilização da matemática (escolar/cientifica) como uma ferramenta cultural para o seu próprio processo de ensino/aprendizagem permitindo considerar de forma efetiva a inclusão destes grupos na apropriação do conhecimento sistematizado a partir de um processo de globalização (BRITO, M., LUCENA, I., SILVA, F. 2006, p. 6)

> A abordagem etnomatemática vai além do subsídio metodológico para o ensino da Matemática no contexto escolar. Não se trata, apenas, da melhoria do processo ensino/aprendizagem da Matemática, mas de desafiar e contestar o domínio de saberes e a valorização desse domínio por alguns, sob pena de destruir outros de seus próprios valores, gerando desigualdades e desrespeitos na vida das populações, extermínios de uns para ascensão de outros dentro das sociedades. Portanto, a construção ao etnomatemática para o trabalho pedagógico é, sobretudo, uma proposta essencial à ética humana (LUCENA, 2005, p.19).

2 – O SOFTWARE GEOGEBRA

O GeoGebra é um software/aplicativo de geometria dinâmica livre disponível no endereço eletrônico https://www.geogebra.org/, é destinado a todos os níveis de ensino que reúne geometria, álgebra, planilha de cálculo, gráficos, probabilidade, estatística e cálculos simbólicos em um único pacote. Suas ferramentas são fáceis de se usar e permite a construção de diversos objetos geométricos como: pontos, vetores, segmentos, retas, secções cônicas, gráficos representativos de funções e curvas parametrizadas; esses objetos matemáticos podem ser modificados dinamicamente a partir de uma interface gráfica que permite a interação do usuário com o software a partir de conceitos matemáticos e comandos de programação contidos no software.

O software Geogebra permite a inserção de valores, coordenadas e comandos que podem ser introduzidos diretamente em sua zona gráfica ou a partir da utilização do teclado no campo entrada, além da vantagem de podermos trabalhar utilizando variáveis vinculadas a números, vetores e pontos. Dentre as várias possibilidades que o GeoGebra possui para a criação, podemos citar a facilidade de se trabalhar com funções, desde o nível básico até a determinação de derivadas e integrais, além de oferecer um conjunto de comandos relacionados com análise matemática, álgebra, álgebra linear, geometria analítica, matemática financeira, entre outros (SILVA, 2016, p. 50).

A palavra Geogebra vem da aglutinação das palavras (Geometria e Álgebra), esse software foi criado por Markus Hohenwarter para poder ser introduzido em um ambiente de sala de aula. O projeto piloto do software foi iniciado em 2001, na Universität Salzburg, já seu desenvolvimento foi realizado na Florida Atlantic University, sua característica principal se dá por ser um software/aplicativo, ou seja, é um programa multiplataforma que pode ser usado tanto em comutadores quanto em celulares e tabletes, possui uma matemática dinâmica que combina conceitos de geometria e álgebra.

O software Geogebra permite realizar construções geométricas com a utilização de pontos, retas, segmentos de reta, polígonos etc., assim como permite inserir funções e alterar todos esses objetos dinamicamente, após a construção estar finalizada. Portanto, o software Geogebra é capaz de lidar com variáveis para números, pontos, vetores, derivar e integrar funções, oferecer ainda comandos para se encontrar raízes e pontos extremos de uma função.

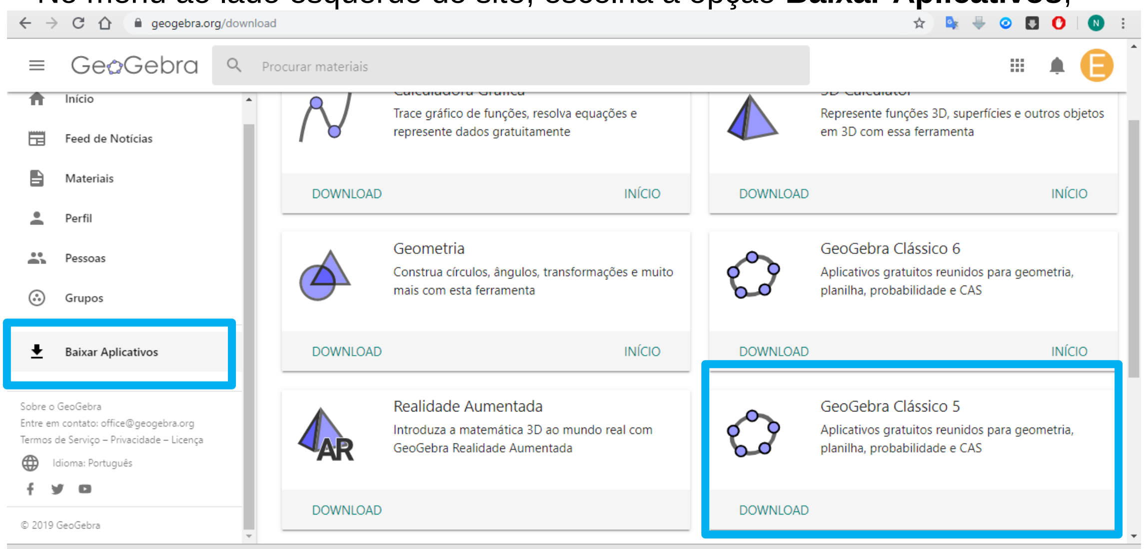
Atualmente o software Geogebra possui uma comunidade de milhões de usuários em praticamente todos os países e se tornou um líder na área de softwares de matemática dinâmica, apoiando o ensino e a aprendizagem em Ciência, Tecnologia, Engenharia e Matemática. Muitos trabalhos têm sido desenvolvidos utilizando o software Geogebra, como o Curso Básico e Avançado de Geogebra promovido pela Universidade Estadual do Paraná (UNESPAR - APUCARANA) disponível no site https://ogeogebra.com.br/cursos/, seu curso básico está na 17ª edição e o curso avançado na 1ª edição.

2.1 – INSTALAÇÃO DO SOFTWARE

A instalação do Geogebra é bem simples e prática, pois trata-se de um software gratuito que está disponível em seu site e pode ser baixado sem nenhum custo ou restrição, então vamos aos procedimentos.

1 – Acesse o site https://www.geogebra.org/;

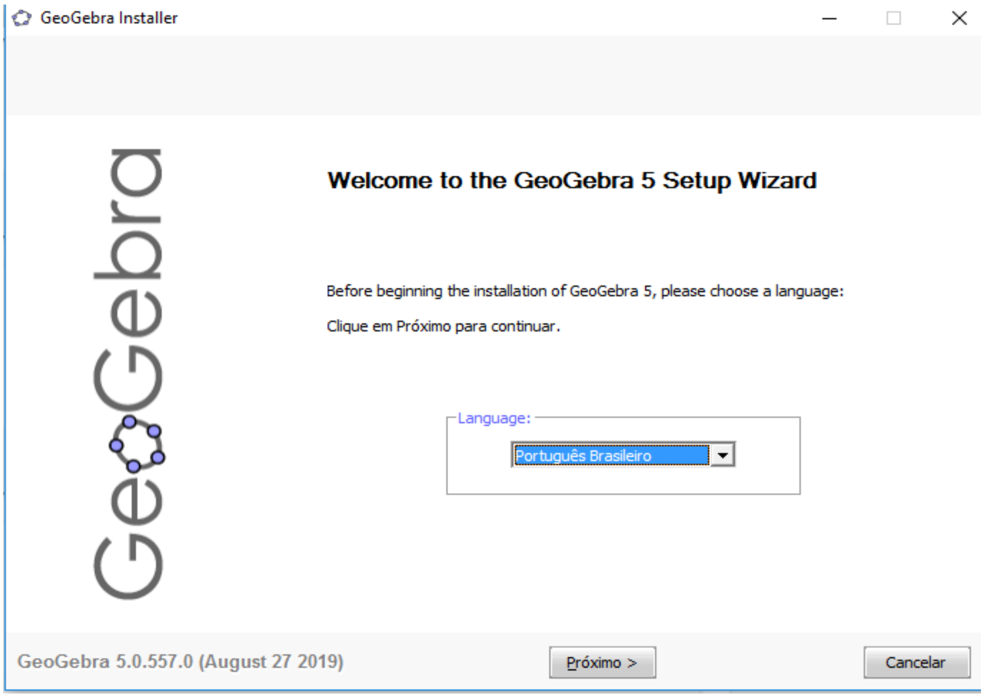
2 – No menu ao lado esquerdo do site, escolha a opção **Baixar Aplicativos**;



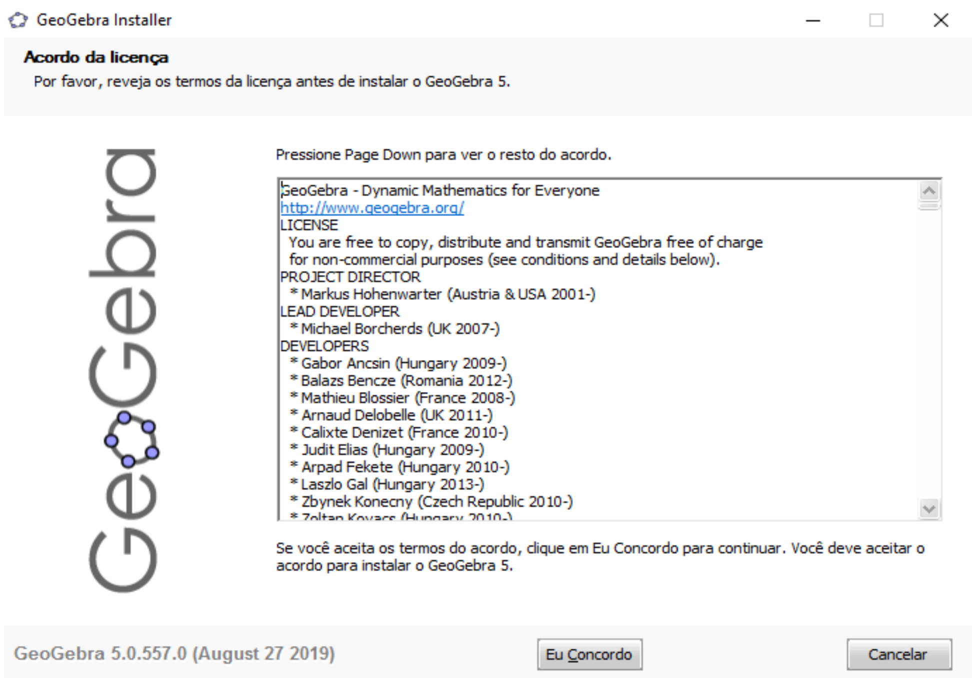
3 – Aparecerá várias opões para download que vai desde uma calculadora gráfica até o Geogebra Clássico 6 que é a última versão desenvolvida pelo site até o momento.

Dentre as opções que aparecem para fazer download, escolha o **Geogebra Clássico 5** e clique em download.

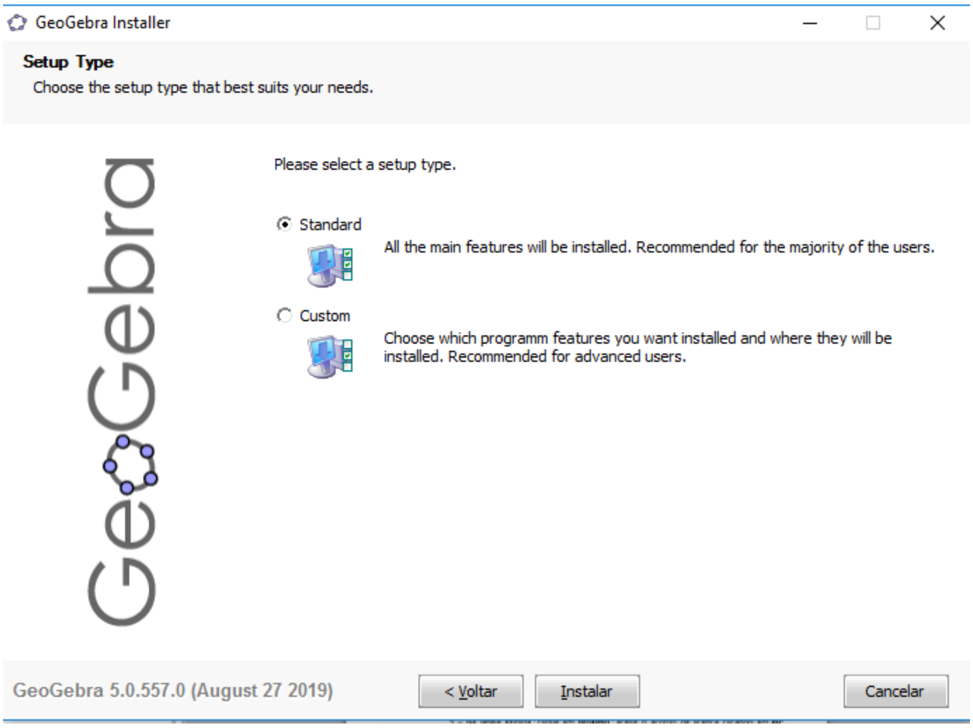
4 – Após terminar o download, acesse a pasta de downloads em seu computador e execute o instalador do Geogebra. Em seguida aparecerá a seguinte tela:



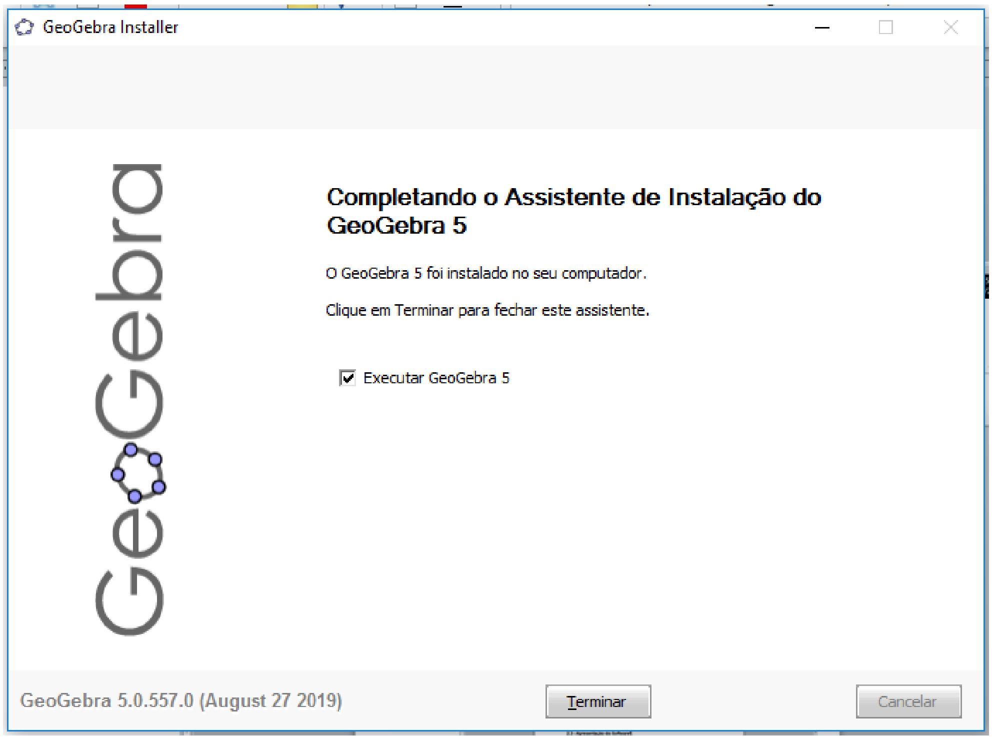
5 – Na janela exibida, clique em **próximo**, aceite o acordo de licença clicando em **eu concordo**



6 – Após aceitar o acordo de licença, clique em instalar



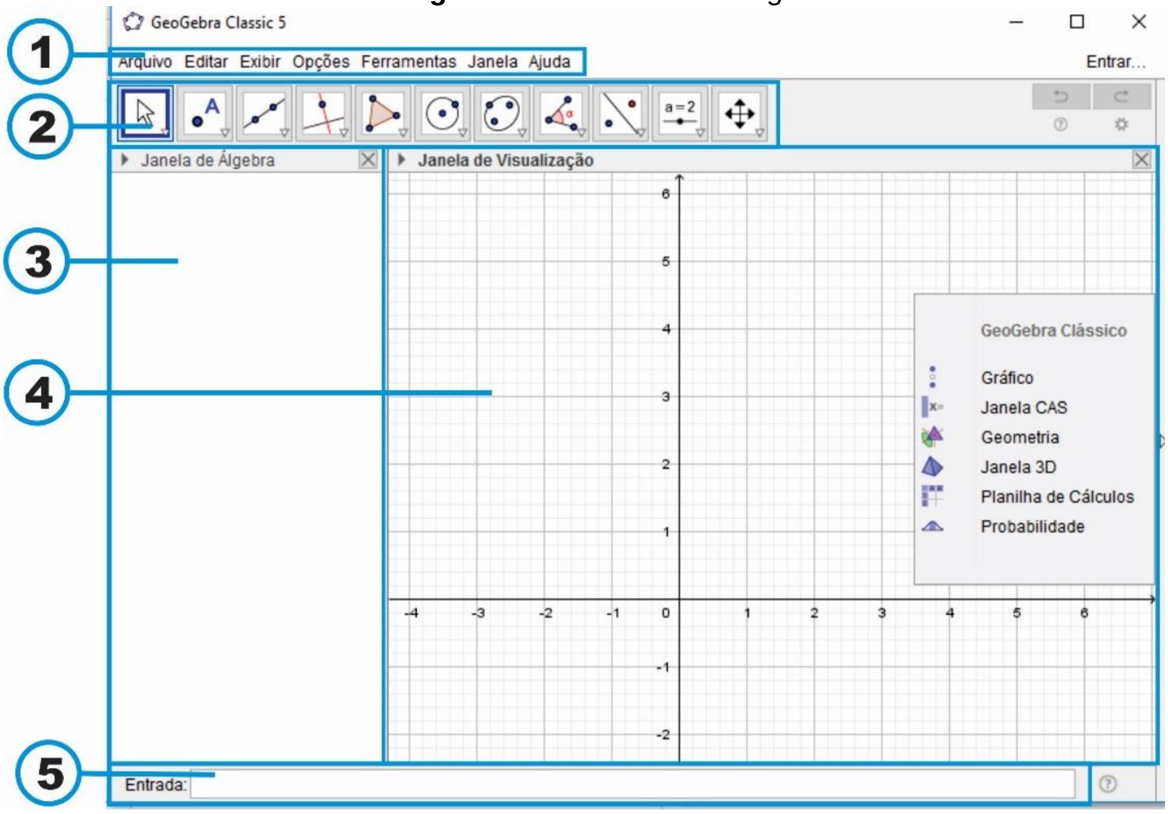
7 – O Sistema Operacional irá instalar o Geogebra no computador, ao final, clique em **terminar** para encerrar a instalação. Pronto, você já pode utilizar os recursos que o Geogebra oferece.



2.2 – APRESENTAÇÃO DO SOFTWARE

Ao inicializar o GeoGebra encontramos uma interface composta pelos seguintes elementos: 1 - Barra de Menus, 2 - Barra de Ferramentas, 3 - Janela de Álgebra, 4 - Janela de Visualização e 5 - Campo Entrada. Esses cinco elementos são fundamentais para poder fazer um bom uso dos diversos recursos disponíveis nesse programa.

Figura 1 – *Interface do Geogebra*

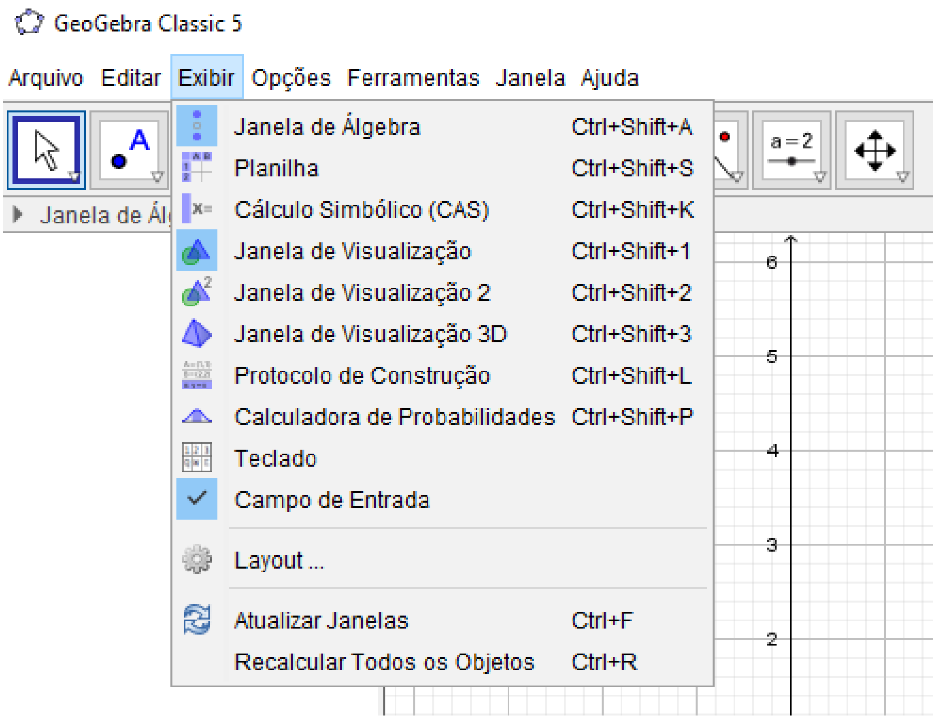


2.2.1 – Barra de Menus

A Barra de menus está localizada na parte superior da zona gráfica, ela é composta pelos menus: Arquivo, Editar, Exibir, Opções, Ferramentas, Janela e Ajuda. Em cada opção existente na Barra de Menus existe uma lista de opções onde é possível manipular e personalizar a interface do Geogebra.

Importante: O *menu Exibir* merece um destaque especial, pois o mesmo possibilita a personalização da interface do Geogebra, é a partir desse menu que podemos exibir ou esconder diferentes elementos a exemplo da Janela de Álgebra, Janela Planilha, Janela Cálculo Simbólico (CAS), Janela de Visualização, Janela de Visualização 2, Janela de Visualização 3D, Protocolo de Construção, Calculadora de Probabilidades, Teclado e Campo Entrada. Para ter acesso a essas opções na interface do Geogebra basta marcar/desmarcar o item no *menu exibir* (FRISKE, Et. al. 2016. p. 7).

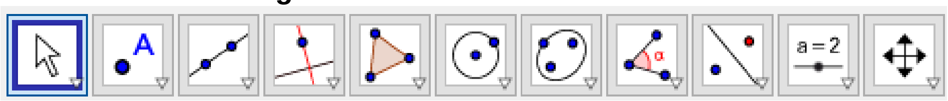
Figura 02 – *Menu Exibir*



2.2.2 – Barra de Ferramentas

Na barra de ferramentas encontramos todas as ferramentas necessárias para fazer as construções de objetos matemáticos, ela está dividida em 11 botões com várias ferramentas auxiliares que serão vistas com mais detalhes a seguir.

Figura 03 – *Barra de Ferramentas*

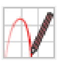


Cada ícone possui várias ferramentas que possuem uma certa relação entre si. Para acessar essas ferramentas basta clicar ou ficar posicionado com a seta do mouse em cima da seta para baixo localizada no canto inferior direito do ícone, dessa forma aparecera as várias ferramentas disponíveis (FRISKE, Et. al. 2016. p. 7).

2.2.2.1 – Ferramentas do ícone Manipulação 

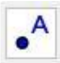
 **Mover:** Essa ferramenta é utilizada para mover/arrastar objetos livres na *Janela de Visualização*. Com essa ferramenta selecionada pode-se apagar um objeto criado clicando em cima dele e pressionando a tecla *delete*, pode move-lo usando o mouse ou as setas do teclado, também é possível ativar a ferramenta *Mover* pressionando a tecla *ESC*.

 **Rotação em Torno de um Ponto:** Utiliza-se essa ferramenta selecionando primeiro o ponto que será o centro de rotação, depois seleciona o objeto livre que deseja fazer a rotação em torno do primeiro ponto selecionado, arraste o objeto com o mouse e note que ele faz um movimento circular em torno do primeiro ponto selecionado mantendo sempre a mesma distância.

 **Função à Mão Livre:** Desenhe uma função ou objeto geométrico na Janela de Visualização, caso o Geogebra reconheça o objeto criado ele faz uma adaptação do mesmo.

 **Caneta:** Essa ferramenta serva para escrever ou desenhar objetos livre de acordo com o movimento do mouse.

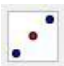
2.2.2.2 – Ferramentas do ícone Pontos 

 **Ponto:** Para criar um ponto basta selecionar essa ferramenta e em seguida clicar em qualquer local da *Janela de Visualização*. Pode-se criar um ponto atrelado a um objeto (segmento, reta, polígono, cônica, gráfico ou curva), basta selecionar essa ferramenta e clicar em cima do objeto desejado.

**Ponto em Objeto:** Esta ferramenta permite criar um ponto dependente de um objeto, o ponto criado só poder a ser movido dentro do objeto. Ao mover o objeto o ponto criado também se movera. No caso de um polígono, para criar um ponto que é fixado a um objeto, clique na ferramenta e depois no objeto, esse novo ponto pode ser movido utilizando a ferramenta Mover, mas apenas dentro do objeto. Para colocar um ponto interior de um círculo ou elipse será necessário aumentar a opacidade (transparência) destes. Se você clicar no perímetro de um objeto (por exemplo: círculo, elipse, polígono), então o ponto será fixado ao perímetro ao invés do interior.

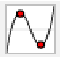
**Vincular/Desvincular Ponto:** Para anexar um ponto a um determinado objeto, primeiro clique em um ponto livre e em seguida sobre o objeto para o qual você deseja anexar este ponto. O ponto se tornará dependente e só poderá ser movido dentro do objeto.

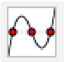
**Interseção entre Dois Objetos:** Os pontos de interseção de dois objetos podem ser criados selecionando dois objetos, assim todos os pontos de interseção serão criados; ou então, clicando-se diretamente sobre uma interseção de duas linhas, assim apenas um ponto de interseção será criado.

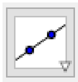
**Ponto Médio:** Com esta ferramenta pode-se obter o ponto médio entre dois pontos ou de um segmento. Para isso, basta selecionar a ferramenta, e em seguida clicar em dois pontos ou em um segmento para obter o respectivo ponto médio.

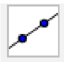
Também é possível clicar numa secção cônica (por exemplo, circunferência) para criar o respectivo centro.

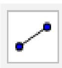
**Número Complexo:** Possibilita criar um ponto no plano imaginário, sendo o eixo das Abcissas (x) o eixo Real (*Re*) e o eixo das Ordenadas (y) o Imaginário (*Im*).

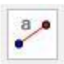
**Otimização:** Com essa ferramenta é possível localizar os pontos de máximo e mínimo de uma função, basta selecionar a ferramenta e clicar em cima da função desejada para obter os pontos otimizados.

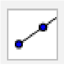
**Raízes:** Essa ferramenta possibilita a inserção das raízes de uma determinada função, para utilizar basta selecionar a ferramenta e clicar em cima da função desejada e note que as raízes da função foram marcadas com um ponto.

2.2.2.3 – Ferramentas do ícone Linhas Retas 

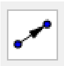
**Reta:** Essa ferramenta serve para criar retas, para isso basta selecionar dois pontos já criados ou duas posições na Janela de Visualização. Essa reta fica atrelada aos dois pontos utilizados em sua criação, ou seja, para movimentar a reta é preciso movimentar os pontos.

**Segmento:** Essa ferramenta serve para criar seguimentos de retas, para isso basta selecionar dois pontos já criados ou duas posições na Janela de Visualização. O seguimento de reta criado fica atrelada aos dois pontos utilizados em sua criação, ou seja, para movimentar o segmento de reta é preciso movimentar os pontos.

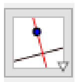
**Segmento com Comprimento Fixo:** Essa ferramenta é utilizada para a criação de seguimento de reta paralelo ao eixo X, para cria-lo basta selecionar um ponto qualquer que será o extremo inicial do seguimento, em seguida especifique o comprimento desejado no campo entrada de texto na janela de diálogo que surge.

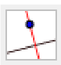
**Semirreta:** Essa ferramenta é utilizada para a criação de semirreta, para isso basta selecionar um ponto qualquer que será a origem da semirreta, em seguida selecione outro ponto que servirá para direcionar a semirreta.

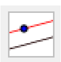
**Caminho Poligonal:** Essa ferramenta é utilizada para a criação uma serie de seguimento de reta interligados, para cria-lo basta selecionar quantos pontos deseja que seu caminho poligonal tenha, em seguida clique no primeiro ponto que você utilizou.

