UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E CIENTÍFICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM DOCÊNCIA EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICAS

CLARA ALICE FERREIRA CABRAL

UMA SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES COM ENFOQUE EM REPRESENTAÇÕES DINÂMICAS PARA O DESENVOLVIMENTO DE CONHECIMENTOS DE SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS

BELÉM
2019

CLARA ALICE FERREIRA CABRAL

UMA SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES COM ENFOQUE EM REPRESENTAÇÕES DINÂMICAS PARA O DESENVOLVIMENTO DE CONHECIMENTOS DE SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Docência em Educação em Ciências e Matemáticas, do Instituto de Educação Matemática e Científica, da Universidade Federal do Pará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Educação em Ciências e Matemáticas.
Linha de Pesquisa: Ensino e Aprendizagem de Ciências e Matemáticas para a Educação Cidadã.

Orientador: Prof.ª. Drª. Talita Carvalho Silva de Almeida

BELÉM - PA
2019

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

C117s CABRAL, CLARA ALICE FERREIRA
UMA SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES COM ENFOQUE EM REPRESENTAÇÕES DINÂMICAS PARA O DESENVOLVIMENTO DE CONHECIMENTOS DE SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS / CLARA ALICE FERREIRA CABRAL. — 2019.
160 f. : il.

Orientador(a): Prof. Dr. Talita Carvalho Silva de Almeida
Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Docência em Educação em Ciências e Matemáticas, Instituto de Educação Matemática e Científica, Universidade Federal do Pará, Belém, 2019.

1. Semelhança de Triângulos; Registros de Representação; Geometria . I. Título.

CDD 370.71

CLARA ALICE FERREIRA CABRAL

UMA SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES COM ENFOQUE EM REPRESENTAÇÕES DINÂMICAS PARA O DESENVOLVIMENTO DE CONHECIMENTOS DE SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Docência em Educação em Ciências e Matemáticas, do Instituto de Educação Matemática e Científica, da Universidade Federal do Pará, como requisito para a obtenção do título de Mestre em Educação em Ciências e Matemáticas na área de Concentração: Ensino, Aprendizagem e Formação de Professores de Ciências e Matemática.

DATA DA AVALIAÇÃO: __/__/__

CONCEITO: _________________

BANCA EXAMINADORA

____

Prof.ª Drª. Talita Carvalho Silva de Almeida
Orientador/Presidente
IEMCI/UFPA

____

Prof. Dr. José Messildo Viana Nunes– Membro Titular Interno
IEMCI/UFPA

____

Prof.ªDrª. Maria José Ferreira da Silva – Membro Titular Externo
PUC/SP

BELÉM
2019

Aos meus pais Rosa e João por todo incentivo e suporte para que isso se tornasse possível, e à minha irmã Karina pelo apoio incondicional.

AGRADECIMENTOS

A Deus e à Nossa Senhora de Nazaré por me abençoar com Saúde, Força e Perseverança no árduo caminho da Pós-Graduação.

À minha Orientadora Prof.ª Drª Talita Carvalho Silva de Almeida pela orientação, amizade e parceria nessa etapa tão importante de minha formação.

Aos membros da banca: Prof.ª Drª Maria José Ferreira da Silva e Prof. Dr. José Messildo Viana Nunes pelas valorosas contribuições na pesquisa.

Aos Professores do Programa de Pós-Graduação em Docência em Educação em Ciências e Matemáticas, do IEMCI-UFPA pelos ensinamentos e formação.

Aos colegas Professores da Escola Donatila Lopes: Welbi Nunes e Marcia Mescouto pela disponibilização de espaços e horários para a aplicação da pesquisa.

Aos colegas da turma PPGDOC 2017 em especial às queridas Ana Mara e Fernanda pela parceria, companheirismo e amizade.

RESUMO

O presente trabalho tem como objetivo verificar se uma sequência de atividades com enfoque em representações dinâmicas pode contribuir para o desenvolvimento de conhecimentos de alunos acerca de Semelhança de Triângulos. Para o desenvolvimento da empiria procedemos estudos preliminares constituídos principalmente na busca de pesquisas correlatas, além de análise do ensino de semelhança baseada em livros didáticos, e na observância do que recomendam os documentos oficiais. O referencial teórico fundamentou-se na perspectiva de Raymond Duval (2008) no que concerne ao aprendizado em geometria, e na teoria dos Registros de Representação Semiótica, para identificar e analisar quais os registros mobilizados podem contribuir para a aprendizagem de semelhança. Na condução da pesquisa, a partir dos objetivos traçados, optamos pela abordagem qualitativa, do tipo pesquisa ação por entender que se apresenta de acordo com os propósitos e concepções metodológicas adequadas ao tipo de estudo e problemática. A sequência de atividades, foi desenvolvida utilizando o software GeoGebra por entendermos que esse suporte tecnológico possibilita condições de aprendizagem de conteúdos geométricos contemplando representações dinâmicas. Como resultados, verificamos que elas trouxeram possibilidades de criação de experiências que fez o conhecimento geométrico acontecer na evolução de um nível básico da intuição e das conjecturas, propiciando condições de desenvolver estratégias do trabalho, num processo ativo e interativo de discussão e argumentação. Os estudantes conseguiram pensar geometricamente, pelo papel heurístico da manipulação do *software* e descoberta da propriedades de Semelhança de Triângulos.

Palavras-Chave: Representações dinâmicas. Semelhança de Triângulos. Construções geométricas

ABSTRACT

This paper aims to verify if a sequence of activities focusing on dynamic representations can contribute to the development of students' knowledge about Triangle Similarity. For the development of empiric we proceeded with preliminary studies consisting mainly in the search for correlated research, in addition to analysis of the teaching of similarity based on textbooks, and observance of what the official documents recommend. The theoretical framework was based on the perspective of Raymond Duval (2008) with regard to learning in geometry, and the theory of Semiotic Representation Records, to identify and analyze which mobilized records can contribute to learning similarity. In conducting the research, based on the objectives outlined, we opted for the qualitative approach, the action research type because it is presented according to the purposes and methodological conceptions appropriate to the type of study and problem. The sequence of activities was developed using GeoGebra software because we understand that this technological support enables learning conditions of geometric contents contemplating dynamic representations. As results, we found that they brought possibilities of creating experiences that made geometric knowledge happen in the evolution of a basic level of intuition and conjecture, providing conditions to develop work strategies, in an active and interactive process of discussion and argumentation. The students were able to think geometrically because of the heuristic role of software manipulation and discovery of Triangle Resemblance properties.

Keywords: Dynamic representations. Similarity of Triangles. Geometric constructions

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Esboço de sinais Hieróglifos -------------------- 16
Figura 2 - Esboço do Teorema de Tales -------------------- 17
Figura 3 - Ampliação de Figuras semelhantes -------------------- 26
Figura 4 - Abordagem de Semelhança de Triângulos -------------------- 28
Figura 5 - Registro de Representações de um Objeto Matemático -------------------- 53
Figura 6 - Representações de um Objeto no mesmo Registro -------------------- 54
Figura 7 - Diferenças entre Transformações semióticas -------------------- 57
Figura 8 - Formas de Visualização de uma mesma -------------------- 62
Figura 9 - Construção dupla A: atividade BIAI -------------------- 75
Figura 10 - Registro de momentos de aplicação da pesquisa -------------------- 80
Figura 11- Construção duplas A e C - atividade BIAII -------------------- 81
Figura 12 - Resposta da dupla A para a atividade BIAII -------------------- 82
Figura 13 - Respostas da dupla A para os itens II da atividade BIAII -------------------- 82
Figura 14 - Respostas das duplas B; C e D para o item I da atividade BIAII -------------------- 82
Figura 15 - Respostas das duplas C e D para o item 4 da atividade BIAII -------------------- 83
Figura 16 - Tabela da dupla D para a atividade BIAIII -------------------- 87
Figura 17 - Construção e Cálculo da razão – Dupla A para a atividade BIAIII -------------------- 89
Figura 18 - Respostas das duplas B e C para o item III da atividade BIAIIII -------------------- 94
Figura 19 - Ilustração da Atividade 4 - BIIAIV -------------------- 94
Figura 20 - Respostas das duplas A e D para o item I da atividade BIAIV -------------------- 97
Figura 21 - Respostas da dupla C para o item A -------------------- 98
Figura 22 - Construção da dupla A para a atividade BIAIV -------------------- 99
Figura 23 - Resposta da dupla A para o item BIAIV -------------------- 99
Figura 24 - Construção da dupla D para o item II da atividade BIAIV -------------------- 100
Figura 25 - Resposta da dupla D ao item II da atividade BIAIV -------------------- 100
Figura 26 - Respostas das duplas para o item III da atividade BIAIV -------------------- 101
Figura 27 - Respostas da dupla C para o item V da atividade BIAIV -------------------- 102
Figura 28 - Resposta das duplas A item V da atividade BIAIV -------------------- 103
Figura 29 - Resposta da dupla B item V da atividade BIAIV -------------------- 103
Figura 30 – Resposta da dupla D item V da atividade BIAIV -------------------- 104
Figura 31 - Construção dupla C para atividade BIIAV -------------------- 111
Figura 32 - Construção das duplas A e B para a atividade BIIAV -------------------- 112
Figura 33 - Respostas das duplas A; B e D para item I da atividade BIIAV -------------------- 113
Figura 34 - Resposta da dupla B para a atividade BIIAV -------------------- 114
Figura 35 - Resposta da dupla D para a atividade BIIAV -------------------- 114
Figura 36 - Resposta da dupla B para o item III da atividade BIIAV -------------------- 115
Figura 37 - Processo de conversão observado na atividade BIIAV -------------------- 116
Figura 38 - Construções das duplas A e B: atividade BIIAVI -------------------- 120
Figura 39 - Tabela da atividade BIIAVI - dupla A -------------------- 122
Figura 40 - Respostas das duplas A e B para item da I atividade BIIAVI -------------------- 122
Figura 41 - Tabela da atividade BIIAVI – dupla C -------------------- 123
Figura 42 - Construção da dupla D para a atividade BIIAVI -------------------- 123
Figura 43 - Tabela da atividade BIIAVI – dupla D -------------------- 124
Figura 44 - Respostas das duplas A; B e C para o item II atividade BIIAVI -------------------- 124
Figura 45- Construção das duplas A e B da atividade BIIAVII -------------------- 125

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 - Comparativo da abordagem de Semelhança nos livros analisados -------------------- 31
Quadro 2 - Ocorrências de pesquisas de Semelhança de Triângulos entre 2014 a 2019 --------- 37
Quadro 3 - Cronograma de Fases da Pesquisa -- 50
Quadro 4 - Recursos utilizados na coleta de dados -- 51
Quadro 5 - Representações para a Definição de Semelhança e Triângulos ------------------------ 55
Quadro 6 - Apreensões de uma Figura -- 60
Quadro 7 - Detalhamento das fases de aplicação da pesquisa --------------------------------------- 69
Quadro 8 - Descrição dos Blocos de Atividades --- 70
Quadro 9 - Atividades Cognitivas da Tarefa BIAI -- 78

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 11

2 ESTUDOS PRELIMINARES
2.1 Semelhança de triângulos: um pouco da história 14
2.2 Reflexões sobre o ensino de semelhança de triângulos 19
2.2.1 Documentos oficiais 22
2.2.2 Livros didáticos... 25
2.3 Ensino de geometria em ambientes de geometria dinâmica 32
2.4 Revisão Bibliográfica 36

3 PROBLEMÁTICA E FUNDAMENTOS TEÓRICOS 45
3.1 Delimitação do problema 45
3.2 Objetivo do Estudo 45
3.3 A opção metodológica 46
3.4 Procedimentos Metodológicos 48
3.4.1 Procedimentos utilizados na coleta de dados 49
3.4.2 Instrumentos utilizados na coleta de dados 50
3.5 Construindo a fundamentação teórica 51
3.5.1 Registros de representação semiótica 52
3.5.2 Aprendizado em geometria 59

4 APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DAS TAREFAS PROPOSTAS......................... 67
4.1 Parâmetros utilizados na construção do bloco de atividades 67
4.2 Conhecendo os sujeitos 67
4.3 O experimento 68
4.3.1 Bloco I: Conhecendo as propriedades de semelhança de triângulos 71
4.3.2 Bloco II: Teorema Fundamental da Semelhança 109
4.3.3 Abordagem da Semelhança de Triângulos em situações práticas 140

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS 139
REFERÊNCIAS.. 143
ANEXOS 146

CAPITULO I

Considerando que os registros de momentos significativos da biografia de um autor são importantes, pois contribuem na construção de sua identidade profissional, corroboro com o que diz Tardif (2012) acerca da importância de externar experiências da prática, visto que desta forma tornamo-nos sujeitos de nosso próprio aprendizado. Para o autor, “a história de vida dos professores possui dimensões afetivas, normativas e existenciais e está lotada de crenças e certezas pessoais de como ele organizou e filtrou sua prática ao longo da carreira” (IBID, p.72). Portanto, trazer à tona memórias de formação contribuirá de certa forma, para elucidar as escolhas feitas neste estudo.

Minhas primeiras lembranças como professora de uma ainda breve carreira, são recortes de experiencias que se constituíram em desafios quase que diários, no sentido de trabalhar a minha insegurança, natural de iniciante, minhas frustrações em não poder executar todas as propostas de ensino da forma que gostaria e, principalmente, na dificuldade em transpor o saber matemático estudado na formação de forma pedagogicamente acessível aos alunos.

Concordo novamente com o autor quando este descreve a prática docente na escola como uma atividade complexa correspondente a um espaço de produção de saberes diversificados, visto que vivenciei esse fato quando precisei trabalhar temas que, a meu ver, eram essencialmente abstratos, para que fossem mais acessíveis aos alunos e a realidade por eles vividas, integrando os saberes que eles já possuíam aos conteúdos matemáticos.

O professor precisa buscar meios que tornem os conteúdos matemáticos estudados na academia de forma que seja pedagogicamente significativo para seus alunos, pois muitos destes conhecimentos não podem ser ensinados da mesma forma que foram aprendidos. A este tipo de conhecimento docente Shulman (1986 apud ALMEIDA, 2015, p. 6) definiu como o conhecimento pedagógico do conteúdo. Segundo o autor, o conhecimento não é algo produzido e regulado a partir do exterior da escola e deve ser trasladado para ela. “Esse conhecimento inclui saber quais abordagens de ensino se adéquam ao conteúdo, bem como saber como elementos do conteúdo podem ser organizados para um melhor ensino”. (ALMEIDA, 2015, p. 61).

Com o intuito de seguir as recomendações dos currículos escolares, ou seja, ensinar de forma que supostamente fosse “eficiente” tentando incorporar saberes matemáticos à prática dos alunos, apoiei-me em autores como Nacarato (2014) e Lorenzato (2006) para buscar estratégias que pudessem amparar metodologicamente minhas aulas, principalmente em geometria, quando percebia que a deficiência era maior.

Assim que iniciei a carreira como professora da educação básica no ensino fundamental, observei que o ensino de geometria era irregular e bastante limitado, e que os estudantes apresentavam resistências a conteúdos que envolvessem algum tipo de raciocínio geométrico. Se um tópico não é ensinado, ou é visto apenas de forma superficial, dificilmente poderia ocasionar algum tipo de apreço por parte dos alunos, haja vista que é incomum gostar daquilo que desconhecemos. Essa constatação incitou-me a refletir de que forma poderia promover o ensino dos conteúdos geométricos que estimulasse o interesse por esta área da matemática.

Na minha experiência com a prática pedagógica surgiram algumas indagações, como por exemplo: por qual motivo o ensino de geometria é tão relegado em relação ao ensino de álgebra, por exemplo. Por que é recorrente o hábito de postergar os conteúdos geométricos para o final do ano letivo? Alguns colegas professores indagavam-me porque incluía no planejamento temas como o ensino de semelhança de triângulos, assumindo que a maioria dos alunos não entende esse tópico da geometria. Percebi que a percepção dos alunos acerca do assunto, mesmo no ensino médio, ou era nula, ou era bastante limitada.

Ensinar a definição de semelhança que consta na maioria dos livros didáticos que abordam esse assunto, sem encorajar o desenvolvimento da capacidade de explorar, conjecturar e raciocinar logicamente é o mesmo que esperar que os alunos tomem a palavra do professor como verdade absoluta. Confesso que atuei desta forma durante algum tempo, e isso sempre me inquietou, pois estava perpetuando atitudes de ex-professores que considero hoje limitadoras. Nesse sentido, busquei o retorno à academia na oportunidade do mestrado profissional, principalmente, pela chance de poder contribuir na minha comunidade, com a minha escola.

Quando surgiu a possibilidade de ingressar no mestrado profissional em Ciências e Matemática da Universidade Federal do Pará, articulei uma proposta de pesquisa que uniu o tema que, a meu ver, tem grande importância no ensino de matemática, o estudo de triângulos, em particular o ensino de semelhanças à necessidade de buscar contribuições a uma área que, mesmo já contando com muitas pesquisas ainda necessita de muitos estudos.

A pesquisa tem o viés principal de proporcionar situações geométricas para que os alunos as analisem e promovam o debate e alcancem interpretações que os aproximem do objeto matemático em questão, para que o aluno consiga visualizar e compreender de fato as propriedades de semelhança de triângulos.

A valorização quase que excessiva da representação algébrica no estudo de geometria, associada à execução de procedimentos desprovidos de significado impulsionou o desenvolvimento de um estudo que alcançasse esses objetivos uma vez que permitirá ao aluno explorar diferentes registros de representação de modo a conhecerem seus pontos fortes e fracos e decidirem qual(quais) proporcionam a aprendizagem dos conteúdos. E diante desse quadro apresentamos como questão norteadora do estudo a seguinte proposição: **Uma sequência de atividades com enfoque em representações dinâmicas pode contribuir para o desenvolvimento de conhecimentos de alunos do 9º ano acerca de Semelhança de Triângulos?**

O presente trabalho está estruturado em cinco capítulos. No primeiro capítulo, apresentamos as motivações pessoais dProdução da autorapara desenvolver esse estudo e sua organização. No segundo capítulo trazemos os estudos preliminares, que foram úteis no delineamento do estudo. Analisamos as pesquisas que se aproximam do nosso tema, identificando nossos critérios de busca e de escolha. Também neste capítulo, apresentamos reflexões sobre o ensino e aprendizagem de Semelhança de Triângulos, discorrendo sobre o que recomendam os documentos oficiais acerca do tema e ainda uma breve análise de livros didáticos que abordam esse conteúdo e por fim, discutiremos sobre a aprendizagem de geometria em softwares de geometria dinâmica como o GeoGebra.

No terceiro capítulo, apresentamos nossa problemática na qual destacamos o problema da pesquisa e os objetivos estabelecidos, e a opção metodológica. O capítulo traz também a construção de nosso referencial teórico, desde como concebemos em nosso estudo a aprendizagem em geometria e os processos que ela engloba, até os Registros de Representação Semiótica na perspectiva de Raymond Duval.

No quarto capítulo detalharemos nossos procedimentos metodológicos e as justificativas sobre o cenário de aplicação dos estudos a escolha dos sujeitos, apresentaremos as tarefas da sequência, os principais resultados da pesquisa e os processos de análise do conteúdo empírico. No quinto, e último capítulo, trazemos as considerações finais e sugestões de desdobramentos da pesquisa.

CAPÍTULO II

ESTUDOS PRELIMINARES SOBRE SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS

Neste capítulo apresentaremos os estudos preliminares desenvolvidos que foram de extrema importância para o desenvolvimento da empiria. Trataremos da Semelhança de triângulos dos pontos de vistas: histórico, ao abordamos a evolução das primeiras ideias intuitivas de semelhança desde os egípcios até os “elementos” de Euclides, e do ensino, quando analisamos como ele vem sendo conduzido e suas implicações na aprendizagem.

Com propósito de aprofundar a reflexão do estudo, discutiremos como o tema vem sendo conduzido nas séries finais do ensino fundamental, além de buscarmos nos documentos oficiais as orientações relacionadas ao seu ensino. Uma breve análise de livros didáticos do nono ano foi realizada com o propósito de observar como está sendo abordado o objeto matemático em questão, bem como sua relação com os demais objetos matemáticos. Por fim, apontamos um possível ambiente informático que possibilite a aprendizagem de semelhança de Triângulos com representação dinâmica, mostrando as implicações, vantagens e desvantagens relacionadas à sua utilização.

2.1 SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS: UM POUCO DE HISTÓRIA

Nesta seção apresentaremos alguns aspectos da história da matemática, direcionados, especificamente, no contexto da geometria. Abordaremos de forma breve, como a definição de semelhança evoluiu, utilizamos como fontes de dados os livros de História da matemática: Boyer (1996); Cajori (2007); Eves (2011) e Euclides (2009).

Boyer (1996) afirma que os primórdios do assunto são mais antigos que a arte de escrever. Apenas nos últimos seis milênios é que o homem foi capaz de registrar seus pensamentos em forma escrita, entretanto a geometria pode muito bem ser mais antiga que isso. Segundo o autor, há duas teorias opostas quanto à sua origem. Uma delas sustentada por Hérodoto, de que a Geometria se originou no Egito, e surgiu da necessidade prática de fazer novas medidas de terras cada vez que a inundação anual do rio Nilo acontecia. A outra, defendida por Aristóteles, considerava que por ter existido no Egito uma classe sacerdotal com lazeres, e muita ociosidade, conduziu ao estudo da geometria.

Duas das mais famosas relíquias documentadas da história da matemática, os Papiros de Moscoue e Ahmes[1], colocam-nos em contato com o pensamento egípcio de três ou quatro mil anos atrás. Nestas obras, de acordo com Cajori (2007), estão descritos 26 problemas geométricos, sendo a maioria sobre o cálculo de áreas de terras e volumes de grãos, porém sem provar (neles ou em qualquer outro documento egípcio já encontrado) os egípcios tinham conhecimentos de algum caso particular, do teorema de Pitágoras e um exemplo correto que trata-se sobre o cálculo do volume de um tronco de pirâmide de bastão descritos o que podem ter sido as primeiras proposições geométricas dos egípcios no cálculo de áreas.

O Papiro de Ahmes explica também problemas que podem apontar para a conclusão de que os egípcios, como os geômetras chineses e os indianos, construíam um triangulo retângulo sobre uma dada linha, esticando uma corda em volta de três estacas dividas em três partes na proporção 3: 4: 5, e assim formando um triangulo retângulo. Cajori (2007)

Se as afirmações do documento estiverem corretas, podemos considerar então que os egípcios de 200 a.C. estavam familiarizados com as já conhecidas propriedades do triangulo retângulo, pelo menos, para o caso especial dos lados destes na razão 3: 4: 5.

Uma deficiência séria na geometria dos egípcios para Boyer (1996) era não haver uma distinção clara entre relações que são exatas e as que são apenas aproximações. No entanto, para o autor, embora não se conheça teorema ou demonstração formal na matemática egípcia, algumas comparações geométricas feitas no vale do Nilo, como as referentes a perímetro, área de círculos e quadrados estão entre as primeiras afirmações precisas da história da matemática, no que diz respeito a geometria.

A respeito da semelhança os egípcios, por volta de 3200 a. C. usavam a redução e ampliação de um desenho por meio do método científico conhecido como método dos quadrados. A Figura 1 traz um exemplo desse processo encontrado em Maciel (2004). As grades no desenho da Figura A servem para obter as dimensões exatas, o que facilitava sua transposição sobre a parede do desenho definitivo da Figura B. Essas regras geométricas, foram encontradas em pinturas egípcias inacabadas, dando-nos indícios de que os egípcios possuíam alguma noção de ampliar ou reduzir uma figura pelo método dos quadrados.

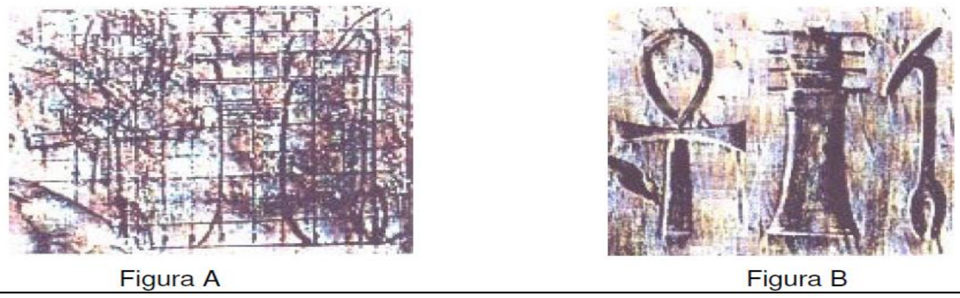
Obenga (1984, apud MACIEL 2004, p. 4) encontrou fontes que lhe permitiram descrever como ocorria esse processo:

---

[1]Papiro de Rhind ou papiro de Ahmes é um documento egípcio de cerca de 1 650 a.C., onde um escriba de nome Ahmes detalha a solução de 85 problemas de aritmética, frações, cálculo de áreas, volumes, progressões, repartições proporcionais, regra de três simples, equações lineares, trigonometria básica e geometria. Fonte: www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm36/papiro_de_rhind.htm

> (...) depois de traçarem a figura considerada em um quadriculado, reproduziam-na em uma certa escala. A nova figura desejada era uma transposição da figura esboçada anteriormente. Em seguida, eram determinados pontos de coincidências entre os quadrados e o desenho, de tal modo que o desenhista não cometeria erros de proporção. (OBENGA apud MACIEL, 2004, p. 4 e 5)

Figura 1 - Esboço de Sinais



Fonte: Maciel (2004)

Maciel (2004) afirma que esse método não é muito diferente do que alguns artistas ainda utilizam hoje para obter a ampliação ou redução de uma figura. Por volta do sétimo século a.C. um ativo intercâmbio comercial se expandia entre a Grécia e o Egito. Naturalmente havia uma troca de ideias, bem como de mercadorias. Os gregos procuraram os sacerdotes egípcios para se instruírem. A Matemática mais intuitiva e experimental, praticada pelos egípcios e babilônios, assumiu um caráter dedutivo com os gregos. Tales, Pitágoras e Platão, foram uns dos que visitaram os Egito e transportaram por mar, muitos dos experimentos egípcios dando assim aos gregos uma base em que pudessem trabalhar. Em Cajori (2007) encontramos que os Egípcios levaram a geometria não mais além do que o absolutamente necessário para suas necessidades. Os Gregos, pelo contrário, tinham uma necessidade de descobrir as razões das coisas, amavam a ciência como ciência.

Tales de Mileto

As primeiras deduções sistemáticas em geometria são, tradicionalmente, creditadas a Tales de Mileto, fundador da escola Jônica que nasceu por volta de 600 A. C. Boyer (1996) afirma que o que se sabe a respeito de sua vida e obra é realmente muito pouco, pois boa parte dessas contribuições creditadas em seu nome são baseadas em tradições persistentes e não em documentos históricos.

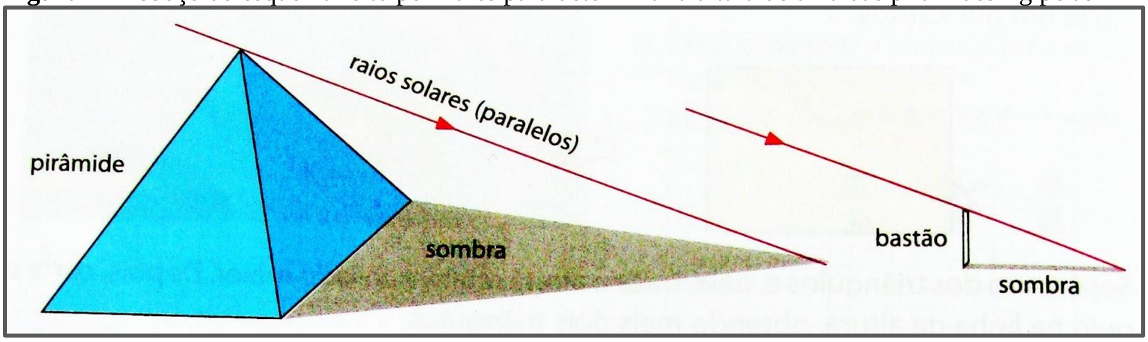
O seu famoso teorema, conhecido por Teorema de Tales, pode ter sido aprendido por ele durante suas viagens à Babilônia. A tradição vai mais além e lhe atribui uma espécie de demonstração do teorema. De fato, não há documento antigo que comprove a autenticidade dessas afirmações. Ainda de acordo com Boyer (1996, p. 32), o mais perto que se pode chegar de evidencia contundente é uma menção de um pouco mais 1000 anos de seu nascimento, na qual um discípulo de Aristóteles chamado Eudemo de Rodes diz que Tales “primeiro foi ao Egito, e de lá introduziu algum dos estudos na Grécia. Descobriu muitas suposições ele próprio, e instruiu muitos de seus sucessores nos princípios que regem muitas outras.” (Boyer, 1996, P. 32.)

Em Eves (2011) encontramos duas versões de um dos famosos feitos creditados a Tales, o cálculo da altura de uma pirâmide egípcia por meio da sombra.

> O relato mais antigo, dado por Hierônimos, um discípulo de Aristóteles, diz que Tales anotou o comprimento da sombra no momento em que esta era igual a altura da pirâmide que a projetava. A versão posterior, dada por Plutarco, diz que além disso, ele fincou verticalmente uma vara e fez uso da semelhança de triângulos. (EVES, 2011, p. 115)

A Figura 2 ilustra um esboço da percepção de tales descrita por Plutarco, a mais aceita entre a comunidade matemática, e o que pode ter sido a primeira aplicação da Semelhança de Triângulos cerca de 600. A. C. no Egito.

