



PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE PROCESSOS
MESTRADO PROFISSIONAL

**A TÉCNICA DA TRANSFORMADA INTEGRAL GENERALIZADA
APLICADA NA SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE BLACK-SCHOLES PARA
AVALIAÇÃO DE DERIVATIVOS**

Paulo André Amaral Coutinho

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Processos - Mestrado Profissional, PPGEP/ITEC, da Universidade Federal do Pará, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Engenharia de Processos.

Orientadores: Josiel Lobato Ferreira

Emanuel Negrão Macêdo

Belém

Maio de 2021

**A TÉCNICA DA TRANSFORMADA INTEGRAL GENERALIZADA
APLICADA NA SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE BLACK-SCHOLES PARA
AVALIAÇÃO DE DERIVATIVOS**

Paulo André Amaral Coutinho

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA PROCESSOS - MESTRADO PROFISSIONAL (PPGEP/ITEC) DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM ENGENHARIA DE PROCESSOS.

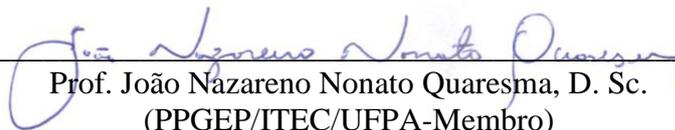
Examinada por:



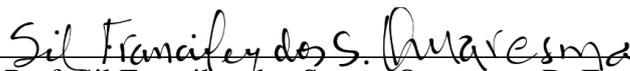
Prof. Josiel Lobato Ferreira, D. Eng.
(PPGEP/ITEC/UFPA-Orientador)



Prof. Emanuel Negrão Macêdo, D.Sc.
(PPGEP/ITEC/UFPA-Coorientador)



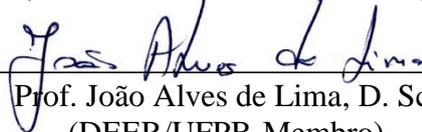
Prof. João Nazareno Nonato Quaresma, D. Sc.
(PPGEP/ITEC/UFPA-Membro)



Prof. Sil Franciley dos Santos Quaresma, D. Eng.
(PPGEP/ITEC/UFPA-Membro)



Prof. Bruno Marques Viegas, D. Eng.
(PPGEP/ITEC/UFPA-Membro)



Prof. João Alves de Lima, D. Sc.
(DEER/UFPB-Membro)

BELÉM, PA - BRASIL

MAIO DE 2021

**dos Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da UFPA**

Coutinho, Paulo André Amaral, 1992-

A técnica da transformada integral generalizado aplicada na solução da equação de Black-Scholes para avaliação de derivativos - Belém / Paulo André Amaral Coutinho - 2021.

Orientadores: Josiel Lobato Ferreira
Emanuel Negrão Macêdo

Dissertação (Mestrado Profissional) - Universidade Federal do Pará. Instituto de Tecnologia. Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Processos, 2021.

1. Engenharia Econômica 2. Finanças 3. Métodos I. Título

CDD 660.20285

É com muito carinho que dedico este trabalho em primeiro lugar a Deus, minha fortaleza, à minha mãe, meu pai (in memoriam) e a meu irmão e a minha esposa que me ajudam na dura rotina.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por conta da força e perseverança que tive para encarar múltiplos desafios os quais passei, mais especificamente durante meus últimos 5 anos.

Ao meu pai (*in memoriam*) Laércio Gomes Coutinho, o qual sempre com muita alegria me apoiou em minha vida acadêmica, sempre me incentivando e investindo em minha formação nunca poderei recompensar o que fez, além de seu exemplo de honestidade e trabalho que foi dado.

À minha querida mãe, Wanderléia Amaral Coutinho, por sua dedicação desde minha infância até os dias de hoje, com seu zelo inquestionável e horas intermináveis de oração.

Ao meu querido irmão Filipe Matheus Amaral Coutinho, por sua amizade e companheirismo que tivemos, diariamente com sua dedicação de forma sempre prestativa e disposta a me ajudar da melhor forma possível.

À minha querida esposa Nayara Silveira da Silva que tem me auxiliado com carinho e compreensão e sua alegria, todos os dias ao longo de aproximadamente 5 anos.

À minha querida avó Vitória Ferreira Amaral por seu apoio e fé que sempre demonstrou por meio de suas orações diárias.

À minha tia Joana por sempre ser um exemplo de profissionalismo, apesar de atuar em outra área sempre me foi um exemplo a ser seguido.

A todos meus familiares e amigos, que contribuíram e me incentivaram direta e indiretamente, me trazendo momentos de alegria nos momentos de cansaço.

Aos meus competentes orientadores Josiel Lobato Ferreira e Emanuel Negrão Macedo os quais me auxiliaram com paciência desde minha graduação, me abrindo as portas para iniciar um desafio inédito para mim que foi trabalhar com programação.

Agradeço a todos que me deram uma parcela de contribuição em minha formação para a concretização do desafio, de realizar este trabalho.

Resumo da Dissertação apresentada ao PPGEP/UFPA como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Engenharia de Processos (M. Eng.)

**A TÉCNICA DA TRANSFORMADA INTEGRAL GENERALIZADA
APLICADA NA SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE BLACK-SCHOLES PARA
AVALIAÇÃO DE DERIVATIVOS**

Paulo André Amaral Coutinho

Abril/2021

Orientadores: Josiel Lobato Ferreira

Emanuel Negrão Macêdo

Área de Concentração: Engenharia de Processos

A Técnica da Transformada Integral Generalizada (GITT), um método analítico-numérico baseado na expansão de autofunções, foi utilizada na solução da equação de Black-Scholes, a qual é largamente aplicada na área de finanças, mais especificamente na valoração de opções de compra e venda de ativos. O método da Transformada Integral Generalizada (GITT) foi aplicado, na referida equação, comparando os resultados obtidos por um algoritmo implementado computacionalmente nos programas *Mathematica* e *FORTTRAN* por meio da rotina *DIVPAG* da biblioteca IMSL, com outros resultados apresentados na literatura, gerados por meio de técnicas numéricas, como o Método de Diferenças Finitas. Neste sentido, avaliou-se a viabilidade da aplicação da técnica. O desenvolvimento do algoritmo foi possível utilizando-se algumas mudanças de variáveis na equação de Black-Scholes e utilizando-se um problema de autovalor adequado na busca pelas soluções. Os resultados obtidos pela GITT além de comparados aos trabalhos presentes na literatura, foram exibidos em termos do valor do ativo por meio de opções de compra e venda variando entre condições americana e europeia, as quais distinguem-se, no que se refere ao momento de exercício da opção, para diferentes valores de volatilidades e apresentaram boa concordância com os disponíveis na literatura, fundamentando a viabilidade da utilização da GITT para obtenção de soluções para o referido problema.

Abstract of Dissertation presented to PPGE/UFPA as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master in Process Engineering (M. Eng.)

**THE GENERALIZED INTEGRAL TRANSFORMED TECHNIQUE APPLIED
TO THE SOLUTION OF THE BLACK-SCHOLES EQUATION FOR
DERIVATIVE ASSESSMENT**

Paulo André Amaral Coutinho

April/2021

Advisors: Josiel Lobato Ferreira

Emanuel Negrão Macêdo

Research Area: Process Engineering

The Generalized Integral Transform Technique (GITT), analytic-numerical method based on orthogonal eigenfunctions expansions, was used to solve the Black Scholes equation (BSE) that is frequently applied in financial areas, more specifically in valuation of call or put options. The Generalized Integral Transform Method was used in (BSE) accomplish the comparison between results obtained by algorithm implemented computationally in the programs: Mathematica and Fortran by DIVPAG in the library IMSL with other results presented in researches generated through of numerical techniques like the finite difference method. In this sense the viability of the technique application was be evaluated. The development of the algorithm was possible doing some changes in variables in the (BSE) and using one suitable eigenvalue problems to search solutions. The results obtained by GITT was compared to papers presents in the current literature, and displayed in terms of the asset value through of call or put options varying between american and european conditions that distinguish themselves in relation of the exercise moment in the option, to different values of volatility, presenting good agreement with availables papers, substantiating the viability of the GITT use to get the solutions to BSE problem.

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO.....	1
1.1 - MOTIVAÇÃO.....	1
1.2 - OBJETIVOS.....	1
1.2.1 - Objetivo geral.....	1
1.2.2 - Objetivos específicos.....	2
1.3 - CONTRIBUIÇÕES DA DISSERTAÇÃO.....	2
1.4 - ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO.....	2
CAPÍTULO 2 - REVISÃO DA LITERATURA.....	3
2.1 - INTRODUÇÃO.....	3
2.2 - PRINCÍPIOS DO MERCADO FINANCEIRO.....	3
2.1.1 - Arbitragem.....	3
2.2.2 - Não-Arbitragem.....	4
2.2.3 - Ações.....	4
2.2.4 - Derivativo.....	5
2.2.5 - Volatilidade.....	5
2.2.5.1 - Volatilidade implícita.....	5
2.2.6 - Ativo.....	6
2.2.7 - Custo de transação.....	6
2.2.8 - Mercado perfeito.....	6
2.3 - EQUAÇÃO DE BLACK-SCHOLES.....	6
2.3.1 - Obtenção da EBS.....	8
2.4 - CONDIÇÕES DE CONTORNO OU FRONTEIRA PARA EQUAÇÃO DE BLACK-SCHOLES.....	10
2.4.1 - Mercado de derivativos.....	10
2.4.2 - Opções.....	11
2.4.3 - Condição Europeia.....	12
2.4.3.1 - Opção de compra.....	12
2.4.3.2 - Opção de venda.....	14
2.4.4 - Condição Americana.....	14
2.4.4.1 - Opção de compra.....	15
2.4.4.2 - Opção de venda.....	15

2.5 - METODOLOGIA DE SOLUÇÃO VIA TRANSFORMADA INTEGRAL GENERALIZADA (GITT).....	17
2.5.1 - Contexto histórico sobre transformadas integrais.....	17
2.5.2 - Transformada integral generalizada.....	17
CAPÍTULO 3 - METODOLOGIA DE SOLUÇÃO.....	20
3.1 - ADIMENSIONALIZAÇÃO.....	20
3.2 - PROBLEMA PARTICULAR.....	21
3.3 - PROBLEMA HOMOGÊNEO.....	22
3.4 - APLICAÇÃO DA TÉCNICA DA TRANSFORMADA INTEGRAL GENERALIZADA (GITT)	23
3.4.1 - Determinação do problema auxiliar.....	23
3.4.2 - Determinação do par transformada-inversa.....	24
3.4.3 - Transformação integral da EDP.....	24
CAPÍTULO 4 - RESULTADOS E DISCUSSÃO.....	27
4.1 - ANÁLISES E COMPARAÇÃO DOS RESULTADOS OBTIDOS.....	27
4.1.1 - Análise de convergência.....	28
4.1.2 - Verificação do código computacional.....	29
4.1.3 - Efeito da variação da volatilidade e comparação com a literatura.....	30
4.1.4 - Análise de erros.....	35
CAPÍTULO 5 - CONCLUSÕES E SUGESTÕES.....	40
5.1 - CONCLUSÕES.....	40
5.2 - SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS.....	40
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	41
ANEXO I - FÓRMULA (LEMA) DE ITÔ.....	46

LISTA DE FIGURAS

Figura 4.1	Comparação da solução em $t=0$ para o valor da opção (V) pela GITT com a solução obtida no Mathematica. Condições: $\sigma = 20\%$, $r=0,1$, $K=40$, $T=1$ e $S_{\infty}=80$	30
Figura 4.2	Solução em $t=0$ para o valor da opção de compra europeia (V). Condições: $\sigma = 5\%$, $r=0,1$, $K=40$, $T=1$ e $S_{\infty}=80$	31
Figura 4.3	Solução em $t=0$ para o valor da opção de compra europeia (V). Condições: $\sigma = 20\%$, $r = 0,1$, $K = 40$, $T = 1$ e $S_{\infty} = 80$	31
Figura 4.4	Solução em $t=0$ para o valor da opção de compra europeia (V). Condições: $\sigma = 70\%$, $r = 0,1$, $K = 40$, $T = 1$ e $S_{\infty} = 80$	32
Figura 4.5	Solução em $t=0$ para o valor da opção de compra europeia (V). Condições: $r = 0,1$, $K = 40$, $T = 1$ e $S_{\infty} = 80$	33
Figura 4.6	Solução em $t=0$ para o valor da opção de venda europeia (V). Condições: $\sigma = 5\%$, $r=0,1$, $K=40$, $T=1$ e $S_{\infty}=80$	33
Figura 4.7	Solução em $t=0$ para o valor da opção de venda europeia (V). Condições: $\sigma = 20\%$, $r=0,1$, $K=40$, $T=1$ e $S_{\infty}=80$	34
Figura 4.8	Solução em $t=0$ para o valor da opção de venda europeia (V). Condições: $\sigma = 70\%$, $r=0,1$, $K=40$, $T=1$ e $S_{\infty}=80$	34
Figura 4.9	Solução em $t=0$ para o valor da opção de venda europeia (V). Condições: $r=0,1$, $K = 40$, $T = 1$ e $S_{\infty} = 80$	35
Figura 4.10	Análise de erros para o valor da opção de compra europeia (V). Condições: $\sigma = 5\%$, $r=0,1$, $K=40$, $T=1$ e $S_{\infty}=80$	36
Figura 4.11	Análise de erros para o valor da opção de compra europeia (V). Condições: $\sigma = 20\%$, $r=0,1$, $K=40$, $T=1$ e $S_{\infty}=80$	36
Figura 4.12	Análise de erros para o valor da opção de compra europeia (V). Condições: $\sigma = 70\%$, $r=0,1$, $K=40$, $T=1$ e $S_{\infty}=80$	37
Figura 4.13	Análise de erros para o valor da opção de venda europeia (V). Condições: $\sigma = 5\%$, $r=0,1$, $K=40$, $T=1$ e $S_{\infty}=80$	38
Figura 4.14	Análise de erros para o valor da opção de venda europeia (V). Condições: $\sigma = 20\%$, $r=0,1$, $K=40$, $T=1$ e $S_{\infty}=80$	38
Figura 4.15	Análise de erros para o valor da opção de venda europeia (V). Condições: $\sigma = 70\%$, $r=0,1$, $K=40$, $T=1$ e $S_{\infty}=80$	39

LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1	Resumo das condições de contornos para as opções de venda e compra americana e europeia.....	16
Tabela 3.1	Condições inicial e de contornos para as opções de venda e compra americana e europeia após adimensionalização.....	21
Tabela 4.1	Convergência para o valor da opção (V). Condições: $\sigma=5\%$, $r=0,1$, $K=40$, $T=1$ e $S_{\infty}=80$	28
Tabela 4.2	Convergência para o valor da opção (V). Condições: $\sigma=20\%$, $r=0,1$, $K=40$, $T=1$ e $S_{\infty}=80$	28
Tabela 4.3	Convergência para o valor da opção (V). Condições: $\sigma=70\%$, $r=0,1$, $K=40$, $T=1$ e $S_{\infty}=80$	29

NOMENCLATURA

BS	BLACK-SCHOLES
EBS	EQUAÇÃO DE BLACK-SCHOLES
OC	OPÇÃO DE COMPRA
OP	OPÇÕES DE PREÇO
OV	OPÇÃO DE VENDA

Símbolos gregos:

σ	VOLATILIDADE
K	PREÇO DO EXERCÍCIO
S	VALOR DO ATIVO SUBJACENTE
T	DATA DA MATURIDADE
V	VALOR DO DERIVATIVO

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

1.1 - MOTIVAÇÃO

A teoria das opções reais (OR) é uma metodologia amplamente aceita para a análise de investimentos sob condições de incerteza. Modelos de opções reais vêm sendo desenvolvidos frequentemente desde meados dos anos 1980, como por exemplo, trabalhos do Laboratório de Energia do MIT no início dos anos 1980, cujo artigo publicado mais conhecido é o de PADDOCK *et al.* (1988).