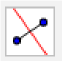
**Vetor:** Essa ferramenta é utilizada para a criação de um vetor na Janela de Visualização, para cria-lo basta selecionar um ponto qualquer que será a origem do vetor, em seguida selecione outro ponto que servirá para dar direção ao vetor.

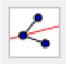
**Vetor a Partir de um Ponto:** Essa ferramenta é utilizada para a criar um vetor com mesmo tamanho e direção a partir de um ponto, para cria-lo basta selecionar um ponto qualquer que será a origem do vetor, em seguida selecione o vetor que você deseja copiar.

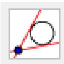
2.2.2.4 – Ferramentas do ícone Posições Relativas 

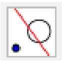
**Reta Perpendicular:** Com essa ferramenta é possível criar retas perpendiculares a uma reta qualquer, seguimento, vetor, eixo ou lado de um polígono. Para criar uma reta perpendicular, primeiro selecionamos um ponto ou posição na Janela de Visualização, em seguida selecionamos uma reta, seguimento, vetor, eixo ou lado de um polígono.

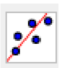
**Reta Paralela:** Com essa ferramenta é possível criar retas paralelas a uma reta qualquer, seguimento, vetor, eixo ou lado de um polígono. Para criar uma reta paralela, primeiro selecionamos um ponto ou posição na Janela de Visualização, em seguida selecionamos uma reta, seguimento, vetor, eixo ou lado de um polígono.

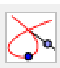
 **Mediatriz:** Com essa ferramenta é possível criar retas perpendiculares a um seguimento de reta ou a dois pontos quaisquer. Para criar uma mediatriz basta selecionar dois pontos já criados ou selecionar um seguimento de reta.

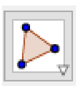
 **Bissetriz:** Utilizando essa ferramenta é possível definir uma bissetriz a partir de três pontos, para cria-la basta selecionar três pontos já criado e será inserida uma bissetriz no ângulo formado entre os três pontos utilizados.

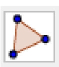
 **Reta Tangente:** Com essa ferramenta é possível criar retas tangentes a um círculo, cônica ou função. Para criar uma reta tangente, primeiro selecionamos um ponto já criado, em seguida selecionamos um círculo, cônica ou função.

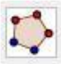
 **Reta Polar ou Diametral:** Utilizando essa ferramenta é possível criar uma reta perpendicular a uma outra reta qualquer passando pela origem de um círculo ou cônica, formando assim o diâmetro. Para cria-la basta selecionar um ponto ou uma reta e sem seguida selecionar um círculo ou cônica.

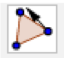
 **Reta de Regressão Linear:** Com essa ferramenta é possível encontrar a reta que melhor se ajusta a um conjunto de pontos. Para cria-la basta selecionar vários pontos desejados ou uma lista de pontos.

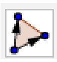
 **Lugar Geométrico:** Utilizando essa ferramenta é possível construir lugar geométrico determinado pelo movimento de um objeto (reta, ponto, etc.) ao longo de uma trajetória.

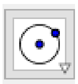
2.2.2.5 – Ferramentas do ícone Polígonos 

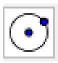
 **Polígono:** Essa ferramenta construí polígonos irregulares com quantidades de lados desejada. Para criar polígonos com essa ferramenta basta selecionar sucessivamente pelo menos 3 prontos, os quais serão vértices do polígono, em seguida clique no ponto inicial para fechar o polígono.

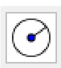
**Polígono Regular:** Essa ferramenta possibilita a construção de um polígono regular a partir de um lado. Para isso selecione dois pontos ou posição na Janela de visualização, em seguida determine o número de vértices desejado no campo entrada de texto da janela de diálogo que surge e aperte no botão ok.

**Polígono Rígido:** Essa ferramenta construí polígonos irregulares rígidos com quantidades de lados desejada. Para criar polígonos com essa ferramenta basta selecionar sucessivamente pelo menos 3 prontos, os quais serão vértices do polígono, em seguida clique no ponto inicial para fechar o polígono. Note que após criar esse polígono é exibido apenas dois pontos onde um movimenta o polígono pela Janela de visualização e o outro faz a rotação do polígono em torno do primeiro ponto.

**Polígono Semideformável:** Essa ferramenta construí polígonos irregulares semideformáveis com quantidades de lados desejada. Para criar polígonos com essa ferramenta basta selecionar sucessivamente pelo menos 3 prontos, os quais serão vértices do polígono, em seguida clique no ponto inicial para fechar o polígono. Note que o primeiro ponto criado não deforma o polígono, ele apenas movimenta a construção pela Janela de Visualização.

2.2.2.6 – Ferramentas do ícone Formas Circulares 

**Círculo dados Centro e Um de seus Pontos:** Essa ferramenta é utilizada para construir círculos, para isso basta selecionar um ponto ou posição na Janela de Visualização, o que será o centro do círculo, em seguida selecione um ponto ou posição que ficara sobre a circunferência.

**Círculo: Centro & Raio:** Com essa ferramenta é possível construir círculos fornecendo o tamanho do raio, para isso basta selecionar um ponto ou posição na Janela de Visualização, em seguida digite o tamanho do raio desejado no campo entrada de texto na janela de diálogo que surge e aperte o botão ok.

Compasso: Com essa ferramenta é possível construir círculos fornecendo o tamanho do raio a partir de um seguimento qualquer, para isso basta selecionar um seguimento ou dois pontos na Janela de Visualização para determinar o tamanho do raio, em seguida selecione um ponto ou posição para determinar o centro do círculo.

Círculo definido por Três Pontos: Utilizando essa ferramenta é possível construir círculos fornecendo três pontos de sua circunferência, para isso basta selecionar três pontos ou posições na Janela de Visualização para determinar o tamanho da circunferência.

Semicírculo: Essa ferramenta é utilizada para criar um semicírculo, para isso basta selecionar dois pontos ou posições na Janela de Visualização para determinar o tamanho do semicírculo.

Arco Circular: Essa ferramenta é utilizada para criar um arco a partir de três pontos, para isso basta selecionar um ponto ou posição na Janela de Visualização que será o centro da região circular, em seguida selecione o segundo ponto que será o tamanho do raio e por último selecione o ponto que será o tamanho do arco circular.

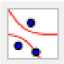
Arco Circuncircular: Essa ferramenta é utilizada para criar um arco a partir de três pontos presentes na região circular, para isso basta selecionar três pontos ou posições na Janela de Visualização.

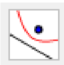
Setor Circular: com essa ferramenta é possível criar um setor circular a partir de três pontos, para isso basta selecionar um ponto ou posição na Janela de Visualização que será o centro do setor circular, em seguida selecione o segundo ponto que será o tamanho do raio e por último selecione o ponto que será o tamanho do setor circular.

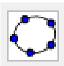
Setor Circuncircular: Essa ferramenta é utilizada para criar um setor circular a partir de três pontos presentes na região circular, para isso basta selecionar três pontos ou posições na Janela de Visualização.

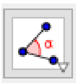
2.2.2.7 – Ferramentas do ícone Cônicas 

**Elipse:** Com essa ferramenta é possível construir elipse utilizando três pontos, para isso basta selecionar dois pontos ou posições na Janela de Visualização, os quais serão os focos da elipse, em seguida selecione um ponto ou posição que pertencera a elipse.

**Hipérbole:** Para fazer a construção de uma hipérbole com essa ferramenta, basta selecionar dois pontos ou posições na Janela de Visualização, os quais serão os focos da hipérbole, em seguida selecione um ponto ou posição que pertencera a hipérbole.

**Parábola:** Utilizamos essa ferramenta para criar parábola, para isso basta selecionar uma reta já existente na Janela de Visualização e em seguida selecione um ponto ou posição para definir a concavidade da parábola.

**Cônica por Cinco Pontos:** Essa ferramenta cria uma seção cônica utilizando cinco pontos, para isso basta selecionar quatro pontos ou posições na Janela de Visualização, em seguida selecione o quinto ponto que definira o formato da seção cônica.

2.2.2.8 – Ferramentas do ícone Ângulos e Medidas 

**Ângulo:** Utilizando essa ferramenta podemos determinar um ângulo utilizando três pontos. Para criar um ângulo selecione três pontos no sentido horário (sendo que o segundo ponto vai ser a origem do ângulo) ou duas retas, semirretas, segmentos de reta ou vetores. Com essa ferramenta também é possível determinar todos os ângulos de um polígono, para isso basta selecionar essa ferramenta e selecionar o polígono.

**Ângulo com Amplitude Fixa:** Essa ferramenta é utilizada para criar ângulos com amplitude fixa. Inserimos esse ângulo selecionando dois pontos ou posições (o

segundo ponto será a origem do ângulo), em seguida indique o tamanho do ângulo no campo entrada de texto na janela de diálogo que aparecerá e aperte o botão ok.

Distância, Comprimento ou Perímetro: Essa ferramenta é utilizada na obtenção da distância entre dois pontos, duas retas ou entre um ponto e uma reta, seguimento, perímetro de polígonos, circunferências e elipses, além do comprimento de arcos, mostrando o valor da distância a partir de um texto dinâmico. Para utilizar essa ferramenta basta selecionar dois pontos, um ponto e uma reta, selecionar um polígono ou uma cônica.

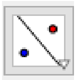
Área: Utilizamos essa ferramenta para determinar o valor numérico da área de um polígono, círculo ou elipse. Para isso, basta ativar essa ferramenta e selecionar um polígono, círculo ou elipse para determinar sua área.

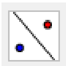
Inclinação: Essa ferramenta mostra a inclinação de uma reta, utilizando um triângulo cuja razão entre a medida do cateto vertical e a medida do cateto horizontal é o valor absoluto da inclinação da respectiva reta. Para utilizar essa ferramenta, basta ativa-la e selecionar uma reta.

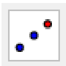
Lista: Utilizando essa ferramenta podemos criar uma lista de objetos selecionados como: pontos, seguimentos de reta, polígonos, cômicas, etc. Para isso, basta ativar a ferramenta, clicar e segurar o botão do mouse em um espaço da Janela de Visualização, em seguida arraste o mouse criando um retângulo marcando os objetos a serem selecionados e inseridos na lista.

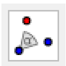
Relação: Essa ferramenta permite saber a relação entre dois objetos, para isso basta clicar nos dois objetos e uma janela de diálogo aparecerá indicando a relação entre eles.

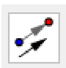
Interpor Funções: Essa ferramenta permite saber de informações mais especificas de uma função em um determinado intervalo como: pontos de máximo e mínimo, integral, reta tangente, círculo osculador, etc. Para utilizar essa ferramenta, basta selecionar a função na Janela de visualização e observar as informações na janela de diálogo que surgirá.

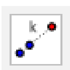
2.2.2.9 – Ferramentas do ícone Transformações 

**Reflexão em Relação a uma Reta:** Com essa ferramenta é possível criar um reflexo de um determinado objeto (ponto, círculo, reta, polígono, etc.) em relação a uma reta. Para isso, basta selecionar primeiramente o objeto à ser refletido e em seguida selecionar a reta de reflexão.

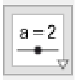
**Reflexão em Relação a um Ponto:** Com essa ferramenta é possível criar um reflexo de um determinado objeto (ponto, círculo, reta, polígono, etc.) em relação a um ponto. Para isso, basta selecionar primeiramente o objeto à ser refletido e em seguida selecionar o ponto de reflexão.

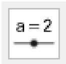
 **Rotação em Torno de um Ponto:** Utilizando essa ferramenta é possível criar o reflexo de um objeto que pode ser rotacionado em relação a um ângulo. Para utilizar essa ferramenta selecione um objeto a ser rotacionado, em seguida clique em um monto para estabelecer o centro de rotação e na janela de diálogo que surge insira o valor do ângulo de amplitude. Note que a medida em que você movimenta o objeto, seu reflexo também é movimentado sem alterar o ângulo de rotação definido.

**Translação de um Vetor:** Essa ferramenta é utilizada para transladar objetos (ponto, seguimento, polígono, cônicas, etc.) para o mesmo sentido de um vetor selecionado. Para utilizar essa ferramenta selecione o objeto que pretende transladar, em seguida selecione o vetor que irá definir a translação. Note que ao movimentar o vetor, também é movimentado o objeto atrelado a ele.

**Homotetia**: Utilizando essa ferramenta é possível criar copias de objetos com um fator de ampliação, para isso basta selecionar um objeto, em seguida selecione um

ponto que será o centro, por último na janela de diálogo que surge digite o fator de homotetia.

2.2.2.10 – Ferramentas do ícone Controles Especiais 



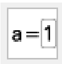
Controle Deslizante: Com essa ferramenta podemos criar um controle deslizante que serve para fazer a alteração de valores de uma determinada variável movimentando apenas um ponto que está atrelado um seguimento de reta. Para utilizar essa ferramenta basta clicar em algum local da Janela de Visualização, onde deseja que o controle fique, em seguida abrira uma janela de diálogo para você preencher com o intervalo de máximo e mínimo, incremento, nome do controle, etc. Após o preenchimento clique no botão ok e será criado o controle deslizantes na sua Janela de Visualização.

Texto: Essa ferramenta possibilita a criação de textos estáticos, dinâmicos ou em linguagem LATEX inseridos na Janela e Visualização. Para inserir texto, basta clicar no local onde deseja que seu texto seja inserido na Janela de Visualização, em seguida aparecera uma janela de diálogo onde você pode digitar seu texto de três formas. O ***Texto Estático*** não está atrelado a nenhum objeto matemático presente na Janela de Visualização, o ***Texto Dinâmico*** possui valores de objeto que são alterados automaticamente a medida em que o objeto é alterado, o ***Texto Misto*** é uma combinação dos dois textos anteriores. Também podemos inserir um conjunto de textos e fórmulas em linguagem LATEX, para utilizar esse recurso de texto, basta ativar a caixa Fórmula LaTeX na janela de diálogo da ferramenta texto e inserir o texto e as fórmulas.

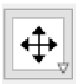
Inserir Imagem: A partir dessa ferramenta é possível inserir figuras na Janela de Visualização. Para utilizar essa ferramenta basta selecionar a mesma, em seguida aparecera uma janela de navegação de pastas, encontre seu arquivo, selecione-o e em seguida clique no botão abrir.

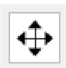
Botão: Utilizando essa ferramenta é possível criar um botão e associar a ele um conjunto de ações visíveis na zona gráfica. Para inserir um botão, basta clicar em algum local da Janela de Visualização, onde deseja que o botão seja inserido, em seguida aparecera uma janela de diálogo para você preencher com o nome do botão e a sua respectiva programação de ações desejadas.


Caixa para Exibir/Esconder Objetos: Essa ferramenta permite criar uma caixa de marcação onde é possível ativar (mostrar) e desativar (esconder) objetos construídos apenas marcando e desmarcando a caixa. Para utilizar essa ferramenta, basta clicar em um local da Janela de Visualização onde deseja que fique a caixa, em seguida na janela de diálogo que surge, preencha com o nome da caixa e selecione os objetos construídos que deseja que fiquem atrelados a essa caixa.



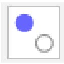
Campo de Entrada: Essa ferramenta é utilizada para criar uma caixa de texto que permite a interação com os objetos construídos. Para utilizar essa ferramenta, basta clicar em algum local da Janela de Visualização, onde deseja que fique o seu texto, em seguida na janela de diálogo que surge, digite o nome e selecione o objeto a ser vinculado e clique no botão ok.

2.2.2.11 – Ferramentas do ícone Exibição 


Mover Janela de Visualização: Essa ferramenta é utilizada para mover o sistema de eixos da Janela de Visualização, alterar a escala dos eixos, bem como movimentar imagens. Para utilizar essa ferramenta, basta clicar em algum local da Janela de Visualização, segurar o clique e arrastar o mouse para movimentar os eixos, para alterar a escala dos eixos basta clicar em cima o eixo desejado, segurar a tecla shift e arrastar o mouse. É possível movimentar imagens com essa ferramenta também, para isso basta clicar com o botão direito do mouse sobre a imagem, segurar o clique e arrastar.

**Ampliar:** Para ampliar a visualização de objetos criados na Janela de Visualização utilizamos essa ferramenta. Para usa-la, basta clicar em uma região da Janela de Visualização onde deseja ampliar, clique quantas vezes desejar até ficar do tamanho esperado.

**Reduzir:** Para reduzir a visualização de objetos criados na Janela de Visualização utilizamos essa ferramenta. Para usa-la, basta clicar em uma região da Janela de Visualização onde deseja ampliar, clique quantas vezes desejar até ficar do tamanho esperado.

**Exibir/Esconder Objetos:** Com essa ferramenta é possível exibir/esconder objetos criados na Janela de Visualização. Para utilizar essa ferramenta, basta clicar nos objetos que deseja esconder, em seguida selecione outra ferramenta qualquer para poder executar a ação de esconder, da mesma forma fazemos para exibir o objeto novamente.

Exibir/Esconder Rótulo: Com essa ferramenta é possível exibir/esconder o rótulo de objetos criados na Janela de Visualização. Para utilizar essa ferramenta, basta clicar nos objetos que deseja esconder o rótulo, da mesma forma fazemos para exibir o rótulo dos objetos novamente.

**Copiar Estilo Visual:** Essa ferramenta possibilita copiar a formatação (estilo) de um determinado objeto. Para utilizar essa ferramenta, basta clicar no objeto que você deseja copiar o estilo e em seguida clique no objeto que deseja aplicar o estilo.

**Apagar:** Essa ferramenta serve para apagar objetos criados na Janela de Visualização. Para utilizar essa ferramenta, basta clicar o objeto desejado e note que que o objeto é apagado da Janela de Visualização e também da Janela de Álgebra. As

2.2.3 – Janela de Álgebra

A janela de Álgebra é responsável por mostrar informações relacionadas aos dados inseridos pelos usuários na Janela de Visualização e na Caixa de Entrada tais como valores, coordenadas, equações, funções etc. A cada operação feita pelo usuário os dados são registrados em ordem de criação na Janela de Álgebra, facilitando assim a visualização dos dados numéricos e algébricos dos objetos construídos pelo usuário.

2.2.4 – Janela de Visualização

A Janela de Visualização é responsável por representar a parte visual das construções como: os gráficos de pontos, funções, vetores, seguimentos, polígonos, retas, cônicas e espaço no plano 2D e 3D. A alteração nesse ambiente gráfico pode ser feita a partir do toque do mouse, podendo fazer desde simples verificações até modificações na estrutura das construções.

Propriedades da Janela de Visualização: Para configurar a Janela de Visualização do Geogebra clique com o botão direito do mouse em algum espaço em branco da Janela de Visualização, em seguida no menu que aparece, clique na última opção chamada *Janela de Visualização*. A partir da janela (Preferências da Janela de Visualização) podemos alterar inúmeras propriedades como: dimensões, eixos, malha, unidades, distância, entre outras. (FRISKE, Et. al. 2016. p. 8)

2.2.5 – Campo Entrada

A entrada de comandos, conhecida como *Campo Entrada* é responsável por possibilitar a inserção de comandos de criação que fazem a mesma função dos itens da barra de ferramentas utilizando apenas o teclado. Podemos inserir comando específicos como: o comando de criação de funções, de polígonos, de integrais, de derivadas, de área, entre outros.

Características do Campo Entrada: A inserção de comando depende de parâmetros específicos do Geogebra, dessa forma, para facilitar o seu manuseio pelo usuário é disponibilizado uma ajuda na hora de inserir os comandos, ou seja, quando o usuário começa a digitar determinado texto como integral, derivada ou função, uma série de opções é mostrada, indicando os possíveis modos de se utilizar aquele comando e também os elementos necessários para que seja possível fazer a inserção correta do comando.

O Geogebra possui inúmeros comando que podem ser inseridos no Campo Entrada, entre eles estão comando para inserir: funções matemáticas, cálculo de áreas, comando 3D, álgebra, estatística, matemática financeira, probabilidade, transformações, vetores, matrizes, lógica, programação, etc.

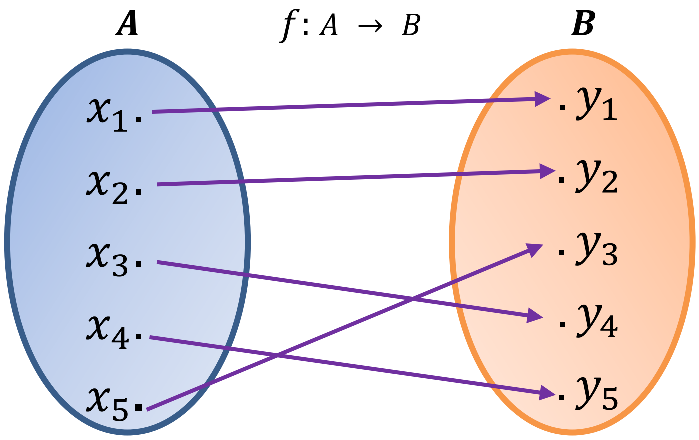
O uso de softwares no ensino de funções vem aumentado a cada ano que passa, as mídias digitais e a facilitação de acesso a trabalhos acadêmicos disponíveis em bibliotecas universitárias digitais e acervos estaduais, nacionais e internacionais tem contribuído para a difusão de trabalhos envolvendo o uso de softwares para favorecer o ensino de funções como: Função Afim, Função Quadrática, Função Modular, Função Exponencial, Função Logarítmica e Funções Trigonométricas.

Segundo Catharina (2016), as principais características que destacam o software Geogebra quando comprado com os demais softwares de geometria dinâmica disponíveis atualmente são: o fato de ser um software gratuito, por ser utilizado por muitos autores e instituições em trabalhos acadêmicos demonstrando uma maior afinidade da academia com esse software, é um software trabalhado em vários idiomas e permite a abordagem de conteúdos matemáticos que vão desde o ensino fundamental, passando pelo ensino médio até a chegada no ensino superior.

3 – NOÇÃO MATEMÁTICA DE FUNÇÃO

O estudo de **funções matemáticas**, de fato é um dos principais assuntos da matemática, pois surge sempre que queremos estabelecer uma relação entre duas grandezas variáveis. Neste caso, vamos abordar um pouco mais o formalismo matemático para definir o que de fato vem a ser uma função matemática e suas estruturas mais importantes.

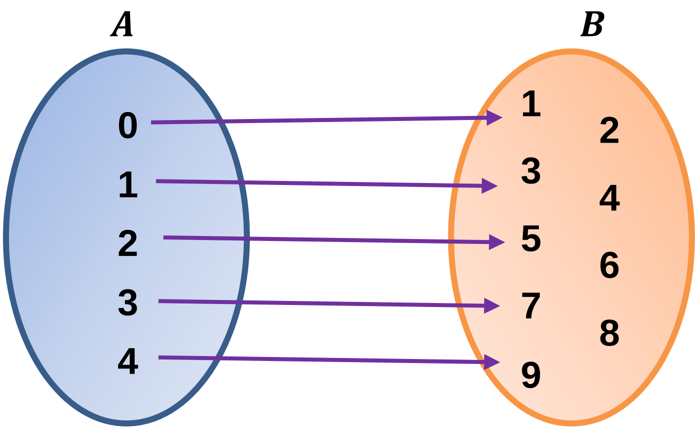
Definição: Dado os conjuntos $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$, não vazios, e uma relação $\boldsymbol{f}$ de $\boldsymbol{A}$ em $\boldsymbol{B}$, dizemos que $\boldsymbol{f}$ é uma função de $\boldsymbol{A}$ em $\boldsymbol{B}$ se para todo $\boldsymbol{x}$ de $\boldsymbol{A}$ existir em correspondência um único $\boldsymbol{y}$ em $\boldsymbol{B}$. (BIANCHINI e PACCOLA, 1989, p. 43).



Exemplo:

Dados os conjuntos $\boldsymbol{A} = \{\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4}\}$ e $\boldsymbol{B} = \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4}, \mathbf{5}, \mathbf{6}, \mathbf{7}, \mathbf{8}, \mathbf{9}\}$ e a função $\boldsymbol{f} : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ tal que $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{2}\boldsymbol{x} + \mathbf{1}$.

Ao representar $\boldsymbol{f}$ por meio de um diagrama, temos:



Utilizando o exemplo criado, vamos compreender o que são domínio, contradomínio e imagem de uma função.

3.1 – DOMÍNIO

Ao conjunto $\boldsymbol{A}$ dá-se o nome de domínio da função. Indica-se o domínio da função $\boldsymbol{f}$ por $\boldsymbol{D}$ ou $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{f})$. Logo, $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{f}) = \boldsymbol{A}$, (BIANCHINI e PACCOLA, 1989, p. 44). É importante lembrar que todos os elementos do domínio devem ter uma relação com o contradomínio.

Então, $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{f}) = \{\boldsymbol{0}, \boldsymbol{1}, \boldsymbol{2}, \boldsymbol{3}, \boldsymbol{4}\} = \boldsymbol{A}$.

Importante

Dependendo da natureza da função, existe algumas situações em que o domínio da função é restringido, ou seja, alguns elementos do conjunto dos números reais não fazem parte desse domínio como nos exemplos a seguir:

a) Função com a variável no denominador: $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{x}}$

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{f}) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R} \,|\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}\}$$

b) Função com a variável dentro de uma raiz de índice par: $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \sqrt{\boldsymbol{x} - \boldsymbol{5}}$

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{f}) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R} \,|\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{5}\}$$

c) A combinação dos dois primeiros exemplos: $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \frac{\boldsymbol{1}}{\sqrt{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{5}}}$

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{f}) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R} \,|\boldsymbol{x} > \boldsymbol{5}\}$$

3.2 – CONTRADOMÍNIO

Ao conjunto $\boldsymbol{B}$ dá-se o nome de contradomínio da função. Indica-se o contradomínio da função $\boldsymbol{f}$ por $\boldsymbol{CD}$ ou $\boldsymbol{CD}(\boldsymbol{f})$. Logo, $\boldsymbol{CD}(\boldsymbol{f}) = \boldsymbol{B}$, (BIANCHINI e PACCOLA, 1989, p. 44)

Então, $\boldsymbol{CD}(\boldsymbol{f}) = \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4}, \mathbf{5}, \mathbf{6}, \mathbf{7}, \mathbf{8}, \mathbf{9}\}$.

3.3 – IMAGEM

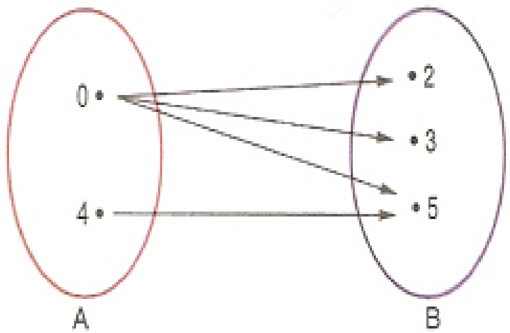
Ao elemento $\boldsymbol{y}$ de $\boldsymbol{B}$, associado ao elemento $\boldsymbol{x}$ de $\boldsymbol{A}$, dá-se o nome de imagem de $\boldsymbol{x}$, pela função $\boldsymbol{f}$. Indica-se que $\boldsymbol{y}$ é a imagem de $\boldsymbol{x}$ pela notação $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ (lê-se: $\boldsymbol{y}$ igual a $\boldsymbol{f}$ de $\boldsymbol{x}$).

Ao conjunto dos elementos $\boldsymbol{y}$ de $\boldsymbol{B}$, que são imagens dos elementos $\boldsymbol{x}$ de $\boldsymbol{A}$, dá-se o nome de conjunto-imagem de $\boldsymbol{x}$, ou simplesmente imagem da função. Indica-se o conjunto-imagem da função por $\boldsymbol{Im}$ ou $\boldsymbol{Im}(\boldsymbol{f})$**.** Para toda função, $\boldsymbol{Im} \subset \boldsymbol{B}$. (BIANCHINI e PACCOLA, 1989, p. 44)

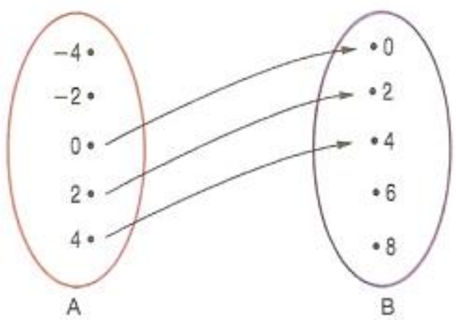
Então, $\boldsymbol{Im}(\boldsymbol{f}) = \{\mathbf{1}, \mathbf{3}, \mathbf{5}, \mathbf{7}, \mathbf{9}\}$.

Desafio: Verifique quais relações abaixo representam funções.

