UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E CIENTÍFICA - IEMCI
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÂO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICAS

Fernando Cardoso de Matos

Orientador: Prof. Dr. José Messildo Viana Nunes

PRAXEOLOGIAS E MODELOS PRAXEOLÓGICOS INSTITUCIONAIS: O CASO DA ÁLGEBRA LINEAR

Belém-PA
2017

FERNANDO CARDOSO DE MATOS

PRAXEOLOGIAS E MODELOS PRAXEOLÓGICOS INSTITUCIONAIS: O CASO DA ÁLGEBRA LINEAR

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas, do Instituto de Educação Matemática e Científica da Universidade Federal do Pará, como requisito para obtenção do título de doutor em Educação Matemática.

Orientador Prof. Dr. José Messildo Viana Nunes.

BELÉM – PA

2017

FERNANDO CARDOSO DE MATOS

PRAXEOLOGIAS E MODELOS PRAXEOLÓGICOS INSTITUCIONAIS: O CASO DA ÁLGEBRA LINEAR

Tese apresentada para obtenção do título de doutor em Educação Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas, do Instituto de Educação Matemática e Científica da Universidade Federal do Pará.

Data da apresentação: 04 de abril de 2017.

Conceito:

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. José Messildo Viana Nunes

Instituto de Educação Matemática e Científica da UFPA – Orientador

Prof. Dr. Iran Abreu Mendes

Instituto de Educação Matemática e Científica da UFPA– Membro Interno

Prof. Dr. Renato Borges Guerra

Instituto de Educação Matemática e Científica da UFPA – Membro Interno

Prof. Dr. Saddo Ag Almouloud

Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – Membro Externo

Prof. Dr. Miguel Chaquiam

Universidade do Estado do Pará – Membro Externo

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP) – Biblioteca do IEMCI, UFPA

Capítulo 1 Matos, Fernando Cardoso de.

Capítulo 2 Praxeologias e modelos praxeológicos institucionais: o caso da álgebra linear / Fernando Cardoso de Matos, orientador Prof. Dr. José Messildo Viana Nunes – 2017.

Capítulo 3

Capítulo 4 Tese (Doutorado) – Universidade Federal do Pará, Instituto de Educação Matemática e Científica, Programa de Pós-Graduação em Docência em Educação em Ciências e Matemáticas, Belém, 2017.

Dedico este trabalho a minha filha, **Maria Fernanda Moraes de Matos**, incentivadora maior na empreitada desta qualificação profissional.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, ***autor e consumador de minha fé***, que esteve sempre presente em minha vida e que me inspirou com fé e sabedoria a escrever este trabalho.

O meu muito obrigado **ao meu respeitado orientador *Prof. Dr. Jose Messildo Viana Nunes*** por suas horas dedicadas ao meu trabalho, pela paciência, pelas disciplinas ministradas e ensinamentos no grupo, pela sabedoria e orientações prestadas no decorrer destes anos.

O meu muito obrigado ao **Prof. Dr. Renato Borges Guerra** pelos ensinamentos no grupo e fora dele e nas disciplinas ministradas, que foram inspiradoras para construção desse trabalho.

Ao professor Dr. Prof. Dr. **Iran Abreu Mendes** pelos ensinamentos.

Ao professor Dr. **Carlos Aldemir Farias da Silva** pelos ensinamentos.

Ao professor Dr. **Saddo Ag Almouloud** pelos ensinamentos.

Ao professor Dr. **Miguel Chaquiam** pelos ensinamentos.

Aos meus colegas do Programa em especial ao grande companheiro professor **José Carlos de Souza Pereira** pelas muitas horas de estudo nas obras que tratavam da Teoria presente neste trabalho e demais colegas que colaboraram com incentivo, companheirismo e apoio.

Ao colega **Flavio Nazareno Mesquita** e **Denivaldo Pantoja** pelos momentos de estudo da TAD.

Ao colega professor **Raimundo Neves de Souza**, pelo companheirismo.

A todos os colegas do grupo de estudos GEDIM.

A todos os professores do IEMCI.

A todos os professores da banca pelas contribuições e incentivo.

Aos meus tios **Ubiraci Ortiz de Matos**, **Edson Ortiz de Matos**, **Edemir Ortiz de Matos** e **José Ortiz de Matos** pelo apoio.

Aos colegas **professores do IFPA** pelo companheirismo.

A minha esposa **Katiane Moraes de Matos** e a minha filha **Maria Fernanda Moraes de Matos** pela força nesta empreitada.

A meu pai **Abilio Ortiz de Matos** pela força que sempre deu ao meus estudos e a minha mãe **Francisca Cardoso de Matos** (in memorian) pelo incentivo que sempre me deu.

A minha tia mãe **Maria de Jesus Leão Cardoso** pelo apoio e incentivo nesta empreitada.

A meu irmão **Fabio Cardoso de Matos** pela força.

Aos colegas **Marcelo Bastos e Welbi Nunes**.

A **SEDUC e IFPA** pelo apoio ao estudo.

Aos **parentes** pela força.

RESUMO

Esta pesquisa trata de nossa inquietação em ensinar a disciplina Álgebra Linear em um Curso de Licenciatura em Matemática, devido a dificuldade dos alunos no entendimento dos objetos estudados. Os objetos sistemas lineares, matrizes, espaços vetoriais, subespaços vetoriais, combinações lineares, base e dimensão foram estudados a partir do estudo qualitativo de sistemas lineares, já que nossa ideia se deu em tornar o conteúdo menos abstração. Estudos nacionais e internacionais já abordaram o assunto utilizando teorias, outras propondo caminhos que demonstrassem as ações e funcionalidades de suas abordagens. Assim, esse trabalho responde as seguintes questões: Que características apresentam as organizações matemática e didática assumidas como praxeologias institucionais, referentes ao ensino de Álgebra Linear e Que condições podemos instaurar em instituição superior para fazer viver certas organizações matemáticas e didáticas com características específicas? Como resposta propomos um modelo epistemológico de referência, composto por um sistemas de tarefas constituídos a partir de um estudo histórico epistemológico em obras originais, as quais tivemos acesso, além da constituição de um percurso de estudo e pesquisa, que foi utilizado como metodologia de ensino em um curso de graduandos de Matemática, com durabilidade de 5 meses entre os anos de 2014 e 2015. A fundamentação teórica baseou-se na Teoria Antropológica do Didático. Partindo de um problema concreto, fizemos uma comparação da nossa proposta de modelo com livro didático adotado para ensinar a disciplina em análise e utilizamos as categorias de análise apoiadas na Teoria, além de comparar o modelo com o texto do saber de um professor que ministra esta disciplina no curso de Matemática. Em nossas análises constatamos que o objeto matemático sistemas lineares vem como apêndice no final do livro, e as tarefas não são articuladas com matrizes, espaços vetoriais e sub espaços, mas que as combinações lineares é uma tecnologia que justifica o estudo das dependências e independências lineares, base e dimensão do espaço. O modelo epistemológico dominante do livro didático analisado e do professor foi apresentar a definição, com aplicações diretas nas tarefas. Para desenvolvermos o estudo criamos três sistemas didáticos: o primeiro foi a criação da organização matemática e didática do modelo de referência, o segundo se deu pelo percurso de estudo com 14 alunos de graduandos e o último analisamos a organização matemática e didática apresentada, por meio dos grupos sobre objetos da Álgebra Linear estudados. O percurso de estudo comprovou que estudar sistemas lineares é estudar a própria Álgebra Linear. A partir do estudo, nossa tese se deu em elaborarmos uma proposta de um Modelo Epistemológico de Referência sobre a Álgebra Linear, voltada para o ensino básico, com impacto direto na formação de professores, tornando-se um modelo epistemológico alternativo para o curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal do Pará.

PALAVRAS-CHAVE: Educação Matemática. Teoria Antropológica do Didático. Álgebra Linear. Percurso de Estudo e Pesquisa. Modelo Epistemológico de Referência.

ABSTRACT

This research deals with our concern to teach the Linear Algebra discipline in a Mathematics Degree Course, due to the students' difficulty in understanding the objects studied. The objects linear systems, matrices, vector spaces, vector subspaces, linear combinations, base and dimension were studied from the qualitative study of linear systems, since our idea was to make content less abstraction. National and international studies have already approached the subject using theories, others proposing ways that demonstrate the actions and functionalities of their approaches. Thus, this paper answers the following questions: What characteristics do mathematical and didactic organizations assume as institutional praxeologies, referring to the teaching of Linear Algebra and What conditions can we establish in a higher institution to make certain mathematical and didactic organizations with specific characteristics? In response, we propose an epistemological model of reference, composed of a task system constituted from a historical epistemological study in original works, which we had access, besides the constitution of a course of study and research, that was used as teaching methodology In a course of Mathematics undergraduates, lasting for 5 months between the years 2014 and 2015. The theoretical basis was based on the Anthropological Theory of Didactics. Starting from a concrete problem, we compared our model proposal with textbook adopted to teach the discipline under analysis and use the categories of analysis supported in the Theory, in addition to comparing the model with the text of the knowledge of a teacher who minister this Discipline in the course of Mathematics. In our analyzes we verified that the mathematical object linear systems comes as an appendix at the end of the book, and the tasks are not articulated with arrays, vector spaces and sub spaces, but that linear combinations is a technology that justifies the study of linear dependencies and independence , Base and size of space. The dominant epistemological model of the textbook analyzed and the teacher was to present the definition, with direct applications in the tasks. In order to develop the study, we created three didactic systems: the first was the creation of the mathematical and didactic organization of the reference model, the second was the study course with 14 undergraduate students and the last one was the mathematical and didactic organization presented through Of the groups on Linear Algebra objects studied. The study course proved that studying linear systems is to study Linear Algebra itself. From the study, our thesis was based on a proposal for an Epistemological Model of Reference on Linear Algebra, focused on basic education, with a direct impact on teacher training, becoming an alternative epistemological model for the undergraduate course In Mathematics of the Federal Institute of Pará.

KEYWORDS: Education Mathematics. Anthropological Theory of Didactics. Linear Algebra, Study and Research Path. Epistemological Model of Reference.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE ABREVIATURAS

ERA	Atividade de estudo e investigação
AL	Álgebra Linear
CAS	Sistema algébrico computacional
CL	Combinações Lineares
FFCL	Faculdade de Filosofia Ciências e Letras
GEDIM	Grupo de Estudo e Pesquisa em Didática da Matemática
GA	Geometria analítica
I	Instituição
IES	Instituições de Educação Superior do Brasil
IEMCI	Instituto de Educação Matemática e Científica
IFPA	Instituto Federal do Pará
LACSG	Linear Algebra Curriculum Study Group
MER	Modelo epistemológico de referência
O	Objeto
OD	Organizações Didáticas
OM	Organizações Matemáticas
OMD	Organizações Matemáticas e Didáticas
OMP	Organização matemática pontual
OML	Organização matemática local
OMR	Organização matemática regional
OMG	Organização matemática global
PER	Percurso de Estudo e Pesquisa
PPC	Projeto Político do Curso
RRS	Registro de Representação Semiótica
S	Sujeito
TAD	Teoria Antropológica do Didático
TDI	Transposição didática interna
TPE	Trabalho Pessoal Orientado
UEPA	Universidade do Estado do Pará
UFPA	Universidade Federal do Pará
USP	Universidade de São Paulo

Sumário

I - INTRODUÇÃO

A motivação em fazermos esta pesquisa decorre de nossa prática como professor da disciplina Álgebra Linear nos cursos de graduação do Instituto Federal do Pará (IFPA). Nessa prática constatamos que nossas praxeologias[1] e de outros colegas que ministram aulas de Álgebra Linear, que é dividida em I e II apresentam semelhanças significativas e que tem como norte o livro texto, como Alfredo Steinbruch (1987), que é o mais utilizado, entre outros, livro este que será analisado nesse trabalho. Além disso evidenciamos as dificuldades apresentadas pelos alunos nas disciplinas Álgebra Linear I e II do curso de Licenciatura em Matemática.

A partir de nossa inserção no Grupo de Estudo e Pesquisa em Didática da Matemática (GEDIM) do Instituto de Educação Matemática e Científica (IEMCI) da Universidade Federal do Pará (UFPA) estabelecemos as primeiras relações com a Teoria Antropológica do Didático (TAD), assim começamos a relacionar noções dessa teoria com nossa prática no ensino da disciplina Álgebra Linear. A partir de então, ao observarmos as praxeologias institucionais no ensino de Álgebra Linear I (a partir de agora AL) presentes no IFPA, as tarefas são apresentadas de forma pontual pelo professor e sem a preocupação de articulação entre setores, temas e objetos, sem interação com outras disciplinas, e sem relação com a matemática ensinada no ensino básico.

Os discentes apresentam dificuldades referente à compreensão de noções essenciais referente a AL em decorrência da abordagem estritamente axiomática dada na instituição. Dorier (1997) reforça nossa ideia, pois em uma de suas pesquisas na França relata que as dificuldades dos alunos com os aspectos formais da teoria de Espaço Vetorial não é apenas do obstáculo com o formalismo, mas em compreender o uso deste na teoria de Espaço Vetorial, além de interpretação dos conceitos formais em relação aos contextos mais intuitivos como Geometria ou sistema de equação linear, de que toda a AL perpassa.

Nossa prática docente em relação aos tópicos de AL é fruto de praxeologias das instituições as quais estivemos em sujeição como, a instituição de nível superior onde cursamos a graduação, e as escolas de nível superior em que trabalhamos como professor de matemática, os livros didáticos, os cursos de formação continuada em nível de especialização, que nutriram continuidade e renovação na nossa relação com os objetos da AL, fazendo acontecer assim uma *dinâmica cognitiva*.

O currículo da referida disciplina no IFPA, por exemplo, é o mesmo desde quando o curso foi criado, em 2001, cujas noções estudadas em na Álgebra Linear I são: matrizes, determinantes, sistemas lineares, espaços vetoriais e transformações lineares, enquanto que na Álgebra Linear II estudam-se auto vetores e autovalores, diagonalização, espaços com produto interno e cônicas.

A AL é uma disciplina importante na área das Ciências Exatas e afins, e se destaca devido às

[1] Adiante trataremos desta ideia da Teoria Antropológica do Didático. São às práticas.

possibilidades de aplicações em diversas áreas do conhecimento científico, como a matemática, na qual se encontra subjacente a quase todos os seus domínios. Percebemos em nossas práticas que há uma facilidade no ensino dos objetos matrizes e sistemas lineares, mas quando começamos a ensinar espaços vetoriais, subespaços, base e dimensão aparecem as dificuldades. Estes conteúdos são introduzidos aos estudantes sem conexões com conteúdo já estudados no ensino básico.

Para subsidiar nosso direcionamento nesta tese procuramos estudar trabalhos de diversos autores a partir da década de 80 do século XX, dando muita ênfase nos trabalhos produzidos na França por Jean Luc Dorier e Dubinsky, além do grupo de estudo do Linear Algebra Curriculum Study Group (LACSG) nos Estados Unidos. Na França o ensino desta disciplina sofreu uma reformulação na década de 60 no século XX, com forte influência de Bourbaki, onde a Geometria se tornaria mais acessível aos estudantes se estivesse alicerçada em axiomas de *estruturas* de espaços afins, portanto um ensino formalista carregado de novas definições e falta de conexão com que os alunos já dominam.

Deixamos o formalismo um pouco de lado, apresentando-o a posteriori, institucionalizando o processo, pois postulamos que deva sim ser ensinado, mas por esta ser uma provável dificuldade em compreender o seu uso nos objetos da AL é que deixamos para um momento adequado. O trabalho de Dorier, Robert, Robinet e Rogalski sobre obstáculo do formalismo da AL reforçam nossa ideia que o formalismo é um obstáculo ao ensino da AL para sucessivas gerações de estudantes.

Portanto, devemos pensar em que condições e restrições podem viver no curso de Licenciatura em Matemática no IFPA as praxeologias matemáticas propostas nesse trabalho baseadas do MER, constituídas em PER de professores em formação no IFPA.

Nesse sentido, buscando tomar às práticas e obras da instituição que fazemos parte, no caso o IFPA, como objeto de estudo e pesquisa procuramos ajuda na Teoria Antropológico do Didático (TAD), que por meio do GEDIM, onde são discutidos textos sobre essa teoria, que nós fazem hoje repensar nossos textos do saber e em minhas praxeologias.

Nossa tese visa elaborar uma proposta de um Modelo Epistemológico de Referência para se ensinar AL, voltada para o ensino básico, ou seja, utilizando-se objetos deste nível de ensino, como provedores de metodologias referente ao ensino, com impacto direto na formação de professores, tornando-se um modelo epistemológico alternativo para o curso de Licenciatura em Matemática do IFPA.

A partir disso, nossa pesquisa é norteada por duas questões diretrizes: que características apresentam as organizações matemática e didática assumidas como praxeologias institucionais, referentes ao ensino de AL e que condições podemos instaurar em instituição superior para fazer viver certas organizações matemáticas e didáticas com características específicas?

Abordaremos no Capítulo II a base epistemológica da pesquisa, onde enfocamos trabalhos que nos orientasse como estavam as pesquisas em AL no Brasil e no mundo, revelando a utilização de dispositivos didáticos, e obstáculos que os alunos tem com relação a aprendizagem da disciplina.

No Capítulo III partimos de uma abordagem histórico epistemológica em obras originais, as quais nos ajudam a (re) construir tarefas, e um modelo voltado para o ensino de alguns objetos da AL, portanto uma proposta de Modelo Epistemológico de Referência (MER) proposto em uma organização didática matemática (OMD), o qual consideramos ser tudo que fazemos para alcançar alguma coisa, isto é, caso queiramos compreender algo, criamos um modelo.

No Capítulo IV O MER se inicia com sistemas lineares, pois admitimos que estes evocam objetos matemáticos da AL e vai até espaços vetoriais. Tal modelo serviu para criticar/confrontar as organizações matemáticas (OMD) presentes nos livros didáticos de AL, as OMD do textos do saber de um professor ministrante desta disciplina. Propormos um Percurso de Estudo e Pesquisa (PER) em uma turma de graduação em Licenciatura em Matemática do Instituto Federal do Pará (IFPA).

No Capítulo V fizemos a análise de duas organizações praxeológicas a partir de nossa compreensão proposta em nosso MER, o qual podemos comprovar que o Modelo Dominante, referente ao ensino de AL na instituição IFPA se dá por apresentar as definições dos objetos matemáticos e resolver tarefas a partir dessas definições.

No Capítulo VI executamos o Percurso de Estudo e Pesquisa com alunos de graduação do curso de Licenciatura em Matemática do IFPA, o qual ocorreu no Instituto Federal do Pará, durante 5 meses, entre 2014 e 2015. O percurso foi organizado a partir de um sistema de tarefas, onde estávamos em busca de uma resposta ótima para o estudo em questão. As técnicas foram justificadas pelas tecnologias estudo qualitativo dos sistemas lineares e combinação lineares, partindo de uma questão geratriz, que desencadeou outros 25 questionamentos dos alunos, com relação ao estudo de AL.

No Capítulo VII apresentamos nossas considerações finais, que levaram em consideração as pesquisas correlatas, a parte histórica epistemológica, o MER, a análise das instituições livro e texto do saber do professor e a dinâmica do PER, além de perspectivas para novos trabalhos de pesquisa.

1.1 PROBLEMÁTICA E JUSTIFICATIVA

Em 1908 em Roma na Itália, matemáticos se preocuparam em discutir o ensino da matemática e para isto formaram uma Comissão Internacional para o Ensino de Matemática, dirigida pelos matemáticos Felix Klein, George Greenhill e Henri Ferh, que visava propor uma reforma do ensino de matemática, sendo que no Brasil o matemático Euclides Roxo encarregara-se de elaborar um projeto de reforma para o ensino, o qual se dava: a formação do professor para lecionar no ensino secundário, metodologia do ensino e a modernização do currículo.

A matemática ocupara um lugar de destaque no sistema de ensino nos países ocidentais, sobretudo da sociedade francesa moderna. Na Inglaterra, na França, Alemanha e nos Estados Unidos a Álgebra é considerada um dos ramos mais úteis da instrução, pois os alunos são levados a converter os problemas matemáticos em equações algébricas, em um processo de *algebrização* da matemática clássica, tornando-a mais rigorosa, precisa e abstrata (MIGUEL; FIORENTINI; MIORIM, 1992).

Com o término da II Guerra Mundial, matemáticos que saíram do continente europeu, encontraram nos estados do sudeste brasileiro, como em São Paulo e Rio de Janeiro, espaço para desenvolver seus trabalhos e que contribuíram no processo de formação de professores e pesquisadores no Brasil. Na década de 40 do século XX começou-se a ensinar a disciplina Álgebra Moderna pelo professor Ascher Zariski, que após estudar em Roma em 1921, passou a se chamar Oscar Zariski, ensinava na (FFCL-USP) em um curso de extensão, auxiliado pelo professor Jacy Monteiro.

O professor Zariski ficou na USP de 1945 a 1946, portanto um ano apenas, e ministrava cursos para professores, como Introdução a Teoria dos Ideais, com enfoque para os Anéis e Corpos, Ideais, levando os alunos ao encontro da Álgebra. Posteriormente, no período de 1948 a 1951, o matemático Jean F. A. Delsarte (1903-1968), também, atuou na Faculdade de Filosofia Ciências e Letras (FFCL) da USP. Lecionou as disciplinas intituladas Teoria das Distribuições, Espaços Vetoriais Topológicos e Teoria da Integração e Hipergrupos e Álgebra de Lie (CAVALARI, 2012).

No início do ano de 1950, a estrutura curricular do curso de Matemática da USP permanecia praticamente a mesma, desde a reforma de 1946, que alterou a grade curricular dos cursos de Matemática no Brasil. No entanto, no terceiro ano do curso de graduação da USP, a disciplina de Álgebra passou a ser ensinada, juntamente, com a de Geometria Superior e conteúdos relativos à Topologia passaram a compor a cadeira de Análise Superior. Posteriormente, na década 60, após nova reformulação curricular, o curso de matemática da USP a disciplina Álgebra era ministrada no 1º e no 3º ano AL do curso de graduação, que segundo Cavalari (2012) estava no currículo influência francesa.

Cavalari (2012) relata que a professora Elza Gomide (1925-2013) pesquisadora e professora brasileira, afirma que nos primeiros anos do curso matemático da FFCL da USP, não se fazia Álgebra, os italianos, que foram os primeiros docentes, só ensinavam Geometria e Análise. A professora Elza relata que aprendeu sozinha a AL e afirmava que a Álgebra Abstrata era ainda mais desconhecida. E foi com a vinda de Zariski, Weil e Dieudonné e com o empenho de Jacy Monteiro que a Álgebra começou a se tornar conhecida em São Paulo.

Segundo Araújo (2008), na década de 60 do século XX, o Movimento da Matemática Moderna objetivou unificar os três campos fundamentais da matemática escolar, através da introdução de elementos unificadores, como a Teoria dos Conjuntos e as Estruturas Algébricas, a Álgebra se destacou. O ensino da Álgebra recebeu um maior rigor e assumiu uma acentuada preocupação com os aspectos lógico-estruturais dos conteúdos e a precisão da linguagem, perdendo seu caráter pragmático, útil para resolver problemas.

O processo de transposição didática interna quando realizada por um docente que questiona as próprias práticas com matemáticas de um determinado objeto, que vive em uma determinada instituição, se constitui em um dispositivo didático de formação pessoal relativo a esse objeto.

A problemática que evidenciamos no ensino da matemática superior pode estar relacionada ao tratamento dado a essa disciplina (AL), enfocando os axiomas e fórmulas, mas sem buscar a compreender da *razão de ser* de se estudar tais objetos matemáticos, de forma isolada, pois se resolvem as tarefas propostas, sem compreender de fato qual a importância destas para o estudo.

Desde que a disciplina AL passou a integrar o currículo das universidades brasileiras foram constatadas várias dificuldades na aprendizagem dos alunos, conforme relatam Araújo (2008) e Celestino (2000), dentre outros. Em nossa prática como professor dessa disciplina no IFPA, evidenciamos esta problemática e isto nos motivou a pesquisar sobre o tema. Tal motivação nos permitiu vislumbrar a possibilidade de trabalhar na perspectiva de um Modelo Epistemológico de Referência (MER), para se ensinar alguns objetos da AL, articulado com alguns elementos do ensino básico, já que esta disciplina é apresentada, sem articulação com outras disciplinas e outros saberes matemáticos já vistos no ensino básico.

Araújo (2008), pesquisou em universidades particulares e públicas na cidade de Campinas, verificando o desempenho e as dificuldades manifestadas por alunos do primeiro ano de diferentes áreas do conhecimento do Ensino Superior e concluintes do Ensino Básico, em Álgebra Básica e constatou que a maioria dos estudantes apresentou baixo desempenho, que vai desde o desconhecimento total da Álgebra e de erros devido à dificuldade da própria Álgebra, tanto em nível conceitual quanto no uso incorreto de propriedades, operações, definição das incógnitas, até dificuldades advindas da aritmética, erros referentes as propriedades e a prioridade das operações.

Celestino (2000) realizou uma pesquisa sobre o ensino e aprendizagem de AL na década de 90, constatando que nas universidades públicas como a Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP) e a Universidade Estadual Paulista (UNESP), entre as disciplinas Cálculo Diferencial e Integral, Geometria Analítica e Vetorial e AL, a disciplina de AL apresenta um índice de reprovação em torno de 25% a 50%, o que demonstra a dificuldade no ensino e aprendizagem dessa disciplina. O autor concluiu que às dificuldades dos alunos em AL vem sendo detectado a tempos por meio dos resultados obtidos pelos estudantes em suas avaliações.

Nos Estados Unidos as investigações sobre o ensino e aprendizagem de AL se deram a partir da criação do Linear Algebra Curriculum Study Group *(LACSG)* em 1990. Na França, as pesquisas sobre didática da AL começaram a aparecer também a partir de 1990, a tese de Jean Luc Dorier sobre o assunto é no início da década de 1990, enquanto que no Brasil, pesquisas sobre o ensino e aprendizagem da AL, são muito recentes, mas tais pesquisas inserem-se no quadro das pesquisas internacionais.

As pesquisas sobre ensino e aprendizagem da AL, em Educação Matemática no nível superior, têm tido uma atenção crescente por parte dos pesquisadores. Segundo Dorier (1993, p. 193):

> É fato que a Álgebra Linear constitui uma parte importante no conteúdo matemático que é ensinado no início da universidade, sendo vista como uma disciplina fundamental por quase todos os matemáticos e por muitos cientistas que a utilizam como ferramenta. Além disso, as dificuldades dos estudantes em Álgebra Linear parecem, tão importantes e visíveis quanto em análise (cf. Robert e Robinet (1989) e Rogalski (1990))....” (DORIER, 1993, p. 193).

A AL tem muitas aplicações se mostrando muito útil como estratégia de resolução de problemas, mas assim como os outros campos da Matemática, apresenta complexidade no processo de ensino e aprendizagem que carecem de pesquisa. Dorier (1993) constatou que nos últimos anos a AL vem despertando um interesse crescente de pesquisadores em didática, tanto na França como no exterior. Seus trabalham mostram uma rica contribuição dada pela análise didática no contexto da AL e também algumas dificuldades encontradas pelos estudantes nessa área.

Nesta tese enfocamos praxeologias institucionais referentes ao ensino de alguns objetos de AL presentes no currículo do curso de Licenciatura em Matemática do IFPA. Assim buscaremos apoio em um MER que possa se tornar um modelo epistemológico de referência alternativo que possibilite analisar as praxeologias institucionais evidenciadas em um livro didático e um texto do saber.

Nessa perspectiva enfocaremos *tipos de tarefas* em um livro didático adotado no ensino de AL no IFPA, pois segundo Menssouri (1994, p. 46), para sabermos como um *saber*[2] vive em uma instituição particular é necessário efetuar a análise dos livros didáticos, pois: “... os livros didáticos constituem uma realização efetiva e objetiva do ensino realizado em classe.

O livro didático legitima-se como *práticas sociais validadas* e é um importante recurso utilizado pelos professores para elaboração do *texto do saber*, ou seja, quando o professor prepara seu plano de aula, portanto desempenha um papel de referência na atividade do professor do ensino superior, pois o professor é responsável por recriar o *saber*, isto é, em fazer o que Yves Chevallard chama de *transposição didática interna* (TDI), quando adéqua um determinado conteúdo para estruturar suas aulas, ou seja, realiza a transformação do saber a ensinar em saber ensinado, na sala de aula.

Justificamos a análise de livros didáticos de Matemática, já que é um parâmetro indicador do estado atual em que se encontra o ensino da AL, nos permitindo caracterizar indícios de como se dá

---

[2] Da a ideia de um modelo, mas na realidade é um termo ainda indefinido, pois o que se tem é a relação com o saber.

o ensino que está sendo desenvolvido em uma instituição, referente a um determinado *saber*.

A partir da problemática anunciada buscamos compreender como se apresentam as tarefas em um livro texto e texto do saber, em termos de articulação e nível de complexidade crescente na perspectiva da Teoria Antropológica do didático (TAD).

Nos inserimos em uma das linhas de investigação que a TAD trata, que é de tentar delimitar vantajosamente a gênese sociohistórica do saber designado para ser ensinado. Segundo Chevallard (1991), tendo em conta as realizações atuais, seria possível construir uma epistemologia artificial como um resumo melhorado, deixando de lado os impasses, os fracassos, mais reimplantando toda riqueza de desenvolvimentos fecundos e as vezes esquecidos da construção histórica do saber.

As questões norteadoras que nos ajudaram a responder o objetivo geral foram: 1) Que características apresentam as organizações matemática e didática assumidas como praxeologias institucionais, referentes ao ensino de Álgebra Linear e 2) Que condições podemos instaurar em instituição superior para fazer viver certas organizações matemáticas e didáticas com características específicas?

Assim temos como objetivo **elaborar uma proposta de um Modelo Epistemológico de Referência sobre a Álgebra Linear I, que nos sirva de entendimento mínimo, para analisar as praxeologias institucionais presentes em um livro didático e um texto de saber institucional e desenvolver uma OMD final a partir das condições e restrições que surgirão no PER, para ser desenvolvido em uma turma da licenciatura em matemática.**

A fim de alcançarmos os objetivos apresentados nesta pesquisa, adotamos os seguintes procedimentos metodológicos:

- Revisão bibliográfica - examinando as obras mais difundidas na área sobre o tema estudado;
- Estudo a disciplina AL**,** no currículo do curso de Licenciatura em Matemática IFPA, assim como do texto de saber de um professor que ministra a disciplina nessa instituição;
- Análise histórico-epistemológica de alguns elementos AL com objetivo de compreender e mostrar como articular objetos do ensino básico com o superior;
- Assumir do referencial teórico que compreende a Teoria Antropológica do Didático (TAD);
- (Re) Construir uma proposta de um Modelo Epistemológico de Referência (MER) a respeito de algumas noções[3] de AL, para confrontar com os modelos estabelecidos na instituição (livros e texto de saber do professor);
- Desenvolver um Percurso de Estudo e Pesquisa Adaptado (PER) com alunos da graduação em matemática do IFPA, para validar o MER como alternativo.

[3] Nos referiremos a noções de AL, aos objetos matemáticos: sistemas lineares, matrizes, espaços vetoriais até base e dimensão.

CAPÍTULO II – BASES EPISTEMOLÓGICAS DA PESQUISA

Neste capítulo enfocaremos pesquisas científicas difundidas em artigos, obras, dissertações e teses. Com bases nestas pesquisas tomamos conhecimento de estudos relacionados ao ensino e aprendizagem da AL. Neste sentido colocamos em pauta pesquisas na área de Educação Matemática, a qual enfocam determinados tópicos de AL, em especial na França, na Turquia, nos Estados Unidos, México e Brasil, que darão suporte a nossa pesquisa. O propósito de mapear o que já se investigou sobre estes tópicos possibilita ao pesquisador ter uma visão geral do estágio de desenvolvimento das pesquisas e, mais particularmente, ter um panorama do processo de ensino de AL nos cursos superiores.

Discorreremos sobre trabalhos científicos que adotaram como questão central o processo de ensino e aprendizagem de objetos da AL. Neste levantamento evidenciamos abordagens cognitivistas, epistemológicas, antropológicas de trabalhos que oportunizaram o estudo de organizações praxeológicas didáticas e matemáticas pelo professor de matemática e que utilizaram determinadas teorias como aplicação de proposta didática. Pretendemos com este levantamento bibliográfico obter sustentação teórica, bem como justificar a relevância de nossa pesquisa.

Agrupamos os trabalhos em categorias nossas categorias de análise, conforme o enfoque de cada pesquisa, tais como: i) Dispositivos didáticos; ii) Pesquisas cognitivas; iii) Obstáculos e dificuldades de aprendizagem.

2.1 ALGUMAS INVESTIGAÇÕES EM MATEMÁTICA EDUCATIVA QUE FAZEM REFERÊNCIA A ÁLGEBRA LINEAR (AL)

As investigações que compõem esta categoria objetiva identificar e analisar as estratégias de ensino de AL propostas por matemáticos no Brasil e outros países.

2.1.1 Dispositivos didáticos

O artigo de Lindner (2003) publicado com o título *CAS-Supported Multiple Representations in Elementary Linear Algebra. The Case of the Gaussian Algorithm* baseou-se em atividades para o algoritmo Gauss-Jordan para a solução de sistema de equações lineares, através de um dispositivo didático, que buscou constituir um ambiente de aprendizagem – CAS – Sistema Algébrico Computacional, que desde 2008 foi incluído na caixa de ferramentas de matemática simbólica (*Symbolic Math Toolbox*) do MATLAB.

O autor supracitado concentrou-se no uso elementar de matriz inversível, em ambos os aspectos matemáticos e de programação, aonde conceitos matemáticos importantes como matriz, operações e conceitos de informática, como dados e controle da estrutura e uso funções internas evoluíram de um modo informal, evitando problemas de conceituação de elementos da AL.

O trabalho teve como foco as etapas cruciais do algoritmo, não se prendendo a detalhes técnicos específicos do programa, tentando reduzir o aspecto formal da matemática ampliando e mantendo as considerações para os alunos de forma simples e clara, tentando substituir as provas de existência puramente matemáticas, como por exemplo, a construção da matriz inversa, pelas construções algorítmicas.

Na França em sua pesquisa sobre *alavancas meta*[4], Jean Luc Dorier (2000) postula como um importante recurso para se utilizar no ensino de AL, os seguintes aspectos: o professor através de seu discurso associado a atividades pode gerar reflexões nos alunos sobre os procedimentos aplicáveis a um problema, as informações constitutivas do funcionamento matemático, como informações sobre jogo de quadros (algébrico, geométrico, numérico, etc.) como um recurso para que o aluno se reorganize para resolver os problemas, o papel dos exemplos e contraexemplos como questionamentos passíveis de *alavancar* conceitos, a passagem do antigo para o novo como elemento *meta*, que auxiliaria o aluno quando a mudança de pontos de vista é necessária. Esta ideia de alavancas meta está relacionado com o metaconhecimento matemático. Na TAD tal instrumento é tratado como dispositivo didático que compõe o milieu (meio), como o uso de tipo de tarefas e tarefas dispostas em nível de complexidade crescente.

Assim como no Brasil, Dorier et al. (1999) relatam em pesquisa sobre a aprendizagem e o ensino da AL nas universidades francesas, que o ensino desta disciplina sofreu grandes modificações dentro dos últimos trinta anos, reportando-se ao ano 2000. A AL representava 1/3 (um terço) dos conteúdos matemáticos no primeiro ano de todas as universidades de ciências franceses no ano 2000. Segundo a pesquisa se inicia com a definição axiomática de um espaço vetorial e acaba com a diagonalização de operadores lineares, com tarefas algorítmicas ligada com a redução de matrizes de operadores lineares.

Utilizando a ideia de *alavancas-meta*, Dorier et al. (1999) possibilitaram aos alunos que enfrentassem tarefas, as quais podiam ser resolvido por eles, fazendo-o ter uma análise reflexiva de possibilidades de generalização ou unificação dos métodos que eles desenvolveram sozinhos. Para

---

[4] "meta" diz respeito ao conhecimento que o sujeito tem sobre seu próprio conhecimento: o que sabe e como o sabe. No caso especifico tem a ver com a reflexão que ele faz em torno do seu próprio conhecimento matemático. A "alavanca" se refere ao recurso ou estratégia de ensino que quando bem elaborada e aplicada num momento adequado poderão ajudar a "alavancar" (DORIER, 2000). Os recursos-meta podem fazer os alunos refletir sobre os objetos matemáticos de Álgebra Linear, que estão sendo estudados. Para ele, os recursos-meta são informações concernentes ao que constitui o conhecimento matemático, isto é, seus métodos, estruturas, organização e reorganização e isto implica em uma certa classificação de problemas para resolver e a identificação das técnicas e ferramentas disponíveis (DORIER 2002).

compreenderem os erros dos alunos utilizaram a análise epistemológica do conteúdo Dependência Linear. Os mesmos concluíram que se deve utilizar menos o formalismo, tendo que haver articulação com os conhecimentos[5] prévios dos alunos e que o desenvolvimento histórico da AL torna-se essencial para a construção do conceito de classificação e em parte da dualidade. A construção de uma abordagem formal, por meio de tarefas é uma condição necessária para a compreensão da profunda natureza epistemológica da teoria dos espaços vetoriais.

Segundo Dorier (2002), tradicionalmente o ensino de AL concentra-se no estudo formal de espaços vetoriais ou uma abordagem analítica baseado no estudo do R^n e cálculo de matrizes. A análise da epistemológica da história da AL é uma forma de revelar alguns obstáculos de ordem epistemológica observáveis no enfrentamento das tarefas pelos alunos.

Com a axiomatização da AL, houve uma reconstrução teórica dos métodos de resolução de problema linear, utilizando os conceitos e ferramentas de uma nova teoria central axiomática, com isto, pensamos que a AL tornou-se muito abstrata, sem articulação com conteúdo previamente estudados pelos alunos e dificultando a compreensão sobre as aplicações de tais conceitos.

Dorier (2002) conclui que um conhecimento mais profundo da natureza dos conceitos e as dificuldades cognitivas que estes trazem, além da ajuda dos professores se torna fundamental, para desenvolver um ensino mais rico e mais experiente, não de uma forma rígida e dogmática, mas com flexibilidade.

Em nossa vivência no ensino de AL no IFPA, percebemos que a relação que os alunos estabelecem com os saberes da AL é em boa parte de reprodução de conceitos e propriedades apresentados pelos professores, e aplicar sem compreender a razão de ser de tal ensinamento, assim relata D'Amore (2007, p 10), no que chamou de *fraude epistemológica*, quando o aluno encontra a solução correta para um problema, simplesmente por reproduzir algo já feito pelo professor, mas não necessariamente por ter entendido a sua necessidade matemática ou lógica a partir do enunciado.

Por sua vez Silva (1999) desenvolveu sua pesquisa intitulada *Algebra Linear como curso de serviço para a Computação,* com base em entrevistas, análise de livros didáticos e acompanhamento de um grupo formado por alunos do curso de Computação, o coordenador do curso de computação e um grupo de pesquisa. A autora concluiu que ensinar AL para o curso de Computação, partindo de um referencial matemático, é problemático porque as tarefas não se articulavam com saberes presentes no curso de computação, em consequência os estudantes não viam necessidade em compreender os conceitos envolvidos, interessando-se mais pela parte de cálculo.

Assim como Silva (1999), constatamos no (IFPA) fenômeno semelhante acontece nos cursos

[5] Chevallard apresenta uma diferenciação entre conhecimento e saber, utilizando na maior parte dos seus escritos, o termo saber. Este seria mais amplo e abstrato que o conhecimento, uma organização coerente deste último.

de Engenharia de Automação e Física, os quais trabalho, que são os cursos que além do curso de Matemática estudam a disciplina AL. Percebemos que este objeto é ensinado da mesma forma, sem se atentar que os cursos têm objetivos diferentes com esta disciplina.

Sobre o tema em questão, Karrer (2003) focou em sua pesquisa a *Análise do tratamento dado às transformações lineares em dois livros didáticos*, que analisa à luz dos Registros de Representação Semiótica [6](RRS) as tarefas propostas nos livros, concluindo que os registros geométricos explorados no estudo das transformações lineares deixam de ser utilizados em muitas tarefas analisados.

Em sua tese defendida em 2006 e intitulada *Articulação entre Álgebra Linear e Geometria. Um estudo sobre as transformações lineares na perspectiva dos registros de representação semiótica* a autora toma como base a Teoria RRS para investigar as trajetórias de aprendizagem de estudantes de graduação no curso de Computação e o impacto dessas escolhas na abordagem de ensino do objeto matemático transformações lineares. A pesquisa envolveu o *design* de atividades sobre o objeto matemático estudado, explorando a conversão de registros em um ambiente de Geometria dinâmica.

Na perspectiva de análise de livros com referência à teoria RRS, sua pesquisa apontaram uma forte valorização dos registros simbólico-algébrico e numérico, além de uma exploração reduzida de representações gráficas, bem como das conversões que têm o gráfico como registro de partida. Para a pesquisadora os registros mais requisitados para a compreensão das transformações são o gráfico, o simbólico-matricial e o numérico-tabular, o que revelou uma discordância entre o que é valorizado nos livros didáticos de AL, pois são pouco explorados e o que é enfatizado nas obras de Computação Gráfica, revelando progressos dos sujeitos na apreensão das condições de determinação de transformações lineares e de especificidades gráficas inerentes a estas.

A pesquisadora aplicou um questionário para alunos de quatro Instituições Particulares de Ensino Superior do Estado de São Paulo. Nesse instrumento concluiu que os alunos apresentaram pouca familiaridade com as diversas representações, apresentando dificuldade no estabelecimento de conversões e uma constante associação do objeto matemático transformação linear, exclusivamente com sua representação algébrica, sendo que na maioria das resoluções foi apresentada na língua natural de emprego comum, porém, segundo a pesquisadora, de forma considerada insatisfatória, com narrativas confusas ou incompletas.

Concluiu que as condições de linearidade praticamente não foram citadas, além disto há deficiências a respeito do conceito de função, tais como a confusão entre função linear e função de primeiro grau e a identificação da função unicamente com a sua representação algébrica. Isso

[6] A Matemática, em particular, trabalha constantemente com objetos abstratos, para apropriar-se de um determinado objeto matemático, o sujeito deve recorrer a sua representação. A originalidade da atividade matemática está na mobilização simultânea de ao menos dois registros de representação ao mesmo tempo, ou na possibilidade de trocar a todo o momento de registro de representação (DUVAL, 2003, p. 14).

interferira na resolução de certas tarefas, além dos estudantes não demonstrarem compreensão do tipo de imagem gráfica possível por meio de uma transformação linear e que várias resoluções foram desenvolvidas com base na percepção, sem o estabelecimento de tratamentos ou conversões entre registros.

Inferimos que ao analisar a organização didática e matemática do livro didático a autora não põe em cheque tais organizações presentes nestas obras. Nesta tese propomos relacionar objetos matemáticos presentes no ensino básico, como os sistemas lineares, procurando, identificar articulações possíveis com conteúdo do ensino básico que podem ser trabalhados em tópicos de AL.

Karrer (2009) analisou quatro obras didáticas de AL. A análise foi específica de situações que envolvem conversões com gráfico devido ser a menos explorada. Nessa investigação a pesquisadora observou que os registros gráfico e tabular são os menos requisitados no ensino das transformações lineares e as obras que mencionam o uso de software, mas não integram, efetivamente, no desenvolvimento do conteúdo, sendo indicados preferencialmente como recursos em tarefas complementares.

Laugwitz (1974) publicou o artigo *Motivação e Álgebra Linear*, nele destaca-se o uso de tarefas envolvendo a disciplina AL, que devem ser utilizados com estudantes do ensino básico e superior, tais que estes devem ser tomadas a partir da vivência cotidiana dos discentes e devem ser acessíveis para as suas idades.

No trabalho o pesquisador relata que quase todos os livros didáticos de AL não trazem tarefas articuladas e utilizam a Geometria com solução (técnica), até mesmo nos livros escritos por engenheiros para estudantes de engenharia e por economistas para estudantes de economia, fazem uso da mesma organização matemática, cometem os mesmos equívocos: apresentam as matrizes, a teoria envolvendo espaços vetoriais e no final apresentam algumas aplicações.

As motivações para o ensino de AL devem ser extra matemática, como: estudo da mecânica, pois a adição de vetores (regra do paralelogramo) e produto interno que vem com a noção de trabalho; o conceito de *caixa preta* dá uma introdução muito útil para modelação matemática, pois o aluno é intuitivamente levado a multiplicar matrizes, ter noções de matrizes inversas, sistemas lineares e otimização linear; outra motivação se dá nas codificações e decodificações onde as mensagens podem ser enviadas a partir de matriz de codificação, e para se decodificar precisa-se da inversa; população de matrizes onde se utiliza auto valores e auto vetores; matrizes estocásticas e otimização linear.

Coadunamos com o pesquisador Laugwitz (1974), ao aludir que antes de abstrairmos assuntos como as transformações lineares podemos mostrar que ao resolvermos um sistema linear de 3 equações e 3 incógnitas é possível se observar a transformação, pois são fornecidos elementos da imagem, como o termo independente para determinar os elementos do domínio que são as variáveis ou quando resolvemos um sistema homogêneo, estamos na realidade determinando o núcleo de uma matriz.

Carlson (1993) preocupa-se com o ensino e reforma da AL nos Estados Unidos, desenvolve pesquisa sobre operações matriciais, sistemas de equações lineares, propriedades no R^n, autovalores e auto vetores, além de ortogonalidade. No seu artigo relata que seus alunos não sentem problema na primeira parte do curso de AL, quando estudam sistemas lineares e matrizes, mas a partir de espaços vetoriais, subespaços vetoriais, base dimensão e transformações lineares, ou seja, na parte abstrata do estudo os mesmos sentem dificuldades, pois seus alunos não apresentam conhecimentos prévios de conteúdos básicos.

Para Carlson (1993) o problema não está nos procedimentos algorítmicos, mas a aprendizagem dos conceitos sobre os temas; os métodos adequados de ensino e práticas multidimensionais não são realizados; não há análise das tarefas e estas não são articuladas com outros conhecimentos.

Segundo Carlson (1993), os conceitos são muitas vezes ensinados sem substancial conexão com ideias matemáticas previamente apreendidas pelos alunos, sem exemplos ou aplicações. O autor se pergunta sobre o que pode ser feito para despertar o interesse de alunos entre 14 e 15 anos de idade em relação a noções preliminares de AL, assim como cita já que os há uma forte motivação intrínseca para a matemática linear, como as funções lineares, as equações diferenciais e integrais.

O pesquisador relata que tais motivações devem ser extra matemática, como: estudo da mecânica, no caso da regra do paralelogramo e produto interno que vem com a noção de trabalho; o conceito de *caixa preta* dá uma introdução muito útil para modelação matemática, pois o aluno é intuitivamente levado a multiplicar matrizes, ter noções de matrizes inversas, sistemas lineares e otimização linear; outra motivação se dá nas codificações e decodificações onde as mensagens podem ser enviadas a partir de matriz de codificação, onde para se decodificar precisa-se da inversa; população de matrizes onde se utiliza auto valores e auto vetores; matrizes estocásticas e otimização linear.

Ainda para Carlson (1993) os alunos não encontram dificuldade em resolver sistemas lineares e matrizes, mas no estudo de subespaços, espaço gerado, independência linear é que ocorrem os problemas de aprendizagem. Algumas razões são: AL é ensinado muito cedo (segundo período) para alunos imaturos, tópicos com subespaços e independência linear são conceitos, e não algoritmos, algoritmos diferentes são necessários em contextos distintos: para se determinar independência linear de vetores e de funções por exemplo e conceitos são introduzidos sem conexão com experiência anterior do aluno e sem exemplos significativos de aplicações.

Recentemente Uhlig (2015), em recente pesquisa desenvolvida na Universidade de Auburn nos Estados Unidos, enfatiza o valor de conceitos e princípios da AL, postulando que podem ser iniciados por conceitos, práticas computacionais ou aplicações, tornando mais compreensíveis noções estudadas. Sua pesquisa parte da ideia da representação *matricial de transformação linear*, matrizes semelhantes, matriz inversa, seguido de equações lineares, e por fim os demais assuntos da AL.

Para o autor o princípio básico para se estudar AL parte do que chamou de *núcleo conceitual*, pela equação fundamental: $F(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$, pois esta possui (a) vetores, combinação lineares $\alpha x + \beta y$ e é uma transformação linear entre dois vetores, fazendo uso das equações lineares.

Nessa perspectiva Uhlig (2015) apresentou a dependência e independência lineares por meio de escalonamentos de sistemas. Em seguida utiliza a Geometria no R^n para mostrar os subespaços gerados pela transformação linear estuda o *kernel e a imagem*, apresentando a ideia de base e dimensão. Para o pesquisador trata-se de um modo prático de resolução, concluindo que o curso inteiro tornou-se uma experiência de auto avaliação tanto para professores, quanto para alunos, além de que a abordagem conceitual, que se baseia transformações lineares e reduções de linha, oferece um aprendizado sólido e boa proficiência em matemática.

As pesquisas acima citadas nesse trabalho nos inspiraram em construir uma proposta de modelo de ensino de alguns elementos de AL, pois as ideias dos pesquisadores esta relacionada ao ensino, e estão preocupados na construção do ambiente de estudo de AL nas IES.

2.1.2 Pesquisas Cognitivas

As investigações que compõem esta categoria objetiva identificar e analisar o comportamento cognitivo das estratégias de ensino de AL propostas pesquisadores da Educação Matemática no Brasil e outros países.

Padredi (2003) parte de uma abordagem cognitiva e investiga em sua dissertação, os chamados *recursos meta* evidenciados no discurso de seis professores universitários, que ministram aulas de AL, com enfoque nos meta conhecimentos matemáticos, referente a noção de base de um espaço vetorial emergiram destes docentes. Conclui que a AL é uma ferramenta importante para os outros cursos de graduação e que não existem aplicações que poderiam inspirar a elaboração de situações problema condizentes com os conhecimentos dos alunos de um primeiro curso, que por ser uma disciplina complexa, reprova entorno de 25% a 40% e a noção de base foi destacada como prioritária para um primeiro curso de AL.

Um recurso meta utilizado pode ser a dialética antigo-novo utilizado pelo professor como ponto de partida do que o aluno já apreendeu e a partir deste preparar uma Organização Matemática Didática (OMD) de modo a ir lhe revelando um novo saber. Para Padredi (2003) o recurso meta observado no discurso dos professores entrevistados teve a Geometria Analítica como sendo a passagem do antigo para o novo conhecimento.

A autora supracitada identificou alguns recursos meta que podem se tornar *alavancas meta*, são eles: a ideia de um sistema de geradores minimal podem gerar reflexões dos alunos sobre a vantagem de se conseguir um número mínimo de vetores para gerar o espaço, induzindo-os a compreender a necessidade de serem vetores linearmente independentes, enquanto que um conjunto maximal de vetores linearmente independentes pode se conseguir o maior conjunto linearmente independente que dará origem ao espaço, surgindo a noção de sistema de geradores, dando origem ao conceito de base. Outra alavanca *meta* são as operações adição e multiplicação por um escalar, que bastam para caracterizar um elemento genérico do espaço vetorial por meio de um número finito de vetores bem comportados desse espaço.

Também na linha cognitiva Prado (2010), visou identificar, por meio de entrevistas, a concepção dos alunos, que concluíram um curso de AL têm sobre a noção de *base* de um espaço vetorial, utilizando a teoria APOS[7], que considera os processos mentais pelos quais novos conceitos abstratos são adquiridos. Tal teoria foi utilizada para descrever um possível caminho para a construção da noção de base de um espaço vetorial. A pesquisadora conclui que cinco entrevistados demonstraram ter construído uma concepção do objeto sobre a noção de *base,* concebendo *base*, como sendo um conjunto gerador com vetores linearmente independentes.

Outra pesquisadora que utiliza a teoria APOS foi Parraguez (2009) para investigar a evolução cognitiva da noção de espaço vetorial por estudantes de AL e as correlações estabelecidas por esses estudantes a outras noções, como por exemplo, dependência linear em um conjunto de vetores e base de um espaço vetorial. A partir desse estudo, a autora afirma que, os estudantes não reconhecem a série de requisitos que um conjunto deve possuir para ser um espaço vetorial.

Para Parraguez (2009) o aluno reconhece o espaço vetorial como sendo uma estrutura abstrata e o utiliza de modo coerente e estabelece relações entre as noções elementares, sendo possível determinar quando a estrutura é aplicável a um problema ou não.

Relacionar as teorias APOS e a TAD, no que diz respeito ao componente teórico, além dos componentes técnicos e tecnológicos, pois ambas são praxeologias de investigação em didática. Trigueros et al. (2012) ao destacar que ambas teorias que incorporam a análise da matemática escolar como parte de sua problemática. A teoria APOS propõe em seu modelo epistemológico uma interpretação das matemáticas que enfatizam sua decomposição em conceitos matemáticos, já que o cerne da teoria é a aprendizagem de sujeitos genéricos, a atividades dos mesmos ao enfrentar tarefas matemáticas específicas. Enquanto, na TAD a atividade matemática é uma atividade humana institucionalizada, em que os conceitos ou teoremas, por exemplo, se consideram componentes das

[7] Segundo Dubinsky (1991) a teoria APOS (actions, processes, objects, shemas) surgiu na tentativa de compreender o mecanismo da abstracção reflexiva, introduzido por Piaget para descrever o desenvolvimento do pensamento lógico nas crianças e estender esta ideia aos conceitos matemáticos mais avançados.

praxeologias matemáticas.

Os principais construtos teóricos das pesquisas Parraguez (2009) e Prado (2010) relatam a abstração da disciplina em questão, e propõe numa linha cognitiva busca no sujeito o problema, enquanto que nessa tese buscamos o problema na própria matemática, no processo de ensino e aprendizagem. Em relação ao trabalho de Padredi (2003) utilizaremos como recurso meta os sistemas lineares.

2.1.3 Obstáculos e dificuldades de aprendizagem

As investigações que compõem esta categoria objetiva identificar e analisar os obstáculos de aprendizagem relacionadas ao ensino de AL propostas por educadores matemáticos.

Coimbra (2008) investigou os obstáculos de aprendizagem e a estreita relação com o desenvolvimento histórico epistemológico do conhecimento relacionados à disciplina AL, relatando que esta disciplina, se caracteriza como uma teoria algébrica unificadora para o estudo de diferentes áreas da matemática, como a Geometria, as equações diferenciais lineares, a análise funcional, além da análise matricial e por isso tem um caráter abstrato.

Comenta que a AL tivera várias origens, como a Geometria, no estudo de ortogonalidade e conclui que a Geometria pode auxiliar no ensino da AL, mas não serve como o único tópico a conduzir a AL, pois pode ser associado aos saberes: polinômios, funções, sequências, os quais parecem ajudar mais os alunos a conferir a ampliar significados para um resultado geral e o estudo dos sistemas de equações lineares.

Para o pesquisador a AL não pode ser ensinada como uma mera generalização da Geometria, assim o docente deve dar mais importância a questões epistemológicas e históricas para se ter um conhecimento das dificuldades relacionadas aos conhecimentos inerentes a AL. Além disso deve noções dessa área com conteúdo já vistos pelos alunos no ensino básico para atenuar os aspectos mais formais da AL.

Wawro et al. (2011) no artigo mostraram que um curso de AL é fundamental, mas de extrema dificuldade para estudantes universitários. Para os pesquisadores a AL pode ser aplicada nas áreas da engenharia e estatística, para modelar situações reais, além de ser estudada como uma abstração matemática que repousa sobre as ideias centrais com abordagens postulantes. Segundo eles as atividades matemáticas centrais para a AL com frequência envolvem ideias matemáticas e definições com os quais os alunos têm pouca experiência, como subespaço ou transformação linear.

Wawro et al. (2011) afirmam que os livros trabalham com o conceito de imagem, com o objetivo de investigar os caminhos que os estudantes tem em conceituar a ideia fundamental de subespaço e como essas concepções são conectados a definição formal da ideia já que o subespaço é um conceito adequado para explorar a linguagem algébrica usada na definição formal e as imagens geométricas.

Na pesquisa supracitada foram entrevistados estudantes universitários com bom desempenho do primeiro ano matriculado no 1º ano de um curso de cálculo de uma universidade americana. A AL foi trabalhada na perspectiva de proporcionar uma estrutura formal para estender ideias geométricos de R^2 e R^3 para R^n, de modo a apoiar o cálculo multivariável na generalidade de n dimensões não discutindo os espaços abstratos do vetor.

A noção de subespaço foi introduzida no curso através da definição formal motivado pela intenção de identificar subconjuntos *planos* de R^n que podem servir como *espaços tangentes* para gráficos em cálculo, além de concatenar definições formais com a geométrica e a derivada, sendo definido como um transformação linear a melhor aproximação de uma função.

Em sua análise Wawro et al. (2011) revelaram que os alunos interpretaram o formal, definição em termos compatíveis com as suas imagens de conceito; os estudantes perceberam a utilidade da definição de identificação de exemplos e contra exemplos, bem como para justificar as propriedades de subespaços, demonstrando que em AL as definições podem ser uma ferramenta importante para desenvolver intuições gerais sobre conceitos matemáticos, que podem tornar-se um catalisador para juntos aos aspectos aparentemente díspares e potencialmente conflitantes como intuições geométricas e algébricas.

Os autores concluem que intuições geométricas sobre AL podem causar dificuldades para os alunos que frequentemente utilizam noções geométricas, para explicar o subespaço, embora essas noções possam dificultar quando se trabalha em mais de três dimensões.

Para explicar algumas dificuldades do ensino e de aprendizagem da AL, Dreyfus, Hillel e Sierpinska (1998) classificam a linguagem no estudo de AL em três tipos: 1) *a* linguagem da teoria geral (espaço vetorial, subespaço, dimensão, operadores, núcleo, etc.) denominada *linguagem abstrata*; 2) a linguagem da teoria mais específica do Rn (n-uplas, matrizes, etc) denominada *linguagem algébrica* e 3) a linguagem *geométrica* do R^2, R^3 (vetor geométrico, pontos, retas, planos e transformações geométricas) denominada linguagem geométrica.

A principal dificuldade deste desmembramento da linguagem é quando se utiliza tal linguagem como metáfora e qual é mais correto de se utilizar num determinado objeto de estudo da AL, isto é, passar da linguagem aritmética para a algébrica.

Harel (1990) pesquisa dificuldades ligadas ao ensino e à aprendizagem da AL e recomenda ao professor utilizar a *demonstração*, onde um curso deve conter demonstrações para aumentar a compreensão da Álgebra; o tempo deve ser suficiente para o ensino desta disciplina, tendo um currículo centrado na teoria de matrizes e vetores, o qual deve ser priorizado; *utilização das novas* *tecnologias educativas*, como o uso do MATLAB; *conteúdo*: conceitos devem limitar-se ao conjunto **R**, um vetor, que é uma coleção ordenada de reais ou que uma transformação linear é uma matriz.

Pensamos como Harel (1990), pois há condições possíveis de um programa educacional desenvolvido para que alunos estudem AL, que seja possível analisar sistemas lineares com motivação geométrica em três dimensões para compreender os espaços vetoriais, dependência e independência linear, combinação linear e base e dimensão e que por fim trabalhe com a parte mais abstrata, onde estão os elementos infinitos.

Segundo Harel (1990) propos 3 princípios: *concretização*, *necessidade* e *generalização*. O primeiro trata que os alunos no processo de aprendizagem trabalham conceitos e aplicam em meio concreto (geométrico), para que adiante possam abastrair; o segundo provoca no aluno a necessidade de utilizar em outro contexto os conceitos já trabalhados, trabalhando com o novo conceito e por fim a generalização, onde os alunos irão abstrair.

Uma das principais dificuldades na aprendizagem da AL tem a ver com a variedade de linguagens, registros de representação semióticos, pontos de vista e interpretação dos conceitos formais em relação aos conceitos mais intuitivos. O obstáculo de se iniciar por definições e aplicações, cria dificuldade para os estudantes, levando-os a produzirem um discurso escrito formalmente semelhante ao que está escrito nos livros didáticos, mas sem entender o significado dos símbolos e da terminologia.

Evidenciamos que o problema relacionado no ensino de AL, tem sido pesquisado em vários países do mundo, na Turquia Isik et al. (2014) realizaram pesquisa com 72 alunos matriculados da disciplina AL, que visou mostrar um relatório de pesquisa contendo as dificuldades dos alunos em AL. Os alunos relataram como as principais dificuldades com relação a estrutura dos cursos: a abstração da disciplina, complexidade dos tópicos, não transferir os conhecimentos obtidos para o futuro; com relação ao ensino: sistema de ensino, falta de recursos adicionais e o tempo; em relação a dificuldade decorrente dos estudantes: falta de preparo e não internacionalização[8] dos tópicos e em relação aos benefícios do curso para os alunos, os alunos destacaram desenvolver habilidades de pensamento matemático e abstratas. O tópico mais interessante para os alunos foi o estudo das matrizes devido os mesmos terem conhecimento prévio e conhecimento operacional sobre o tema.

Sierpinska et al. (2002), propuseram verificar o comportamento de estudantes de AL, que utilizaram o software Cabri - Geometria II para desenvolver macro construções para representar um espaço vetorial no R^2 e suas transformações. Em suas análises os autores avaliaram certas características do modo de pensar, que de certa forma, seria responsável pelos erros dos alunos, como por exemplo, *o problema de estender uma transformação de base para uma transformação linear de*

[8] No sentido de aprender.

todo o plano. Sua investigação mostrou que a dificuldade dos estudantes estava relacionada em suas maneiras de pensar no prático, em vez do pensamento teórico. Observaram a tendência para basear suas compreensões de um conceito abstrato em "exemplos prototípicos ", em vez de em sua definição, como por exemplo, as transformações lineares foram entendidas como "rotações, dilatações e combinações destes", tornando-se difícil para eles ver como uma transformação linear pode ser determinada pelo seu valor em uma base, mantendo-se a ideia de matriz de uma transformação linear em nível de procedimento.

A pesquisa de Dias (1993) intitulado *Contribuição para a análise de um ensino experimental de Álgebra Linear na França*, objetivou avaliar, por meio de provas escritas, os alunos do primeiro ano universitário (DEUG A) aos conhecimentos sobre às noções de independência linear e de posto no R^n e a ligação entre o implícito e o paramétrico, utilizando como metodologia a engenharia didática. A pesquisadora constatou que certos alunos usaram diferentes procedimentos e, notou que, mesmo estando no enunciado da tarefa que a técnica deveria ser justificada sem o uso de cálculos, alguns estudantes utilizaram o Método de Gauss para a sua resolução.

Os estudantes dominavam a técnica da determinação do posto e seu conceito representava o maior número possível de vetores linearmente independentes; quanto ao conceito de dependência linear não ficou claro se ele foi bem compreendido, pois quando tinham de usar a noção de dependência linear como meio para *controlar* as respostas encontradas, os estudantes não o faziam ou desenvolviam algum outro procedimento. Relata que os estudantes têm uma noção de dependência linear, porém, encontram dificuldades para aplicá-la quando o problema proposto não traz este conceito explícito no enunciado.

Podemos destacar no trabalho de Dias (1993), como em outros citados neste capítulo, que os alunos não compreendem o que estão fazendo na realidade e sim aplicam a definição, as propriedades, mas sem de fato entender qual a razão de ser do objeto matemático independência linear, dependência linear e posto.

Ao constatar a dificuldade no ensino de AL, buscaremos aprofundar estudos históricos epistemológicos, sobre alguns temas dessa área, para desenvolver OMD, que possam favorecer a apreensão dos objetos sistemas lineares, matrizes, espaços vetorias, base e dimensão, já que as pesquisas revelam que há dificuldade no ensino de AL no mundo.

Os construtos oriundos das pesquisas citadas nesse capítulo, como as de Harel (1990), Wawro et al. (2011) com exemplos e contra exemplos, Prado (2010), Padredi (2003), Laugwitz (1974) foram fundamentais para a construção desse trabalho de tese.

Ventilado a dificuldade do aprendizado dessa disciplina no ensino superior, então partiu-se de um objeto do ensino médio, que são os sistemas lineares para trabalharmos com objetos do ensino superior, articulando os saberes em um nível de complexidade crescente.

CAPITULO III – ESTUDO HISTÓRICO EPISTEMOLÓGICO DOS OBJETOS DE ESTUDO

Neste capítulo iniciamos com um apanhado histórico de alguns objetos da AL, pois tal estudo auxilia no entendimento da construção de saberes e no desenvolvimento de conceitos matemáticos, para assim entendermos as transformações sofridas por algum desses objetos[9], até chegar aos dias atuais, já que história da matemática trabalhada de forma articulada, poderá auxiliar o professor no desenvolvimento de atividades em sala.

3.1 HISTÓRICO SOBRE A ÁLGEBRA LINEAR

Em nossas práticas no curso superior, ministrando a disciplina AL no IFPA, no trabalho com objetos desta disciplina, constatamos que o enfoque dos estudos de AL e sob seu aspecto formalista da matemática, isto é, definições, conceitos, teorias, axiomas, teoremas, entre outros, e pouca ou nenhuma atenção é dada ao aspecto histórico e epistemológico na disciplina, o qual nos permite descobrir a gênese dos objetos matemáticos, permitindo ao professor ao elaborar seu texto do saber, fazer relações dos saberes matemáticos com suas origens.

A história dos objetos matemáticos nos permite reconstruir os processos matemáticos heurísticos para mostrar, que é um produto do raciocínio humano no contexto sociocultural. Nesse sentido tal abordagem pode construir um saber, transcendendo meros processos algorítmicos, que é muito comum na AL devido seu caráter axiomático.

Nossa intenção é (re) construir alguns objetos da AL, pois isso é necessário no ensino de AL, verificando as condições de como foram criados. Esta pesquisa caracterizou-se pelo *estudo qualitativo de sistemas lineares*, para mostrarmos a gênese da AL, como uma perspectiva de articularmos os objetos matemáticos.

Nos primórdios a humanidade precisou-se contar, logo precisou medir. As práticas de medição eram importantes, desde que o homem se estabeleceu a partir de seu estilo de vida nômade e começou a usar materiais de construção; ocupando terras e comércio com seus vizinhos. Inicialmente, tínhamos *distância* ou *segmento de reta*, mais tarde seria chamada de *distância entre dois pontos*, a qual era a *menor distância*.

Segundo Bruter (1998), as primeiras representações dos fenômenos luminosos desempenharam um papel muito importante para o nascimento da Geometria. O raio luminoso era o mais trabalhado dos fenômenos, sendo que Euclides desenvolveu na obra Óptica, escrito na primeira metade do século III a.C, uma teoria descritiva deste fenômeno. Tratava os raios luminosos como

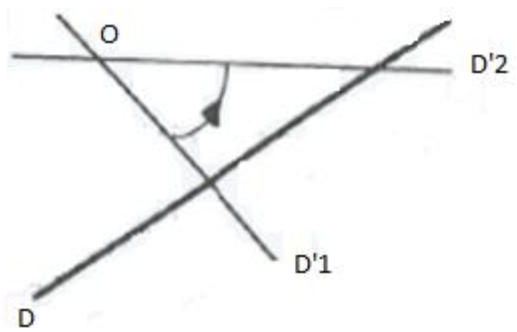
[9] São os conteúdos de Al, como sistemas, matrizes, espaços vetoriais, combinação linear, LD, LI, base e dimensão.

linhas retas geométricas.

Já havia ideias para se gerar o espaço. Segundo Bruter (1998, p. 90), a partir de uma reta **D** e de um ponto **O** exterior a **D**, é possível se gerar o plano, pois este é obtido pela rotação em torno de **O** de uma outra reta, de uma outra reta **D'** que passa por **O** e se apoia da reta **D**. Logo uma reta **D** e um ponto exterior a ela geram um plano. Da mesma forma se tivermos duas retas **D'_1** e **D'_2** concorrentes, que se intersectam em **O**. Fazendo as retas rodarem em torno do seu ponto de encontro **O** de modo que se apoiem sobre a mesma reta D, estas geram o plano (Figura 1).

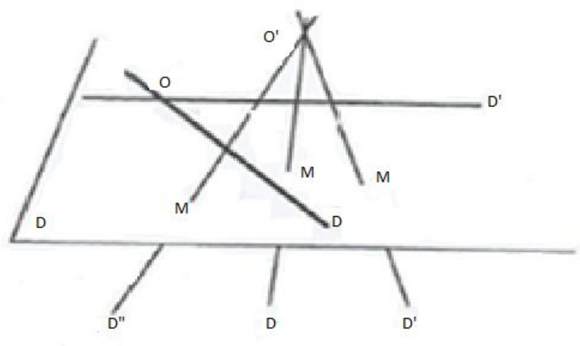
Caso consideremos um plano gerado por **D** e **D'** e um ponto **O** exterior ao plano. As retas **D'** passando por **O'** e que se apoia em M do plano. Quando **M** percorre o plano **D'** descreve o espaço usual de três dimensões (Figura 1a) e (Figura 1b).

Figura 1a – Representação do plano.



Fonte: Bruter (1998, p. 90).

Figura 1b - Representação do espaço.



Fonte: Bruter (1998, p. 90).

Nesta perspectiva Gauss (1777-1875) desenvolveu o processo de resolução de sistemas, a partir de medições e observações de astronomia, além do trabalho de Nicolau Oresme intitulado Commensurability ou Incommensurability of the Celestial Motions [Comensurabilidade ou incomensurabilidade dos movimentos celestes] (tradução nossa). Oresme no século XIV, teve a ideia de representar a variação de uma grandeza, que muda com o tempo por um gráfico.

Oresme utilizou a doutrina da incomensurabilidade celestial para refutar as ideias de Aristóteles, de que corpos celestes no Universo possuíam almas, isto é, intelectos divinos que os guiavam ao longo das suas viagens, sendo estes responsáveis por seus movimentos. Para Oresme sua doutrina era que determinava um ou mais movimentos celestiais, relatando que existia um passado eterno e um futuro eterno.

Por conseguinte, a Álgebra do século XVIII aparece como *aritmética generalizada*, onde poderíamos resolver um problema da aritmética, usando letras, com isto tínhamos uma visão mais geral, *cristalizando* as práticas que se fazia com a aritmética, pois se pensava nas letras como se fossem números. Esta visão ainda está presente na escola básica no Brasil, onde a Álgebra como uma regra em um processo de generalização. É comum observarmos o professor dizer que $x.x.x.x = x^4$, pois 10.10.10.10 = 10^4 (exemplo de generalização), pois como se trabalha com os números o mesmo se faz com as letras (USISKIN, 1995).

A Geometria, como ciência dedutiva, criada pelos gregos não apresentava operacionalidade. A Álgebra veio como princípio unificador. No século XVII a Álgebra estaria, razoavelmente, aparelhada para uma fusão criativa com a Geometria. Segundo Aristóteles e Heródoto a Geometria nascera no Egito, e ganhou embasamento teórico a partir de Euclides[10] na Grécia, já que neste pais este objeto era provado com a *razão*. A Geometria Euclidiana Plana, proposta por Euclides em nove livros na obra Os Elementos, que tratava de Geometria, teve um papel fundamental neste processo histórico, pois esta era considerada verdadeira pelos matemáticos, já que detinha um *modelo de rigor lógico*.

François Viète (1540-1603) dirigiu sua atenção para os métodos de análise de obras matemáticas gregas dos séculos XVI e XVII, registados em especial no Livro VII da Coleção Matemática de Papo. Viète identificou a *Análise* grega com a nova *Álgebra*, buscando apresentá-la de forma inteligível. Para isto utilizou como recurso o simbolismo, pois para escrever fórmulas houve necessidade de uma nova concessão de símbolos, não tão simples de se compreender, mas consistente, reconstruindo, em termos algébricos, a *Análise* geométrica clássica. Assim, os trabalhos de Viète desempenharam um papel preparatório e impulsionador no desenvolvimento de ideias algébricas, que influenciariam futuramente matemáticos, também franceses, como Descartes e Fermat (RAMOS, 2013).

3.1.1 A transgressão da Geometria Analítica

O trabalho de Oresme do século XIV, Tractatus de configurationibus qualitatum et motuum [Tratado de configurações qualidades e movimentos] escrito, inicialmente, em latim, que abordava um sistema de representações geométricas com o intuito de explicar e representar por figuras geométricas, causas de determinados fenômenos físicos, isto é, Oresme introduziu figuras geométricas para representar o comportamento das *qualidades*. Na obra Oresme busca uma abordagem qualitativa e métrica moderna com a natureza (matematização da natureza), trazendo representações gráficas inovadoras (MENDES, 2015).

Concebera a ideia de usar coordenadas retangulares (latitude e longitude) e as figuras geométricas resultantes para distinguir entre as distribuições uniformes e não uniformes de várias quantidades, mesmo estendendo a definição para incluir figuras tridimensionais. Segundo Mendes (2015, p. 221), Oresme procurou apresentar e explicar a ciência de figurar qualidades e movimentos, com a intenção de apontar possíveis causas dos diversos fenômenos naturais. Na linha horizontal

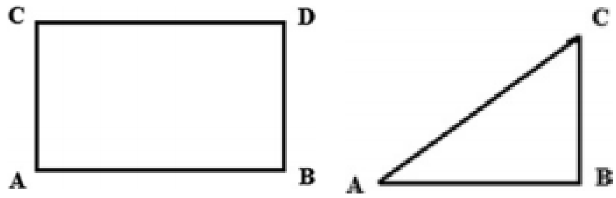
[10] Pouco se sabe sobre Euclides, pois teria vivido 300 a. C. Escrevera os Elementos, obra está que reunia grande parte do conhecimento matemático do seu tempo.

representava um objeto ou o tempo e nas verticais as intensidades, sendo a área total delimitadas pelas duas linhas. Com seus estudos tornou o que seria um elemento qualitativo como a velocidade em uma grandeza quantitativa e que podia ser medida.

A ideia básica da obra é a seguinte: no caso de um movimento uniforme, é evidente que os segmentos que representam as intensidades será tudo igual. Se representarmos com segmento AB um determinado intervalo de tempo e com AC e BC as velocidades iguais nos instantes iniciais e finais, teremos um retângulo ABCD em que os segmentos que representam as velocidades nos diferentes instantes vai ser contido, ou seja, a figura representa toda a distribuição das intensidades na qualidade, isto é, a quantidade de qualidade. No caso de movimento, representa todo o espaço coberto de um dado intervalo de tempo (Figura 2**)**.

No caso de um movimento uniformemente acelerado, uma vez que a velocidade aumenta a uma taxa uniforme, a figura relevante será um ângulo reto do triângulo se o movimento começa a partir de descanso (ver Figura 2).

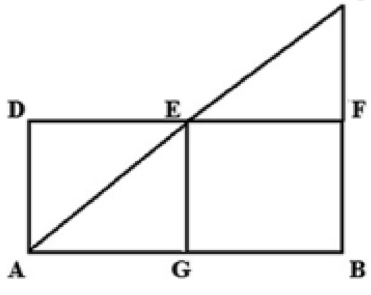
Figura 2 - Figura utilizada para representar o movimento. Representação do Movimento uniforme e variado.



Fonte: Boccalett (2016, p. 37).

Se ABC é o triângulo retângulo representando o movimento uniformemente acelerado, é imediata para controlar que ABFD em retângulo, que representa o movimento uniforme com uma velocidade igual à velocidade do movimento acelerado em metade da tomada tempo (segmento EG), tem a mesma área (Figura 3).

Figura 3 - Tratamento que Oresme dava à cinemática.



Fonte: Boccaletti (2016, p. 38).

Segundo Boccaletti (2016), deve-se observar que o tratamento dado por Oresme à cinemática mantendo-se em um nível *abstrato*, isto é, não houve de sua parte qualquer tentativa de aplicação a movimentos existentes na natureza.

Foi com a obra *Tratado sobre as configurações das formas e sua teoria das proporções*, e funções ligadas as representações gráficas, foi que Oresme lançara as bases para a Geometria Analítica (daqui em diante GA). No século XVII, iniciava-se uma revolução científica na qual os Elementos, já não atendiam as necessidades da época, sendo assim precisava-se criar novos métodos para se resolver tais problemas.

Os problemas de Geometria Euclidiana eram resolvidos com régua e compasso, pelos gregos, que era prática rotineira da época. Alguns problemas apresentavam certo grau de complexidade que só com régua e compasso não seria possível resolvê-los, assim Descartes (1596-1650) ao ilustrar o alcance do método filosófico para o raciocínio e a busca da verdade, descreveu um tratado geométrico com os fundamentos, que iria se denominar de GA. Então podemos dizer que o *método das coordenadas* (aplicação da Álgebra à Geometria), que veio ser mais tarde denominado de GA.

Comte (1843) relatou em sua obra intitulada Traité élémentaire de géometrie analytique a deux et a trois dimensions [Tratado elementar de Geometria Analítica em duas e três dimensões], a aproximação fundamental entre conceitos geométricos e conceitos algébricos, embora tendo sido estabelecido pela primeira vez, com intuito de melhorar a Geometria, durante séculos, o progresso real durante os séculos, era provavelmente, ainda mais favorável para o desenvolvimento análise matemática.

Reforçando esta ideia, Gascón (2002b), nos diz que as técnicas da GA constituem a resposta a algumas das limitações da Geometria Euclidiana, que apresentavam as técnicas sintéticas para resolver estes problemas, genuinamente, geométricos propostos sem utilizar as coordenadas.

A GA era um método para resolver questões problemáticas de Geometria, surgindo com o propósito de algebrizar a Geometria Euclidiana, problemas cujos instrumentos régua e o compasso não podiam resolver, isto é, utilizou a álgebra para resolver problemas geométricos.

A intensão de Descartes foi de fazer um método que trouxesse com ele a certeza das deduções matemáticas, partindo de saberes básicos e demonstrando coisas mais complexas a partir desses saberes. De fato, a Geometria concebida na época, apenas as representações por meio de figuras e suas dimensões parecia pouco aplicável.

Na obra de Descartes - Discours de la Méthode por Bien Conduire sa Raison et Chercher la Vérité dans les Sciences (Discurso do Método para Bem Conduzir a Razão e Procurar a Verdade nas Ciências), sua motivação era a tentativa de encontrar um modelo de raciocínio aplicável a todas as ciências (MORAES e CARVALHO, 2014). A concretização da obra vai em três frentes: Dioptrique (ideia da Geometria da óptica), Météors (ideia de uma Geometria dos movimentos) e Geometrie (propunha uma Geometria estática). A ideia de Descartes (1637) era dar movimento a a Geometria Euclidiana a partir da Teoria das Equações que aparecera com Viète.

Segundo Comte (1843) a ideia proposta por Descartes sobre a GA, era destinar, a generalizar, tanto quanto possível, as mais possíveis teorias geométricas, de acordo com sua íntima subordinação para modelos analíticos, em apresentação a diferentes questões como de métodos uniformes aplicados a todas as figuras corretamente definidas, como as da Geometria Plana.

Revelava a sua visão da ciência como o estudo da natureza e destacava na obra *La Geómetrie*, no qual Descartes (1637), propunha uma aplicação de um método geral de unificação racionalista do saber, a aritmetização da Geometria, representando diversas figuras geométricas por equações em **x** e em **y**, e a partir do Discurso do Método aparece as ideias de análise e síntese dentro do tratado de Descartes, sendo a matriz do que mais tarde seria a GA.

Seguindo o pensamento de Oresme, Descartes marcava **x** em um eixo e **y** em outro, com um ângulo fixo, com a intenção de representar pontos. São revelados os entes geométricos, como: pontos, retas e demais construções geométricas por meio de igualdades algébricas.

Descartes modificou o modo como as pessoas faziam ciência, principalmente, a física e a matemática. Introduziu uma nova notação para a álgebra, ainda hoje utilizada, que consiste em nomear as quantidades conhecidas com as primeiras letras do alfabeto (a,b,c,...) e as incógnitas com as últimas (...,x,y,z). A segunda mudança não é nada trivial, e é o tema de sua obra "La Geometrie" na qual ele usa a álgebra para descrever figuras, através do que hoje se chama plano cartesiano. (ARDITO, 2012).

As *curvas*, desde a antiguidade, já eram estudadas por matemáticos gregos, como Apolônio de Perga (262 – 190 a. C.) em seu livro As Cônicas. Descartes, então considerou novas classes de curvas construídas por simples movimentos, referindo-se como *curvas traçadas por algum movimento contínuo gerado por certas máquinas* (KATZ, 2010, p. 552), às quais é possível associar uma equação algébrica. Segundo Mendes (2015), Descartes estabeleceria uma aliança entre os princípios da Geometria Euclidiana e as novas Teorias das Equações, as quais serviram para descrição de uma determinada curva representativa por uma equação.

O simbolismo algébrico como as ferramentas de análise desenvolvidas por Viète, foram a base dos trabalhos de Pierre Fermat (1601-1665). Este estudioso publica em 1679 um pequeno texto intitulado *Introdução aos Lugares Planos e Sólidos de Geometria Analítica*. A obra tratava, por exemplo, das relações existentes entre uma equação indeterminada em duas variáveis e o lugar geométrico. Consistia de uma técnica que era a aplicação da Álgebra aos problemas de lugares geométricos.

A igualdade final referida por Fermat consiste na equação na sua forma mais simples, isto é, depois de aplicadas as regras da arte de Viète para a sua redução à referida forma. A igualdade final contém todas as informações necessárias para determinar inequivocamente o lugar geométrico (RAMOS, 2013).

Com o objetivo de estabelecer a correspondência com os lugares geométricos planos e sólidos, Fermat divide a família das equações indeterminadas com duas incógnitas até ao 2º grau em sete subfamílias: (I) $ax = by$ (reta) (II) $xy = b$ (hipérbole) (III) A razão entre $x^2 \pm xy$ e y^2 é constante (retas) (IV) $x^2 = ay$ (parábola) (V) $b^2 - x^2 = y^2$ (círculo) (VI) A razão entre $b^2 - x^2$ e y^2 é constante (elipse) e (VII) A razão entre $b^2 + x^2$ e y^2 é constante (hipérbole).

Podemos dizer que René Descartes e Pierre Fermat algebrizaram a Geometria, portanto a Álgebra surge como uma *transgressão* da Geometria Euclidiana.

A Álgebra no século XVIII se impõe como um *método de fazer matemática*, pois mostrava o caminho, tornando os problemas de Geometria mais fáceis, isto é, *permitia tratar os problemas geométricos a partir dos números*. A partir daí criou-se um caráter de *corpo*, consagrando-se com a GA.

A AL *surge como um estado avançado da GA*, mas a mesma cria um *corpo* de conhecimento e se desprende da GA, neste momento se desenvolve a axiomática e deixa de ter um olhar da GA. Diríamos que a AL é uma GA sofisticada.

Procuraremos revelar a gênese de alguns objetos de estudo da AL, que a partir das problemáticas que trataremos e levaremos em conta na construção de um modelo para de ensino de AL, pois estamos interessados em uma relação composta do saber, professor e ensino, na medida em que existe a intenção de ensinar e outro para aprender um saber matemático específico, isto é, uma *intenção didática*.

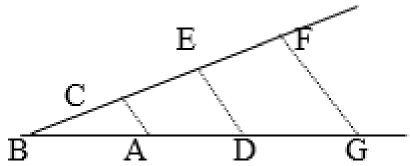
Nas tarefas de Geometria aparece o problema de Descartes que relacionava a Geometria com a Álgebra, usando régua e compasso para construir as operações elementares. O produto de dois segmentos pode ser entendido como um segmento, enquanto que na Geometria Euclidiana, o produto de dois segmentos é uma superfície, isto é, tem-se uma figura de natureza distinta de um segmento de reta, retificando a questão da homogeneidade das grandezas que estava presente na Geometria Euclidiana. Usaram as técnicas algébricas desenvolvidos por Cardano e Viète e resolveram problemas geométricos clássicos que não tinham solução, desde o tempo do gregos.

No produto de **a** pôr **b** tomamos duas semirretas com mesma origem **B** e marcamos em uma delas o segmento unitário **AB**. Marca-se nessa mesma semi reta um segmento **BD** de medida a e na outra semi reta marcamos o segmento **BC** de medida **b**. Traçamos um segmento de **A** até **C** e, outro de **D** a **E**, segmento **DE** paralelo a **AC**. Usando a *semelhança* ou o *Teorema de Tales*[11] conclui-se que **BE** vale **ab**, conforme mostra a Figura 4.

[11] O teorema de Tales era utilizado para resolver vários problemas no século VI a. C.

Inicialmente temos a medida dos segmentos **a** e **b**, e por conseguinte o produto de **ab**, então este produto de dois segmentos, se produz uma área. É necessário se compreender que só tem sentido **ab** se tratarmos a partir das ideias de linhas e colunas, pois este produto acontece quando a linha se movimenta em uma direção e a coluna em outra direção (cruzamento de pontos), e todos os pontos irão formar uma superfície. Segundo Comte (1843), para descartes havia uma harmonia mútua entre linha e equação da linha. Um ponto deslizava sobre uma linha num plano de duas coordenadas este se movimentava independente uma da outra, numa trajetória rigorosamente determinada.

Figura 4 - Construção com régua e compasso feita por Descartes.



Fonte: Autor desta tese.

$$\frac{\overline{BE}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{BA}}$$

$$\overline{BE} x \overline{BA} = \overline{BC} x \overline{BD}$$

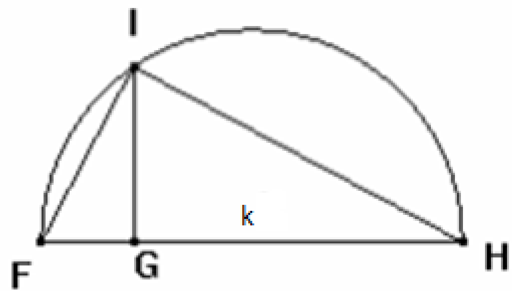
$$\overline{BE} x 1 = b \ x \ a$$

$$b \ x \ a = \overline{BE}$$

Segundo Vaz (2005), embora Descartes não construa a divisão propriamente ela é feita da seguinte maneira: tomamos as duas semi retas e marcamos o segmento unitário AB. Na outra semi reta marcam-se os segmentos BC e BE, medindo respectivamente **a** e **b**, onde **a < b**. Ligando **C** a **A** por um segmento e depois traçando um segmento paralelo a este segmento partindo de E até D determinamos **b/a**.

Observa-se que para resolver esta tarefa Descartes algebriza a Geometria e para extrair a raiz quadrada constrói um segmento unitário FG acrescentando na sua extremidade o segmento de medida K, GH, conforme Figura 5. Tem-se a semi circunferência cujo centro o ponto médio do segmento determinado pela unidade e por K. Em seguida construímos o triângulo retângulo levantando uma altura a partir do ponto G até I, ponto que está sobre a semi circunferência do círculo construído, e usando a relação $GI^2 = GH \times FG = GH$, determina-se a raiz quadrada.

Figura 5 - Figura construída por Descartes para extrair a raiz quadrada.

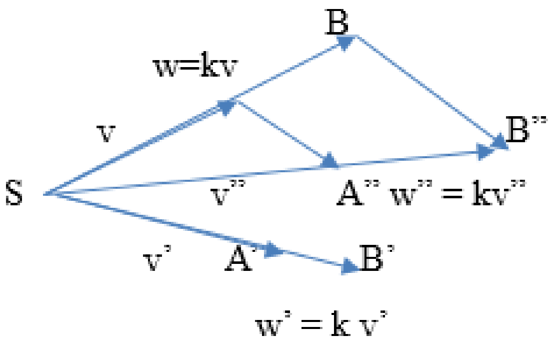


Fonte: Schooten (1659, p. 2).

Outra relação entre Geometria e Álgebra surge em uma tarefa de se aplicar o Teorema de Tales, conforme Figura 6:

Figura 6 - Ilustra uma aplicação do Teorema de Tales.

K(v + v') = kv + kv'



Fonte: Adaptado de Bruter (1998, p. 94).

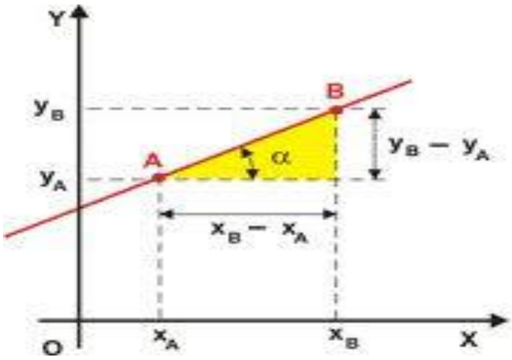
Antecipando o estudo de espaços vetorias, é notório se verificar que tal espaço é constituído de vetores cujo lugar de ação é um ponto. Conforme Figura 6, podemos dizer que os vetores v e v' se dizem homotéticos, em relação a **k**. Para Bruter (1998), o conjunto de vetores homotéticos apenas ao vetor (força) **v** forma uma reta vetorial ou ainda, um subespaço vetorial de dimensão 1.

Na Figura 6 podemos notar o Teorema de Tales, pois dado um escalar **k** e **v** e **v'** temos que k(v + v') = kv + kv'. Se v = SA' e v' = SA''. Como v'' = v + v' = SA'', então KSA'' = KSA + KSA', logo SB'' = SB + SB'.

$\frac{SA}{SB} = \frac{SA''}{SB''} = \frac{SB'}{SA'} = \frac{SB+SB''}{SA+SA''} = \frac{BB''}{AA''} = k$. Sendo assim o conjunto de vetores suportados pelas retas vetoriais forma um espaço vetorial.

A partir da Figura 6, podemos tentar deduzir a *equação da reta*, traçando o plano cartesiano, conforme Figura 7.

Figura 7– Reta representada no plano cartesiano.



Fonte: Alhanati (2014, p.1).

Podemos, então usar o Teorema de Tales para determinar a equação da reta. Pegando um ponto P (x,y) na reta entre os pontos A e B, podemos aplicar o teorema, determinando a equação da reta, pela seguinte lei de correspondência: *Feixes de retas paralelas cortadas ou intersectadas por segmentos transversais formam segmentos de retas proporcionalmente correspondentes*. Passa-se a resolver um problema de Geometria, a partir das medidas, utilizando a Álgebra (equações E_{11} e E_{12}).

$$\frac{\overline{PA}}{\overline{BA}} = \frac{Y - Y_A}{Y_B - Y_A} \qquad (Eq.E_{11})$$

e

$$\frac{\overline{PA}}{\overline{BA}} = \frac{X - X_A}{X_B - X_A} \qquad (Eq.E_{12})$$

$$\Rightarrow Y = Y_A + \left(\frac{Y_B - Y_A}{X_B - X_A}\right).\left(X - X_A\right)$$

Na equação $Y = Y_A + \left(\frac{Y_B - Y_A}{X_B - X_A}\right).\left(X - X_A\right)$ é possível se observar que a Álgebra vem generalizar determinadas situações da Geometria Euclidiana. Pensando em uma perspectiva futura a partir da tarefa de Tales chega-se a equação da reta, ou seja, o Teorema de Tales se torna *tecnologia* [12]onde se busca estabelecer uma relação entre **x** e **y**, a partir de dois eixos, apresentando-se como uma relação funcional. No ensino básico imagina-se que esta tarefa seja rotineira e esta atividade deslumbra a *potencialidade da técnica.*

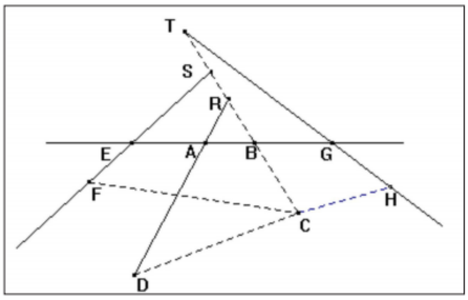
Um outro objeto relevante cujas questões levaram ao desenvolvimento da teoria de sistemas lineares, que por sua vez levaram ao desenvolvimento da teoria de espaços vetoriais é o estudo das curvas algébricas.

Nas expressões algébricas, as curvas eram representadas por equações, logo não eram desenhos e o cálculo/análise (Álgebra: método para se fazer cálculo e GA, sendo que esta dá a ideia

[12] Mas tarde iremos explorar estes termos utilizados na TAD.

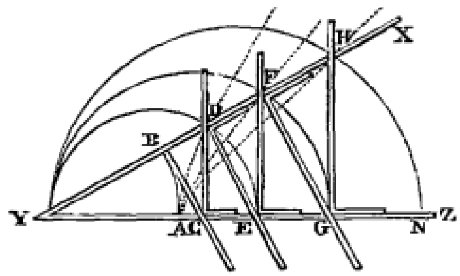
da AL). A classificação de curvas dada por Descartes é para muitos uma tentativa de estabelecer os limites epistemológicos e ontológicos da Geometria, determinando assim o início e o fim da Geometria (MANCUSO, 1996). Para resolver o problema de Papus[13] (Figura 8a), Descartes revelou que as curvas podiam ser geométricas, as quais seriam precisas ou mecânicas as que não eram. Mais tarde admite que as curvas geométricas são aquelas com movimento continuo e regulado, como as engrenagens de uma máquina, conforme Figura 8b:

Figura 8a - Problema de Pappus.



Fonte: Schooten (1659, p. 14).

Figura 8b - Obtenção de curvas geométricas por Rene Descartes.



Fonte: Hermann (1886. p.12).

A ideia era de mover o eixo XY e todos os pontos B, D, F, formando as curvas geométricas, sendo umas geradas por construções ponto a ponto e as dadas por uma equação algébrica também são consideradas geométricas. Nas análises que Descartes fez para resolver o problema de Papus, para os casos de 4 ou 5 linhas e para quando este problema está proposto para 3 ou 4 retas este resulta em seções cônicas. No caso do de 3 retas considera-se a terceira e a quarta retas coincidindo, chegando a proporção CB.CF = CD.CD. A generalização deste problema se dá pela expressão ax + by + c.

René Descartes resolveu o problema de Pappus com a aplicação do método criado por ele, que consistia: nomear (dar nomes a todos os segmentos conhecidos ou não, sendo estes necessários a resolução), equacionar (estabelece-se uma equação contendo essas variáveis) e construir (utilizando régua e compasso, como os gregos faziam para dar uma solução geométrica). Então a ideia de Descartes era criar um discurso que tenha uma linguagem, que seja compreendido o movimento via conta, sendo assim usa a Algebra das equações de Viète.

3.1.2 Estudo das curvas – as primeiras noções de dependência linear

Ainda no século XVII, matemáticos realizavam estudos de interseções de curvas algébricas, onde o cálculo do número de interseções entre duas curvas apresentava-se problemático. No século XVIII estudou-se a teoria de curvas planas superiores, que eram curvas de grau superior a dois,

[13] Dado AB, AD, EF e GH encontrar o ponto C

estudado inicialmente por Isaac Newton (1642-1727) em seu *Enumeratio Linearum Tertii Ordinis* [Uma enumeração das Linhas Terceira Ordem], em 1704 e mais tarde em 1707 por James Stirling (1692-1770) em seu *Linea Tertii Ordinis Neutonianae* [Linhas de Terceira Ordem Neutoniana], que mostrou que uma curva algébrica de grau n (em x e y) é determinada por n.(n + 3)/2 pontos, como veremos nas proposições a seguir.

Em 1720, Maclaurin publicou dois tratados sobre curvas intitulados *Geometria Orgânica* e *De Linearum Geometricarum Proprietatibus* [Propriedades da Geometria Linear]. Na primeira obra ele estendeu os resultados dos trabalhos Newton e Stirling sobre cônicas, cúbicas e curvas algébricas de grau superior.

Segundo Melchiades da Silva (1997), neste tratado encontrava-se uma proposição, frequentemente, conhecida como Teorema de Bézout - uma curva de ordem **m** corta uma curva de ordem **n** em geral em **m.n** pontos. As duas proposições relacionadas às curvas algébricas eram bem conhecidas, embora tenham sido provadas somente parcialmente até o começo do século XVIII:

> (1) *Duas curvas algébricas distintas de ordens m e n respectivamente têm m.n pontos em comum*. Sabe-se que estes pontos podem ser múltiplos, complexos ou infinitos, mas, os matemáticos da época também conheciam exemplos em que estes pontos eram todos simples e reais.
>
> (2) *Para determinar uma curva de ordem n são necessários e suficientes* $\frac{n(\mathrm{n}+3)}{2}$ *pontos*. Esta segunda proposição leva a um paradoxo, pois quando n > 2, $\frac{n(\mathrm{n}+3)}{2} = n^2$, então parece que duas curvas algébricas podem ter mais pontos em comum do que é suficiente para determinar cada uma delas, esta segunda proposição é conhecido como *Paradoxo de Cramer* (1704 – 1752) (BOYER, 1974, p.391).

Tratando deste teorema, Maclaurin observou que uma curva de ordem **n** em geral é determinada, como Stirling tinha indicado, por n.(n + 3)/2 pontos. Assim, uma cônica é univocamente determinada por cinco pontos e uma cúbica deveria ser determinada por nove pontos. Porém, n(n + 3)/2 pontos nem sempre determinam uma curva de ordem n, já que o paradoxo surge quando $n \geq 3$. A resposta para o paradoxo só apareceu um século depois, quando foi explicado na obra de Plücher (1801-1868) (BOYER, 1974, p. 391).

Leonhard Euler (1707-1783) ao escrever a obra intitulada *Uma aparente contradição na doutrina das linhas curvas*, que tem relação com o paradoxo de Cramer e também está relacionado com as curvas algébricas, identificando a natureza do problema (DORIER, 1995).

Euler trouxe à luz a ideia de que um sistema de equações não tem necessariamente de ter uma solução. Em seus trabalhos não havia teoria estabelecida e sim manipulações algébricas. Esse matemático revelou que em alguns casos, a proposição (2), pode não ser verdadeira, quando **n** equações não são suficientes para determinar **n** incógnitas, dando exemplos do que hoje é conhecido como sistemas indeterminados de equações lineares, ou seja, são sistemas de equações de curvas algébricas que não possuem solução, pois uma ou mais equações são dependentes das outras, surgindo neste estudo a ideia de dependência linear.

Conforme Dorier (1995), Euler ilustra esta consideração (proposição 2) por meio da análise de uma, duas e três retas e suas posições relativas, analisando o caso onde duas equações lineares com duas variáveis tem solução única, no caso de serem diferentes ou que uma não seja múltipla da outra. O caso de três equações mostra que, além de uma equação está contida na outra, pode ocorrer o caso em que uma esteja contida nas duas outras.

A dependência entre equações encontrara-se nos trabalhos do matemático Leonard Euler (1750), denominada por Dorier (2003) como *dependência inclusiva*[14], pois era uma definição diferente da moderna, como a que se tem agora. Portanto, a noção de *dependência linear* surge do *estudo qualitativo* de sistemas lineares, definição esta não proposta por Euler. Como exemplo temos o sistema de equações resolvida, empiricamente, por Euler no século XVIII para ilustrar tal situação (sistema S_1):

$$\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ 4y = 6x - 10 \end{cases} \qquad (S_1)$$

Euler (1750) na obra Sur Une Contracdiction APPA – Rente Dans La Doctrine des Lignes Courbes [Uma aparente contradição na teoria de curvas] resolvera tal sistema pelo *método da substituição e eliminação* e observou que quando se multiplica a primeira equação por 2, a segunda por (-1) e se soma, obtêm-se 0 = 0, pois se elimina a variável x e a outra variável, também é eliminada, como se verifica (Sistemas S_{11} e S_{12}):

$$\begin{cases} 3x - 2y = 5 & \times (2) \\ -6x + 4y = -10 & \times (-1) \end{cases} \qquad (S_{11})$$

$$\begin{cases} 6x - 4y = 10 \\ 6x - 4y = 10 \end{cases} \qquad (S_{12})$$

[14] Dorier (1994) denomina a concepção de Euler acerca de dependência linear de dependência inclusiva, para destacar a diferença com as definições de dependência linear que se encontra atualmente nos livros didáticos de Álgebra Linear, salientando que não será apenas na resolução de problemas que envolvem sistemas de equações lineares que o aluno pode obter um forte significado do conceito, atributo que se supõe indispensável para a sua apropriação. Claro, ele observa, embora não de forma sistemática, as relações lineares entre as equações, mas suas provas não contam com este fato.

Embora Euler tivesse como objetivo encontrar soluções do sistema linear pelo *método da substituição e eliminação*, de maneira implícita, acabou evidenciando a importância da *dependência linear*, entretanto Euler não definiu o que *seria* dependência linear entre as equações do sistema nem elaborou uma teoria para isso.

Este tipo de raciocínio em equações é baseada na intuição e usa pouca teoria. Em consequência, o estudo de equações lineares tornou-se uma parte desta nova teoria e as ideias de Euler não gerou posteriores investigações. Na verdade, por quase um século, as questões relacionadas com os sistemas indeterminados e inconsistentes de equações lineares foram negligenciadas, enquanto é só através destas perguntas que pode-se abordar as noções de dependência (DORIER, 1995).

Somando as duas equações em (sistemas S_{11} e S_{12}), temos 0 = 0, pois se obtêm duas equações idênticas, o que torna o sistema linear possível e indeterminado, ou seja, com infinitas soluções, logo são retas paralelas e coincidentes, isto é, uma equação depende da outra, pois a equação 2 do sistema é o dobro da primeira.

A partir de seus estudos por um *acidente*, Euler (1750) se deu conta de que ao se transformar a primeira equação esta fica igual a segunda equação, isto é são idênticas. Euler pensara, também, no caso do sistema ter 3 equações, em que uma equação é a soma do dobro das outra. Então conclui que:

> Vamos ver que não é possível determinar as duas incógnitas x e y, uma vez que a eliminação x, o outro vai para si próprio e é obtido a mesma equação. A razão para este acidente inicialmente óbvio é uma vez que a segunda equação muda em 6 x – 4y =10 é que nem a primeira duplicada 3x -2y = 5 que não é nenhum problema diferente. " (EULER, 1750, p. 226, tradução nossa).

Segundo Grande (2006), Euler (1750) não pretendia “enganar” o seu leitor nos seus textos sobre equações, embora ele escondesse a semelhança das duas equações implicitamente. Euler deixa claro que não é o fato das equações serem semelhantes que determina a dependência das equações, mas o fato que algo incomum – um “acidente” – que acontece no passo final da resolução do sistema de equações. Esse acidente é que revela a dependência das equações, porque, embora haja duas incógnitas, essas equações não determinam o valor dessas incógnitas.

As coisas giravam em torno dos estudo dos sistemas, e mais tarde, a origem da Álgebra Linear é uma consequência do desejo de resolver sistemas equações simultâneas de antigos problemas em diferentes contextos, incorporando outros objetos matemáticos, como a dependência e a independência linear.

Para o caso de quatro equações com quatro incógnitas, Euler (1750, p. 227) acrescentou que duas incógnitas podem ficar indeterminadas utilizando como exemplo o sistema de equações S_2 a seguir (sistema S_2):

(S2)

$$\begin{cases} 5x + 7y - 4z + 3v - 24 = 0 & (E_{21}) \\ 2x - 3y + 5z - 6v - 20 = 0 & (E_{22}) \\ x + 13y - 14z + 15v + 6 = 0 & (E_{23}) \\ 3x + 10y - 9z + 9v - 4 = 0 & (E_{24}) \end{cases}$$

Euler (1750, p. 227) resolve o sistema, formado pelas equações (E_{21}, E_{22}, E_{23}, E_{24}) pelo método da substituição e eliminação, pois isola na terceira equação o valor de x como segue:

$x = - 13y + 14z - 15v - 6$

Substituindo na segunda equação:

$2(- 13y + 14z - 15v - 6) - 3y + 5z - 6v - 20 = 0$

$-29y - 33z - 36v - 32 = 0$

$$y = \frac{33z - 3v - 52}{29};$$

$$x = \frac{-23z + 33v + 212}{29}$$

Após determinar os valores de x e y, estes podem ser substituídos na primeira e na quarta equação, que acarretará em duas equações idênticas, onde as incógnitas z e v são indeterminadas. Observa-se no sistema desenvolvido por Euler, que as equações estão contidas e incluídas em outras.

Nesse aspecto, não significa que Euler não estava atento sobre a equivalência lógica com a dependência linear, mas dentro da prática dele com equações lineares, a concepção de dependência inclusiva é mais consistente e eficiente (GRANDE, 2006). Euler não mencionou as relações lineares entre as equações já que a $E_{21} - E_{22} = E_{24}$, por exemplo. Para Euler as equações, em questão não significava que duas equações eram idênticas, mas cada uma era a mesma.

Dorier (1990) comenta que antes mesmo de considerar as combinações lineares de equações, Euler não se preocupava com a independência linear das soluções, mas considerou as combinações lineares de soluções de uma equação diferencial. Assim como D`Alembert e Lagrange, ambos mostram que obtemos uma solução fazendo qualquer *combinação linear*. Dorier conclui que tais matemáticos não poderiam chegar à ideia de base de soluções.

Ainda segundo esse pesquisador, Cauchy foi o primeiro a ter explicitado o caminho nesse domínio, associando a condição de dependência das soluções à condição de resolubilidade de um sistema exprimindo que uma solução e suas **(n - 1)** derivadas sucessivas tomam valores determinados.

Euler (1750) na visão de Dorier (2000) propõe ao resolver o sistema S_2 quadrado, a primeira relação entre o número de equações independentes, o tamanho do conjunto solução e o número de parâmetros para representá-lo, o que séculos mais tarde veríamos a conhecer se formalmente com os conceitos de categoria e dualidade.

O estudo de sistemas de equações lineares deu uma parada em seu estudo qualitativo, pois eram aplicados diretamente a regra de Crammer pra resolvê-los. Então, o tratamento análogo da questão da dependência em relação a equações e **n-uplas** é possível. No entanto, com a técnica envolvendo determinantes, torna-se difícil para fornecer uma visão clara e concisa de todas as relações de invariância e da dualidade envolvido nos sistemas, ainda no que diz respeito ao estudo da dependência linear.

Frobenius (1877) fora um dos primeiros a definir, como conhecemos hoje, as noções de dependência e independência linear simultaneamente, por equações e n-uplas vinculando-a com a ideia apresentado por Euler (1750) de uma dependência inclusiva.

Com este estudo Frobenius, em seguida, introduziu a noção de *associado* de um sistema [*zugeordnet" or "adjungirt*]. Então, se um determinado sistema de equações lineares é dado, um sistema homogêneo será um sistema *associado*, caso os coeficientes de suas equações constituam uma base de soluções do sistema linear original.

3.1.3 Sistemas lineares

Apesar de já termos abordado a obra de Euler (1750), os sistemas lineares, faremos um apanhado histórico sobre este objeto, que foi o propulsor da AL. A Álgebra neste trabalho não é tratado como um *corpo* de conhecimento e sim como uma prática naturalizada de letras como números.

O Egito detinha os documentos matemáticos mais antigos que chegaram aos dias atuais, entre outros destaca-se os papiros de Rhind e de Moscou, que juntos continham 110 problemas, sendo boa parte deles de origem *prática*, com questões sobre pão, cerveja, e balanceamento de rações para o gado. Alguns problemas eram resolvidos por uma *equação linear* com uma incógnita, utilizando-se de um método que, mais tarde na Europa, ficou conhecido por regra da *falsa posição* (RIBEIRO, 2009, p.3).

Na antiguidade da matemática ocidental o estudo e aplicações dos *sistemas de equações lineares* pouco aparecem, enquanto que no oriente, os sistemas são bem mais estudados e aplicados. Há 4000 anos atrás, o povo da Babilônia resolveria um sistema de equações lineares bem simples 2x2, ou seja, com duas incógnitas, como segue:

> *Existem dois campos cuja área total é de 1800 jardas quadrados. Uma produtora de grãos, à taxa de 2/3 de um alqueire por jarda quadrada, enquanto o outro produz grãos, à taxa de 1/2 por alqueire por jarda quadrada. Se o rendimento total é de 1100 sacas, o que é o tamanho de cada campo.* (O'CONNOR; ROBERTSON, 1996, p.1)

Na China, no registro de representação por diagramas, os chineses representavam os sistemas lineares 3x3 por meio de seus coeficientes escritos com banas de bambu sobre os quadros de um tabuleiro, descobrindo um método de resolução que até hoje é muito utilizado, que é o método de resolução por eliminação. Exemplos desse procedimento encontram-se no documento *Nove capítulos sobre a arte da matemática*, provavelmente do século III a.C.

Havia nesta obra problemas do tipo e fora resolvido por um processo praticamente igual ao método da *eliminação gaussiana*, desenvolvido por Gauss sem utilizar matrizes:

> *Existem 3 tipos de milho. Três pacotes do primeiro, dois do segundo e um do terceiro somam 39 unidades de milho. Dois pacotes do primeiro, três pacotes do segundo e um do terceiro somam 34 unidades. E um pacote do primeiro, dois do segundo e três do terceiro somam 26 unidades. Sabendo que os pacotes de milho do mesmo tipo contém a mesma quantidade de unidades, quantas unidades de milho contém um pacote de cada tipo?* (O'CONNOR; ROBERTSON, 1996, p.1)

Na obra já aparece do seguinte modo, em seguida apresenta a resolução bem próxima da eliminação gaussiana.

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 26 & 34 & 39 \end{array}$$

Na visão do escritor do prefácio Liu Hui, incorporado no século III a obra[15], ao se referir ao Método de FangSheng, onde é proposto uma situação que reflete em um sistema linear de 3 equações e 3 incógnitas. Tal método consiste em dispor os coeficientes das incógnitas em linhas e colunas, e após se operar com elas, deixando o sistema na forma triangular. Ao se efetuar a divisão determinasse o valor de uma incógnita e por meio de substituição determinasse o valor das demais, o que hoje equivale a resolver um sistema pelo método do escalonamento.