Embora existam diversos trabalhos de opções reais na literatura ‘acadêmica como por exemplo: FILHO (2003) e MEIRELLES (2004), há uma carência de metodologias analítico-numéricas, como por exemplo a Técnica da Transformada Integral Generalizada (GITT), para a avaliação do valor de ativos financeiros.

O desenvolvimento de metodologias e modelos de opções representa uma dificuldade inerente, pois é necessário conhecer efetivamente e com razoável profundidade não apenas a teoria de opções de preços (OP) como outras teorias não menos complexas tais como a mudança de variável e solução de equações acopladas.

Esse desafio, o qual essa dissertação procura desenvolver, requer além de uma considerável revisão bibliográfica para avaliar os conceitos e modelos das teorias, discernimento e criatividade para combinar essas teorias de forma adequada para solucionar problemas práticos complexos e relevantes.

1.2 - OBJETIVOS

1.2.1 - Objetivo geral

O presente trabalho tem por objetivo obter a solução para a equação de Black-Scholes para opções de preço (Americana e Europeia) por meio da Técnica Transformada Integral Generalizada (GITT).

1.2.2 - Objetivos específicos

- Analisar a viabilidade da aplicação da GITT na solução da equação de Black-Scholes.
- Verificar o código computacional comparando os resultados obtidos pela GITT com o àqueles obtidos com o software Mathematica.
- Comparar os valores gerados a partir da solução proposta com resultados disponíveis na literatura.

1.3 - CONTRIBUIÇÕES DA DISSERTAÇÃO

O presente trabalho irá, além de contribuir no aumento da abrangência de possibilidade da utilização da GITT na solução de problemas não-homogêneos, a extensão da aplicação da GITT a mais um diferente campo, o econômico, representado pelas equações de Black-Scholes. Apresentar um meio de valoração de derivativos diferente das previsões baseadas em fluxos de caixa futuros, método frequentemente utilizado.

1.4 - ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

O capítulo 1 apresenta a motivação, os objetivos, as contribuições da dissertação e a forma de organização do trabalho.

O capítulo 2 apresenta uma revisão da literatura sobre opções, especificamente de Compra e de Venda e sobre a aplicação destas na equação de Black-Scholes.

O capítulo 3 apresenta os modelos matemáticos da equação e as estratégias utilizadas para sua resolução.

No capítulo 4, apresentam-se os resultados obtidos pela GITT e a sua discussão.

Por fim, o capítulo 5 apresenta a conclusão acerca do trabalho apresentado além de sugestões para desenvolvimento de novos trabalhos com a mesma temática.

CAPÍTULO 2

REVISÃO DA LITERATURA

2.1 - INTRODUÇÃO

A engenharia financeira frequentemente atua na confecção de projetos, desenvolvimento e implementação de processos e instrumentos financeiros inovadores e a elaboração de soluções eficazes para problemas na área financeira.

A teoria financeira é um dos campos de pesquisa mais ativos na matemática aplicada moderna (BROYLE, 2013). Durante as últimas duas décadas, a área de finanças computacionais tem atraído muitos matemáticos, físicos e engenheiros para trabalhar com uma variedade de questões teóricas relacionadas à valoração de ativos (FILHO, 2003).

A avaliação de um ativo consiste na determinação de seu preço de mercado razoável, na antecipação de quanto seria este preço em diversos tempos futuros e como ele se modifica de acordo com outros preços. A avaliação de ativos apresenta dificuldades em função de principalmente dois motivos: a função de pagamento do ativo ou de seu derivativo poder variar estocasticamente de forma complexa e o ambiente de mercado competitivo ser dinâmico (SANTOS, 2008).

A metodologia utilizada para geração e apreciação de resultados foi a Técnica da Transformada Integral Generalizada (GITT) com o auxílio computacional de aplicações e rotinas específicas. Os resultados obtidos foram comparados a outros obtidos por outras técnicas.

2.2 - PRINCÍPIOS DO MERCADO FINANCEIRO

A seguir serão apresentados alguns conceitos importantes a respeito do mercado financeiro para melhor compressão deste trabalho:

2.2.1 - Arbitragem

De acordo com BONOTO (2008), arbitragem trata-se da aquisição e venda simultânea de um valor imobiliário com a finalidade de obtenção de lucro sob a condição de não haver risco ou lucro garantido sem incertezas na transação com uma ou mais

operações de mercado. Arbitragem pode ser representada como a obtenção de lucro advinda de variações de preço quando o mesmo título, moeda ou produto é transacionado em dois ou mais mercados.

Em um mercado em que não se verifica arbitragem, não há a oportunidade de lucro certo. Um exemplo de oportunidade de arbitragem seria: uma estratégia de negociação auto confiável a qual tivesse início com valor de zero e finalizasse (numa data posterior), com um valor positivo (BAXTER, 1998).

2.2.2 - Não-Arbitragem

Um dos conceitos que fundamenta a teoria da matemática financeira é o de não poder haver hipóteses de arbitragem. Hipótese de arbitragem é a possibilidade de obter lucro nas diferenças de preços dos mercados. Ainda que, na prática, este tipo de hipóteses seja possível, estas não duram tempo suficiente antes que os próprios mercados evoluam de modo a eliminá-las, tornando-as desprezáveis quando o mercado é modelado. Para não haver oportunidade de arbitragem dois produtos com iguais propriedades têm de ter o mesmo preço. Argumentos de não-arbitragem são utilizados para deduzir o preço justo para entrega futura de um contrato no prazo seguro (CRACK, 2009).

2.2.3 - Ações

Refere-se ao valor emitido pelas organizações representando parte do capital. Trata-se de um registro o qual indica que certa fração de determinada empresa é de seu proprietário, resulta da divisão do capital social em partes equânimes representando desta maneira a menor parcela do capital social de determinada companhia. Se as ações forem geradas por companhias de capital aberto ou que procedam de maneira semelhante, são comercializadas nos mercados de balcão ou nas bolsas de valores (*Bovespa, Tokyo Stock Exchange, etc*), de forma que o investidor se torna sócio da empresa que possui as ações e os poderes que lhes são de direito são delimitados pela forma e quantidade da ação adquirida (GIBSON, 2008).

2.2.4 - Derivativo

O termo derivativo descreve um novo tipo de ativo em que o valor surge de mercados usuais. Ou seja, os mercados seculares de ações, títulos e mercadorias fizeram surgir uma nova classe de ativos as quais sempre dependem dos mercados que lhes dão origem. Os mais básicos são opções e futuros (WARD, 2004).

Em resumo, tratam-se de ativos financeiros em que os valores e suas especificidades de negociação estão associados aos ativos os quais lhe deram origem denominados ativos originários, O preço do ativo ser derivado de um outro ativo o qual chama-se ativo-base é que origina o conceito: “derivativo”.

2.2.5 - Volatilidade

Trata-se de um indicador comumente representado pela letra σ , é um indicador que afere o risco de um investimento, de maneira que, quanto mais elevado for o percentual de volatilidade, maior será o risco quando comparado aos outros fundos do segmento a ser avaliado. Para o cálculo do indicador, deve-se considerar a dispersão da rentabilidade diária, a maior ou a menor, em relação à média da rentabilidade de certo período.

Outra função da rentabilidade é verificar o grau médio da variação da cotação de um título ou fundo de investimento em um determinado período. Um exemplo seria um investimento de alta volatilidade, o qual apresentaria uma acentuada variabilidade no valor de sua cotação (WILEY, 2015).

2.2.5.1 - Volatilidade implícita

A volatilidade implícita trata-se da expectativa do mercado interno ao valor extrínseco das opções e, pois, não tem nenhuma relação com a volatilidade histórica da ação. De forma mais simples, a volatilidade implícita é a previsão do mercado para o valor da volatilidade no futuro, desta forma utiliza-se o próprio mercado de opções para estimar a volatilidade futura (ASSUMPCÃO, 2009).

De acordo com WILEY (2015), a volatilidade implícita será um reflexo da demanda por opções, e diversas vezes demonstra uma discrepância com a volatilidade calculada.

2.2.6 - Ativo

Segundo PINDYCK e RUBINFELD (2006), ativo é algo que pode gerar um fluxo monetário para o proprietário, com valor comercial ou de troca constante para sociedade, pessoa física ou determinada instituição, como exemplos verificam-se: imóveis, dinheiro, ações, etc.

2.2.7 - Custo de transação

São custos de compra e venda de um valor imobiliário, tratando-se principalmente da margem do investidor, comissão de corretagem ou de taxas, como por exemplo: taxa cobrada pela corretora, ou um banco, para negociar os títulos do governo. Entre os custos, também são incluídos tributos diretos, tais quais, qualquer imposto cobrado pelo governo além de outros impostos diretos (CRACK, 2009).

2.2.8 - Mercado perfeito

Trata-se de um mercado o qual não há custos de transação ou impostos; todos os contratos são cumpridos; existe a possibilidade de compra e venda de qualquer quantidade de valor imobiliário, além de venda a descoberto ilimitada; as transações ocorrem de forma regular e na modalidade à vista; não parceladas (HISSA, 2007).

2.3 - EQUAÇÃO DE BLACK-SCHOLES

Diversos problemas de programação financeira envolvem equações não-lineares com condições de contorno não-lineares ou que variam de acordo com o tempo. Em função de sua complexidade, a equação de Black-Scholes possui solução analítica somente em algumas condições de contorno (WILMOTT, 1998).

Embora existam soluções analíticas disponíveis, existem várias formas clássicas e modificadas da conhecida equação de Black-Scholes que requerem soluções numéricas rápidas e precisas (SANTOS, 2008).

Seguindo os trabalhos dos ganhadores do prêmio Nobel de 1997 (F. Black e M. Scholes) inicia-se o desenvolvimento do modelo conhecido por equação de Black-

Scholes (EBS) para valoração de opções europeias a partir do uso da integral de Lebesgue e o Cálculo do lema de Itô, modelando-se, dessa forma, os processos envolvidos.

A EBS ganhou notoriedade por se tratar de um modelo mais efetivo de obter *opções de preço*, tratando-se de um modelo amplamente aceito para avaliação do valor temporal de uma opção $V(S,t)$, tendo por fundamento um modelo estocástico para o comportamento do preço S do ativo subjacente, cuja solução leva ao preço corrente $V(S,\tau)$ de uma opção que expira no tempo final T (MEYER, 1998).

De acordo com BONOTO (2008), a abrangência da equação é ampla, dentro das considerações mais importantes as quais citam-se: transações em tempo contínuo e dinâmica de preço contínua em valores de ativos, sendo que quando esta consideração é respeitada, o valor gerado pela EBS pode ser justificado como uma aproximação assintótica para o preço arbitrado sob uma transação discreta, quando o intervalo da transação tende a zero.

Para obtenção do modelo de Black-Scholes (BS), são respeitadas as seguintes condições:

(1) Preço S da ação segue um processo de Wiener generalizado, seguindo um processo estocástico em tempo contínuo;

$$dS = \mu S dt + \sigma S dZ \quad (2.1)$$

Em que:

dZ é o movimento Browniano em relação ao ativo S ,

μ é a tendência e

σ é a volatilidade (constante) de S .

(2) A venda de ação a descoberto (*short-selling*), isto é, venda de um instrumento financeiro que o especulador não possui, (DOWNES, 1993) é possível;

(3) Não existem custos de transação;

(4) Não há pagamento de dividendos durante o período de ação do derivativo;

(5) Não existem oportunidades de arbitragem sem risco;

(6) A negociação das ações é feita de modo contínuo;

(7) A taxa de risco r é constante para todos os vencimentos.

De acordo com as hipóteses anteriores, a equação de Black-Scholes toma então a seguinte forma:

$$\frac{\partial V(S, t)}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V(S, t)}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV(S, t) = 0 \quad (2.2)$$

Em que:

$V(S, t)$ é uma função do valor S do ativo subjacente e do instante t definida no intervalo $(0, +\infty) \times [0, +\infty)$ que representa o valor de uma opção.

O símbolo σ designa a volatilidade, a qual se define como um indicador que afere o risco de um determinado investimento, e

r a taxa de juros livre de risco, respectivamente.