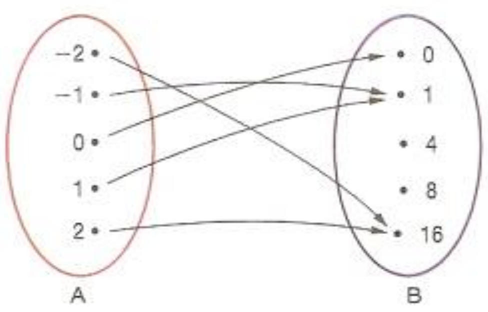
a)



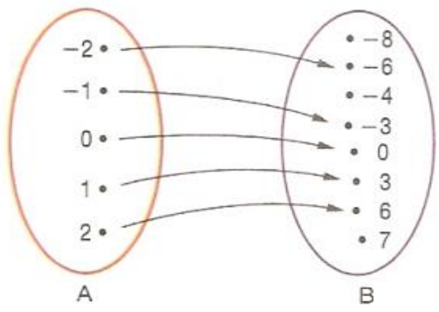
b)



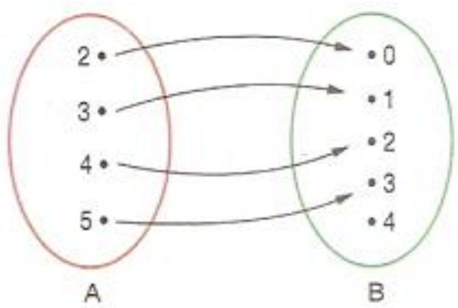
c)



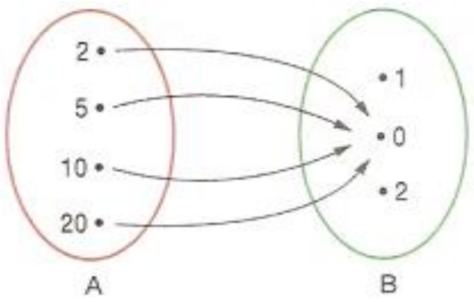
d)



e)



f)



Comente sobre as relações que você não marcou, e porque considera que elas não sejam função:

____

____

____

Importante

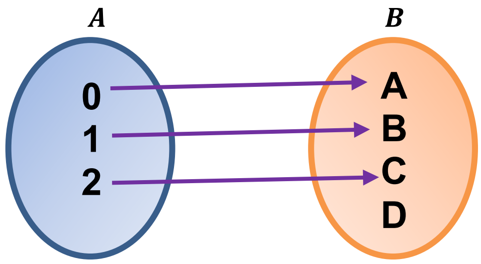
Não existe restrição para o contradomínio, dessa forma pode existir elementos dentro desse conjunto que não terão correspondência com nenhum elemento contido no domínio da função. Note que, por mais que a imagem da função não possua elementos negativos, como na função $f(x) = x^2$, isso não impede que o contradomínio tenha valores negativos.

Existe algumas características que diferenciam com que tipo de função estamos trabalhando. Dessa forma, veremos a seguir quais são essas características que determinam o tipo da função:

3.4 – TIPOS DE FUNÇÃO

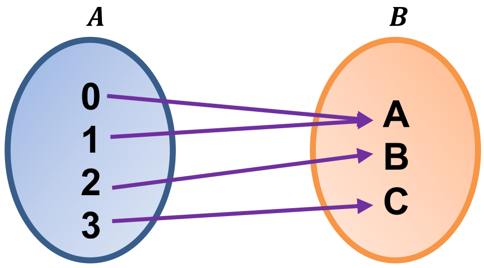
3.4.1 – Injetora ou Injetiva

Cada elemento x do domínio associa-se a um único elemento da imagem $f(x)$. Todavia, podem existir elementos do contradomínio que não sejam imagem.



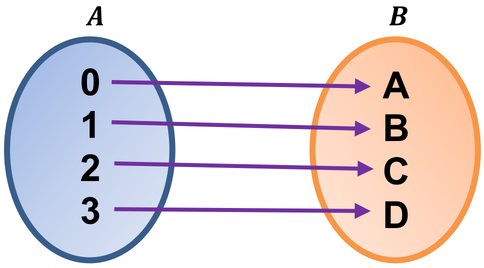
3.4.2 – Sobrejetora ou Sobrejetiva

Todos os elementos do domínio possuem um elemento no contradomínio. Pode acontecer que mais de um elemento do domínio possuam a mesma imagem.



4.4.3 – Bijetora ou Bijetiva

É ao mesmo tempo injetora e sobrejetora, pois, cada elemento de x relaciona-se a um único elemento de $f(x)$.



4 – CONCEITOS E PROPRIEDADES DE FUNÇÃO NO GEOGEBRA

4.1 – FUNÇÃO AFIM

Definição: Dados os números reais $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$, com $\boldsymbol{a \neq 0}$, chama-se função afim ou função do 1º grau, a função $\boldsymbol{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $\boldsymbol{y = f(x) = ax + b}$. Chamamos $\boldsymbol{a}$ de coeficiente angular e $\boldsymbol{b}$ de coeficiente linear. (BIANCHINI e PACCOLA, 1989, p. 68).

$$\boldsymbol{x = Domínio}$$

$$\boldsymbol{f(x) = Imagem}$$

$$\boldsymbol{a = Coeficiente\ Agular}$$

$$\boldsymbol{b = Coeficiente\ Linear}$$

Exemplo1: Utilizando $\boldsymbol{a = 3}$ e $\boldsymbol{b = 4}$, obtemos a função $\boldsymbol{f(x) = 3x + 4}$

Exemplo2: Utilizando com base o exemplo1, dada as seguintes funções de $\mathbb{R}\ em\ \mathbb{R}$, identifique aquelas que são do 1º grau:

a) $f(x) = 2x + 7$

b) $g(x) = 5x$

c) $y = x^2 - 5x$

d) $h(x) = x^2 + 1$

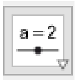
4.1.1 – GRÁFICO DA FUNÇÃO AFIM

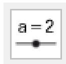
O gráfico de uma função afim ou função do 1º grau é uma reta que não é paralela ao eixo $\boldsymbol{x}$ nem ao eixo $\boldsymbol{y}$. Seu domínio é $\boldsymbol{D(f)} = \mathbb{R}$ e sua imagem é $\boldsymbol{Im(f)} = \mathbb{R}$.

Podemos construir o gráfico da função afim a partir da sua lei de formação (**é a equação que representa a função no plano cartesiano)** inserida no Geogebra. Veremos agora o passo-a-passo para a construção desse gráfico.

Procedimentos no Geogebra

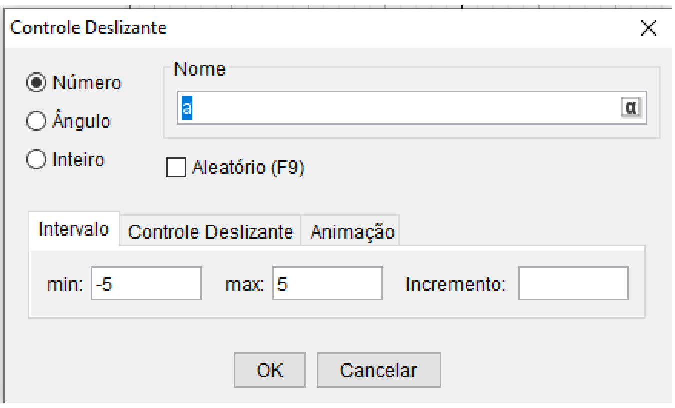
1. Abra o Geogebra.

2. Clique no ícone ***Controles*** 

e selecione a ferramenta ***Controle Deslizante*** 

3. Clique com o botão esquerdo do mouse na ***Janela de Visualização.***

4. Insira o controle deslizante "a" preenchendo com os dados a seguir.



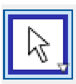
5. Clique no botão "ok".

6. Repita os procedimentos "3", "4" e "5" para inserir o controle deslizante "b".

7. Clique no ***Campo Entrada*** 

.

8. digite: **f(x)=a*x+b** e pressione a tecla **Enter**.

9. Clique no ícone ***Manipulação***  e selecione a ferramenta **Mover** .

10. Clique no botão dos constroles deslizantes "a" e "b", movimente-os e observe o comportamento do gráfico.

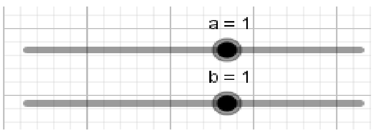
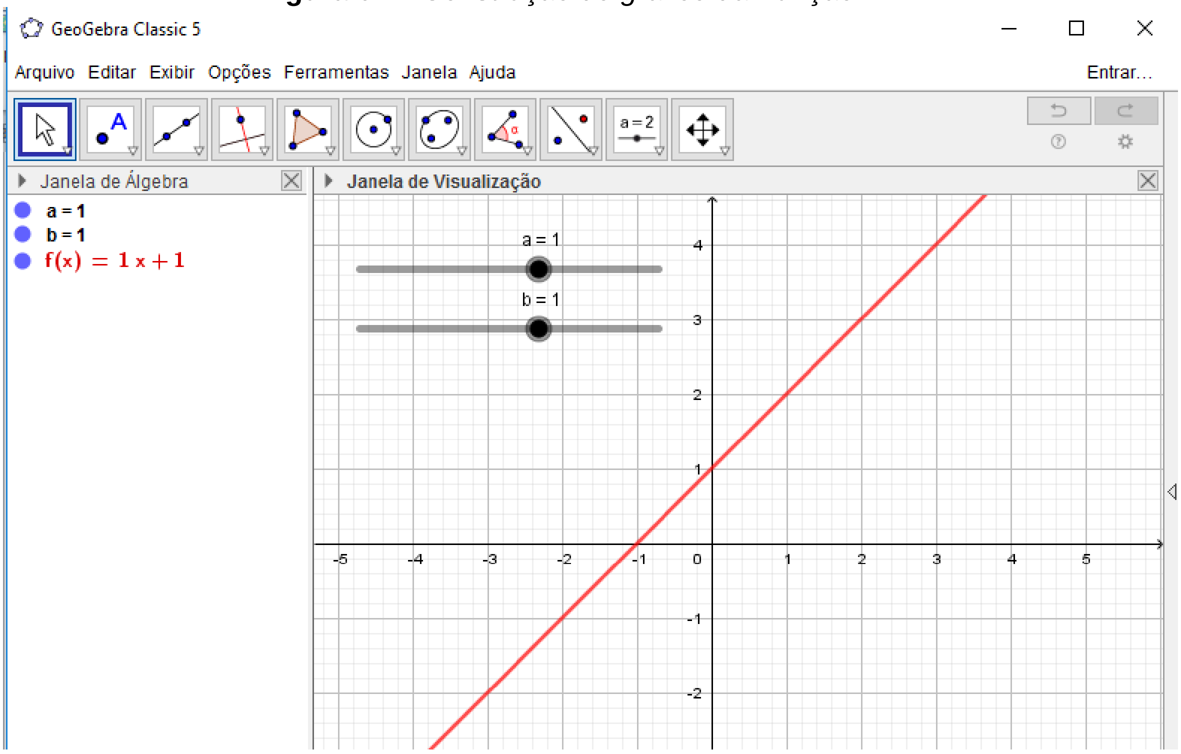


Figura 04 – *Construção do gráfico da Função Afim*



Importante

Note que, à medida que os controles deslizantes “a” e “b” são modificados há uma alteração na função que pode ser visualizada tanto na Janela de Visualização quanto na Janela de Álgebra.

Podemos também alterar as propriedades do gráfico da função clicando sobre sua expressão na ***Janela de Álgebra*** com o botão direito do mouse e selecionando a opção ***Propriedades***. Na guia ***Básico***, podemos modificar o nome da função além de sua forma de exibição e seu rótulo. Na guia ***Cor***, podemos alterar a cor do gráfico e na guia ***Estilo*** podemos alterar a espessura e o estilo da linha.

11. Clique no menu **Arquivo/Gravar Como.**

12. Na janela de diálogo que surge, dei o nome para o arquivo de **“Função Afim”**, escolha um local onde deseja guardar seu documento e clique no botão **Gravar**.

Desafio: Crie e customize os gráficos das funções $f(x) = \frac{1}{2}x + 2$ e $g(x) = x + 3$.

Observação: Para realizar a multiplicação no Geogebra utilizamos o asterisco (*) ou então podemos substituí-lo por um espaço em branco.

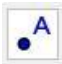
4.1.2 – ESTUDO DO DOMÍNIO E IMAGEM DA FUNÇÃO AFIM

Para fazer o estudo do domínio e imagem da função afim no Geogebra, vamos inserir alguns pontos, retas e seguimentos de retas no gráfico que criamos anteriormente (ver figura 4).

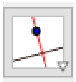
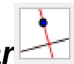
Procedimentos no Geogebra

1. Abra o Geogebra.

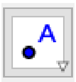
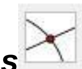
2. Clique no menu **Arquivo/Abrir**, selecione o arquivo **“Função Afim”** e clique no botão **Abrir**.

3. Clique no ícone ***Pontos***  e selecione a ferramenta ***Ponto*** .

4. Clique com o botão esquerdo do mouse em qualquer trecho da reta $f(x)$ criando o Ponto A.

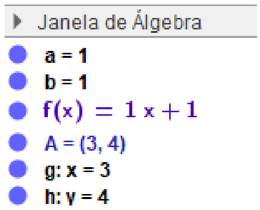
5. Clique no ícone ***Posições Relativas***  e selecione a ferramenta ***Reta Perpendicular*** .

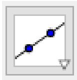
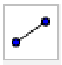
6. Clique no Ponto A e em seguida no eixo X, note que uma reta foi criada perpendicular ao eixo X chamada de “g”, clique novamente no ponto A e em seguida clique no eixo Y e foi criada uma reta perpendicular ao eixo Y chamada de “h”.

7. Clique no ícone ***Pontos***  e selecione a ferramenta ***Intersecção entre dois objetos*** 

8. Clique na reta “g” e depois no eixo X criando assim o Ponto B, em seguida clique na reta “h” e no eixo Y criando o Ponto C.

9. Na ***Janela de Álgebra***, clique na bolinha azul correspondente a reta “g” e “h”, para poder ocultar as duas retas.



10. Clique no ícone ***Linhas Retas***  e selecione a ferramenta ***Segmento*** .

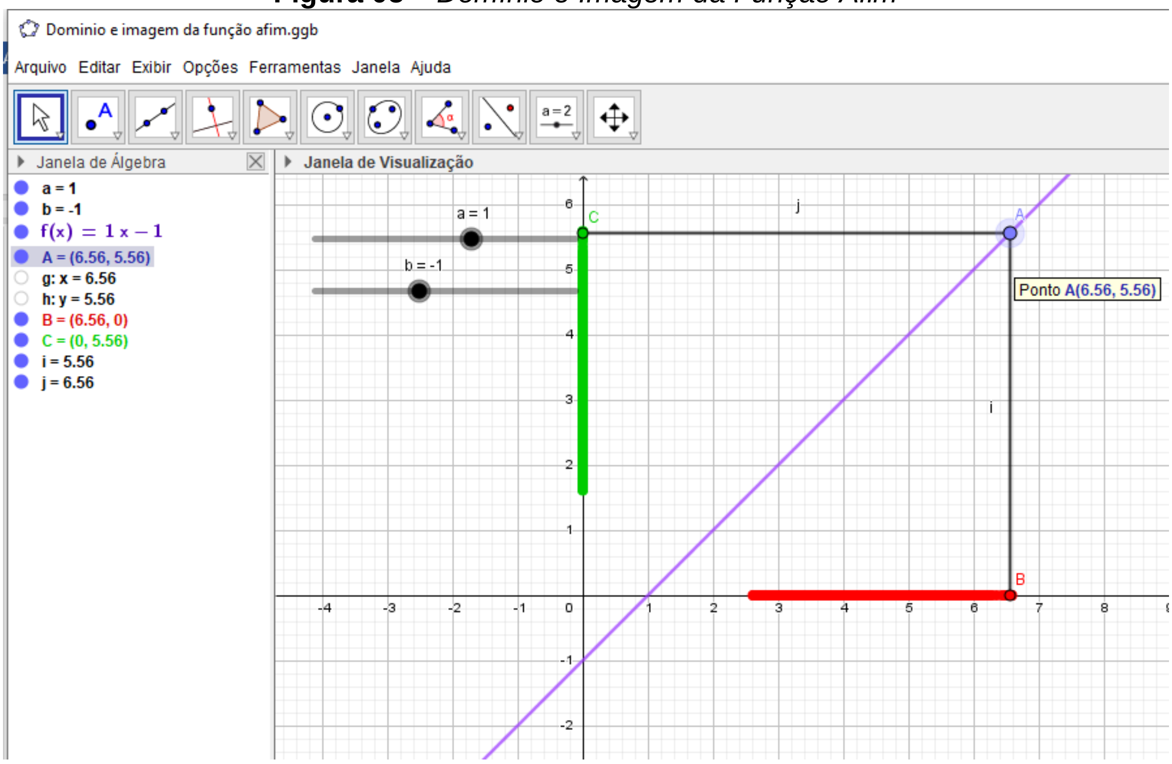
11. Clique no Ponto A e em seguida no Ponto B, repita o processo clicando novamente no Ponto A e em seguida no Ponto C.

12. Clique com o botão direito do mouse em cima do Ponto B e em seguida clique em ***Propriedades***. Na aba ***Básico*** marque a opção **Exibir Rastro**, na aba ***Cor*** mude a cor do Ponto B para Vermelho.

13. Repita o passo 12, agora para o Ponto C, utilize a cor Verde e feche a janela de propriedades.

14. Clique no ícone ***Manipulação***  e selecione a ferramenta **Mover** .

Figura 05 – *Domínio e Imagem da Função Afim*



Movimente o Ponto A e note que é criado um rastro no eixo X na cor vermelha e no eixo Y na cor verde, esses rastros representam o domínio e a imagem da função à medida em que movimentamos o Ponto A.

Importante

Sempre que o Ponto A é movimentado, os Pontos B e C deixam um rastro e para poder retirar esse rastro basta clicar com o botão esquerdo do mouse na Janela de Visualização, segurar o clique e arrastar um pouco, dessa forma os rastros produzidos serão apagados para a criação de novos.

15. Clique no menu **Arquivo/Gravar como**.

16. Na janela de diálogo que surge, dei o nome para o arquivo de **"Domínio e imagem da função afim"**, escolha um local onde deseja guardar seu documento e clique no botão **Gravar**.

Desafio: Movimente o controle deslizante "a" para o valor 1 e o controle deslizante "b" para o valor -1. A partir do que foi visto até aqui, utilizando o gráfico criado e seus conhecimentos, qual a imagem da função $f(x)$ quando x variar de 0 até 5.

____

____

____

____

____

4.2 – FUNÇÃO QUADRÁTICA

Definição: Dados os números reais $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{c}$, com $\boldsymbol{a \neq 0}$, chama-se função quadrática ou função do 2º grau a função $\boldsymbol{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $\boldsymbol{y = f(x) = ax^2 + bx + c}$. Chamamos $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{c}$ de coeficientes. (BIANCHINI e PACCOLA, 1989, p. 83).

$$\boldsymbol{x = Domínio}$$

$$\boldsymbol{f(x) = Imagem}$$

$$\boldsymbol{a = Coeficiente}$$

$$\boldsymbol{b = Coeficiente}$$

$$\boldsymbol{c = Coeficiente}$$

Exemplo1: Utilizando $\boldsymbol{a = 3}$, $\boldsymbol{b = 4}$ e $\boldsymbol{c = 1}$, obtemos a função $\boldsymbol{f(x) = 3x^2 + 4x + 1}$

Exemplo2: Utilizando com base o exemplo1, dada as seguintes funções de $\mathbb{R}\, em\, \mathbb{R}$, identifique aquelas que são quadráticas:

a) $f(x) = x^2 + 6x + 9$

b) $y = 2^x + 1$

c) $y = 3x + 2$

d) $h(x) = -x^2$

____

____

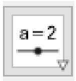
____

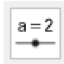
4.2.1 – GRÁFICO DA FUNÇÃO QUADRÁTICA

O gráfico de uma função quadrática ou função do 2º grau é uma curva aberta chamada de parábola (BIANCHINI e PACCOLA, 1989, p. 84). Podemos construir o gráfico da função quadrática a partir da sua lei de formação (**é a equação que representa a função no plano cartesiano)** inserida no Geogebra, veremos agora o passo-a-passo para a construção desse gráfico.

Procedimentos no Geogebra

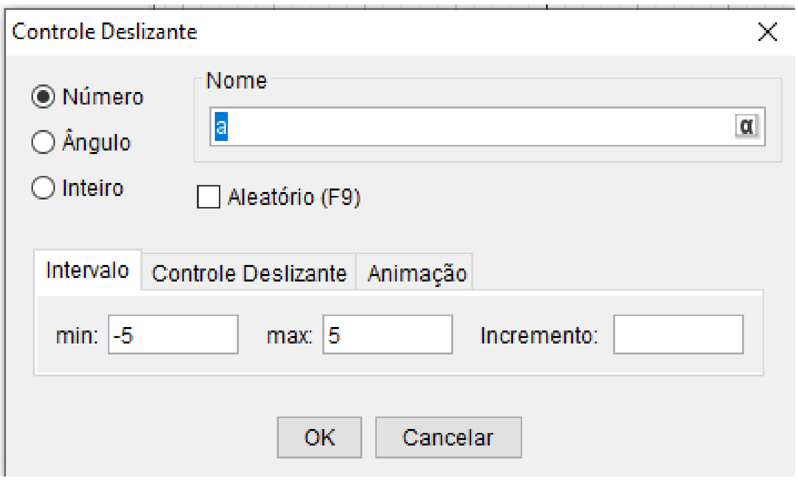
1. Abra o Geogebra.

2. Clique no ícone ***Controles*** 

e selecione a ferramenta ***Controle Deslizante*** 

3. Clique com o botão esquerdo do mouse na ***Janela de Visualização.***

4. Insira o controle deslizante “a” preenchendo com os dados a seguir.



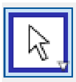
5. Clique no botão “ok”.

6. Repita os procedimentos “3”, “4” e “5” para inserir os controles deslizantes “b” e “c” respectivamente.

7. Clique no ***Campo Entrada*** 

.

8. digite: **f(x)=a*x^2+b*x+c** e pressione a tecla **Enter**.

9. Clique no ícone ***Manipulação***  e selecione a ferramenta ***Mover***  .

10. Clique no botão dos constroles deslizantes “a”, “b” e “c”, movimente-os e observe o comportamento do gráfico.

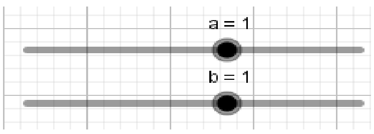
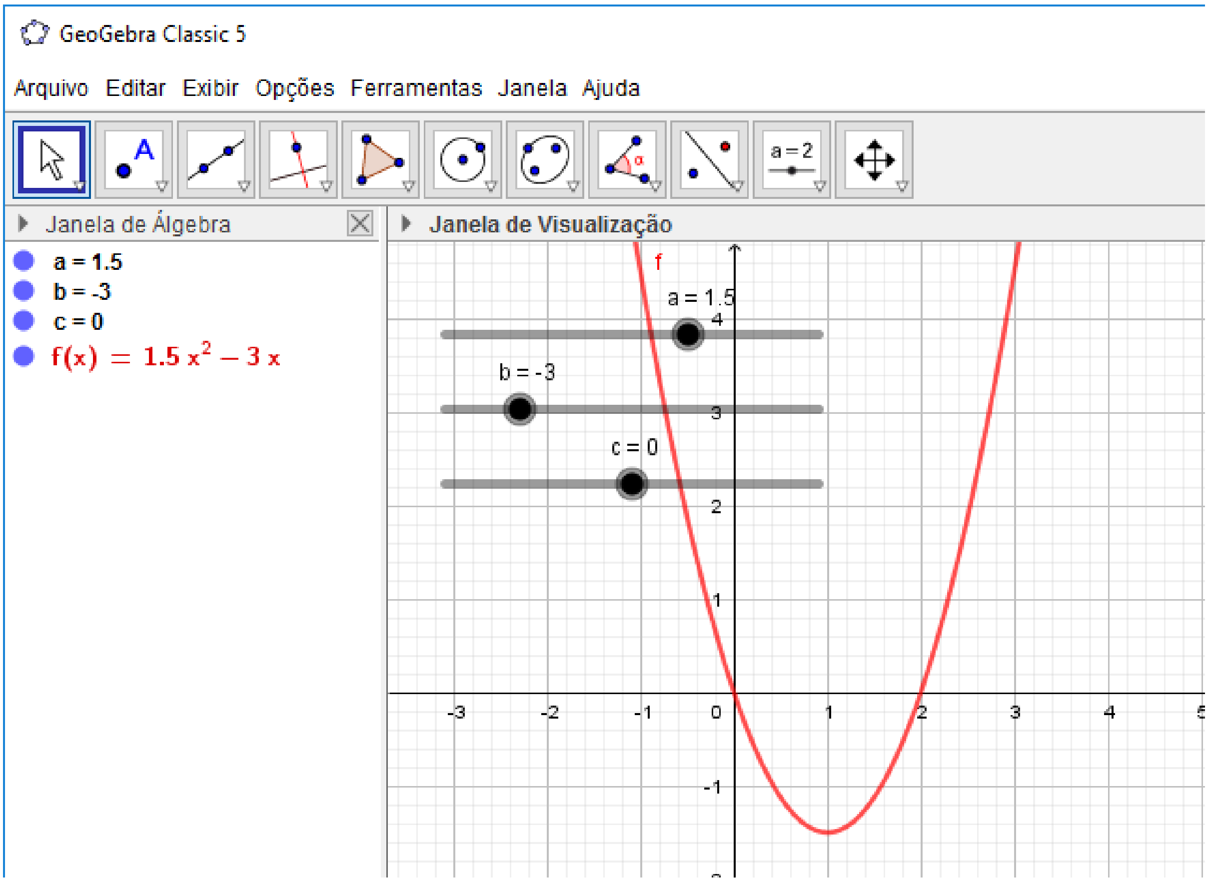


Figura 06 – *Construção do gráfico da Função Quadrática*



Importante

Note que, à medida que os controles deslizantes “a”, “b” e “c” são modificados, há uma alteração na função que pode ser visualizada tanto na Janela de Visualização quanto na Janela de Álgebra. Quando o controle deslizante “a” tem valor 0, a parábola formada pela função vira uma reta, pois nesse momento a função deixa de ser do 2º grau e passa a ser do 1º grau.

11. Clique no menu **Arquivo/Gravar como.**

12. Na janela de diálogo que surge, dei o nome para o arquivo de **"Função Quadrática"**, escolha um local onde deseja guardar seu documento e clique no botão **Gravar**.

Desafio: Crie e customize o gráfico da função $f(x) = \ 2x^2 - 5x + 2$ e $g(x) = \ x^2 + 6x + 9$

Observação: Para realizar a potenciação no Geogebra utilizamos o acento circunflexo (^).

4.2.2 – ESTUDO DO DOMÍNIO E IMAGEM DA FUNÇÃO QUADRÁTICA

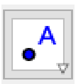
Para fazer o estudo do domínio e imagem da função quadrática no Geogebra, vamos inserir alguns pontos, retas e segmentos de retas no gráfico que criamos anteriormente (ver figura 6).

Procedimentos no Geogebra

1. Abra o Geogebra.

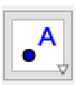
2. Clique no menu **Arquivo/Abrir**, selecione o arquivo **"Função Quadrática"** e clique no botão **Abrir**.

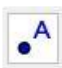
3. Modifique os controles deslizantes para os seguintes valores, a=0.5, b=2.5 e c=2.

4. Clique no ícone ***Pontos*** 

e selecione a ferramenta ***Intersecção entre dois objetos*** 

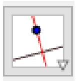
5. Clique com o botão esquerdo do mouse na parábola "f" e depois no eixo X criando assim o Ponto A e o Ponto B, que são também as raízes da função conhecidos como x' e x''.

6. Clique no ícone ***Pontos*** 

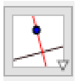
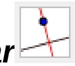
e selecione a ferramenta ***Ponto*** 

.

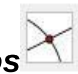
7. Clique com o botão esquerdo do mouse na parábola $f(x)$ no intervalo entre os Pontos A e B, criando o Ponto C.

8. Clique no ícone ***Posições Relativas***  e selecione a ferramenta ***Reta Paralela*** 

9. Clique no Ponto B e em seguida no eixo X, note que uma reta foi criada paralela (também coincidente) ao eixo X chamada de “g”.