Com o estudo da GA e de *curvas geométricas* os sistemas lineares foram estudados de modo qualitativo por Euler como mostramos em sua obra datada de 1750. Para compreender o domínio das relações existentes entre as equações de um sistema linear criou um campo fértil para o desenvolvimento de alguns conceitos em AL, como os espaços vetoriais, subespaços vetoriais, matrizes, posto e também a noção de independência linear, o que torna o seu estudo imprescindível para esta pesquisa.

A resolução de sistemas de várias equações com várias incógnitas já era conhecida desde os babilônios, sendo suas práticas de resolução por *eliminação e substituição* eram utilizadas para resolver sistemas lineares numéricos já no século XVII, em sua maioria sistemas onde o número de

[15] *Nove capítulos sobre a arte da matemática*

equações era igual ao de incógnitas.

Segundo Larson (2012), Gauss desenvolveu seu método que levou seu nome *eliminação de Gauss* no contexto da astronomia, pois trabalhava para determinar informações sobre a órbita elíptica de um asteroide chamado Pallas, descoberto em 1802 por Heinrich Olbers.

Então na obra Elementis Ellipticis Palladis, Gauss (1874) pretendia determinar detalhes elementos elípticos sobre a órbita de Pallas, escolhendo um conjunto de medições de suas observação, durante anos, o que poderia servir para determinar a excentricidade e inclinação da órbita de Pallas. A fim de fazê-lo Gauss usou seu conjunto de dados, juntamente com as atuais teorias da astronomia, para criar um sistema de equações lineares com 6 incógnitas e 12 equações (Figura 9).

Ele precisa determinar valores para as incógnitas que irão minimizar o erro quadrado total. Em vez de simplesmente resolver o problema em questão, Gauss divaga e introduz um método para lidar com tais sistemas de equações lineares em geral, que mais tarde um outro geodesista Jordan (1888) na obra *Handbuch der Vermessungskunde*, utilizara e aperfeiçoara o método de redução de sistemas lineares que levará seus nomes Gauss-Jordan.

Figura 9 - Sistema de 12 equações e 6 incógnitas resolvido por Gauss, para determinar a excentricidade e inclinação do, então planeta Pallas.

$$\begin{aligned}
0 &= -183.93'' + 0.79363\,dL + 143.66\,dZ + 0.39493\,d\pi \\
&\quad + 0.95920\,d\phi - 0.18856\,d\Omega + 0.17387\,di; \\
0 &= -6.81'' - 0.02658\,dL + 46.71\,dZ + 0.02658\,d\pi \\
&\quad - 0.20858\,d\phi + 0.15946\,d\Omega + 1.25782\,di; \\
0 &= -0.06'' + 0.58880\,dL + 358.12\,dZ + 0.26208\,d\pi \\
&\quad - 0.85234\,d\phi + 0.14912\,d\Omega + 0.17775\,di; \\
0 &= -3.09'' + 0.01318\,dL + 28.39\,dZ - 0.01318\,d\pi \\
&\quad - 0.07861\,d\phi + 0.91704\,d\Omega + 0.54365\,di; \\
0 &= -0.02'' + 1.73436\,dL + 1846.17\,dZ - 0.54603\,d\pi \\
&\quad - 2.05662\,d\phi - 0.18833\,d\Omega - 0.17445\,di; \\
0 &= -8.98'' - 0.12606\,dL - 227.42\,dZ + 0.12606\,d\pi \\
&\quad - 0.38939\,d\phi + 0.17176\,d\Omega - 1.35441\,di; \\
0 &= -2.31'' + 0.99584\,dL + 1579.03\,dZ + 0.06456\,d\pi \\
&\quad + 1.99545\,d\phi - 0.06040\,d\Omega - 0.33750\,di; \\
0 &= +2.47'' - 0.08089\,dL - 67.22\,dZ + 0.08089\,d\pi \\
&\quad - 0.09970\,d\phi - 0.46359\,d\Omega + 1.22803\,di; \\
0 &= 0.01'' + 0.65311\,dL + 1329.09\,dZ + 0.38994\,d\pi \\
&\quad - 0.08439\,d\phi - 0.04305\,d\Omega + 0.34268\,di; \\
0 &= +38.12'' - 0.00218\,dL + 38.47\,dZ + 0.00218\,d\pi \\
&\quad - 0.18710\,d\phi + 0.47301\,d\Omega - 1.14371\,di; \\
0 &= -317.73'' + 0.69957\,dL + 1719.32\,dZ + 0.12913\,d\pi \\
&\quad - 1.38787\,d\phi + 0.17130\,d\Omega - 0.08360\,di; \\
0 &= +117.97'' - 0.01315\,dL - 43.84\,dZ + 0.01315\,d\pi
\end{aligned}$$

Fonte: Gauss (1957, p.100)

A fim de encontrar a melhor aproximação de uma solução para este sistema de equações, Gauss desenvolveu um método denominado *mínimos quadrados*[16] e a *eliminação de Gauss* foi desenvolvido como parte deste método, além de explicar a importância de considerar a solução mais próximo de sistemas.

A astronomia estudada por Gauss e por outros e os arrozais chineses tinham algo em comum, pois eram capazes de articular uma parte importante do desenvolvimento e de um entendimento do objeto matemático principal de nosso estudo que é o sistema linear.

Prosseguindo no estudo de sistemas lineares, nos deparamos com os pouco explorados *sistemas lineares homogêneos* nas escolas de ensino básico e superior será, que iremos explorar, devido sua importância para o estudo de espaços vetoriais e transformações lineares.

Uma equação linear homogênea é uma equação do tipo ax + by + cz = o, onde o termo independente é nulo. Por conseguinte, um sistema linear homogêneo se dá quando todas as equações lineares tem seus termos independentes nulos.

O matemático Dodgson (1867, p. 48 e p. 51) publicou An Elementary Treatise On Determinants [Um tratado elementar sobre Determinantes] respectivamente, anuncia dois teoremas para sistemas homogêneos. São eles:

> *i) Em um sistema homogêneo de n equações a n - r incógnitas, cuja matriz não aumentada é evanescente; tem uma (n - r) - upla solução onde dois componentes ou menos não são nulos e r + 1 equações são dependentes das restantes. Reciprocamente se o sistema tem uma solução não nula, a matriz não aumentada é evanescente.*
>
> *ii) Um sistema homogêneo de n equações a n + r incógnitas tem sempre (n + r)-upla soluções onde pelo menos dois componentes não são nulos.*

Dorier (1990) chama atenção que a expressão de uma condição de dependência linear de (n - r) vetores em um espaço de dimensão **n**. Nos dias atuais, no estudo de espaços vetoriais este teorema é enunciado: assim *n + r vetores de um espaço vetorial de dimensão n são sempre dependentes*, concluindo a importância que este resultado tem para o *Teorema da Invariância*, que afirma que todas as bases de um *espaço vetorial* de dimensão finita possuem o mesmo número de vetores.

Dodgson (1867) demonstra por meio da proposição VIII, que em um sistema de n equações lineares a n + r incógnitas, se existe n - r equações cuja a matriz aumentada não é evanescente, e se quando essas n - r equações são acrescentadas sucessivamente cada uma das equações restantes, cada conjunto de (n - r) + 1 equações tem uma matriz aumentada evanescente, então (1) o sistema é compatível, (2) não tem mais que uma solução e (3) as equações restantes são dependentes das n - r citadas acima (DODGSON, 1867, p. 45).

E ainda:

[16] Mínimos quadrados significa que a solução global minimiza a soma dos quadrados dos erros nos resultados de cada equação única.

> Em um sistema de n equações a n + r incógnitas, se existe n - k equações cuja matriz não aumentada não é evanescente, e se a essa n - k equações são acrescentadas sucessivamente cada uma das equações restantes, e se cada conjunto assim formado de (n - k) + 1 equações tem sua matriz aumentada evanescente[17], (1) as equações são compatíveis, (2) se tomamos um dos menores não nulos da matriz aumentada dessas n - k equações as k + r incógnitas cujos coeficientes nela não estão contidos, podemos atribuir valores arbitrários, cada uma das (n - k)-uplas de valores dando uma solução única ao sistema, e (3) as equações restantes dependem das ditas (n - k) equações *Proposição X* (DODGSON, 1867, p. 48).

Na teoria geral dos sistemas lineares, Dodgson deixara muito o que fazer a seus sucessores, pois a eles caberia refinar sua formulação e reagrupar os casos em proposições mais compactas. Em um artigo de duas páginas intitulado *Sur la discussão des equações du degré premier* Eugéne Rouché (1832-1910) de 1875, continha os resultados dele em resolver sistemas de equações lineares. Era um critério bem conhecido que diz que um sistema de equações lineares tem uma solução se, e somente se, o *posto*[18] da matriz do sistema homogêneo associado é igual ao *posto* da matriz aumentada do sistema.

Rouché (1880) lança uma versão mais completa de suas ideias, em outro artigo intitulado *Notes sur les equations lineares* publicado no Journal de l'École Polytechnique. A ideia de *posto* teria fortes relações a idependência linear e a dimensão do espaço, já que quando uma matriz esta na forma reduzida e ao escalonarmos por linhas o número de linhas não nulas equivale ao número de linhas ou colunas linearmente independente da mesma, ideia esta que teve sua gênese neste trabalho e mais tarde nos trabalhos de Frobenius, onde podemos dizer que atingiu sua maturidade, o qual comentaremos a seguir.

A continuação dos trabalhos de elaborar uma teoria para os sistemas lineares, continuaram com os trabalhos do matemático alemão Ferdinand Georg Frobenius (1849 -1917). Em seus artigos de 1875 e 1877 intitulado *Ueber das Pfaffsche problem* e Ueber Systeme und Gewebe Algebraischen Flachen aparece a ideia de *independência linear* a partir da *ambiguidade* das soluções do sistema linear, que ele indica indiferentemente, através de duas palavras em alemão *unabhangig* [independência] termo este utilizado para independência linear de equações e *verschieden* [distinto]. A definição dada por ele é que as soluções A1(x), ..., An(x), (x = 1, ... k) são ditas independentes ou distintas, se c1A(a)(1) + ... + ckAa(k) não pode se anular para a = 1, ..., n sem que c1, ..., ck sejam

[17] Se um bloco quadrado ser tal que o seu determinante desaparece, ou se um bloco oblongo ser tal que o determinante de cada um dos seus menores principais desaparece: em qualquer dos casos, o bloco é dito ser evanescente (DODGSON, 1867).

[18] Ideia introduzida por Frobenius em 1879, também em conexão com determinantes, no artigo intitulado Ueber Homogene Totale Differentialg Leichungen. Posto de uma matriz é uma característica matricial, com várias implicações em relação à independência linear e a dimensão de um espaço vetorial. O posto de uma matriz A é o número de linhas não-nulas quando a mesma está escrita na forma reduzida escalonada por linhas.

todos nulos, em outros termos, quando as k fórmulas lineares A1(x)u1 + ... + Ak(x)uk são independentes (FROBENIUS, 1877).

Segundo Dorier (1990, 1995) esta definição dada por Frobenius foi inovadora, pois relacionava a ideia de *dependência linear*, desde muito tempo utilizada para as formas lineares à utilização dos vetores de dimensão **n** indicadas pelas coordenadas, como Cayley as introduziu.

No mesmo artigo Frobenius trata dos sistemas lineares homogêneos, enunciando que um sistema homogêneo de m equações independentes a n incógnitas (m > n) admite (n - m) soluções independentes e que este é o máximo de soluções independentes que um tal sistema pode admitir; isto quer dizer que (n - m) + 1 soluções são sempre dependentes (FROBENIUS, 1877). Enuncia, também, que a solução geral da equação é uma combinação linear qualquer destas (n - m) soluções independentes.

O francês Jean le Rond d'Alembert (1717-1783) é o primeiro a considerar que ao encontrarmos a solução geral das equações não homogêneas, assim chamada por ele, é a soma de uma solução particular e da solução geral da equação homogênea correspondente.

Melchiades da Silva (1997) comenta um relato de Dorier (1990) sobre as ideias de Frobenius, tal que parecia saber de todos os resultados sobre a teoria dos determinantes que ele utilizava para demonstrar seus resultados sobre a resolução de sistemas de equações lineares homogêneas. Além de utilizar o conceito de dependência e independência linear de soluções do sistema linear homogêneo, consideradas como n-uplas em uma linguagem totalmente moderna em 1875.

Frobenius (1877) enunciou que se **r** equações homogêneas $a_{r1} x_1 + a_{r2} x_2 + ... + a_{rn} x_n = 0$ são independentes, e tem **S** soluções independentes $(b_{11}, b_{12}, ...b_{1n})$, $(b_{21} , b_{22}, .. b_{2n})$, ... $(b_{s1} , b_{s2} , ... b_{sn})$ então as **r** linhas menores de ordem **a** são proporcionais para as complementar **s** linhas menores de ordem **b**" (MUIR, 1930, p.122 apud MELCHIADES DA SILVA, 1997).

Para Frobenius (1877) o máximo de soluções independentes que um sistema homogêneo podia admitir, além de considerar o fato de que a solução geral do sistema é uma combinação linear qualquer das soluções independentes.

O estudioso constituiu um *núcleo*, *d*a noção de *base* de soluções de um sistema homogêneo, devido aos trabalhos com combinação linear, de independência linear de soluções e de número máximo de soluções independentes em relação a um sistema homogêneo. Logo incorpora a noção de *sistema associado* a um determinado *sistema* dado, ou seja, que um sistema de equações lineares cujos coeficientes são os componentes dos elementos de qualquer base de soluções do sistema inicial. No século XX esta ideia é apresentada como: em relação a um espaço de soluções, este sistema associado, representa uma base de forma linear de um espaço ortogonal.

Para pesquisador supracitado considerava as **y** equações e as n-uplas como a mesma classe de objetos em termos de linearidade, dando um passo importante no estudo dos vetores. Define o conceito de base das soluções e acrescenta a noção de *sistema associado* a um sistema qualquer, sendo este um sistema de equações lineares cujos coeficientes são os componentes dos elementos de qualquer base de soluções de um sistema inicial.

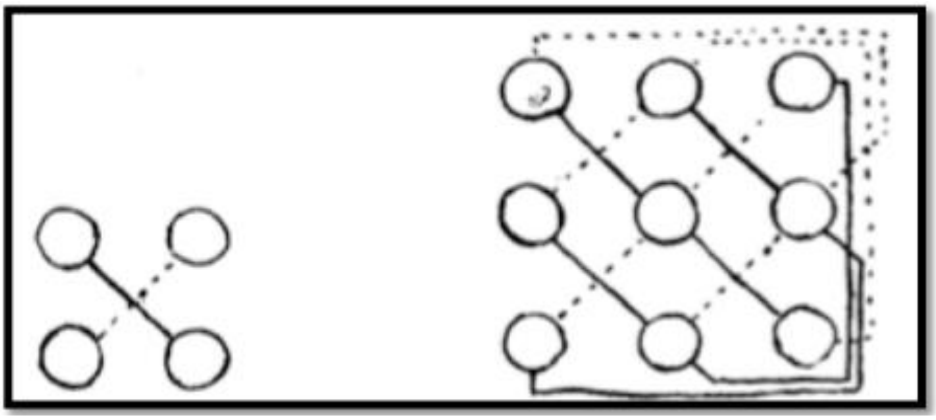
3.1.4 Determinantes

Faremos um preâmbulo sobre o objeto Determinantes, pois tem relação com o desenvolvimento histórico de matrizes. Apresentaremos, inicialmente, a origem dos *determinantes* por antecederem a ideia de matrizes e para se resolver um sistema com mais de 4 linhas e quatro variáveis pelo métodos de resolução por determinantes este é da ordem de n! (n fatorial) o que torna o trabalho quase impossível.

A ideia de um determinante surge no Japão e na Europa em quase exatamente o mesmo tempo. Seki (1683) escreveu o *Method of solving the dissimulated problems* [Método de resolver os problemas dissimulados], que contém métodos de matriz escritos como tabelas. Sem ter qualquer palavra que corresponde a *determinante* Seki ainda introduzido determinantes e deu métodos gerais para o seu cálculo com base em exemplos. Assim ele foi capaz de encontrar determinantes de 2 × 2, 3 × 3, 4 × 4 e 5 × 5 matrizes e aplicou-as para a resolução de equações, mas não sistemas de equações lineares.

Mikami (1914) reescreve o método da posição dos coeficientes dispostos de forma retangular do manuscrito original de Seki para os casos de 2x2 e 3x3, onde as linhas pontilhadas e reais, ou as linhas vermelhas e pretas no manuscrito original, são usados para indicar os sinais que o produto dos elementos ligados por estes linhas, terá no desenvolvimento, as linhas pontilhadas correspondente ao positivo assinar e as linhas de reais para o sinal negativo, se todos os elementos positivos, conforme Figura 10.

Figura 10 – Manuscrito de Seki.



Fonte: Mikami (1914, p. 12).

Leibniz no século XVII escrevera uma carta com um novo método de resolver sistemas lineares utilizando apenas seus coeficientes. O tratado intitulado *Introduction à Análise des Lignes Courbes Algébriques* [Introdução a Análise de Linhas Curvas Algébricas] datado de 1750 de autoria do filósofo e matemático Gabriel Cramer (1704-1752), revela um regra popularizada por ele, daí o nome da Regra de Cramer, para obter a solução de um sistema quadrado como função de seus coeficientes, que nos dias atuais podemos chamar de *determinantes*. O mesmo pode se pensar para a *eliminação gaussiana*, que enfocaremos no MER adiante, a mesma não acontecera, inicialmente, com Carl Friedrich Gauss (1777-1855).

Segundo O'Connor e Robertson (1996), a primeira aparição de um determinante na Europa apareceu exatamente no mesmo ano 1683. Naquele ano Leibniz escreveu a L' Hôpital explicando que o sistema de equações:

$10 + 11x + 12y = 0$

$20 + 21x + 22y = 0$

$30 + 31x + 32y = 0$

Tinha como solução:

10.21.32 + 11.22.30 + 12.20.31 = 10.22.31 + 11.20.32 + 12.21.30. Exatamente a condição para que o coeficiente da matriz tenha determinante nulo. Leibniz mostrou, também, que o determinante poderia se expandir utilizando algumas colunas, método este que ficou conhecido como expansão de Laplace.

Os sistemas de equações lineares de até 4 variáveis foram resolvidos, também, pelo método dos *determinantes,* em 1729 por Colin Maclaurin (1698-1746) e apresentados em sua obra datada de 1748 intitulada Treatise of Algebra [Tratado da Álgebra], aparecendo, pela primeira vez, a *Regra de Cramer*.

Segundo Mechialdes da Silva (1997), por volta de 1860, à resolução de sistemas lineares, que não podiam ser resolvidos por Regra de Cramer, como os nãos quadrados ou de determinante nulo começa a ser estudado sistematicamente. Em 1861 o matemático inglês Smith, enuncia por meio de determinantes, as condições para que um sistema de quatro equações e duas incógnitas admita uma solução. Em 1862, o italiano N. Trudi revela que em um sistema **n x n**, se o determinante é nulo assim como os determinantes obtidos substituindo os coeficientes correspondentes à uma variável pelos termos constantes, então os (n - 1) determinantes assim formados por cada uma das outras variáveis são nulos, deduzindo a ideia de combinação linear.

Sobre a *Teoria dos determinantes*, podemos relatar que o francês Etienne Bezout (1730-1783), sistematizou em 1764 o processo de estabelecimento dos sinais dos termos de um determinante. Coube a outro francês, Alexandre Vandermonde (1735-1796), em 1771, empreender a primeira abordagem da teoria dos determinantes independente do estudo dos sistemas lineares, embora também os usasse na resolução destes sistemas. Segundo Lamim (2000), o teorema de Laplace, que permite a expansão de um determinante através dos menores de **r** filas escolhidas e seus respectivos complementos algébricos, foi demonstrado no ano seguinte pelo próprio Laplace no artigo intitulado *Pesquisas sobre o cálculo integral e o sistema do mundo*.

O sentido atual de determinante, surgira em 1812 em um trabalho de Cauchy. Neste artigo, apresentado à Academia de Ciências, Cauchy sumariou e simplificou o que era conhecido até então sobre determinantes, melhorou a notação (mas a atual com duas barras verticais ladeando o quadrado de números só surgiria em 1841 com Arthur Cayley) (LAMIM, 2000, p. 4).

Voltando a Dodgson, este foi um dos primeiros a resolver os sistemas **n x m**, isto é, o número de linhas diferente do de colunas, em sua obra *An Elementary Treatise On Determinants* [Um tratado elementar sobre Determinantes] em 1867 em Londres. Dodgson denominava de *bloco quadrado* para os determinantes com algumas linhas e muitas colunas.

Dado um sistema de **n** equações lineares (Equações E_0 e E_1) e **n** variáveis um *determinante* é o resultado de uma certa combinação de multiplicação e adição dos coeficientes, que permite calcular o valor direto das variáveis, ou seja:

$$a_1x + b_1y = c_1 \qquad (E_0)$$

$$a_2x + b_2y = c_2 \qquad (E_1)$$

O determinante do sistema é $\Delta = a_1.b_2 - a_2b_1$ e o valor da variável x será:

$$x = \frac{(c_1b_2 - c_2b_1)}{\Delta}$$

e

$$y = \frac{(a_1c_2 - a_2c_1)}{\Delta}$$

Para representar os elementos do determinante era utilizado o símbolo $h\backslash k$ no qual o primeiro número indicava a linha e o segundo a coluna. O bloco era representado, conforme Figura 11.

Figura 11 - Representação do blocos por Dodgson (1867).

$$\left\{\begin{array}{lll} 1\backslash 1, 1\backslash 2 & \cdots\cdots & 1\backslash n \\ 2\backslash 1, 2\backslash 2 & \cdots\cdots & 2\backslash n \\ \vdots \quad\;\; \vdots & & \vdots \\ m\backslash 1, m\backslash 2 & \cdots\cdots & m\backslash n \end{array}\right\}.$$

Fonte: Dodgson (1867, p. 8).

Cada um produto afetado por + ou -, concordando com pares definidos de números, correspondendo para aquele produto, ser da mesma classe ou não: a soma destes produtos, assim afetado é denominada de *Determinante* do bloco (DODGSON, 1867). O pesquisador nos repassa a ideia que é a regra de Sarrus.

> O parentesco entre sistemas de equações lineares numéricas e diferenciais pode ser distinguido por matemáticos da época, tanto é verdade que os dois domínios estiveram muito em moda nos séculos XVIII e XIX. As aproximações ficaram, no entanto, limitadas ao emprego, pelos dois domínios, dos *determinantes*. Estes jogaram papel de interface em uma dialética que permitiu fazer progredir as duas teorias em paralelo sem que tivessem realmente comunicação direta" (DORIER, 1990, p. 26).

Segundo Dorier (1995) no estudo da teoria das equações lineares em conjunto com a teoria de determinantes representa o contexto em que os primeiros conceitos teóricos (dependência, posto e dualidade) relacionadas com a teoria do espaço vetorial foram criadas e aplicadas em dimensão finita. Entre 1750 e o início do século 20, foram os *determinantes* permanecem em todos os problemas, tanto prático quanto teóricos, envolvendo linearidade, exceto em alguns trabalhos relacionados à Geometria.

Esse fato teve uma influência sobre o natureza dos conceitos, mesmo se o papel de *determinantes* foi minimizada pela abordagem axiomática. Em particular, o conceito de rank (categoria) na teoria axiomática de espaços vetoriais é inseparável do conceito de *dimensão*, que é uma síntese das relações entre os conceitos de geradores e dependência, geralmente introduzido antes que a ideia da dualidade.

Outro conceito que esta associado a ideia de determinantes é a equação característica da matriz quadrada, onde uma determinada matriz M é definida por $|M - xI| = 0$, onde $|M - xI|$ é o determinante da matriz $M - xI$ e I é a matriz unidade.

Se $M = \begin{pmatrix} a & c \\ c & d \end{pmatrix}$, então a equação característica $x^2 - (a + d)x + (ad - bc) = 0$ (CAYLEY, 1858). As raízes dessa equação são as raízes características (autovalores) da matriz.

Os determinantes deram algumas noções para a Teoria de Matrizes, como é o caso da *matriz similar*, já que duas matrizes A e B, são ditas similares se existe uma *não singular* **X** tal que $B = X^{-1}.A.X$.

3.1.5 Matrizes

Com a necessidade de estudar a natureza do contato entre duas cônicas apresenta as matrizes a partir da ideia de determinantes, aparecem na obra de Sylvester (1850) intitulada *Additions to the articles on a new class of theorems*, and O*n pascal's Theorems* onde, logo, utiliza o termo matriz para generalizar um resultado sobre o número de determinantes pertencentes a um sistema de menores considerando *matrizes retangulares*.

Para reforçar esta ideia trazemos a análise feita por Brechenmacher (2006, p, 16), que a ideia de matrizes proposta por Sylvester vem de uma praxeologia, que visava a uma prática específica que articula a extração de menores a uma decomposição polinomial para resolver o problema colocado pela existência de raízes múltiplas.

Para Sylvester (1850) o problema da tipos de intersecções cónicas pode resultar em um trabalho sobre os desafios colocados pelas multiplicidades do valor próprio de uma matriz. Os diferentes tipos de intersecções das cónicas permite representar em uma estrutura geométrica diversas decomposições do polinômio característico ou minimal das diferentes formas canônicas associadas.

Esse objeto matemático aparece, também, no trabalho publicado por Cayley (1858) intitulado *A memoir on the theory of matrices* [A memória na teoria de matrizes], apesar de já conhecer o trabalho de Sylvester, considera nesta obra, somente matrizes quadradas e retangulares como mostra a Figura 12:

Figura 12 - Matriz revelada na obra de Cayley.

$$\begin{array}{|ccc|} (\, a\,, & b\,, & c\,) \\ a'\,, & b'\,, & c' \\ a''\,, & b''\,, & c'' \end{array}$$

Fonte: Cayley (1858, p. 17).

Compreendemos que Cayley (1858) introduziu uma notação para matrizes, como uma prática para representar sistemas lineares e formas quadráticas, além de definir matriz como *um conjunto de quantidade organizadas em forma de quadrado*. Cayley (1858) relata na obra que *Eu certamente não consegui a notação de matrizes em algum caminho através dos quatérnios, foi diretamente por meio dos determinantes ou como um conveniente caminho da expressão da equação*:

$$x' = ax + by$$
$$y' = cx + dy$$

Introduzindo assim as matrizes:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Esta noção de matriz surge naturalmente a partir de uma de uma *abreviação* (notação abreviada) de um sistema de equações lineares, como segue no sistema a seguir (não apresentava as chaves):

$$\begin{aligned} x &= ax + by + cz \\ x &= a'x + b'y + c'z \\ z &= a''x + b''y + c''z \end{aligned} \qquad (S_0)$$

Este pode ser representado da seguinte forma (CAYLEY, 1858, p 17):

Figura 13 - Representação do sistema linear feita por Cayley.

$$(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}) = \begin{pmatrix} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{pmatrix} (x, y, z),$$

Fonte: Cayley (1858, p.17).

Veremos que a adição com matrizes tens suas origens, como revela Cayley (1858), também no estudo qualitativo de sistemas lineares é similar a adição de quantidades algébricas ordinarias, enquanto que a multiplicação (ou composição) há uma peculiaridade que matrizes não são em geral conversíveis.

A teoria de matrizes desenvolvida na obra de Cayley é feito para matrizes de grau 3, mas vale para qualquer grau. A matriz $\begin{pmatrix} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{pmatrix}$ pode ser representado por um *funcional linear*, como segue:

$$\big((a, b, c)(x, y, z),\ (a', b', c')(x, y, z),\ (a'', b'', c'')(x, y, z)\big)$$

E ainda:

Figura 14 - Representação do sistema na forma de matriz.

$$(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}) = \begin{pmatrix} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{pmatrix} (x, y, z)$$

Fonte: Cayley (1858, p. 18).

A partir dai podemos apresentar diversas matrizes, como seguem as Figuras 15 e 16:

Figura 15- Matriz zero e matriz identidade denomidadas por Cayley.

$$\begin{pmatrix} 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix}$$

Fonte: Cayley (1858, p. 18).

A adição matricial fora revelado, junto com as propriedades, como matriz oposta e a propriedade associativa da soma matricial, por Cayley (1858) em sua obra, Figura 16.

Figura 16 – Soma de duas matrizes apresentadas por Cayley.

$$(X, Y, Z) = \left(\begin{array}{|ccc|} a\ , & b\ , & c \\ a'\ , & b'\ , & c' \\ a''\ , & b''\ , & c'' \end{array}\right)(x, y, z), \quad (X', Y', Z') = \left(\begin{array}{|ccc|} \alpha\ , & \beta\ , & \gamma \\ \alpha'\ , & \beta'\ , & \gamma' \\ \alpha''\ , & \beta''\ , & \gamma'' \end{array}\right)(x, y, z)$$

$$(X+X', Y+Y', Z+Z') = \left(\begin{array}{|ccc|} a+\alpha\ , & b+\beta\ , & c+\gamma \\ a'+\alpha'\ , & b'+\beta'\ , & c'+\gamma' \\ a''+\alpha''\ , & b''+\beta''\ , & c''+\gamma'' \end{array}\right)(x, y, z)$$

Fonte: Cayley (1858, p. 19).

O produto de uma matriz por escalar (regra) fora apresentado do seguinte modo a partir de uma dada equação:

Figura 17- Regra do produto de uma matriz por um escalar.

$$(X, Y, Z) = \left(\begin{array}{|ccc|} a\ , & b\ , & c \\ a'\ , & b'\ , & c' \\ a''\ , & b''\ , & c'' \end{array}\right)(mx, my, mz)$$

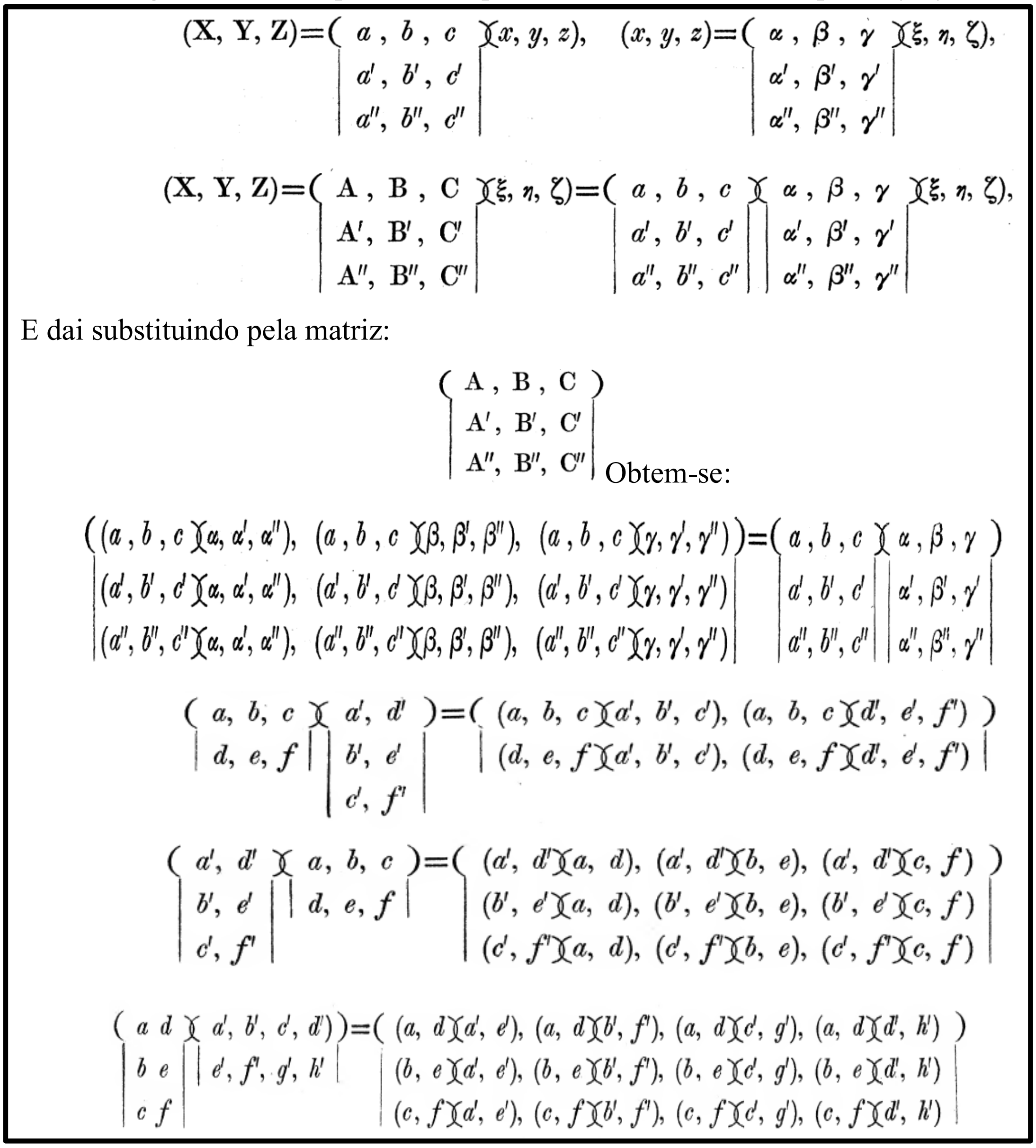
$$(X, Y, Z) = m\left(\begin{array}{|ccc|} a\ , & b\ , & c \\ a'\ , & b'\ , & c' \\ a''\ , & b''\ , & c'' \end{array}\right)(x, y, z) = \left(\begin{array}{|ccc|} ma\ , & mb\ , & mc \\ ma'\ , & mb'\ , & mc' \\ ma''\ , & mb''\ , & mc'' \end{array}\right)(x, y, z)$$

Fonte: Cayley (1858, p. 36).

O produto de matrizes é apresentado como segue na Figura 18:

Esta obra de Cayley (1858) também expirou muito nosso MER, no que diz respeito ao estudo de matrizes a partir do estudo qualitativo dos sistemas lineares.

Figura 18 - Exemplo de multiplicação matricial revelado por Cayley.



$$(X, Y, Z) = \left(\begin{array}{ccc} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{array}\right) \between (x, y, z), \quad (x, y, z) = \left(\begin{array}{ccc} \alpha, & \beta, & \gamma \\ \alpha', & \beta', & \gamma' \\ \alpha'', & \beta'', & \gamma'' \end{array}\right) \between (\xi, \eta, \zeta),$$

$$(X, Y, Z) = \left(\begin{array}{ccc} A, & B, & C \\ A', & B', & C' \\ A'', & B'', & C'' \end{array}\right) \between (\xi, \eta, \zeta) = \left(\begin{array}{ccc} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{array}\right) \between \left(\begin{array}{ccc} \alpha, & \beta, & \gamma \\ \alpha', & \beta', & \gamma' \\ \alpha'', & \beta'', & \gamma'' \end{array}\right) \between (\xi, \eta, \zeta),$$

E dai substituindo pela matriz:

$$\left(\begin{array}{ccc} A, & B, & C \\ A', & B', & C' \\ A'', & B'', & C'' \end{array}\right)$$ Obtem-se:

$$\left(\begin{array}{ccc} (a, b, c \between \alpha, \alpha', \alpha''), & (a, b, c \between \beta, \beta', \beta''), & (a, b, c \between \gamma, \gamma', \gamma'') \\ (a', b', c' \between \alpha, \alpha', \alpha''), & (a', b', c' \between \beta, \beta', \beta''), & (a', b', c' \between \gamma, \gamma', \gamma'') \\ (a'', b'', c'' \between \alpha, \alpha', \alpha''), & (a'', b'', c'' \between \beta, \beta', \beta''), & (a'', b'', c'' \between \gamma, \gamma', \gamma'') \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{array}\right) \between \left(\begin{array}{ccc} \alpha, & \beta, & \gamma \\ \alpha', & \beta', & \gamma' \\ \alpha'', & \beta'', & \gamma'' \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc} a, & b, & c \\ d, & e, & f \end{array}\right) \between \left(\begin{array}{cc} a', & d' \\ b', & e' \\ c', & f' \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc} (a, b, c \between a', b', c'), & (a, b, c \between d', e', f') \\ (d, e, f \between a', b', c'), & (d, e, f \between d', e', f') \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc} a', & d' \\ b', & e' \\ c', & f' \end{array}\right) \between \left(\begin{array}{ccc} a, & b, & c \\ d, & e, & f \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc} (a', d' \between a, d), & (a', d' \between b, e), & (a', d' \between c, f) \\ (b', e' \between a, d), & (b', e' \between b, e), & (b', e' \between c, f) \\ (c', f' \between a, d), & (c', f' \between b, e), & (c', f' \between c, f) \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc} a & d \\ b & e \\ c & f \end{array}\right) \between \left(\begin{array}{cccc} a', & b', & c', & d' \\ e', & f', & g', & h' \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cccc} (a, d \between a', e'), & (a, d \between b', f'), & (a, d \between c', g'), & (a, d \between d', h') \\ (b, e \between a', e'), & (b, e \between b', f'), & (b, e \between c', g'), & (b, e \between d', h') \\ (c, f \between a', e'), & (c, f \between b', f'), & (c, f \between c', g'), & (c, f \between d', h') \end{array}\right)$$

Fonte: Cayley (1858, p.19 e 36).

A operação de multiplicação (*ou composição*) por duas *matrizes*, de um modo geral não é comutativa. O tratamento dado a matriz inversa (ou matriz recíproca) era: dado uma matriz A calcule sua inversa, então a matriz $A \times A^{-1} = I$, onde A^{-1} é a inversa de A e I a matriz identidade na mesma ordem das demais. Seu trabalho lidando com multiplicação matricial culminou em seu teorema, Teorema de Cayley-Hamilton[19], que diz que o polinômio mínimo de uma matriz divide seu polinômio característico $p(x) = \det(xI_n - A)$. Podemos evidenciar na obra de Cayley (1855) a gênese da ideia da matriz de identidade, bem como o inverso de uma matriz quadrada, assim como o produto de uma matriz por sua inversa obtem-se a matriz identidade.

[19] Teorema (Cayley-Hamilton). Sejam V um K-espaço vetorial de dimensão finita n e $T : V \to V$ linear e $p(\lambda)$ o polinômio característico de T. Então, $p(T) = 0$.

Ainda no século XIX Gauss introduz um procedimento usado para resolver sistemas de equações lineares. Seu trabalho que ficou conhecido como *método da eliminassão gaussiana* tratou, principalmente, com as equações lineares e trazia a ideia de matrizes ou suas notações. Sua atividade matemática lidava com com equações, contendo diversos números e variáveis, bem como as obras tradicionais de Euler e Cramer. Jeff Christensen (2012) comenta que este método utiliza os conceitos de combinação, troca ou multiplicação de linhas entre si, a fim de eliminar variáveis de certas equações. Depois de determinadas as variáveis é necessário se substituir o valor das mesmas na equação para se encontrar as variáveis desconhecidas restantes.

No final do século XIX as matrizes estavam, fortemente, ligadas com a Física e por sua vez os matemáticos, deram mais atenção aos vetores, por serem elementos matemáticos básicos. O interesse pela AL mostrou-se a partir desenvolvimento de computadores, pois era possível se resolver uma enorme matriz **nxn**, já que por meio destes poderiamos, rapidamente e com uma boa precisão resolver estes sistemas de AL. Portanto, com o avanço da tecnologia, utilizando os métodos de Cayley, Gauss e Euler a AL avançou mais rapidamente e com maior eficacia. Independentemente da tecnologia embora eliminação de Gauss ainda prova ser o melhor modo conhecido para resolver um sistema de equações lineares (TUCKER, 1993).

Em nossa proposta de modelo epistemológico utilizaremos a obra de Cayley, pois diversas tarefas perpassam pelo estudo de matrizes, a partir da ideia de sistemas lineares, já que tratamos esse objeto como fundamental em AL.

3.1.6 Vetores

Dado a importância dos vetores em nossa proposta faremos um estudo histórico para compreender a epistemologia desse objeto.

Desde a Grécia antiga os gregos já utilizavam a *Regra do paralelogramo* – (*Paralelogramo de velocidades*) associados a problemas físicos, como força, por exemplo e que tinham uma base na Geometria para lhes auxiliar na solução de problemas de ordem da física. O paralelogramo de velocidades, que é uma representação geométrica para a adição de vetores, já era utilizado desde a Idade Média.

Möbius (1827) no estudo sobre a noção de segmento de linha orientado, em sua obra *Barycentrishe Calcul* [Cáculo do baricentro] criou um sistema geométrico com aparência vetorial, revelando que um segmento é a diferença entre dois pontos. Dai AB + BA = 0 ou AB = - BA.

A noção de adição de vetores já era utilizada, em muito outros contextos da seguinte forma: se A, por exemplo é um ponto, então $A = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}$. Fazendo o ponto A + B é igual a

$A+B=\begin{pmatrix} a+a' \\ b+b' \end{pmatrix}$, que geometricamente seria a diagonal do paralelogramo (regra do paralelogramo), além de trabalhar com produto de segmentos. Em sua Teoria Central do Baricentro Möbius (1827) já utilizava o que conhecemos como combinação linear.

Segundo Dieudonné (1990), a regra do paralelogramo servia para se determinar a velocidade de um ponto animado por um movimento dito composto de outros dois, como a descrição da espiral de Arquimedes, sendo a velocidade representada por um vetor, ou seja, um segmento de reta dirigido no sentido do movimento seguindo a tangente à trajetória e de comprimento proporcional à medida da velocidade.

Crowe (1994, p.52-53) ao comentar a obra o trabalho *Calcolo delle Equipollenze* de Giusto Bellavitis (1833), afirma que se aproxima de um estilo mais euclidiano sobre vetores:

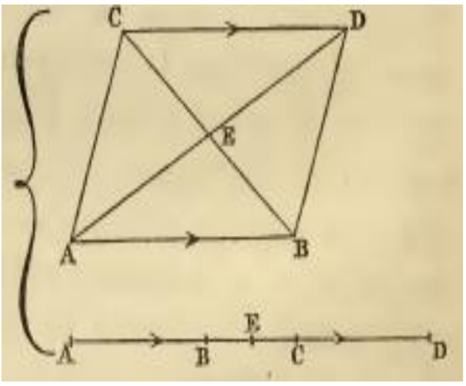
> 1º Uma linha reta designada usualmente por duas letras é entendida como tomada a partir da primeira letra até a segunda, assim AB e BA não podem ser considerados a mesma entidade, mas como duas quantidades iguais com sinais opostos.
> 2º Duas linhas retas são chamadas equipolentes se elas são iguais, paralelas e dirigidas no mesmo sentido.
> 3º Se duas ou mais linhas retas são relatadas de tal forma que a segunda extremidade de cada linha coincide com a primeira da seguinte, então a linha, que juntamente com estas forma um polígono (regular ou irregular), e que é traçada a partir da primeira extremidade da primeira linha até a segunda da última, é chamada soma equipolente (composta equipolente). Esta é representada pelo sinal ~ interposto entre as linhas combinadas, e o sinal indica a equipolência. Assim temos
> AB + BC ~ AC,
> AB + BC + CD ~ AD, etc.
> Tais equipolências continuam verdadeiras quando substituídas pelas suas linhas ou por linhas respectivamente equipolentes a elas ...
> 5º Em equipolências, como em equações, uma linha pode ser transferida de um lado para outro, desde que o sinal seja trocado ...
> 6º A equipolência AB n×CD, sendo n um número positivo, indica que AB é paralelo a e tem mesma direção [sentido] da linha CD, e que seus comprimentos têm uma relação dada pela equação AB = n×CD.
> Vamos nos restringir, agora, à linhas situadas no plano. A inclinação da linha AB é o ângulo HAB, que este forma com a horizontal AH traçada da esquerda para a direita, qualificando positivo os ângulos medidos da direita para cima e de 0º a 360º ...
> O ângulo ou inclinação de CD sobre AB é igual à inclinação de CD menos a de AB.
> A equipolência AB~ CD×EF ÷ GH não requer somente os comprimentos de AB, BC, etc., mas também a verificação da equação em que a equipolência é trocada pela conversão do sinal de equipolência em um sinal de igualdade como segue:
> inc.AB = inc.CD + inc.EF − inc.GH ...
> A linha equipolente a 1 é considerada como horizontal, ou seja, não possui inclinação ...
> 6. Teorema Fundamental: Em equipolências, termos são transpostos, substituídos, somados, subtraídos, multiplicados, divididos, etc., ou seja, todas as operações que são executadas poderiam ser legitimadas se elas fossem tratadas como equações, e as equipolências resultantes são sempre exatas. ...

Bellavitis não generalizava o produto de segmentos de linha dirigidos para o espaço. Esta generalização deveria ser alcançado pelos irlandeses matemático, Sir William Rowan Hamilton (DORIER, 1997). A motivação de Hamilton (1866) na obra intitulada Elements of Quaternions em generalizar veio das similaridades geométricas entre os complexos e vetores no plano no espaço tridimensional.

Na obra Hamilton (1866) trabalha com concepção de vetores, operações com vetores, coeficientes do vetor, equações lineares e vetores, expressões com vetor e equações para curvas em um dado plano, aplicações de vetores no espaço, baricentro de sistema de pontos, diferencial de vetores, quatérnions considerando como quociente de vetores, envolvendo relação angular, igualdade de quatérnios, versor de um quatérnions, operações entre quatérnions, quatérnions coplanares, e aplicação dos quatérnions dividido em 3 livros. O livro apresenta o estudo no R^2 e depois no R^3, com muitos registros geométricos e algébricos. Nesta obra a decomposição de um quatérnions era representado como **q = Sq + Vq = Vq + Sg** Hamilton (1866), e em seguida tratava de mostrar as propriedades.

Segundo Táboas (2010), o pesquisador Bellavitis (1833) construiu uma estrutura que levou em consideração o produto de vetores no espaço, ideia esta associado ao produto de números complexos vistos em suas formas trigonométricas. Esta é a gênese dos *quatérnius* generalizada por Hamilton, conforme (DORIER, 1995). Era possível se multiplicar em três dimensões (multiplicação que leva em conta o produto vetorial e o escalar), onde se levaria em consideração a razão dos comprimentos e a rotação entre a direção dos vetores, conforme Figura 19.

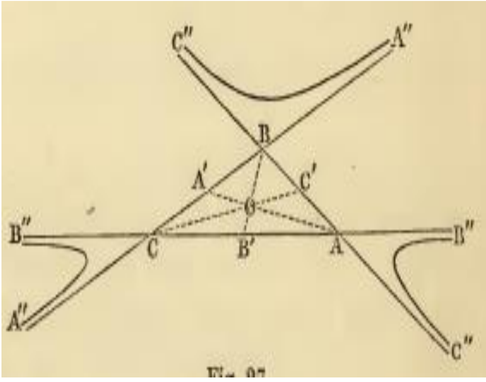
Figura 19 – Vetores no R^2 - regra do paralelogramo.



Fonte: Hamilton (1866, p. 2).

Na Figura 20 a atividade matemática proposta por Hamilton ao trabalhar com a ideia de Möbius, com relação ao problema do baricentro do triângulo.

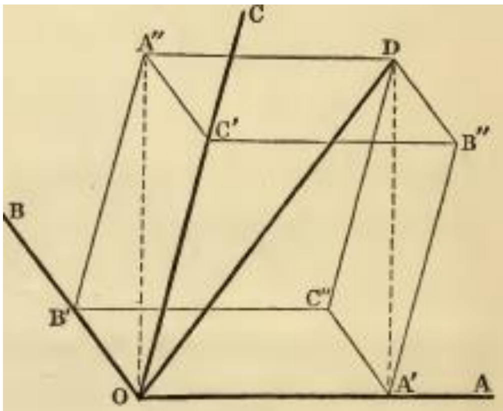
Figura 20– Ponto do triângulo com corda de inflexão.



Fonte: Hamilton (1866, p.42).

Apresenta em seguida a equação linear entre 4 vetores $a\alpha + b\beta + c\gamma + d\zeta = 0$, já que foi o primeiro trabalho a propor se trabalhar no R^n (Figura 21).

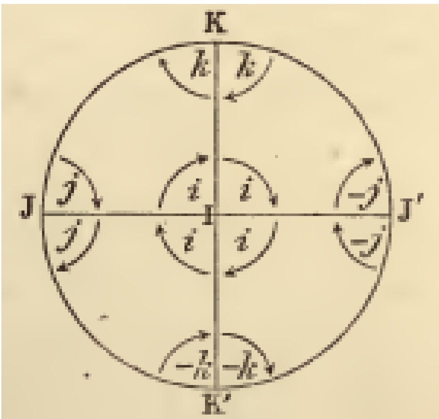
Figura 21–Equação linear entre 4 vetores $a\alpha + b\beta + c\gamma + d\zeta = 0$



Fonte: Hamilton (1866, p. 50).

Uma primeira ideia de rotações e quatérnius apresentadas por Hamilton -representação de 3 versores no R^3 (Figura 22). Um vetor unitário ou versor num espaço vetorial normalizado é um vetor, mais comumente um vetor espacial, cujo comprimento é 1. O vetor normalizado aqui é sinônimo do vetor unitário.

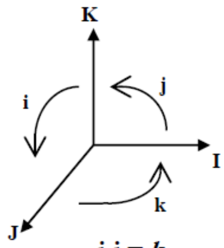
Figura 22- Rotações e quatérnius apresentadas por Hamilton -representação de 3 versores no R^3.



Fonte: Hamilton (1866, p. 157).

Para o pesquisador os números complexos podiam ser vistos como pontos em um plano e que poderiam ser adicionados e multiplicados juntos usando certas operações geométricas. Então, procurou encontrar uma maneira de fazer o mesmo para pontos no espaço, sendo representados por suas coordenadas, que são triplos de números. As operações pareciam óbvias, mas a multiplicação lhe criou um problema inicial. Enquanto ele não podia "multiplicar triplos", ele viu uma maneira de fazê-lo por quádruplos. Usando três dos números no quadruplo como os pontos de uma coordenada no espaço, Hamilton poderia representar pontos no espaço por seu sistema novo dos números (Figura 23).

Figura 23- Fórmula básica para o cálculo dos quatérnions.



$$i.j = k$$
$$j.k = i$$
$$k.i = j$$
$$i^2 = j^2 = k^2 = -1$$

$$i = \frac{\overrightarrow{OJ}}{\overrightarrow{OK}} \qquad j = \frac{\overrightarrow{OK}}{\overrightarrow{OI}} \qquad k = \frac{\overrightarrow{OI}}{\overrightarrow{OJ}}$$

Fonte: Hamilton (1866, p. 160).

Comenta Mechialdes da Silva (1997), que Hamilton trabalhava com complexos na forma a + bi e na forma a + bi + cj e que sua problemática estava no produto de n-uplas onde se tinha n > 2. Observou que esta dificuldade terminara quando usava quádruplas e sem usar a propriedade comutativa para esta operação. Então passou a escrever a + bi + cj + dk (todo quatérnion pode ser reduzido a forma quadrinormal) (HAMILTON, 1866). A teoria dos vetores foi a parte mais explorada do cálculo dos quatérnions, que era apresentado, inicialmente, com um olhar geométrico e mais tarde com um olhar mais abstrato, contribuindo para elaboração do conceito de vetor.

Os números complexos tinham sido assimilados sobre um cálculo de pontos do plano. Então havia uma questão: *Haveria um cálculo análogo para os pontos no espaço*? Hamilton estudava os complexos considerando-os como pares $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ de números reais, e por conseguinte para trios $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, trabalhando com a soma e a adição destes trios, verificando as propriedades associativa, comutativa e distributiva em relação a adição, portanto a Álgebra deve ter uma lei aritmética em sua fundamentação.

Passou a escrever $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ = a.1+ b.i + c.j, onde 1 = $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, i = $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e j= $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, como sendo 3 vetores unitários sobre eixos retangulares no espaço. Portanto, os quaternions são números algébricos que permitem uma representação geométrica no espaço.

Segundo Dieudonné (1990) o trabalho de Hamilton consistia em associar os trios aos comprimentos (a + bi +cj) (x + yi =zj) = A + Bi + Cj, de modo que $(a^2 + v^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z2) = A^2 + B^2 + C^2$ (lei dos módulos). Concluindo que:

i) Deve-se multiplicar o quartetos a + bi + cj + dk e não trios;

ii) Abandona-se a comutatividade da multiplicação, conservando-se a associatividade e a distributividade, em relação a adição:

Ij = -ji = k deduzindo às regras:

$ki = i(ij) = (i^2)j = -j$; $ki = (ij)i = -(ji)i = -j(i^2) = j$; $jk = j(ij) = -j(ji) = -(j^2)i = i$; $kj = (ij)j = i(j^2) = -i$

Assim $(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(x^2 + y^2 + z^2 + t^2) = (ax - by - cz - dt)^2 + (ay + bx + ct - dz)^2 + (az - bt + cx + dy)^2 + (at + bz - cy + dt)^2$. Um vetor no R^3 tem três componentes especiais, logo pode ser escrito na *forma quadrinormal* $\vec{u} = \alpha\vec{x} + \beta\vec{j} + \gamma\vec{k}$ em que se pode trabalhar com a adição e dois produtos [internos (escalar) e externos (vetorial)]. Podemos interpretar os quatérnius de Hamilton como um vetor no espaço tridimensional, portanto no R^3.

Dorier (1995) ressalta que o avanço do estudo dos quatérnions, os quais são números algébricos que permitem uma representação geométrica no espaço, onde a multiplicação representa, ao mesmo tempo, o produto escalar e o produto vetorial, influenciando sobre o desenvolvimento da análise vetorial. Segundo o pesquisador a Álgebra dos quatérnions teve uma forte influência no desenvolvimento da Al, logo utilizaremos ideias de Hamilton e Möbius na construção do MER.

3.1.7 Espaços vetoriais

Segundo Dorier (1995) o conceito de rank (posto) na teoria axiomática de espaços vetoriais é inseparável do conceito de dimensão, que é uma síntese das relações entre os conceitos de geradores e dependência. Ainda assim, o conceito de posto é importante em muitos problemas de AL, e o significado que adquiriu ao longo de quase dois séculos, durante os quais os determinantes eram o seu apoio.

O início desta jornada histórica se dera com Descartes e Fermat, por volta de 1630, como já descrevemos no início deste capítulo. Leibniz em 1679 pensou inicialmente sobre uma Álgebra Universal, que estivesse de acordo direto com a Geometria, isto é, uma *Álgebra Geométrica*, sendo assim submetida a uma organização axiomática da Geometria. Os conceitos de números reais e a

Álgebra Geométrica foram criados por Grassmann em meados do século XIX.

Na obra *Die Lineale Ausdehnungslehre, ein never Zweig der Mathematik dargestellt und durch Anwendungen auf die übrigen Zweige der Mathematik, wie auch auf die Statik, Mecanik, die lehre vom Magnetismus und die krystallonomie erläutert* ou simplesmente, *Ausdehnungslehre* ou ainda (Teoria da Extensão) publicada por Grassmann (1844), distingia a AL como uma teoria formal independente de alguma interpretação, a partir de sua apliacação na Geometria, isto é, Grassmann criou uma Geometria abstrata e mais geral.

Na primeira edição da obra do pesquisador a Álgebra esta misturada com interpretações geométricas. Em 1862 na segunda versão da obra initulada *Die Ausdehnungslehe lebre, Vollständig und in Strenger Form bearbeitet*, já havia um estilo moderno de todo desenvolvimento da teoria matemática que precede estas aplicações. Podemos dizer que Grassmann ao manipular conceitos de análise vetorial, foi o precursor da AL moderna.

A AL adquire uma caráter mais axiomático com o surgimento dos espaços vetoriais. A teoria da Extensão de Grassmann (1844), pode ser considerado como uma primeira *teoria formal da AL de dimensão finita*, décadas à frente de todos os outros tais desenvolvimentos, isto é, apenas apreciadas no entanto por volta de 1920 por Cartan que utilizava o produto externo para criar uma Álgebra Externa, e assim fundamentando da Álgebra Multilinear. A teoria da Extensão é baseada na intuição geométrica, tomando uma posição formalista. O pesquisador antecipa muitos resultados na AL, os quais só são descobertos quase um século mais tarde e que clarifica o papel desempenhado pela Geometria e Álgebra no desenvolvimento de AL.

No desenvolvimento da AL Grassmann (1844) tratou em sua obra com as propriedades dos vetores, que $[\alpha\beta] = [\alpha\gamma]-[\beta\gamma]$, aparecendo a ideia algébrica do vetor nulo como $[\alpha\alpha]=[\alpha\gamma]-[\alpha\gamma]$. A propriedade a ~(b ~c) = (a~b)~c, a~b = b~c e a~(b + c) = (a~b)+(a~c) são trabalhadas na obra. Assim como o produto por escalares $[\alpha\beta]\gamma = \alpha[\beta\gamma]$.

Todo vetor de um sistema de **m**-ésima ordem pode ser escrito como a soma de **m** vetores, que pertencem às **m** maneiras independentes dadas de mudança do sistema. Essa forma de expressão é única (CROWE, 1967, p. 69)

Atualmente esta afirmação pode ser entendida como sendo o seguinte teorema: todo vetor de um espaço vetorial pode ser escrito de maneira única como combinação linear dos vetores de uma base. Resultado este que pode ser tomado nos dias atuais como definição de base (MECHIALDES DA SILVA, 1997).

O estudioso Grassmann (1862) definiu a multiplicação de um vetor por uma matriz como uma combinação linear das colunas desta matriz. Desenvolveu classes de álgebra de muito maior generalidade. Em vez de considerar apenas quádruplas ordenadas de números reais, ele considerou n-uplas ordenadas de números reais, pois objetivava criar uma Geometria em uma teoria mais abstrata e mais geral (MECHIALDES DA SILVA, 1997).

O pesquisador inicia com uma coleção de *unidades* que chamara de e_1, e_2, e_3, ..., definindo um espaço linear livre o qual generalizou, ou seja, considerou a combinação linear $\sum \alpha i e i$, onde αi era um número real, definindo assim adição e multiplicação por números reais, além de formalizar as *grandezas extensivas* e provar das propriedades do espaço linear para estas operações, como segue:

$$\sum \alpha i e i + \sum \beta i e i = \sum(\alpha i + \beta i)\, e i \ \text{ e } \ \alpha(\sum \alpha i\, e i) = \sum(\alpha \alpha i) e i$$

Além da noção de *unidade* uma outra ideia revelada por Grassmann foi a de *grandeza extensiva* desenvolvida, na qual uma grandeza Ω pode ser derivável a partir de outras a, b, c, d, e, ... por meio de números $\alpha, \beta, \chi, \delta, \ldots$, então Ω = aα +bβ +cχ +dδ +..... Segundo Dorier (1995), Grassmann se preocupava com a escolha restrita de usar a multiplicação por um escalar, e portanto, qualquer combinação linear, além de gerar um modelo rico para a linearidade, provando a mais elementar propriedade do espaço vetorial de dimensão finita.

Grassmann (1862) enuncia a definição de espaços vetoriais, como preâmbulo para a conceituação de Transformação Linear com base na definição de função, estabelecendo a noção de linearidade como objetos pertencentes ao espaço (HERNÁNDEZ, 2011, p. 85). Em particular, os objetos são dadas a priori e definidos através de operações, que está mais perto de apresentações modernas: Dado um sistema de unidades de M (ou seja, **m** linear magnitudes independentes), Grassmann definiu um sistema de ordem **m** como o sistema de todas as combinações lineares das unidades. Em seguida, ele definiu as operações por um número como *propriedades fundamentais*.

Assim define Grassmann (1862): Um espaço vetorial **V** é um conjunto de objetos, denominados vetores, junto com as operações chamadas soma e multiplicação por escalar, que satisfazem os onze axiomas enumerados a seguir em uma linguagem atual, pois por exemplo no axioma (2) o autor escrevera a ^ (b + c) = a ^ b + a ^ c (p.49), ou ainda (7) $(A + A_1)$ ^ b = A ^ b + A_1 ^ b (p. 52):

(1) a + b = b + a	(6) $\alpha\beta\gamma = \alpha(\beta\gamma)$
(2) a + (b + c) = (a + b) + c	(7) (a + b) γ = a γ + b γ
(3) a + b - b = a	(8) $a(\alpha+\beta) = a\alpha + a\beta$
(4) a - b + b = a	(9) a.1 = a
(5) $\alpha\beta = \beta\alpha$	(10) $\alpha\beta = 0$, $se\alpha = 0 ou \beta = 0$

(11) $a/\beta = a.\frac{1}{\beta}$, se $\beta \neq 0$ (GRASSMANN, 1862, p. 52).

Os elementos de um espaço vetorial são chamados de vetores e os elementos do corpo são chamados de escalares.

Esta axiomatização pode ser vista com a primeira da AL. Segundo Mechialdes da Silva (1997) a ideia de vetor, na versão de 1862 foi revelada como sendo um segmento de linha reta com comprimento e direções fixados. Focando as propriedades os vetores são adicionados de maneira usual; a subtração é simplesmente a adição do negativo, isto é, o vetor de mesmo comprimento e direção oposta; Vetores são também exemplos de *grandezas extensivas*.

Na primeira edição do Ausdenhungslehre já apresentava as definições de noções de subespaço, base, dimensão e projeção de elementos para subespaços, além de realizar um estudo de mudança de base definindo a transformação elementar de base (produto elementar é toda transformação linear invertível) e provou-se a identidade dim (V + W) = dim V + dim W – dim (V ∩W), o qual mostra que a soma da dimensão é a intersecção de dois subespaços.

Dependência linear e dimensão eram conceitos centrais na proposta da Teoria implementada por Grassmann, além de apresentar uma ideia moderna sobre espaços vetoriais, como veremos adiante.

Na obra *Sur les diferentes genres de multiplication* Grassmann (1855) prova a propriedade distributiva, como sendo o produto de elementos de um espaço linear, Onde **eiej** são combinações lineares do **ei**, então: $(\sum \alpha iei)(\sum \beta jej) = \sum \alpha i\beta jeiej.$

Segundo Sander (1979), Grassmann enviara a primeira versão de seu Ausdenhungslehre a Cauchy, que não o respondeu logo, mas depois de 6 anos publica o texto *Comptes Rendus* [Prestação de contas] (tradução nossa). Grassmann ao ler o texto de Cauchy relata que *Cauchy* provou as mesmas coisas*, isto é,* os mesmos resultados aos quais já havia publicada em 1844, inclusive com aplicações na análise algébrica, na Geometria e em diversos ramos da física.

Como consequência do produto linear eiej = ejei ou ainda eiej = - eiej ao estender a ideia da associatividade mostra que $e_1e_2e_3 = -e_1e_2e_3$ para um espaço tridimensional. Então, somente, uma independência simples unitária de $e_1e_2e_3$ e a independência das três unidades e_1e_2 e e_2e_3 já que $\xi_1e_1e_2 + \xi_2e_2e_3 + \xi_3e_3e_1 = 0$, implica quando se multiplica por e_3 que $\xi_1e_1e_2e_3$ daqui $\xi_1 = 0$ e similarmente $\xi_2 = \xi_3 = 0$, multiplicação esta denominada nos dias atuais de *multiplicação exterior*. Como resultado deste trabalho temos que a forma como postulamos hoje em dia no que diz respeito a independência linear, quando os escalares da equação tem que ser nulos e que só tenha esta solução.

Nas (p. 71 e 72) da obra de Grassmann (1844) podemos encontrar o sistema S_3 a seguir:

$$\begin{gathered}
\alpha_1^{(1)}x_1 + \alpha_2^{(1)}x_2 + \cdots + \alpha_n^{(1)}x_n = \beta^{(1)} \\
\alpha_1^{(2)}x_1 + \alpha_2^{(2)}x_2 + \cdots + \alpha_n^{(2)}x_n = \beta^{(2)} \\
\cdots \\
\alpha_1^{(n)}x_1 + \alpha_2^{(n)}x_2 + \cdots + \alpha_n^{(n)}x_n = \beta^{(n)}
\end{gathered}$$

Podemos introduzir as unidades independentes $e^{(1)}$, $e^{(2)}$, ..., $e^{(n)}$, logo:

$$
\begin{aligned}
a_1 &= \alpha_1^{(1)} e^{(1)} + \alpha_1^{(2)} e^{(2)} + \cdots + \alpha_1^{(n)} e^{(n)} \\
a_2 &= \alpha_2^{(1)} e^{(1)} + \alpha_2^{(2)} e^{(2)} + \cdots + \alpha_2^{(n)} e^{(n)} \\
&\cdots \\
a_n &= \alpha_n^{(1)} e^{(1)} + \alpha_n^{(2)} e^{(2)} + \cdots + \alpha_n^{(n)} e^{(n)} \\
b &= \beta^{(1)} e^{(1)} + \beta^{(2)} e^{(2)} + \cdots + \beta^{(n)} e^{(n)}
\end{aligned}
$$

E também $ba_2a_3....a_n = x_1a_1a_2....a_n$, se $a_1a_2.....a_n \neq 0$, então temos a única solução. Logo $x_1 = \dfrac{ba_2a_3a_4a_5a_6....a_n}{a_1a_2a_3a_4a_5a_6....a_n}$, assim para x_2, x_3, ... Associando a ideia de determinantes Sander (1979) comenta que para se obter x_1, x_2, ...x_n não podemos ter divisão por zero, logo introduzindo-se o *determinante da matriz* $(\alpha_j^{(i)})$ por cada $(\alpha_1^{(i)})$ por $\beta^{(i)}$ temos a gênese a chamada *Regra de Cramer*.

Peano (1888) publica em sua obra intitulada *Calcolo geométrico* [Cálculo geométrico], segundo Ausdenhungslehre de Grassmann a primeira definição axiomática de espaços vetoriais, sendo chamada de *sistema linear*, mas a definição de espaço vetorial foi introduzido na matemática e ficou amplamente conhecido por volta de 1920, quando Hermann Weyl publica em Berlin sua obra *Zeit und Materie* [Tempo e matéria] entre outros, os quais publicaram a definição formal sobre os sistemas lineares de Peano, que em sua obra denominou de *vetores coletores lineares*, apesar de Grasmman (1862) não ter apresentado ou melhor não ter colocado em uma linguagem acessível.

De acordo com Dorier (1995) apesar de sua importante contribuição para a teoria do espaço axiomático vetor, admite que Peano, Burali-Forti, e Marcolongo, foram menos preciso do que Grassmann, como por exemplo, com relação ao conceito de dimensão. O conceito de base, apresentado por eles, antes do de dimensão, é o número máximo de vetores independentes no espaço. Isto foi suficiente para provar que qualquer conjunto de **n** vetores independentes de um espaço *n-dimensional*, representa um sistema de geradores e, portanto, uma base.

Peano já apresentava as propriedades com vetores, que apresentarei no quadro a seguir, como segue (PEANO, 1888, p. 75), onde o símbolo $\perp U$ representa a rotação de U de um ângulo reto positivo (Figura 24):

Figura 24 - Propriedades do vetor de Peano.

(1)	$(\mathrm{U} = \mathrm{U}') = (\perp \mathrm{U} = \perp \mathrm{U}')$.
(2)	$\perp\perp \mathrm{U} = -\mathrm{U}$.
(3)	$\perp x \mathrm{U} = x \perp \mathrm{U}$.
(4)	$\perp(\mathrm{U} + \mathrm{V}) = \perp \mathrm{U} + \perp \mathrm{V}$.
(5)	$(\perp \mathrm{U})\,(\perp \mathrm{V}) = \mathrm{U}\mathrm{V}$.
(4′)	$\perp(x\mathrm{I} + y\mathrm{J}) = x \perp \mathrm{I} + y \perp \mathrm{J}$.

Fonte: Peano (1888, p. 75).

Na obra de (Peano, 1888, p. 98) é possível verificar o que chamamos hoje de produto interno, o qual foi representado da seguinte forma:

Sendo U = xI + yJ + zk e V = x'I + y'J + z'K

Então o *bivetor* (termo usado por Peano) UV se dava por:

UV = (yz' – y'z)JK + (zx' – z'x)KI + (xy' – x'y)IJ

Segue um bivetor u escrito na forma:

u = vJK + wKI +hIJ, onde **v**, **w** e **h** são as coordenadas do bivetor **u**. Sendo assim, as coordenadas do bivetor **UV** em função das coordenadas dos seus fatores fica, ou seja, o vetor U e o bivetor u fica na forma:

Uu = (xv + yw + zh)IJK

Caso x,y,z,x',y',z',x'',y'',z'' sejasm as coordenadas dos vetores U, V e W, logo:

$$\mathrm{UVW} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} IJK$$

Peano realizou um estudo sobre um sistema de operações aplicados a entes geométricos, de um modo semelhante ao que a álgebra realiza com os números. Esta atividade matemática era apresentada de maneira formal, por meio de combinações lineares. Na obra *Calcolo Geométrico* de 1888, Peano apresenta um objeto matemático que chamara de *Sistema Linear*. Segundo Mechialdes da Silva (1997) este sistema consistia de quantidades munidas de operações de adição de vetores e multiplicação por escalar. Tal objeto apresenta uma definição bem próxima da definição de espaço vetorial dos dias atuais. Define *dimensão* como sendo o *número máximo de quantidades linearmente independentes em um sistema*, além de trabalhar com mudança de base.

Peano (1888) define *sistemas lineares* como algo bem próximo do que entende hoje por espaços vetoriais, como segue:

Há alguns sistemas de entes sobre os quais podemos definir, onde ($\frown$) indica conjunção e (**<**) uma implicação:

> i) Dados dois entes **a** e **b** do sistema, então a proposição **a = b,** que expressa uma condição entre eles, satisfeita por pares de entes em que são válidas as equações lógicas:
> (a=b) = (b=a), (a=b) $\frown$ (b=c) < (a=c)
> ii) Definiu a + b que tem que satisfazer a condição:
> (a=b) < (a+c=b+c), a+b = b+a, a+(b+c) = (a+b)+c
> iii) Sendo a do sistema e m $\in Z_+^*$, onde **ma** é a soma de **m** entes iguais a **a**, então:
> (a=b) < (ma=mb); m(a+b) = ma + mb; (m+n)a = ma + na; (mn)a = m(na); 1a = a
> iv) E por fim 0a=0, isto é, o produto de 0 por a é 0 (zero), assim como, a – a = 0 ou a + 0 = a (PEANO, 1888, p.142).

Segundo Dorier (1995), as tentativas de se criar um estudo sobre uma análise geométrica foi pelo desejo de uma Geometria livre da invasão externa da aritmética ou como uma tentativa de importar alguns aspectos da Álgebra na Geometria. Em qualquer caso, a partir da descoberta de um método analítico, a nova relação entre Àlgebra e Geometria, permitiu a evolução destes dois campos da matemática, estes ligadas em um processo dialético. Neste sentido, a utilização do método analítico em Geometria gerou a maioria das ferramentas relacionados a álgebra de matrizes, através do estudo das substituições lineares (isto é, mudança de coordenadas).

Após Peano destaca-se a obra de Pincherle (1901), enfatizou espaços lineares de funções e operadores lineares sobre estas. Publicou um livro intitulado *Le operazioni distributive e le loro applicazioni all'analisi* [As operações de distribuição e suas aplicações à análise], sobre esses operadores, sendo denominados de *espaço linear*. Um exemplo mais intrigante do Pincherle de um espaço linear, era o conjunto de funções analíticas, que ele considerava como um espaço com dimensão infinita.

Burali-Forti (1897) assistente de Peano, em um livro sobre Geometria Diferencial, intitulado *Introducción à la géométrie différentielle*, que é o estudo do Cálculo diferencial à Geometria, juntamente com o italiano Marcolongo. Na introdução do livro, que faz uma diferença significativa em relação a obra de Peano, no que diz respeito a apresentação axiomática de *sistemas lineares*.

Investigou as aplicações de cálculo vetorial em uma ampla variedade de campos – desde Projetiva e Geometria Diferencial para a mecânica do contínuo, a partir óptica para Lorentz transformações e hidrodinâmica, introduziu a noção fundamental da derivada de um vetor tal como comparado com um ponto, o que lhe permitiu unificar e consideravelmente simplificar os fundamentos da análise vetorial.

O pesquisador Burali-Forti (1897) estudava o *vetor de campo, o qual* é uma função de uma variedade para a união (feixe tangente), disjunta dos seus espaços tangentes, de tal modo que em cada ponto, o valor é um membro do espaço tangente neste ponto. Essa relação foi chamada uma *secção de fibra.* Um campo de vetores é diferenciável se para cada função diferenciável, a aplicação do campo em cada ponto produz uma função diferenciável, então os campos vetoriais pode ser percebido como equações diferenciais independente do tempo. Uma função diferenciável a variedade real é uma curva da variedade. Isto define uma função do valor real para os espaços tangentes: a velocidade da curva em cada um dos pontos que constitui.

Sendo assim, uma curva foi tomada como uma solução do *campo de vetores* se, para cada ponto, a velocidade da curva fosse é igual ao campo de vetores naquele ponto; diz-se que a curva é um caminho completo do campo vetorial.

Na área de análise funcional, os espaços funcionais de dimensão infinita incontável, nessa perspectiva, surge em 1920 os Espaços de Banach [20](estrutura de base), que foi um passo importante ainda para o processo de axiomatização. Banach (1932) publicou *Théorie des Operadores de Linéaires* [Teoria dos Operadores Lineares], apresentando, segundo Dorier (1995) a maioria dos resultados da análise funcional e de dimensão infinita da AL. Este texto, e a publicação quase Simultânea da primeira edição de Van der Waerden (1930), marcou dois eventos que foram seriam essenciais para unificar uma teoria axiomática espaços vetoriais de dimensão finita ou infinita (DORIER, 1995).

O pesquisador alemão Waerden (1930) tinha um poder de síntese e estilo simples de escrever ajustando textos matemáticos como, os Espaços de Banach à Teoria Topologica do Grupo, sendo um pesquisador influente em Álgebra do século XX. O pesquisador comenta que suas pesquisas em Análise se deram a partir do método axiomático de Hilbert. Em sua obra é possível se verificar no primeiro capítulo enfoca o trabalho com espaços vetoriais.

Muitas contribuições de Álgebra Moderna a linearidade vieram com as contribuição de Steinitz (1910) na obra *Algebraische Theorie der Körper* onde prova um gerador minimal, além de definir claramente a dependência linear sobre um campo **R** e uma extensão finita de ordem **n**.

Com relação a Álgebra Moderna, ainda sobre sua contribuição na axiomatização de espaço vetorial, a Teoria das Equações este estudo se torna fundamental, e ai a Teoria dos Determinantes sendo ainda menos importante neste processo.

Apareceram estudos com dimensão infinita, como as obras de Wronski e Cauchy no início do século XIX permitem estabelecer uma base teórica para sistemas de equações diferenciais lineares para o final do século. As equações integrais também eram uma fonte de problemas de dimensionais lineares infinitas.

Segundo Dorier (1995) o matemático Riesz (1910) foi primeiro a definir um subespacço vetorial de funções, como conhecemos hoje. A Teoría dos operadores compactos de Riesz, tratam da topologia e a natureza dos problemas permitiram Riesz desenvolver uma interpretação geométrica da distância euclidiana num espaço com um número infinito de coordenadas, traçando assim um paralelo com a dualidade GA e a Sintética.

Assim há uma convergência de ideias de Álgebra, Geometria, Análise e Topologia. Mas a formalização diz respeito à estrutura topológica, considerando que a estrutura algébrica permanece implícita. A definição axiomática do espaço vetorial foi dada em especial por Banach (1920), com a criação de teoria na dimensão infinita, permitindo, por analogia, refazer a dimensão finita dar-lhe uma base mais formal.

Segundo Moore (1995), outro pesquisador que focou a Álgebra Moderna, mas

[20] Um espaço normado X é chamado de Espaço de Banach se toda sequência de Cauchy em X converge (PELLEGRINI, 2015, p. 1).

especificamente, sobre a Teoria de Anéis fora Dedekind, apresentando o conceito geral de um módulo sobre um anel, para campos de números algébricos. Dedekind usou a ideia de uma *base* para uma extensão de campo algébrica. Para esse autor o pesquisador Noether, foi quem introduziu a noção geral de Anel e desenvolveu um geral Teoria dos Ideais (finitamente gerados).

Birkhoff e Mac Lane (1941, p 170) publicam na obra *Survey of Modern Algebra*, uma abordagem axiomática de espaços vetoriais, que são evocados a partir da Álgebra Moderna. Um espaço vetorial **V** sobre um campo **F** foi dito ser um conjunto **V** com um operação + que é um grupo abeliano e que satisfaça as seguintes quatro axiomas, ou leis da Álgebra Vetorial:

(V1) a (x + y) = ax + ay (V6) c $(a_1, a_2) = (ca_1, ca_2)$

(V2) (a + b) x = ax + bx (V7) $\alpha + \beta = \beta + \alpha$

(V3) (ab) x = a (bx) (V8) $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$

(V4) l.x = x (V9) $c(\alpha + \beta) = (c\alpha + c\beta)$

(V5) $(a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$ (V10) 1. α = α (BIRKHOFF; MAC LANE, 1941, p. 170).

O processo de axiomatização dos espaços vetoriais perpassa pela adição de vetores (regra do paralelogramo), estudo qualitativo de sistemas lineares, com Euler, estudo de Grassmann e Peano, Hamilton, com seus quatérnios. Meados do século XIX, provocaram uma mudança fundamental na natureza da Álgebra em geral, o que contribuiu para o desenvolvimento de uma estrutura algébrica consistente para a teoria da linearidade, com a investigação das operações de n-tuplas e em matrizes. Com os estudos dos sistemas lineares, o estudo dos determinantes foi menos explorado.

A Álgebra Moderna, o estudo de Topologia e Análise, no estudo de séries foi possível se trabalhar com dimensões infinitas, junto com a Teoria de Grupos e Extensão, sendo o trabalho de Banach fundamental, segundo Dorier (1995) de extrema importância, pois unificou a teoria axiomáticas dos espaços vetoriais de dimensão finita e infinita.

Os construtos desse capítulo para a elaboração de nossa proposta de MER, iniciaram em relacionar a Álgebra com Geometria Euclidiana a partir do Teorema de Tales, surgindo as equações. As ideias Descartes e Fermat nos fizeram pensar em tarefas de Geometria Analítica, como a equação da reta a partir do plano cartesiano e o estudo de equações a partir de curvas. Gauss trouxe as tarefas com escalonamento de sistemas lineares.

Euler nos fez pensar em tarefas que envolvia o estudo qualitativo de sistemas lineares. Rouché, Peano, Grassmann e Birkhoff e Mac Lane o estudo dos espaços vetoriais. Frobenius o estudo de sistemas lineares homogêneos. Cayley nos inspirou em revelar a gênese das matrizes e assim propomos tarefas que evocassem a necessidade de se abreviar os sistemas lineares.

D´Alembert nos fez elaborar tarefas onde podíamos desmembrar a solução geral do sistema linear em solução particular mais a solução do homogêneo associado. Tais pesquisadores foram fundamentais para a construção de nosso modelo, pois esses pesquisadores trabalharam na perspectiva de sistemas lineares como ideia gestora dos objetos da AL e nos baseamos em suas pesquisas para a construção da proposta de modelo epistemológico.

Esse estudo nos permitiu estruturar uma proposta de uma OMD sobre o ensino de AL para o curso de Licenciatura em Matemática do IFPA, em conexão com o estudo de sistemas lineares, e em consonância com as notas de aula de Guerra (2014), conforme (ANEXOS B, C, D, E, F, G, H, I, J), que nos deram um norte na construção do modelo, pois vimos o alcance da técnica referente ao estudo dos sistemas lineares perpassa por toda a AL.

A formalização foi necessária, no processo de institucionalização do saber, mas a ideia foi trabalhar o modelo articulando apenas os objetos que vivem na escola, como propomos no próximo capítulo.

Nossa intenção foi tornar o ensino desta disciplina menos abstrato, já que Dorier (1995) revela que o formalismo causa dificuldade na aprendizagem. Estudamos os espaços de dimensão finita, para que possa futuramente, possamos generalizar para os de dimensão infinita, com a utilização de registros geométricos como motivação para o estudo até o R^3.

CAPÍTULO IV – PROPOSTA DE UM MODELO EPISTEMOLÓGICO DE REFERÊNCIA (MER)

Nossa reflexão ao nível epistemológico ocorre por meio de uma dialética entre as nossas investigações sobre o ensino e a história. A epistemologia aparece como um *termo* que ligará as obras históricas ao trabalho docente. Logo a epistemologia tem um papel transversal, no sentido de interagir com a didática e a história da matemática.

4.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS SOBRE A PROPOSTA DO MER

Mendes (2015) propõe que devemos construir um ambiente investigatório, em que o professor possa possibilitar aos estudantes o desenvolvimento de habilidades matemáticas para (re)descontextualizar e (re) despersonalizar o seu conhecimento.

Bosh e Gascón (2001) alertam que no enfoque epistemológico em Didática das Matemáticas as práticas docentes do professor de matemática tem aparecido muito tarde, ao menos de um modo mais explícito. O objeto primário de investigação da Didática das Matemáticas é a *atividade matemática escolar*. Chevallard (1991) propõe por meio da Teoria da transposição Didática (TTD) que não é possível interpretar adequadamente a atividade matemática escolar sem levar em conta os fenômenos relacionados com a reconstrução escolar das matemáticas que tem sua origem na própria instituição de produção do saber matemático. Tal atividade se integra a uma problemática muito mais ampla, que são as atividades matemáticas institucionais.

Para se ter acesso ao conhecimento científico não é feito sem um ambiente didático, sem a intenção de ensinar. É por isso que nós colocamos o nosso propósito em uma relação constante entre a referência epistemológica e a observação didática. Para nós, a epistemologia é uma ferramenta consistente na didática, uma vez que fornece elementos determinantes de compreensão relativos à construção do saber, permitindo, especialmente, a questionar a especificidade destes saberes científicos na sua relação com outros saberes.

A Teoria que alicerça nosso estudo é a Teoria Antropológica do Didático (TAD), e que segundo Chevallard, estuda o homem frente ao *saber matemático*, diante de situações matemáticas. Chevallard (1999, p.1) assinala uma razão para a utilização do termo *antropológico* é porque a TAD situa a *atividade matemática* e, em consequência, o estudo da matemática no âmbito do conjunto de atividades humanas e de instituições sociais.

Chevallard (1999) entende que um objeto existe se um sujeito ou uma instituição o reconhece, que é o que acontece com nosso objeto de estudo, espaços vetoriais. Logo tem que haver um conhecimento e um saber reconhecido como forma de organização desse conhecimento, ou seja, a existência de um objeto depende do reconhecimento e do relacionamento de pelo menos uma pessoa ou instituição com esse objeto.

Um pesquisador da didática da matemática, que será uma pessoa denotada por ξ – o *pesquisador* ou o *pesquisador iniciante* em didática da matemática, que explorará as condições e restrições para o engajamento de ξ em uma atividade que poderá ser chamada de *pesquisa em didática da matemática*, conforme ideias proposta por Chevallard e Artaud (2014). Assim usaremos nosso local de trabalho, a sala de aula como um *laboratório* para o estudo da engenharia didática, experimentando as situações didáticas que ele elabora, no nosso estudo busca configurar em um MER.

Nossa proposta de MER visa construir um sistema de tarefas, que articulem práticas, que aparecem e procuram dar uma articulação entre objetos do ensino médio e a AL. Na instrução de AL no Brasil e em outros países, predominantemente os alunos em primeiro lugar aprendem matrizes, operações e solução de sistemas lineares e sem grandes dificuldades em fazê-lo. No entanto, os alunos têm dificuldades, quanto aos conceitos como subespaço, espaço, o espaço gerado. Por isto Carlson (1993), Dorier (1998), Harel (1989), que apresentam como alternativa a articulação entre conceitos antigos com novos, e partindo dessas ideias é que fundamentaremos nossa proposta, partido do princípio de os sistemas lineares é a base da AL.

Um processo de reconstrução e articulação de uma OM deve conter tarefas em níveis de complexidade crescente, que partem das razão de ser que irão motivar o estudo, questões que podem ser (matemáticas o extra matemáticas) cujo estudo provoca a emergência de técnicas e necessidades tecnológicas, que por sua vez permitem construir novas técnicas que irão resolver novos tipos de tarefas mais amplos e completos, que mediante esta articulação aparecem novas praxeologias, que atuarão como modelos (BON, 2011).

Descartes (1637) publica Discours de la Methode [Discurso do Método], onde trazia a ideia de que para aceitar alguma coisa como *verdadeira* precisamos conhece-la evidentemente como tal; dividir cada uma das dificuldades que examinasse em tantas parcelas quantas fosse possível e necessário para melhor resolvê-las; dispor as ideias do pensamento de modo a começar pelos exemplos mais simples até os mais complexos. Devemos reescrever o saber de modo a torná-lo compreensível, e que este possa ser seguido por outros quando lerem nossas obras.

Neste subcapítulo apresentamos uma possível *reconstrução racional* Lakatos (1971), da Organização Matemática e Didática (OMD), no que diz respeito ao ensino de Álgebra Linear (AL) no curso de graduação de Licenciatura em Matemática, que irá nos servir de um Modelo Epistemológica Referência [21](MER), que foi traduzido por um sistema de tarefas, para o análises de

[21] A ideia de referência não se dá em ser modelo internacional de ensino, mas um modelo para os autores deste trabalho de tese para se ensinar AL, isto é, um entendimento mínimo sobre os tipo de tarefas necessários para ensinar AL.

livros didáticos e textos do saber de professores de AL do Instituto Federal do Pará (IFPA), além da realização de um Percurso de Estudo e Pesquisa (PER) que ocorreu no IFPA.

Quando falamos de modelos epistemológicos não estamos nos referindo a alguma coisa abstrata, mas que se concretiza, nas práticas dos professores de matemática. Gascón (2001), afirma que: *para começar a descrever e explicar a prática profissional do professor de matemática em sala de aula, podemos nos situar em diferentes perspectivas teóricas*, verdadeiros modelos determinam como a matemática escolar esta estruturada. Contudo, alguns destes modelos, que por mais remotos que sejam ainda hoje estão presentes na *praxeologia espontânea* de muitos professores de matemática e, consequentemente nas suas práticas docentes não refletidas nem criticadas por eles. Segundo Bosh e Gascón (2001), uma praxeologia é dita espontânea, quando as tarefas didáticas geradas não estão organizadas, podendo até serem improvisadas, logo o discurso que justifica aquele saber esta pouco sistematizado, apresentando-se de forma atomizada, além de que sua incidência sobre a prática didática, relativamente esporádica.

O MER está relacionado a como compreendemos um determinado objeto matemático, assim os modelos se estabelecem em reflexões teóricas e se concretizam e por sua vez se cristalizam nas práticas. Mas será que as práticas alicerçadas nos modelos mais difundidos em âmbito escolar dominantes, são suficientes para favorecer a apreensão dos objetos estudados em Matemática?

Na perspectiva da Didática da Matemática há necessidade de se ter um entendimento mínimo sobre um ou mais objetos matemáticos, então há a necessidade da concessão de um MER para contrastar o modelo dominante e conceber uma OMD fundamentadas na razão de ser dos objetos em estudo e de sua articulação em nível de complexidade crescente.

Nós compreendemos as coisas de um modo e as coisas em uma determinada instituição são apresentadas, diríamos ensinadas, de um outro modo, no nosso caso a AL, de modo a usar menos formalismo. A ideia não é retirar o formalismo, mas este será institucionalizado pelo professor, mas o modelo vai em um viés mais prático, pois a proposta é ensinar AL utilizando objetos matemáticos do ensino médio.

Inicialmente, para fazermos uma análise de uma OMD sobre um dado saber, no caso os espaços vetoriais, precisamos dizer o que entendemos sobre esse objeto explicitamente e objetivamente, e a partir de nossa compreensão passamos então a *contrastar* com nosso modelo.

Nosso MER fora elaborado a partir de uma compreensão teórica, alicerçada na TAD, que trata que todo saber tem que ser organizado e que este é prático, logo o saber, segundo a TAD, é algo que se manifesta, incerto não palpável, que é a própria *prática*, isto inclui os *saberes práticos*, que são as *práticas propriamente ditas* e como são *organizadas essas práticas, a partir da compreensão que temos sobre estas*, assim logo nosso MER construído nesta tese é um modelo baseado nessa compreensão que a TAD nos dar.

Para que o *saber* ganhe este status de saber tem que ser algo que possa ser reproduzido por outro, no sentido de como nós agimos, tornando-o coletivo, pois é algo que precisa ser compartilhado. Quando dizemos que o saber é incerto, não quer dizer que seja errado e sim traz a ideia de que hoje é aceito e num futuro pode não ser mais aceito, ou seja esta compreensão pode ser de um jeito hoje e num amanhã pode não ser mais, pois pode se tornar limitada, ai é necessário se construir uma outra compreensão.

Nossa relação com o objeto espaços vetoriais foi por meio de livros de AL, mas quando fomos ensinar esse objeto nos perguntamos como devemos ensinar esse objeto? Ou seja, falar sobre o objeto, isto é, esta no ato de ensinar, falar sobre essas práticas ou parte delas para que alguém se aproprie dessas. Para refletirmos essa prática, devemos reconstruir o saber racionalmente, e para isso deveremos pensar em como iremos construir um discurso sobre essas práticas, daí a ideia da construção do MER, sendo que as práticas devam ser compreensíveis e articuladas, mas não que tenha uma sequência, diríamos linear, no sentido de pronta e determinada, mas sim que faça sentido.

Nosso MER funciona como um esquema de ação, de percepção (jeito de pensar) e de reflexão, sobre as práticas não instituídas, pois não são tidas como objetos de estudo, ou ainda, se apresentam desarticuladas de outras práticas.

Um saber diz respeito a uma organização praxeológica particular que lhe permite funcionar como uma máquina de produção de conhecimento. A Didática da Matemática, vista no campo da antropologia do conhecimento (ou antropologia cognitiva), considera que tudo é objeto, identificando diferentes tipos de objetos particulares: as instituições, os indivíduos e as posições que os indivíduos ocupam nas instituições, tomando os indivíduos como sujeitos das instituições (ALMOULOAD, p.10, 2015).

Chevallard (1991) dá indicativos das ideias que comporão a TAD. O caráter social da matemática é apontado pelo autor de duas formas: a matemática cristalizada (ou “morta”) e a matemática viva (CHEVALLARD, 1991). A matemática cristalizada, na compreensão de Chevallard (1991), é a matemática consumida no processo social de produção de objetos materiais e de práticas sociais. Entenda-se o sentido de “morta”, associado à ideia de não se ter possiblidade de compreensão ampliada do saber por parte de quem o usa. Por exemplo, um pedreiro com pouca escolaridade, que aprendeu a usar as medidas diversas que sua profissão exige, apenas observando outro medir com instrumentos padronizados de medição, ele não terá a compreensão da matemática das grandezas que o engenheiro adquiri na sua formação acadêmica. Matemática essa que dá vida à prática social do pedreiro, em outro nível do saber. Além disso,

> Em outros termos, matemáticos e engenheiros de todos os tipos, trabalham para construir um mundo de objetos e práticas sociais repletas de matemática (cristalizadas) de tal forma que o uso desses objetos e a realização dessas práticas não necessitem a manipulação efetiva da matemática (viva) pelo usuário ou pelo operador (CHEVALLARD, 1991a, p. 1).

Nossas análises se pautarão na (TAD), concebida por Yves Chevallard (1992), essa teoria nos fornecerá os subsídios para analisar as obras selecionadas em nossa pesquisa, a partir das noções praxeológicas: tarefas, tipos e gêneros de tarefas, tecnologias e teorias.

A teoria base epistemológica desta pesquisa, a TAD visa descrever as práticas humanas que se desenvolvem em diversas instituições em termos, relativamente, genéricos com o intuito de se evitar introduzir distinções culturais pouco fundamentadas. Na TAD se postula que toda a atividade humana pode ser descrita em termos de *praxeologias*. No caso da atividade ser de estudo, então esta praxeologia pode ser denominada de estudo ou didática.

O objeto de investigação da TAD consiste na análise da atividade matemática, incluindo a escolar, e suas relações humanas enquadradas em determinadas *instituições sociais*[22]. Chevallard (1999) coloca a TAD como uma teoria, que possui um método de análise para OM existente no interior de uma determinada instituição de ensino. No artigo "*Concepts fondamentaux de la Didactique: perspectives apportées par um approche anthropologique. In: Recherchesen Didactique dês Mathématiques*" (CHEVALLARD, 1992) relata que a TAD representa uma base para a análise dos livros didáticos, além do potencial analítico em descrever o caminho percorrido pelos saberes escolares, fornecendo uma boa visão de suas especificidades.

Chevallard (1996) apresenta três elementos primitivos da TAD: os objetos ***O***, as pessoas ***X*** e as instituições **I**, ou seja, as **I** são o modo de fazer e de pensar. O objeto ***O*** tomará uma posição privilegiada em relação aos outros elementos, em virtude do mesmo ser o *material base* da construção teórica. O objeto passa a existir no momento em que for reconhecido como existente por pelo menos uma pessoa ***X*** ou instituição ***I***. A relação pessoal de ***X*** com ***O***, que será denotada por ***R(X, O)***, e a relação institucional de ***I*** com ***O*** por ***R(I, O)***, e se dá no seio de ***I***. Assim, estas relações são práticas sociais com o objeto.

Consideraremos as obras de AL utilizadas no IFPA como representante da Instituição **I** analisadas em um tempo **t**. O objeto **O** de estudo será representado pelos conteúdos sistemas lineares até o estudo dos Espaços Vetoriais.

Segundo Chevallard (1999), toda atividade humana regularmente realizada pode descrever-se com um modelo mínimo (práticas), que se resume aqui com a palavra praxeologia. A TAD o ensino da matemática em qualquer instituição *I* é descrito em termos de *praxeologias* de ensino, ou seja, a ação do sujeito. O *saber matemático*, enquanto forma particular do conhecimento é fruto da ação humana institucional, e é algo que se produz, se utiliza, se ensina ou, de uma forma geral, que transita nas instituições **I**.

[22] Para Chevallard, Bosch e Gascón (2001) nesse sentido, tanto o conhecimento como as atividades matemáticas são construções sociais que se realizam em instituições, em comunidades, seguindo determinados contratos institucionais.

A palavra *praxeologia* é formada por dois termos gregos, *práxis e logos*, que significam, respectivamente, prática e razão e remete ao fato de que, no interior de uma instituição *I*, a prática está acompanhada de um discurso, ou seja, de um *logos* que a justifica, que lhe dá razão, que se constroem em um processo dialético. Na raiz da noção de praxeologia, encontram-se as noções de tarefas e de tipos de tarefas.

Reforçando, Chevallard (1999) propõe um modelo epistemológico geral da matemática, que descreve o saber matemático em termos de *organizações ou praxeologias matemáticas institucionais*. Nesta perspectiva o saber surge em dois níveis: o nível da *práxis*, que se refere a prática realizada e o nível do *logos, que contém* o discurso matemático racional, que será utilizado para interpretar, dar sentido e desenvolver a prática matemática. A junção desses dois níveis fora denominado de *praxeologia*.

As praxeologias não aparecem ao acaso, de uma hora para outra e por sua vez não estão acabadas, pois se é o resultado de um processo continuo e complexo ao longo do tempo, cuja dinâmica de funcionamento existe certas relações invariantes, sendo possível *modelar*. Temos, então o dito *processo de construção matemática* (processo de estudo) e o resultado da construção da *praxeologia matemática*.

O saber matemático aparece organizado em dois níveis, sendo que o primeiro nível se remete a prática realizada pelo professor, que denomina-se saber-fazer. Neste nível a atividade matemática esta mais relacionado aos *tipos de problemas* ou *tarefas* as quais se estudam e as técnicas construídas para abordá-las.

Em uma organização praxeológica, identificamos: tarefas, técnicas, tecnologias e teorias. Na essência da noção de praxeologia se encontra as noções de tarefas e de tipos de tarefas, denotadas, respectivamente, por **t** e **T**. Quando uma tarefa **t** que faz parte de um tipo de tarefa **T**, dizemos que **t** ∈ **T** (**t** pertence a **T**).

Chevallard (1997) visou conectar duas teorias, isto é, a TAD e a TTD com a de Guy Borsseau a Teoria das Situações Didáticas (TSD). Nesse artigo o autor apresentou o sistema didático S (x ; y; ♥), no qual x representa os *estudantes* (alunos), y é o *diretor de estudos* (professor) e o símbolo ♥ designa o *jogo* (aposta) didática, o *saber* estudado (CHEVALLARD, 1997). Nesta tese, o ♥ está associado ao estudo de elementos da AL. Além disso, em outra sessão do artigo, o autor expõe o cerne de TAD, as *organizações praxeológicas*. Temos as tarefas t do tipo T (t ∈ T) e para solucionar as tarefas t ∈ T, deve-se ter uma técnica **τ** (uma modo de fazer/resolver t). Da junção do tipo de tarefas T com a técnica **τ**, temos o bloco [T /**τ**], denominado de bloco do saber-fazer ou da práxis (CHEVALLARD, 1997, 1998, 1999).

Reforçando esta ideia, Andrade (2012) postulou sobre a noção de Tarefas Fundamentais com a intenção de articular e justificar outras tarefas a partir dessas. De acordo com Andrade (2012, p. 19):

> Em termos praxeológicos, podemos entender a Tarefa (**t**), que está sempre relacionada a um Tipo de tarefas (**T**), como toda ação singular, particular, específica de um fazer que se expressa por um verbo, como: arrumar a sala; organizar a gaveta; encontrar a fração reduzida; fatorar o polinômio; simplificar a expressão algébrica; encontrar a equação da reta tangente à curva no ponto P; dividir um número por outro etc.
>
> Já o Tipo de tarefas (**T**), é um conjunto de ações do mesmo tipo, ou seja, é uma classe de tarefas com características comuns, como: arrumar salas; organizar cômodas; simplificar expressões algébricas; encontrar equações de retas tangentes a uma curva em um dado ponto P; determinar o quociente entre dois números dados etc., isto é, $T = \{t_1, t_2, t_3, t_4, \dots \dots \dots\ t_n\}$...

As noções de tarefa e tipos de tarefas, supõe objetos relativamente precisos e estão intimamente relacionadas a uma ideia mais ampla, o de *gênero de tarefas*, como por exemplo calcular, fatorar, transfomar, determinar, etc. Determina de certa forma o que fazer para solucionar determinados problemas e são compreendidas por estarem culturalmente instituidas.

A análise que faremos das tarefas do livro didático utilizado na instituição que iremos analisar, nos irá fornecer um provável diagnóstico decomplexidade de se ensinar e uma consequência aprendizagem em relação ao objeto Espaços Vetoriais.

Chevallard (1999) nos indica a necessidade dessas noções tornarem-se objetos de estudo ao destacar que "Tarefas, tipo de tarefas e gênero de tarefas não são dados da natureza: são artefatos, obras, construções intitucionais, cujas reconstrução em tal instituição, por exemplo, em uma didática" (CHEVALLARD, 1999, p. 3, tradução nossa).

A noção de gênero de tarefas, que no decorrer dos anos de estudo esta sujeita ao processo de transacionalidade[23] do objeto, visto que o gênero de tarefa *Calcular* pode significar efetuar uma expressão aritmética, ou efetuar uma expressão aritmética, determinar o número de anagramas de uma palavra dada. Assim sendo os gêneros de tarefas se enriquecem e aprimoram-se na sucessão dos anos letivos (SABO, 2001).

E mais,

> Durante os anos de faculdade, o gênero Calcular ... se enriquece para incluir novos tipos de tarefas; ocorre o mesmo no ensino médio, onde o aluno vai primeiro aprender a calcular com vetores, e depois, mais tarde à calcular uma integral ou uma primitiva, etc. O mesmo vale para os gêneros Demonstrar, ... Construir ..., ou Expressar sobre, ... em função de ... (CHEVALLARD, 1999, p.2).

O bloco do saber-fazer não vive sozinho nas organizações praxeológicas, ele necessita de algo

[23] Por exemplo: O objeto sistemas lienares é estudado no 6º ano do ensino fundamental como sistemas de equações do 1º grau com duas incógnitas. No ensino médio se estuda os sistemas lineares. No ensino de AL um sistema linear pode ser uma transformação linear, isto é, em cada posição na escola, o objeto tem um tratamento revelando uma prática.

que o legitime, principalmente a técnica τ . Isso ocorre pela inserção do *bloco do saber* ou *do logos*. Nesse bloco, a técnica τ possui um discurso que a justifica, a tecnolgia θ. Porém, a tecnologia θ exige uma justificação de alto nível, denominada de teoria, denotada por Θ (CHEVALLARD, 1997, 1998, 1999). Da junção da tecnologia θ com a teoria Θ temos o bloco do saber, denotado por $[\theta/\Theta]$. Em algumas situações específicas, a técnica τ é auto tecnológica e, nesse caso, $\tau = \theta$. No MER que apresentaremos aparecerá os elementos do bloco praxeológico anunciados por Chevallard (1997, 1998, 1999) sobre elementos da AL, iniciando por estudo qualitativo de sistemas lineares até base e dimensão de um espaço vetorial.

O estudo teórica da praxeologia matemática se origina da necessidade de vincular o *saber* e o *saber-fazer*, por meio das relações pessoais e institucionais, as quais permitem uma movimentação do *saber* de modo contínua e involuntária, já que essa relação está instituída no sujeito e nas suas possíveis relações.

Devemos pensar em tarefas articuladas que levam a um determinado objetivo. Nosso MER teve como base nas organizações matemáticas (OM) sábias, as quais legitimam epistemologicamente, o processo de ensino desta OM.

Podemos dizer que uma organização didática (OD) é uma OM em ato, isto é, em ação, logo ocorre na sala de aula, mas compreendemos que quando estamos elaborando nosso texto do saber, já estamos pensando em sistemas de tarefas, portanto na OD. No âmbito do ensino as OD integram o fazer e o ensinar matemática, aumentado assim a possibilidade de organizar um processo de estudo de uma *obra matemática* de tal moda que integra de maneira central as razões de ser da dita obra, ou seja, as questões da citada obra matemática vem a responder (DELGADO, 2006). Entendemos que tais OD ou praxeologias didáticas é como, realmente, o saber acontece.

Para Calatán (2002), em suma, a OM e a OD são dois lados da mesma moeda, pois sabe-se que a construção de um trabalho matemático é o principal objetivo do trabalho do matemático. Na linguagem cotidiana, poderíamos dizer que o principal objetivo da matemática é o produto obtido quando você resolver certos tipos de problemas.

O modelo epistemológico é indispensável para análise e desenvolvimento de OMD que façam emergir a *práxis* como aplicação do *logos*, tarefa à qual se propõem os textos de saber, assim como os livros acadêmicos no Curso de Licenciatura em Matemática.

Mostraremos que as OM concretas em torno do estudo qualitativo de sistemas lineares que é o papel do matemático e sua integração ao didático é fundamental para o ensino de AL nas instituições escolares OD capazes de desconstruir e reconstruir os objetos matemáticos deste MER.

No âmbito da investigação didática Gascón (2002a, 2003b), Bosch e Gascón (2006b), a separação entre *fazer* e *ensinar* matemáticas constitui um dos principais obstáculos para interpretar as questões problemáticas que surgem no ensino escolar das matemáticas. Entre estas questões há de se citar as mais genéricas, pois se referem a matemática escolar considerada como um todo:

• Como descrever e *analisar o processo de estudo escolar das* matemáticas?

• Como explicar o fenómeno relativamente universal da *alienação matemática dos cidadãos*?

• Quais são as possíveis causas do crescente fracasso dos estudantes no que diz respeito em estudar matemática no ensino básico e no primeiro curso universitário?

• Por que os professores de matemáticas, de todos os níveis educacionais desenvolvem uma *atomização progressiva da matemática ensinada* e propõem em suas provas tarefas cada vez mais *algorítmicos*?

Para responder a estas questões que surgem nos sistemas de ensino das matemáticas é necessário se considerar de maneira inseparável as dimensões *matemática e didática*. O problema didático inclui o estudo das condições e restrições originadas por uma *intenção didática* no seio de uma instituição escolar. Para estudar este sistema de condições e restrições que sofrem os saberes matemáticos para serem ensinados em uma instituição docente, isto é para estudar uma OD determinada, deve-se levar em consideração condições e restrições que não tenha sido criada nem pelo professor e nem pelo sistema de ensino e que não provem de nenhuma intenção didática (DELGADO, 2006).

A partir desta ideia levamos em conta a evolução histórica e epistemológica dos saberes dispostos na OM. Segundo Godino (2003), para estudar os fatores que afetam os processos de ensino e aprendizagem da matemática devemos considerar a natureza dos conteúdos e perguntar qual o papel que a atividade humana e que os processos são desenvolvimento sociocultural de ideias matemáticas, sendo assim, a análise epistemológica de objetos matemáticos deve ajudar a esclarecer a natureza desses objetos.

Pensamos como Gascón (1998, 2003c) a partir dos trabalhados produzidos pelo Programa Epistemológico de Investigação em Didática da Matemática, que a origem do problema da educação Matemática esta na própria matemática, portanto o *mistério permanece na própria ma temática,* assim nos permite tomar a *atividade matemática* como objeto primário de estudo.

Nesta realidade, iremos propor um modelo que , no em nosso ponto de vista, permitiria ao aluno dar significado aos sistemas de equações e alguns de seus nichos, tais como: matrizes, espaços vetoriais, subespaço, base e dimensão nos apoiando em entes históricos e epistemológicos, por meio de ferramentas que TAD nos proporciona, de tal forma que ao organizarmos a OMD possamos tornar esses saberes inteligíveis, já que esta é uma proposta de ensino de AL num curso de formação inicial de professores de matemática.

Postulamos como Almouloud (2007), pois este pesquisador relata que as OMD referem-se a realidade matemática que se pode construir para ser desenvolvida em uma classe escolar já pensando na maneira como se faz esta construção.

O MER será um instrumento que nos auxiliará na descrição e análises do modelo epistemológico dominante no IFPA, além de atender as restrições que o modelo apresenta e que, reflete de alguma forma na relação institucional da OM em questão, pois viabiliza outros meios de se estudar a OM na instituição considerada. Além deste propósito a TAD nos leva a pensar que não existe uma praxeologia única para o ensino, ou seja, uma OMD única ou ainda uma praxeologia única, logo não há um modelo privilegiado que não possa ser reconstruído e que seja consolidado na TTD.

As primeiras OMD que me deparei e que compuseram minha prática como docente, foi no curso de graduação que fiz na Universidade do Estado do Pará (UEPA), vieram do professor que ministrava AL e dos livros didáticos. Após meu ingresso em 1994 na UEPA, no curso de Licenciatura em Matemática as OM passaram a ser organizadas pelas obras que os professores desta instituição e do curso manifestavam em suas práticas docentes, além de obras complementares. Na minha especialização tive um relacionamento bem pouco com os saberes referente aos objetos da AL, o mesmo para o mestrado, pois não fora nesta linha de pesquisa. Já no doutorado tive uma relação íntima com estes saberes devido ter assistido às aulas de *Tópicos Especiais I*, ministrada pelo professor Dr. Renato Guerra, no primeiro semestre de 2014, que trabalhava alguns objetos da AL, em uma perspectiva da prática com sistemas lineares, sem a necessidade de uma teoria a priori.

De um modo geral o professor ensinante no ensino superior se baseia em livros textos para ministrar suas aulas. No ensino de AL no IFPA não é diferente, onde o principal livro texto adotado pelos 2 professores (incluindo o autor desta tese) que ministram esta disciplina, tanto nas Engenharias, na Licenciatura em Física e na Licenciatura em Matemática é o livro *Álgebra Linear* dos autores Alfredo Steinbruch e Paulo Winterle 2º Edição, 1987. O *modelo dominante* no ensino dos objetos matemáticos desta disciplina acaba sendo o que estão propostos na OM do livro que é define-se o objeto e aplica-se a definição.

Para Thurston (1994) trata-se de um modelo simples, de um modo geral implícito e quase transparente e que não é questionado. Thurston (idem) descreve e caracteriza isso da seguinte forma:

(1) Os matemáticos partem de algumas estruturas matemáticas fundamentais e de um conjunto de axiomas “dados” que caracterizam essas estruturas.

(2) Existem questões importantes e variadas acerca das estruturas que podem ser expressas em forma de proposições matemáticas formais.

(3) A tarefa dos matemáticos é buscar uma série de deduções que liguem os axiomas com as proposições ou com a negação destas.

(4) Para levar em conta a origem das questões problemáticas acrescenta-se a especulação como um ingrediente importante e suplementar do modelo. Especular consiste em emitir, traçar perguntas, fazer suposições inteligentes e desenvolver argumentos heurísticos sobre o que é

verossímil. Obtém-se assim o modelo definição-especulação-teorema-prova (DETP).

Segundo Delgado (2006), o modelo popular (dominante) constitui, então, uma forma ingênua e simplista de interpretar o conhecimento matemático e pode ser considerado como uma variedade do *euclideanismo*.

Gascón et al. (2014) resumem que o modelo epistemológico-didático que propõe a TAD, relacionado a atividade de resolução de tipos de problemas por parte dos estudantes, não consiste em, simplesmente, solucionar tais problemas a partir de técnicas matemáticas *dadas* e no âmbito de uma teoria matemática *predeterminada*, mas sim interpretar a construção destas técnicas e o seu desenvolvimento progressivo, assim como, a construção de um discurso *teórico que* justifique e interprete a prática matemática. A ideia proposta por Gascón (2001) sobre o *euclidianismo*, que esse tende a *trivialização*, ou seja, esta fundamentado em verdades aceitas sem que sejam questionadas.