Figura 2 - Esboço do esquema feito por Tales para determinar a altura de uma das pirâmides Egípcias



Fonte: < http://semelhancadetriangulos.blogspot.com/2012/02/historia-da-semelhanca-de-triangulos.html>

A Tales também foi atribuída a estória de que mediu a distância de um navio a praia, usando provavelmente, proporcionalidade de lados de triângulos semelhantes, contudo, de acordo com Boyer (1996) essa versão é inconclusiva do ponto de vista do pioneirismo, pois os princípios que regem tal cálculo já eram conhecidos há tempos no Egito e na Mesopotâmia.

O fato é que Tales foi o primeiro homem a quem foram atribuídas descobertas matemáticas específicas. É quase universalmente aceito hoje que os Gregos acrescentaram à geometria dos egípcios elementos científicos, mas permaneceu a questão se esse passo importante foi dado por Tales ou por outros mais tarde.

Euclides e “os Elementos”

De acordo com Eves (2011), Euclides nasceu por volta de 365 a.C. pouco se sabe de sua vida além de que foi ele, segundo consta, o criador da famosa e duradoura escola de matemática de Alexandria da qual, sem dúvida, foi professor. Desconhecem-se também a data e o local de seu nascimento, mas é provável que sua formação matemática tenha se dado na escola platônica de Atenas.

Euclides foi autor de muitos trabalhos (pelo menos 10), sua obra mais conhecida e responsável por sua fama é o Livro "Elementos", com 13 volumes, onde reune num sistema coerente e compreensível, tudo o que se sabia sobre matemática em seu tempo. Todos os fragmentos surgidos da necessidade prática do uso da aritmética, geometria plana, teoria das proporções e geometria sólida.

A ocorrência do assunto semelhança surge já no primeiro livro, com três casos de congruência. Todavia, é no livro VI que encontramos os teoremas fundamentais da semelhança de triângulos. Este já inicia pela definição: “Figuras retilíneas semelhantes são quantas têm tanto os ângulos iguais em proporção.” (EUCLIDES, 2009, p. 231).

Encontramos também no livro VI a definição posta por Euclides para o teorema das retas paralelas cortadas por uma transversal.

> Caso alguma reta seja traçada paralela a um dos lados de um triângulo, corta os lados do triângulo em proporção; e, caso os lados do triangulo sejam cortados em proporção, a reta, sendo ligada dos pontos de seção, será paralela ao lado restante do triângulo.” (EUCLIDES, 2009, P. 231).

No livro VI é possível constatar ainda os teoremas dos casos AAA; LLL e LAL de Semelhança de triângulos, há ainda a demonstração dada por Euclides no Teorema 20, para Polígonos em geral, na qual realiza a divisão dos polígonos em triângulos semelhantes, dizendo que: “os polígonos semelhantes são divididos em triângulos tanto semelhantes quanto iguais em quantidade e homólogos aos todos, e o polígono tem para o polígono uma razão dupla da que o lado homólogo, para o lado homólogo” (EUCLIDES, 2009 p. 251)

Em Eves (2011) encontramos que Euclides estava a par dos trabalhos em geometria de Teúdio de Magnésia, assim como de Teeteto e Eudoxo. Assim, e provável que os *Elementos* de Euclides sejam, na sua maior parte, uma compilação altamente bem-sucedida e um arranjo sistemático de trabalhos anteriores. O “grande mérito dele reside na excelente seleção de proposições e seu arranjo em sequencias lógicas, possivelmente a partir de poucas suposições iniciais”. Eves (2011, p. 169)

Muitas das proposições contidas nos elementos já eram conhecidas dos pitagóricos antigos, mas as demonstrações pré-eudoxianas de muitos deles eram falhas, posto que eram baseadas em teorias incompletas. O fato é que quase toda Geometria que se estuda hoje nas escolas provém da Obra de Euclides, “[...] e quando percebemos deficiências ou impropriedades recorremos às origens, consultando Euclides para ver como as ideias nasceram” (LIMA, 1991, p. 32).

Na seção seguinte trazemos uma abordagem do tema, focando no ponto de vista do ensino, a fim de que possamos compreender como vem sendo conduzido, e conhecer as recomendações dos documentos oficiais referentes a ele.

2.2 REFLEXÕES SOBRE O ENSINO DE SEMELHANÇA DE TRIÃNGULOS

Ao longo de décadas, a geometria foi ensinada num contexto em que foi valorizado o pensamento dedutivo, cujo objetivo era tratar de definições, axiomas e teoremas e a métrica pautada no desenvolvimento de fórmulas e algoritmos. Esta visão valorizava a prova escrita e o produto. Era dada maior ênfase neste aspecto, do que no processo de construção de conceitos geométricos, negligenciando as principais funções do raciocínio em geometria. Desenvolver o ensino de geometria de forma que se busque aprimorar o pensamento espacial e o raciocínio dedutivo, são fundamentais para que seu estudo não se limite apenas à automação; memorização e técnicas operatórias baseadas em processos de abstração.

Os conteúdos mais vistos desta área geralmente são aqueles que privilegiam a aplicação de fórmulas, não valorizando o raciocínio geométrico e o desenvolvimento de outras competências cognitivas. Aprender geometria configurada nestes moldes consiste em aplicar corretamente fórmulas e resolver exercícios. Esta prática talvez decorra da ideia pressuposta de que assuntos considerados mais “complexos”, como o estudo de ângulos, tenham maior resistência e acabe por significar queda no rendimento da turma.

Segundo Almouloud (2007, p. 56), “um dos problemas enfrentados pelo sistema de ensino brasileiro refere-se ao baixo desempenho dos alunos do Ensino Básico, em Matemática, e mais especificamente, em problemas envolvendo a geometria”. Talvez, um motivo para esse baixo desempenho a que se refere o autor, seja o fato de que comumente o professor adéqua o programa, dando ênfase aos conteúdos que ele considera mais fáceis de serem assimilados pelos alunos, ou ainda aqueles que se sente mais seguro em lecionar.

Por conta disso o ensino de Semelhança de triângulos tem sido prejudicado em sua forma de abordagem, como apontam as pesquisas desenvolvidas por Haruna (2000); Maciel

(2004) e Gimenez (2014) as quais discutimos de forma mais abrangente na seção que trata de estudos correlatos. Nestas pesquisas, as autoras apontam que o conteúdo é visto, em muitos casos, de forma negligenciada e quase sempre enfatizando cálculos algébricos em detrimento de propriedades geométricas.

A semelhança de triângulos é extremamente importante para o desenvolvimento da compreensão geométrica, principalmente, por este ser um assunto relevante para a compreensão de outros assuntos da matemática, como relações métricas no triângulo, trigonometria entre outros. Além disso, são recorrentes em estudos nas ciências naturais e sociais, como na física, por exemplo, onde conceito de semelhança está presente em diferentes situações que estudam os conceitos da ótica geométrica.

Usiskin (1994) chama a atenção para o fato de que, comumente, os professores de matemática priorizam apenas o cálculo algébrico, diminuindo a importância da compreensão do raciocínio lógico e sua relação com os teoremas, axiomas e demonstrações. Para o autor, o estudo dos conteúdos geométricos conduzido desta forma torna-se deficitário, tornando a compreensão muito mais difícil.

Portanto é importante que o ensino de semelhança de triângulos seja conduzido de forma que os alunos possam ter a percepção de sua imensa aplicabilidade nas diversas áreas nas quais ele pode ser empregado, e que eles tenham noção dos processos de ampliação e redução de objetos, plantas, templos, animais, figuras etc. Iniciar o assunto já pela definição, sem uma introdução, em seguida apresentar os casos de semelhança talvez seja perigoso, pois pode criar certa “aversão” ao conteúdo. “Semelhança de Triangulo! Para que preciso estudar isso”? Quando se ouve perguntas como essa, que todo professor de matemática provavelmente já ouviu pelo menos uma vez na docência, pode ser um alerta, principalmente no que diz respeito ao ensino de geometria.

Ainda de acordo com Usiskin (1994) alguns professores consideram que muitos conteúdos de geometria são isolados e poucos valorizam as experiências dos alunos e as relacionam com os conteúdos que ensinam. De acordo com o autor:

> [...] alguns professores veem pouca relação entre a experiência com geometria e o desenvolvimento da facilidade de compreender o raciocínio lógico. Sugerimos que se amplie o papel dela no currículo, pois seu estudo é importante demais no mundo real e na matemática para ser apenas um adorno na escola elementar ou um território de apenas uma parte dos alunos. (USISKIN, 1994, p. 37.).

Tão importante quanto relacionar Semelhança de Triângulos à sua aplicação em diferentes situações do cotidiano, é trabalhar os casos de semelhança de maneira que os alunos possam de fato constatar essa propriedade do estudo de Triângulos, encorajando o desenvolvimento da capacidade de explorar, conjecturar e raciocinar logicamente, seja por meio de materiais manipuláveis, seja em ambientes de geometria dinâmica ou ainda com o uso da régua e compasso. A esse respeito, Ponte, Brocardo e Oliveira (2016) salientam a importância de estudar os conceitos e objetos geométricos do ponto de vista experimental e indutivo, de explorar a aplicação de geometria em situações da vida real, valorizando a utilização de modelos concretos na construção conceitual em geometria.

Outra questão relevante que se faz necessária a discussão, diz respeito a importância de o ensino de Semelhança ser conduzido sempre relacionado com outros objetos de ensino necessários ao seu estudo, como a homotetia[2], propriedades das figuras geométricas e congruência de ângulos, por exemplo, ainda que nem sempre isso ocorra. Maciel (2004, p. 70) constatou, em sua dissertação de mestrado, que, homotetia, ampliação (redução) e semelhança, “quando trabalhados, são, em alguns casos, de maneira estanque, sem que se realizem atividades que promovam a percepção por parte do aluno das relações entre esses conceitos”

Talvez essa “ruptura” que Produção da autorase refere, esteja relacionada à outra questão, também muito discutida no ensino de geometria: em que momento devem ser trabalhados os conteúdos geométricos? Alternando com a álgebra? No final do ano letivo? A verdade é que muitos professores seguem a ordem do livro didático que, geralmente costuma alternar conteúdos algébricos e geométricos, ou ainda os segregam para o final do programa anual e, geralmente, quando não há a possibilidade de cumpri-lo na totalidade, esses tópicos são preteridos em relação aos conteúdos algébricos.

Apenas os livros didáticos, ainda que ricos em aspectos visuais, podem não ser suficientes para proporcionar ao aluno uma noção mais científica dos conceitos de semelhança. Provavelmente depois de algum tempo a teoria que há por trás do conteúdo se perca, em meio a tantos outras que eles precisam aprender. Muitas vezes os casos de semelhança são apresentados de forma resumida para que logo se avance e estagne na álgebra. Quando muito, o aluno lembrará que se dois triângulos são semelhantes, é possível encontrar um ou mais lados desconhecidos, utilizando ~~a~~ proporção. Mas a teoria por trás desse raciocínio, pouco se tem dado ênfase.

---

[2] Homotetia significa ampliação, positiva ou negativa, de qualquer ente geométrico, podendo ser figuras planas como triângulos, quadriláteros, círculos, ou espaciais como cubos, pirâmides, esferas. Para definirmos homotetia, necessitaremos de um centro de homotetia O e da razão de homotetia k, que pode ser qualquer número real. Na verdade, esses dois elementos é que serão responsáveis pela facilidade na resolução em relação a outros métodos, como a semelhança, por exemplo. Fonte: http://conesul2006.tripod.com/Material/HOMOTETIA.pdf, acessado em 20/07/2019

Pereira e Pereira (2016) realizaram um estudo que corrobora o que dissemos anteriormente. Eles ouviram 100 alunos do 1º ano do ensino médio, com o objetivo de realizar um diagnóstico do processo de ensino e aprendizagem de semelhança de triângulos. A análise dos dados indicou aos pesquisadores que os estudantes não tiveram problemas em solucionar as questões mais simples que exigiam apenas a aplicação de proporção. No entanto, apresentaram grandes dificuldades quando o conteúdo foi aplicado em questões contextualizadas envolvendo os diferentes casos de semelhança de triângulos.

Propor atividades investigativas, para responder uma situação-problema, pode ser um caminho para superar a simples forma de memorizar definições, regras e procedimentos com o objetivo de ampliar as possibilidades de aprendizagem. Ponte, Brocardo e Oliveira (2016) acreditam que:

> [...] ao se propor uma tarefa de investigação espera-se que os alunos possam, de uma maneira mais ou menos consistente, utilizar os vários processos que caracterizam a atividade investigativa em matemática. [...]a exploração e formulação de questões, a formulação de conjecturas, o teste e ainda, a validação do trabalho. (PONTE, BROCARDO E OLIVEIRA, 2016, p.29)

É importante deixar claro que o professor deve propor a seus alunos, além da realização de investigações, outros tipos de tarefas como exercícios, problemas e projetos. Dessa forma articula as mais diferentes maneiras de execução das tarefas, de modo a formular um currículo instigador e equilibrado, que permita o desenvolvimento matemático dos alunos com diferentes níveis de desempenho.

Atividades investigativas em matemática vão ao encontro do que recomendam os Parâmetros Curriculares Nacionais–PCN (BRASIL, 1998), quando destacam a importância de trabalhar conceitos geométricos de forma experimental partindo das construções. Discorreremos acerca do que preconizam os Parâmetros Curriculares Nacionais e o que estabelece a Base Nacional Comum Curricular para o ensino de geometria, com especial atenção ao objeto de estudo em questão, na seção seguinte.

2.2.1 Documentos oficiais

Neste tópico serão abordados o que os documentos oficiais: Parâmetros curriculares Nacionais e Base nacional comum curricular, dizem a respeito do ensino de geometria, e da semelhança de triângulos.

Os Parâmetros curriculares Nacionais

Os PCN (BRASIL, 1998) possuem o papel de nortear o ensino de matemática, respeitando as diversidades culturais, regionais e políticas existentes em nosso país. Através deles, o professor tem uma diretriz de como conduzir o ensino de matemática. São divididos em quatro ciclos: 1º ciclo que envolve o primeiro e segundo anos, 2º ciclo o terceiro e quarto anos, 3º ciclo, o quinto e sexto anos, 4º ciclo, o sétimo e o oitavo ano. Cada ciclo é interligado ao outro, sendo praticamente impossível trabalhar um dos ciclos sem abordar algum dos conteúdos referentes a outro deles.

Segundo os PCN (BRASIL, 1998), os conceitos geométricos constituem parte importante do currículo de Matemática no Ensino Fundamental, pois por meio deste o aluno desenvolve um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender e representar o mundo em que vive, além de fazer conexões entre a Matemática e as outras áreas de conhecimento.

Uma vez que nosso estudo se refere ao ensino de semelhança de triângulos limitaremos nosso foco ao bloco “Espaço e Forma”, pois é onde os assuntos da geometria são tratados. Neste bloco, o ponto de partida para o estudo dos conteúdos foca em três elementos: análise das figuras pela observação, manuseios e construções. Por meio deles é possível criar conjecturas e identificar propriedades.

Os PCN recomendam que, no terceiro ciclo, se trabalhem conceitos de paralelismo, perpendicularismo, classificação e exploração de figuras geométricas, usando composição, transformações, ampliação e redução. O estudo do espaço e das formas deve privilegiar a observação e a compreensão de relações (BRASIL, 1998). Já no quarto ciclo, embora se inicie um trabalho com algumas demonstrações, com o objetivo de mostrar sua força e significado, recomendam que não se abdiquem das verificações empíricas, pois estas permitem produzir conjecturas e ampliar o grau de compreensão dos conceitos envolvidos. Em relação aos conceitos de semelhança recomendam:

- Analisar figuras por meio de observações, manuseios e construções que permitam fazer conjecturas e identificar propriedades;
- Propor atividades as quais permitam perceber que, pela composição de movimentos, é possível transformar uma figura em outra;
- Propor atividades que possibilitem verificar que a transformação de uma figura no plano por meio de reflexões, translações ou rotações não alteram as medidas dos lados, dos ângulos, e da superfície;

- Trabalhar a ampliação e a redução de figuras na construção da noção de semelhança de figuras planas através da homotetia;
- O estabelecimento de conexões entre semelhança e outros conteúdos, e até outras áreas.

Base Nacional Comum Curricular

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC), documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica, que será adotada a partir de 2019, propõe cinco unidades temáticas, correlacionadas, que orientam a formulação de habilidades a serem desenvolvidas ao longo do Ensino Fundamental (BRASIL, 2018). São elas: números, álgebra, geometria, grandezas e medidas e probabilidade e estatística.

O documento determina que no Ensino Fundamental (8º e 9º ano), o ensino de Geometria precisa ser visto como consolidação e ampliação das aprendizagens alcançadas nos anos iniciais. Para a geometria, determina ainda que seja importante a utilização de diferentes recursos didáticos e materiais, como malhas quadriculadas, ábacos, jogos, calculadoras, planilhas eletrônicas e *softwares* de geometria dinâmica (BRASIL, 2018).

Sobre semelhança de triângulos o documento estabelece que seja objeto de conhecimento do 9º e último ano do ensino fundamental (14 anos), institui ainda que as tarefas propostas pelo professor devam enfatizar transformações com ampliações e reduções de figuras geométricas planas, identificando elementos que variam ou não variam para que os conceitos de congruência e semelhança sejam desenvolvidos.

> Esses conceitos devem ter destaque nessa fase do Ensino Fundamental, de modo que os alunos sejam capazes de reconhecer as condições necessárias e suficientes para obter triângulos congruentes ou semelhantes e que saibam aplicar esse conhecimento para realizar demonstrações simples, contribuindo para a formação de um tipo de raciocínio importante para a Matemática, o raciocínio hipotético-dedutivo (BRASIL, 2018, p. 297).

Portanto, percebemos que os documentos oficiais recomendam que o ensino de semelhança seja pautado na proposição de situações que possibilitem ao aluno reconhecer as condições necessárias e suficientes para que dois triângulos sejam semelhantes, valorizando a utilização de diferentes recursos didáticos. Os documentos também reforçam a importância de que, para haver a aprendizagem de certo conteúdo é fundamental haver um contexto significativo para os alunos, não necessariamente apenas do cotidiano, mas também de outras áreas do conhecimento.

Em continuidade com o tema de reflexão sobre o ensino de semelhança, analisaremos livros didáticos atuais, que se baseiam ainda nos PCN, adotados pelo Ministério da Educação, considerando que eles representam um dos referenciais nas práticas pedagógicas dos professores – ou até mesmo o único – e por constituírem uma fonte de pesquisa rica para a elaboração de nossas considerações a respeito do tipo de ensino que está sendo desenvolvido sobre o nosso tema de pesquisa.

2.2.2 Livros didáticos

Optamos pela inclusão da breve análise de livros didáticos nesta seção de considerações sobre o ensino de Semelhança de Triângulos, pela sua observância quase que unânime como recurso pedagógico nas aulas de matemática. Romanatto (2004) pontua que o livro didático sempre foi considerado como um instrumento que não pode faltar no processo de escolarização, pois é um auxiliar importante da atividade docente. Ainda para o autor, os livros didáticos diluem e simplificam as fontes de conhecimentos de maneira a torná-los acessíveis aos alunos.

Os livros didáticos apreciados nessa seção fazem parte do Programa Nacional do Livro Didático – PNLD, triênio 2017 a 2019. Optamos por analisar três exemplares do 9º ano de diferentes coleções procurando identificar de que maneira eles abordam o conteúdo semelhança de triângulos, levando em conta os seguintes aspectos: introdução e desenvolvimento do assunto semelhança, aplicações do conteúdo e configurações utilizadas.

Livro 1 – Praticando Matemática – Álvaro Andrini e Maria José Vasconcellos

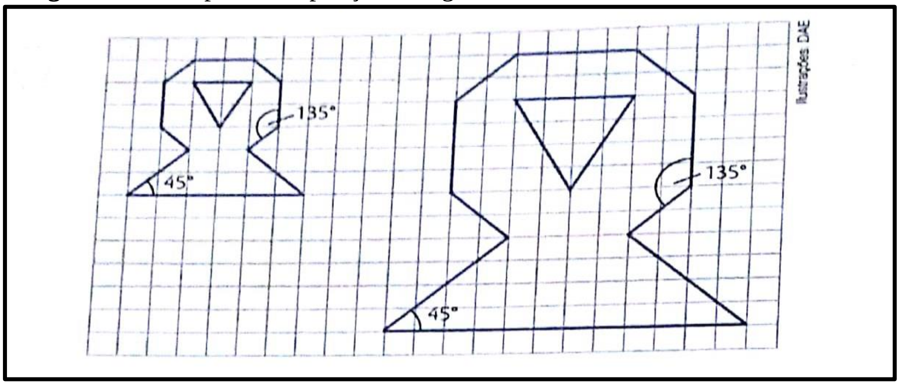
O livro apresenta o Teorema de Tales e Semelhança de Triângulos juntos no mesmo capítulo. No guia do professor são estabelecidos, para essa unidade, os seguintes objetivos: que os alunos desenvolvam o conceito de semelhança de figuras, em particular a semelhança de triângulos, e que identifiquem as propriedades em figuras presentes no espaço de vivência e que eles as usem na resolução de problemas.

A unidade inicia pela breve exposição dos conceitos de razões, proporções e segmentos proporcionais, traz exemplos que evidenciam as propriedades e culmina em exercícios que exigem que o aluno identifique o valor de X nas proporções. Esse conteúdo não é inédito para o 9º ano, haja vista que está previsto como componente curricular do 7º ano do fundamental, dessa forma, os autores cumprem bem o papel de revisar esse tópico que será utilizado nas aplicações de semelhança de triângulos.

O teorema de Tales é apresentado partindo de uma situação concreta e, a partir dela, introduz as propriedades utilizando os conhecimentos sobre congruência de triângulos. Os autores trazem as demonstrações formais do Teorema e mostram a propriedade da reta paralela a um dos lados dos triângulos, fundamental para a resolução de inúmeros problemas. Desenvolver as demonstrações, ainda que possam parecer complexas para o nível fundamental, é importante para o entendimento do conteúdo, dessa forma acreditamos que os alunos devem fazer as demonstrações, de seu modo, mesmo que se configure apenas em justificativas.

O assunto “semelhança” é iniciado pela ideia de ampliação e redução de figuras e entãoéapresentada a definição para figuras planas, utilizando exemplo de ampliação em malha quadriculada, conforme ilustra a figura 01. Na malha quadriculada é possível perceber pela contagem dos quadradinhos que a figura maior tem exatamente o dobro de quadrados que a figura menor. Também é possível notar que os ângulos que estão em lugares correspondentes nas figuras possuem a mesma medida.

Figura 3 - Exemplo de ampliação de figuras semelhantes



Fonte: Andrini e Vasconcellos (2015, p. 64)

Os autores apresentam definições distintas para semelhança de figuras planas e semelhança de polígonos, porém não esclarecem que um polígono é também uma figura geométrica plana, embora as definições dadas para ambos sejam compatíveis. Trazem ainda a definição para polígonos partindo de construções, evidenciando nas ilustrações os ângulos correspondentes congruentes e os lados correspondentes proporcionais, e significando concretamente o valor da razão, que na verdade, é o operador (fração), que atua sobre as medidas para resultar em outra medida, o que determina se o polígono foi ampliado ou reduzido.

Na seção que trata de semelhança de triângulos os autores apresentam os triângulos como polígonos e, portanto, admitem que estes devem obedecer a relação de semelhança dada aos polígonos e, a partir das construções, demonstram o único caso de semelhança que o livro aborda, o caso AA. Do mesmo modo tratam a propriedade do Teorema Fundamental da

Semelhança: partindo das construções para alcançar as demonstrações. Nos exercícios, a maioria das atividades propostas consiste em identificar medidas desconhecidas de triângulos semelhantes, há apenas uma seção destinada a proposição de conjecturas baseadas em construções geométricas.

Com relação a aplicação de Semelhança de Triângulos os autores a exploram em problemas contextualizados, indo do nível mais elementar onde é cobrado a medida de um dos lados dos triângulos, até situações onde não há apoio visual e eles necessitam converter a linguagem matemática em construções para efetuar cálculos algébricos.

O livro Praticando Matemática, em nossa avaliação, aborda semelhança com base em exemplos partindo de construções geométricas e levam a uma breve sistematização dos temas focalizados. No entanto, muitas vezes, essas sistematizações são seguidas de uma quantidade excessiva de atividades que visam, prioritariamente, a verificação ou a aplicação imediata das propriedades, sem uma maior ênfase na proposição de conjecturas e no desenvolvimento do raciocínio geométrico, por meio de atividades investigativas.

Livro 2 – Descobrindo e aplicando a Matemática – Alceu dos Santos Mazzieiro e Paulo Antônio Fonseca Machado

O Capítulo 5 intitulado “Proporcionalidade e Trigonometria” é onde os autores concentram o estudo de semelhanças. Logo no início eles definem como objetivos que os alunos aprendam como reconhecer se polígonos são ou não semelhantes e que estabeleçam a razão entre os pares de lados correspondentes de polígonos semelhantes e ainda que identifiquem triângulos semelhantes, determinados pela altura relativa à hipotenusa de um triangulo retângulo.

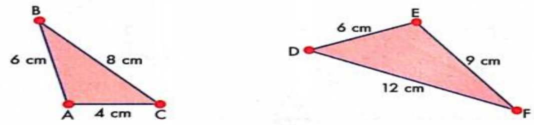
Os autores iniciam a seção de semelhança revisando, de forma breve, as propriedades de razão e proporção e relembram ainda as condições necessárias para que dois polígonos sejam semelhantes e, em seguida, apresentam exemplos das proposições analisando as correspondências entre dois triângulos.

As situações-problemas são pouco valorizadas como estratégia para a construção de conhecimentos, mas existe um esforço em valorizar o trabalho com construções geométricas preocupando-se posteriormente com uma sistematização mais rigorosa. Os conceitos relacionados ao tema de semelhança são apresentados por meio de proposições e de suas respectivas demonstrações, à medida que são propostas as atividades. Implicitamente os autores indicam que as propriedades e definições sejam trabalhadas diretamente nas atividades.

Um exemplo das proposições apresentadas na sessão inicial (Figura 4) exige que os alunos justifiquem por que os dois triângulos apresentados são semelhantes e que encontrem por meio da proporção a razão de semelhança entre os triângulos.

Figura 4 - Exemplo da abordagem de semelhança de triângulos

Por exemplo, na figura abaixo, a correspondência entre os triângulos ABC e EFD, nesta ordem, é uma semelhança.



1. Responda ou faça o que se pede em relação aos dois triângulos:

a) Verifique que as medidas dos seguintes pares de ângulos são iguais: A e E, B e F, C e D.

b) Use a propriedade do produto cruzado e verifique que as razões entre os pares de lados a seguir são todas iguais:

AB e EF, AC e ED, BC e FD

c) Por que os triângulos ABC e EFD são semelhantes?

d) Simplifique as três razões obtidas no item (b), e escreva a razão de semelhança entre os triângulos ABC e EFD, nesta ordem.

Fonte: Machado e Mazzieiro (2015, p.149)

No problema proposto da Figura 4 (item a) os autores pedem que sejam verificadas as medidas dos ângulos nos dois triângulos. Provavelmente, os alunos indagariam de que forma poderiam conferir essas medidas, no entanto, em nenhum momento é mencionada a utilização de transferidor, o que nos faz supor que os autores já esperassem que os alunos conhecessem a função deste instrumento, ou que essa informação fosse responsabilidade do professor.

No item b, é pedido que se utilize a propriedade do produto cruzado, mas em nenhum momento há referência no livro desta propriedade, o que nos faz acreditar que os autores se refiram à propriedade da proporção (produto dos extremos é igual ao produto dos meios),posto que esta propriedade comumente é chamada de multiplicação cruzada. Neste sentido, verificariam que a razão entre eles seria sempre a mesma $\frac{3}{2}$ ou 1,5.

Ainda na figura 4 (item c) o autor afirma que os triângulos são semelhantes e pede que os alunos justifiquem o porquê, baseado apenas na definição de semelhança entre polígonos. Se os alunos conseguirem calcular os ângulos e verificar que a razão entre os lados é a mesma, poderão fazer essa justificativa.

Não há abordagem dos casos de semelhança de triângulos de forma direta com a apresentação de exemplos com construções, percebemos apenas no enunciado das atividades, muitas iniciadas com a expressão “Você já sabe que...”, como forma de apresentação das propriedades, logo em seguida são propostas as atividades de fixação.

O Teorema de Tales é tratado de forma breve, os autores apresentam a definição e ilustram com exemplos mostrando três retas paralelas cortadas por duas transversais, após, aplicam propriedades de proporção. As atividades propostas referente a esse tema não exigem nenhuma construção ou demandam muito esforço para resolvê-las, são em sua totalidade questões que pedem que o aluno calcule medidas desconhecidas de um dos segmentos, ou seja, são tratadas algebricamente e não geometricamente.

Consideramos limitada a abordagem de semelhança de triângulos apresentada em Mazziero e Machado (2015). Ainda que os autores apresentem as propriedades relacionados ao tema por meio de proposições e de suas respectivas demonstrações, são poucos os momentos em que os estudantes são solicitados a fazê-las.

Também são reduzidas as ocasiões que requerem a experimentação pelos estudantes. Em diversas situações, os conteúdos já trabalhados são, acertadamente, ponto de partida para a construção de novas propriedades. No entanto, as experiências extraescolares dos estudantes são pouco valorizadas. Em um cenário em que essa obra significasse o único recurso utilizado para o ensino de semelhança de triângulos, avaliamos que o trabalho seria consideravelmente prejudicado.

Livro 3 - Matemática Bianchini - Edwaldo Bianchini

No capítulo 2 estão localizados os conteúdos de proporcionalidade e semelhança em geometria. Da mesma forma que o livro de Andrini e Vasconcelos, o autor inicia o capítulo revisando as propriedades de proporcionalidade, retomando o tema razão entre dois números.

Apresenta inicialmente a definição de semelhança para polígonos, utilizando a ampliação em malha quadriculada para, em seguida, apresentar a definição de semelhança. Traz exemplos de polígonos semelhantes mostrando as condições para que isso ocorra (ângulos congruentes e lados proporcionais) e exemplos quando uma dessas condições falha.