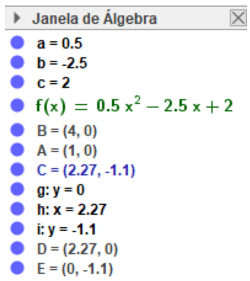
10. Clique no ícone ***Posições Relativas***  e selecione a ferramenta ***Reta Perpendicular*** 

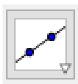
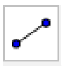
11. Clique no Ponto C e em seguida no eixo X, note que uma reta foi criada perpendicular ao eixo X chamada de “h”, clique novamente no ponto C e em seguida clique no eixo Y e foi criada uma reta perpendicular ao eixo Y chamada de “i”.

12. Clique no ícone ***Pontos***  e selecione a ferramenta ***Intersecção entre dois objetos*** 

13. Clique com o botão esquerdo do mouse na reta “h” e depois no eixo X criando assim o Ponto D, em seguida clique na reta “i” e no eixo Y criando o Ponto E.

14. Na ***Janela de Álgebra***, clique na bolinha azul correspondente as retas “g”, “h” e “i”, para poder ocultar as três retas.



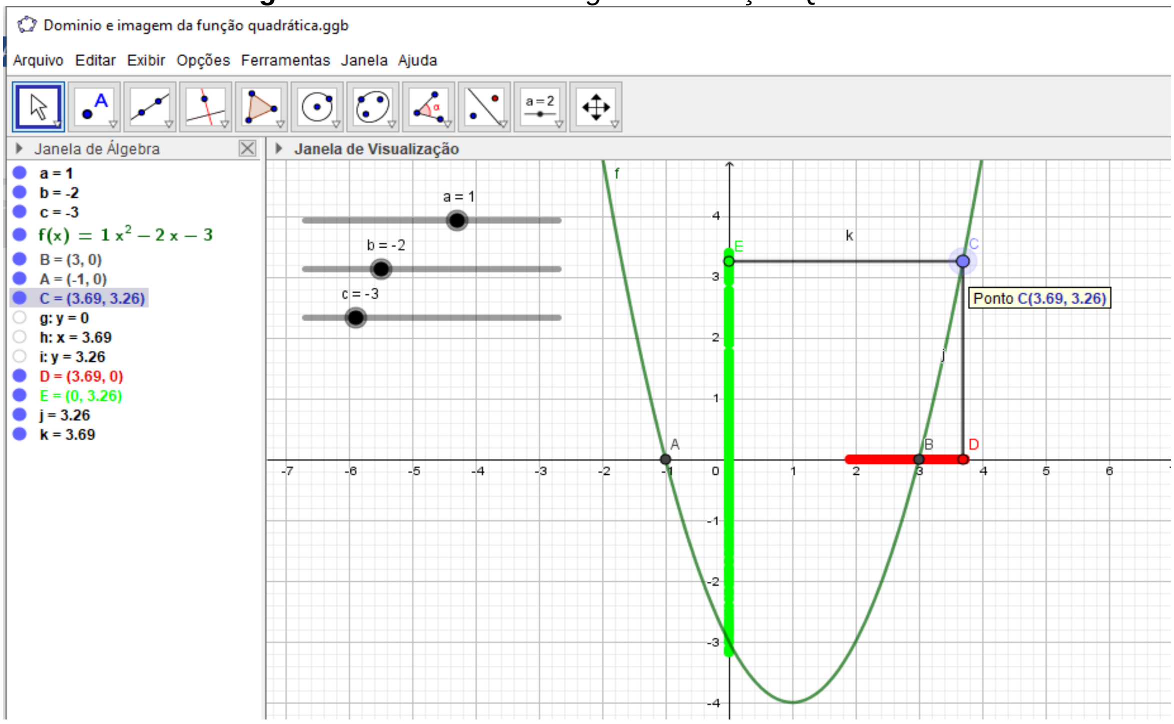
15. Clique no ícone ***Linhas Retas***  e selecione a ferramenta ***Segmento*** .

16. Clique no Ponto C e em seguida no Ponto D, repita o processo clicando novamente no Ponto C e em seguida no Ponto E.

17. Clique com o botão direito do mouse em cima do Ponto D e clique em ***Propriedades***. Na aba ***Básico*** marque a opção **Exibir Rastro**, na aba ***Cor*** mude a cor do Ponto D para Vermelho.

18. Repita o passo 17, agora para o Ponto E, utilize a cor Verde e feche a janela de propriedade.

Figura 07 – *Domínio e Imagem da Função Quadrática*



Movimente o Ponto C e note que é criado um rastro no eixo X na cor vermelha e no eixo Y na cor verde, esses rastros identificam o domínio e a imagem da função à medida em que movimentamos o Ponto C.

Movimentando os controles deslizantes “a”, “b” e “c”, note que, quando a parábola não toca no eixo X o rastro para de ser criado, mostrando assim que o domínio da função deixa de estar no conjunto dos números reais “ℝ”.

19. Clique no menu **Arquivo/Gravar como**.

20. Na janela de diálogo que surge, dei o nome para o arquivo de **“Domínio e imagem da função quadrática”** escolha um local onde deseja guardar seu documento e clique no botão **Gravar**.

Desafio: Movimente o controle deslizante “a” para o valor 1, o “b" para o valor -2 e o “c” para o valor -3. A partir do que que foi visto até aqui e utilizando o gráfico criado, qual a imagem da função $f(x)$ quando x variar de 0 até 4? E qual as raízes reais dessa função?

____

____

____

____

____

Importante

Utilize as ferramentas **Ampliar**  e **Reduzir**  para adaptar o tamanho da visualização da função, podendo assim executar a movimentação do Ponto C, obtendo os rastros correspondentes ao domínio e imagem da função no intervalo pedido.

4.3 – FUNÇÃO MODULAR

Para começarmos a falar sobre a função modular é importante relembrar um pouco sobre a definição de módulo e suas principais características. Podemos dizer que módulo pode ser entendido como a distância de um número real ao número zero, pois, o módulo de número real surgiu da necessidade de medir a distância de um número negativo ao zero.

Note que, ao medir a distância de um número negativo qualquer ao zero a distância ficaria negativa, de fato havia um problema a ser resolvido, pois não é usual dizer que uma distância ou comprimento é negativo. Pensando nisso foi criado o módulo de número real que torna o valor positivo ou nulo.

Definição de Módulo de um Número Real: considere no eixo real de origem $\boldsymbol{O}$ um ponto $\boldsymbol{A}$ de abscissa $\boldsymbol{x}$ (PAIVA, 2005. p. 141).

Chama-se de módulo de $\boldsymbol{x}$, e indica-se por $|\boldsymbol{x}|$, é a distância entre os pontos $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{O}$:

$$|\boldsymbol{x}| = \boldsymbol{d_{AO}}$$

Note que, como $|\boldsymbol{x}|$ é a distância entre dois pontos, $|\boldsymbol{x}|$ é um número positivo ou nulo.

Exemplos:

a) 

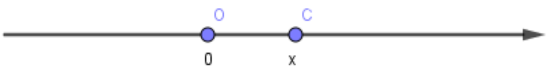
$|5| = d_{AO} = 5 - 0 \Rightarrow |5| = 5$

b) 

$|-5| = d_{BO} = 0 - (-5) \Rightarrow |-5| = 5$

c) 

$|0| = d_{OO} = 0 - 0 \Rightarrow |0| = 0$

d) 

$|x| = d_{CO} = x - 0 \Rightarrow |x| = x$ (sendo $x > 0$)

e) 

$|x| = d_{DO} = 0 - x \Rightarrow |x| = -x$ (sendo $x < 0$)

(**Atenção:** o número $-x$ é positivo, pois x é negativo.)

Sintetizando os resultados obtidos nos itens c, d, e, podemos dar uma definição algébrica para $|x|$ da seguinte maneira:

$$|\boldsymbol{x}| = \boldsymbol{x}, \boldsymbol{se}\ \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}; \boldsymbol{e}\ |\boldsymbol{x}| = -\boldsymbol{x}, \boldsymbol{se}\ \boldsymbol{x} < \boldsymbol{0}, \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{com}\ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$$

Exemplo:

a) $|5| = 5$ (o módulo de um número positivo é o próprio número)

b) $|-5| = -(-5) = +5$ (o módulo de um número negativo é o oposto desse número)

c) $|0| = 0$ (o módulo de zero é o próprio zero)

Propriedades de módulo

M1. $|x| \geq 0, \forall x, com\ x \in \mathbb{R}$

M2. $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

M3. Sendo $d \in \mathbb{R}_+$, tem-se: $|x| = d \Leftrightarrow x = \pm d$

Exemplo

$|x| = 7 \Leftrightarrow x = \pm 7$

M4. $|x| \cdot |y| = |x \cdot y|, \forall \{x, y\}, com\ \{x, y\} \subset \mathbb{R}$

Exemplo

$|-6| \cdot |5| = |-6 \cdot 5|$

M5. $|x|^n = x^n \Leftrightarrow n\ é\ par, \cdot \forall \{x, n\}, com\ x \in \mathbb{R}\ e\ n \in \mathbb{N}$

Exemplo

a) $|x|^2 = x^2$ b) $|x|^8 = x^8$

M6. $\frac{|x|}{|y|} = \left|\frac{x}{y}\right|, \cdot \forall \{x, y\}, com\ x \in \mathbb{R}\ e\ y \in \mathbb{R}^*$

Exemplo

$$\frac{|-6|}{|3|} = \left|\frac{-6}{3}\right|$$

M7. $|\boldsymbol{x}| = |a| \Leftrightarrow x = \pm a, \cdot \forall \{x, a\},\ com\ \{x, a\} \subset \mathbb{R}$

Exemplo

$|\boldsymbol{x}| = |-3| \Leftrightarrow x = \pm 3$

M8. $|\boldsymbol{x}| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a, \forall a,\ com\ a \in \mathbb{R}_+$

Exemplo

$|\boldsymbol{x}| \leq 6 \Leftrightarrow -6 \leq x \leq 6$

M9. $|\boldsymbol{x}| < a \Leftrightarrow -a < x < a, \forall a,\ com\ a \in\ \mathbb{R}_+^*$

Exemplo

$|\boldsymbol{x}| < 8 \Leftrightarrow -8 < x < 8$

M10. $|\boldsymbol{x}| \geq a \Leftrightarrow x \leq -a\ ou\ x \geq a, \forall a,\ com\ a \in \mathbb{R}_+$

Exemplo

$|\boldsymbol{x}| \geq 3 \Leftrightarrow x \leq -3\ ou\ x \geq 3$

M11. $|\boldsymbol{x}| > a \Leftrightarrow x < -a\ ou\ x > a, \forall a,\ com\ a \in \mathbb{R}_+$

Exemplo

$|\boldsymbol{x}| > 2 \Leftrightarrow x \leq -2\ ou\ x > 2$

Definição de Função Modular: chama-se função modular a função $\boldsymbol{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = |\boldsymbol{x}|$. Como, por definição $|\boldsymbol{x}| = \begin{cases} \boldsymbol{x},\ \boldsymbol{se}\ \boldsymbol{x} \geq \mathbf{0} \\ -\boldsymbol{x}, \boldsymbol{se}\ \boldsymbol{x} < \mathbf{0} \end{cases}$. (BIANCHINI e PACCOLA, 1989, p. 108).

Temos:

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = |\boldsymbol{x}| = \begin{cases} \boldsymbol{x}, \boldsymbol{se}\ \boldsymbol{x} \geq \mathbf{0} \\ -\boldsymbol{x}, \boldsymbol{se}\ \boldsymbol{x} < \mathbf{0} \end{cases}$$

A função modular é, portanto, definida por duas sentenças:

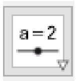
$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}, \text{ se } \boldsymbol{x} \geq \mathbf{0} \text{ e } \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = -\boldsymbol{x}, \text{ se } \boldsymbol{x} < \mathbf{0}$$

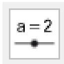
4.3.1 – GRÁFICO DA FUNÇÃO MODULAR

Utilizando o Geogebra faremos a representação da função modular. Para esse procedimento utilizaremos o seguinte artificio para fazer a movimentação da função colocando o coeficiente “a” multiplicando a variável “x” nos procedimentos a seguir.

Procedimentos no Geogebra

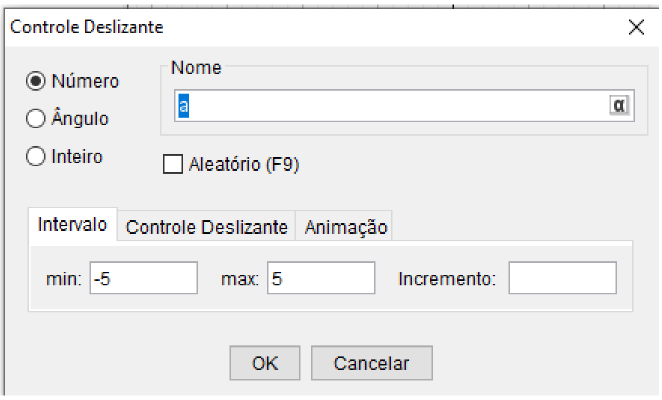
1. Abra o Geogebra.

2. Clique no ícone ***Controles*** 

e selecione a ferramenta **Controle Deslizante** 

3. Clique com o botão esquerdo do mouse na **Janela de Visualização**

4. Insira o controle deslizante “a” preenchendo com os dados a seguir.

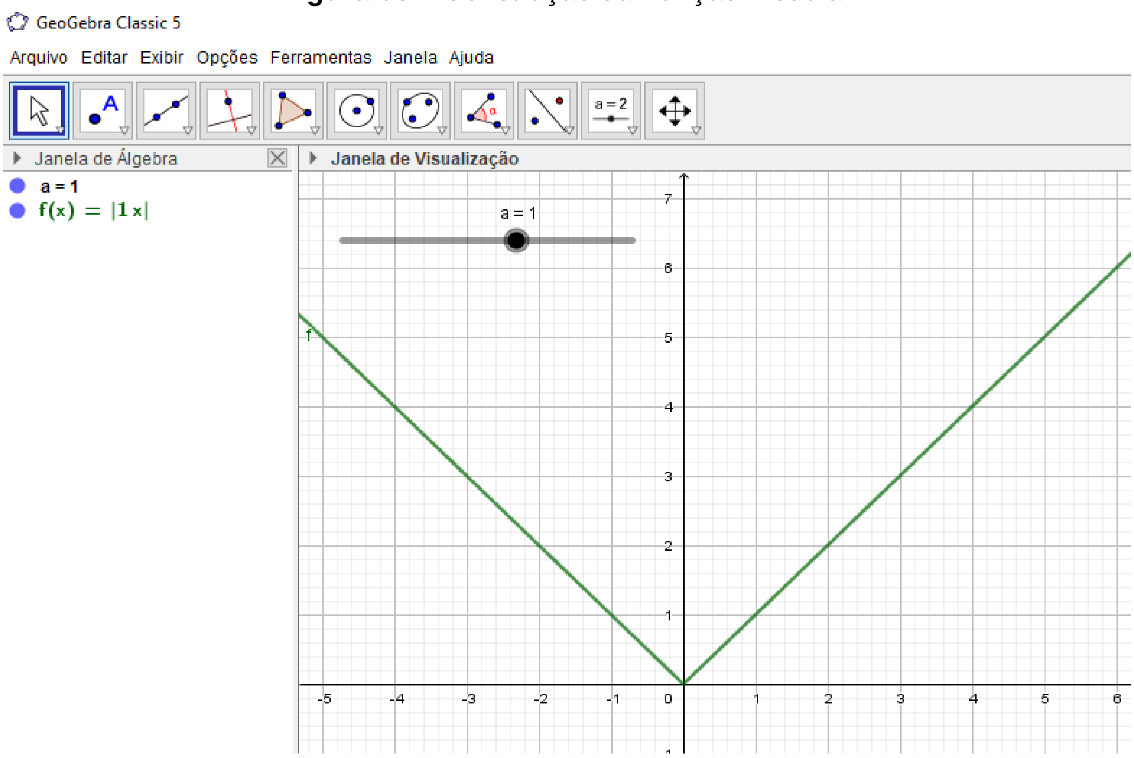


5. Clique no botão “ok”.

6. Clique no ***Campo Entrada*** 

e digite **f(x)=abs(a*x)** e aperte a tecla Enter.

Figura 08 – *Construção da Função Modular*



Importante

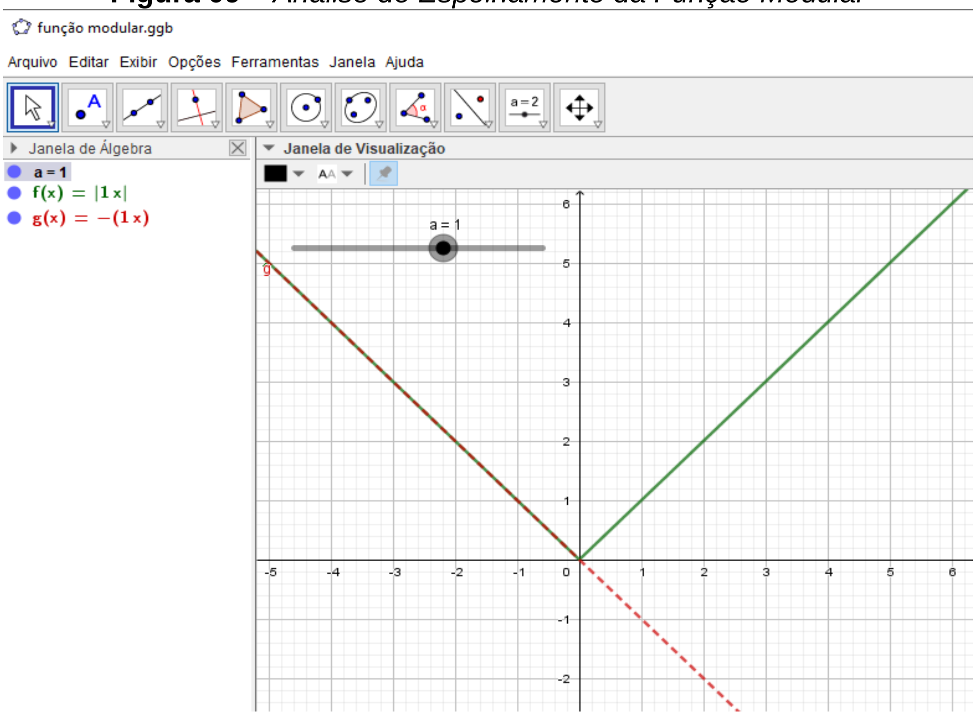
Note que quando x assume valores positivos, a função é crescente e obedece a lei $f(x) = x$ até chegar na origem, a partir do momento em que x assume valores negativos, a função troca de sinal e torna-se $f(x) = -x$, fazendo um espelhamento da função anterior para valores positivos no eixo Y. Vamos inserir a função $g(x) = ax$ para compreendermos melhor esse espelhamento.

7. Clique no ***Campo Entrada*** 

e digite **g(x)=a*x**. e aperte a tecla Enter.

8. Clique com o botão direito do mouse em cima da função g(x) e clique em **Propriedades**. Na aba **Estilo** mude o estilo da linha para **tracejado** e feche a janela de propriedades.

Figura 09 – *Analise do Espelhamento da Função Modular*



9. Clique no menu **Arquivo/Gravar como**.

10. Na janela de diálogo que surge, dei o nome para o arquivo de **"Função Modular"** escolha um local onde deseja guardar seu documento e clique no botão **Gravar**.

4.3.2 – ESTUDO DO DOMÍNIO E IMAGEM DA FUNÇÃO MODULAR

De acordo com a definição de função, qualquer valor de $x \in \mathbb{R}$ em módulo é uma função modular, logo podemos inserir qualquer uma das funções já estudadas até o momento, contanto que estejam em módulo. Para fazermos o estudo do domínio e imagem da função no Geogebra, vamos utilizar as funções afim e quadrática (em módulo) para podermos observar o comportamento de cada uma delas.

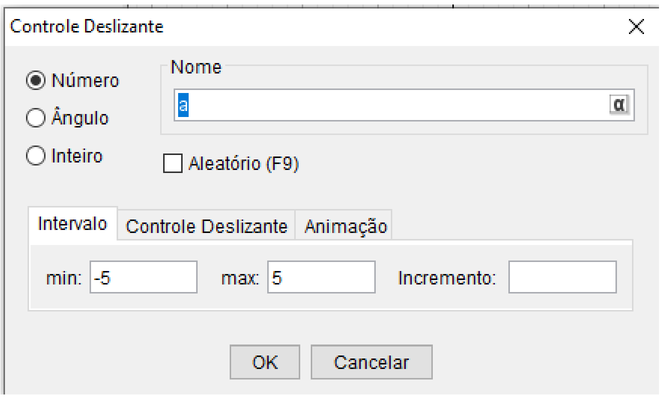
Procedimentos no Geogebra

1. Abra o Geogebra.

2. Clique no ícone ***Controles*** e selecione a ferramenta **Controle Deslizante**

3. Clique com o botão esquerdo do mouse na **Janela de Visualização.**

4. Insira o controle deslizante "a" preenchendo com os dados a seguir.

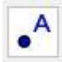


5. Clique no botão "ok"

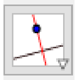
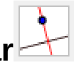
6. Repita os procedimentos "3", "4" e "5" para inserir os controles deslizantes "b" e "c"

7. Clique no ***Campo Entrada*** 

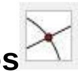
e digite **f(x)=abs(a*x+b)**. e aperte a tecla Enter.

8. Clique no ícone ***Pontos***  e selecione a ferramenta **Ponto** 

9. Clique com o botão esquerdo do mouse em qualquer intervalo da função $f(x)$ criando o Ponto A

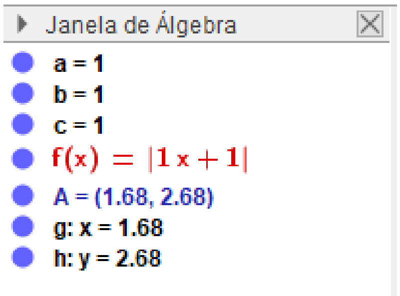
10. Clique no ícone ***Posições Relativas***  e selecione a ferramenta **Reta Perpendicular** 

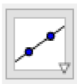
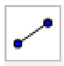
11. Clique no Ponto A e em seguida no eixo X, note que uma reta foi criada perpendicular ao eixo X chamada de “g”, clique novamente no Ponto A e em seguida clique no eixo Y e foi criada uma reta perpendicular ao eixo Y chamada de “h”.

12. Clique no ícone ***Pontos***  e selecione a ferramenta **Intersecção entre dois objetos** .

13. Clique na reta “g” e depois no eixo X criando assim o Ponto B, clique na reta “h” e no eixo Y criando o Ponto C.

14. Na **Janela de Álgebra**, clique na bolinha azul correspondente as retas “g” e “h”, para poder ocultar as duas retas



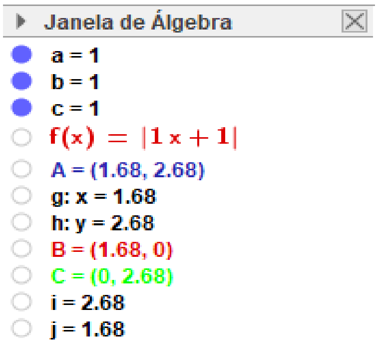
15. Clique no ícone ***Linhas Retas***  e selecione a ferramenta **Segmento** 

16. Clique no Ponto A e em seguida no Ponto B, repita o processo clicando no Ponto A e em seguida no Ponto C.

17. Clique com o botão direito do mouse em cima do Ponto B e clique em **Propriedades**. Em **Básico** marque a opção **Exibir Rastro**, na aba **Cor** mude a cor do Ponto B para Vermelho.

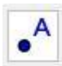
18. Repita o passo 17, agora para o Ponto C, utilize a cor Verde e feche a janela de propriedades.

19. Na **Janela de Álgebra**, clique na bolinha azul correspondente aos pontos A, B, C, aos segmentos de reta “i”, “j” e a função (x), para poder oculta-los, deixando apenas os controles deslizantes “a”, “b”, “c” visíveis.

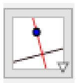
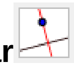


20. Clique no ***Campo Entrada*** 

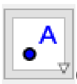
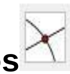
e digite **k(x)=abs(a*x^2+b*x+c)** e aperte a tecla Enter.

21. Clique no ícone ***Pontos***  e selecione a ferramenta **Ponto** 

22. Clique com o botão esquerdo do mouse em qualquer intervalo da função $k(x)$ criando o Ponto D.

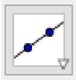
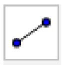
23. Clique no ícone ***Posições Relativas***  e selecione a ferramenta **Reta Perpendicular** 

24. Clique no Ponto D e em seguida no eixo X, note que uma reta foi criada perpendicular ao eixo X chamada de “l”, clique novamente no Ponto D e em seguida clique no eixo Y e foi criada uma reta perpendicular ao eixo Y chamada de “m”.

25. Clique no ícone ***Pontos***  e selecione a ferramenta **Intersecção entre dois objetos** .

26. Clique na reta “l” e depois no eixo X criando assim o Ponto E, em seguida clique na reta “m” e no eixo Y criando o Ponto F.

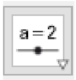
27. Na **Janela de Álgebra**, clique na bolinha azul correspondente as retas “l” e “m”, para poder ocultar as duas retas

28. Clique no ícone ***Linhas Retas***  e selecione a ferramenta **Segmento** 

29. Clique no Ponto D e em seguida no Ponto E, repita o processo clicando no Ponto D e em seguida no Ponto F.

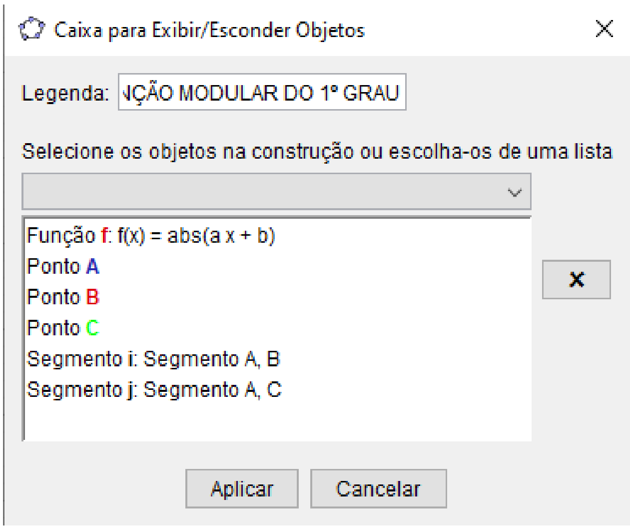
30. Clique com o botão direito do mouse em cima do Ponto E e clique em **Propriedades**. Em **Básico** marque a opção **Exibir Rastro**, na aba **Cor** mude a cor do Ponto E para Vermelho.

31. Repita o passo 30, agora para o Ponto F, utilize a cor Verde e feche a janela de propriedades.

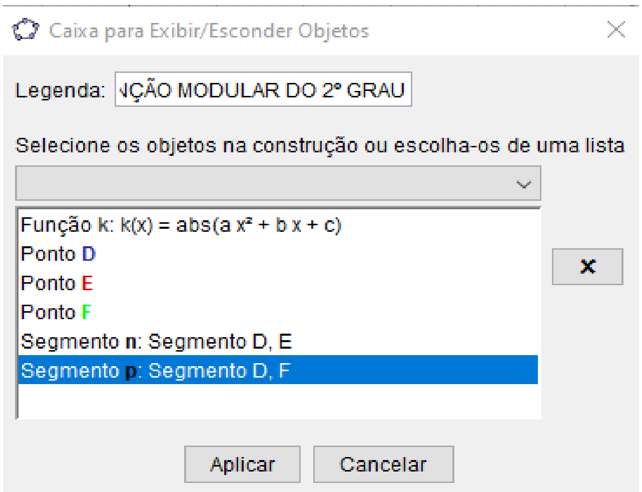
32. Clique no ícone ***Controles*** 

e selecione a ferramenta **Caixa para Exibir/Esconder Objetos** 

33. Clique com o botão esquerdo do mouse abaixo dos controles deslizantes e na caixa que surge digite em Legenda: **FUNÇÃO MODULAR DO 1º GRAU**, em **Selecione os objetos na construção** clique na seta para baixo, selecione os objetos da figura ao lado e clique em Aplicar.