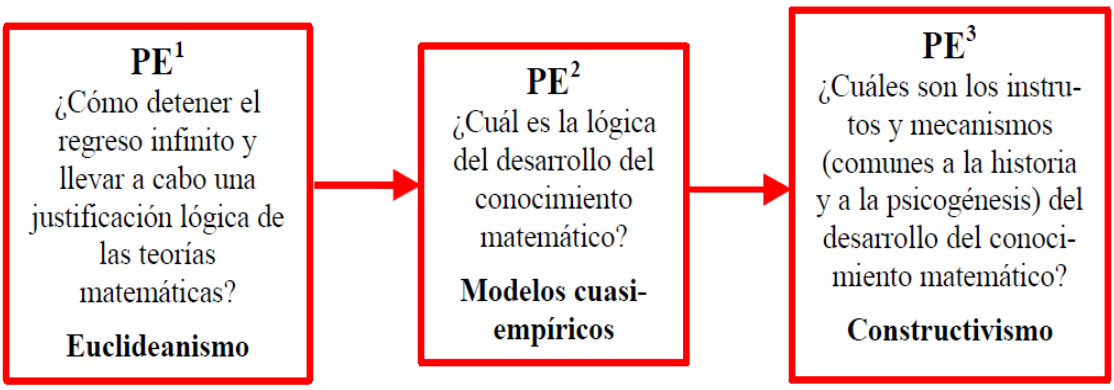
Contudo Mesquita (2013), relata que alguns destes modelos, por mais remotos que sejam ainda hoje estão presentes na praxeologia espontânea de muitos professores de matemática e, consequentemente nas suas práticas docentes não refletidas e criticadas por eles.

A atividade heurística (*processo psíquico pelo qual o indivíduo cria, elabora e descobre um método)* útil à resolução de um problema. Esta arte de descobrir na Matemática é um processo que ocorre de forma lenta, e na qual a matemática não-formal (quase empírica) ajuda no desenvolvimento da matemática formal.

O que propomos neste MER é que os alunos manuseiem o modelo, partindo do gênero de tarefa, que é estudar qualitativamente os sistemas lineares, onde o aluno de graduação a partir de obras que lhes serão fornecida no PER poderá *manusear* os sistemas lineares e ir construindo a partir deste saber outros saberes.

Gascón (2001, p. 22) propõe, como mostra a Figura 25 a seguir uma reconstrução racional do problema epistemológico das matemáticas:

Figura 25- Reconstrução racional do problema epistemológico das matemáticas.



Fonte: Gascón (2001, p. 22).

Na Figura 25 a abreviação **PE** está relacionado ao problema epistemológico, enquanto que PE^1 é um *problema puramente lógico*, que se converterá depois em um *problema histórico* PE^2 e parece acabar sendo um *problema cognitivo* PE^3. No programa euclidiano, ou euclidianismo, objetiva a justificação lógica das teorias matemáticas, enquanto que o quase-empírico trazia a ideia de resolver um problema mais amplo do conhecimento matemático, requerendo assim a utilização de dados históricos e da base empírica e a epistemologia construtivista pretendia explicar como uma teoria cientifica é superior a outra, mas também, quais são os instrumento e os mecanismos de uma teoria de um nível inferior para outra de nível mais elevado. Tomaremos como base o PER.

Gascón (2001, p.19) chamara de *modelo docente modelizacionista* ou, simplesmente, *modelizacionismo,* interpreta *aprender* matemáticas como um processo de construção de conhecimentos matemáticos, seja relativos a um *sistema* matemático ou extra matemático) que é realizado utilizando um modelo matemático do sistema.

Conforme Gascón (2001), procuraremos na construção do MER adotar o *modelo docente construtivista* pois a partir de uma OM previamente construída possibilitar aos alunos (re) construir os conhecimento matemáticos, seguindo algumas etapas do processo de construção. Propomos a elaboração de um *modelo epistemológico alternativo* para ser utilizado no ensino de tópicos de AL, que enfatize o trabalho do matemático com intuito de fazer avançar a compreensão humana das matemáticas e em melhorar a comunicação da compreensão.

A partir desta ideia pretendemos dar oportunidade de se tornarem atores em nossas construções a respeito da AL, pois os alunos, constantemente confrontam as ideias em seus próprios pensamentos e os de seus pares, tornando as abstrações "quase concretas" para eles. Gascón (2003b) as OD construtivistas se caracterizam por contextualizar a atividade de resolver problemas matemáticos em uma atividade ampla, pois considera a aprendizagem como um processo ativo de construção do saber, a partir de fases determinadas e que depende do saber adquirido anteriormente.

Nesse sentido, baseado em notas de aula de Guerra (2014), propomos um (MER) para se ensinar (AL), que utiliza como tecnologia o estudo qualitativo de sistemas lineares, a partir de uma abordagem histórico-epistemológica em consultas a obras originais dos séculos XIV, XVII, XVIII, XIX e XX.

A matemática escolar tanto no ensino básico como no superior se estrutura por meio de modelos. Tais destes modelos, estão presentes na *praxeologia espontânea* de alguns professores de matemática e, consequentemente suas práticas docentes não são questionadas por eles.

Ressaltar que o MER tem uma caráter provisório, ou seja, uma hipótese a ser contrastado com os dados empírica e estará sujeito a modificações permanentes, logo não é algo fechado, logo será um modelo dito *relativo*, já que na (TTD) Chevallard (1985, 1991a) revela que não existe um sistema privilegiado, absoluto, para se observar e analisar a vida institucional, tanto intra como inter institucional das OM.

No modelo utilizaremos a motivação geométrica, pois a Geometria foi e é uma parte central da matemática, potencialmente rica em questionamentos e que nos ajuda a compreender tais objetos em estudo, pois dá aos conceitos um fundo intuitivo e pode auxiliar.

Os tipos de organizações praxeológicas: *pontuais, locais, regionais e globais*, são organizações matemáticas (MATHERON, 2000) que possuem características próprias. Cada uma possui um grau de complexidade conforme a especificidade da produção matemática, ou melhor, da obra matemática produzida culturalmente. Nessa produção da *obra matemática* (manual, cartas, livro, artigo, etc.) a atividade matemática apoia-se na realidade social e cultural de diferentes épocas. De certa forma, a obra matemática produzida precisa ser legitimada pelas comunidades científicas, porém, há aquelas que a legitimação vem das práticas sociais (GUERRA; SILVA, 2014), no sentido de Bourdieu (2013) é o habitus[24] que a torna culturalmente válida.

O caráter institucional das praxeologias, inicia-se pela *organização praxeologia pontual*, isto é, aquelas que giram em torno de um único tipo de tarefa *T*, denotada por $[T/\boldsymbol{\tau}/\theta/\Theta]$ (CHEVALLARD, 1997, 1998). O agregamento de várias praxeologias pontuais leva ao surgimento da *organização praxeológica local*, denotada por $[T_i/\boldsymbol{\tau}_i/\theta/\Theta]$. Nas organizações praxeológicas locais, o trabalho da técnica $\boldsymbol{\tau}$ e o alcance que esta terá sobre os tipos de tarefas *T* serão fundamentais. Por exemplo, a técnica que soluciona, facilmente, a tarefa $t_{1,1}$ (resolver a equação $x - 3 = 0$) tem alcance imediato, sobre a tarefa $t_{2,1}$ (resolver a equação $2^{1/2}x - 6^{1/2} = 0$, se $x \in \mathbb{R}$)? Compreenda-se que a tarefa $t_{1,1}$ pertence a um tipo de tarefas T_1 e a tarefa $t_{2,1}$ ao tipo de tarefas T_2. Então, quando várias organizações praxeológicas locais se agregam, em torno de uma determinada tecnologia θ, origina-se a organização praxeológica regional[25], denotada por $[T_{ij}/t_{ij}/q_j/Q]$. Nesse tipo de organização praxeológica a tecnologia θ comanda o bloco praxeológico, ou seja, prevalece o discurso racional da técnica. O entorno mais complexo vem por meio do agrupamento de organizações praxeológicas regionais, que estão em torno do discurso justificativo da tecnologia θ, algo mais refinado e complexo, é a teoria Θ que prevalece o bloco praxeológico, denotado por $[T_{ijk}/t_{ijk}/q_{jk}/Q_k]$ (CHEVALLARD, 1997, 1998).

Matheron (2000) ao retomar as ideias propostas por Chevallard (1997) no artigo intitulado *Analyser les Praxéologies: quelques exemples d'organisations mathématiques* de OM's (pontual, local, regional e global).

A Organização Matemática Pontual (OMP) possui o bloco praxeológico centrado em um único tipo de tarefa *T*, denotado por $[T, \boldsymbol{\tau}, \theta, \Theta]$. Esse tipo de OM é explificado pelo tipo de tarefa *T*: "[...] construir uma quarta proporcional para três comprimentos" (MATHERON, 2000, p. 56,

[24] [...] sistemas de disposições duráveis e transponíveis, estruturas estruturadas predispostas a funcionar como estruturas estruturantes, ou seja, como princípios geradores e organizadores de práticas e representações, ou seja, como princípios geradores e organizadores de práticas e representações [...] (BOURDIEU, 2013, p. 87).

[25] Fundamentaremos a diante.

tradução nossa). Matheron (2000) extraiu esse tipo de tarefa *T* relativo à aplicação do Teorema de Tales. Definiu a quarta proporcional assim: "Chama-se quarta proporcional para três números a, b e c o número x tal que: a/b = c/x" (MATHERON, 2000, p. 56, tradução nossa). Nota-se que a propriedade fundamental da proporção está em jogo nesse tipo de tarefa.

Uma Organização Matemática Local (OML) se origina do agrupamento de diferentes OMP ao redor do elemento tecnológico (em Matheron (2000), "Teorema de Tales"). Esse agrupamento de OMP faz com que vários tipos de tarefas se agrupem e, em torno destes, a técnica $\boldsymbol{\tau}$ tem que realizar seu trabalho para solucionar as tarefas t_i ($t_i \in T_i$). O bloco praxeológico $[T_i/\boldsymbol{\tau}_i/\theta/\Theta]$ denota uma OML. Matheron (2000) ilustra três tipos de tarefas T_i de uma OML vinculada ao Teorema de Tales: 'T_1 = calcular comprimentos nos triângulos em "situação de Tales"; T_2 = construir um segmento de comprimento a/b vezes o comprimento de um segmento dado; T_3 = determinar um coeficiente de ampliação ou de redução de área ou de volume' (Ibidem, p. 59, tradução nossa).

As OM ao atingirem o nível das OML, a tecnologia θ já manifesta sua presença com intensidade, mas é a técnica $\boldsymbol{\tau}$ (ou as técnicas) que ainda prevalece (prevalecem). É ao nível da Organização Matemática Regional (OMR) que a tecnologia θ assume no bloco praxeológico com grau maior de relevância, por isso, denota-se esse bloco por $[T_{ij}/\boldsymbol{\tau}_{ij}/\theta_j/\Theta]$ (MATHERON, 2000). Nas OMR a teoria Θ ganha maior dimensão, porque a tecnologia θ_j tem que ser justificada e quem faz isso é a teoria. As OMR surgem por intermédio das OML e o grau de complexidade das OM é ampliado. Matheron (2000) utiliza fragmentos de uma obra de 1964, do programa pertencente ao sistema de ensino francês, para ilustrar a dialética tecnológico-teórica das OMR, mas ele pontua que:

> Não é possível reproduzirmos todos os elementos que permitem fundamentar a descrição da organização matemática regional exposta aqui: seria necessário mencionar uma grande quantidade de páginas, assuntos e exercícios desta obra [...] (MATHERON, 2000, p. 62, tradução nossa).

A organização das práticas, ditas de organizações matemáticas OMP, OML, OMR e até em uma OMG (organização matemática global) se dá por articular as práticas, com objetivo de tornar as coisas compreensíveis, dotando-as de um discurso, de modo a se trabalhar as práticas mas em um nível de complexidade levando o sujeito ao encontro do saber.

Pelas palavras de Matheron(2000), abstraímos que as OM possuem um grau de complexidade crescente. A expansão dessa complexidade aparece na OMR, na qual os objetos matemáticos possuem certo refinamento teórico, mas a compreensão desse refinamento vem sob a égide da tecnologia θ_j, ou seja, a teoria $\Theta \Rightarrow \theta_j$.

As Organizações Matemáticas Globais (OMG) são as que atingem o nível teórico. A teoria Θ_k

assume o bloco praxeológico, denotado por $[T_{ijk}/\boldsymbol{\tau}_{ijk}/\theta_{ijk}/\Theta_k]$ (MATHERON, 2000). As OMG surgem do agrupamento de várias OMR. Porém esse agrupamento ocorre por meio de elementos teóricos diferentes, os quais agrupam as tecnologias θ_j das OMR. As OMG possuem um elevado grau de abstrações, que nos permite refinar e sofisticar os objetos matemáticos. As OMG podem ser obras produzidas no âmbito da sociedade, fruto da cultura de diferentes épocas. Um exemplo disso, é a obra "*Les fondements de la géométrie"* [Os fundamentos da Geometria] de Hilbert (MATHERON, 2000), que revisa a Geometria euclidiana de forma geral.

As praxeologias matemáticas não surgem de forma instantânea nem tão poucos ficam prontas de uma única uma vez, na verdade é um trabalho complexo e continuado que pode durar muito tempo. Surgindo então os aspectos inseparáveis do trabalho matemático, por um lado, o processo de construção matemática, isto é, o processo de estudo, e por outro o resultado desta construção, isto é, a praxeologia matemática (DELGADO, 2006).

Desenvolveremos sucessivas OMD, com a ideia de cada uma delas complementar a outra, isto é, articulando saberes matemáticos. Com a ideia de conectar objetos matemáticos estudados pelos alunos no ensino básico, como por exemplo, sistemas lineares e matrizes, e ir apresentando objetos matemáticos como método da eliminação de Gauss, espaços vetoriais, combinação linear, base e dimensão. Partiremos como Euler (1750), pelo *estudo qualitativo de sistemas lineares*.

Nossa OMD será apresentada por meio de um sistema de tarefas de acordo com a TAD, com tarefas engendradas a partir do gênero de tarefas estudar qualitativamente sistemas lineares, caracterizando uma OMR.

4.2 PROPOSTA DO MER

Postulamos nesta proposta, após nos embasarmos nas ideias de diversos autores, que apresentaram em trabalhos suas dificuldades de ensinar AL e propostas para o ensino em uma IES. Dorier (1990) revela que as dificuldades dos alunos franceses em interpretar os conceitos formais da teoria dos espaços vetoriais, em relação aos conceitos relacionados a Geometria ou sistemas lineares, sendo 40% dos alunos relatam dificuldades relacionados a *abstração.*

Nosso MER tem inspiração no ensino da AL para licenciatura, na perspectiva de compreender que papel a AL "joga" para o ensino básico. A ideia foi pensarmos em uma estrutura mínima de entendimento sobre a *nossa versão de saber*, sendo nosso jeito de pensar e fazer, em relação ao ensino de objetos da AL para o ensino básico. Neste sentido fora criado uma nova OMD, que para atender nosso propósito, de articular com o ensino básico, por meio do estudo qualitativo de sistemas lineares, que não é estudado no ensino básico, pois ao nosso ver não se dispõe de práticas para isso, a não ser por determinantes, que é uma técnica limitada, baixo alcance, para ser introduzido na formação de futuros professores, no sentido da compreensão do objeto da matemática básica. Ou seja pensamos em um modelo para resolver um problema do ensino básico, mas também na formação de professores, isto é, com impacto direto na formação de professores, já que sistemas lineares é um dos problemas da AL, conforme (DORIER, 1997, 1999, 2000; KARRER, 2006; LAUGWITZ, 1974; HAREL, 1990; WAWRO et al., 1974).

Nesta proposta há condições para que esta organização praxeológica funcione, como um sistema didático, ou seja, quando formos colocá-lo em prática durante as sessões do PER, este estará sujeito a novas condições/restrições e ao final do processo de estudo, conforme a TAD, este será "concluído". Esta estrutura mínima de entendimento, se faz necessária para nos guiar perante o enfrentamento de tarefas e dos questionamentos que surgirão durante o processo de estudo, com um conjunto de práticas com menos abstração, que conforme as pesquisas correlatas, representa um obstáculo ao processo de ensino.

Um sistema didático ***S*** possui três elementos principais, uma equipe ***X*** (grupo de alunos de uma classe, etc.), uma equipe *Y* (professores formadores, pesquisadores de um grupo de cientistas, etc.) e uma questão ***Q***. Denota-se esse sistema didático por: **S** (X; ∅; *Q*). Compreenda-se que *X* é uma equipe que estuda a questão ***Q*** e, orientando o estudo da equipe *X*, em relação ***Q***, está a equipe de diretores de estudo *Y*. Para Chevallard (2001, p. 5, tradução nossa): "O funcionamento de **S** (X; ∅; *Q*) gera então ***uma resposta R***, fragmento de uma organização em construção: $S(\phi; Y; Q) \rightarrowtail R$".

Segundo Delgado (2006) o processo de estudo deve emergir tipo de problemas e uma técnica para se enfrentar tal problema, que irá evoluir para uma técnica mais confiável, segura, econômica e que tenha um maior alcance. Mas para isto precisa-se estabelecer um tempo de estudo relativamente amplo, já que o trabalho do matemático de desenvolverá em vários encontros sucessivos e que se deve ter uma *questão geratriz* Q_0. A TAD nos diz que $\mathbf{Q_0}$ deve ter um potencial de gerar outras questões Q_i engendradas a esta. Portanto a partir de uma razão de ser, por exemplo o porquê do estudo de sistemas lineares, o estudo a partir de $\mathbf{Q_0}$, pode ser vivenciada pelo membros de uma comunidade de estudo de forma dinâmica, pois esta é uma *motor* para a atividade matemática.

A elaboração da resposta ***R*** mobiliza saberes antigos e novos, geralmente, respostas de obras *O* (livros textos, artigos, dissertações, teses doutorais, etc.): $R_1, \ldots, R_n$ (CHEVALLARD, 2001). As obras *O* constituem um *milieu* [meio] para elaboração de *R*. Após essa breve explicação sobre um sistema didático ***S***, podemos iniciar nossas discussões direcionadas a pedagogia e a metodologia do *parcours d'étude et de recherche* (PER) (CHEVALLARD, 2009a, 2011).

Por fim, o PER surge monodisciplinar ou bidisciplinar, associado ao *esquema herbatiano*[26]: $(S(X; Y; Q) \rightarrow M) \rightarrowtail R^{\heartsuit}$. Essa é a forma não desenvolvida desse esquema, que contém o sistema

[26] Em homenagem ao filosofo alemão Johann Friedrich Herbart.

didático ***S***, o *milieu*[27] ***M*** e a resposta esperada $R^{♥}$ (CHEVALLARD, 2009a, 2009b). Na metodologia do PER, o esquema herbatiano é aplicado em sua forma desenvolvida:

$$[S(X\ ;\ Y\ ;Q) \rightarrow \{R_1^{\lozenge}, R_2^{\lozenge}, \ldots, R_n^{\lozenge}, R_{n+1}^{\lozenge}, O_{n+1}, \ldots, O_m\}] \hookrightarrow R^{♥}$$

Nessa forma, o esquema herbatiano revela a complexidade do *milieu* M = $\{R_1^{\lozenge}, R_2^{\lozenge}, \ldots, R_n^{\lozenge}, R_{n+1}^{\lozenge}, O_{n+1}, \ldots, O_m\}$. Os $R^{\lozenge}$ ("R contraste") são respostas prontas e legitimadas institucionalmente, na TAD, diz-se que elas receberam um "selo" institucional. A análise das reposta $R^{\lozenge} = \{R_1^{\lozenge}, R_2^{\lozenge}, \ldots, R_n^{\lozenge}, R_{n+1}^{\lozenge}\}$ poderá levar à elaboração da resposta esperada $R^{♥}$ (CHEVALLARD, 2009a, 2009b). Entretanto, há as respostas *R* provenientes das obras *O*= $\{O_{n+1}, \ldots, O_m\}$, da cultura. Da análise dessas obras *O* podemos ter $R = R^{\lozenge}$ e, por conseguinte, elaborar a resposta esperada $R^{♥}$ (CHEVALLARD, 2009a).

Os elementos do esquema herbatiano desenvolvido, propõe uma metodologia *da didática da investigação codisciplinar*, cujo o centro das atenções é a questão ***Q***, que dever ser respondida por **X** (uma classe, uma equipe de alunos, uma equipe de pesquisadores, etc.) mediante a elaboração de um resposta ***R***, mas sob a orientação de **Y** (diretor ou conjunto de diretores de estudo) (CHEVALLARD, 2009a, 2009b). Em algumas investigações, o sistema didático do PER assume a forma **S** (X; ∅; Q), ou seja, Y = ∅. É nesse tipo de sistema didático que a metodologia do PER confere legitimidade ao pesquisador, quando este estuda as obras ***O*** necessárias para fundamentar uma pesquisa em desenvolvimento, assim teremos X = $\{x_1\}$. Essa configuração de Y = ∅ e X = $\{x_1\}$, compreendemos como a metodologia de um PER "solitário". Esse PER "solitário", ocorre, quando os autores deste tese propõe construir uma proposta de MER.

Segundo Chevallard (2009a), para que um PER ocorra, razoavelmente, é necessário que a OD concebida ou observada pareça objetivar (no primeiro caso) ou manifestar (no segundo caso) um número de condições que afetem simultaneamente *a mesogênese*, *a topogênese* e *a cronogênesis*. Vou discutir aqui essas propriedades, deliberadamente formais, começando com a mesogênese, a fabricação do milieu *M,* ou seja, pensamos na palavra *enriquecer* o milieu, oferecendo materiais adequados e submeter cada uma das respostas $R^{\lozenge}_i$, que compõe a resposta $R^{♥}$ em preparação, a prova de uma dialética da mídia e do milieu necessário. A primeira condição para satisfazer: *M* não está "pronto"; ele é constituido a partir de várias produções *externas* à classe e *internas* à ela. Estas últimas incluem as respostas dadas pelos alunos R_x possivelmente a partir de suas próprias atividades, a resposta R_x a ser considerada, em referência ao regime de Herbart, como "Selada", *ipso facto* por

[27] A tradução de *millieu* é meio em Língua Portuguesa, mas a compreensão e significado de um *milieu*, na Didática da Matemática francesa, é muito mais amplo que o significado de meio.

seu proponente, **x** ele próprio, da mesma forma que $R^{\heartsuit}$ será carimbada pela classe [X, Y]. Note a este respeito que o *milieu*

$$M = \{\boldsymbol{R}^{\Diamond}1, \boldsymbol{R}^{\Diamond}2, \ldots, \boldsymbol{R}^{\Diamond}n, On+1, \ldots, Om\}$$

A condição *mesogenética* recuperada está associada com uma condição relativa à *topogênese*: a constituição do *milieu* ***M*** é *da classe* [X,Y], e não só de **Y**. O *topos* está relacionado com a posição de X e de Y na instituição, que denotamos por Ξ. Chevallard (2009) relata que os *topos* dos alunos pode elaborar uma resposta pessoal R_x (como ele fará classicamente quando produzir sua solução de tal problema dado à investigar por **Y**), como também pode propor introduzir em ***M*** qualquer obra que ele deseje, por meio da literatura que dispor. Esta mudança no *topo* dos alunos, corresponde a uma mudança significativa no *topo* do *diretor do estudo.*

Por fim para se trabalha na metodologia de um percurso de estudo, na constituição e o "trabalho" do *milieu M,* demanda um tempo. A cronogênese é o que distingue um PER, em princípio, dos mais facilmente identificáveis episódios didáticos usuais na escola, havendo assim uma *dilatação do tempo didático (cronogênese), já que precisa trabalhar M* para produzir $R^{\heartsuit}$.

O PER nessa formação inicial assume três principais sistemas didáticos, que denotaremos por $\boldsymbol{S_1}$ e $\boldsymbol{S_2}$ ***e*** $\boldsymbol{S_3}$. O Sistema auxiliar $\boldsymbol{S_1}$ orienta os estudos do pesquisador na elaboração do MER, dizemos que é do tipo $\boldsymbol{S}_1(X; \emptyset; \mathcal{Q}_1)$, no qual X = $\{x_1\}$ e x_1 simboliza o pesquisador estudando e elaborando o MER. A questão $\mathcal{Q}_1$ compreende uma família de questões do tipo: $\mathcal{Q}_{1,0}$: *Como elaborar um modelo epistemológico de referência para questionar e analisar o modelo dominante da Álgebra Linear institucionalizado na formação inicial de professores de matemáticas?* $\mathcal{Q}_{1,1}$: *Por que questiono esse modelo dominante?* $\mathcal{Q}_{1,2}$: *Quais as obras que tenho que estudar?* $\mathcal{Q}_{1,3}$: *Quais condições e restrições tenho para elaborar esse MER?* $\mathcal{Q}_{1,4}$: *Quais tipos de tarefas T são problemáticos?* $\mathcal{Q}_{1,5}$: *Quais técnicas τ devo recorrer ou elaborar para solucionar as tarefas* $t \in T$*?*

O sistema didático auxiliar $\boldsymbol{S_2}$, o qual será tratado no capítulo VI constitui as etapas de sala de aula, denotaremos por $\boldsymbol{S}_2(X; Y; \mathcal{Q}_2)$. Nesse sistema didático, X = $\{x_{2,1}; x_{2,2}; x_{2,3}; \ldots; x_{2,n}\}$, são os alunos em formação inicial do curso Licenciatura em Matemática do IFPA; Y = $\{y_1\}$, representa o professor ministrante da disciplina AL (diretor de estudo). A questão $\mathcal{Q}_2$, desdobra-se em questões $\mathcal{Q}_{2,0}$, $\mathcal{Q}_{2,1}$, $\mathcal{Q}_{2,2}$, etc., que neste PER para efeito de organização será a Q_0, Q_1,....., Qi. Além disso, são essas questões que auxiliarão o pesquisador a formular a resposta ótima (esperada) $R^{\heartsuit}$ de nossa tese doutoral, cujo sistema didático, denota-se por $\boldsymbol{S}(X; Y; \boldsymbol{\mathcal{Q}})$, no qual X = $\{x_1\}$ = doutorando, Y = $\{y_1\}$ = orientador e $\boldsymbol{\mathcal{Q}} = Q_0$, questão norteadora da tese doutoral (CHEVALLARD, 2009a, 2009b).

O terceiro sistema didático auxiliar, $S_3(X_2; Y; Q_3)$, apresentado no capítulo VI, possibilitou aos diretores de estudo dialogar sobre o bloco do saber-fazer ([*T*, τ]) da TAD. A questão está assim anunciada: Q_3: *Como esses futuros professores selecionam os tipos de tarefas T para ensinar Álgebra*

Linear no Ensino Superior? (Etapa final do processo de formação). Espera-se que o *milieu M* esteja estabelecido e exista a confiança entre o conjunto X_2 e Y. As sessões presseguirão, porque a questão norteadora ***Q*** engloba as três questões já anunciadas (Q_0, Q_1 e Q_2) e oportuniza a formulação de outras questões no decurso dessas sessões do PER.

Consideremos nossa proposta de MER como um instrumento que nos auxilia a descrever e analisar do modelo epistemológico dominante na instituição que iremos analisar, nos possibilita ainda a identificar as condições ou restrições presentes no modelo.

É necessário compreender as OM's propostas no MER como um complexo inteligível de praxeologias, sendo que tal construção não se deve dar de forma espontânea, mas responder a uma questão institucional que constitui as *razões de ser* da organização matemática ou extra matemática.

Para a educação matemática não é suficiente descrever e caracterizar o modelo da AL dominante em uma instituição de ensino. Também é necessário tomá-lo como um objeto de estudo como um fato empírico para explicar e, para isso, é necessário elaborar, previamente, um modelo de ensino de tópicos de AL e usá-lo como um MER para reformular a noção de estudar AL em uma determinada instituição.

No processo de construção do modelo foi levado em consideração a origem histórica e epistemológica da AL de modo a interpretar esta disciplina como algo não tanto abstrato como predomina no ensino no IFPA. Esta interpretação nos permitiu explicar alguns fenômenos históricos importantes, como o processo que Euler no século XVIII usava para estudar sistemas.

A proposta de um MER construído neste capítulo serviu para analisar as práticas no ensino de AL no IFPA e para analisar as organizações matemática (OM) presentes na obra adotada por professores desta disciplina no IFPA, aonde propomos articular o estudo de sistemas e o de combinação linear como tecnologias para justificar as técnicas para se ensinar AL em um curso de formação inicial de professores, partindo de uma questão geratriz global, que será a mesma utilizada no processo de estudo e pesquisa.

Garcia et al. (2006) relatam que as praxeologias matemáticas não emergem de repente em uma instituição, portanto não há uma forma definitiva, pois tais praxeologias são o resultado de uma atividade complexa e contínua, onde algumas relações invariáveis, que podem ser modeladas, existe.

Nessa perspectiva nossa questão se configura como: Q_0 é a seguinte: Q*ual(is) objeto(s) matemático(s) podem ser mobilizados para se estudar AL, no que diz respeito ao estudo dos espaços vetoriais, em um curso de graduação de professores de matemática*?

O modelo que propomos neste capítulo, que segundo Delgado (2006) é provisório e relativo, nos possibilitando de certa forma julgar o mundo dos saberes e, como tal, é necessário deixar claro que está longe de ser um modelo definitivo. A ideia é propor praxeologias que podem ser interpretadas para evoluir a atividade matemática de construção dos espaços vetoriais e transformações entre espaços, pois ao manipularmos num processo de *modelização*[28] matemática os sistemas lineares podemos revelar uma novo modo de fazer e de pensar AL, sem o formalismo criticado por autores que se preocupam com o ensino desta disciplina como Jean Luc Dorier. Sendo assim, o MER permite integrar estes tipos de praxeologias em uma atividade que caracterizamos como *regional* que será descrita a seguir por uma OM que mostra um itinerário diferente.

Nossa proposta de modelo é situado, pois em que condições acontece. Inicialmente quando nosso aluno é hipotético, pois quando proposto como uma obra em nosso PER, para alimentar o milieu, haverá outras condições e restrições, que não foram pensadas neste momento. Então, quais condições teremos que criar para que a prática seja executável pelo aluno, logo traçamos um caminho para se pensar às práticas, que seja articulada para se ter uma compreensão sobre esta.

As minhas análises se deram utilizando os *momentos didáticos*, que entendemos como um processo em que os alunos de **X** devem ser submetidos de modo que o processo de ensino se desenvolva. Segundo Delgado (2006), a consideração de vários processos de construção matemáticos permitem detectar aspectos invariantes presentes em todos, isto é, *dimensões* que estruturam qualquer processo de construção matemática, relativamente, independentemente, de suas características culturais, social, individual ou outras índole. A noção de *momento didático* é utilizada no sentido cronológico como no sentido de dimensão da atividade.

A construção do modelo levou em consideração os *momentos de estudo* proposta na TAD. Chevallard, ressalta que uma boa *gestão* de estudo exige que cada um dos *momentos didáticos* se realize num bom momento. Um momento de estudo se realiza, geralmente, várias vezes sob a forma de uma multiplicidade de episódios manifestada no tempo. Sob este ponto de vista, notaremos que a ordem colocada abaixo, sob os diferentes momentos didáticos são primeiramente uma realidade funcional de estudo, antes de ser uma realidade cronológica que ocorre em situação real de sala de aula.

O p*rimeiro momento de estudo* é aquele do *primeiro encontro com a organização do objeto em estudo*. Este encontro pode acontecer de várias maneiras, mas o encontro ou reencontro é inevitável, salvo se o aluno se mantém na superficialidade. O primeiro encontro com o objeto O pode acontecer por meio do tipo de tarefa Ti, relativa ao objeto O. Cabe destacar que de uma maneira mais geral, existe nas práticas didáticas correntes uma enorme gama de formas hibridas de 1º encontro, ou uma referência cultural assumida de forma incompleta que se alia a um grau variável com uma introdução “em situação” ou mais ou menos adequado aos planos epistemológicos e cognitivos.

O *segundo momento* é aquele da *exploração do tipo de tarefas T*, e da elaboração de uma técnica τ relativa a um tipo de tarefa. Na realidade, o estudo e a resolução do problema de um tipo

---

[28] Cf. Bon (2011), a modelelização é vista como processos de reconstrução e articulação de OM de complexidade crescente, que partem das razão de ser que motivam seus estudos.

determinado vão junto com a constituição de ao menos uma técnica mais desenvolvida a qual poderá eventualmente emergir. Assim, estudar problemas é um meio que permite criar e aperfeiçoar uma técnica, tornando-a de seu domínio. Técnica que ela mesma será em seguida um meio de resolver de maneira quase rotineira os problemas do mesmo tipo.

O *terceiro momento* de estudo é aquele da *construção do bloco tecnológico-teórico* [θ/Θ] relativo à técnica. De uma maneira geral esse momento é uma inter-relação estreita com cada um dos outros momentos. Assim, desde o 1º momento com o tipo de tarefa, já fazemos uma relação como o bloco [θ/Θ] anteriormente elaborado ou com fragmentos de um bloco a criar que se precisará em uma relação dialética com a emergência da técnica. Por vezes as estratégias de estudo tradicional fazem, em geral, desse 3º momento a primeira etapa de estudo.

O *quarto momento* é aquele da *institucionalização*, que ter por objetivo precisar elementos teóricos da Organização Matemática elaborada, distinguindo notadamente, os elementos que concorreram a sua constituição, e de outra parte, os elementos que farão de maneira definitiva parte da Organização Matemática desejada. Neste momento se tem uma oficialização de uma praxeologia matemática desconectada da história.

O *quinto momento* é aquele do *trabalho da técnica*, em particular, de aplicação das técnicas criadas. É o momento de testar as técnicas e de verificar a confiabilidade das mesmas qualitativamente como também quantitativamente.

O *sexto momento* é o momento da *avaliação* que se articula ao momento da institucionalização. Na prática, esse é o momento onde devemos parar para refletir onde independente dos critérios de julgamento, examinamos o que queríamos ensinar e o que foi aprendido. Podemos dizer que o momento da avaliação permite avaliar o que quer a organização matemática em estudo e também as competências desenvolvidas.

Teremos sistemas de tarefas, que é como traduzimos a compreensão sobre um objeto, dispostos em tipos de tarefas **T**, propostos para um curso de graduação em matemática, então, apenas para fazer os alunos relembrarem em seu equipamento praxeológico, o objeto sistemas lineares, partiremos para o tipo de tarefas T_1, sendo esta tipicamente familiar para o aluno (hipotético) até então, que é resolver um sistema linear bem simples 2x2 e em um nível de complexidade crescente.

A ideia é iniciar com tarefas sobre sistemas lineares bem simples, para fazermos com que os alunos atinjam a arte da prática[29], para em seguida resolver tarefas cada vez mais complexas. Fica a cargo do professor passar sistemas simples para fazer recordar este objeto nas memórias dos alunos. Na proposta do PER desenvolvida no capítulo seguinte, pretendemos com este objeto matemático, revelar que para se estudar AL é necessário estudar qualitativamente os sistemas lineares.

[29] As tarefas não são mais um problema para os alunos. Isto é, deixaram de ser problemáticas. Tornaram-se rotineiras.

Apresentaremos as condições e restrições durante a construção do modelo. Uma condição (**C_ξ**) inicial C_1 é que os alunos (hipotéticos) tenham em sua infraestrutura matemática sobre sistemas lineares, para que aconteça o estudo, por isto iniciamos com T_1, pois este MER será validado em uma turma de graduandos, portanto uma restrição (K_ξ), a precariedade da infraestrutura matemática do ensino básico, que se limita a bloco da práxis mas no PER deve aparecer é que os alunos graduando não viram AL. O estudo implicará em novas condições, que terão que ser consideradas pelos atores da comunidade de estudo, posto que o aluno não será mais hipotético, que viverá esta organização.

Uma outra condição C_2 é o tempo livre que tivemos para construir, que no PER se torna uma restrição inicial (K_1). A condição C_3 é que se tenha um certo domínio do estudo qualitativo dos sistemas, principalmente o método da substituição e eliminação. Uma C_4 é que supõem-se que os alunos tenham visto matrizes e suas operações e vetores, que na hora da ação da OM pode se tornar uma restrição. Uma C_5 é que que os alunos devem em seu equipamento praxeológico [30]os métodos da adição e comparação, que praticamente foi extinto das obras atuais de ensino básico. Uma C_6 é necessário representar os sistemas como um conjunto de vetores (matriz coluna) no R^2 e no R^3.

As OMP foram agrupadas por intermédio da tecnologia θ, que justifica as técnicas τ, resultantes da resolução de sistemas lineares e estas técnicas τ, quando mobilizadas, permitem resolver os tipos de tarefa T dessas OMP, pois ainda está no nível do assunto. Então, do agrupamento dessas várias OMP surge uma OML, que está no nível do tema (resolver sistemas lineares). Nossa proposta é caracterizar esta organização como OMR, pois esta presente o setor (estudar qualitativamente os sistemas lineares) corresponde a uma organização maior após a fusão das OMP e OML tem-se uma OMR, como segue:

Neste momento há um processo de reconstrução da OM, que deve conter momentos exploratórios onde a tecnologia (*método da eliminação e substituição*) irá justificar t_1.

Gênero de tarefa: estudar qualitativamente os sistemas lineares

T_1: Resolver o sistema linear m x n. A razão de ser: estudo qualitativo dos sistemas lineares.

t_1: Resolver o sistema linear S_4 (4 linhas e 4 variáveis).a seguir, pelo método da eliminação e substituição.

τ_1: Utilização do método da substituição e eliminação.

Sistema S_4 (momento do trabalho da técnica)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7 & (E_{41}) \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 8 & (E_{42}) \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 9 & (E_{43}) \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 10 & (E_{44}) \end{cases}$$

[30] O equipamento praxeológico de uma pessoa corresponde a seu universo cognitivo relativo a um dado objeto, isto é, um conjunto de práticas que uma pessoa tem em relação a um dado objeto.

Isolando-se x_1 na equação E_{41}, temos: $x_1 = 7 - (x_2 + x_3 + x_4)$ e substituindo x_1 na equação E_{42}.

$$\begin{cases} x_1 = 7 - (x_2 + x_3 + x_4) \\ 7 - (x_2 + x_3 + x_4) + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 8 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 9 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 10 \end{cases}$$

Substituindo x_1 nas equações E_{43} e E_{44}, e reduzindo os termos semelhantes, tem-se:

$$\begin{cases} x_1 = 7 - (x_2 + x_3 + x_4) & (E_{411}) \\ x_2 + x_3 + x_4 = 1 & (E_{421}) \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2 & (E_{431}) \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 3 & (E_{441}) \end{cases}$$

Simplificando os termos semelhantes e isolando x_2 na equação (E_{421}), temos:

$x_2 = 1 - (x_3 + x_4)$

Substitui-se $x_2 = 1 - (x_3 + x_4)$ nas equações E_{431} e E_{441}:

$$\begin{cases} x_1 = 7 - (x_2 + x_3 + x_4) \\ x_2 = 1 - (x_3 + x_4) \\ x_3 + x_4 = 1 \qquad \Rightarrow \qquad x_3 = 1 - x_4 \\ x_3 + 2x_4 = 2 \end{cases}$$

Trabalhando com as duas últimas equações, temos:

$$\begin{cases} x_1 = 7 - (x_2 + x_3 + x_4) \\ x_2 = 1 - (x_3 - x_4) \\ x_3 = 1 - x_4 & (E_{432}) \\ x_3 + 2x_4 = 2 & (E_{442}) \end{cases}$$

Substituindo $x_3 = 1 - x_4$ na equação E_{442}, temos:

$$\begin{cases} x_1 = 7 - (x_2 + x_3 + x_4) \\ x_2 = 1 - (x_3 - x_4) \\ x_3 = 1 - x_4 \\ x_4 = 1 \end{cases}$$

Observando para a equação E_{442} chegamos em um sistema 1 por 1, onde o valor de uma varável é encontrado facilmente, que é $x_4 = 1$. Logo S = {(6,0,0,1)} é a solução deste sistema.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7 \\ \quad x_2 + x_3 + x_4 = 1 \qquad \text{Sistema escalonado} \qquad (S_4^9) \\ \qquad x_3 + x_4 = 1 \\ \qquad\quad x_4 = 1 \end{cases}$$

A θ_1 *é o estudo qualitativo de sistemas lineares, que se dá pela aplicação do método da eliminação e substituição.* Nesta proposta de MER, criar OMR, onde a tecnologia irá articular e coordenar as técnicas, assim deve conter o trabalho da técnica e seu progressivo desenvolvimento, pois fazemos as tarefas se tornarem rotineiras, inicialmente, para conseguinte provocarmos um desenvolvimento progressivo dessa técnica τ_1, gerando assim técnicas novas para a comunidade de estudo (momento tecnológico teórico).

Na forma triangular a solução de, que chamaremos $\mathbf{S_4^9}$, (pois o sistema foi transformado 9 vezes) é *simples*, pois deixamos o sistema inicial $\mathbf{S_4}$ na forma escalonada (formato triangular). Portanto a solução do sistema $\mathbf{S_4^9}$ é $x_4 = 1$, $x_3 = 0$, $x_2 = 2$ e $x_1 = 4$, portanto obtemos como solução do sistema linear o conjunto solução: $\mathbf{S_4^9}= \{(4, 2, 0, 1)\}$.

Thomas Muir (1960) publicou em Londres a obra intitulada *The Theory of Determinants in the Historical Order of Development* e relata que *Alfredo Capelli e Giovanni Gabrieri* no período entre os anos de 1886 e 1891, que assim como Cauchy, mostraram que qualquer sistema de classificação **R** é equivalente a um sistema de equações **r** triangular, por meio da Teoria de Determinantes. No nosso caso a técnica foi a aplicação do método da eliminação e substituição.

O método da substituição e eliminação como atividade serve para otimizar esta prática, pois revela ser um método eficiente e com boa eficácia, isto rápido, simples e seguro.

Mas surgem 3 problemáticas acerca desta resolução, como segue (momento tecnológico teórico):

i) O sistema $\mathbf{S_4}$ é transformado até o $\mathbf{S_4^9}$, ou seja, achamos a respostas do $\mathbf{S_4^9}$, mas esta serve para $\mathbf{S_4}$?

Esta resposta puramente teórica, ou seja, precisa de uma teoria para responder tal questão, que não está presente na escola básica e sim na academia. O primeiro sistema não se sabe resolver, enquanto que o último, já na forma triangular, sua resolução é conhecida, ou seja, transformar um problema complexo em simples.

A *tecnologia* θ_2 que justifica está fundamentada em três teoremas, que adaptamos a partir das ideias de (LAMIM, 2000).

Teorema 1

Multiplicando-se os membros de uma equação qualquer de um sistema linear S' por um número $K \neq 0$, o novo sistema S' obtido será equivalente a S.

Demonstração:

Dada a equação linear $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b$, em que:

$a_1, a_2, .., a_n$ são coeficientes

$x_1, x_2, ..., x_n$ são as incógnitas

b é um termo independente

Podemos trabalhar com várias equações lineares, no que chamamos de sistema de equações lineares:

$$S \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = bi_n \\ \ldots. \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Multiplicando-se a i-ésima equação por K $\neq$ 0, obtém-se o sistema:

$$S' \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ ka_{i1}x_1 + ka_{i2}x_2 + \ldots + ka_{in}x_n = kb_{i\,n} \\ \ldots. \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

A única diferença entre S e S' é a i-ésima equação, logo trabalharemos com ela. Suponhamos que (α_1, α_2, α_3, ..., α_n) seja uma solução de S. Portanto, será feita referência apenas a ela.

De fato: por hipótese, $a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + ... + a_{in}\alpha_n = b_i$. Colocando-se α_1, α_2, α_3, ..., α_n no 1° membro da i-ésima equação de S', tem-se:

$$ka_{i1}\alpha_1 + ka_{i2}\alpha_2 + ... + ka_{in}\alpha_n = k(a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n) = kb_i,$$

Pois $a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + ... + a_{in}\alpha_n = b_i$

O que prova que (α_1, α_2, α_3, ..., α_n) satisfaz a equação de S´. Logo (α_1, α_2, α_3, ..., α_n) é solução de S´. Suponha que (α_1, α_2, α_3, ..., α_n) seja uma solução de S´. Logo (α_1, α_2, α_3, ..., α_n) é uma solução de S.

De fato: por hipótese, $ka_{i1}\alpha_1 + ka_{i2}\alpha_2 + ... + ka_{in}\alpha_n = kb_i$.

Colocando (α_1, α_2, α_3, ..., α_n) 1° membro da i-ésima equação de S, tem-se:

$$a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + ... + a_{in}\alpha_n = \frac{k}{k}a_{i1}\alpha_1 + \frac{k}{k}a_{i2}\alpha_2 + ... + \frac{k}{k}a_{in}\alpha_n = \frac{1}{k}(ka_{i1}\alpha_1 + ka_{i2}\alpha_2 + ... + ka_{in}\alpha_n) =$$

$$\frac{1}{k}.k.b_i = b_i.$$

O que prova que (α_1, α_2, α_3, ..., α_n) satisfaz a i-ésima equação de S. Logo, (α_1, α_2, α_3, ..., α_n) é solução de S.

Teorema 2

Se uma equação de um sistema linear S for substituída pela soma, membro a membro, dela com uma outra, o novo sistema obtido S' será equivalente a S.

Demonstração:

Dado sistema de equações lineares S:

$$S \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ ... \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n = b_i \\ .... \\ .... \\ a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + ... + a_{jn}x_n = b_j \\ .... \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Substituindo-se a i-ésima equação de S pela soma, membro a membro, dela com a j-ésima equação, obtém-se o sistema:

$$S \left\{ \begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & +\cdots+ & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & +\cdots+ & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ (a_{i1}+a_{j1})x_1 & + & (a_{i2}+a_{j2})x_2 & +\cdots+ & (a_{in}+a_{jn})x_n & = & b_i+b_j \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{j1}x_1 & + & a_{j2}x_2 & +\cdots+ & a_{jn}x_n & = & b_j \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & +\cdots+ & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \right.$$

A única diferença entre S e S' e a i-ésima equação. Portanto será feita referência apenas a ela. Suponhamos que (α_1, α_2, α_3, ..., α_n) seja solução do sistema S. Mostraremos que, também será solução do sistema S´.

De fato, por hipótese:

$a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + ... + a_{in}\alpha_n = b_i$

$a_{j1}\alpha_1 + a_{j2}\alpha_2 + ... + a_{jn}\alpha_n = b_j$

Colocando (α_1, α_2, α_3, ..., α_n) 1° membro da i-ésima equação de S´, tem-se:

$(a_{i1} + a_{j1})\,\alpha_1 + (a_{i2} + a_{j2})\,\alpha_2 + (a_{i3} + a_{j3})\,\alpha_3 + ...+ (a_{in} + a_{jn})\,\alpha_n =$

$(a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n) + (a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + ... + a_{jn}x_n) = b_i + b_j$, já que por hipótese

$a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + ... + a_{in}\alpha_n = b_i$
$a_{j1}\alpha_1 + a_{j2}\alpha_2 + ... + a_{jn}\alpha_n = b_j$

O que prova que (α_1, α_2, α_3, ..., α_n) satisfaz a i-ésima equação de S´. Logo, (α_1, α_2, α_3, ..., α_n) é solução de S´.

Vamos supor que (α_1, α_2, α_3, ..., α_n) é solução de S´, provaremos que é solução de S.

Por hipótese, temos:

$(a_{i1} + a_{j1})\,\alpha_1 + (a_{i2} + a_{j2})\,\alpha_2 + (a_{i3} + a_{j3})\,\alpha_3 + ...+ (a_{in} + a_{jn})\,\alpha_n = b_i + b_j$

e que $a_{j1}\alpha_1 + a_{j2}\alpha_2 + ... + a_{jn}\alpha_n = b_j$

Fazendo a diferença entre estas duas equações

$(a_{i1} + a_{j1})\alpha_1 + (a_{i2} + a_{j2})\alpha_2 + (a_{i3} + a_{j3})\alpha_3 + ...+ (a_{in} + a_{jn})\alpha_n -$ $(a_{j1}\alpha_1 + a_{j2}\alpha_2 + ... + a_{jn}\alpha_n) = b_i + b_j - b_j$

Concluindo-se que $a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + ... + a_{in}\alpha_n = b_i$.

Logo (α_1, α_2, α_3, ..., α_n) satisfaz a i-ésima equação de S, portanto (α_1, α_2, α_3, ..., α_n) é o conjunto solução do sistema S.

Teorema 3

Se uma equação de um sistema linear **S** for trocada com uma outra, o novo sistema obtido **S'**, será equivalente a **S**.

São equivalentes, pois S' foi obtido a partir de S, substituindo a 2ª equação pela soma, membro a membro, dela com a 1ª equação.

ii) Como pode ser descrita a transformação do $\mathbf{S_4}$ em $\mathbf{S_4^9}$?

É um conjunto de transformações lineares, que transformam $\mathbf{S_4}$ nos demais, até ao que nós denominamos de $\mathbf{S_4^9}$. Mas pode ser descrito por uma simples manipulação da prática, conforme faremos a seguir. Mas dado uma equação E_i isola-se a variável x_i na primeira e substitui nas demais e assim se repete para i =1 até n.

iii) Porque fazemos a transformação do **S_4** em **S_4^9**?

Para poder achar a solução. Trata-se de uma prática legitimada.

Generalizaremos em T_2 a solução de qualquer sistema linear, pelo método da substituição e eliminação. Portanto estamos no momento exploratório do trabalho da técnica, com intuito de chegarmos a institucionalização da OM.

Precisamos abstrair o processo para se visualizar como ocorre o processo. (momento exploratório). Essa tarefa não está presente no IFPA, onde aplicaremos o PER e nem no livro texto.

T_2: Resolver o sistema linear genérico com **n** (variáveis) por **m** (equações) S_5.

t_2: Resolver o sistema linear S_5 genérico 3x3 (n = 3) e (m = 3) pelo método da eliminação e substituição.

τ_1: utilização do método da eliminação e substituição.

θ_1: estudo qualitativo de sistemas lineares. Razão de ser: Abreviar a resolução do sistema para enxergar os operadores elementares e o método do escalonamento.
(momentos do primeiro encontro e exploratório da técnica)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad \text{(Sistema } S_5\text{)}$$

Vamos trabalhar com um sistema de 3 incógnitas e 3 equações, ou seja, **n = m** = 3.

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = f_1 & (E_{51}) \\ a_2x + b_2y + c_2z = f_2 & (E_{52}) \\ a_3x + b_3y + c_3z = f_3 & (E_{53}) \end{cases}$$

Isolando-se x na E_{51}:

$$x = \frac{f_1}{a_1} - \frac{(b_1y + c_1z)}{a_1}$$

Adicionando-se a_1x no 2º membro da equação E_{51}.

$$x=\frac{f_1}{a_1}-\frac{(\mathrm{a_1x+b_1y+c_1z})}{a_1}+\frac{a_1x}{a_1}\therefore x=\frac{f_1-(\mathrm{a_1x+b_1y+c_1z})+a_1x}{a_1}$$

$$como\ \ -E_{51}=f_1-(\mathrm{a_1x+b_1y+c_1z}), então:$$

$$x=\frac{-E_{51}+a_1x}{a_1}\therefore x=\frac{-E_{51}}{a_1}+\frac{a_1x}{a_1}\therefore x=\frac{-1}{a_1}E_{51}+x\therefore x=x-\frac{1}{a_1}E_{51}$$

Substituindo-se nas equações E_{52} e E_{53}, temos:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=f_1 \Leftrightarrow x=x-\frac{1}{a_1}E_{51} \\ a_2\left(x-\frac{1}{a_1}E_{51}\right)+b_2y+c_2z=f_2 \\ a_3\left(x-\frac{1}{a_1}E_{51}\right)+b_3y+c_3z=f_3 \end{cases} \therefore \begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=f_1 \Leftrightarrow x=x-\frac{1}{a_1}E_{51} \\ a_2\mathrm{x}-\frac{a_2}{a_1}E_{51}+b_2y+c_2z=f_2 \\ a_3\mathrm{x}-\frac{a_3}{a_1}E_{51}++b_3y+c_3z=f_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=f_1 \Leftrightarrow x=x-\frac{1}{a_1}E_{51} \\ a_2\mathrm{x}+b_2y+c_2z-f_2-\frac{a_2}{a_1}E_{51}=0 \\ a_3\mathrm{x}+b_3y+c_3z-f_3-\frac{a_3}{a_1}E_{51}=0 \end{cases}$$

Como $a_2x + b_2y + c_2z - f_2 = 0$ é a E_{52} e $a_3x + b_3y + c_3z = f_3$ é a E_{53}, então S'$_5$:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=f_1 \Leftrightarrow x=x-\frac{1}{a_1}E_{51} \\ \mathrm{E}_{52}-\frac{a_2}{a_1}E_{51}=0 \\ \mathrm{E}_{53}-\frac{a_3}{a_1}E_{51}=0 \end{cases}$$

Sistema S'$_5$

Anulamos o primeiro termo das equações E_{52} e E_{53}, isto é, a variável **x**. Então, temos $E_{52} = E_{52} - \frac{a_2}{a_1}.E_{51}$, por exemplo, trabalha-se a própria equação E_{52} e somarmos com o simétrico do primeiro coeficiente não nulo da E_{52} no caso a_2 multiplicado por cada coeficiente de E_{51} tudo dividido por a_1 e somando os termos semelhantes conseguindo anular ao menos o primeiro termo da equação e assim sucessivamente com as demais equações.

Para o novo sistema formado S'$_5$ na equação E_{52}, isola-se a variável y e substitui na equação E_{53} iremos anular por simetria o a variável **y** na equação E_{53} e ficamos com o sistema na forma triangular. Assim prosseguimos até o sistema ficar escalonado, ou seja, na forma triangular.

Após determinarmos **z**, como o sistema está no *formato triangular*, determinamos **y** e **x**. A *descrição* do método da substituição e eliminação ganha um regularidade que pode ser descrito de uma maneira mais simples, como *operações entre as linhas* (E_k). Observa-se que na descrição do método temos um problema essencialmente numérico, ou seja, aritmético, pois trabalhamos com os coeficientes.

É possível revelarmos que o *método da substituição e eliminação, do ponto de vista epistemológico é a gênese do método de eliminação Gaussiana*, (momento de institucionalização) ou seja a abstração do método da substituição e eliminação é o método do escalonamento, tornando a prática mais rápida (econômica), com uma diferença, pois no primeiro método vem da prática da manipulação das variáveis, enquanto que no método do escalonamento a ideia é trabalhar com os coeficientes, dando a ideia inicial de *matriz*. Generalizando em uma forma de ver o que acontece com o sistema (institucionalizando):

As operações elementares entre linhas são:

i) $E_k \rightarrow \alpha E_k$, onde $\alpha \neq 0$

ii) $E_k \rightarrow E_k + \alpha E_j$, $\alpha \neq 0$ operação entre as linhas onde $E_k \neq E_j$. Adição de um múltiplo escalar da linha **j** à linha **k**.

iii) $E_k \Leftrightarrow E_j$ sejam equivalentes.

iv) Adição de múltiplos escalares em ambas as linhas: $E_k \rightarrow \beta E_k + \alpha E_j$. Onde $\beta \neq 0$ e $\alpha \neq 0$.

A permutação entre equações, que acontece quando não se tem uma variável, como a variável **x**, por exemplo na primeira equação, então permuto com a segunda para poder eliminar esta variável nas demais equações. Mostraremos um exemplo prático que propusemos para o sistema S_4 (nesta atividade chamaremos de S_6), utilizando o mesmo tipo de tarefas T_1. Então:

T_1: Resolver o sistema linear m x n. (momento do primeiro encontro)

t_{11}: Resolver o sistema linear S_6 pelo método da eliminação e substituição, mas agora adicionando e retirando no segundo membro da equação a variável x_n. (**n** representa a variável isolada). Temos um *método avançado da técnica*.

τ_1: Aplicação método da eliminação e substituição.

θ_1: Estudo qualitativo de sistemas lineares.

(Momento exploratório e do trabalho da técnica)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7 & (E_1) \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 8 & (E_2) \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 9 & (E_3) \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 10 & (E_4) \end{cases} \qquad (S_6)$$

Da E_1 temos: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7$

Então: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 7 = 0$

Isolando $x_1 = (7 - x_2 - x_3 - x_4)$

Obtemos: $x_1 = -(-7 + x_2 + x_3 - x_4)$

$$x_1 = \mathbf{x_1} - (\mathbf{x_1} - 7 + x_2 + x_3 + x_4)$$

$$x_1 = x_1 - E_1$$

Substituindo na equação E_2, temos:

$x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 8$

$(x_1 - E_1) + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 8$

$x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 - 8 - E_1 = 0$

$E_2 - E_1 = 0$

Substituindo $x_1 = x_1 - E_1$ na E_3, temos: $E_3 - E_1 = 0$

Substituindo $x_1 = x_1 - E_1$ na E_3, temos: $E_4 - E_1 = 0$ da mesma forma.

Voltando ao sistema S_6:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7 & x_1 = x_1 - (E_1) \\ (x_1 - E_1) + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 8 & (E_2) = E_2 - E_1 \\ (x_1 - E_1) + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 9 & (E_3) = E_3 - E_1 \\ (x_1 - E_1) + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 10 & (E_4) = E_4 - E_1 \end{cases}$$

Chamaremos as equações deste novo sistema de equação 2, equação 3 e equação 4, respectivamente por E'_2, E'_3 e E'_4, em um sistema que chamaremos de S_6'.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7 & x_1 = x_1 - (E_1) \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 - 8 = E_1 & (E_2') = E_2 - E_1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 - 9 = E_1 & (E_3') = E_3 - E_1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 - 10 = E_1 & (E_4') = E_4 - E_1 \end{cases}$$

Substituindo E_1 no sistema anterior, temos:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7 & \\ x_2 + x_3 + x_4 = 1 & (E_2') \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2 & \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 3 & \end{cases}$$

Fazendo o mesmo para (E_2'), isto é, $x_2 = 1 - (x_3 + x_4)$ chegamos a $x_2 = x_2 - E_2'$.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7 & \\ x_2 + x_3 + x_4 = 1 & \leftrightarrow \quad x_2 = x_2 - E_2' \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2 & E_3' \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 3 & E_4' \end{cases}$$

Substituindo nas equações E_3' e E_4', resultando em:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7 & E_1 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 1 & E_2' \\ x_3 + x_4 = 1 & E_3'' \quad \text{conforme os anteriores } x_3 = 1 - x_4 \\ x_3 + 2x_4 = 2 & E_4'' \end{cases}$$

Trabalhando com E_3" assim como já mostramos, e substituindo em E_4", resulta no sistema equivalente S_6", em relação a S_6. Então, a partir de todas as substituições e eliminações que fizemos em S_6, surge o sistema S_6":

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7 & E_1 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 1 & E_2' \\ x_3 + x_4 = 1 & E_3'' \\ x_4 = 1 & E_4'' = E_4'' - E_3'' \end{cases} \qquad \text{Sistema } S_6''$$

A solução de S_6" é simples, pois deixamos o sistema inicial S na forma escalonada. Portanto a solução do sistema S' é $x_4 = 1$, $x_3 = 0$, $x_2 = 0$ e $x_1 = 6$, portanto obtemos como solução do sistema linear $S_6 = \{(6,0,0,1)\}$

Institucionalizando, nesta resolução apresentada começando pelo sistema $\mathbf{S_6}$ e terminando no $\mathbf{S_6}$**"** é possível se verificar que o método do *escalonamento* ou *Método de Gauss* é a *descrição do método da substituição e eliminação*, deixando de se trabalhar em uma *perspectiva algébrica* para se dar um *tratamento aritmético*, portanto um processo *econômico*, pois se observou que poderíamos trabalhar só com os coeficientes das incógnitas das equações do sistema, ou seja, poderíamos representar ou mesmo *abstrair* os sistemas de equações lineares por uma disposição em formato de linhas e colunas o que veio a ser chamado de *matriz*. Já mostramos na parte histórica deste modelo que Cayley (1855) já tivera esta ideia brilhante.

Os encaminhamentos tecnológico-teóricos, que permeiam a tarefa t_2, estão em conformidade com a TAD. Nesse aspecto, avaliamos a técnica τ_1 como uma alternativa didática que auxiliará a prática do professor de matemática no estudo qualitativo de sistemas lineares, no âmbito da AL ensinada no curso de graduação em Licenciatura em Matemática.

No livro chinês *Nove Capítulos de Arte Matemática*, datado por volta 200 a.C. aparece uma versão desta eliminação de forma rudimentar, semelhante ao método desenvolvido por Gauss. Gauss fora motivado a desenvolver o método da eliminação, quando calculava as possíveis posições celestiais, para que o planeta Ceres pudesse aparecer. Através de dados limitados e utilizando mínimos quadrados e a eliminação, prevendo e comprovar com pequenos erros a posição de Ceres.

O termo *matriz* (palavra com origem no latim, que significa útero, pois é considerada como a base de onde surgem os números) foi utilizada e apresentada na sua notação moderna por Sylvester, em 1848. A álgebra das matrizes foi elaborada por Arthur Cayley em 1855, em seu estudo de transformações lineares e suas composições. Podemos verificar que o refinamento do método da substituição e eliminação é o método da adição, enquanto que as matrizes são um refinamento do método da adição.

T_3: Represente o sistema linear m x n na forma de matriz.

t_3: Represente o sistema 4x5 (S_2) resolvido por Euler (1750, p. 227) pode ser representado por um formato matricial.

τ_2: Abreviação do sistema proposto por (EULER, 1750). Representar na forma de matriz.

θ_1: aplicação da abreviação de sistemas proposta por (EULER, 1750).

$$\begin{cases} 5x + 7y - 4z + 3v - 24 = 0 \\ 2x - 3y + 5z - 6v - 20 = 0 \\ x + 13y - 14z + 15v + 6 = 0 \\ 3x + 10y - 9z + 9v - 4 = 0 \end{cases} \qquad (S_2)$$

Abreviação do sistema anterior:

$$\begin{bmatrix} 5 & 7 & -4 & 3 & -24 \\ 2 & -3 & 5 & -6 & -20 \\ 1 & 13 & -14 & 15 & 16 \\ 3 & 10 & -9 & 9 & -4 \end{bmatrix}$$

Utilizando-se o Método de Eliminação Gaussiana podemos chegar à mesma solução dada por Euler. Basta trabalhar a segunda, a terceira e a quarta equação com a primeira, que será chamada de equação pivô. Para que esta primeira equação fique com seu primeiro elemento igual a 1 (um), permutaremos a primeira linha com a terceira linha, então teremos a seguinte matriz:

T_4: Escalonar a matriz.

t_4: Escalonar a matriz **M**, pelo Método de Eliminação Gaussiana.

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 13 & -14 & 15 & 16 \\ 2 & -3 & 5 & -6 & -20 \\ 5 & 7 & -4 & 3 & -24 \\ 3 & 10 & -9 & 9 & -4 \end{bmatrix}$$

τ_3: Método de Eliminação Gaussiana

θ_1: estudo qualitativo de sistemas (método da eliminação e substituição)

Determinando a primeira linha da matriz como L_1, a segunda como L_2, a terceira como L_3 e a quarta por L_4 e fazendo $L_2 = L_2 - 2L_2$, $L_3 = L_3 - 5L_1$, $L_4 = L_4 - 3L_1$, $L_1 = 0$, $L_2 = 0$, $L_3 = L_3 - 2\ L_1$ e

$L_4 = L_4 - L_2$, temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 13 & -14 & 15 & 16 \\ 2 & -29 & 33 & -36 & -52 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Voltando ao sistema:

Da primeira equação temos: $x + 13y - 14z + 15v = 16$ e da segunda: $2x - 29y + 33z - 36v = -52$.

Isolando-se na primeira o x e o valor de y na segunda encontraremos o mesmo resultado de Euler.

$$y = \frac{33z - 3v - 52}{29} \quad \text{e} \quad x = \frac{-23z + 33v + 212}{29}$$

Conforme já havíamos revelado, que o método da eliminação gaussiana é a descrição do método da substituição e eliminação, pois no sistema de equações lineares quando substituímos e eliminamos incógnitas em outra equação do sistema, obtêm-se o que hoje é descrito nos livros como operadores lineares.

Para mostrar que o método da substituição e eliminação está embutido nos outros métodos (comparação e adição) vamos parti do tipo de tarefas T_0 (resolver o sistema linear 2x2) e deste solucionar a tarefa t_4: resolver o sistema linear $\mathbf{S_7}$, utilizando os métodos da: (i) *substituição e eliminação,* (ii) da *comparação* e (iii) da *adição*. A técnica $\boldsymbol{\tau}_4$ utiliza os métodos da substituição e eliminação, comparação e adição. O sistema S_7 é o seguinte:

(momento exploratório)

A razão de ser da tarefa seguinte é as resoluções são justificadas pelo método da [*substituição e eliminação].*

T_1: Resolver o sistema linear mxn.

t_{01}: Resolver o sistema linear 2x2 ($\mathbf{S_7}$), utilizando os métodos da *substituição e eliminação* (i), da *comparação* (ii) e da *adição* (iii)

τ_4: aplicação dos métodos da *substituição e eliminação*, da *comparação* e da *adição*

θ_1: estudo qualitativo de sistemas

Trabalho da técnica

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ x - y = 2 \end{cases} \qquad (S_7)$$

Pelo método (i) isola-se o $x = 4 - y$ na primeira equação. A ideia é que se tenha um sistema triangular. Substituindo o $x = 4 - y$ na segunda, ficamos com o sistema triangular a resolução do sistema fica simples de ser resolvido, pois como x = 4 – y, e y = 1, então x = 4 – 1 = 3, logo S = {(3,1)}.

Já vimos que o método da eliminação e substituição resolve qualquer sistema, ou seja, tem um longo *alcance* (*alcance da técnica*).

Pelo método (ii): Trabalha-se com as incógnitas. Vamos isolar o y.

$$\begin{cases} x + y = 4 \Rightarrow \ y = 4 - x \\ x - y = 2 \Rightarrow \ y = x - 2 \end{cases}$$

Igualando-se y = y, chegamos a solução S = {(3,1)}.

Pelo método (iii): é uma abstração do método da substituição e eliminação.

$$\begin{cases} x + y = 4 \quad + \\ \underline{x - y = 2} \end{cases}$$
$$2x = 6$$

x = 3, consequentemente substituindo x em qualquer uma das equações verifica-se que y =1. Chegamos a solução S = {(3,1)}.

T_{51}: Resolver um sistema $\mathbf{S_8}$ 3 por 3 utilizando os três métodos. Por conveniência didática tomemos o sistema a seguir.

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y + 2z = 2 \\ x + 2y + 2z = 1 \end{cases} \qquad (S_8)$$

τ_4: utilização dos 3 métodos: *substituição e eliminação* (i), da *comparação* (ii) e da *adição* (iii)

Pelo método **i**, chegamos no sistema triangular, que é simples de ser resolvido.

$$\begin{cases} x = 1 - (y + z) \\ \qquad y + z = 0 \\ \qquad\quad z = 1 \end{cases}$$

Obtemos como solução S ={(1,-1,1)}

Pelo método **ii**: por ser uma prática que não esta mais presente nos livros, resolveremos:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y + 2z = 2 \\ x + 2y + 2z = 1 \end{cases}$$

Isolamos a variável x.

$$\begin{cases} x = 1 - (y + z) \quad \text{I} \\ x = 2 - (y + 2z) \ \text{II} \\ x = 1 - (2y + 2z) \ \text{III} \end{cases}$$

I = II, temos: $1 - (y + z) = 2 - (y + 2z)$

I = III, temos: $1 - (y + z) = 1 - (2y + 2z)$, então:

$$\begin{cases} x = 1 - (y + z) \\ 1 - (y + z) = 2 - (y + 2z) \\ 1 - (y + z) = 2 - (y + 2z) \end{cases}$$

Reduzindo-se os termos semelhantes, temos:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ \qquad\quad z = 1 \\ \quad y + z = 0 \end{cases}$$ Onde sua solução é S ={(1,-1,1)}

Podemos observar na resolução pelo método **ii**, que é a mesma coisa que o método da eliminação e substituição.

Pelo método **iii**, tem-se:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y + 2z = 2 \\ x + 2y + 2z = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} - x - y - z = - 1 & \text{I} \\ x + y + 2z = 2 & \text{II} \\ x + 2y + 2z = 1 & \text{III} \end{cases}$$

Ao somarmos a I com a II e a I com a III, temos:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ \qquad\quad z = 1 \\ \quad y + z = 0 \end{cases}$$ Onde sua solução é S ={(1,-1,1)}

Surge a questão *Q': Mas o que estes métodos têm em comum?*

Similares e a *tecnologia* que os justifica (θ_1) é o *método da eliminação e substituição*, mostrando que as questões da OM estão associadas, são confiáveis e estão suficientemente trabalhadas. Dispomos de diferentes técnicas para cada tipos de tarefas, com isto estamos interpretando o funcionamento e o resultado da aplicação das técnicas.

O método da eliminação e substituição se trabalha com as variáveis e o da adição se trabalha com os coeficientes, como mostraremos no exemplo genérico a seguir. Podemos até dizer que a gênese destes métodos está no método da eliminação e substituição. Estes três métodos, com certeza, foram desenvolvidos por uma necessidade.

O método da comparação pode ter surgido por uma necessidade da atividade matemática de matemáticos ou uma necessidade do ensino da matemática. Podemos dizer que a *ecologia do saber* deste método pode ter desdobramentos, pois surge na escola básica em um dado momento, mas nos dias de hoje não está mais presente no currículo do ensino básico, enquanto poderíamos trabalhar com este método para se verificar o ponto de interseção entre duas retas, ou não, se forem paralelas, podemos trabalhar com equações não lineares, como a interseção de uma parábola com uma reta, propiciando o estudo de equações irracionais e remete ao estudo da teoria do ponto fixo.

A T_5 a seguir, mostra diferentes técnicas associadas a um questionamento tecnológico, onde há critérios que as difere, mas que estão articuladas com θ_1.

T_5: Resolver o sistema pelo método da adição (iii) é uma abstração do método da substituição e eliminação.

t_5: Resolver o sistema genérico S_9 a seguir que o método da adição (iii) é uma abstração do método da substituição e eliminação.

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases} \qquad (S_9)$$

τ_5: método da adição.

θ_1: estudo qualitativo de sistemas lineares

A técnica se da em aplicar o método da adição. Então, multiplicando a primeira equação por $-a_2$ e a segunda equação por $+a_1$, temos:

$$\begin{cases} -a_2a_1x + (-a_2)b_1y + (-a_2)c_1z = -a_2d_1 \\ a_1a_2x + a_1b_2y + a_1c_2z = a_1d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

Somando a primeira com a segunda equação e colocando o resultado na segunda equação, temos, deixando a primeira na forma inicial:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ (-a_2b_1 + a_1b_2)y + (-a_2c_1 + a_1c_2)z = -a_2d_1 + a_1d_2 \\ a_3 + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

Multiplicamos a primeira equação por $-a_3$ e a terceira por a_1, e o somarmos a primeira com a terceira equação, colocando o resultado na terceira equação, temos, deixando a primeira na forma inicial. Observe que manipulamos os coeficientes das equações.

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ (-a_2b_1 + a_1b_2)y + (-a_2c_1 + a_1c_2)z = -a_2d_1 + a_1d_2 \\ (-a_3b_1 + a_1b_3)y + (-a_3c_1 + a_1c_3)z = -a_2d_1 + a_1d_2 \end{cases}$$

Multiplicando-se a segunda equação por $-(-a_3b_1 + a_1b_3)$ e a terceira por $(-a_2b_1 + a_1b_2)$ teremos:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ -(-a_3b_1 + a_1b_3).(-a_2b_1 + a_1b_2)y - [(-a_3b_1 + a_1b_3).(-a_2c_1 + a_1c_2)]z = -[(-a_3b_1 + a_1b_3).(-a_2d_1 + a_1d_2)] \\ (-a_2b_1 + a_1b_2).(-a_3b_1 + a_1b_3)y + (-a_2b_1 + a_1b_2).(-a_3c_1 + a_1c_3)z = (-a_2b_1 + a_1b_2).(-a_2d_1 + a_1d_2) \end{cases}$$

Ao somarmos a segunda equação com a terceira resulta em:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ \quad (-a_2b_1 + a_1b_2)y + (-a_2c_1 + a_1c_2)z = -a_2d_1 + a_1d_2 \\ \qquad \{(-a_2b_1 + a_1b_2).(-a_3c_1 + a_1c_3) - [(-a_3b_1 + a_1b_3).(-a_2c_1 + a_1c_2)]\}z = (-a_2b_1 + a_1b_2).(-a_2d_1 + \\ a_1d_2) - [(-a_3b_1 + a_1b_3).(-a_2d_1 + a_1d_2)] \end{cases}$$

(Institucionalizando). Ao deixarmos o sistema na forma *triangular*, observa-se que neste método da adição (iii), que há uma *transferência* do *método algébrico para o aritmético*, pois a partir do exemplo dado, tem-se a clareza que este método se opera apenas com os *coeficientes*, portanto estamos diante de um problema aritmético. Observemos se trabalhamos com os coeficientes, o que permitiu representar os sistemas na forma de matriz.

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{pmatrix}$$

Vamos operar da mesma forma com as matrizes, ou seja, multiplicando a primeira linha por $-a_2$ e a segunda linha por $+a_1$, temos:

$$\begin{pmatrix} -a_2a_1 & -a_2b_1 & -a_2c_1 & -a_2d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_1a_3 & a_1b_3 & a_1c_3 & a_1d_3 \end{pmatrix}$$

Ao somarmos a primeira com a segunda linha e colocando o resultado na segunda equação, temos, deixando a primeira na forma inicial:

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ 0 & (-a_2b_1 + a_1b_2) & \left(-a_2c_1 + a_1c_2\right) & -a_2d_1 + a_1d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{pmatrix}$$

Multiplicamos a primeira linha por $-a_3$ e a terceira por a_1 e ao somarmos a primeira com a terceira linha da matriz e colocando o resultado na terceira equação, temos, deixando a primeira na forma inicial. Observe que manipulamos os coeficientes das equações.

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ 0 & (-a_2b_1 + a_1b_2) & \left(-a_2c_1 + a_1c_2\right) & -a_2d_1 + a_1d_2 \\ 0 & \left(-a_3b_1 + a_1b_3\right) & \left(-a_3c_1 + a_1c_3\right) & -a_3d_1 + a_1d_3 \end{pmatrix}$$

Multiplicando-se a segunda linha por $-(-a_3b_1 + a_1b_3)$ e a terceira por $(-a_2b_1 + a_1b_2)$ e somarmos a segunda equação com a terceira resulta em:

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ 0 & (-a_2b_1 + a_1b_2) & \left(-a_2c_{1} + a_1c_2\right) & -a_2d_1 + a_1d_2 \\ 0 & 0 & \begin{matrix} -\left(-a_3b_1 + a_1b_3\right)\left(-a_2c_{1} + a_1c_2\right) + \\ \left(-a_2b_1 + a_1b_2\right)\left(-a_3c_{1} + a_1c_3\right) \end{matrix} & \begin{matrix} -\left(-a_3b_1 + a_1b_3\right)(-a_2d_1 + a_1d_2) \\ \left(-a_2b_1 + a_1b_2\right)(-a_3d_1 + a_1d_3) \end{matrix} \end{pmatrix}$$

Podemos notar que essa prática com sistemas de equações, podemos fazer com as matrizes, assim podemos assumir, conforme Cayley (1858) que *as matrizes são abstrações de sistemas lineares*.

Uma problemática que aparece, quando se resolve um sistema linear, pelo método do escalonamento é quando aparece a representação fracionária. Com relação ao uso do escalonamento, sem que apareça fração será descrita em T_6. Evocamos uma matriz triangular inferior que multiplicado por uma matriz triangular superior qualquer irá resultar em uma matriz cujos elementos em linha serão os coeficientes das respectivas linhas do sistema, como no exemplo a seguir:

T_6: Multiplicar duas matrizes e escalonar.

t_6: Multiplicar uma matriz triangular superior qualquer por outra matriz triangular superior.

Multiplique as duas matrizes $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

τ_6: Multiplicação matricial e escalonamento

θ_1: estudo qualitativo de sistemas.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 6 & 17 & -13 \end{pmatrix}$$

Representando o produto das duas matrizes dadas no sistema linear e igualando a primeira equação aleatoriamente a 5, a segunda a 5 e a terceira igual a -7, temos:

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 5 \\ 4x + 2y + z = 5 \\ 6x + 17y - 13z = -7 \end{cases}$$

Escalonando a matriz, teremos:

$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -5 \\ 0 & 4 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ Sistema escalonado.

Da terceira linha, temos que 3z = 3, resultando z = 1, assim na segunda determinamos y = 0 e na primeira x = 1.

Na matriz $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ podemos observar que acima da diagonal principal é a segunda matriz que postulamos na elaboração da tarefa e quando fizemos $E_2 = E_2 - 2E_1$, destacamos o número -2, assim como em $E_3 = E_3 - 3E_1$ destacamos o número -3 e por fim $E_3 = E_3 - 5\,E_2$, destacamos o número -5. Podemos observar que no produto matricial $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 6 & 17 & -13 \end{pmatrix}$ os números -2, -3 e -5 aparecem na parte inferior da primeira matriz, com o sinal trocado.

Partiremos para o estudo dos sistemas lineares homogêneos, que em vários livros do ensino básico e superior são bem poucos explorados. Podemos começar a observar a importância dos sistemas lineares homogêneos no estudo de AL, a partir de T_7, que se dá pelo momento do primeiro encontro.

T_7: Representar geometricamente o sistema. A razão de ser perpassa pela ideia de retas paralelas.

t_7: Representar geometricamente o sistema 2 x 2 a seguir:

$$\begin{cases} x + y - 4 = 0 \\ 2x + 2y - 8 = 0 \end{cases} \qquad (S_9)$$

τ_7: interpretar a representação gráfica das equações

Aqui o aluno no plano cartesiano traçará 2 retas paralelas, ou seja, o sistema pode ser representado por uma reta que passa pelos pontos (0,4) e (4,0) e não passa por (0,0). A solução **S** do sistema é $S = \{(x,y) \in R^2;\ x + y - 4 = 0\}$. É um *sistema linear possível* de ser resolvido, mas com infinitas soluções, portanto um sistema possível e indeterminado (SPI) pois todos os pontos da reta são solução do sistema. A tecnologia θ_1 permeia esta técnica, pois fora utilizado uma motivação geométrica para ilustrar que as retas são paralelas e coincidentes.

Capelli (1892) formulou uma compreensível e suficiente condição para resolução de sistema de equações lineares. Dado o sistema a seguir com **n** incógnitas:

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & \alpha_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & \alpha_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = & \alpha_m \end{array}$$

Esse sistema é compatível com os valores finitos de incógnitas e é necessário que as duas matrizes a seguir tenham a mesma *característica* (CAPELLI, 1892, p. 55).

$$(A) \quad \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{array} \qquad e \qquad (B) \quad \begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & \alpha_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & \alpha_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & \alpha_m \end{array}$$

Partindo para a subtarefa t_{71}: Representar o sistema na forma de matriz coluna. Então:

$$\binom{x}{y} = \binom{x}{4-x} = \binom{0}{4} + \binom{x}{-x} = \binom{0}{4} + x.\binom{1}{-1}$$

Ou ainda fazendo x = t, temos:

$$\binom{x}{y} = \binom{0}{4} + t.\binom{1}{-1}$$

Podemos observar que as soluções deste sistema dependem de um único parâmetro que a variável **t**, daí dizer que a *dimensão* da reta é 1.

t_{72}: Determinar a solução de *menor tamanho*[31]? A ideia de vetor.

τ_{72}: representação vetorial (matriz coluna) e utilização de derivada.

Tem sentido achar um mínimo |x| + |y|, onde x + y – 4 = 0 ou $x^2 + y^2$ (quadrados mínimos). Iremos trabalhar com $x^2 + y^2$, pois uma função f(x) = |x| não tem derivada.

Técnica: aplicação do método do isolamento de uma variável e da norma mínima.

x + y – 4 = 0. Isolando-se o y, temos: y = 4 – x

Então $f = x^2 + y^2 = x^2 + (4 - x^2) = x^2 + 16 - 8x + x^2 = 2x^2 - 8x + 16$

Calculando $\frac{df}{dx} = 4x - 8$. Fazendo 4x – 8 = 0, teremos x = 2 e y = 2.

Graficamente está representado na Figura 26, o que é chamado de problema de *norma mínima*, onde a distância do (0,0) até (2,2) é denominado *Norma Euclidiana* ou *norma 2*. No caso, então teremos a equação escrita na *forma geométrica* $\binom{x}{y} = \binom{0}{4} + t.\binom{1}{-1}$ é possível se observar que $\binom{0}{4}$ é uma *solução particular* do sistema, enquanto que $\binom{1}{-1}$, é a *solução do homogêneo* x + y = 0, que chamaremos de *homogêneo associado*, isto é, quando x = 1, teremos y = -1. É possível de se observar que o sistema tem infinitas soluções, basta para isto que atribuirmos valores para **t**. A parte $t.\binom{1}{-1}$ é irá gerar as diferentes soluções do sistemas. Esta ideia mais tarde será associada a base do espaço.

A parametrização do sistema x + y = 4 é $\begin{cases} x = t \\ y = 4 - t \end{cases}$, logo temos um sistema linear na forma paramétrica.

$\binom{x}{y} = \binom{0}{4} + t.\binom{1}{-1}$ A tecnologia, a qual justifica a técnica é a θ_1.

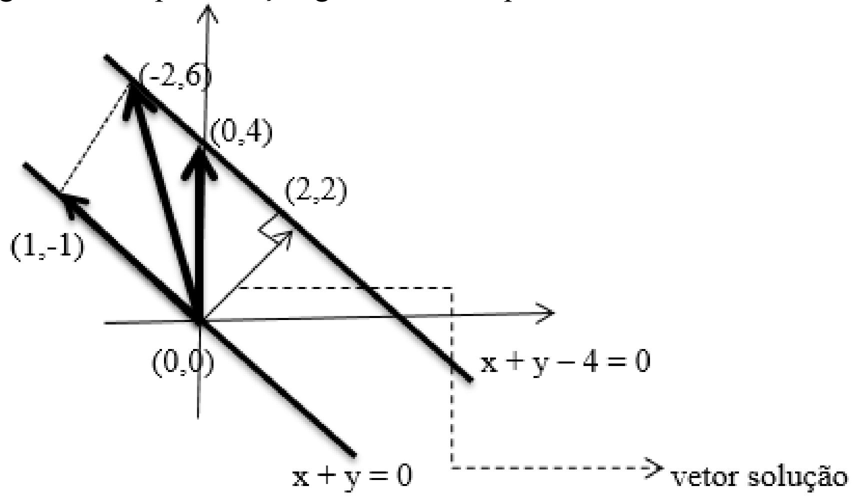
t_{821}: Qual valor de $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ quando t = -2?

[31] A ideia é que durante o PER, os sujeitos da pesquisa, por meio da motivação geométrica, concluam que é a menor distância entre a origem e a reta.Dentre as soluções situadas na reta x = y – 4 = 0, considere-se a solução mínima é a projeção ortogonal da origem na reta. Termo esse utilizado devido nossa intenção didática

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} + (-2) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ então $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix}$ é uma solução das muitas do sistema. Podemos notar que para um **t** qualquer teremos várias respostas para a solução geral $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Uma solução qualquer de $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ depende das várias soluções do homogêneo dado por t.$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ mais a solução particular, no caso $\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Iremos utilizar a motivação geométrica para representar o sistema x + y = 4. A solução do sistema é um par ordenado no R^2, mas a partir de agora iremos associar a interpretação geométrica de vetor, com origem em (0,0).

Figura 26– Representação geométrica do problema da norma mínima

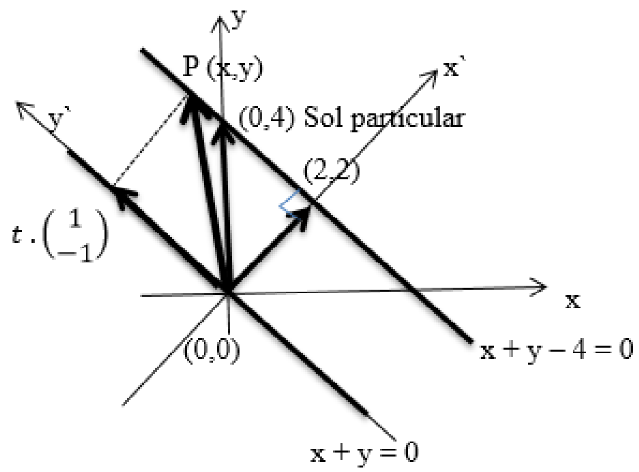


Fonte: Autor desta tese.

Dando um outro sentido ao problema, surge na matemática a ideia de *vetor*, que é algo que tem tamanho, direção e sentido, mas do ponto de vista algébrico o quer importa é o *tamanho*. O gráfico mostra que os vetores são *paridos geometricamente*. Podemos observar na (Figura 26), que na atividade matemática a solução se dá por um *seta* partindo, sempre, da origem e com extremidade na reta x + y – 4 = 0. A solução, então podemos dizer são os vetores que sustentam a reta e não qualquer vetor da reta. O vetor (1,-1), por exemplo é solução do homogêneo associado, que por coincidência parte da origem e só *caminha* sobre a reta x + y = 0.

Na Figura 27, podemos observar que a solução do sistema, como por exemplo a extremidade do vetor partindo da origem e indo até P, se dá pela combinação que é a menor de todas (2,2) com a solução de x + y = 0. Logo o conjunto das soluções é a solução de menor tamanho (que é uma solução particular) mais a solução do homogêneo associado. Comparando a o que determinamos anteriormente, o $\binom{x}{y} = \binom{0}{4} + t\,.\binom{1}{-1}$, onde o $\binom{x}{y}$ é a solução geral que está associado a $t\,.\binom{1}{-1}$, $\forall t \in R$, que são as soluções do homogêneo. Mas podemos escrever a solução geral de um modo diferente, tal como uma solução particular na forma $\binom{x}{y} = \binom{2}{2} + t\,.\binom{1}{-1}$, pois ao substituir qualquer valor em t é solução de x + y – 4 = 0. Se t = 0, $\binom{x}{y} = \binom{2}{2} + 0\,.\binom{1}{-1}$, $\binom{2}{2}$ é a solução do sistema e isto é válido para qualquer **t**. Esta ideia que foi posta, em encontrar a solução de menor tamanho, tem uma grande importância na matemática aplicada.

Figura 27 – Representação da solução geral do sistema.



Fonte: Autor desta tese.

Como se observa no gráfico da Figura 27, que uma solução P (x,y) do sistema se dá pela composição do vetor que representa a solução de menor tamanho (2,2) ou poderia ser a solução particular $\binom{0}{4}$. O vetor $\binom{0}{4}$ mais um múltiplo de t. $\binom{1}{-1}$, que é a solução do homogêneo associado. Podemos deduzir que dado um sistema homogêneo qualquer que seja, existe uma solução do não homogêneo que é perpendicular a solução do homogêneo. Com isto a reta x + y = 0 que representa o sistema homogêneo (y´) é perpendicular a (x´), formando um novo sistema de eixos ortogonais.

Concluímos que o dado o sistema, o homogêneo, que cria o *espaço* que não é necessariamente o espaço todo, pois falta a solução particular. Se o sistema tem 3 equações com 3 incógnitas, ou seja, no R^3, mas se ele tem uma solução é representa um ponto. Mas se o sistema for indeterminado ele tem uma solução particular e tem a solução do homogêneo associado, que também tem solução, o qual gera o espaço. Então, o espaço gerado pelo homogêneo mais a solução particular, que quando combinados gera todos os vetores partindo da origem com extremidade em x + y – 4 = 0. Se abstraímos esta ideia, o que nos interessa agora é olhar para o novo sistema de eixos x´e y´ gerado pelo sistema inicial e a solução que vai de (0,0) a (2,2).

Continuamos no R², mas estamos compreendendo este mesmo R² de uma *maneira diferente* da habitual, com a formação do novo sistema de eixos ortogonais.

Podemos concluir que *os sistemas nos dão uma visão do espaço*. Se nos abstraímos o sistemas chegamos nas matrizes. Portanto, podemos deduzir que as matrizes são uma lente que nos permite enxergar o espaço em dois pedaços formado pelo sistema homogêneo e o sistema não homogêneo. A matriz simétrica[32] decompõe o espaço em *subespaços ortogonais*[33].

Partimos para o tipo de tarefas **T8**: Resolver o sistema de uma única equação de duas variáveis. Este tipo de tarefa se parece muito com o **T1**, pois estamos resolvendo o sistema, mas de uma única equação e na forma vetorial.

t8: Dado o sistema x + y = 1 resolver e representar as soluções na forma vetorial e na forma geométrica. A razão de ser é a ideia dos espaços vetoriais.

τ_8: resolução de sistema na forma vetorial e geométrica. A tecnologia continua θ_1.

Iremos realizar o mesmo processo.

$$y = x - 1$$

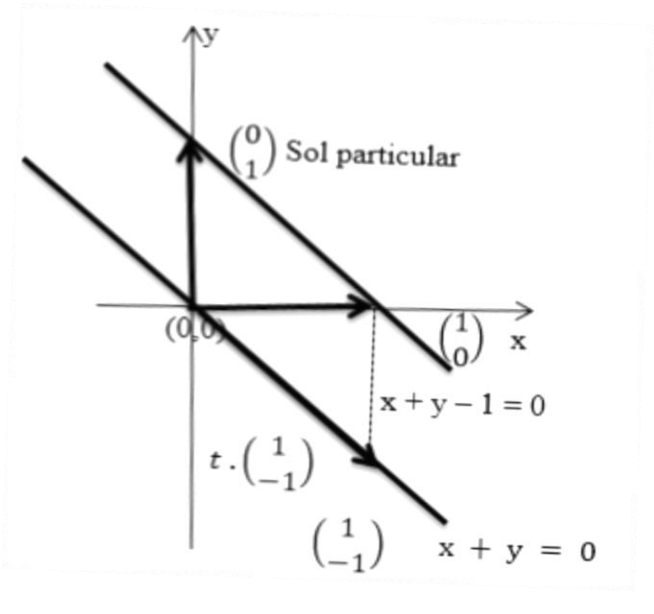
$$\binom{x}{y} = \binom{x}{1-x} = \binom{0}{1} + \binom{x}{-x} = \binom{0}{1} + x\binom{1}{-1}$$

A solução particular é $\binom{0}{1}$

A solução $x\binom{1}{-1}$, fazendo x = t, então: $t.\binom{1}{-1}$.

Vamos agora a representação gráfica:

Figura 28– Representação da solução geral do sistema.



Fonte: Autor

---

[32] É aquela matriz em que é igual a sua transposta, isto é $A = A^t$.
[33] Mais tarde trataremos de subespaço.

A solução $\binom{1}{0}$ é a solução particular $\binom{0}{1}$ mais um múltiplo de t multiplicado por $\binom{1}{-1}$, como mostra $t\,.\binom{1}{-1}$, ou seja, é a solução particular mais a solução do homogêneo associado. Podemos concluir que o sistema nos dá uma visão do espaço, que mais adiante chamaremos de *espaço vetorial*.

Nesta atividade matemática mostramos o surgimento dos espaços vetoriais, sem preocupação com seus axiomas, os quais são definidos. Trabalhar com este tipo de tarefa facilita o processo de ensino deste objeto matemático, que é apresentado nos livros didáticos de uma maneira abstrata, como Peano apresentara em 1888.

Em seguida os vetores foram utilizados também, para representar os números complexos. Do ponto de vista algébrico outra ideia que impulsionou os vetores foram os escritos na forma x = a + bi + cj + dk, os quais foram denominados de *quatérnios*, que foi uma abstração dos complexos, ou seja algo a mais do que z = a + bi $\in \mathbb{R}^2$, ou seja, porquê não ter algo para o $\mathbb{R}^4$, por exemplo.

Voltemos ao tipo de tarefas T_1 escrita de outro modo, mas a ideia é resolver o sistema e aqui pediremos a solução geral do sistema.

T_9: Determinar a solução geral do sistema linear m x n.

t_9: Determinar a solução geral do sistema linear x + y + z + t = 1. Sistema S_{10}

τ_9: resolução do sistema e representação vetorial.

x = 1 – y – z – t , logo $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ é solução da equação.

Tal solução pode ser escrita na forma $\begin{pmatrix} 1-y-z-t \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ que será chamado de *hiperplano*.

A ideia de se trabalhar com esta tarefa é revelar que existem espaços de dimensões maiores, mas que não podemos utilizar a representação geométrica. A parte representada por $y\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ é a solução do homogêneo x + y + z + t = 0, pois se x = -1, y = 1, z = 0 e t = 0 teremos -1 + 1 + 0 + 0 = 0 (solução do homogêneo associado ao sistema linear) o que válido para os demais seja qual for a combinação formada $\forall y, z, t \in R$, enquanto que $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ é uma solução particular do sistema, pois x = 1, y = 0, z = 0 e t = 0 teremos 1 + 0 + 0 + 0 = 1, logo é solução do sistema linear.

Podemos verificar que como se tem 4 variáveis, logo estamos diante de um problema do R^4, mas a partir da representação do sistema na forma vetorial $\begin{pmatrix} 1-y-z-t \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ podemos notar que este sistema depende de três variáveis, então é um problema do R^3, ou seja, pode ser pensado como um problema nesta dimensão. Portanto podemos definir o espaço solução do sistema como tridimensional.

Lang (2003), conceitua *hiperplanos*: considerando o espaço vetorial R^n. Se v $\neq 0$ um vetor do R^n, então o conjunto dos pontos X do R^n denotado por I^{n-1}, que passa pelo ponto P do R^n e é normal ao vetor **v** tal que <X − P, v> = 0 e denominado hiperplano.

Assim, o hiperplano I^{n-1} dos pontos X qualquer do R^n, X = $\{x_1, ..., x_n\} \subset R^n$, que passa por P = $\{p_1, p_2, ..., p_n\} \subset R^n$ e que seja normal a um vetor v = $\{v_1, v_2, ..., v_n\} \subset R^n$ e que satisfaz <(X – P), v> = 0 para n = 2, temos o plano de equação $v_1x_1 + v_2x_2 + h = 0$ e para n = 3, temos $v_1x_1 + v_2x_2 + v_3x_3 + h = 0$, que é o caso do espaço.

A ideia de ponto, reta, plano estão assoviados a solução de sistemas lineares. A reta e o plano são chamados *variedades lineares* do R^4. O termo *linear* refere-se ao fato de que as equações dessas variedades são do primeiro grau em termos dos parâmetros, assim a reta tem uma dimensão, enquanto que o plano tem duas dimensões. As variedades lineares de três dimensões é que são os *hiperplanos*. O *hiper* refere-se a uma dimensão a menos que a do espaço. Um hiperplano fica determinado por um ponto e por três vetores que dão a sua direção, não sendo paralelos a um mesmo plano. Podemos dizer que uma *razão de ser* de se estudar AL é para compreender os sistemas lineares, ou seja, a gênese da AL esta no estudo qualitativo dos sistemas lineares.

t_{91}: Determinar a solução geral do sistema linear a seguir.

τ_9: resolução do sistema e representação vetorial.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ \quad x_2 + x_3 = 1 \end{cases} \qquad \text{Sistema } S_{11}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 - x_3 \\ x_2 = 1 - x_3 \end{cases}$$

Estamos diante de um sistema indeterminado, mas a solução do sistema $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, então:

$x_2 = 1 - x_3$, $x_3 = x_3$ e $x_1 = 0$. Escrevendo na forma a seguir:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1-x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

t_{92}: Determinar a solução geral do sistema linear por meio do escalonamento de matrizes.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$$ Sistema S_{12}

τ_9: resolução do sistema utilizando o escalonamento e representação vetorial.

Dado o sistema, vamos representá-lo na forma de matriz e escaloná-lo.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$ Multiplicando a primeira equação por (-1) e somando com segunda equação,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

temos:

Com o sistema escalonado, voltaremos a representação na forma de sistema.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 - x_3 \\ x_2 = 1 - x_3 \end{cases}$$ Uma solução do sistema é a terna $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

A solução do sistema se dar por $x_2 = 1 - x_3$, $x_1 = 0$ e $x_3 = x_3$. (x_3 é a nossa variável livre)

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1-x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Na representação é possível se verificar a solução geral do sistema e nela uma solução particular e a do homogêneo associado.

$$\overbrace{\underbrace{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}}_{\textit{Solução particular do sistema}}+\underbrace{\begin{pmatrix}0\\-x_3\\x_3\end{pmatrix}}_{\textit{Solução do homogêneo associado}}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}}^{solução\ \ geral}$$

t_{921}: substituir no sistema a solução geral encontrada em t_{82}.

Observa-se que se colocarmos no sistema sua solução geral, isto é, $\begin{pmatrix}0\\1-x_3\\x_3\end{pmatrix}$, teremos:

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=1\\x_1+2x_2+2x_3=2\end{cases}$$

$$\begin{cases}0+(1-x_3)+x_3=1\\0+2(1-x_3)+2x_3=2\end{cases}$$

O problema envolve três variáveis, mas porá se resolver o sistema depende apenas de x_3, pois fazendo variar a *variável livre* x_3, para qualquer número real (R), obteremos infinitas soluções para o sistema. Observa-se que o sistema tem uma solução *unidimensional* e sempre tem um *homogêneo associado* a ele.

$T_{10:}$ Determinar o sistema homogêneo associado a um sistema.

t_{10}: Determinar o sistema homogêneo associado ao sistema $\begin{cases}x_1+x_2+x_3=1\\x_1+2x_2+2x_3=2\end{cases}$. Sistema S_{13}

τ_{10}: coloca-se o elemento nulo no termo independente (sistema homogêneo). Resolve-se o sistema.

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0\\x_1+2x_2+2x_3=0\end{cases}$$

A subtarefa: $t_{10,1}$: Substitua nas variáveis $x_1 = 0$, $x_2 = -1$ e $x_3 = 1$, no sistema homogêneo, e veja o que acontece. Por quê?

Veremos que é solução do mesmo, como segue:

$$\begin{cases}0+(-1)+1=0\\0+2(-1)+2.1=0\end{cases}$$

Todo sistema linear homogêneo tem pelo menos uma solução que é a nula (solução trivial), ou o múltiplo de uma solução diferente da trivial, que também é solução e pôr fim a soma de duas soluções, que também é solução, como veremos a seguir.

$t_{10,2}$: Substitua valores de $x_3 = t$, na solução geral $\begin{pmatrix} 0 \\ 1-x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ do sistema $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$.

Para t = 1 teremos uma solução, que chamaremos de $S_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1. \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Para t = 2 teremos uma outra solução, que chamaremos de $S_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2. \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$t_{10,3}$: Adicione duas dessas soluções. Qual solução chegou?

Se somarmos $S_1 + S_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

$t_{10,4}$: Substitua esta solução da tarefa t_{11}, isto é, $x_1 = 0$, $x_2 = -1$ e $x_3 = 3$ no sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 + (-1) + 3 \neq 1 \\ 0 + 2(-1) + 2(3) \neq 2 \end{cases}$$

Observamos que a soma de duas soluções não é solução do sistema.

$t_{10,5}$: Encontre 2 soluções do homogêneo associado ao (SH). Em seguida some estas duas soluções e substituas no mesmo S_H.

$$S_H = \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

$$S = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vamos fornecer valores a t, como segue:

$$t=1; S=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}+1.\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix} \; e\; t=2; S=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}+2.\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-2\\2\end{pmatrix}$$

Somando $S_1 + S_2$, temos:

$$\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\-2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-3\\3\end{pmatrix}$$

$t_{10,6}$: Substituindo o resultado de $S_1 + S_2$, no sistema S, temos:

$$S_H=\begin{cases}0+(-3)+(-3)=0\\0+2(-3)+2(-3)=0\end{cases}$$

Concluímos que $S_1 + S_2$ é solução do sistema S_H. Logo, o sistema linear homogêneo tem uma solução nula, enquanto que o sistema não homogêneo não. O múltiplo de uma solução também é solução, enquanto que no não homogêneo não é. A soma de duas solução do homogêneo continua sendo solução para o homogêneo. É interessante notar que as operações com o homogêneo associado é fechado em *relação a operação externa*, pois pegamos uma solução e multiplicamos **t** que é qualquer número real, como mostra.

$$S_H=\left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\in R^3 / x_1=0, x_2=-t, x_3=t, \forall t\in R\right\} \; ou \; S_H=\left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\in R^3 / \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}, t, \forall t\in R\right\}$$

O sistema escrito na forma de matriz por coluna é possível se observar que quando se separa a solução geral em duas partes, ou seja, em solução particular e solução do homogêneo associado, conclui-se que todo o sistema linear tem esta característica.

Iremos utilizar uma outra técnica, que é resolver o sistema por *colunas*. Esta técnica é pouco comum para resolver sistemas lineares, como no exemplo a seguir:

T_3: Represente o sistema linear m x n na forma de matriz.

t_{31}: Represente o sistema linear 2x3 a seguir na forma de matriz

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=1\\x_1+2x_2+2x_3=2\end{cases} \qquad \text{Sistema } S_{13}$$

τ_3: representação na forma matriz coluna o sistema. A θ_1 justifica esta técnica.

Podemos escrevê-lo na forma de matriz, como segue:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} x_2 \\ 2x_2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} x_3 \\ 2x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \therefore\ x_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} ou;$$

$$x_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}+(\mathrm{x}_2+\mathrm{x}_3)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \therefore\ x_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}+(\mathrm{x}_2+\mathrm{x}_3-1)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

t_{31}: Substitua as variáveis x_1 por **t** e (x_2 +x_3 -1) por **s** e calcule a solução do sistema.

Com esta subtarefa propomos substituir variáveis ou a soma delas pelas letras t e s, além de revelar uma tarefa que não esta presente nas escolas.

$$se\ t = x_1\ e\ se\ s = (\mathrm{x}_2+\mathrm{x}_3-1), temos:$$

$$t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}+s\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, onde:$$

$$\begin{cases} t+s=0 \\ t+2s=0 \end{cases}$$

Resolvendo

t = s = 0

Caímos num sistema homogêneo, que tem pelo menos a solução trivial. Se t = 0, então: x_1 = t = 0 e $x_2 + x_3$ - 1 = s = 0, então: $x_2 = 1 - x_3$, que era a solução que tínhamos.

Uma outra tarefa não presente na escola é a resolução por escalonamento por colunas. Resolveremos o mesmo sistema por colunas. Não é muito comum nas obras aplicarmos os *operadores elementares* por *colunas*. Uma tarefa que não está presente nas instituições, mas que é importante mostrar que é possível.

T_{11}: Escalonar o sistema por colunas.

t_{11}: Escalone o sistema a seguir por colunas.

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=1 \\ x_1+2x_2+2x_3=2 \end{cases}$$

Sistema S_{13}

Escrevendo na forma de matriz, onde C_1 é a coluna 1 e C_4 é a coluna 4, temos:

$$\begin{pmatrix} 1111 \\ 1222 \end{pmatrix}$$

$$Fazendo C_1 = C_1 - \frac{1}{2}C_4, temos:$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}111 \\ 0\,222 \end{pmatrix}$$

Observe que o sistema ficou triangular, do mesmo jeito que se pensássemos o problema por linhas. Voltando a forma algébrica de se representar os sistemas, temos:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 0.x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$$

Resolvendo se chega na solução $x_1 = 0$, $x_2 = 1 - x_3$ e $x_3 = t$. Então S = {0, 1 – x_3, t} ou S = {0, 1 – t, t}.

O sistema 3x3 passa a ser resolvido por um 2x2, reduzindo o tamanho do sistema, além de articular saberes como matrizes, operadores elementares por colunas. É interessante notar que o sistema resolvido por esta técnica, apresenta solução mesmo que o primeiro não tivesse. Como t = 0 = x_1 e $x_2 + x_3 - 1 = 0$, temos que:

$x_2 = 1 - x_3$, então:

$x_1 = 0$, $x_2 = 1 - x_3$ e $x_3 = t$ (variável livre). Então S = {0, 1 – x_3, t} ou S = {0, 1 – t, t}. Esta é a solução geral do sistema original. Qual conclusão se chegou?

Podemos pensar no sistema de duas maneiras, ou pela *dualidade*: pensar nas *variáveis* (trabalho com linhas) ou por *equações* (por coluna). No nosso sistema sendo observado por linhas há 3 variáveis logo no R^3, enquanto seu olharmos por coluna, com 2 variáveis problema no R^2.

As matrizes eram uma ferramenta para se resolver sistemas, a partir do estudo qualitativo dos sistemas lineares. Em seguida as matrizes são estudadas como objeto, surge a teoria de matrizes e enfim a AL.

Dado um sistema **S** e se **S** tem solução $\mathbf{X_P}$ (solução particular) e se $\mathbf{X_S = X_P + X_H}$, onde solução $\mathbf{X_H}$ é a solução do homogêneo associado e portanto é uma soma de múltiplos de soluções deste sistema ou X_H é unicamente nula.

Prosseguindo na constituição do MER partiremos para as *operações com matrizes:*

T_1: Determinar a solução do sistema m x n. A razão de ser das operações é justificada pelo estudo qualitativo de sistemas lineares.

t_{111}: Determinar a solução do sistemas 2 x2 a seguir.

$$S_1 \begin{cases} x + y = 2 \\ 2x - y = 1 \end{cases} \quad \text{e} \quad S_2 \begin{cases} x - y = 0 \\ 2x + 3y = 5 \end{cases}$$

τ_{11}: qualquer método de resolução de sistema.

Seja por qual for o método os sistemas S_1 e S_2 tem a mesma solução, pois x = y = 1.

$t_{111,1}$: Somar os sistemas S_1 com o S_2.

A subtarefa $t_{14,1}$ nos faz trabalhar com soma das soluções. Portanto, $S_1 + S_2$ dá:

$\begin{cases} 2x = 2 \\ 4x + 2y = 6 \end{cases}$. Resolvendo este sistema teremos x = y = 1.

$t_{111,2}$: Mudar a variável de modo que **x** fique em função de **y**.

Vamos fazer um mudança de variável de modo que o **x** em função de **y**, com a intenção de tornar o sistema triangular.

Fazendo $y = 2x + t$, pois ao substituir no sistema S_1 irá anular a variável **x**, como segue:

$S_1' \begin{cases} x + (2x + t) = 2 \\ 2x - (2x + t) = 1 \end{cases} \therefore S_1' \begin{cases} 3x + t = 2 \\ -t = 1 \end{cases}$ Como t = -1, logo x = 1, como y = 2.1+(-1)=1.

$t_{111,3}$: Representar do sistema na forma *ampliada* – matriz do sistema

$t_{111,4}$: Adicione S_1 e S_2.

$$s_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$s_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Destaca-se que esta notação é uma notação atual, pois anteriormente a esta os matemáticas representavam os sistemas acima da seguinte forma:

$$S_1 = \begin{array}{c} (x \quad y) \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \end{array} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad S_2 = \begin{array}{c} (x \quad y) \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \end{array} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$ Adicionando S_1 com S_2, temos:

$$\begin{pmatrix} 1+1 & 1-1 \\ 2+2 & -1+3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+0 \\ 1+5 \end{pmatrix}$$

Somamos as variáveis **x** com **x** e **y** com **y**. Concluímos que a adição de matrizes esta *inspirado* nos sistemas lineares. A matriz resultante desta soma será denominada de *matriz soma*. Daí nasce a ideia de soma de matrizes esta muito bem definida, pois só podemos somar matrizes de mesma ordem.

Voltando ao sistema S_1 e o trabalho com mudança de variável, com o intuito de fazer com que o sistema fique mais fácil de resolver, partiremos para o tipo de tarefas T_{12}:

T_{12}: Resolver o sistema linear por mudança de variável.

t_{12}: Resolver o sistema linear a seguir por mudança de variável.

$$S_1\begin{cases} x+y=2 \\ 2x-y=1 \end{cases}$$

τ_{12}: atribuir valores as variáveis **x** e **y** do sistema. A tecnologia continua a θ_1.

Tínhamos atribuído a variável y = 2x + t e agora chamaremos a varável **x** de **s**, ou seja, x = s.

$S_1\begin{cases} x+y=2 \\ 2x-y=1 \end{cases}$ mudando-se as variáveis $\begin{cases} x=s \\ y=2x+t \end{cases}$ escrevendo de outra forma, temos:

$\begin{cases} x=s \\ y-2x=t \end{cases}$ ou ainda $\begin{cases} x=s \\ y=2s+t \end{cases}$ Substituindo em S_1:

$$\begin{cases} s+(2s+t)=2 \\ 2s-(2s+t)=1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 3s+t=2 \\ -t=1 \end{cases} \Longrightarrow S_1\begin{cases} (2+1)s+t=2 \\ (2-2)s-t=1 \end{cases}$$

$t_{12,1}$: Resolver o sistema linear a seguir por mudança de variável, mas utilizando a representação matricial.

$$S_1\begin{cases} x+y=2 \\ 2x-y=1 \end{cases}$$

Usando a representação do sistema e acompanhando passo a passo o que fizemos utilizando sistemas, temos:

$S_1 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ representação do sistema $S_1\begin{cases} x+y=2 \\ 2x-y=1 \end{cases}$

Trabalhando com o sistema de mudança de variável:

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ representação do sistema $\begin{cases} x=s \\ y=2s+t \end{cases}$

Fazendo a combinação, ou seja, substituindo $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ no sistema de mudança de variável, temos:

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ representando a *combinação* $\begin{cases} s+(2s+t)=2 \\ 2s-(2s+t)=1 \end{cases}$

$\begin{pmatrix} (1+2) & 1 \\ (2-2) & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ representando a *combinação* $\begin{cases} (2+1)s+t=2 \\ (2-2)s-t=1 \end{cases}$

Acabamos de revelar a gênese do *produto matricial*, como sendo um problema de *mudança de variável*. Esta ideia já era trabalhada por Cayley (1858), conforme levantamento histórico do início desse capítulo.