Com os tipos de opções consideradas, a equação pode sofrer algumas modificações, sendo completada por equações de tipo finito, denominadas condições de contorno.

2.3.1 - Obtenção da EBS

Considere-se uma função $f = f(S, t)$ para representação de uma opção de compra (OC) europeia no tempo t para um determinado valor de um ativo S . Para obter-se um modelo sem arbitragem, o desenvolvimento da EBS é realizado a partir da construção de uma carteira (portifólio) contendo uma opção a qual pode ser de compra e de venda e uma determinada quantidade $\frac{\partial f}{\partial S}$ de ações.

-1: opção

$\frac{\partial f}{\partial S}$: ações.

Então o valor da carteira será dado por:

$$\Pi = -f + \frac{\partial f}{\partial S} S \quad (2.3)$$

A variação do valor na carteira entre o intervalo de tempo $t+dt$ pode ser descrita como:

$$\Delta \Pi = -\Delta f + \frac{\partial f}{\partial S} \Delta S \quad (2.4)$$

Em que S está de acordo com a diferencial estocástica a seguir:

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz \quad (2.5)$$

Em que:

μ é a taxa de retorno esperado e operador dz é o padrão Browniano do movimento.

Aplicando-se o Lema de Itô (que é uma série de Taylor e será melhor detalhado no Anexo I) na Eq. (2.5) obtém-se:

$$df = \left(\frac{\partial V}{\partial S} \mu S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) dt + \frac{\partial f}{\partial S} \sigma S dz \quad (2.6)$$

As versões, em diferenças, das Eqs. (2.5) e (2.6) tornam-se:

$$\Delta S = \mu S \Delta t + \sigma S \Delta z \quad (2.7)$$

$$\Delta f = \left(\frac{\partial V}{\partial S} \mu S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) \Delta t + \frac{\partial f}{\partial S} \sigma S \Delta z \quad (2.8)$$

Substituindo-se as Eqs. (2.7) e (2.8) na Eq. (2.4) tem-se:

$$\Delta \Pi = - \left(\frac{\partial V}{\partial S} \mu S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) \Delta t - \frac{\partial f}{\partial S} \sigma S \Delta z + \frac{\partial f}{\partial S} [\mu S \Delta t + \sigma S \Delta z] \quad (2.9)$$

Simplificando-se:

$$\Delta \Pi = - \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) \Delta t \quad (2.10)$$

Sabendo-se que a Eq. (2.10) não contém o termo Δz , o portfólio é livre de riscos durante o intervalo de tempo Δt . Desta forma, a carteira não contém riscos dentro das condições do modelo. Logo, por meio do fundamento da não-arbitragem, a variação do

$$\prod = r \prod \Delta t \quad (2.11)$$

Substituindo-se as Eqs. (2.3) e (2.10) na equação supracitada:

$$-\left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2\right) \Delta t = r \left(-f + \frac{\partial f}{\partial S}\right) \Delta t \quad (2.12)$$

Manipulando-se, resulta em:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + rS \frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 = rf \quad (2.13)$$

A Eq. (2.13) é exatamente a Eq. (2.2), a qual possui várias soluções variando de acordo com o tipo de derivativo a ser mensurado.

2.4 - CONDIÇÕES DE CONTORNO PARA EQUAÇÃO DE BLACK-SCHOLES

Os derivados atualmente são utilizados em larga escala nos mercados financeiros e o seu crescimento prolongado ocorre em função da necessidade de evitar o risco dos investidores. Derivados tratam-se de contratos que dependem de um ativo financeiro qualquer e podem ser utilizados para fazer cobertura de risco, especulação e arbitragem. O valor de um ativo financeiro é altamente variável e investir sem as devidas precauções neste é uma atitude de grande risco (MARSHALL e BANSAL, 1993).

Derivados se originam como uma forma de investir em ativos de um modo que minimiza os riscos, havendo alta variedade de contratos que se podem fazer mediante as ambições de cada um. Embora existam mercados de derivados, onde o preço destes é estabelecido e divulgado constantemente, não há um meio de prever qual o seu valor no futuro. Na verdade, como estes dependem do valor do ativo sobre o qual são realizados, seu valor tem uma grande imprevisibilidade, quase aleatória, e por isso difícil de quantificar. Surge assim a necessidade de criar modelos matemáticos a partir dos quais se possa estimar o seu valor. Os derivados abordados neste trabalho são os contratos de opções (FERNANDES, 2009).

2.4.1 - Mercado de derivativos

subjacente e seu principal objetivo como instrumento financeiro é fazer o câmbio do risco entre agentes econômicos atuantes no setor produtivo da economia, dando possibilidade de gerar valor para empresas que utilizam esses instrumentos, contribuindo com o crescimento econômico (BROYLES, 2013).

Os derivativos foram os primeiros instrumentos desenvolvidos para garantir o suprimento de mercadorias e facilitar o comércio, além de garantir aos agricultores relativa proteção contra falhas nos períodos de colheita. Com o tempo, os derivativos apresentaram a tendência de servir não só como uma fonte de financiamento, mas também a busca de lucros rápidos. Esta aplicação também mostra que os derivativos foram regulados desde o início de sua utilização (AMARAL, 2003).

A história dos derivativos fornece evidências de que os primeiros mercados de derivativos eram “*over-the-counter*” (OTC), ou seja, realizadas entre grandes empresas fora do mercado organizado (AMARAL, 2003).

O nível de regulação dos derivativos variou no decorrer do tempo, conforme as jurisdições vigentes e dependiam de diversos fatores, como por exemplo, dos contextos políticos e religiosos. Algumas formas de derivativos chegaram a ser proibidas, e posteriormente permitidas (JORION, 1999).

2.4.2 - Opções

Derivativo é uma ferramenta financeira em que seu valor depende de variáveis subjacentes. Os tipos mais comuns de derivativos incluem futuros, opções e contratos a termo (*forwards*), além dos tipos comumente estudados existem muitos outros tipos de derivativos, como por exemplo, conhecidos como derivativos exóticos.

Dentro da avaliação de ativos derivados, o objetivo fundamental da engenharia financeira é aferir o valor de uma opção. Um contrato de opção, no mundo financeiro, é o direito, mas não a obrigação, de vender (quando se tratar de opção de venda) ou comprar (para uma opção de compra) ou de um ativo nos casos de: ações de uma corporação, *commodities* como grão, moeda estrangeira, etc., a um preço fixo, ou seja, seu preço de exercício em certa data no futuro (SANTOS, 2008).

As bases para a teoria das opções começaram nos anos 1960 quando Samuelson (1965), auxiliado por McKean, insere o cálculo estocástico em finanças e deduzindo desta maneira a condição de exercício ótima da opção Americana perpétua, a qual ele chamou

de condição de contato-alto. A condição citada, suficiente para o exercício ótimo da opção, atualmente é chamada de condição de contato suave.

Uma opção é uma garantia que fornece ao seu proprietário o direito de negociar um número fixo de ações de uma ação ordinária especificada a um preço fixo a qualquer momento ou antes de um determinado período, ao exercer esta transação, obtém-se o processo denominado de exercício da opção.

A seguir uma breve visão a respeito dos principais tipos de opções e das correspondentes formas da equação de Black-Scholes. Comumente são considerados dois tipos de opções:

- Opção de compra (OC), $V(S, t)$, que reflete o direito de comprar um ativo dentro ou no fim de um certo período de tempo, por um preço fixo, sendo que a outra parte tem o dever de o vender.
- Opção de venda (OV), $V(S, t)$, que concede o direito de vender um ativo dentro ou no fim de um certo período de tempo, por um preço fixado, tendo a outra parte contratante o dever de o comprar.

Partindo do pressuposto que há opções de compra e de venda, as opções também estão sujeitas a outra grande divisão que se pode fazer entre Europeias e Americanas. Esta segmentação não se relaciona a localização geográfica onde são transacionadas, mas sim com o período o qual pode ser exercido o direito de compra/venda do ativo. Diante de uma opção europeia na data do vencimento, apenas pode ser exercida no prazo acordado no contrato; no entanto, em posse de uma opção americana, existe o direito de exercer em qualquer tempo até à data de maturidade. As opções americanas devem ter um valor igual ou superior ao das opções europeias, por oferecem mais vantagens (o direito de compra/venda na data de maturidade pode ser exercido antes do período determinado) (GOLDSMITH, 1999).

Os modelos europeus de preço quando comparados aos americanos apresentam tendência a exibir preconceitos empíricos sistemáticos quando usados para avaliar as opções de compra americanas.

2.4.3 - Condição Europeia

2.4.3.1 - Opção de compra

Para se avaliar uma OC Europeia, pode ser tomado como exemplo um ativo de risco, como o petróleo, o preço pode variar de forma desordenada, entretanto adquirindo-se uma OC europeia, com preço de exercício K , é possível saber o valor a ser gasto em altas quantidades de barris em um determinado período de tempo sendo, que simplificando-se a ideia abordada, é possível comparar-se a opção citada com um seguro contra o aumento de preço do produto (BONOTTO, 2008).

Ao examinar uma opção de compra europeia em que o valor (*payoff*) é denominado por $V(S, t)$, cujo preço de exercício é designado por K . A data de execução é um valor T exprimindo a medida (tomando o ano como unidade) do intervalo de tempo que decorre desde o instante do contrato até ao instante da execução. Assim, $0 \leq t \leq T$.

A condição de contorno equivalente para $t=T$ é:

$$V(S, T) = \text{Max}[S - K, 0] \quad (2.14)$$

$$V(S, T) = S - K \text{ se } S \geq K \quad (2.15)$$

$$V(S, T) = 0 \text{ se } S < K \quad (2.16)$$

Além desta tem-se mais duas condições, quando $S=0$ e quando $S \rightarrow \infty$, que são respectivamente:

$$V(0, t) = 0 \quad (2.17)$$

$$\mathcal{V}(S, t) \approx \quad \text{quando } S \rightarrow \infty \quad (2.18)$$

Esta última representa que, para valores muito grandes do ativo, o preço de exercício torna-se irrelevante e o valor da OC aproxima-se do valor do ativo. Além disso a Eq. (2.16) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\lim_{S \rightarrow \infty} \frac{V(S, t)}{S} = 1 \quad (2.19)$$

A opção de compra europeia pode ser sintetizada pela equação de Black-Scholes em que atuam as condições (2.14), (2.15) e (2.19).

2.4.3.2 - Opção de venda

Em relação a uma OV europeia $V(S, t)$ a condição para $t = T$:

$$V(S, T) = \text{Max}[K - S, 0] \quad (2.20)$$

$$V(S, t) = K - S \text{ se } S \leq K \quad (2.21)$$

$$V(S, t) = 0 \text{ se } S > K \quad (2.22)$$

Se a taxa de juros r permanecer constante, tem-se para $S=0$:

$$V(0, t) = Ke^{-r(T-t)} \quad (2.23)$$

Quando $S \rightarrow \infty$ o valor da opção é 0:

$$\lim_{S \rightarrow \infty} V(S, t) = 0 \quad (2.24)$$

A opção de venda europeia pode ser sintetizada pela equação de Black-Scholes em que atuam as condições (2.20), (2.23) e (2.24).

2.4.4 - Condição Americana

Uma opção americana tem a característica adicional de o seu exercício ser possível em qualquer instante durante a vida da opção, isto é, para qualquer t tal que: $0 \leq t \leq T$. Esta situação conduz a mais oportunidades quando comparada a oferta europeia, em consequência disso, opções americanas de preço não podem ter o preço menor ou equivalente às europeias.

2.4.4.1 - Opção de compra

A opção de compra americana em nada difere da opção de compra europeia, ou seja, a condição de contorno equivalente para $t=T$ é:

$$V(S, T) = \text{Max}[S - K, 0] \quad (2.25)$$

$$V(S, T) = S - K, 0 \text{ se } S \geq K \quad (2.26)$$

$$V(S, T) = 0 \text{ se } S < K \quad (2.27)$$

Quando $S=0$:

$$V(0, t) = 0 \quad (2.28)$$

E quando $S \rightarrow \infty$:

$$V(S, t) \approx S \quad \text{quando } S \rightarrow \infty \quad (2.29)$$

Esta última representa que, para valores muito grandes do ativo, o preço de exercício torna-se irrelevante e o valor da OC aproxima-se do valor do ativo. Além disso a Eq. (2.29) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\lim_{S \rightarrow \infty} \frac{V(S, t)}{S} = 1 \quad (2.30)$$

A opção de compra americana pode ser sintetizada pela equação de Black-Scholes em que atuam as condições de (2.31), (2.29) e (2.30).

2.4.4.2 - Opção de venda

Em relação a uma OV americana $V(S, t)$, a condição para $t = T$:

$$V(S, T) = \text{Max}[K - S, 0] \quad (2.31)$$

$$V(S, t) = K - S \text{ se } S \leq K \quad (2.32)$$

$$V(S, t) = 0 \text{ se } S > K \quad (2.33)$$

Para $S=0$ tem-se:

$$V(0, t) = K \quad (2.34)$$

Quando $S \rightarrow \infty$ o valor da opção é 0:

$$\lim_{S \rightarrow \infty} V(S, t) = 0 \quad (2.35)$$

A opção de venda americana pode ser sintetizada pela equação de Black-Scholes em que atuam as condições (2.31), (2.34) e (2.35).

A seguir tem-se um resumo da equação de Black-Scholes, juntamente com as suas condições de contornos, mais especificadas na Tabela 2.1 para a venda e compra americana e europeia.

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -\frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - rS \eta \frac{\partial V}{\partial S} + rV; \quad 0 < S < S_\infty; t > 0 \quad (2.36)$$

$$V(S, t) = V_i(S) \text{ em } t = T \quad (2.37)$$

$$V(0, t) = V_0(t) \text{ em } S = 0 \quad (2.38)$$

$$V(S_\infty, t) = V_\infty \text{ em } S = S_\infty \quad (2.39)$$

Tabela 2.1 - Resumo das condições de contornos para as opções de venda e compra americana e europeia.