A metodologia adotada na obra caracteriza-se predominantemente por apresentar os conteúdos por meio de um ou poucos exemplos, seguidos de alguma sistematização e, depois, de atividades de aplicação. Dessa forma, na obra, definições e resultados matemáticos são apresentados de maneira pronta, cabendo ao estudante apenas a tarefa de memorização.

A semelhança aplicada a triângulos é abordada partindo da definição seguida de exemplo, identificando entre dois triângulos os lados correspondentes e os ângulos congruentes. É estabelecido que se dois triângulos são semelhantes existe uma razão de semelhança entre eles K, e que os elementos desses triângulos: altura; medianas; bissetrizes e perímetros, também possuem a mesma razão de semelhança K nos dois triângulos. No entanto, essas afirmações são apresentadas em caráter de observação sem que haja qualquer construção para que o aluno possa visualizar essas correspondências.

O teorema fundamental da semelhança[3] é mostrado partindo da definição seguida da demonstração, nesse caso o autor apresenta os passos da demonstração evidenciando os conceitos envolvidos na comprovação da tese que se quer provar. Da mesma forma são abordados os casos de semelhança de triângulos sempre partindo da definição seguida da construção e demonstração.

No geral, o livro "Matemática Bianchini" propõe a construção das propriedades de semelhança com base em definições e em um ou em poucos exemplos, seguidos de alguma sistematização e de atividades de aplicação. Quase sempre, as definições e os resultados das questões abordadas são apresentados prontos, sem incentivo à participação ativa do estudante na construção do conhecimento. Essas escolhas pouco contribuem para o desenvolvimento de habilidades cognitivas, como observar, buscar padrões e regularidades, generalizar e elaborar hipóteses

Configuração das abordagens de semelhança nos livros analisados

Entendemos que, muitas vezes, os recursos que o professor possui ao seu alcance não são suficientes para fornecer todos os elementos necessários ao seu trabalho e à aprendizagem do aluno, portanto o livro didático desempenha um papel importante nesse cenário, haja vista que, em alguns casos, pode significar o único recurso disponível para assessorar o trabalho do professor.

É preciso considerar ainda, que entre um livro e o aluno existe um professor. O mesmo livro na mão de dois professores produz resultados diferentes, e ele, ainda que completo, não pode se tornar uma espécie de "camisa de força" do professor. Para Lajolo (1996, p. 8) não há livro que seja à prova de professor "o pior livro pode ficar bom na sala de um bom professor e o melhor, desanda na sala de um mau professor. Pois o melhor livro, é apenas um livro, instrumento auxiliar da aprendizagem." (LAJOLO, 1996, P. 8)

No que concerne aos livros analisados, avaliamos que o ensino de semelhança seria comprometido, caso fossem utilizados como único instrumento de assessoria para o processo de aprendizagem, no sentido de que em ambos há lacunas na abordagem do conteúdo, como

---

[3]O Teorema Fundamental da Semelhança diz que toda reta paralela a um lado de um triângulo que cruza os outros lados em dois pontos distintos determina um triângulo semelhante ao primeiro.

por exemplo, o fato de que nenhum dos três livros analisados desenvolve atividades que promovam a utilização desse assunto de maneira abrangente, ou seja, utilizando todos os tipos de figuras possíveis.(sobrepostos, opostos pelo vértice, homotéticos em outras configurações e não-homotéticos).

Com o objetivo de evidenciar mais detalhadamente os aspectos mais importantes dos livros analisados, foi o criado o quadro 1.

Quadro 1 - Comparativo da abordagem de semelhança nos livros analisados

	Definição de semelhança de triângulos	**Configurações utilizadas na apresentação dos conceitos**	**Aplicações dos conceitos de semelhança**
Praticando matemática (Andrini e Vasconcelos - 2015)	Dois polígonos são semelhantes quando os lados que se correspondem são proporcionais e a medida dos ângulos que se correspondem são iguais.	Os conceitos são abordados por meio de exemplos relacionados a situações cotidianas. Também com base nessas situações, os conteúdos são explorados e, em seguida, sistematizados. São poucas as atividades de investigação que possibilitam a elaboração de hipóteses e a realização de conjecturas.	Os exercícios de observação e classificação são privilegiados em detrimento das atividades investigativas. Trabalha atividades práticas (escalas, quadriculados, sombra do sol, teodolito)
Descobrindo e aplicando a Matemática (Mazzieiro e Machado - 2015)	Dois triângulos são semelhantes se existe uma correspondência entre seus lados e seus ângulos tal que todos os ângulos correspondentes são congruentes e todos os lados correspondentes são proporcionais.	O conteúdo é apresentado por meio de atividades, entremeadas com definições e sistematizações Em alguns deles são feitas demonstrações de proposições geométricas.	Há poucas atividades que requerem a experimentação pelos estudantes. Sendo grande parte delas destinadas a utilizar situações práticas como aplicação do conceito
Matemática Bianchini (Edwaldo Bianchini 2015)	Dois triângulos são semelhantes se for possível estabelecer uma correspondência entre os lados por proporcionalidade e entre os ângulos por correspondência.	Parte da definição para em seguida, apresentar a demonstração. os conteúdos são dirigidos por meio de um ou poucos exemplos, seguidos de alguma sistematização	Os conceitos são aplicados em atividades sem contextualização, que exigem o cálculo da proporção para identificar um dos lados correspondentes, e em situações problemas, como da altura e projeção de sombras.

Fonte: produção da autora

Portanto, consideramos que os livros didáticos analisados trazem contribuições para o ensino de semelhança de triângulos, mas, como todo recurso educacional não devem constituir-se em uma espécie de “panaceia para todos os males”. Como qualquer instrumento pedagógico, precisa ter a apreciação do professor em que momento deve ser combinado com outro recurso, como por exemplo os softwares de geometria dinâmica. Para Romanatto (2004) O professor deve ter a palavra final nesse processo, no entanto, é importante que não permita que o livro escolhido comprometa sua didática.

Coerente com os documentos oficiais que esclarecem a importância da diversificação recursos didáticos e materiais, os *softwares* de geometria dinâmica, podem muito bem ser associados aos livros didáticos, caso haja essa possibilidade. Sobre eles falaremos mais a respeito na sessão seguinte.

2.3 ENSINO DE GEOMETRIA EM AMBIENTES DE REPRESENTAÇÃO DINÂMICA

Já discutimos as recomendações dos documentos oficiais para o ensino de geometria e constatamos que os PCN, recomendam fortemente que o ensino de matemática considere diferentes possibilidades de como utilizar os computadores, com variadas finalidades, especificamente na aprendizagem de geometria. Além disso, eles apontam que “o bom uso que se possa fazer do computador na sala de aula depende das escolhas de softwares em função dos objetivos que se pretende atingir e da concepção de conhecimento e de aprendizagem que orienta o processo”. (BRASIL,1998, p. 65)

Atualmente, diversas pesquisas evidenciam o potencial da utilização de Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC) para o ensino e a aprendizagem de matemática. Hoje, já contamos com uma abundância de softwares desenvolvidos ligados a temas de Matemática como geometria plana, geometria espacial, álgebra, cálculo, linguagem de programação e lógica matemática, a utilização desses softwares específicos para geometria que podem alterar as representações recebe a denominação de “Softwares de Representação Dinâmica”.

A inserção de tecnologias na prática docente é um fenômeno inevitável diante das atuais circunstâncias sociais, em que o professor precisa disputar a atenção do aluno com tecnologias digitais, como os smartphones, além da enorme variedade de redes sociais. De acordo com Borba e Penteado (2007), a informática tem ocupado espaço cada vez maior em nossa sociedade, sobretudo no cotidiano de nossos alunos. Vivemos numa sociedade em que prevalecem a informação, a velocidade, o movimento, a imagem, o tempo e o espaço com uma nova conceituação.

Os ambientes informatizados, na área da educação, contribuem para enriquecer as experiências e possibilitam a realização de um trabalho abrangente que promove a pesquisa e a investigação, aspectos intrínsecos à construção do conhecimento que resulta em experiência formativa, criativa e inovadora. Neste contexto, nós educadores devemos estar abertos à novas formas do saber humano, novas maneiras de gerar e compartilhar o conhecimento, isto se não quisermos ficar estagnados em métodos de ensino e teorias de trabalho obsoletas. Na atual conjuntura, a escola não deve manter-se neutra diante desta dimensão tecnológica.

Quando pensamos no ensino e na aprendizagem de matemática, se tem havido consideráveis avanços em termos de desenvolvimentos de softwares educativos voltados para o ensino de geometria, muito em virtude da busca por diferentes estratégias de ensino que não estejam baseadas na incessante valorização de fórmulas e propriedades postas como fatos sem comprovação que os estudantes devem tomar como dogmas.

Gravina (2001) considera que ao nos depararmos frente a um problema geométrico, a primeira coisa que fazemos é desenhar a situação, seja numa folha de papel ou na tela de um computador. De acordo com a pesquisadora, para o aluno, nem sempre é claro que o desenho é apenas um esboço físico de representação do objeto, e pode se constituir tanto em um recurso, quanto em um entrave no raciocínio geométrico.

Ainda de acordo com a autora, os ambientes de geometria dinâmica ganharam espaço, justamente pela impossibilidade encontrada em manipular objetos geométricos, e pela tendência constante em negligenciar o aspecto conceitual pela pressão de restrições do desenho, constituindo-se um dos maiores obstáculos para o aprendizado de Geometria.

Gravina (2001, p. 89 e 90), ressalta que a Geometria Dinâmica:

> (...) incentiva o espirito de investigação matemática: sua interface interativa, aberta a exploração e à experimentação, disponibiliza os experimentos de pensamento. Manipulando diretamente os objetos na tela do computador. (...) os alunos questionam o resultado de suas ações/operações conjecturam e testam a validade das conjecturas inicialmente através dos recursos de natureza empírica.

A principal característica desses softwares é a possibilidade das representações dos objetos matemáticos serem modificados, mantendo-se suas propriedades inalteradas. Esses programas apresentam a característica de serem de manipulação direta, ou seja, o usuário age diretamente sobre a representação dos objetos que estão na tela. Uma das abordagens que o professor pode trabalhar com tal instrumento é a de exploração de conjecturas que poderão ser verificadas com auxílio das ferramentas disponíveis. Para Ponte et al (2016, p. 83) “esse suporte tecnológico permite o desenho, a manipulação e a representação de objetos geométricos, facilita a exploração e a investigação das construções geométricas”.

Em nosso trabalho utilizaremos o termo Ambiente de Representação Dinâmica, em vez Ambiente de Geometria Dinâmica, por fazermos alusão ao registro figural dinâmico, definido por Salazar (2009, p. 86), como “o registro figural utilizado em ambiente de geometria dinâmica”. Nesses ambientes, graças aos recursos de mover e arrastar é possível movimentar a figura, e o registro figural, antes estático, passa a ter movimento, o que permite observar a figura de perspectivas diferentes. Os programas de Representação Dinâmica permitem a realização de experiencias que, de outro modo, se tornariam morosas e mais difíceis de executar por parte dos alunos como é o caso de semelhança de triângulos, por exemplo.

Sem dúvida é muito mais favorável à percepção das definições e condições de semelhança quando apresentadas com o auxílio do computador, do que apenas utilizando a régua e compasso. Ao movimentarem as representações, os objetos vão se concretizando na tela, o que possibilita observar possíveis mudanças ou associa-las as definições estabelecidas para as condições de semelhança entre os triângulos.

Existem muitos trabalhos de pesquisa nesta linha associando o ensino de geometria com o uso de tecnologia. Os quais apresentam evidências de que a construção de objetos geométricos nesses ambientes, aliados a exploração, favorece a compreensão dos alunos a respeito de conteúdos matemáticos. Podemos citar, por exemplo, os trabalhos de Haruna (2000), Gravina (2001), Gimenes (2014) e Santos (2012).

Dentre a variedade de opções desse tipo de software disponíveis, tais como *Tabulae*, *Régua e Compasso*, *GeoGebra*, , *Modellus*, *The Geometer'sSketchpad*, *Geometricks*, *Euklid*, *Geonext*, entre outros, escolhemos o GeoGebra, por se tratar de um software livre, ou seja, gratuito, e que vem chamando a atenção de pesquisadores como tema de diversas investigações didáticas e, por isso utilizaremos em nosso estudo. Por ser importânte para nossa pesquisa, no que segue, aprofundaremos nossas reflexões a respeito desse software para o ensino de geometria.

O software GeoGebra no ensino de Geometria

O GeoGebra é um software de representação dinâmica para o ensino de matemática para todos os níveis de ensino que reúne geometria, álgebra, planilhas, gráficos, estatísticas e cálculo em um só pacote. Com ele é possível realizar cálculos aritméticos, algébricos e utilizar múltiplas representações de objetos matemáticos. Foi criado em 2001 pelo austríaco Markus Hohenwarter, na Universidade de Salzburg. No Brasil, assim como em outros países, o

GeoGebra possui um *International GeoGebra Institute*[4]– IGI. Os Institutos espalhados pelo Mundo, tem o objetivo de compartilhar experiências sobre capacitação para o uso do software, e oferecer suporte para o desenvolvimento de materiais por estudantes e professores. Ele é gratuito e pode ser baixado diretamente da internet[5]. No site é possível também utilizar a versão online, além da possibilidade de interagir com os usuários por meio de um fórum, onde são disponibilizados diversos materiais compartilhados por pesquisadores, professores e alunos de diversos países. Os materiais podem ser utilizados como estão, ser adaptados ou servirem de inspiração para a criação de novos materiais.

Para o professor as contribuições desse programa são enormes, pois permite que eles potencializem seu trabalho, uma vez que fornece aos professores autonomia e liberdade para criarem suas aulas. Além disso, possibilita que se conectem um com os outros numa comunidade global, por meio dos fóruns de discussões disponíveis no site. Lá é possível observamos nos tópicos das discussões, a interação entre os usuários, propostas de aulas, dificuldades com alguma ferramenta e sugestões de atividades.

Contudo, ainda que os ambientes de geometria dinâmica apresentem inegáveis contribuições para o ensino de geometria, o avanço no aprendizado depende, em grande parte, da qualidade das tarefas propostas aos alunos e não apenas da disponibilidade de recursos tecnológicos e computacionais. O professor deve avaliar, qual estratégia é mais adequada e dessa forma, evitar usar o computador segundo uma abordagem em que se utiliza este recurso “apenas para servir como meio de transmissão de informação ao aluno, mantendo, na verdade, a prática pedagógica vigente. Seria simplesmente informatizar os meios tradicionais de ensino-aprendizagem”. (BORBA, PENTEADO, 2007, p. 39)

A esse respeito Passos (2006) pondera que, a simples manipulação de materiais não leva à compreensão de conteúdo, especificamente os de geometria e afirma que:

> Os recursos didáticos nas aulas de matemática envolvem uma diversidade de elementos utilizados principalmente como suporte experimental na organização do processo de ensino e aprendizagem. Entretanto, considero que esses materiais devem servir como mediadores para facilitar a relação professor/aluno/conhecimento no momento em que um saber está sendo construído. (PASSOS, 2006, p. 78).

Ao utilizar abordagens que necessitam da utilização de computador, o professor exercerá função de mediador nesse processo, distinto daquele que ensina transmitindo as

---

[4]O International GeoGebra Institute – IGI é uma organização sem fins lucrativos que desenvolve seu trabalho juntamente com Institutos GeoGebra independentes oficializados em diferentes países. Atualmente os Institutos GeoGebra estão presentes em todos os continentes. No Brasil, tem sede na PUC/SP, e no Rio de Janeiro, no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal Fluminense

[5]https://www.GeoGebra.org/

informações, aplicando exercícios e corrigindo aquilo que o aluno fez como certo ou errado. Nessa conjuntura, deve valorizar os conhecimentos que os alunos já possuem, ressignificar os possíveis erros, possibilitando que eles avancem na aprendizagem como sujeitos ativos, que questionam, formulam teorias e constroem os conceitos enquanto executam as tarefas propostas.

2.4 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Uma das etapas fundamentais desta pesquisa foi a leitura de estudos correlatos ao nosso, os quais fizeram parte do levantamento bibliográfico inicial. Com o objetivo de propiciar uma justificativa científica para o nosso trabalho. Aqui destacaremos pesquisas em educação Matemática que utilizaram a semelhança como objeto de análise, enfatizando seu ensino, não incluindo aquelas dedicadas somente a demonstrações. Não por julgarmos que essas sejam menos importantes e sim pelo fato de que este estudo esteja direcionado à semelhança de triângulos com ênfase em sua aprendizagem, e não se tratar de um trabalho técnico-formal acerca do “como demonstrar”, ou seja, sobre quais aspectos devem contemplar a escrita de uma demonstração e por se tratarem de mestrados em matemática e não em educação matemática.

A procura no banco de Teses e Dissertações da Capes pelo descritor “semelhança de triângulos” utilizando os filtros “educação” e “educação matemática” nos conduziu a um pouco mais de 53 trabalhos no intervalo de busca de 2000 a 2018, em diversas áreas do conhecimento. Havendo a necessidade de mais refinamento nas buscas, optamos pela procura em programas de educação matemática em mestrados acadêmicos e profissionais, e os executados em Rede Nacional. Dentre esses, identificamos quais abordavam o objeto do ponto de vista do ensino e/ou da aprendizagem, com o objetivo de justificar cientificamente a relevância de nosso trabalho.

Assim sendo, apresentamos no quadro 2 a configuração das ocorrências de estudos em semelhança de triângulos encontradas até o fechamento deste levantamento, que de alguma forma abordam o tema neste viés. Como esta pesquisa não possui o caráter bibliográfico, optamos pelo detalhamento apenas daquelas mais próximas de nosso intento metodológico, enfatizando os objetivos, métodos utilizados, as principais conclusões e considerações dos autores.

Quadro 2 - Ocorrências de pesquisas em semelhança de Triângulos no Brasil de 2004 a 2019

INSTITUIÇÃO	PROGRAMA	MODALIDADE	ESTADO	DISSERTAÇÕES
PU C/SP	Mestrado Profissional em Ensino de Matemática	Profissional	São Paulo	5
UFRN	Matemática em rede nacional	PROFMAT	Rio Grande do Norte	3
UFMS	Matemática em rede nacional	PROFMAT	Mato grosso do Sul	2
UECE	Matemática em rede nacional	PROFMAT	Ceará	2
UFCE	Educação em Ciências e Matemática	Profissional	Ceará	1
SEVERINO SOMRA	Educação em Ciências e Matemática	Profissional	Rio janeiro	2
UFAM	Matemática em rede nacional	PROFMAT	Amazonas	1
UFSE	Matemática em rede nacional	PROFMAT	Sergipe	1
UFRPE	Matemática em rede nacional	PROFMAT	Pernambuco	1
IFES	Educação em Ciências e Matemática	Profissional	Espírito santo	1
UFSCAR	Matemática em rede nacional	PROFMAT	São Paulo	1
IMPA	Matemática em rede nacional	PROFMAT	Rio de janeiro	1
UFPA	Mestrado em ciências e matemática	Acadêmico	Pará	1

Fonte: Produção da autora

Como já foi dito, nosso foco principal está no ensino e aprendizagem de semelhança e, portanto, percebemos então a necessidade de restringimos nosso olhar aqueles que trazem reflexões e/ou sugestões nesse sentido, ou que retratassem o conteúdo em ambientes de geometria dinâmica ou ainda com abordagem na perspectiva dos registros de representação semiótica.

Haruna (2000) em sua dissertação de mestrado em educação matemática com o título "Teorema de Thales: uma abordagem do processo ensino-aprendizagem", utilizou o objeto semelhança dando ênfase ao teorema de Tales. O objetivo da pesquisa consistiu em analisar (utilizando uma sequência didática e a geometria dinâmica com o software Cabri géométre) como se processa a apreensão do Teorema de Thales por alunos do 9º ano do ensino fundamental, além de averiguar os obstáculos didáticos e epistemológicos, e verificar até que ponto o computador favorece a superação dos obstáculos ou proporciona outros.

Para subsidiar teoricamente as análises, Produção da autorautilizou Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval e a Teoria das Situações Didáticas de Guy Brousseau. Na análise do objeto matemático “Teorema de Tales”, Produção da autoramostra que é possível expressa-lo em mais de uma forma, destacando os registros figural, discursivo e numérico. A pesquisa trata ainda, da maneira como se tem ensinado nas escolas os conteúdos de Semelhança de Triângulos e Teorema de Tales. Aponta que a forma como são trabalhados nos livros didáticos tem proporcionado aos alunos concepções limitadas acerca dos temas, ocasionando dificuldades em associar suas aplicações em outras configurações.

Os resultados da pesquisa apontam que os problemas relacionados ao ensino e à aprendizagem do Teorema de Tales estão relacionados à forma como é abordado e que para o aluno compreende-lo, em sua globalidade perceptiva, faz-se necessário diversificar os registros de representação, explorando as transformações pelas regras de tratamento em cada registro.

Outro ponto importante, que vale a pena destacar no trabalho da autora, é a rede semântica proposta por ela, em que Homotetia (H), Semelhança (S), Razões Trigonométricas (RT) e o Teorema de Thales podem ser combinados em diversas sequências de ensino, sendo que cada conhecimento pode ser construído a partir da mobilização de conhecimentos construídos anteriormente. Haruna (2000). Produção da autoraapresenta em seu trabalho diversas aplicações para o Teorema de Tales, e em uma delas justifica o uso do Teorema para chegar à semelhança de triângulos e outros polígonos.

Esta investigação se aproxima da nossa, principalmente, pelo fato de que também utilizaremos a teoria de Registros de Representação Semiótica, para construir nossas tarefas, e do mesmo modo, utilizaremos sequências de Tarefas em ambiente de geometria dinâmica. No entanto, a principal divergência entre os estudos está no tratamento do objeto, enquanto Haruna (2000) em seu estudo priorizou o Teorema de Tales, a nossa abordagem está relacionada ao desenvolvimento de conhecimentos em Semelhança de Triângulos com enfoque em registros de Representação Dinâmica.

Embora tenham se passado quase dezoito anos do estudo, optamos por incluí-lo nesta análise de pesquisas correlatas, pelo fato de que as motivações apontadas pelProdução da autoraainda serem pertinentes e atuais, e estejam em conformidade com nossas inquietações sobre o tema. Além disso, contribui com nossa investigação no sentido de apresentar um norte de variáveis que pode haver, quando se tem em foco utilizar os diferentes registros de representação semiótica para trabalhar o ensino de semelhança.

Maciel (2004), em sua dissertação intitulada "O Conceito de Semelhança uma proposta de Ensino", teve como objetivos investigar até que ponto uma sequência de ensino que utilize o conceito de homotetia, integrado com a Ótica Geométrica, pode favorecer a apreensão do conceito de semelhança por alunos da primeira série do ensino médio. Para sustentar teoricamente o seu estudo, Produção da autorautilizou a Teoria de Registros de representação Semiótica de Duval.

Nos estudos preliminares a pesquisadora constatou que os problemas de ensino e aprendizagem do conceito de semelhança estão relacionados aos aspectos inerentes à falta de articulação entre este saber e diferentes contextos. Como a investigação utiliza a óptica geométrica como *habitat* [6]do conceito de semelhança, Produção da autoraconcentrou grande parte dos estudos iniciais em discorrer sobre a importância do enfoque interdisciplinar no ensino de matemática, destacando a grande importância do conteúdo, inclusive em outras áreas do conhecimento.

Nos estudos preliminares da pesquisa, Maciel (2004) verificou que o conceito de semelhança, na maioria das vezes, surge como um conteúdo separado, distante da vida cotidiana, e na disciplina Física, ele aparece empregado apenas como regras, sem tratamento algum dispensados às condições. Além disso, aponta a importância do ensino de semelhança de figuras geométricas ser conduzido de forma contextualizada e não de maneira estanque, isolado, como verdadeira "ilha" dentro do currículo da geometria.

A autora, durante a elaboração da sequência de ensino buscou fazer com que os alunos relacionassem o registro figurais com suas respectivas representações numéricas no que tange à proporcionalidade. Na sequência de ensino, que consistia na aplicação de atividades baseadas em situações de formação de sombra e de imagens em câmera escura relacionadas ao conceito de semelhança e homotetia, foi constatado que atividades interdisciplinares administradas dessa forma "são propícias a abordagem do conceito de semelhança de forma ampla, trabalhando os tipos de configurações e as condições necessárias e suficientes entre duas figuras".(MACIEL, 2004, p.17)

[6] Neste caso o termo refere-se à Ecologia didática de Chevallard (1991). Onde o autor faz alusão a elementos da Biologia e da relação entre o ecossistema, nicho e habitat. Aqui o habitat (local) de estudo da Semelhança de Triângulos na pesquisa da autora é o conhecimento físico optica geométrica.

Santos (2012), em sua dissertação com título, “Semelhança de triângulos e Geometria Dinâmica – O trabalho em grupo na aprendizagem de conceitos” traz como objetivos de investigação realizar uma sequência didática que possibilite a interação entre a apresentação do conteúdo Semelhança de triângulos nos livros didáticos e construções geométricas com materiais manipuláveis e geometria dinâmica. Essa sequência foi proposta para ser trabalhada em equipes, haja vista que um dos focos da investigação foi a importância do trabalho realizado em grupos.

Para fundamentar teoricamente o trabalho, o autor recorreu à teoria do modelo do pensamento geométrico do casal Van Hiele e pressupostos relativos ao emprego de estratégias pedagógicas mediadas por tecnologias de aprendizagem de geometria. A proposta visou possibilitar aos alunos do nono ano do Ensino Fundamental reforçar conceitos já existentes e construir novos em relação ao objeto de análise. Com esse intuito, organizou as ações em três etapas: na primeira definiu o grupo de discussões que executariam as tarefas, na segunda apresentou as fichas de atividades cuja resolução envolvia apenas a utilização de materiais manipuláveis e, finalmente, na terceira etapa, propôs a realização das tarefas, desta vez utilizando o software GeoGebra.

Como resultados da exploração, Santos (2012) destaca que quando o aluno tem noção de conceitos geométricos, consegue avançar mais facilmente nos níveis descritos da teoria de Van Hiele. O grau de dificuldade aumenta de forma progressiva quando não há a devida apropriação dos conceitos de semelhança e, como consequência, a Geometria dinâmica não tem eficácia alguma.

Esse trabalho tem conexão com o nosso apenas no objeto investigado e na utilização dos registros (figural e simbólico), embora por questões de escolha teórica ele não os aborde com essa classificação. Ainda assim ressaltaremos suas contribuições nas discussões referentes ao ensino, haja vista que compactuamos com suas reflexões e inquietações referentes ao tema. Diferente do autor, que em seu trabalho priorizou a utilização de materiais manipuláveis e o trabalho em grupo, em nossa investigação pretendemos dar maior ênfase à propriedade de semelhança, e nos registros de representação que podem ser mobilizados na aprendizagem deste conhecimento.

Gimenes (2014) apresentou em sua dissertação de mestrado, denominada “Possíveis contribuições de atividades de investigação e operação com o computador na produção do conhecimento acerca do assunto semelhança” uma investigação que buscou analisar prováveis contribuições da aplicação de um conjunto de atividades que partiram de processos exploratórios e investigativos com os recursos computacionais Superlogo e GeoGebra, relacionados à produção de conhecimentos em Semelhança de Triângulos. Produção da autorautilizou em seus estudos a teoria do casal Van Hiele para analisar as características do processo de raciocínio geométrico dentro da produção do conhecimento.

Produção da autoraestabelece como objetivo principal analisar contribuições para a produção de conhecimentos de semelhança de figuras geométricas, ao utilizar uma proposta de ensino envolvendo atividades de investigação com o uso de computador no Ensino Fundamental. Para responder sua pergunta de pesquisa explorou o entendimento das propriedades necessárias para classificar duas figuras como semelhantes a partir da construção de triângulos semelhantes por meio de homotetia trabalhadas em situações de aprendizagem organizadas em etapas, que foram sendo propostas conforme os resultados dos alunos.

Em seu texto, ela expõe como um dos resultados, a possibilidade de conhecer o nível de raciocínio geométrico e avaliar aspectos como análise, visualização, classificação e deduções informais, quando são propostas atividades investigativas. Ressalta ainda, o impacto exercido na produção do conhecimento matemático relativo ao objeto em questão. Outra questão que Produção da autoraassume como importante em sua pesquisa, é a contribuição dos ambientes de geometria dinâmica para a aprendizagem. Ela aponta que recursos como o GeoGebra e o Superlogo "ampliam a qualidade da visualização das figuras geométricas e permite que os alunos possam criar conjecturas baseadas nas próprias construções geométricas" (GIMENEZ, 2014, p. 118).

Produção da autoraassume a relevância do desenvolvimento do raciocínio geométrico por meio de atividades investigativas, valorizando as construções geométricas em ambientes de geometria dinâmica. Outro ponto importante que observamos no estudo foi o tratamento dado às atividades, cujo objetivo foi desenvolver habilidades, como a visualização ou reconhecimento, em que o aluno reconhece certas propriedades de semelhança de triângulos e de outros polígonos por meio da visualização.

Consideramos que Gimenes (2014) tratou a semelhança de triângulos de forma superficial, haja vista que seu intento foi trabalhar a semelhança em geral, sem focar em um polígono especifico como faremos em nosso estudo com a semelhança em triângulos. Nesse sentido, afunilamos a proposta da autora, pois assim como ela, também consideramos importante que o aluno reconheça a propriedades semelhança de triângulos e de outros por meio da visualização, no entanto, não pretendemos ir além da Semelhança em triângulos.