T_2: Resolver o sistema linear genérico.

t_{211}: Resolver o sistema linear a seguir por mudança de variável.

Cayley (1858) definiu a multiplicação matricial como sendo a representação do efeito de duas transformações sucessivas. Então propomos a atividade, por meio de tarefa, que não está presente nas obras (livros e textos do saber) são tarefas nas quais os coeficientes são letras. Então, dado os sistemas genéricos, podemos revelar o produto matricial, como segue:

S $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ sistema principal

S’ $\begin{cases} a_1's + b_1't = x \\ a_2's + b_2't = y \end{cases}$ sistema mudança de variável

τ_{211}: combinação dos sistemas: sistemas mudança de variável.

$\begin{cases} a_1(a_1's + b_1't) + b_1(a_2's + b_2't) = c_1 \\ a_2(a_1's + b_1't) + b_2(a_2's + b_2't) = c_2 \end{cases}$ fazendo a combinação, isto é, substituir as variáveis x e y na primeira equação. Agrupando os termos semelhantes, temos:

$$\begin{cases} (a_1a_1' + b_1a_2')s + (a_1b_1' + b_1b_2')t = c_1 \\ (a_2a_1' + b_2a_2')s + (a_2b_1' + b_2b_2')t = c_2 \end{cases}$$

Utilizando a representação matricial, como um registro necessário para entendimento da ideia da *matriz produto*.

Sistema S $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ representação de S $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$

Sistema S’ $\begin{pmatrix} a_1' & b_1' \\ a_2' & b_2' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ representação de S’ $\begin{cases} a_1's + b_1't = x \\ a_2's + b_2't = y \end{cases}$

Fazendo a combinação $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1' & b_1' \\ a_2' & b_2' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$, então a representação da combinação $\begin{cases} a_1(a_1's + b_1't) + b_1(a_2's + b_2't) = c_1 \\ a_2(a_1's + b_1't) + b_2(a_2's + b_2't) = c_2 \end{cases}$. Observe que na representação matricial aparece uma matriz ao lado da outra sem sinal.

$\begin{pmatrix} a_1a_1' + b_1a_2' & a_1b_1' + b_1b_2' \\ a_2a_1' + b_2a_2' & a_2b_1' + b_2b_2' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ representação de $\begin{cases} (a_1a_1' + b_1a_2')s + (a_1b_1' + b_1b_2')t = c_1 \\ (a_2a_1' + b_2a_2')s + (a_2b_1' + b_2b_2')t = c_2 \end{cases}$

Esta tarefa que não encontramos de um modo geral nas instituições leva os alunos a pensarem numa ideia que surge por definição, que é o produto matricial. Logo, é possível se mostrar que a gênese do produto matricial, vem, também, do estudo qualitativo de sistemas lineares. Mostramos com o *alcance da técnica*, que o produto de matrizes não acontece por acaso. É importante notar no sistema S que ocorre uma *transformação*, pois o par (x,y) é transformado no par (c_1,c_2), enquanto que no sistema S’ transformasse o par (s,t) em (x,y).

A grande ideia revelada é que a composição de transformações é o produto das matrizes, portanto estamos no campo das *relações*. Agora podemos dizer que ao aplicarmos uma transformação (mudança de variável) com intuito de obter um sistema mais fácil de resolver. Então do ponto de vista das relações os sistemas lineares são *transformações lineares.*

Institucionalizando, temos: Formalizando a soma e o produto de matrizes.

$A = (a_{ij})_{m \times n} \quad 1 \leq i \leq m \text{ e } 1 \leq j \leq n$

$B = (b_{ij})_{m \times n} \quad 1 \leq i \leq m \text{ e } 1 \leq j \leq n$

Então: $A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{m \times n}$

Para o produto, temos:

$A = (a_{ij})_{m \times n} \quad 1 \leq i \leq m \text{ e } 1 \leq j \leq n$

$B = (b_{ij})_{n \times p} \quad 1 \leq i \leq m \text{ e } 1 \leq j \leq n$

$$AB = (\sum_{k=1}^{n} a_{ik} x b_{ik})_{mxp}$$

Podemos representar da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{mn} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nj} \end{bmatrix}_{nj} =$$

$$\begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \ldots + a_{1n}b_{n1} & \ldots & \cdots & \ldots \\ \ldots & & \cdots & \ldots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \ldots & a_{m1}b_{12} + a_{m2}b_{22} + \ldots + a_{mn}b_{n2} & \cdots & \ldots \end{bmatrix}_{mj}$$

Para que ocorra o produto de matrizes é necessário que o número de colunas da primeira matriz seja igual ao número de linhas da segunda matriz, resultando em uma matriz com a mesma quantidade de linhas da primeira matriz e mesma quantidade de colunas da segunda matriz. O que justifica isto é o *produto escalar* entre dois vetores, pois os vetores tem que ter o mesmo número de elementos, como mostra a representação matricial do sistema apresentado S e S'(sistema mudança de variável).

A ideia de resolver o problema literal é que o aluxo enxergue o produto de um escalar por uma matriz.

T_{13}: Estudar qualitativamente o sistema genérico.

t_{13}: Estudar qualitativamente o sistema genérico a seguir por mudança de variável e representar na forma de matriz.

τ_{13}: substituir as variáveis x e y no sistema e por seguinte, representar na forma de matriz

A ideia do produto escalar por uma matriz, perpassa por um sistema linear, também, como segue:

Dado o sistema S = $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$, vamos substituir a variável x = 2s e y = 2t, valores estes aleatórios, ou seja, poderia ser um outro qualquer.

x = 2s pode ser escrito na forma escalar, isto é: $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ matriz escalar

y = 2t pode ser escrito na forma escalar, isto é: $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ matriz escalar

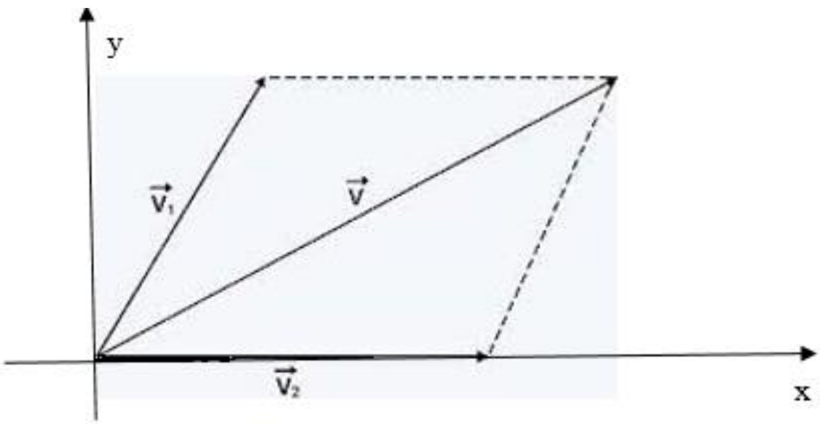
$$\begin{cases} a_1(2s) + b_1(2t) = c_1 \\ a_2(2s) + b_2(2t) = c_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (2a_1)s + (2b_1)t = c_1 \\ (2a_2)s + (2b_2)t = c_2 \end{cases} ==> \begin{pmatrix} 2a_1 & 2b_1 \\ 2a_2 & 2b_2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$$

A *tecnologia* continua sendo o estudo qualitativo de sistemas lineares, a qual vem permeando os tipos de tarefas desta OMD.

As ideias que acabamos de estudar podem ser interpretadas pensando em *vetores*. Então voltemos a atividade matemática com vetor. A regra do paralelogramo já era conhecida desde a Grécia antiga, pois tal regra era utilizada na Física nas ideias de força e velocidade. Seu estudo era feito com uso da Geometria para auxiliar na resolução do problema físico. Em meados do século XVII já se dava ênfase nas quantidades escalares para representar posição e peso (apesar de peso ser uma grandeza vetorial) e a quantidades vetoriais que representavam velocidade, aceleração e momento, por exemplo (Figura 29).

Figura 29 – Regra do paralelogramo.



Fonte: Autor

Então do ponto de vista algébrico, no R^2, mas pode ser pensado para o R^n temos:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \quad \vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \textit{então } \vec{v} + \vec{u} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \text{logo } \vec{v} + \vec{u} = \begin{pmatrix} v_1 + u_1 \\ v_2 + u_2 \end{pmatrix}$$

$$\forall \vec{v} \; e \; \vec{u} \in R$$

T_{14}: Estudar o sistema como um conjunto de vetores.

t_{14}: Estudar o sistema a seguir como um conjunto de vetores.

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x - y = 4 \end{cases}$$

τ_{14}: representação vetorial do sistema

Na representação matricial teremos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Interpretando a matriz como um conjunto de vetores, então:

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \therefore x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \therefore \begin{pmatrix} 1.x \\ 2.x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1.y \\ -1.y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \therefore \begin{pmatrix} x + y \\ 2.x - y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

O que fizemos foi multiplicar as matrizes de um outro modo, só utilizando as colunas, como segue:

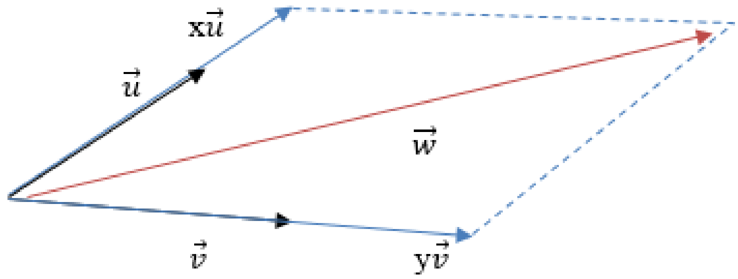
$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \therefore x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Como podemos pensar nas matrizes como conjunto de vetores, logo genericamente, temos x$\vec{u}$ + y$\vec{v}$ = $\vec{w}$. Com isto surge as ideias que aparecem nos livros que é interpretar as matrizes como linhas (pensando nas equações) ou como colunas (pensando com as variáveis), o mesmo vale para os vetores. Estamos diante de uma *dualidade,* ou seja, um problema que se resolve por coluna tem uma relação direta com um problema que se resolve por linha. Graficamente podemos representar do seguinte modo, pela regra do paralelogramo, produto de escalar (**x** e **y**) por vetor $\vec{u} \; e \; \vec{v}$, portanto x$\vec{u}$ e y$\vec{v}$ e soma de vetores x$\vec{u}$ + y$\vec{v}$, obtendo como resultado o vetor $\vec{w}$.

Podemos pensar do seguinte modo, quais são os *escalares* $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ que que multiplicados, respectivamente pelos vetores $\vec{u} \; e \; \vec{v} \; que \; somados \; produzem \; \vec{w}$? Dizemos então que $\vec{w}$ é $uma \; combinação \; linear$ de $\vec{u}$ e $\vec{v}$, logo, um sistema tem solução quando o vetor independente é combinação linear das colunas, por outro lado quando não existem os escalares o sistema não tem solução.

$$x\vec{u} + y\vec{v} = \vec{w}$$

Figura 30- Motivação geométrica para representar uma combinação linear.



Fonte: Autor

Generalizando, temos:

Dado um sistema linear $A_{m \times n} X_{n \times 1} = B_{m \times 1}$

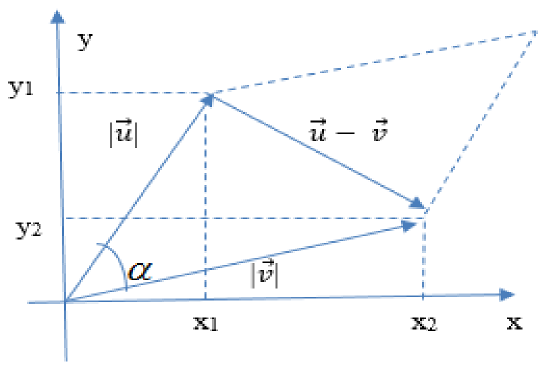
Onde A tem vários vetores, como A= $[A^{(1)} A^{(2)} \cdots A^{(n)}]_{m \times n}$ com várias colunas (n colunas), onde cada $A^{(j)} = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ . \\ . \\ a_{mj} \end{pmatrix}$ vetor n dimensional. $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ b_n \end{pmatrix}$. Escrevendo na forma $x_1A^{(1)} + x_2A^{(2)} + \ldots\ldots + x_nA^{(n)} = \hat{B}$, que é o que chamamos de combinação linear – é uma soma de múltiplos de vetores. A pergunta para esta tarefa é saber se $\hat{B}$ (lê-se: B chapéu) faz parte deste espaço destas combinações lineares? Quando $\hat{B}$ = B, temos a combinação linear, caso contrário não é. O min $|B - \hat{B}|$ se for igual a zero o sistema tem solução caso contrário o sistema não tem solução.

Dados dois vetores podemos a partir destes com mais um vetor formarmos um triângulo e com mais um paralelogramo. A partir desta determinação podemos concluir (T_{15}):

T_{15}: Determinar o produto escalar $x_1x_2 + y_1y_2$.

t_{15}: A partir da Figura 31 e utilizando a Lei dos cossenos determinar $x_1x_2 + y_1y_2$.

Figura 31- Representação e utilização da regra do paralelogramo.



Fonte: Autor

t_{15}: utilização da Lei dos cossenos

θ_4: Lei dos cossenos

Sejam $\vec{u} = (x_1, y_1)$

$\vec{v} = (x_2, y_2)$

Pela Lei dos cossenos, temos:

$|\vec{u} - \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\overrightarrow{v}|^2 - 2\,|\overrightarrow{u}|.|\overrightarrow{v}|.\cos\alpha$

O comprimento de $||\vec{u}||\ e\ |\overrightarrow{v}|$, pelo Teorema de Pitágoras são:

$|\overrightarrow{u}|^2 = x_1^2 + y_1^2 \quad e \quad |\overrightarrow{v}|^2 = x_2^2 + y_2^2$

Então:

$\vec{u} - \vec{v} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$

$|\vec{u} - \vec{v}|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$

Pela Lei dos Cossenos, tem-se:

$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 - 2.\ \sqrt{x_2^2 + y_2^2}.\sqrt{x_1^2 + y_1^2}.\cos\alpha$

Desenvolvendo e simplificando os dois membros, temos:

$-2(x_1x_2 + y_1y_2) = -2.\ \sqrt{x_2^2 + y_2^2}.\sqrt{x_1^2 + y_1^2}.\cos\alpha$ simplificando o -2 nos dois membros, temos:

$(x_1x_2 + y_1y_2) = \sqrt{x_2^2 + y_2^2}.\sqrt{x_1^2 + y_1^2}.\cos\alpha$ Então podemos dizer que $(x_1x_2 + y_1y_2)$ é o *produto escalar.*

$<\vec{u}, \vec{v}> = |\overrightarrow{u}|.\ |\overrightarrow{v}|.\ \cos\alpha$

$<\vec{u}, \vec{v}> = u\ .\ v^t$ (representação por escalar) $= (x_2 \quad y_2)\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = x_2x_1 + y_2y_1$ (*Produto escalar usual*). Pois *fazer um produto escalar é fazer um produto matricial*.

Nesta tarefa esta a gênese do produto escalar, criado no século XIX por Grassmann, pois esta operação entre vetores permitia simplificar o uso de coordenadas, o produto escalar de **u.v** de dois vetores do plano.

Em geral tem-se:

$\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \cdot \\ u_n \end{pmatrix}$ e $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \cdot \\ v_n \end{pmatrix}$ Então: $<\vec{u}, \vec{v}> = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$

$t_{15,1}$: O que acontece quando $\alpha = 90^o$?

Quando temos $|\overrightarrow{u}|.|\overrightarrow{v}|.\ \cos\alpha = 0$ ou $|\overrightarrow{u}|.|\overrightarrow{v}| = 0$ *ou* $\cos\alpha = 0$, pois $\alpha = 90^o$, logo podemos dizer que os vetores são *ortogonais*. Então podemos dizer que o produto escalar entre os vetores $\overrightarrow{u}\ e\ \overrightarrow{v}$ é 0 (zero), ou seja, $<\vec{u}, \vec{v}> = 0$.

Seja agora o vetor $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ 0 \end{pmatrix}$ então <0, u> = 0. Conclui-se que o vetor nulo é ortogonal a qualquer vetor. Na AL a ortogonalidade significa falar em *produto escalar nulo*, enquanto que do ponto de vista da Geometria é falar em ângulo de 90º.

Para Bruter (1998) Arquimedes (287-212 a. C.) começaram a estudar forças por vetores, onde a direção é aonde se exerce o esforço e o comprimento se dá pela intensidade da força. Na Física estudavam o trabalho de uma força, como sendo o produto da intensidade desta força pelo comprimento do caminho percorrido ao longo do qual se exerce a força. Na matemática isto quer dizer um produto escalar.

A ideia de se estudar vetores perpassa, também, pela questão Q_3: *Pensando no sistema de 2 equações e 3 variáveis a seguir por linha. Qual comparação você faz com o produto matricial*?

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases}$$

$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ A primeira equação é o produto escalar da primeira linha da primeira matriz pela matriz coluna igualado a zero, e o produto escalar da segunda linha da primeira matriz pela matriz coluna igualado a zero, interpretando o sistema como cada equação como um produto escalar.

$<L_1,v> = 0$

$<L_2,v> = 0$

Pode então haver uma relação entre os sistemas lineares e os vetores. Pensando nesta ideia temos Q_4: *Qual relação você faz com o sistema linear homogêneo e o estudo de vetores*?

A sub-tarefa $t_{15,2}$ cria condições para que o aluno responda esta pergunta, bem próxima das ideias de Frobenius ao tratar os sistemas homogêneos.

$t_{15,2}$: Resolver o sistema a seguir pelo método do escalonamento.

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases}$$

τ_{12}: Técnica do escalonamento.

Podemos deduzir pelo exemplo que um sistema homogêneo se dá por encontrar um vetor que seja *ortogonal* a cada linha da matriz, pois o produto escalar é zero.

Resolvendo o sistema, temos:

$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} L_2 = L_2 - 2L_1 \therefore \begin{pmatrix} 1 & - & 1 & 1 \\ 0 & 3 - & & 3 \end{pmatrix}$ (representação da matriz linha equivalente). Voltando ao sistema:

$\begin{cases} x - y = -z \\ y = z \end{cases}$ Logo a solução x = 0, y = z e z = z, então S = {(0,z,z)} ou S = {z(0,1,1)} ou S ={(0,1,1)}.

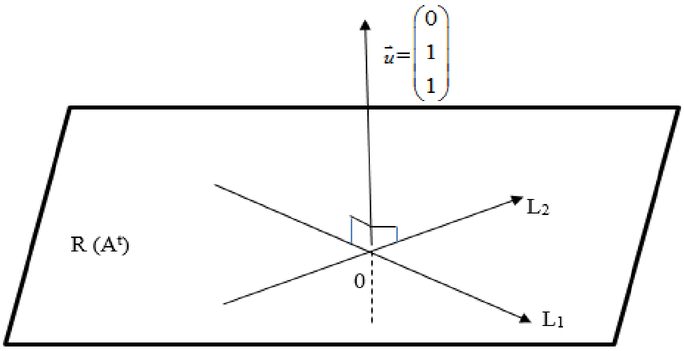
Portanto (0,1,1) é ortogonal aos vetores (1,-1,1) e (2,1,-1), que s.

$t_{15,3}$: Represente geometricamente o que você acabou de encontrar.

Vamos representar geometricamente, sendo L_1: *Linha da matriz 1* e L_2: *Linha da matriz 2*

$\vec{u}$: Conjunto solução $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ e todos os seus múltiplos, que estão na direção representada.

Figura 32 - Representação do vetor ortogonal $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ em relação a L_1 e L_2.



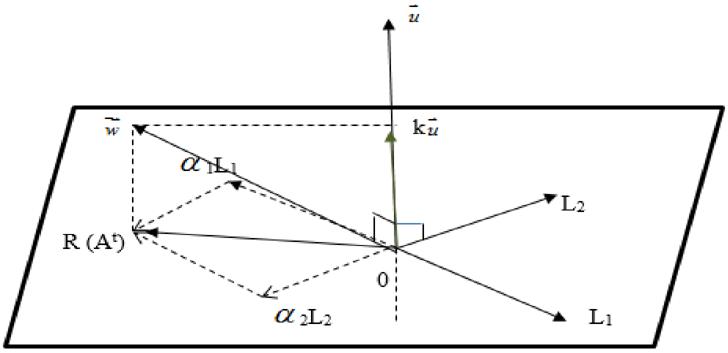
Fonte: Autor

Na Figura 32 podemos observar que $\vec{u}$ é ortogonal a L_1 e a L_2. Diremos então que $\vec{u}$ é o *núcleo da matriz ou kernel da matriz*, que é diferente do vazio. O espaço que trabalhamos tem 3 componentes (x,y,z), ou seja o R^3 que é a soma de um plano com reta, logo existe um *espaço linha*, que é o espaço gerado pelas linhas da matriz, representado por $R(A^t)$ *gerado de A transposto*, e está no plano. Podemos dizer que o kernel da matriz A é o conjunto de todos os vetores do espaço, tal que A. $\vec{u}$ = 0.

O N (A) = Ker (A) = $\{u \in E / Au=0\}$ e daí $E = R(A^t) \oplus N(A)$. O espaço E é uma *soma direta* pelo gerado de A transposto adicionado ao núcleo da matriz. O termo soma direta é utilizado, pois os espaços não tem nada em comum a não ser o ponto, que é o 0 (zero). Logo $R(A^t) \cap N(A) = \{0\}$.

A matriz A $= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ *quebra o espaço em duas* partes no *gerado de A transposto* $R(A^t)$ que forma um plano e em N(A), que forma uma reta. Podemos concluir que dado um vetor qualquer ou ele está na linha ou no núcleo. Mas se ele não esta na linha ou na coluna ele é obtido pela soma dos dois. O vetor $\vec{w}$ é formado por uma combinação $\vec{w} = \alpha_1 \vec{L_1} + \alpha_2 \vec{L_2} + k\vec{u}$. Na Figura 33 é possível observamos as projeções de $\vec{w}$ no plano e no N(A).

Figura 33- Representação geométrica do vetor $\vec{w}$.



Fonte: Autor

Caracterizamos este momento como exploratório da técnica, pois com a reconstrução da OM apareceram novas sub tarefas capazes de relativos as técnicas que utilizamos, sendo estas sub tarefas relativas a interpretação, a justificação e o alcance destas técnicas.

O ensino da matemática se torna complexo, pois ao reconstruirmos os saberes, como no caso da ortogonalidade, ocorre por *conveniência didática*, que estes saberes são *quebrados*, e ficam então *desarticulados* dos demais objetos. O que mostramos foi um problema de grande interesse teórico matemático, pois os sistemas lineares, que depois abstraímos para as matrizes quebram o espaço em dois espaços menores e que são ortogonais.

Podemos produzir uma generalização do que estudamos, dado pelo momento de institucionalizar. Q_5: *É possível generalizar este processo*? Momento de institucionalização.

Generalizando:

$<\vec{u},\vec{v}> = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$, onde $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ . \\ . \\ u_n \end{pmatrix}$ se multiplicarmos por α , teremos α . $\vec{u} = \begin{pmatrix} \alpha u_1 \\ \alpha u_2 \\ . \\ . \\ \alpha u_n \end{pmatrix}$

$$<\alpha\, \vec{u},\vec{v}> = \alpha <\vec{u},\vec{v}> = \alpha \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$$

$$<\vec{u},\vec{u}> = \sum_{i=1}^{n} u_i u_i = \sum_{i=1}^{n} u^2 \geq 0$$

$u_i = 0$ logo $\sum_{i=1}^{n} u_i{}^2 = 0$

$<\vec{u},\vec{u}> = \|u^2\|$; $<\vec{u},\vec{u}> = 0 \Leftrightarrow u = 0$, onde $\|u^2\|$ é a norma.

Seja agora u, v e w $\in$ R^4

$<\vec{u}, \vec{v}+\vec{w}> = ?$

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ . \\ . \\ u_n \end{pmatrix}; \vec{v}+\vec{w} = \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \\ . \\ . \\ v_n + w_n \end{pmatrix}$$

$$\sum_{i=1}^{n} u_i(v_i + w_i) = \sum_{i=1}^{n}(u_i v_i + u_i w_i) = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i + \sum_{i=1}^{n} u_i w_i = <\vec{u}, \vec{v}> + <\vec{u}, \vec{w}>$$

Em resumo:

i) *Positividade*: $<\vec{u}, \vec{u}> = ||u^2||$, ou seja, um produto de $\vec{u}.\vec{u}$ é o comprimento dele elevado ao quadrado. Se $<\vec{u}, \vec{u}> = 0 \Leftrightarrow u = 0$ (vetor nulo), fora isso será positivo.

ii) *Simetria*: $<\vec{u}, \vec{v}> = <\vec{v}, \vec{u}>$ comutativo

iii) *Homogeneidade*: $<\alpha\, \vec{u}, \vec{v}> = <\vec{u}, \alpha\, \vec{v}> = \alpha\, <\vec{u}, \vec{v}>$ $\forall \alpha \in R$ preserva a linearidade

iv) *Distributividade*: $<\vec{u}, \vec{v}+\vec{w}> = <\vec{u}, \vec{v}> + <\vec{u}, \vec{w}>$ vale a distributividade do produto escalar.

Dizemos então que o *produto interno* ou *produto escalar* é quando se tem uma aplicação que leva um par de vetores e leva num escalar, quando se faz esta aplicação com as propriedades acima.

Um espaço vetorial de dimensão finita no qual está definido um produto interno é um espaço vetorial euclidiano. O produto escalar sobre o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ dado a seguir é um produto interno.

$$\langle (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \rangle := x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

Uma outra atividade que foi apresentada na parte histórica, fora a de Fermat e Descartes ao estudarem às curvas. A partir de uma equação como podemos encontrar sua equação reduzida. Iremos mostrar passagens na técnica que as obras não mostram, portanto desarticulando com saberes já ensinados. A razão de ser da T_{16} relacionar o estudo das curvas com matrizes.

T_{16}: Representar matricialmente a equação de uma curva.

t_{16}: Representar matricialmente a equação de uma curva $x^2 + y^2 + 2xy + 3x + 4y + 5 = 0$.

τ_{16}: Representação matricial da equação da curva.

A equação geral da cônica apresentada nos livros didáticos de AL é esta $ax^2 + by^2 + 2cxy + dx + ey + f = 0$, mas procuraremos justificar as técnicas utilizadas.

Então trabalhemos com a quadrática dada:

$x^2 + y^2 + 2xy + 3x + 4y + 5 = 0$ Fazendo $2xy = xy + xy$

$x^2 + y^2 + xy + xy + 3x + 4y + 5 = 0$ Colocando x e y em evidência

$x(x + y) + y(y + x) + 3x + 4y + 5 = 0$ Representando na forma matricial

$\left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x+y \\ x+y \end{pmatrix} \right\rangle + \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle + 5 = 0$ Representação matricial utilizando produto escalar

$$\left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle + \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle + 5 = 0$$

$$(x \quad y)^t \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (x \quad y)^t \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + 5 = 0$$

$X^tAX + X^tB + C = 0$

Onde X é um vetor, X^t vetor transposto (matriz), A e B são matrizes e C é uma constante. Formas quadráticas ou uma equação do 2º com **n** variáveis (quádrica ou quadrática) pode ser escrito na forma matricial.

Para fazermos uma quadrática, temos:

$(x \quad y) \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}}_{\textit{operador simétrico}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x^2 + 2y^2$ - equação na forma reduzida.

Quando o operador é uma *matriz simétrica*, logo temos uma *matriz diagonal*. Voltemos a equação da quádrica $\left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle + \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle + 5 = 0$, então:

Vamos partir para uma subtarefa. t_{171}: Determinar a imagem dos vetores $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, sendo T a função: $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, T: $R^2 \rightarrow R^2$ onde $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ x+y \end{pmatrix}$.

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \; e \; T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

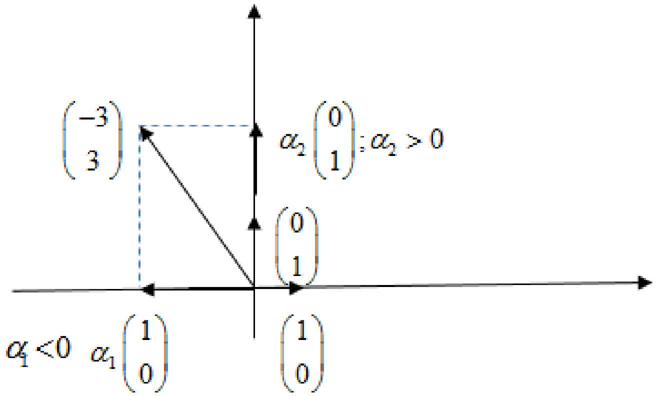
t_{161}: Aplicar a função **T** em $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = xT\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + yT\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Compreende-se que todo vetor R^2 do domínio pode ser escrito a partir dos vetores $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, enquanto que os vetores R² da imagem podem ser escritos a partir dos vetores $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}$.

Criamos uma condição para um maior entendimento da situação, representando graficamente:

Figura 34 - Representação gráfica da solução do sistema.



Fonte: Autor

Formalizando espaços vetoriais

A partir das tarefas anteriormente, propostas para os alunos, nesse momento pensamos ser viável axiomatizarmos as ideias então vistas. Então, dado **V** um conjunto, sendo $V \neq \phi$ munido de uma operação adição, então o *Grupo* (V, +) e k um corpo, então V é um *espaço vetorial* sobre k se satisfeitas todos as propriedades, como segue, para o conjunto R^n, no qual estão definidas as operações adição e multiplicação por escalar, isto é:

Partindo de $V = R^n$, então $\forall$ u, v, w $\in R^n$, u + v$\in R^n$ e $\forall$ α, β $\in R$, $\forall$ u $\in R^n$, α u $\in R^n$ é verificar-se as seguintes propriedades, onde A (adição) e M (multiplicação):

A_1 : u + v = v + u (fechamento) $\forall$ u, v $\in R^n$

A_2 : (u + v) + w = u + (v + w) (associativa)

A_3 : $\exists\ 0 \in R^n$, $\forall$ u $\in R^n$, u + 0 = u (elemento neutro)

A_4 : $\forall$u$\in R^n$, $\exists$(-u) $\in R^n$, u + (-u) = 0 (elemento simétrico)

M_1 : (α + β)u = αu + βu (distributividade dos escalares)

M_2 : α(u + v) = αu + αv (distributividade do com os vetores)

M_3 : (αβ)u = α(βu) (associatividade escalar)

M_4 : 1u = u (unidade do corpo)

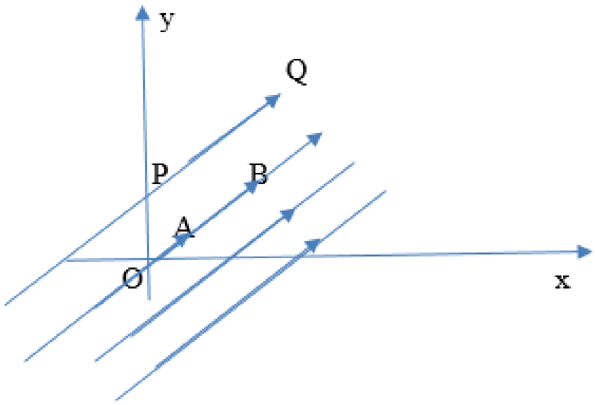
Essas operações podem se levar a pensar em v escrito da seguinte maneira:

$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ...+ \alpha_n v_n$ ou $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$, logo v$\in$V.

É importante notar que estas operações são válidas para os vetores, sendo α e β elementos de um corpo K. A operação de A_1 até A_4 determinam um grupo abeliano. Do M_1 ao M_4 são operações externas pois se trabalha com o conjunto V e se opera com elementos α e $\beta \in R$ (corpo R). Para nós agora o vetor são elementos de um espaço vetorial, que é um grupo aditivo abeliano munido de uma lei de composição externa a partir de um *corpo* K=R, onde é válido distributividade dos escalares, distributividade com os vetores, associatividade escalar e que a unidade do corpo multiplicado por um elemento do conjunto dá como resultado o próprio elemento do conjunto. O *vetor* é estudado em seu *contexto algébrico*, ou seja, não tem direção e nem sentido.

No nosso sistema didático $X = \phi$, pensemos que haja o questionamento Q_6: Por que os vetores partem da origem em matemática?

Figura 35 - Representação geométrica de vetor no R^2.



Fonte: Autor

Supondo O =(0,0) e A = (1,1) e B = (2,2), então $\overrightarrow{AB}$ = (2,2) – (1,1) = (1,1). Caso pegarmos os vetores P = (7,9) e Q = (8,10), então $\overrightarrow{PQ} = (1,1)$.

Q_7: Então $\overrightarrow{AB} = (1,1)$ é igual a $\overrightarrow{PQ} = (1,1)$? Geometricamente são iguais?

A resposta é não. Para que não haja confusão na matemática os vetores são completamente abstratos, pois consideramos $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{PQ}$ como conjunto de *segmentos orientados equipolentes*, que são os segmentos que tem a mesma direção, mesmo tamanho e mesmo sentido. A partir da visão geométrica o vetor é todo segmento que esta em retas paralelas, que tem o mesmo comprimento, sentido e direção constitui um só vetor.

Surge a ideia do vetor centrado na origem, pois trabalhando-se com $\overrightarrow{OA}$ = (1,1) – (0,0) = (1,1). Podemos dizer que o vetor $\overrightarrow{OA}$ a partir da visão geométrica, representa todos os vetores representados na Figura 35, mas na realizada representam apenas um. Considerando os vetores, que é um conjunto de segmentos orientados equipolentes, *este constrói uma correspondência biunívoca de cada ponto do espaço ao vetor*. O vetor na matemática, tem um sistema de eixos e ira partir da origem até um determinando ponto e iremos representar por uma seta que parte da origem até este ponto. Então o vetor $\overline{OA}$ é o vetor que representa todos.

Assim como a AL os espaços vetoriais tiveram suas gêneses no estudo qualitativo de sistemas lineares. Voltemos ao tipo de tarefa T_1, mas com outro enunciado, logo chamaremos de T_{18}.

A razão de ser se dá em abordar o estudo qualitativo de sistemas e a divisão do espaço.

T_1: Determinar a solução do sistema linear.

t_{1111}: Determinar a solução do sistema a seguir geometricamente.

$$\begin{cases} x+y=1 \\ 2x+2y=2 \end{cases} \qquad \text{Sistema } S_{14}$$

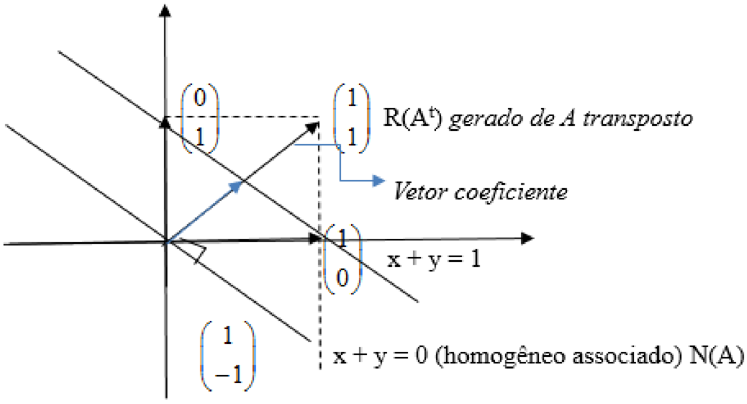
τ_{1111} : representar o sistema na forma vetorial e geométrica isolando-se uma variável.

$$\begin{cases} x+y=1 \\ 0x+0y=0 \end{cases}$$

x + y = 1

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 1-x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{solução} \\ \text{particular}}} + x \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{solução geral do} \\ \text{homogêneo} \\ \text{(núcleo da matriz)}}}$$

Figura 36- Representação geométrica da geração de qualquer vetor a partir da solução particular e a do homogêneo.



Fonte: Autor desta tese.

Estamos estudando qualitativamente os sistemas lineares, escrevendo-o de outra forma, que é a nossa tecnologia θ_1. Importante atentar que temos que na reta x + y = 0 (homogêneo associado ao sistema), não temos como solução só $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ e sim múltiplos deste $x\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, logo temos toda a reta. O vetor $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, assim como o vetor $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ são vetores da reta, pois tem extremidade na reta x + y = 1. O vetor $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ (vetor coeficiente), que também, parte da origem é o vetor dos coeficientes do sistema, que podemos representar $(1 \;\; 1)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = 1$. Atentemos que um múltiplo de (1 1), ou seja um múltiplo deste vetor, é solução do sistema e forma um ângulo de 90º (ortogonais) com o núcleo da matriz, que é o homogêneo associado, que passa pela origem.

Notemos que $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ é o espaço gerado pelo trasposto da matriz (1 1) - $R(A^t)$ *gerado de A transposto*. A solução de menor tamanho, que chamaremos $\begin{pmatrix}x_m\\y_m\end{pmatrix}$ pode ser expressa por uma *dilatação*, *contração* ou *mudança de sentido do vetores* $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$, isto é, a solução de menor tamanho é uma *combinação linear* dos vetores $\begin{pmatrix}x_m\\y_m\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$, que no nosso exemplo é $\begin{pmatrix}1/2\\1/2\end{pmatrix}$. Este é ponto da reta mais próximo da origem é uma solução que está no gerado de A^t, ou seja é obtida a partir das linhas da matriz do sistema.

Esta representação geométrica nos faz compreender o que é um espaço vetorial, pois temos solução do homogêneo associado e temos solução de $R(A^t)$ que são disjuntos, pois são ortogonais. Se temos a solução do espaço $x + y = 0$ e o espaço gerado de A transposto, então temos todo o espaço, que é o denominado de *espaço vetorial*.

Subespaço Vetorial

Definição: Sendo **V** um espaço vetorial sobre um corpo **K** e **S** um conjunto, sendo $\mathbf{S} \neq \varnothing$, e $S \subset V$. Diz-se que **S** é um subespaço vetorial quando:

(1) $\forall$ u, v $\in S$; (u + v) $\in S$

(2) $\forall$ u $\in S$ e $\alpha \in K$; αu $\in S$

(3) $0 \in S$; $0 \in V$

Conforme já vimos neste trabalho o sistema divide o espaço em dois subespaços, que é o núcleo da matriz (sistema homogêneo) e o outro é o gerado pelas linhas da matriz do sistema $R(A^t)$, e que são ortogonais entre si.

Combinação Linear

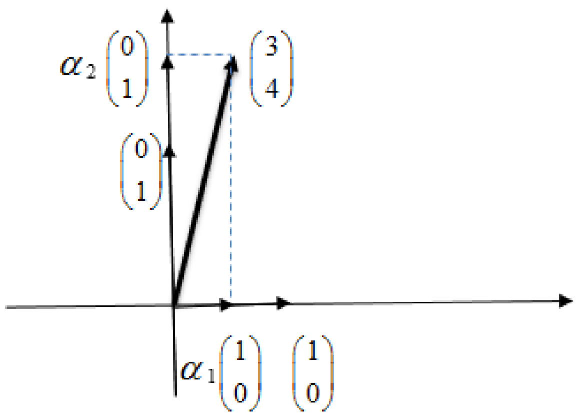
Apresentamos um aspecto mais formal das combinações lineares, pois já desenvolvemos tarefas em que esse objeto foi trabalhado em sistemas lineares (institucionalização). Definição: Sejam $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, ..., \mathbf{v_n}$ vetores quaisquer de um espaço vetorial V e $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ números reais. Então todo vetor $\mathbf{v} \in V$ da forma $\mathbf{v} = \alpha_1\mathbf{v_1} + \alpha_2\mathbf{v_2} + ... + \alpha_n\mathbf{v_n}$ é um elemento de V ao qual chamamos combinação linear de $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, ..., \mathbf{v_n}$.

Podemos ainda dizer que $v \in [v_1, v_2, ...,v_n]$, ou seja, v pertence ao gerado pelas combinações lineares de $v_1, v_2, ...,v_n$. Então, $[v_1, v_2, ...,v_n] \subseteq V$ (o subespaço gerado $[v_1, v_2, ...,v_n]$ está contido em V ou é o próprio V). A interpretação que se dá é que quando se varia os α, por conseguinte variamos o v, ou não pois poderemos variar os α e obtermos o mesmo V.

Utilizando um gráfico, podemos exemplificar a subtarefa $t_{16,1}$ a seguir:

$t_{16,1}$: Representar geometricamente o vetor $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, como uma combinação dos vetores $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Verificar se v é combinação linear (CL) de v_1 e v_2. O registro geométrico nos ajuda a visualizar a tarefa. $t_{16,2}$: verificar se $\mathbf{v}$ é CL dos vetores $\mathbf{v_1}$ e $\mathbf{v_2}$. Os registros de representações permitem o acesso, o estudo das propriedades e características do objeto matemático a ser estudado, e funcionam enquanto ferramentas para compreensão do mesmo (ALMOULOUD, 2007).

Figura 37- Representação da Combinação Linear.



Fonte: Autor desta tese.

A ideia é a mesma que os gregos usavam, que era de *traçar um paralelogramo* (regra do paralelogramo). Traçamos uma paralela ao vetor $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e uma paralela ao vetor $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (linhas pontilhadas) em seguida dilatamos ou comprimimos estes utilizando os operadores α_1 e α_2, pois ser combinação linear é essencialmente uma soma de múltiplos escalares.

Então existem α_1 e α_2 que satisfaz:

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Portanto determina-se que $\alpha_1 = 3$ e $\alpha_2 = 4$.

O conjunto das CL é que se chama *espaço gerado pelos vetores*, isto é, o conjunto das CL de $v_1, v_2, v_3, ..., v_k$ é chamado gerado por $v_1, v_2, v_3, ..., v_k$ e utiliza-se a notação $[v_1, v_2, v_3, ...,v_k]$. Então, qualquer vetor $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ pode ser gerado pela combinação dos vetores $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, em outras palavras o R^2 pode ser gerado pelos vetores $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

O problema que pode sai desta ideia esta no tipo de tarefas T_{19} que estamos trabalhando, dado um vetor este é CL de um conjunto de vetores?

T_{17}: Verificar se um dado vetor e CL de um conjunto de vetores.

t_{17}: Dado um determinado vetor, por exemplo $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ele é CL do de vetores $v \in \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$?

τ_1: resolução de sistemas lineares.

θ_1: estudo qualitativo de sistemas lineares (método da eliminação e substituição).

$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ Então, resolvendo o sistema, encontraremos $\alpha = -1$ e $\beta = 2$, logo o vetor $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ é combinação linear dos vetores $\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$. A interpretação que se dá nesta tarefa é que o vetor $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ é representado pelos escalares -1 e 2 em relação ao gerador B = $\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$, já que o vetor $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ pertence ao gerado B.

$t_{17,1}$: Dado um determinado vetor, por exemplo $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ele é CL do conjunto de vetores

$v \in \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right]$?

τ_1 : resolução de sistemas lineares.

$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Resolvendo o sistema verifica-se que não existe os escalares, que satisfaçam o sistema logo não é combinação linear. Podemos notar a importância dos escalares no sistema linear.

Um outro tipo de tarefas que não aparece no livro didático analisado mais adiante é para se verificar se **v** pertence ao subespaço gerado por **S**.

Vamos ao tipo de tarefas $T_{16,}$ que nada mais é que o mesmo tipo de tarefas T_{19} perguntada de outra maneira.

T_{18}: Dado um vetor **v**$\in R^n$, verifique se ele pertence ao subespaço gerado S.

T_{18}: Dado o vetor do R^4, $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, e o seguinte subespaço gerado $S = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$. Verifique se **v** $\in$ **S**.

τ_1 : resolução de sistemas lineares.

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \therefore \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 3 \\ \alpha_2 = 4 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \therefore \alpha_2 = 4 \text{ e } \alpha_1 = -1.$$

As coordenadas de V em relação a S é $[V]_B = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$. Podemos concluir que o vetor $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ esta no R^4, mas este vetor identificado no sistema, esta na realidade no R^2, ou seja só tem 2 (duas) *dimensões*.

$t_{18,1}$: Dado o subespaço $S = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \right] \in R^3$ $e\ v = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ verifique se v $\in$ S?

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Escalone o sistema que você encontrou?

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 3 - \alpha_3 \\ \quad\alpha_2 = 1 + \alpha_3 \end{cases}$$

O alcance da técnica, justificada por θ_1, de resolução de sistemas, esta presente mais uma vez. Dado α_3 (variável livre), podemos determinar as outras duas variáveis, logo se $\alpha_3 = 0 \Rightarrow \alpha_2 = 1$ e $\alpha_1 = 2$, então: $[V]_B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Caso $\alpha_3 = -1 \Rightarrow \alpha_2 = 0$ e $\alpha_1 = 4$, então: $[V]_B = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Isto cria uma *ambiguidade*, pois há solução para o sistema, mas que não é apenas uma, mas *infinitas*, pois o *sistema é possível e indeterminado*, portanto há um infinidade de combinações lineares (podemos considerar essas como a tecnologia do estudo de LD, LI, base e dimensão). Quando isto acontece o sistema é dito *linearmente dependente* (*LD)*, ou seja, toda vez que o sistema provoca ambiguidade este é LD, logo $v \in S$, pois é CL de v_1, v_2, v_3.

Caso o sistema seja impossível não há ambiguidade, pois o sistema não tem solução, logo não se tem CL, logo não temos como revelar se são *dependentes*. Então, quando quisermos saber se um vetor é LD, precisamos trabalhar com um vetor que temos certeza que é CL deles, que é o vetor nulo, pois o sistema tem pelo menos uma solução, que é a solução trivial, quando os escalares são todos iguais a zero. No sistema onde os termos independentes são todos nulos, se tivermos um escalar diferente de zero, então teremos uma infinidade de soluções, logo o sistema é dependente. Caso o sistema não seja dependente ele é chamado de linearmente independente (LI), ou seja, é não dependente ou só tem uma solução, a nula, que é o que nos interessa.

Todo sistema dependente é originado de um sistema independente, pois um vetor sozinho este é independente, mas quando se pensa em dois vetores e se eles estão em retas diferentes eles são independentes, mas se estão na mesma reta, logo são dependentes, pois um é múltiplo do outro.

$t_{18,2}$: Dado o subespaço $S = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \right] \in R^3$ $e\ v = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ verifique se $v \in S$ utilizando o método do escalonamento?

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \right]$$

Escreve-se o sistema em forma de linhas na matriz e depois se escalona por ser uma técnica instituída. O que *justifica* este método do escalonamento é que por este método se faz as combinações das linhas, logo são combinações lineares. Com isto se tivermos uma linha que seja combinação da outra esta irá se anular, pois anulamos os elementos das linhas de baixo de modo a tornar o sistema triangular. Na proposta de OMR temos aqui uma *tarefa inversa* de onde partimos de uma tarefa, que recai em um sistema e com a resposta deste podemos determinar se é LD ou LI.

Conclui-se que o gerado $S = \left[\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\5\end{pmatrix}\right]$ é o mesmo que se ter $\left[\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\-3\end{pmatrix}\right]$, então:

$S = \left[\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\5\end{pmatrix}\right] = \left[\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\-3\end{pmatrix}\right]$, isto quer dizer que v esta em S, ou $v = \begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix} \in$ S, pois há a ambiguidade, logo é LD. A combinação em S que tem três componentes é ambíguo, mas quando se considera o outro sistema de 2 componentes continua sendo LD?

$t_{181,1}$: Agora se verificarmos se $v = \begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix} \in \left[\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\-3\end{pmatrix}\right]$ teremos:

$$\alpha_1 \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix}0\\0\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix} \text{ então } \begin{cases}1.\alpha_1 + 0.\alpha_2 = 3\\ 1.\alpha_1 + 0.\alpha_2 = 3\\ 2\alpha_1 - 3\alpha_2 = 3\end{cases} \text{ e } \begin{cases}\alpha_1 = 3\\ 2\alpha_1 - 3\alpha_2 = 3\end{cases} \text{ logo } \begin{cases}\alpha_1 = 3\\ \alpha_2 = 1\end{cases} \text{ R. sim}$$

Q_8: Qual conclusão você chegou em relação a esse sistema?

O sistema só tem uma solução, logo não tem ambiguidade, então o *sistema é possível e determinado* logo é LI. O novo vetor no novo sistema S é $[V]_{S'} = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$, isto é, embora o vetor seja do R^3 este é localizado neste sistema a partir dos escalares $\begin{cases}\alpha_1 = 3\\ \alpha_2 = 1\end{cases}$, pois quando se fala em *coordenadas dos vetores* são na realidade os *escalares*, que multiplicados pelos vetores irão forma-lo , ou seja, é a localização deles segundo um sistema de vetores, portanto são os escalares. Podemos então dizer que $\left[\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\-3\end{pmatrix}\right]$ é uma *base*, pois é um *sistema independente e é o menor gerador que se tem*, enquanto que a *dimensão* é 2, que é o número de elementos desta *base*. Qualquer conjunto que tenha mais elementos que a base este é obrigatoriamente LD.

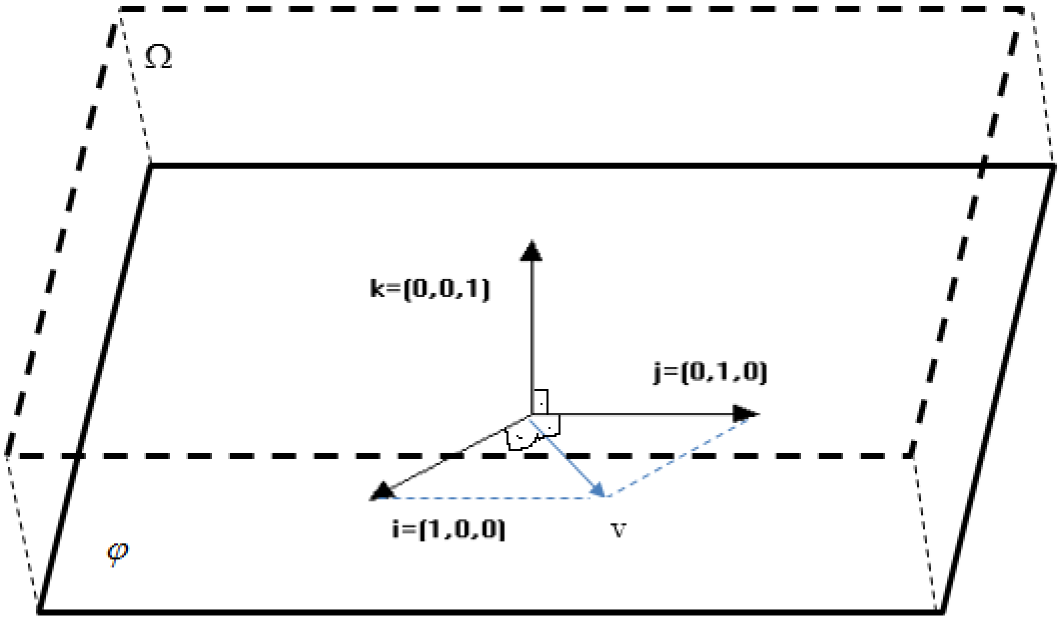
A partir das ideias apresentadas até então, voltemos aos espaços vetoriais.

A T_{19}: Verifique se V é um espaço vetorial.

t_{19}: Sendo V = R^3, verifique se $\vec{k}$ é um espaço vetorial, conforme Figura 38.

τ_{19}: utilizar as propriedades de espaços vetoriais

Figura 38 – Representação do espaço com vetores.



Fonte: Autor desta tese.

Sendo $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$ vetores ortogonais entre si, onde i e j estão em φ, $\vec{v}$ um vetor e $\Omega // \varphi$ (planos paralelos), então $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j}$, (x e y escalares), logo $\vec{v}$ é formado pelos múltiplos dos vetores $\vec{i}$ e $\vec{j}$ $\in \varphi$, portanto temos um vetor no próprio plano que é gerado pelos outros dois, gerando assim o R^2 e não o R^3. Assim, o vetor $\vec{k} \in \Omega$, que está saindo do plano não é combinação linear de $\vec{i}$ e $\vec{j}$. Os vetores do plano φ que podem ser formados pelas CL de $\vec{i}$ e $\vec{j}$ formam um subespaço vetorial. Os vetores do plano φ se passarem para o *plano* Ω, isto é, se forem *transladado* para o plano Ω, estes deixam de ser subespaço, pois os vetores não passam mais pela origem, logo são denominados de *variedade linear* (VL). Podemos então dizer que *variedade linear* é um *subespaço transladado.*

A VL são todos os vetores da seguinte forma $\overrightarrow{VL} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ é um vetor do R^2, pois para definirmos um vetor desta variedade basta que se defina os valores de x e y. $\overrightarrow{VL}$ não é um subespaço vetorial, pois na soma $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ não teremos o vetor nulo, pois a terceira componente vai ser igual a 1. $\overrightarrow{VL}$ esta associado a base $x\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$. Voltando aos sistemas lineares,

temos $\underbrace{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}}_{\substack{solução\\particular}}+\underbrace{x\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}}_{\substack{solução\ do\\ \text{hom}ogêneo\\associado}}$. A *base* do conjunto solução é revelada pela *base do homogêneo associado*. Todas as soluções do sistema passam a ser dada como *combinação linear* da *base* $\underbrace{x\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}}_{\substack{solução\ do\\ \text{hom}ogêneo\\associado}}$ de *dimensão* 2, já que a solução do homogêneo, quando esta não for só a trivial este gera uma base mais a solução particular $\underbrace{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}}_{\substack{solução\\particular}}$. Então a solução de um sistema linear não homogêneo é uma VL.

Nesta OMD o professor pode dirigir a seguinte observação: Seja $\vec{v}$ um subespaço vetorial, então da seguinte forma:

$\vec{v}=x\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\therefore\vec{v}=\begin{pmatrix}x\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\y\\0\end{pmatrix}\therefore\vec{v}=\begin{pmatrix}x\\y\\0\end{pmatrix}\in[v_1,v_2]$. Logo $\{v_1, v_2\}$ gerador de um subespaço, $E\subseteq V$. Então, $\{v_1, v_2\}$ é uma base de **E** (espaço vetorial) se, e somente se, todo vetor $v\in E$ se escreve de modo único como CL de v_1 e v_2.

Isto implica, caso v = 0, então $\alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2=0$ só é possível se $\alpha_1=\alpha_2=0$, pela unicidade da CL. Quando o vetor nulo se escreve de modo único como CL de v_1 e v_2, então $\{v_1, v_2\}$ é dito *linearmente independente* LI. Dai os livros textos adotarem tal atividade matemática, de que para se mostrar que é LI basta verificar se o sistema homogêneo tem solução única, já que esse tem pelo menos esta.

É importante notar que partimos do *estudo qualitativo dos sistemas lineares* e para verificar se é ou não uma base, voltamos aos sistemas lineares.

T_{20}: Resolver o sistema m x n homogêneo.

t20: Resolver o sistema $\begin{cases} x+y+z-t=0 \\ x+2y-z+2t=0 \\ 2x-y-z+t=0 \end{cases}$. Sistema S14

τ_1: resolução de sistemas sistemas.

θ_1: estudo qualitativo de sistemas.

Representando vetorialmente o sistema, tem-se:

$$x\underset{v_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}} + y\underset{v_2}{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}} + z\underset{v_3}{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}} + t\underset{v_4}{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Escalonando o sistema, temos:

$$\begin{cases} x+y+z-t=0 \\ \quad 2y-z+2t=0 \\ \qquad -9z+t=0 \end{cases}$$

Obtemos como solução: se t = 0, então z = y = x = 0, S {(0,0,0,0,)}

se t = 3, então z = 4, y = -1 e x = 0, S = {(0, -1, 4,3)}

Substitua os resultados na representação vetorial:

$$0\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$, isto é:

0.1-1.1+4.(1)+3.(-1) = 0

0.1-1.2+4.(-1)+3.2 = 0

0.2-1.(-1) + 4. (-1) + 3.1 = 0

Revela-se que trabalhar com sistema e trabalhar com combinação linear. É notório notar que $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ esta no gerado $x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, logo podemos pensar que $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ é CL de $x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ só que não se escreve de maneira única. Como temos uma solução que é diferente da nula, logo os vetores são LD, mas geram um espaço. Como são LD e geram o espaço, logo não é uma base do espaço.

Q9: Mas qual é a base do espaço?

Podemos determinar no próprio sistema. Importante notar que quando se resolve o sistema por coluna, os vetores são do R³, $x\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$ enquanto que por linha os vetores são do R^4, $\begin{cases}x+y+z-t=0\\ \quad y-2z+3t=0\\ \qquad -9z+12t=0\end{cases}$ logo por linha o vetor solução tem 4 componentes, já que para cada valor de t, teremos uma solução diferente para o sistema. Portanto precisamos de 4 componentes para encontrar uma resposta no R³, isto é, quando fazemos $\underset{x}{0}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}+\underset{y}{(-1)}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}+\underset{z}{4}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}+\underset{t}{3}\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ encontramos elementos do domínio que tem como imagem o vetor nulo que pertence ao R³, isto é, existe uma relação entre os escalares x, y, z, e t e o termo independente e é ai que se tem a noção de *transformação linear*, pois (0,-1,4,3) levam no vetor nulo (0,0,0), assim como o (0,0,0,0) levam no (0,0,0), logo o espaço coluna não é LI, pois não podemos escrever de maneira única, isto é, como gera ambiguidade é LD ou ainda, se o sistema tem várias soluções, então o termo independente é CL de $x\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$.

Observamos que a coluna da matriz não muda o que muda são os valores de x, y, z e t. Conclui-se que temos espaço linha (espaço gerado pelas linhas do sistema) e temos o espaço coluna (espaço gerado pelas colunas do sistema), logo gera uma *dualidade*, pois temos coisas diferentes, mas produzem o mesmo resultado. Esta atividade matemática revela a *eficácia* do sistema linear homogêneo.

Enfocamos nessa proposta de MER que temos um gênero de tarefas para se estudar a disciplina AL em um curso de graduação em Matemática, que foi estudar qualitativamente os sistemas lineares, por ser uma tecnologia potente, isto é, têm um amplo alcance. Foi importante notar que no estudo histórico epistemológico as ideias de D´Alembert, Frobenius, Dodgson, Cayley, Grassmman, Hamilton, Peano entre outros, que estão presentes no modelo.

Nossa proposta de MER, nos deu um entendimento mínimo sobre uma OMD referente ao ensino de AL, que foi caracterizado como um PER solitário. Esse MER nos deu subsídios para de certa forma "aplicar" em uma turma de graduando em Matemática, enfocando a ideia da modelização, proposta na TAD.

4.3 CONSIDERAÇÕES SOBRE O NOSSA PROPOSTA DE MER

A potencialidade de nossa proposta de modelo, que para reformulação de fenômenos transpositivos sobre o ensino de alguns objetos da disciplina AL, nos revelou a possibilidade de sustentar um desenho e experimentar alguns itinerários didáticos a partir de sistemas de tarefas, desencadeadas pelo gênero de tarefas estudar qualitativamente sistemas lineares. Nossa investigação em didática nos fez criar um modelo, em que usamos objetos do ensino médio para desenvolver o estudo de AL e que não estivéssemos assujeitados a instituições dominantes como os livros didáticos; mas a fontes históricas nos deram bons indícios de como (re) construir essa OMD, assim como as notas de aula de Guerra (2014), algumas constantes nos (ANEXO A, B, C, D, E, F, G, H, I, J).

Nossa proposta do MER foi apoiado nas seguintes ideias: modelo epistemológico de referência, modelo alternativo, proposta de aplicação de um PER no nível superior, de autores espanhóis como Pilar Bolea, Joseph Gascón, Sierra Delgado e Fonseca Bon, que nos serviu de fundamentação base para a construção do modelo.

A estruturação da proposta foi baseada em notas de aula do Professor Dr. Renato Guerra, em 2014, o qual ministrou no IEMCI, a disciplina Tópicos Especiais I, do PPGEM do IEMCI/UFPA, como uma disciplina optativa para os alunos do mestrado acadêmico e doutorado e de informações contidas em nosso equipamento praxeológico. Esta disciplina propôs um estudo de AL, utilizando como ideia articuladora para as tarefas o estudo qualitativo de sistemas lineares.

A ideia da disciplina era fazer um estudo da AL a partir de um saber escolar, partindo de práticas com sistemas lineares, sem uma visão axiomática. Portanto foi trabalhado um *modelo epistemológico de referência local,* no sentido meta matemático, em relação ao saber Guerra (2014), já que a gênese desta disciplina são os sistemas lineares e o problema do auto valor e auto vetor. Então o curso teve uma perspectiva de trazer a AL para um mundo dos sistemas lineares, que alterou nosso EP, pois houve uma mudança de relação com o objeto, logo houve uma formação. A ideia foi realizar, a partir deste modelo local, um curso de formação para graduandos em Licenciatura em Matemática do IFPA (nosso PER), que foi reconstruído já que há condições outras para que acontecesse o curso, ou seja, como este modelo vive no IFPA.

As notas de aula nos fez estruturar uma OMD de onde partimos do estudo qualitativo de sistemas lineares para desencadearmos o estudo das matrizes, relacionamos com os espaços vetoriais, até chegarmos no estudo de base e dimensão do espaço. Tal estudo nos revelou a potencialidade do objeto sistemas lineares, já que este é uma das problemáticas da AL. A importância dos sistemas lineares homogêneos, no estudo das combinações, LI, e Kernel da matriz.

As ideias do modelo foi em dar um curso de AL para graduandos de matemática, voltado para o ensino básico, mas com impacto direto na formação de professores, já que o estudo qualitativo não é abordado naquele nível de ensino, e por meio de um sistemas de tarefas irmos engendrando às práticas, revelando a transacionalidade desse objeto.

Demos ênfase nos sistemas lineares homogêneos, pois vimos que eles são fundamentais no estudos dos objetos LD, LI, base e espaços vetoriais. Um tipo de tarefa que nos chamou muita atenção foi a T_6: Mostrar a partir de um sistema genérico que o método da adição (iii) é uma abstração do método da substituição e eliminação. Os tipos de tarefas que trabalham com sistemas genéricos é possível, por exemplo, se deduzir o método da eliminação e substituição.

Constatou-se que a tarefa que enfocaram a solução geométrica ao sistema, foi possível se verificar que o sistema divide o espaço em dois subespaços, que é o núcleo da matriz (sistema homogêneo) e o outro é o gerado pelas linhas da matriz do sistema $R(A^t)$, e que são ortogonais entre si, foi uma importante relação com matrizes, algo que nos chamou muita atenção, nas aulas de Guerra (2014) e no estudo histórico que fizemos.

Outra importante ideia é a gênese da soma e do produto matricial, que também vem dos sistemas lineares, situação esta que não está presente em obras nem do ensino básico e nem do superior, assim como em nosso equipamento praxeológico.

A proposta de MER que temos de certa forma a priori, como uma nova proposta praxeológica para o ensino de AL, nos serviu para ministrar um curso de AL de 60horas/aula, num período de 5 meses, no IFPA, por meio do (PER) e comparar com o nosso modelo dito dominante nos cursos de AL ministrados no curso de Licenciatura em Matemática do IFPA. O MER proposto sugere possibilidades de se ensinar alguns elementos da AL de um modo menos formal, sugerindo possibilidades de um processo didático de modelização desta disciplina.

Este MER nos permitiu descrever uma OMD baseado em uma tecnologia que justifica a técnica utilizada em vários tipos de tarefas, que é o estudo qualitativo de sistemas. Portanto, o bloco do *saber*, isto é, o bloco tecnológico-teórico esta presente pois justifica as praxeologias desenvolvidas no modelo.

Revelamos a potencialidade do saber, que é nossa tecnologia, *estudo qualitativo de sistemas,* perpassa pelo gênero de tarefa: *estudar sistemas lineares.* A tecnologia que apresentamos neste modelo foi fundamental e justifica o estudo de objetos da AL como matrizes, espaços vetoriais, subespaços, bases e dimensão, pois foi possível se observar a AL perpassa por este objeto. Sendo assim estamos diante de OMD Regional, pois nossas tarefas estão associadas a um componente tecnológico e houve a presença de diferente técnicas para cada tipo de tarefas com a possibilidade de discernir critérios entre elas (BON, 2011).

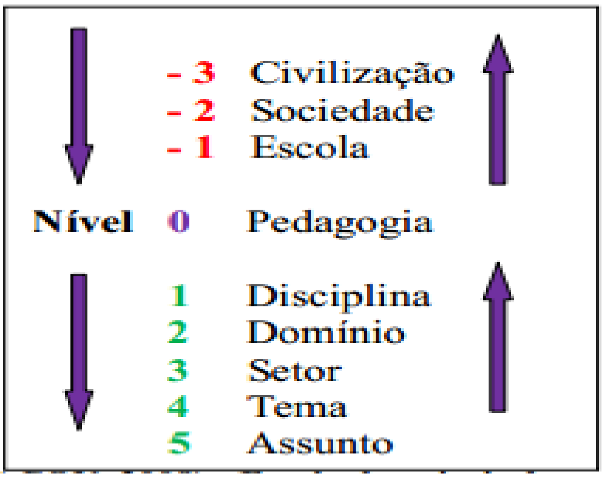
Para Delgado (2006) a unidade de análise dos processos didáticos deve conter uma OD escolar que permita construir, no mínimo, uma OML relativamente completa. Com efeito, uma OML pode ser reconstruída *artificialmente* na instituição escolar como o resultado final de um processo de ampliações e completações progressivas que, partindo de uma praxeologia pontual, passe por uma série de praxeologias intermediarias geradas sucessivamente por um determinado desenvolvimento evolutivo das questões problemáticas e os tipos de tarefas associados que serão as *razões de ser* da OML no IFPA.

Este MER cumpre funções na análise didática que são menos conhecidas e portanto, menos estudadas e que queremos abordar de um modo mais prático e menos formal. Este modelo nos servirá no capítulo de análise, para analisar e questionar explicitamente a *epistemologia espontânea do professor*, que de um modo geral é um espelho do que esta nos livros e portanto, puro reflexo do modelo epistemológico dominante na instituição escolar, no nosso caso no IFPA.

Nossa OMD é utilizada quando uma pessoa estuda uma OM com fins didáticos. Nossa OM preconiza um sistema de tarefas, que foi elaborada pelos autores desse trabalho. Apresentamos tipos de tarefas, tarefas e técnicas, articuladas entre si para que os alunos a utilizem de maneira efetiva. Caso consideremos o professor como diretor de estudo e o aluno como estudante, então podemos diferenciar a praxeologia didática da qual o professor se utiliza de *praxeologia docente* e a do aluno como *praxeologia discente*, havendo assim uma cooperação tanto do professor quanto do aluno.

Postulamos ser muitas as condições e restrições que explicam o caráter dominante da AL ser ensinada nas instituições com enfoque estritamente formalista. As relação entre as OM e OD, segundo Chevallard (2002) são definidas como fenômeno de *co-determinação*, pois situa um determinado *saber* em uma escala hierárquica na qual cada nível se refere a uma realidade e determina a ecologia dessas organizações. Estes são definidos em níveis genéricos (-3,-2,-1,0) e para os níveis mais específicos (1,2,3,4,5), conforme Figura 39.

Figura 39 - Escala dos níveis de co-determinação didática.



Fonte: Chacón (2008, p. 73).

Pensamos nas restrições do nível civilização para sociedade é que a sociedade exige um tempo para o ensino de matemática em uma IES, logo os elementos do saber são traduzidos em *modelos* diria concretos, ou seja, isto se ensina assim e os livros didáticos preparam suas OM neste estilo.

As restrições entre escola e pedagogia no ensino superior se encontram *atomizadas*, pois as atividades são isoladas e portanto, desarticuladas com outros saberes, pois, segundo Garcia (2007), a atividade matemática se dá pela realização rotineira de micro tarefas, que de um modo geral são incapazes de dominar técnicas amplas e flexíveis que levem os alunos de encontro ao saber.

Restrições provenientes dos níveis 1 a 5, conforme Figura 39, se dão, inicialmente, em adequar a atividade na instituição de ensino, a experimentação de um MER da AL, pois a mesma é apresentada de forma formalista; restrições em aplicar a ideia de modelização, onde nosso caso o aluno ao manusear os sistemas lineares alcançam as transformações lineares, durante o percurso de estudo, logo não houve uma algoritimização do processo; restrição proveniente da ideia de que todo saber ensinado é inquestionável e definitivo e restrições impostas pelo tempo que temos para ensinar, portanto o tempo didático.

Relacionando as OM com os níveis de co-determinação didática podemos dizer que uma OM global corresponde a identificação do *domínio* de estudo, a OM regional ao *setor*, a OM local ao *tema* e a OM pontual ao *assunto*. O MER apresentado neste capítulo encontra-se no nível de setor, e ao apresentarmos uma justificativa da tarefa, onde de posse desta tecnologia ao aplicarmos em um processo de estudo nos permitiu revelar o grau do conhecimento matemático de futuros professores desta disciplina, quando este estuda objetos matemáticos para elaborar ou reelaborar OMD.

Em nosso MER o marco tecnológico-teórico que engloba todas as técnicas necessárias para o enfrentamento do novo conjunto de tarefas, onde as técnicas utilizadas são confiáveis, econômicas, são pertinentes, já que o discurso tecnológico ajuda na explicação das técnicas, implicando em uma tecnologia inteligível para outras indivíduos da instituição, permitindo que a técnica habite institucionalmente.

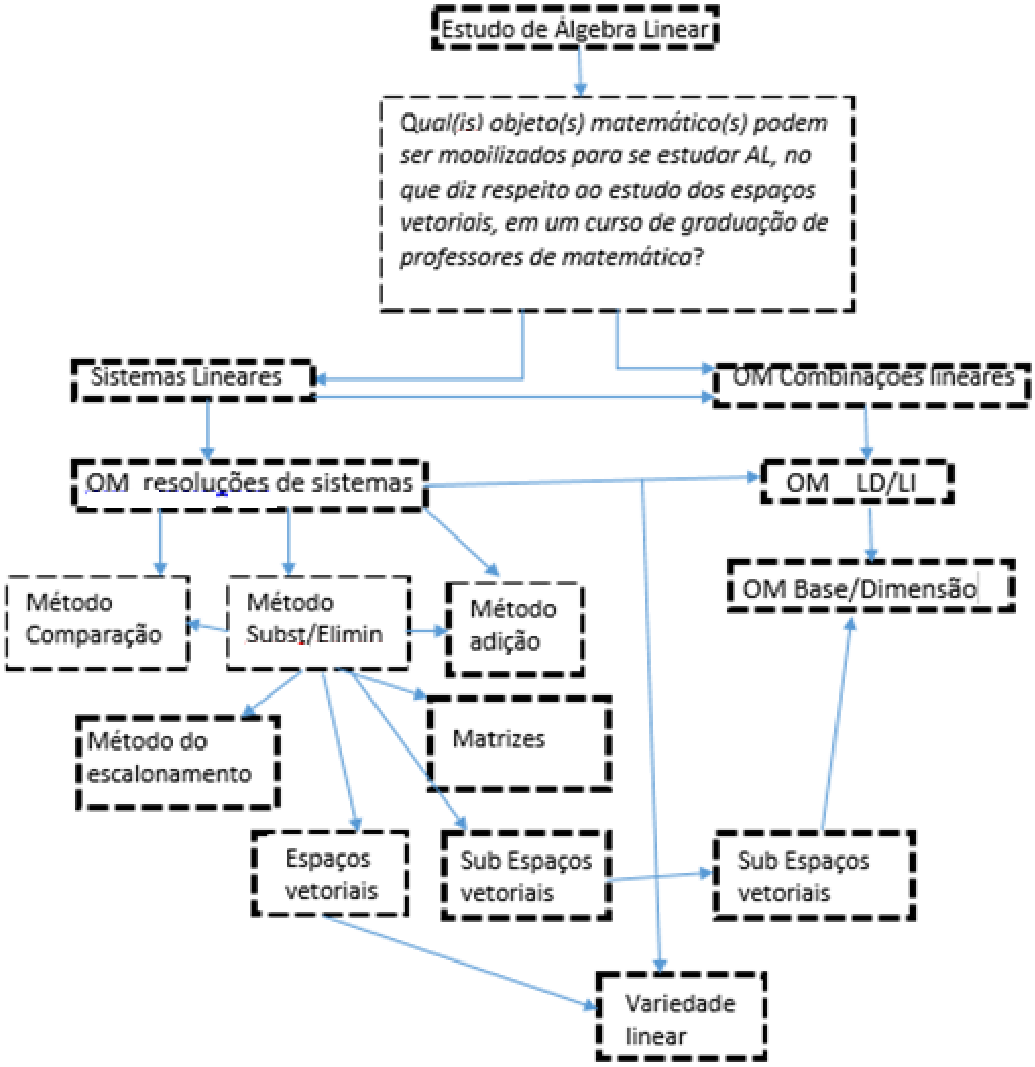
O bloco do *logos* presente no MER esta contemplado no terceiro postulado antropológico se refere à *ecologia das tarefas e das técnicas*, isto é, das condições e das restrições que permitem ou não a produção e a utilização nas instituições, pois a técnica de solução de sistemas pelo método da substituição e eliminação existe na instituição IFPA, e apareceu *compreensível*, *legível* e *justificada*.

Para Almouloud (2007), a praxeologia associada a um saber é a junção de dois blocos já estudados: saber-fazer e saber, sendo que a ecologia refere-se às condições de sua construção e vida nas instituições de ensino que a produzem, utilizam ou transpõem. Consideram-se aqui as condições de sobrevivência de um saber e de um saber-fazer em analogia a um estudo ecológico: qual o habitat? Qual o nicho? Qual o papel deste saber ou saber-fazer na "cadeia alimentar"? Tais respostas ajudam na compreensão na organização matemática determinada por esta praxeologia.

Finalmente, nosso modelo apresenta traços fortes da proposta de Delgado (2006) quando trata do MER e do problema da desarticulação entre objetos matemáticos, pois considera o MER fundamental para articular as tarefas, pois há a intenção de tornar o *saber matemático* em *saber ensinado*. A ideia do MER foi minorar as limitações das atividades matemáticas no que diz respeito ao estudo de AL, e por meio do MER provocar articulações por intermédio da presença da tecnologia que justifica a técnica, pois foram construídas outras praxeologias matemáticas, propiciado por meio de tarefas o que possibilitou a construção do *saber* de uma forma mais *econômica*.

Nosso modelo epistemológico foi problematizado, mas faz-se necessário considerar que os saberes matemáticos, objeto de ensino nas instituições de ensino superior, não estão prontos e acabados. Apresentamos de forma esquemática nosso MER (Figura 40).

Figura 40 – Esquema de conexões das OMD.



Fonte: Autor desta tese.

No próximo capitulo, nós faremos a análise de duas organizações proxeologicas relacionadas com nosso MER.

CAPITULO V – O MER E A ANÁLISE DE DUAS ORGANIZAÇÔES PRAXEOLÓGICAS

O *modelo popular* das matemáticas é um modelo epistemológico geral que, segundo o matemático Thurston (1994), é o *modelo dominante* nas instituições onde se manipula o saber matemático, incluindo especialmente as instituições universitárias e a comunidade produtora do conhecimento matemático. Ainda para tal modelo reduz a atividade matemática a série do tipo definição – especulação – teorema e prova (CALLEJO, 2002).

Ao construirmos nossa proposta do MER, referente ao estudo de AL, nos municiamos de um *dispositivo didático*, que por meio de uma OMD, nos servirá de referência ao analisarmos o livro texto utilizado no IFPA, no curso de Licenciatura de Matemática, e em três textos do saber dos professores que ministram a disciplina AL na instituição IFPA, sendo assim, nos permitirá revelar possíveis modelos epistemológicos sobre o ensino de AL presentes no IFPA.

Na ausência de orientações curriculares mais consolidadas, o livro didático é a opção didática que o professor tem para elaboração de seu texto do saber, portanto é uma das maiores fontes de aquisição do saber. Pelo que pude constatar no IFPA, entre os 2 professores (o autor dessa tese mais um colega) que ministram AL, o livro é a principal referência para elaboração do texto do saber no ensino superior, isto é, sobre o saber a ser ensinado.

O livro didático é a principal ferramenta do professor e para os alunos é uma fonte de informação e para realização de tarefas. Segundo Catalán (2002), no livro há um modelo de atividade matemática institucionalizada que é o meio que qualquer pessoa entra em contato com a OM. Portanto, diante da importância que o livro utilizado para ministrar AL no IFPA tem, resolvemos analisa-lo a partir do nosso MER.

Nossa análise se dará entre a codeterminação entre a OM e a OD, portando OMD, por acreditarmos que as mesmas não se separam nem do objeto que se quer estudar e nem da organização para que aconteça tal estudo. Tomaremos como unidade de análise praxeológica Almouloud (2015): t, τ ,θ e Θ, identificando estas componentes, já que estes são os integrantes da OM. As categorias de análise se darão a partir do que propõe Almouloud (2015), quando cria uma metodologia de análise de matérias didáticos. Destacaremos os principais pontos: análise ecológica que trata **O** objeto de saber faz parte das recomendações curriculares para a Educação Superior? Está presente nos livros didáticos? Como é apresentado e com qual finalidade? Esse objeto de saber é efetivamente trabalhado na escola? Se sim, em quais condições? Se não, quais são os motivos para ser deixado de lado? Almouloud (2015) e análise praxeológica que trata em: avaliar as t, τ ,θ .

Introduzir o modelo de uma nova OMD para o ensino de Al, nos permitiu verificar se há articulação entre dependência linear, independência linear, combinação linear, espaços vetoriais com os sistemas lineares. *As praxeologias matemáticas, em termos de tarefas e técnicas, que levam os alunos ao encontro dos sistemas lineares são articuladas com os demais objetos de AL, num fazer de complexidade crescente? As praxeologias matemáticas que levam os alunos ao encontro dos espaços vetoriais requerem a noção de estudo qualitativo de seitas lineares? As OM do principal livro texto utilizados como referência por professores no curso de Licenciatura em Matemática do IFPA apresentam articulações e integrações de praxeológicas que favoreçam um fazer mínimo racional, ou se caracteriza pela pura aplicação de definições e conceitos abstratos*?

5.1 OMD DA OBRA: ALFREDO STEINBRUCH E PAULO WINTERLE. ÁLGEBRA LINEAR. 2º EDIÇÃO, 1987 – MAKRON BOOKS-SP

Iniciamos pela escolha do livro. Este é a obra principal adotado no IFPA para se ministrar AL no Curso de Licenciatura em Matemática, disciplina ministrada no 4º semestre, logo se trata de um problema concreto, pois esta obra faz parte do milieu desse sistema didático S'(Y, ϕ, O'_1), onde Y = pesquisador desta tese, O'_1 é a obra Alfredo Steinbruch e Paulo Winterle. Álgebra Linear. 2º Edição, 1987.

Segundo Chevallard (1998), não há um *mundo institucional ideal*, no qual as atividades humanas sejam coordenadas por praxeologias bem apropriadas que permitam realizar todas as tarefas desejadas de uma maneira eficaz, segura e inteligente, pois estas organizações praxeológicas envelhecem perdem seus créditos. Portando devemos constituir novas organizações, necessárias ao melhor funcionamento de uma determinada instituição, em consequência dos novos tipos de tarefas.

Usaremos as seguintes notações Ti (tipos de tarefas), T_{ij} (subtipos de tarefas) t_{ij} (tarefas, onde **i** indica o tipo de tarefas que esta relacionado e **j** a numeração da tarefa), t_{ijk} (**ij** indicam o T_{ij} e **k** é a numeração da tarefa), τ_i (técnica que esta relacionada a uma ou mais de uma T_i), θ_i (tecnologia) e Θ_i (teoria)**,** para representar os tipos de tarefas, as tarefas, a tecnologia e a respectiva teoria.

A obra inicia com estudo de vetores, sem evocar os sistemas lineares, portanto inicia por algo novo para os alunos, parte dos estudo de espaços vetoriais, espaços vetoriais euclidianos, transformações lineares, operadores lineares, vetores próprios e valores próprios, formas quádricas e finaliza com o apêndice que contém matrizes, determinantes e sistemas lineares, objetos estes exigidos pelo Projeto Político Pedagógico (PPC) do curso de Licenciatura em Matemática.

A finalidade do capítulo 1 (capítulos da obra em análise O'_1), que trata do estudo de vetores, propiciou revisar a noção de vetor no R^2 e no R^3 e suas propriedades. Apresenta vetor geometricamente, uma semi reta, vetor oposto, vetor nulo e o unitário. Em seguida, na (p. 3) trabalha as operações com vetores e suas propriedades, utilizando a regra do paralelogramo. Neste capítulo não há tarefas propostas e a OMD apresenta tarefas pontuais resolvidas.

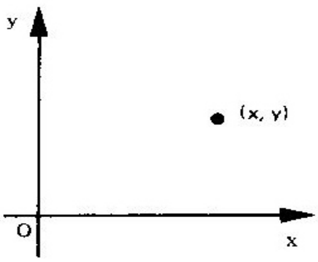
O produto escalar definido, usualmente, por: u = (x_1, y_1) e v = (x_2, y_2) e se representa u.v ou <u,v> e se lê: "u escalar v", como: u . v = x_1x_2 + y_1y_2. Em seguida é apresentado o módulo de $|v| = \sqrt{x^2 + y^2}$, onde v = (x,y). Defini vetor unitário, como sendo $u = \frac{v}{|v|}$. Define $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$, onde A = ($x_1$, y_1) e B = (x_2, y_2), como sendo o módulo. Não há articulação com a distância entre dois pontos, assunto ministrado na Geometria Analítica. Ângulo de dois vetores é mostrado a partir da tecnologia lei dos cossenos até chegar na fórmula $\cos\theta = \frac{u.v}{|u|.|v|}$ onde se calculando o $\cos\theta$ determina-se o θ em uma tabela de cossenos ou em uma calculadora. Encerra-se esse capítulo com paralelismo e ortogonalidade de dois vetores. Todas as técnicas de resolução tem como suporte tecnológico/teórico $\theta_1\Theta_1$ a definição de vetor e produto escalar, sendo a teoria Θ_1 a AL, apresentando como τ_1 aplicação direta da definição.

No livro didáticos o autor presume que os alunos já trazem do ensino básico os saberes matrizes, determinante e sistemas lineares e os professores do IFPA acabam não ensinando tais objetos. Conforme Chevallard (1991) chamou de trabalho interno de transposição, que tem no professor o responsável por este momento de transformação do saber, nem mostram este tópico tão importante que é o estudo de sistemas lineares.

Em nosso MER ao trabalharmos com vetores revelamos o porquê que partem da origem, além de apresentarmos tarefas sobre o produto escalar e o estudo de ângulo entre vetores. Comparando com obra analisada onde vetor é apresentado via conceito.

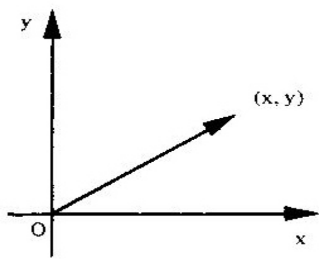
No capítulo 2 são introduzidos os *espaços vetoriais* e parti de registro geométrico, como sendo o plano cartesiano. Aparece nas Figuras 41a e 41b o par (x,y), onde x e y são coordenadas, ou seja, um ponto ou são componentes, logo um vetor, e sugere ao leitor ter a mesma visão geométrica para o R^3 e demais dimensão. Em seguida os espaços vetoriais são definidos a partir das 8 propriedades, 4 da adição e 4 da multiplicação, sendo os elementos do espaço vetorial **V** são chamados *vetores*.

Figura 41a – interpretação geométrica do R^2.



Fonte: Steinbruch e Winterle (1987, p. 15).

Figura 41b - – Interpretação vetorial do R^2.



Fonte: Steinbruch e Winterle (1987, p. 15).

T_2: Verificar se o conjunto **V** é ou não é um espaço vetorial.

t_{21}: Verificar se o conjunto **V** = R² = {(x,y)/x, y $\in$ R} é um espaço vetorial.

t_{22}: Verificar se os conjuntos R², R³, ... são espaços vetoriais com as operações de adição e multiplicação por escalar usuais.

t_{23}: Verificar se o conjunto V = {(x, x²)/ x $\in$R} com as operações $(x_1, x_1^2) \oplus (x_1, x_2^2) = (x_1 + x_2, (x_1 + x_2)^2)$ e $\alpha \otimes (x, x^2) = (\alpha x, \alpha^2 x^2)$, onde $\oplus$ e $\otimes$ são as adições e multiplicações não usuais.

t_{24}: Verificar se o conjunto R² = {(a,b)/a, b $\in$ R} não é um espaço vetorial, munido das operações (a,b) + (c,d) = (a +c, b + d)e k (a,b) = (ka, b).

A τ_2 utilizada é a aplicação da definição de espaço vetorial, onde t_{21}, t_{22}, t_{23} são espaços vetoriais e a tarefa t_{24} não é um espaço vetorial, onde a propriedade $(\alpha + \beta)(x, y) = ((\alpha + \beta)\, x, (\alpha + \beta)\, y)$ não é comprovada.

O discurso $\theta_2\Theta_2$ é a definição de espaço vetorial, portanto bastante formal desenvolvida por Peano (1888). A análise ecológica que trata **O** objeto de saber faz parte das recomendações curriculares para a Educação Superior, mas a finalidade que constatamos é de que definiu-se espaços vetoriais e aplicou-se a definição, sem dar a ideia do que seria espaço.

Em seguida os autores[34] já passa para *subespaços vetoriais* na (p. 25), utilizando a definição usual, isto é, um subconjunto **S** não vazio é um subconjunto de um subespaço vetorial **V**, se **S** é um espaço vetorial em relação a adição e a multiplicação usual definidas por **V**. Mas para não se provar os 8 axiomas os autores aconselham usar o **teorema 1**: Um subconjunto **S**, não vazio, de um espaço **V** é um subespaço vetorial de **V** se estiverem satisfeitas as seguintes condições:

i) Para quaisquer u, v $\in$ S, tem-se u + v $\in$ S.

ii) Para quaisquer $\alpha \in$ R, u $\in$ S , tem-se: α u $\in$ S.

T_3: Verificar se **S** é um subespaço vetorial.

t_{31}: Verificar se **S** = {(x,y) $\in$ R²/y = 2x}é um subespaço vetorial, utilizando o teorema 1.

τ_3: Aplicação do Teorema 1.

$u + v = (x_1 + x_2, 2x_1 + 2x_2) = (x_1 + x_2) = (x_1 + x_2, 2(x_1 + x_2)) \in S = u + v$

$\alpha\, u = \alpha\, (x_1, 2x_1) = (\alpha\, x_1, 2\alpha\, x_1)) \in S.$

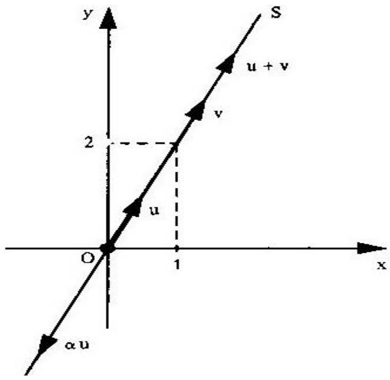
Apresenta como discurso tecnológico θ_3 o teorema 1 e a teoria a Θ_1 a AL.

Em seguida apresenta uma representação vetorial para representar um subespaço, pois ao se tomar dois vetores **u** e **v** da reta a soma u + v também é reta e ao se multiplicar u por um escalar

[34] A partir de agora os autores são os do livro analisado, isto é, Steinbruch e Winterle (1987).

qualquer α obtemos um vetor também, na reta.

Figura 42 - Representação geométrica de **S**.

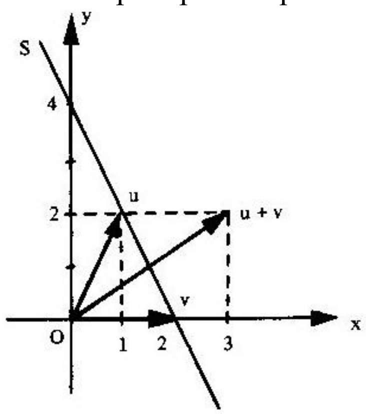


Fonte: Steinbruch e Winterle (1987, p. 26).

Mostra um contra exemplo quando não é um subespaço vetorial, como na Figura 43:

$$S = \{(x, 4 - 2x); x \in R\}$$

Figura 43 - Recurso geométrico para provar que **S** não é um subespaço vetorial.



Fonte: Steinbruch e Winterle (1987, p. 27).

A tecnologia apresentada é o representação geométrica do estudo de vetores e a teoria Θ_1 AL. Com a definição de subespaço fica fácil se aplicar a técnica, mas não tem uma importância satisfatória, pois não está relacionado com nenhum outro saber; mas sua confiabilidade é aceitável sendo dadas suas condições de emprego, e são suficientemente inteligíveis.

t_{32}: verificar se $V = R^4$ é um subespaço vetorial.

A técnica apresentada parte que $S = \{(x,y,z,0), x, y,z \in R\}$. Cria os vetores $u = (x_1, y_1, z_1, 0)$ e $v = (x_2, y_2, z_2, 0)$ e a soma deles a quarta componente é nula, assim como e α u. A razão de ser é a aplicação da técnica oriunda da definição.

A tarefa t_{32} apresenta como técnica a τ_3 aplicação do teorema 1, a θ_3 é o teorema 1 e a Θ_1 é a AL.

Continuando com T_3 apresenta a t_{33} (p.31):

t_{33}: Sejam V = M(n, n), B uma matriz fixa de V e S $\{A \in M(n, n)/AB = 0\}$, onde S é um conjunto de matrizes que multiplicado por B, tem como resultado a matriz nula.

i) A τ_3 apresentada é a seguinte:

Se $A_1 \in S$ então $A_1B = 0$

Se $A_2 \in S$ então $A_2B = 0$

Logo $A_1B + A_2B = 0$

$(A_1 + A_2)B = 0$

e $A_1 + A_2 \in \underline{S}$

ii) multiplicando por $\alpha \in R$ a primeira igualdade:

$\alpha\ (A_1B) = \alpha\ 0$

$(\alpha\ A_1)B=0$

$\Rightarrow \alpha\ A_1 \in \underline{S}$

Logo S é um subespaço vetorial de M (2,2).

A t_{34} da (p. 32) apresenta um sistema linear homogêneo, como segue:

t_{34}: Sejam V = M(3,1) e S o conjunto solução de um sistema linear homogêneo a três variáveis.

$$\begin{cases} 3x+4y-2z=0 \\ 2x+y-z=0 \\ x-y+3z=0 \end{cases}$$

A τ_3 é a seguinte:

O sistema linear homogêneo é disposto em notação matricial:

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}, X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} e\ 0=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

AX = 0

Cria dois vetores u = $X_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ e v = $X_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$. Logo $AX_1 = 0$ e $AX_2 = 0$. Utilizando a mesma τ_3 da tarefa t_{33} conclui que S é um subespaço vetorial de M(3,1). Observa que que S é denominado espaço solução do sistema AX =0; se **S** tiver **m** equações e **n** variáveis o espaço solução será um subespaço de R^n; caso o sistema não seja homogêneo o conjunto solução S não é um subespaço vetorial.

A t_{35}: Verificar se S é um subespaço (STEINBRUCH e WINTERLE, 1987, p. 34).

Sejam V = R² e S ={(x,y); x > 0}, isto é, S é o conjunto dos vetores de R² cuja primeira componente é positiva. Sendo:

$u = (x_1, y_1), x_1 > 0,$

$v = (x_2, y_2), x_2 > 0$ (STEINBRUCH e WINTERLE, 1987, p. 34).

A τ_3 é a mesma nesse tipo de tarefa e a tecnologia τ_3 é o *teorema 1*, enquanto que a teoria Θ_1 é a AL.

i) $u + v = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \in S$, pois $x_1 + x_2 > 0$ e,

ii) $\alpha u = (\alpha x_1 + \alpha y_1) \notin S$, quando $\alpha \leq 0$, pois se u = (3, -4) e -2 (3, -4) = (-6,8) $\notin$ S, logo S não é um subespaço de R².

Em seguida, os autores tratam de interseção de subespaços, a soma direta e a soma destes, além de tratar que a interseção é um subespaço, como segue:

$S = S_1 \cap S_2$

S tem pelo menos um vetor em comum, a origem. Essa é um subespaço.

Se $v \in S$ então $v \in S_1$ e $v \in S_2$

Se $u \in S$ então $u \in S_1$ e $u \in S_2$

(I) $(v + u) \in S$, pois:

$v \in S_1$ e $u \in S_1$. Logo $(v + u) \in S_1$

$v \in S_2$ e $u \in S_2$. Logo $(v + u) \in S_2$

Assim, $(v + u) \in S_1$ e $(v + u) \in S_2$. Logo, $(v + u) \in S$.

(II) $a \in \Re, v \in S \Rightarrow av \in S$, pois:

$v \in S_1$. Logo, $av \in S_1$

$v \in S_2$. Logo, $av \in S_2$

Assim, $av \in S_1$ e $av \in S_2$. Logo, $av \in S$.

A parte introdutória à espaços vetoriais não foi feita por meio de abordagem histórica, mas se estabeleceu correlação entre a Geometria e a Álgebra Linear, ora pelo tratamento algébrico às questões geométricas. A utilização de registros de representação (algébricos, figurais e textuais) também foi verificada em T_1, T_2 e T_3, por meio de exemplos no contexto intra-matemático.

Na (p. 39) os autores tratam das *combinações lineares*, como sendo: dado um vetor v este é chamado de uma combinação linear dos vetores $v_1, v_2, \ldots, v_n$ se v pode ser expresso na forma:

$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n$, onde os α_i são escalares.

T_4: Determinar se **v** é combinação linear.

t_{41}: Determinar se $v = 7x^2 + 11x - 26$ é combinação linear dos polinômios $v_1 = 5x^2 - 3x + 2$ e

$v_2 = -2x^2 + 5x - 8$. A técnica τ_4 vem por tentativa a partir da aplicação da definição e conclui que v pode ser escrito como: $v = 3v_1 + 4v_2$, ou seja, $7x^2 + 11x - 26 = 3(5x^2 - 3x + 2) + 4(-2x^2 + 5x - 8)$.

t_{42}: Determinar se v = (-4, -18, 7) é combinação linear de v_1 = (1, -3, 2) e v_2 = (2, 4, -1).

τ_4: (-4, -18,7) = a_1 (1, -3, 2) + a_2 (2, 4, -1)

Recai num sistema $\begin{cases} a_1 + 2a_2 = -4 \\ -3a_1 + 4a_2 = -18 \\ 2a_1 - a_2 = 7 \end{cases}$

Determinando $a_1 = 2$ e $a_2 = -3$, logo, $v = 2v_1 - 3v_2$.

t_{43}: Determinar se v = (4, 3, -6) de v_1 = (1, -3, 2) e v_2 = (2, 4, -1).

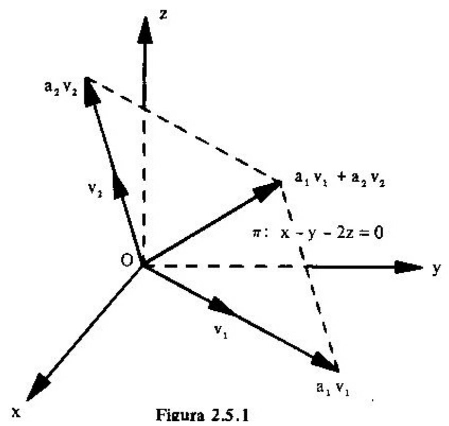
A τ_4 é a mesma da t_{42} e pelo sistema ser incompatível, logo não há combinação.

Apresenta o que consideramos um sub tipo de tarefa T_{41}: Determinar k (componente de u) para que o vetor u seja combinação linear. t_{411}: Determinar k (componente de u) para que o vetor u seja u = (-1, k, -7) seja combinação linear de v_1 = (1, -3, 2) e v_2 = (2, 4, -1).

Utililizando a mesma técnica τ_4, isto é, a aplicação da definição, resolvendo-se o sistema chega-se a encontrar as incógnitas k = 13, $a_1 = -3$ e $a_2 = 1$.

Apresenta a t_{412}: Determinar x, y e z componentes de (x, y, z) seja combinação linear de v_1 = (1, -3, 2) e v_2 = (2, 4, -1). Utilizando a mesma técnica τ_4 chega a solução (y + 2z, y, z), com y, z $\in$ R. Nesta t_{412} apresenta uma motivação geométrica para interpretar tal resultado, pois (x, y, z) = $a_1v_1 + a_2v_2$ forma um plano π, de equação $x - y - 2z = 0$, que estabelece a condição solicitada entre x,y e z como mostra a Figura 44:

Figura 44– Representação geométrica de π: $x - y - 2z = 0$.



Fonte: Steinbruch e Winterle (1987, p. 43).

Na (p. 44) apresenta T_{42}: Determinar como **v** é combinação linear de outros vetores. A t_{421}: Determinar como v = (3,4) pode ser escrito como combinação linear dos vetores v_1 = (1,0), v_2 = (0,1) e v_3 = (2, -1). Esses tipos de tarefas aparecem com motivos válidos, pois a técnica recai em um sistema, mas que na obra os autores já trazem que o leitor já têm como conhecimento prévio. Logo esse tipo de tarefas considerados são representativos das situações matemáticas, sendo pertinentes tendo em vista as necessidades matemáticas dos alunos, em estudar as ideias de LD e LI, para se chegar em base..

Para escrever **v** como combinação de $\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$ e $\mathbf{v_3}$

A τ_4 é fazer v = a (1,0) + b (0,1) + c (2, -1)

$\begin{cases} a + 2c = 3 \\ b - c = 4 \end{cases}$ é notório notar que para cada valor de **c** obtém-se um valor para **a** e outro para **b**.

Na (p. 44) os autores iniciam definindo os *subespaços gerados* da seguinte modo: Seja **V** um espaço vetorial, consideremos um subconjunto A = {v_1, v_2, ..., v_n} $\subset$V, $A \neq \varnothing$. O conjunto **S** de todos os vetores de **V** que são combinações lineares dos vetores de **A** é um subespaço vetorial. Isto é demonstrado utilizando a *teorema 1*, portanto a tecnologia τ_3. Conclui que:

$S = \{ \ v \in V / v = a_1v_1 + a_2v_2 + ... + a_nv_n, a_1, ..., a_n \in R \ \}$, onde **S** é *gerado* pelos vetores v_1, v_2, ...,v_n, ou ainda gerado por **A**. **S** = G(A) ou **S** = [v_1, v_2, ...,v_n], onde v_1, v_2, ...,v_n são geradores do subespaço **S**. A partir da definição inicia-se o T_5: Verificar se um vetor ou mais de um geram o espaço vetorial.

t_{51}: Esta tarefa é apresentada na (p. 43) pelos autores, que a enunciam como segue:

Os vetores i = (1,0) e j = (0,1) geram o espaço vetorial R^2, pois qualquer (x,y) $\in$ R^2 é combinação linear de i e j:

A *técnica* apresentada para enfrentar a tarefa é a seguinte:

Os vetores **i** e **j** geram o espaço R^2, pois qualquer (x,y) $\in R^2$ é combinação linear de **i** e de **j**. Então (x,y) = x (1,0) + y (0,1) = (x,0) + (0,y) = (x,y), logo [i,j] = R^2 (STEINBRUCH e WINTERLE, 1987, p. 43).

Em relação ao nosso MER as combinações lineares são estudadas a partir do estudo de sistemas lineares, inclusive dando a ideia do estudo da relação entre as linhas de uma matriz, além de se revelar por ambiguidade a ideia de LD e LI, enquanto no livro em questão os autores partem da definição de combinações lineares e apresentando tarefas a partir dessa definição.

A Tarefa t_{52} será apresentada na Figura 45: Os vetores i = (1,0,0) e j = (0,1,0) geram o S = {(x,y,0) $\in R^3$/x,y $\in$ R}. A técnica (x,y,0) = x (1,0,0) + y (0,1,0), logo [i,j] é um subespaço próprio [35]do R^3.

Os autores prosseguem com a tarefa t_{53} e utilizam a técnica a partir da definição.

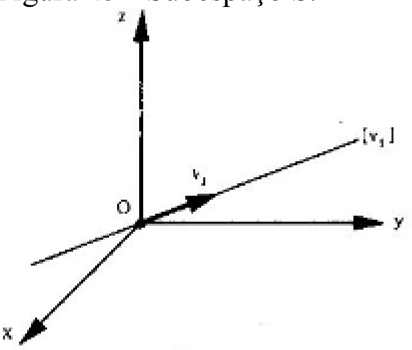
[35] São os que não são triviais.

Os vetores $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$ e $e_3 = (0,0,1)$ geram o R^3, já que qualquer $v\ (x, y, z) \in R^3$ é CL de e_1, e_2 e e_3. A técnica é fazer $(x,y,z) = x\ (1,0,0) + y\ (0,1,0) + z\ (0,0,1)$ ou $v = xe_1 + ye_2 + ze_3$, logo $[e_1, e_2, e_3] = R^3$.

Conclui esta parte observando que sendo **S** um subespaço gerado por um conjunto **A**, ao se acrescentar vetores de **S** a esse conjunto **A**, os novos conjuntos continuarão gerando o mesmo **S**, ou seja, **S** pode ser gerado por uma infinidade de vetores, mas há um número mínimo de vetores para gerá-lo (STEINBRUCH e WINTERLE, 1987, p. 47).

A tarefa t_{54}: Determinar o subespaço **S** pelo vetor $v_1 = (1,2,3)$, onde o espaço vetorial $V = R^3$ (STEINBRUCH e WINTERLE, 1987, p. 48). Aplicando a τ_3: $(x,y,z) = a\ (1,2,3)$; onde $x = a$, $y = 2a$ e $z = 3a$, donde $y = 2x$ e $z = 3x$. Logo $[v_1] = \{(x,y,z) \in R^3 / \ y = 2x \text{ e } z = 3x\}$, ou ainda, $[v_1] = \{(x, 2x, 3x);\ x \in R\}$. Esse subespaço gerado é uma *reta* que passa pela origem, conforme Figura 45.

Figura 45 - Subespaço S.



Fonte: Steinbruch e Winterle (1987, p. 48).

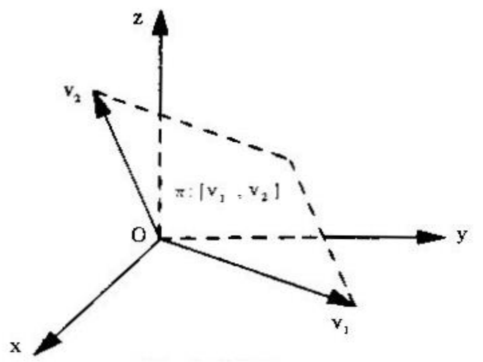
t_{56}: Determinar o subespaço gerado pelo conjunto $A = \{v_1, v_2\}$, sendo $v_1 = (1, -2, -1)$ e $v_2 = (2, 1,1)$. Aplicando a τ_3, temos:

$[v_1, v_2] = \{(x,y,z) \in R^3 / \ (x,y,z) = a_1\ (1,-2,-1) + a_2\ (2,1,1);\ a_1, a_2 \in R\}$

Recai num sistema: $\begin{cases} a_1 + 2a_2 = x \\ -2a_2 + a_2 = y \\ -a_1 + a_2 = z \end{cases}$

O vetor $(x,y,z) \in [v_1, v_2] \Leftrightarrow$ o sistema tem solução, isto é, quando se tem $x + 3y - 5z = 0$ (os autores deixa a cargo do leitor provar). Logo o subespaço gerado por v_1 e $v_2 \in R^3$ não colineares é um plano que passa pela origem, conforme mostra Figura 46.

Figura 46 - Subespaço gerado por [v_1, v_2].



Fonte: Steinbruch e Winterle, (1987, p. 49).

t_{57}: Determinar o subespaço gerado pelo conjunto A = {v_1, v_2, v_3} , sendo v_1 = (1, 1,1), v_2 = (1,1,0), v_3 = (1,0,0), onde V = R³.

A é τ_3 utilizada para enfrentar essa tarefa, então:

(x,y,z) = a_1 (1,1,1) + a_2 (1,1,0) + a_3 (1,0,0). Gera-se em seguida um *sistema linear*, para se determinar a_1, a_2 e a_3.

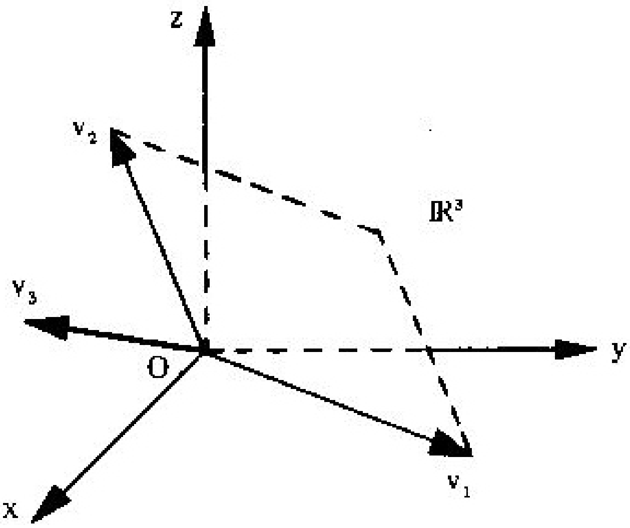
$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = x \\ a_1 + a_2 = y \\ a_1 = z \end{cases}$$ e portanto a_1 = z, a_2 = y – z e a_3 = x – y.

Substituindo a_1 = z, a_2 = y – z e a_3 = x – y em (x,y,z) = a_1 (1,1,1) + a_2 (1,1,0) + a_3 (1,0,0), temos:

(x,y,z) = z (1,1,1) + (y-z) (1,1,0) + (x - y) (1,0,0)

E portanto os vetores v_1, v_2 e v_3 geram R³, já que cada vetor do R³ é combinação linear dos vetores dados na tarefa, conforme mostra Figura 47. Mesmo que somemos mais vetores o subespaço gerado por esses vetores gerará o próprio R³. Com relação ao nosso MER, observa-se que os autores da obra não revelam em nenhum momento que há uma relação entre o homogêneo associado e o sistema dado na tarefa, pois o sistema divide o espaço em dois, inclusive na Figura 47 é possível se observar isto.

Figura 47– Espaço gerado por [v_1, v_2, v_3].



Fonte: Steinbruch e Winterle, (1987, p. 51).

t_{58}: Determinar o subespaço gerado por $A = \left\{ \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$, onde V = M (2,2).

A partir da τ_3 tem-se: $\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

Encontra-se z = -y e x = -2y + t

$S(\mathrm{A}) = \left\{ \begin{bmatrix} -2y+t & y \\ -y & t \end{bmatrix}; y, t \in R \right\}$

A θ_3 é a definição de combinação linear, sendo a teoria Θ_1 é a AL.

Inicia na (p.53) os *espaços V finitamente gerado* se existe um conjunto finito A, A $\subset V$, tal que V = G(A). Já mostramos pela T_5 espaços finitamente gerados. Os autores mostram como contra exemplo um espaço vetorial que não é finitamente gerado que o espaço de todos os polinômios reais **P.**

Sua OMD proposta para o ensino de dependência linear (LD) e independência linear (LI) é justificado pela necessidade de se determinar o menor conjunto gerador de um espaço vetorial.

Introduz LD e LI por definição, como segue na (p. 54):

Sejam V um espaço vetorial e A = {v_1, ..., v_n} $\subset V$. Consideremos a equação a_1v_1 + ...+ a_nv_n = 0. Sabemos que esta solução admite pelo menos uma solução, onde os coeficientes são todos nulos – *solução trivial*. Então o conjunto A é LI caso a solução da equação seja somente a trivial, caso contrário será LD.

A T_6 é anunciada na (p. 54): Determinar se vetores são LD ou LI.

As tarefas são as seguintes:

t $_{61}$: Determinar se os vetores $v_1 = (2, -1, 3)$, $v_2 = (-1, 0, 2)$ e $v_3 = (2, -3, 1)$, onde $V = R^3$ é LD.

t_{62}: Determinar se os vetores $v_1 = (2, 2, 3,4)$, $v_2 = (0,5, 2-3,1)$ e $v_3 = (0, 0\ 4, -2)$, onde $V = R^4$ é LI.