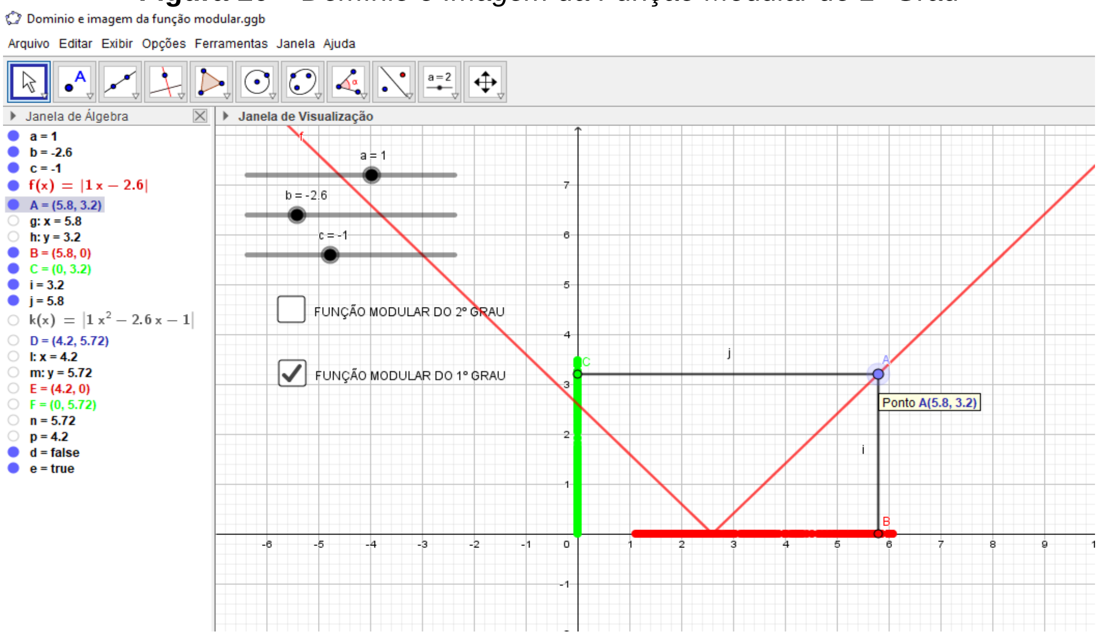
34. Clique abaixo do botão **FUNÇÃO MODULAR DO 1º GRAU**, na caixa que surge digite em Legenda; **FUNÇÃO MODULAR DO 2º GRAU**, em **Selecione os objetos na construção** clique na seta para baixo, selecione os objetos na figura ao lado e clique em **Aplicar**.



35. Clique com o botão direito do mouse em cima do botão criado, segure o clique e arraste os botões para organiza-los um em baixo do outro, em seguida aperte a tecla Esc.

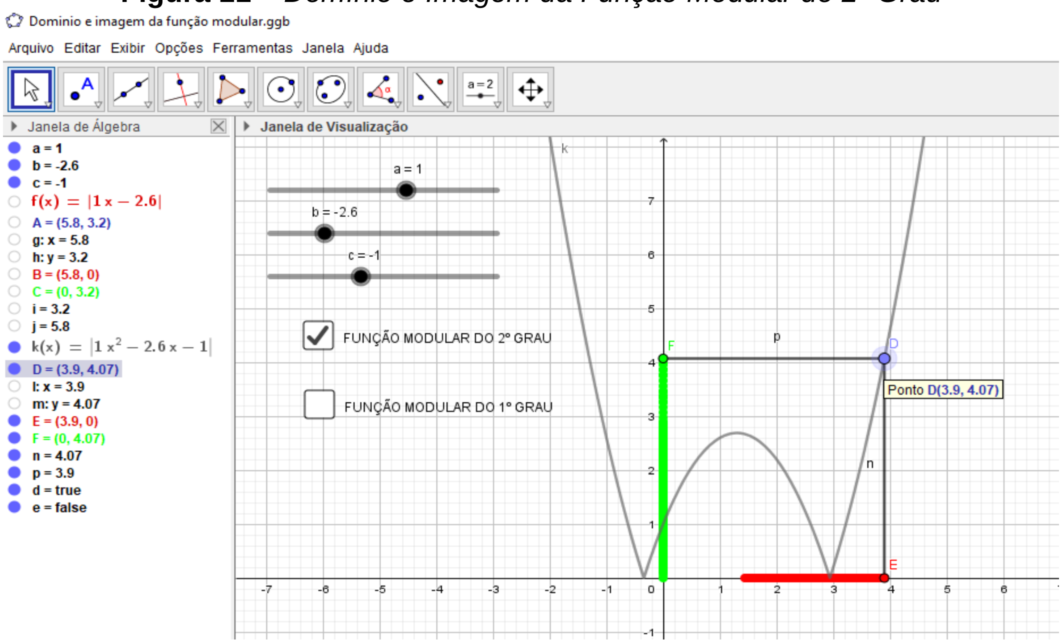
36. Deixe marcada apenas a caixa de diálogo correspondente a função que irá utilizar e desmarque a outra (Ver Figura 10).

Figura 10 – *Domínio e Imagem da Função Modular do 1º Grau*



Movimente os controles deslizantes “a”, “b” e “c”, de tal forma que possa ser perceba as alterações na função e no trecho em que a mesma sofre o espelhamento.

Figura 11 – *Domínio e Imagem da Função Modular do 2º Grau*



Deixe apenas a caixa de diálogo da **FUNÇÃO MODULAR DO 2º GRAU** marcada (Ver Figura 11), movimente os controles deslizantes “a”, “b” e “c”, de tal forma que a função tenha duas raízes reais, em seguida movimente apenas o controle deslizante “a” de tal forma que ele assuma valores positivos e negativos, observe o comportamento da função e movimente Ponto D para fazer a análise do domínio e imagem da função.

37. Clique no menu **Arquivo/Gravar como**.

38. Na janela de diálogo que surge, dei o nome para o arquivo de **“Domínio e imagem da função modular”** escolha um local onde deseja guardar seu documento e clique no botão **Gravar**.

Desafio: A partir do que foi visto até aqui e utilizando o gráfico criado, qual a imagem das funções abaixo em seus respectivos intervalos.

a) $f(x) = |x - 2|$ no intervalo $[0,5]$

___

___

___

b) $f(x) = |x^2 - 4x - 1|$ no intervalo $[0,5]$

___

___

Importante

Utilize as ferramentas **Ampliar**  e **Reduzir**  para adaptar o tamanho da visualização da função, podendo assim executar a movimentação dos Pontos, obtendo os rastros correspondentes ao domínio e imagem da função no intervalo pedido.

4.4 – FUNÇÃO EXPONENCIAL

Para começarmos a falar sobre a função exponencial é importante relembrar um pouco sobre a definição de potenciação e suas principais características. **Potenciação** é a forma de abreviar a multiplicação de uma sequência de fatores iguais. Dessa forma, quando multiplicamos um número sucessivas vezes, podemos abreviar elevando-o a quantidade de vezes que o número é multiplicado.

Definição de Potenciação: Sendo a um número real e n um número inteiro, tem-se que: (PAIVA, 2005, p.149).

$$\boldsymbol{a^n = \underbrace{a \,.\, a \,.\, a \,. \ldots .\, a}_{n \text{ fatores}}, se\ n > 1}$$

$$\boldsymbol{a^1 = a}$$

$$\boldsymbol{a^0 = 1}$$

$$\boldsymbol{a^{-n} = \frac{1}{a^n}, se\ a \neq 0}$$

Importante

Não há unanimidade entre os matemáticos quanto à adoção do valor 1 para a potência 0^0. Porém, essa controvérsia não vai interferir em nossos estudos. (PAIVA, 2005, p. 149).

Chamamos $\boldsymbol{a}$ de base e $\boldsymbol{n}$ de expoente, e a multiplicação sucessiva após a igualdade chamamos de potência. A base nesse caso é o número que se repete, o expoente é a quantidade de vezes que esse número se repetiu e a potência é o resultado.

Exemplo1:

- $2^2 = 2 \,.\, 2$, com $n = 2$;
- $4^3 = 4 \,.\, 4 \,.\, 4$, com $n = 3$;
- $3^5 = 3 \,.\, 3 \,.\, 3 \,.\, 3 \,.\, 3$, com $n = 5$;

Exemplo2:

Seja a multiplicação $2 \,.\, 2 \,.\, 2 \,.\, 2$, temos uma sequência do número 2 multiplicado 4 vezes. Assim, podemos simplificar da seguinte forma:

$$\mathbf{2^4 = 16}$$

Ler-se: *dois elevado a quatro é igual a dezesseis,* onde, 2 é o número multiplicado e 4 a quantidade de vezes que ele foi multiplicado.

Agora com expoente negativo.

$$\mathbf{2^{-4} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}}$$

Propriedades

Dados os números $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ e os números inteiros $\boldsymbol{m}$ e $\boldsymbol{n}$, obedecidas as condições de existência temos: (PAIVA, 2005. p. 150)

I. $a^m . a^n = a^{m+n}$ (conserva-se a base e somam-se os expoentes)
II. $a^m : a^n = a^{m-n}$ (conserva-se a base e subtraem-se os expoentes)
III. $(a^m)^m = a^{m.n}$ (conserva-se a base e multiplicam-se os expoentes)
IV. $(ab)^m = a^m . b^m$ (distributiva da potenciação em relação à multiplicação)
V. $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$ (distributiva da potenciação em relação à divisão)

Exemplos:

a) $4^5 . 4^4 = 4^{5+4} = 4^9$

b) $5^5 : 5^2 = 5^{5+2} = 5^3$

c) $(3^2)^5 = 3^{2.5} = 3^{10}$

d) $(6a)^2 = 6^2 a^2 = 36a^2$

e) $\left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{5^2}{3^2} = \frac{25}{9}$

Definição de Função Exponencial: seja $\boldsymbol{a}$ um número real positivo e diferente 1 ($\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}_{+}^{*}$ $\boldsymbol{e}$ $\boldsymbol{a} \neq \mathbf{1}$). Chamamos de função exponencial de base $\boldsymbol{a}$ a função $\boldsymbol{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a}^{\boldsymbol{x}}$. (BIANCHINI e PACCOLA, 1989, p. 126).

Exemplos:

Utilizando $a = 3$, obtemos a função exponencial $f(x) = 3^x$

Utilizando $a = \frac{1}{4}$, obtemos a função exponencial $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$

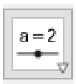
4.4.1 – GRÁFICO DA FUNÇÃO EXPONENCIAL

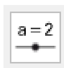
Para compreendermos melhor o comportamento da função exponencial, utilizaremos dois casos para explicar as condições $(com\ a > 0\ e\ a \neq 1)$. Dessa forma podemos construir os gráficos no Geogebra utilizando os procedimentos a seguir:

1º CASO: Quando $\boldsymbol{a} > \mathbf{1}$

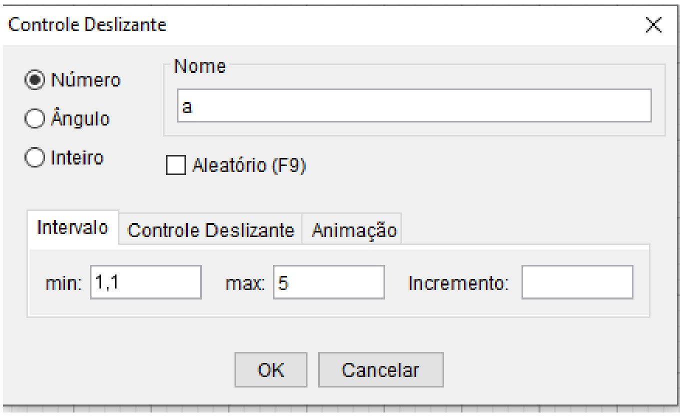
Para este caso utilizaremos apenas valores maiores que 1 para inserir no controle deslizante “a” no Geogebra, dessa forma será possível obter uma melhor precisão e análise sobre o comportamento da função.

Procedimentos no Geogebra

1. Abra o Geogebra.
2. Clique no ícone ***Controles*** 

e selecione a ferramenta **Controle Deslizante** 

3. Clique com o botão esquerdo do mouse na **Janela de Visualização.**
4. Insira o controle deslizante “a” preenchendo com os dados a seguir.

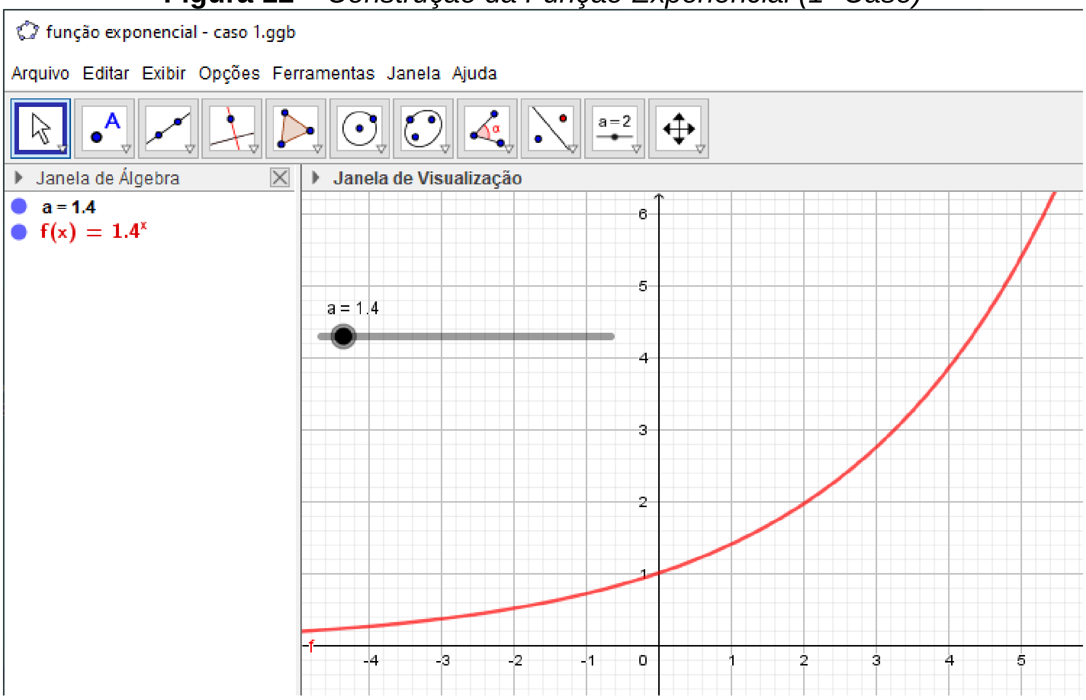


5. Clique no botão “ok”.

6. Clique no ***Campo Entrada*** 

e digite **f(x)=a^x**. e aperte a tecla **Enter**.

Figura 12 – *Construção da Função Exponencial (1º Caso)*



Importante

Note que utilizamos valores maiores que 1, dessa forma movimentando o controle deslizante “a”, a função exponencial que é crescente, torna-se mais acentuada quando os valores se aproximam de 5 e fica mais suave a medida em que se aproxima de 1.

7. Não se engane, o gráfico da função não toca o eixo OX. Para ver isto, Clique no ícone ***Exibição*** e em seguida clique em **Ampliar** . Clique em seguida várias vezes onde o gráfico parece tocar o eixo x.

8. Clique no menu **Arquivo/Gravar como**.

9. Na janela de diálogo que surge, dei o nome para o arquivo de **"Função exponencial – caso 1"** escolha um local onde deseja guardar seu documento e clique no botão **Gravar**.

2º CASO: Quando $0 < a < 1$

Para este caso utilizaremos apenas valores maiores que 0 e menores 1 para inserir no controle deslizante "a" no Geogebra, dessa forma será possível obter uma melhor precisão e análise sobre o comportamento da função.

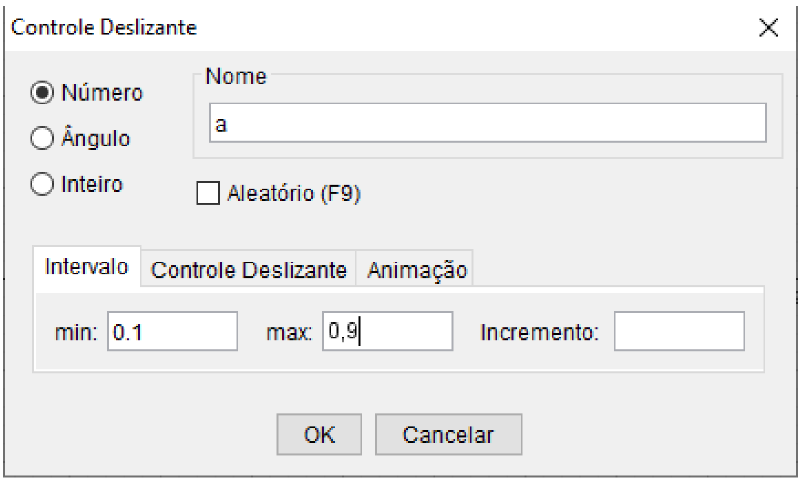
Procedimentos no Geogebra

1. Abra o Geogebra.

2. Clique no ícone ***Controles*** e selecione a ferramenta **Controle Deslizante**

3. Clique com o botão esquerdo do mouse na **Janela de Visualização.**

4. Insira o controle deslizante "a" preenchendo com os dados a seguir.

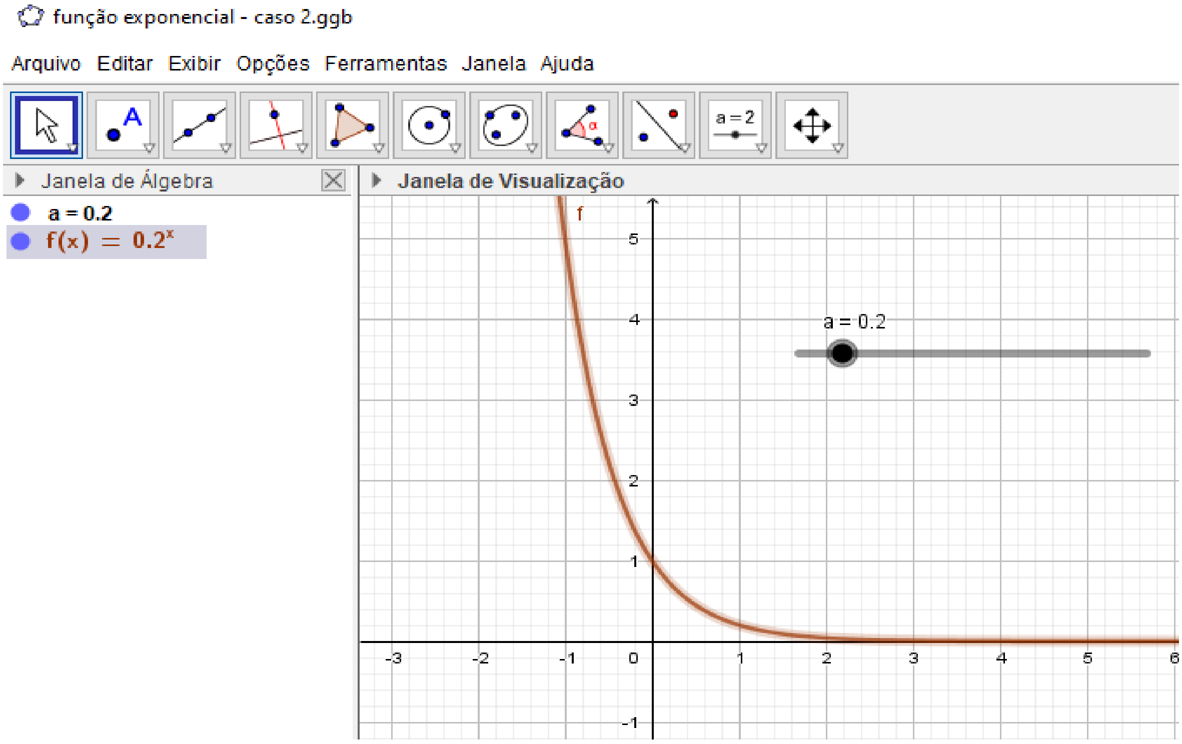


5. Clique no botão “ok”.

6. Clique no ***Campo Entrada*** 

e digite **f(x)=a^x**. e aperte a tecla **Enter**.

Figura 13 – *Construção da Função Exponencial (2º Caso)*



Importante

Note que utilizamos valores maiores que 0 e menores que 1, dessa forma movimentando o controle deslizante “a”, a função exponencial que é decrescente torna-se mais acentuada quando os valores se aproximam de 0 e fica mais suave a medida em que se aproxima de 1.

7. Não se engane, nesse caso em que 0<a<1 o gráfico da função também não toca o eixo OX. Para ver isto, clique no ícone ***Exibição*** e em seguida clique em **Ampliar** . Clique em seguida várias vezes onde o gráfico parece tocar o eixo x.

8. Clique no menu **Arquivo/Gravar como**.

9. Na janela de diálogo que surge, dei o nome para o arquivo de **"Função exponencial – caso 2"** escolha um local onde deseja guardar seu documento e clique no botão **Gravar**.

4.4.2 – ESTUDO DO DOMÍNIO E IMAGEM DA FUNÇÃO EXPONENCIAL

Para fazermos o estudo do domínio e imagem da função no Geogebra, vamos inserir alguns pontos, retas e segmentos de retas no gráfico que iremos criar e customiza-los, são exercícios que já foram realizados anteriormente e vão possibilitar uma melhor percepção das características do domínio e imagem dessa função.

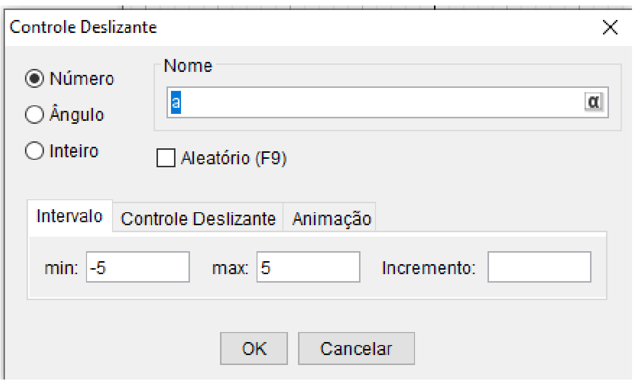
Procedimentos no Geogebra

1. Abra o Geogebra.

2. Clique no ícone ***Controles*** e selecione a ferramenta **Controle Deslizante**

3. Clique com o botão esquerdo do mouse na **Janela de Visualização.**

4. Insira o controle deslizante "a" preenchendo com os dados a seguir.



5. Clique no botão "ok".

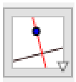
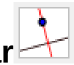
6. Clique no ***Campo Entrada*** 

e digite **f(x)=a^x** e aperte a tecla **Enter**.

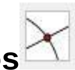
7. Movimente o controle deslizante para a=0.5

8. Clique no ícone ***Pontos***  e selecione a ferramenta **Ponto** .

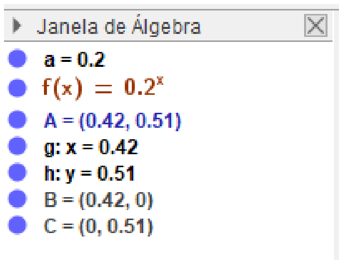
9. Clique com o botão esquerdo do mouse em qualquer intervalo da função $f(x)$ criando o Ponto A.

10. Clique no ícone ***Posições Relativas***  e selecione a ferramenta **Reta Perpendicular** 

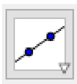
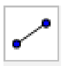
11. Clique no Ponto A e em seguida no eixo X, note que uma reta foi criada perpendicular ao eixo X chamada de “g”, clique novamente no Ponto A e em seguida clique no eixo Y e foi criada uma reta perpendicular ao eixo Y chamada de “h”.

12. Clique no ícone ***Pontos***  e selecione a ferramenta **Intersecção entre dois objetos** .

13. Clique na reta “g” e depois no eixo X criando assim o Ponto B, clique na reta “h” e no eixo Y criando o Ponto C.



14. Na **Janela de Álgebra**, clique na bolinha azul correspondente as retas “g” e “h”, para poder ocultar as duas retas.

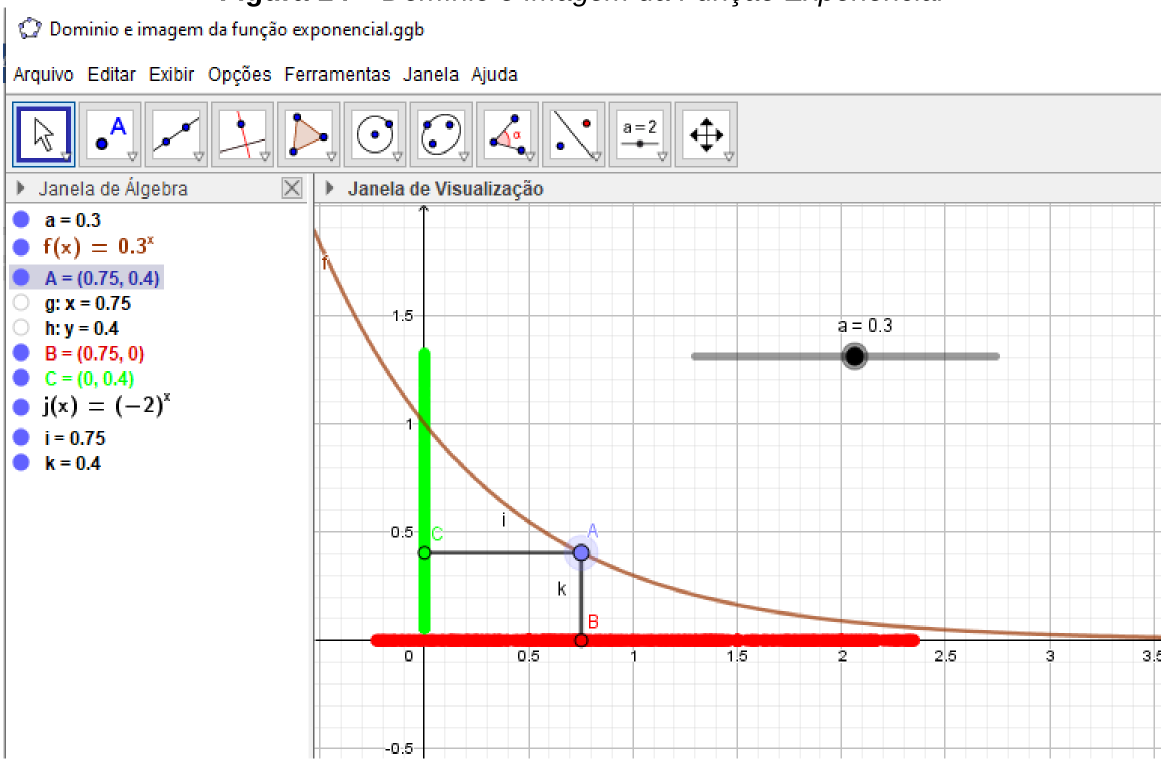
15. Clique no ícone ***Linhas Retas***  e selecione a ferramenta **Segmento** 

16. Clique no Ponto A e em seguida no Ponto B, repita o processo clicando novamente no Ponto A e em seguida no Ponto C.

17. Clique com o botão direito do mouse em cima do Ponto B e clique em **Propriedades**. Em **Básico** marque a opção **Exibir Rastro**, na aba **Cor** mude a cor do Ponto B para Vermelho.

18. Repita o passo 17, agora para o Ponto C, utilize a cor Verde e feche a janela de propriedades.

Figura 14 – *Domínio e Imagem da Função Exponencial*



Movimente o Ponto A e note que é criado um rastro no eixo X na cor vermelha e no eixo Y na cor verde, esses rastros identificam o Domínio e a Imagem da função à medida em que movimentamos o Ponto A.

Importante

Note que, quando o valor do controle deslizante $\boldsymbol{a} = \mathbf{0}$ a função é constante e coincidente com o eixo X partindo de 0 até o $+\infty$, e quando $\boldsymbol{a} = \mathbf{1}$ a função é constante.

19. Clique no menu **Arquivo/Gravar como**.

20. Na janela de diálogo que surge, dei o nome para o arquivo de **“Domínio e imagem da função quadrática”** escolha um local onde deseja guardar seu documento e clique no botão **Gravar**.

Desafio: Comente sobre as características do domínio e a imagem da função $f(x) = 2^x - 1$.

____

____

____

____

____

4.5 – FUNÇÃO LOGARITMICA

Para começarmos a falar sobre a função logarítmica, vamos relembrar um pouco sobre a definição de logaritmo, que é a base para o entendimento relacionado ao comportamento dessa função.

Definição de Logaritmo: Sejam $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ números reais, positivos com $\boldsymbol{a \neq 1}$, ou seja, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}_+^*$ e $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}_+^* - \{\mathbf{1}\}$. Chamamos de logaritmo de $\boldsymbol{b}$ na base $\boldsymbol{a}$ ao número real $\boldsymbol{x}$ tal que $\boldsymbol{a^x = b}$. (BIANCHINI e PACCOLA, 1989, p. 140).