O trabalho de Cruz (2015) - O uso de investigações matemáticas na abordagem da semelhança de triângulos e aplicações - teve como objetivo compreender a importância das investigações matemáticas no estudo de semelhança de triângulos e suas aplicações. Considerando a importância das atividades investigativas para o ensino e a aprendizagem, o autor apresenta na pesquisa algumas definições, aspectos, possíveis obstáculos e considerações acerca desta forma de conduzir o ensino.

Com esse propósito, coletou dados por meio da aplicação de três atividades investigativas em uma turma de 9º ano do Ensino Fundamental de um colégio da rede estadual de Sergipe. O autor propõe atividades que utilizava a semelhança de triângulos para definir o teorema de Pitágoras e as razões trigonométricas seno, cosseno e tangente. Nessas tarefas, ao contrário das apresentadas nas outras pesquisas, não houve qualquer auxilio de ambientes de geometria dinâmica, os alunos utilizaram apenas folhas de papel, régua, compasso e transferidor.

Os resultados apontaram que a inserção de atividades investigativas no cotidiano de sala de aula, em qualquer nível de ensino, indica um melhor aprendizado do conteúdo estudado. A maior parte da pesquisa de Cruz (2015) é dedicada às demonstrações dos casos de semelhança. Em um dos seus capítulos, o autor discute sobre a importância do tema tem em outros conteúdos, no entanto, diferente de nosso trabalho, o autor já apresenta os conceitos prontos, tomando a Semelhança de Triângulos como uma ferramenta para a resolução dos problemas em trigonometria.

Gomes (2018), em sua dissertação intitulada “A construção de sequências didáticas para o conteúdo de semelhança de triângulos através do Software matemático GeoGebra, desenvolveu uma pesquisa cujo objetivo foi promover um ambiente de aprendizado para semelhança de triângulos baseado na Teoria das situações didáticas. A pesquisa foi desenvolvida no laboratório digital de matemática (LADIMA) com alunos do 5º período do curso de licenciatura em matemática da numa plataforma virtual com o intuito de criar uma ferramenta que possa auxiliar a compreensão dos conceitos envolvidos na semelhança de triângulos.

A pesquisa dProdução da autorabuscou responder de que forma construção de sequências didáticas pode promover um ambiente de aprendizado para o conteúdo semelhança de triângulos baseado da Teoria das situações didática. Para responder a pergunta de pesquisa foram elaborados Objetos Digitais de Aprendizagem (applets), no software matemático GeoGebra. Posteriormente foram construídas as sequências didáticas para o ensino de semelhança de triângulos e por fim, as atividades desenvolvidas pelos estudantes no Laboratório foram analisadas.

As atividades referiam-se aos conceitos de semelhança de triângulos noções de proporcionalidade e os casos de semelhança e suas particularidades. Como um dos resultados da pesquisa, Produção da autoradestaca a importância da retomada de conhecimentos acerca de semelhança, os quais foram demonstrados pelos alunos diante das respostas desenvolvidas nas sequências didáticas propostas. Esperava-se que tais conhecimentos já estivessem consolidados, haja vista que os sujeitos são alunos do 5º semestre de Licenciatura, o que, segundo a pesquisadora, não ocorreu de forma unânime.

Encontramos em nossas buscas diversos trabalhos com o tema semelhança de triângulos fora dos programas de educação matemática, principalmente com abordagem direcionada a comprovação de demonstrações, especialmente, as executadas no programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, além de pesquisas no campo da engenharia.

As dissertações relatadas nesta seção têm como ponto em comum com nosso trabalho de pesquisa, a apresentação de experiências que buscaram um resgate de uma geometria que desperte o interesse dos alunos, e suscitam o aprendizado de maneira em que eles possam exercer papel atuante na construção dos saberes geométricos. Não apenas como sujeitos passivos, receptores de teorias e significados, mas também como agente questionador, formulador de hipóteses. Em nossa busca por teses e dissertações com o tema de semelhança de triângulos, foi nossa preocupação que as pesquisas trouxessem abordagens dessa natureza, seja utilizando softwares de geometria dinâmica, ou ainda, materiais manipulativos.

Ressaltamos que nos estudos preliminares definido para essa etapa, evidenciamos pesquisas correlatas que julgamos trazer mais contribuições ao nosso estudo, complementou nossas percepções em relação às hipóteses e objetivos estabelecidos para a pesquisa, no sentido de nos apontar perspectivas para investigação nesse tema. Outro ponto importante que vale a pena ressaltar são as inferências e recomendações contidas nas pesquisas que possibilitaram nos guiar por caminhos não abordados, ou pouco explorados por esses estudiosos.

Embora nosso estudo não tenha o caráter de ineditismo, haja vista que muito já se tem falado sobre semelhança de triângulos no campo da educação matemática, acreditamos que nossas considerações e diligências tornam-se relevantes, pois, algo de novo se apresenta quando se propõe atividades relacionadas a esse tema com o objetivo de potencializar o aprendizado em geometria a partir de representações dinâmicas, principalmente, no sentido da percepção da propriedade semelhança de Triângulos.

Neste capítulo apresentamos as considerações pertinentes ao estudo de semelhança de triângulos e nossa revisão Bibliográfica, com o intuito de esclarecer ao leitor as principais configurações de seu percurso histórico e as configurações e desdobramentos de seu ensino. A função da construção de um estudo do objeto matemático segundo Almouloud (2008) está em identificar a gênese histórica do saber a ser investigado, a estrutura matemática dos conceitos, bem como evidenciar os saberes (matemáticos) e os conhecimentos relacionados com o saber que se pretende investigar, além de analisar o ensino usual do objeto e seus efeitos na aprendizagem.

Compreendemos neste estudo o alvo de investigação, Semelhança de Triângulos, como um conhecimento do objeto matemático Triângulo, contudo, aplicamos a ele o mesmo tratamento descrito pelo autor, pois entendemos que havia a necessidade da abordagem histórica e da forma como está sendo conduzido o seu ensino, além das recomendações dos documentos oficiais.

No capítulo seguinte apresentaremos as configurações do estudo: nossa questão de pesquisa, os procedimentos metodológicos e o nosso quadro teórico.

CAPITULO III

PROBLEMÁTICA E FUNDAMENTOS TEÓRICOS

Nesse capítulo apresentaremos as configurações do estudo: nossa questão de pesquisa, os procedimentos metodológicos e o nosso quadro teórico.

3.1 DELIMITAÇÃO DO PROBLEMA

O primeiro grande passo de uma investigação matemática, de acordo com Ponte, Brocardo e Oliveira (2016, p. 17), é identificar de forma clara o problema que se pretende resolver. Para os autores, “quando trabalhamos num problema, o nosso objetivo é naturalmente resolvê-lo. No entanto, para, além disso, podemos fazer outras descobertas que, em alguns casos, se revelam tão ou mais importante que a solução do problema original.”

As considerações relacionadas no capítulo II, referentes ao ensino de Semelhança de Triângulos, nos motivaram a realizar um estudo que contemplasse a problemática da aprendizagem dos tópicos relacionados a esse campo do conhecimento geométrico. Assim, direcionamos nossa pesquisa para a aprendizagem desse tema, dada a sua relevância para a compreensão de conceitos adjacentes a ele no âmbito da geometria.

Considerando nossos estudos preliminares, nossas buscas em pesquisas correlatas e ainda nos documentos oficiais e livros didáticos, constatamos que o ensino de semelhança sofre grande redução em sua forma de abordagem, geralmente, sendo enfatizado os aspectos algébricos e pouco destaque aos aspectos geométricos.

A partir de nossas inquietações relacionadas a este quadro e na tentativa de encontrar outras representações e novas abordagens que pudessem proporcionar processos de aprendizagem como: visualização, construção e raciocínio, recorremos aos Registros de Representação Semiótica proposto por Raymond Duval e baseados neles, apresentamos em nossa pesquisa a seguinte questão: **Uma sequência de atividades com enfoque em representações dinâmicas pode contribuir para o desenvolvimento de conhecimentos de alunos do 9º ano acerca de Semelhança de Triângulos?**

A delimitação da questão norteadora foi fundamental para estabelecer os objetivos e o delineamento de nossa pesquisa, haja vista que a partir delas planejamos o direcionamento dos estudos preliminares, nossas estratégias empíricas e delimitamos os passos que deveríamos seguir com o intento de responde-la e alcançar o nosso objetivo.

3.2 OBJETIVOS DO ESTUDO

OBJETIVO GERAL

Verificar se uma sequência de atividades com enfoque em Representações dinâmicas pode contribuir para o desenvolvimento de conhecimentos de alunos acerca de Semelhança de Triângulos.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Trabalhar a ampliação e a redução de triângulos na construção da noção de semelhança de Triângulos;
- Promover condições para que um grupo de alunos do 9º ano do ensino fundamental compreenda a propriedade Semelhança de Triângulos utilizando representações dinâmicas no software GeoGebra;
- Desenvolver a capacidade dos alunos de levantar conjecturas e formular hipóteses para que eles compreendam a relação entre o Teorema Fundamental da Semelhança e o Teorema de Tales.

3.3 A OPÇÃO METODOLÓGICA

Para conduzir a pesquisa, a partir dos objetivos traçados inicialmente, optamos pela abordagem qualitativa, por entender que se apresenta de acordo com os propósitos e concepções metodológicas adequadas ao tipo de estudo e problemática que pretendíamos investigar, que em linhas gerais, de acordo com Godoy (1995, p. 58) envolve a obtenção de dados descritivos e interativos pelo "contato direto do pesquisador com a situação estudada, procurando compreender os fenômenos segundo a perspectiva dos sujeitos, ou seja, dos participantes da situação em estudo."

Na investigação qualitativa, a fonte direta dos dados é o ambiente natural, pois ainda de acordo com o autor, os investigadores frequentam os locais de estudo porque se preocupam com o contexto, entendem que as ações podem ser melhor compreendidas quando são observadas no seu ambiente natural de ocorrência, para que a leitura dos acontecimentos ocorridos no espaço-temporal onde os participantes estão imersos, sejam os mais representativos possíveis e não se desvincule da realidade em si investigada.

Nesse sentido, Lüdke e André (2013) apontam que nesse tipo de pesquisa, é relevante um profundo contato no universo em si, para que o pesquisador possa desvelar e compreender tal fenômeno, uma vez que sendo uma realidade socialmente construída, a função do pesquisador estar em desvelar a "verdade", que emergem da compreensão dos elementos sociais que constroem e determinam aquele fenômeno.

Portanto, esse estudo assume caráter qualitativo uma vez que, busca compreender como se deu, em "loco" as necessidades formativas do ensino de matemática quanto à abordagem do ensino de Semelhança de triângulos em uma Escola da rede pública Municipal de Belém. Entendemos que este enfoque nos permite uma compreensão mais substancial do conteúdo investigado, o que possibilita não só entender como se dá essa conjuntura, mas também, direcionar nosso olhar em como ocorre esse processo, e não simplesmente apenas nos resultados ou produtos.

Nesse contexto, trata-se de situações das quais a coleta de dados parte da observação, da descrição e da análise das situações criadas em sala de aula, valorizando mais os processos pelos quais o grupo produz conhecimento, constrói conhecimentos geométricos, verifica propriedades e formula conjecturas do que apenas chegar a um determinado resultado. A partir dessa análise, adotamos um processo de coleta de dados e informações baseados numa concepção de pesquisa qualitativa.

Dentre as múltiplas abordagens da pesquisa qualitativa optamos pela metodologia da pesquisa–ação, pois é a que contempla de forma mais abrangente as nossas intenções. De acordo com Thiollent (2011, p. 20) a pesquisa-ação:

> (..) é um tipo de pesquisa social com base empírica que é concebida e realizada em estreita associação com uma ação ou com a resolução de um problema coletivo e no qual os pesquisadores e os participantes representativos da situação ou do problema estão envolvidos de modo cooperativo ou participativo. (THIOLLENT, 2011. p.20)

A pesquisa-ação foi escolhida para o delineamento dessa pesquisa, por considerá-la oportuna em possibilitar uma ação efetiva quanto à problemática enfocada e permitir a construção de uma resposta interventiva mais sistemática para construir uma prática no processo de mediação do estudo proposto, durante a aplicação da pesquisa. A opção por tal modalidade permite levar nossas discussões a um plano prático, onde pudéssemos realmente intervir e, de alguma maneira, ajudar a fazer mudanças naquela realidade, criando possíveis alternativas e sugestões por meio do produto resultante da pesquisa, para enfoques diferenciados na abordagem de semelhança de triângulos.

Reforçam nossa opção, as concepções de Fiorentini e Lorenzato (2009), ao sinalizarem que a pesquisa-ação envolve um processo investigativo de intervenção em que caminham juntas prática investigativa, prática reflexiva e prática educativa. Isto quer dizer que a prática educativa, ao ser investigada, produz compreensões e orientações que são imediatamente utilizadas em sua própria transformação, gerando novas situações de investigação.

3.4 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Ao elaborar a trajetória investigativa dessa pesquisa, nos remetemos a definição de Fiorentini e Lorenzato, (2009, p. 60), que de um modo geral, definem pesquisa como um "processo de estudo que consiste na busca disciplinada/metódica de saberes ou compreensões acerca de um fenômeno, problema ou questão da realidade ou presente na literatura o qual inquieta/instiga o pesquisador perante o que se sabe ou diz a respeito."

Nesse sentido, todo o estudo apresentado nos capítulos anteriores alicerçou nossa busca acerca da problemática por nós já exposta. A pesquisa está inserida no contexto educacional, cujo problema remete às práticas de ensino e aprendizagem de semelhança de triângulos, na perspectiva dos Registros de Representação Semiótica. Com o objetivo de esclarecer e justificar nossas escolhas metodológicas, apresentaremos nas seções seguintes, organizados em etapas, os caminhos metodológicos elaborados para a investigação.

O CAMPO DA PESQUISA

A pesquisa se desenvolveu em uma Unidade Municipal do Ensino Fundamental denominada UMEF – Professora Donatila Santana Lopes, a escola é mantida pela Prefeitura Municipal de Belém e está localizada na Ilha de Mosqueiro distrito de Belém. Atende cerca de 600 alunos divididos em três turnos nas modalidades de Educação infantil, Ensino Fundamental e Educação de Jovens e Adultos.

A escola está situada na zona urbana de Mosqueiro, distrito de Belém. As salas estão em bom estado de conservação, dispõem de laboratório de informática, refeitório, sala de leitura e quadra de esportes. A sala de informática está equipada com cerca de 13 computadores, porém apenas 5 estavam funcionando no período de aplicação do estudo, fator que determinou a limitação no número de sujeitos selecionados.

A escolha pela Escola Donatila Lopes deu-se em função de ser o lócus de trabalho da pesquisadora e onde surgiram muitas das inquietações apontadas na seção de motivações do estudo. Sustentamos nossa opção em Fiorentini e Lorenzato, (2009, p. 71) quando dizem que a pesquisa de campo ganha força quando “é realizada diretamente no local em que o problema ou fenômeno investigado acontece,” e também no paradigma do professor pesquisador, de Ludke e André (2013) pois acreditamos que quando o professor interroga o que faz e persegue sua interrogação de modo sistemático e rigoroso, está realizando pesquisa. Lüdke e André (2013)

Além disso, a escola contava com um horário semanal destinado às atividades de projetos, que foi nos cedido pela Diretora e coordenação durante a aplicação da pesquisa, observadas as necessidades eventuais de utilização do ambiente pela escola no horário.

3.4.1 INSTRUMENTOS UTILIZADOS NA COLETA DE DADOS

Para proceder a coleta de dados e de informações, partimos da concepção da pesquisa qualitativa, que recomenda a adoção de diferentes procedimentos de coleta de dados. De acordo com Lüdke e André (2013), é importante a diversificação de procedimentos de coleta de dados, para evitar que não se caia em generalizações infundadas.

Fiorentini e Lorenzato (2009), destacam que um dos critérios para realiza-la de forma satisfatória, é que a escolha dos instrumentos esteja intrinsecamente relacionada à natureza do problema. Para os autores:

> [...] vale lembrar mais uma vez que a escolha da forma de coleta de dados deve estar de acordo com a natureza do problema ou questão de investigação e dos objetivos da pesquisa. A natureza dos dados a serem coletados também interfere na escolha dos instrumentos de coleta (FIORENTINI; LORENZATO, 2009, p. 98)

Portanto, seguindo estas recomendações, foram utilizados áudio, vídeo e descrições escritas dos participantes e das observações da pesquisadora, organizadas em forma de portfólio. Os pais dos alunos foram esclarecidos das circunstâncias e objetivos da pesquisa e assinaram termo de livre consentimento e esclarecimento.

Durante a fase de familiarização com o software GeoGebra, foi instalado o equipamento de gravação, uma câmera filmadora de propriedade da pesquisadora. No início, os alunos mantiveram-se tímidos com a ideia de serem gravados, e não manifestavam suas dúvidas com relação ao uso das ferramentas, aos poucos foram acostumando-se, depois de alguns encontros já estavam totalmente habituados ao recurso e ao processo.

As gravações de áudio foram utilizadas para a descrição do passo a passo das construções no software, capturadas com um gravador à medida que as atividades foram executadas. Consideramos importante a inclusão também deste recurso pelo fato de não dispormos de um equipamento para captação de áudio e vídeo de qualidade profissional, e para nos resguardarmos de eventuais falhas no áudio das gravações, optamos por incluir esse recurso como instrumento de coleta de dados.

A pesquisa foi desenvolvida obedecendo as seguintes fases:

Quadro 3 - Cronograma de fases da pesquisa

FASES DA PESQUISA	BREVE DESCRIÇÃO
Levantamento bibliográfico	Busca no banco de teses e dissertações da Capes e periódicos pesquisas que levantassem a discussão sobre a aprendizagem do Ensino de semelhança de triângulos. Encontramos sobretudo em Maciel (2004); Gimenes (2014) e Santos (2012).
Estudo do Objeto Semelhança de Triângulos e de seu ensino	Realizamos um levantamento histórico acerca do tema, procuramos em pesquisas atuais o que dizem os autores sobre como o ensino de semelhança vem sendo conduzido e ainda observamos o que os documentos oficiais recomendam a esse respeito, e por fim, analisamos a abordagem do conteúdo em três livros didáticos do PNLD 2017/2019.
Escolha do referencial teórico e Construção da metodologia de pesquisa.	Definição de nossas opções metodológicas, descrição das delimitações do estudo e os objetivos, baseados na teoria estabelecida.
Aplicação das tarefas.	As tarefas estão sendo aplicadas com oito alunos do nono ano de uma escola da rede pública municipal de Belém. São construídas em ambiente de geometria dinâmica utilizando o software GeoGebra.
Análise das tarefas à luz da teoria estabelecida.	Todo material coletado na etapa de aplicação será analisado à luz da teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval.

Fonte: Produção da autora

O desenvolvimento empírico da pesquisa teve início na primeira semana de abril de 2019, com atividades de familiarização com o software GeoGebra, haja vista que nenhum participante conhecia o programa. Foram aplicadas nesta etapa as tarefas de investigação elaboradas de acordo com o referencial teórico escolhido.

Observações

As observações tiveram início na segunda semana de aplicação da pesquisa e permaneceram até os últimos dias do cronograma. Durante esse processo foram registrados por escrito as ações dos estudantes na resolução das tarefas; as dificuldades; os possíveis caminhos de respostas. De acordo com Lüdke e André (1986), uma das vantagens do emprego dessa técnica é a possibilidade de um contato pessoal do pesquisador com o objeto de investigação, permitindo que acompanhe as experiências diárias do sujeito e apreenda o significado que atribui à realidade e às suas ações.

De acordo com os autores, ainda que possa parecer simples observar o cenário e todos os envolvidos na pesquisa, o "observador precisa aprender a fazer registros descritivos, saber separar os detalhes relevantes dos triviais, aprender a fazer anotações organizadas e utilizar métodos rigorosos para validar suas observações" (LÜDKE; ANDRÉ, 1986, p. 26).

No quadro 4, apresentamos os instrumentos empregados na coleta de dados durante os encontros e uma breve descrição da utilização.

Quadro 4- Recursos Utilizados na coleta de dados

RECURSOS	BREVE DESCRIÇÃO
Observações	Registros da pesquisadora organizados em forma de diário e também em gravação de áudio.
Gravações de áudio	Gravações de áudio das sessões de aplicação das tarefas.
Registros escritos dos alunos organizados em Portfólio	Registros dos alunos organizados em fichas correspondentes a cada encontro.
Registros das atividades no software salvos em formato digital	Cada construção foi salva em pastas de arquivos no formato .ggb

Fonte: Produção da autora

Sobre organizar o trabalho em registros escritos, Ponte, Brocardo e Oliveira (2016) consideram que são situações que exigem uma análise da própria aprendizagem. De acordo com eles "o registro escrito, que se pede numa investigação como essa, constitui um desafio adicional para alunos desse nível de escolaridade, porque exige um tipo de representação que nunca utilizaram" (PONTE, BROCARDO E OLIVEIRA, 2016, p. 35).

Para a análise dos dados levantados propomos utilizar os fundamentos teóricos que apresentaremos a seguir.

3.5 CONSTRUINDO A FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Antes de iniciarmos a descrição e o tratamento das tarefas propostas achamos pertinente primeiro situar o leitor com relação a teoria estabelecida para a elaboração dos blocos de atividades e sua posterior análise. O papel da teoria em uma pesquisa-ação, segundo Thiollent (2011, p. 64) "consiste em gerar ideias hipóteses ou diretrizes para orientar a pesquisa e as interpretações". Para o autor, as interpretações dos resultados colhidos por alguma técnica empírica, deve ser interpretada à luz de alguma teoria.

Uma vez que o nosso objetivo central da pesquisa é verificar se atividades com enfoque em representações dinâmicas pode contribuir para o desenvolvimento de conhecimentos em semelhança de triângulos, utilizaremos como teoria principal para fundamentar o estudo a Teoria de Registros de Representação Semiótica – TRRS, elaborada por Raymond Duval[7].

Essa teoria desenvolvida pelo autor considera que a aprendizagem em matemática não está condicionada a apenas um tipo de registro (o algébrico por exemplo), e que um mesmo objeto matemático poderá ter representações diferentes, dependendo da necessidade e do uso.

Duval (2008, p. 11) acredita que para compreendermos as muitas razões pelas quais os alunos tem dificuldades em aprender os conteúdos matemáticos não podemos restringir nossos esforços apenas no campo matemático ou histórico, para o autor, é necessário ir muito além, buscando também no campo cognitivo essas respostas, pois, "muito mais importante do que formar futuros matemáticos, é desenvolver suas capacidades de raciocínio, de análise e visualização".

A originalidade está em procurar incialmente descrever como funciona o processo de compreensão dos conteúdos matemáticos, ao invés de iniciar essa abordagem partindo dos erros para determinar as razões pelas quais os alunos não aprendem determinado conteúdo. Uma das características da atividade cognitiva requerida na matemática, desenvolvida e defendida por ele diz respeito ao uso de registros de representações semióticas.

3.5.1 REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

Segundo Duval (2009), em matemática, toda a comunicação se estabelece com base em representações, seja uma escrita decimal ou fracionária, os símbolos, os gráficos, os traçados de figuras entre outros.

Para compreender melhor Duval é preciso apresentar como o autor concebe o conceito de sistema semiótico. O autor afirma que um sistema semiótico é composto de signos que possuem convenções e regras próprias de formação. Já os signos estão no lugar de algo; é algo que designa, denota ou representa alguma coisa a alguém sob algum aspecto. Dentre os muitos sistemas de representação semiótica, aponta ainda que os sistemas semióticos de representação devem cumprir três atividades cognitivas inerentes a toda representação:

- Formar uma marca ou um conjunto delas que se identifiquem como uma representação de alguma coisa;

---

[7]Raymond Duval é filósofo e psicólogo de formação. Desenvolveu estudos em Psicologia Cognitiva no Instituto de Pesquisa em Educação Matemática (Irem) de Estrasburgo, na França, no período de 1970 a 1999. Atualmente é professor emérito na Université du Littoral Cote d´Opale, França.

- Transformar representações apenas utilizando as regras próprias do sistema, a fim de modo a obter outras representações que possam ter vantagens, em comparação com as representações iniciais;
- Conversão de representações entre os diversos sistemas de representação, de forma que as outras representações permitam explicar outras significações relativas àquilo que é representado.

Contudo, nem todos os sistemas semióticos permitem essas três atividades cognitivas fundamentais, por exemplo o código Morse ou código da rota. Mas a linguagem natural, as línguas simbólicas, os gráficos, as figuras geométricas, etc. permitem tais atividades.

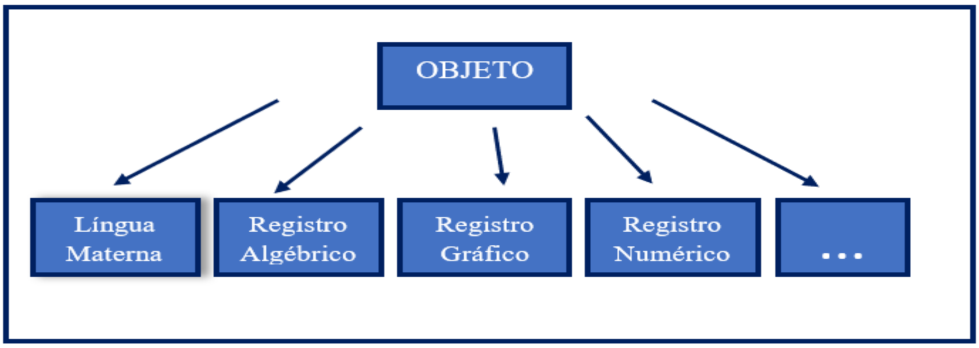
Sendo assim o autor define representação semiótica como:

> [...]produções constituídas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representações que tem inconvenientes próprios de significação e de funcionamento. Uma figura geométrica, um enunciado em língua natural, uma fórmula algébrica, um gráfico são representações semióticas que exibem sistemas semióticos diferentes. (DUVAL, 2009, P. 21)

De acordo com o autor, não é possível estudar fenômenos relativos ao conhecimento sem recorrer a noção de representação, uma vez que nenhum conhecimento pode ser mobilizado sem uma atividade de representação. Para ele essas representações não podem nunca ser confundidas com os objetos matemáticos, que são os números, as retas, os triângulos etc., sob pena de que não "haverá compreensão em matemática se não existir essa distinção." (DUVAL, 2009, p. 14).

O que se observa, de modo geral, é exatamente essa confusão da representação com o próprio objeto matemático. Toda confusão entre esses termos pode provocar, com o decorrer do tempo, uma perda da compreensão das propriedades matemáticas. Um mesmo objeto matemático pode ser representado de formas diferentes. A Figura 5 traz um esquema de objeto matemático e quatro possíveis registros.

Figura 5 -Possíveis registros de representação de um objeto matemático



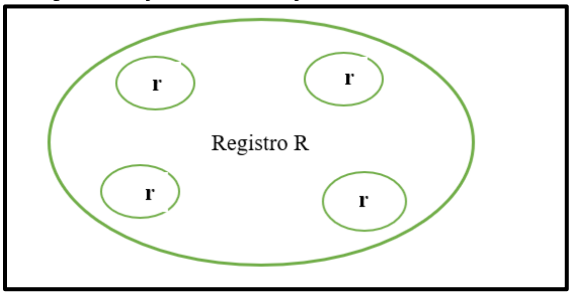
Fonte: Produção da autora

As diferentes representações de um mesmo objeto matemático podem proporcionar formas diferentes de enfrentar determinado problema. Assim temos a entrada da ideia de Registros, que Duval define como “Sistemas cognitivamente produtores, ou mesmo criadores de representações sempre novas. E a produção de novas representações permite descobrir novos objetos” (DUVAL, 2011, P.72).

Em linhas gerais, poderíamos definir Registros como as mais variadas formas que um objeto, no nosso caso semelhança de Triângulos, pode assumir”.

Dentro de cada registro existem várias representações, por exemplo, tomemos como exemplo o objeto matemático “metade”. Dentro do registro das notações fracionária, existem as representações $\frac{1}{2}$; $\frac{2}{4}$; $\frac{5}{10}$, dentre outras. Na Figura 6 trazemos um esquema com diagramas, afim de ilustrar a relação entre o registro R e as representações r dentro dele.

Figura 6 -Representações de um objeto matemático dentro de um Registro



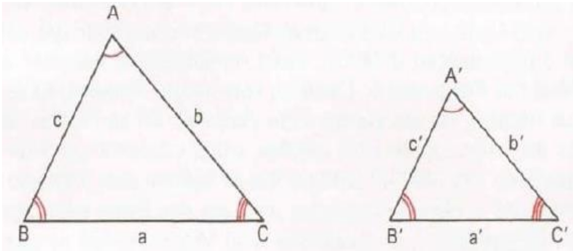
Fonte: Produção da autora

A contribuição de Duval para a aprendizagem em matemática está, portanto, em apontar a restrição de se usar uma única representação para representar um mesmo objeto matemático. Permanecer num único registro de representação significa tomar a representação como sendo de fato o próprio objeto.

Damm (2015) aponta que a utilização de uma variedade de representações pode significar ganhos substanciais na aprendizagem dos objetos matemáticos, que, certas vezes, podem estar representados em formas que demandam um custo cognitivo muito alto para o entendimento dos conceitos e procedimentos de cálculos necessários. Nesses casos, as representações através de signos, gráficos, tabelas, algoritmos, etc, é bastante significativa no sentido de permitir a comunicação entre as atividades cognitivas do pensamento e os sujeitos possibilitando representações diferentes de um mesmo objeto.)

Veja por exemplo, a definição de semelhança entre dois triângulos representada em Registro da Língua Natural (materna) e Registro figural.