A τ_5 apresentada na resolução dessas tarefas é a seguinte:

a (2, 2, 3,4) +b (0,5, 2-3,1) + c (0, 0 4, -2) = (0,0,0,0)

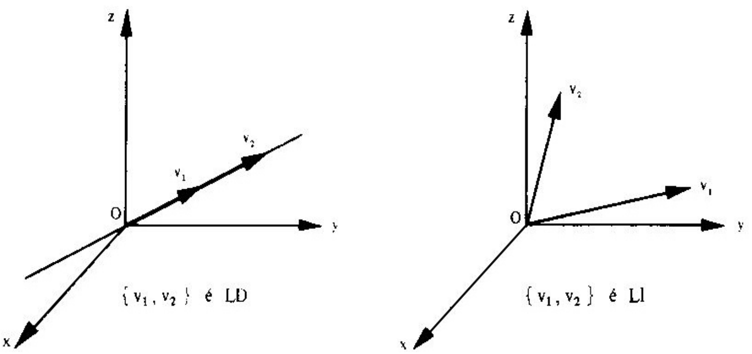
Recai em um sistema: $\begin{cases} 2a = 0 \\ 2a + 5b = 0 \\ 3a - 3b + 4c = 0 \\ 4a + b - 2c = 0 \end{cases}$

O sistema admite uma única solução, que é a trivial, isto é, a = b = c = 0.

As demais tarefas apresentadas por Steinbruch e Winterle (1987) sobre esses objetos LD e LI, são resolvidas pelas mesma τ_5, inclusive apresentado os vetores na forma matricial. Os autores institucionalizam a atividade quando relatam que se um conjunto **A** é LD se **A** é combinação linear dos outros. Então, apresentam o **teorema 2:** " Um conjunto A {v1, ..., vj, ...vi} é LD se, e somente se, pelos menos um desses vetores é combinação linear dos outros".

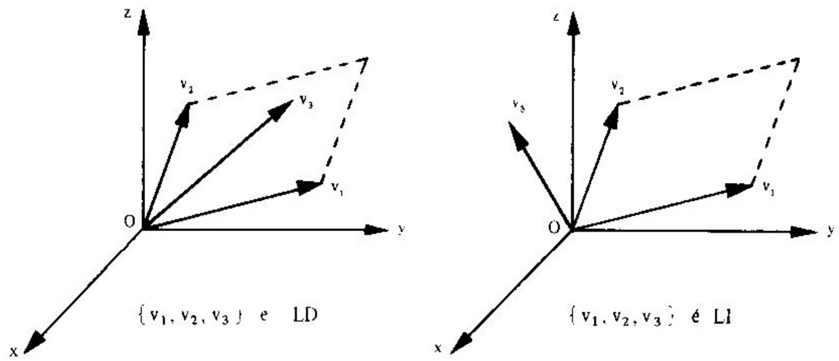
Em nosso MER, a ideia de LD e LI foi evocada pelos estudo qualitativo de sistemas lineares, dando uma razão de ser para o estudo das combinações lineares, isto é, as tarefas são dispostas de modo que o aluno possa chegar a verificar a diferença entre LD e LI. Na obra em análise foi apresentado a definição e tarefas pontuais, enquanto que na obra a razão de ser é mera aplicação da técnica decorrente da definição. As combinações lineares tornam-se tecnologias para o estudo desses objetos LD e LI. Por meio das Figura 48 e Figura 49 é possível se interpretar geometricamente os vetores.

Figura 48 – Interpretação geométrica da LD e LI, onde v_1 e v_2 estão representados na mesma reta que passa pelo origem.



Fonte: Steinbruch e Winterle (1987, p. 60).

Figura 49 – Interpretação geométrica da LD e LI, onde v_1 e v_2 estão representados no mesmo plano que passa pelo origem.



Fonte: Steinbruch e Winterle (1987, p. 61).

T_{61}: Determinar **k** de modo que um conjunto seja LD ou LI.

t_{611}: Determinar **k** de modo que o conjunto {(1,0,-1), (1,1,0), (k,1,-1)} seja LI.

A τ_5 : a (1,0,-1) + b (1,1,0) + c (k,1,-1) = (0,0,0)

$$\begin{cases} a + b + ck = 0 \\ b + c = 0 \\ -a - c = 0 \end{cases}$$ Os autores deixam a cargo do leitor mostrar que para k $\neq 2$ o sistema será LI.

Tais tipo de tarefas T_6 e subtarefas T_{61} apresentam como justificativa da técnica θ_4 a definição de LD e LI apresentada pelos autores e a teoria Θ_1 é a AL. Conforme nosso MER há uma discussão do sistema, partindo ideia de *ambiguidade*, pois há solução para um determinado sistema, mas não é única, mas diversas, *infinitas*, logo o *sistema é possível e indeterminado*, portanto há um infinidade de combinações lineares. Quando isto acontece o sistema é dito *LD*, ou seja, toda vez que o sistema provoca ambiguidade este é LD, portanto uma ideia diferente da habitual.

São apresentadas as propriedades de um conjunto, a partir da ideia de LD e LI.

i) Se A = {v} $\subset$ V e v $\neq 0$, então A é LI;

ii) Se A $\subset$ V contém o vetor nulo, então A é LD;

iii) Se uma parte de A $\subset$ V é LD, então A é também LD;

iv) Se A $\subset$ V é LI, qualquer parte de A é também LI;

v) Se A = {v_1, v_2, ..., v_n} $\subset$ V é Li e B = {v_1, v_2, ..., v_n, w} $\subset$ V é LD, então w é combinação linear de v_1,.....,v_n (STEINBRUCH e WINTERLE, 1987, p. 66).

Os autores chamam atenção para um detalhe importante da (p.66) sobre a propriedade iv, pois se todos os subconjuntos próprios de um conjunto finito de vetores são LI, mas não significa que o conjunto seja LI.

Na (p.66) inicia-se o estudo de *base de um espaço vetorial*. Um conjunto B = { v_1, v_2, ..., v_n }

é uma *base de um espaço vetorial* se:

i) B é LI;

ii) B gera V (STEINBRUCH e WINTERLE, 1987, p. 66).

T_7: Verificar se **B** é uma base.

t_{71}: Verificar se B = {(1,1), (-1,0)} é base de R^2.

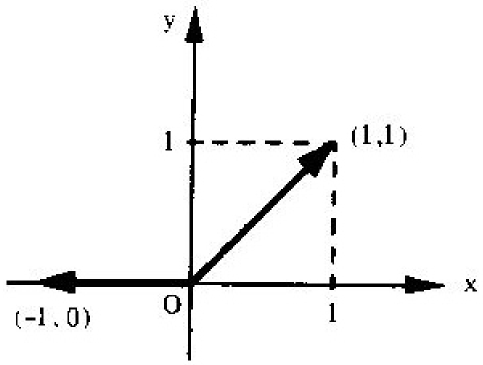
A τ_5 é utilizado para se provar que é LI, pois a (1,1) + b (-1,0) = (0,0), o que implica que a = b = 0. E pela τ_3 prova-se que **B** gera o **R²**, pois a (1,1) + b (-1,0) = (x,y) então a = y e b = y – x. Comprova-se assim que é uma base.

É possível se verificar na Figura 48 que dois vetores não colineares são LI. Conclui que quaisquer dois vetores não colineares forma o R^2. Com relação ao nosso MER, proposto nesta tese, é observa-se que os autores não revelam em nenhum momento que há uma relação entre o homogêneo associado e o sistema dado na tarefa, inclusive na Figura 50 é possível se observar isto.

Qual o habitat? Qual o papel desse saber ou saber-fazer na "cadeia alimentar"? Postulamos que o objeto base vive na ideia de LI e espaço gerador, mas em nosso MER esse objeto parte da ideia do estudo dos sistemas lineares e em relação ao MER está, em relação a que estudamos, no final da cadeia alimentar, que se inicia por sistemas.

Pelo critério de identificação[36] verifica-se que tipos de tarefas estão postos de forma clara e bem identificados, mas desarticulados do gênero de tarefas estudar sistemas lineares.

Figura 50 – Representação dos vetores da base **B**.



Fonte: Steinbruch e Winterle (1987, p. 68).

t_{72}: Verificar se B = {(1,0), (0,1)} é base de R^2.

t_{72}: Verificar se B = {(1,0,.....,0), (0,1,........,0), (0, 0, 0, ...1)} é base de R^n.

t_{73}: Verificar se $B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$.é uma base canônica de M (2,2).

[36] Cf. Almouloud (2015).

t_{74}: Verificar se B = {1,x,x², ..., x^n} é uma base do espaço vetorial Pn.

A t_{75} mostra um contra exemplo: B = {(1,2), (2,4)} não é uma base de R², pois é LD.

A t_{76} mostra um contra exemplo: B = {(1,0), (0,1), (3,4)} não é uma base de R³, pois é LD.

A t_{77} mostra um contra exemplo: B = {(2,-1)} não é uma base, pois é LI, mas não gera o R².

A t_{78} mostra outro contra exemplo: B = {(1,2,1,), (-1,-3,0)} não é uma base de R³, pois é LI, mas não gera o R^3.

A τ_5 e a τ_3 são apresentadas para enfrentar o T_7. A θ_3 é a definição de combinação linear Θ_1 é a AL.

Apresentam na (p. 71) o **teorema 3**: Se B ={v_1, v_2, ...,v_n} for uma base de um espaço vetorial V, então todo conjunto com mais de n vetores será LD.

Na (p. 72) é apresentado o corolário: Duas bases quaisquer de um espaço vetorial têm o mesmo número de vetores.

Na mesma (p.72) é definido *dimensão* de um espaço vetorial, como sendo: Seja **V** um espaço vetorial Se **B** possui uma base com **n** vetores, então V tem dimensão **n**, dim V = n. Se **V** não tem base, então dim V = 0. Se **V** tem **B** com infinitos vetores, então a dim V = ∞.

Seja **S** um subespaço de **V**, então caso dim S = 0, logo S {0} é a origem; se dim S = 1, S é uma reta que passa pela origem; se dim S = 2, S é um plano que passa pela origem, dim S = 3, este é o próprio **S**, onde S = R³.

Como consequência apresenta algumas informações importantes sobre dimensão, como : (STEINBRUCH e WINTERLE, 1987, p. 74):

Seja V um espaço vetorial e **B** uma base de **V**, então:

i) Se sua dim V = **n**, logo qualquer subconjunto de **V** com mais de **n** vetores é LD;

ii) Se a dim V = n, para obtermos uma **B** de **V**, basta que apenas uma das condições da base seja satisfeita.

Apresentam na (p. 74) o **teorema 4**: Seja **V** um espaço de dim **V** = **n**. Qualquer conjunto de vetores LI em **V** é parte de uma base, isto é, pode ser completado até formar uma base de **V**.

Na (p.75) é apresentado o **teorema 5**: Se **B** = {v_1, ...,v_n} é uma base de **V**, então todo vetor **v** de **V** se exprime de maneira única como combinação linear de dos vetores de **B**.

As matrizes são apresentadas como vetores coluna na forma $V_B = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdots \\ \cdots \\ a_n \end{bmatrix}$, onde a_1, a_2, ..., a_n, são as chamadas *coordenadas* de **v** $\in$ **V** em relação a base **B** = {v_1, ...,v_n}, onde v = a_1v_1 + ...+ a_nv_n.

Na OMD da obra o autor exemplifica essa situação do seguinte modo: T_8: Dado um vetor **v** escrever este a partir de uma combinação linear dos elementos de uma base.

t_{81}: Dado o vetor v = (8,6) e as bases do R^2, A = {(1,0), (0,1)}, B {(2,0), (1,3)} e C = {(1,-3), (2,4)} escrever v a partir dos elementos de A, B e C.

(8,6) = 8(1,0) + 6(0,1)}, (8,6) = 8(2,0) + 6(1,3) ou ainda (8,6) = 8(1,-3) + 6(2,4). Na Figura 51 é possível se verificar a partir do registro figural a representação de **v** em relação as bases **A** e **B**.

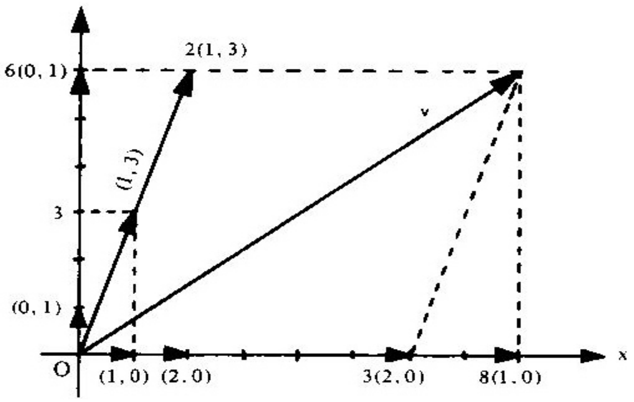
Tt_{82}: Dado v = (5,4,2) e B = {(1,2,3), (0,1,2), (0,0,1)} base do R^3.

Aplicando a τ_3: (5,4,2) = a (1,2,3) + b (0,1,2) + c (0,0,1)

Encontra-se a = 5, b = -6 e c = -1. Logo $V_B = \begin{bmatrix} 5 \\ -6 \\ -1 \end{bmatrix}$.

A τ_3 é a aplicação da definição de combinação linear, enquanto que a θ_3 é a combinação linear e a Θ_1 é a AL. O resultado tecnológico da atividade podia ser explorado para produzir novas técnicas para resolver novas tarefa, sendo as formas de justificação utilizadas são próximas das justificativas matematicamente válidas (cf. ALMOULOUD, 2015). Como a tecnologia, que é estudo os sistemas lineares, o resultado tecnológico da atividade poderia ser explorado para produzir novas técnicas para resolver novas tarefas, como fizemos em nosso MER.

Figura 51– Representação de **v** em relação a **A** e **B**.



Fonte: Steinbruch e Winterle (1987, p. 78).

A ideia é institucionalizada a partir do T_9 que é determinar a base e a dimensão de um espaço vetorial. A tarefa t_{91}: Determinar a base e a dimensão do espaço vetorial S = {(x, y, z) $\in R^3$/2x + y + z = 0}.

A τ_3 é utilizada para enfrentar a esse tipo de tarefas e θ_3 é a definição de combinação linear, sendo a teoria Θ_1 é a AL.

Isolando-se z = -2x – y, sendo x e y são variáveis livres. Temos que (x,y,z) $\in$ S, então (x, y, -2x-y). Portanto:

(x,y,z) = (x, 0, -2x) + (0,y,-y)

Ou ainda;

(x,y,z) = x(1, 0, -2) + y(0,1,-1).

Isto nos mostra que todo vetor de **S** é combinação linear dos vetores (1, 0, -2) e (0,1,-1). Como (1, 0, -2) e (0,1,-1) são LI, logo o conjunto {(1, 0, -2), (0,1,-1)} é uma base de **S**, onde dim S = 2. Os autores chamam atenção que o *número de variáveis livres é a dimensão do espaço*.

t_{92}: Determinar a base e a solução do espaço-solução do sistema homogêneo (STEINBRUCH e WINTERLE, 1987, p. 85):

$$\begin{cases} x+2y-4z+3t=0 \\ x+2y-2z+2t=0 \\ 2x+4y-2z+3t=0 \end{cases}$$

A solução S = {(x,y,z,t)/t=2z e x = -2y - 2z}, que é um subespaço do R^4. Como as variáveis livres são **y** e **z**, então a dimensão **dim S** é 2. A base é determinada, substituindo-se valores em **y** e **z**, assim é possível se construir os dois vetores que formam a base na forma v = (x, y, z, t), que depende dos valores dessas variáveis.

O autor deixa a cargo do leitor a resolução do sistema. A τ_6 é a resolução de sistemas. A θ_5 definiremos como sendo o estudo de sistemas lineares e Θ_1 é a AL.

Na (p.87) os autores iniciam diversos "problemas propostos". De um modo geral os tipos de tarefas iniciam por provar que determinados conjuntos são espaços vetoriais; determinar se tais conjuntos são subespaços vetoriais; escrever um vetor v como combinação linear de outros vetores; determinar os subespaços do R^3 gerados por diversos conjuntos; classificar conjuntos em LD ou LI; verificar se tais conjuntos de vetores formam uma base; dado uma base **B** determinar o vetor coordenada; determinar a dimensão e uma base para os espaços vetoriais; encontrar uma base a partir da solução do sistema homogêneo.

A parte de matrizes, determinantes e sistemas lineares é apresentado a partir da (p. 369) como apêndice no final do livro, quando que estudamos que os sistemas lineares é o grande problema da AL. Define matriz de ordem **m** por **n** a um quadro de **m x n** elementos (números, polinômios, funções, etc.) dispostos em **m** linhas e **n** colunas (STEINBRUCH e WINTERLE, 1987, p. 369).

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Em seguida apresenta ordem de matriz A $_{(m,n)}$ onde a ordem é definido como ***m por n***. Segue com os tipos de matrizes, entre estes tipos, inicialmente: retangular, coluna, linha, quadrada, diagonal, escalar, unidade, zero. As operações entre matrizes esta na (p. 374), a adição, produto por escalar e produto de matriz são mostrados pelo autor, sendo a soma se dá pela soma dos elementos que estão nas mesmas posições, sendo as matrizes de igual número de linhas e colunas, enquanto que o produto se dá pela multiplicação de linhas por colunas, logo o número de colunas da 1ª matriz tem que ser igual ao número de linhas da 2ª matriz. A Matriz comutável é colocado de modo formal AB = BA = I, onde A, B e I são matrizes. Em seguida são matriz transposta e suas propriedades, matriz simétrica e anti-simétrica, matriz triangular supeior e inferior, potência de matrizes, matriz periódica, matriz Idempotente ($A^2 = A$) e a Nihilpotente (matriz quadrada A, se $\exists$ **p** inteiro e positivo tal que igual a 0 (zero), isto é, se $A^3 = A.A.A = 0$, então terá índice 3). As Tipos de tarefas são somar matrizes, multiplicar matrizes, identificar os tipos de matrizes, calcular A.B, AA^t, $A + A^t$.

Pouco nos deteremos nos determinantes, pois nosso MER esta mais voltado ao estudo de sistemas e matrizes. Este objeto é apresentado na (p. 420) e é definido como o determinante de uma matriz quadrada à soma algébrica dos produtos que se obtém efetuando todas as permutações dos segundos índices de um termo principal, fixados os primeiros índices e fazendo-se proceder os produtos + ou -, conforme a permutação dos segundos índices seja de classe par ou ímpar.

Por conseguinte apresentam ordem de um determinante, como sendo a mesma da matriz, cálculo do determinante de segunda ordem e de terceira ordem (Teorema de Laplace), as propriedades, e o cálculo do determinante de qualquer ordem. Uma técnica apresentada é utilizar o método da eliminação e substituição gaussiana e após a matriz estar na forma de escada multiplicar os elementos da diagonal principal (triangulação).

Aparece a matriz inversa na (p.466) como AB = BA = I, onde **A** é inversa de **B** e vice-versa. Esta é singular se o det A = 0, caso não esta é denominada de não-singular. Propriedades da matriz inversa são exemplificadas na (p. 468). Aparecem as operações elementares e equivalência de matrizes. Os autores propõe o tipo de tarefas sobre cálculo da inversa de uma matriz utilizando operadores elementares até se transformar a matriz na identidade, conforme Figura 52.

Os autores propõe resolver várias tarefas utilizando esta mesma técnica, para matrizes de ordem 3 e 4. O objeto sistemas lineares, que no nosso modelo vem por primeiro, pois esse é a tecnologia que justificar nosso jeito de fazer e de pensar sobre o ensino da AL. Os autores definiram sistema linear como sendo como um conjunto de equações lineares. Logo parte para a solução de um sistema, como sendo os valores das variáveis que transformam, simultaneamente, as equações de um sistema linear em identidade, isto é, que satisfazem a todas as equações do sistema, constituem sua solução (STEINBRUCH e WINTERLE, 1987, p. 505).

Apresenta o sistema compatível, como sendo determinado ou indeterminado e o sistema incompatível. Os sistemas *equivalentes* são os sistemas que apresentam a mesma solução e cita exemplos na (p. 507). Na (p. 508) relata que os operadores (permutação de duas linhas, multiplicação por um real diferente de zero e substituição de uma equação por uma soma com outra equação previamente multiplicada por um número real diferente de zero) transformam o sistema num equivalente.

O estudo e solução dos sistemas lineares quando o número de n (equações) é igual, maior ou menor que o número de incógnitas. Apresenta tarefas para resolver sistemas e utiliza como técnica o método de Gauss-Jordan. Apresenta o estudo da *característica* de uma matriz sem articular com o estudo de LD ou LI.

Trata dos importantes sistemas homogêneos na (p. 534) e os resolve utilizando como técnica o método de escalonamento de Gauss-Jordam. Assim como nos livros do ensino básico a obra em análise mostrou pouco a importância desse tipo de sistema, e não os articula com o estudo dos espaços e subespaços vetoriais.

Em nenhuma parte do livro há tipos de tarefas genéricas, que é por onde o estudante da obra irá verificar no caso o aparecimento dos operadores lineares, ou até mesmo o método de eliminação gaussiana.

Figura 52 - Tarefa: Determinar a matriz inversa de uma matriz.

1) Determinar a matriz inversa da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

Solução

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow L_1(\tfrac{1}{2})^*$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow L_2 = L_2 + L_1(-4)$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow L_3 = L_3 + L_1(-2)$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow L_{23}^*$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow L_2(\tfrac{1}{4})^*$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & -4 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow L_3(-\tfrac{1}{4})^*$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \end{array}\right] \longrightarrow L_1 = L_1 + L_2(-\tfrac{1}{2})$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{5}{8} & 0 & -\frac{1}{8} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & 1 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \end{array}\right] \longrightarrow L_1 = L_1 + L_3(-\tfrac{3}{2})$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{8} & \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \end{array}\right]$$

Fonte: Steinbruch e Winterle (1987, p. 476).

No conjunto de elementos que instituem a praxeologia analisada pelos autores do livro, é possível perceber em boa parte das situações, que a técnica está associada ao discurso teórico – tecnológico, como no estudo de base e dimensão onde a combinação linear está justificando o jeito de fazer. O que nos faz compreender essa praxeologia, adotada pelos autores. Assim como em nosso MER o registro algébrico é apresentado como estratégia para explicar e justificar conceitos dos objetos estudados, propriedades e teoremas. Mas há objetos na OM do livro, como os sistemas lineares, cuja organização praxeológica apresenta o bloco prático-técnico. Os autores, também se valem das construções geométricas e de bem pouca resolução de problemas contextualizados (a partir da realidade do aluno, como articulando o objeto em estudo com outras áreas do conhecimento), isto é, pouca aplicação.

5.2 DISCUSSÃO DA OMD DO LIVRO DIDÁTICO SELECIONADO

Os tipos de tarefas estão postos de forma clara, pois define tal conceito e aplica. As razão de ser estão de forma explicitados, como aplicação da técnica oriunda de definições, pois os motivos aos quais se propõe de certa forma são alcançados. Verificar se é espaço, verificar se é subespaço? Verificar se é base, ou dimensão? Mas não leva em consideração o caráter epistemológico dos objetos. Com relação ao critério de pertinência são representativos das situações matemáticas, tendo em vista as necessidades matemáticas dos alunos.

Com relação as τ são esboçadas, sendo que os autores resolvem um exemplo e propõe aos alunos algo semelhante. Não consideramos efetivamente um problema, pois as tarefas e as técnicas utilizadas não permitem o pensar dos alunos sobre os objetos. São inteligíveis e confiáveis dada as condições de seu emprego, tendo sua importância satisfatória, para que se propõe, que tem ao nosso ver uma intenção diferente do nosso modelo, com relação as articulações.

Em nossas análises não percebemos justificação em algumas técnicas, a não ser a presença de alguns teoremas. Mas o que justifica a técnica de um modo geral são as definições apresentadas dos objetos, sendo que os argumentos utilizados são sim cientificamente válidos. Vimos que o resultado tecnológico da atividade com combinações lineares, pode ser explorado para produzir novas técnicas para resolver novas tarefas até chegar em base e dimensão.

Podemos perceber a preocupação dos autores de I, com o desenvolvimento cognitivo do aluno e com a OD das atividades, que ao nosso ver poderia iniciar por sistemas e não com espaços, que auxiliam o professor na elaboração de seu texto do saber.

A obra apresenta uma variedade de tarefas propostas aos alunos o que enriquece a atividade matemática em tornar os problemas rotineiras. Constatamos algumas tarefas problemáticas, com relação aos espaços, pois há tarefas até no R^4.

Após a análise da OMD do livro didático procuraremos responder questões que emergem do MER, tais como:

No sentido de integrações de praxeologias para um fazer de complexidade crescente há praxeologias matemáticas que articulem os sistemas lineares com o estudo de matrizes?

As praxeologias matemáticas, em termos de tarefas e técnicas, que levam os alunos ao encontro dos espaços vetoriais articuladas com o estudo de sistemas lineares, num fazer de complexidade crescente?

Os autores do livro analisado constroem sua OMD tomando como base as definições e aplicações diretas da definição, portanto algo trivial. Inicia com o estudo de vetores, passa aos espaços vetoriais, combinação linear, LD e LI, e por fim base e dimensão, comprovando que o *modelo* *epistemológico dominante* dos objetos analisados que apresentam como principal tecnologias, esta que justifica as técnicas, é a aplicação da definição de espaços vetoriais e de combinação linear, portanto modo de pensar dos autores exige que as tarefas com LD, LI, base e dimensão, sejam objetos de estudo anterior, ou seja, as tarefas com combinação lineares devem surgir como problematização da técnica apresentada na combinação linear.

Segundo Dorier et al. (1997) o estudo dos objetos *base e dimensão* constituem noções elementares de AL. Esta ideia não quer dizer que seja a mais simples, mas significa que são noções fundamentais para construir outras noções de AL.

Todos os tipos de tarefas são apresentadas a partir de aplicação direta das definições. Como citam Dorier (1997), Dorier et al. (1999) o livro utiliza-se do formalismo da AL para desenvolver sua OMD e que segundo esses autores acaba se transformando em obstáculo no processo de ensino desta disciplina de curso superior. Tal formalismo deixa de lado comentários importantes sobre os temas estudados, como, por exemplo a articulação entre os sistemas lineares, incluindo os homogêneos com o estudos dos espaços vetoriais, portanto um estudo tecnicista, com mera aplicação da técnica apresentada na definição.

Conforme Gascón (2001) os modelos *teoricistas*, são os que trazem a *teoria* como algo *cristalizado*, isto é, pronto e finalizado, que não há preocupação com a atividade matemática, e sim o resultado desta, que é o que constatamos nos tipo de tarefas apresentadas na OMD do livro analisado. Logo, os modelos de ensino *teoricistas* reduzem todos os saberes matemáticos a um conjunto finito de proposições trivialmente verdadeiras *axiomas* e que podem enunciar-se utilizando, unicamente, de termos, perfeitamente, conhecidos (GASCÓN, 2001, p.5). NA OMD isto fica claro quando os autores começam a tratar de espaços vetoriais, onde apresentam os 8 axiomas. O ensino fica reduzido a aplicação direta da definição.

Nosso MER parte do gênero de tarefa, que é *estudar qualitativamente os sistemas lineares*, onde o aluno de graduação a partir de obras que lhes serão fornecida no PER poderá *manusear* os sistemas lineares e ir construindo a partir deste saber outros saberes, portanto completamente fora do que propõe os autores do livro, até porque o objeto sistemas é apresentado como apêndice e sem articulação com os temas já estudados como espaços, combinações e base.

Podemos encontrar técnicas dadas para se enfrentar uma determinada tarefa e daí passa-se a resolver várias tarefas utilizando as mesmas técnicas, enquanto que outras resultam de justificativa, pois apresentam alguns teoremas, que poderíamos formular tipo de tarefas que fizesse o leitor chegar num processo de institucionalização nos teoremas e não colocar e criar tipo de tarefas a partir deles.

Na obra em análise, constatamos articulações entre o estudo a de combinações lineares (tecnologia) com LD, LI, base e dimensão podendo até caracterizar as tarefas em um nível de complexidade crescente. A tecnologia *combinação linear* justifica as técnicas utilizadas para espaço gerado, LD, LI, além de base e a dimensão. Postulamos estar de acordo com nosso modelo, pois consideramos as tarefas com combinação linear uma tarefa fundamental para o estudo desses objetos. Ainda no sentido de integrações de praxeologias para um fazer de complexidade crescente os autores não apresentam praxeologias matemáticas que articulem os sistemas lineares com o estudo de matrizes, que epistemologicamente, já mostramos no trabalho de Cayley (1858) no capítulo que tratou do estudo histórico de matrizes.

Nosso modelo revelou que a partir de sistemas lineares surge a ideia de matrizes, como abreviação desses, espaços vetoriais, LD e LI, base e dimensão, enfim é a tecnologia. Os autores da obra em análise, mostram tarefas pontuais, não parte do estudo de sistemas lineares. A TD nos mostra que um objeto de ensino tem passado e futuro, e daí a necessidade de integrações de tarefas e técnicas entre si, onde o professor proporcione uma *infraestrutura mínima* de saberes quanto a noção de LD, LI, base aos alunos, por meio da combinação linear, como podemos evidenciar com os tipos de tarefas T_4, T_5, T_6 e T_7.

As praxeologias matemáticas, em termos de tarefas e técnicas, levam os alunos ao encontro dos espaços vetoriais articuladas com o estudo de sistemas lineares, num fazer de complexidade crescente?

A resposta é não. Evidenciamos que a OM do livro analisado não apresenta articulações e integrações de praxeologias que favoreçam um fazer mínimo racional sobre os objetos sistemas lineares e espaços vetoriais, pois a tecnologia, que justifica a técnica apresentada é a utilização direta da definição de espaços vetoriais. Podemos perceber em torno do objeto espaços vetoriais uma OMP, além da razão de ser para se estudar tal objeto é a aplicação dos 8 axiomas, portanto é ensinar técnicas de resolução, às vezes, sem criar condições favoráveis à apropriação das tecnologias, nelas relacionadas e à dimensão econômico didática.

Na OMD não se leva em conta a história e a epistemologia dos espaços vetoriais, que postulamos ser importante do ponto de vista da didática da matemática, já que os objetos matemáticos de ensino têm uma história que pode ser contada por meio de diferentes epistemologias. Comparando com nosso MER, de um modo geral, procuramos (re) construir a OM em uma instituição docente, desenvolvida a partir de certa problemática que proporciona as razão de ser iniciais da OM em I_i.

Postulamos que os objetos matemáticos podem ser apresentados/ensinados aos alunos levando-se em conta a história e a epistemologia, e por meio da didática tomarmos consciência de um fenômeno de TD, que os objetos s serem ensinados têm uma história que pode ser *contada* por diferentes praxeologias.

Com relação as técnica são fáceis de utilizar, sua importância é satisfatória, sua confiabilidade é aceitável sendo dadas suas condições de emprego e percebemos que são suficientemente inteligíveis.

Em nosso pontos de vista, os cinco itens elencados abaixo, caracterizam a razão de ser do objeto em estudo na instituição livro. Enfim, constatamos que a OM para ensinar espaços vetoriais até o estudo de dimensão de um espaço, levam em conta as seguintes situações:

i) Tratam os espaços por mera aplicação da definição, tornando-o bastante abstrato;

ii) Definem subespaço sem articular com os sistemas lineares;

iii) Apresentam as combinações lineares por definição, e em um nível de complexidade crescente de tarefas este objetos é articulado com o subespaço gerado, espaço finitamente gerado, LD e LI, base e dimensão.

iv) Não constatamos a problematização das tarefas e as situações apresentadas de modo a tornar as tarefas inteligíveis,

v) Os tipos de tarefas podemos considera-los muito atomizados (no sentido de pouco articulados entre si, associando assim cada **T** a τ correspondente, caracterizando uma organização tecnicista, enquanto poderia ir ampliando a técnica.

Os objetos de saber analisados fazem parte das recomendações curriculares presente no PPC do curso de Licenciatura do IFPA e são utilizados como referência pelos professores, que ministram a disciplina AL.

Estes saberes que analisamos na obra principal de ensino de AL no IFPA, segundo nosso olhar, apresentam tarefas pontuais, e portanto atomizadas. As condições que o livro coloca, ao nosso ver, são que os sistemas lineares são movimentados em separado, não há tarefas que evocam o alcance da técnica, isto é, não há articulação a partir de novas tarefas. Segundo o critério de identificação[37], verifica-se que tais tarefas foram postas de forma clara e bem identificadas; e com relação ao critério da razão de ser, os tipos de tarefas aparecem apenas como aplicação da técnica a partir da definição, pois define-se matrizes e apresentam-se as propriedades e as tarefas são aplicações destas; define-se base e dimensão e as tarefas são aplicações da definição. Comparando com nosso modelo as tarefas são engendradas a partir de sistemas lineares sendo articuladas ao estudo de matrizes, espaços, base e dimensão.

Partiremos para análise do texto do saber do professor que leciona a disciplina AL no IFPA, sendo a OMD foi preparada para o curso de matemática.

5.3 ANÁLISE DO TEXTO DO SABER DE UM PROFESSOR I_1 DA INSTITUIÇÃO IFPA QUE MINISTRA A DISCIPLINA AL NO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Segundo Garcia e Ruiz, (2005), o sistema de ensino das matemáticas podemos encontrar um

[37] Cf. Almouloud (2015).

modelo epistemológico dominante implícito, que se impõe aos sujeitos de uma determinada instituição e que tem uma importância didática crucial, pois *determina* o que se entende por ensinar e aprender matemática em uma instituição.

Para Bosh e Gascón (2001) os diversos componentes das praxeologias didáticas espontâneas dos professores, que estão assujeitados a uma determinada instituição I_i, são fragmentos de uma determinada organização institucional (por exemplo o livro didático), que esses autores denominaram de uma praxeologia ou organização didática de I_i.

Em nossa proposta de praxeologia do MER, como um método de modelização, segundo a TAD, e como sugerem Bosh e Gascón (2001), levamos em conta a organização didática (OD) da instituição, como um sistema a ser modelizado;

5.3.1 Aspectos introdutórios

De um modo geral o professor de ensino superior baseia-se no livros presentas no ementário da disciplina, contida no PPC do curso, onde ministra suas aulas. O professor tem a função de colocar a OM em ação, logo postulamos que o papel central do professor esta na criação da OD. A OD irá exigir técnicas didáticas que permitam fazer *viver* as tarefas demandadas pelo MER, de um determinado modo que permita ao aluno, sob as condições a que estão subordinados na I, quanto à infraestrutura matemática e didática, por exemplo, de proceder o estudo dos espaços vetoriais a partir das combinações lineares.

No âmbito da TDI, considerando a ementa da disciplina AL do curso de licenciatura em Matemática do IFPA, constante no PPC do curso, materializa-se para o professor de matemática nos conteúdos que constam dos livros didáticos de AL. Nessa perspectiva, cabe ao professor de matemática a partir da ementa do curso, eleger, organizar e desenvolver os objetos matemáticos da ementa, que consolidará o *texto de saber*.

O equipamento praxeológico do professor deve mobilizar vários saberes e para isto é necessário, tais quais o conhecimento matemático-didático, proposto por Chevallard (2001, 2009), o qual postula ser importante para a (re) construção do seu texto do saber e da aplicação deste em sala de aula. Esta OMD, ainda deve estar em conformidade com a I, que a mesma será desenvolvida e que conforme Silva (2013) possa contribuir para que o aluno construa uma boa relação com o objeto matemático de estudo.

Conforme conversa com o professor I_1, este utiliza como base dois livros didáticos para a (re) construção do seu *texto do saber*, que é considerado por ele (**I_1**) como sua principal referência para construção deste. Neste momento caracterizado pela etapa da TD, que é a TDI - *saber a ensinar,* o professor é responsável por recriar o *saber,* isto é, estrutura o objeto matemático a ser ensinado de um modo racional, transformando o *saber a ensinar* em *saber ensinado*. Ainda é importante frisar que o aluno no momento da construção do texto do saber é hipotético, enquanto que a aplicação deste, que é o momento de interações entre o professor e o aluno, este passa a ser passa a ser real.

O professor recorre ao livro didático, que está presente em seu plano de curso, para identificar os **T** e **t** que serão (re) construídas no texto do saber e aplicadas no momento do *saber ensinado*, ou seja, no momento de ação. Pensamos que não só o livro didático tem esta função, mas para um professor pesquisador **ξ** outras obras, como artigos científicos, dissertações e teses por exemplo, colaborará, também, na construção deste texto, pois para Silva (2013) o livro didático orienta o professor na (re)construção da OMD no texto de saber, mas não determina essa (re)construção, pois o professor não segue de forma integral o modelo de nenhum dos livros utilizados por ele, logo, a (re)construção de OMD realizada pelo professor é de co-determinação.

5.3.2 Análise da OMD do texto do saber do professor (I_1)

O professor $\mathbf{I_1}$ inicia seu texto do saber com o estudo de matrizes, conforme constatamos no material (texto do saber) fornecido por I_1 aos pesquisador **ξ**. apresentando esse objeto por definição, depois as matrizes genéricas, operações onde a razão de ser esta na aplicação direta da definição, sem relacionar com os sistemas como propomos no MER.

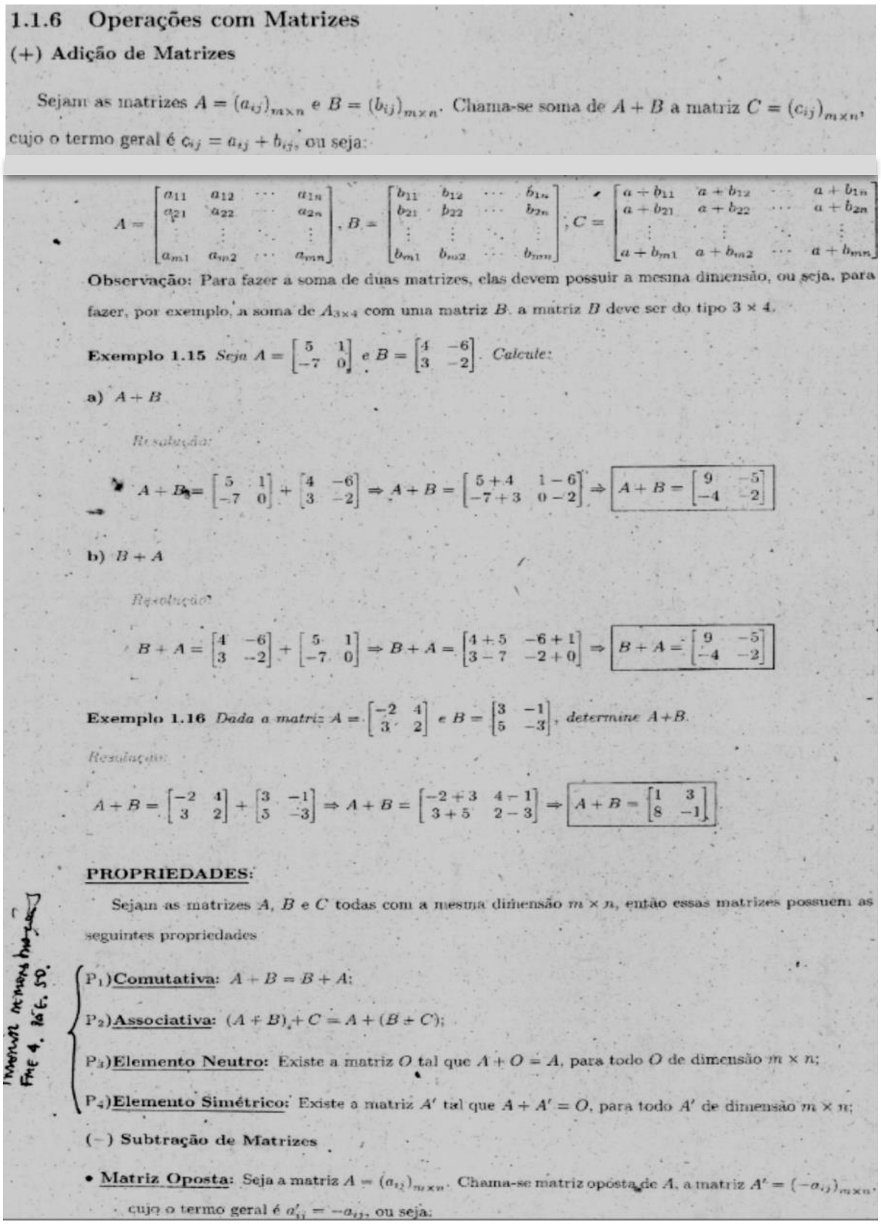
As matrizes são definidas como: dados dois números naturais e não nulos, chama-se **m** por **n** toda a tabela **M** formada por números reais formada por m linha s e n colunas. Em seguida, trata as representações de matrizes, o estudo das matrizes genéricas e lei de formação de uma matriz.

Trabalha com igualdade de matrizes, matrizes genéricas e os tipos de matrizes (matrizes especiais): linha, coluna e real. Inicia, em seguida as operações com matrizes: adição, subtração e multiplicação por um escalar e multiplicação entre matrizes de modo igual ao como se encontra nos livros didáticos do ensino superior, apresentado, para finalizar este capítulo, tarefas para operar com matrizes.

Mostramos que historicamente as matrizes não têm sua gênese de tabelas, o que poderíamos chamar de um falso saber[38], e sim este objeto nasce por causa dos sistemas lineares, conforme nos mostrou Cayley (1858). Portanto, *matriz* é ensinada a partir de uma OMD, por meio de uma *praxeologia espontânea* de I_1 já que esta organização praxeológica é apresentada deste jeito nos livros didáticos. As operações com matrizes são apresentadas na Figura 53, sem articulação com os sistemas lineares como propomos.

[38]As tarefas apresentadas pelos autores não esta relacionado com a gênese do objeto matriz, por exemplo.

Figura 53 - Operações com matrizes.



1.1.6 Operações com Matrizes

(+) Adição de Matrizes

Sejam as matrizes $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $B = (b_{ij})_{m\times n}$. Chama-se soma de $A + B$ a matriz $C = (c_{ij})_{m\times n}$, cujo o termo geral é $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, ou seja:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} a+b_{11} & a+b_{12} & \cdots & a+b_{1n} \\ a+b_{21} & a+b_{22} & \cdots & a+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a+b_{m1} & a+b_{m2} & \cdots & a+b_{mn} \end{bmatrix}$$

Observação: Para fazer a soma de duas matrizes, elas devem possuir a mesma dimensão, ou seja, para fazer, por exemplo, a soma de $A_{3\times 4}$ com uma matriz B, a matriz B deve ser do tipo 3×4.

Exemplo 1.15 *Seja* $A = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -7 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$. *Calcule:*

a) $A + B$

Resolução:

$$A + B = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -7 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow A + B = \begin{bmatrix} 5+4 & 1-6 \\ -7+3 & 0-2 \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{A + B = \begin{bmatrix} 9 & -5 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}}$$

b) $B + A$

Resolução:

$$B + A = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -7 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow B + A = \begin{bmatrix} 4+5 & -6+1 \\ 3-7 & -2+0 \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{B + A = \begin{bmatrix} 9 & -5 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}}$$

Exemplo 1.16 *Dada a matriz* $A = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$, *determine* $A+B$.

Resolução:

$$A + B = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow A + B = \begin{bmatrix} -2+3 & 4-1 \\ 3+5 & 2-3 \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{A + B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}}$$

PROPRIEDADES:

Sejam as matrizes A, B e C todas com a mesma dimensão $m \times n$, então essas matrizes possuem as seguintes propriedades

P₁)**Comutativa:** $A + B = B + A$;

P₂)**Associativa:** $(A + B) + C = A + (B + C)$;

P₃)**Elemento Neutro:** Existe a matriz O tal que $A + O = A$, para todo O de dimensão $m \times n$;

P₄)**Elemento Simétrico:** Existe a matriz A' tal que $A + A' = O$, para todo A' de dimensão $m \times n$;

(−) Subtração de Matrizes

• **Matriz Oposta:** Seja a matriz $A = (a_{ij})_{m\times n}$. Chama-se matriz oposta de A, a matriz $A' = (-a_{ij})_{m\times n}$, cujo o termo geral é $a'_{ij} = -a_{ij}$, ou seja:

Fonte: I_1 (2015).

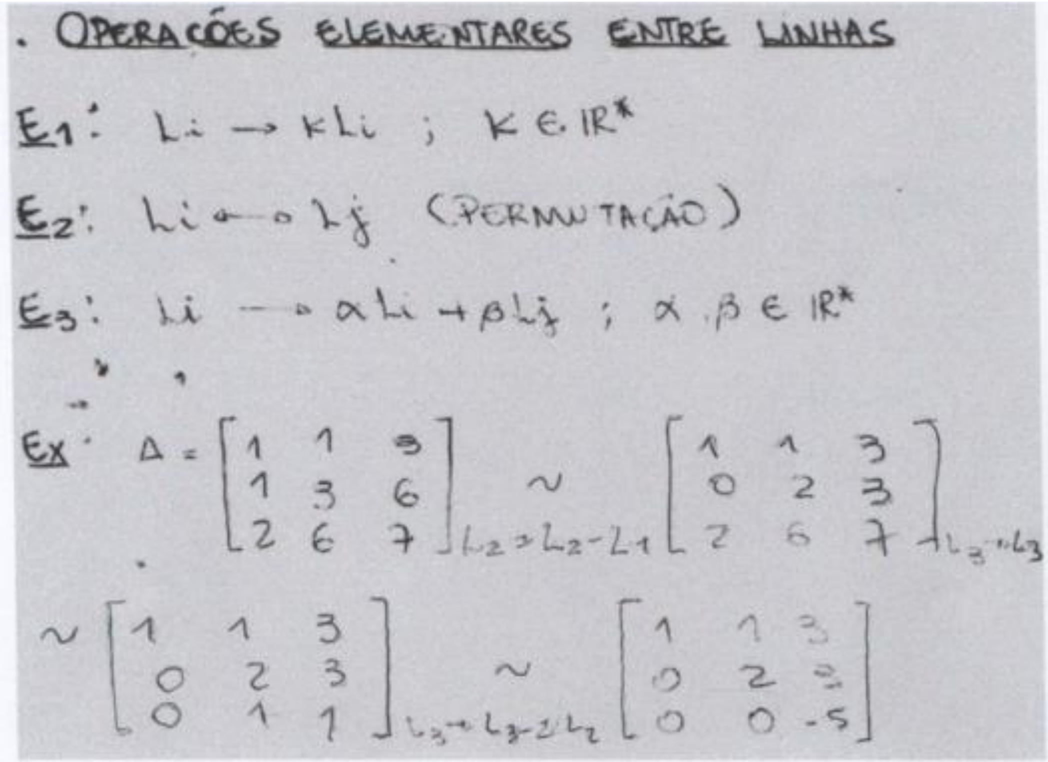
Os determinantes são apresentados por definição, onde sua razão de ser é a aplicação da definição. Este objeto matemático é trabalhado de modo espontâneo, ou seja, esta praxeologia espontânea tem a ver com a ideia de que, às aulas para ensinar determinantes são ministradas definindo-os, determinando sua ordem, resolvendo determinantes de ordem 2, depois de ordem maiores, estudo de menor complementar e cofator. Aplica-se a regra de Sarrus, Laplace, Vandermonde e Chió para resolução de determinantes de ordem maiores que dois e por meio das propriedades dos determinantes é possível resolver alguns casos de forma rápida.

Os tipos de tarefas estão postos de forma clara e bem identificados; mas as razões de ser dos tipos de tarefas é aplicar regras e definições, sem, no entanto, dar, talvez, condições favoráveis à aprendizagem do aluno, logo os tipos de tarefas considerados são representativos das situações matemáticas, mais frequentemente encontradas e se são pertinentes tendo em vista as necessidades matemáticas dos alunos. Não está presente em nosso modelo, mas os determinantes poderias ser trabalhados a partir dos sistemas lineares.

As técnicas para enfrentar as tarefas são puras aplicações de técnicas de resolução de determinantes, portanto tais técnicas são esboçadas, sendo que as formas de justificação utilizadas são próximas das justificativas matematicamente válidas.

Na Figura 54 são apresentados os operadores elementares por I_1 e uma tarefa para aplicar os operadores. Em nossa proposta de MER, mostramos a gênese desses operadores, que são justificadas pelo método da substituição e eliminação.

Figura 54– Texto do saber apresentado operadores elementares.



. OPERAÇÕES ELEMENTARES ENTRE LINHAS

E_1: $L_i \rightarrow kL_i$; $k \in \mathbb{R}^*$

E_2: $L_i \leftrightarrow L_j$ (PERMUTAÇÃO)

E_3: $L_i \rightarrow \alpha L_i + \beta L_j$; $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$

$$Ex: A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \\ 2 & 6 & 7 \end{bmatrix}_{L_2 \rightarrow L_2 - L_1} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 7 \end{bmatrix}_{L_3 \rightarrow L_3}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}_{L_3 \rightarrow L_3 - 2L_2} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

Fonte: I_1 (2015).

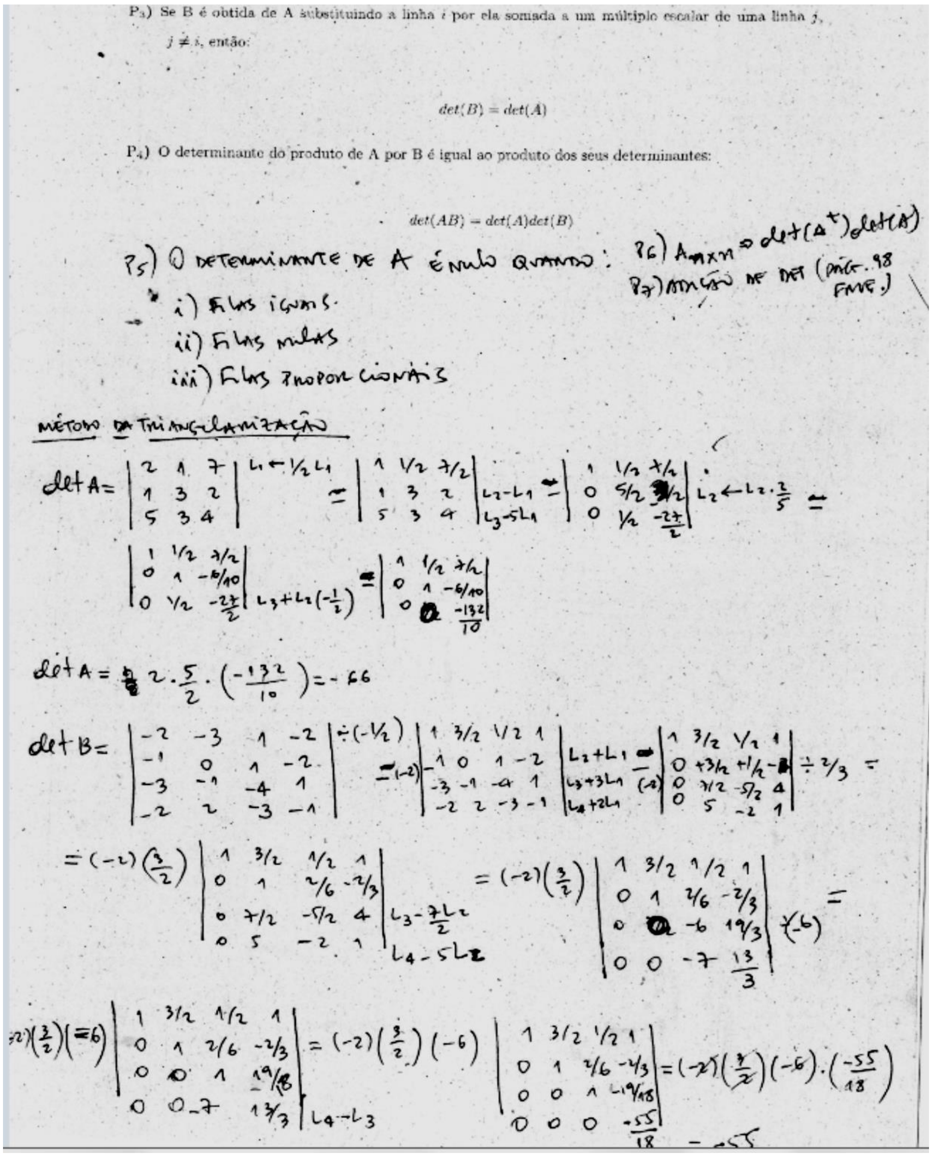
No nosso MER vimos que o método da eliminação gaussiana é a descrição do método da substituição e eliminação, pois no sistema de equações lineares quando substituímos e eliminamos incógnitas em outra equação do sistema, obtemos os operadores lineares, ou seja, é dado uma razão de ser para esta técnica do ponto de vista matemático.

Na Figura 55 são apresentados duas tarefas para calcular o determinante utilizando os operadores lineares. Trabalha-se as linhas por meio de operadores, até que a matriz fique escalonada.

As técnicas escolhidas por I_1 utilizam registros algébricos e linguagem matemática simbólica para representar os operadores, enquanto que em nosso modelo propomos uma tarefa que dará a gênese desses operadores elementares, propiciando ao aluno a busca de como surgem estas operações.

O bloco tecnológico-teórico que justifica as técnicas no caso os sistemas lineares, não aparece na técnica (escalonamento) utilizada por I$_1$.

Figura 55– Tarefa para o cálculo de determinantes.



P$_3$) Se B é obtida de A substituindo a linha i por ela somada a um múltiplo escalar de uma linha j, $j \neq i$, então:

$$det(B) = det(A)$$

P$_4$) O determinante do produto de A por B é igual ao produto dos seus determinantes:

$$det(AB) = det(A)det(B)$$

P5) O determinante de A é nulo quando:
i) filas iguais.
ii) filas nulas
iii) filas proporcionais

P6) $A_{mxn} \Rightarrow det(A^t) = det(A)$
P7) ... de det (pág. 98 FME)

Método da triangularização

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 1 & 3 & 2 \\ 5 & 3 & 4 \end{vmatrix} \; L_1 \leftarrow \tfrac{1}{2}L_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1/2 & 7/2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 5 & 3 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 - L_1 \\ L_3 - 5L_1 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1/2 & 7/2 \\ 0 & 5/2 & -3/2 \\ 0 & 1/2 & -27/2 \end{vmatrix} \; L_2 \leftarrow L_2 \cdot \tfrac{2}{5} =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1/2 & 7/2 \\ 0 & 1 & -6/10 \\ 0 & 1/2 & -27/2 \end{vmatrix} \; L_3 + L_2\left(-\tfrac{1}{2}\right) = \begin{vmatrix} 1 & 1/2 & 7/2 \\ 0 & 1 & -6/10 \\ 0 & 0 & -132/10 \end{vmatrix}$$

$$\det A = 2 \cdot \frac{5}{2} \cdot \left(-\frac{132}{10}\right) = -66$$

$$\det B = \begin{vmatrix} -2 & -3 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & -2 \\ -3 & -1 & -4 & 1 \\ -2 & 2 & -3 & -1 \end{vmatrix} \div(-1/2) =_{(-2)} \begin{vmatrix} 1 & 3/2 & -1/2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -2 \\ -3 & -1 & -4 & 1 \\ -2 & 2 & -3 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} L_2 + L_1 \\ L_3 + 3L_1 \\ L_4 + 2L_1 \end{matrix} =_{(-2)} \begin{vmatrix} 1 & 3/2 & -1/2 & 1 \\ 0 & 3/2 & 1/2 & -1 \\ 0 & 7/2 & -5/2 & 4 \\ 0 & 5 & -2 & 1 \end{vmatrix} \div 2/3 =$$

$$= (-2)\left(\frac{3}{2}\right) \begin{vmatrix} 1 & 3/2 & -1/2 & 1 \\ 0 & 1 & 2/6 & -2/3 \\ 0 & 7/2 & -5/2 & 4 \\ 0 & 5 & -2 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ L_3 - \frac{7}{2}L_2 \\ L_4 - 5L_2 \end{matrix} = (-2)\left(\frac{3}{2}\right) \begin{vmatrix} 1 & 3/2 & -1/2 & 1 \\ 0 & 1 & 2/6 & -2/3 \\ 0 & 0 & -6 & 19/3 \\ 0 & 0 & -7 & 13/3 \end{vmatrix} \div(-6) =$$

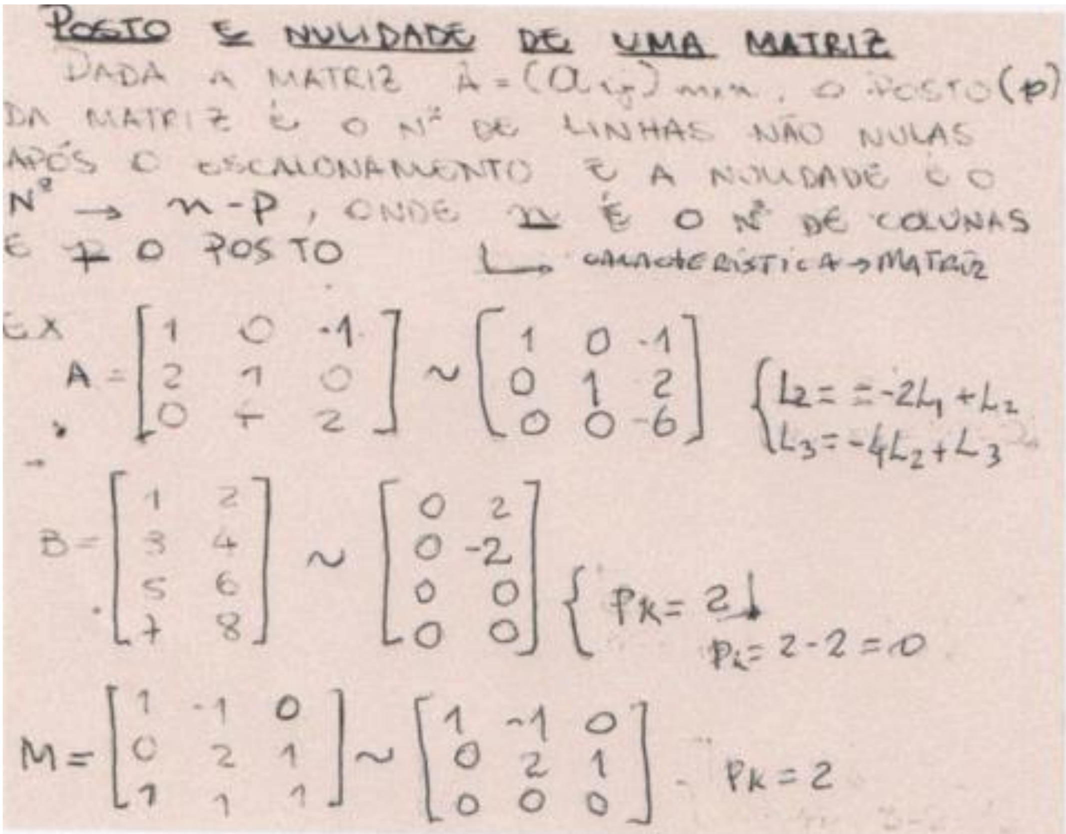
$$(-2)\left(\frac{3}{2}\right)(-6) \begin{vmatrix} 1 & 3/2 & -1/2 & 1 \\ 0 & 1 & 2/6 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1 & -19/18 \\ 0 & 0 & -7 & 13/3 \end{vmatrix} \; L_4 - L_3 = (-2)\left(\frac{3}{2}\right)(-6) \begin{vmatrix} 1 & 3/2 & -1/2 & 1 \\ 0 & 1 & 2/6 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1 & -19/18 \\ 0 & 0 & 0 & -55/18 \end{vmatrix} = (-2)\left(\frac{3}{2}\right)(-6)\cdot\left(\frac{-55}{18}\right) = -55$$

Fonte: I$_1$ (2015).

A tarefa é enfrentada utilizando como técnica utilizando os operadores elementares para deixar a matriz na forma *escada*, tornando o cálculo do determinante, apenas o produto dos elementos da diagonal principal. Podemos perceber que essa prática justifica esta técnica é nada mais que o método da eliminação e justificação, conforme já demonstramos em nosso MER.

Na Figura 56 é definido *posto* e *nulidade* de uma matriz. O posto de uma matriz $\mathbf{A}_{mxn}$ genérica é o número de linhas não nulas, após o escalonamento, enquanto que a nulidade é o número $\mathbf{n} - \mathbf{p}$, onde $\mathbf{n}$ é o número de colunas e $\mathbf{p}$ é o posto.

Figura 56 - Posto e nulidade de uma matriz.


POSTO E NULIDADE DE UMA MATRIZ

DADA A MATRIZ $A = (a_{ij})_{m \times n}$, O POSTO (p) DA MATRIZ É O Nº DE LINHAS NÃO NULAS APÓS O ESCALONAMENTO E A NULIDADE É O Nº → n − p, ONDE n É O Nº DE COLUNAS E p O POSTO ↳ CARACTERÍSTICA → MATRIZ

EX

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix} \quad \begin{cases} L_2 = -2L_1 + L_2 \\ L_3 = -4L_2 + L_3 \end{cases}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \{ P_K = 2$$

$$P_K = 2 - 2 = 0$$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad P_K = 2$$

Fonte: I_1 (2015).

I_1 passa a trabalhar com sistemas de equações lineares, após apresentar a matriz na forma ampliada, mas sem relacionar matrizes com sistemas, como mostrou Cayley (1858), conforme mostra as Figuras 57 e 58. Inicia apresentando os sistemas lineares, que pode ser um sistema linear possível e determinado, possível e indeterminado e indeterminado.

Constatamos que a técnica utilizada por I_1 (professor autor deste texto do saber) para resolver sistemas lineares privilegiaram a resolução destas tarefas utilizando os operadores elementares e que I_1 poderia utilizar no processo de estudo a representação geométrica.

Figura 57– Introdução ao estudo da OM de sistemas lineares.

CAPÍTULO 1: EQUAÇÕES LINEARES E MATRIZES.

1.1 SISTEMA DE EQUAÇÕES LINEARES

* EQUAÇÕES LINEARES: A EQUAÇÃO $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = b$, OU SEJA:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b \qquad (1.1)$$

QUE EXPRESSA A QUANTIDADE REAL OU COMPLEXA b EM FUNÇÃO DA INCÓGNITAS $x_1, x_2, \dots, x_n$ E DAS CONSTANTES REAIS OU COMPLEXAS $a_1, a_2, \dots, a_n$ É CHAMADA DE EQUAÇÃO LINEAR.

* SOLUÇÃO: UMA SEQUENCIA $(s_1, s_2, \dots, s_n)$ É DITA SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO (1.1) QUANDO $x_1 = s_1$, $x_2 = s_2$, ..., $x_n = s_n$ SATISFAZ A IGUALDADE.

EXEMPLO: $\begin{cases} 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -13 \\ (2, 3, -4) \text{ É SOLUÇÃO} \end{cases}$

$$6.2 - 3.3 + 4.(-4) = 12 - 9 - 16 = 12 - 25 = -13$$

* SISTEMA LINEAR: É UM CONJUNTO DE m EQUAÇÕES LINEARES CADA UMA COM n VARIÁVEIS.

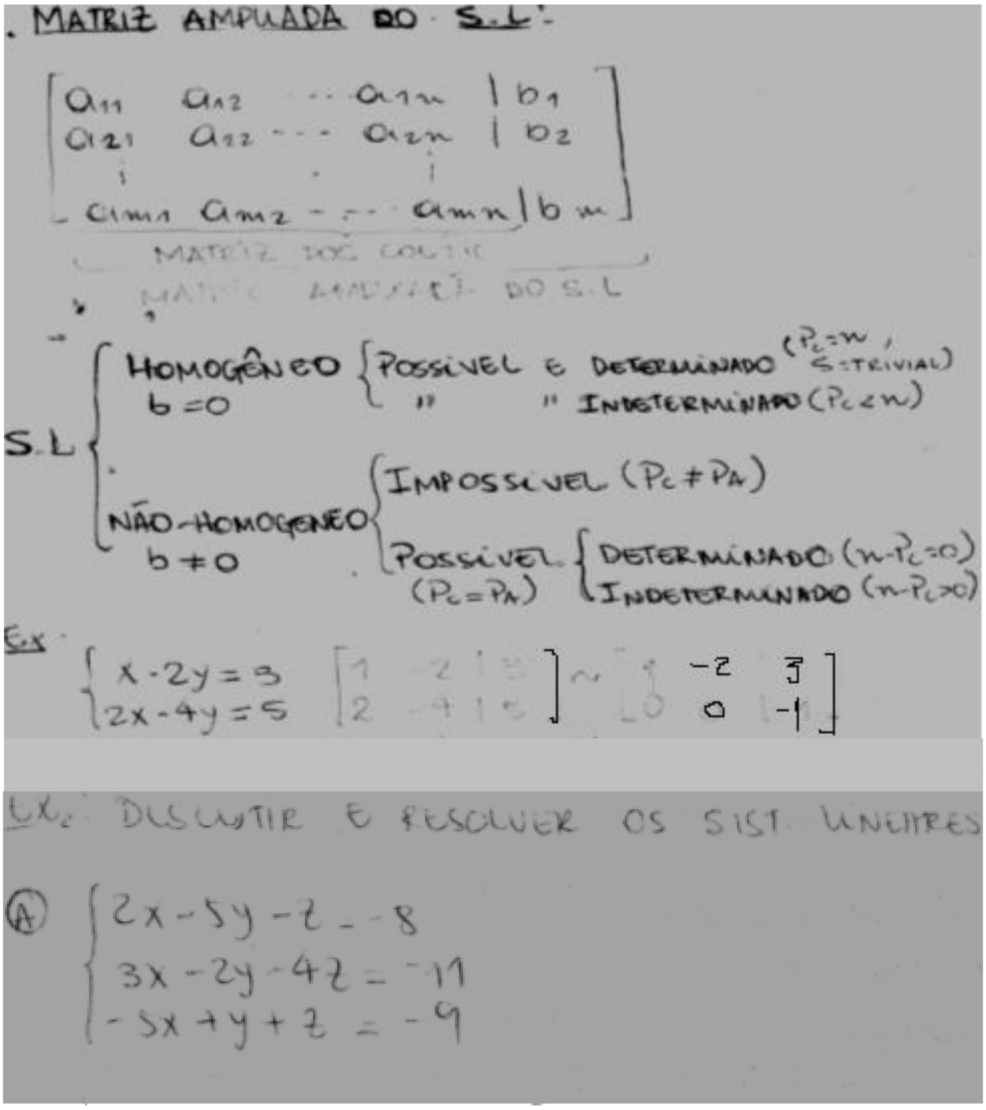
* REPRESENTAÇÃO:

$$S_{mn} = \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (1.2)$$

Fonte: I_1 (2015).

Na Figura foi apresentada pelo professor uma definição de equações lineares e de sistema linear e sua representação. Apresentou um exemplo 6 $x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -13$e uma das soluções (2, 3, -4) do sistema.

Figura 58 - OM de sistemas lineares.

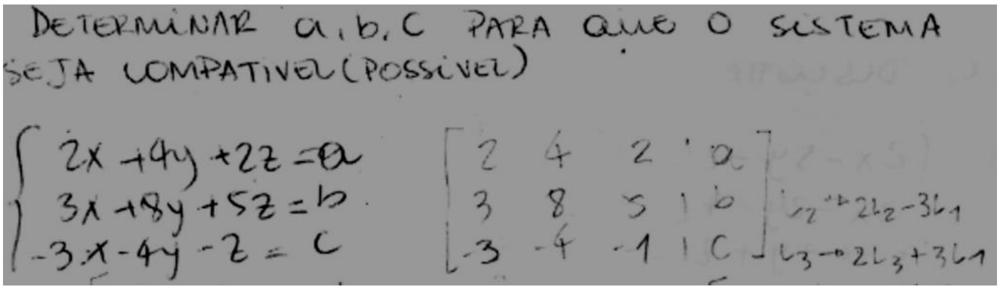


Fonte: I_1 (2015).

Três sistemas lineares são apresentados e o tipos de tarefa é resolver o sistema, sendo dois 2 por dois e um três por três, sendo este último é necessário se discutir, ou seja, verificar se é um sistema possível ou impossível. Pela análise dessa atividade, observou-se que I_1 privilegia a aplicação direta do método denominado por I_1 como método da triangularização.

Na Figura 59 é apresentado uma atividade que mais tarde será apresentada como a ideia de um espaço gerado. O professor resolve o sistema operando-se as linhas via operadores lineares e determina que o sistema é compatível e determinado.

Figura 59 - OM de sistemas lineares.



DETERMINAR a, b, C PARA QUE O SISTEMA SEJA COMPATIVEL (POSSIVEL)

$$\begin{cases} 2x + 4y + 2z = a \\ 3x + 8y + 5z = b \\ -3x - 4y - z = c \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 2 & a \\ 3 & 8 & 5 & b \\ -3 & -4 & -1 & c \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ L_2 \to 2L_2 - 3L_1 \\ L_3 \to 2L_3 + 3L_1 \end{array}$$

Fonte: I_1 (2015).

Inicia, conforme Figura 60 o estudo de espaços vetoriais apresentando os 8 axiomas, e as tarefas são resolvidas por técnicas com aplicações diretas da definição, tonando a técnica trivial, como segue:

Propriedades da adição

A_1 : $u + v = v + u$ (fechamento)

A_2 : $(u + v) + w = u + (v + w)$ (associativa)

A_3 : $\exists\ 0 \in \Re^n$, $\forall u \in R^n$, $u + 0 = u$ (elemento neutro)

A_4 : $\forall u \in R^n$, $\exists (-u) \in R^n$, $u + (-u) = 0$ (elemento simétrico)

Propriedades da multiplicação

M_1 : $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$ (distributividade dos escalares)

M_2 : $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$ (distributividade com os vetores)

M_3 : $(\alpha\beta)u = \alpha(\beta u)$ (associatividade escalar)

M_4 : $1u = u$ (unidade do corpo)

Figura 60 - OM referente ao objeto espaços vetoriais.

② ESPAÇO VETORIAL

SEJA UM CORPO V DE OBJETOS E UM CORPO K DE ESCALARES, SENDO $V \neq 0$ E MUNIDO DE DUAS OPERAÇÕES:

+) $\vec{u} + \vec{v} \in V, \forall \vec{u}, \vec{v} \in V$

•) $\alpha \vec{v} \in V, \forall \alpha \in K$ E $\vec{v} \in V$.

CHAMAMOS V DE ESPAÇO VETORIAL SOBRE K SE SATISFIZER AS SEGUINTES CONDIÇÕES:

$A_1)\ \vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$

$A_2)\ (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$

$A_3)\ \vec{0} + \vec{u} = \vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$

$A_4)\ \vec{u} + (-\vec{u}) = (-\vec{u}) + \vec{u} = \vec{0}$

$M_1)\ \alpha(\beta \vec{u}) = (\alpha\beta)\vec{u}$

$M_2)\ \alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$

$M_3)\ (\alpha + \beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$

$M_4)\ 1\vec{u} = \vec{u}1 = \vec{u}$

ONDE $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$ E $\alpha, \beta \in K$. DENOTAREMOS POR $(V, +, \cdot)$ O ESPAÇO VETORIAL SOBRE K MUNIDOS DAS OPERAÇÕES + E •.

EXEMPLOS:

• SEJA V MUNIDO DAS OPERAÇÕES:

$$\begin{cases} (a,b) + (c,d) = (a \cdot b, b \cdot d) \\ \lambda(a,b) = (\lambda a, \lambda b) \end{cases}$$

V NÃO É ESPAÇO VETORIAL SOBRE $\mathbb{R}$, POIS:

$$(a,b) + (c,d) = (a \cdot b, b \cdot d) = (ba, db) = (b,a) + (d,b) \neq (c,d) + (a,b)$$

• SEJA V MUNIDO DAS OPERAÇÕES:

$$\begin{cases} (a,b) + (c,d) = (3b + 3d, -a - b) \\ \lambda(a,b) = (3\lambda b, -\lambda a) \end{cases}$$

V NÃO É ESPAÇO VETORIAL SOBRE $\mathbb{R}$, POIS NÃO SATISFAZ A CONDIÇÃO A_1.

Fonte: I_1 (2015).

Na Figura 61 os espaços vetoriais são apresentados por meio do estudo de Corpos.

Figura 61– OM apresentada para o estudo de corpo.

VI - ESPAÇOS VETORIAIS

① CORPO

- CHAMAMOS DE CORPO O CONJUNTO NUMÉRICO K QUE POSSUI AS SEGUINTES PROPRIEDADES:

A1) $a+b=b+a \quad , \forall a,b \in K$
A2) $a+(b+c)=(a+b)+c \quad , \forall a,b,c \in K$
A3) $0+a=a+0=a \quad , \forall a \in K$
A4) $a+(-a)=(-a)+a=0 \quad , \forall a \in K$
M1) $a \cdot b = b \cdot a \quad , \forall a,b \in K$
M2) $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c \quad , \forall a,b,c \in K$
M3) $a.1 = 1.a = a \quad , \forall a \in K$
M4) $a.a^{-1} = a^{-1}.a = 1 \quad , \forall a, \in K$
D) $a(b+c) = ab+ac \quad , \forall a,b,c \in K$

EXEMPLOS:

- $\mathbb{Z} = \{\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots\}$ NÃO É CORPO, POIS PARA UM $n \in \mathbb{Z}$, n^{-1} NÃO É INTEIRO A MENOS QUE n SEJA 1 OU -1.

- $\mathbb{Q} = \{x / x = p/q, \ p \in \mathbb{Z} \text{ e } q \in \mathbb{Z}^*\}$ É UM CORPO, POIS SATISFAZ AS NOVE CONDIÇÕES ACIMA.

- $\mathbb{C} = \{z = (x,y) / x \in \mathbb{R} \text{ e } y \in \mathbb{R}\}$ COM AS OPERAÇÕES DE ADIÇÃO E MULTIPLICAÇÃO DEFINIDA DA SEGUINTE MANEIRA:

$$\begin{cases} (x_1,y_1)+(x_2,y_2) = (x_1+x_2, y_1+y_2) \\ (x_1,y_1)\cdot(x_2,y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1) \end{cases}$$

É UM CORPO.

QUANDO O CORPO $K = \mathbb{R}$, SENDO $\mathbb{R}$ O CONJUNTO DOS NÚMEROS REAIS, CHAMAMOS K DE CORPO EUCLIDIANO.

QUANDO O CORPO $K = \mathbb{C}$, SENDO $\mathbb{C}$ O CONJUNTO DOS NÚMEROS COMPLEXOS, CHAMAMOS K DE CORPO HERMITIANO.

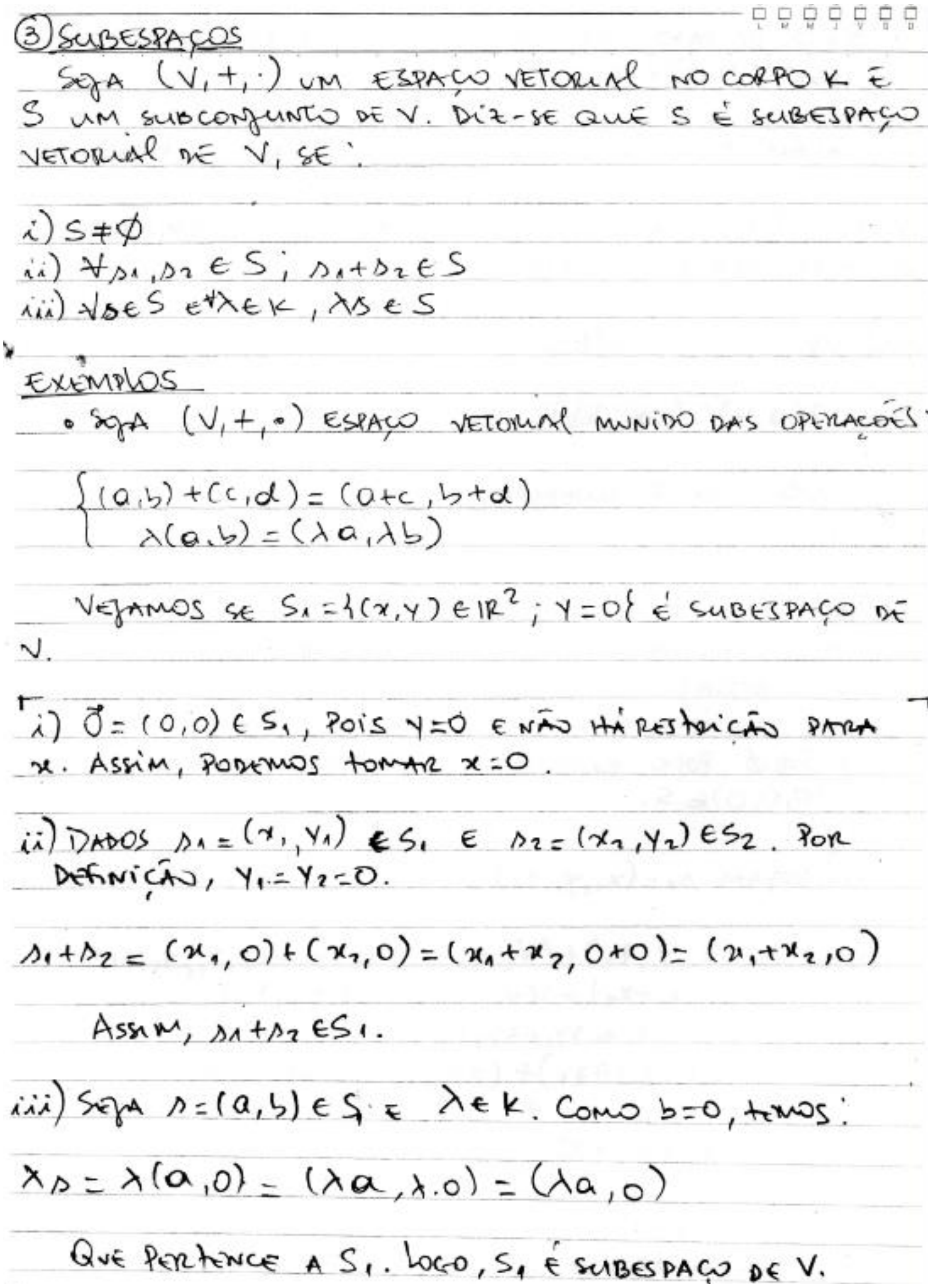
Fonte: I_1 (2015).

É possível se notar que não há relação com o objeto sistemas lineares, pois os espaços são apresentados de independente deste objeto, isto é, ser articular estes saberes.

I_1 inicia seu texto com o estudo de subespaços vetoriais, conforme Figura 62. A definição é a usual e as tarefas são aplicações diretas da definição.

A institucionalização do conceito estudado constituem provas pragmáticas, caracterizadas pela função de verificação da definição, não sendo utilizado qualquer registro gráfico, até então que auxilie na ideia de um espaço de vetores.

Figura 62– OM de subespaços vetoriais.



(3) SUBESPAÇOS

SEJA $(V,+,\cdot)$ UM ESPAÇO VETORIAL NO CORPO K E S UM SUBCONJUNTO DE V. DIZ-SE QUE S É SUBESPAÇO VETORIAL DE V, SE:

i) $S \neq \emptyset$

ii) $\forall s_1, s_2 \in S;\ s_1+s_2 \in S$

iii) $\forall s \in S$ e $\forall \lambda \in K,\ \lambda s \in S$

EXEMPLOS

• SEJA $(V,+,\cdot)$ ESPAÇO VETORIAL MUNIDO DAS OPERAÇÕES:

$$\begin{cases} (a,b)+(c,d) = (a+c,\ b+d) \\ \lambda(a,b) = (\lambda a, \lambda b) \end{cases}$$

VEJAMOS SE $S_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ y=0\}$ É SUBESPAÇO DE V.

i) $\vec{0} = (0,0) \in S_1$, POIS $y=0$ E NÃO HÁ RESTRIÇÃO PARA x. ASSIM, PODEMOS TOMAR $x=0$.

ii) DADOS $s_1 = (x_1, y_1) \in S_1$ E $s_2 = (x_2, y_2) \in S_2$. POR DEFINIÇÃO, $y_1 = y_2 = 0$.

$s_1+s_2 = (x_1,0)+(x_2,0) = (x_1+x_2,\ 0+0) = (x_1+x_2, 0)$

ASSIM, $s_1+s_2 \in S_1$.

iii) SEJA $s = (a,b) \in S$ E $\lambda \in K$. COMO $b=0$, TEMOS:

$\lambda s = \lambda(a,0) = (\lambda a, \lambda.0) = (\lambda a, 0)$

QUE PERTENCE A S_1. LOGO, S_1 É SUBESPAÇO DE V.

Fonte: I_1 (2015).

A tarefa para se determinar se é subespaço a razão de ser é a aplicação da técnica justificada pelo teorema: Seja V um espaço vetorial sobre um corpo K. Um subconjunto S é um subespaço vetorial de V se:

1. S é não vazio e (0,0) $\in$ S

2. Se v,w $\in$ S, então v + w $\in$ S.
3. Se k$\in$ K e v $\in$S, então k, v $\in$ S.

A técnica enunciada por I_1 de resolução é a seguinte:

i) (0,0) $\in$ S; v = (0,0,0) e w = (0,0,0) então (0,0,0) + (0,0,0) = (0+0, 0+0, 0+0) $\in$Q;

ii) v = (x_1, y_1, z_1) e w = (x_2, y_2, z_2)

v + w = $(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2,\ y_1 + y_2, z_1 + z_2)$

$(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) \in$Q;

iii) k (x, y, z) = (kx, ky, kz)

kx + ky = k (x + y) $\in$Q. Logo é um subespaço vetorial.

Figura 63 – OM do objeto subespaço.

• CONSIDERANDO O MESMO $(V,+,\cdot)$ DO EXEMPLO ANTERIOR, VERIFICAREMOS SE $S_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x+y=0\}$ É SUBESPAÇO

i) $S \neq \emptyset$. DE FATO, POIS PODEMOS TER $0+0=0$ E COMO ISSO $(0,0) \in S_2$.

ii) SEJAM $\vec{s}_1 = (x_1, y_1)$ E $\vec{s}_2 = (x_2, y_2) \in S_2$, TEMOS:

$s_1+s_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1+x_2, y_1+y_2) \Rightarrow (x_1+x_2)+(y_1+y_2) = \Rightarrow (x_1+y_1)+(x_2+y_2) = 0+0=0$

iii) DADOS $\vec{s} = (a,b) \in S$ E $\lambda \in K$, TEMOS:

$\lambda \vec{s} = \lambda(a,b) = (\lambda a, \lambda b) = \lambda a + \lambda b = \lambda(a+b) = \lambda.0 = 0$

LOGO, S_2 É SUBESPAÇO DE V.

• DADO $(V=\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ ESPAÇO VETORIAL MUNIDO DAS OPERAÇÕES USUAIS. CONSIDERANDO $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; 2x+3y+4z=0\}$. S É SUBESPAÇO DE V?

i) $S \neq \emptyset$, POIS EXISTE $2.0+3.0+4.0=0$. ASSIM, $(0,0,0) \in S$.

ii) SEJAM $s_1 = (x_1, y_1, z_1)$ E $s_2 = (x_2, y_2, z_2) \in S$. ENTÃO:

$s_1+s_2 = (x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2)$

$\Rightarrow 2(x_1+x_2) + 3(y_1+y_2) + 4(z_1+z_2) = 0$

$2x_1+2x_2+3y_1+3y_2+4z_1+4z_2=0$

$(2x_1+3y_1+4z_1)+(2x_2+3y_2+4z_2)=0$.

$0 + 0 = 0$

LOGO, $s_1+s_2 \in S$.

iii) DADO $\lambda \in K$ E $s=(x,y,z) \in S$:

$\lambda s = (\lambda x, \lambda y, \lambda z) \Rightarrow 2(\lambda x)+3(\lambda y)+4(\lambda z) = \lambda(2x+3y+4z) = \lambda 0 = 0$

Fonte: I_1 (2015).

A técnica utilizada para estudar se um determinado conjunto é um subespaço, poderia ser deduzida, utilizando a motivação geométrica para isto, conforme mostramos no nosso MER, pois o sistema linear divide o espaço em dois subespaços, que é o núcleo da matriz (sistema homogêneo) e o outro é o gerado pelas linhas da matriz do sistema $R(A^t)$, e que são ortogonais entre si. Essa técnica privilegiaria o entendimento do objeto subespaço, que após o aluno compreender e assimilar poderíamos conduzir para um processo de generalização, conforme a definição apresentada o que se daria de um modo menos formal e mais prático.

Na Figura 64 o conteúdo de subespaços continua, com uma tarefa que é (R^3, +, .) um espaço vetorial com as operações usuais verificar se $H = \left\{ \begin{pmatrix} s \\ t \\ 0 \end{pmatrix}; s\ e\ \in R \right\}$, é um subespaço de ($R^3$, +, .).

Após I_1 aplicar a técnica para enfrentar esta tarefa, que é aplicação direta da definição, então é possível se provar que **H** é um subespaço de $\mathbf{R^3}$. I_1 ressalta que R^2 não é subespaço de R^3, mesmo tendo o mesmo comportamento de **H**. Utiliza o registro gráfico como motivador para mostrar que R^2 não é subespaço do espaço vetorial R^3. Apresenta, conforme Figura 64 uma nova tarefa, para determinar se **L** é subespaço de $\mathbf{R^2}$, que no caso desta tarefa não é subespaço. Na Figura 64 é apresentada, também, a soma de subespaços, com a utilização do registro geométrico, como motivador. Mostramos em nosso MER a seguinte ideia, que poderia ser usado nesta aula, a partir da *tarefa*:

Encontre 2 soluções do homogêneo associado ao (SH). Em seguida some estas duas soluções e substituas no mesmo S_H.

$$S_H = \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

$$S = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Substituindo valores para **t**, tem-se:

$$t = 1; S = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 1. \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ e } t = 2; S = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2. \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Somando $S_1 + S_2$, temos:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

A subtarefa pede para: Substituir o resultado de $S_1 + S_2$, no sistema S, temos:

$$S_H = \begin{cases} 0+(-3)+(-3)=0 \\ 0+2(-3)+2(-3)=0 \end{cases}$$

Concluimos que $S_1 + S_2$ é solução do sistema S_H. Logo, o sistema linear homogêneo tem uma solução nula, enquanto que o sistema não homogêneo não; o múltiplo de uma solução também é solução, enquanto que no não homogêneo não e a soma de duas solução de duas soluções que para o homogêneo é solução para o não homogêneo não é. É interessante notar que as operações com o homogêneo associado é fechado em *relação a operação externa*, pois pegamos uma solução e multiplicamos **t** que é qualquer número real, como mostra.

Figura 64 – OM do objeto subespaço.

• SEJA $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ UM ESPAÇO VETORIAL COM OPERAÇÕES USUAIS. $H = \left\{ \begin{bmatrix} s \\ t \\ 0 \end{bmatrix};\ s \text{ e } t \text{ SÃO REAIS} \right\}$ É UM VETORIAL ?

i) $H \neq \emptyset$, POIS $s = t = 0$ TEMOS $[0\ 0\ 0]^t \in H$.

ii) SEJAM $h_1 = [s_1\ t_1\ 0]^t$ e $h_2 = [s_2\ t_2\ 0]^t \in H$. ENTÃO:

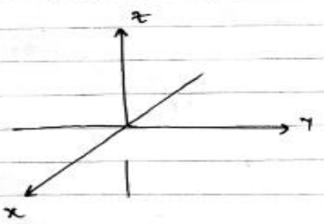
$$h_1 + h_2 = \begin{bmatrix} s_1 \\ t_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} s_2 \\ t_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1+s_2 \\ t_1+t_2 \\ 0 \end{bmatrix} \in H$$

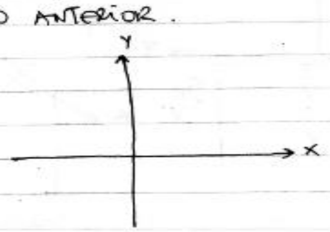
iii) DADO $\lambda \in K$ e $h = [s\ t\ 0]^t$:

$$\lambda h = \lambda \begin{bmatrix} s \\ t \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda s \\ \lambda t \\ 0 \end{bmatrix} \in H.$$

LOGO, H É SUBESPAÇO DE $\mathbb{R}^3$.

OBS: O ESPAÇO VETORIAL $\mathbb{R}^2$ NÃO É SUBESPAÇO DO $\mathbb{R}^3$, POIS $\mathbb{R}^2$ NÃO É UM SUBCONJUNTO DE $\mathbb{R}^3$, MESMO TENDO O MESMO COMPORTAMENTO DE H DO EXEMPLO ANTERIOR.

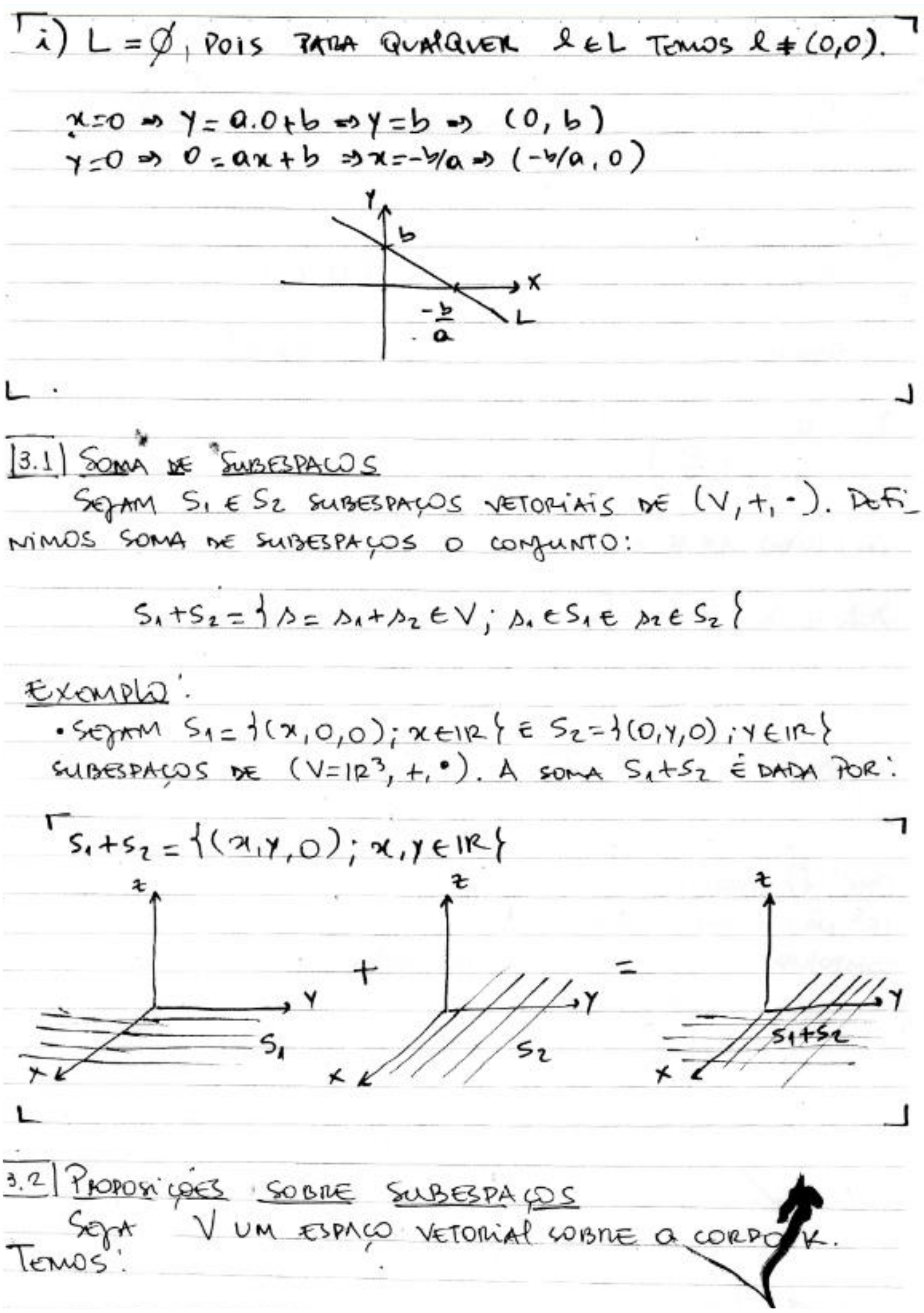




• SEJA $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ O ESPAÇO VETORIAL. O CONJUNTO $L = \{ y = ax+b;\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ e } a \neq 0 \text{ e } b \neq 0 \}$ É SUBESPAÇO DE $\mathbb{R}^2$?

Fonte: I_1 (2015).

Figura 65 - OM do objeto subespaço.



i) $L = \emptyset$, POIS PARA QUALQUER $l \in L$ TEMOS $l \neq (0,0)$.

$x = 0 \Rightarrow y = a.0 + b \Rightarrow y = b \Rightarrow (0, b)$
$y = 0 \Rightarrow 0 = ax + b \Rightarrow x = -b/a \Rightarrow (-b/a, 0)$

3.1 SOMA DE SUBESPAÇOS

SEJAM S_1 E S_2 SUBESPAÇOS VETORIAIS DE $(V, +, \cdot)$. DEFINIMOS SOMA DE SUBESPAÇOS O CONJUNTO:

$$S_1 + S_2 = \{ s = s_1 + s_2 \in V;\ s_1 \in S_1 \text{ E } s_2 \in S_2 \}$$

EXEMPLO:

• SEJAM $S_1 = \{(x,0,0);\ x \in \mathbb{R}\}$ E $S_2 = \{(0,y,0);\ y \in \mathbb{R}\}$ SUBESPAÇOS DE $(V = \mathbb{R}^3, +, \cdot)$. A SOMA $S_1 + S_2$ É DADA POR:

$$S_1 + S_2 = \{(x, y, 0);\ x, y \in \mathbb{R}\}$$

3.2 PROPOSIÇÕES SOBRE SUBESPAÇOS

SEJA V UM ESPAÇO VETORIAL SOBRE O CORPO K. TEMOS:

Fonte: I_1 (2015).

Nas Figura 66 é muito bem apresentado por I_1 proposições para se verificar a partir da ideia de interseção e soma de subespaços se esta interseção e a soma são subespaços com a respectiva demonstração.

Figura 66 – OM proposições envolvendo a $\cap$ e a + de subespaços.

Pi) S_1+S_2 É UM SUBESPAÇO DE V, $\forall S_1, S_2 \subset V$.

Pii) $S_1 \cap S_2$ É UM SUBESPAÇO DE V, $\forall S_1, S_2 \subset V$.

Piii) $V = S_1+S_2 \Leftrightarrow v = s_1+s_2$ É ÚNICA, $\forall v \in V$ E $s_1 \in S_1, s_2 \in S_2$

DEMONSTRAÇÃO

SEJAM S_1 E S_2 SUBESPAÇOS DE V.

* S_1+S_2:

i) $\vec{0} \in S_1+S_2$. DE FATO, $\vec{0} \in S_1$ E $\vec{0} \in S_2$ ENTÃO $\vec{0}+\vec{0}=\vec{0}$.
ASSIM, $S_1+S_2 \neq \emptyset$.

ii) DADOS $r = r_1+r_2$ E $s = s_1+s_2$ PERTENCENTES A S_1+S_2, COM $r_1, s_2 \in S_1$ E $r_2, s_2 \in S_2$.

$r+s = (r_1+r_2)+(s_1+s_2) = (r_1+s_1)+(r_2+s_2) = S_1+S_2$

COMO $r_1+s_1 \in S_1$ E $r_2+s_2 \in S_2$ ENTÃO $r+s \in S_1+S_2$.

iii) SEJA $s_1+s_2 = s \in S_1+S_2$ E $\lambda \in K$, COM $s_1 \in S_1$ E $s_2 \in S_2$. ASSIM:

$\lambda s = \lambda(s_1+s_2) = \lambda s_1 + \lambda s_2$

COMO $\lambda s_1 \in S_1$ E $\lambda s_2 \in S_2$, TEMOS QUE $\lambda s \in S_1+S_2$.

* $S_1 \cap S_2$:

i) $S_1 \cap S_2 \neq 0$. DE FATO, $0 \in S_1$ E $0 \in S_2$ POR HIPÓTESE.

ii) SEJAM $r, s \in S_1 \cap S_2$. LOGO, $r, s \in S_1$ E $r, s \in S_2$. COMO S_1 E S_2 SÃO SUBESPAÇOS, ENTÃO $r+s \in S_1$ E $r+s \in S_2$. E MAIS, $s_1+s_2 \in S_1 \cap S_2$

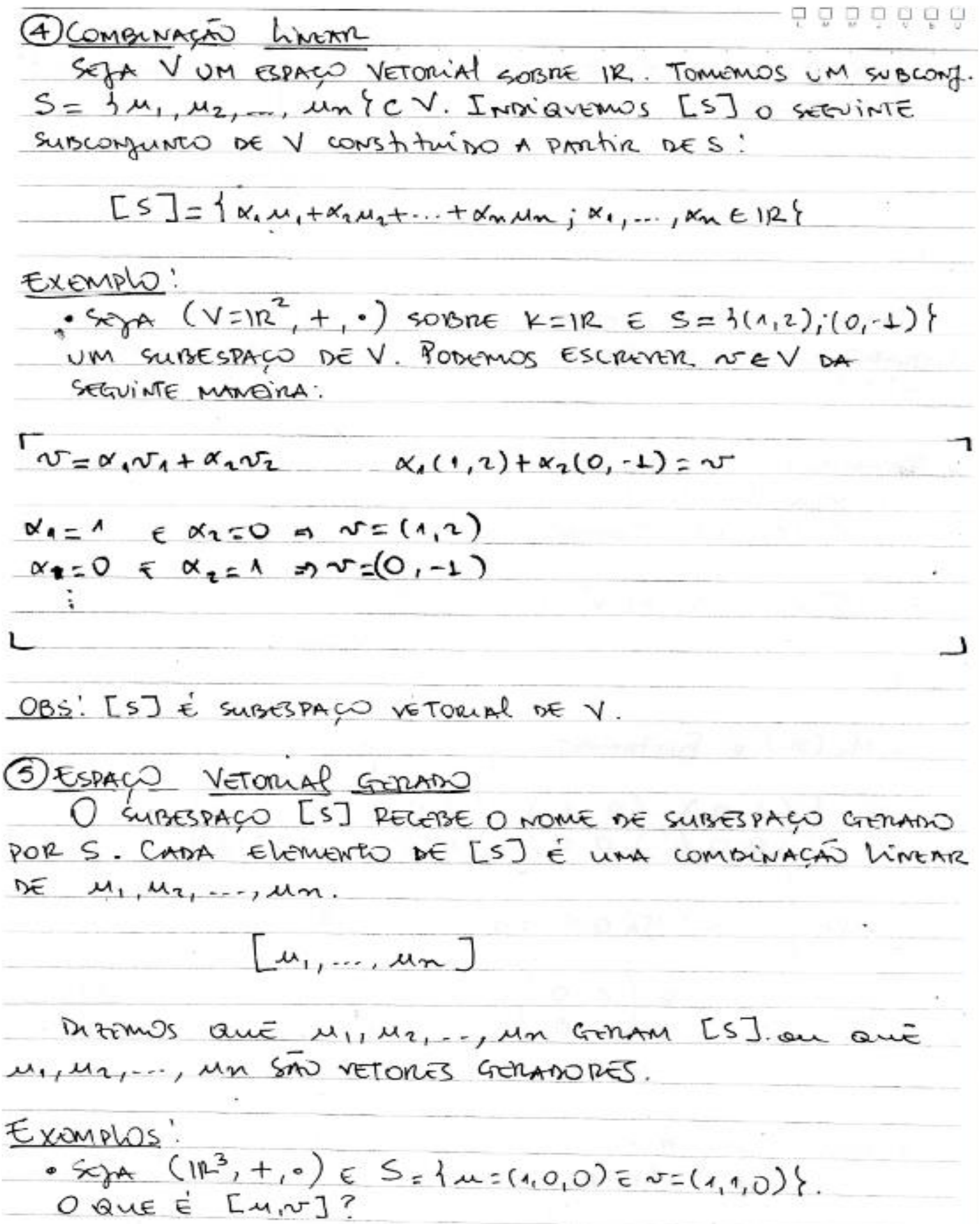
iii) SEJA $s \in S_1 \cap S_2$ E $\lambda \in K$. LOGO, $s \in S_1$ E $s \in S_2$. POR HIPÓTESE, $\lambda s \in S_1$ E $\lambda s \in S_2$. DESSE MODO, $\lambda s \in S_1 \cap S_2$.

Fonte: I_1 (2015).

O bloco tecnológico-teórico que fundamenta as técnicas adotadas para a realização das tarefas apresentadas por I_1, com relação ao estudo de subespaço, é a aplicação da definição deste objeto, portanto está no campo da AL. A noção de demonstração é apresentada desde a introdução ao conceito de subespaço, quanto na execução das tarefas, pela formalização utilizada e adequação dos termos: *seja, então, logo*, que são característicos da linguagem formal e do método axiomático, conforme relata (ALMOULOUD, 2015).

Seguindo a ementa constante do PPC do Curso de Licenciatura em Matemática, nas Figuras 67,68 e 69, I_1 define combinação linear e espaço gerado.

Figura 67 – OM combinação linear.


④ COMBINAÇÃO LINEAR

SEJA V UM ESPAÇO VETORIAL SOBRE IR. TOMEMOS UM SUBCONJ. $S = \{u_1, u_2, \dots, u_n\} \subset V$. INDIQUEMOS $[S]$ O SEGUINTE SUBCONJUNTO DE V CONSTITUÍDO A PARTIR DE S:

$$[S] = \{\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_n u_n \,;\, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}\}$$

EXEMPLO:

• SEJA $(V = \mathbb{R}^2, +, \cdot)$ SOBRE $K = \mathbb{R}$ E $S = \{(1,2);(0,-1)\}$ UM SUBESPAÇO DE V. PODEMOS ESCREVER $v \in V$ DA SEGUINTE MANEIRA:

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \qquad \alpha_1(1,2) + \alpha_2(0,-1) = v$$

$\alpha_1 = 1$ E $\alpha_2 = 0 \Rightarrow v = (1,2)$

$\alpha_1 = 0$ E $\alpha_2 = 1 \Rightarrow v = (0,-1)$

$\vdots$

OBS: $[S]$ É SUBESPAÇO VETORIAL DE V.

⑤ ESPAÇO VETORIAL GERADO

O SUBESPAÇO $[S]$ RECEBE O NOME DE SUBESPAÇO GERADO POR S. CADA ELEMENTO DE $[S]$ É UMA COMBINAÇÃO LINEAR DE $u_1, u_2, \dots, u_n$.

$$[u_1, \dots, u_n]$$

DIZEMOS QUE $u_1, u_2, \dots, u_n$ GERAM $[S]$. OU QUE $u_1, u_2, \dots, u_n$ SÃO VETORES GERADORES.

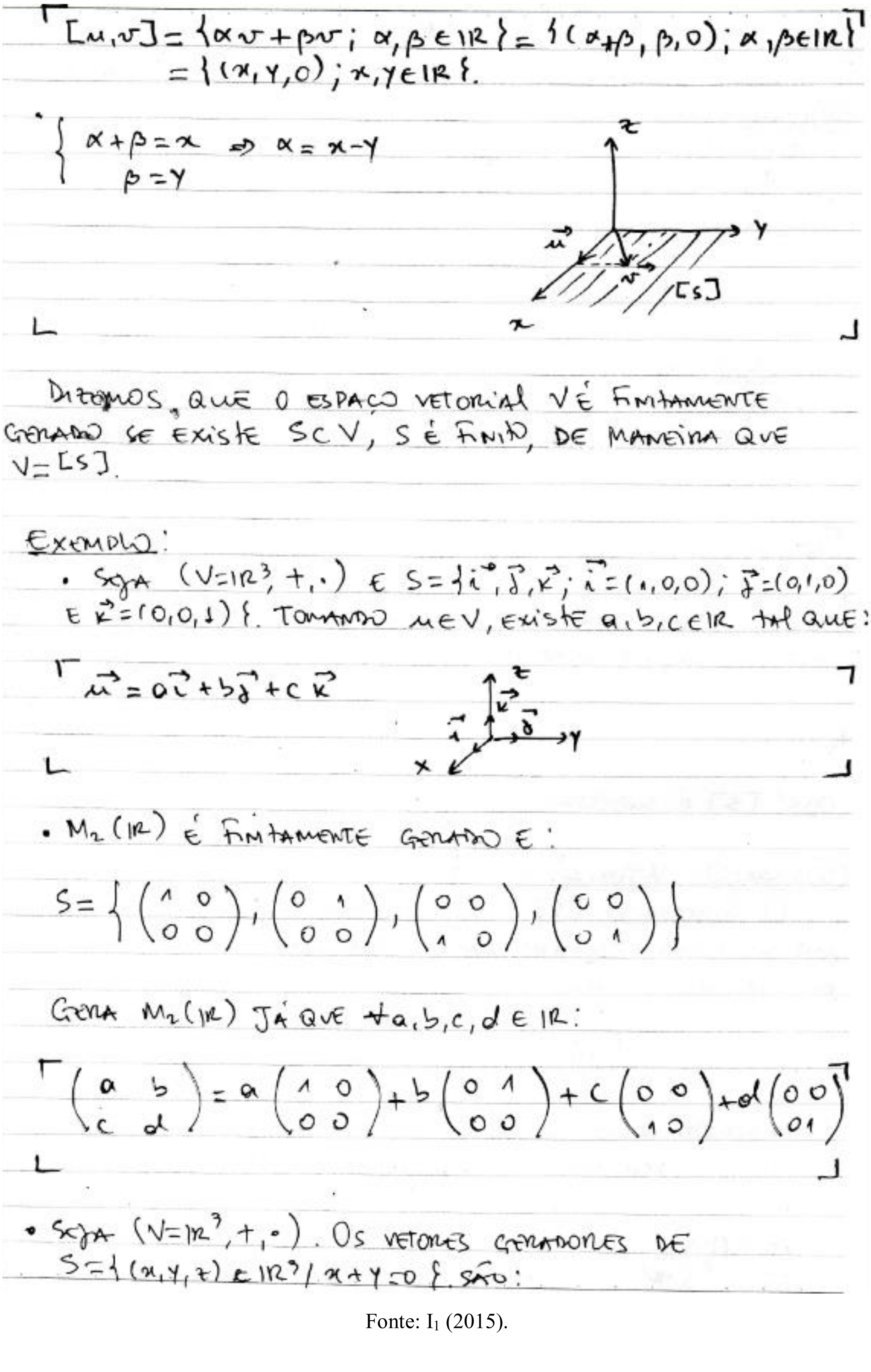
EXEMPLOS:

• SEJA $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ E $S = \{u = (1,0,0)$ E $v = (1,1,0)\}$.
O QUE É $[u,v]$?

Fonte: I_1 (2015).

I_1 recorre ao registro gráfico para melhor visualização do que seja um espaço gerado por vetores, conforme utilizamos em nosso MER.

Figura 68 – OM espaço gerador.



$[u,v] = \{\alpha u + \beta v;\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} = \{(\alpha+\beta, \beta, 0);\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$
$= \{(x, y, 0);\ x, y \in \mathbb{R}\}.$

• $\begin{cases} \alpha + \beta = x \Rightarrow \alpha = x - y \\ \beta = y \end{cases}$

DIZEMOS, QUE O ESPAÇO VETORIAL V É FINITAMENTE GERADO SE EXISTE $S \subset V$, S É FINITO, DE MANEIRA QUE $V = [S]$.

EXEMPLO:

• SEJA $(V = \mathbb{R}^3, +, \cdot)$ E $S = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k};\ \vec{i} = (1,0,0);\ \vec{j} = (0,1,0)$ E $\vec{k} = (0,0,1)\}$. TOMANDO $u \in V$, EXISTE $a, b, c \in \mathbb{R}$ TAL QUE:

$$\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$$

• $M_2(\mathbb{R})$ É FINITAMENTE GERADO E:

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

GERA $M_2(\mathbb{R})$ JÁ QUE $\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}$:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

• SEJA $(V = \mathbb{R}^3, +, \cdot)$. OS VETORES GERADORES DE $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y = 0\}$ SÃO:

Fonte: I_1 (2015).

Figura 69– OM propondo a tarefa para encontrar os vetores geradores.