Ou seja,

$$log_a b = x \iff a^x = b, com\ b > 0, a > 0\ e\ a \neq 1$$

Logaritmando

Logaritmo

$$\boldsymbol{log_a b = x \iff a^x = b}$$

Base

Lê-se logaritmo de $\boldsymbol{b}$ na base $\boldsymbol{a}$, sendo $\boldsymbol{a > 0, a \neq 1\ e\ b > 0}$.

Quando a base de um logaritmo for omitida, significa que seu valor é igual a 10. Este tipo de logaritmo é chamado de logaritmo decimal.

Propriedades

Da definição, decorre imediatamente que para números reais positivos, $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ com $\boldsymbol{a \neq 1}$: (PAIVA, 2005. p. 168)

I. $\log_a a = 1$

De fato, fazendo $\log_a a = x$, tem-se: $a^x = a \Rightarrow x = 1$

II. $\log_a 1 = 0$

De fato, fazendo $\log_a 1 = x$, tem-se: $a^x = 1 \Rightarrow x = 0$

III. $\log_a b^y = y.\log_a b\ (\forall y, com\ y \in \mathbb{R})$

De fato, fazendo $\log_a b = x$, tem-se: $a^x = b$. Elevando-se ao expoente y ambos os membros dessa última igualdade: $(a^x)^y = b^y \Leftrightarrow a^{yx} = b^y$. Pela definição de logaritmo: $a^{xy} = b^y \Leftrightarrow yx = \log_a b^y$. Como $x = \log_a b$, temos, finalmente: $y.\log_a b = \log_a b^y$

IV. $\log_a a^b = b$

De fato, pela propriedade I e III, temos: $\log_a a^x = x.\log_a a = x.1, portanto$: $\log_a a^x = x$

V. $a^{\log_a b} = b$

De fato, fazendo $\log_a b = x$, tem-se: $a^x = b$. Substituindo, nessa última igualdade, x por $\log_a b$,tem-se: $a^{\log_a b} = b$

Exemplo 1:

Encontre o valor de $log_3 27$

Neste exemplo, queremos descobrir qual expoente devemos elevar o 3 para que o resultado seja igual a 27. Usando a definição, temos:

$$log_3 27 = x \leftrightarrow 3^x = 27$$

Para encontrar esse valor, podemos fatorar o número 27, conforme indicado abaixo:

$$\begin{array}{r|l} 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ \hline 1 & 3^3 \end{array}$$

Substituindo o 27 por sua forma fatorada na equação anterior, temos:

$$3^x = 3^3$$

Como as bases são iguais, chegamos à conclusão que $x = 3$.

Exemplo 2:

Calcule os Logaritmos:

a) $\log_7 49 = x$

b) $\log_4 4 = x$

c) $\log_{\frac{3}{2}} \frac{4}{9} = x$

d) $\log_8 1 = x$

Definição de Função Logarítmica: Seja $\boldsymbol{a}$ um número real, positivo e diferente de 1 (quer dizer $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}_+^* - \{\mathbf{1}\}$), Chamamos de função logarítmica de base $\boldsymbol{a}$ à função $\boldsymbol{f}: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ definida por $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{log}_{\boldsymbol{a}} \boldsymbol{x}$. (BIANCHINI e PACCOLA, 1989, p. 145).

Importante

Observe que o domínio da função é $\mathbb{R}_+^*$, ou seja, somente valores positivos poderão ser atribuídos a $\boldsymbol{x}$.

Exemplo: Fazendo a=3, obtemos a função $f(x) = \log_3 x$

Fazendo $a = \frac{1}{2}$, obtemos a função $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$

4.5.1 – GRÁFICO DA FUNÇÃO LOGARÍTMICA

Para compreendermos melhor o comportamento da função logarítmica, utilizaremos dois casos no Geogebra para mostrar a movimentação dessa função.

1º CASO: Quando $\boldsymbol{a > 1}$

Para este caso utilizaremos apenas valores maiores que 1 para inserir no controle deslizante “a” no Geogebra, dessa forma será possível obter uma melhor precisão e análise sobre o comportamento da função.

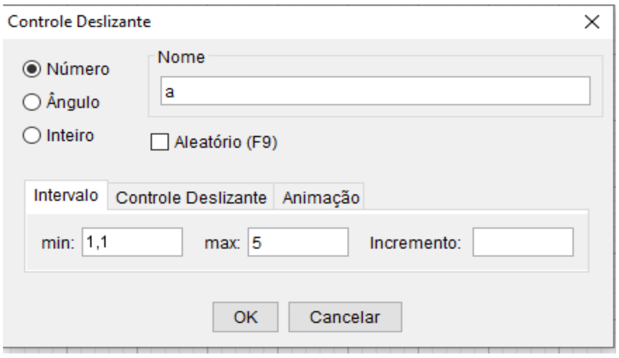
Procedimentos no Geogebra

1. Abra o Geogebra.

2. Clique no ícone ***Controles*** e selecione a ferramenta **Controle Deslizante**

3. Clique com o botão esquerdo do mouse na **Janela de Visualização.**

4. Insira o controle deslizante “a” preenchendo com os dados a seguir.

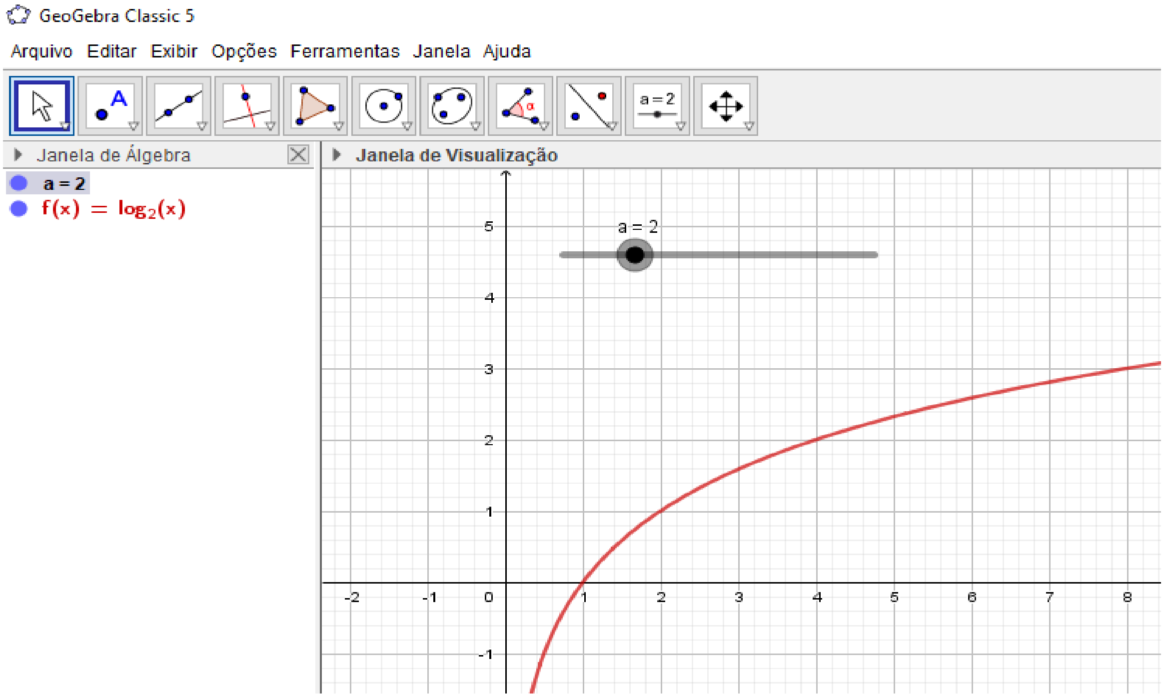


5. Clique no botão “ok”.

6. Clique no ***Campo Entrada*** 

e digite **f(x)=log(a,x)** e aperte a tecla Enter.

Figura 15 – *Construção da Função Logarítmica (1º Caso)*



Importante

Note que utilizamos valores maiores que 1, dessa forma movimentando o controle deslizante “a” a função logarítmica que é crescente torna-se mais acentuada quando os valores se aproximam de 1 e fica mais suave a medida que vai chegando perto de 5.

7. Não se engane, o gráfico da função não toca o eixo OY. Para ver isto, Clique no ícone ***Exibição*** e em seguida clique na ferramenta **Ampliar** . Clique em seguida várias vezes onde o gráfico parece tocar o eixo Y.

8. Clique no menu **Arquivo/Gravar como**.

9. Na janela de diálogo que surge, dei o nome para o arquivo de **"Função logarítmica – caso 1"** escolha um local onde deseja guardar seu documento e clique no botão **Gravar**.

2º CASO: Quando $0 < a < 1$

Para este caso utilizaremos apenas valores maiores que 0 e menores que 1 para inserir no controle deslizante "a" no Geogebra, dessa forma será possível obter uma melhor precisão e análise sobre o comportamento da função.

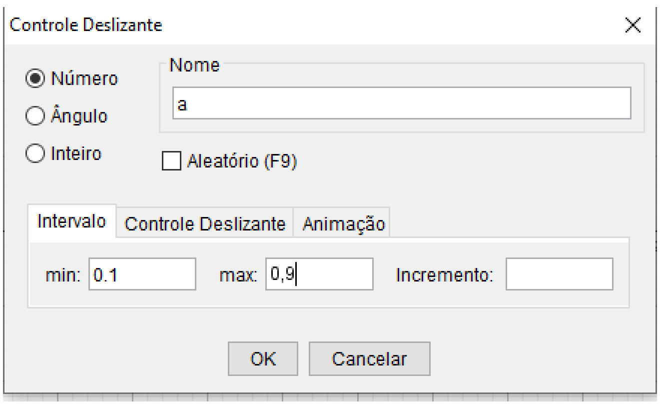
Procedimentos no Geogebra

1. Abra o Geogebra.

2. Clique no ícone ***Controles*** e selecione a ferramenta **Controle Deslizante**

3. Clique com o botão esquerdo do mouse na **Janela de Visualização.**

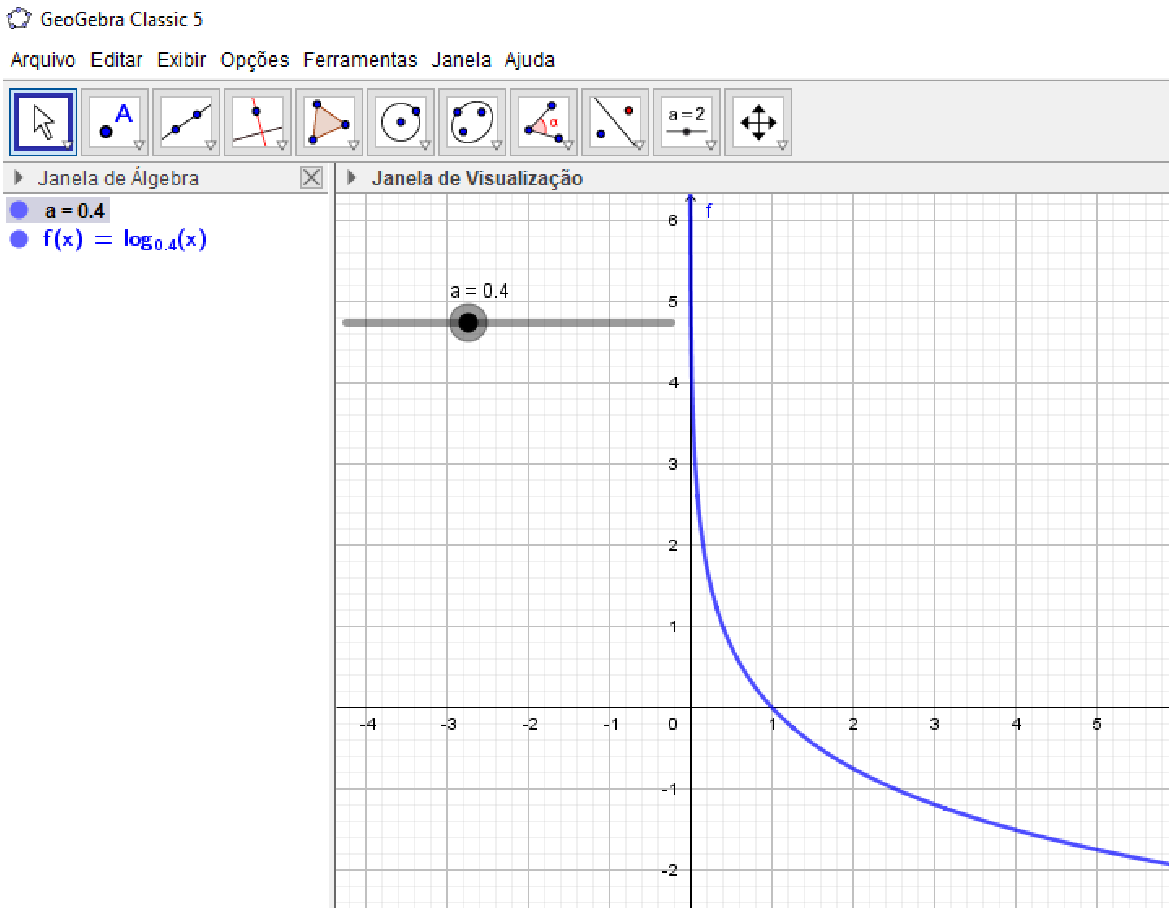
4. Insira o controle deslizante "a" preenchendo com os dados a seguir.



5. Clique no botão "ok".

6. Clique no ***Campo Entrada*** Entrada: e digite **f(x)=log(a,x)**.e aperte a tecla **Enter**.

Figura 16 – *Construção da Função Logarítmica (2º Caso)*



Importante

Note que utilizamos valores maiores que 0 e menores que 1, dessa forma movimentando o controle deslizante “a” a função exponencial que é decrescente torna-se mais acentuada quando os valores se aproximam de 1 e fica mais suave a medida em que se aproxima de 0.

7. Não se engane, nesse caso em que 0<a<1 o gráfico da função também não toca o eixo OY. Para ver isto, Clique no ícone ***Exibição*** e em seguida clique na ferramenta **Ampliar** . Clique em seguida várias vezes onde o gráfico parece tocar o eixo Y.

8. Clique no menu **Arquivo/Gravar como**.

9. Na janela de diálogo que surge, dei o nome para o arquivo de **"Função logarítmica – caso 2"** escolha um local onde deseja guardar seu documento e clique no botão **Gravar**.

4.5.2 – ESTUDO DO DOMÍNIO E IMAGEM DA FUNÇÃO LOGARÍTMICA

Para fazermos o estudo do domínio e imagem da função no Geogebra, vamos inserir alguns pontos, retas e segmentos de retas no gráfico que iremos criar e customiza-los, são exercícios que já foram realizados anteriormente e vão possibilitar uma melhor percepção das características do domínio e imagem dessa função.

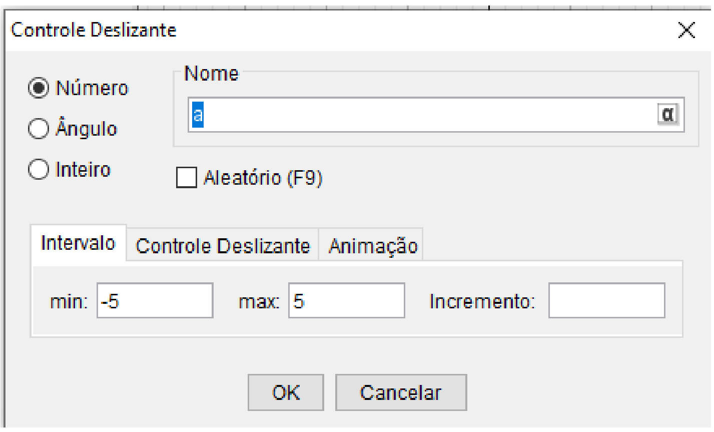
Procedimentos no Geogebra

1. Abra o Geogebra.

2. Clique no ícone ***Controles*** e selecione a ferramenta **Controle Deslizante**

3. Clique com o botão esquerdo do mouse na **Janela de Visualização.**

4. Insira o controle deslizante "a" preenchendo com os dados a seguir.



5. Clique no botão “ok”.

6. Clique no ***Campo Entrada*** Entrada: e digite **f(x)=log(a,x)**. e aperte a tecla **Enter**.

7. Movimente o controle deslizante para a=0.5

8. Clique no ícone ***Pontos*** e selecione a ferramenta **Ponto** **.**

9. Clique com o botão esquerdo do mouse em qualquer intervalo da função $f(x)$ criando o Ponto A.

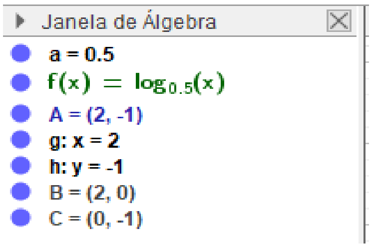
10. Clique no ícone ***Posições Relativas*** e selecione a ferramenta **Reta Perpendicular**.

11. Clique no Ponto A e em seguida no eixo X, note que uma reta foi criada perpendicular ao eixo X chamada de “g”, clique novamente no Ponto A e em seguida clique no eixo Y e foi criada uma reta perpendicular ao eixo Y chamada de “h”.

12. Clique no ícone ***Pontos*** e selecione a ferramenta **Intersecção entre dois objetos** **.**

13. Clique na reta “g” e depois no eixo X criando assim o Ponto B, clique na reta “h” e no eixo Y criando o Ponto C.

14. Na **Janela de Álgebra**, clique na bolinha azul correspondente as retas “g” e “h”, para poder ocultar as duas retas



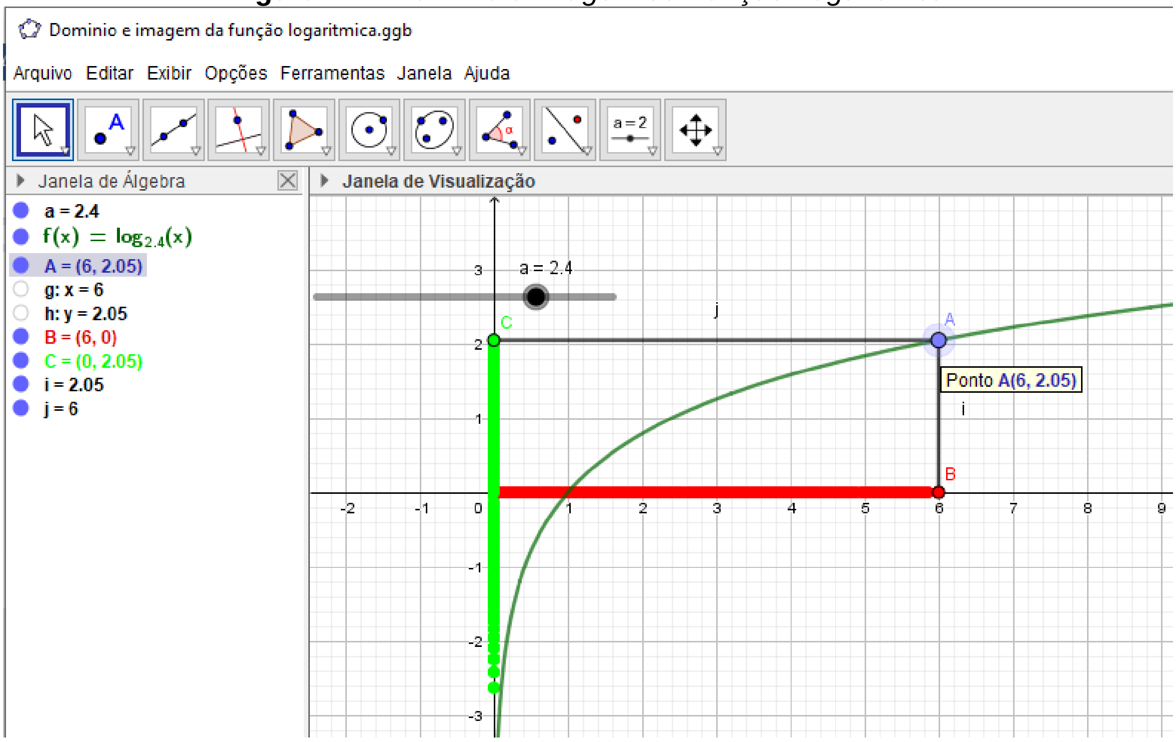
5. Clique no ícone ***Linhas Retas*** e selecione a ferramenta **Segmento**

16. Clique no Ponto A e em seguida no Ponto B, repita o processo clicando no Ponto A e em seguida no Ponto C.

17. Clique com o botão direito do mouse em cima do Ponto B e clique em **Propriedades**. Em **Básico** marque a opção **Exibir Rastro**, na aba **Cor** mude a cor do Ponto B para Vermelho.

18. Repita o passo 17, agora para o Ponto C e utilize a cor Verde.

Figura 17 – *Domínio e Imagem da Função Logarítmica*



Movimente o Ponto A e note que é criado um rastro no eixo X na cor vermelha e no eixo Y na cor verde, esses rastros identificam o Domínio e a Imagem da função à medida em que movimentamos o Ponto A.

Importante

Note que, quando o valor do controle deslizante a=0, a função é constante e coincidente com o eixo X partindo de 0 até +∞, e quando a=1 a função não existe.

19. Clique no menu **Arquivo/Gravar como**.

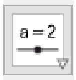
20. Na janela de diálogo que surge, dei o nome para o arquivo de **"Domínio e imagem da função logarítmica"** escolha um local onde deseja guardar seu documento e clique no botão **Gravar**.

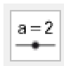
Curiosidade

A Função Logarítmica $\boldsymbol{f(x) = \log_a x}$ é a inversa da Função Exponencial $\boldsymbol{g(x) = a^x}$, portanto temos que o gráfico da função $\boldsymbol{f}$ é simétrico ao gráfico da função $\boldsymbol{g}$ em relação à reta $\boldsymbol{y = x}$. Vejamos essa ilustração no Geogebra.

Procedimentos no Geogebra

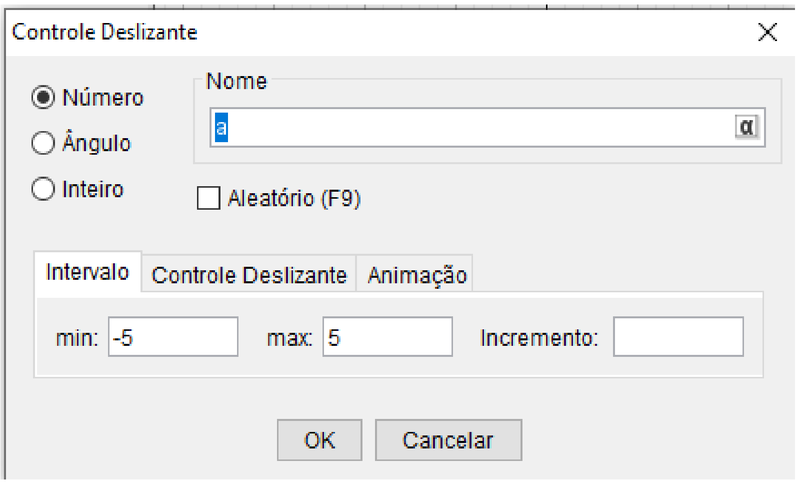
1. Abra o Geogebra.

2. Clique no ícone ***Controles*** 

e selecione a ferramenta **Controle Deslizante** 

3. Clique com o botão esquerdo do mouse na **Janela de Visualização.**

4. Insira o controle deslizante "a" preenchendo com os dados a seguir.



5. Clique no botão "ok".

6. Coloque o controle deslizante a=2.

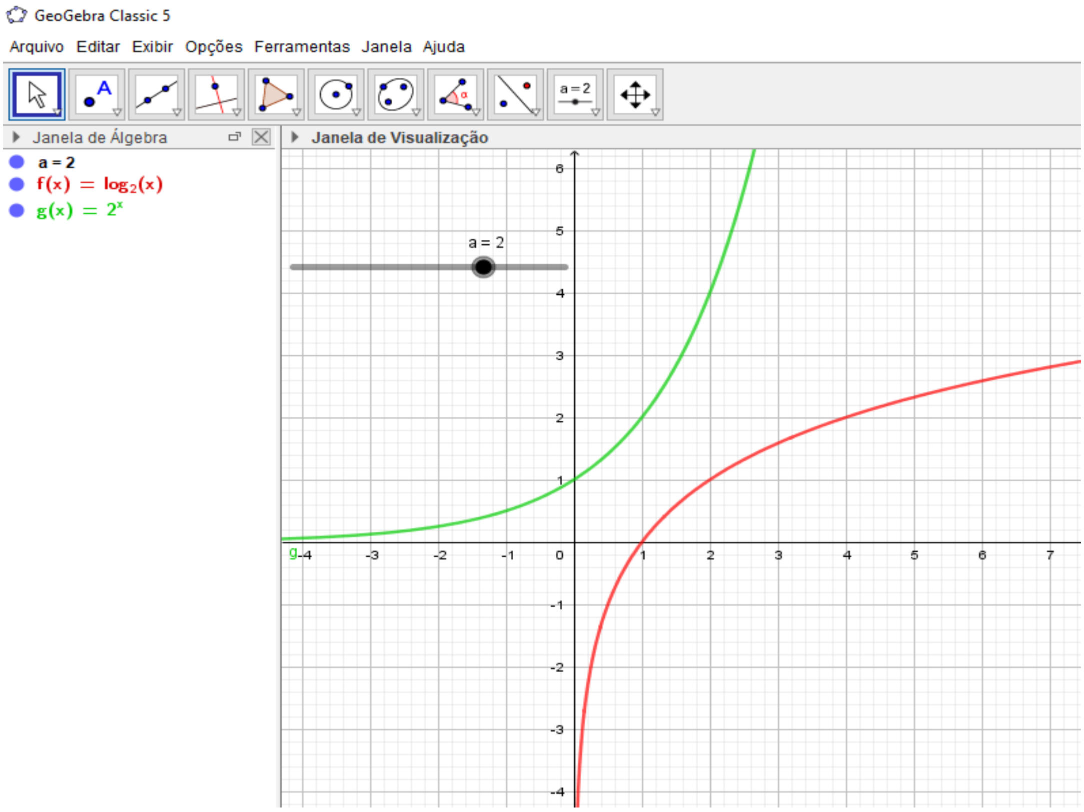
7. Clique no ***Campo Entrada*** 

e digite **f(x)=log(a,x)**. e aperte a tecla **Enter**.

8. Clique novamente no ***Campo Entrada*** 

e digite **g(x)=a^x** e aperte a tecla **Enter.**

Figura 18 – *Comparação das Funções Logarítmica e Exponencial*



Importante

Note que, a medida em que o controle deslizante "a" é movimentado, as funções vão fazendo trajetórias simétricas.

9. Clique no menu **Arquivo/Gravar como**.

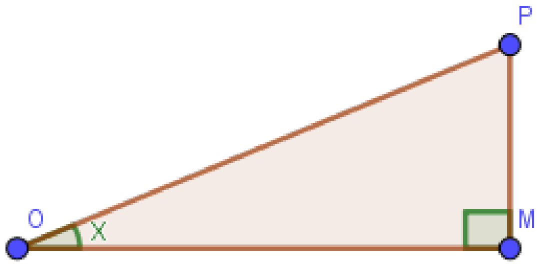
10. Na janela de diálogo que surge, dei o nome para o arquivo de **"Comparação das funções exponencial e logarítmica"** escolha um local onde deseja guardar seu documento e clique no botão **Gravar**.

4.6 – FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Para começarmos a falar sobre a funções trigonométricas, vamos relembrar um pouco sobre as razões trigonométricas, que é a base para o entendimento relacionado ao comportamento dessas funções.

4.6.1 – RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS

De acordo com Bianchini e Paccola, (1989), seja o triângulo $\boldsymbol{OMP}$, reto em $\boldsymbol{M}$.



Seja $\boldsymbol{x}$ a medida do ângulo $\boldsymbol{M\hat{O}P}$, podemos estabelecer entre seus lados as seguintes razões:

Seno

Seno de $\boldsymbol{x}$ é a razão entre a medida do cateto oposto ao ângulo $\boldsymbol{\hat{O}}$ e a medida da hipotenusa. Indicando o $\boldsymbol{seno\ de\ x}$ por $\boldsymbol{sen}\ (\boldsymbol{x})$ e considerando $\boldsymbol{OP}$ como unidade de comprimento, temos:

$$\boldsymbol{sen(x) = \frac{MP}{OP} = \frac{MP}{1} = MP}$$

Cosseno

Cosseno de $\boldsymbol{x}$ é a razão entre a medida do cateto adjacente ao ângulo $\boldsymbol{\hat{O}}$ e a medida da hipotenusa. Indicando o $\boldsymbol{cosseno\ de\ x}$ por $\boldsymbol{cos}\ (\boldsymbol{x})$, temos:

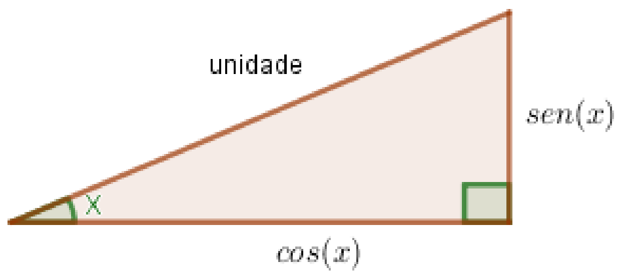
$$\boldsymbol{cos(x) = \frac{OM}{OP} = \frac{OM}{1} = OM \Rightarrow \cos(x) = OM}$$

Tangente

Tangente de $\boldsymbol{x}$ é a razão entre as medidas do cateto oposto e do cateto adjacente ao ângulo $\hat{\boldsymbol{O}}$. Indicando o $\boldsymbol{tangente\ de\ x}$ por $\boldsymbol{tg}\ (\boldsymbol{x})$, temos:

$$\boldsymbol{tg(x) = \frac{MP}{OM}}$$

A essas razões damos o nome de razões trigonométricas.