Quadro 5 -Representações para definição de Semelhança de Triângulos

Registro Figural	Registro Língua Natural
	**“Dois triângulos são semelhantes se existe uma correspondência entre seus lados e seus ângulos, tal que todos os ângulos correspondentes são iguais e todos os lados correspondentes são proporcionais”.**

Fonte: Produção da autora

Apenas utilizando o registro da língua natural, provavelmente torna-se custoso para o aluno perceber as condições necessárias para que os triângulos sejam semelhantes, isso em função de que os elementos que definem os critérios de semelhança podem não estar claramente expressos para ele. De outra forma, na representação com o registro figural, pode ser que ele consiga perceber mais claramente a presença dos critérios de semelhança entre os triângulos, confirmando, portanto, a importância da utilização de mais de uma representação para o mesmo objeto matemático.

Almouloud (2007) considera que a noção de registro facilita o processo de ensino e de aprendizagem dos conteúdos matemáticos pois possibilita ao professor torna-los mais acessíveis à compreensão dos alunos. No entanto, ressalta que para haver efetivamente a compreensão matemática é necessária a realização de atividades que mobilizem simultaneamente dois registros (no mínimo) de representação ou ainda, a possibilidade de mudar a todo o momento de registro de representação.

Neste último caso as Representações Semióticas podem ser convertidas em representações “equivalentes” em outro registro semiótico. Essa operação Duval (2009) considera como Conversão. Passar do enunciado da condição de semelhança entre dois triângulos e sua representação figural consiste, portanto, em “mudar a forma pela qual um conhecimento é representado”.

A originalidade das atividades matemáticas serem desenvolvidas nesta perspectiva está na mobilização simultânea de ao menos dois registros de representação ao mesmo tempo, ou ainda, na possibilidade de troca, a qualquer momento, de registro. Naturalmente, é possível que um registro possa ser mais privilegiado que o outro, dependendo da fase de resolução da atividade matemática. No entanto, deve existir sempre a possibilidade de conversão.

Duval (2009) considera que uma representação só funciona de fato, ou seja, permite o acesso ao objeto representado, quando são atendidas as seguintes condições: “que sejam disponibilizados ao menos dois sistemas semióticos diferentes para produzir a representação do objeto e que possa haver conversão “espontaneamente” de um sistema ao outro” (DUVAL, 2009, p. 38). Nesse sentido, quando essas condições não são atendidas a representação e objeto representado são confundidos, e desta forma, duas representações, ainda que distintas, de um mesmo objeto não serão reconhecidas como sendo representações do mesmo objeto.

TRATAMENTO DE REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS

Conforme já mencionamos, nem todos os sistemas semióticos permitem todas as atividades cognitivas fundamentais, os que permitem são denominados por Duval de R, de representação Semiótica. De acordo com Duval (2008), tais atividades estão relacionadas a tratamento e a conversão. Dois procedimentos comumente confundidos, embora não há razão explicita para que isso ocorra, pois ambos são “radicalmente diferentes.” (DUVAL, 2008, p. 15).

Um tratamento é uma transformação que se efetua no interior de um registro, e mobiliza apenas um registro de representação. A conversão, ao contrário, é uma transformação que faz necessário a mudança de um registro para outro, porém conserva a referência ao mesmo objeto.

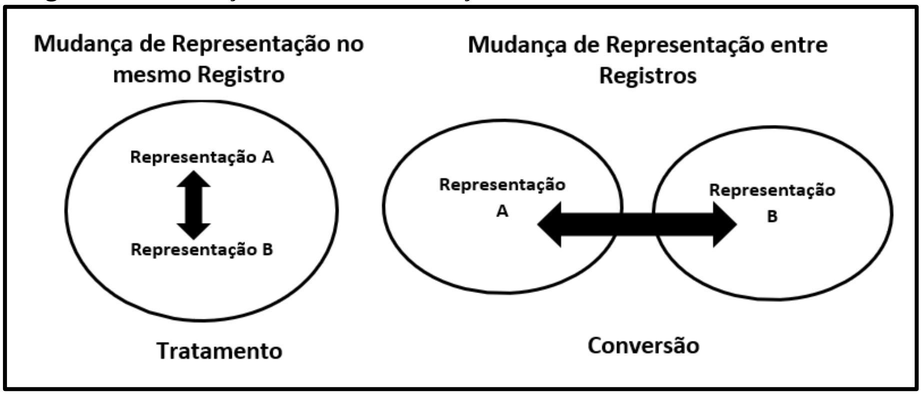
Duval (2009) diferencia os dois tipos de transformação da seguinte forma:

> Um tratamento é a transformação de uma representação obtida como dado inicial em uma representação considerada como terminal em uma relação a uma questão, a um problema ou a uma necessidade, os quais fornecem o critério de parada na série de transformações efetuadas. Já a conversão é uma transformação externa em relação ao registro de representação de partida. (DUVAL, 2009, p. 57 e 58)

Resumidamente, no tratamento passa-se de uma representação a outra, mas no mesmo registro a conversão é uma transformação que ocorre entre registros, mudando-se a representação do objeto de estudo, porém conservando em termos a matemática inicial.

Como exemplo de conversão, tem-se da língua natural para a expressão algébrica e para a representação gráfica cartesiana. Com o objetivo de tornar clara a diferença entre as duas transformações criamos o esquema ilustrativo da Figura nº 7.

Figura 7 – Diferença entre as transformações semióticas



Fonte: Produção da autora

De acordo com Damm (2015, p. 182) sem a compreensão da diferença entre estes dois tipos de transformação não haverá a compreensão do objeto matemático, pois, de acordo com Produção da autora“de nada adianta a mobilização de uma variedade de representações, se não houver a coordenação desses vários registros de representação”, e para que isso ocorra deve-se ter claramente definido o papel de cada um.

De acordo com Almouloud (2007), a mudança de registro constitui um ponto delicado da aprendizagem em geometria no ensino fundamental e médio, podendo persistir até a universidade, pois a dificuldade matemática pode não está localizada apenas no objeto matemático, mas também em toda a rede de representação que envolve as informações contidas nos problemas matemáticos. Para o autor, a maior parte dessas dificuldades geométricas são de origem didática e linguística.

No entanto, Duval (1999 apud Almouloud, 2007, p. 79) ressalta que para perceber uma mudança de registros é necessário compreender a matemática em profundidade e, é possível que os alunos não cheguem a concretiza-la, “A mudança de um registro para outro pode ser concretizada apenas por professores ou matemáticos, mas não pelos aprendizes (DUVAL, 1999 apud ALMOULOUD, 2007, p. 79).”

Uma vez efetuada a conversão, apegamo-nos aquele registro que nos sentimos mais confortável para trabalhar o objeto matemático. No entanto, do ponto de vista cognitivo, Duval (2008) considera que a conversão de registros, ao contrário, é a atividade de transformação representacional fundamental, “aquela que conduz aos mecanismos subjacentes à compreensão. (DUVAL,2008, P. 16).

Contudo, é necessário observar que a atividade de conversão é menos imediata e simplista do que somos levados a crer pois é necessário um amplo domínio do objeto matemático para poder realiza-la. Duval (2009, p. 63) chama atenção a este fato quando diz que “a conversão das representações semióticas constitui a atividade cognitiva menos espontânea e mais difícil de adquirir para a grande maioria dos alunos".

Duval (2008) aponta que a conversão exerce um papel mais reduzido: escolher o registro em que os tratamentos serão mais econômicos, ou obter um segundo registro que sirva de suporte aos tratamentos que já estão sendo feitos em outro registro. No entanto, ressalta que "as conversões não têm qualquer influência nos processos matemáticos de justificativa ou prova." (DUVAL,2008, p**.**16)

Segundo Duval (2009), algumas conversões podem ser mais simples que outras, o que determina o caráter natural ou arbitrário de uma atividade de conversão é a congruência ou a não-congruência entre representações.

> Nesse caso duas situações podem ocorrer: Ou a representação terminal transparece na representação de saída e a conversão está próxima de uma situação de simples codificação - diz então que há congruência - ou ela não transparece absolutamente e se dirá que ocorre a não-congruência. (DUVAL, 2009, p. 19).

Não é nosso objetivo apresentar neste texto uma análise dos fenômenos de congruência e não – congruência, pela extensão e densidade da discussão, haja vista que nosso intento nesta seção é apresentar de forma concisa as ideias principais da TRRS de Duval.

A principal contribuição da Teoria de Duval está na distinção entre um objeto e sua representação e na compreensão da matemática como uma atividade que mobiliza inevitavelmente uma variedade de registros de representação semiótica. Almeida (2010). Mas para que ocorra a apreensão do objeto matemático, Duval (2009) aponta a necessidade em se observar alguns aspectos, tais como:

- Ter claramente definida a distinção entre tratamento e conversão;
- Verificar os tratamentos específicos a cada registro sem misturar com os tratamentos em outros registros;
- O estudo dos graus de congruência e não - congruência durante as conversões.
- O fechamento dos registros e a articulação entre eles

Diante do exposto, a teoria de Duval permite sustentar teoricamente o nosso trabalho, na medida em que orienta a distinção entre um objeto e sua representação, bem como assina-la a importância da diversificação de registros de representação de um objeto matemático. Assim o ensino de geometria, conforme evidenciamos em nossos estudos preliminares, ainda privilegia muito mais o registro algébrico em detrimento de outras atividades, como por exemplo o registro figural.

Nesse sentido, o aprofundamento da Teoria nos permite identificar para além do algébrico outros registros presentes no processo, bem como as operações de conversão e tratamento que podem ser efetuadas para melhor compreensão e aprendizagem do que é proposto.

Para além do exposto, Duval ainda tece estudos acerca do aprendizado em geometria, conforme apresentamos na sessão seguinte.

3.5.2 APRENDIZADO EM GEOMETRIA SEGUNDO DUVAL

Duval (2008) destaca que o aprendizado em geometria envolve três tipos de processos cognitivos que estão estreitamente ligados: o processo de visualização, com respeito à como vemos uma figura; o processo de construção, por meio de ferramentas (régua; compasso; softwares) e o processo de raciocínio, que diz respeito ao que vai ser demonstrado e comprovado (teoremas; axiomas e definições). Ainda segundo o autor, esses três tipos de processos cognitivos estão entrelaçados, sendo os três indispensáveis cognitivamente para a proficiência em conteúdos geométricos. Falaremos a seguir um pouco mais de cada um destes processos.

A visualização

Duval (2008) contempla a visualização baseada na produção de representações semióticas que não aparecem apenas no início do pensamento matemático, mas também na descoberta de novas relações entre objetos matemáticos. Indo neste sentido, o autor diz que a visualização não é apenas a percepção visual, pois não compreende a visualização apenas como uma forma de representação de uma figura ou de um objeto. Para o autor, ela vai muito além disso. Funciona como uma atividade cognitiva intrinsecamente semiótica, cuja função não é apenas a de ver com os órgãos da visão.

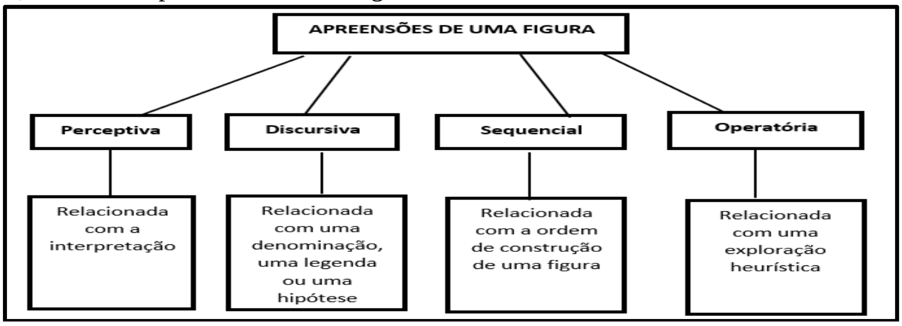
Para Duval (2008), a geometria, faz apelo a três registros: o das figuras, o das escritas algébricas e o da língua natural. De acordo com o autor, tratando-se da Geometria, “os objetos que aparecem podem, deste modo, ser diferentes dos tipos de objetos que a situação exige ver” (DUVAL, 2008, p. 13). Ou seja, ao visualizarmos somente um desenho de um objeto matemático, por exemplo, um polígono, não é simples perceber que este objeto tem particulares características como ângulos, lados, diagonais entre outros.

De acordo com o autor, a atividade cognitiva em geometria é complexa uma vez que os tratamentos, separados em diversos registros, talvez não sejam suficientes para resolver um problema matemático. Logo, os processos cognitivos em geometria necessitam da articulação entre o registro figural e língua natural.

Para justificar a utilização da figura em uma atividade geométrica, poderíamos recorrer à justificativas simplistas dizendo que somente a apresentação verbal em um enunciado, seria mais difícil a resolução do problema. De fato, as figuras podem ajudar na percepção de relações e hipóteses que não parecem evidentes na representação discursiva, mas a importância delas, vai muito além disso.

Duval pontua que o registro figural pode mostrar de maneira mais clara a solução de um problema geométrico, e ainda destaca que: a própria diferença do que uma figura é capaz de "mostrar" ao estudante e ao professor, sugere que há diferentes apreensões de uma mesma figura" (DUVAL, 2012a, p. 120). O autor destaca quatro tipos de apreensões de uma figura, as quais relacionamos no Quadro nº 6.

Quadro 6 – Apreensões de uma figura



Fonte: Duval (2004)

- Perceptiva: diz respeito à interpretação das formas que permite identificar ou reconhecer os objetos matemáticos.
- Discursiva: corresponde à outras propriedades matemáticas da figura além das que estão assinaladas por uma denominação, uma legenda, ainda que não estejam explícitas visualmente.
- Sequencial: refere-se a ordem de construção de uma figura geométrica com ajuda de algum instrumento (software; régua e compasso etc.)
- Operatória: refere-se às modificações e/ou transformações que sofre a figura inicial e pela reorganização perceptiva que essas modificações apontam para obter novos elementos que podem levar à solução de uma situação – problema.

Há ainda, de acordo com ao autor, dentro da percepção operatória três diferentes modos de uma modificação de uma figura: modificação mereológica, (quando uma figura é decomposta em subfiguras de mesma dimensão), modificação ótica (quando representa a variação de tamanho de uma mesma figura, conservando a forma e orientação no plano) e modificação de posição (quando na figura se conservam o tamanho e a forma, porém, ocorre a variação de orientação: rotação ou translação.)

Dos quatro tipos de apreensões Duval (2012b) considera que a aprendizagem dos tratamentos propriamente figurais deve ser uma aprendizagem centrada nas apreensões perceptiva e operatória das figuras e não nas apreensões sequenciais e discursivas. Para o autor:

> "[...]deve-se levar em consideração todos os fatores que mexem com a visibilidade de uma operação, quer dizer, os fatores de organização perceptiva de uma figura que podem contribuir para a mobilização espontânea desta operação ou, ao contrário, inibi-la." (DUVAL, 2012b, p. 289. Trad. Thadeu Moretti)

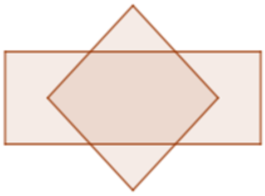
No que diz respeito a maneira de "ver" uma figura, o pesquisador explica que é possível analisá-la cognitivamente em função de sua forma, dos conhecimentos geométricos que mobiliza e das ferramentas utilizadas para sua construção, uma dessas ferramentas são os softwares de construção.

Para Salazar (2009), no registro figural dinâmico o sujeito interage de maneira diferente com as três atividades cognitivas fundamentais para a constituição de um registro (formação, tratamento e conversão), visto que as funções de arrastamento e manipulação direta permitem que se construam relações entre os tratamentos figurais e discursivos da figura de maneira diferente em relação a quando se trabalha em um ambiente não dinâmico, além disso, facilitam os processos de visualização do objeto matemático.

Para Duval (2011), ver é "operar uma desconstrução dimensional de formas que reconhecemos imediatamente em outras formas que não enxergamos à primeira vista, e isso sem que nada mude na figura afixada no monitor ou no papel." (DUVAL, 2011, p. 87)

Na Figura 8 trazemos um exemplo de três maneiras de visualizar uma figura geométrica plana na perspectiva do autor. À primeira vista o observador pode enxergar duas figuras sobrepostas, mas se observada pelo ponto de vista da visualização geométrica na ótica de Duval, teremos pelo menos mais três maneiras de enxergar essa mesma figura sem que haja qualquer alteração nela. Na primeira visualizamos 5 formas poligonais (dois triângulos; dois pentágonos e um hexágono), na segunda dois polígonos regulares (quadrado e retângulo) e na terceira 8 arestas ou dois lados.

Figura 8 – Formas de visualização de uma mesma figura

FIGURA	1ª forma de visualização	2ª forma de visualização	3ª forma de visualização
	5 formas poligonais (dois triângulos, dois pentágonos e um hexágono)	2 polígonos regulares (um quadrado e um retângulo)	8 arestas (ou lados)

Fonte: Duval (2011)

Naturalmente, essa variação no modo de ver uma figura exige um longo treinamento e não vem de forma automática. Duval (2011) revela que existe um salto cognitivo considerável entre a maneira tradicional e a maneira matemática de ver, de acordo com o autor, essa variação se opera no olhar e não no deslocamento de uma tela de computador ou um traço a mais no papel, haja vista que nada muda na figura original.

Duval (2011) pontua que no registro das figuras há predominância perceptiva das unidades de dimensão superior sobre as de dimensão inferior. Por exemplo, é mais fácil perceber um quadrado (dimensão 2D) do que os lados do quadrado formados por segmentos de reta (dimensão 1D). O que já não ocorre no registro discursivo, onde há predominância dos objetos de dimensão 0D ou 1D. Neste registro as unidades figurais são notadas a medida em que vão sendo enunciadas no teorema ou propriedades, para então, no final a figura ser percebida como todo.

Importante também salientar a diferença que Duval (2011) estabelece entre figura e desenho. O desenho, nesse caso, seria a configuração particular de um objeto mostrada no papel, em um quadro negro, ou no monitor de um computador, enquanto que a figura pode ser compreendida como as propriedades do objeto representados pelo desenho. Para o autor, o ensino da geometria permanece organizado na ignorância dessa distinção, e ela é fundamental para que seja feita uma diferenciação ainda mais importante entre o olhar, e a visualização. O autor destaca que “uma figura é identificada pelas propriedades do objeto, que não vemos porque nenhum desenho as mostras em sua generalidade. Elas somente serão alcançadas por conceitos, isto é, os termos definidos nos enunciados.” (DUVAL, 2011, p. 91)

O processo de visualização é elemento primordial no ensino de Semelhança de Triângulos, muito em função de que seu estudo envolve conhecimento em torno das relações internas das figuras. É por meio da visualização que o aluno reconhece certas propriedades, como a medida dos lados e dos ângulos internos e externos. Em triângulos ampliados ou reduzidos homoteticamente, a visualização é extremamente importante na percepção geométrica do que ocorre com suas propriedades, em tais condições.

Em nosso conjunto de atividades, no que diz respeito à visualização, observaremos se as figuras construídas utilizando o registro figural dinâmico, nos permite a realização dos tratamentos específicos que listamos nesta sessão, em particular a apreensão operatória.

As construções

Duval (2012b) reforça a importância das construções ao afirmar que as atividades de construção “ensinam a ver”, isto é, permitem descobrir, mobilizar e controlar a produtividade heurística dos objetos matemáticos. Neste estudo, as utilizaremos como um recurso para facilitar o desenvolvimento da aprendizagem de conceitos de semelhança de triângulos, o meio para um fim, que poderá contribuir sobremaneira para comprovação ou descarte das conjecturas levantadas pelos alunos.

Em vista disso, assumimos em nosso trabalho a mesma concepção de Duval (2008) para as construções, ao concebe-las como um processo caracterizado por instrumentos de configurações que podem ser trabalhadas como um modelo, no qual ações e resultados observados estão ligados aos objetos matemáticos representados. Neste caso, os objetos matemáticos são acessíveis via representação, e a qualidade da representação é muito importante para auxiliar a visualização, e consequentemente a compreensão desse objeto, de acordo com Duval (2008).

Na sessão seguinte apresentamos uma breve analise do que vem sendo discutido em pesquisas relacionadas à importância do raciocínio geométrico, a última etapa da aprendizagem em geometria na perspectiva de Duval.

O Raciocínio Geométrico

De acordo com Lorenzato (1995) sem conhecer o raciocínio interpretativo da geometria os alunos raramente conseguiriam resolver situações de vida que necessitassem de geometria, posto que desta forma, segundo o autor, “a leitura interpretativa do mundo torna-se incompleta, a comunicação das ideias fica reduzida e a visão da matemática torna-se distorcida.” (IBID,1995, p. 8).

A investigação que desenvolvemos procura criar ambientes de aprendizagem centrada no aluno que o ajudem a desenvolver a capacidade para explorar, conjecturar e raciocinar logicamente. Com o objetivo de proporcionar situações em que eles promovam o debate analise da teoria m as situações geométricas propostas e alcancem interpretações que os aproximando objeto que aqui se discute.

Nesta abordagem didática que aqui propomos os alunos passam a ser sujeitos atuantes na descoberta de relações geométricas, por meio da exploração e experimentação utilizando, principalmente, o raciocínio indutivo. Neste caso, o raciocínio formal passa a ter um caráter de validador das conjecturas descobertas intuitivamente. A respeito da descoberta intuitiva alicerçada em conhecimentos pré-existentes, Duval (2008) pondera que o raciocínio em geometria é um processo que permite conseguir novo conhecimento a partir de informações dadas. É o conhecimento existente, que será responsável por confirmar, explicar e estender o novo conhecimento.

Quando um professor pede que seu aluno defina triângulo, provavelmente este utilizará elementos que estão explícitos e responderá "triângulos são figuras de três lados", no entanto, uma definição formal precisaria da compreensão de que triângulo é um polígono, este por sua vez depende da definição anterior de ângulo e que "figura" não se limita apenas ao grupo de polígonos. Neste caso o raciocínio formal vem a partir de um conhecimento existente, oriundo, talvez de noções elementares que este aluno traz consigo dos anos anteriores quando lhe foi introduzido o ensino de triângulos. Estes conhecimentos anteriores é que permitem a construção do novo.

Ainda segundo Duval (2012), considerando mais amplamente, o raciocínio em suas formas mais elaboradas: a argumentação e a dedução. Neste caso o autor avalia que a argumentação e a dedução não podem estar desvinculadas do registro da língua natural, em se tratando de geometria a dedução se refere às definições, aos axiomas e aos teoremas que são enunciados em língua natural.

Na análise do ensino de semelhança, criticamos o modelo pautado apenas em exposição do conteúdo seguida de exercícios, com pouco (ou nenhum) estímulo ao raciocínio geométrico. As recomendações dos autores vêm ao encontro do que defendemos para o ensino de semelhança de triângulos na pesquisa e o que indicam os PCN: formulando conjecturas e por meio delas validar e construir os conceitos geométricos; abordagens diversas, indo além do livro didático e a associação dos conceitos geométricos com outras áreas da matemática e até outras disciplinas.

Para desenvolver o raciocínio geométrico dos alunos é pertinente trabalhar com situações de aprendizagem que os levem a estabelecer relações entre figuras espaciais e suas representações, envolvendo sua observação sob diferentes pontos de vista, construindo e interpretando suas representações. O professor deve valorizar as interpretações e conjecturas elaboradas por eles, o ensino da geometria não deve ser determinado por uma escala de critérios a serem alcançados, haja vista que bons resultados em provas e testes não implica necessariamente que o aluno tenha desenvolvido a habilidade de raciocinar geometricamente.

Em uma situação na qual um aluno ao tentar resolver uma situação problemática acerca do ensino de triângulos, utilizando algum software matemático que lhe possibilite simular interações para que possa explorar as propriedades geométricas ele chegará à conclusão de que não é necessário conferir se todos os ângulos dos triângulos são congruentes e se todos os seus lados são proporcionais para saber se ambos são semelhantes, basta que eles apresentem algumas das condições necessárias, assim encontrar soluções para o problema. Neste caso, o raciocínio espacial é fundamental para que ocorra o êxito na resolução do problema, pois segundo Duval (2008), é dele que parte a capacidade do aluno em ‘ver’, para investigar e para refletir sobre os objetos espaciais, imagens, relações e transformações.

Tomemos como exemplo, um problema retirado de um dos livros do 9º ano por nós analisado. “Em determinada hora do dia uma pessoa de 1,80 m de altura faz uma sombra de 1,50 m. Neste mesmo momento um prédio próximo à pessoa faz uma sombra de 20 m. determine a altura do prédio.” (ANDRINI E VASCOLELOS, 2015, p. 64)

Nesse caso a representação mental dos objetos geométricos é fundamental para a análise e síntese futura de um conceito, no caso a propriedade de semelhança. Para formular a imagem do objeto em questão, o aluno terá de assumir a posição relativa da pessoa e do prédio com suas respectivas sombras para finalmente visualizar os triângulos semelhantes. Sem a capacidade de orientação desenvolvida, provavelmente essa representação tornar-se-ia bem mais complexa para esse aluno.

Em situações como a evidenciada nesse problema, percebemos claramente a importância dos três processos de aprendizagem em geometria que aqui discutimos. Quando analisamos o enunciado do problema (língua natural) geralmente sentimos a necessidade de aspectos visuais que auxiliem a resolução. Por meio das representações é possível melhor compreender as propriedades das figuras e fazer conjecturas que serão comprovadas ou descartadas com o raciocínio geométrico, e finalmente, após todo esse processo chega-se à solução do problema que será expresso por meio do cálculo da proporção (registro algébrico).

Vimos então a importância de três elementos essenciais ao aprendizado da geometria: a visualização, as construções e o raciocínio. Para Duval (1998) esses três de processos cognitivos estão entrelaçadas e são indispensáveis cognitivamente para a proficiência em geometria.

Também nesta seção refletimos sobre a importância de propor situações para a sala de aula onde as construções contribuem para que o aluno possa ter uma melhor compreensão dos conteúdos geométricos.

Após a análise do ensino Semelhança de Triângulos, e identificadas as nossas configurações metodológicas partiremos para a etapa de descrição da aplicação das tarefas construídas com base em nosso quadro teórico. É a partir dessa análise que a questão de pesquisa: **Uma sequência de atividades com enfoque em Representações dinâmicas pode contribuir para o desenvolvimento de conhecimentos de alunos acerca de Semelhança de Triângulos?** Será respondida.

CAPÍTULO IV

APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DAS TAREFAS PROPOSTAS

4.1 PARÂMETROS UTILIZADOS NA CONSTRUÇÃO DO CONJUNTO DE ATIVIDADES

O conjunto de tarefas de exploração e investigação que auxiliará em nossa pergunta de pesquisa está pautada no que recomendam Ponte (2008) e Ponte, Brocardo e Oliveira (2016) para a elaboração de tarefas de investigação[8].

Em uma investigação matemática é possível programar-se em como será iniciada, mas nunca como ela irá acabar, Ponte; Brocardo e Oliveira (2016) recomendam que elas devem ser organizadas conforme o desenvolvimento vai ocorrendo, pois, de acordo com os autores a "variedade de percursos que os alunos seguem, os seus avanços e recuos, as divergências que surgem entre eles, o modo como a turma reage às intervenções do professor são elementos imprevisíveis numa aula de investigação." (IBID, 2016, p. 25).

Contudo, para que isso ocorra é preciso que a abordagem investigativa que pretendemos conduzir proporcione uma experiência produtiva ao nível dos processos matemáticos envolvidos e no pensamento geométrico tais como procura de regularidades, formulação, teste, justificação e prova de conjecturas, reflexão e generalização, existindo assim múltiplas oportunidades para o trabalho criativo e significativo durante uma investigação (Ponte, 2008).

Nesse sentido buscamos definir as tarefas propostas para a coleta de dados de forma que não estejam isoladas, sem qualquer conexão uma com a outra, e que permita aos sujeitos a compreensão da propriedade de semelhança de triângulos, a compreensão dos procedimentos de construção no software, e o conhecimento das formas de representação matemática conforme recomenda Ponte (2008).

4.2 OS SUJEITOS DA PESQUISA

Os sujeitos desta pesquisa são 8 alunos do 9º ano do Ensino Fundamental, com idades de 13 a 15 anos, todos egressos do 8º ano. Dos 12 alunos que aceitaram participar da pesquisa,

---

[8]Por tarefas de investigação assumimos a definição apresentada por Ponte (2008). Este autor considera que tarefa possui um conceito próximo, mas distinto de atividade. Uma atividade pode incluir a execução de numerosas tarefas, pelo seu lado, a tarefa representa apenas o objetivo de cada uma das ações em que a atividade se desdobra e é exterior ao aluno (embora possa ser decidida por ele). Em nosso estudo, quando nos referirmos às tarefas de investigação que sustentarão o estudo, poderemos usar os termos "tarefa" e "atividade" como sinônimos, apenas por questões de coesão textual, mas o significado que adotaremos será aquele dado por Ponte (2008) para tarefas de investigação.

o grupo foi reduzido para 11, e finalmente para 8, em virtude das desistências logo nos primeiros encontros.

Por questões de limitações do laboratório[9], as tarefas da sequência foram desenvolvidas em duplas. Os participantes foram orientados a escolher um colega para forma sua dupla e permanecerem sempre utilizando o mesmo computador até o final da aplicação do estudo, para não correr risco de confusão na armazenagem dos arquivos. Os 8 remanescentes que integram o quadro de sujeitos serão identificados por nomes fictícios escolhidos por eles, da seguinte forma: Dupla A (Alice e Ariel); Dupla B (Leia e Mérida); Dupla C (Jane e Luke); Dupla D (Arthur e Aleph).

4.3 O EXPERIMENTO

Iniciamos esta seção descrevendo os procedimentos de nossa pesquisa. O experimento foi desenvolvido em duas etapas: A primeira etapa, Etapa I onde ocorreu à familiarização deles com o software e a revisão de algumas noções geométricas acerca de conhecimentos mobilizados dos alunos relacionados a conteúdos básicos de geometria plana e a outra dedicada à propriedades de Semelhança de triângulos. No quadro nº 5 ilustramos esquematicamente a configuração de aplicação da sequência de atividades do estudo.