$x+y=0 \Rightarrow y=-x \Rightarrow u=(x,y,z)=(x,-x,z)$

$u=x(1,-1,0)+z(0,0,1)$

VETORES GERADORES

• SEJA $(V=\mathbb{R}^3,+,\cdot)$. OS VETORES GERADORES DE $S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\ x+y-3z=0\}$ SÃO:

$x=3z-y \Rightarrow u=(x,y,z)=(3z-y,y,z)$

$u=y(-1,1,0)+z(3,0,1)$

VETORES GERADORES

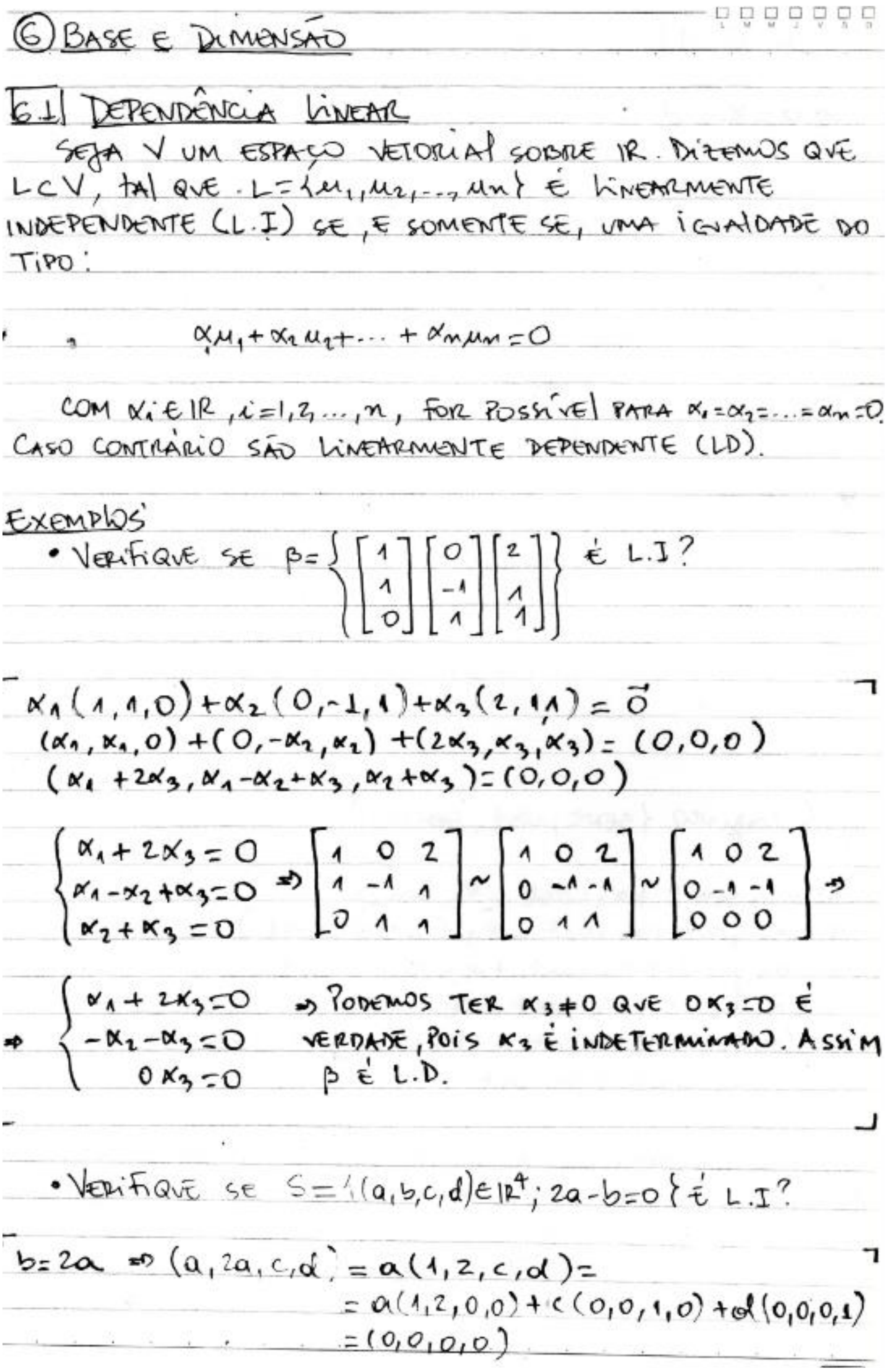
Fonte: I_1 (2015).

Na Figura 70 inicia-se o estudo de base e dimensão de um espaço de vetores. Inicia com a definição de dependência linear (LD) do seguinte modo: Seja *V um espaço vetorial. Sendo L = {u_1, u_2, ..., u_n} e L* $\subset$ *V é LI* $\Leftrightarrow$ $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + ... + \alpha_n u_n = 0$. Caso contrário será LD.

O bloco tecnológico-teórico que fundamenta as técnicas adotadas para a realização das tarefas apresentadas por I_1, com relação ao estudo de espaço gerado, é a aplicação da definição deste objeto, portanto está no campo da AL.

No MER apresentado, revelamos que dado um determinado sistema, podemos pegar o homogêneo, que cria o *espaço* que não é necessariamente o espaço todo, pois falta a solução particular. Se o sistema 3x3, ou seja, no R^3, mas se ele tem uma solução é representa um ponto. Mas se o sistema for indeterminado ele tem uma solução particular e tem a solução do homogêneo associado, que também tem solução, o qual gera o espaço. Então, o espaço gerado pelo homogêneo mais a solução particular, que quando combinados gera todos os vetores partindo da origem.

Figura 70 – OM dos objetos base e dimensão.



6) BASE E DIMENSÃO

6.1 DEPENDÊNCIA LINEAR

SEJA V UM ESPAÇO VETORIAL SOBRE IR. DIZEMOS QUE $L \subset V$, TAL QUE $L = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ É LINEARMENTE INDEPENDENTE (L.I) SE, E SOMENTE SE, UMA IGUALDADE DO TIPO:

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n = 0$$

COM $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, FOR POSSÍVEL PARA $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$. CASO CONTRÁRIO SÃO LINEARMENTE DEPENDENTE (LD).

EXEMPLOS:

• VERIFIQUE SE $\beta = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ É L.I?

$$\alpha_1(1,1,0) + \alpha_2(0,-1,1) + \alpha_3(2,1,1) = \vec{0}$$
$$(\alpha_1, \alpha_1, 0) + (0, -\alpha_2, \alpha_2) + (2\alpha_3, \alpha_3, \alpha_3) = (0,0,0)$$
$$(\alpha_1 + 2\alpha_3, \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_2 + \alpha_3) = (0,0,0)$$

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_3 = 0 \\ -\alpha_2 - \alpha_3 = 0 \\ 0\alpha_3 = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ PODEMOS TER $\alpha_3 \neq 0$ QUE $0\alpha_3 = 0$ É VERDADE, POIS α_3 É INDETERMINADO. ASSIM β É L.D.

• VERIFIQUE SE $S = \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 ; 2a - b = 0\}$ É L.I?

$$b = 2a \Rightarrow (a, 2a, c, d) = a(1, 2, c, d) =$$
$$= a(1,2,0,0) + c(0,0,1,0) + d(0,0,0,1)$$
$$= (0,0,0,0)$$

Fonte: I_1 (2015).

Inicia o estudo de base com a tarefa: *verificar se um conjunto de vetores é LI*. O bloco tecnológico-teórico que fundamenta a técnica adotada para o enfrentamento da tarefa é a combinação linear e a estudo qualitativo de sistemas lineares. O sistema é *abreviada* na forma matricial e é escalonada, método que mostramos no MER ter sua gênese no método da eliminação e substituição. A última linha da matriz já na forma de escada é nula, concluindo que o conjunto de vetores é LD, além representar a matriz na forma de sistema verifica que o sistema é indeterminado, portanto é LD.

No MER propomos a tarefa: Dado o subespaço $S = \left[\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\5\end{pmatrix}\right] \in R^3 \; e \; v = \begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}$ verifique se v $\in$ S?

Abreviando na forma de matriz $\alpha_1 \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix}1\\1\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}$, e depois coloca-se na forma de sistema .

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 3 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 3 \\ 2\alpha_1 - \alpha_2 + 5\alpha_3 = 3 \end{cases}$$

Aparece a variável livre α_3, e a partir desta é possível se determinar o valor das outras duas variáveis, logo se $\alpha_3 = 0 \Rightarrow \alpha_2 = 1$ e α_1=2, então: $[V]_B = \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$. Para cada valor de α_3 que colocarmos encontramos outros valores para α_2 e α_1 , α_3 = -1 $\Rightarrow \alpha_2 = 0$ e α_1=4, então: $[V]_B = \begin{pmatrix}4\\0\\-1\end{pmatrix}$. Surge a ideia de *ambiguidade*, pois há solução para o sistema, mas que não é apenas uma, mas *infinitas*, pois o *sistema é possível e indeterminado*, portanto há um infinidade de combinações lineares. Quando isto acontece o sistema é dito *LD*, ou seja, toda vez que o sistema provoca ambiguidade este é LD, portanto uma ideia diferente da habitual apresente no texto do saber de I_1.

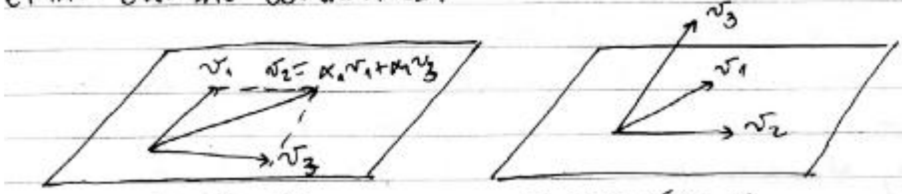
Logo v$\in$S, pois é CL de v_1, v_2, v_3.

É apresentado no MER o porquê escalonar o sistema e ai definir se é LD ou LI, logo o que justifica este método do escalonamento é que por este método se faz as combinações das linhas, logo são combinações lineares. Com isto se tivermos uma linha que seja combinação da outra esta irá se anular, pois anulamos os elementos das linhas de baixo de modo a tornar o sistema triangular.

Na Figura 71 é apresentada por I_1 por meio de registro geométrico a ideia de LD e LI. Na mesma é possível se verificar a definição de base de modo usual, isto é, assim como definido no livro analisado.

Figura 71 - OM registro geométrico da ideia de LD e LI e definição de base.

OBS: DADO DOIS VETORES $\vec{v_1}$ E $\vec{v_2}$ DO $\mathbb{R}^3$. DIZEMOS QUE $\vec{v_1}$ E $\vec{v_2}$ SÃO L.D. ENTÃO ELES SÃO COPLANARES.



v_1 E v_2 SÃO L.D $\qquad$ v_1 E v_2 SÃO L.I

6.2 | BASE E DIMENSÃO

SEJA V UM ESPAÇO VETORIAL. O CONJUNTO $\beta = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ É UMA BASE DE V SE:

i) $V = [\beta]$

ii) β É L.I

EXEMPLOS:

• SEJA $S = \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 ;\ a+b+c=0 \text{ e } d=0\}$

$s = (a,b,c,d)$ e $a = -b-c$

$s = (-b-c, b, c, 0) = \underbrace{b(-1,1,0,0) + c(-1,0,1,0)}_{\text{GERADORES DE } s}$

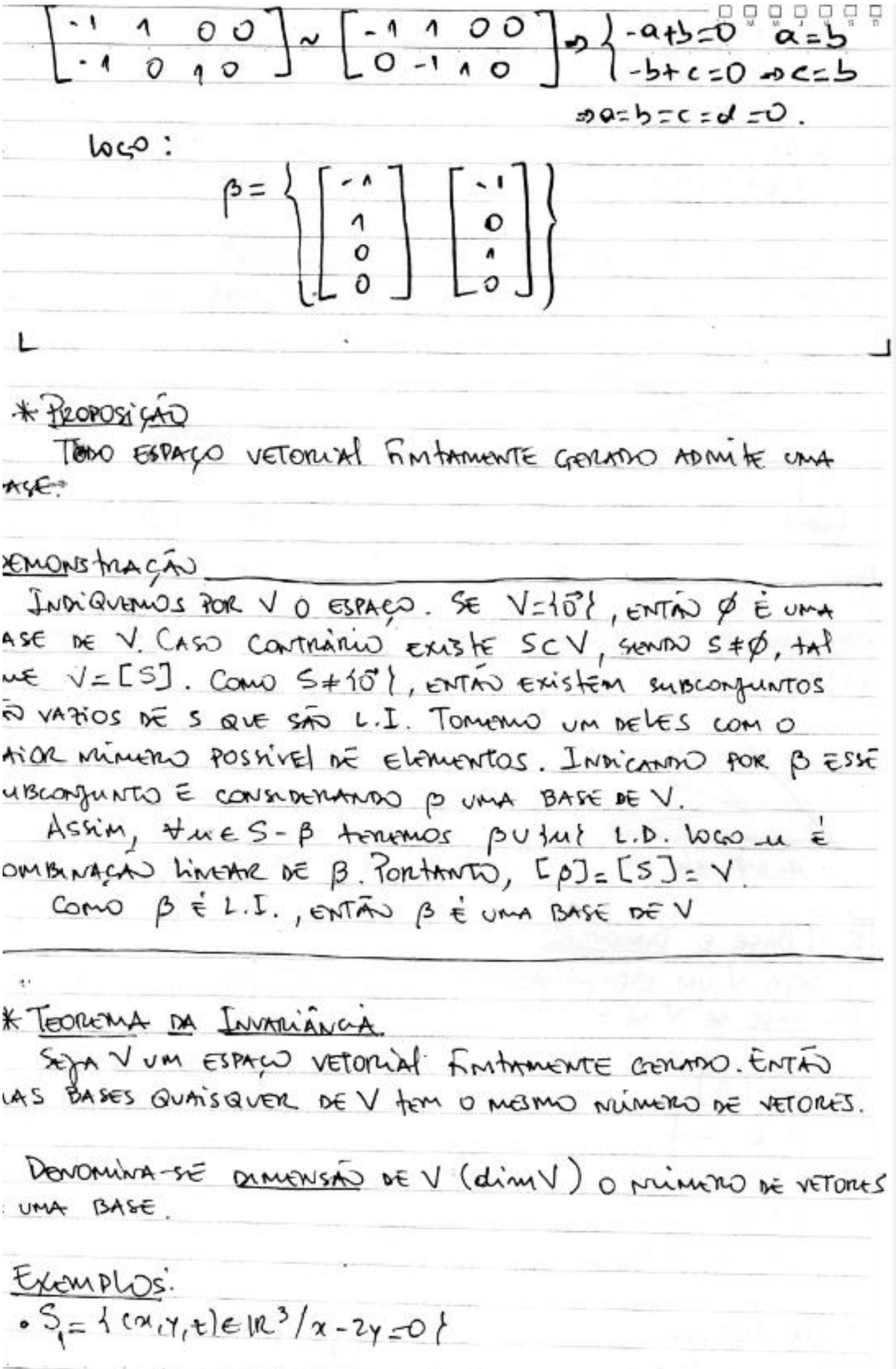
$S = [u_1, u_2]$, $u_1 = (-1,1,0,0)$ e $u_2 = (-1,0,1,0)$.

Fonte: I_1 (2015).

A tarefa anunciada é para verificar se S = {a,b,c,d} $\in$ R^4; a+b+c = 0 e d =0}é uma base. É utilizado a técnica de espaço gerador para se verificar se estes geram o espaço o que é mostrado e S é um conjunto LI (Figura 72), pois a = b = c = d = 0 que é a solução trivial do sistema.

Ainda na Figura 72 é demonstrado que todo o espaço vetorial finitamente gerado admite uma base. O Teorema da Invariância que trata que um espaço finitamente gerado V qualquer tem o mesmo número de vetores é apresentado. Em seguida define *dimensão* de uma base, como sendo o número de vetores de uma base.

Figura 72 – OM do objeto base.



$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -a+b=0 & a=b \\ -b+c=0 \Rightarrow c=b \end{cases}$$

$\Rightarrow a=b=c=d=0.$

Logo:

$$\beta = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

* Proposição

Todo espaço vetorial finitamente gerado admite uma base.

Demonstração

Indiquemos por V o espaço. Se $V=\{\vec{0}\}$, então ϕ é uma base de V. Caso contrário existe $S \subset V$, sendo $S \neq \phi$, tal que $V=[S]$. Como $S \neq \{\vec{0}\}$, então existem subconjuntos não vazios de S que são L.I. Tomemos um deles com o maior número possível de elementos. Indicando por β esse subconjunto e considerando β uma base de V.

Assim, $\forall u \in S-\beta$ teremos $\beta \cup \{u\}$ L.D. Logo u é combinação linear de β. Portanto, $[\beta]=[S]=V$.

Como β é L.I., então β é uma base de V

* Teorema da Invariância.

Seja V um espaço vetorial finitamente gerado. Então duas bases quaisquer de V tem o mesmo número de vetores.

Denomina-se dimensão de V (dim V) o número de vetores de uma base.

Exemplos:

• $S_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x-2y=0\}$

Fonte: I_1 (2015).

Na Figura 72 é apresentada uma base **S_1** e se pede para determinar sua dimensão, onde S_1 =

$\{(x,y,z) \in R^3 / x - 2y = 0\}$.

A técnica para se enfrentar esta tarefa $S_1 = (2y,y,z)$ já que $x = 2y$, então $S_1 = y\,(2,1,0) + z\,(0,0,1)$.

Colocando na forma de matriz $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ que já esta escalonada, logo conclui-se que é LI.

Logo o conjunto de vetores (2,1,0) e (0,0,1) formam uma base de dimensão 2.

Na Figura 73 é apresentado $S_2 = \{(x,y,z) \in R^3 / x + z = 0 \text{ e } x - 2y = 0\}$.

A solução geral $S_2 = (x, y, z) = (x, x/2, -x) = x\,(1, ½, -1)$ é LI. Logo, (1, ½, -1) é uma base de dim $S_2 = 1$, pois só há um vetor.

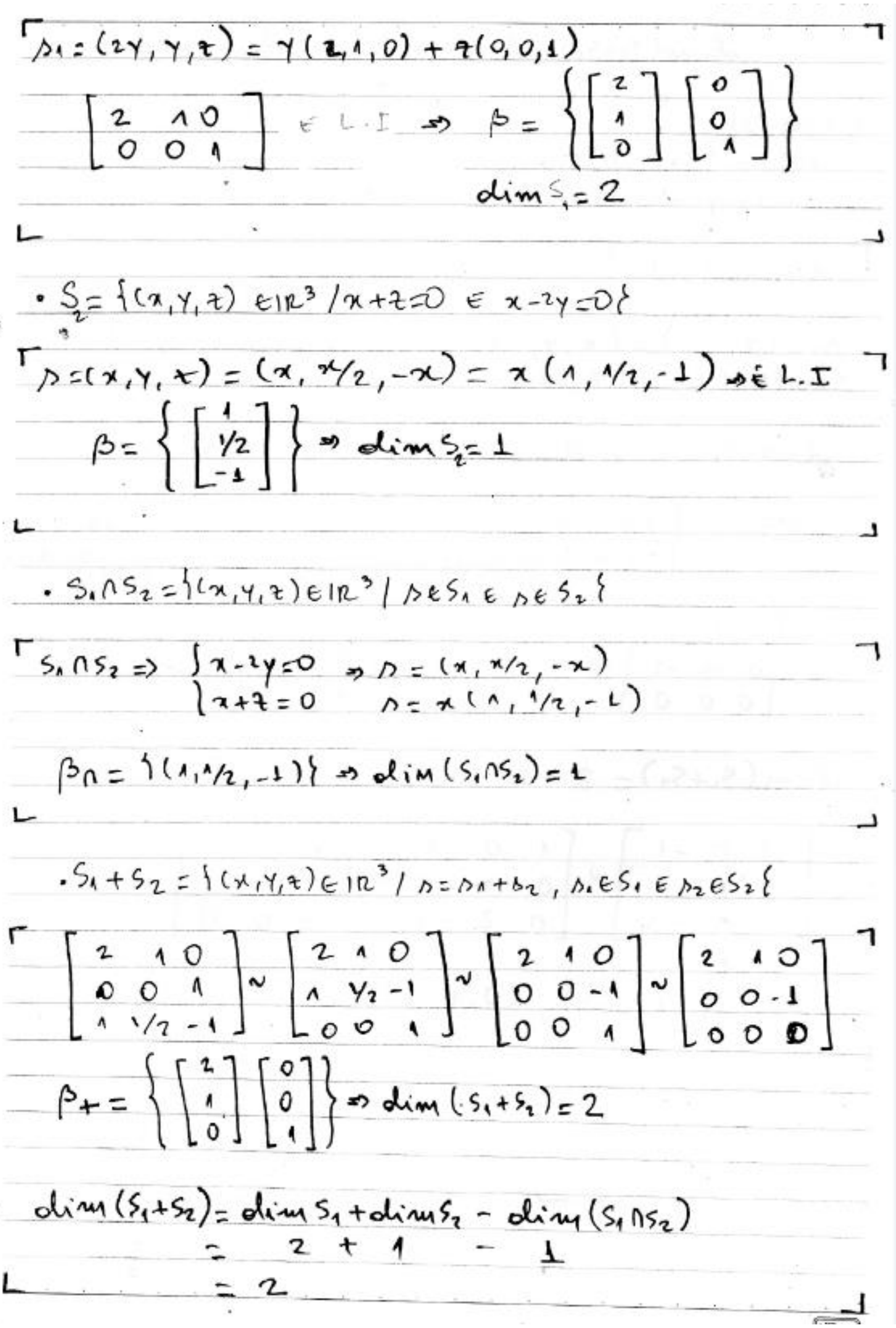
Mostra $S_1 \cap S_2$ é igual a $B_\cap = (1, ½, -1)$ de dim $(S_1 \cap S_2) = 1$.

A soma de $S_1 + S_2$ é dado pela matriz $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1/2 & -1 \end{bmatrix}$. Ao se aplicar como técnica o método da eliminação e substituição a matriz se reduz a $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Então a base B desta adição B+ = $\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$ de dimensão 2.

Concluindo que dim $(S_1 + S_2)$ = dim S_1 + dim S_2 – dim $(S_1 \cap S_2) = 2 + 1 - 1 = 1$.

Esta tarefa foi apresentada para se determinar a dim de S_1 e de S_2, e as subtarefas para determinar a dim $(S_1 \cap S_2)$ e por conseguinte a dim $(S_1 + S_2)$ e depois podemos observar o processo de institucionalização que é o teorema da Figura 73 que é a tecnologia.

Figura 73– OM dimensão de um espaço.



$s_1 = (2y, y, z) = y(2,1,0) + z(0,0,1)$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in L.I \Rightarrow \beta = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$\dim S_1 = 2$

• $S_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x+z=0 \text{ e } x-2y=0\}$

$s = (x,y,z) = (x, x/2, -x) = x(1, 1/2, -1) \Rightarrow \text{é } L.I$

$$\beta = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \\ -1 \end{bmatrix} \right\} \Rightarrow \dim S_2 = 1$$

• $S_1 \cap S_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / s \in S_1 \text{ e } s \in S_2\}$

$$S_1 \cap S_2 \Rightarrow \begin{cases} x - 2y = 0 \\ x + z = 0 \end{cases} \Rightarrow s = (x, x/2, -x) \quad s = x(1, 1/2, -1)$$

$\beta_\cap = \{(1, 1/2, -1)\} \Rightarrow \dim(S_1 \cap S_2) = 1$

• $S_1 + S_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / s = s_1 + s_2,\ s_1 \in S_1 \text{ e } s_2 \in S_2\}$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1/2 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1/2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\beta_+ = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \Rightarrow \dim(S_1 + S_2) = 2$$

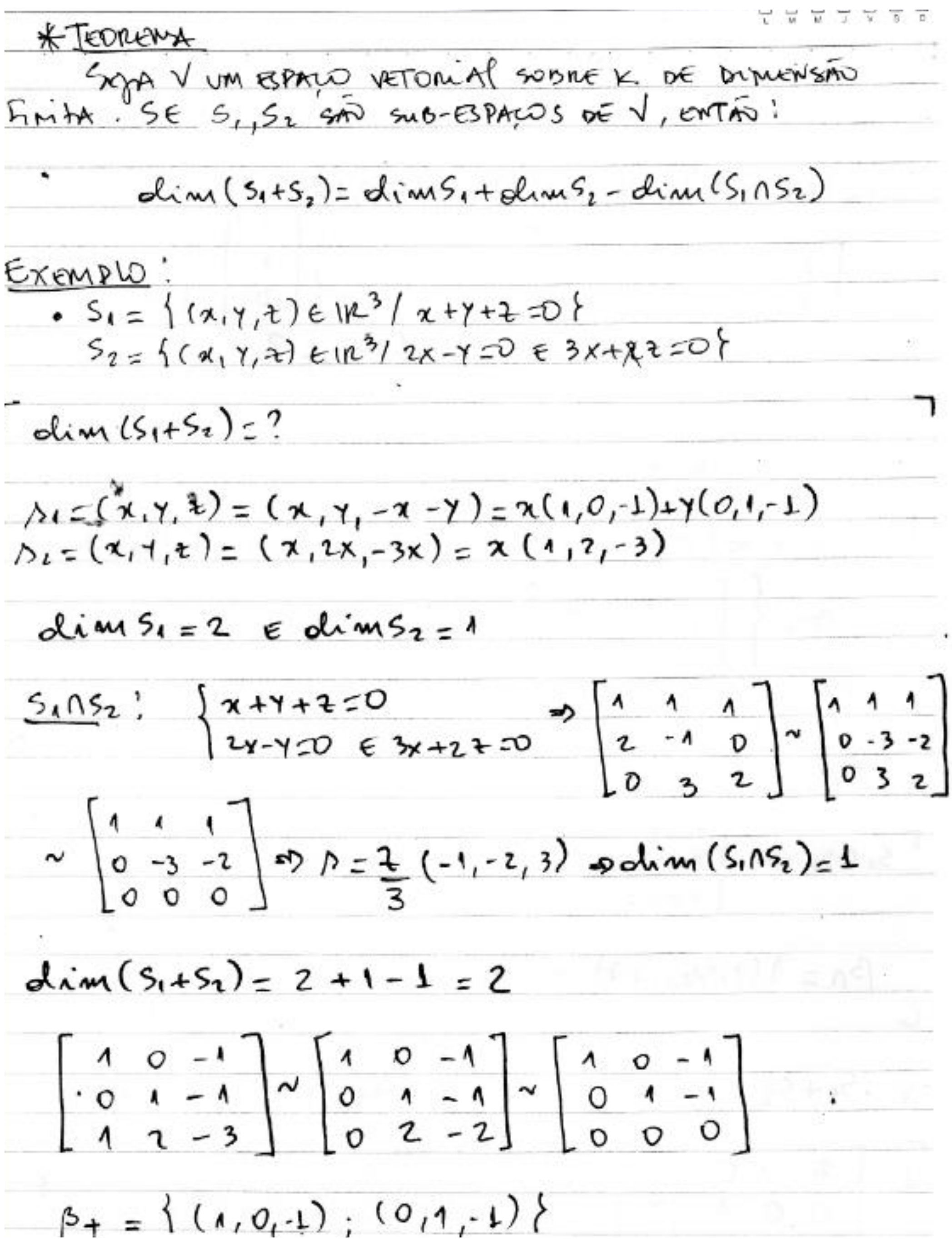
$$\begin{aligned} \dim(S_1+S_2) &= \dim S_1 + \dim S_2 - \dim(S_1 \cap S_2) \\ &= 2 + 1 - 1 \\ &= 2 \end{aligned}$$

Fonte: I_1 (2015).

A institucionalização do conceito foi bem instituída, sendo que I_1 poderia neste momento relatar que existe um teorema para que ele acabara de demonstrar por meio deste T.

Na Figura 74 é apresentado a OM do objeto dimensão, com uma tarefa para se aplicar o teorema dim ($S_1 + S_2$) = dim S_1 + dim S_2 – dim ($S_1 \cap S_2$).

Figura 74– OM do objeto dimensão.



*TEOREMA

Seja V um espaço vetorial sobre K de dimensão finita. Se S_1, S_2 são sub-espaços de V, então:

- $\dim(S_1+S_2) = \dim S_1 + \dim S_2 - \dim(S_1 \cap S_2)$

EXEMPLO:

- $S_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x+y+z=0\}$
  $S_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / 2x-y=0 \text{ e } 3x+2z=0\}$

$\dim(S_1+S_2) = ?$

$s_1 = (x,y,z) = (x,y,-x-y) = x(1,0,-1)+y(0,1,-1)$

$s_2 = (x,y,z) = (x,2x,-3x) = x(1,2,-3)$

$\dim S_1 = 2$ e $\dim S_2 = 1$

$S_1 \cap S_2$: $\begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x-y=0 \text{ e } 3x+2z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow s = \frac{z}{3}(-1,-2,3) \Rightarrow \dim(S_1 \cap S_2) = 1$

$\dim(S_1+S_2) = 2+1-1 = 2$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\beta_+ = \{(1,0,-1); (0,1,-1)\}$

Fonte: I_1 (2015).

I_1 apresenta os vetores ortogonais por definição e apresenta uma tarefa na qual utiliza o registro algébrico para mostrar o produto escalar, além do registro geométrico para que o aluno até então hipotético, pois I_1 ainda esta no momento de preparação da aula, para que o aluno possa visualizar a ortogonalidade entre vetores.

No nosso MER mostramos a gênese do produto escalar, e porquê de vetores ortogonais este produto tem que ser nulo, já que na AL a ortogonalidade significa falar em *produto escalar nulo*, enquanto que do ponto de vista da Geometria é falar em angulo de 90º.

Com a subtarefa t_{162} que se enuncia: Resolver o sistema a seguir pelo método do escalonamento.

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases}$$

τ_{12}: Técnica do escalonamento.

Podemos deduzir pelo exemplo que um sistema homogêneo se dá por encontrar um vetor que seja *ortogonal* a cada linha da matriz, pois o produto escalar é zero.

Resolvendo o sistema, temos:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} L_2 = L_2 - 2L_1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$, voltando ao sistema:

$$\begin{cases} x - y = -z \\ y = z \end{cases}$$ Logo a solução x = 0, y = z e z = z, então S = {(0,z,z)} ou S = {z(0,1,1)} ou S ={(0,1,1)}.

Portanto (0,1,1) é ortogonal aos vetores (1,-1,1) e (2,1,-1), que S. Utilizamos no modelo o registro figural como motivação para o estudante para melhor entendimento de ortogonalidade.

Trabalhamos em nosso MER, também com o registro geométrico, para que os alunos melhor visualizem a situação. A ideia tratada no MER observar que $\vec{u}$ é ortogonal a L_1 e a L_2. Diremos então que $\vec{u}$ é o *núcleo da matriz ou kernel da matriz*, que é diferente do vazio. O espaço que trabalhamos tem 3 componentes (x,y,z), ou seja o R^3 que é a soma de um plano com reta, logo existe um *espaço linha*, que é um espaço gerado pelas linhas da matriz, que iremos representar $R(A^t)$ – *gerado de A transposto*, o qual representa no plano. Podemos dizer que o kernel da matriz A é o conjunto de todos os vetores do espaço, tal que A. $\vec{u}$ = 0. Portanto trabalhamos com uma outra OMD para ensinar a ideia de ortogonalidade.

Pela análise realizada, tudo indica que o texto do saber do professor **I_1**, esta condicionada ao modelo dominante, com aplicações da definição, sem que haja um processo central, segundo a TAD, que é a ideia de modelização, onde os alunos irão construir a partir do modelo apresentado por I_1 para a construção dos saberes.

O texto de **I_1** apresenta subsídios suficientes para que leve o aluno ao encontro de tarefas que lhe possibilitem estudar AL, isto é, possa compreender os saberes sistemas lineares, matrizes, determinantes, espaços, combinação, LD e LI, base e dimensão. No entanto percebemos que a OMD, proposta por I_1 para o ensino desses objetos já mencionados, poderá causar a memorização de definições e desarticuladas de outros saberes, pois vimos em nosso MER a importância do estudo de sistemas lineares.

Nesta proposta de MER para o ensino a partir de uma OMD de AL corresponde a um elemento teórico central de uma OD hipotética (não empírica) de nível regional, pois a praxeologia é justificada pelo método da eliminação e substituição (estudo qualitativo de sistemas) e o estudo de combinação linear, onde levamos em conta às práticas com menos formalismo. A OMD dominante de I_1 caracterizada por uma *AL axiomática*, onde não há o questionamento tecnológico, sendo tarefas pontuais, portanto rígidas, portanto as organizações aparecem atomizadas e independentes entre si.

O modelo epistemológico de I_1 não há questões abertas[39] e este coincide com o modelo do livro analisado, pois conforme o euclidianismo prega há um processo de trivializar os saberes, já que o estudo, tanto pelo livro, quanto por I_1, se dar por mera aplicação das definições apresentadas, sendo este o modelo epistemológico dominante, portanto muito perto do modelo teoricismo. Segundo Gascón (2000), quando este modelo penetra no sistema de ensino pode dar origem a tipos de modelos docentes, já que tem em comum a trivialização do processo de ensino, caracterizando os modelos docentes clássicos.

Em nossa proposta de MER no que diz respeito ao estudo qualitativo de sistemas utilizamos até três técnicas para resolver uma mesma tarefa, proporcionando assim aos alunos qual a mais adequada a ser utilizada. Tarefas deste tipo não aparecem no texto do saber analisado, se tratando de uma atividade ausente no processo de ensino.

Ao construirmos nossa OMD de referência, entendemos que nosso milieu foi enriquecido mediante os aspectos epistemológicos/históricos e a proposta de gênero de tarefa, que é estudar qualitativamente os sistemas lineares, havendo assim uma incorporação da dinâmica de sua construção em I_i.

Diferente do proposto no texto do saber de I_1, podemos interpretar que o MER é uma parte essencial do bloco pertencente ao *logos, portanto o bloco* tecnológico-teórico da praxeología didática escolar associada, que segundo Bosh e Gascón (2001), é o discurso que pretende justificar, interpretar e engendrar as técnicas didáticas do ensino, do nosso caso, de AL na universidade, pois há uma razão de ser para se ensinar AL, que é a justificativa que permeia as técnicas presentes nos tipos de tarefas do MER, visto que a característica do programa epistemológico de investigação em didática das matemáticas se dá pela construção e utilização de modelos epistemológico-didáticos como parte de entrada da análise didática.

[39] Segundo Bom (2011) são aquelas em que os dados são valores conhecidos mas são tratados como se fossem desconhecidos (parâmetros) e as incógnitas são objetos matemáticos concretos (como exemplo os valores numéricos).

CAPÍTULO VI - METODOLOGIA DO PER

Ministrando a disciplina no IFPA há vários anos incomodávamos com o prática de ensino de AL, pois víamos que assim como aconteceu comigo, o estudo por meio da OMD acontecia por mera aplicação da definição dos objetos ensinados nesta disciplina, sem compreender a razão de ser de determinados objetos e postulamos que poderíamos mudar esta perspectiva quando apresentamos a proposta do MER.

Nosso PER objetivou ensinar alguns objetos de AL, com participação mais efetiva dos alunos, possibilitando autonomia na realização das tarefas. O professor dirige os estudos, a partir de questionamentos oriundos da comunidade de estudo. Os alunos manejaram conhecimentos e habilidades que não são possíveis conhecer sozinhos, portanto tiveram o apoio do professor, que junto com eles enriqueceram o milieu (mesogênese).

6.1 ASPECTOS INTRODUTÓRIOS

Thurston (1994) preocupou-se de como as pessoas aprendem matemática, relatando que o ensino não pode ser automático e que devemos tornar os saberes matemáticos inteligíveis e ensináveis.

Nosso PER foi desenvolvido como metodologia de ensino de objetos da AL, que propôs uma atividade matemática universitária que retomasse as OM estudadas no ensino médio. Sua OMD demonstrou nosso jeito de pensar as ideias sobre espaços vetoriais a partir do objeto sistemas lineares. Partindo das ideias de Bon (2011) que vislumbrou um percurso de estudo de *PER particular* e Delgado (2011) que realizou uma *experimentação de uma prática de estudo para formação de professores,* em nossa pesquisa denominamos *PER adaptado*, porque adaptamos em nosso entorno educacional e que foi utilizado como metodologia de ensino.

Consideramos um PER adaptado, pois ocorreu em um curso de formação inicial de Licenciatura em Matemática, já que na França ocorre no Liceu; as tarefas encaminhadas a partir do MER, tornando-se um modelo epistemológico alternativo, de certa forma prontas tiveram que ser encaminhadas previamente aos alunos devido ao tempo, conforme Silva, Nunes, Guerra (2016), que é uma restrição, para que os alunos movimentassem seus EP e que tivéssemos um documento com a produção dos alunos que servissem para os dados da pesquisa e avaliação dos mesmos na disciplina, que é semestral; não havia nenhum dispositivo didático institucionalizado em nosso ensino universitário de Matemática que fomentasse o trabalho da técnica, a partir da ideia de modelização matemática e que permitia aos alunos passarem da exploração de um tipo de tarefas matemáticas e desenvolvessem novas técnicas, ampliando o campo de problemas, já que a questão proposta foi aberta; outra característica foi a cronogênese é o que distinguiu também esse PER de um AER, dos mais facilmente identificáveis episódios didáticos usuais na IE, já que a constituição e o "trabalho" do *milieu M* são, em efeito, a origem de uma *dilatação do tempo didático* e, portanto, correlativamente, de uma *extensão do tempo de relógio*, conforme (CHEVALLARD, 2009d); partimos de uma questão geratriz, que diferente dos moldes franceses, foi colocado para a turma de graduandos, e não discutido previamente com eles; buscamos um forte grau de integração no fazer das questões Q derivadas de uma única questão geratriz Q_0, já que em um AER[40] cada um tem a sua questão Q, que segundo Chevallard (2009d) a ideia do PER modifica o esquema do AER, já que em vez de procurar uma entidade praxeológica $\wp$ fixada de antemão, uma pergunta $Q_\wp$ cujo estudo sob certas restrições e sob certas condições, faz o reencontro de[X, Y] com $\wp$ e com outras obras, pelo menos outras possíveis (mesmo relevantes da disciplina ensinada); seguindo as ideias do PER de (BON, 2007; BON e CASAS, 2009, e BON, PEREIRA e CASAS, 2009) caracterizado pelo problema didático matemático, uma instituição concreta, uma razão de ser, questão geratriz, uma organização matemática local relativamente completa, contrato didático, priorizando o caráter funcional da matemática; sendo o percurso caracterizado como um PER finalizado.

Nossa questão Q_0 é a seguinte: Q*ual(is) objeto(s) matemático(s) podem ser mobilizados para se estudar AL, no que diz respeito ao estudo dos espaços vetoriais, em um curso de graduação de professores de matemática*?

Considerando a *questão como forte*, isto é, uma questão problemática, e que não tem uma resposta a priori, logo deve ser estudada, pois requer uma *resposta forte* no sentido de, com base na construção de uma OMD, que se dá por um conjunto de tipos de tarefas e técnica para resolver estes problemas e definições, propriedades e teoremas, além de descrever e justificar o seu trabalho.

Bon (2011) relata que a Q_0 é uma das etapa do PER se configura como uma *legitimidade funcional*[41]. Uma vez eleita esta questão entre várias possíveis esta irá impulsionar e provocar todo o processo de estudo do projeto que se deve manter viva ao longo de todo o estudo. Com a resposta a questão Q_0 será possível construir uma outra *razão de ser* dos sistemas lineares, que é o ponto central desta obra e que a partir do estudo qualitativo desse responderá outras questões que este MER visa responder.

---

[40] Chevallard (2009a) escreve que o programa do ano na França podia ser estudado por meio grandes AER, portanto esse conjunto de AER poderia ser chamado de Percursos de Estudo e de Investigação (PER), e que podiam ser divididas em AER no sentido mais usual do termo: um PER aparece então como um verdadeiro "percurso de descoberta". Chevallard (2009b) expõe que uma nova ideia de um tal PER modifica o esquemado AER uma vez de procurar uma entidade praxeológica $\wp$ fixada de antemão, uma pergunta $Q_\wp$ cujo estudo-sob certas restrições e sob certas condições –faz o reencontro de [X, Y] com $\wp$ e com outras obras.

[41] No processo de construção de uma OM se planeja com os alunos o estudo de respostas de questões problemáticas cruciais, ricas e fecundas, além de um importante potencial didático, vinculados a atividade matemática como verdadeiros problemas de engenharia (BON, 2011, p. 8).

Segundo Chevallarde Artaud (2014), um *professor pesquisador* faz de sua sala de aula um local de experimentações em didática da matemática, para o estudo da engenharia didática, por meio de situações didáticas criadas por ele, que consistirá, principalmente, em lidar com os problemas em um sentido amplo, já que o processo de ensino e de aprendizagem da matemática não se dá em ensinar apenas ideias matemáticas, como os conceitos matemáticos e sim ver o ensino como uma atividade humana concreta, que foi desenvolvida em uma instituição.

Então, os pesquisadores ξ estão engajados em uma *atividade matemática*, portanto uma *pesquisa em didática da matemática*. A instituição, *grupos de graduando em Licenciatura em Matemática do IFPA*, denotaremos neste trabalho por **X**. A ligação de ξ com **X** permite se "beneficiar" das condições $\mathbf{C}_\xi$, sendo que Chevallard (2009d) relata que tais condições não podem ser enumeradas a priori: a sua descoberta é progressiva e a compreensão de seu papel na difusão de uma determinada entidade praxeológica $\wp$ são os objetivos permanentes da pesquisa em didática, além de que $\mathbf{C}_\xi$ impõem-lhe ao mesmo tempo as restrições $\mathbf{K}_\xi$, que determinarão ao menos em parte a atividade de ξ.

Os pesquisadores Bosh e Gascón (1994), postulam que o sentido do estudo exploratório de problemas cumpre um objetivo didático fundamental de familiarizar com as teorias, muito pouco ou quase nada presente no ensino básico no Brasil, com as técnicas utilizadas para enfrentar as tarefas matemáticas e com o que chamaram de campos de problemas que se quer ensinar.

Nosso processo de estudo se deu em tentar responder a Q_0 e de onde surgiu ao longo do PER diversas outras questões Q_i que provocaram a construção de uma OMR, já que esta responde às questões problemáticas advindas das OMP, são mais capazes de responder, constituindo assim a razão de ser da OMR.

6.2 IDEIA DO PER PROPOSTO POR YVES CHEVALLARD

No PER idealizado pela TAD, não temos uma situação definida a priori, e sim teremos uma situação espontânea, aonde iremos reagir. Devemos pensar se dado um conjunto de condições qual a prática que vive aqui, que é possível? E o pensamento inverso, problema dual, temos uma prática, então em que condições essa prática se torna possível? Portanto, há uma prática e não queremos na verdade discutir a prática em si, mas o que faz com essa seja possível de ser realizada, ou o que esta impedindo que essa prática se realize.

As ideias primárias sobre o PER surgem por meio dos Trabalhos Pessoais Orientados (TPO)[42] (daqui em diante usaremos a sigla TPE, do original em francês). Os TPE são atividades escolares obrigatórias, no sistema de ensino francês, principalmente, nos liceus (instituição com ensino médio

[42] Em francês: Travaux Personnels Encadrés (TPE) (CHEVALLARD; MATHERON, s. d., p. 1; FORTIN, 2004).

e tecnológico) (CHEVALLARD, 2001).

Segundo Chevallard (2001), para se estudar a praticidade dos TPE, deve-se considerar a hierarquia dos níveis de determinação de uma organização didática (sociedade → sistema escolar → disciplina → domínio → setor → tema → assunto) e, principalmente, o nível do sistema escolar que contém o pedagógico. Nesse pedagógico, as condições oferecidas e as restrições impostas no âmbito do sistema escolar existente – entenda-se isso como a *infraestrutura didática*[43] desse sistema – implicam no estudo de tipos de sistemas didáticos $\boldsymbol{S}$ e de uma questão $\boldsymbol{Q}$ qualquer. O estudo de tipos de sistemas didáticos $\boldsymbol{S}$ e de uma questão $\boldsymbol{Q}$ qualquer, constitui a pedagogia do PER, mas antes de tratarmos desse dispositivo didático, explicitaremos de forma breve o que é um sistema didático $\boldsymbol{S}$.

No processo de formação inicial de professores de matemática, o objetivo é o ensino da (AL), num curso de Licenciatura em Matemática, do (IFPA). Nessa formação a metodologia do PER foi adaptada. Em termos de discussões, trataremos aqui apenas dos elementos metodológicos do PER que conduziu esse estudo, que norteiam as pesquisas desta tese doutoral (CHEVALLARD, 2009a, 2009b, 2009c).

Por fim, o PER surge monodisciplinar ou bidisciplinar, associado ao *esquema herbatiano*[44]: $(\boldsymbol{S}\ (X\ ;\ Y\ ;\ Q) \rightarrow M) \hookrightarrow R^{\heartsuit}$. Essa é a forma não desenvolvida desse esquema, que contém o sistema didático $\boldsymbol{S}$, o *milieu*[45] $\boldsymbol{M}$ e a resposta esperada $R^{\heartsuit}$ (CHEVALLARD, 2009a, 2009b). Na metodologia do PER, o esquema herbatiano é aplicado em sua forma desenvolvida: $[S(X\ ;\ Y\ ;\ Q) \rightarrow \{R_1^{\lozenge}, R_2^{\lozenge}, \dots, R_n^{\lozenge}, R_{n+1}^{\lozenge}, O_{n+1}, \dots, O_m\}] \hookrightarrow R^{\heartsuit}$. Nessa forma, o esquema herbatiano revela a complexidade do *milieu* M = $\{R_1^{\lozenge}, R_2^{\lozenge}, \dots, R_n^{\lozenge}, R_{n+1}^{\lozenge}, O_{n+1}, \dots, O_m\}$.

Os $R^{\lozenge}$ ("R contraste") são respostas prontas e legitimadas institucionalmente, na TAD, diz-se que elas receberam um "selo" institucional. A análise das reposta $R^{\lozenge} = \{R_1^{\lozenge}, R_2^{\lozenge}, \dots, R_n^{\lozenge}, R_{n+1}^{\lozenge}\}$ poderá levar à elaboração da resposta esperada $R^{\heartsuit}$ (CHEVALLARD, 2009a, 2009b). Entretanto, há as respostas R provenientes das obras O= $\{O_{n+1}, \dots, O_m\}$, da cultura. Da análise dessas obras O podemos ter $R = R^{\lozenge}$ e, por conseguinte, elaborar a resposta esperada $R^{\heartsuit}$ (CHEVALLARD, 2009a).

O sistema didático $\boldsymbol{S_2}$ [46]constitui as etapas de sala de aula, isto é, o próprio PER e denotaremos por $\boldsymbol{S}_2$(X; Y; Q_2). Nesse sistema didático, X = $\{x_{2,1}; x_{2,2}; x_{2,3}; \dots ; x_{2,n}\}$, são os alunos em formação

[43] Chevallard enfatiza, que na pedagogia AER (Activité d´Enseignement et d´Étudde) e PER, exige-se que os professores revisem sua relação com o saber matemático. Ele afirma que quando um currículo é construído em torno de uma pedagogia dada, é formada uma infraestrutura educacional, didática/matemática ou matemática/didática, que permite a implementação desta pedagogia. Ele chama de infraestrutura didática as condições de ensino e restrições que a maioria das organizações matemáticas explora dentro das limitações impostas pelo sistema [...] (ALMOULOUD; SILVA, 2012, 39-40).

[44] Em homenagem ao filosofo alemão Johann Friedrich Herbart.

[45] A tradução de *millieu* é meio em Língua Portuguesa, mas a compreensão e significado de um *milieu*, na Didática da Matemática francesa, é muito mais amplo que o significado de meio.

[46] Sistema Didático do PER e $Q_2 = Q_0$ (questão geratriz do PER).

inicial do curso Licenciatura em Matemática do IFPA; Y = $\{y_1\}$, representa o professor ministrante da disciplina AL (diretor de estudo). A questão geratriz, desdobra-se em questões Q_1,....., Qi.

O terceiro sistema didático auxiliar, $S_3(X_2; Y; Q_3)$, possibilitou aos diretores de estudo dialogar sobre o bloco do saber-fazer ($[T, \tau]$) da TAD. A questão está assim anunciada: Q_3: *Como esses futuros professores selecionam os tipos de tarefas T para ensinar Álgebra Linear no Ensino Superior? (Etapa final do processo de formação).* Espera-se que o *milieu M* esteja estabelecido e exista a confiança entre o conjunto ***X*** e ***Y***.

Assim, as repostas para as questões dos sistemas didáticos $S_1(X; Y; Q_1)$, $S_2(X; Y; Q_2)$ e $S_3(X; Y; Q_3)$, estão sujeitas a organização de um *milieu* de trabalho *M*, reunindo o conjunto de recursos antigos e novos que *X* e *Y* utilizarão. Entre esses recursos, alguns possuirão respostas *prontas* para Q_1, Q_2, e Q_3, que se denota por $R^{\lozenge}$ (CHEVALLARD, 2008, 2009b). Da análise das respostas $R^{\lozenge}$ (*R* contraste), $Y = \{y_1, y_2\}$ (alunos em formação e diretor de estudo) poderão obter o material para construção da resposta $R^{\heartsuit}$ (resposta ótima).

6.3 SESSÕES DO PER NO IFPA (Ξ)

Postulamos, inicialmente, em um problema nosso sobre o ensino e a aprendizagem da disciplina AL nas IES, mas após a leitura de outros trabalhos, verificamos ser um problema da profissão. Nossa proposta de ensino por meio do PER, é verificar as condições e restrições em que nosso modelo mínimo (proposta do MER) se aplica e legitimá-lo, já que trazemos em nosso equipamento praxeológico, um novo modo de agir e pensar sobre o ensino de AL em uma IES, especificadamente, em um curso de Licenciatura em Matemática, e que pretendemos nos desvencilhar da proposta axiomática do ensino desta disciplina.

6.3.1 Aspectos introdutórios do PER no IFPA (Ξ)

Como temos 60horas/aula que é o tempo institucional, para execução do PER em **Ξ**, então não iremos resolver algumas tarefas em classe, mas daremos tarefas extraclasse (extra sessão), pois já de início o tempo institucional é uma *restrição*, pois limita nosso trabalho como pesquisador e professor. Então trabalhamos com questões problemáticas situadas na legitimidade funcional, cujas as respostas dadas pelos alunos e discutidas em sala para a construção de $R^{\heartsuit}$ permitam comprovar se as noções matemáticas foram interiorizadas.

Nosso contrato pedagógico feito entre **X** e **Y** ocorreu por meio de oficinas, em que cada sessão teve um tempo para execução de 150 min por quinta-feira, além de complementarem as atividades em casa, num total de 20 sessões. Os alunos foram divididos em grupos de trabalho, que atuaram juntos tanto em classe como extraclasse. Cada um deste grupos elegeram uma espécie de secretário que se pronuncia, comentando e respondendo as tarefas as quais lhes são propostas nas sessões, comentando as dificuldades e o entendimentos das mesmas. O diretor de estudo **Y** e também pesquisador ξ atua de forma a incentivar de forma ativa as atividades e guiar os debates. Ao final do PER cada grupo **X** apresentou em uma sessão (que corresponde a 150 min), um ou mais objetos matemáticos vistos no PER e utilizando a OMD proposta no MER, apresentaram uma oficina para a turma. Cada aluno entregou a **Y** as tarefas desenvolvidas em aula. Poderão utilizar as obras validadas por **X** e **Y**.

Neste processo de estudo combinamos trabalhos para **X** durante as sessões e fora destas. O grupo de alunos **X** foram incentivados a participar apresentando os resultados das atividades de modo oral e escrito, que foi entregue a **Y**. As sessões foram gravadas em áudio e vídeo.

A preocupação inicial de nossa OD foi verificar a mínima estrutura praxeológica necessária para se estrurar a OMD que criamos (proposta de MER); oportunizamos um primeiro encontro com os tipos de tarefas matemáticas; em seguida pensamos em um momento exploratório com intuito da comunidade de estudo tenha oportunidade de construir e utilizar técnicas potentes; apresentando novos problemas para que sejam enfrentados com o auxílio dos sistemas didáticos auxiliares que continham as obras **O**; em nosso estudo apareceu novas questões matemáticas relativas a interpretação e justificação das técnicas e alcance das mesmas e a relação entre elas, com o objetivo de se construir, conforme Bon (2011) um marco tecnológico-teórico; e por fim num processo de institucionalização **X** apresentaram um ou mais objetos utilizando a praxeologia do MER estudado.

Para Bon (2011), o REI [47] não funciona como uma estrutura rígida e sim como um processo de estudo dinâmico que se inicia a partir de uma questão aberta. Começaremos com uma OMP até chegarmos em uma OMR.

Nosso trabalho se restringe ao estudo do tema espaços vetoriais pertencente a disciplina AL, que é ministrada no 4º semestre letivo, do noturno, do curso de Licenciatura em Matemática na instituição IFPA, processo este ocorrido no 2º semestre de 2014 e findando no 1º semestre de 2015. Partimos da ideia de se trabalhar com o objeto matemático *sistemas lineares*, que é um tema visto no ensino básico no Brasil, geralmente no segundo ano do ensino médio, com este nome, mas sistemas de equações com duas ou mais variáveis no 7º ano do ensino fundamental, e partindo deste objeto estudamos estudar os demais, em tarefas que se apresentam em nível de complexidade crescente.

Chevallard (2009) relata sobre a organização do estudo e preconiza em se dispor o trabalho em equipe, pois há de se ter trabalho mais atraente e bem sucedido, se dando pela formação de pequenos grupos de alunos, cada um dos quais recebe a carga de expor uma pergunta específica, apresentando ao mesmo tempo, algumas tarefas de aplicação. Nosso motivo em dividir em grupos

[47] PER traduzido para o ensino Espanhol.

também se deu pela questão do tempo, pois na finalização do PER cada equipe apresentou um dos objetos estudados e não houve tempo se a apresentação fosse individual.

Cabe-nos ressaltar dois pontos importantes: primeiro foi a relação $\mathcal{R}$ o fato que um sujeito ξ na posição ρ põe-se uma questão Q – portanto, uma questão "de pesquisa"; que se coloque em ação sobre ela *uma dialética de estudo e pesquisa*, onde o estudo de $R^{\lozenge}$ (e outras obras) é um meio da pesquisa, pelo qual visa elaborar $R^{\heartsuit}$ (CHEVALLARD; ARTAUD, 2014, p. 3) e outro ponto é que devemos levar em conta neste percurso de estudo é o *contrato didático*, que rompe com o contrato didático habitual, quando se tem uma tarefa, há a aplicação com certa rigidez de uma técnica matemática.

Demos como instruções aos membros de X de não utilizar matrizes com a ideia de tabelas, determinantes para o cálculo de sistemas, explorar as técnicas de resolução de sistemas, procurar não utilizar conceitos formais dos objetos estudados e sim construir via modelização os conceitos dos objetos estudados, sempre trabalhando com sistemas lineares, com objetivo claro que é apreensão dos saberes pelos alunos, onde se permite que o aluno tenha a responsabilidade de decidir, a partir das técnicas que são úteis para resolver uma determinada tarefa e qual a mais econômica ou a mais fiável.

Nossa questão geratriz Q_0: Q*ual(is) objeto(s) matemático(s) podem ser mobilizados para se estudar AL, no que diz respeito ao estudo dos espaços vetoriais, em um curso de graduação de professores de matemática*?

Alguns elementos do milieu:

Instituição (Ξ): Instituto Federal do Pará (IFPA) turma de Licenciatura em Matemática do 4º semestre do noturno. Ano: 2014.

Razão de ser:

Legitimidade matemática: Investigamos qual as origens históricas e epistemológicas dos objetos matemáticos estudados neste PER, que estão presentes no MER;

Legitimidade social: os alunos dispõe de uma biblioteca central no Campus Belém do IFPA, e computadores ligados à internet para pesquisa, além de obras fornecidas por **Y** e por **X** também;

Legitimidade funcional: Planeja-se com os alunos, durante o estudo, encontrar respostas a Qo.

Legitimidade didática: No capítulo inicial desta tese, em que buscamos trabalhos relacionados com ensino de AL, destacamos os trabalhos de Lindner (2003), Dorier (2000), Dorier et al. (1999), Dorier (2002), Silva (1999), Karrer (2003, 2006, 2009), Laugwitz (1974), Carlson (1993), Uhlig (2015), Padredi (2003), Prado (2010), Parraguez (2009), Coimbra (2008), Wawro et al. (2011), Harel (1990), Sierpinska et al. (2002) e Dias (1993) que mostram que o ensino formal, por meio de axiomas, tem criado problemas no processo de ensino dos alunos e então estes vem a crias estratégias de ensino, outros denotam os obstáculos encontrados, entre outros aspectos, demonstrando-se que há obstáculos em manipular o modelo dominante de ensino de AL.

Uma primeira restrição (**K_ξ**), que chamamos de **K_1** foi uma primeira dificuldade, está no lado de quem dirigiu o PER, particularmente professores no caso nós (autores da tese), pois não é fácil sua concepção e construção, a segunda restrição é a **K_2**, está no lado do X e Y, isto é, o lado de aqueles que viverão o PER, e estas restrições surgem, já que tanto **X**, quanto **Y** tem pouca familiaridade com esta metodologia de estudo. Para o diretor de estudo, autores desta tese, uma dificuldade, diria algo que se torna uma outra restrição **K_3** é o fato de termos encontrado poucos exemplos deste tipo de estudo, pois na França onde se começou a aplicar o PER no Liceu (ensino básico no Brasil), os professores têm cursos de formação.

Realizamos estudos nos trabalhos de *Le concept de PER et as Réception actuelle em mathematiques et ailleurs* de Julia Marietti, orientado por Chevallard em 2009; no Simpósio ocorrido na Universidade de Rennes em 2008, Chevallard apresenta o trabalho intitulado *Didactique de l'enquête codisciplinaire et des parcours d'étude et de recherche*, o trabalho de tese de Andrade (2012), o artigo *Parcours d'étude et de recherche dans l'école secondaire: une étude longitudinale dos autores* (LHANOS et al., 2010) e no IV Congresso Internacional da TAD (2013) em Toulouse, que para nós foram obras que nos possibilitaram caracterizar nosso desenho metodológico com um PER adaptado.

O PER permitiu que os alunos e o professor (diretor de estudo) juntos tenham uma visão em conjunto sobre os temas estudados ou a um determinado conceito. Faremos isto por meio de sistemas de tarefas sobre um mesmo assunto, permitindo com que os alunos entrem em contato com as OMD, que estão na proposta de MER. As técnicas serão discutidas com os alunos, pois diferentes técnicas podem ser utilizadas para um mesmo tipo de tarefa e discutindo a conexão que há entre eles.

O percurso de nossa investigação trata em construir uma compreensão sobre o gênero de tarefas, que é estudar qualitativamente os sistemas lineares, no sentido da instalação e manutenção de um PER, para a construção de organizações praxeológicas de complexidade crescente (processo de modelização). O desenvolvimento do PER pressupôs, que olhemos concretamente a concepção e construção, implementação, observação, análise e a avaliação do PER e por fim reescrever a proposta de MER agora legitimada como um modelo alternativo para o curso de Licenciatura em Matemática do IFPA, sobre novas condições e restrições, permitindo que os alunos se tornem agentes de uma *pedagogia da investigação*.

Explicamos aos membros de **X**[48], que a TAD propõe descrever os processos de modelização, no sentido de reconstrução e articulação de OM de complexidade crescente, a partir de questões ditas problemáticas que se posta em uma comunidade de estudo e que esta se propõe a apresentar respostas, conforme (GARCIA e RUIZ, 2005 e BARQUERO, 2009).

---

[48] Refere-se a S (X, Y, Q), que são os alunos do Curso de Matemática do IFPA.

Nosso PER se impõe como dispositivo de formação de professores à medida que encaminha a construção de respostas às questões problemáticas da e pela comunidade de estudo e que podem ser traduzidas pela questão Q_o já apresentada.

Comentamos ainda que nosso PER permitia que toda comunidade estivesse engajada em estudar coletivamente a questão geratriz, e que produzíssemos uma resposta ótima, ou esperada, por meio da resposta as demais questões que surgiam, rompendo com o contrato didático habitual.

6.3.2 Sessões do PER

1ª sessão

O PER ocorreu em uma turma do 4º semestre do curso de Licenciatura em Matemática do noturno do IFPA, em um período de 5 meses, pois houve recesso escolar neste período, durante os meses de novembro de 2014 a março de 2015. A classe foi dividida em 2 grupos de 4 e 2 grupo de 3 integrantes, pois havia 14 alunos (a partir de agora $\mathbf{A_i}$), sendo que a participação de cada **Ai** nas sessões foi individual, inclusive na entrega das tarefas feitas em classe e fora desta instituição.

Nesta primeira sessão foi conversado com a classe de alunos de matemática como se daria a metodologia de ensino da disciplina Álgebra Linear I (AL) durante as sessões. Comentou-se sobre as oficinas, da importância da participação dos mesmos neste processo que os leva ao encontro do saber, e que os mesmos poderiam trazer obras para enriquecer o milieu.

$R_Y^{Q'1}$: As questões aqui indicadas norteiam as atividades do pesquisador (diretor de estudo) nas etapas iniciais da metodologia do PER. Nossa proposta de MER se torna neste momento um entendimento mínimo sobre as práticas de se ensinar objetos da AL, coordenadas em uma OMD, que caracterizamos como regional. Questiono o modelo dominante, pelo mesmo ser formalista e as tarefas não se articularem, criando um obstáculo de cunho didático e epistemológico, para membros de **X**. Basicamente trabalharemos com a tecnologia estudo qualitativo de sistemas, que permeia toda nossa OMD sobre AL.

Chevallard (2009c) relata que ao se estudar, formalmente, uma questão $\mathbf{Q_0}$ *genérica*, em geral, é trabalhar para dar-lhe uma resposta R. Estudar um *saber*, mais precisamente uma entidade praxiológica $\wp$, é realmente estudar algumas questões relativas a $\wp$, a sua estrutura e suas funções, sua gênese. As obras tem a intenção de ajudar no processo de estudo, contribuindo com a mesogênese. As respostas **R** dadas para $\mathbf{Q_0}$ são $\wp$.

Iniciamos a conversa com os membros de X sobre o PER, que se configura como uma pedagogia de investigação/questionamentos utilizada inicialmente na França no Liceu francês e em nível de ensino superior na Espanha.

Há um sistema didático S (X, Y, Q_0) de um modo geral, onde o **X** representas os grupos de alunos da classe, **Y** é o diretor de estudo (professor da disciplina) e Q_0 é a questão geratriz. Há um sistema S(X, $\wp$) que é a prática matemática e outros sistemas S (X, Y, O), onde as obras **O** podem ser matemáticas ou não e que daí surgem as respostas **R**, que gerarão outras **Q**, até chegarmos em S (X, Y, Q_i) e ai em $\mathbf{R_x}$, carimbando até chegarmos em $\boldsymbol{R}^{\Diamond}{}_{x}$, onde o objetivo de S (X, Y, Q_0) → M → $\boldsymbol{R}^{\heartsuit}$, resposta ótima validada pelo professor a partir das $\boldsymbol{R}^{\Diamond}{}_{x}$ validadas por **X** e **Y**.

Ao final da primeira sessão colocamos em classe a questão geratriz Q_0? E pedimos pra que pesquisassem.

$\mathbf{Q_0}$: Q*ual(is) objeto(s) matemático(s) podem ser mobilizados para se estudar AL, no que diz respeito ao estudo dos espaços vetoriais, incluindo combinações lineares, LD, LI, base e dimensão em um curso de graduação de professores de matemática*?

2ª Sessão

O nosso PER se configurou, por meio sistema didático $\boldsymbol{S_2}$, o qual constitui as sessões em sala de aula, e que denotamos por $\boldsymbol{S}_2$(X; Y; $\mathcal{Q}_0$). Nesse sistema didático, X = $\{x_{2,1}; x_{2,2}; x_{2,3}; \ldots ; x_{2,n}\}$, são os alunos em formação inicial do curso Licenciatura em Matemática do IFPA; Y = $\{y_1\}$, representa o professor ministrante da disciplina AL (diretor de estudo). A questão $\mathcal{Q}_0$, desdobra-se em questões $\mathcal{Q}_1$, Q_2, $\mathcal{Q}_3$, ..., etc., sendo formulada durante as sessões de estudo (aulas). Além disso, são essas questões que auxiliarão o pesquisador a formular a resposta ótima (esperada) $R^{\heartsuit}$ de nossa tese doutoral, cujo sistema didático, denota-se por $\boldsymbol{S}'$(X; Y; $\boldsymbol{\mathcal{Q}}$), no qual X = $\{x_1\}$ = doutorando, Y = $\{y_1\}$ = orientador e $\boldsymbol{\mathcal{Q}}_0$ = questão norteadora da tese doutoral (CHEVALLARD, 2009a, 2009b).

Começamos perguntando a **X** o que eles encontraram sobre AL que os levasse a resposta de Q_0? Iniciamos a sessão ouvindo algumas respostas. A resposta de A_{10} (que chamaremos de R_{10}^{ti} (tarefa i) e $R_{10}^{\Diamond ti}$ (por exemplo, resposta carimbada do A_{10} a tarefa i) ou ainda R_{10}^{Qi} (resposta a questão Q_i, assim para as demais) foi de que é o estudo dos espaços vetoriais e que tem haver com vetores. A resposta R_3 foi "que a AL tem como objeto de estudo o comportamento de operações definidas sobre conjuntos, então esta disciplina trabalha com os espaços vetoriais, sendo estes conjuntos definidos por operações de soma e multiplicação". R_5 complementou a resposta de A_3, dizendo que "os espaços são estruturas algébricas e a ideia da abstração vem, justamente, para generalizar o conceito de vetor no R^3, podendo ter dimensões maiores e tais espaços não são só representados apenas por vetores, mas sim por matrizes ou funções".

Conversamos se eles procuraram na internet ou em livros e foi possível notar que nos livros assim como na internet, o iniciam por espaços vetoriais. A_7 manifesta sua R_7 dizendo que: "no

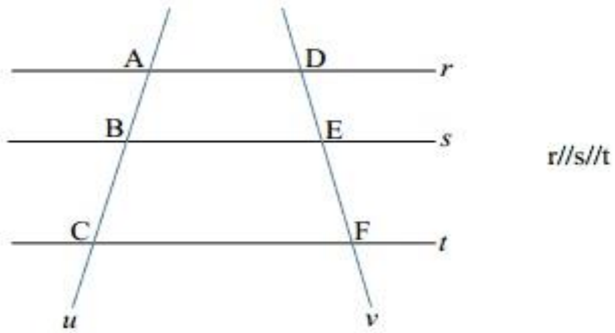
Wikipédia a AL é um ramo da matemática que surgiu do estudo detalhado de sistemas lineares sejam estes algébricos ou diferenciais”.

Questionamo-los sobre como estudar os sistemas lineares. A resposta de R_7 é de se estudar de como resolvemos eles. Ai apresentamos o momento chamado por Chevallard de *momento do primeiro encontro*, apresentando-lhes a primeira atividade contendo um sistema de tarefas, já que, segundo Andrade e Guerra (2014) as tarefas vivem nas praxeologias que atendem necessidades institucionais, inclusive docentes, e tal condição nos leva a encaminhar as problemáticas por nós enfrentadas como da profissão docente, que requerem um milieu mais rico, um equipamento praxeológico mais amplo, que disponibilize outras obras e outras respostas para o seu enfrentamento.

A medida que formos apresentando as tarefas, já iremos apresentar a(s) resposta(s) carimbadas por **X** e **Y**. Como eram poucos alunos, a sistemática era que individualmente se pronunciassem ou que fossem ao quadro mostrar a técnica e por conseguinte a entrega do material, havendo uma discussão final para elegemos em conjunto, uma resposta carimbada, que denotaremos por ($R_x^{\lozenge tij}$) , onde t_{ij} corresponde a tarefa e **x** resposta de um aluno. Conforme nosso modelo partiremos de uma tarefa em que os alunos, a partir de uma Figura 75 e com o auxílio do Teorema de Tales, algebrizem, chegando a equação da reta.

T_1: Determinar o valor de **x**, sendo **x** o valor da medida de um segmento (Figura 75). Momento do primeiro encontro. Essa tarefa nos permite faz parte do equipamento praxeológico inicial dos alunos. A tarefa pertencente ao tipos de tarefas 1 e a primeira tarefa $\mathbf{t_{11}}$: Determinar, utilizando o Teorema de Tales, o valor de EF = x , sabendo que AB = 5 cm, BC = y, DE = 6 cm.

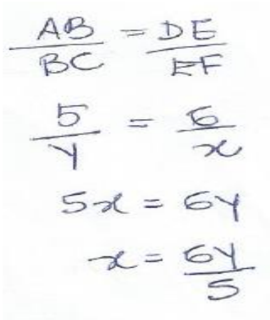
Figura 75 – Duas retas cortadas por transversais



Fonte: Autor desta tese.

A Figura 76 expressa a $R_x^{\lozenge t11}$.

Figura 76 – Resposta dada por R_6, carimbada $R_x^{\Diamond t11}$.



Fonte: Produção de A_6 (2014).

Observarmos nas respostas $\mathbf{R_x}$, (momento do trabalho da técnica) para a t_{11} como os alunos estabelecem a relação de proporcionalidade entre unidades de medidas dos segmentos e valores desconhecidos: incógnita, variável, etc.), mas A_5 questiona se não teríamos que ter um valor para **y** para encontrarmos **x**, então um conjunto de alunos A_6, A_7 e A_{15} dizem que a questão é literal, que pode ter diversas respostas, dependendo do valor de **x**. A questão $\mathbf{Q_1}$ foi proposta por **Y**: Porque eles fazem essa representação resolutiva. Y diz que esse momento de trabalhar a técnica é para que a mesma não se restrinja a um tipo de tarefas.

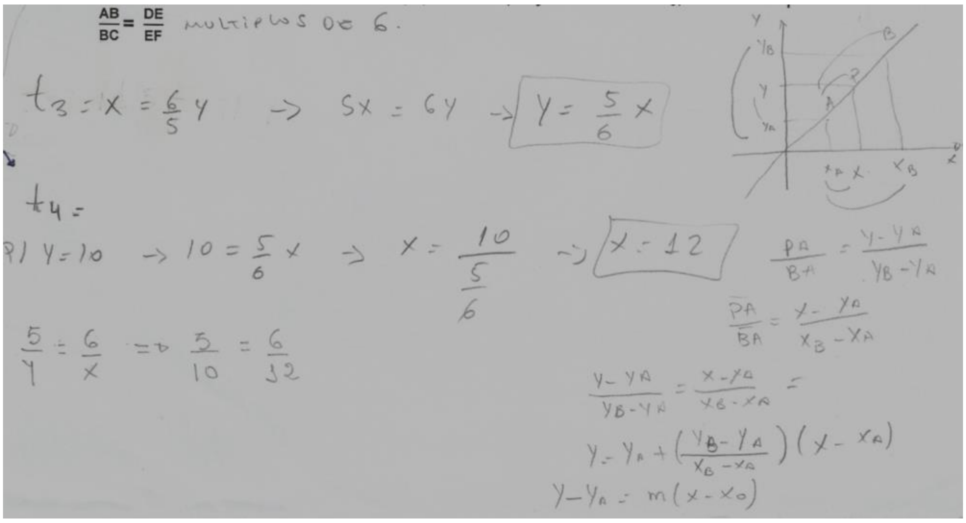
A resposta quase unânime foi $R_x^{\Diamond t11}$ (resposta da tarefa t_{11} dada por um $\mathbf{A_x}$ que pertence a **X**) é que assim que se resolve utilizando o Teorema de Tales. Então discutimos em classe que quando veem uma figura deste tipo utilizam direto a técnica, que se baseia na proporcionalidade entre os segmentos. Q_{11}: Podemos a partir do Teorema de Tales construir atividades de Álgebra ou de Geometria Analítica. Os membros de X discutiram e chegaram à conclusão que a partir desta atividade aparecem as letras. T_{12}: Determinar três possíveis medidas inteiras para o segmento EF, de forma que **AB=** $\frac{\mathbf{Y}}{\mathbf{X}}$ (não esqueça que no Teorema de Tales a proporcionalidade deve ser mantida para as medidas dos segmentos).

Estamos no momento exploratório, pois há a necessidade de se buscar uma técnica que permita explorar a questão de partida, t_{11}. $R_x^{\Diamond 12}$ (resposta carimbada de t_{12}) de um modo geral foi $\frac{5}{y} = \frac{6}{x}, se\ y = 5 \Rightarrow \frac{5}{5} = \frac{6}{x} \Leftrightarrow x = 6$, assim como fazendo y = 10, tem-se x = 12 e y = 15, então x = 18. Pelo Teorema de Tales, a equação y = 5x, possui valores que solucionam o problema proposto, mas não todos, pois não obedece a proporcionalidade, logo há restrições implícitas na regra da proporcionalidade dos segmentos proporcionais. Alguns alunos de **X** fizeram, y = 5x ⇒ y = 5 · 1 = 5 e quando substituíram em $\frac{5}{y} = \frac{6}{x}$ verifica-se $\frac{5}{5} = \frac{6}{1} \Rightarrow 1 = 6$, que é uma resposta incorreta, técnica apresentada por A_7, A_{15} e A_{14}.

Começamos a conversar sobre a relação entre esta Geometria Plana com Função. Surge na classe por A_5 uma questão Q_2: Há alguma relação entre a técnica de resolução de t_1 e t_2 e a função linear, pois elas se parecem?

Propomos T_2: Determinar a equação da reta na forma y = ax + b. t_{21}: Determinar a equação da reta a partir da solução da tarefa t_1. Apresentaremos a resposta de R_9 (Figura 77):
Esta tarefa apresenta uma técnica que é a mesma que se utiliza para resolver o problema envolvendo Tales, que é uma técnica que resolve tarefas desta natureza. A compreensão da Comunidade recaiu sobre esta tarefa de Tales, como uma tarefa à qual poderiam promover a articulação e justificação para introduzir as equações lineares e depois os sistemas.

Figura 77 – Resposta carimbada $R_x^{\lozenge t21}$.



Fonte: Produção de A_9 (2014).

t_{22}: Determinar valores de x e de y para a equação da tarefa t_3, de forma que: $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$.
Apresentaremos a resposta dada por A_9, portanto a R_9. (Figura 77).

Os alunos ainda desenharam o plano cartesiano, deduzindo a equação da reta deste, e nas discussões em classe, discutimos da relação com a t_1. Membros de **X** poderam observar as relações entre Tales e a equação da reta, chegando a conclusão que $R_x^{\lozenge 22}$ ocorre um processo de “algebrização da Geometria antiga”.

A questão da razão de ser do estudo, partindo do Teorema de Tales está ligado a noções de razão e proporção e mostra que o alcance da técnica foi possível se desenvolver a equação da reta, articulando-se as tarefas.

Pedimos para que trouxessem na 3ª sessão, qualquer obra que tratasse sobre Geometria Analítica, para constituir o sistema auxiliar $S_1(X,Y,O_1)$.

3ª Sessão

Foi colocado no email da turma a obra O_1, contribuindo com a mesogênese, intitulada *Da Álgebra Geométrica Grega à Geometria Analítica de Descartes* de Maria Dalila Correa Pedrosa Ramos, Ramos (2013) por A_6, além de outros textos menores, então decidimos estudar esta obra.

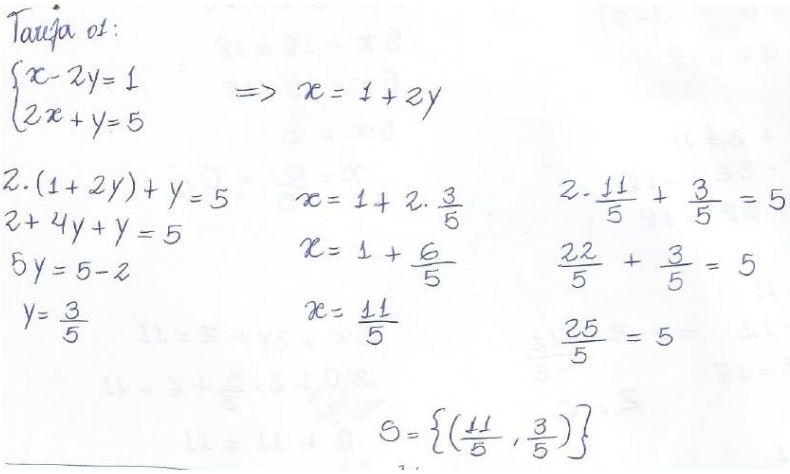
No início da 3ª sessão comecei, inicialmente, por proporcionalidade, em seguida comentamos sobre as curvas trabalhadas por Descartes e Fermat, além de explanar a eles sobre Oresme. Chegamos ao consenso que a Geometria Analítica veio "algebrizar" problemas da Geometria de Euclides, que eram resolvidos com régua e compasso. Momento do primeiro encontro com os sistemas lineares.

T_3: Resolver o sistema linear

t_{31}: Resolver o sistema linear a seguir:

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$$

Figura 78– A resposta carimbada $R_x^{\Diamond 31}$ dada por A_1.



Tarefa 01:

$\begin{cases} x - 2y = 1 \\ 2x + y = 5 \end{cases} \Rightarrow x = 1 + 2y$

$2.(1+2y) + y = 5$

$2 + 4y + y = 5$

$5y = 5 - 2$

$y = \frac{3}{5}$

$x = 1 + 2.\frac{3}{5}$

$x = 1 + \frac{6}{5}$

$x = \frac{11}{5}$

$2.\frac{11}{5} + \frac{3}{5} = 5$

$\frac{22}{5} + \frac{3}{5} = 5$

$\frac{25}{5} = 5$

$S = \left\{\left(\frac{11}{5}, \frac{3}{5}\right)\right\}$

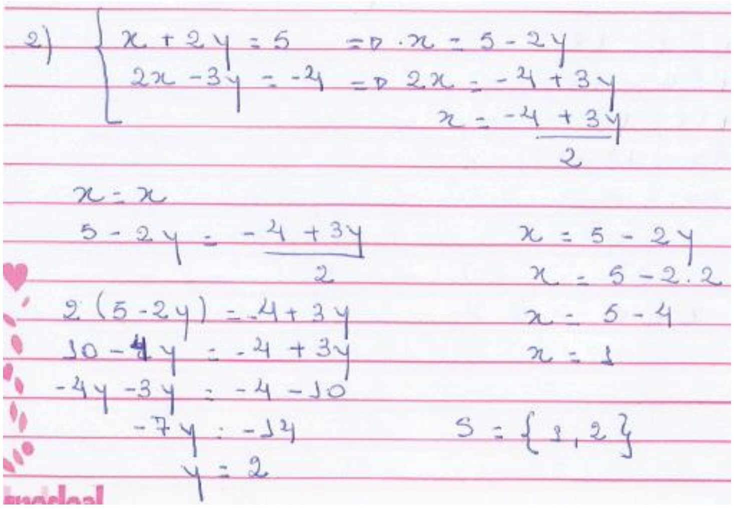
Fonte: Produção de A_1 (2014).

Apesar de serem alunos do ensino superior a tarefa t_{32} acabou sendo uma restrição $K_{\xi 1}$ já que membros de X desconheciam esta prática.

t_{32}: Resolver o sistema linear da comparação

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 2x - 3y = -4 \end{cases}$$

Figura 79 - A resposta carimbada $R_x^{\lozenge 32}$ dada por A_{11}.



Fonte: Produção do aluno A_{11} (2014).

Após tornarmos as tarefas rotineiras propomos uma tarefa um pouco mais complexa.

t_{33}: Resolver pelo método da adição

$$\begin{cases} 2x & + & 3y & + & z & = & 11 \\ x & + & y & + & z & = & 6 \\ 5x & + & 2y & + & 3z & = & 18 \end{cases}$$

Durante esta sessão, A_x[49] comentaram que no 7º ano do ensino fundamental este é o método mais utilizado, pelo sistema ser 2 por 2, pois é um método rápido, seguro e eficaz. Apesar deste fato, não houve uma respostas carimbada nem por X e nem por Y. Os alunos de um modo geral encontraram uma solução S = {(0, 5/3, 6)}, mas esqueceram de testar nas 3 equações, pois testaram só na primeira. Quando a substituíram nas demais viram que não servia. As respostas dadas por A_3, A_7 e A_9 é que no ensino fundamental não se aplica este método para um sistema 3 por 3 e no ensino médio já se resolve o sistema por determinantes, por Sarrus ou Laplace. Surge $Q_{2,1}$: Porque se resolver por este método? Dá o mesmo resultado pelos outros?

Após o estudo da obra O_1 os alunos de **X** exploraram a técnica presente neste tipo de tarefa e conseguiram suprir a dificuldade apresentada, pois esta se apresentava em trabalhar a equação dois com a três considerando a incógnita que havia sendo excluída, pois no momento de explorar a técnica houve dificuldade pois na a relação que X tinha com este objeto era restrita a um sistema 2 por 2.

t_{34}: Resolver o sistema linear pelo método substituição e eliminação.

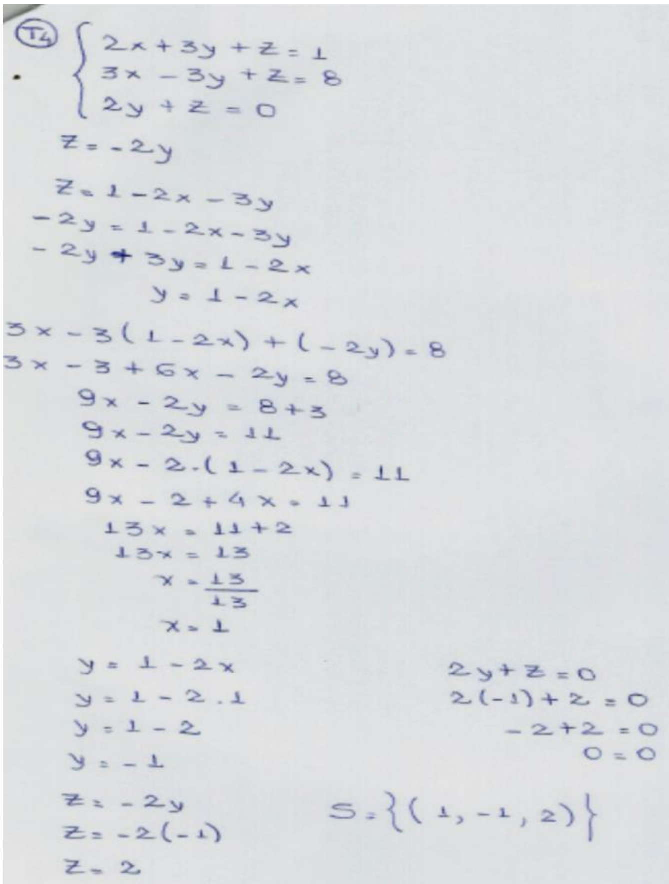
$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 1 \\ 3x - 3y + z = 8 \\ 2y + z = 0 \end{cases}$$

[49] Mais de um aluno comentou a mesma questão e pelo áudio como foi possível se identificar mais de 6 falas.

A técnica apresentada pelo aluno A_{11}, para enfrentar a t_{34} (Figura 80). A razão de ser dessa tarefa é a aplicação do método e já em um sistema 3 por 3 os alunos conseguiram verificar a potencialidade do método, isto é, tem um longo alcance. Nesse início de estudo os alunos estavam direcionados em responder a questão geratriz e também durante todo o processo, interessou-nos em movimentar as praxeologias já conhecidas pelos alunos, inicialmente com tarefas não problemáticas e que alguma forma pudessem estar relacionadas com o trabalho de investigação, estabelecendo-se o EP matemático dos alunos, que são os meios matemáticos que os alunos dispõe.

A Comunidade assegura que as maneiras de resolução, das tarefas, com sistemas lineares, lhes parecem ser os que se caracterizam como o estudo qualitativo de sistemas lineares, pois estão presentes nas práticas que vivem na escola e expressam a potencialidade de justificação e articulação com as outras tarefas, parecendo transversalizar o setor da AL, ora assumindo o papel de tarefa, ora sendo utilizado como técnica, ou como tecnologia, o que para nós, expõe a funcionalidade dos elementos de uma praxeologia.

Figura 80 - A resposta carimbada $R_x^{\Diamond t34}$ dada por A_{11}.


T4

$$\begin{cases} 2x+3y+z=1 \\ 3x-3y+z=8 \\ 2y+z=0 \end{cases}$$

$z=-2y$

$z=1-2x-3y$

$-2y=1-2x-3y$

$-2y+3y=1-2x$

$y=1-2x$

$3x-3(1-2x)+(-2y)=8$

$3x-3+6x-2y=8$

$9x-2y=8+3$

$9x-2y=11$

$9x-2.(1-2x)=11$

$9x-2+4x=11$

$13x=11+2$

$13x=13$

$x=\frac{13}{13}$

$x=1$

$y=1-2x$

$y=1-2.1$

$y=1-2$

$y=-1$

$2y+z=0$

$2(-1)+2=0$

$-2+2=0$

$0=0$

$z=-2y$

$z=-2(-1)$

$z=2$

$S=\{(1,-1,2)\}$

Fonte: Produção de A_{11} (2014).

Esta tarefa deve cumprir certas condições para ser estudada em uma instituição docente. Durante este trabalho foi revelado o alcance desta técnica, não sendo portanto uma questão morta[50], ou ainda centrada em si mesma, pontual, mas que articule com outros tipos de tarefas, durante este percurso de estudo e investigação. (Momento exploratório).

Após discutimos todas as respostas dos alunos, verificamos que os alunos **X** não conseguiram resolver, por não ter uma relação com este objeto, a tarefa t_{33}, logo não carimbamos nenhuma, pois após conversa com os mesmos não havia em nenhum aluno de **X** infraestrutura matemática para enfrentar a tarefa.

Apesar de termos admitido inicialmente como $\mathbf{C}_{\xi 1}$, que esta tarefa não traria dificuldades, esta acabou sendo, em resolver o método da adição para um sistema com 3 incógnitas e 3 equações. Foi necessário criar um sistema didático auxiliar S_2 (X, O_2), onde pedimos para que os mesmos estudassem a obra O_2, por meio da mídia *Método de Adição Ordenada*, que disponibilizamos na biblioteca do Campus para estudo de **X**, pois é necessário haver um aprimoramento do *trabalho da técnica*.

4ª sessão

Nesta sessão foi possível se discutir e chegar a reposta da t_{33}.

t_{33}: Resolver pelo método da adição dada na sessão anterior, para o sistema

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 11 \\ x + y + z = 6 \\ 5x + 2y + 3z = 18 \end{cases}.$$

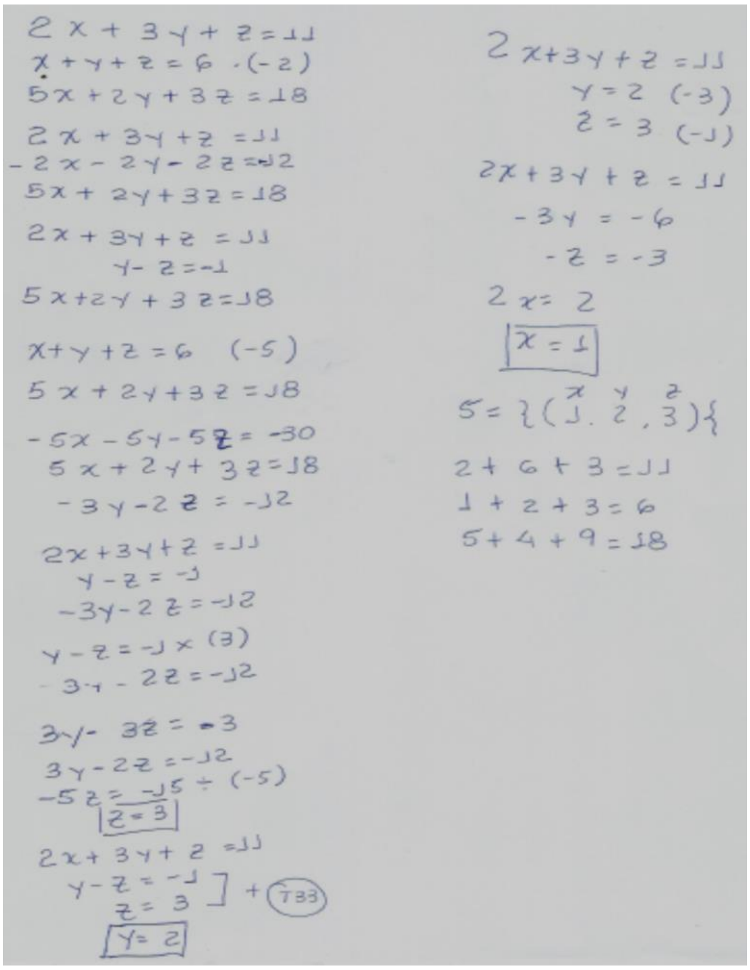
A Resposta da por R_5 foi a carimbada para esta tarefa (Figura 81).

A técnica se deu pelo método da adição, muito comum para resolver sistemas lineares 2x2.

A razão de ser dessa tarefa é de que os alunos percebam que esse método é o mesmo da substituição e eliminação, que consideramos a tecnologia que justifica o método.

[50] Cf. TAD.

Figura 81- A resposta carimbada $R_x^{\Diamond 33}$ dada por A_5.



Fonte: Produção de A_5 (2014).

Os alunos de **X** discutiram em classe o porquê a dificuldade em resolver tal tarefa, pois a mesma se tornou problemática, pois ao elevarmos o sistema de 2 por 2 para um 3 por 3, os alunos trabalharam a primeira com a segunda equação eliminando a incógnita x e esta mesma equação foi trabalhada com a terceira sem a incógnita x, o que os fez chegar a uma resposta inadequada.

Em conversa com os alunos em classe, verificamos que os mesmos fizeram uma interpretação do funcionamento e da aplicação da técnica, sendo possível diluir a dificuldade apresentada por eles na resolução da tarefa em questão. A *exploração do tipo de tarefa T3*, e da (re) elaboração de uma técnica τ relativa a t_{33}. Para a resolução da tarefa t_{33} houve a constituição de uma técnica relacionada ao método da adição mais desenvolvida, para sistemas com mais de 2 incógnitas e mais de 2 equações. Um momento foi dado a eles um novo sistema 2 x 2 e daí partimos para a resolução da tarefa. Percebemos uma mudança da relação do saber dos alunos com esse tipo de tarefa, havendo aprendizagem. A fala de A_5 “trabalhamos com os números e não com as letras” chegando onde desejávamos que era que percebessem que trabalhamos com os coeficientes.

5ª sessão:

Entregamos o terceiro sistema de tarefas a **X.**

T_4: Resolver o sistema linear m x n pelo método da eliminação e substituição

t_{41}: Resolver o sistema linear 2x2 pelo método da eliminação e substituição $\begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 9 \end{cases}$.

De um modo geral as $\mathbf{R_x}$ se deu em aplicar o método multiplicar a primeira linha por (-1) e somar com a segunda eliminando-se a incógnita x, como segue:

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ 2y = 8 \end{cases}$$

Sendo y = 4, substituindo-se na primeira equação tem-se: x – 4 = 1, sendo x = 5. S = {(5,4)}.

t_{42}: Resolver o sistema 2 x 2:

$$\begin{cases} 2x - y = 10 \\ x + y = 14 \end{cases}$$

Pelo mesmo método multiplica-se a primeira equação por (-1/2) e soma-se com a segunda, mas alguns alunos trocaram a posição das equações e multiplicaram a primeira por (-2) e somaram com a segunda, determinando x = 8 e y = 6.

Após tornarmos rotineira a tarefa passamos a uma 3x3.

Passamos a explorar o tipo de tarefa T_4, por meio da tarefa seguinte.

t_{43}: Resolver o Sistema S, pelo método da eliminação e substituição:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 20 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 30 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 40 \end{cases}$$

Esta tarefa ficou para estudo extra classe e a obra foi fornecida a eles para o devido estudo em primeiro momento S_3 (X, O_3) estudo entre X e O_3 e em classe constituindo um sistema S_4 (X, Y, O_3). Aparece a dificuldade nos alunos de X, pois qual incógnita (letra) isolar, de qual equação, a tarefa se tornou problemática. Para incrementar o milieu, então apresentar a O_3 que foi o nosso modelo mínimo de entendimento sobre alguns saberes da AL, que foi a nossa proposta de MER.

Conversamos sobre a *modelização matemática*, segundo a TAD, teoria esta que já havíamos comentado na 1ª sessão. A partir das técnicas apresentadas no modelo é estudamos em conjunto a solução de t_{43} e ai formamos os grupos em sala para que as equipes fazerem o que a teoria denomina nos momentos didáticos de momento do trabalho da técnica, que já havia utilizado para sistemas menores e agora para sistemas maiores (maior número de incógnitas e equações).

Após trabalharem com a proposta presente no modelo podemos carimbar a resposta apresentada por ampla maioria de X, após estudo do modelo de interpretação do funcionamento e do resultado da aplicação da técnica. A *exploração deste tipo de tarefa T_4*, e da elaboração de uma técnica τ relativa a este tipo de tarefa. A partir do trabalho da técnica, que é o momento de testar as técnicas e de verificar a confiabilidade das mesmas qualitativamente como também quantitativamente, foi desenvolvido por alunos de **X** foi possível carimbar a resposta $R_x^{\lozenge 43}$. Estudamos o método da substituição e eliminação e chegamos a conclusão que este resolve qualquer sistema, pois segundo alunos de **X** o sistema fica triangular e a resposta se torna óbvia.

Seis de alunos de X relataram que nunca haviam resolvido um sistema deste tipo, sendo um problema institucional, pois boa parte das práticas com sistema lineares, não tinham resolvido nenhuma tarefa deste tipo.

Ao mesmo tempo que realizavam a atividade o diretor de estudo propõe que vão dando respostas as perguntas $Q_{2,2}$, $Q_{2,3}$ e $Q_{2,4}$ a seguir (momento de institucionalização e tecnológico teórico). Surgiram dúvidas que na discussão em classe foi possível resolver, como: $Q_{2,2}$: se isolamos x_1, por exemplo, temos que substituir em todas 3 equações restantes ou só em uma? $Q_{2,3}$: Foi discutido e como o próprio nome do método sugere, temos que isolar uma incógnita e substituir em todas as equações que tem esta incógnita. $Q_{2,4}$: Outra questão foi se este método era mais complexo que os demais? Discutimos que é um método, em que quando o sistema fica na forma triangular se torna simples determinar, quando é possível, determinar os valores das incógnitas. Este método resolve qualquer sistema? As respostas de R_x foi que sim, pois A_4 e componentes de seu grupo de estudo resolveram as tarefas apresentadas por este método.

A Figura 82 mostra a resposta dada por 3 alunos de X, após trabalharem a técnica e explorarem tal técnica para sistemas lineares maiores. A técnica foi o método da substituição e eliminação que deixou o sistema escalonado, conforme respostas apresentadas por alunos do grupo 4 .

Figura 82- A resposta carimbada $R_{x}^{\lozenge 43}$ dada por A_{12}, A_{13}, A_{14}.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 20 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 30 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 40 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 10 - (x_2 + x_3 + x_4) \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 20 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 30 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 40 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 10 - (x_2 + x_3 + x_4) \\ 10 - (x_2 + x_3 + x_4) + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 20 \\ 10 - (x_2 + x_3 + x_4) + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 30 \\ 10 - (x_2 + x_3 + x_4) + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 40 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 10 - (x_2 + x_3 + x_4) \\ x_2 + x_3 + x_4 = 10 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 20 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 30 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 7 - (x_2 + x_3 + x_4) \\ x_2 + x_3 + x_4 = 10 \qquad \Rightarrow \qquad x_2 = 10 - (x_3 + x_4) \\ 10 - (x_3 + x_4) + 2x_3 + 2x_4 = 20 \\ 10 - (x_3 + x_4) + 2x_3 + 3x_4 = 30 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 10 - (x_2 + x_3 + x_4) \\ x_2 = 10 - (x_3 + x_4) \\ x_3 + x_4 = 10 \qquad \Rightarrow \qquad x_3 = 10 - x_4 \\ x_3 + 2x_4 = 20 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 10 - (x_2 + x_3 + x_4) \\ x_2 = 10 - (x_3 - x_4) \\ x_3 = 10 - x_4 \\ x_3 + 2x_4 = 20 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 10 - (x_2 + x_3 + x_4) \\ x_2 = 10 - (x_3 - x_4) \\ x_3 = 10 - x_4 \\ 10 - x_4 + 2x_4 = 20 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10 \\ \qquad x_2 + x_3 + x_4 = 10 \\ \qquad\qquad x_3 + x_4 = 10 \\ \qquad\qquad\qquad x_4 = 10 \qquad S = \{(0,0,0,10)\} \end{cases}$$

Fonte: Produção dos alunos A_{12}, A_{13}, A_{14} (2014).

A tarefa t_{44} permitiu, a partir do trabalho da técnica, institucionalizar um objeto matemático estudado em AL.

t_{44}: Resolver o sistema a seguir, pelo método da substituição e eliminação.

A subtarefa t_{441}: Conforme nossa proposta de MER, Resolver a t_{44}, adicionando e subtraindo a variável isolada ao segundo membro da equação.

A subtarefa t_{442}: Determinar nomes para as equações em E_1 para a primeira, E_2, E_3 e E_4.

$$S' \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 8 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 9 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 10 \end{cases}$$

Estudamos a técnica apresentada no modelo. É possível notar que temos uma técnica elaborada a partir relativa a esta tarefa, portando exploramos o T_4. O *momento* didático agora é o *trabalho da técnica*, em particular, de aplicação das técnicas criadas, pois testamos a técnica e verificamos a confiabilidade da técnica, pois pedi a turma verificar se pela técnica da t_{43} a resposta seria a mesma, que é o mesmo *método da eliminação e substituição*, chegando ao momento tecnológico-teórico, pois o método justifica a técnica.

Foi estudado a técnica e conjuntamente chegou-se a um consenso que aparece o operador que deve-se trabalhar com a equação mais abaixo para se eliminar as incógnitas. A razão de ser de t_{44} se deu que na técnica discutida em classe com X, é possível se verificar que o método do *escalonamento* ou *Método de Gauss* é a *descrição do método da substituição e eliminação*. (Momento de institucionalização feito por mim).

Alunos de X questionaram que apenas aplicavam o método do escalonamento, mas nunca tinham se dado conta de onde vinha a origem deste método. Comentei com eles que ao explorarmos o tipo de tarefa T_4, exploramos a técnica, vimos o alcance desta. O T_4 nos levou ao encontro do saber que é o Escalonamento Gaussiano.

O processo de institucionalização do processo se seu com resolução da tarefa **t_{45}** presente em O_3 que trata em resolver o sistema $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = f_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = f_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = f_3 \end{cases}$.

Nesta tarefa executada em classe junto a **O_3** com **X**, foi possível verificar a gênese do método da Eliminação Gaussiana, pois trabalhar só com as letras foi possível se enxergar a ideia do método. Foi comentado por alunos de **X** que esta prática de resolver este tipo de tarefa não é comum na escola, tanto no ensino básico como no superior.

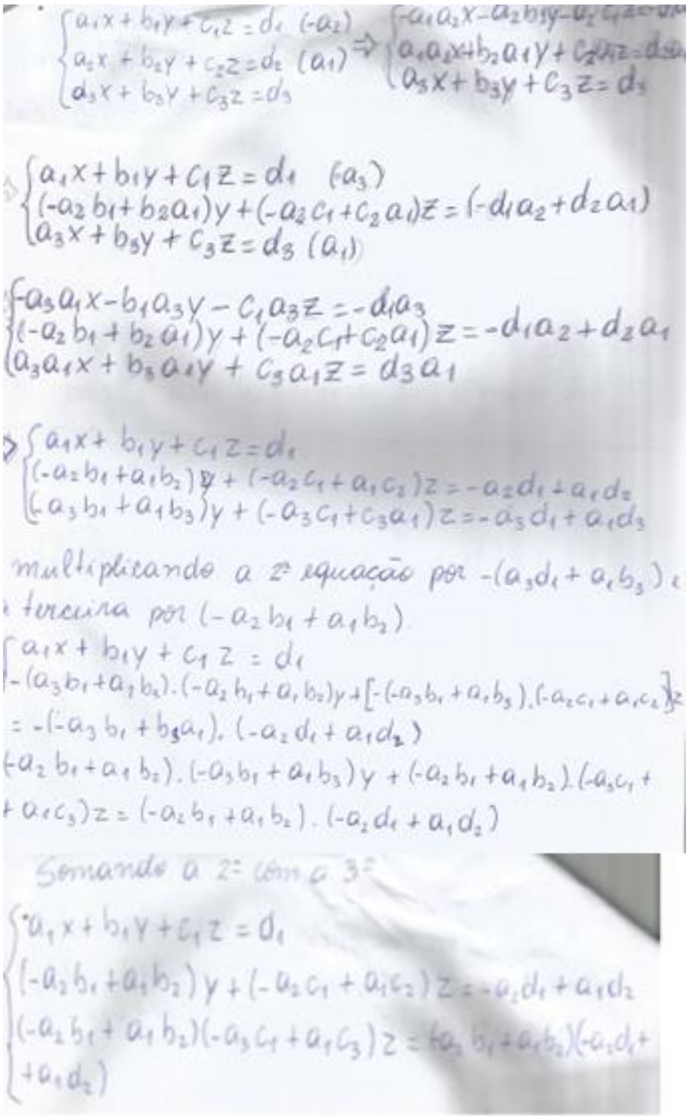
Foi um momento de explorarmos a técnica, que é a aplicação do método da substituição e eliminação e de verificar que neste momento exploratório, surge a tecnologia que justifica o método que era conhecido por eles como método do escalonamento.

Pedi para que **X** junto a seus grupos com o auxílio de O_3, resolvessem a tarefa **t_{45}**

t_{45}:Resolver o sistema linear literal pelo método da adição:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

Figura 83 - A resposta carimbada $R_x^{\lozenge t46}$ dada por A_7.



$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \ (-a_2) \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \ (a_1) \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a_1a_2x - a_2b_1y - a_2c_1z = -a_2d_1 \\ a_1a_2x + b_2a_1y + c_2a_1z = d_2a_1 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \ (-a_3) \\ (-a_2b_1 + b_2a_1)y + (-a_2c_1 + c_2a_1)z = (-d_1a_2 + d_2a_1) \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \ (a_1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -a_3a_1x - b_1a_3y - c_1a_3z = -d_1a_3 \\ (-a_2b_1 + b_2a_1)y + (-a_2c_1 + c_2a_1)z = -d_1a_2 + d_2a_1 \\ a_3a_1x + b_3a_1y + c_3a_1z = d_3a_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ (-a_2b_1 + a_1b_2)y + (-a_2c_1 + a_1c_2)z = -a_2d_1 + a_1d_2 \\ (-a_3b_1 + a_1b_3)y + (-a_3c_1 + c_3a_1)z = -a_3d_1 + a_1d_3 \end{cases}$$

multiplicando a 2ª equação por $-(a_3d_1 + a_1b_3)$ e terceira por $(-a_2b_1 + a_1b_2)$.

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ -(a_3b_1 + a_1b_3).(-a_2b_1 + a_1b_2)y + [-(-a_3b_1 + a_1b_3).(-a_2c_1 + a_1c_2)]z \\ = -(-a_3b_1 + b_3a_1).(-a_2d_1 + a_1d_2) \\ (-a_2b_1 + a_1b_2).(-a_3b_1 + a_1b_3)y + (-a_2b_1 + a_1b_2).(-a_3c_1 + \\ + a_1c_3)z = (-a_2b_1 + a_1b_2).(-a_2d_1 + a_1d_2) \end{cases}$$

Somando a 2ª com a 3ª

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ (-a_2b_1 + a_1b_2)y + (-a_2c_1 + a_1c_2)z = -a_2d_1 + a_1d_2 \\ (-a_2b_1 + a_1b_2)(-a_3c_1 + a_1c_3)z = (-a_2b_1 + a_1b_2)(-a_2d_1 + \\ + a_1d_2) \end{cases}$$

Fonte: Produção de A_7 (2014).

Então os questionei: Q_3: Há alguma relação entre os métodos?

Após o estudo de O_2 e O_3 foi possível se observar as dificuldades apresentadas e verificar e discutir o processo. Surge na discussão em turma para institucionalizar as características dos processos. Q_3: É possível se observar algum diferencial neste método em relação aos demais? A Resposta de $R_3^{Q3}, R_5^{Q3}, R_9^{Q3}$ a esta questão foi de que trabalhamos com os coeficientes, e não com as variáveis, enquanto que o da comparação trabalhamos com as variáveis.

Ainda trabalhando com sistemas, precisamos institucionalizar um outro saber, matrizes, então surge a questão Q_4: É possível se simplificar esta técnica, de modo que a mesma seja mais rápida, segura e econômica? (consideramos o momento de avaliação).

A tarefa t_{46}: Resolver o mesmo sistema $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 8 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 9 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 10 \end{cases}$, utilizando apenas os coeficientes. Para a próxima sessão.

6ª sessão

Iniciamos a sessão ouvindo os alunos. A_9 relata que teve que escalonar pois não dava para substituir E_2 em E_3, por exemplo. A_4 diz que colocou em um formato de tabela os números, após estudar a obra O_4 (Alfredo Steinbruch e Paulo Winterle 2º Edição, 1987), que consideramos alguns pontos, então admitimos este uma sistema auxiliar S_5 (X, O_4).

A resposta carimbada $R_x^{\lozenge 45}$ foi a resolução feita por parte dos alunos.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 20 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 30 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 40 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 20 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 30 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 20 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 10 \end{pmatrix}$$

A técnica apresentada observando os passos da tarefa anterior foi a mesma, pois aqui se dá o momento do trabalho exploratório da técnica. A técnica apresentada na t_{44} explorada por X para resolver esta tarefa, foi comparada a técnica movimentando apenas os coeficientes das equações, e a conclusão que é a mesma, isto é, os operadores ou a multiplicação das equações por um escalar adicionado a equação seguinte é passível de se anular uma letra.

Em discussão com **X** foi possível ratificarmos que esta técnica é potencialmente útil, pois nos permite irmos ampliando nossos campos de problemas, como as tarefas como t_{44} e t_{55}, chegando a concluir que o que justifica a técnica é o método da substituição e eliminação.

A institucionalização feita por **Y** em conjunto com **X**, foi que por meio de t_{55} aplica-se a técnica em uma *perspectiva algébrica* para se dar um *tratamento aritmético*, portanto um processo *econômico*, no entender da TAD, pois trabalha-se só com os coeficientes das incógnitas das equações do sistema, logo representamos ou mesmo *abstrair* os sistemas de equações lineares por uma disposição em formato de linhas e colunas o que veio a ser chamado de *matriz*. Muitos dos alunos de X disseram nunca ter visto este processo de construção, pois como a principal fonte de estudos deles, para ministrar aulas particulares e até em projetos do Governo Federal Mais Educação e em seus estágios obrigatórios, eram os livros didáticos e no livro de um modo geral se inicia por matrizes, determinantes e por fim os sistemas. Algumas R_x relataram que só interpretavam matriz, por meio de tabelas, e não sua gênese vindo dos sistemas lineares.

O momento final desta sessão pedi aos alunos de X que pesquisassem os tipos de matrizes, nula, escalar, identidade, entre outras.

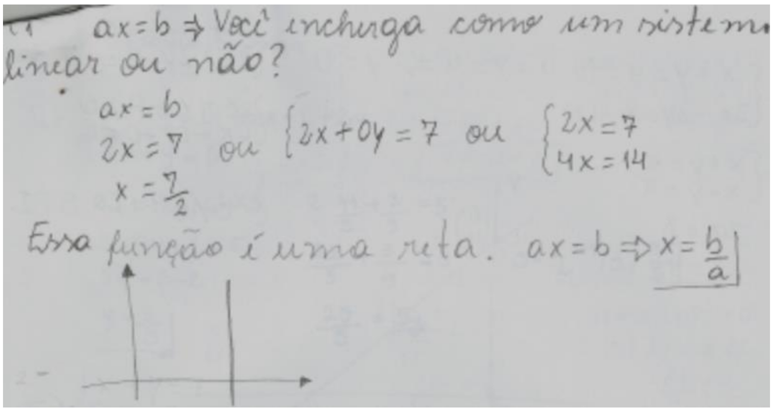
7ª sessão

Apresentamos um novo sistema de tarefas, ainda trabalhando com sistemas lineares.

T_5: Resolver o sistema mxn e interpretar geometricamente.

t_{51}: Determinar $x \in R/ ax=b$. A intenção com essa tarefa é que membros de X revelem por meio do registro gráfico a ideia que esta por traz da equação, que é uma reta paralela ao eixo **x** e começarmos a preparar a ideia de vetor, pois partido da origem o vetor tocaria a reta em $x = b/a$, que seria a menor distância. (ideias discutidas em sala).

Figura 84 - A resposta carimbada $R_x^{\lozenge t51}$ dada por A_{10}.



Fonte: Produção de A_{10} (2015).

t_{52}: Dado o sistema $\begin{cases} x + y = 4 \\ x - y = 2 \end{cases}$ resolver e interpretar graficamente.

Q_5: O que representa cada equação?

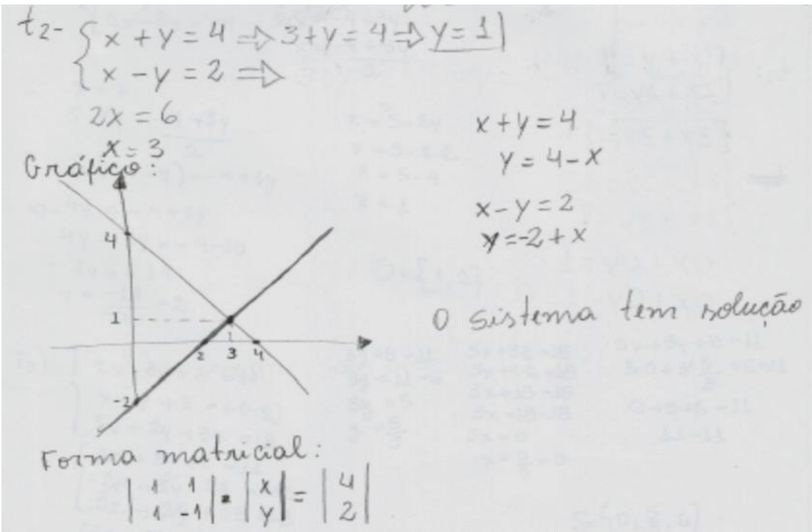
Resposta unânime de **X (Rx)**: *uma reta*. Cada equação é uma reta que se cruzam em um ponto que é a solução.

Q_6: Foi possível representar na forma matricial?

$\mathbf{R_x}$: Sim é possível se verificar que há interseção das retas logo o sistema tem uma única solução. A representação matricial que obtemos da obra O_3 foi importante para notarmos uma maneira de se escrever as equações de forma matricial (Figura 85).

Fala de A_{10} "professor há a interseção das retas logo o sistema apenas tem uma solução".