	Americana			Europeia		
	$V_i(S)$	$V_0(t)$	V_∞	$V_i(S)$	$V_0(t)$	V_∞
Venda	$\text{Max}[K - S, 0]$	K	$0 \left(\frac{\partial V}{\partial S} = 0 \right)$	$\text{Max}[K - S, 0]$	$Ke^{-r(T-t)}$	$0 \left(\frac{\partial V}{\partial S} = 0 \right)$

2.5 - METODOLOGIA DE SOLUÇÃO VIA TRANSFORMADA INTEGRAL GENERALIZADA (GITT)

2.5.1 - Contexto histórico sobre transformadas integrais

Transformações integrais têm sido utilizadas com sucesso por quase dois séculos na solução de muitos problemas de matemática aplicada, física matemática e engenharia. Historicamente, a origem das transformadas integrais, incluem as transformadas de Laplace (1749-1827) em: “*on probability theory*” publicado em 1780; e de Joseph Fourier (1768 - 1830) em: “*La Théorie Analytique de la Chaleur*” publicado em 1822.

De fato, a obra de Laplace inclui alguns resultados básicos da sua metodologia, a qual é uma das transformações integrais mais antigas e mais usadas com disponibilidade na literatura matemática. Isso foi efetivamente utilizado para encontrar a solução de equações diferenciais lineares e equações integrais (DEBNATH e BATHA, 2007).

2.5.2 - Transformada integral generalizada

Soluções de problemas sendo exatas ou aproximadas são usadas constantemente em análises de engenharia em função delas trazerem melhor possibilidade de verificação dos significados físicos dos diversos parâmetros que afetam os problemas.

Contudo nem sempre para equações diferenciais parciais os métodos de separação de variáveis mais comuns são convenientes, quando as condições de contorno envolvem homogeneidades.

Partindo da necessidade de solucionar problemas não lineares surge a técnica da Transformada Integral Generalizada proposta por ÖZISIK e MURRAY (1974), que consiste em transformar a equação diferencial parcial que modela a situação problema que se pretende resolver em um sistema infinito de equações diferenciais acopladas que deve ser truncado com uma ordem suficientemente grande para depois ser resolvido numericamente.

Em seguida utiliza-se a fórmula de inversão para se obter o potencial original (SOUZA, 2009). Ainda a respeito do conceito temos, segundo MACEDO (1999), de que a ideia básica da GITT é relaxar a necessidade de se encontrar uma transformação integral exata do problema, de maneira que é possível a escolha de um problema de autovalor que tenha características mais semelhantes ao problema original. Desenvolveu-se então o par

transformada inversa, consequência direta da propriedade de ortogonalidade que as autofunções oriundas do problema auxiliar gozam. Efetua-se finalmente, a transformação integral do problema diferencial parcial, obtendo-se um sistema diferencial ordinário acoplado e infinito.

Utilizando o mesmo princípio, diversos problemas generalizados não lineares foram incorporados ao rol de aplicações dessa técnica em que os fundamentos são apresentados de acordo com o problema proposto no trabalho e suas condições.

Essa nova abordagem elimina a necessidade de o problema ser separável surgindo dessa forma os princípios básicos da técnica de transformada integral. Em 1984, Mikhailov e Özisik publicaram o primeiro livro, generalizando os formalismos da técnica de transformada integral clássica, a qual também é chamada de expansão em autofunções, segundo um tratamento unificado de inúmeros problemas associados à difusão de calor e massa, distribuídos em sete classes. Durante a década de noventa, houve uma série de extensões da técnica para aplicação a diversos problemas encontrados na literatura, que eram anteriormente resolvidos por métodos denominados “puramente” numéricos como diferenças finitas, elementos finitos e volumes finitos.

O método da Transformada Integral Generalizada conta com um enfoque analítico-numérico em função da utilização numérica na etapa após a transformação analítica do problema, fornecendo ao usuário controle de precisão, em que diferencia-se frente a outros métodos numéricos pela garantia da convergência das soluções para ordens crescentes de truncamento nas séries, além de gerar um desempenho computacional com boa eficiência para diversos problemas, os quais são inclusas formulações não-lineares de interesse em aplicação de transferência de calor e escoamento de fluidos.

O método citado tem como diferença dos outros métodos utilizados para solução de problemas de cunho não linear e acoplados, a não necessidade de discretização do domínio para geração das malhas. Ao resolver tais problemas por transformada integral, através de metodologia sistemática e controle prescrito de erro, observou-se o aparecimento de uma série de vantagens como por exemplo: a) Redução do tempo de processamento; b) Aceleração na taxa de convergência numérica.

Conforme observado por: MIYAGAWA (2014), em resumo, a aplicação pode ser definida nos seguintes passos:

1. Definição do problema auxiliar;
2. Solução do problema auxiliar para posterior obtenção das autofunções, autovalores, normas e propriedades de ortogonalidade;

3. Desenvolvimento do par transformada-inversa;
4. Aplicação da Transformada Integral no problema diferencial parcial em um sistema de equações algébricas ou diferenciais ordinárias acopladas ou em outra equação diferencial parcial;
5. Truncamento do sistema infinito e solução numérica do sistema diferencial resultante para obtenção dos campos transformados;
6. Obtenção do potencial original, por meio do uso da fórmula de inversão.

CAPÍTULO 3

METODOLOGIA DE SOLUÇÃO

3.1 - ADIMENSIONALIZAÇÃO

Para efeito de aplicação, resolve-se um problema de equações diferenciais acopladas decorrentes. O primeiro passo para a solução do problema foi realizar a adimensionalização do modelo original dado pelas Eqs. (2.36-2.39). A adimensionalização foi realizada através dos seguintes grupos adimensionais:

$$\theta = V/K; \quad \tau = t/T; \quad \eta = S/S_{\infty}; \quad \beta = S_{\infty}/K; \quad (3.1)$$

$$C = r T; \quad \alpha = \sigma^2 T/2 \quad (3.2)$$

Como a Eq. (2.37) é dada em $t = T$ (no final do período), foi realizada também uma mudança de variável do tipo $\xi = 1 - \tau$, para transformar a condição em uma condição inicial em zero. Assim, as Eqs. (2.36-2.39) adimensionalizadas apresentam-se da seguinte forma:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \xi} = -\alpha^2 \eta^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} - C \eta \frac{\partial \theta}{\partial \eta} + C \theta; \quad \varepsilon < \eta < 1; \quad 0 < \xi \leq 1 \quad (3.3)$$

$$\theta(\eta, 0) = \theta_i(\eta) \text{ em } \xi = 0 \quad (3.4)$$

$$\theta(\varepsilon, \xi) = \theta_0(\xi) \text{ em } \eta = \varepsilon \quad (3.5)$$

$$\theta(1, \xi) = \theta_{\infty} \text{ em } \eta = 1 \quad (3.6)$$

Em que ε é um valor muito pequeno, porém diferente de zero para evitar indeterminações na solução do problema particular que será proposto pela Eq. (3.11). As expressões para os termos $\theta_i(\eta)$, $\theta_0(\xi)$ e θ_{∞} são dadas na Tabela 3.1 para as opções de venda e compra das condições americana e europeia, respectivamente:

Tabela 3.1 - Condições inicial e de contornos para as opções de venda e compra americana e europeia após adimensionalização.

	Americana			Europeia		
	$\theta_i(\eta)$	$\theta_0(\xi)$	θ_∞	$\theta_i(\eta)$	$\theta_0(\xi)$	θ_∞
Venda	$Max[(1 - \beta\eta), 0]$	1	0	$Max[(1 - \beta\eta), 0]$	$e^{-C\xi}$	0
Compra	$Max[(\beta\eta - 1), 0]$	0	β	$Max[(\beta\eta - 1), 0]$	0	β

3.2 - PROBLEMA PARTICULAR

Para a aplicação da GITT foi necessário inicialmente homogeneizar as condições de contornos dadas pelas Eqs. (3.5 e 3.6). Para tanto foi aplicado o seguinte filtro:

$$\theta(\xi, \eta) = \theta_p(\xi, \eta) + \theta_H(\xi, \eta) \quad (3.7)$$

Sendo θ_p a solução particular que possui a variável ξ como parâmetro, como será visto adiante e θ_H a solução homogênea.

A aplicação da Eq. (3.7) no modelo composto pelas Eqs. (3.3-3.6) fornece como modelo para o problema particular:

$$\alpha\eta^2 \frac{d\theta^2}{d\eta^2} + C\eta \frac{d\theta_p}{d\eta} - C\theta_p = 0; \quad \varepsilon < \eta < 1 \quad (3.8)$$

$$\theta_p(\varepsilon) = \theta_0(\xi); \quad \eta = \varepsilon \quad (3.9)$$

$$\theta_p(\varepsilon) = \theta_0(\xi); \quad \eta = \varepsilon \quad (3.10)$$

Logo, pode-se obter a seguinte solução:

$$\theta_p = C_1\eta^{-\gamma} + C_2\eta \quad (3.11)$$

Em que $\gamma = C/\alpha$ e c_1 e c_2 são constantes.

Substituindo nas condições de contornos, pode-se encontrar as seguintes expressões para as constantes de c_1 e c_2 :

$$C1 = \frac{\varepsilon^\gamma (\varepsilon \theta_\infty - \theta_0)}{\varepsilon^{1+\gamma} - 1} \quad (3.12)$$

$$C2 = \frac{(\varepsilon \theta_0 - \theta_\infty)}{\varepsilon^{1+\gamma} - 1} \quad (3.13)$$

Sabendo-se que as expressões para θ_0 e θ_∞ são dadas na Tabela 3.1 para cada situação proposta.

Como C_1 e C_2 podem depender da variável ξ pode-se encontrar a expressão para a derivada de θ_p em relação a ξ :

$$\frac{d\theta_p}{d\xi} = c'_1 \eta^{-\gamma} + c'_2 \eta \quad (3.14)$$

Em que:

$$c'_1 = \frac{\varepsilon^\gamma (\varepsilon \theta'_\infty - \theta'_0)}{\varepsilon^{1+\gamma} - 1} \quad (3.15)$$

$$c'_2 = \frac{(\varepsilon \theta'_\infty - \theta'_0)}{\varepsilon^{1+\gamma} - 1} \quad (3.16)$$

3.3 - PROBLEMA HOMOGENEO

A aplicação da Eq. (3.7) no modelo composto pelas Eqs. (3.3-3.6) fornece como modelo para a solução homogênea:

$$\frac{\partial H}{\partial \xi} = \alpha \eta^2 \frac{\partial^2 \theta_H}{\partial \eta^2} + C \eta \frac{\partial \theta_H}{\partial \eta} - C \theta_H - \frac{d\theta_p}{d\xi}; \quad \varepsilon < \eta < 1; 0 < \varepsilon \leq 1 \quad (3.17)$$

$$\theta_H(\eta, 0) = \theta_i - \theta_p \quad em \quad \varepsilon = 0 \quad (3.18)$$

$$\theta_H(\varepsilon, \xi) = 0 \quad \text{em } \eta = \varepsilon \quad (3.19)$$

$$\theta_H(1, \xi) = 0 \quad \text{em } \eta = 1 \quad (3.20)$$

Reescrevendo as Eqs. (3.17-3.20):

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial H}{\partial \xi} = \eta^2 \frac{\partial^2 \theta_H}{\partial \eta^2} + \gamma \eta \frac{\partial \theta_H}{\partial \eta} - \gamma \theta_H - \frac{g(\xi)}{\alpha}; \quad \varepsilon < \eta < 1; 0 < \varepsilon \leq 1 \quad (3.21)$$

Sendo:

$$g(\xi) = -\frac{d\theta_p}{d\xi} \quad (3.22)$$

3.4 - APLICAÇÃO DA TÉCNICA DA TRANSFORMADA INTEGRAL GENERALIZADA (GITT)

3.4.1 - Determinação do problema auxiliar

Devido às características homogêneas das condições de contorno, o problema auxiliar para o potencial θ_H foi descrito pelas Eqs. (3.22-3.24).

$$\frac{d^2 \Psi_i}{d\eta^2} + \mu_i^2 \Psi_i = 0; \quad \varepsilon < \eta < 1 \quad (3.23)$$

$$\Psi_i = 0 \quad \text{em } \eta = \varepsilon \quad (3.24)$$

$$\Psi_i = 0 \quad \text{em } \eta = 1 \quad (3.25)$$

O qual foi resolvido analiticamente para fornecer as autofunções, autovalores e norma, respectivamente:

$$N_i = \frac{2(1 - \varepsilon)\mu_i}{4\mu_i \cos^2(\varepsilon\mu_i)} + \frac{\sin[2(\varepsilon - 1)\mu_i]}{4\mu_i \cos^2(\varepsilon\mu_i)} \quad (3.28)$$

Em que ψ_i , μ_i e N_i , são respetivamente a autofunção, autovalores e a integral de normalização do problema (2.22-24), a qual satisfaz a seguinte propriedade da ortogonalidade:

$$\int_{\varepsilon}^1 \widetilde{\psi}_i \widetilde{\psi}_j d\eta = \begin{cases} 0, & \text{se } i \neq j \\ 1, & \text{se } i = j \end{cases} \quad (3.29)$$

Sendo $\widetilde{\psi}_i$ a autofunção normalizada dada por:

$$\widetilde{\psi}_i = \frac{\psi_i}{\sqrt{N_i}} \quad (3.30)$$

3.4.2 - Determinação do par transformada-inversa

O problema (3.23-25) permite a definição do seguinte par transformada-inversa para o potencial θ_H :

$$\bar{\theta}_{H_i}(\xi) = \int_{\varepsilon}^1 \widetilde{\psi}_i(\eta) \theta_H(\xi, \eta) d\eta \quad \text{Transformada} \quad (3.31)$$

$$\theta_H(\xi, \eta) = \sum_{i=0}^{\infty} \widetilde{\psi}_i(\eta) \bar{\theta}_{H_i}(\xi) \quad \text{Inversa} \quad (3.32)$$

3.4.3 - Transformação integral da EDP

O processo de transformação integral da equação diferencial parcial, que representa o problema, se inicia com a aplicação do respectivo operador integral na equação diferencial, com o auxílio das condições de contorno originais e com o uso da propriedade da ortogonalidade e da fórmula de inversão, resultando na equação diferencial ordinária para o potencial transformado $\bar{\theta}_{H_i}$.