ETAPA I

Atividades de familiarização

Antes de iniciar a fase da empiria avaliamos que havia a necessidade de revisar saberes imprescindíveis para o estudo uma vez que alimentam o saber Semelhança de Triângulos, tais como segmentos; lados, altura; ângulos congruentes, entre outros.

Essa relação hierárquica entre saberes, Chevallard (1991) define como ecologia didática. O termo faz alusão a elementos da Biologia e da relação entre ecossistema, nicho e habitat. Em nosso estudo podemos considerar, de acordo com a ecologia didática de Chevallard (1991), que Triângulos é o habitat onde o conteúdo semelhança de triângulos está inserido.

[9] A autora principal do estudo lecionava no estabelecimento de ensino à época em que a pesquisa foi desenvolvida, contudo, não esteve regente de turmas do 9º ano durante o ano letivo de 2019, portanto não houve contato pedagógico da pesquisadora com os sujeitos antes da aplicação das atividades. Em conversa com o professor titular da turma constatou-se que o conteúdo objeto desta pesquisa ainda não havia sido trabalhado antes da aplicação do estudo

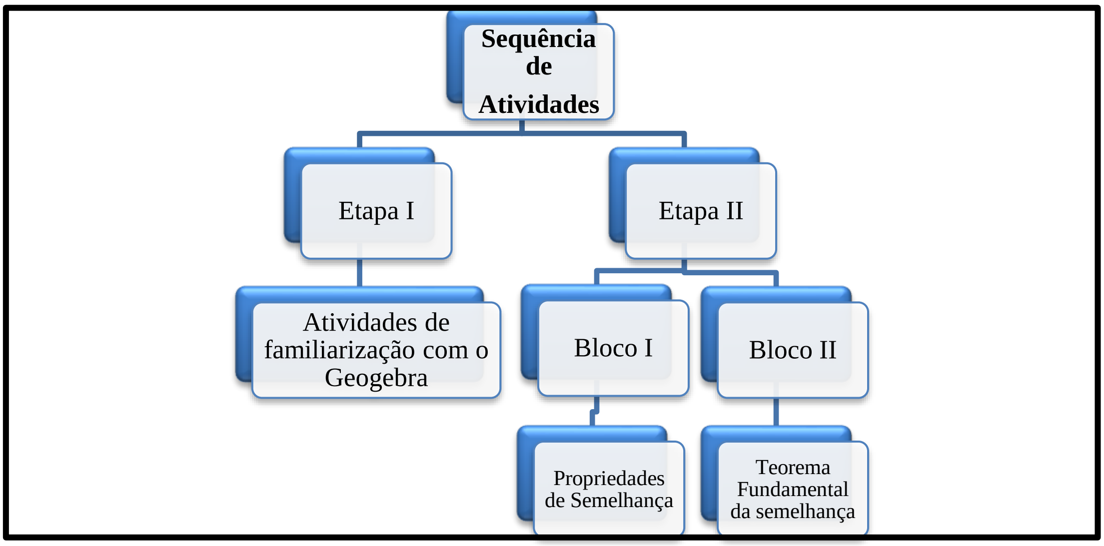
Portanto torna-se necessária a mobilização de saberes outros, que precisam ser evocados para o estudo de Semelhança.

Consideramos, neste caso, que as atividades de familiarização necessitavam ter a função de apresentar as ferramentas úteis às construções exigidas no conjunto de atividades do estudo e que ao mesmo tempo nos desse suporte para revisar alguns conhecimentos básicos sobre o conteúdo em quetsão. Desta forma para o primeiro encontro foram elaboradas 8 atividades de geometria plana, com este objetivo

Na primeira etapa, com dois encontros de 1h30m cada, objetivávamos fazer uma introdução das ferramentas e dos recursos do GeoGebra, isto é, familiarizar os participantes com o software, instruindo-os a utilizarem as ferramentas que seriam necessárias na execução das tarefas da sequência. A professora utilizou um projetor multimidia e apresentou aos participantes as principais ferramentas do GeoGebra.

Após o desenvolvimento das atividades da primeira etapa, foi feito um fechamento discutindo com o grupo algumas propriedades do programa, como por exemplo os recursos de arrastar/mover, o que acontecia com as figuras construídas quando este recurso era acionando. Também foi revisado com eles os elementos dos triângulos que foram aprendidos nos anos anteriores (lados, altura, ângulos, mediatriz), sem, no entanto, mencionar a Semelhança de Triângulos. As atividades desta etapa estão no Apêndice A da dissertação.

Quadro 7 – Detalhamento das fases da aplicação



Fonte: Produção da autora

ETAPA II

Na segunda etapa, as tarefas foram desenvolvidas à medida que as ações foram ocorrendo e, uma vez que não podemos prever as atitudes dos alunos, o cronograma sofreu algumas alterações. Previmos inicialmente seis encontros para cada bloco, contudo, foi necessário incluir mais um para a conclusão das atividades. Sobre essas imprevisões comuns de um campo de investigação, Zabala (1998) pontua que dificilmente se pode prever antecipadamente o que acontecerá em uma investigação, de acordo com o autor:

> (...) dificilmente prevemos com antecedência o que acontecerá em um ambiente de investigação, agora, este mesmo inconveniente é o que aconselha que os professores contem com o maior número de meios e estratégias para poder atender às diferentes demandas que aparecerão no transcurso do processo de ensino/aprendizagem. (ZABALA, 1998, P. 93)

Os encontros foram divididos por blocos de tarefas. A delimitação de encontros para cada bloco de tarefas apresentada no Quadro 8 foi estabelecida para fins de organização e controle do cronograma de aplicação

Quadro 8 - Descrição dos blocos de atividades

BLOCO	ATIVIDADES DESENVOLVIDAS	DURAÇÃO
I	Construção de triângulos semelhantes que abordam casos de Semelhança de Triângulos, onde os alunos possam identificar e conjecturar com base em ampliações ou reduções quais elementos (ângulos e lados) não se alteram e quais se modificam.	10 encontros com 1h30m cada
II	Tarefas que explorem a propriedade fundamental da semelhança de triângulos e sua relação com o Teorema de Tales	5 encontros com 1h30m cada

Fonte: Produção da autora

Uma vez que as representações são os elementos essenciais de nosso estudo, importa-nos que as tarefas sejam construídas de forma que os alunos possam conectar-se com diversas formas de representação das ideias matemáticas, passando informação de uma forma de representação para outra, afim de que estabeleçam relações entre as diferentes ideias matemáticas.

Nesse sentido, procuramos desenvolver atividades que promovessem a coordenação entre os registros discursivo, figural, simbólico e numérico e, ainda, consideramos as diferentes apreensões que uma figura pode provocar. Desta forma, preparamos situações que promovessem as apreensões perceptiva, discursiva, sequencial e operatória das figuras em relação ao desenvolvimento do conceito de semelhança.

O nosso referencial teórico e nossos estudos preliminares nos deram suporte para subsidiarmos a formulação das atividades e análise posterior dos resultados. Nas seções seguintes apresentaremos as tarefas organizadas em blocos e a análise das respostas dos participantes baseada em nosso referencial teórico.

4.3.1 BLOCO I: CONHECENDO A PROPRIEDADES DE SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS

Neste bloco de atividades com duração de quatro encontros com 90 minutos cada, incluímos tarefas que abordam casos de Semelhança de Triângulos, para que os alunos pudessem identificar e conjecturar com base em ampliações ou reduções quais elementos (ângulos e lados) se alteram ou não e quais se modificam, além de identificarem a razão de semelhança entre eles e sua importância para validar a proporcionalidade entre os lados correspondentes.

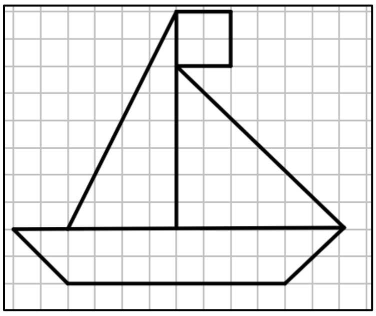
Nosso objetivo neste bloco, foi promover condições para que os participantes do estudo pudessem constatar por si próprios as condições de semelhança dos triângulos. Em vez de já apresentar os conceitos e somente após propor tarefas, pensamos em atividades onde fosse possível conjecturar sobre os elementos dos triângulos que se alteram ou não, de forma que ao encerrar as tarefas desse bloco eles percebessem que dois triângulos são semelhantes quando satisfazem a duas condições: os ângulos internos correspondentes têm medidas iguais e os lados correspondentes são proporcionais. Para atingir este intento explorou-se o entendimento das propriedades necessárias para classificar dois triângulos como semelhantes a partir da construção utilizando o software GeoGebra.

Nas construções solicitamos que eles mantivessem a janela de álgebra sempre desativada. Esse primeiro bloco ofereceu oportunidades de construção de conceitos básicos de geometria e preparou os alunos para o desenvolvimento das atividades do bloco seguinte. Os sujeitos ficaram livres para utilizarem materiais de consulta referentes a propriedades de triângulos, se assim o desejassem. A pesquisadora procurou interferir somente quando surgiam dúvidas relacionadas às ferramentas de construção, tentando deixá-los mais livres para explorar a propriedade de semelhança. As considerações referentes às concepções dos alunos e suas conjunturas acerca das atividades foram discutidas após o término de cada atividades, destacaremos algumas dessas concepções nas transcrições dos diálogos.

Algumas das tarefas deste e do outro bloco foram adaptadas do site GeoGebra.org, que dispõe de um Produção de atividades matemáticas em diferentes conteúdos, outras foram adaptadas de livros didáticos analisados na pesquisa e há ainda atividades inéditas elaboradas pela própria autora. As adaptações feitas em algumas das tarefas tiveram como objetivo torna-las exequíveis, no sentido de viabilizar as conjecturas dos alunos sobre a propriedade de e casos de semelhança de triângulos, posto que em algumas o próprio comando já deixava pistas das condições necessárias para a semelhança, principalmente as adaptadas dos livros didáticos. A seguir apresentamos as tarefas propostas do bloco I e após as respectivas análises.

ATIVIDADE 1

BIAI – Abra o arquivo A1B1 salvo em sua área de trabalho. Deixe a malha do GeoGebra ativa e amplie a imagem abaixo, contida no arquivo, na razão 2:1. Marque os ângulos em ambas as construções e após, responda os itens que seguem.



a) Calcule a área da figura já construída, depois calcule a área da figura ampliada que você construiu, em seguida determine a razão entre essas áreas.

b) Calcule o perímetro da figura já construída, depois calcule o perímetro da figura ampliada que você construiu e em seguida determine a razão entre essas áreas.

c) Observe as razões encontradas entre as medidas dos lados da imagem, das áreas e do perímetro e dos ângulos. Verifique se há alguma relação entre esses elementos nas duas figuras e estabeleça se essas figuras são iguais ou semelhantes.

Fonte: GeoGebra.org (2019) adaptado

a) Objetivos:

- produzir transformações e ampliação da figura em malhas quadriculadas, identificando seus elementos variantes e invariantes, de modo a introduzir a ideia de congruência e semelhança;
- Analisar e descrever mudanças que ocorrem no perímetro e na área de uma figura ao ser ampliada ou reduzida;

- Refletir sobre os significados das palavras igual e semelhante e relacioná-los com os elementos matemáticos analisados nas duas figuras.

b) Conhecimentos mobilizáveis

- Cálculo de área de poligonos
- Cálculo de perímetro
- Razão
- Ângulos Congruentes

c) Análise preliminar

A atividade foi adaptada do site GeoGebra.org, na original era exigido apenas que a figura fosse ampliada na razão 2:1. As perguntas foram pensadas com o objetivo de que por meio da ampliação os sujeitos percebessem que ao ampliar ou reduzir uma figura algumas características dela permanecem inalteradas (medidas dos ângulos) enquanto outras variam (medidas dos lados, área, perímetro). E quando a razão entre a medida dos lados é um número k, a razão entre seus perímetros é também igual a k e as áreas k^2.

Também tivemos a intenção de que os sujeitos pudessem refletir a respeito do significado das palavras igualdade e semelhança. Eles foram inclusive orientados a buscar o significado delas na internet e associar os sentidos das duas palavras com os elementos matemáticos analisados por eles nos itens anteriores.

Com relação às atividades cognitivas responsáveis pela compreensão das representações em Geometria, nesta tarefa observamos as apreensões abordada em Duval (2011), a perceptiva quando visualiza a figura do barquinho e tem reconhecimento imediato e automático das características de uma figura, e percebe diferentes polígonos (triângulo; quadrado, retângulo, e trapézio) compondo uma única figura, e a apreensão operatória do tipo modificação ótica, pois a figura deverá ser ampliada, e sua forma conservada.

O GeoGebra, neste caso, traz a vantagem em relação à malha em papel quadriculado da opção “distância, comprimento ou perímetro”, esta função foi desativada para que os próprios sujeitos calculassem as medidas de área e perímetro. Após a execução dos cálculos na ficha, a ferramenta foi ativada e eles poderiam confirmar seus resultados. Além disso, ao mover os vértices dos polígonos que compões a figura, perceberiam que a razão entre as medidas também seria modificada.

d) Análise das considerações dos sujeitos

As quatro duplas tiveram dificuldades em identificar o significado da notação 2:1, conforme podemos comprovar pelo diálogo transcrito da dupla B (Léia e Mérida).

> Léia: *Professora, não entendi o que é para fazer.*
> Prof.ª: *Você leu o enunciado da questão? Leia novamente.*
> Léia: *Devemos fazer um barquinho igualzinho esse que está feito aqui?*
> Mérida: *Igualzinho não. Maior, está escrito ampliar, ampliar é aumentar*.
> Prof.ª: *Exatamente meninas, vocês devem ampliar a figura.*
> Mérida: *Não entendemos também o que significa isso aqui (*aponta para a notação da razão 2:1*)*
> Prof.ª*: Falamos sobre isso em um dos encontros passados, lembram? Quando revisamos razão entre segmentos.*
> (A aluna procura suas anotações no caderno, e mostra para sua dupla.)
>
> Mérida: *Mas não tem nada escrito com dois pontos, a senhora não passou assim, só escreveu a fração. O que significa esse ponto? É dois dividido para um?*
> Prof.ª.: *Vamos esclarecer isso.*

A intervenção foi necessária porque as duplas tiveram dificuldade em entender a notação 2:1.Alguns até afirmaram que a figura deveria ser ampliada com o dobro do tamanho, principalmente em função do número 2, contudo, nenhuma das duplas foi capaz de associar a equivalência entre as representações 2:1 =$\frac{2}{1} = 2$.

Duval (2008) ressalta que as razões pelas quais os alunos tem dificuldades em aprender os conteúdos matemáticos estão relacionadas a confusão entre as representações de um mesmo objeto. Percebemos claramente nesta atividade, pela fala das alunas da dupla B, que elas não conseguiram executar o tratamento dentro do registro numérico. Temos nesse caso a representação simbólica $(2{:}\,1)$ que deveria ser transformada para a representação fracionária $\frac{2}{1}$ dos números racionais.

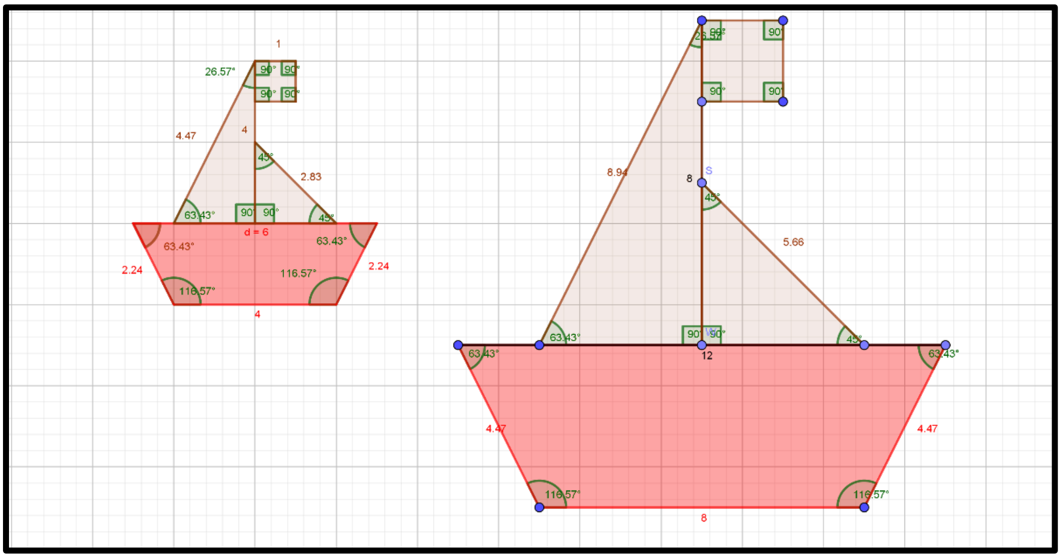
Apresentamos a seguir um diálogo transcrito dos áudios de gravações entre os participantes da dupla C (Jane e Luke).

> Luke: *Como a gente vai fazer para construir o outro barquinho?*
> Jane: *Não sei, não tem nada escrito no comando como as outras atividades que fizemos no GeoGebra.* (Se refere às atividades de familiarização com o software).
> Luke: *Acho que é a ferramenta polígono.*
> Jane: *Por que?*
> Luke: *Lembra que a professora falou que a ferramenta polígono pode ser usada para construir triângulos?Mas serve para construir retângulos também. Aí tem retângulo, triângulo e quadrado.*
> Jane: *Tá, só polígono?*
> Luke: *Acho que ponto e segmento também, bora (sic) experimentar com essas, se não der certo a gente faz de novo.*

Destacamos o diálogo da dupla C por encontrarmos nele indícios concretos de que os sujeitos fizeram uso da apreensão perceptiva da figura. Na análise preliminar da atividade esperávamos que os alunos fizessem uso desse tipo de atividade cognitiva. Sobre ela Duval esclarece que na apreensão perceptiva, há o "reconhecimento das diferentes unidades figurais que são discerníveis em uma figura dada" (DUVAL, 2012a, p. 125). A apreensão perceptiva é uma atividade imediata e automática em que uma figura destaca características que independem do enunciado. No diálogo da dupla é possível perceber que eles reconhecem que na figura unitária do barquinho há os polígonos triângulos, quadrado e retângulo.

Com relação às construções todos as duplas conseguiram concluí-las, apenas uma delas não conseguiu entregar a construção na razão estabelecida, fator que influenciou os resultados dos cálculos das áreas e perímetros. Apresentamos a seguir a construção da dupla A (Alice e Ariel) e a transcrição de um diálogo ressaltando as conjecturas das alunas, com relação ao tratamento figural.

Figura nº 9 - Construção dupla A: atividade BIAI



Fonte: Produção da autora

Na construção referente a atividade BIAI os sujeitos procederam o tratamento no registro figural dinâmico. A construção do barco menor já estava feita e salva no arquivo de origem da tarefa. Chamamos este tipo de tarefa no GeoGebra de "caixa preta", engloba geralmente, construções já prontas ou parcialmente prontas, para que os sujeitos produzam os tratamentos adequados.

A seguir o diálogo da dupla A que nos deram indícios dos tratamentos envolvidos na atividade BIAI.

Alice: *Acho que devemos contar os quadradinhos.*

> Ariel: *Não dá certo, tem lados que só tem meio quadradinho. Não dá para fazer em todos.*
> Ariel: *vamos começar pela parte debaixo que é reta, e tem os quadradinhos certos, na primeira são dois, então na outra tem que ser quatro*.
> Alice: *Os meninos estão usando essa ferramenta aqui* (Se refere a dupla Jane e Luke que usaram a ferramenta segmento com comprimento fixo).
> Ariel: *Mas como saberemos que comprimento colocar?*
> Alice: *Cada quadradinho tem 1 cm, vamos marcar os pontos e usar a ferramenta de triângulos.*

Percebemos no diálogo da dupla que elas produzem o tratamento figural na figura original criando conjecturas em relação a como proceder a ampliação, se contando os "quadradinhos" ou usando a ferramenta segmento com comprimento fixo. Dos tratamentos típicos dos registros figurais também percebemos aqui a apreensão operatória do tipo modificação ótica, pois a figura foi ampliada, e sua forma foi conservada. De acordo com Duval (2012a) este tipo de apreensão representa a variação de tamanho de uma mesma figura, conservando a forma e orientação no plano fronto –paralelo.

Em nossa análise preliminar acreditávamos que todas as duplas seriam capazes de fazer uso da apreensão perceptiva no registro figural, principalmente por ela ter caráter imediato. Contudo, os participantes da dupla D não conseguiram identificar diferentes polígonos na figura do barquinho, analisaram-na como um elemento unitário. Podemos dizer então, baseado na visualização de Duval (2011), que estes alunos não foram capazes de ver "geometricamente" a figura, pois de acordo com o autor "enxergar geometricamente uma figura é operar um desconstrução dimensional das formas que reconhecemos imediatamente, sem que nada mude na figura afixada no monitor ou construída no papel". (DUVAL, 2011, p. 87)

Apresentamos a seguir a descrição do diálogo da dupla C sobre como proceder os cálculos das áreas, e na sequência a resposta apresentada por eles.

> Professora: *Então pessoal, o que vocês fizeram para medir os lados?*
> Luke*: Primeiro contamos os quadrados, mas depois usamos a ferramenta exibir rótulo.*
> Prof.ª*: E a área e perímetro?*
> *Jane: Fizemos separado por que não tem fórmula para essa figura. A fórmulas dessa aqui* (aponta para o trapézio no monitor) *procuramos na internet, senhora falou que podia consultar o livro, mas não trouxemos.*
> Prof.ª*: Nessa figura vocês não conseguem enxergar outras?*
> Jane*: é mesmo...não tinha reparado dois triângulos e o retângulo.*
> *Luke: Mas agora já calculamos a área, não vou fazer de novo.*
> Prof.ª*: tudo bem, o importante é que conseguiram identificar todos os polígonos.*

As duplas A e C conseguiram calcular corretamente a razão entre os lados correspondentes e perímetro, chegando ao valor $k = 2$ e para área $k = 4$. A dupla B apesar de ter executado o tratamento figural e conseguido fazer uso da apreensão perceptiva não conseguiu chegar ao resultado $k = 2$ e $k = 4$em função de ampliar os lados da figura do trapézio de forma desproporcional à figura original. Já a dupla D não conseguiu proceder os cálculos em virtude de não ter utilizado a apreensão perceptiva da figura, embora tenham ampliado corretamente e usando, portanto, a apreensão operatória do tipo modificação ótica.

No item “c” que pedia para as duplas analisarem às figuras e refletissem sobre os elementos (lados, perímetro, área e ângulos), esperávamos variações de respostas associadas a afirmativa de que nas figuras os ângulos são congruentes e a razão entre os lados e entre os perímetros são iguais. Apenas duas duplas chegaram a essa constatação. Com relação a verificação de que as figuras são iguais ou semelhantes, os sujeitos recorreram a internet para buscar o significado das palavras e, uma vez esclarecido o significado delas, responderam à pergunta, utilizando os valores das áreas, perímetros e lados como elementos para justificar as respostas.

Nessa atividade os sujeitos promoveram uma desconstrução dimensional da forma quem reconhecemos imediatamente (a figura do barco) em outras formas que não enxergamos à primeira vista, (polígonos presentes na figura) e isso sem que nada mudasse na figura afixada no monitor.

e) Fechamento da atividade e encaminhamentos

Após a conclusão da tarefa BIAI, discutimos no encontro seguinte sobre as respostas e percepções dos sujeitos, no sentido de consolidar as operações cognitivas envolvidas e esclarecer possíveis equívocos relacionados à semelhança de polígonos. Retomando os objetivos, a atividade teve o intuito de que os sujeitos fizessem comparações e percebessem os elementos variáveis e invariáveis quando duas figuras são ampliação uma da outra. Com relação a atividade BIIAI constatamos que:

- Os sujeitos tiveram dificuldade em executar o tratamento no registro simbólico e em entender que a representação $2:1$ é equivalente a $\frac{2}{1}$.
- A dupla B utilizou as apreensões esperadas na figura no tratamento do registro figural dinâmico, contudo não conseguiu chegar na resposta esperada para valores da razão K em função da ampliação de alguns dos lados não ter sido feita na razão estabelecida.
- Com relação aos ângulos, todos que construíram a ampliação de forma correta constataram que os ângulos correspondentes eram congruentes.

- No cálculo das áreas das figuras as duplas A, B e C procederam de forma separada, calculando a área de cada polígono e depois somando-as para determinar a área das figuras.
- Os sujeitos tiveram muitas dificuldades em encontrar os lados correspondentes das figuras, mesmo uma sendo ampliação da outra. Na atividade seguinte abordaremos a correspondência entre lados e ângulos correspondentes.

ATIVIDADE 2

BIAII - Construa um triângulo qualquer com a ferramenta polígono. Renomeie os Vértices desse triângulo de X, Y e Z. Assinale um ponto K fora dele. Trace três semirretas com origem em k passando pelos vértices desse triângulo. Na sequência, crie uma circunferência passando pelo Ponto K e centro em Y, marque as intersecções da circunferência e as semirretas, renomeie esses pontos por A; B e C e construa um triangulo com vértices nesses pontos. Crie uma segunda circunferência, desta vez passando pelo ponto K com centro em B, marque as intersecções e renomeie os pontos delas de D; E e F. Construa mais um triângulo com vértices nestes pontos. Construa a terceira circunferência com o centro em E passando pelo ponto K. Novamente renomeie as intercessões da circunferência com as semirretas renomeando os pontos de G; H e I. Por último, oculte todas as circunferências e o primeiro triângulo. Após a construção salve o arquivo e responda as perguntas que seguem.

1ª) Movimente os Ponto X; Y: Z e K. Descreva o que você percebeu.

2ª) Marque os ângulos dos triângulos ABC; DEF e GHI. que você observa com relação aos ângulos internos desses triângulos.

3ª) Meça os lados dos triângulos e deslocando os pontos X; Y; Z e K o que você observou no item anterior continua válido?

4ª) Analisando a figura que você construiu no GeoGebra o que você pode afirmar com relação aos triângulos construídos. Consegue perceber similaridades entre eles? Em caso afirmativo, identifique o motivo dessa possível similaridade.

Fonte: GeoGebra.org (2019) adaptado

Para a realização da tarefa não foi utilizada a opção homotetia presente no software. Pensamos ser mais proveitoso para o aluno utilizar uma sequência de recursos como ponto, reta, semirreta, ferramentas de compasso e polígono. A tarefa foi executada no quarto encontro, contudo, o laboratório de informática na ocasião estava sendo usado para reunião pedagógica. Como já havíamos perdido uma semana no cronograma, a atividade foi realizada em sala de aula usando o aplicativo GeoGebra no smartphone dos alunos.

.

a) Objetivos:

- Construir triângulos ampliados homoteticamente;
- Encontrar a razão de proporcionalidade;
- Identificar os lados homólogos nos triângulos ampliados;
- Observar quais elementos dos triângulos se alteram e quais permanecem inalterados quando estes são ampliados.
- Tratamento no registro figural dinâmico

b) Conhecimentos mobilizáveis

- Interpretação de texto através do enunciado;
- Propriedades geométricas;
- Conceitos matemáticos de segmentos; ângulos; lados correspondentes

c) Análise Preliminar

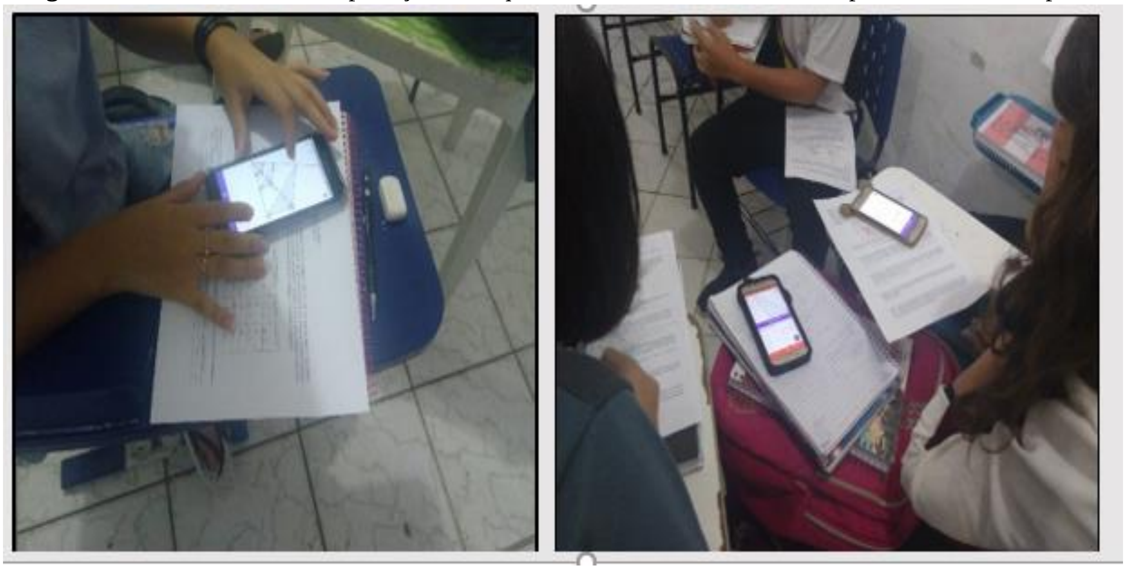
A tarefa BIAII teve como objetivo examinar a medida dos ângulos e a medida dos lados utilizando a ampliação de um triângulo homoteticamente, contudo, aos participantes não foi apresentado esse termo e nenhuma consideração referente a homotetia foi dada antes da execução da atividade. Neste caso ela foi usada como como um recurso para a ampliação dos triângulos.

Com relação as atividades cognitivas mobilizadas, os tratamentos e conversões de representações semióticas, destacamos a conversão do registro discursivo para o registro figural, e no registro figural o tratamento envolvendo as apreensões operatória por meio da modificação ótica e a apreensão sequencial.