Figura 85 - A resposta carimbada $R_x^{\Diamond 52}, R_x^{\Diamond Q_5, Q_6}$ dada por A_{10}.



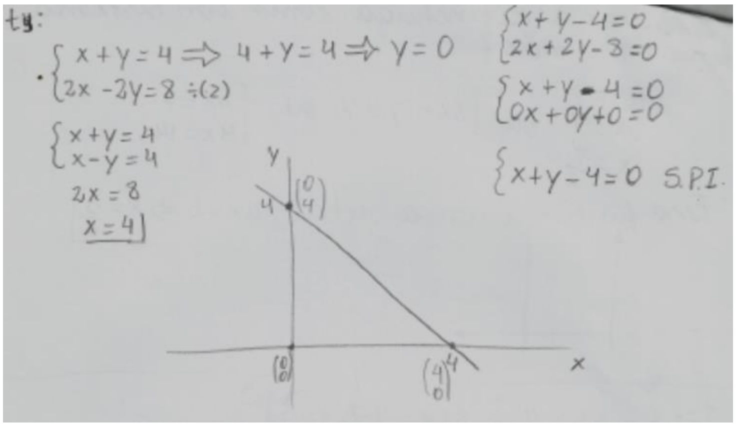
Fonte: Produção de A_{10} (2015).

Q_7: Qual interpretação você faz do gráfico?

R_{10}: Ajuda no entendimento e na construção da resposta. Serve como motivador. As resoluções foram apresentadas pelos alunos de X no quadro.

t_{53}: Dado o sistema $\begin{cases} x + y = 4 \\ 2x + 2y = 7 \end{cases}$ resolver e interprete graficamente.

Figura 86 - A resposta carimbada $R_x^{\Diamond 53}$ dada por A_{10}.



Fonte: Produção de A_{10} (2015).

Sistema impossível. São retas que não se cruzam e são distintas.

t_{54}: Dado o sistema $\begin{cases} x + y = 4 \\ 2x - 2y = 8 \end{cases}$ resolver e interprete graficamente.

A resposta discutida e validada é que o sistema é possível e indeterminado, portanto que apresenta infinitas soluções. A_8 relata que temos uma reta passando por (0,4) e (4,0). Alguns alunos questionaram como se dariam as respostas. Sim elas estão sobre a reta, na matemática são as infinitudes de pontos sobre a reta.

Esta t_{54} já começa a preparar a ideia de formação de um espaço vetorial, mas como poderíamos formar este espaço. Foi verificado neste tipos de tarefas T_5 a solução única se dava pela interseção entre retas, e a que não havia solução não havia esta interseção, no caso da mesma serem paralelas.

T_6: Determinar a solução de menor tamanho? Nossa intenção foi de introduzir a ideia de vetor.

t_{61}: Determinar a solução de menor tamanho do sistema $\begin{cases} x + y - 4 = 0 \\ 2x - 2y - 8 = 0 \end{cases}$.

De início a t_{61} pareceu sem resposta para os alunos de **X,** então pedimos para que estudássemos O_3 e tentarmos resolver esta tarefa. Estudamos na obra este tipo de tarefa. A condição C_{ξ} **2** foi que o sistema fosse resolvido, conforme O_3. Foi discutido entre os alunos de X e Y, que há infinitas soluções, mas que com o registro gráfico ficava, segundo A_8, mais simples de se visualizar. A_{12} então responde R_{12}^{t61} como sendo aquela que se aproxima mais do infinito. Colocamos essa tarefa com o propósito de que os membros de X percebam a ideia de vetor.

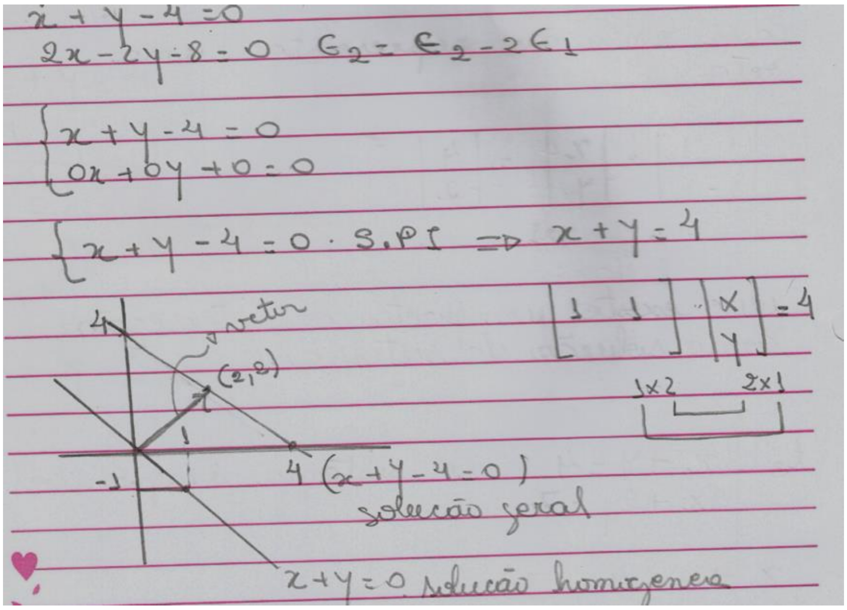
Em classe surge a Q_8, proposta por A_{14}. Devemos pensar em tamanho, certo? Como vamos medir este tamanho se eles são pontos?

Os alunos de X verificaram a técnica proposta em O_3 e exploraram e trabalharam a técnica para resolver t_{61}. A R_X^{Q8} dada por A_{13} é de que têm que se tratar retas sobre os pontos. Q_9: Como então vamos ligar retas até os pontos? Uma resposta surge. Ligar aos pares das coordenadas. Mas é necessário medir de algum modo. Foram marcados vários pontos. O (0,0) é solução do sistema. Então mostrei uma solução sobre o eixo x que atinge a reta x + y – 4 = 0, que é uma solução. A_8 responde (2,2). Mas esta solução é um ponto, como medimos isto. Como vamos medir o tamanho da solução? Na matemática surge os *vetores*, sendo esta uma questão problemática. Surge por A_{11} o que seria um *versor*, então? Ai comentamos bem pouco sobre versor, mas dissemos este objeto fugiria de nossa intenção didática e aproveitamos para diferenciar do vetor estudado na Física.

Trabalhamos a técnica e institucionalizamos, pois discutimos a solução geral sendo a solução particular e a solução do homogêneo associado ao sistema, que chamamos de um sistema desmembrado. Ao estudarmos vetores, comentamos sobre o mesmo partir da origem das coordenadas. Então carimbamos a resposta de A_8.

Neste momento de trabalho da técnica desenvolvido por **X** houve a interpretação do trabalho e de seus resultados dentro do sistema modelizado, onde **X** manipula nossa proposta de MER, tendo assim como objetivo obter conhecimentos relativos ao sistema modelizado. Foi possível de se notar em **X** o interesse pelo proposta de modelo, pois devido a sua articulação entre objetos (práticas com o objeto) foi possível levar os membros de X ao encontro de saberes, que não eram apresentados nas diversas obras deste modo (Figura 87).

Figura 87 - A resposta carimbada $R_x^{\Diamond 54}$ dada por A_8.



Fonte: Produção de A_8 (2015).

t_{62}: Como você interpreta a solução do sistema na solução matricial e com motivação geométrica?

A_5 responde R_x^{t62} e revela que o desenho (registro geométrico) fica fácil a interpretação da resposta. Que sem o desenho fica complicado dizer, o que é a solução de menor tamanho.

A resposta de A_7, R_x^{t62} diz que a solução matricial com motivação geométrica ajudou no entendimento da noção de vetor. Dado um sistema de infinitas soluções, temos uma solução do homogêneo associado a solução de um sistema principal.

8ª sessão

Os grupos ficaram interessados e questionaram do porquê de representarmos os sistemas por equações? Ou porque não podemos utilizar determinantes?

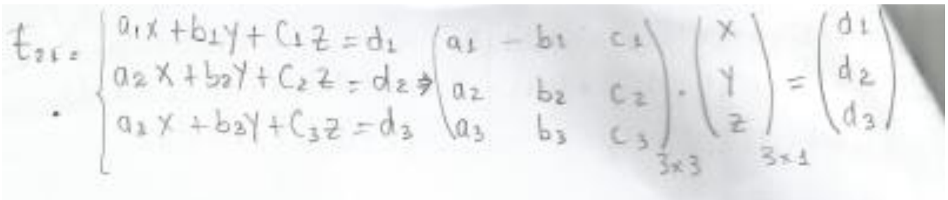
Chegamos em conjunto as estas respostas, pois os determinantes para resolver sistemas pequenos 3 x 3 já dão trabalho, imagina um 10 x 10, que é da ordem de 10! (fatorial de 10), vimos é impraticável. A técnica que estamos explorando é muito *potente*, pois resolve qualquer sistema. Agora com relação a representação matricial, trabalhamos com um novo sistemas de tarefas, como segue.

Reforcei a ideia do estudo por meio do PER, onde cada grupo deve se responsabilizar dar respostas as questões apontadas por mim e por eles. Assim deste modo conseguiremos ir completando um projeto que irá envolver todos de **X**.

T_7: Representar sistema linear na forma matricial

t_{71}: Representar o sistema linear $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$ por meio do produto de matrizes.

Figura 88 - A resposta carimbada $R_x^{\Diamond t71}$ dada por A_{12}.

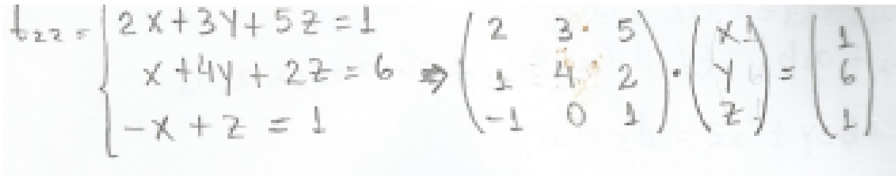


Fonte: Produção de A_{12} (2015).

A discussão em classe carimbou a $R_x^{\Diamond t71}$ que concordaram pela apresentação feita por A_{12}. A técnica usada é a representação dos coeficientes na forma de matriz.

t_{72}: Escolher valores numéricos inteiros para os coeficientes de x, y e z, e para os termos independentes, em seguida, substituir esses valores numéricos no produto matricial da tarefa t_{21} e montar o sistema linear proveniente desse produto matricial.

Figura 89 - A resposta carimbada $R_x^{\Diamond 72}$ dada por A_{12}.

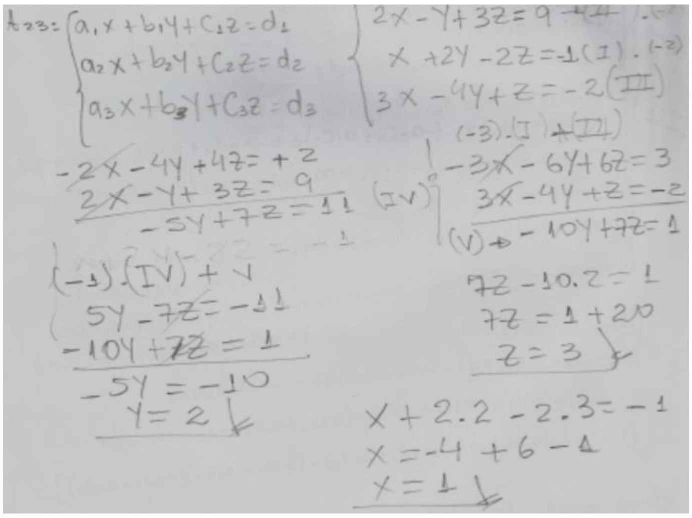


Fonte: Produção de A_{12} (2015).

t_{73}: Resolver o sistema linear obtido na tarefa t_{72}.

A ideia foi revelar que os saberes considerados estabelecem que a técnica produz bem o que diz que produz, que os gestos que a compõem permitem que se alcance as metas que lhe são atribuídas.

Figura 90 - A resposta carimbada $R_x^{\Diamond 73}$ dada por A_{13}.



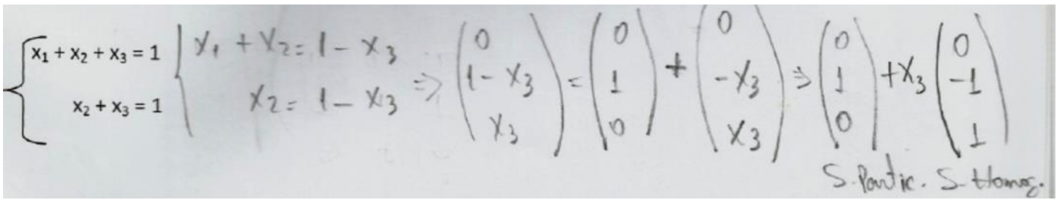
Fonte: Produção de A_{13} (2015).

Obtém-se a resposta possível e determinado, para o sistema formulado por A_{13}. O momento do trabalho da técnica fez as tarefas se tornarem rotineiras, já que houve atividade para que resolvessem em casa.

t_{74}: Escrever o sistema linear a seguir na forma matricial:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ \quad\;\; x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

Figura 91 - A resposta carimbada $R_x^{\Diamond 74}$ dada por A_5.



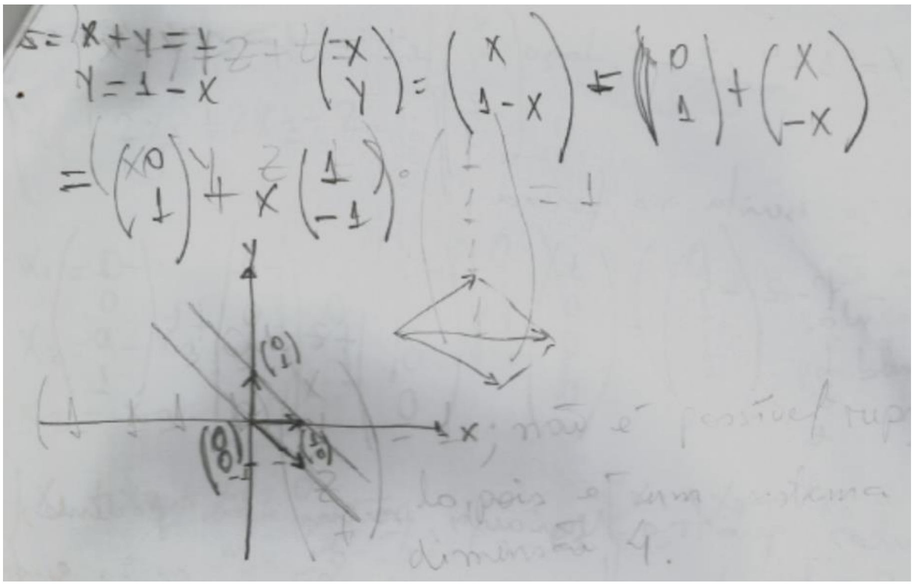
Fonte: Produção de A_5 (2015).

Nesta fase em que membros de **X** exploram a técnica, e segundo o modelo da obra (O_3), a resolução se dá na forma de matriz coluna, que é o modo melhor de representar e resolver o sistema. No momento de institucionalizar as ideias, revelamos junto a **X**, que há uma solução particular mais a solução de um homogêneo associado a esta. Com a motivação gráfica que fizemos, segundo nossa proposta de MER, foi possível visualizar as diversas soluções do homogêneo adicionado à solução particular, que é única e que a partir destas, podemos determinar as diversas soluções do sistema, enfim revelamos um espaço formado por vetores.

Ao resolver estas tarefas, por meio de técnicas rotineiras motivou um desenvolvimento progressivo da técnica gerando assim novas técnicas. Este trabalho proporcionou aos membros de **X** um conjunto robusto de domínio de técnicas, o que provocou a ampliação das tarefas.

t_{75}: Dado o sistema x + y = 1 de uma única equação de duas variáveis escreva-o na forma matricial. Podemos representa-lo geometricamente? Atividade presente no modelo mas discutida com os alunos em classe. Essa atividade por meio do registro geométrico foi possível motivar os alunos e verificar a formação do espaço formado por vetores.

Figura 92 - A resposta carimbada $R_x^{\Diamond 75}$ dada por A_5.



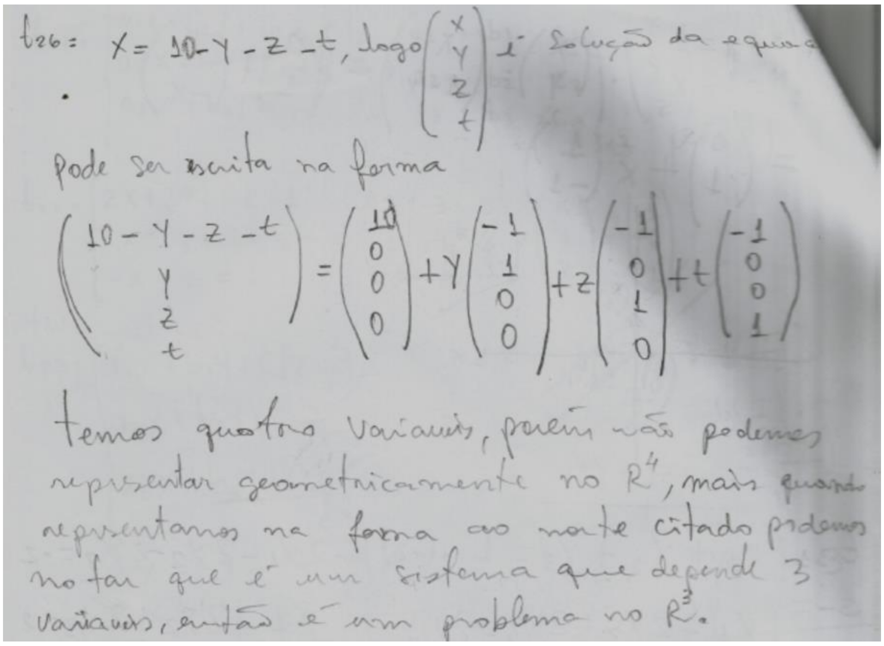
Fonte: Produção de A_5 (2015).

A ideia de se representar as soluções na forma do registro geométrico, tem um intuito de visualizar a formação do espaço de vetores, a partir a partir dos diferentes valores da varável livre, ou seja, das diferentes soluções do homogêneo. Utilizamos a mesma técnica que é representar no sistema de coordenadas, onde traçamos a reta formada por pontos com todas as soluções mais a reta do homogêneo associado ao sistema, sendo possível se verificar a formação do R^2. Propus aos alunos de X a substituírem valores em x e em y, e verificarem se é solução do homogêneo ou se é solução do sistema principal.

Os alunos de **X** verificaram por meio do registro gráfico o paralelismo entre as retas. Os alunos de X disseram que uma equação diferencial de 2ª ordem linear tem-se uma solução particular mais uma solução do homogêneo associado a equação (os mesmos usaram esta comparação por terem visto tal objeto na disciplina Cálculo diferencial e Integral III, no 3º semestre). Alguns até mostraram a resolução e ai começamos a comparar as técnicas utilizadas. O trabalho com t_{75} despertou em membros de **X** a possível razão de ser dos sistemas lineares, pois estes são a gênese de objetos matemáticos, que para nós (membros de X) eram ocultos até então. (Institucionalização)

t_{76}: Dado o sistema x + y + z + t = 10 escreva-o na forma matricial. O que esta equação representa? É possível representá-la geometricamente? A ideia é de se trabalhar espaços com dim > 3.

Figura 93 - A resposta carimbada R_x^{t76} dada por A_8.



Fonte: Produção de A_8 (2015).

Em conversa a partir da resposta de A_8 em classe com alunos de **X**, foi dito para estudarem o que representa esta equação. A_9 relatou que não haveria como desenhar uma figura, pois um sistema com mais de 3 eixos. Já no formato de matriz podia-se verificar que só aparece 3 variáveis, logo o sistema poderia ser estudado no R^3, sendo possível de ser desenhado, para motivar o processo. A_1 trouxe na aula seguinte, que esta forma de se escrever é um hiperplano. A_1 queria que estudássemos sobre hiperplanos, pois o mesmo era físico e já estudou na Física, mas pedi para não irmos por este viés.

8ª sessão

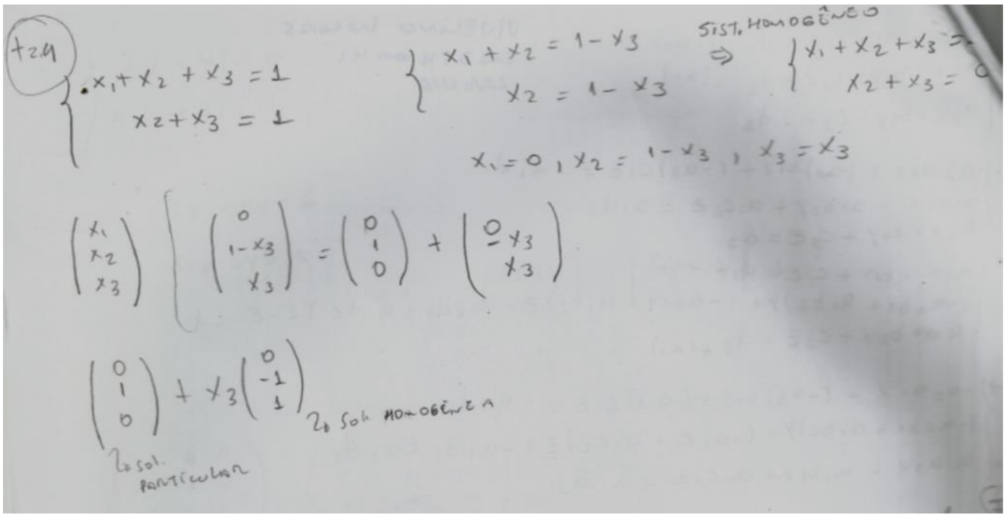
Ainda trabalhando com o estudo qualitativo de sistemas, propomos os tipos de tarefas T_8 e T_9 a seguir.

T_8: Determinara solução do sistema linear de ordem 3x2:

t_{81}: Determinar a solução do sistema linear com 3 variáveis e 2 equações $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$.

A solução dada por A_7 foi a carimbada por Y (Figura 94).

Figura 94 - A resposta carimbada R_x^{t81} dada por A_7.



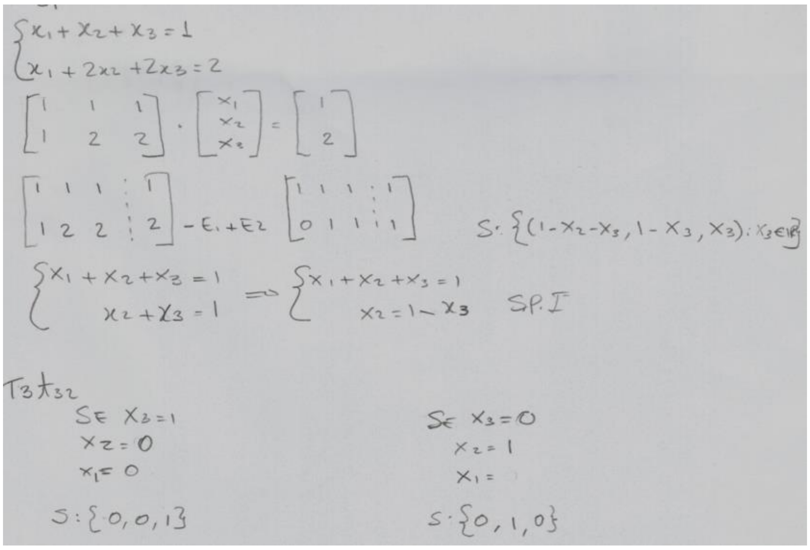
Fonte: Produção de A_7 (2015).

Importante notar a razão de ser desta tarefa a partir do que propomos no modelo de referência em que podemos representar o sistema na forma abreviada e separarmos a solução particular mais a do homogêneo. Uma razão estar em que podemos estudar o sistema trabalhando com uma única variável (x_3) e este controla as soluções do sistema principal.

t_{82}: Determinar duas soluções do sistema proposto em t_{81}.

t_{83}: A soma destas soluções é solução do sistema?

Figura 95 - A resposta carimbada R_x^{t81} dada por A_2



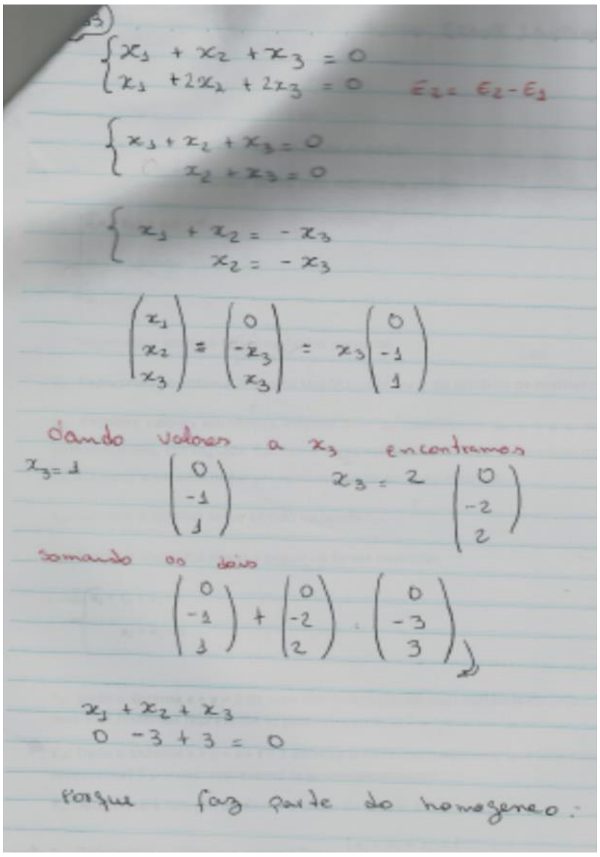
Fonte: Produção de A_2, (2015).

Ao somarmos as respostas esta não mais solução do sistema, pois os vetores não estão sobre a reta. Pedi para verificarem no gráfico esta ideia. Podemos verificar pela resposta de A_2 uma prática que antes não estava nas relações dele com objeto, havendo assim mudança de relação com o objeto, portanto aprendizagem.

T_9: Determinara solução do sistema linear homogêneo associado aos sistemas lineares de ordem 3x2.
t_{91}: Determinar o sistema o sistema linear homogêneo associado ao sistema linear abaixo:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$$

Figura 96 - A resposta carimbada R_x^{t81} dada por A_2.



Fonte: Produção de A_2 (2015).

Duas soluções de um sistema homogêneo quando somadas é solução do homogêneo, pois os vetores partem da origem e percorrem a reta (homogêneo). A partir da resposta de A_2 é possível se verificar a relação com que esse aluno tem com o objeto estudado.

t_{92}: Determinar duas soluções para o sistema o sistema linear homogêneo obtido na tarefa t_{41}.

t_{93}: Somar as duas soluções obtidas na tarefa t_{91} para o sistema linear homogêneo. O que você percebeu?

t_{94}: Verificar se esta soma é solução do sistema $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$

R_{12}^{t94} foi que não. Pois as soluções são do homogêneo associado ao sistema e não do sistema principal.

Com T_8 e T_9, conforme trabalhamos no modelo, concluímos que a soma de duas soluções do homogêneo é solução do próprio sistema homogêneo. Logo, o sistema linear homogêneo tem sempre uma solução nula, enquanto que o sistema não homogêneo não; o múltiplo de uma solução também é solução, enquanto que no não homogêneo não, por fim a soma de duas soluções que para o homogêneo é solução para o não homogêneo não é. É interessante notar que as operações com o homogêneo associado é fechado em *relação a operação externa*, pois pegamos uma solução e multiplicamos **t** que é qualquer número real.

A_{14} relatou em sua fala que "a forma matricial para escrever os sistemas mostra o porquê de estudar o sistema abreviado, pois é muito mais fácil a visualização, mais rápido".

9ª sessão

Continuando em busca da resposta de nossa questão geratriz, caminhamos encontrando respostas as questões que surgem na comunidade de estudo. E mais uma vez comentamos que a ideia de estudo é construirmos respostas as questões, que surgem com os tipos de tarefas, pois a proposta da TAD é formar problemas cada vez mais amplos, os quais possam provocar novas necessidades tecnológicas, que conforme comentam Bosh e Gascón (2004), darão lugar a construção e justificação de novas técnicas, que o que estamos fazendo, e que seu alcance seja capaz de resolver novos tipos de tarefas.

Alunos de **X** comentaram, que podemos "interligar" os assuntos, que ao nosso ver eles perceberam a questão da articulação entre os objetos (práticas com os objetos), que estive propondo desde o início deste PER.

Retorno às tarefas. Uma outra tarefa que não aparece no ensino básico é a de escalonar o sistema por colunas. A comunidade de estudo nunca havia feito uma tarefa deste tipo e ai construímos juntos a resposta. Foi possível se verificar a articulação que membros de X estão tendo ao relacionar objetos do ensino médio com os do nível superior.

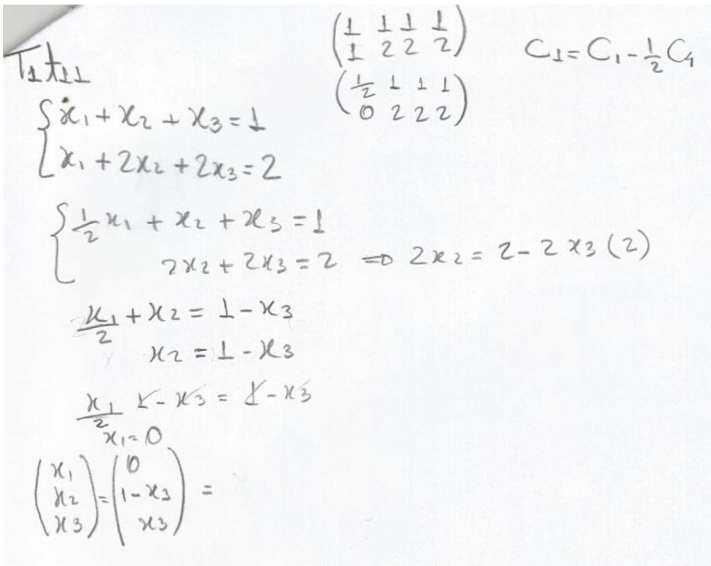
T_{10}: Resolver o sistema linear pelo método do escalonamento por colunas.

t_{101}:Resolver o sistema linear $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$ pelo método do escalonamento por colunas.

A técnica se deu pelo método do escalonamento.

Alunos de X relataram que em nenhum livro pesquisado tratava desta prática, mas para efeito de conhecimento o trabalho da técnica foi de certa forma aplicado mas sendo trabalhado por colunas. Para A_7 e A_{12} relataram um melhor entendimento quando estudam os sistemas na forma de matrizes colunas.

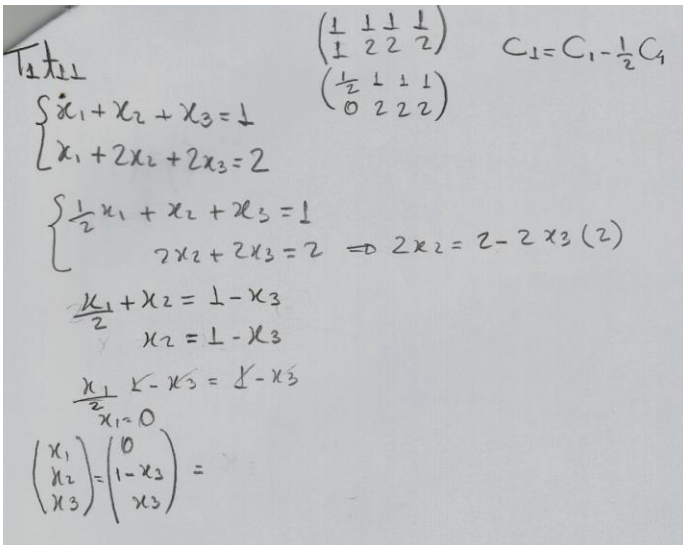
Figura 97 - A resposta carimbada R_x^{t101} dada por A_2.



Fonte: Produção de A_2 (2015).

t_{102}: Resolver os sistemas $S_1\begin{cases} x+y=2 \\ 2x-y=1 \end{cases}$ e $S_2\begin{cases} x-y=0 \\ 2x+3y=5 \end{cases}$.

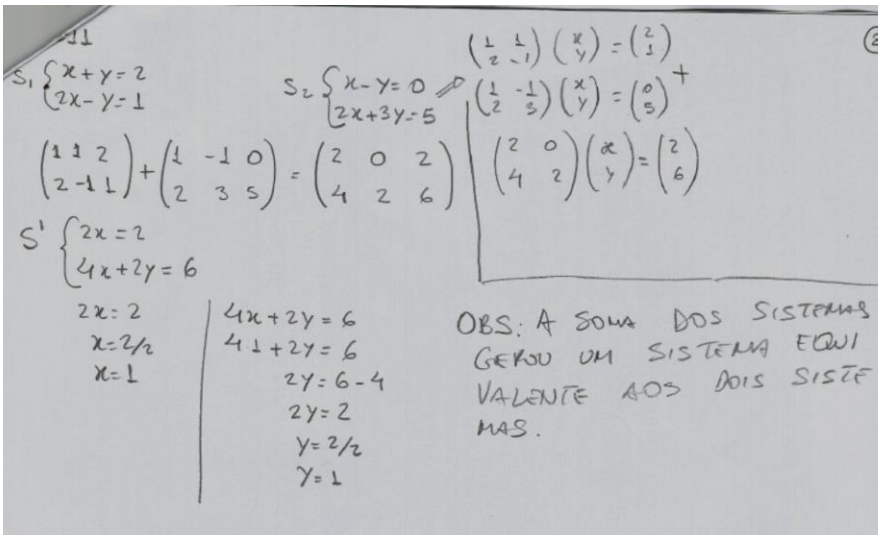
Figura 98 - A resposta carimbada R_x^{t101} dada por A_6



Fonte: Produção de A_6 (2015).

A resposta dada por A_6 revela a mudança de relação com objeto do saber estudado. Coloquei a sub tarefa $t_{102,1}$: Somar os sistemas e resolver esse sistema novo sistema? Justifique o que você encontrou.

Figura 99 - A resposta carimbada $R_x^{t102,1}$ dada por A_6.



Fonte: Produção de A_6 (2015).

É possível de se observar na $R_x^{t102,1}$ que a resposta é a mesma do sistema S_1 e a mesma do S_2. Q_{10}: Será que isto acontece sempre? Ai propomos outros sistemas para estudarem extra sessão para podermos responder.

Vou trazer a resposta para esta parte, mas estas foram dadas na 10ª sessão, apenas para que a resposta fique próximo de Q_{10}. A R_X^{Q10} dada por A_2 foi a resolução de um sistema criado por ele e que expos a comunidade de estudo. Pedimos para que os alunos de X trouxessem alguma obra que tratasse matrizes deste modo, com esta OM e por este viés epistemológico.

Resolveram no quadro os sistemas apresentados por A_2 e A_9:

R_X^{Q10} proposta e resolvida por A_2.

$\begin{cases} x+y=10 \\ 2x-y=30 \end{cases}$		$\begin{cases} 2x+y=30 \\ x-3y=50 \end{cases}$		$\begin{cases} 3x+2y=40 \\ 3x-2y=80 \end{cases}$
$x=20$	e	$x=20$	somando as variáveis	$x=20$
$y=-10$		$y=-10$		$y=-10$

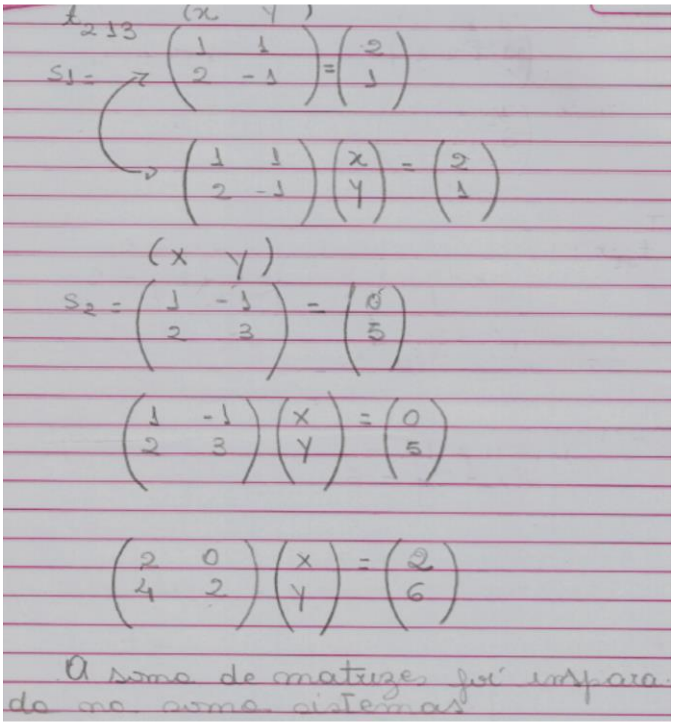
R_X^{Q10} proposta e resolvida por A_9.

$\begin{cases} 2x+y=8 \\ x-y=7 \end{cases}$		$\begin{cases} 3x+y=13 \\ 2x-2y=14 \end{cases}$		$\begin{cases} 5x+2y=21 \\ 3x-3y=21 \end{cases}$
$x=5$	e	$x=5$	somando as varáveis em cada equação	$x=5$
$y=-2$		$y=-2$		$y=-2$

Uma R_x dada em classe, foi que antes de se resolver um sistema de equações lineares, é conveniente retirar as equações proporcionais e as equações nulas, pois a medida que fazemos isto, o sistemas tornam-se equivalentes, isto é, tem a mesma solução.

$t_{102,2}$: Aplique mudança de variável em um dos sistemas de modo que anule uma variável **x** em um deles.

Figura 100 - A resposta carimbada $R_x^{t102,2}$ dada por A_7.



Fonte: Produção de A_7 (2015).

O aluno A_{14} trouxe um artigo da internet, sobre um sistema que pode ter uma variável substituída por outra, por exemplo uma equação de movimento, possa ser substituída por uma equação que representa um harmônico simples, aparecendo novas variáveis para se estudar o movimento. A_6 "professor utilizamos mudança de variável para resolver algumas integrais, criando assim um ambiente favorável para compreender melhor a ideia que se está trabalhando, inclusive há uma regra".

$t_{102,3}$: Represente na forma de matriz ampliada o sistema $\mathbf{S_1}$ e $\mathbf{S_2}$, depois some-os. O que você encontrou.

Membros de X ao explorarem a técnica verificaram que aparece a soma de matrizes, sendo assim o bloco tecnológico-teórico aparece neste momento, pois justifica esta técnica. Após a técnica tornar-se rotineira, o momento exploratório deve continuar até que se tenha um domínio da técnica, de onde irá emergir novas das tarefas a partir de outros tipos de tarefas, em complexidade crescente.

Há um processo rápido, seguro e eficaz é quando pedimos para colocar o sistema na forma de matriz. Alguns alunos de X disseram que fica mais fácil até para observar só com números do que junto com as variáveis.

Exercitamos o trabalho da técnica nos sistemas, depois vimos o que acontece com as matrizes e institucionalizamos, a partir desta OM, que esta técnica como sendo a *soma de matrizes*, a qual tem sua gênese no estudo qualitativo de sistemas lineares, que é uma tecnologia que justifica esta técnica, aparecendo o momento tecnológico-teórico.

Trouxeram nesta sessão livros, inclusive do ensino superior que não validamos neste processo de estudo, por de certa forma, não estava de acordo com nossa intenção didática-matemática e ai apresentei-lhes a O_4 *A Memoir on the Theory of Matrices,* publicada em 14 de janeiro de 1858 por Cayley. Apesar de estar em outro idioma, não considerei uma restrição devido aos tradutores on line que temos.

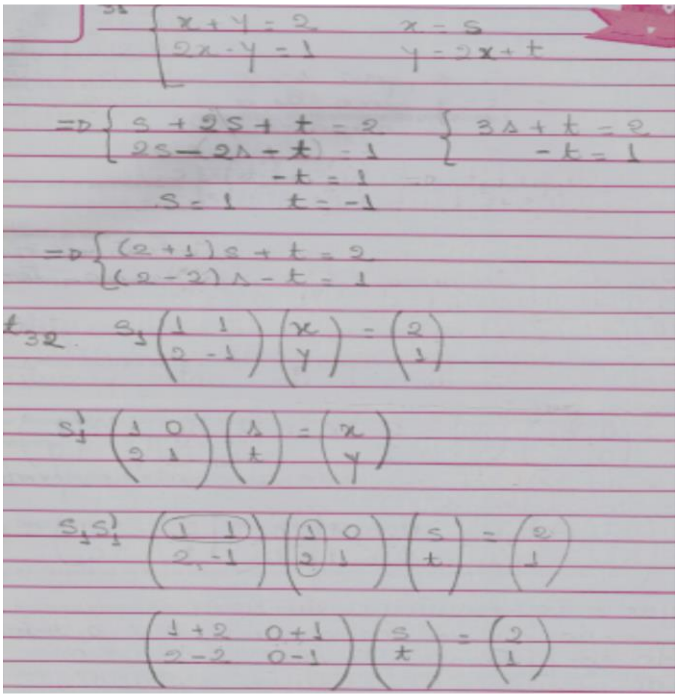
Um aluno de **X** coloca que a adição de matrizes se comporta de maneira similar de uma adição de quantidades algébricas ordinárias (Cayley, 1858), enquanto que a multiplicação como uma composição. Q_{11}: Dai perguntou como assim composição? Preparamos A T_{11}.

É possível verificar que $M = \{\boldsymbol{R}^{\Diamond}_1, \boldsymbol{R}^{\Diamond}_2, \ldots, \boldsymbol{R}^{\Diamond}_{11}, O_1, \ldots, O_4\}$ que num processo de mesogênese enriquecemos nosso milieu, já que com as respostas carimbadas $\boldsymbol{R}^{\Diamond}$ por [X, Y] estamos em busca de nossa resposta ótima, para Q_0.

10ª sessão

Conversamos um pouco sobre O_4 e voltamos a O_3 para verificarmos como desenvolveram T_{11}. T_{11}: Dado o sistema resolver por mudança de variável. A tarefa t_{111} é a seguinte: Resolver o sistema $S_1\begin{cases} x+y=2 \\ 2x-y=1 \end{cases}$ por mudança de variável. Momento exploratório.

Figura 101 - A resposta carimbada $R_x^{t102,3}$ dada por A_1.



Fonte: Produção de A_1 (2015).

A técnica se dar em substituir as variáveis x e y por outras s e t, por exemplo. Nossa intenção didática nessa tarefa é que construam modelando o modelo proposto a multiplicação matricial. Como sugestão pedi para que substituíssem $\begin{cases} x = s \\ y = 2s + t \end{cases}$, e ai começamos a discutir que o modo de organizar a técnica e por meio do estudo qualitativo de sistemas explicamos sobre a composição de função.

t_{112}: Represente-os na forma matricial os dois sistemas e faça a combinação entre eles.

Esta atividade revela a razão de ser do produto de matrizes, sendo claramente perceptível por X a tecnologia nesta tarefa.

T_{12}: Resolver o sistema literal a partir de um sistema mudança de variável. O que você observa na técnica?

t_{121}: Resolver o sistema dado o sistema literal **S** $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ a partir de um sistema mudança de variável **S'** $\begin{cases} a_1\text{'s} + b_1\text{'t} = x \\ a_2\text{'s} + b_2\text{'t} = y \end{cases}$.

Esta atividade para todos os membros de X houve problemas, conforme fala de A_5: "professor nunca vimos uma atividade desse porte, ou seja, desse jeito". Ai comentamos a necessidade de haver esse tipo de tarefa, pela necessidade de enxergarmos o que está acontecendo na atividade matemática e ai tirarmos conclusões. A tarefa foi realizada com a ajuda de Y e entre os grupos de X.

Houvera uma restrição $K_{\xi 2}$ pois trabalhar esta atividade, mesmo com a ajuda de O_3 houve dificuldade, pois questionaram qual variável devemos trocar? Então trabalhamos com vídeos do YouTube sobre mudança de variável pera alimentar o milieu.

A ideia é abstrair a técnica, após torna-la rotineira. Então, a *exploração do tipo de tarefa T_{12}*, se deu pela técnica τ *mudança de variável*, e a tecnologia foi o estudo qualitativo de sistemas lineares, sendo assim esta tarefa foi constituída de uma técnica mais desenvolvida, capaz de revelar algo que não está presente em muitas instituições, que é a *multiplicação matricial*, oficializando a praxeologia matemática. Discutimos que mudar a varável é substituída por um outra valor, no nosso caso uma letra. A tecnologia que justifica esta técnica é o estudo qualitativo de sistemas.

Assim é possível se mostrar que a gênese do produto matricial, vem, também, do estudo qualitativo de sistemas lineares. Mostramos com o *alcance da técnica*, que o produto de matrizes não acontece por acaso e sim que o sistema **S** sofre uma *transformação*, pois o par (x,y) é transformado no par (c_1,c_2), enquanto que no sistema **S'** transformasse o par (s,t) em (x,y). (Institucionalização)

Muitos alunos de X comentaram nunca terem visto (estudado) esse tipo de tarefas e nem que esta seria a origem do produto matricial, pois nos livros não há um processo de construção desta ideia e assim A_8 comenta "olha o produto matricial é assim multiplica-se linhas da primeira matriz por colunas da segunda, isto significa que o número de colunas da primeira matriz tem que ser igual ao número de linhas da segunda. O livro didático pede para fazermos multiplicação direto, mostrando o mecanismo, mas sem revelar a tecnologia que justifica essa técnica".

11ª sessão

T_{13}: Resolver o sistema linear genérico 2x3 substituindo suas variáveis.

t_{13}: Resolver o sistema linear genérico S = $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$, substituindo x = 2s e y = 2t.

A razão de ser é mostrar o produto de um escalar por uma matriz. A t_{13} foi resolvido em sala com os alunos. A ideia que passamos a eles de modelização é que eles tinham que explorar a técnica apresentada no modelo e resolver esta tarefa. Não houve dificuldades.

A *técnica* mudança de variável seguida da escrita do sistema na forma abreviada (matriz). A *tecnologia* continua sendo o estudo qualitativo de sistemas lineares, a qual vem permeando os tipos de tarefas desta OMD. A razão de ser desta tarefa foi revelar o produto de um escalar por uma matriz.

Na discussão com **X**, comentei com eles que generalizando a técnica, podemos representar pelo seguinte esquema:

$$\lambda\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1j} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{i1} & \lambda a_{i2} & \cdots & \lambda a_{ij} \end{bmatrix}; \lambda \in \Re$$

As ideias que acabamos de estudar podem ser interpretadas pensando em *vetores*. Então voltemos a atividade matemática com vetor. A regra do paralelogramo já era conhecida pelos gregos, pois era utilizada na Física com trabalhos de força e velocidade. Seu estudo era feito com uso da Geometria para auxiliar na resolução do problema físico. Em meados do século XVII já se dava ênfase nas quantidades escalares para representar posição e peso (apesar de peso ser uma grandeza vetorial) e a quantidades vetoriais que representavam velocidade e aceleração.

Surge nas discussões a Q_{12}: Perguntaram se vetor só esta setinha? (feita por membros de **X**)

Comentamos que vetor (que vem do latim e quer dizer transportar) já era utilizado, desde a antiguidade pelos gregos, associados a forças e velocidades, com apelo geométrico, com intuito de auxiliar aos problemas físicos.

Pensar em um espaço formado por vetores, não é suficiente, somente se axiomatizar, é caracterizar seus elementos, que são os vetores e nas transformações entre elementos de um espaço noutro ou em si mesmo.

Fornecemos aos alunos de X as obras: O_5: Bellavitis (1833) *Calcolo delle Equipollenze e* O_6:

MÖBIUS Der Barycentrische Calculo: Ein neues Hülfsmittel zur analytischen Behandlung der Geometrie de 1827. Comentamos sobre vetor, mas que eles estudassem as obras indicadas.

Comentamos que Bellavits trabalha a ideia de vetor em um estilo mais euclidiano, levando em consideração o produto de vetores a partir de entidades puramente geométricas. Mais tarde Hamilton (1866) generalizou este produto de vetores, em três dimensões onde levava em consideração a razão dos comprimentos e a rotação entre as direções dos dois vetores. Seu estudo sobre números complexos o leveou a revelar um novo objeto os quatérnions, com isso diferenciando escalar de vetor, na obra Elements of Quaternions.

Em classe surgiu a ideia de que Newton já utilizava a regra do paralelogramo para se trabalhar com forças e ai complementei que isto foi em 1687, trabalho publicado na obra *Principia Mathematica*. Disse que Newton deu uma nova ideia aos vetores.

T_2: Interpretar um sistema linear como um conjunto de vetores.

t_2: Interpretar o sistema linear $\begin{cases} x+y=2 \\ 2x-y=1 \end{cases}$ como um conjunto de vetores.

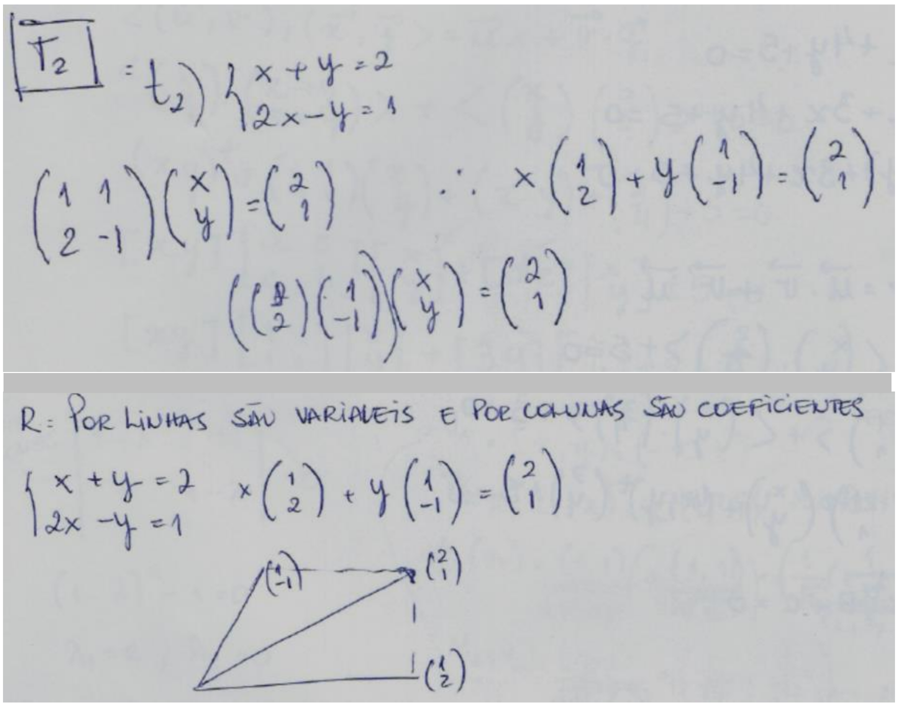
Q_{13}: Represente-o na forma matricial?

Q_{14}: Há outra forma de representa-lo ainda utilizando matrizes?

Q_{15}: Podemos pensar o problema por linhas e/ou por colunas?

Utilize a motivação geométrica e represente estes vetores no sistema.

Figura 102 - A resposta carimbada $R_x^{\lozenge t14}$ dada por A_{13}.



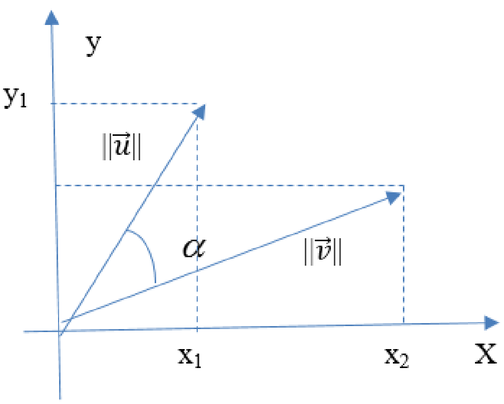
Fonte: Produção de A_{13} (2015).

Como podemos pensar nas matrizes como conjunto de vetores, logo genericamente, temos x$\vec{u}$ + y$\vec{v}$ = $\vec{w}$. Com isto surge as ideias que aparecem nos livros que é interpretar as matrizes como linhas (pensando nas equações) ou como colunas (pensando com as variáveis), o mesmo vale para vetores. Estamos diante de uma *dualidade*, ou seja, um problema que se resolve por coluna tem uma relação direta com um problema que se resolve por linha. Graficamente podemos representar do seguinte modo, pela regra do paralelogramo, produto de escalar por vetor x$\vec{u}$ e y$\vec{v}$ e soma de vetores x$\vec{u}$ + y$\vec{v}$, obtendo como resultado $\vec{w}$. Podemos pensar do seguinte modo, quais são os escalares x e y que multiplicados, respectivamente pelos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ $que\ somados\ produzem\ \vec{w}$? Dizemos então que $\vec{w}$ é $uma\ combinação\ linear$ de $\vec{u}$ e $\vec{v}$, logo, um sistema tem solução quando o vetor independente é combinação linear das colunas, por outro lado quando não existem os escalares o sistema não tem solução.

12ª sessão

T_{15}: Determinar a diferença entre vetores a partir de motivação geométrica.
t_{15}: Determinar a diferença entre vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ a partir de motivação geométrica. A motivação dessa tarefa é que os alunos utilizem a lei dos cossenos como tecnologia para justificar a técnica e encontrar a fórmula que calcula o ângulo entre vetores (Figura 103).

Figura 103 - Espaço de vetores.



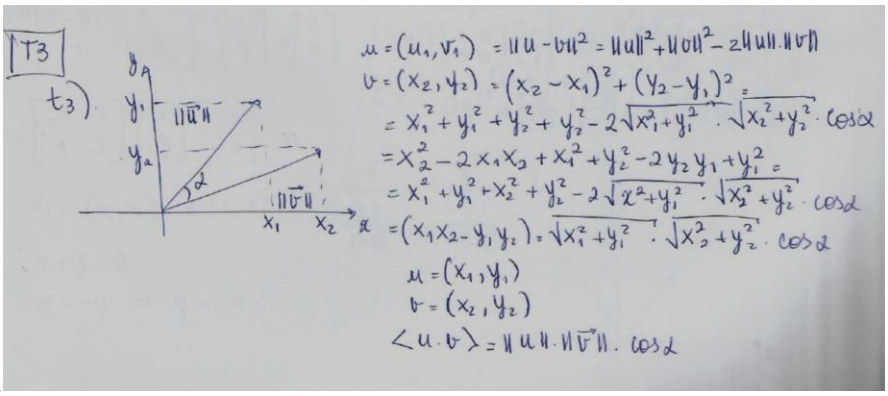
Fonte: Autor desta tese.

$t_{15,1}$: Determinar o valor de α ?

$t_{15,2}$: O que acontece quando temos $||\vec{u}||.||\vec{v}||.\cos\alpha = 0$?

Utilizando a técnica que é aplicação da lei dos cossenos foi possível se desenvolver essa tarefa. A Figura 104, revela a produção de A_3.

Figura 104 - A resposta carimbada R_x^{t15} dada por A_3



Fonte: Produção de A_3 (2015).

T_{16}: Resolver o sistema linear.

t_{16}: Resolver o sistema $\begin{cases} x-y+z=0 \\ 2x+y-z=0 \end{cases}$ pelo método do escalonamento de Gauss.

A partir da solução encontrada você encontrou alguma relação do conjunto solução com as linhas do sistema?

Q_{17}: É possível se representar geometricamente e a que conclusão você chegou?

Houve o seguinte estudo em sala: trabalho de **Y** e **X**.

Podemos deduzir pelo exemplo que um sistema homogêneo se dá por encontrar um vetor que seja *ortogonal* a cada linha da matriz, pois o produto escalar é zero.

Resolvendo o sistema, temos:

$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} L_2 = L_2 - 2L_1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \end{pmatrix}$, voltando ao sistema:

$\begin{cases} x-y=-z \\ y=z \end{cases}$ Logo a solução x = 0, y = z e z = z, então S = {(0,z,z)} ou S = {z(0,1,1)} ou S ={(0,1,1)}.

Portanto (0,1,1) é ortogonal aos vetores (1,-1,1) e (2,1,-1), que s.

Trabalhamos na obra do MER com a ideia dos registros geométricos para uma melhor visualização dos vetores no espaço. Esta atividade foi muito bem aceita pela comunidade de estudo.

No momento de institucionalizar Y relatamos que o vetor $\vec{u}$ é ortogonal a L_1 e a L_2. Diremos então que $\vec{u}$ é o *núcleo da matriz ou kernel da matriz*, que é diferente do vazio. O espaço que trabalhamos tem 3 componentes (x,y,z), ou seja o R^3 que é a soma de um plano com reta, logo existe um *espaço linha*, que é um espaço gerado pelas linhas da matriz, que iremos representar $R(A^t)$ – *gerado de A transposto*. Podemos dizer que o kernel da matriz A é o conjunto de todos os vetores do espaço, tal que A. $\vec{u}$ = 0. Tratamos da ideia de núcleo.

13ª sessão (continuação da sessão anterior)

A matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ *quebra o espaço em duas* parte no *gerado de A transposto* R(A^t) que forma um plano e em N(A), que forma uma reta. Podemos concluir que dado um vetor qualquer ou ele está na linha ou no núcleo. Mas se ele não esta na linha ou na coluna ele é obtido pela soma dos dois. O vetor $\vec{w}$ é formado por uma combinação $\vec{w} = \alpha_1 \vec{L_1} + \alpha_2 \vec{L_2} + k\vec{u}$.

Ainda trabalhando com a obra O_3 e com a ajuda do registro gráfico e algébrico, caracterizamos este momento como exploratório da técnica, pois com a reconstrução da OM apareceram novas sub tarefas capazes de relativos as técnicas que utilizamos, sendo estas sub tarefas relativas a interpretação, a justificação e o alcance destas técnicas.

O ensino da matemática se torna complexo, pois ao reconstruirmos os saberes, como no caso da ortogonalidade, ocorre por *conveniência didática*, que estes saberes são *quebrados*, e ficam então *desarticulados* dos demais objetos. O que mostramos foi um problema de interesse teórico matemático, pois os sistemas lineares, que depois abstraímos para as matrizes quebram o espaço em dois espaços menores e que são ortogonais.

Institucionalizando, temos:

Q_{16}: *É possível generalizar este processo*? Momento de institucionalização.

Generalizando: (construção feita em conjunto **Y** e **X**)

$$<\vec{u},\vec{v}> = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$$

$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ . \\ . \\ u_n \end{pmatrix}$ se multiplicarmos por α, teremos $\alpha \, . \, \vec{u} = \begin{pmatrix} \alpha u_1 \\ \alpha u_2 \\ . \\ . \\ \alpha u_n \end{pmatrix}$

$<\alpha\, \vec{u},\vec{v}> = \alpha <\vec{u},\vec{v}> = \alpha \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$ ∴ Se $<\vec{u},\vec{u}> = \sum_{i=1}^{n} u_i u_i = \sum_{i=1}^{n} u^2 \geq 0$ ∴ Se $u_i = 0$ ➔ $\sum_{i=1}^{n} u_i{}^2 = 0$ ∴ $<\vec{u},\vec{u}> = ||u^2||$; $<\vec{u},\vec{u}> = 0 \Leftrightarrow u = 0$, onde $||u^2||$ é a norma.

Seja agora u, v e w $\in$ R^4

$<\vec{u},\vec{v}+\vec{w}> = ?$

$$\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ . \\ . \\ u_n \end{pmatrix}; \vec{v} + \vec{w} = \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \\ . \\ . \\ v_n + w_n \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} u_i(v_i + w_i) = \sum_{i=1}^{n} (u_i v_i + u_i w_i) = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i + \sum_{i=1}^{n} u_i w_i = <\vec{u}, \vec{v}> + <\vec{u}, \vec{w}>$$

Dizemos então que o *produto interno* ou *produto escalar* é quando se tem uma aplicação que leva um par de vetores em um escalar, quando se faz esta aplicação com as propriedades acima.

$$<\vec{u}, \vec{u}> \rightarrow \alpha$$

Um espaço vetorial de dimensão finita no qual está definido um produto interno é um espaço vetorial euclidiano. O produto escalar sobre o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ dado a seguir é um produto interno.

$$\langle (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \rangle := x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

R_x^{17} é possível se representar. Formamos um espaço gerado pelas linhas da matriz $R(A^t)$, conforme nossa resposta apresentada na projeção ortogonal em relação ao plano temos um vetor saindo deste, que o Y chamou de espaço linha (núcleo da matriz).

Um vetor no $R^3 = RxRxR = \{(x, y, z) / x, y, z \in \Re\}$, pode ser representado geometricamente. Esta ideia pode ser estendida para vetores de dimensão n, porém sem representação geométrica.

Trabalhamos o objeto espaços vetoriais de um modo menos axiomático e mais prático. Agora trabalhamos um pouco a OM que trata deste objeto. Logo, dado V um conjunto $\neq \phi$ munido de uma operação adição, então o *Grupo* (V,+) e k um corpo, então V é um *espaço vetorial* sobre k se satisfeitas todos as propriedades, como segue, para o conjunto R^n, no qual estão definidas as operações adição e multiplicação por escalar. Foi apresentado os axiomas para que V seja espaço vetorial.

Pedi para que trouxessem uma tarefa que envolvesse este modo mais formal do ensino de espaços. Considerei a T_{17}. Conversamos em classe sobre a construção dos espaços vetoriais e de sua história.

T_{17}: Verificar se um vetor V é espaço vetorial.
t_{17}: Verificar se $V = R^2 = \{(x,y)/x,y \in R^2\}$ é um espaço de vetores, com as operações + e **.** usuais.
$(x_1,y_1) + (x_2,y_2) = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)$ e α (x,y) = (α x, α y)

Esta é uma tarefa presente nas IES mas vimos a necessidade de se mostrar a praxeologia presente no livro didático deles, portanto o modelo epistemológico dominante, até então no IFPA.

Q_{18}: A tarefa t_{17} tem alguma relação com os outros assuntos já estudados?

Uma das respostas a esta questão R_x^{Q18} de A_8 é de que estes axiomas são as propriedades de adição e multiplicação por escalar com vetores são descritas por estes axiomas. Outra R_x^{Q18} dada por A_1 bem próxima de A_3 é é que para V ser um espaço vetorial é necessário atender as 8 propriedades e que na realidade são operações entre vetores e vetores com escalares. É importante notar-se que o modo como vimos surgir o espaço pelo desenho feito por nós (alunos de **X**) em sala foi importante para entendermos o que é um espaço de vetores e que as tarefas propostas permitiram tal entendimento.

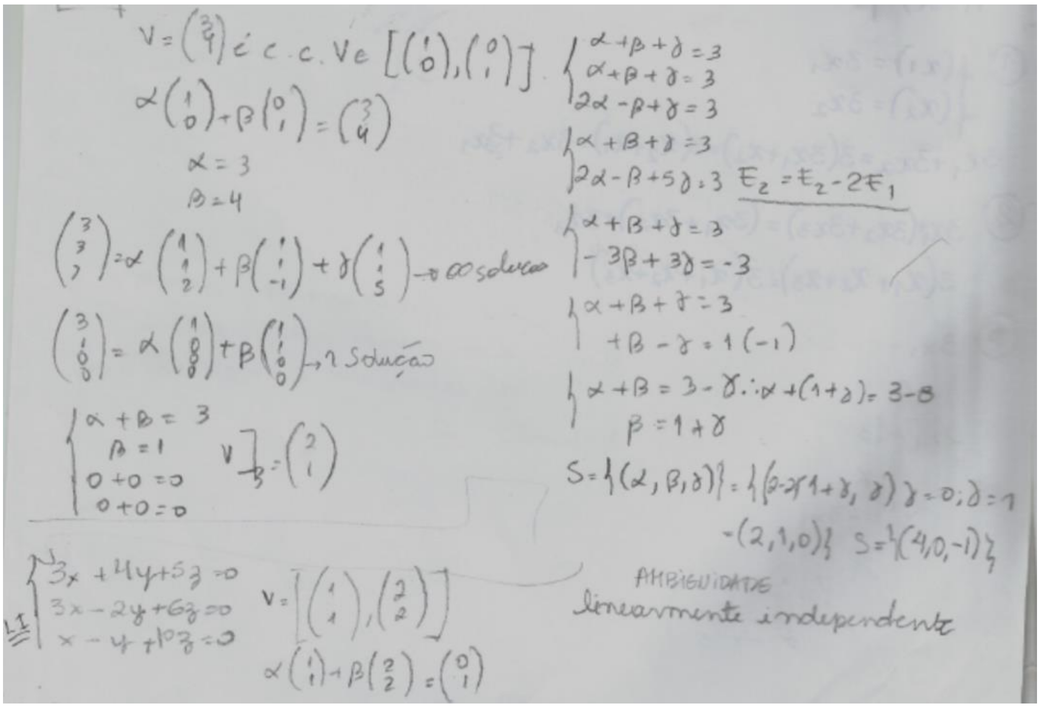
T_{18}: Verificar se um vetor V é um subespaço vetorial.
t_{18}: verifique se W é um subespaço vetorial, sendo V = R² e W = $\{(x,2x);\ x \in R\}$.

Como já havíamos no decorrer do PER comentado sobre subespaços pedimos para eles mostrarem a ideia. O que apresentaram foi que W $\subset$V e W $\neq \varnothing$ e W é um espaço vetorial. Comentaram a tarefa anterior e mostraram em uma pequena apresentação de A_9 que os sistemas quebram o espaço.

Para evocarmos a ideia de combinações lineares, provocaremos um primeiro encontro a partir do tipo de tarefas T_{19}:
T_{19}: Verificar se o vetor V é uma combinação linear.
t_{19}: Verifique se V = $\binom{3}{4}$ é combinação linear de V, sendo V= $\left[\binom{1}{0},\binom{0}{1}\right]$.
t_{191}: Verifique se V = $\begin{pmatrix}3\\1\\0\\0\end{pmatrix} \in S, sendo\ S = \left[\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right]$.
t_{192}: Verifique se V = $\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix} \in S, sendo\ S = \left[\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\5\end{pmatrix}\right]$. Nossa intenção com essa tarefa foi que a partir do estudo qualitativo dos sistemas apareça uma situação de ambiguidade. A técnica se dá em resolver pelo método do escalonamento o sistema. A tecnologia continua sendo o estudo qualitativo dos sistemas lineares (método da substituição e eliminação).

Q_{19}: Qual a diferença das tarefas t_{19}, t_{191} para a t_{192}? O que ocorreu?

Figura 105 - A resposta feita por A_{12}, $R_{12}^{\lozenge t19}$.



Fonte: Produção de A_{12} (2015).

Pedimos para os secretários[51] dos grupos apresentarem de forma sucinta o que cada grupo tinha encontrado. Conforme nossa proposta de MER, em nosso estudo, discutimos que o alcance da técnica, justificada por θ_1, de resolução de sistemas, esta presente mais uma vez. Dado α_3 (variável livre), podemos determinar as outras duas variáveis, logo se $\alpha_3 = 0 \Rightarrow \alpha_2 = 1$ e α_1=2, então: $[V]_B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Caso α_3 = -1 $\Rightarrow \alpha_2 = 0$ e α_1=4, então: $[V]_B = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Esse momento de trabalho da técnica proporcionou aos alunos verificar que aparece uma *ambiguidade*, pois há solução para o sistema, mas que não é apenas uma, mas *infinitas*, pois o *sistema é possível e indeterminado*, portanto há um infinidade de combinações lineares. A técnica utilizada pelos alunos foi o escalonamento do sistema e a interpretação desse sistema escalonado. Quando isto acontece o sistema é dito *linearmente dependente* (*LD)*, ou seja, toda vez que o sistema provoca ambiguidade este é LD, logo $v \in S$, pois é CL de v_1, v_2, v_3.

Institucionalizando, temos que caso o sistema seja impossível não há ambiguidade, pois o sistema não tem solução, logo não se tem CL, logo não temos como revelar se são *dependentes*. Então, quando quisermos saber se um vetor é LD, precisamos trabalhar com um vetor que temos certeza que

[51] Um espécie de orador (lider) do grupo, que anota as ideias para relatar em sala com Y e demais membros de X.

é CL deles, que é o vetor nulo, pois o sistema tem pelo menos uma solução, que é a solução trivial, quando os escalares são todos iguais a zero. No sistema onde os termos independentes são todos nulos, se tivermos um escalar diferente de zero, então teremos uma infinidade de soluções, logo o sistema é dependente. Caso o sistema não seja dependente ele é chamado de linearmente independente (LI), ou seja, é não dependente ou só tem uma solução, a nula, que é o que nos interessa.

O trabalho da técnica nos permitiu verificar que o sistema esta presente em mais um objeto matemático, que são as combinações lineares, daí sua importância no estudo da AL. Podemos verificar que caso o sistema seja impossível não há ambiguidade, pois o sistema não tem solução, logo não se tem CL, logo não temos como revelar se são *dependentes*. Então, quando quisermos saber se um vetor é LD, precisamos trabalhar com um vetor que temos certeza que é CL deles, que é o vetor nulo, pois o sistema tem pelo menos uma solução, que é a solução trivial, quando os escalares são todos iguais a zero.

No sistema onde os termos independentes são todos nulos, se tivermos um escalar diferente de zero, então teremos uma infinidade de soluções, logo o sistema é dependente. Caso o sistema não seja dependente ele é chamado de linearmente independente (LI), ou seja, é não dependente ou só tem uma solução, a nula, que é o que nos interessa.

14ª sessão

T_{20}: Escalonar S.

t_{20}: Escalonar S (espaço de vetores), sendo esse S $= \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \right]$.

Os secretários dos grupos apresentaram as técnicas que utilizaram para enfrentar esta tarefa e todas 4 apresentação foram bem próximas umas das outras. A_{12} ao apresentar sua resolução da tarefa, pelo grupo 4, foi possível se notar esta tarefa utiliza como técnica a o método da eliminação e substituição e a partir da resposta é possível se apresentar, a razão de ser desta tarefa. Podemos avançar pois as técnicas tornou-se rotineira para membros de **X**, motivando assim um desenvolvimento progressivo da técnica gerando novas técnicas.

Escreve-se o sistema em forma de linhas na matriz e depois se escalona por ser uma técnica instituída. O que justifica este método do escalonamento é que por este método se faz as combinações das linhas, logo são combinações lineares. Com isto se tivermos uma linha que seja combinação da outra esta irá se anular, pois anulamos os elementos das linhas de baixo de modo a tornar o sistema triangular.

Institucionalizando, temos que ao explorarmos a técnica do escalonamento, chegamos à conclusão que ao escalonar a matriz S, isto é, que o gerado $S=\left[\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\5\end{pmatrix}\right]$ é o mesmo que se ter $\left[\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\-2\end{pmatrix}\right]$ (matriz já escalonada), então: $S=\left[\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\5\end{pmatrix}\right]=\left[\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\-2\end{pmatrix}\right]$.

$t_{20,1}$: $v=\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}\in$S. Sim. Logo isto quer dizer que **v** esta em S, ou $v=\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}\in$S, pois há a ambiguidade, logo é LD. A combinação em **S** que tem três componentes é ambíguo, mas quando se considera o outro sistema de 2 componentes continua sendo LD?

O estudo qualitativo de sistemas tem um amplo alcance, pois novamente, nesta tarefa recaímos em um sistema. Refletimos juntos com membros de **X** a importância de conservar este saber para OM futuras. Momento do trabalho da técnica.

Verificarmos se $v=\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}\in\left[\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\-2\end{pmatrix}\right]$ teremos:

$$\alpha_1\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}0\\0\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}\therefore\begin{cases}1.\alpha_1+0.\alpha_2=3\\1.\alpha_1+0.\alpha_2=3\\1\alpha_1-2\alpha_2=3\end{cases}\therefore\begin{cases}\alpha_1=3\\1\alpha_1-2\alpha_2=3\end{cases}\therefore\begin{cases}\alpha_1=3\\\alpha_2=0\end{cases}$$

Institucionalizando o processo desta OM, temos que o sistema só tem uma solução, logo não tem ambiguidade, então o sistema é possível e determinado logo é LI. O novo vetor no novo sistema S é $[V]_{S'}=\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$, isto é, embora o vetor seja do R³ este é localizado neste sistema a partir dos escalares $\begin{cases}\alpha_1=3\\\alpha_2=0\end{cases}$, pois quando se fala em *coordenadas dos vetores* são na realidade os *escalares*, que multiplicados pelos vetores irão forma-lo , ou seja, é a localização deles segundo um sistema de vetores, portanto são os escalares. Justificando a prática realizada, temos que $\left[\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\-2\end{pmatrix}\right]$ é uma *base*, pois é um sistema independente e é o menor gerador que se tem, enquanto que a *dimensão* é 2, que é o número de elementos desta base. Qualquer conjunto que tenha mais elementos que a base este é obrigatoriamente LD.

15ª sessão

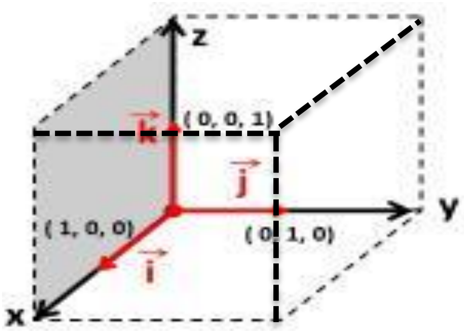
T_{21}: Sendo V = R^3, verifique se K é um espaço vetorial.

t_{21}: Sendo V = R^3, verifique se $\vec{k}$ é um espaço vetorial (Figura 106).

Essa tarefa desencadeou várias tarefas e questões. A razão de ser dessa tarefa foi apresentar a comunidade de estudo a ideia de variedade linear.

Figura 106 - Espaço do R^3.

Ω plano superior



φ plano inferior

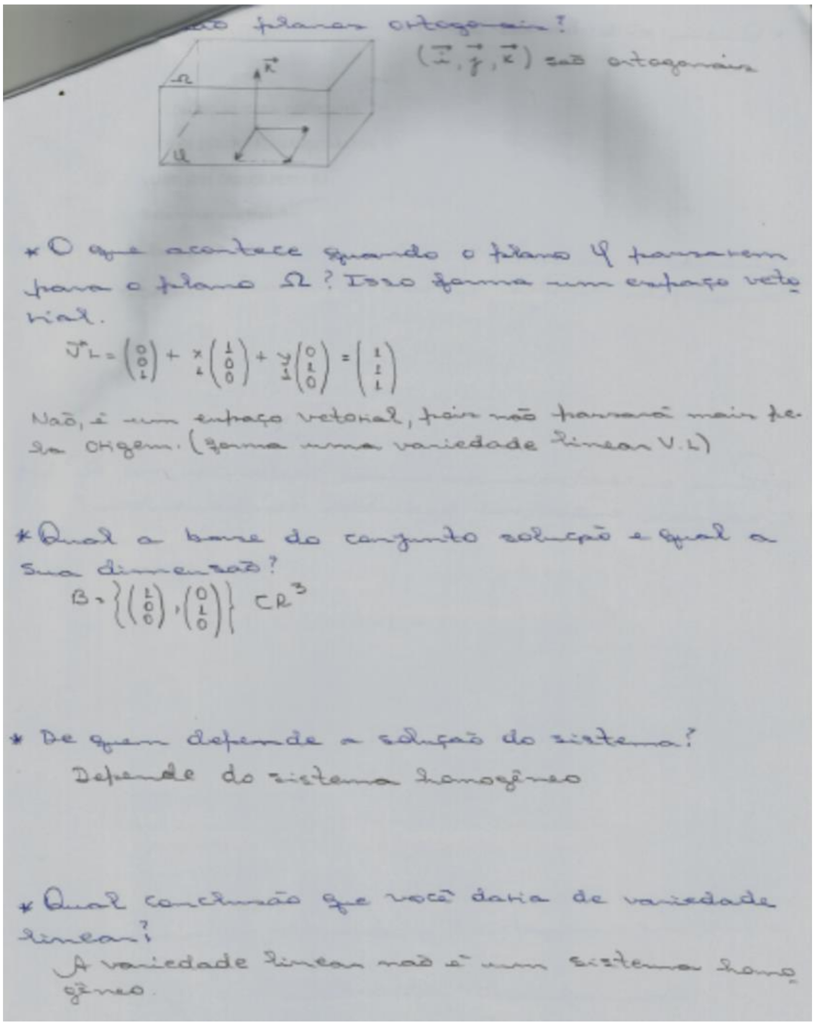
Fonte: Autor desta tese.

Os alunos já disseram ser uma base canônica, portanto uma *base*. O bloco tecnológico teórico está presente: são as combinações lineares. Sendo , $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$ vetores ortogonais entre si, onde i e j estão em φ, $\vec{v}$ um vetor e $\Omega // \varphi$ (planos paralelos), então $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j}$, (agora **x** e **y** escalares) logo $\vec{v}$ é formado pelos múltiplos dos vetores $\vec{i}$ e $\vec{j} \in \varphi$, portanto temos um vetor no próprio plano que é gerado pelos outros dois, gerando assim o R^2 e não o R^3.

(Institucionalização) O vetor $\vec{k} \in \Omega$, que está saindo do plano não é combinação linear de $\vec{i}$ e $\vec{j}$. Os vetores do plano φ que podem ser formados pelas CL de $\vec{i}$ e $\vec{j}$ formam um subespaço vetorial. Os vetores do plano φ se passarem para o *plano* Ω, isto é, se forem *transladado* para o plano Ω, estes deixam de ser subespaço, pois os vetores não passam mais pela origem, logo são denominados de *variedade linear* - VL Podemos então dizer que *variedade linear* é um *subespaço transladado*. Podemos considerar essa tarefa discutida com membros de X como uma tarefa inversa[52], pois recai em um estudo já realizado com sistemas Sp + Sh associado.

[52] Cf (**BON, PEREIRA e CASAS, 2009).**

Figura 107 - Resposta carimbada de A12, $R_{12}^{\lozenge t21}$.


...ão planos ortogonais?
$(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ são ortogonais

* O que acontece quando o plano Ψ passarem para o plano Ω? Isso forma um espaço vetorial.

$\vec{VL} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + x\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

Não, é um espaço vetorial, pois não passará mais pela origem. (forma uma variedade linear V.L)

* Qual a base do conjunto solução e qual a sua dimensão?

$B = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\} \subset \mathbb{R}^3$

* De quem depende a solução do sistema?

Depende do sistema homogêneo

* Qual conclusão que você daria de variedade linear?

A variedade linear não é um sistema homogêneo

Fonte: Produção de A14 (2015).

A VL são todos os vetores da seguinte forma $\vec{VL} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + x\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ é um vetor do R², pois para definirmos um vetor desta variedade basta que se defina os valores de x e y. $\vec{VL}$ não é um subespaço vetorial, pois na soma $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + x\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ não teremos o vetor nulo, pois a terceira componente vai ser igual a 1. $\vec{VL}$ esta associado a base $x\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$. Voltando aos sistemas lineares, temos $\underbrace{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}}_{\substack{solução\\particular}} + \underbrace{x\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}}_{\substack{solução\ do\\ homogêneo\\ associado}}$. A *base* do conjunto solução é revelada pela *base do homogêneo associado*. Todas as soluções do sistema passam a ser dada como *combinação linear* da *base* $\underbrace{x\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}}_{\substack{solução\ do\\ homogêneo\\ associado}}$ de *dimensão* 2, já que a solução do homogêneo, quando esta não for só a trivial este gera uma base mais a solução particular $\underbrace{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}}_{\substack{solução\\particular}}$. Então a solução de um sistema linear não homogêneo é uma variedade linear. Esta discussão tomada na sessão de estudo ficou comprovado a aprendizagem com relação a ideia de subespaço, de combinação e o uso do sistema homogêneo.

Seja $\vec{v}$ um subespaço vetorial, então da seguinte forma:

$$\vec{v} = x\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \therefore \vec{v} = \begin{pmatrix}x\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\y\\0\end{pmatrix} \therefore \vec{v} = \begin{pmatrix}x\\y\\0\end{pmatrix} \in [\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2]$$

$\{v_1, v_2\}$ gerador de um subespaço, $E \subseteq V$. Então, $\{v_1, v_2\}$ é uma base de E se, e somente se, todo vetor $v \in E$ se escreve de modo único como CL de v_1 e v_2.

Isto implica, caso v = 0, então $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = 0$ só é possível se $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, pela unicidade da CL. Quando o vetor nulo se escreve de modo único como CL de v_1 e v_2, então $\{v_1, v_2\}$ é dito *linearmente independente* LI.

É importante notar que partimos do estudo qualitativo dos sistemas lineares e para verificar se é ou não uma base, voltamos aos sistemas lineares.

16ª sessão

T_{22}: Resolver o sistema 3x3 homogêneo.

t_{22}: Resolver o sistema $\begin{cases} x+y+z-t=0 \\ x+2y-z+2t=0 \\ 2x-y-z+t=0 \end{cases}$.

Na discussão da T_{22} em classe, **Y** fez uma pergunta: Q_{20}: Este sistema gera o espaço?

Justifique? Depois pedi para que analisassem se *o espaço gerado pelas colunas do sistema e por linhas*.

Houve um momento de resolução em sala, os secretários conversaram entre si e o grupo G_3 apresentou no quadro e discutimos a resposta com os demais membros de X.

Escalonando o sistema, temos:

$$\begin{cases} x+y+z-t=0 \\ \quad y-2z+3t=0 \\ \quad\ -9z+12t=0 \end{cases}$$

Z = 4t/3; t = t; x = 0 e y = -t/3. Resposta apresentada pelo secretário de G_3.

Vamos substituir valores em t:

se t = 0, então z = y = x = 0, S {(0,0,0,0,)}

se t = 3, então z = 4, y = -1 e x = 0, S = {(0, -1, 4,3)}

(Momento exploratório da técnica) Pedi para que representassem na forma vetorial o sistema (matriz coluna). Revela-se que trabalhar com sistema e trabalhar com combinação linear. É notório notar que $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ esta no gerado $x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}+y\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}+z\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}+t\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, logo podemos pensar que $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ é CL de $x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}+y\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}+z\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}+t\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ só que não se escreve de maneira única. Como temos uma solução que é diferente da nula, logo os vetores são LD, mas geram um espaço. Como são LD e geram o espaço, logo não é uma base do espaço.

A Q_{20} desdobrou-se na $Q_{20,1}$: Mas quem é a base do espaço? Podemos determinar no próprio sistema. $Q_{20,1}$: Importante notar que quando se resolve o sistema por *coluna*, os vetores são do? R_x = R^3, $x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}+y\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}+z\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}+t\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ enquanto que por *linha* os vetores são do R^4. Essa atividade revela o alcance da técnica, justificada pelo estudo de sistemas lineares.

(Institucionalização) O sistema $\begin{cases} x+y+z-t=0 \\ \quad y-2z+3t=0 \\ \quad -9z+12t=0 \end{cases}$ sendo estudado por *linha* o vetor solução tem 4 componentes, já que para cada valor de t, teremos uma solução diferente para o sistema. Portanto precisamos de 4 componentes para encontrar uma resposta no R^3, isto é, quando fazemos

$$0\underset{x}{}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}+(-1)\underset{y}{}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}+4\underset{z}{}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}+3\underset{t}{}\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$ encontramos elementos do domínio que tem como imagem o vetor nulo que pertence ao R^3, isto é, existe uma relação entre os escalares x, y, z, e t e o termo independente e é ai que se tem a noção de *transformação linear*, pois (0,-1,4,3) levam no vetor nulo (0,0,0), assim como o (0,0,0,0) levam no (0,0,0), logo o espaço coluna não é LI, pois não podemos escrever de maneira única, isto é, como gera ambiguidade é LD ou ainda, se o sistema tem várias soluções, então o termo independente é CL de $x\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$.

Q_{21}: Então todo o sistema linear, ou ainda toda matriz é uma transformação linear. R_x^{Q21} sim, pois leva uma coisa noutra coisa. Ao substituirmos valores nas variáveis determinamos as suas imagens.

Observamos que a coluna da matriz não muda o que muda são os valores de x, y, z e t. Conclui-se que temos espaço linha (espaço gerado pelas linhas do sistema) e temos o espaço coluna (espaço gerado pelas colunas do sistema), logo gera uma *dualidade*, pois temos coisas diferentes, mas produzem o mesmo resultado. Esta atividade matemática revela a *eficácia* do sistema linear homogêneo.

Enfim, discutimos que o conceito de CL está imerso em outros tópicos de espaços vetoriais, pois é uma ideia básica e fundamental para a construção de outros objetos matemáticos, como LD, LI, base de um espaço, subespaço gerador, que veremos no decorrer deste percurso. Logo tal ideia permitira com que os alunos avancem com relação aos conceitos básicos da AL. Houve por parte dos membros de X um outro entendimento sobre a aplicação de sistemas lineares, pois para A_1: “Professor eu não sabia que esse estudo poderíamos estudar a AL”, para A_5: “O Sr conseguiu dar para nós uma outra, como o Sr chama, razão de ser aos sistemas e é uma ferramenta muito importante no estudo da AL”, para A_8: “Foi muito importante, pois nem tínhamos nos tocado que os diferentes registros nos ajudaram a aprender e irão servir quando formos ensinar ”.

17ª sessão

Praticamente ao fim de nosso percurso de estudo discutimos da potencialidade dos sistemas lineares, que alcançava os objeto transformações lineares. Iniciamos complementando a sessão anterior, pois pedi para que pesquisassem sobre as transformações lineares. Então, iniciamos conversando sobre qual eram as práticas com este objeto. E eles disseram que podemos aplicar a definição que eles trouxeram.

Dados E_1 e E_2 espaços vetoriais sobre um corpo K e T: $E_1 \rightarrow E_2$ uma aplicação, ou então dados dois vetores E_1 e E_2, dizemos que T é uma transformação que leva E_1 em E_2, ou seja, $T(E_1) = E_2$. Se T é linear e se x e y $\in E_1$ e $\alpha \in K$, então:

i) T(x.y) = T(x) + T(y) transforma o produto em soma.

ii) T(αx) = αT(x) conserva-se o escalar

Acrescentei a ideia de que f(0) = 0 ainda que esta não me garanta que é linear, mas é uma candidata a ser.

Aplicamos a T_{23}:

T_{23}: Represente na forma de matriz:

t_{23}: Represente na forma de matriz: $\begin{pmatrix} x+y+z-t \\ x+2y-z+2t \\ x+2y-z+2t \\ 2x-y-z+t \end{pmatrix}$.

Construímos juntos a resposta carimbada da R_x^{t23}.

$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}}_{v}$. A matriz representa uma transformação, logo uma aplicação.

Caso tenhamos A (x) = y uma função. Imaginemos A $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+z-t \\ x+2y-z+2t \\ x+2y-z+2t \\ 2x-y-z+t \end{pmatrix}$. A partir de uma ideia já contida no universo cognitivo deles, perguntei: Q_{22}: Se déssemos valores às variáveis que pertencem ao domínio iremos encontrar o que? A resposta foi unânime: *a imagem* em outro conjunto. Pedi então para colocarem valores aleatórios em x, y, z e t.

Aplicando as propriedades, temos (momento tecnológico teórico):

A(v) = Av

i) $A(v_1 + v_2) = Av_1 + Av_2$, pois o produto de matrizes é distributivo;

ii) $A(\alpha\, v) = \alpha\, A(v)$. Logo toda matriz define uma transformação linear

A partir das propriedades que trouxeram e discutimos que sua aplicação nesta tarefa nos permite dizer que é linear.

Na realidade em discussão os alunos de **X** já observaram se $A\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ as imagens seriam nulas.

$$\text{Logo } A\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & -1\\1 & 2 & -1 & 2\\2 & -1 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1.0 & 1.0 & 1.0 & -1.0\\1.0 & 2.0 & -1.0 & 2.0\\2.0 & -1.0 & -1.0 & 1.0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

A imagem do 0 (zero) tem que ser 0 (zero). A_7 relatou "Professor isto é um sistema homogêneo". Ao explorarmos a técnica no sistema é possível se notar que temos uma transformação do R^4 para o R^4, pois o domínio o vetor tem 4 elementos e obtém-se na imagem um vetor de 4 elementos.

T_{24}: Resolver o sistema 4x3, determinando os valores das variáveis que tem imagem nula.

t_{24}: Resolver o sistema $\begin{cases}x+y+z-t=0\\x+2y-z+2t=0\\2x-y-z+t=0\end{cases}$ determinando os valores das variáveis que tem imagem nula.

$$\begin{cases}x+y+z-t=0\\x+2y-z+2t=0\\2x-y-z+t=0\end{cases}\xrightarrow{escalonando}\begin{cases}x+y+z-t=0\\y-2z+3t=0\\-3y-3z+3t=0\end{cases}\xrightarrow{escalonando}\begin{cases}x+y+z-t=0\\y-2z+3t=0\\-9z+12t=0\end{cases}$$

$z=\frac{4t}{3}$, $y=-\frac{t}{3}$, x=0, então S = $\{(0,\ -\frac{t}{3},\frac{4t}{3},$ t)$\}$.

A tecnologia é a aplicação do método da eliminação, que é justificado pelo método da substituição e eliminação, e como nessa tarefa Av = 0, logo temos a razão de ser desse sistema, pois determinarmos os elementos do domínio que tem *imagem nula*, institucionalizando, uma importante ideia das transformações, que é a de *núcleo* de uma transformação linear. Um aluno mostrou no quadro da sala um registro geométrico, relacionado dois conjuntos.

Institucionalizando o processo, temos: O N(A): Conjunto dos elementos do domínio do conjunto E_1 (espaço vetorial E_1), que tem imagem nula. Como **A** é linear, então **A** (0_{E1}) = 0_{E2}, logo $0_{E1} \in$ **N(A)**, isto implica que o núcleo da matriz N(A) $\neq\varnothing$, ou seja, é diferente do vazio, então, o núcleo, tem pelo menos um elemento, que é a *solução nula,* em **S** = $\{(0,\ -\frac{t}{3},\frac{4t}{3},$ t)$\}$. Quando resolvemos um sistema linear homogêneo, na realidade estamos querendo determinar o núcleo da matriz.

Os elementos e_1 e e_2 do núcleo, então $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2$, também é do núcleo, pois:

$$A(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2) = A(\alpha_1 e_1) + A(\alpha_2 e_2)$$
$$= \alpha_1 A(e_1) + \alpha_2 A(e_2)$$
$$= \alpha_1 0_{E1} + \alpha_2 0_{E2} = 0_{E2}$$
$$\Rightarrow \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 \in N(A)$$, logo, *N(A) é subespaço do E_1.*

$t_{24,1}$: Dado **v** e através da transformação $A\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\1\end{pmatrix}$ terá como imagem $\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$, então:

V + N(A) = v + $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2$ = v' $\neq$ v. Então a imagem de A(v + N(A)) é:

A(v + N(A)) = A(v) + A (N(A))

$$= \begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$$. Ou seja, para que se obtenha outras soluções do sistema basta que se acrescente as soluções do núcleo. Na comunidade de estudo, quando trabalhamos esta parte da técnica, os alunos de X disseram que é a mesma *coisa* que vimos na formação do espaço vetorial, portanto é notório a articulação entre estes objetos matemáticos.

Neste momento é apresentado a comunidade de estudo, em nossa OMR uma tarefa inversa, em relação aos tipos de tarefas já estudadas nesta OMR, com intuito de interpretarmos o funcionamento e o resultado da aplicação das técnicas.

Foi dado um tempo para resolverem em sala a subtarefa. Voltemos ao sistema $\begin{cases}x+y+z-t=0\\x+2y-z+2t=0\\2x-y-z+t=0\end{cases}$. Igualaremos agora o sistema a imagem. Logo dado a imagem $\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$ quais os elementos do domínio?

A x = b

$$\begin{cases}x+y+z-t=-1\\x+2y-z+2t=1\\2x-y-z+t=2\end{cases} \text{chegando em } \begin{cases}x+y+z=-1+t\\y-2z=2-3t\\-9z=10-12t\end{cases}$$

Sendo t a variável livre, então $z=\dfrac{12t-10}{9}$, $y=-\dfrac{2}{9}-\dfrac{3}{9}t$, x = $\dfrac{3}{9}$ e t=t.

$$v = \begin{pmatrix} \frac{3}{9} \\ -\frac{2}{9}-\frac{3}{9}t \\ -\frac{10}{9}+\frac{12}{9}t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{9} \\ -\frac{2}{9} \\ -\frac{10}{9} \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{3}{9} \\ \frac{12}{9} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Um grupo de alunos disse: Professor há como representar geometricamente. Então temos a Q_{23}: Podemos representar geometricamente, tal situação mas para o R^2, pois não há como desenhar o R^4.

Discutimos sobre as vantagens da representação do sistema como $v = \begin{pmatrix} \frac{3}{9} \\ -\frac{2}{9}-\frac{3}{9}t \\ -\frac{10}{9}+\frac{12}{9}t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{9} \\ -\frac{2}{9} \\ -\frac{10}{9} \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{3}{9} \\ \frac{12}{9} \\ 1 \end{pmatrix}$ e da motivação geométrica: se a técnica é eficaz e segura, se permite relacionar a solução particular mais a solução do homogêneo, se podemos obter outras informações sobre propriedades e a sua validade. Depois da intervenção de Y surge a Q_{24}: Qual conclusão vocês tiveram? Que qualquer solução do sistema **x** é uma *combinação do núcleo* (solução do homogêneo) com a solução pura (não depende do núcleo), ou solução de norma mínima ou de menor tamanho (projeção do zero na variedade linear).

As técnicas e os registros estudados nesta OMD ajudam a interiorizar o conceito de domínio e imagem de uma transformação linear, relacionando ainda com o que estudamos sobre espaços vetoriais (articulação entre os dois objetos). Como já estudaram a construção gráfica dos espaços de vetores, não houve dificuldade nesta ideia de construção para as transformações. Os membros de X foram capazes de articular tarefas propostas deste PER.

18ª sessão

Como no semestre anterior eu ministrei a disciplina Geometria Analítica e tivemos umas duas aulas no Laboratório de Informática e utilizamos o software Geogebra os alunos perguntaram se podemos realizar atividades de transformações com este software. A resposta foi sim, mas que não havia mais tempo para que acontecesse neste PER.

Qualquer solução do sistema x é uma combinação do núcleo (solução do homogêneo) com a solução pura (não depende do núcleo), ou solução de norma mínima ou de menor tamanho (projeção do zero na variedade linear).

$t_{24,2}$: Dada a matriz Ax = 0, sendo A = $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ e o termo independente $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, Resolver o sistema. (técnica já internalizada por **X**).

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = -x_4 \\ \qquad x_3 = -2x_4 \\ \qquad 0 = 5x_4 \end{cases}$$

Após escalonarem e portanto resolverem o sistema, pedi que apresentassem a resposta. Então: $x_4 = 0$, $x_3 = 0$, $x_2 = x_1$, então S = $x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. O professor Y abre a discussão durante a sessão: O *núcleo* de **A** - **N(A)** = $\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right]$ (diz-se gerado por $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$), logo isto é uma base de *dimensão* (*dim*) = 1 *(institucionalização, que é um trabalho que cabe a Y)*, já que só tem um vetor. Q_{25}: Acontece que o espaço é do R^4, mas o *dim N(A) é 1*, logo existe um complemento que é o R^3, que significa que tem uma parte que completa o núcleo que também é um subespaço vetorial?

Para responder esta questão observemos o sistema escalonado $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ \qquad x_3 + 2x_4 = 0 \\ \qquad 5x_4 = 0 \end{cases}$ na forma matricial, este se apresenta na forma $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

Com intuito de explicitar a OM elaborada, iniciamos comentando que como o sistema não tem nenhuma linha que se anula com outra, logo o sistema é LI, não temos como formar uma CL, por exemplo entre o α .1 + β .0 = 0, sem que $\alpha \neq 0$ e $\beta \neq 0$, pois para obtermos a igualdade o $\alpha = \beta = 0$, ou ainda, a terceira é combinação das outras, α .1 + β .0 = 1 (isto não pode dar 1).

Na matriz $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ as linhas 1,2 e 3 forma um espaço do R^4, $R(A^t) = [L_1, L_2, L_3]$

e como estas linhas são LI estas formam uma base neste gerado $B = \{ L_1, L_2, L_3\}$, então a dim $R(A^t)$ é 3. Então a dim $R(A^t)$ + dim $N(A) = 4$, que é a dimensão do R^4. Isto se deve porque qualquer vetor n do núcleo de (A), $N(A) = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right]$, é da forma $\begin{pmatrix} n \\ n \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e se fizermos A . n, teremos:

$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} n \\ n \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.n & -1.n & 1.0 & 1.0 \\ 0.n & 0.n & 0.0 & 2.0 \\ 0.n & 0.n & 0.0 & 5.0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Quando estamos calculando o núcleo da matriz, esta se procurando os elementos em que seu produto escalar com as linhas que é zero $\langle L_1,n\rangle = 0$, $\langle L_2,n\rangle = 0$ e $\langle L_3,n\rangle = 0$. Como o produto escalar é 0, logo são ortogonais entre si, ou seja, o núcleo de uma transformação é ortogonal ao gerado de $R(A^t)$.

O vetor nulo é o único ponto comum, pois esta no núcleo da transformação e no gerado de A transposto. Casa façamos todas as combinações possíveis das linhas da matriz o núcleo continua sendo ortogonal a elas, portanto quebramos o espaço em dois pedaços, ou *decompomos o espaço* em dois, que são ortogonais entre si, em que o N(A) é o complemento ortogonal do $R(A^t)$.

Então seja T uma transformação linear T: $E_1 \rightarrow E_2$, A matriz de T, então a **dim E_1 = dim N(A) + dim ($R(A^t)$)]**. Isto se apresenta na forma de um Teorema: Teorema do Núcleo e da Imagem.

Ao final desta sessão pedimos para que os secretários de **X** sorteassem uma ordem para apresentação em classe das próximas duas últimas sessões. Após o sorteio cada equipe apresentará um ou mais objetos matemáticos na perspectiva que aparecesse nossa OMD. Neste momento de avaliação, que uma forma de balança para verificar se tais praxeologias foram internalizadas.

19ª sessão

O terceiro sistema didático auxiliar, *$S_3(X; Y; Q_3)$*, possibilitou ao diretor de estudo dialogar sobre o bloco do saber-fazer ([*T*, τ]) da TAD. A questão está assim anunciada: *Q_3*: Como esses futuros professores selecionam os tipos de tarefas T para ensinar Álgebra Linear no Ensino Superior? (Etapa final do processo de formação). Espera-se que o *milieu* ***M*** esteja estabelecido e exista a confiança entre o conjunto ***X*** e ***Y***.

Assim, as repostas para as questões dos sistemas didáticos principais *$S_0(X; Y; Q_0)$*, *$S_1(X; Y;$*

Q_1) e $S_2(X; Y; Q_2)$, estão sujeitas a organização de um *milieu* de trabalho *M*, reunindo o conjunto de recursos antigos e novos que *X* e *Y* utilizarão. Entre esses recursos, alguns possuirão respostas *prontas* para Q_0, Q_1, e Q_2, que se denota por $R^{\lozenge}$ (CHEVALLARD, 2008, 2009b).

Da análise das respostas $R^{\lozenge}$ (*R* contraste), $Y = \{y_1, y_2\}$ (alunos em formação e diretor de estudo) poderão obter o material para construção da resposta $R^{\heartsuit}$ (resposta ótima). Porém, esse material precisa de um refinamento metodológico para fazer parte do *milieu* M do sistema didático principal $\boldsymbol{S}(X; Y; \boldsymbol{Q}_0)$. É nesse refinamento metodológico que ocorre a construção da resposta ótima ($R^{\heartsuit}$) para $\boldsymbol{Q}_0$. Dessa forma, a reposta $R^{\heartsuit}$ poderá indicar a confirmação da hipótese da tese doutoral, que para se trabalhar com AL é necessário se *estudar qualitativamente sistemas lineares*.

i) Grupo de alunos (G_1), onde $A_1, A_2, A_3, A_4 \in G_1$

Durante a apresentação houve troca de informações, questionamentos e reflexões em classe do próprio membros de G_1 e dos demais grupos.

G_1 apresentaram um tipo de tarefas que era resolver sistemas lineares, envolvendo os três métodos: adição, substituição e eliminação e comparação e utilizaram tanto o registro algébrico quanto o geométrico, a partir de uma situação real (cotidiano). Percebemos aqui a aquisição de conhecimento.

Foi analisado se o sistema é possível, possível e indeterminado e o indeterminado e interpretando a solução por meio de gráficos no R^2 e no R^3. Comentaram sobre a importância de que os sistemas teve em todo nosso PER e que estes são fundamentais no estudo de AL, pois segundo eles "os sistemas são uma ferramenta poderosa na resolução de diversas questões".

Os comentários dos membros do grupo e dos demais alunos é que se a formação deles fosse nessa perspectiva onde eles criam, a partir de movimentação de práticas, e assim estudam os objetos matemáticos, tornou o estudo mais significativo. Para A_{11} "aprendemos coisas como estudo de bases e dimensão, multiplicação matricial, que nunca pensávamos em aprender. Aprendemos de maneira diferente".

Escalonaram um sistema linear e relataram em suas explicações a ideia de LI, pois justificaram como no MER, que porquê eliminam-se as linhas nulas e o que sobra de linhas não nulas é uma base e tem que ser LI, devido a combinação entre linhas, apenas estudando sistemas lineares havendo ai indícios de aprendizagem por parte do grupo em questão.

ii) Grupo de alunos (G_2), onde $A_5, A_6, A_7, A_8 \in G_2$

O aluno A_7 inicia expondo o que este grupo irá apresentar, relatando que: "O Sr (falando de

Y) partiu do zero, nos fazendo pensar sobre as práticas que compõe o estudo de AL em questão, chegando nas ideias. Mas ainda estamos muito ligados a ideias do ensino médio. O Sr construiu o conhecimento com a gente”.

Conversei com os membros de **X** que pensar em uma nova construção de uma OMD, como nosso PER temos que nos atentar que o diretor de estudo deve estimular o estudo, enriquecendo o milieu junto com **X**, para que **X** movimente praxeologias que o leve de encontro aos objetos (práticas com o objeto), a partir de das relações que esse sujeito possuiu com o objeto estudado, e quanto maior for a aproximação entre **X** e o(s) objeto(s), maior a relação do sujeito com estes objetos, com vistas a institucionalização do saber. Neste grupo os alunos levaram em consideração tarefas do tipo proposta no MER com o objetivo de que cada aluno do grupo explique as técnicas empregadas.

Os membros de G_2 apresentaram uma tarefa sobre sistemas em que foi discutido a questão dos espaços vetoriais, como foi proposto no MER, evidenciando o momento da avaliação do processo de estudo. Este grupo trabalhou com a questão de vetores, inclusive propondo tarefas que evidenciava o produto escalar e o ângulo entre vetores. Mostraram que a partir dos sistemas é possível se determinar as combinações lineares e discutimos a questão deste objeto dar origem a novos objetos, apresentando indícios da aprendizagem, pois houve alteração do EP dos sujeitos da pesquisa.

20ª sessão

iii) Grupo de alunos (G_3), onde $A_9, A_{10}, A_{11} \in G_3$

Iniciaram relatando que nunca tinham estudado sistemas separado de matrizes, portanto uma prática nova para eles, pois como foi visto no ensino médio estes objetos são apresentados em separado.

Em seguida apresentaram resolução de sistemas pelos três métodos, e relataram o alcance da técnica, que por meio do seu estudo qualitativo é possível se estudar outros objetos matemáticos em AL. As tarefas apresentadas revela o quanto o quanto é forte a ideia de iniciar o estudo da AL pelos sistemas lineares para esse grupo, para em seguida, como podemos constatar na fala deles, para depois iniciar o estudo dos demais objetos dessa disciplina.

Uma outra tarefa foi mostrar que um sistema 3 por 3 pode ser resolvido trabalhando com os coeficientes, logo trabalharam com matrizes. A_{10} disse “O sistema divide o sistema, conforme já vimos nas sessões de estudo, o espaço em dois subespaços, que é o núcleo da matriz (sistema homogêneo) e o outro é o gerado pelas linhas da matriz do sistema $R(A^t)$, e que são ortogonais entre si. Apresentaram uma tarefa sobre produto de matrizes não como proposto em nosso modelo e sim como uma tarefa comum no ensino básico, que é o uso de tabelas, revelando como esta institucionalizado o estudo de matrizes a partir da ideia de tabelas. Entendemos que não ficou institucionalizado a ideia de relacionar o estudo de composição utilizando sistemas lineares com a gênese do produto de matrizes, para esse grupo.

Não havia mais tempo, mas o grupo propôs uma tarefa em que os coeficientes eram letras, pois viram a necessidade de abstrair a técnica e se enxergar de uma forma geral o que a tarefa quer (A_{14}). Fica evidenciado alteração do EP dos membros de G_3 em relação relação ao estudo do gerado de A^t da matriz e seu núcleo, havendo aprendizagem.

iv) Grupo de alunos (G_4), onde A_{12}, A_{13}, $A_{14} \in G_4$

Apresentaram um tipo de tarefas interessante relacionando diversos objetos estudados, mostrando a articulação entre os objetos.

T: Estudar qualitativamente o sistema mxn.

t: Estudar qualitativamente o sistema 2x + y = 4.

Na apresentação de G_4 apresentaram uma resolução e as articulações. Relataram que 2x + y = 4, é possível se ter vários valores para x = (-y +4)/2 e que os valores de x dependem de y, assim como y = -2x + 4 ou y = 4 – 2x. Consequentemente, elencaram novos tipos de tarefas que resumimos assim:

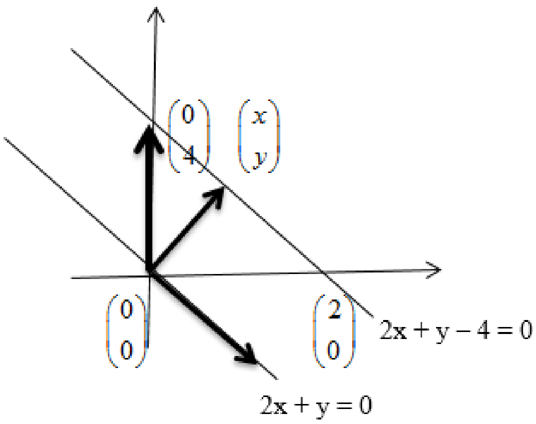
Na forma de matriz coluna o sistema fica: $(x \quad y)\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = (4)$

Sendo a solução S = $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 4-2x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ -2x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} + x \,.\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

Ou ainda $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} + t \,.\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, fazendo x = t, onde $\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ é a solução particular e $t \,.\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ é a solução do homogêneo associado ao sistema (Figura 108).

Discutimos em sala sobre a atividade com intuito de aperfeiçoar as técnicas, já que as mesmas precisam ser evoluídas e questionadas e que os alunos se acostumem com a forma de trabalho autônomo. (momento da evolução)

Figura 108 - Representação gráfica do espaço.



Fonte: Grupo 4 (2015).

Logo 2x + y = 4 forma o R², passando a ideia de um espaço de vetores (espaço vetorial).

Será se um vetor v = (4) é combinação linear dos vetores $\begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}$?

Logo há escalares (α e β), tal que $2\alpha + 1\beta = 4$. Dá para se perceber a ambiguidade, pois $2\alpha + 1\beta = 4 \therefore 2\alpha = 4 - \beta \therefore \alpha = {}^{4-\beta}\!/_{2}$, ou ainda , $\beta = 4 - 2\alpha$ então um coeficiente depende do outro. Logo, há solução para o sistema, mas que não é apenas uma, mas *infinitas*, pois o *sistema é possível e indeterminado*, portanto há um infinidade de combinações lineares. Quando isto acontece o sistema é dito *linearmente dependente - LD*, ou seja, toda vez que o sistema provoca ambiguidade este é LD. Trabalharam a ideia de variedade linear (VL), então a VL são todos os vetores da seguinte forma VL $= \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 4 - 2x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ -2x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} + x \, . \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, no caso desta equação.

$\overrightarrow{VL} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} + x \, . \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ é um vetor do R, pois para definirmos um vetor desta variedade basta que se defina os valores de x. A $\overrightarrow{VL}$ não é um subespaço vetorial, pois na soma $\overrightarrow{VL} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} + x \, . \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ não teremos o vetor nulo, pois a segunda componente vai ser igual a 4. $\overrightarrow{VL}$ esta associado a base $x \, . \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Voltando aos sistemas lineares, temos $\underset{\substack{\textit{solução} \\ \textit{particular}}}{\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}} + \underbrace{x \, . \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}}_{\substack{\textit{solução do} \\ \textit{homogêneo} \\ \textit{associado}}}$. A *base* do conjunto solução é revelada pela *base do homogêneo associado*. Todas as soluções do sistema passam a ser dada como *combinação* *linear* da *base* $\underbrace{x.\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}}_{\substack{\textit{solução do} \\ \textit{homogêneo} \\ \textit{associado}}}$ de *dimensão* 1, já que a solução do homogêneo, quando esta não for só a trivial este gera uma base mais a solução particular. Então a solução de um sistema linear não homogêneo é uma VL. Apresentaram uma tarefa para se verificar se determinar uma base e a dimensão, havendo ao nosso ver indícios de aprendizagem por parte dos alunos desse grupo. Com a atividade proposta por G_4 foi possível se verificar o momento de explorara a técnica e institucionalização e para o diretor de estudo foi uma avaliação.