Multiplicando a Eq. (3.17) por $\widetilde{\psi}_i(\eta)$ e integrando no domínio $\eta = \varepsilon$ até $\eta = 1$:

$$\int \bar{\psi}_i(\eta) \left\{ \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \theta_H}{\partial \xi} = \eta^2 \frac{\partial^2 \theta_H}{\partial \eta^2} + \gamma \eta \frac{\partial \theta_H}{\partial \eta} - \gamma \theta_H + \frac{g(\xi)}{\alpha} \right\} d\eta \quad (3.33)$$

Resultando na seguinte equação diferencial ordinária e infinita, com a sua respectiva condição inicial:

$$\frac{1}{\alpha} \frac{d\bar{\theta}_{Hi}}{d\xi} = \sum_{j=1}^{\infty} (-\mu_j^2 A_{1ij} + \gamma A_{2ij} - \gamma \delta_{ij}) \bar{\theta}_{Hj} + \frac{\bar{g}_i(\xi)}{\alpha}; \quad \xi > 0 \quad (3.34)$$

$$\bar{\theta}_{Hi} = \int_{j=1}^{\infty} \bar{\psi}_i(\eta) [\theta_i - \theta_p] d\eta = \bar{f}_i; \quad \xi > 0 \quad (3.35)$$

Em que os termos não-transformáveis resultam em somatórios infinitos, cujos coeficientes são definidos por:

$$A_{1ij} = \int_{\varepsilon}^1 \eta^2 \bar{\psi}_i \bar{\psi}_j \quad (3.36)$$

$$A_{2ij} = \int_{\varepsilon}^1 \eta \bar{\psi}_i \bar{\psi}'_j d\eta \quad (3.37)$$

O termo δ_{ij} é dado pela integral a seguir, que satisfaz a propriedade da ortogonalidade (Equação (3.28)):

$$\delta_{ij} = \int_{\varepsilon}^1 \eta \bar{\psi}_i \bar{\psi}_j d\eta \quad (3.38)$$

O termo $\bar{g}_i(\xi)$ é calculado pela seguinte equação:

$$\bar{g}_i(\xi) = \int_{\varepsilon}^1 \bar{\psi}_i(\eta) g(\eta) d\eta = -c'_1 g_{1i} - c'_2 g_{2i} \quad (3.39)$$

Sendo:

$$g_{1i} = \int_{\varepsilon}^1 \eta^{-\nu} \widetilde{\psi}_i(\eta) d\eta \quad (3.40)$$

$$g_{2i} = \int_{\varepsilon}^1 \eta \widetilde{\psi}_i(\eta) d\eta \quad (3.41)$$

CAPÍTULO 4

RESULTADOS E DISCUSSÃO

4.1 - ANÁLISES E COMPARAÇÃO DOS RESULTADOS OBTIDOS

O modelo resultante da transformação integral, tratado no capítulo anterior, foi resolvido para efeito de análise e comparação com dados da literatura, os resultados numéricos obtidos, foram utilizados com uma convergência de no mínimo quatro casas decimais. O tempo de CPU necessário para um ciclo de rodada típica demandou de 10 segundos a 5 horas quando utilizado um alto valor para convergência da malha. Comparou-se a precisão dos resultados obtidos com as subrotinas de integração numérica, contidas no IMSL (DIVPAG) e no Mathematica (NDSolve).

O cálculo dos coeficientes é um dos principais fatores que pode tornar o custo computacional elevado. A avaliação direta dos coeficientes de forma numérica tem a desvantagem o fato de que estes apenas podem ser calculados internamente ao processo de solução do sistema diferencial ordinário. Para solucionar isto poderia se utilizar uma abordagem analítica empregada em SILVA (2003) e MIYAGAWA (2014). Esta abordagem utiliza computação simbólica por meio do *software Mathematica* (WOLFRAM, 2005).

O coeficiente integral \bar{f}_i juntamente com os coeficientes formados pelas Eqs. (3.40-3.41) foram calculados numericamente usando a rotina DQDAG da biblioteca IMSL do FORTRAN. Já os coeficientes formados pelas Eqs. (3.36-3.37) foram resolvidos analiticamente com o auxílio do software *Mathematica* (Wolfram, 2005) e a solução resultante foi incorporada ao algoritmo utilizado.

O modelo formado pelas Eqs. (3.34-3.35) foi resolvido numericamente pela rotina DIVPAG da biblioteca IMSL do FORTRAN. Na rotina DIVPAG (rotina apropriada para a solução de problemas de valor inicial) utilizou-se o método de Gear, para sistemas rígidos, com um erro prescrito de 10^{-7} .

4.1.1 - Análise de convergência

Inicialmente, foi realizada uma análise de convergência de malha na solução do problema (3.34-35). Nas Tabelas 4.1 a 4.3 são apresentados os resultados de convergência de malha para o valor da opção (V) para compra americana em três instantes de tempo. Com a finalidade de verificar o número de termos mínimo necessário para a convergência do programa, utilizou-se a volatilidade de 5%, 20% e 70%, fixando-se S_∞ em 80, a taxa de juros livre de risco r em 0,1 e com o incremento de 50 no número de termos e obteve-se os seguintes valores nas tabelas a seguir.

Tabela 4.1 - Convergência para o valor da opção (V). Condições: $\sigma = 5\%$, $r=0,1$, $K=40$, $T=1$ e $S_\infty=80$.

N	V (S=50, t = 0,001)	V (S=50, t = 0,01)	V (S=50, t = 1)
50	13,8090	13,7699	9,9685
100	13,8160	13,7749	9,9781
150	13,8170	13,7756	9,9890
200	13,8127	13,7754	9,9980
250	13,8123	13,7256	9,9981
300	13,8083	13,7756	9,9981
350	13,8083	13,7756	10,0196
400	13,8083	13,7756	10,0061
450	13,8083	13,7756	10,0061
500	13,8083	13,7756	10,0061

Tabela 4.2 - Convergência para o valor da opção (V). Condições: $\sigma = 20\%$, $r=0,1$, $K=40$, $T=1$ e $S_\infty=80$.

N	V (S=50, t = 0,001)	V (S=50, t = 0,01)	V (S=50, t = 1)
50	11,9929	11,8577	8,8935
100	12,9823	11,9589	9,8934
150	13,5983	12,9997	9,9934
200	13,9824	13,8349	9,9934
250	13,9923	13,9577	9,9934
300	13,9923	13,9577	9,9934
350	13,9923	13,9577	9,9934
400	13,9923	13,9577	9,9934
450	13,9923	13,9577	9,9934
500	13,9923	13,9577	9,9934

Tabela 4.3 - Convergência para o valor da opção (V). Condições: $\sigma=70\%$, $r=0,1$, $K=40$, $T=1$ e $S_\infty=80$.

N	V (S=50, t = 0,001)	V (S=50, t = 0,01)	V (S=50, t = 1)
50	12,9231	12,9177	9,0039
100	12,9923	12,9278	9,9934
150	13,9924	13,5577	9,9995
200	13,9923	13,7577	10,0029
250	13,9923	13,9567	10,0030
300	13,9923	13,9577	10,0034
350	13,9923	13,9577	10,0034
400	13,9923	13,9577	10,0034
450	13,9923	13,9577	10,0034
500	13,9923	13,9577	10,0034

Os resultados mostraram que o número de termos necessários para truncamento da série usando GITT foi de aproximadamente $N \cong 400$. Este resultado mostra uma característica vantajosa da GITT quando comparado com diferenças finitas, pois o número reduzido de termos da série de expansão pode promover a redução no tempo de cálculo e também custos de processamento computacional.

Por meio da análise dos valores obtidos nas Tabelas 4.1 a 4.3, escolheu-se o valor do parâmetro N igual a 500 para solucionar os demais casos que foram estudados, apresentando uma convergência de até 4 casas decimais. Como descrito anteriormente, a GITT apresentou vantagens com relação à alta taxa de convergência sem precisar de um número elevado de termos na série de expansão. Além disso, o desenvolvimento matemático da GITT mostrou a possibilidade da solução numérico-analítica a partir do problema auxiliar proposto. A solução final obtida pela GITT através desta abordagem será discutida a seguir, no que diz respeito à verificação da técnica ao se comparar com resultados da literatura.

4.1.2 - Verificação do código computacional

A fim de se verificar o código computacional desenvolvido para a solução via GITT, a solução foi comparada com os resultados obtidos usando-se o comando NDSolve do *software Mathematica*, que resolve o problema através do Método das Linhas (MOL). A Figura 4.1 apresenta o caso de verificação para o valor da opção (V) em função do

valor do ativo (S) para compra americana, com volatilidade de 20%, fixando-se S_∞ em 80, a taxa de juros livre de risco r em 0,1 e $t=0$.

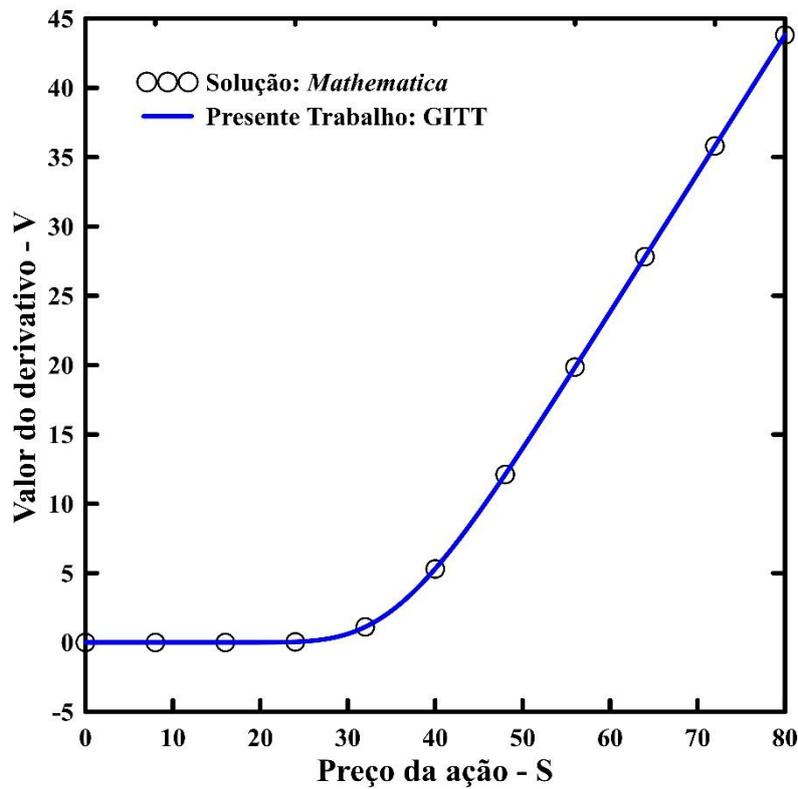


Figura 4.1 - Comparação da solução em $t=0$ para o valor da opção (V) pela GITT com a solução obtida no Mathematica. Condições: $\sigma=20\%$, $r=0,1$, $K=40$, $T=1$ e $S_\infty=80$.

De acordo com a análise da Figura 4.1, a técnica de resolução híbrida GITT e o MOL apresentaram solução matemática em excelente concordância ao problema abordado. Além de possuírem a mesma tendência, os resultados apresentaram soluções próximas uma da outra, ou seja, as soluções numéricas obtidas pela GITT e pelo Mathematica (MOL) apresentaram alta taxa de convergência. A taxa de convergência está diretamente relacionada ao número de iterações necessárias para obter a solução dentro da tolerância prescrita. Com o código computacional verificado, dados disponíveis na literatura foram utilizados para a comparação dos resultados de compra e venda.

4.1.3 - Efeito da variação da volatilidade e comparação com a literatura

Nas Figuras 4.2 a 4.4 tem-se os resultados obtidos pela GITT e comparados com a solução obtida por LESMANA e WANG (2013), utilizando os valores de volatilidade

de 5%, 20% e 70%, respectivamente. Esses resultados representam o valor da opção de compra (V) em função do valor do ativo (S) para a opção europeia (ou americana).

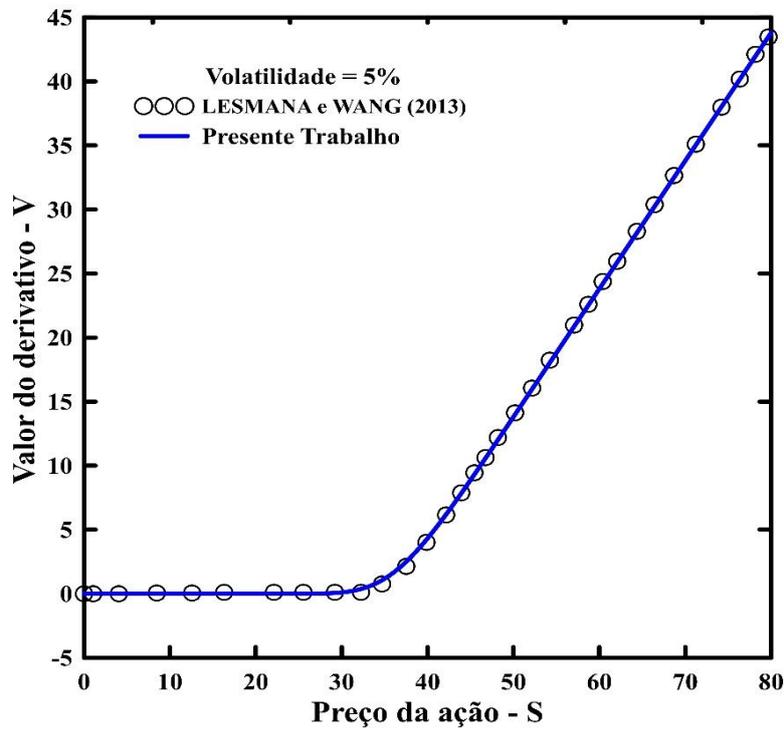


Figura 4.2 - Solução em $t=0$ para o valor da opção de compra europeia (V). Condições: $\sigma=5\%$, $r=0,1$, $K=40$, $T=1$ e $S_{\infty}=80$.