Dessa forma o aluno poderia responder as perguntas analisando a figura construída no GeoGebra, e utilizando seus recursos de arrastar/mover e constatar o que acontece com os lados e ângulos correspondentes em cada triângulo. Por meio da apreensão perceptiva da figura, Duval (2009), e do tratamento no registro figural dinâmico é possível executar os comandos dos itens da tarefa e responder as perguntas. Nesse caso esperamos que os alunos percebam que ampliando ou reduzindo os triângulos os valores dos ângulos permanecem sempre iguais e os lados são modificados.

Não esperávamos que já nesta tarefa o conceito de semelhança de triângulos seja consolidado, até porque nada é exigido no que diz respeito à razão entre os lados correspondentes. O principal objetivo para esta atividade é que os participantes compreendam que triângulos com tamanhos diferentes podem ter ângulos iguais, e que mesmo ampliando ou reduzindo seus tamanhos essa relação se mante.

Figura nº 10 - Momentos de aplicação da sequência de atividades usando o aplicativo no Smartphone



Fonte: Produção da autora

d) Análise das considerações dos sujeitos

Para realizarem a construção da atividade BIAII os sujeitos deveriam seguir as orientações do comando e ficou nítido que eles não compreenderam a função da ferramenta "círculo definido por dois pontos", ainda que ela tenha sido abordada nas atividades de familiarização. A professora interveio para esclarecer aos sujeitos sobre a função da ferramenta "Círculo definido por dois pontos", discutiu-se a ideia de círculo, raio e diâmetro, os quais fazem o papel do compasso na construção geométrica.

Na conversão do registro da língua natural para o registro figural, os sujeitos tiveram muitas dúvidas em entender os comandos de instruções para a construção geométrica dos triângulos ampliados, quando fizeram uso da apreensão sequencial. Segundo Duval (2012a, p. 120), ela "é explicitamente solicitada em atividades de construção ou em atividades de descrição, tendo por objetivo a reprodução de uma dada figura."

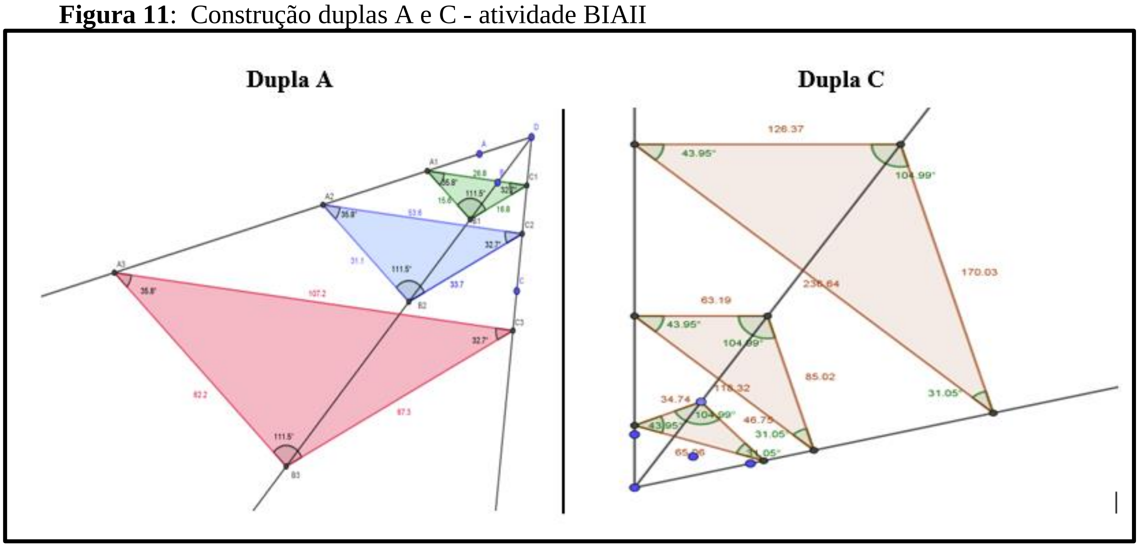
Entre as oportunidades de aprendizagem que foram criadas com essa tarefa, pode-se destacar a utilização de noções geométricas importantes para a construção de polígonos como reta, semirreta e segmento de reta, além de chamar atenção para o conceito de raio e de diâmetro, e para diferença entre reta, segmento de reta e semirreta. O recurso computacional enriqueceu a atividade, posto que proporcionou ao aluno uma visualização dinâmica da ampliação de triângulos. Assim, os alunos tiveram a oportunidade de utilizar ferramentas de medida e realizar medições para em seguida responder as perguntas.

Nem todos as duplas conseguiram três triângulos com ângulos congruentes, a dupla B conseguiu ampliar os triângulos, contudo, apenas o primeiro com esta característica. Além disso, alguns sujeitos tiveram dificuldades em utilizar o aplicativo no smartphone por já estarem habituados ao computador, na sequência apresentamos parte do diálogo transcrito da dupla B onde as alunas discutem sobre essa questão.

> Léia: *Não deu certo*
> Mérida: *Claro que deu, os ângulos estão iguais.*
> Léia: *Mas o primeiro não tá, eu acho que era para estar os três iguais, vamos ter que desfazer tudo. Acho que marcamos errado o raio do primeiro.*
> Mérida: *Deixa assim mesmo, nem vale ponto isso.*
> Léia*: Vou fazer de novo, acho que no celular é mais difícil porque no computador a gente fez tudo certo da outra vez.*

Ainda que tenham tido dificuldades, principalmente com a ferramenta *círculo definido por dois pontos*, Todas as quatro duplas conseguiram finalizar a construção, mesmo que uma delas não tenha conseguido três triângulos com ângulos congruentes. Fizeram, portanto, a conversão do registro da língua natural, para o registro figural. Na Figura nº 11 apresentamos a da dupla C.

Figura 11: Construção duplas A e C - atividade BIAII

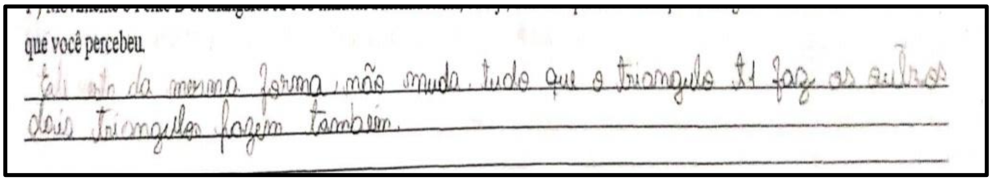


Fonte: Produção da autora

Uma vez que os sujeitos concluíram a construção e preencheram a tarefa, imediatamente associaram-na com a atividade anterior. Posto que em ambas o recurso de ampliação e apreensão operatória do tipo ótica estão presentes. Essa constatação dos alunos, confirma o nosso objetivo inicial ao criar as tarefas, de que elas não estivessem isoladas entre si e formasse uma conexão entre elas. Após a construção dos triângulos ampliados os sujeitos procederam o tratamento no registro figural, e responderam aos questionamentos da atividade. Destacaremos algumas das repostas relacionadas a cada item.

No item 1 todas as duplas deveriam perceber ao movimentar o ponto K, o qual na verdade era o foco da homotetia, que os triângulos seguiam o mesmo comportamento do primeiro triângulo de lados menores. Consideramos esta uma constatação bastante perceptível, portanto esperávamos que todas as duplas pudessem alcançar este entendimento.

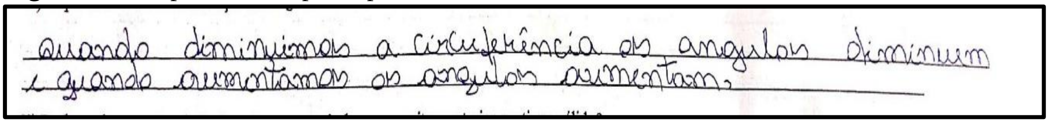
Figura 12: Resposta da dupla A para a atividade BIAII


que você percebeu.
fali esta da mesma forma, não muda, tudo que o triangulo 1 faz os outros dois triangulos fazem tambem.

Fonte: Produção da autora

O item II tratava da percepção de que ao utilizar o recurso mover do GeoGebra, os ângulos e dos triângulos aumentariam ou diminuiriam na mesma proporção, contudo permaneceriam iguais. Destacamos as respostas da dupla A.

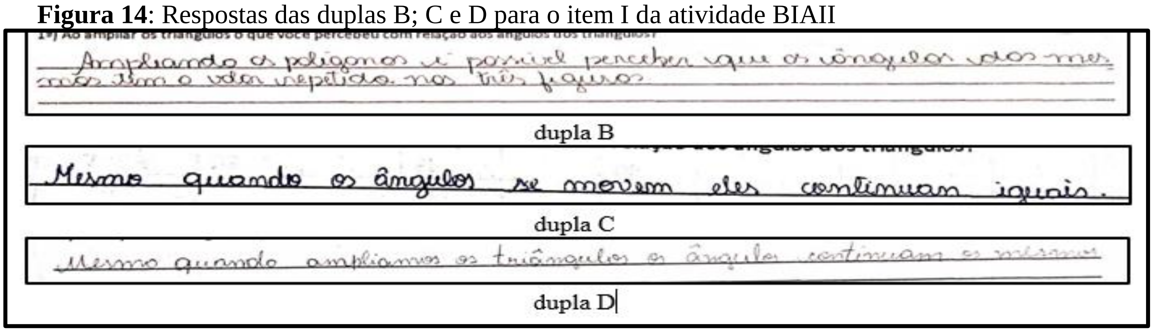
Figura 13: Respostas da dupla A para os itens II da atividade BIAII


quando diminuimos a circunferência os angulos diminuim e quando aumentamos os angulos aumentam.

Fonte: Produção da autora

E ainda para o item II apresentamos as respostas das duplas B; C e D; no Figura nº 14.

Figura 14: Respostas das duplas B; C e D para o item I da atividade BIAII


Ampliando os polígonos é possível perceber que os ângulos dos mesmos tem o valor repetido nas três figuras

dupla B

Mesmo quando os ângulos se movem eles continuam iguais.

dupla C

Mesmo quando ampliamos os triângulos os ângulos continuam os mesmos

dupla D

Fonte: Produção da autora

Ainda com relação ao item II todas duplas conseguiram responder de acordo com a nossa análise preliminar, esperávamos que os sujeitos identificassem que os ângulos dos três triângulos eram congruentes entre si. Obtivemos respostas que variaram dizendo que os ângulos eram iguais, conforme podemos constatar nos Figura nº 13 e 14, no entanto, nenhuma das duplas usou a palavra congruente, termo que já havíamos abordado no fechamento das Atividades I desse bloco.

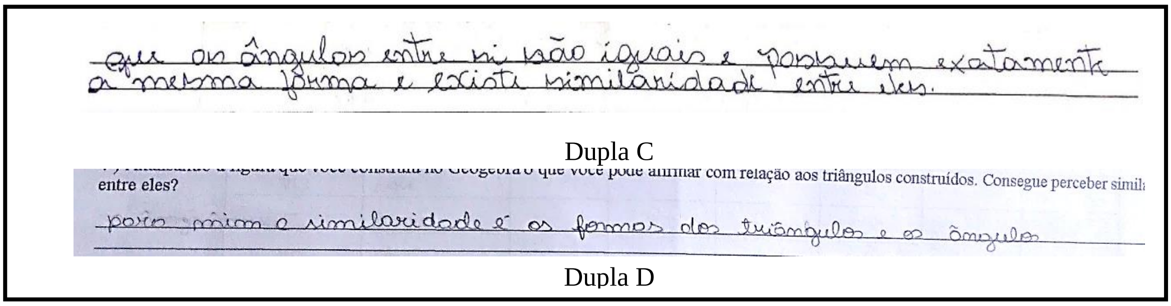
Já mencionamos que os sujeitos tiveram problemas em entender a função da circunferência para a construção dos triângulos, contudo, percebemos pela resposta da dupla A que eles conseguiram alcançar o entendimento de que as circunferências determinavam o tamanho do triângulo, ainda que não tenham mencionado os elementos "raio" ou "diâmetro" em suas respostas. Os pontos X, Y, e Z são pontos nas semirretas da construção, ao movimenta-los os sujeitos visualizariam a mudança de tamanho dos triângulos e ampliação ou redução dos lados, e ainda assim, os ângulos mantem-se congruentes nos três triângulos.

No Item II os sujeitos mediram os valores dos lados, movimentaram os pontos X, Y, Z e K e puderam perceber que os valores dos lados mudavam e diferente dos ângulos não eram iguais entre si. Apresentaram as seguintes respostas: a dupla escreveu que *"ao movimentar os pontos os triângulos aumentam e mudam os valores dos lados*"; a dupla B deu como resposta que *os lados dos triângulos aumentam e diminuem e são sempre diferentes*. A dupla C sublinhou que os "*os lados mudam de tamanho e são diferentes*" e finalmente, a dupla D identifica que "*todos os lados são diferentes e quando movimentam os pontos eles aumentam e diminuem."*

Para finalizar a tarefa perguntamos se os sujeitos perceberiam similaridades entre os triângulos, de forma a prepara-los para a atividade seguinte onde fariam os tratamentos relacionados aos lados correspondentes. Esperávamos respostas associadas à ideia de que os triângulos mesmo com tamanhos diferentes possuem similaridades entre si, e que os ângulos são elementos que não se alteram independente de seus tamanhos em construções de ampliação.

Naturalmente as respostas não corresponderam à nossas hipóteses integralmente. Isso porque, de acordo com Ponte (2016), dificilmente podemos prever as concepções dos sujeitos em sua totalidade. Observamos as respostas das duplas C e D no Figura nº 15.

Figura 15: Respostas das duplas C e D para o item 4 da atividade BIAII


que os ângulos entre si são iguais e possuem exatamente a mesma forma e existe similaridade entre eles.

Dupla C

... relação aos triângulos construídos. Consegue perceber simil... entre eles?

para mim a similaridade é as formas dos triângulos e os ângulos

Dupla D

Fonte: Produção da autora

As duplas C e D, apresentaram como similaridades entre os triângulos a sua forma e os ângulos entre eles. Note que a dupla C utiliza os termos igual e similar na mesma frase. Na atividade BIAI discutimos sobre os termos igual, semelhante e similar, o que nos leva a crer que a dupla ou não compreendeu o significado ou não atentou para a escolha de palavras na formulação da resposta.

Esperávamos com essa tarefa a associação dos sujeitos com a atividade anterior, no entanto, esse link não foi mencionado em nenhuma das respostas escritas, apenas na descrição do diálogo da dupla D podemos perceber essa conexão. Analisemos o diálogo entre a dupla D e a professora relacionado às concepções inerentes ao item 4 da tarefa.

> Arthur: *Professora não entendemos o que é para escrever nesse item. O que é similaridade*?
> Prof.ª: *Analise a construção de vocês, os três triângulos tem características comuns?*
> Aleph? *os ângulos se repetem, igual na do barquinho (se refere à atividade BIAI).*
> Prof.ª*: se repetem sempre? Mesmo se você mover ou arrastar os pontos? Averiguem todas as possibilidades antes de darem à resposta de vocês?*
> Arthur*: que possibilidades?*
> Prof.ª*: as dos itens 2 e 3 por exemplo.*
> Arthur*: o problema é escrever isso, não tô (sic) conseguindo colocar na resposta. Já sabemos que são os ângulos, e tudo que acontece com um acontece com o outro. Mas não sabemos por que eles se repetem sempre.*
> Prof.ª: *vocês devem discutir entre vocês e chegar a um consenso. Depois escrever com suas palavras o que vocês acham que é similar nas figuras e por que.*
> Aleph: *se a gente não conseguir, tem problema deixar em branco?*
> Prof.ª: *façam um esforço, abra uma nova janela do GeoGebra e refaça a mesma construção e observe quais ferramentas vocês usaram e qual a função delas, pode ajudar.*

Com relação ao item 4 todos as quatro duplas que procederam a conversão do registro da língua natural para o registro figural dinâmico não conseguiram identificar por qual motivo os triângulos, independentemente da posição em que fosse movimentado, permaneceriam iguais entre si. Na oportunidade do diálogo da professora com a dupla D ficou claro que esses alunos reconheceram que os ângulos ampliados homoteticamente apresentavam mesmo comportamento quando movimentados os pontos especificados na tarefa, essa constatação típica do tratamento figural é específica da apreensão optica, é o que Duval (2012b) chama de "Ver em profundidade".

e) Fechamento da atividade e encaminhamentos

Após a conclusão da atividade tivemos um momento para fazer o balanço das concepções e atitudes das duplas. Os sujeitos tiveram oportunidade de colocar em confronto suas estratégias, conjecturas e justificativas das respostas. Consideramos este momento parte imprescindível da investigação, uma vez que nos aponta quais elementos devemos reforçar, quais devemos retomar além de estimular os sujeitos a questionar e socializar suas respostas. De acordo com Ponte, Brocardo e Oliveira (2016) a fase de discussão de uma investigação matemática é fundamental "para que os alunos possam desenvolver a capacidade de comunicar e de refletir sobre o seu trabalho e o seu poder de argumentação." (IBID, 2016, p. 41)

Retomando o nosso objetivo na tarefa que foram principalmente estes: Identificar os lados homólogos nos triângulos ampliados; observar quais elementos dos triângulos se alteram e quais permanecem inalterados quando estes são ampliados e o tratamento no registro figural dinâmico, com relação a eles podemos destacar como resultados:

- Os sujeitos conseguiram identificar que os triângulos ampliados qualquer que fosse o tamanho permaneceriam com triângulos iguais entre si;
- Perceberam que os lados dos triângulos se alteravam quando movimentados os vértices dos triângulos;
- Compreenderam após a discussão no fechamento da atividade a função da ferramenta "círculo definido por dois pontos" para a construção e qual o papel do raio das circunferências na ampliação dos triângulos.

Na próxima atividade BIAIII os lados correspondentes serão objeto principal de discussão, e os valores preenchidos na tabela desta atividade serão utilizados. Posto que não foi nosso objetivo nesta tarefa focar nos lados correspondentes além da percepção de que eles se alteravam conforme os vértices eram movidos.

ATIVIDADE 3

BIAIII – Abra o arquivo referente à atividade BIAII e preencha a tabela a seguir.

		Lado I	Lado II	Lado III	Ângulo I	Ângulo II	Ângulo III
$\Delta t1$	Valor:						
	Rótulo:						
$\Delta t2$	Valor:						
	Rótulo:						
$\Delta t3$	Valor:						
	Rótulo:						

I - Encontre a razão entre os lados correspondentes dos triângulos. vocês conseguem perceber alguma relação entre eles?

II - Quando movimentados os pontos $X; Y; Z\ e\ K$ os valores das medidas dos lados dos triângulos sofrem aumento ou redução. Verifique se o valor da razão entre os lados correspondentes também sofre alteração.

III - Com suas palavras escreva uma conclusão para esta atividade. Analise a sua construção e a tabela preenchida, relacionando os elementos que podem sofrer alterações e os que permanecem sempre constantes e são comuns aos três triângulos.

a) Objetivos:

- Consolidar a noção de que triângulos de tamanhos diferentes, mesmo os que estejam em posições diferentes no plano, podem ter ângulos iguais;
- Introduzir a razão de semelhança entre os lados correspondentes;
- Fortalecer a ideia de que duas figuras mantêm a mesma forma quando apresentam lados correspondentes proporcionais e ângulos correspondentes congruentes.
- Dar significado à proporcionalidade entre os triângulos; e entre outros elementos como área e perímetro, fazendo conexão com a tarefa AIBII.
- Dar possibilidades aos sujeitos para que estes definam as condições para que dois ou mais triângulos sejam semelhantes.
- Reconhecer as condições necessárias e suficientes para que dois triângulos sejam semelhantes

b) Conhecimentos mobilizáveis

- Razão
- Proporção
- Condição de existência de um triângulo
- Interpretação de texto através do enunciado;
- Propriedades geométricas;
- Conceitos matemáticos de segmentos; ângulos; lados correspondentes

c) Análise preliminar

A Atividade BIAIII foi realizada no 6º encontro no laboratório em dois tempos de 50 minutos cada. Os sujeitos abriram o arquivo da construção referente à atividade BIAII salva em suas pastas de trabalhos e executaram as ações exigidas no comando dos itens da tarefa.

Ela teve como foco principal o tratamento aos lados correspondentes dos triângulos. Nas tarefas BIAI e BIAII os sujeitos puderam perceber que os ângulos das figuras construídas eram sempre congruentes, contudo, os seus lados eram de tamanhos variados. Já nesta atividade exploramos o significado da razão de semelhança entre os lados correspondentes e qual o papel dela na ampliação ou redução no tamanho dos triângulos.

Como os triângulos foram ampliados por homotetia os sujeitos deveriam encontrar respostas iguais para a razão entre eles. $\frac{DE}{AB} = \frac{EF}{BC} = \frac{DF}{AC} = 2$; $\frac{GI}{DF} = \frac{HI}{EF} = \frac{GH}{DE} = 2$ e $\frac{GI}{AC} = \frac{HI}{BC} = \frac{GH}{AB} = 4$. Ou no sentido contrário do numerador e denominador, encontrando os valores de $\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\ e\ \frac{1}{4}$.

Quanto aos registros de representação semiótica de Duval esperávamos que os sujeitos fizessem uso das apreensões perceptivas e operatórias. Para realizar o cálculo das razões entre os lados proporcionais, os sujeitos necessitariam realizar a conversão do registro figural (construção no GeoGebra) para o registro simbólico e em seguida os tratamentos pertinentes desse registro.

d) Análise das respostas dos sujeitos

Como os sujeitos já tinham construído os triângulos a atividade ocorreu de forma mais rápida que as duas anteriores. Somente a Dupla D não encontrou o arquivo de origem e precisou refazer sua construção. Analisaremos as respostas das duplas item a item.

Para responder os itens I; II e III, foi necessário o preenchimento da tabela de forma que os valores estivessem mais organizados para facilitar o cálculo da razão entre os lados correspondentes dos triângulos. Na Figura nº 16 apresentamos a tabela preenchida da dupla D.

Figura nº 16: Tabela da dupla D para a atividade BIAIII

		Lado I	Lado II	Lado III	Ângulo I	Ângulo II	Ângulo III
$\Delta t1$	Valor:	7.7	12.6	7.2	31.1	33.2	115.7
	Rótulo:	EF	FG	EG			
$\Delta t2$	Valor:	15.4	25.3	14.5	31.1	33.2	115.7
	Rótulo:	LJ	LK	JK			
$\Delta t3$	Valor:	30.8	50.6	29	31.1	33.2	115.7
	Rótulo:	PN	PM	NM			

Fonte: Produção da autora

No Item I foi solicitado que os sujeitos encontrassem a razão[10] entre os lados correspondentes dos triângulos, e se conseguiam perceber alguma relação entre eles. Surgiram dúvidas entre os participantes sobre como eles deveriam encontrar a razão entre os lados. Destacaremos o diálogo da dupla C.

> Jane*: (...) então a gente faz como? é para dividir né?*
> Luke*: claro que é.*
> Jane*: o lado do grande pelo do pequeno? (refere-se aos triângulos)*
> Luke*: mas são três triângulos, então são três contas.*
> Jane*: Eu acho que é mais.*
> Luke*: por quê?*
> Jane*: por causa do que diz no comando, sobre os lados. É um lado dividido pelo outro. Cada triângulo tem três lados.*
> Luke*: Então cada lado deve ser divido pelo lado de todos os outros? Se for assim, dá muito trabalho.*
> Jane*: Vamos chamar a professora (...).*

Os alunos solicitaram esclarecimento quanto ao cálculo dos lados correspondentes, tiveram dúvidas em identificar quantos e quais lados deveriam ser utilizados para proceder o cálculo da razão.

> Professora: *(...) que diz o comando?*
> Luke: *Encontre a razão entre os lados correspondentes dos triângulos. vocês conseguem perceber alguma relação entre eles?*
> Prof.ª: *então antes de encontrar a razão vocês precisam identificar qual lado corresponde ao outro.*
> Luke. *O que é correspondente? do mesmo tamanho?*
> prof.ª. *Estes são triângulo com três lados diferentes?*
> Jane: s*ão sim. Todo tem lados diferentes?*
> prof.ª: *Como chama o triângulo com três lados diferentes?*
> Jane: *Escaleno*.
> Luke: *Então devemos olhar o tamanho do lado? O menor lado do primeiro dividido pelo menor do segundo?*
> Prof.ª: *Pode ser, essa é uma correspondência entre eles.*

Neste item observamos que a maior dificuldade encontrada pelas duplas na atividade, foi localizar os lados correspondentes entre os triângulos. Fora o caso da dupla C, as demais duplas não tiveram dificuldade para identificar os lados correspondentes, no entanto a dupla A não obteve o mesmo valor para a razão entre os lados correspondentes, por conta do posicionamento do numerador e denominador nas frações. Este é, geralmente, um erro comum no ensino da propriedade de semelhança. Ao calcular a razão entre os lados, os alunos o fazem

---

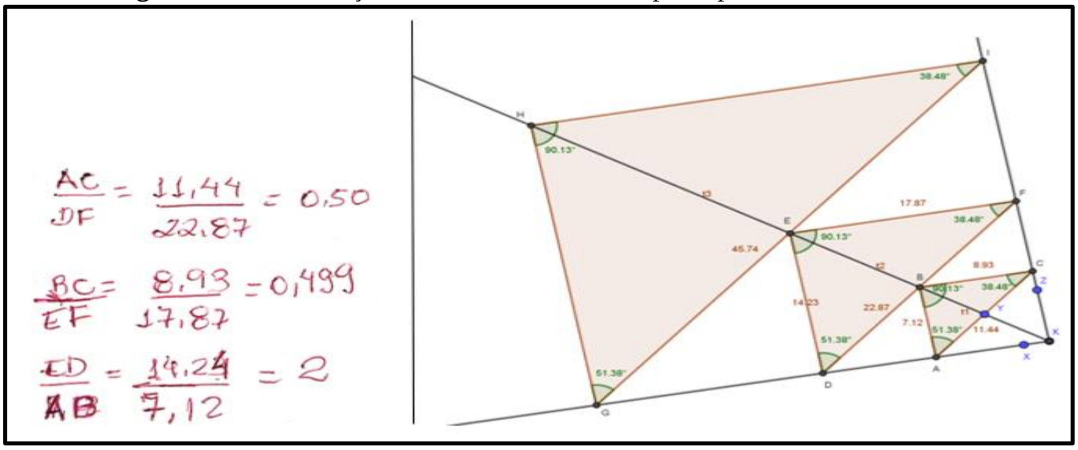
[10] Anteriormente, na Etapa I da pesquisa, a professora revisou o conteúdo de razão e proporção. Bem como a noção de segmentos proporcionais.

sem a interpretação do que estão a fazer. Se partem do triângulo maior, os numeradores devem ser valores das medidas deste triângulo ou vice e versa. A dupla A não atentou para este fato, logo não encontrou três valores iguais para as razões dos lados proporcionais.

Avaliamos que desconsiderar o erro da dupla como elemento para a aprendizagem seria pouco pedagógico, pois no momento de fechamento da atividade as alunas teriam a oportunidade de reavaliar suas respostas e identificar por qual motivo elas não encontraram três valores iguais para a razão dos lados correspondentes, como as outras duplas. Além disso, ao considerar o erro como parte importante do processo de aprendizagem, estamos indicando possibilidades para os alunos descobrirem algo novo – em que o método da investigação é tão relevante quanto à aquisição do resultado.

Apresentamos na Figura nº 17 a construção da Dupla e os valores das razões dos lados correspondentes.

Figura nº 17: Construção e Cálculo da razão – Dupla A para a atividade BIAIII



Fonte: Produção da autora

Observe que para calcular a razão entre os triângulos ABC e DEF as alunas tomam como referência o triângulo ABC e utilizam as medidas de seus lados como numerador ou dividendo no cálculo da razão e chegam ao valor de 0,50 e 0,499[11], contudo na terceira razão utilizam os valores do Triângulo DEF como numerador e as medidas dos lados do triângulo ABC passam a ser o denominador/divisor da razão. Neste caso o resultado é 2,0. No momento de fechamento da atividade a professora utilizou a resposta das alunas para discutir o papel da razão na redução ou ampliação dos triângulos e significar a função da razão de semelhança.

Com relação aos registros de Representação, ao encontrar as razões entre os três lados os sujeitos executaram a conversão do registro figural para o registro numérico, e novamente a

[11] O Programa GeoGebra faz aproximações e arredondamentos levando em consideração as casas decimais, portanto consideramos que 0,4999 e 0,50 são valores que representam a mesma razões de semelhança.

conversão do registro fracionário para o registro decimal. Na Figura nº 13 temos a conversão de registros realizado pela dupla B. A representação fracionária dentro do registro da escritura fracionária e a representação decimal dentro do registro da escritura decimal da razão de semelhança entre os triângulos $\frac{11,44}{22,87} = 0,50;\ \frac{8,93}{17,87} = 0,499; \frac{14,24}{7,12} = 2,0$. Antes os sujeitos realizaram a conversão do registro figural para o registro numérico.

No item II esperávamos que os alunos percebessem que ampliando os triângulos ou reduzindo de acordo com a movimentação dos pontos a razão encontrada no item I não muda. Naturalmente para chegar a esta constatação os alunos deveriam movimentar os pontos X; Y; Z e D, e proceder um novo cálculo da razão dos lados correspondentes. As duplas responderam de acordo com o ilustrado na Tabela nº 1.