Na avaliação geral das falas dos secretários dos grupos, foi que é possível se articular práticas entre os objetos de modo que estes não pareçam soltos e que um não tem relação com o outro. O apanhado histórico e epistemológico foi importante pois agora vimos a importância de se estudar a gênese dos objetos e propor uma construção racional para estes. As tarefas propostas em cada sessão e suas articulações foram importantes para o aluno justificar o seu fazer.

6.4 ANÁLISE DO PER

Durante os 5 meses de formação com os membros de **X**, sempre estiveram em pauta momentos de reflexão didática, onde cada membro de **X** manifestava sua opinião sobre as tarefas e técnicas, pois nossa intenção era de que **X** buscassem soluções para as tarefas, que lhes foram apresentadas, e em seus grupos e depois com a turma, pudesse socializar as ideias.

A complexidade que permeou o sistema de tarefas, a partir do gênero de tarefa estudar qualitativa mentos os sistemas lineares, as quais estruturam a OMD, se impôs, por meio do contexto matemático histórico e epistemológico da AL, como também pelas condicionantes, entre elas, o currículo oficial do Curso de Licenciatura em Matemática (ANEXO A), às ferramentas didáticas disponíveis, os livros textos adotados pela instituição, que se encontravam com os alunos ou na biblioteca.

Foi verificado que os membros de **X**, institucionalizaram a ideia do estudo qualitativo de sistemas lineares, como um gênero de tarefa para o estudo dos objetos abordados neste PER. Temos que considerar que os registros algébrico e o geométrico ajudaram neste processo de aprendizagem.

Parte das tarefas apresentadas pelos grupos possibilitaram ariculação entre sistemas e outros objetos da AL, a partir da proposta do PER, mas que ainda algumas práticas ainda não se desvencilharam de práticas internalizadas no ensino médio, como o estudo do produto de matrizes, que vejo como uma restrição a nível da disciplina, pois alguns alunos de X queriam trabalhar com matrizes nos moldes do ensino básico.

De um modo geral a Q_3: Como esses futuros professores selecionam os tipo de tarefas T para ensinar Álgebra Linear no Ensino Superior? (Etapa final do processo de formação) foi respondida, pois na fala dos membros de X em suas apresentações e no decorrer de todo o PER que os T estão integradas a práticas com sistemas lineares, havendo aprendizagem.

A compreensão dos membros de **X** é de que as tarefas com sistemas são fundamentais, pois promovem a articulação e justificação entre as tarefas da AL e que o registro gráfico é importante para se visualizar as técnicas aplicadas.

A dialética da OMD necessita de um processo investigatório de X e as tarefas propiciaram isto, pois mobilizaram o EP dos alunos, sendo que no PER houve condições outras que não estavam presentes no $\boldsymbol{S}_1(X_1; \emptyset; \mathcal{Q}_1)$ onde o aluno era hipotético.

A questão diretriz considerada forte, como dia a TAD, nos propiciou o surgimento de outras (Q_0,.....,Q_{25}), ao longo das 20 sessões, que nos fizeram enriquecer o milieu com obras outras que nos ajudaram a responder tais questionamentos (mesogênese). Enquanto, que a cronogênese podemos dizer que precisávamos de mais tempo para trabalhar melhor determinadas ideias. Em relação a topogênse conseguimos mudar o topos dos alunos, pois as tarefas que foram desenvolvidas na OMD permitiu que o universo cognitivo de X fosse ampliado, de tal forma a responder a Q_0.

As tarefas que propomos no modelo a partir do gênero de tarefa que estruturam a OMD, requereu um contexto matemático histórico e epistemológico, como também pela presença de influência das aulas de Guerra (2014), que condicionam as escolhas, entre elas, a ementa do PPC do curso de Licenciatura em Matemática do IFPA, às ferramentas didáticas disponíveis, os livros didáticos adotados pelos professores e pelo IFPA.

Os sistemas didáticos ajudaram a responder a Q_0 nesta comunidade de estudo, mas em conversa com X foi colocado que estes, como futuros professores de matemática, busquem dispositivos didático matemáticos que os ajudem a construir as respostas, assim como a modelização tornou-se uma ferramenta fundamental para formação de professores de matemática.

As condições $\mathbf{C}_\xi$ criadas pelo PER, para **X** quanto para **Y**, refere-se ao estudo (tem haver com estudo e trabalho) de praxeologias de certa forma inéditas, que irão enriquecer o milieu. Estas $\mathbf{C}_\xi$, foram: $\mathbf{C}_1$ que os alunos tinham em seu equipamento praxeológico práticas com resolução de sistemas lineares, $\mathbf{C}_2$: não davam ênfase demasiada a formalidade da AL e sim revelar práticas que não aparecem na universidade; $\mathbf{C}_3$: engendravam práticas, a partir de tipos de tarefas, articulando assim os objetos matemáticos; $\mathbf{C}_4$: trabalharam com tipos de tarefas que se proponham a fazer generalizações como as atividades propostas em nossa proposta de MER; $\mathbf{C}_5$: alunos tinham um conhecimento mínimo (infraestrutura matemática) sobre vetores; $\mathbf{C}_6$: considerar o tempo que a instituição nos dar para trabalhar em sala com os alunos; $\mathbf{C}_7$: a OM em questão contenha um questionamento tecnológico pertinente; $\mathbf{C}_8$: exploraram o momento exploratório a técnica, que são evocadas por meio de tarefas e **C_9**: dar uma nova razão para o espaço vetorial.

Em análise do sistema S_3, podemos constatar que na 19ª e 20ª sessões foi possível se verificar a angústia dos futuros professores em constatar que alguns dos saberes vistos de um determinado objeto matemático, eles sabiam resolver, ou seja, julgavam ter o domínio, mas que por meio das tarefas apresentadas nesse PER poderam ser discutidos e questionados.

Os secretários de cada grupo A_4, A_8, A_{11} e A_{14} comentaram que na visão deles só o livro didático era suficiente para se estudar AL, assim como outra disciplina e a internet para ajudar a resolver problemas (tarefas), e que as praxeologias estavam prontas e que não poderiam se (re) construidas.

Um tema que de um modo geral qualquer graduando conseguia resolver, que são os sistemas, estão interligados com outros saberes que podem ser estudados a partir desses. Vemos um tema morto, sistemas é isso, mas que quando se engendram às práticas é possivel se conectar saberes, a partir de uma reflexão mais ampla do objeto.

Em várias falas de alunos sujeitos dessa pesquisa, podemos compreender que as práticas com os sistemas lineares e o estudo das combinações lineares tem um amplo alcance, são objetos potentes, pois no caso dos sistemas lineares, que é um tema de amplo domínio dos graduandos, mas que estava apenas limitado ao estudo do próprio sistema.

Às práticas dos formandos foram alteradas devido a esta ação formativa planejada, a partir de uma OMD, que propiciou uns sistemas de tarefas, conectadas a partir de uma tecnologia que é o estudo qualitativo de sistemas, como no caso do grupo 4 que apresentou a ideia de espaços a partir da proposta no modelo.

Foi possível notar na apresentação dos grupos alteração do EP dos alunos, pois os indícios que comprovam isto: trabalharam com matrizes a partir de sistemas lineares, incluindo suas operações; as tarefas propostas por eles articulam as combinações lineares, com LD e LI, base e dimensão; tarefas propondo determinar o núcleo da matriz; utilizaram o registro gráfico para representar um sistema para formar um espaço de vetores a partir da ideia que a solução geral é a solução particular mais a solução do homogêneo associado, sendo que ao nosso ver houve aprendizagem, além de utilizarem os registros geométricos como motivador do estudo.

Notamos nas tarefas apresentadas pelos grupos a importância que deram ao estudo dos sistemas homogêneos, no estudo dos espaços vetoriais e combinação lineares e que o alcance da técnica permitiu estudar as transformações lineares, revelando pelas próprias práticas dos alunos, a potencialidade dos sistemas lineares.

Em nossa OMD que propomos desse PER, planejamos questões cruciais, em ordem de complexidade crescente (cronogêneses) e os recursos didáticos e matemáticos mobilizados para esse estudo, não devem depender só de **Y**, e sim deva se integrar para progredir o topos dos alunos (topogêneses).

Importante de se considerar que não deixamos a questão geratriz ser pesquisada da internet ou em outros meios e respondida em sentido débil[53], mas esta foi trabalhada onde as tecnologias estudo de sistemas lineares e das combinações lineares permeavam as técnicas, as quais eram evocadas a partir das tarefas, já que nosso MER foi formulado como uma OMD dinâmica, a partir de uma questão forte inicial, que provocou a emergência de respostas, ainda que provisórias, mas que geriram novas OMD, que constituiram uma OMP, inicialmente, mas que culminou em uma OMR, a partir de um processo de modelização.

Podemos colocar em pauta algumas limitações é a falta de experiência do diretor de estudo e dos alunos para trabalharem em grupos, criar mecanismos para que todos os membros do grupo se encontrem para desenvolver os estudos extra classe, discutir mais o contrato didático, pois o contrato pedagógico que outras disciplinas trabalham com problemas fechados, além de que percebemos certa dificuldade em escrever as tarefas pelos grupos, já que as mesmas foram evocadas bem próximas das que propomos no MER.

A partir dos processos didáticos experimentados nessa pesquisa, que foi nosso primeiro, pois até então só tinhamos leituras do PER, postulamos que no âmbito da metodologia de investigação didática, nossa proposta de MER oriunda do PER, constituiu um instrumento essencial para interpretarmos a atividade didática do processo de estudo em questão, ou seja as tarefas e as técnicas, que nos ajudaram no estudo dos objetos da AL, e segundo Delgado (2011) o que foi mais importante foi decifrar os discurso tecnológico, que justificam as práticas docentes.

Com relação as pesquisas correlatas, as que mais se aproximaram de nossas ideias foram: a de Padredi (2003) utiliza como alavanca meta a GA para se iniciar o estudo da AL, Dorier et al (1999) relatam que a construção de uma abordagem formal, por meio de tarefas é uma condição necessária para a compreensão epistemológica da teoria dos espaços vetoriais, Dorier (2000) utiliza as ideias de LD para articular outros objetos da AL, Laugwitz (1974) e Harel (1990) relatam que os sistemas lineares são necessários e motivadores pera o estudo da AL.

Esse PER revelou que em uma formação de professores devemos trabalhar não só com novos saberes, mas buscar revelar nos saberes já internalizados pelos graduandos, que podem ser mobilizados a partir de seus equipamentos praxeológicos, quando postos em sistuação, para serem engendrados a esses novos saberes.

Podemos dizer que os momentos de estudos propostos na TAD, nos ajudaram a reconstruir uma OMD palpável e inteligível, pois é um instrumento necessário para o trabalho de investigação, pois nos ajudou a chegar em uma resposta desejada, mesmo sendo esta provisória. Então, os processos

[53] Cf. Delgado (2006).

didáticos da teoria nos fez refletir as responsabilidades de X e de Y no processo de estudo, isto é na gestão do estudo, que nos permitiu um novo planejamento do contrato didático, que afetou o contrato pedagógico (comum nas escolas e academias). Delgado (2006) propõe que este tipo de trabalho experimental, que se propõe a desnaturalizar os gestos didáticos que são atribuiídos ao professor e permitir que os alunos possam assumir as responsabilidades próprias do trabalho matemático.

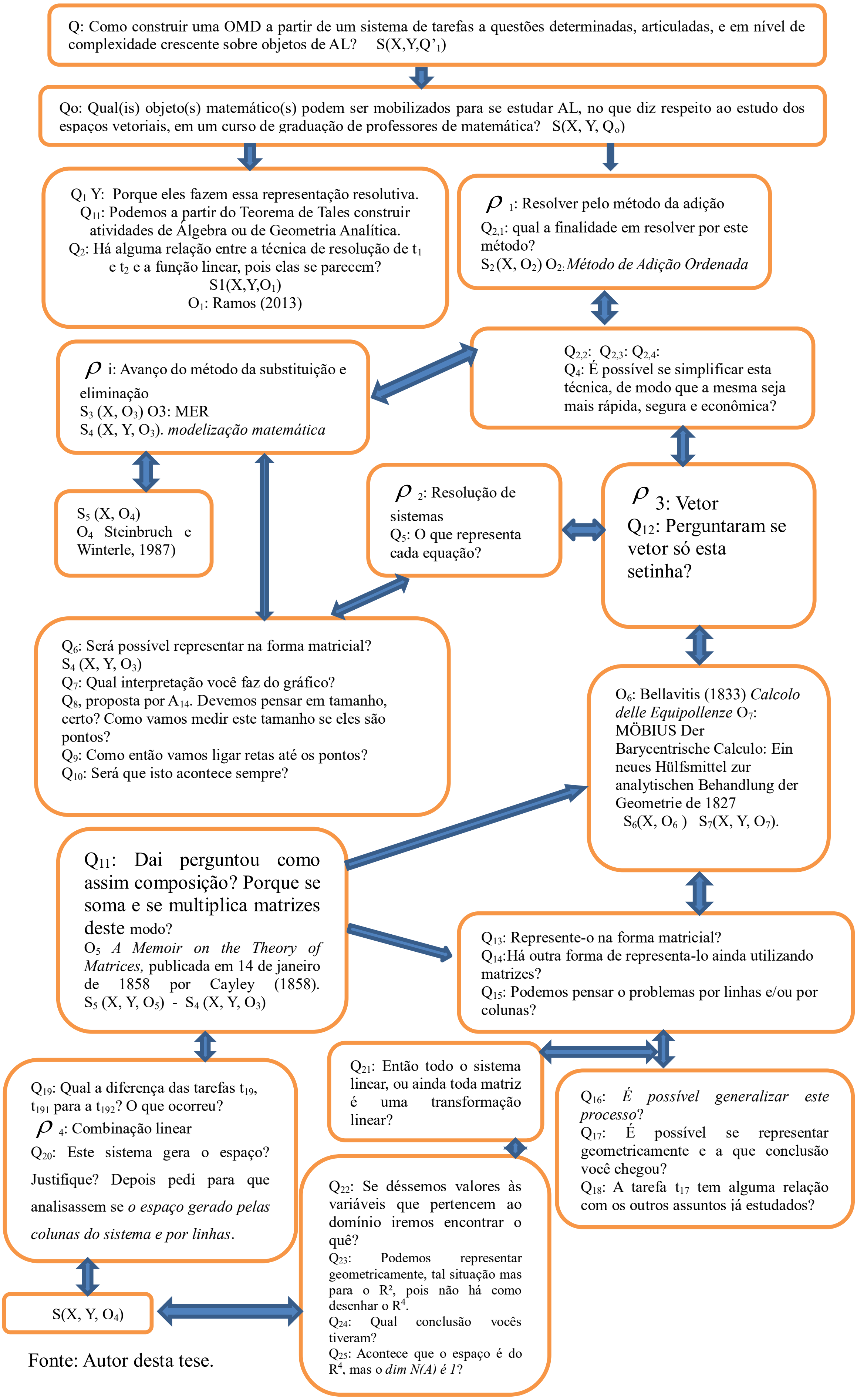
Constatamos no decorrer do percurso de estudo nosso modelo pode ser considerado um modelo alternativo, onde iniciamos o ensino da AL, retomando as ideias de sistemas lineares do ensino médio e que a partir de seu estudo qualitativo articular com novas ideias do ensino superior.

Pensamos em tipos de tarefas T_i pois foi bem aceito pela comunidade de estudo e ao nosso ver a OMD proposta se revelou eficaz, com tipo de tarefas articuladas, a partir do gênero de tarefa estudar qualitativamente sistemas lineares, que serviu para tornar as técnicas inteligíveis, possibilitando-nos descrever, interpretar, e justificar o seu funcionamento, havendo produção de novas técnicas, sendo respondido a resposta que estávamos esperando, que movimentar os sistemas lineares é estudar a AL.

Uma contribuição metodológica para a área de Educação Matemática se deu por meio da reconstruído de Guerra (2014), o qual teve uma perspectiva de ensinar a AL por meio dos objetos que vivem na escola.

Tais objetos como os sistemas lineares e as matrizes foram utilizados como tecnologias, pois são munidos de suas técnicas, desprovidos de qualquer teoria, e que vem a se constituir de uma engrenagem essencial, que gerou as noções que a AL na sua forma axiomática destaca.

Figura 109 - Fluxograma do PER.



Fonte: Autor desta tese.

CAPÍTULO VII - CONSIDERAÇÕES E PERSPECTIVAS FUTURAS

Em nossas considerações iremos retomar aspectos relevantes da pesquisa no sentido de fazermos uma reflexão a respeito da fundamentação teórica, pesquisas correlatas, dos resultados encontrados e de suas contribuições para a área da Educação Matemática, pois após encerrado o estudo dessa pesquisa, acreditamos ter respondido as questões pesquisa apresentadas, assim como o objetivo geral, além de termos contribuído para uma melhor compreensão de futuros professores sobre os objetos da Álgebra Linear.

Importância da metodologia e procedimentos metodológicos adotados

Nossa inquietação nesta pesquisa se basearam em questionamentos oriundos das minhas práticas no ensino de Álgebra Linear no Instituto Federal do Pará, onde tive a oportunidade de vivenciar e acompanhar as problemáticas e embaraço dos alunos em compreender a Álgebra Linear de forma menos formal.

Iniciamos a ensinar a disciplina Álgebra Linear na instituição a qual estamos assujeitados o Instituto Federal do Pará em 2010, e nos sentíamos inquietados, pelos motivos: de não termos estudado de modo satisfatório na Universidade em que nos graduamos e pelas dificuldades apresentadas pelos alunos no entendimento, que ao nosso ver não era satisfatório, sendo que estes aspectos nos motivaram na realização desse trabalho, sendo que nossa principal fonte para preparação de nosso texto do saber foram os livros didáticos, que de um modo geral apresentavam as definições dos objetos da AL e aplicações diretas a partir das definições.

Após nossa participação no GEDIM/UFPA em 2013, atestamos a problemática relativa ao ensino dessa disciplina no ensino superior, pois podíamos criar novas "caras" para os saberes pertencentes a AL. Neste período até os dias atuais tivemos contato com às teorias: TAD, TSD, RRS e APOS, que nos ajudou em nossa fundamentação teórica.

Entramos em contato com revistas da área e passamos a conhecer às obras de Dorier (1990a, 1990b, 1993, 1994, 1995, 1997, 1998, 2000, 2002), Chevallard (1985, 1991, 1992, 1997, 1998, 1999, 2000, 2001, 2002, 2006, 2008, 2009, 2011, 2014), Delgado (2006), Almouloud (2007, 2015), Guerra (2014), Gáscon (1998, 2000, 2002, 2003a, 2003b, 2003c, 2014), Mendes (2015), que nos fizeram conhecer e ampliar nosso universo cognitivo sobre saberes outros, entre eles a TAD, teoria principal dessa tese.

Estas pesquisas nos deram um norte, pois em nossas investigações descobrimos que uma das problemáticas relacionado ao ensino e a aprendizagem da AL era devido ao formalismo. Então pensamos em uma organização matemática e didática, nossa proposta de MER, a partir de práticas com sistemas lineares, pois nosso apanhado histórico nos revelou ser um objeto que perpassa pelos ensinos básico e superior, mas é pouco explorado. O estudo qualitativo dos sistemas não é visto no ensino básico, então exploramos este estudo para articular com os objetos da AL.

Nossos procedimentos metodológicos findam em um percurso de estudo que adaptamos a condições institucionais, quando de certa forma colocamos em prática nosso entendimento mínimo no que diz respeito ao ensino de AL, onde surgiram questões advindas dos alunos e do professor (diretor de estudo), e a busca destas respostas nos deram indícios de alteração da relação dos alunos com os objetos estudados.

A importância do referencial teórica adotado

Para desenvolver a pesquisa utilizamos a Teoria Antropológica do Didático, de Chevallard (2009), onde encontramos os pressupostos teóricos necessários para modelar os conceitos dos objetos estudados da AL, de forma segura e eficiente, em termos de organizações matemáticas e didáticas.

A Teoria postula uma praxeologia pode ser dividida em práticas e logos, ou seja, o bloco do saber-fazer não vive sozinho nas organizações praxeológicas, ele necessita de algo que o legitime, principalmente a técnica $\boldsymbol{\tau}$. Isso ocorre pela inserção do *bloco do saber* ou *do logos*. Nesse bloco, a técnica $\boldsymbol{\tau}$ possui um discurso que a justifica, a tecnologia θ. Porém, a tecnologia θ exige uma justificação de alto nível, denominada de teoria, denotada por Θ (CHEVALLARD, 1999). Da junção da tecnologia θ com a teoria Θ temos o bloco do saber, denotado por $[\theta/\Theta]$. Em algumas situações específicas, a técnica $\boldsymbol{\tau}$ é auto tecnológica e, nesse caso, $\boldsymbol{\tau} = \theta$.

Esse referencial nos permitiu construir um Modelo Epistemológico de Referência, analisar o principal livro didático adotado pelos professores que ministram Álgebra Linear no IFPA, análise do texto do saber de um professor que ministra aula dessa disciplina para o Curso de Matemática e estudado em um Percurso de Estudo e Pesquisa, tendo este contribuído com a construção do modelo.

O papel da revisão da literatura

As pesquisas correlatas nos mostraram que o problema não era do professor e sim da profissão, pois nos trabalhos que analisamos estes admitiam as dificuldades dos alunos em institucionalizar as ideias da Álgebra Linear a nível mundial, então parte dos autores propõe atividades para mitigar estas dificuldades, sendo alguns utilizando softwares, como GeoGebra, Winplot e o MatLab para levar os alunos ao encontro dos objetos. Procuramos estudar trabalhos, dando muita ênfase nos trabalhos produzidos na França por Jean Luc Dorier e Dubinsky, além do grupo de estudo do Linear Álgebra

Curriculum Study Group nos Estados Unidos.

Utilizam recursos computacionais, diferentes registros para motivar os alunos, até elaboram um currículo de Álgebra Linear para ser ensinado nas Instituições de Ensino Superior, e propõe organização matemática e didática para o estudo dessa disciplina almejando a aprendizagem dos alunos.

As pesquisas que mais se aproximaram de nossas ideias foram: a de Padredi (2003) utiliza como alavanca meta a GA para se iniciar o estudo da , Dorier et al (1999) relatam que a construção de uma abordagem formal, por meio de tarefas é uma condição necessária para a compreensão epistemológica da teoria dos espaços vetoriais, Dorier (2000) utiliza as ideias de LD para articular outros objetos da AL, Laugwitz (1974) e Harel (1990) relatam que os sistemas lineares são necessários e motivadores pera o estudo da AL.

O diferencial desta tese em relação a estas pesquisas é que propomos um modelo epistemológico, baseado em nossa pesquisa histórica e que a partir de um sistema de tarefas articuladas, nos proporcionou ensinar a AL em um curso de Licenciatura em Matemática, com fortes indícios de alteração do EP da comunidade de estudo.

Nossa ideia era de que os graduandos refletissem as tarefas como sendo essenciais ao ensino com menos formalismo da AL, portanto participando da construção dos conceitos diferente do modelo dominante, que apresenta o conceito e às técnicas para enfrentar as tarefas, são meras aplicações destas definições.

Um diferencial desta pesquisa para as citadas nesta tese, como as da Teoria APOS, que se utiliza de ferramentas históricas, mas propõem uma abordagem cognitiva, assim como as que tratam da Teoria dos Registros de Representação Semiótica, que são também de uma linha cognitivista. O que foi proposto neste trabalho de tese vai em um sentido diferente, no das práticas, logo não há necessidade de se ter uma teoria a priori, pois se assume uma prática conhecida pela comunidade de estudo e a partir daí engendramos as tarefas em um nível de complexidade crescente e ai é a Teoria Antropológica, logo é um saber prático, já que a AL nasce de práticas rotineira de sistemas lineares.

Resultados da Pesquisa

Uma de nossas questões de pesquisa que nortearam este trabalhoa foi: que características apresentam as organizações matemática e didática assumidas como praxeologias institucionais, referentes ao ensino de Álgebra Linear no Instituto Federal do Pará, foi respondida com a elaboração de um Modelo Epistemológico de Referência que relacionou a Álgebra Linear com o ensino básico, onde a partir de dados históricos revelarmos a gênese da Álgebra Linear.

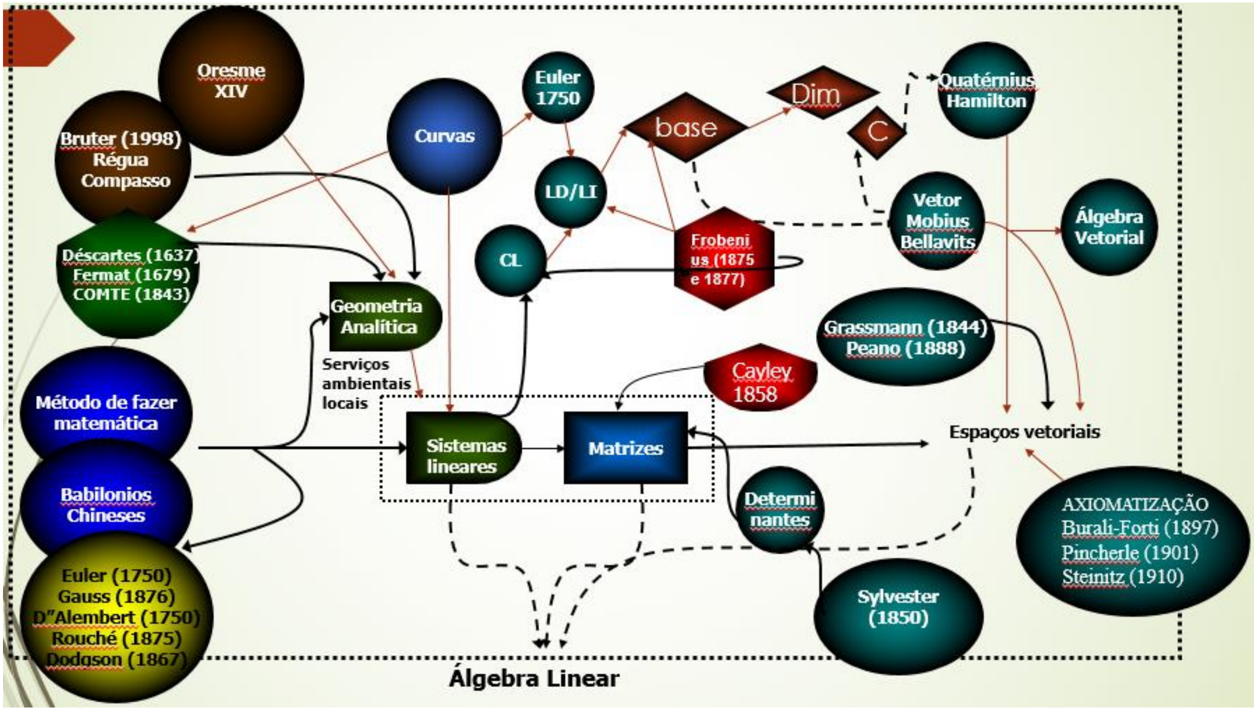
Uma estrutura mínima de entendimento sobre a *nossa versão de saber*, em relação ao ensino de objetos da AL voltada para o ensino básico, sendo que para construção do conhecimento foi feita uma ampla busca de obras e com as notas de aula de Guerra (2014), que foram importantes, pois nos revelou a importância que o estudo qualitativo dos sistemas lineares, que não é estudado no ensino básico, tem em desencadear as ideias presentes na AL, desde a abreviação na forma de matriz, incluindo suas operações, até o estudo de base e dimensão de espaços vetoriais, já que a hipótese tecida era que precisávamos ensinar AL com menos abstração, para melhorar a aprendizagem desta disciplina.

A ideia da disciplina ministrada por Guerra (2014) foi fazer um estudo da AL a partir de um saber escolar, partindo de práticas com sistemas lineares, sem uma visão axiomática. Portanto foi trabalhado um *modelo epistemológico de referência local,* no sentido meta matemático, em relação ao saber, já que a gênese desta disciplina são os sistemas lineares e o problema do auto valor e auto vetor.

Uma contribuição metodológica para a área se deu por meio da reconstrução do modelo do curso ministrado por Guerra (2014), o qual teve uma perspectiva de trazer a AL para o mundo dos sistemas lineares, voltado para um curso de formação de professores em Licenciatura em Matemática do IFPA (nosso PER), onde pensamos nos objetos da matemática escolar, no nosso caso os sistemas lineares como provedores de metodologias referente ao ensino, sendo o nosso a AL e ao nosso ver pode ser um bom caminho para dispositivos de formação de professores, pois vemos os objetos como tecnologias, isto é, temos que olhar o objeto munido de suas técnicas, desprovidos de qualquer teoria, e que vem a se constituir de um objeto catalisador, que irá gerar as noções que a AL na sua forma axiomática irá destacar.

A construção histórico epistemológica dos objetos estudados, foi feita com visitas às obras originais, conforme Figura 110, a qual nos permitiu ter um olhar desde o século XIV, com os trabalhos de Oresme até a formalização no século XIX dos espaços vetoriais, inicialmente com os espaços de dimensão finita com o avanço do estudo dos quatérnions, se concretiza com os estudos do espaço de dimensão infinita, sendo a Álgebra Moderna concluindo esta fase formalismo. Nesse sentido, tal investigação da história e da epistemologia dos saberes matemáticos e de obras de estudo que vivem na instituição Instituto Federal do Pará, nos permitiu nos dar conta do papel das tarefas na reconstrução do saber como objeto de estudos.

Figura 110 – Histórico de alguns objetos da Álgebra Linear.



Fonte: Autor desta tese.

Perpassamos pelo estudo iniciado por Oresme, pela criação da Geometria Analítica, o estudo das curvas, que foi estudado a partir dos sistemas lineares, que caminha para um saber e as formas que assumiu, galgando a independência como um saber prático e se constituiu em Teoria de Matrizes, depois a Teoria da Álgebra Linear.

A proposta de modelo que podemos denominar de alternativo, pois após contribuições advindas do percurso de estudo adaptado (PER), é válido para o curso de Licenciatura em Matemática da instituição objeto dessa pesquisa, em que se trabalhou uma AL voltada ao ensino básico, se deu por uma sucessão de praxeologias com tarefas, técnicas, tecnologias e teorias matemáticas, nos proporcionando um material (obra) analítico para explicar e justificar as tarefas e as técnicas didáticas que compuseram nosso percurso de estudo, sendo assim uma ferramenta que expressou nosso jeito de ensinar a AL, com intuito de analisar os processos didáticos no livro texto analisado, texto do saber e no percurso de estudo.

Baseado nos estudos de Chevallard na França e da equipe Gáscon na Espanha, permearam esta construção do modelo, onde construímos uma Organização Matemática Regional, isto é, resultado da coordenação, integração e articulação de várias praxeologias locais sob o suporte de uma mesma teoria matemática, que tratou de uma proposta de ensino de objetos da AL para Licenciatura, onde naquele momento nosso aluno era hipotético, então as condições e restrições foram modificadas, quando a organização praxeológica foi colocada em prática na instituição em questão.

Uma outra contribuição para a área do ponto de vista metodológico e construtos teóricos foram as advindas do PER adaptado ao modelo da pesquisa, que foi de revelar uma outra razão de ser para o estudo da AL na graduação para professores de matemática, onde o estudo dos sistemas justificam as práticas com espaços vetoriais, sub espaços, combinações lineares, LD, LI, base e dimensão, portanto um olhar diferente dos modelo dominante na instituição IFPA, que onde a razão de ser, perpassa em aplicar técnicas a partir as definições do objetos apresentados, e o que propomos foi trabalhar com praxeologias articuladas pelo estudo qualitativo de sistemas lineares.

A proposta de uma Organização Matemática e Didática, se deu em trabalhar as praxeologias com sistemas lineares, pois estávamos interessado em ensinar AL para o ensino básico, até o estudo de espaços vetoriais.

No modelo alternativo, após o PER, a articulação das OMD propostas pelo estudo dos sistemas lineares, fez emergir por meio do sistemas de tarefas a gênese das operações matriciais, os espaços e subespaços vetoriais, as combinações lineares, bases e dimensões, conceitos estes institucionalizados pelo professor durante o percurso de formação.

O MER nos auxiliou na descrição e análises do modelo epistemológico dominante presente em duas instituições: texto do saber de um professor e o livro didático adotado para ministrar Álgebra Linear adotado pelos dois professores que ministram a disciplina em questão, além de atender as restrições que o modelo apresenta e que, reflete de alguma forma na relação institucional das Organizações Matemáticas. Além deste propósito a Teoria de Chevallard (1999) nos levou a pensar que não existe uma praxeologia única para o ensino, logo não há um modelo privilegiado que não possa ser reconstruído.

Análise das Instituições

O livro didático legitima-se como *práticas sociais validadas* e é um importante recurso utilizado pelos professores para elaboração do *texto do saber*, portanto desempenha um papel de referência na atividade do professor do ensino superior, pois o professor é responsável por recriar o *saber*, isto é, em fazer o que Yves Chevallard chama de *transposição didática interna*, quando adéqua um determinado conteúdo para estruturar suas aulas, ou seja, realiza a transformação do saber a ensinar em saber ensinado, na sala de aula.

Constatamos a partir das categorias eleitas a partir da obra do pesquisador Almouloud (2015) e nosso modelo, que a Organização Matemática do livro para ensinar espaços vetoriais até o estudo de dimensão de um espaço, levam em conta as seguintes situações: tratam os espaços por mera aplicação da definição, tornando-o bastante abstrato; definem subespaço sem articular com os sistemas lineares; apresentam as combinações lineares por definição, e em um nível de complexidade crescente de tarefas este objetos é articulado com o subespaço gerado, espaço finitamente gerado, linearmente dependente e linearmente independente, base e dimensão e não constatamos a problematização das tarefas e as situações apresentadas de modo a tornar as tarefas inteligíveis.

Em nosso modelo as práticas com os sistemas lineares fizeram emergir o estudo das matrizes, inclusive de suas operações, os operadores elementares teve sua gênese no método da substituição e eliminação, que por sinal é um método potente, com amplo alcance, é seguro e eficaz, pois resolve qualquer sistema, a partir da motivação geométrica determinamos a solução geral do sistema, sendo esta a soma de uma solução particular com a solução do homogêneo associa a esse sistema, o estudo do espaço gerado por linhas e por colunas, o núcleo da matriz, o estudo por ambiguidade da ideia de linearmente dependente e linearmente independente, chegando ao estudo de base e dimensão.

O texto do saber do professor (I_1) analisado, caracterizado por tarefas pouco engendradas com os sistemas lineares, sendo apresentado a definição onde a razão de ser do sistema de tarefas é a aplicação da técnica direta a partir da definição os objetos em estudo. Logo, constatamos que o modelo epistemológico coincide com o modelo do livro analisado, pois conforme o euclidianismo prega há um processo de trivializar os saberes, já que o estudo que fizemos da organização matemática e didática da Álgebra Linear, tanto pela instituição livro, quanto por I_1, se dar por aplicação das definições apresentadas, sendo este o modelo epistemológico dominante, portanto muito próximo do modelo teoricismo.

Esta dependência do livro didático, na qual se defini os objetos e se fazem atividades de mera aplicação das definições, imprescindível para realizar a atividade matemática, pode ser considerada uma restrição que impõe as instituições docentes que apresentam pela primeira vez um objeto aos alunos. Nos livros que temos como referência em nossa prática, verificamos tudo muito abstrato e parece não haver nenhuma relação com assuntos ensinados no ensino básico.

No ensino básico os alunos já estudaram matrizes, sistemas lineares e vetores, sendo que os alunos ocupam posições diferentes na escola e suas relações com estes objetos são diferentes, porém devem ser integradas e articuladas no ensino superior, de modo a dar uma outra razão de ser para o estudo destes objetos, já que no ensino básico não há o aparecimento da tecnologia que justifica a técnica, enquanto que no ensino superior há a necessidade de justificar a atividade matemática que está sendo realizada, portanto têm que existir tarefas institucionalizadas que tenham como objetivo interpretar o funcionamento ou o resultado da técnica.

No livro podemos constatar a existência do registro geométrico como motivação para entendimento dos conteúdos, sendo o bloco tecnológico-teórico utilizado pelos autores do livro foi a Álgebra Linear. Mas o objeto principal de estudo vem como apêndice, ou seja, não há articulação com os outros objetos estudados, portanto são tratados depois, quando deveriam vir antes, já que são gênese da Álgebra Linear.

Como estudamos também, na obra analisada para lecionarmos podemos verificar que a organização praxeológica apresenta subsídios para que os alunos possam compreender os objetos apresentados, a partir das definições, pois a razão de ser é aplicação desta. Mas o tipo de organização matemática e didática proposta para o ensino e aprendizagem de objetos como os espaços vetoriais pode causar a memorização das definições, desvinculadas de sua gênese portanto, já que os tipo de tarefas apresentados utilizam os sistemas lineares, a partir do estudo das combinações onde verificamos a justificativa para se estudar os objetos linearmente dependente e independente, assim como base e dimensão, o que não é distinto em relação ao texto do saber.

Logo as tarefas propostas pelo livro e pelo texto do saber representam as situações de estudo, mas que não há uma partida pelos sistemas lineares como tecnologia, sendo as técnicas escolhidas advindas das definições foram de fácil compreensão e utilização, sendo que o bloco tecnológico-teórico ficou no campo da Álgebra Linear, utilizando os registros algébricos e geométricos para um melhor entendimento das técnicas, mas não permitindo ao aluno a construção/modelização das ideias a partir dos sistemas lineares, retirando a autonomia dos alunos de suscitar novas técnicas, a partir dos momentos trabalho da técnica e exploratório, para a resolução de novas tarefas.

Metodologia da Pesquisa

Que condições podemos instaurar no Instituto Federal do Pará para fazer viver certas Organizações Matemáticas e Didáticas com características específicas? A resposta a questão de pesquisa se deu pelo Percurso de Estudo e Pesquisa adaptado (PER), que ao nosso ver foi um aspectos metodológicos construído pela pesquisa, a qual foi o diferencial da fase de formação que caracterizou o MER como alternativo.

A organização matemática e didática, emergiu a partir das interpretações das obras, e praxeologias por nós estudadas, por meio dos sistemas didáticos principais e dos auxiliares no decorrer do percurso de estudo, onde as tarefas de um modo geral foram postas para responder os questionamentos, mas evocaram novas questões, também, já que nos sistemas didáticos S_2 e S_3 principais do percurso de estudo e pesquisa o aluno não é mais hipotético.

O sistema de tarefas desenvolvidos nas sessões, vivem nas praxeologias que atendem necessidades institucionais, inclusive docentes, e segundo Andrade e Guerra (2014), tal condição nos leva a encaminhar as problemáticas por nós enfrentadas como imbricadas da profissão docente, que requerem um millieu mais rico, um equipamento praxeológico mais amplo, que disponibilize outras obras e outras respostas para o seu enfrentamento, o qual somente é possível em colaboração com os pares e estes se impõem como novas condições.

Nesse percurso, ocorrido em 20 sessões com alunos graduandos do 4º semestre da turma de Licenciatura em Matemática, constatando que os alunos em suas apresentações e discussões, responderam a uma questão, que questionou o saber culturalmente instituído pelas instituições, no nosso caso o Instituto Federal do Pará, o qual é um saber problemático para o ensino. A nossa questão geratriz foi Q_0: Q*ual(is) objeto(s) matemático(s) podem ser mobilizados para se estudar AL, no que diz respeito ao estudo dos espaços vetoriais, em um curso de graduação de professores de matemática*?

A organização da atividade matemática por meio de tarefas, emergiu como produto dos confrontos de práticas, dos estudos das obras, que nos fez refletir a gênese dos objetos matemáticos, por meio do estudo histórico epistemológico e praxeologias estudadas, nos sistemas didáticos com membros de X, e apontou a estrutura do modelo epistemológico alternativo a ser tomado como referência no IFPA, para o curso de Licenciatura em Matemática, sendo que os procedimentos adotados no desenvolvimento das tarefas contribuiu para uma alteração do equipamento praxeológico do aluno, já que houve a percepção dos alunos em melhorar a técnica do método da substituição e eliminação, que julgaram ter um longo alcance, já que foi possível relacionar o antigo com o novo, isto é, um assunto visto no ensino médio foi articulado para se ensinar objetos do ensino superior, no nosso caso da Álgebra Linear.

Nosso momento praxeológico inicial se deu com a apresentação da questão geratriz e durante todo o processo interessou-nos saber as praxeologias matemáticas presentes no EP dos alunos, as quais estavam relacionadas com o nosso trabalho de investigação. Constatamos que no EP matemático dos alunos, que são os meios matemáticos que dispunham, estavam presentes os sistemas lineares. Criamos vínculos entre os conhecimentos prévios com os novos, os quais aportam mais informações e com maior nível de complexidade.

O momento do primeiro encontro foi de onde caracterizamos a questão Q_0. Utilizamos o Teorema de Tales para fazer aparecer as equações, depois o estudo dos sistemas lineares, onde os alunos resolveram os sistemas por 3 modos e viram que todos são paridos do método da substituição e eliminação, inclusive o método do escalonamento (momento do trabalho da técnica).

O momento exploratório se deu em melhorar o método da substituição e eliminação, ou seja, articulando o velho com o novo e relacionando com novos objetos como o estudo das combinações, LD, LI, base e dimensão, ou quando por meio da atividade exploratória de mudança de variável desencadeou na gênese do produto matricial, ou ainda o estudo de sistemas que levou a ideia de variedade linear.

Durante os momentos de exploração e trabalho da técnica, percebemos a utilização espontânea por parte dos alunos, de pesquisas na internet e em obras da biblioteca, e leitura das obras O_i, que incrementaram o milieu (mesogênese), favorecendo o trabalho com o modelo, já que em nosso PER os alunos foram autônomas na resolução das tarefas quebrando a ideia pedagógica tradicional, onde essas ideias ficam a margem de sua responsabilidade.

Momento institucional constatamos que o aluno sujeitos da pesquisa foram autônomos no decorrer das sessões, pois as atividades em grupo também propiciaram as trocas de informações entre eles e entre eles e o professor, atividades estas que foram acompanhadas de um discurso teórico que justificou, analisou e interpretou as razões de ser das atividades matemáticas propostas a eles por Y (momento tecnológico teórico).

A institucionalização feita por Y e com a colaboração dos membros da comunidade de estudo, foram feitas quando os alunos já tinham explorado os tipos de tarefas e suas técnicas, os resultados encontrados por eles eram revelados sua razão de ser e o que significavam na Álgebra Linear.

Em uma discussão entre X e Y, constatou-se que os sistemas lineares levaram a construção dos espaços vetoriais de dimensão finita, mas Y coloca que que existem sistemas lineares de dimensão infinita, já que só trabalhamos com o R^3, e não conseguiríamos desenhar o R^8, mas as ideias continuam, como não podemos desenhar estudamos os sistemas lineares, logos temos um alcance universal, mas que não foi foco de nosso estudo.

As condições **C_ξ** criadas pelo PER, para **X** quanto para **Y**, refere-se ao estudo (tem haver com estudo e trabalho) de praxeologias de certa forma inéditas, que irão enriquecer o milieu. Estas **C_ξ**, diríamos iniciais, no momento em que inicializamos o PER foram: **C_1** que os alunos tenham em seu equipamento praxeológico práticas com resolução de sistemas lineares, **C_2**: não dar ênfase demasiada a formalidade da AL e sim revelar práticas que não aparecem na universidade; **C_3**: engendrar práticas, a partir de tipos de tarefas, articulando assim os objetos matemáticos; **C_4**: trabalhar com tipos de tarefas que se proponham a fazer generalizações como as atividades propostas em nossa proposta de MER; **C_5**: que os alunos tenham um conhecimento mínimo (infraestrutura matemática) sobre vetores; **C_6**: que se tornou uma restrição: considerar o tempo que a instituição nos dar para trabalhar em sala com os alunos; **C_7**: que a OM em questão contenha um questionamento tecnológico pertinente; **C_8**: que possamos explorar em um momento exploratório a técnica, que são evocadas por meio de tarefas e **C_9**: dar uma nova razão para o espaço vetorial.

Em várias falas de alunos sujeitos dessa pesquisa, podemos compreender que as práticas com os sistemas lineares e o estudo das combinações lineares tem um amplo alcance, portanto são objetos potentes, pois no caso dos sistemas lineares, que estava no EP dos graduandos, mas estava apenas limitado ao estudo do próprio sistema. Às práticas dos formandos foram alteradas devido a esta ação formativa planejada, que propicio um sistemas de tarefas, conectadas a partir de uma tecnologia que é o estudo qualitativo de sistemas lineares.

Importante de se considerar que não deixamos a questão geratriz ser pesquisada da internet ou em outros meios e foi trabalhada onde as tecnologias estudo de sistemas lineares e das combinações lineares permeavam as técnicas, as quais eram evocadas a partir das tarefas, já que nosso MER foi considerado como alternativo.

Durante as sessões 1ª até a 18ª os alunos trabalharam com as obras, apresentadas por eles e por Y ao milieu, e fomos em busca de irmos respondendo as questões que surgiram, para chegarmos a resposta de Q_0. Em todas as sessões foram entregues o material com as resoluções das tarefas, na qual no inicio da próxima sessão discutíamos em sala de aula e elegiamos a resposta carimbada pelo grupo.

O questionamento das respostas que foram se obtendo no decorrer do percurso, incorporam-se na atividade de modelização, já que uma das obras entregues aos alunos foi nossa proposta de MER, já que nossa questão Q_0, que implusionou nossos estudos, em busca de uma resposta a esse Q_0, sendo possível constatar que nosso PER permitiu explicitar, institucionalizar e evoluir o processo de modelização, no trabalho com o objeto sistemas lineares, na perspectiva na Teoria utilizada.

Discutimos um dos efeitos da tecnologia θ sobre a técnica τ é a modificação da técnica a partir do estudo do método da substituição e eliminação, de forma que esse alargou sua abrangência, ou seja, se sofisticou de modo que resultou em uma nova técnica, revelando a gênese do método do escalonamento, por exemplo.

O momento da avaliação se deu nas sessões 19ª e 20ª, quando cada grupo expos em 3 aulas sua OMD a partir do texto do saber elaborado por meio dos secretários de cada grupo A_4, A_8, A_{11} e A_{14} comentaram que na visão deles só o livro didático era suficiente para se estudar AL, assim como outra disciplina e a internet para ajudar a resolver problemas (tarefas), e que as praxeologias estavam prontas e que não poderiam se (re) construidas.

Foi possível notar na apresentação dos grupos alteração do equipamento praxeológico dos alunos, pois os indícios que comprovam isto: trabalharam com matrizes a partir de sistemas lineares, incluindo suas operações; as tarefas propostas por eles articulam as combinações lineares, com LD e LI, base e dimensão; tarefas propondo determinar o núcleo da matriz; utilizaram o registro gráfico para representar um sistema para formar um espaço de vetores a partir da ideia que a solução geral é a solução particular mais a solução do homogêneo associado, sendo que ao nosso ver houve aprendizagem, além de utilizarem os registros geométricos como motivador do estudo.

Notamos nas tarefas apresentadas pelos grupos a importância que deram ao estudo dos sistemas homogêneos, no estudo dos espaços vetoriais e combinação lineares e que o alcance da técnica permitiu estudar as transformações lineares, revelando pelas próprias práticas dos alunos, a potencialidade dos sistemas lineares.

Algumas situações no momento da apresentação dos grupos, foram de certa forma angustiantes, pois 2 alunos do G_3 ainda apresentaram tarefas que não se articulavam com o objeto sistemas lineares, pois nas sessões de estudo membros de **X**, houveram momentos de desequilíbrio em relação aos objetos estudados, como foi o caso das matrizes.

As informações que ocorriam nas sessões dos 4 grupos membros de X, os trabalhos entregues individuais por cada aluno, as gravações em áudio e vídeo feitas das sessões, e os informes finais das oficinas apresentadas por todos os grupos e com a participação do secretário dos grupos disponibilizando as dificuldades, como por exemplo a dificuldade de se encontrarem fora das sessões, a qual vejo como uma restrição ao processo, os questionamentos que ocorreram em classe e extraclasse e as contribuições do diretor e nas discussões nas sessões com os alunos.

Notamos que o desenho que propomos como estratégia de estudo não esteve só em nosso topo, mas também dos alunos, pois no processo deixamos serem mais autônomos; o processo de mesogênese ocorreu pelas duas partes; devido a integração progressiva dos alunos nas sessões; e a análise que fizemos via momentos de estudo que nos ajudaram a reconstruir as organizações matemáticas e didáticas foi um instrumento necessário a essa pesquisa para responder Q_0.

Os resultados a partir do PER adaptado confirmam nossa hipótese de que o estudo qualitativo dos sistemas lineares se constituem em respostas plausíveis para responder a questão geratriz do percurso de estudo, já que propomos o ensino da Álgebra Linear voltada para o ensino básico, daí se trabalhar com esse objeto, revelando um resultado inédito para a área e validado pela TAD do ponto de vista de pesquisa científica. Trabalho este que se deu por meio de uma construção coletiva, articulado por um sistema de tarefas e que fomos em busca de responder a questão inicial da pesquisa, deflagrando um processo de construção de praxeologias futuros professores de Matemática.

Esse PER adaptado revelou que em uma formação de professores devemos trabalhar não só com novos saberes, mas buscar revelar nos saberes já internalizados pelos graduandos, que podem ser mobilizados a partir de seus equipamentos praxeológicos, quando postos em sistuação, para serem engendrados a esses novos saberes.

Enfim, a resposta ótima (esperada) $R^{\heartsuit}$ de nosso percurso de estudo, cujo sistema didático, denotou-se por $\boldsymbol{S}_2$ e S_3, foi que estudar sistemas lineares é estudar a própria Álgebra Linear, isto é, por meio de praxeologias com tarefas e técnicas integradas, em um nível de complexidade crescente, onde permeou a tecnologia que é o estudo qualitativo de sistemas lineares.

Os construtos teóricos no que se refere ao estudo de saberes docentes estudados são reconstruídos a partir das interações com o diretor de estudo e demais alunos que compõem o milieu, pois a partir das análises do percurso de estudo que desenvolvemos, constatamos mudança no modo de fazer dos graduandos, pois as práticas apresentadas por eles quase não apresentaram o formalismo muito comum no ensino de Álgebra Linear no ensino superior, foram bastante significativas, pois alunos nos disseram que trabalhar com que o aluno já tem absorvido em seu equipamento praxeológico, ficou mais simples o entendimento das articulações das práticas.

A partir de nossos estudos conseguimos alcançar nosso objetivo geral em elaborar uma proposta de um Modelo Epistemológico de Referência com o propósito de se tornar alternativo sobre o ensino da Álgebra Linear I, que nos serviu de entendimento mínimo, para analisar as praxeologias institucionais presentes em um livro didático e um textos de saber institucionais e desenvolver uma

OMD final a partir das condições e restrições que surgiram no PER, que foi desenvolvido em uma turma da Licenciatura em Matemática.

As contribuições para a área da educação matemática é que nossa proposta de ensino do ponto de vista teórico que que nosso modelo epistemológico pode ser um modelo alternativo no ensino da disciplina AL no IFPA, e do ponto de visto metodológico nosso PER adaptado foi a sequência das tarefas perpassando pelo estudo de sistemas lineares, dimensão do espaço até transformações lineares.

Conseguimos alcançar nosso objetivo geral que tratou de um Modelo Epistemológico de Referência sobre a Álgebra Linear, que nos serviu de entendimento mínimo, para analisar as praxeologias institucionais presentes em um livro didático e um texto de saber institucionais e desenvolver uma organização matemática e didática regional final a partir das condições e restrições que surgiram no PER, a partir das análises oriundas dos sistemas didáticos principais.

Implicações e Limitações

Foi importante notar que todos os alunos aceitaram a proposta de trabalho a partir de questões que foram respondidas pela comunidade e não pelo professor. O contrato didático foi respeitado em parte, pois na apresentação das atividade de um dos grupos, foi possível se perceber um sistema de tarefas oriundas das práticas dos livros didáticos de AL.

A nossa proposta de MER alternativo para o ensino de AL, poderá ser testado em outras instituições para que possamos como se comporta a partir de outras condições e restrições institucionais.

Uma das limitações refere-se em como controlar o tempo com os alunos no retorno do intervalo e saída, pois nossa última aula se estendia até as 22:50, então nos momentos finais os mesmos já entregavam as atividades sem tempo para maiores discussão com todos os integrantes dos grupos, já que pelo menos cada secretário tinha que se pronunciar, pois o tempo que dispúnhamos não permitia discursos na finalização, sendo que a obra de Bon (2011) no serviu de referencial, que nos possibilitou caracterizar como o PER adaptado.

Perspectivas Futuras

Como sugestão, esperamos que o PER adaptado oriundo dessa pesquisa seja colocado em prática frente a outras instituições por outros professores para que possamos ter um parâmetro e podermos comparar com o nosso, podendo desencadear um estudo rico da Álgebra Linear.

Numa perspectiva futura para outros trabalhos pensamos em investigar fenômenos relacionados ao uso do MER como modelo alternativo em sala de aula “normal” assujeitada às exigências e restrições instituições; a reprodutibilidade do PER tendo em conta as exigências e restrições diferentes das vivenciadas; que mudanças o uso do MER na formação continuada provocaria no equipamento praxeológico (saber matemático e saber didático) de professores de AL, de matemática em geral? Quais condições e restrições o MER/PER na construção de uma organização didática envolvendo uso de artefatos tecnológicos (TIC).

REFERÊNCIAS

ALHANATI, L. S. **Geometria Analítica**. Disponível em: <http://alfaconnection.net/pag_avsm/gan0201.htm>. Acesso em: 10 jul. 2014.

ALMOULOUD, S. A**. Fundamentos da Didática da Matemática**. Curitiba. Editora: UFPR, 2007.

ALMOULOUD, S. A, SILVA, M. J. F. da. **Engenharia didática: evolução e diversidade.** In: Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática, Florianópolis, v. 07, n. 2, p. 22-52, 2012. Disponível em: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat>. Acesso em: 1 dez. 2015.

ALMOULOUD, S. A. **Teoria Antropológica do Didático: metodologia de análises de material didático**. Disponível em: < http://www.fisem.org/www/union/revistas/2015/42/42_firma_invitada_saddo.pdf>. Acesso em: 21 dez. 2015.

ANDRADE, R. C. D. **A noção de tarefa fundamental como dispositivo didático para um percurso de formação de professores: o caso da Geometria Analítica.** 2012. Tese (Doutorado) – Universidade Federal do Pará/ Instituto de Educação Matemática e Científica IEMCI.

ANDRADE, R. C. D.; GUERRA, R. B. **Tarefa fundamental em um percurso de estudo e pesquisa: um caso de estudo para o ensino da Geometria Analítica.** Educ. Matem. Pesq., São Paulo, v.16, n.4, p. 1201-1226, 2014.

ARAUJO, E. A. de. **Ensino de álgebra e formação de professores**. Educação Matemática e Pesquisa. São Paulo, v. 10, n. 2, p. 331-346, 2008.

ARDITO, F. M. **O discurso do método**. Disponível em: <http://www.ghtc.usp.br/serve r/Sites-HF/Fabio-Ardito/>. Acesso em: 27 ago. 2014.

ARTIGUE, M. **Engenharia Didáctica**. In: BRUN, J. Didáctica das matemáticas. Trad. Maria José Figueiredo. Lisboa: Instituto Piaget. p.193-217, 1996.

BANACH, S. **Théorie des Operadores de Linéaires**. Warszawa. 1932.

BARACHET, F.; DEMICHEL, Y.; NOIRFALISE, R. **Activites D'etude et de Recherche (AER) pour Dynamiser L'etude de la Geometrie dans L'espace en Classe de Seconde**. In: Petit x, n. 75, p. 34-49, 2007. Disponivel em: <http://www-irem.ujf-grenoble.fr/spip/spip.php?rubrique12>. Acesso em: 6 dez. 2015.

BARQUERO, B. **Ecología de la modelización matemática en la enseñanza universitaria de las matemáticas**. Tese de doutorado. Universitat Autònoma de Barcelona. 2009.

BIRKHOFF, G.; MAC LANE, S. **A Survey of Modern Algebra**. Disponível em: <https://pt.scribd.com/doc/127988704/Birkhoff-a-Survey-of-Modern-Algebra >. Acesso em: 11 set 2016.

BOCCALETTI, D. **Galileo and the equations of motion**. XIV. 2016.

BRECHENMACHER, F. **Les matrices: formes de representation et pratiques opératoires (1850-1930)**. Site expert des Ecoles Normales Supérieures et du Ministère de l'Education Nationale. Paris, 2006. Disponível em: <http://www.math.ens.fr/culturemath/index.html>. Acesso em: 15 mar. 2015.

BOMBELLI, R. **L'Algebra.** U. Forti e E. Bortolotti (Eds.). Milano: Feltrinelli. 1966.

BON, C. F., **Una posible "razón de ser" de la diagonalización de matrices en ciencias económicas y empresariales**. Actas del 2° Congreso de la TAD, Uzès. 2007.

BON, C. F., CASAS, J. M. **El paso de estudiar matemáticas en secundaria a la universidad y los REI**. Actas III Jornadas Internacionales de las Matemáticas en Ingeniería. 2007. p. 119-140.

BON, C. F., PEREIRA, A., CASAS, J. M.. **Diseño de un REI para la docencia práctica de matemáticas en una escuela de Ingeniería**. Actas 17 Congreso Universitario de Innovación Educativa en las Enseñanzas Técnicas, CUIEET. 2009.

BON, C, F. BOSH, M., MIRÁS, J. M. C; GASCÓN, J. **Diseño de un Recorrido de Estudio e Investigación en los Problemas de Modelización**. 2009b. Disponível em: <http://www.seiem.es/publicaciones/archivospublicaciones/comunicacionesgrupos/GruposXIII/DidMatDisCientifica/Fonseca_Casas_Bosch_Gascón_R.pdf>. Acesso em: 24 jun. 2014.

BON, C. F. **Los Recorridos de Estudio e Investigación en las Escuelas de Ingeniería. Trajectories of Study and Research in Engineering Schools**. Educ. Matem. Pesq., São Paulo, v.13, n.3. p.547-580, 2011.

BOSCH, M.; GASCÓN, J. **La integración del momento de la técnica en el proceso de estudio de campos de problemas de matemáticas**. Enseñanza de las Ciencias, 12 (3), 1994. p. 314-332.

BOSCH, M.; GASCÓN, J. **Las práticas docentes del professor de matemáticas**. XIème École d'Été de Didactique des Mathématiques. Versión provisional. Barcelona. 2001.

______. **La praxeología local como unidad de análisis de los procesos didácticos**. 2004. Disponível em: <http://www.ugr.es/ ~jgodino/siidm/madrid>. Acesso em: 15 jul. 2015.

______. **25 años de transposición didáctica.** Actas del I Congreso internacional sobre la Teoría Antropológica de lo Didáctico. Baeza. 2006.

BOSCH, M., BOM, F, C. y GASCÓN, J. **Incompletitud de las organizaciones matemáticas locales en las instituciones escolares**. Recherches en Didactique des Mathématiques, vol. 24, núms. 2-3, p. 205-250, 2004.

BOURDIEU, P. **O senso prático**. Trad. Maria Ferreira; rev. trad. Odaci Luiz Coradini. 3. ed. Petrópolis: Vozes, 2013.

BOYER, C.B. **História da matemática**. Trad. Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 1974.

BRUTER, C. P. **Compreender as matemáticas. As dez noções fundamentais.** Instituto Piaget. 1998.

BURALI-FORTI, C. **Introducción à la géométrie différentielle selon la méthode de H. Grassmann**. Paris: Gauthier-Villars, 1897.

CALLEJO, M. L. **El problema de la Educación Matemática y la doble ruptura de la Didáctica de las Matemáticas**. La Gaceta de la RSME. v. 5. 2002. p. 673-702.

CARLSON. N, D. **Teaching linear algebra: Must the fog always roll in?** The College Mathematics Journal, v. 24, n. 1, p. 29-40, 1993.

CAVALARI, M. F. **Um Histórico do Curso de Matemática da Faculdade de Filosofia Ciências e Letras (FFCL) da Universidade de São Paulo (USP)**. Revista Brasileira de História da Matemática. v. 12, n. 25. p. 15-30, 2012.

CATALÁN, P. B. **El processo de algebrización de organizações matemáticas escolares**. Universidad de Zaragoza, 2003.

CAYLEY, A. **A memoir on the theory of matrices**. Philosophical Transactions of the Royal Society of London. 1858. p. 17–37.

______. **Remarques sur la Notation des Fonctions Algébriques**. In: The Collected Mathematical Papers. 2009. p. 185-188. [Online]. Cambridge Library Collection - Mathematics. Cambridge: Cambridge University Press. Available from: Cambridge Library Collection Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1017/CBO9780511703683.035>. Acesso em 20 jan 2015.

CELESTINO, M. R. **Ensino-Aprendizagem da Álgebra Linear: as pesquisas brasileiras na década de 90**. Dissertação de Mestrado. São Paulo: PUC-SP, 2000.

CHACÓN, A. M. A. **La gestion de la mémoire didactique par le professeur dans I' enseigmenent des mathématiques: Etude du micro-cadre institutiomel em France ey au Costa Rica**. Thése du Doctorat De L' université De Toulouse Delivré par I'Université Toulouse III – Paul Sabatier em Didactique des Disciplines Scientifiques et Technologies Spéciaté: Didactique des Mathematiques, 2008.

CHEVALLARD, Y. **La transposition didactique**. Du savoir savant au savoir enseigné. Grenoble: La Pensée Sauvage. [Traducción en español de Claudia Gilman (1997). La transposición didáctica. Del saber sabio al saberenseñado. Buenos Aires: Aique]. 1985.

______. **La Transposition Didactique: Du Savoir Savant au Savoir Ensigné.** Grenoble, La pensée Sauvage. 1991a.

______. **L'ampliació del camp didàctic i la difusió social de les matemàtiques.** 1991b. Disponível em: <http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=98>. Acesso em: 15 jun. 2014.

______. **Concepts fondamentaux de la Didactique: perspectives apportées par un approche anthropologique.** In: Recherches en Didactique des Mathématiques. V. 12, nº 1, p. 73-112, 1992.

______. **Les savoirs enseignés et leurs formes scolaires de transmission: un point de vue didactique**. 1997 Disponível em: <http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=30>. Acesso em: 30 jun. 2014.

______. **Analyse des Pratiques Enseignantes rt Didactique des Mathematiques: l'Approche Anthropologique.** 1998. Disponível em: <http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=27>. Acesso em: 7 dez. 2014.

______. **El análisis de las prácticas docentes en la teoria antropológica de lo didáctico**. Recherches en Didactiques des Mathématiques, v. 19, n. 2, p. 221-266, 1999. Traducción de Ricardo Campos. Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Sevilla. Com la colaboración de Teresa Fernández García, Catedrática de Francés, IES Martinéz Montañes, Sevilla.

Disponível em: < http://www.aloj.us.es/rbarroso/Pruebas/Chevallard.pdf>. Acesso em: 28 mar. 2015.

______. **L'analise des pratiques enseignantes em théorie antropologique du didactique**. Recherches en Didactique des Mathématiques. Grenoble, La Pensée Sauvage, v. 19, n. 2, p. 221-265, 1999.

______. **Organizer l'Etude. Strutures & Fonctions**. In: 11a Ecole d' Eté de Didactique des Mathematiques. Curso... Grenoble, CD-ROM. 2001a.

______. **Aspectos problemáticos de la formación docente**. In: Jornadas del Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas, 26. Huesca, 2001a. Anais… Universidade de Zaragoza, Espanha, 2001b. Disponível em: <http://yves.chevallard.free.fr/>. Acesso em: 12 jan. 2013.

______. **Les TPE comme problème didactique**. 2001. Disponível em: < http://yves.chevallard.free.fr/ >. Acesso em: 26 out. 2014.

______. **Organiser l'étude. 3. Écologie&régulation**. Actes de la XI école d"été de didactique. Grenoble: La PenséeSauvage, p. 41-56, 2002.

______. **Organisation et techniques de formation des enseignants de mathématiques**, In Actes du XIII e colloque CORFEM. 2006.

______. **Passé et présent de la théorie anthropologique du didactique**. In L. Ruiz-Higueras, A. Estepa & F. Javier García (Éds), Sociedad, Escuela y Mathemáticas. Aportaciones de la Teoría Antropológica de la Didáctico. Universidad de Jaén. 2007. p. 705-746.

______. **Symposium: "Didactique de l'enquête codisciplinaire et des parcours d'étude et de recherche**". In: Colloque international "Efficacité et Équité en Éducation". 2008. Disponível em: <http://ent.bretagne.iufm.fr/efficacite_et_equite_en_education/programme/symposium_chevallard.pdf >. Acesso em: 14 set. 2015.

______. **Remarques sur la notion d'infrastructure didactique et sur le rôle des PER**. Disponível em: <http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Infrastructure_didactiquePER.pd f>. Acesso em: mai, 2009a.

______. **La notion de PER : problèmes et avancées.** 2009b. Disponível em: < http://yves.chevallard.free.fr/ >. Acesso em: 24 jun. 2015.

______. **La TAD face au professeur de mathématiques**. 2009c. Disponível em: <http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=162>. Acesso em: 10 abr. 2015.

______. **La notion d'ingénierie didactique, un concept à refonder. Questionnement et éléments de réponse à partir de la TAD**. 2009d. Disponível em: <http://www.ardm.eu/book/export/html/676>. Acesso em: 27 jun. 2015.

______. **Introduction à la théorie anthropologique du didactique / Introdução à teoria antropológica do didático**. Slides bilíngue: Francês/ português.2011. Disponível em: <http://yves.chevallard.free.fr/>. Acesso em: 24 jun. 2015

______; ARTAUD, M. **Fondements et méthodes de la recherche en didactique. Université d'Aix-Marseille.** France, 2014.

CIRADE, G. **Devenir professeur de mathématiques : entre problèmes de la profession et formation en IUFM**. Les mathématiques comme problème professionnel. Doctoral dissertation, Université de Provence. 2006.

CIRADE, G. **Devenir professeur de mathématiques: entre problèmes de la profession et formation en IUFM**. Les mathématiques comme problème professionnel. In Actes du séminaire national de didactique des *mathématiques* (à paraître). 2007.

CITAD. **IV Congrès international sur la TAD**. 2013. Disponível em: <https://citad4.sciencesconf.org/>. Acesso em: 18 set. 2015.

COIMBRA, J. L. **Alguns Aspectos Problemáticos Relacionados ao Ensino–Aprendizagem da Álgebra Linear**. Dissertação de Mestrado. Belém: UFPA, 2008. 78 p.

COMTE. A. Traité Élémentaire de géométrie analytique a deux et a trois dimensions. Paris, 1843

CROWE, J. M. **A History of vector anaysis: the evolution of the idea of a vectorial system**. London: University of Notre Dame Press. 1967.

CROWE. M. J. **A history of vector analysis**. Doven, New York, 1993.

D'AMORE, B. **Epistemologia, didática da matemática e práticas de ensino**. Bolema –Boletim de Educação Matemática. Rio Claro, SP, v. 20, n. 28, 2007. Disponível em: <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=291221871010>. Acesso em: 01 mai. 2013.

DAWSON, A. J. **The Implications of the work of Popper, Polya, and Lakatos for a Model of Mathematics Instructtor**. Doutorado em Filosofia. Universidade de de Alberta. Canadá: Edmonton. 1969.

DELGADO, A. D. S. **Lo matemático en el diseño y analisis de organizaciones didácticas: los sistemas de numeración y la medida de magnitudes**. Tese apresentada para Universidad Complutense de Madrid - Facultad de Educación, Departamento de Diáctica y Organización Escolar, Madrid. 2006.

DIAS, A. L. M. **O movimento da matemática moderna: uma rede internacional científica-pedagógica no período da Guerra Fria**." In: ESOCITE, 7. 2008, Rio de Janeiro. Anais... Rio de Janeiro, 2008. 1 CD-ROM

DIAS, M. A. **Contribution à analyse d'un enseignement expérimental d'álgèbre linéaire en DEUG A première année.** Mémoire de DEA. Paris: Université de Paris 7, 1993.

DIEUDONNÉ, J. **A Formação da Matemática Contemporânea**. Ciência Nova. Ed. Dom Quixote. Rio de Janeiro, 1990.

DODGSON, C. T. **An Elementary Treatise on Determinantes**. Londres : Oxford, 1867.

DORIER, J. L. **Analysis historique de l'emergence des concepts élémentaires d'algëbre linéaire**. Cahier Didirem n. 7, IREM de Paris 7, 1990a.

______. **Continuous analysis of one year of science students'work in linear algebra, in first year of French University**. Proceedings of the XIVth annual congress of the PME - Mexico, 1990b.

______. **Première approches pour l'étude de l'enseignement de l'algèbre linéaire à l'Université** – Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, IREM de Strasbourg. 1993. p. 95- 123. 1993.

_______. **Genesis of vector space theory**, Hist. Math, 22, v. 3, 1995.

_______. **L'enseignement de l'algébre linéaire en question. França: La Pensé Sauvage éditions**. 1997. p. 291-297.

______. **État de l'art de la recherche en didactique - À propos de l'enseignement de l'algèbre linéaire** - Recherches en Didactique des Mathématiques, v.. 18, n. 2, p. 191- 230, 1998.

______. **On the teaching of Linear Algebra**. Grenoble, France: Kluwer Academic Publishers, 2000, p. 151-175.

______. **Teaching Linear Algebra at University**. In Tatsien Li (Ed.), Proceedings of the International Congress of Mathematicians, ICM . Beijing, China: Higher Education Press. v. 3. p. 875-884, 2002.

______. **Some comments on "The role of Proof in Comprehending and Teaching Elementary Linear Algebra**" by F. Uhlig, Education Studies in Mathematics, 51, p. 185-191, 2003.

DORIER, J. L.; ROBERT, A; ROBINET, J.; ROGALSHI, M. **The teaching of linear algebra in first year of French science university**, in the Proceedings of the 18th conference of the international group for the Psychology of Mathematics Education, Lisbonne, vol. 4, p. 137-144, 1994.

______. **Teaching and learning linear álgebra In first year of french Science University**. Actas del I European Research in Mathematics Education, France: Paris. 1999. p.103-112

DREYFUS, T.; HILLEL, J. SIERPINSKA, A. **Cabri based linear Algebra: Transformations.** 1998. Disponível em: <http:www.fmd,uniosnabrueck.de/ebooks/erme/cerme1-proceedings/cerme1-proceedings.html>. Acesso: 11 out. 2013.

DUBINSKY, E. **Reflective abstraction in advanced mathematical thinking**. Em D. Tall (Ed.), Advanced Mathematical Thinking. Dordrecht: Kluwer, 1991. p. 95-123.

DUVAL, R.; FREITAS, J. L. M.; REZENDE, V. Entrevista: **Raymond Duval e a Teoria dos Registros de Representação Semiótica**. Revista Paranaense de Educação Matemática, v. 2, p. 10-34, 2013.

EUGÈNE, R. **Les Professeurs du conservatoire national des arts et métiers**, Dictionnaire biographique. Paris. 1994. v. 2. p. 498-512.

EULER, L. **Sur une contradiction apparente dans la doctrine des lignes curbes**. In: Berlin, D. A. der W. zu ". Histoire de l'Académie royale des sciences et des belles lettres de Berlin: avec les mémoires pour la même année, tirez des registres de cette Académie. Germany: Berlin: Editora: Chez Ambroise Haude, v. 4, p. 219-233, 1750.

FARRAS, B; BOSCH, M.; GASCÓN, J. **Las tres dimensiones del problema didáctico de la modelización matemática.** In: Educação. Matemática Pesquisa, São Paulo, v.15, n.1, 2013. p.1-28. 2013. Disponível em : < http://revistas.pucsp.br/emp> . Acesso em : 21 jun. 2014.

FORTIN, C. **Travaux Personnels Enquadrés ou L'effet Causal de L'interdisciplinarité**. In: Aster

- Recherches en didactiques des sciences et des technologies, n. 39, 2004. Disponível em: < http://ife.ens-lyon.fr/edition-electronique/archives/aster/web/fascicule.php?num_fas=457>. Acesso em: 26 out. 2014.

GARCIA, F. J.; RUIZ, L. **La modelización como instrumento de articulación de la matemática escolar. De la proporcionalidad a las relaciones funcionales**. IX Simposio SEIEM. Cordoba. 2005.

GARCIA, F. J. A **Álgebra como instrumento de modelização, articulação de estudo das relações funcionais na educação secundária**. Investigação em Educação Matemática XI. 2007. p. 71-90.

GASCÓN, J. **Evolución de la didactica de las matemáticas como disciplina científica**. Recherches em Diddactique des Mathématiques. Grenoble: La Pensée Sauvage, v. 18, n.1, p.7-34, 1998

______. **Incidencia del modelo epistemológico de las matemáticas sobre las prácticas docentes**. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, México, v. 4, n. 2, p. 129-159, 2000.

______. **El problema de la Educación Matemática y la doble ruptura de la Didáctica de las Matemáticas.** La Gaceta Real Sociedad Matemática Española. 2002a. p. 673-698.

______. **Geometría sintética en la ESO y analítica en el Bachillerato**. ¿Dos mundos completamente separados? Suma, v. 39, p. 13-25, 2002b.

______. **La necessidade de utilizar modelos em didáctica de las matemáticas**. Educ. Mat. Pesqui. São Paulo, v. 5, n. 2, p 11-37. 2003a.

______. **Respuesta provisional a las sugerencias de T. Recio**. La Gaceta Real Sociedad Matemática Española, 2003b. p. 151-159.

______. **From the cognitive to the epistemological program in the didacticis of mathematics: two incommesrurable scietific rearches programs**. For the learning of mathematics, v. 23, n.2, 2003c. p. 44-55.

GASCÓN, J. LUCAS, C.; FONSECA, C.; CASAS, J. **O Fenômeno Didático Institucional da Rigidez e a Atomização das Organizações Matemáticas Escolares**. Bolema, Rio Claro (SP), v. 28, n. 50, p. 1327-1347, dez. 2014.

GAUSS, K. **Work on the Theory of Least Squares** (H.F. Trotter, Trans.). Technical Report No.5, Statistical Techniques Research Group, Princeton, NJ: Princeton University. 1957. (Original work published 1811).

GAUSS, C. F. **Werke, Sechster Band, Disquisitio de Elementis ellipticis Palladis ex Oppositionibus Annorum 1803, 1804, 1805, 1807, 1808, 1809**, Konigliche Gesellschaft der Wissenschaften. Gottin- gen. 1874. p. 3-24.

GRANDE, A.L. **O conceito de independência e dependência linear e os registros de representação semiótica nos livros didáticos de álgebra linear**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). São Paulo: PUC, 2006. 208 p.

GUERRA, R. B.; SILVA, D. P. **As Práticas sociais da regra de três. In: Práticas socioculturais e educação matemática.** Iran Abreu Mendes, Carlos Ademir Farias, organizadores. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2014.

GUERRA, R. **Tópicos especiais em matemática 1: Álgebra Linear.** 10 mar. 2014, 30 jun. 2014. 40 p. Notas de Aula.

FROBENIUS, F. G. **Ueber das Pfaffsche Problem**. Flachen.Journal Für Die Reine und Angewandte Mathematik. Berlin. v. 82. p. 353. 1875.

FROBENIUS, F. G. **Ueber Systeme und Gewebe Algebraischen Flachen**.Journal Für Die Reine und Angewandte Mathematik. Berlin. v. 82, p. 353, 1877.

GODINO, J. D. **Teoría de las Funciones Semióticas. Un enfoque ontológico semiótico de la cognición e instrucción matemática**. Trabajo de investigación presentado paara optar a la Cátedra de Universidad de Didáctica de la Matemática de La Universidad de Granada. 2003b.

HAREL, G. **Applying the principle of multible embodiment in teaching linear algebra: Aspect of familiarity and mode of representation**. Schools Science and Mathematics, v. 89, n. 1, p. 40-57 1989.

HAREL, G. **Using geometric models and vector arithmetic to teach high-school students basic motions in linear algebra**. International Journal Mathematics Education, Science and Technology, v. 21, n. 3, p. 387- 392, 1990.

HERMANN, A. **La Géométrie de René Descartes**. Nova edição. Paris. 1886.

HERNÁNDEZ, J, A, A. **La nocion de linealidad. Uma aproximación epistemológica, cognitiva, didáctica y sociocultura**l. Tese (Doutorado). Instituto Politécnico Nacional. México. 2011.

IEZZI, G. **Fundamentos de Matemática Elementar**. 6° ed. Editora Atual, 1993.

ISIK, A.; BAS, F.; OKUR, M.; BEKDEMIR, M.; CİLTAS, A. **Middle Eastern & African Journal of Educational Research**, Issue 9. 2014. Linear Algebra from Students' Perspectives. Disponível em: <www.majersite.org/issue9/3isiketal.pdf>. Acesso em: 29 Abril 2014.

JORDAN. W. **Handbuch der Vermessungskunde**, Erster Band, Dritte verbesserte Auflage, Metzler, Stuttgart, 1888.

KARRER, M. **Análise do tratamento dado às transformações lineares em dois livros didáticos**. In: Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática 2. Santos. Anais do II Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática. São Paulo: SBEM, 2003. GT4-T11. CD-ROM.

______. **Articulação entre Álgebra Linear e Geometria: um estudo sobre as transformações lineares na perspectiva dos registros de representação semiótica**. Tese (Doutorado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo. 2006.

______. **Transformações Lineares: A problemática das tarefas que têm o Gráfico como registro de partida.** In: IX ENEM – Encontro Nacional de Educação Matemática. 2009. Disponível em: <http://www.sbem.com.br/files/ix_enem/Html/ComunicaçãoCientifica.html>. Acesso em: 30 mar. 2014.

CHRISTENSEN, J. **A Brief History of Linear Algebra. Final Project Math 2270**. University of Utah. Utah. Estados Unidos. 2012.

KATZ, V. **História da Matemática. Fundação Calouste Gulbenkian**. 2010.

LAKATOS, I. **Infinite Regress and Foundations of Mathematics**. The Aristotelian Society, Supplementary. V. 34, p. 155-184, 1962.

LAKATOS, I. **History of Science and its Rational Reconstructions**, en R. C. Buck y R. S. Cohen (eds.): P.S.A.., 1970, Boston Studies in the Philosophy of Science, 8, p. 91-135. Dordrecht: Reidel. Trad. española: Historia de la ciencia y sus reconstrucciones racionales, Tecnos: Madrid, 1971.

LAKATOS, I. **Mathematics, Science and Epistemology**: Philosophical Papers. Cambridge: University Press. Trad. española: Matemáticas, ciencia y epistemología. Madrid: Alianza, v. 2, 1978.

LAMIM, M. R. N. **Resolução de problemas modelados com sistemas de equações lineares**. Trabalho de conclusão de curso. Florianópolis, 2000.

LANG, S. **Algebra linear.** Traduzido da terceira edição em inglês**.** 1. ed. Rio de Janeiro: Ciência Moderna. 2003.

LAUGWITZ, D. **Motivation and Linear Algebra.** Educational Stuidies in Mathematics 5. Dordrecht, Holland, 1974. p. 243-254.

LHANOS, V. C.; OTERO, M. R.; GAZZOLA, M. P. **Parcours d'étude et de recherche dans l'école secondaire : une étude longitudinale**. Toulouse: 2013. p. 21-26.

LINDNER, W. **CAS-Supported Multiple Representations in Elementary Linear Algebra. The Case of the Gaussian Algorithm**. ZDM - The International Journal on mathematics education, v. 35, n. 2, p. 36-42, 2003.

MANCOSU, P. **Philosophy of Mathematics and Mathematical Practice in the Seventeenth Century.** N. York: New York Oxford University Press, 1996.

MATHERON, Y. **Analyser les praxéologies quelques exemples d'organisations mathématiques**. In: petit x, n. 54, p. 51 – 78, 2000. Disponível em: <http://www-irem.ujf-grenoble.fr/spip/spip.php?rubrique12>. Acesso em: 15 jun. 2015.

MENDES, I. A. **História da matemática no ensino: entre trajetórias profissionais, epistemologias e pesquisa**. São Paulo: Editora Livraria da Física., 2015.

MENSSOURI, D. **Essai de délimitation em termes de problématiques dês effets de contratet de transposition: lês cãs de relations entre droites et équations dans les classes de Seconde et Première**. Thèse. Grenoble: Université Joseph Fourier. 1994.

MESQUITA, F, N. A**. Modelos epistemológicos, livros didáticos e prática docente em matemática.** VII CIBEM. Uruguai: Montevideo. 2013.

MIGUEL, A.; FIORENTINI, D.; MIORIN. M. A. **Álgebra ou Geometria: para onde pende o pêndulo?** In: Pro-Posições. Revista da Faculdade de Educação–Unicamp, Campinas, SP: Cortez, 1992, v. 3, nº 01, p. 39-57, 1992.

MIKAMI, Y. **On the Japanese Theory of Determinants**. Isis v. 2, n. 1, p 9-36, 1914.

MÖBIUS, A. F., **Der Barycentrische Calcul: Ein neues Hülfsmittel zur analytischen Behandlung**

der Geometrie. Leipizig. 1827.

MOORE, G. H. **The Axiomatization of Linear Algebra**. História da Matemática.1995. p. 262-303.

MORAES, P.; CARVALHO, T. F. de. **Autonomia e liberdade: confluências entre a matemática de Decartes e as ideias libertárias de Paulo Freire e Ubiratan D'Ambrósio**. Anais do IV Encontro de Iniciação em Desenvolvimento Tecnológico e Inovação. 2014.

MUIR, T. **The Theory of Determinants in the Historical Order of Development**. 4 vols., London: MacMillan, 1890-1923; reprint ed., New York: Dover, 1960.

O'CONNOR, J, J. ROBERTSON E, F. **Matrices and determinants.** Disponível em: <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Matrices_and_determinants.html> Acesso em: 14 jul. 2015.

PACIOLI, L. **Summa de arithmetica Geometria. Proportioni: et proportionalita: nuouamente impressa** in. Toscolano su la riua dil Benacense et unico carpionista laco amenissimo sito de li antique & euidenti ruine di...Toscolano, 1523.

PADREDI, Z. L. N. **As Alavancas Meta no discurso do professor de Álgebra Linear**. São Paulo. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Programa de Educação Matemática, PUC-SP. 2003.

PARRAGUEZ, M. G. **Evolución Cognitiva del Concepto Espacio Vectorial**. (Tese de doutorado). Instituto Politécnico Nacional, Distrito Federal, México. 2009.

PEANO, G. **Calcolo geometrico secondo I'Ausdehungslere di H. Grassmann preceduto dalle operazioni dela logica dedutiva**. Torino, 1888.

PELLEGRINI, L. **Espaços de Banach.** Disponível em: <https://www.ime.usp.br/~leonardo/notas.pdf>. Acesso em 10 out. 2016.

PINCHERLE, S. **Le operazioni distributive e le loro applicazioni all'analisi**. Bologna: Zanichelli, 1901.

PRADO, E. de A. **Alunos que completaram um curso de extensão em Álgebra Linear e suas concepções sobre base de um espaço vetorial**. Mestrado em Educação Matemática. PUC. São Paulo, 2010.

RAMOS, M. D. C. P. **Da Álgebra Geométrica Grega à Geometria Analítica de Descartes e de Fermat**. Dissertação (Mestrado). Faculdade de Ciências. Universidade do Porto. 2013.

RIBEIRO, A. J. **The notion of equation and its different conceptions: an investigation based on historical and epistemological aspects**. R. B. E. C. T., v. 2, n. 1, jan./abr. 2009.

ROSSINI, R**. Evolução das organizações matemáticas e didáticas construídas em torno do conceito de função em uma formação de professores.** Educ. Mat. Pesqui., São Paulo, v. 9, n. 2, p. 205-247, 2007.

ROUCHÉ, E. **Note sur les équations linéaires**. C. [Casopis pro pèstovàni mathematiky a fysiky. Prague.] , 221-228. Classification: A2a Équations et systèmes d'équations linéaires (cf. B1a).

Inégalités du premier degré. 1880.

SANDER, D.F. **Hermann Grassmann and creation of linear algebra**. Mathematical Association of America. 1979. p 809-819.

SCHOOTEN, F. V. **Geometry.** Holand: 1659. Disponivel em: <http://books.google. com.br/books>. Acesso em: 10 jul. 2014.

SIERPINSKA, A., TRGALOVA, J., HILLEL, J. e DREYFUS, T. **Teaching and Learning Linear Algebra with Cabri.** Research Forum paper, in The Proceedings of PME 23, Haifa University, Israel, 1999, v. 1. p. 119-134.

SILVA, A. M. **Uma análise da produção de significados para a noção de base em Álgebra Linear** (Dissertação de Mestrado). Universidade Santa Úrsula, Rio de Janeiro, 1997.

SILVA, R. H. da. **Álgebra Linear como curso de serviço para a Computação**. Tese de Mestrado. UNESP. Rio Claro, 1999.

SILVA, R. **O conhecimento matemático-didático do professor do multisseriado: análise praxeológica**. Tese de doutorado. Instituto de educação em Ciências e Matemática. Universidade Federal do Pará. Belém. 2013.

SILVA, R., NUNES, J. M. V., GUERRA, R. B. G. **Relação entre tempo didático e currículo em um ambiente multisseriado**. Perspectivas da Educação Matemática. 2016. Disponível em: http://200.129.202.50/ojs/index.php/pedmat/article/viewFile/1561/2247>. Acesso em 09 jan. 2017.

STEINITZ, E. **Algebraische Theorie der Körper, Journal für die reine und angewandte Mathematik.** 1910, p. 167-309; reprint ed., ed. H. Hasse and R. Baer, Berlin/Leipzig: De Gruyter, 1930.

SYLVESTER, J. J. **Elementary universal geometry, news terms**. Cambridge: University Press, 1885.

SYLVESTER, J. J. **Additions to the articles "on a new class of theorems", and "on pascal's theorems**". In: BAKER, H. F. 1850. The Collected Mathematical Papers of James Joseph Sylvester, v. 1. Cambridge: University Press, 1904. p. 145-151.

SABO, R. D. **Análise de livros didáticos do ensino médio um estudo dos conteúdos referentes a combinatória**. Monografia. Curso de Pós-Graduação Centro universitário Fundação Santo André. São Paulo. 2007.

THURSTON, W. P. **On proof and progress in mathematics.** Appeared in Bulletin of the American Mathematical Society. v. 30, n.2, p. 161-177, 1994.

TUCKER, A. **The growing importance of linear algebra in undergraduate mathematics.** *The College Mathematics Journal*, *24* (1), 1993, 3-9. Disponível em: <http://www.jstor.org/stable /2686426>. Acesso em 12 jul. 2014.

UHLIG, F. **A new unified, balanced, and conceptual approach to teaching Linear Algebra**, Department of Mathematics, Auburn University, Auburn, USA. Disponível em:<www. auburn.edu/~uhligfd/TLA/download/tlateach.pdf>. Acesso em: 10 nov 2015.

USISKIN, Z. **Concepções sobre a álgebra da escola média e utilizações das variáveis**. In: A. F. Coxford & A. P. Shulte, As Idéias da Álgebra. São Paulo: Atual, 1995.

VAZ, D. A. **A Geometria.** Trad. Emídio C. de Queiroz Lopes. Boletim de Educação Matemática, v. 18, n. 23. Lisboa: Editorial Prometeu, 2005.

WAWRO, M.; SWEENEY, G. F. e RABIN, J. M. **Subspace in linear algebra: investigating students concept images and interactions with the formal definition.** ZDM - The International Journal on mathematics education. v. 78, p. 1-19, 2011.

WAERDEN, V. D. **Moderne Algebra**. Springer. Berlin, 1930.

WEYL, H. **Zeit und Materie**. Berlin, 1923.

ANEXO A – Ementa da disciplina Álgebra Linear I

SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO PARÁ
DEPARTAMENTO DE ENSINO PARA A EDUCAÇÃO
COORDENAÇÃO DE LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA

EMENTA – 4º SEMESTRE
DISCIPLINA: Álgebra Linear I –(**CHT**: 60 H –**CHS**: 03H)

COMPETÊNCIAS:

- Auxiliar o aluno a organizar seu pensamento através do reconhecimento e da análise das propriedades características de modelos geométricos que representam os objetos do mundo à nossa volta.

- Interpretar gráficos, mapas e outras informações visuais. Nesse sentido, podemos apontar alguns argumentos para justificar o trabalho com a álgebra linear:

    1. Aplicações que aparecem no mundo real;
    2. Oferece oportunidade para o aluno fazer explorações, representações, construções, discussões, que ele possa investigar, descobrir, descrever, e perceber propriedades;
    3. Percepção e visualização espacial;
    4. O reconhecimento de formas;
    5. A abstração de formas e capacidade de representá-las através do desenho ou da construção do que foi idealizado.

TEMAS: Espaço Vetorial, Transformação Linear, Aplicação da Álgebra Linear às ciências.

Sub-temas:

Espaço Vetorial : Definição e propriedades. Sub-espaço. Sub-espaço Gerado. Dependência e Independência Linear. Base e Dimensão de um Espaço Vetorial. Matriz Mudança de Base.

Transformação Linear : Definição e Propriedades. Núcleo, Imagem e o Teorema do Núcleo e da Imagem de uma Transformação Linear. Isomorfismo de Espaços Vetoriais. Matriz Associada. Álgebra dos Operadores Lineares. Transformações no Plano.

RELAÇÃO DO TEMA COM OUTRAS ÁREAS

A Álgebra Linear I tem participação direta no desenvolvimento das diversas áreas do conhecimento, como nas ciências naturais, nas tecnológicas e nas sociais. Sendo assim, o curso tende a aplicar as teorias e conhecimentos da disciplina, reconhecendo tais aspectos teóricos relevantes na integração com as referidas áreas, a fim de levar o aluno a compreender o mundo natural e os outros contextos pertinentes a sua vida

METODOLOGIA

Os temas e sub-temas propostos serão ministrados sempre procurando articular o conhecimento teórico numa perspectiva interdisciplinar, iniciando o assunto a partir de situações problemas do dia a dia, utilizando materiais didáticos como livros, computador, vídeo, jornais, textos adequados de interesses científicos e tecnológicos, deixando com que os alunos lêem e interpretem tais textos, selecionando e utilizando idéias e procedimentos (leis,teorias e modelos) para a solução de problemas reais, sempre reforçando a aprendizagem da teoria através de diversos exercícios, de forma qualitativa, identificando e interpretando as variáveis relevantes.

BIBLIOGRAFIA

Bibliografia Básica

Callioli,Carlos Alberto-Álgebra Linear e Aplicações- Editora Atual-SP
Boldrini, José Luíz- Álgebra Linear-Editora Harper & Roow do Brasil-1978-SP
Lipschutz,Sezmon- Álgebra Linear- Coleção Schaum- Ed. Mc Graw- Hill do Brasil-SP

Bibliografia Complementar

Kolman, Bernard- Introdução à Álgebra Linear com Aplicação- Ed, Prentice- Hall do Brasil-RJ
Lang,S.- Álgebra Linear- Ed. Edgard Blücher- RJ
Steinbruch, Alfredo-Álgebra Linear- Ed. Makron Books-SP-1998

ANEXO B – Aulas introdutória de sistemas lineares de Guerra (2014).

10/04 Hist/Epist.

ATIVIDADE MATEMÁTICA / PRÁTICAS MATEMÁTICAS.

Filosofia da mat: compreensões da matemática.

Fazer matemática ⇒ fazer epistemologia matemática

- Séries iniciais se apresenta NÃO se constrói.

Século XVIII -

Álgebra: generalização da aritmética. Está presente na escola básica. ↳ o que se faz com nºs eu faço com as letras

- PRÁTICAS NATURALIZADAS DE LETRAS COMO NÚMEROS.

A ÁLGEBRA: NÃO é tratada como um corpo de conhecimento

Geo/Arit/Alg.

NO SÉC. XVIII A Geo. Anal.

↓ vem para

Algebrização da Geometria.

↓

Aritmetização da Geometria.

Um ponto é um par ordenado (≠ um número).

Geo Anal → curvas algébricas → x+y = linear.

Sistemas lineares: Euler - Estudo Qualitativo.

Como ele faz isto?

Método da substituição e eliminação.

$$S_1\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 8 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 9 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 10 \end{cases} \qquad x_1 = 7 - (x_2 + x_3 + x_4)$$

$$S_2\begin{cases} x_1 = 7 - (x_2 + x_3 + x_4) \\ x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 3 \end{cases} \Rightarrow x_2 = 1 - (x_3 + x_4)$$

$$S_3 \begin{cases} x_1 = 7 - (x_2 + x_3 + x_4) \\ x_2 = 1 - (x_3 + x_4) \\ x_3 + x_4 = 1 \quad \Rightarrow \quad x_3 = 1 - x_4 \\ x_3 + 2x_4 = 2 \end{cases}$$

$$S_4 \begin{cases} x_1 = 7 - (x_2 + x_3 + x_4) \\ x_2 = 1 - (x_3 + x_4) \\ x_3 = 1 - x_4 \\ x_4 = 1 \end{cases}$$

ATIVI. MATEMÁTICA:
OTIMIZAR A PRÁTICA
menor tempo, menos esforço, seguro.
rápido. simples
Amplo alcance.

Amplo Alcance: maior nº prob. possível.
Pode-se usar o método el. gaussiana. (analisar sistemas).

$$S_4 \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_3 + x_4 = 1 \\ x_4 = 1 \end{cases}$$

① ENCONTRAR A SOLUÇÃO.

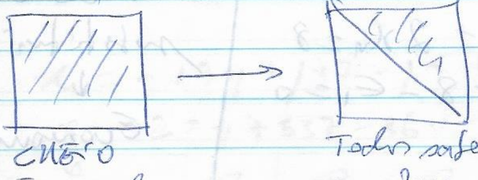
② Surge uma problemática!

2.1 $S_1 \rightarrow S_2 \rightarrow S_3 \rightarrow S_4$ (TRANSFORMAÇÕES DOS SISTEMAS).
S_4 é solução do S_1? (MATEMÁTICA ACADÊMICA).
TEÓRICO.

2.2 – COMO PODE SER DESCRITA A TRANSF. DO S_1 EM S_4?
simples descrição até desc. justificada. (em dito).

2.3 – PORQUE FAÇO A TRANSF. DO S_1 EM S_4?
FICAR MAIS FÁCIL A SOLUÇÃO.

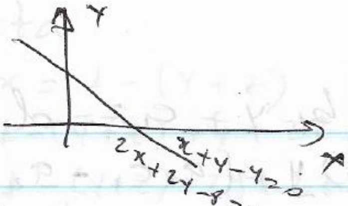
S_1



CHEIO
Ñ se pode fazer – complexo

Todos sabem resolver.
Simples

$$\begin{cases} x + y - 4 = 0 \\ 2x + 2y - 8 = 0 \end{cases}$$



INDETERMINADO

$(x, 4-x)$ $x = 0$

$(0, 4)$ $\quad S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ; x + y - 4 = 0\}$

escrevendo como uma soma de 2 pontos.

olha-se a matriz pela coluna.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 4-x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$ → dimensão da reta 1 depende de um único parâmetro.

Qual é a S de menor tamanho? ter o sentido.

Achar um mínimo $|x| + |y|$, s/a $x + y - 4 = 0$

ou $x^2 + y^2$

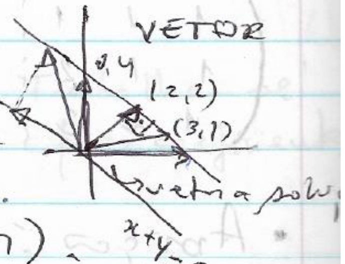
$x - y - 4 = 0$

$y = 4 - x$

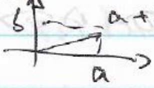
$\to f = x^2 + (4-x)^2 = 2x^2 - 8x + 16$

$\dfrac{df}{dx} = 4x - 8 \quad \therefore 2 = x$

$y = 2.$



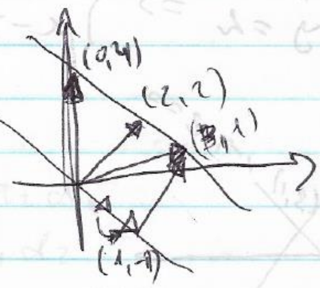
São ponidos geometricamente (vetor).

Nº complexo:  $a + bi$ e $\mathbb{Z}$ (criação da Álgebra

$\mathcal{H} = a + bi + cj + dk$. Quaternários.

$x + y - 4 = 0$

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 0 \\ y = -x \\ x = 1 \\ y = -1 \end{array}\right\} \text{homogêneo.}$$



$x+y+z+t=1$ $\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}$ é solução

$x=1-y-z-t$

$$\begin{pmatrix}1-y-z-t\\y\\z\\t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}+\underbrace{y\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\0\end{pmatrix}}_{\text{p/ homogênea}}$$ hiperplano

Dimensão -

22/04 - $\begin{cases}x_1+x_2+x_3=1\\x_1+2x_2+2x_3=2\end{cases}$

$$\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&2&2&2\end{pmatrix}\leftarrow L_2-L_1$$

$$\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{matrix}x_1+x_2+x_3=1\\x_2+x_3=1\end{matrix}$$

$\Rightarrow\begin{cases}x_1+x_2=1-x_3\\x_2=1-x_3\end{cases}$ INDETERMINADO

Uma solução do sistema $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$

$x_2=1-x_3$ $x_3=x_3$ $x_1=0$

sol. part. sol. homog.

$$\underbrace{\begin{pmatrix}0\\1-x_3\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\-x_3\\x_3\end{pmatrix}}_{\text{sol. geral}}=\underbrace{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}}_{\text{sol. do sistema}}+\underset{t}{x_3}\cdot\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$$

$x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=0$

$\forall x_3\in\mathbb{R}$, outras soluções 1ª eq.

$x_3=t\in\mathbb{R}$ $\begin{pmatrix}0\\1-t\\t\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}0+(1-t)+t=1\\0+2(1-t)+2t=2\end{cases}$

$\Downarrow$

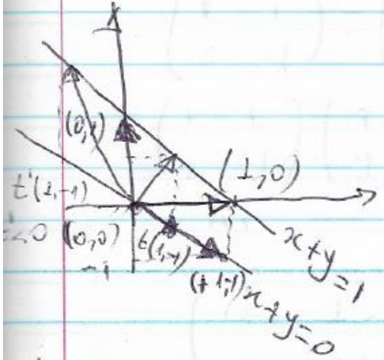
variável livre. ↳ sol. geral do sistema.

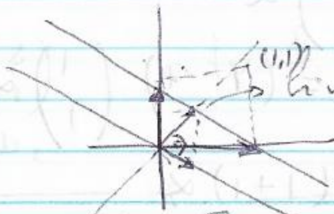
ANEXO E – Solução dos sistemas lineares

sol. particular

Dado um sistema S e se S tem solução X_p e se
$X_S = X_p + X_H$ (sol. geral de S).
Porque X_H é solução do sist. hom. associado
X_H é uma soma de múltiplos de soluções
do sistema hom. associado, ou então, X_H é
unicamente nula.

$$x + y = 1$$
$$y = 1 - x$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 1-x \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{sol. part.}} + \underbrace{x\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\text{sol. Hom.}}$$





linear $\vec{v}$ parte de (0,0).

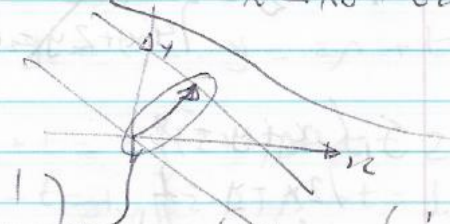
Formam um novo sist. de eixos ortogonais.

+ vistos (matrizes)
mat. simétricas decompõe o espaço
em $\mathbb{R}^3$. esp. ortogonais.
└ Núcleo
└ transposta da matriz

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 - x_3 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$x + y = 1$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} y + t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$X = X_0 + td$$



$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$ solução vem das linhas

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad x = \alpha_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a'_1 & b'_1 \\ a'_2 & b'_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 a'_{11} + b_1 a'_2 & a_1 b'_1 + b_1 b'_2 \\ a_1 a'_1 + b_2 a'_2 & a_2 b'_1 + b_2 b'_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

AM $\rightarrow$ gênese do $\times$ M_{mn}

$$\begin{tikzcd} \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} \arrow[r, "T_1"] \arrow[rr, bend right, "T_2 \circ T_1"'] & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \arrow[r, "T_2"] & \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \end{tikzcd}$$

$$\underbrace{M \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{T_1} \qquad \underbrace{A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}}_{T_2}$$

$$(T_2 \circ T_1) \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

$$AM \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

Adição de matrizes.

$A = (a_{ij})_{m \times n}$ $\quad 1 \leq i \leq m \; (i = 1, \ldots, m)$

$\quad 1 \leq j \leq n \; (j = 1, \ldots, n)$

$B = (b_{ij})_{m \times n}$ $\quad 1 \leq i \leq m$

$\quad 1 \leq j \leq n$

$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{m \times n}$

Produto de Matrizes.

$A = (a_{ij})_{m \times n}$ $\qquad AB = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} \times b_{kj} \right)_{m \times p}$

$B = (b_{ij})_{n \times p}$

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1 \\ a_2 x + b_2 y = c_2 \end{cases} \qquad \begin{matrix} x = 2s \\ y = 2t \end{matrix}$$

ANEXO G – Gênese do produto matricial

original
$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1 \\ a_2 x + b_2 y = c_2 \end{cases}$$

Subst. mud. de variável
$$\begin{cases} a'_1 s + b'_1 t = x \\ a'_2 s + b'_2 t = y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a_1(a'_1 s + b'_1 t) + b_1(a'_2 s + b'_2 t) = c \\ a_2(a'_1 s + b'_1 t) + b_2(a'_2 s + b'_2 t) = c \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a_1 a'_1 + b_1 a'_2)s + (a_1 b'_1 + b_1 b'_2)t = c_1 \\ (a_2 a'_1 + b_2 a'_2)s + (a_2 b'_1 + b_2 b'_2)t = c_2 \end{cases}$$

Em rep. matricial.

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a'_1 + b'_1 \\ a'_2 + b'_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a'_1 & b'_1 \\ a'_2 & b'_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 a'_1 + b_1 a'_2 & a_1 b'_1 + b_1 b'_2 \\ a_2 a'_1 + b_2 a'_2 & a_2 b'_1 + b_2 b'_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

AM → gênese do × M_{mn}

$$\begin{tikzcd} \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} \arrow[r, "T_1"] \arrow[rr, bend right, "T_2 \circ T_1"'] & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \arrow[r, "T_2"] & \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \end{tikzcd}$$

$$\underbrace{M \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{T_1} \qquad \underbrace{A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}}_{T_2}$$

$$(T_2 \circ T_1) \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

$$AM \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

Adição de matrizes.

$A = (a_{ij})_{m \times n}$ $\quad 1 \leq i \leq m \ (i = 1, \ldots, m)$

$\quad 1 \leq j \leq n \ (j = 1, \ldots, n)$

$B = (b_{ij})_{m \times n}$ $\quad 1 \leq i \leq m$

$\quad 1 \leq j \leq n$

$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{m \times n}$

Produto de Matrizes.

$A = (a_{ij})_{m \times n}$ $\qquad AB = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} \times b_{kj} \right)_{m \times p}$

$B = (b_{ij})_{n \times p}$

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1 \\ a_2 x + b_2 y = c_2 \end{cases} \qquad \begin{matrix} x = 2s \\ y = 2t \end{matrix}$$

$$\begin{cases} a_1 (2s) + b_1 (2t) = c_1 \\ a_2 (2s) + b_2 (2t) = c_2 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ M. escalar}$$

$$\begin{cases} (2a_1)s + (2b_1)t = c_1 \\ (2a_2)s + (2b_2)t = c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2a_1 & 2b_1 \\ 2a_2 & 2b_2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$$

Se $\theta = 90^\circ \Rightarrow \cos 90^\circ = 0 \Rightarrow \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$.

Ex:

(1) $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \langle \vec{0}, \vec{u} \rangle = \sum 0 \cdot u_i = 0$

$\vec{0}$ (vetor nulo) é ortogonal a qq vetor.

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

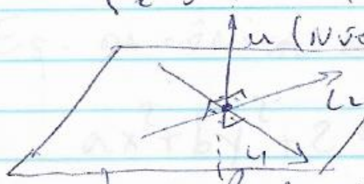
$$\begin{cases} \langle L_1, u \rangle = 0 \\ \langle L_2, u \rangle = 0 \end{cases} \quad L_1 = (1\ -1\ 1) \quad L_2 = (2, 1\ -1) \quad u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

prod. escalar

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) L_2 : L_2 - 2L_1 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x - y = -z \\ 3y = 3z \therefore y = z, \ x = 0, \ z = z. \end{cases}$$

$$S: \begin{pmatrix} 0 \\ z \\ z \end{pmatrix} = z \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{u}}$$ é ortogonal a L_1 e L_2



L_1 e L_2 formam um plano (espaço).

$R(A^t)$

Espaço linha: espaço gerado pelas linhas da matriz A.

$R(A^t)$

Espaço nulo (Kernel ou núcleo da matriz A).

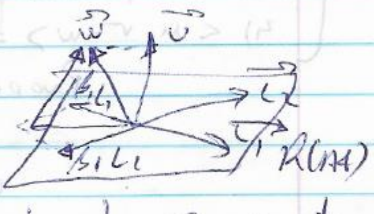
vetores ortogonais ao espaço linha.

$N(A) = \{u \in E \ / \ Au = 0\}$.

Então

$E = R(A^t) \oplus N(A)$

Vem $\oplus$ $R(A^t) \cap N(A) = \{0\}$.



Quebra do espaço em sub-espaços, desarticulação mat.

$w = \beta_1 L_1 + \beta_2 L_2 + \alpha \vec{u}$

ANEXO I – Atividade matemática com Ld e LI

é c.l.!

$\mathbb{R}^3 \quad S = \left[\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\5\end{pmatrix}\right]. \quad v = \begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix} \in S(?)$

$$\alpha_1\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} + \alpha_2\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} + \alpha_3\begin{pmatrix}1\\1\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=3\\ \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=3\\ 2\alpha_1-\alpha_2+5\alpha_3=3\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=3\\ 0\alpha_1+0\alpha_2+0\alpha_3=0\\ 0\alpha_1-3\alpha_2+3\alpha_3=-3\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=3\\ 3\alpha_2-3\alpha_3=3\end{cases}$$ $v \in S$, ou seja, V é c.l. de v_1, v_2, v_3

$$\Rightarrow \begin{cases}\alpha_1+\alpha_2=3-\alpha_3\\ \alpha_2=1+\alpha_3\end{cases}$$ $\alpha_3=0 \Rightarrow \alpha_2=1,\ \alpha_1=2\ [V]_B = \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$

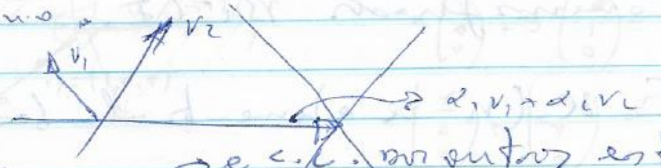
$\alpha_3=-1 \Rightarrow \alpha_2=0,\ \alpha_1=4\ [V]_S = \begin{pmatrix}4\\0\\-1\end{pmatrix}$

(Ambiguidade)

Linearmente dependente.

$\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\5\end{pmatrix}$

Linearmente independente (não dependente)
sistema única solução.
um deles pode ser escrito a junção de outros
no plano.



→ é c.l. por outros está a +.

$\mathbb{R}^3 \quad S = \left[\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1\\1\\5\end{pmatrix}\right] \quad \begin{pmatrix}1&1&2\\1&1&-1\\1&1&5\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&1&2\\0&0&-3\\0&0&3\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1&1&2\\0&0&-3\\0&0&0\end{pmatrix}$

$S = \left[\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\5\end{pmatrix}\right] = \left[\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\-3\end{pmatrix}\right]$

dim = 2.

$$VL = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + [v_1, v_2] \; ; \; w = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{S. Part.}} + \underbrace{x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{S. Hom. Assoc.}}$$

A Sol. de um sist. linear não homogêneo é uma variedade linear.

vídeo

$\{v_1, v_2\}$ gerador de um subespaço, $E \subseteq V$

Def: $\{v_1, v_2\}$ é uma base de E se, e somente se, todo vetor $v \in E$ se escreve de modo único, como C.L. de v_1 e v_2

Implicações da def:

(1) Se $v = 0 \Rightarrow 0 = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = 0 v_1 + 0 v_2$

Só é possível $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ pela unicidade da C.L.

Quando o vetor nulo se escreve de modo único como C.L. de v_1, v_2 então $\{v_1, v_2\}$ é dito L.I.

$$\begin{cases} x + y + z - t = 0 \\ x + 2y - z + 2t = 0 \\ 2x - y - z + t = 0 \end{cases}$$

Rep. Vetorial: $x\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{v_1} + y\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}}_{v_2} + z\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{v_3} + t\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{v_4} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} x + y + z - t = 0 \\ 0 + y - 2z + 3t = 0 \\ 0 - 3y - 3z + 3t = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z - t = 0 \\ y - 2z + 3t = 0 \\ -9z + 12t = 0 \end{cases}$$

Sol. trivial: Se $t = 0 \Rightarrow z = 0, \; y = 0, \; x = 0 \quad S = (0,0,0,0)$

$t = 3 \Rightarrow z = 4 \Rightarrow y = -1, \; x = 0$ → quando este faz no gerador dos vetores.

$$\Rightarrow 0\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - 1\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$