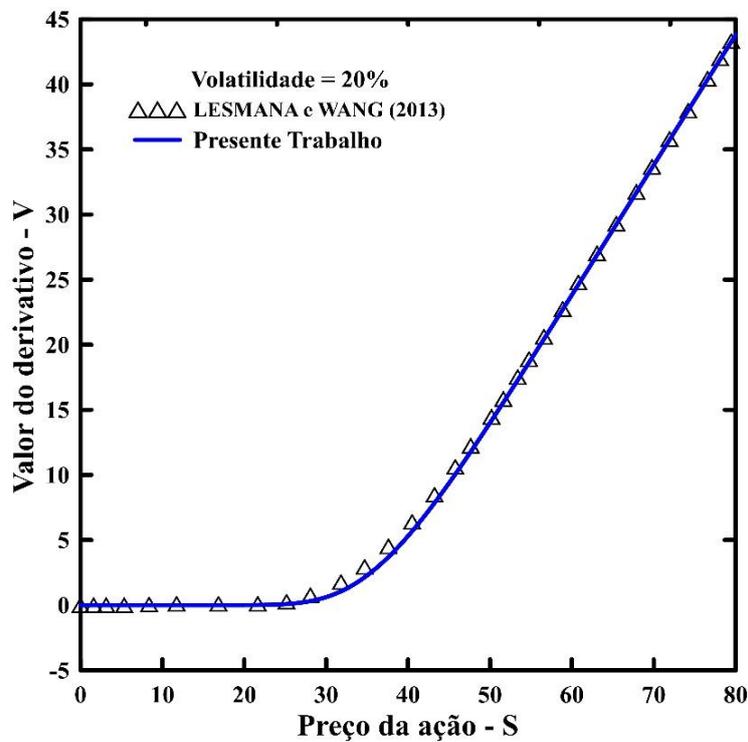


Figura 4.3 - Solução em $t=0$ para o valor da opção de compra europeia (V). Condições: $\sigma=20\%$, $r=0,1$, $K=40$, $T=1$ e $S_{\infty}=80$.

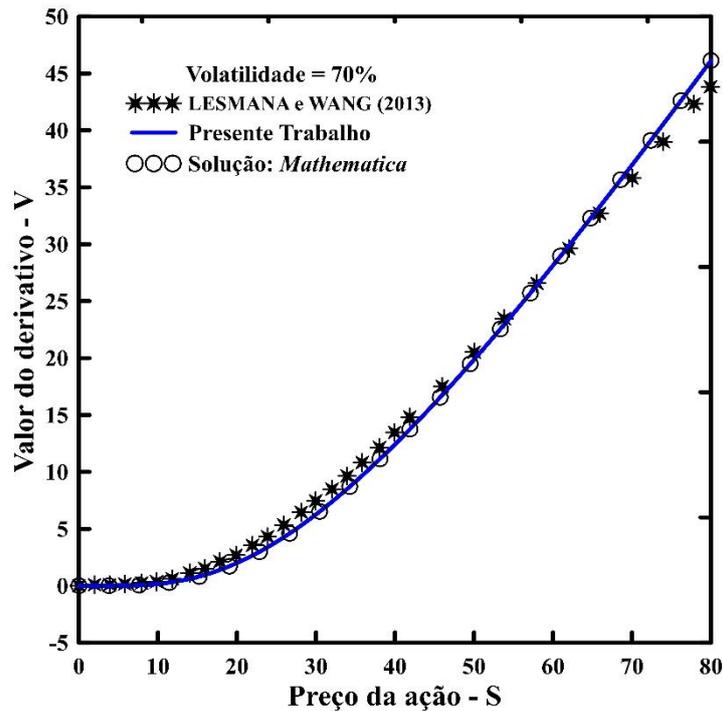


Figura 4.4 - Solução em $t=0$ para o valor da opção de compra europeia (V). Condições: $\sigma = 70\%$, $r = 0,1$, $K = 40$, $T = 1$ e $S_{\infty} = 80$.

De acordo com as Figuras 4.2 a 4.4, nota-se que os resultados obtidos no presente trabalho estão em boa concordância com os resultados obtidos por LESMANA e WANG (2013) conforme também verificado na análise de erros a seguir. Apenas para a volatilidade de 70% que houve uma diferença mais acentuada nos resultados, porém não tão significativa, por conta disso este caso também foi resolvido através do software Mathematica, onde foi constatado uma excelente concordância com os resultados obtidos pela GITT. Em ambos os trabalhos foi feito um rigoroso teste de convergência, descartando os erros associados à este tipo de análise. Ao verificar as curvas, observa-se que o valor da opção aumenta com o aumento do valor do ativo, além disso, é possível perceber que quanto maior o valor da volatilidade, aumenta o valor da opção de compra. Conforme também observado por LESMANA e WANG (2013), isso ocorre na prática porque o proprietário de uma opção de compra tem uma chance maior de se beneficiar dos aumentos de preços devido à maior volatilidade, mas tem um risco de queda limitado no caso de uma queda de preço. Esta variação do valor da opção de compra com a volatilidade pode ser melhor observado na Figura 4.5.

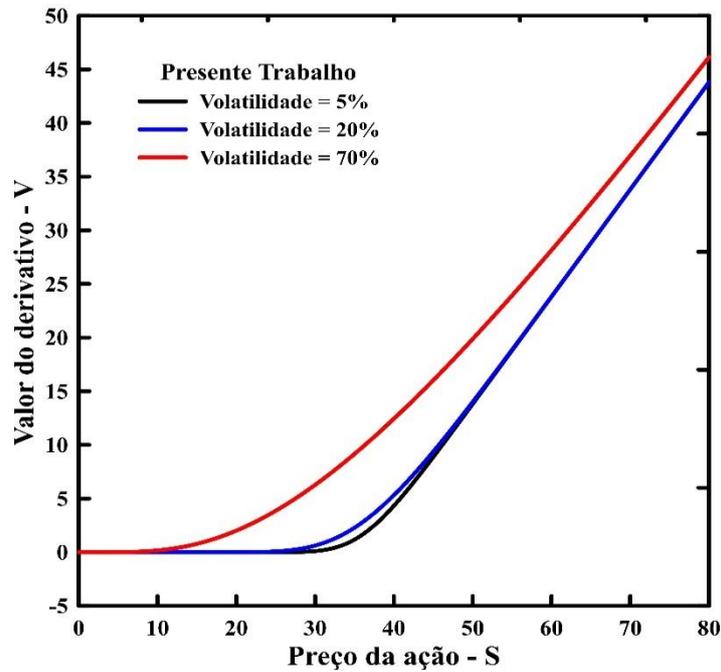


Figura 4.5 - Solução em $t=0$ para o valor da opção de compra europeia (V). Condições: $r = 0,1$, $K = 40$, $T = 1$ e $S_{\infty} = 80$.

Nas Figuras 4.6 a 4.8 tem-se os resultados obtidos pela GITT e comparados com a solução obtida por LESMANA e WANG (2013), utilizando os valores de volatilidade de 5%, 20% e 70%, respectivamente. Esses resultados representam o valor da opção de venda (V) em função do valor do ativo (S) para a condição europeia.

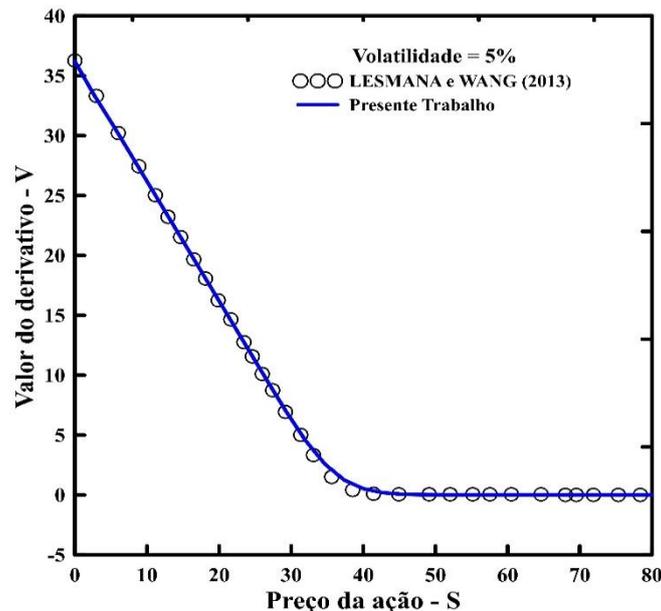


Figura 4.6 - Solução em $t = 0$ para o valor da opção de venda europeia (V). Condições: $\sigma = 5\%$, $r = 0,1$, $K = 40$, $T = 1$ e $S_{\infty} = 80$.

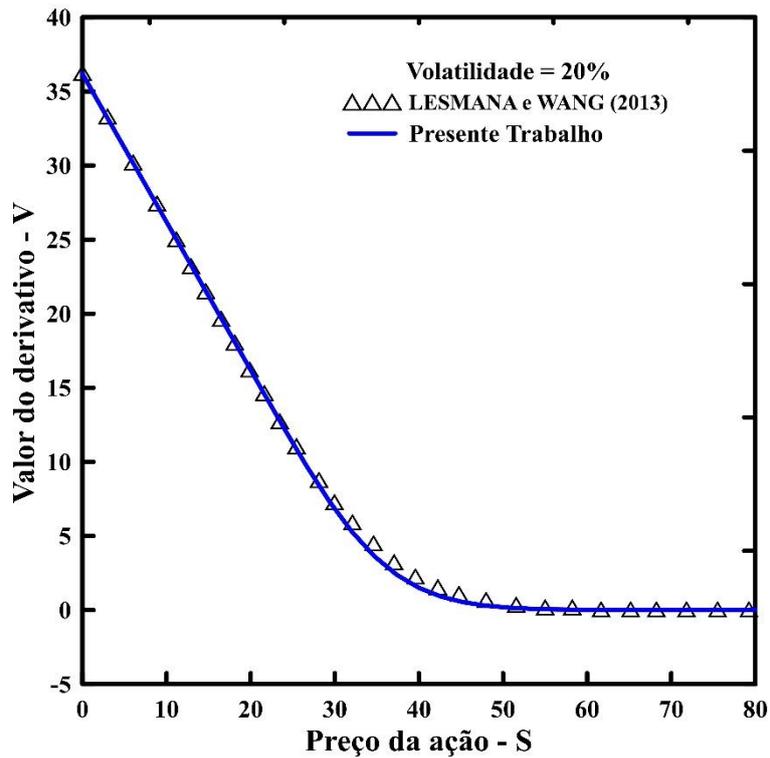


Figura 4.7 - Solução em $t=0$ para o valor da opção de venda europeia (V). Condições: $\sigma=20\%$, $r=0,1$, $K=40$, $T=1$ e $S_\infty=80$.

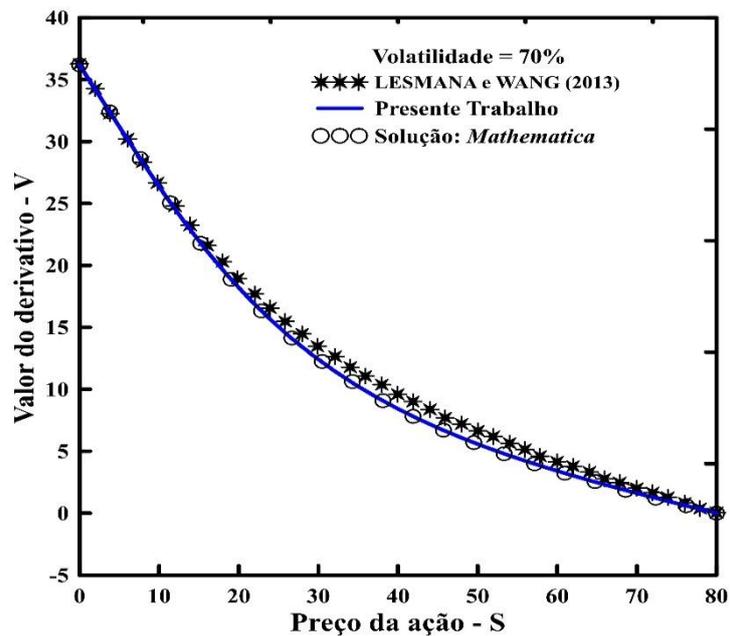


Figura 4.8 - Solução em $t=0$ para o valor da opção de venda europeia (V). Condições: $\sigma=70\%$, $r=0,1$, $K=40$, $T=1$ e $S_\infty=80$.

De acordo com as Figuras 4.6 a 4.8 nota-se novamente que os resultados obtidos no presente trabalho estão em boa concordância com os resultados obtidos por LESMANA e WANG (2013). Apenas para a volatilidade de 70% que houve uma pequena

diferença nos resultados, o que também pode ser melhor constatado na análise de erros a seguir, por conta disso este caso também foi resolvido através do software Mathematica, onde foi constatado uma excelente concordância com os resultados obtidos pela GITT. Apesar do termo funcional na condição $e^{-C\xi}$, o problema auxiliar utilizado consegue obter de maneira satisfatória a solução. Ao verificar as curvas, observa-se que o valor da opção diminui com o aumento do valor do ativo, é possível perceber que quanto maior o valor da volatilidade, aumenta o valor da opção de venda. Conforme também observado por LESMANA e WANG (2013) quanto maior a volatilidade, mais cara é a opção de venda. Esta variação do valor da opção com a volatilidade pode ser melhor observado na Figura 4.9.