Observação: com a finalidade de facilitar a memorização, ao falarmos de hipotenusa e em catetos estamos nos referindo às medidas.

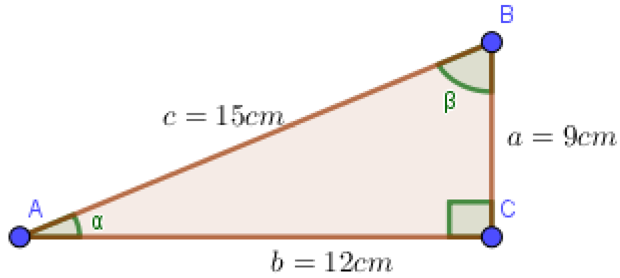
Desse modo, temos:

$$\boldsymbol{sen(x) = \frac{cateto\ oposto\ a\ x}{hipotenusa}}$$

$$\boldsymbol{cos(x) = \frac{cateto\ adjacente\ a\ x}{hipotenusa}}$$

$$\boldsymbol{tg(x) = \frac{cateto\ oposto\ a\ x}{cateto\ adjacente\ a\ x}}$$

Exemplo: De um triângulo retângulo $\boldsymbol{ABC}$ sabemos que $a = 9cm, b = 12cm\ e\ c = 15cm$. Determinar seno, cosseno e tangente de cada ângulo agudo.



Chamando de α a medida do ângulo $\hat{A}$, temos:

$$sen(\alpha) = \frac{a}{c} \Rightarrow sen(\alpha) = \frac{9\cancel{cm}}{15\cancel{cm}} \Rightarrow sen(\alpha) = 0{,}6$$

$$cos(\alpha) = \frac{b}{c} \Rightarrow cos(\alpha) = \frac{12\cancel{cm}}{15\cancel{cm}} \Rightarrow cos(\alpha) = 0{,}8$$

$$tg(\alpha) = \frac{a}{b} \Rightarrow tg(\alpha) = \frac{9\cancel{cm}}{12\cancel{cm}} \Rightarrow tg(\alpha) = 0{,}75$$

Chamando de β a medida do ângulo $\hat{B}$, temos:

$$sen(\beta) = \frac{b}{c} \Rightarrow sen(\beta) = \frac{12\cancel{cm}}{15\cancel{cm}} \Rightarrow sen(\alpha) = 0{,}8$$

$$cos(\beta) = \frac{a}{c} \Rightarrow cos(\beta) = \frac{9\cancel{cm}}{15\cancel{cm}} \Rightarrow cos(\beta) = 0{,}6$$

$$tg(\beta) = \frac{b}{a} \Rightarrow tg(\beta) = \frac{12\cancel{cm}}{9\cancel{cm}} \Rightarrow tg(\beta) = \frac{4}{3}$$

As funções trigonométricas, também chamadas de **funções circulares**, estão relacionadas ao círculo trigonométrico devido terem arcos que realizam várias voltas em seu entorno, considerando que o intervalo do círculo vai de $[0, 2\tau]$. As funções circulares são de fundamental importância para a trigonometria, pois elas são capazes de representar fenômenos naturais periódicos, como o comportamento ondulatório do som, as variações da temperatura, a pressão, os níveis de água dos oceanos, etc.

4.6.2 – PRINCIPAIS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

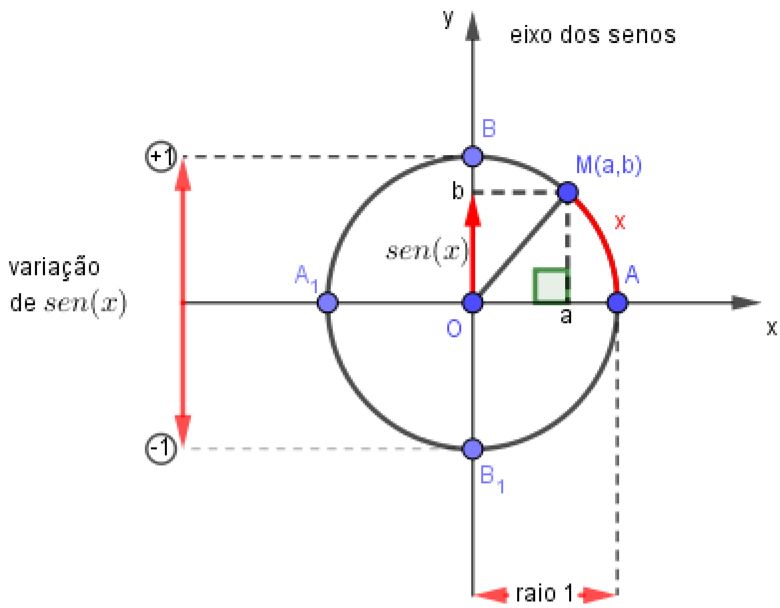
Função Seno

Seja o ciclo trigonométrico de centro $\boldsymbol{O}$ onde $\boldsymbol{A}$ é a origem dos arcos. A cada $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$ corresponde um ponto $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ do ciclo, tal que $\overline{\boldsymbol{AM}}$ mede $\boldsymbol{x}$. Chamamos de seno de $\boldsymbol{x}$ ao número real $\boldsymbol{b}$ e o indicamos por $\boldsymbol{sen}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b}$. (BIANCHINI e PACCOLA, 1989, p. 216).

Definimos **função seno** a função:

$$\boldsymbol{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ tal que } \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{sen}(\boldsymbol{x})$$

Figura 19 – *Função Seno no Ciclo Trigonométrico*



Características da função seno

- O domínio da função $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{sen}(\boldsymbol{x})$ é $\mathbb{R}$, ou seja $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{f}) = \mathbb{R}$.
- A imagem da função $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{sen}(\boldsymbol{x})$ é $[-\mathbf{1};\mathbf{1}]$, ou seja $\boldsymbol{Im}(\boldsymbol{f}) = [-\mathbf{1};\mathbf{1}]$, ou ainda $\boldsymbol{Im}(\boldsymbol{f}) = \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R} | -\mathbf{1} \leq \boldsymbol{y} \leq \mathbf{1}\}$.

Observação: dizemos que $\boldsymbol{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **é periódica** se para qualquer $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$ tivermos $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{T})$, com $\boldsymbol{T} \in \mathbb{R}$. O menor valor positivo de $\boldsymbol{T}$ para o qual isso ocorre é chamado de **período**. (BIANCHINI e PACCOLA, 1989, p. 217).

Então na função seno, temos: $sen(x + K \cdot 2\pi), k \in \mathbb{Z}$ para $\forall x \in \mathbb{R}$. O menor valor positivo de $k \cdot 2\pi$ ocorre quando $k = 1$. Portanto:

$$sen(x) = sen(x + \underbrace{1 \cdot 2\pi}_{T})$$

Dessa forma concluímos que:

A função $y = sen(x)$ é periódica de período 2π.

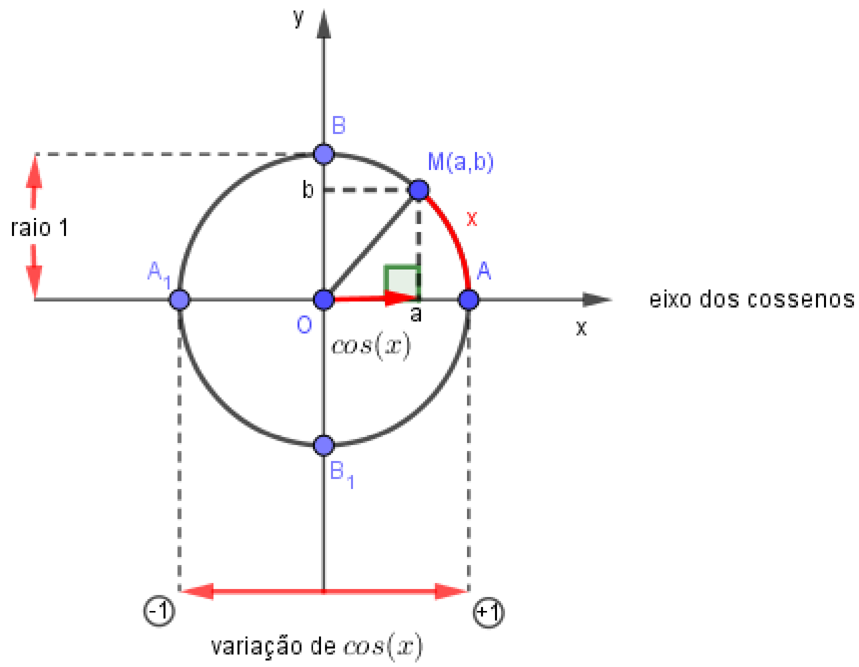
Função Cosseno

Seja o ciclo trigonométrico de centro O onde A é a origem dos arcos. A cada $x \in \mathbb{R}$ corresponde um ponto $M(a, b)$ do ciclo, tal que $\overline{AM}$ mede x. Chamamos de cosseno de x ao número real a e o indicamos por $cos(x) = a$. (BIANCHINI e PACCOLA, 1989, p. 224).

Definimos **função cosseno** a função:

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ tal que } f(x) = cos(x)$$

Figura 20 – *Função Cosseno no Ciclo Trigonométrico*



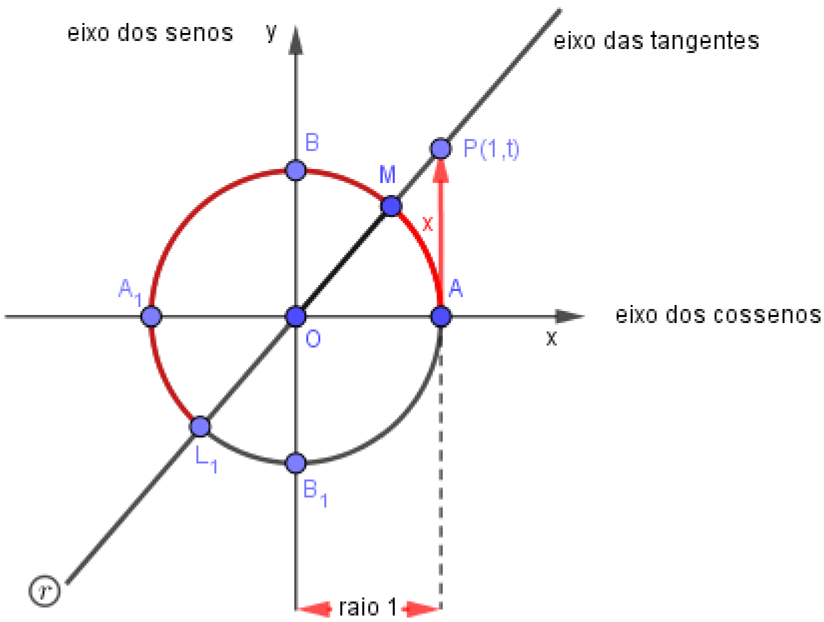
Características da função cosseno

- O domínio da função $\boldsymbol{y = cos(x)}$ é $\mathbb{R}$, ou seja $\boldsymbol{D(f)} = \mathbb{R}$.
- A imagem da função $\boldsymbol{y = cos(x)}$ é $[\boldsymbol{-1}; \boldsymbol{1}]$, ou seja $\boldsymbol{Im(f)} = [\boldsymbol{-1}; \boldsymbol{1}]$, ou ainda $\boldsymbol{Im(f)} = \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R} | \boldsymbol{-1} \leq \boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{1}\}$.
- O período da função $\boldsymbol{y = cos(x)}$ é $\boldsymbol{2\pi}$, pois $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$ temos $\boldsymbol{\cos(x)} = \boldsymbol{cos(x + K \cdot 2\pi)}$, com $\boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}$ e o menor valor positivo de $\boldsymbol{k \cdot 2\pi}$ tal que isso ocorra, é $\boldsymbol{1 \cdot 2\pi}$.

Função Tangente.

Seja o ciclo trigonométrico de centro $\boldsymbol{O}$ e $\boldsymbol{A}$, a origem dos arcos. Seja ainda o eixo que passa por $\boldsymbol{A}$ paralelo ao eixo dos senos (o sentido positivo é indicado pela flecha). Esse eixo é chamado eixo das tangentes. (BIANCHINI e PACCOLA, 1989, p. 233).

Figura 21 – *Função Tangente no Ciclo Trigonométrico*



A cada $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$ tal que $\boldsymbol{x} \neq \frac{\boldsymbol{\pi}}{\boldsymbol{2}} + \boldsymbol{k \cdot \pi}, \boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}$, corresponde um único ponto $\boldsymbol{M}$ tal que $\overline{\boldsymbol{AM}}$ mede $\boldsymbol{x}$.

Nessas condições a reta r que passa por $\boldsymbol{M}$ e por $\boldsymbol{O}$, sempre encontra o eixo das tangentes.

Seja $\boldsymbol{P}$ o ponto de encontro. Como o raio mede 1, então a abscissa de $\boldsymbol{P}$ é 1. Chamando de $\boldsymbol{t}$ a ordenada do ponto $\boldsymbol{P}$, temos:

$$\boldsymbol{P(1, t)}$$

Chamamos de tangente de $\boldsymbol{x}$ ao número real $\boldsymbol{t}$ e o indicamos por:

$$\boldsymbol{tg(x) = t}$$

Então definimos a **função tangente** à função:

$$\boldsymbol{f}: \boldsymbol{R_1} \to \mathbb{R} \text{ tal que } \boldsymbol{f(x) = tg(x)}$$

Onde $\boldsymbol{R_1} = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R} \middle| \boldsymbol{x} \neq \frac{\pi}{2} + \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}\right\}$

Características da função tangente

- O domínio da função $\boldsymbol{y = tg(x)}$ é $\left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R} \middle| \boldsymbol{x} \neq \frac{\pi}{2} + \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}\right\}$.

  Dessa forma **não fazem** parte do domínio os valores de $\boldsymbol{x}$ correspondentes a **todos os arcos** de extremidade em $\boldsymbol{B}$ e $\boldsymbol{B_1}$ (ver figura 21). Note que para esses arcos, não haveria ponto de intersecção $\boldsymbol{P}$.
- A imagem da função $\boldsymbol{y = tg(x)}$ é $\mathbb{R}$, ou seja $\boldsymbol{Im(f)} = \mathbb{R}$.
- A função é periódica de período $\boldsymbol{\pi}$,

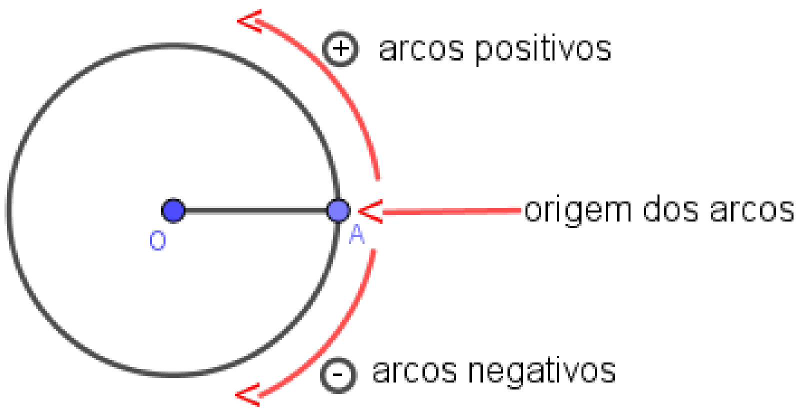
  De modo geral, temos $\boldsymbol{tg(x) = tg(x + k \cdot \pi)}; \boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}$

Para compreender melhor as funções, seno, cosseno e tangente, iremos construir e analisar o ciclo trigonométrico, entender suas características, a medição dos ângulos que podem ser formados, a relação com a funções e mais algumas curiosidades a respeito.

4.6.3 – CICLO TRIGONOMÉTRICO

Consideramos uma circunferência qualquer e fixamos nela um ponto que chamamos de **origem dos arcos**. Fixamos também o sentido positivo sobre ela (o sentido contrário é o sentido negativo) (BIANCHINI e PACCOLA, 1989, p. 212).

Figura 22 – *Arcos positivos e negativos do Ciclo Trigonométrico*



Convencionamos que o ponto A (ver figura 22) é a origem dos arcos e que o **sentido positivo** é o **sentido anti-horário** (sentido contrário ao movimento dos ponteiros do relógio). Nessas condições, a circunferência é chamada de **circunferência orientada.** (BIANCHINI e PACCOLA, 1989, p. 212).

Vamos agora estabelecer que a unidade de comprimento seja o **raio da circunferência orientada**. Nessas condições, a circunferência orientada (de raio 1) é chamada de **ciclo trigonométrico** ou simplesmente **ciclo**. (BIANCHINI e PACCOLA, 1989, p. 212).

Faremos agora a construção do ciclo trigonométrico no Geogebra para visualizar a movimentação dos arcos, ângulos e a relação do eixo X (eixo dos cossenos) com o eixo Y (eixo dos senos).

Procedimentos no Geogebra

1. Abra o Geogebra

2. Clique no ***Campo Entrada*** 

, digite: **Círculo((0,0),1)** e aperte a tecla **Enter**.

3. Clique no ícone ***Exibição*** e em seguida na ferramenta **Ampliar**. Clique no centro a circunferência duas vezes.

4. No ***Campo Entrada*** digite: **Segmento((-1.5,0),(1.5,0))** e aperte a tecla **Enter**, criando o segmento “f”.

5. No ***Campo Entrada*** , digite: **Segmento((0, -1.5),(0, 1.5))** e aperte a tecla **Enter**, criando o segmento “g”.

6. No ***Campo Entrada*** digite: **O=(0,0)** e aperte a tecla **Enter**.

7. Clique no ícone ***Pontos*** e selecione a ferramenta **Ponto** .

8. Clique com o botão esquerdo do mouse em qualquer trecho do primeiro quadrante da circunferência, criando o Ponto A.

9. No ***Campo Entrada*** digite: **B=(1,0)** e aperte a tecla **Enter**.

10. Clique no ícone ***Linhas Retas*** e selecione a ferramenta **Reta** , em seguida clique no Ponto O e no Ponto A, criando a reta “h”.

11. Clique no ícone ***Posições Relativas*** e selecione a ferramenta **Reta Perpendicular**

12. Clique no Ponto B e em seguida no eixo X, note que uma reta foi criada perpendicular ao eixo X chamada de “i”.

13. Clique no ícone ***Formas Circulares*** e selecione a ferramenta **Arco Circular** , em seguida clique nos pontos O, B e A respectivamente, criando o arco circular “d”.

14. No ***Campo Entrada*** Entrada: digite: **C=(x(A),0)** e aperte a tecla **Enter.**

15. No ***Campo Entrada*** Entrada: digite: **D=(0,y(A))** e aperte a tecla **Enter**.

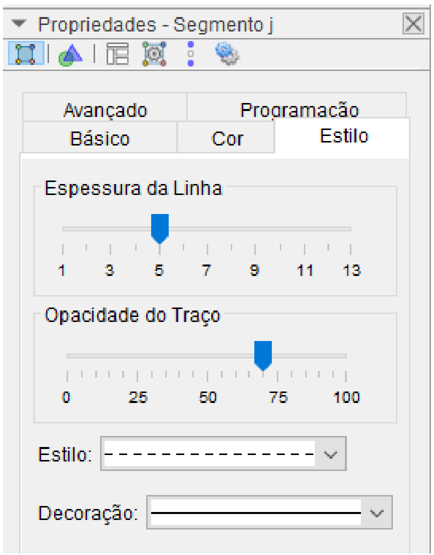
16. Clique no ícone ***Linhas Retas*** e selecione a ferramenta **Segmento**, clique no Ponto D e em seguida no Ponto A, criando o segmento "j", depois clique no Ponto C e em seguida no Ponto A, criando o segmento "k", depois clique no Ponto C e em seguida no Ponto O, criando o segmento "l" e depois clique no Ponto O e em seguida no Ponto D, criando o segmento "m"

17. Clique no ícone ***Pontos*** e selecione a ferramenta **Intersecção entre dois objetos**.

18. Clique na reta "i" e depois na reta "h" criando o Ponto E.

19. Clique no ícone ***Linhas Retas*** e selecione a ferramenta **Segmento**, depois clique no Ponto B e em seguida no Ponto E, criando o segmento "n".

20. Clique no ícone ***Ângulos e Medidas*** e selecione a ferramenta **Ângulo**, em seguida clique nos pontos B, O e A respectivamente, em seguida aperte a tecla Esc.



21. Na **Janela Álgebra**, clique com o botão direito do mouse no seguimento "j" e clique em **Propriedades**, na aba **Estilo,** mude o estilo da linha para **tracejado**.

22. Repita o passo 21 para o seguimento "k".

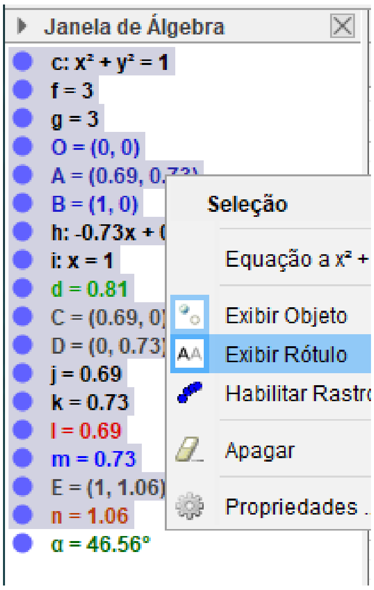
23. Na **Janela de Álgebra**, clique com o botão direito do mouse no seguimento "l" e clique em **Propriedades**, na aba **Cor,** mude a cor para vermelho e na aba **Estilo** mude a espessura da linha para 7.

24. Repita o passo 23 para o seguimento "m" e coloque a cor azul.

25. Repita o passo 23 para o Arco Circular "d" e coloque a cor verde.

26. Repita o passo 23 para o seguimento “n”, coloque a cor laranja e feche a janela de propriedades.

27. Na **Janela de Álgebra**, clique com o botão esquerdo do mouse no círculo “c” segure a tecla Shift e clique no seguimento “n”, clique com o botão direito do mouse sobre a seleção e clique em **Exibir Rótulo** para ocultar todos os rótulos selecionados**.**

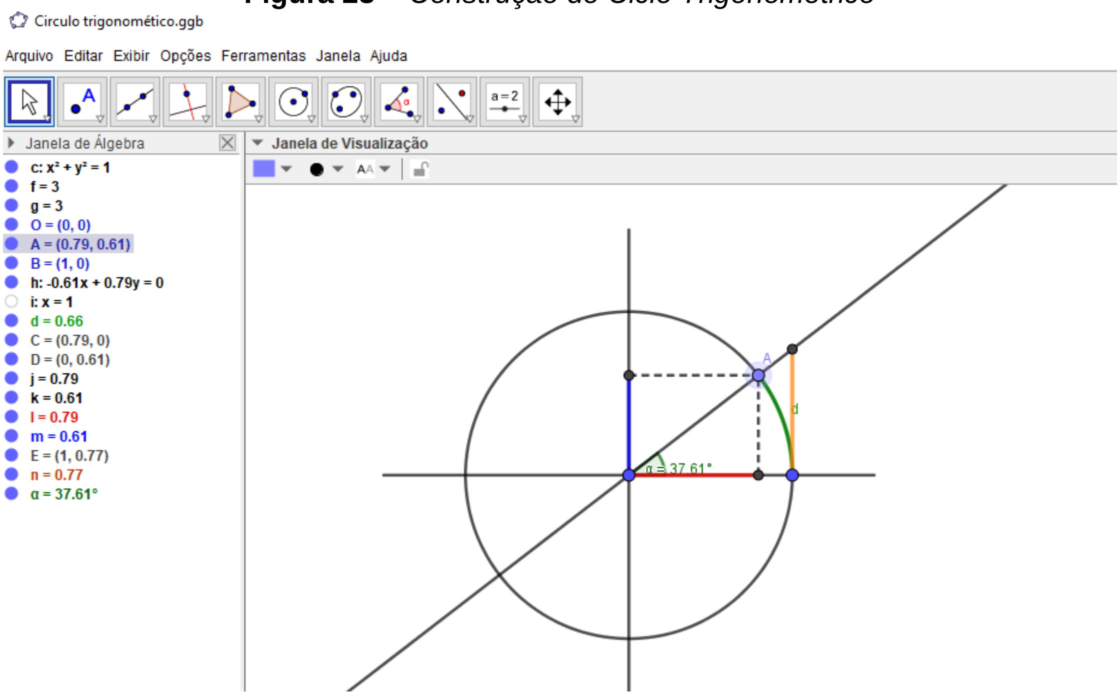


28. Clique com o botão esquerdo do mouse na parte em banco da **Janela de Álgebra**, clique com o botão direito do mouse no ponto A e clique em **Exibir Rótulo,** faça o mesmo com o Arco Circular “d” para voltar a exibi-los**.**

29. Na **Janela de Álgebra**, clique na bolinha azul correspondente a reta “i”, para poder ocultar a reta.

30. Clique com o botão esquerdo do mouse na **Janela de Visualização,** em seguida clique na seta para a direita que fica em frente ao nome da janela, nas opções que aparece oculte **os eixos** e **a malha** clicando em cima de seus respectivos botões.

Figura 23 – *Construção do Ciclo Trigonométrico*



Movimente o ponto A, note que ele está preso círculo “c” e à medida que ele é deslocado o ângulo formado entre os pontos B,O e A vai alterando.

Importante

O seguimento “l” em vermelho representa o Cosseno, enquanto que o seguimento “m” em azul representa o Seno e o seguimento “n” em laranja representa a Tangente.

31. Clique no menu **Arquivo/Gravar como**.

32. Na janela de diálogo que surge, dei o nome para o arquivo de **“Ciclo trigonométrico”** escolha um local onde deseja guardar seu documento e clique no botão **Gravar**.

Ângulos no círculo trigonométrico

A construção dos ângulos é feita utilizando o vértice no centro dessa circunferência (origem) e seus lados são os seguimentos de reta que vão da origem até a circunferência, também chamados de raios da circunferência. O sentido de abertura do ângulo é anti-horário, ou seja, o primeiro lado é o raio da circunferência que fica sobre o eixo x e o segundo lado é o raio da circunferência que desloca-se em sentido anti-horário formando um ângulo entre os dois raios. (SILVA, 2020).

Radianos do Círculo Trigonométrico

As medidas de arcos presentes no círculo trigonométrico são dadas em graus $(°)$ ou radianos (rad), onde 1º equivale a 1/360 da circunferência, ou seja, a circunferência é dividida em 360 partes iguais ligadas, sendo que cada uma delas apresenta um ângulo que corresponde a 1°. Já **1 radiano** corresponde à medida de um arco da circunferência, cujo comprimento é igual ao raio da circunferência do arco que será medido. (GOUVEIA, 2020).

Para auxiliar nas medidas, confira abaixo algumas relações entre graus e radianos:

$$\pi\, rad = 180°$$

$$2\pi\, rad = 360°$$

$$\pi/2\, rad = 90°$$

$$\pi/3\, rad = 60°$$

$$\pi/4\, rad = 45°$$

Importante

Obs: As unidades de medida (grau e radiano) possuem uma relação, onde uma pode ser convertida para a outra utilizando uma regra de três simples.

Exemplo: Qual a medida de um ângulo de 90° em radianos?

$$\pi \,\_\_\_\_\_\_ 180°$$

$$x \,\_\_\_\_\_\_\_ 90°$$

Fazendo Meios pelos Extremos temos:

$$x.180° = 90°.\pi$$

$$x = \frac{90°.\pi}{180°}$$

$$x = \frac{\pi}{2} rad$$

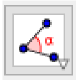
Para poder visualizar melhor as medidas dos arcos em radianos, vamos inserir essas medidas no ciclo trigonométrico criado anteriormente para analisar tato a construção no Geogebra, quanto a conversão de medidas de graus para radiano.