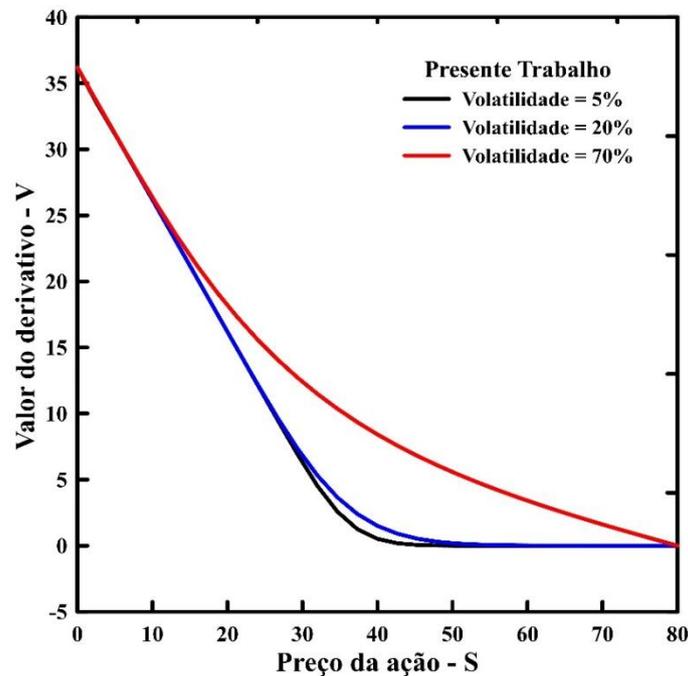


Figura 4.9 - Solução em $t=0$ para o valor da opção de venda europeia (V). Condições: $r=0,1$, $K = 40$, $T = 1$ e $S_{\infty} = 80$.

4.1.4 - Análise de erros

Para aferir a concordância dos resultados foi realizada uma análise de erros com base no erro absoluto entre os resultados obtidos por LESMANA e WANG (2013) e os obtidos no presente trabalho. Como não há na referência utilizada, valores tabelados para uma comparação ponto a ponto, foram escolhidos os valores de S de 0 a 80 com incremento de 5, tanto para a opção de compra, quanto para a opção de venda, para a análise de erros. Nas Figuras 4.10 a 4.12 tem-se os resultados da análise dos erros

absolutos, para os valores de volatilidade de 5%, 20% e 70%, respectivamente. Esses resultados representam os erros do valor da opção de compra (V) em função do valor do ativo (S) para a opção europeia (ou americana).

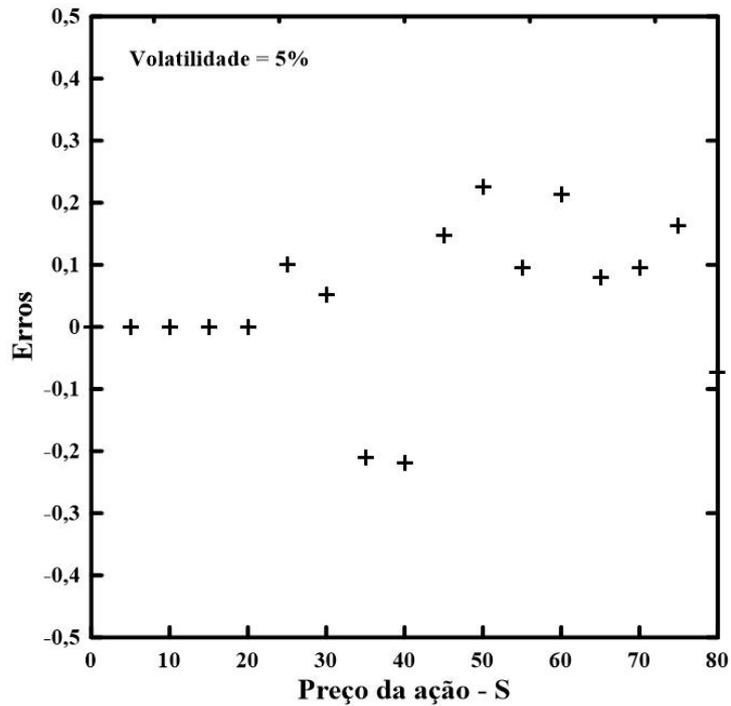


Figura 4.10 - Análise de erros para o valor da opção de compra europeia (V).
Condições: $\sigma = 5\%$, $r = 0,1$, $K = 40$, $T = 1$ e $S_{\infty} = 80$.

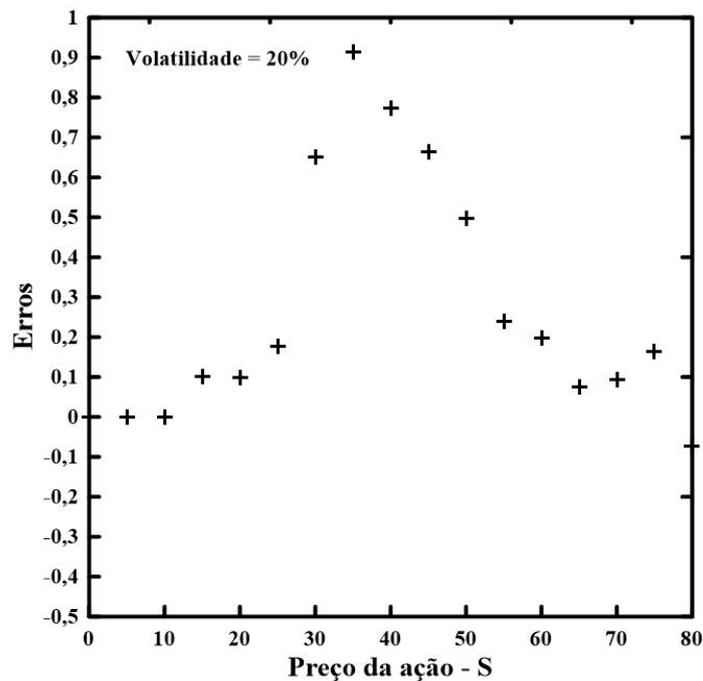


Figura 4.11 - Análise de erros para o valor da opção de compra europeia (V).
Condições: $\sigma = 20\%$, $r = 0,1$, $K = 40$, $T = 1$ e $S_{\infty} = 80$.

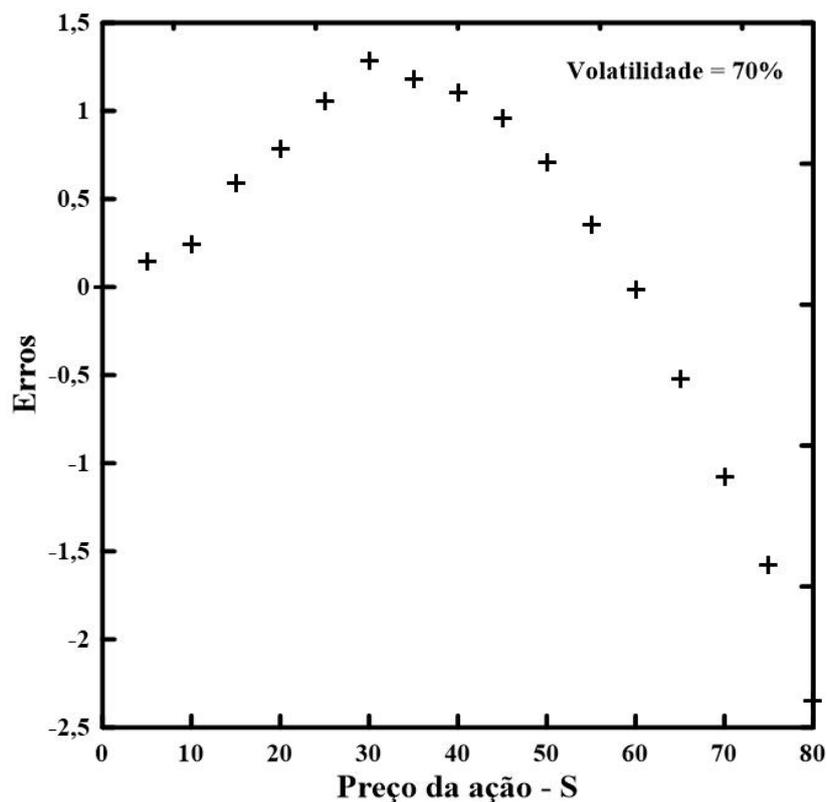


Figura 4.12 - Análise de erros para o valor da opção de compra europeia (V).
Condições: $\sigma = 70\%$, $r=0,1$, $K=40$, $T=1$ e $S_{\infty}=80$.

Com as Figuras 4.10 a 4.12 nota-se que os resultados corroboram com o visualizado graficamente nas Figuras 4.2 a 4.4, que verifica-se melhor concordância para o valor da volatilidade de 5%, com erros menores e maiores erros para a volatilidade de 70%. Na técnica da GITT, outros filtros podem ser utilizados e testados para se avaliar se este mesmo comportamento pode ser observado.

Nas Figuras 4.13 a 4.15 tem-se os resultados da análise de erros absolutos, para os valores de volatilidade de 5%, 20% e 70%, respectivamente. Esses resultados representam os erros do valor da opção de venda (V) em função do valor do ativo (S) para a condição europeia. De acordo com as Figuras 4.13 a 4.15 nota-se novamente que os resultados obtidos no presente trabalho estão em boa concordância com os resultados obtidos por LESMANA e WANG (2013) e a análise de erros é similar aos encontrado nas Figuras 4.10 a 4.12.

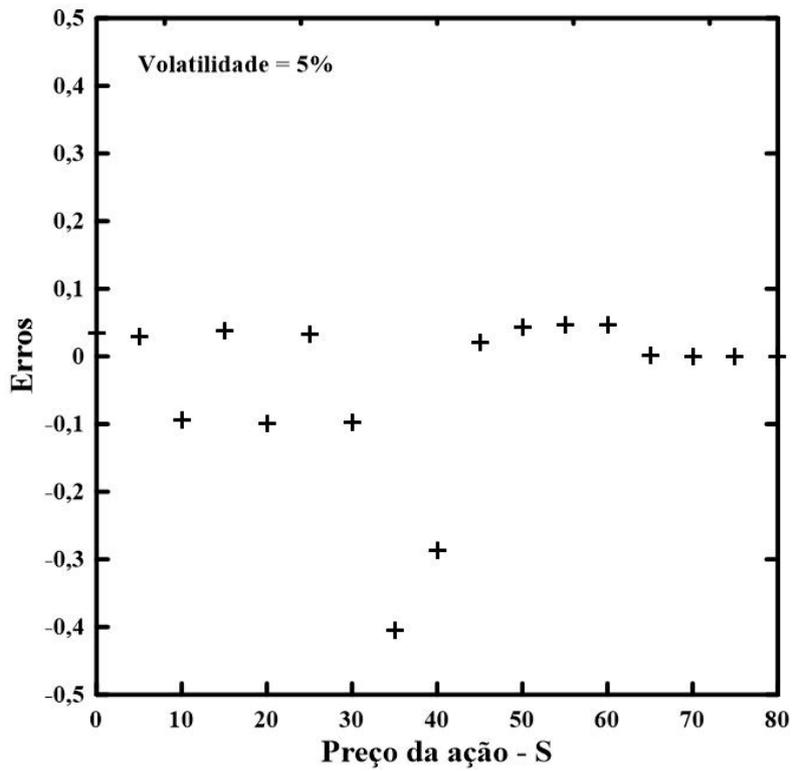


Figura 4.13 - Análise de erros para o valor da opção de venda europeia (V). Condições: $\sigma=5\%$, $r=0,1$, $K=40$, $T=1$ e $S_{\infty}=80$.

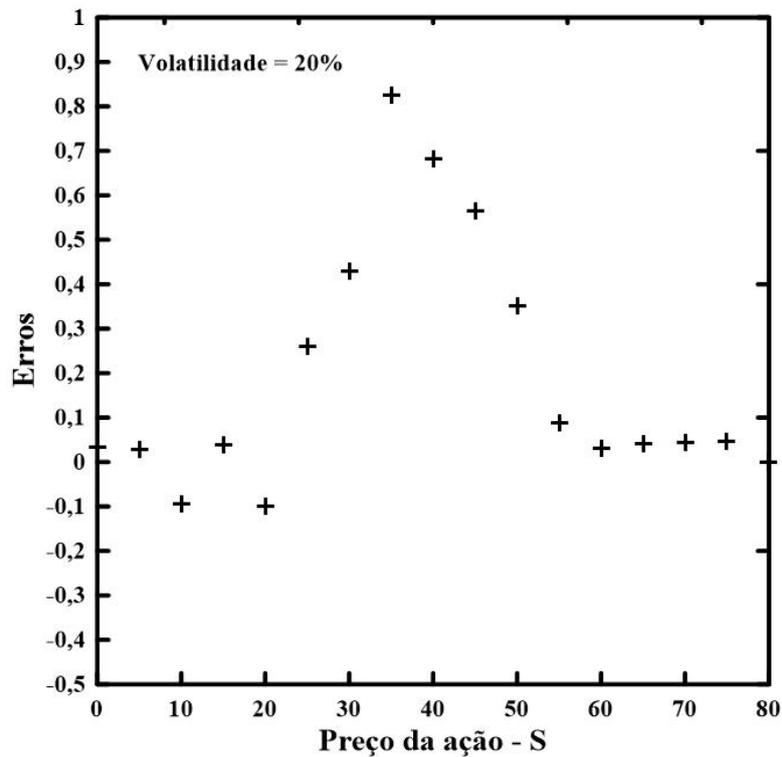


Figura 4.14 - Análise de erros para o valor da opção de venda europeia (V). Condições: $\sigma=20\%$, $r=0,1$, $K=40$, $T=1$ e $S_{\infty}=80$.