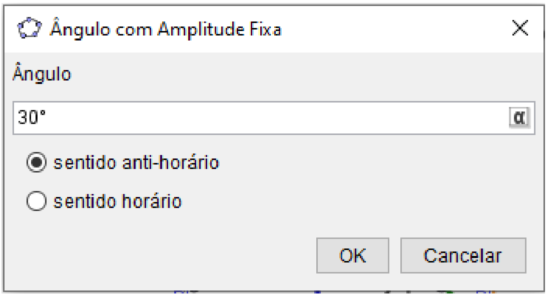
Procedimentos no Geogebra

1. Abra o Geogebra

2. Clique no menu **Arquivo/Abrir**, selecione o arquivo **"Ciclo Trigonométrico"** e clique no botão **Abrir**.

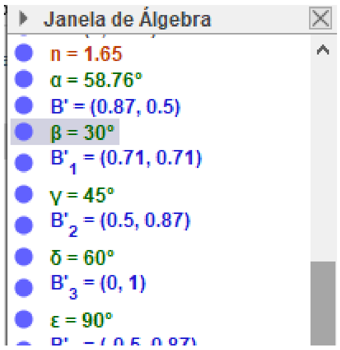
3. Na **Janela de Álgebra** clique com o botão direito do mouse no ponto B e clique em **Exibir Rótulo,** faça o mesmo com o Ponto O para voltar a exibi-los

3. Clique no ícone ***Ângulos e Medidas***  e selecione a ferramenta **Ângulo com Amplitude Fixa** 



4. Clique no Ponto B e em seguida no Ponto O, na janela de diálogo que surge digite o ângulo de 30º, selecione o sentido anti-horário e aperte no botão Ok.

5. Repita o passo 4 para os ângulos de 45º, 60º, 90º, 120º, 135º, 150º, 180º, 210º, 225º, 240º, 270º, 300º, 315º, 330º.

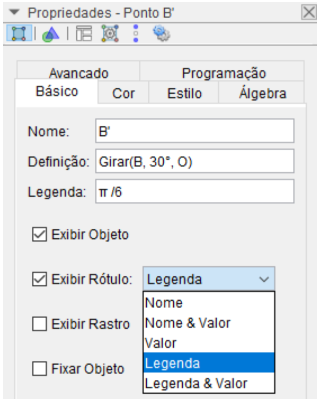


6. Na **Janela de Álgebra**, clique na bolinha azul correspondente aos ângulos criados no "passo 5" para poder ocultar todos os ângulos com exceção do ângulo alfa.

Importante

Os ângulos no Geogebra são destacados na cor verde, assim como mostra a figura acima.

7. Converta os ângulos criados nos “passos 4 e 5” para radianos, assim como foi feito no exemplo anterior.



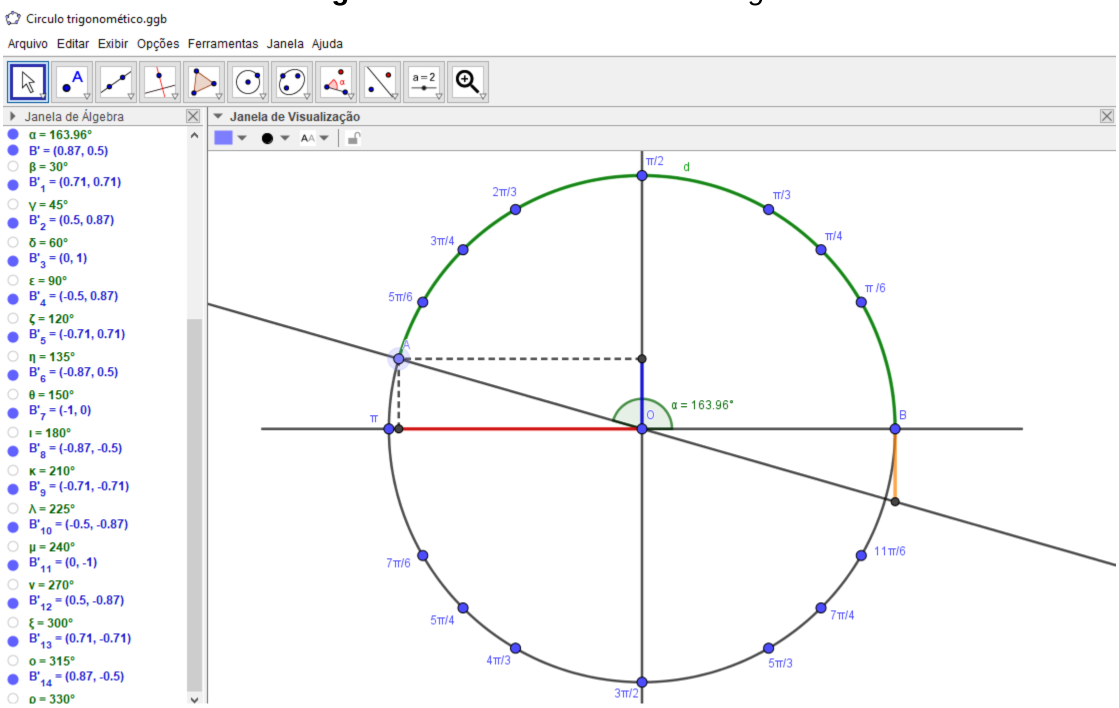
8. Clique com o botão direito do mouse em cima do Ponto B’ e clique em **Propriedades**. Em **Básico** preencha a “legenda” digitando $\pi/6$, em **Exibir Rótulo** selecione a opção Legenda.

9. Repita o “passo 8” em todos os pontos, obedecendo as informações da tabela a seguir.

B'_1	B'_2	B'_3	B'_4	B'_5	B'_6	B'_7
$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$5\pi/6$	π
B'_8	B'_9	B'_{10}	B'_{11}	B'_{12}	B'_{13}	B'_{14}
$7\pi/6$	$5\pi/4$	$4\pi/3$	$3\pi/2$	$5\pi/3$	$7\pi/4$	$11\pi/6$

10. Clique com o botão esquerdo do mouse sobre um dos rótulos alterados, segure o clique e arraste até que o rótulo esteja fora do círculo, faça isso para que ao final, todos os rótulos estejam fora do círculo, próximos ao seu ponto e visíveis.

Figura 24 – *Radianos no Ciclo Trigonométrico*



Movimente o Ponto A, observe que a medida em que ele se aproxima dos pontos que estão exibindo os ângulos em radianos, o ângulo alfa mostra os valores em graus.

11. Clique no menu **Arquivo/Gravar como**.

12. Na janela de diálogo que surge, dei o nome para o arquivo de **"Radianos no Ciclo trigonométrico"** escolha um local onde deseja guardar seu documento e clique no botão **Gravar**.

Desafio: Utilizando os exemplos e atividades realizados, identifique as medidas dos ângulos de 40°, 70º e 130°.

____

____

____

4.6.4 – GRÁFICO DAS FUNÇÕES SENO, COSSENO E TANGENTE

No **círculo trigonométrico** temos que cada número real está associado a um ponto da circunferência, pensando nisso, para representar o gráfico das funções trigonométricas no Geogebra, utilizaremos o recurso da **Janela de Visualização 2** e o Arquivo "Ciclo trigonométrico" criado anteriormente. Serão feitas modificações em alguns parâmetros necessários para a compreensão das funções trigonométricas.

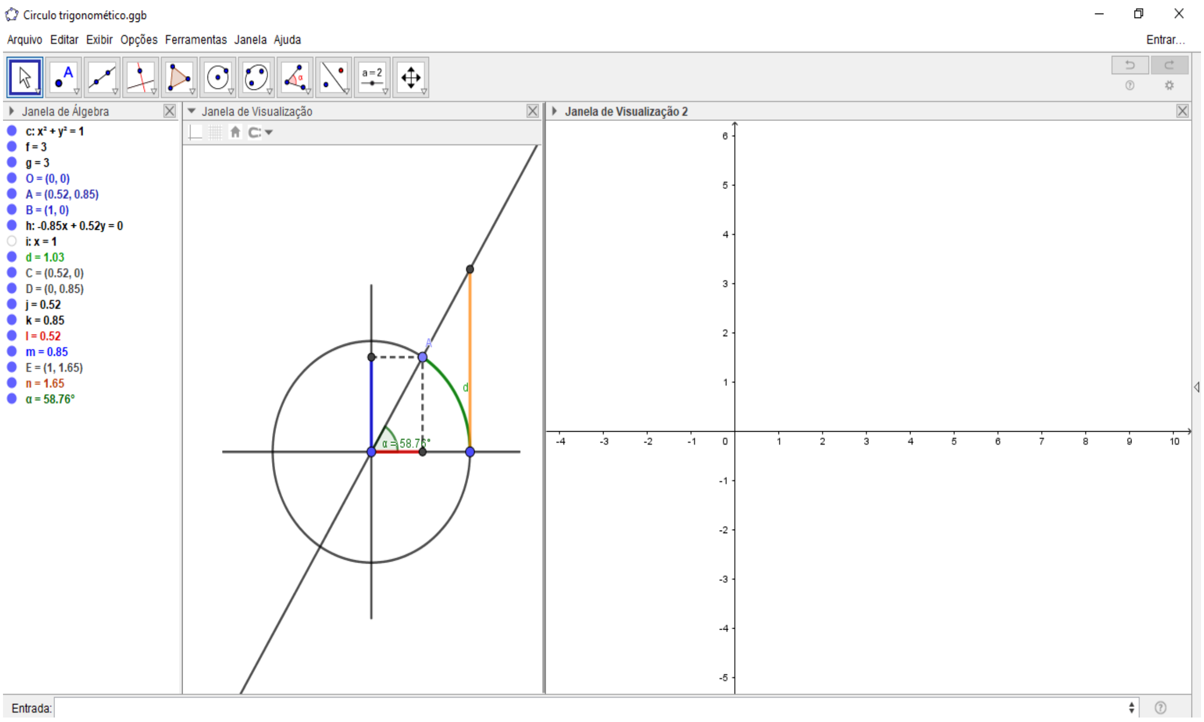
Procedimentos no Geogebra

1. Abra o Geogebra

2. Clique no menu **Arquivo/Abrir**, selecione o arquivo "Ciclo trigonométrico" e clique no botão **Abrir**.

3. Clique no menu **Exibir** depois marque a opção **Janela de Visualização 2**

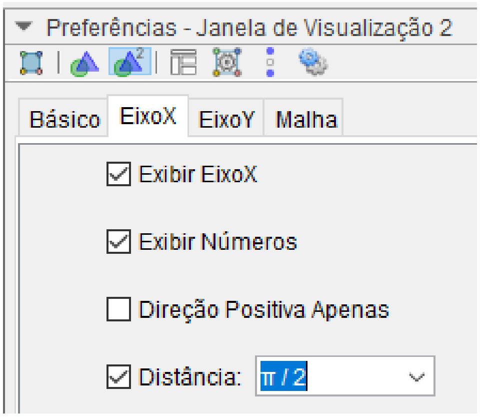
4. Clique com o botão esquerdo do mouse em cima da linha que divide as janelas de visualização, segure o clique e arraste até ficar semelhante ao formato da imagem abaixo.



5. Clique com o botão direito do mouse dentro da **Janela de Visualização 2**, selecione a opção **Janela de Visualização** e selecione a aba **Eixo X**.

6. Marque a Caixa **Distância** e selecione a distância π/2

7. No eixo Y marque a Caixa **Distância** e selecione a distância 1.



8. Feche as propriedades da **Janela de Visualização 2** e clique dentro da **Janela de Visualização 2**, depois clique no ***Campo Entrada*** e digite: **F=(d,0)** e aperte a tecla **Enter**, criando o ponto F na Janela de Visualização 2.

9. No ***Campo Entrada*** 

digite: **segmento((0,0),F)** e aperte a tecla **Enter**, criando o segmento “p”

10. No ***Campo Entrada*** 

digite: **G=(x(F),x(C))** e aperte a tecla **Enter.**

11. **No *Campo Entrada*** 

digite: **H=(x(F),y(D))** e aperte a tecla **Enter,**

12. No ***Campo Entrada*** 

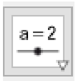
digite: **I=(x(F), y(E))** e aperte a tecla **Enter.**

13. Clique com o botão direito do mouse em cima do Ponto G e clique em **Propriedades**. Em **Básico** marque a opção **Exibir Rastro**, na aba **Cor** mude a cor do Ponto G para Vermelho.

14. Repita o passo 13, agora para o Ponto H e utilize a cor Azul.

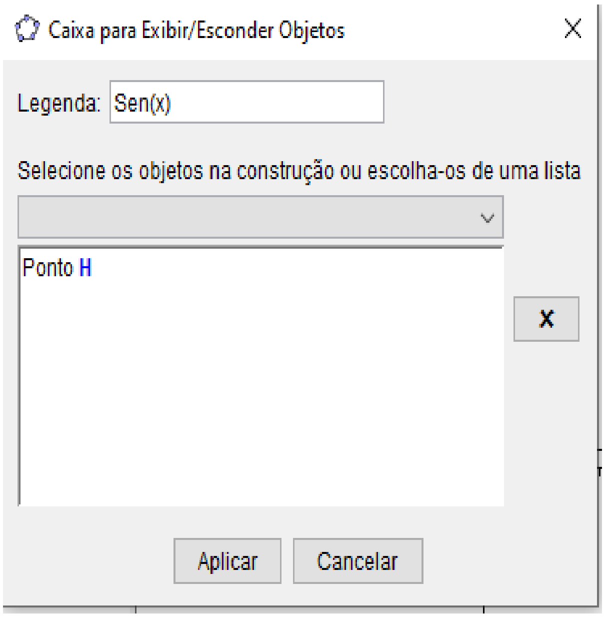
15. Repita o passo 13, agora para o Ponto H e utilize a cor Laranja.

16. Repita o passo 13, agora para o segmento “p”, mas para este aplique apenas à cor Verde, não precisa Exibir o Rastro.

17. Clique na **Janela de Visualização 1**, em seguida Clique no ícone ***Controles*** 

e selecione a ferramenta **Caixa exibir/esconder objetos** 

18. Clique na parte superior ao ciclo trigonométrico e na caixa que surge digite em Legenda; **Sen(x)**, em **Selecionar os objetos na construção** clique na seta para baixo, selecione o Ponto H e clique em **Aplicar**.



19. Clique abaixo do botão Sen(x), na caixa que surge digite em Legenda; **Cos(x)**, em **Selecionar os objetos na construção** clique na seta para baixo, selecione o Ponto G e clique em **Aplicar**.

20. Clique abaixo do botão Cos(x), na caixa que surge digite em Legenda; **Tg(x)**, em **Selecionar os objetos na construção** clique na seta para baixo, selecione o Ponto I e clique em **Aplicar**.

21. Clique com o botão direito do mouse, segure o clique e arraste os botões criados para organiza-los um em baixo do outro.

22. Deixe marcado apenas a função que irá utilizar e desmarque as outras, movimente o Ponto A e veja a função sendo criada.

Figura 25 – *Construção do gráfico da Função Seno*

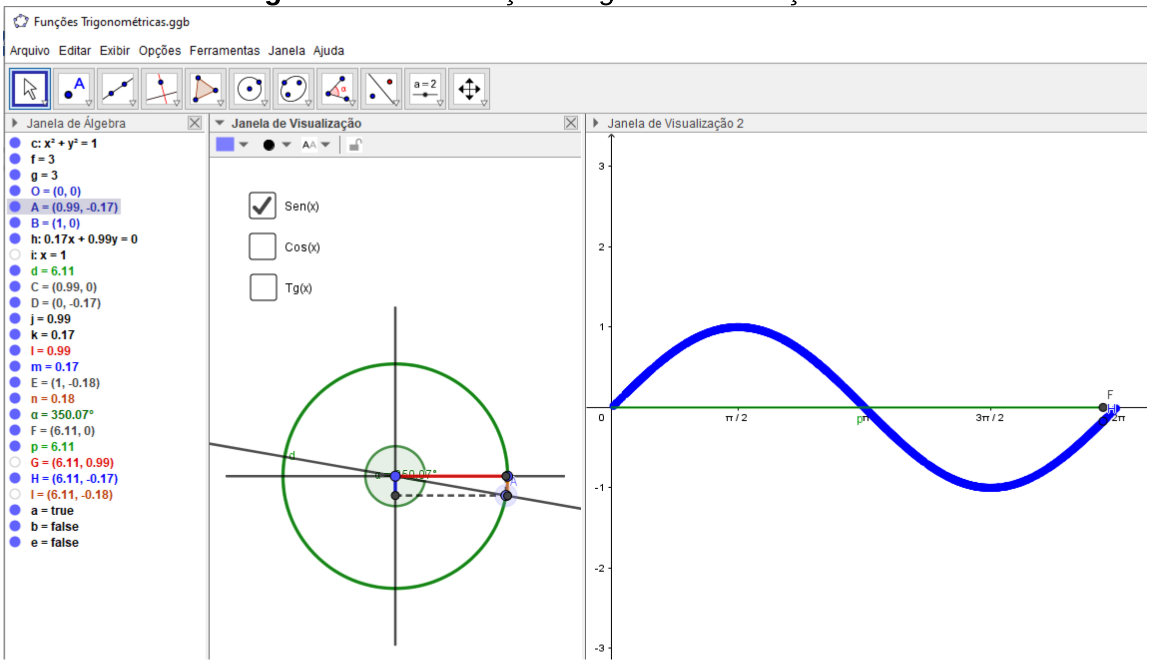


Figura 26 – *Construção do gráfico da Função Cosseno*

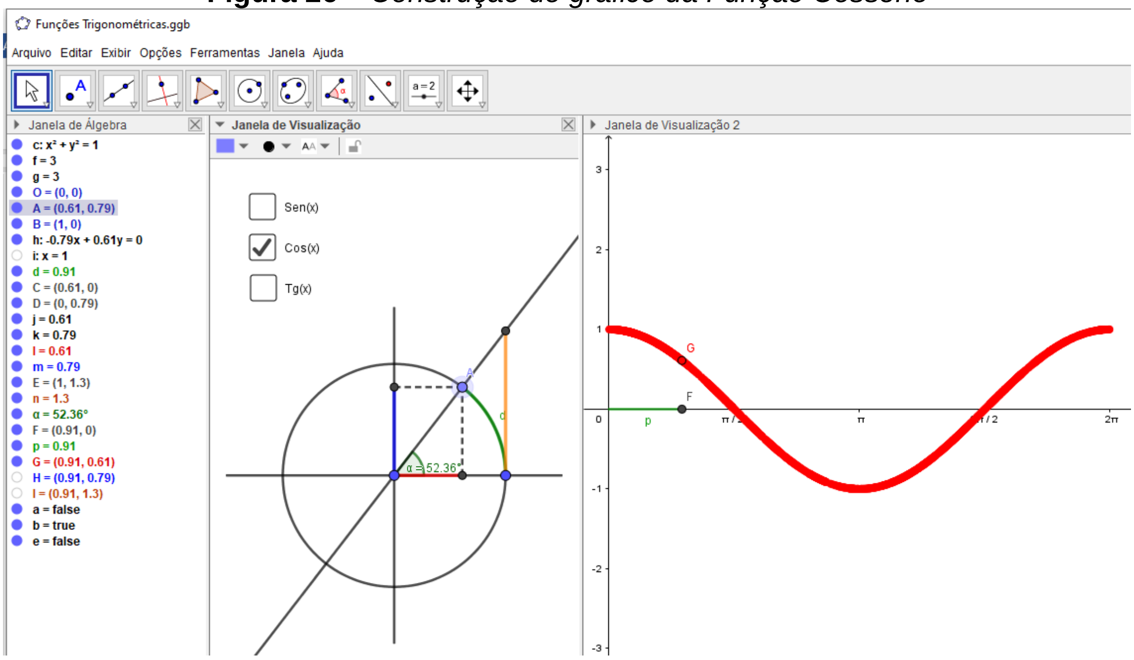
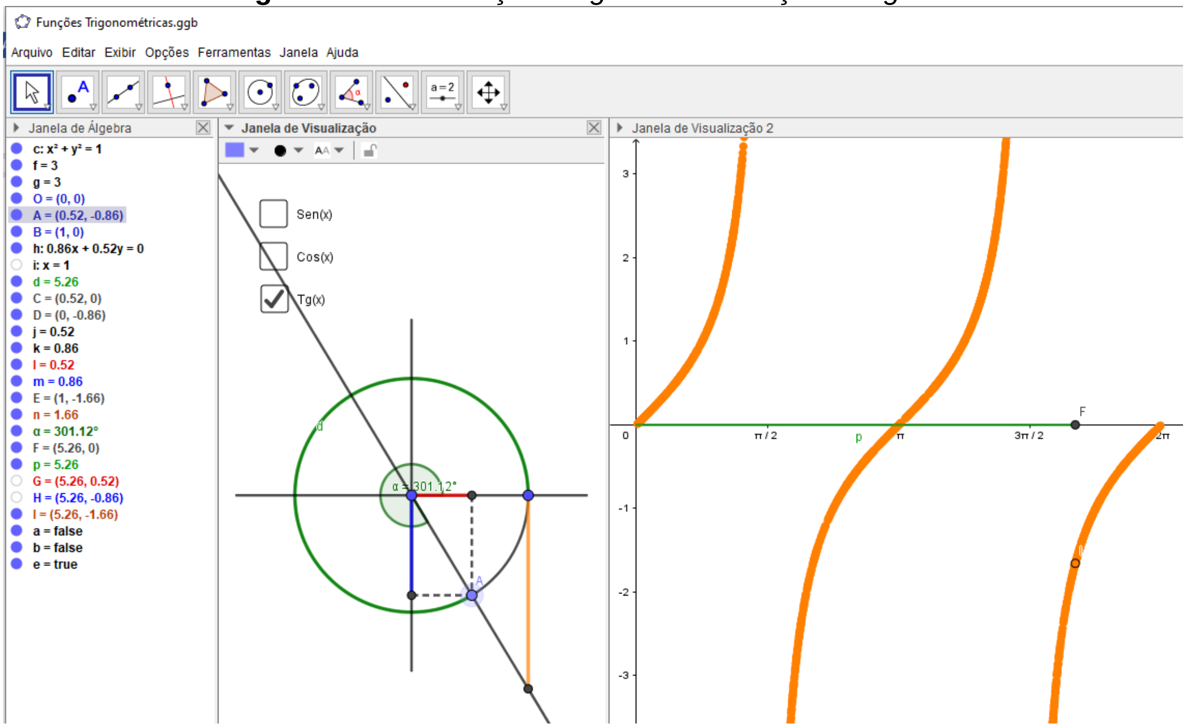


Figura 27 – *Construção do gráfico da Função Tangente*



23. Clique no menu **Arquivo/Gravar como**.

24. Na janela de diálogo que surge, dei o nome para o arquivo de **"Funções Trigonométricas"** escolha um local onde deseja guardar seu documento e clique no botão **Gravar**.

Desafio: Agora é com você caro estudante, utilizando todos os conhecimentos sobre as ferramentas do Geogebra estudadas até aqui e o conhecimento sobre funções trigonométricas, monte um tutorial para a criação dos gráficos das funções Secante, Cossecante e Cotangente, semelhante ao que construímos para Seno, Cosseno e Tangente.

5 – REFERÊNCIAS

BARROS, Osvaldo Santos. **Etnoastronomia Tembé-Tenetehara como Matriz de Abordagem (Etno)Matemática no Ensino Fundamental**. (Monografia – Orientação Iran Abreu Mendes). Belém, UFPA/NPADC, 2004.a.

BETTEGA, Maria H. S. **A educação continuada na era digital**. 2. ed São Paulo: Cortez, 2010. (Coleção questões da nossa época; v.18)

BIANCHINI, Edwaldo e PACCOLA, Herval. **Matemática** – 1. Ed. – São Paulo: Moderna, 1989.

BISHOP, Alan J. **Enculturación matemática: La educación matemática desde uma perspectiva cultural**. Barcelona, Paidós, 1999.

BORBA, Marcelo A. e PENTEADO, Mirian G. **Informática e Educação Matemática** – 5. Ed. – Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2012. p.17.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**/ Secretaria de Educação. Brasília: Disponível em: http://www.basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf

BRITO, M., LUCENA, I., SILVA, F. **Etnomatemática e a Cultura Amazônica: Um Caminho para Fazer Matemática em Sala De Aula**. In Anais do SIPEMAT. Recife, Programa de Pós-Graduação em Educação-Centro de Educação – Universidade Federal de Pernambuco, 2006, 06p.

Davis, P., e Hersh, R. (1995). **A experiência matemática.** 1.ed. Lisboa: Gradiva – 1995.

LUCENA, Isabel. **Educação Matemática, Ciência e Tradição:** Tudo no mesmo barco. Cnetro de Ciencias Sociais Aplicadas, 206f., Tese (Doutorado em Educação). Natal: UFRN/2005. p.9

FREIRE, Wendel. **Tecnologia e Educação: as mídias na prática docente**... [et. al.]. 2. Ed. Rio de Janeiro: Wak Ed,. 2011.

FRISKE, Andréia. L. [et. al.] **Minicurso de Geogebra**. Santa Maria, UFSM, 2016. p. 7 a 10.

GOUVEIA, Rosimar. **Círculo Trigonométrico.** Disponível em: https://www.todamateria.com.br/circulo-trigonometrico/ : Acessado em 08/03/2020.

GRAVINA, Maria A. **Matemática, mídias digitais e didática: tripé para formação de professores de matemática** … [et. al.] Porto Alegre: Evangraf, 2012.

MORAN, José Manuel. **Desafios que as tecnologias digitais nos trazem**, Papirus, 21ª ed, 2013.

OLIVEIRA, Naysa C. N. O. **Função.** Mundo da Educação. Disponível em: https://mundoeducacao.uol.com.br/matematica/funcao.htm: Acessado em 06/03/2020.

O Geogebra, Textos. Disponível em: https://ogeogebra.com.br/site/textos.php: Acessado em 10/03/2020.

PAIVA, Manoel. **Matemática**, volume único. 1. Ed. – São Paulo: Moderna, 2005.

SACCOL A., SCHLEMMER E. e BARBOSA J. **m-learming e u-learning – novas perspectivas da aprendizagem móvel e ubíqua**. São Paulo: Pearson, 2011.

SILVA, Karine, S. P. **A Construção de uma Sequência Didática utilizando o GeoGebra, a Teoria das Situações Didáticas e Modelagem Matemática para o Ensino das Funções Logarítmicas** (Dissertação – Orientador: Dr. Oscar Alfredo Paz La Torre) UNEB, 2016. p. 50.

SILVA, Luiz P. M.. **Círculo Trigonométrico.** Prepara Enem. Disponível em: https://www.preparaenem.com/matematica/circulo-trigonometrico.htm: Acessado em 10/03/2020.

Apresentação dos Autores

ELIZEU CANTÃO DE JESUS CALANDRINI NETO

Mestrando no Programa de Pós-Graduação em Docência em Educação em Ciência e Matemática (PPGDOC/IEMCI/UFPA). Graduado no Curso de Licenciatura Plena em Matemática da Universidade Federal do Pará- Campus Universitário de Abaetetuba (2017). Graduado em Gestão Empresarial pela Universidade da Amazônia – UNAMA (2008) Professor Colaborador do Laboratório de Ensino de Matemática da Amazônia Tocantina (LEMAT) - Universidade Federal do Pará/Campus Universitário de Abaetetuba. Pesquisador do Grupo de Estudo e Pesquisa das Práticas Etnomatemáticas na Amazônia- GETNOMA. Pesquisador do Grupo de Estudos Memória, Formação Docente e Tecnologia – GEPEME. Professor/Administrador do projeto: Cursinho Preparatório para o Enem – SUCESSO VESTIBULARES, Professor de Matemática na modalidade EJA no Instituto Profissionalizante Paradigma.

OSVALDO DOS SANTOS BARROS

Doutor em Educação, na linha Educação Matemática (defesa em 24/06/2010) no Programa de Pós-graduação em Educação do Centro de Ciências Sociais e aplicada (CCSA) da UFRN. Possui graduação em Licenciatura Plena Em Matemática pela Universidade do Estado do Pará (1998) e Mestrado em Educação em Ciências e Matemáticas pela Universidade Fedrela do Pará (2004). Atua como professor adjunto da Faculdade de Ciências Exatas e Tecnológicas, no curso de Licenciatura em Matemática, do campus de Abaetetuba da Universidade Federal do Pará - UFPA, ministrando disciplinas pedagógica relacionadas ao ensino e aprendizagem da Matemática. Atua no Programa de Pós-Graduação em Docência em Educação em Ciências e Matemáticas - Mestrado Profissional.

Prefácio