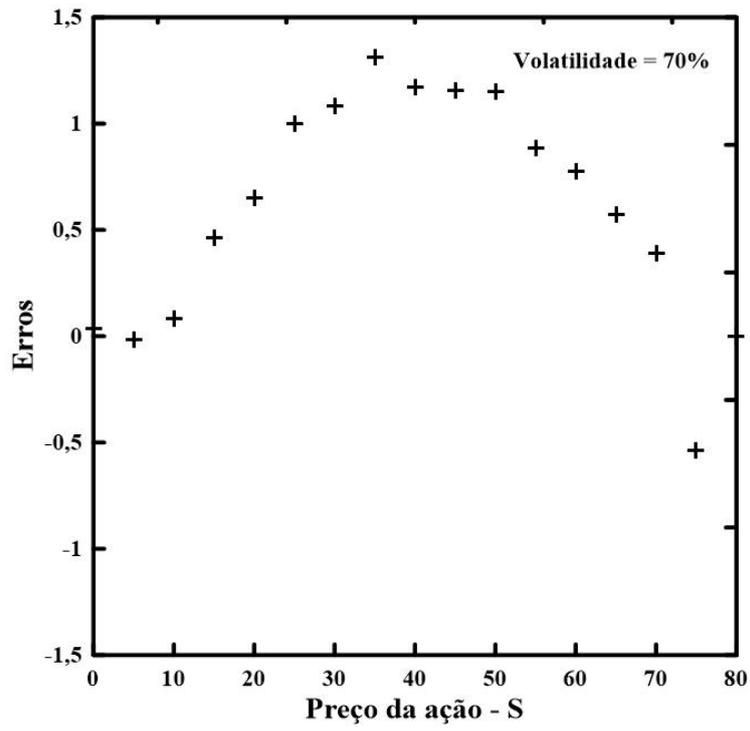


Figura 4.15 - Análise de erros para o valor da opção de venda europeia (V). Condições: $\sigma = 70\%$, $r = 0,1$, $K = 40$, $T = 1$ e $S_{\infty} = 80$.

CAPÍTULO 5

CONCLUSÕES E SUGESTÕES

5.1 - CONCLUSÕES

Nesta dissertação foi apresentado um meio de resolução do problema da valoração de opções padrão europeias e americanas, a aplicação do método da transformada integral generalizada na solução da equação de Black-Scholes.

A revisão bibliográfica utilizada como base deste trabalho demonstra que há uma grande variedade de abordagens matemáticas aplicáveis ao tema proposto, dando embasamento teórico para aplicação da GITT à EBS.

Os resultados obtidos no presente trabalho mostraram a aplicabilidade da GITT como um instrumento o qual forneça resultados suficientemente aproximados em problemas gerados pela equação de Black-Scholes reproduzindo resultados em boa concordância com os reproduzidos pela literatura.

As particularidades da condição inicial e de contornos da equação de Black-Scholes impedem afirmar que menores termos na série a qual representa o valor da ação levarão, necessariamente, a menores erros relativos. Os resultados permitem concluir que a transformada integral generalizada é satisfatória para resolver e analisar a equação de Black-Scholes sob condições de contorno dependentes do tempo e do valor do ativo subjacente.

O filtro inserido mostrou-se eficiente em termos de taxa de convergência, haja vista que não foi necessário um número elevado de termos para se alcançar a convergência requerida com 4 casas decimais.

5.2 - SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Como sugestões para a continuação deste trabalho, pode-se citar:

- A seleção de outros problemas auxiliares e verificar através da GITT a solução obtida;
- Utilização da equação de Black-Scholes, juntamente com a GITT, aplicadas como alternativa de investimentos para produtores locais.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALBUQUERQUE, M. C. C. “**Microeconomia: Teoria de Mercado, Teoria do consumidor, Economia de empresas**”. Editora McGraw - Hill, São Paulo 1987.

AMARAL, C, A, L, V. **Derivativos: o que são e a evolução quanto ao aspecto contábil**. Revista Contabilidade & Finanças - USP, São Paulo, n. 32, p. 71 - 80, maio/agosto 2003.

ARAUJO, C, B, A **Procedimento Numérico de Precificação de Opções Vanilla**. Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Ciências Atuariais da Universidade Federal de Pernambuco como requisito parcial à obtenção do título de graduação”. Recife 2018.

ASSUMPÇÃO, C, R. **Aplicação do modelo de Black-Sholes na precificação de opções de compra de ações da Petrobras: Uma comparação entre o preço teórico e o preço de mercado**. Rio de Janeiro. UFRJ 2009.

BAXTER, M. **Financial Calculus: an introduction to derivative pricing**. Cambridge University Press, 1998.

BONOTO, E. M. **A equação de Black Scholes sob Ação Impulsiva**. 2008. Tese (Doutorado em Ciências - Matemática) - Instituto de Ciências Matemáticas e da Computação, USP, São Carlos, 2008.

BROYLES, J. **Financial Management and Real Options**. The Atrium, Southern Gate, Chichester, West Sussex PO19 8SQ, England 2013.

CAPINSKI, M; ZASTAWNIAK, T. **Mathematics for Finance: An Introduction to Financial Engineering**. Nowy Sacz School of Business-National Louis University, 33-300 Nowy Sacz, ul. Zielona 27, Poland.

CHEUNG, K. M., LEE, C. H., HO, J. **Problem Formulation for Optimal Array Modeling and Planning**. In: Report 20090028743, Jet Propulsion Laboratory, National Aeronautics and Space Administration, Pasadena, CA, 2006.

COSTA, M. S. **O modelo de black scholes: uma abordagem prática da integral de Itô**. Trabalho de conclusão de curso apresentado à Universidade Federal de São Paulo para obtenção de graduação (UFSP 2020).

CRACK, T. F. **Basic Black Scholes: Option Pricing and Trading**. Hons 1st Class, PGDipCom, M Com, PhD (MIT), IMC (2009).

DANBARU, L. **Integral Transforms and their applications**. Second Edition; Chapman and Hall 2007.

DOWNES, J; GOODMAN, J, E. **Dicionário de termos financeiros e de investimento**. nobel, São Paulo, 1993.

FERNANDES. M. G. **Diferenças finitas na valoração de opções europeias e americanas**. 2009. Dissertação (Mestrado em Matemática e Aplicações) Universidade Técnica de Lisboa, Lisboa, 2009.

FILHO, A D, D S. **Teoria das opções reais aplicada a projetos de investimento em prestação de serviços de tecnologia da informação**. 2013. Dissertação (Mestrado Executivo) - Escola brasileira de administração pública e de empresas Fundação Getúlio Vargas. Rio de Janeiro, 2003.

FOURIER, J. B. J. **La Théorie Analytique de la Chaleur**. English Translation by A. Freeman, Dover Publications, 1955.

FROTA. E. F, A. **Avaliação de Opções Americanas Tradicionais e Complexas**. 2003. Dissertação (Mestrado em Engenharia) - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Industrial da PUC. Rio de Janeiro, 2003.

HISSA, M. **Investindo em Opções, (Manual de Investimentos)**. 2007, Rio de Janeiro, Elsevier, 2007. Cap 4, pp.23-28.

GIBSON, R, C. **Asset Allocation. Balancing Financial Risk**. by McGraw-Hill, Inc. All rights reserved. **Manufactured in the United States of America. 2008**.

GOBABAI A , BALESTRA. L. V **A Highly Accurate Finite Element Method to Price Discrete Double Barrier Options**. **Springer Science Business Media New York 2013**, Junho 2013.

GOLDSMITH, H. L. **Flow-induced Interactions in the Circulation**. In: **Advances in the Flow and Rheology of Non-Newtonian Fluids**, v. 8, Rheology Series, Elsevier Science, pp. 1-62, 1999.

GUO, J.; WANSHENG, W. An Unconditionally Stable, Positivity-Preserving Splitting Scheme for Nonlinear Black-Scholes Equation with Transaction Costs. **Scientific World Journal**, Published 2014, Mathematics, Medicine.

JIANG, L. **Mathematical modeling and methods of option pricing**. World Scientific Publishing, Tongli Iniversity, China 2004.

KAVIANY, M. "Heat Transfer in Porous Media". In: Rohsenow, W. M., Hartnett, J. P., Cho, Y. I. (eds.), **Handbook of Heat Transfer**, 3rd ed., chapter 9, New York, USA, McGraw-Hill, 1998.

KUMMER, S.; PAULETTO, C. **The history of derivatives: A few milestones**. [S.l.: s.n.], 2012. 431-466 p.

LAPLACE, P. S., **Théorie Analytique des Probabilités**, Vol. I, Part 2, Lerch, Paris. (1820).

LESMANA, DONNY C. **An upwind finite difference method for a nonlinear Black-Scholes equation governing European option valuation under transaction costs**. Journal Applied Mathematics and Computation , v. 100, n., pp. 8811-8828, 2013.

MARSHALL, J. F.; BANSAL, V. K. (1993).. Financial Engineering: The Complete Guide to Financial Innovation. (**Handbook of financial**) Broadway, New York, NY 10004-2207: The New York Institute of Finance (a Simon & Schuster Company),1993.

MEIRELLES, J , L , F. **Teoria de opções Reais como instrumento de avaliação de projetos de investimentos**, 2004 Dissertação (Mestrado em Engenharia) Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção da USP. 2004.

MIKHAILOV, M. D., VULCHANOV, N. L. A Computational Procedure for Sturm-Liouville Problems. **Journal of Computational Physics**, v. 50, n. 3, pp. 323-336, 1983.

MIKHAILOV, M.D. and ÖZISIK, M.N., "Unified Analysis and Solutions of Heat and Mass Diffusion", **Handbook of Heat Transfer**, 3 rd ed.,chapter 8 ,John Wiley, New York, 1984.

MIYAGAWA, H, K. **A Técnica da transformada integral generalizada no escoamento em dutos bidimensionais de geometria irregular na forma senoidal** . 2014 . Dissertação (Mestrado em engenharia química). Instituto de Tecnologia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Química 2014.

NASCIMENTO, U. C. S., MACÊDO, E. N., QUARESMA, J. N. N. **Solution for the thermal entry region in laminar flow of Bingham plastics within annular ducts via integral transformation.** Proceedings of the 15th Brazilian Congress of Mechanical Engineering, COBEM-99, Paper Code AAABFD, Águas de Lindóia, Brazil, 22-26 November, 1999.

ÖZISIK, M. N. and MURRAY, R. L. “On the Solution of Linear Diffusion Problems with Variable Boundary Conditions” **Handbook of Heat Transfer** 2nd ed., chapter 10, J. Heat Transfer, v.96, pp.48-51, 1974.

PINDICK, R, S; RUBINFELD, D, L **Microeconomia.** (Manual de Microeconomia) Sexta Edição. capítulo 9, São Paulo, Pearson editora, 2006.

PINDYCK R. S.; RUBINFELD, D. **Microeconomia.** Makron Books, 3 a Edição 1994.

QUARESMA, J. N. N., COTTA, R. M. Integral transform method for the Navier-Stokes equations in steady three-dimensional flow. In: **Proceedings of the Tenth International Symposium on Transport Phenomena**, v. 1, pp. 281-287, Kyoto, Japan, November-December, 1997.

RUBINSTEIN, M. Derivative assets analysis. **The Journal of Economic Perspectives**, v.1, N 2 pp. 73-93, 1987.

SANTOS, G , T. **Aplicação de um Método Adaptativo Temporal de Funções de Base Radial à Solução da Equação de Black-Scholes. 2008.** Dissertação (Mestrado em Engenharia) Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção da UFMG. 2008

SIEGEL, D. R.; SMITH, J. L.; PADDOCK, J. L. Valuing Offshore Oil Properties With Option Pricing Models. **Midland Corporate Finance Journal**, vol.5, Spring, 1987, p.22-30.

WARD, R, W Option and Options Trading. A Simplified Course that takes you from coin tosses to Black-Scholes, **Handbook of Financial.** 5rd ed., chapter 4, New York, USA, The McGraw-Hill, 2004.

WILEY, J. How to calculate Options Price and Their Greeks: Exploring the Black Scholes Model from Delta to Vega. **The Atrium, Southern Gate, Chichester, West Sussex, PO19 8SQ, United Kingdom**, 2015.

WILMOTT, P. **Derivates: The Theory and Practice of Financial Engineering**. New York: John Wiley & Sons, 1995.

WOLFRAM, S. **The Mathematica Book**, Cambridge, Wolfram Media, 2005.

ANEXO I

FÓRMULA (LEMA) DE ITÔ

A formula de Itô é conhecida por regra da cadeia em cálculo estocástico, sendo $V = V(S, t)$, em que V é diferenciável em ambas variáveis, logo uma pequena variação em S fará com que dS também varie, podendo então aplicar-se a expansão em série de Taylor:

$$dV(S, t) = \frac{dV}{dS} dS + \frac{1}{2} \frac{d^2V}{dS^2} dS^2 + \frac{1}{6} \frac{d^3V}{dS^3} dS^3 + \dots \quad (\text{I.1})$$

Sendo dS da equação diferencial estocástica:

$$\frac{dS}{S} = \sigma dX + \mu dt \quad (\text{I.2})$$

Na forma quadrática:

$$dS^2 = (S\sigma dX + S\mu dt)^2 \quad (\text{I.3a})$$

Ou

$$dS^2 = (S\sigma dX)^2 + 2S^2\sigma\mu dt dX + (S\mu dt)^2 \quad (\text{I.3b})$$

Em que se verifica que o primeiro termo da Eq. I.3b $(S\sigma dX)^2$ fica maior quanto menor for dt em função do comportamento assintótico da equação (WILMOTT 1995), logo:

$$dS^2 = S^2\sigma^2 dX^2 \quad (\text{I.4})$$

Embora o movimento Browniano tenha uma trajetória ilimitada, pode-se utilizar a igualdade a seguir para demonstrar-se o lema de Itô:

$$dX^2 = dt \quad (\text{I.5})$$

Substituindo (I.5) em (I.4):

$$dS^2 = S^2 \sigma^2 dt \quad (\text{I.6})$$

Reorganizando a série (I.1) obtém-se:

$$dV(S, t) = \sigma S \frac{dV}{dS} dX + \left(\frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{d^2V}{dS^2} + \mu S \frac{dV}{dS} \right) dt \quad (\text{I.7})$$

Esta é a aplicação do lema de Itô aplicado em (I.2) com variável aleatória S, o qual pode ser aplicado para qualquer variável aleatória que pode ser modelada por uma equação diferencial estocástica.