Tabela nº 1 - conversão de registros executados pela dupla B na atividade BIAIII

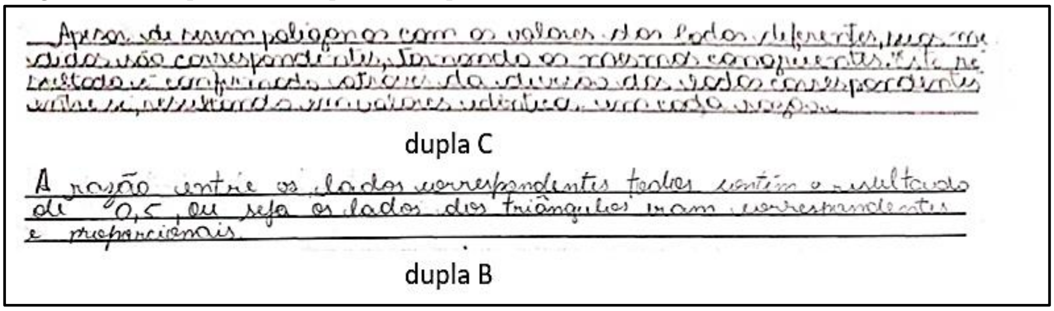
	Razão entre os lados dos triângulos $t_1 et_2$	**Razão entre os lados dos triângulos $t_2\ et_3$**	**Razão entre os lados dos triângulos $t_1\ et_3$**	**Mudou a razão dos lados após a movimentação dos pontos X; Y; Z e K?**
Dupla A	0,50 e 2,0	0,50	0,25	Sim
Dupla B	2,0	2,0	4,0	Não
Dupla C	0,5	0,5	0,25	Não
Dupla D	0,5	0,5	0,25	Não

Fonte: Produção da autora

A dupla A foi a única a encontrar a variância de valores entre os resultados das razões, isso em função de que, provavelmente, na primeira vez calculou duas razões de semelhança entre os triângulos ABC e DEF. Em seus Figuras de respostas as duplas foram breves neste item, apenas limitando-se a manifestar que a razão permanece a mesma (exceto A) quando movimentados os pontos indicados.

No que diz respeito ao item III, em nossa análise preliminar esperávamos que os sujeitos percebessem que os triângulos apresentavam lados correspondentes proporcionais e ângulos correspondentes congruentes. As respostas do item III variaram neste sentido, com alguns equívocos que foram esclarecidos no fechamento da atividade. Na Figura nº 18 trazemos algumas das respostas.

Figura 18 - Respostas das duplas B e C para o item III da atividade BIAIIII



Fonte: Produção da autora

Na resposta apresentada pela dupla C observamos que os sujeitos analisaram o registro figural e constataram que os triângulos tinham lados diferentes, e que ao dividir esses lados resultou em valores iguais para as razões. A dupla menciona a palavra “congruente” e afirma que por terem lados correspondentes isso torna os triângulos congruentes. No entanto, eles fazem essa afirmação utilizando o termo polígono, muito provavelmente em função do fechamento da atividade BIAI onde foi abordado a congruência de polígonos de forma geral.

No item III esperávamos que os sujeitos estabelecessem a relação entre os ângulos congruentes e lados proporcionais. Foi entregue a eles uma cópia de suas respostas da tarefa AIBII uma vez que já haviam constatado que os ângulos correspondentes eram congruentes entre si. As duplas B e C conseguiram alcançar parcialmente este objetivo, conforme podemos observar no Figura nº 18. As duplas A e D não completaram este item da tarefa.

Pedimos que eles levassem em consideração quais elementos dos triângulos são comuns e quais eram diferentes, as duplas A, B, C e D responderam, respectivamente, que os triângulos possuem “*ângulos de tamanhos diferentes, e segmentos de tamanhos diferentes*”, “*todos tem lados com medidas diferentes e o mesmo tamanho de ângulos*”, “*tem as medidas dos lados diferentes e dos ângulos iguais*”, e, por fim, que “*os lados são todos iguais e os ângulos internos também iguais*”.

Nenhuma dupla conseguiu se aproximar da definição de Semelhança de Triângulos, contudo, eles puderam identificar quais elementos se alteram e quais permanecem constantes mesmo quando acionados os recursos de arrastar/mover do GeoGebra.

Ao mencionarem sobre as características observadas nos lados dos triângulos e a relação entre as suas razões, compreendeu-se que uma desconstrução dimensional de 2D_1D foi estabelecida, pois dos triângulos (2D) os olhares se voltaram para os lados (1D).

e) Fechamento da atividade e encaminhamentos

Após a conclusão da tarefa pelas duplas realizamos o fechamento no encontro seguinte a fim de avaliar as conjecturas levantadas pelos sujeitos, com o objetivo de consolidar as aprendizagens e esclarecer possíveis equívocos a partir das considerações dos sujeitos. A professora discutiu com os sujeitos item por item, ouvindo suas concepções, justificando o motivo pelo qual uma das duplas (dupla A) encontrou valores diferentes para a razão d semelhança.

Retomando nosso objetivo principal na atividade BIAIII que era introduzir a razão de semelhança entre os lados correspondentes e consolidar a ideia de que duas figuras mantêm a mesma forma quando apresentam lados correspondentes proporcionais e ângulos correspondentes congruentes. Destacaremos as seguintes considerações antes do fechamento.

- Os sujeitos tiveram dificuldades em encontrar os lados correspondentes entre os triângulos;
- Houve dúvidas em relação aos valores encontrados para a razão pois, conforme adiantamos na análise preliminar, as possíveis respostas variavam. Dependendo do par de triângulos que se analisasse, seriam 0,5 ou $\frac{1}{2}$; 2,0; 4; e $\frac{1}{4}$ ou $0{,}25$.
- Os alunos compreenderam que os ângulos dos três triângulos permaneciam sempre iguais entre sí, quando ampliados ou reduzidos por meio do recurso mover do GeoGebra.
- Também identificaram que a razão entre os lados homólogos permaneceria igual mesmo se os triângulos fossem aumentados ou reduzidos.

Destacaremos o diálogo no qual a professora aborda a semelhança junto com os sujeitos.

> Professora: *nas três tarefas que realizamos até agora, o que vocês perceberam em comum entre elas?*
> Aleph: *os ângulos eram iguais*.
> Professora: *e o que mais?*
> Alice: os *lados também eram iguais*.
> Professora: *todos concordam*?
> (alguns acenam afirmativamente)
> Professora: *observem as respostas das tarefas de vocês que entreguei*, (se refere à cópia da tarefa BIAIII) *os lados estão com o mesmo valor*?
> Alice: *não, só a resposta que fica igual quando os lados são divididos.*
> Professora*: exatamente, os lados não têm o mesmo valor.*
> Professora*: esses triângulos são iguais?*
> Alice*: eles têm tamanhos diferentes não podem ser iguais.*
> (todos os sujeitos concordam que os triângulos não são iguais, mesmo aqueles que não se manifestam oralmente.)
> Professora: *mas eles têm algo em comum? uma característica que todos têm?*
> Mérida: *os ângulos e a razão*

> Professora: *hum...então vocês acham que apesar de não serem iguais eles têm pontos em comum, certo*? *Como podemos classifica-los então? Se não são totalmente iguais e também não são completamente diferentes*?
> Luke: *triângulos parecidos* (o grupo rir)
> Professora: *então gente, vocês construíram estes triângulos que mesmo com tamanhos diferentes têm ângulos iguais e quando vocês calcularam a razão entre os lados correspondentes, o valor sempre dava igual. Podemos dizer que vocês construíram Triângulos Semelhantes?*
> Aleph: *eu acho que sim*.
> Professora: *por que você acha que são semelhantes?*
> Aleph: *por causa dos ângulos e dos lados* (não elabora o raciocínio), *nos vimos no livro.*
> Professora: *vamos pegar o livro (...)alguém pode ler a definição da propriedade de Semelhança de Triângulos? (...)*

Este episódio foi extremamente importante para a aplicação da sequência de atividades. A professora procurou deixar os alunos a vontade o suficiente para que eles percebessem que os triângulos construídos, embora não fossem idênticos, tinham elementos que se assemelhavam. E justamente com base nesses elementos, procurou conduzir a "conversa" com o grupo. Relembramos que a definição da propriedade Semelhança de Triângulos ainda não havia sido mencionada, portanto o propósito do fechamento da atividade foi fazer com que os sujeitos observassem os elementos principais da definição antes de partir para a sistematização.

É importante salientar que o livro didático pode ser incluído em aulas que contem com recursos tecnológicos, como o GeoGebra, ainda que apenas no momento da sistematização do conteúdo. A BNCC enfatiza que recursos didáticos como softwares de geometria dinâmica entre outros, têm um papel essencial para a compreensão e utilização das noções matemáticas. Entretanto, "esses materiais precisam estar integrados a situações que levem à reflexão e à sistematização, para que se inicie um processo de formalização (BRASIL, 2018, p. 276)."

Portanto no momento da formalização do conceito de semelhança consideramos importante incluir o livro didático utilizado pela turma, haja vista que o consideramos um recurso "a mais" na aprendizagem dos alunos, e o seu uso de maneira alguma, a nosso ver, anularia a "eficácia e o dinamismo que é obtido através de manipulação direta sobre as representações que se apresentam na tela do computador". (GRAVINA, 2001, P. 76)

A dupla A construiu três triângulos congruentes entre si, e encontrou valores diferentes de razão para o mesmo par de Triângulos Semelhantes. A professora, com o auxílio do projetor multimídia, mostrou o motivo pelo qual houve essa diferença entre os valores. Salientando também porque alguns encontraram o valor $\frac{1}{2}\,ou$ 0,5 e 2,0.

Foi preocupação da professora esclarecer aos participantes do estudo, o papel da razão de semelhança na ampliação e redução de triângulos semelhantes. O trecho descrito acima ocorreu durante o esclarecimento do motivo pelo qual houve variância entre os valores de razão encontrado pelos sujeitos.

Com relação às atividades cognitivas mobilizadas na atividade os alunos fizeram tratamentos no registro discursivo, em língua natural; no registro figural e no registro numérico, no cálculo da razão de semelhança entre os lados correspondentes. No registro figural a atividade mobilizou as apreensões: sequencial; discursiva e perceptiva e operatória.

As instruções de construção caracterizaram a apreensão sequencial, enquanto que a designação de elementos dessas instruções, como as palavras: pontos, vértices e lados compreenderam uma apreensão discursiva, pois os alunos precisavam compreender o significado dessas palavras para conferirem se o que aparecia construído na tela do GeoGebra era condizente como que se pedia.

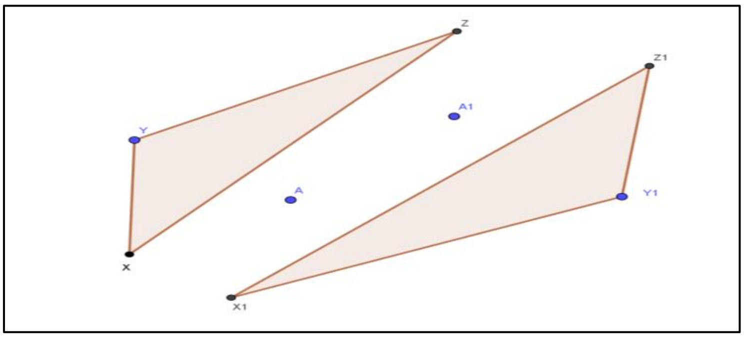
Do mesmo modo, a apreensão perceptiva também foi presente, pois a cada passo da construção era necessário o reconhecimento automático dos formatos que apareciam na tela. A apreensão operatória com modificação ótica aparece na oportunidade de ampliação dos triângulos, como podemos perceber nas respostas dos sujeitos para o item 1 da dupla D: *"mesmo com os triângulos com medidas ampliadas os valores dos ângulos são iguais"*. De acordo com Duval (2012b), nesse tipo de modificação a figura é aumentada, diminuída ou deformada.

Nesta atividade os sujeitos perceberam que em dois, ou mais triângulos quando os lados correspondentes forem proporcionais e os ângulos são congruentes, temos triângulos semelhantes entre si. Formalizando, portanto, a propriedade da semelhança entre triângulos, uma vez que os sujeitos já possuíam as noções necessária para conjecturar sobre essa definição. Na atividade seguinte foram abordados os casos de semelhança.

Atividade 4

BIIAIV – Abra o arquivo salvo em sua pasta de trabalho do GeoGebra, intitulado BIAIV. Nele você encontrará dois triângulos XYZ e $X_1Y_1Z_1$, conforme a figura abaixo.

Figura nº 19: Ilustração da Atividade 4 - BIIAIV



Fonte: Produção da autora

Você já sabe que dois triângulos são semelhantes se existe uma correspondência entre seus lados e entre seus ângulos e as razões entre os lados correspondentes devem ser iguais entre si. Analisaremos nesta atividade três formas de verificar essa correspondência quando não conhecemos as medidas de todos os ângulos ou de todos os lados correspondentes.

I - Apenas a partir dos elementos da figura acima é possível afirmar que os triângulos são semelhantes? Justifique sua resposta.

____

II - No Triângulo XYZ meça a medida de dois lados quaisquer. No Triângulo $X_1Y_1Z_1$ meça as medidas dos lados correspondentes aos que você mediu anteriormente. Em ambos os triângulos, marque a medida do ângulo compreendido entre esses lados. Verifique se os ângulos que você marcou são congruentes e se a razão entre os lados correspondentes é igual. Caso tenha constatado essas observâncias você identificou a Semelhança entre eles utilizando o caso LAL. Tente, com suas palavras, enunciar as condições para que dois triângulos sejam semelhantes por este caso.

III - Agora oculte as medidas dos lados, elas não serão necessárias neste momento. Marque mais um ângulo em cada um dos triângulos, observando a correspondência entre eles. Por fim, verifique se há a congruência entre os ângulos marcados, se isto ocorrer os triângulos também serão semelhantes pelo caso AA. Com suas palavras escreva as condições para que dois triângulos sejam semelhantes pelo caso AA.

____

IV - Neste item você deve medir os três lados de ambos os triângulos. Calcule a razão entre os lados correspondentes e observe se os valores são os mesmos. Se isto acontecer temos, o caso de Semelhança LLL. Quando movimentados os pontos $A\ e\ A_1$ o que acontece com os valores da razão entre os lados correspondentes?

____

V - Analise a sua construção, reflita e comente sobre a seguinte questão. Ainda que dois triângulos sejam semelhantes pelos casos AA; LAL ou LLL é possível observar neles a correspondência de três pares de ângulos correspondentes congruentes e lados correspondentes proporcionais?

____

a) Objetivos:

- Consolidar as condições de Semelhança entre Triângulos;
- Apresentar os casos de semelhança AA; LAL e LLL
- Estabelecer que se dois triângulos possuem dois ângulos semelhantes é condição suficiente para que eles sejam semelhantes entre si;

b) Conhecimentos mobilizáveis

- Razão
- Proporção
- Condição de existência de um triângulo
- Interpretação de texto através do enunciado;
- Propriedades geométricas de triângulos;
- Conceitos matemáticos de segmentos; ângulos; lados correspondentes

c) Análise preliminar

Na atividade BIAIV os sujeitos já conheciam as condições de semelhança de triângulos, logo, o objetivo principal nesta tarefa foi consolida-las e mostrar a eles outras formas de reconhece-las apresentando os casos de semelhança AA; LAL e LLL. Em vez de apresentarmos cada caso em uma tarefa independente, considerou-se mais produtivo explora-los em única atividade, a fim de que eles constatassem que qualquer que fosse o caso de semelhança a congruência dos ângulos e a proporcionalidade dos lados correspondentes serão condições necessária e suficientes para a semelhança de triângulos.

Os sujeitos abriram o arquivo de origem salvo em suas pastas de trabalho no computador, com os triângulos já construídos e procederam os tratamentos no registro figural dinâmico no GeoGebra. Para o item I, esperávamos como possíveis respostas a justificativa de que seria necessário conhecer os ângulos para identificar a semelhança de triângulos. Contudo, os sujeitos possuíam condições de responder que em virtude de também não serem conhecidos os lados não seria possível identificar a semelhança, posto que já havia sido discutido acerca do papel exercido pelos lados correspondentes nas Semelhança, nas três atividades anteriores. Logo também eram esperadas respostas que variassem no sentido de esclarecer que seria necessário conhecer todos os lados e todos os ângulos dos triângulos.

No item dois**,** as duplas deveriam marcar na construção apenas um ângulo qualquer no primeiro triângulo e seu correspondente no segundo triângulo. Para em seguida, verificar se os lados entre eles eram proporcionais. Já no próprio enunciado do item três havia elementos suficientes para que os sujeitos identificassem as condições de semelhança no caso LAL. No caso de constatarem as evidencias eles deveriam escrever com suas palavras essas condições. Da mesma forma, no item III os sujeitos deveriam descrever o caso de semelhança AA, e até mesmo identificar sem a marcação o terceiro ângulo, pois se são conhecidos dois lados de um triângulo o terceiro pode ser determinado pela soma dos ângulos internos.

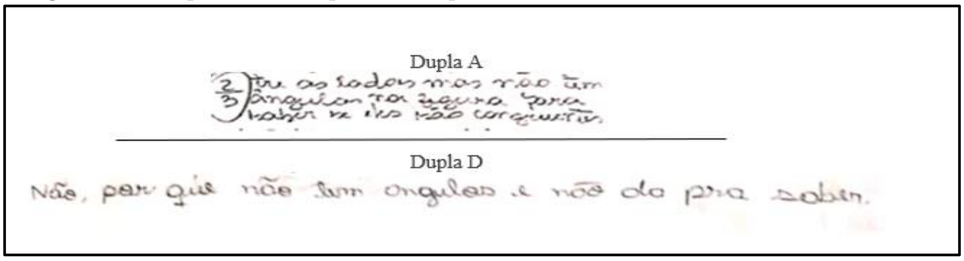
No item IV os sujeitos deveriam medir os lados novamente nos triângulos e identificar a razão de semelhança entre eles, ao verificar que elas são iguais e mesmo movimentando os pontos $A\ e\ A_1$. Os valores da razão de semelhança entre os lados correspondentes permaneceriam iguais. Já no item V esperava-se que os sujeitos, após marcarem todos os ângulos e verificarem a razão dos lados proporcionais, constatassem que quaisquer que fosse o caso de semelhança a regra dos ângulos congruentes e lados proporcionais seria sempre válida.

No que concerne às atividades cognitivas mobilizadas, também nesta atividade os sujeitos deveriam proceder a conversão do registro da língua natural para o registro figural, e nele o tratamento pertinente onde poderiam surgir as apreensões típicas: sequencial, perceptiva, discursiva e operatória. Em relação aos lados, quando os sujeitos procederem a analise referente a proporcionalidade, deverão mencionar sobre as características observadas. Caso isso ocorra, uma desconstrução dimensional de 2D_1D dever ser estabelecida pelos sujeitos.

d) Análise das respostas dos sujeitos e encaminhamentos

A atividade traz uma construção no registro figural de dois triângulos XYZ e $X_1Y_1Z_1$ GeoGebra onde os sujeitos fariam os tratamentos pertinentes. Pelas respostas deles podemos identificar se julgaram haver elementos suficientes para determinar se o par de triângulos era semelhante. Discutiremos na sequência as respostas das duplas A; B e D para o item I.

Figura 20: Respostas das duplas A e D para o item I da atividade BIAIV



Fonte: Produção da autora

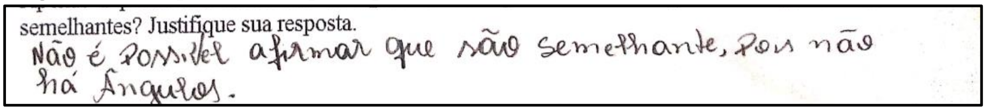
Observe que as duplas A e D consideraram que apenas os lados correspondentes proporcionais não são suficientes para determinar a semelhança entre os triângulos.

Apresentamos parte do diálogo da dupla A capturado na gravação das conversas no encontro. Observe que mesmo reconhecendo que para constatar a Semelhança são necessários conhecer lados e ângulos, em sua resposta no Figura 6 a dupla menciona apenas os ângulos, assim como a dupla D.

> *(...)* Professora*: vocês acham que esses triângulos são semelhantes?*
> Alice: *acho que não*
> Prof.ª*: porque?*
> Alice*: não tem ângulo*
> Prof.ª*: e o que é necessário para serem semelhantes?*
> Mérida*: os ângulos serem iguais, e a conta dá o mesmo resultado.*
> Prof.ª*: que conta?*
> Mérida*: dos lados,*
> Prof.ª*: então apenas conhecer os ângulos não será suficiente? precisamos dos lados também.?*

A dupla B limitou-se a responder que não seria possível constatar a semelhança dos triângulos, pois, de acordo com eles, não "*tem como identificar os ângulos*". A dupla C também concluiu que não eram semelhantes pois não havia ângulos nos triângulos e apresentou a seguinte resposta que destacamos no Figura nº 9. Nenhuma das duplas mencionou acerca da ausência das medidas dos lados na figura.

Figura 21: Respostas da dupla C para o item A


semelhantes? Justifique sua resposta.
Não é possível afirmar que são semelhante, pois não há ângulos.

Fonte: Produção da autora

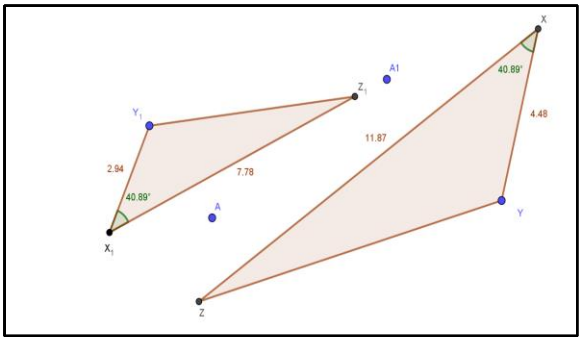
No item II os sujeitos deveriam marcar dois pares de ângulos nos triângulos verificar se estes eram congruentes e se os lados correspondentes entre eles eram proporcionais, em caso afirmativo para as duas proposições os sujeitos teriam dois triângulos semelhantes pelo caso LAL. Nesse caso eles deveriam escreva as condições para que dois triângulos fossem semelhantes obedecendo essa regra.

As duplas construíram os triângulos no GeoGebra, fazendo o tratamento no registro figural. Ao executar os comandos do item II para a construção, os sujeitos fizeram uso da apreensão sequencial. Todas as duplas conseguiram concluir a construção sem problemas, utilizaram as ferramentas "segmento com comprimento fixo" e "círculo dados centro e raio" tomando como medidas os valores dos lados dos polígonos. A recomendação feita foi que eles não marcassem todos os ângulos, apenas o par mencionado no item II. Da mesma forma, deveriam marcar apenas os lados entre esses ângulos.

A dupla A deu como resposta que para serem semelhantes pelo caso LAL bastava que os lados "*fossem iguais*", as alunas afirmaram ainda que os lados eram "*congruentes*". Provavelmente eles se confundiram com a definição de semelhança de triângulos e na realidade, se referiam a ângulos congruentes em vez de "lados congruentes". Encontraram a razão entre os lados procedendo da seguinte forma: $\frac{X_1Y_1}{XY} = \frac{2,94}{4,48} = 0,65$ e $\frac{X_1Z_1}{XZ} = \frac{7,78}{11,87} = 0,65$

Na Figura n° 22 temos a construção da dupla e na sequencia o Figura de resposta.

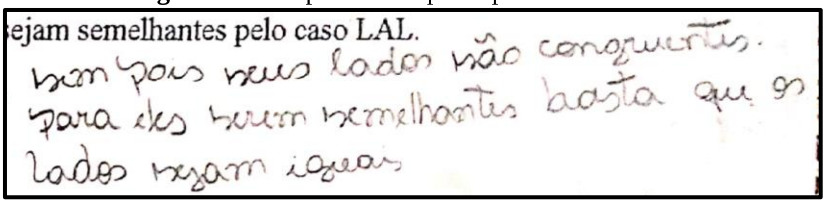
Figura nº 22 - Construção da dupla A para a atividade BIAIV



Fonte: Produção da autora

A dupla utilizou uma conversão do registro figural para o registro simbólico e do registro simbólico para o registro de representação dos números racionais. Dentro do registro de representação numérica eles fazem o tratamento mudando a representação fracionária para a representação decimal.

Figura 23 - Resposta da dupla A para o item BIAIV

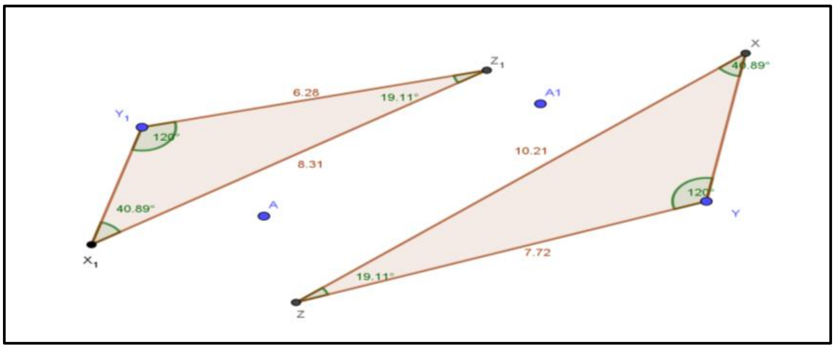

ejam semelhantes pelo caso LAL.
sim pois seus lados são congruentes.
para eles serem semelhantes basta que os
lados sejam iguais

Fonte: Produção da autora

Em sua resposta os sujeitos da dupla D fizeram a construção e, conforme foi solicitado, marcaram apenas dois ângulos e verificaram a proporcionalidade entre os lados correspondentes compreendidos entre esses ângulos da seguinte forma: $\frac{10,21}{8,31} = 1,22$ e $\frac{7,72}{6,28} = 1,22$.

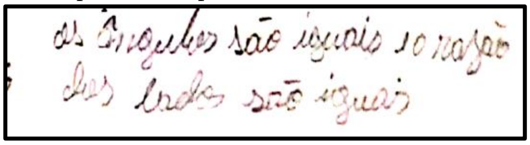
Apresentamos na Figura 24 a construção da dupla D e no Figura nº 10 o registro de sua resposta.

Figura nº 24: Construção da dupla D para o item II da atividade BIAIV



Fonte: Produção da autora

Figura 25: Resposta da dupla D ao item II da atividade BIAIV



Fonte: Produção da autora

A dupla D também não fez qualquer tentativa de formalização das condições para que os triângulos fossem semelhantes pelo caso LAL ainda que o enunciado já mostrasse os elementos dessa condição. A resposta da dupla não está de forma alguma errada, haja vista que os ângulos são congruentes e a razão entre os lados é a mesma, eles apenas não oficializaram as condições de semelhança pelo caso LAL.

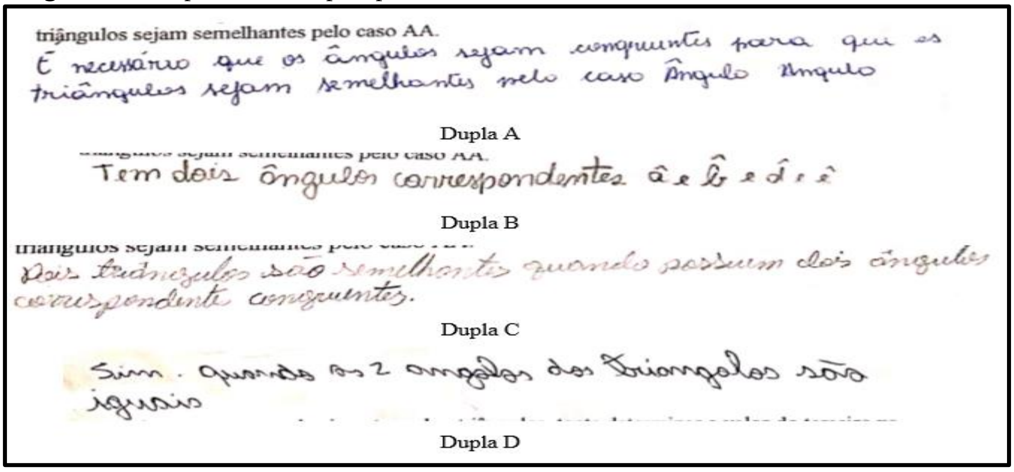
Observamos no dialogo da dupla D que inicialmente eles marcaram dois ângulos que não eram congruentes e chegaram a valores diferentes para a razão dos lados, pois naturalmente não usaram lados proporcionais. Contudo, notaram essa diferença escolheram outro par de ângulos e analisaram os lados compreendidos entre eles, alcançando dessa forma o objetivo deste item da tarefa, ainda que não tenham formalizado o caso de semelhança LAL no registro da língua natural.

> (...)Aleph: *quanto deu a razão*
> Arthur: *1,44 e 1,96*
> Aleph*: então está errado, tinha que ser igual,*
> *Arthur*: onde será que erramos.
> Aleph: *Acho que é porque não prestamos atenção nisso, os ângulos que a gente marcou não é igual ao outro, um é* 120° *e o outro* 40,89°.
> Arthur: *Vamos fazer de novo, senão a professora vai colocar o nosso no projetor, ela sempre coloca os errados lá. (rindo)*
> Aleph: tá vamos apagar as medidas. (...)

Nenhuma das duplas formalizou a definição de semelhança pelo caso LAL ainda que tenham identificado as condições para que isso aconteça, as respostas escritas no registro da língua natural das duplas B e C foram, entre algumas variações "*os ângulos e a soma das razões são iguais*" e "*quando possuem dois lados correspondentes e proporcionais*".

No item III era necessário que fosse marcado apenas mais um par de ângulos correspondentes para identificar a semelhança pelo caso AA. Como respostas os sujeitos responderam que os triângulos eram semelhantes porque tinham dois ângulos congruentes, no Figura nº 26 apresentamos as respostas das duplas no registro de representação da língua natural.

Figura 26: Respostas das duplas para o item III da atividade BIAIV



Fonte: Produção da autora

No item IV da atividade BIAIV, os sujeitos deveriam calcular a razão entre os três lados dos triângulos. Neste item não houve dificuldades, todas as equipes conseguiram determinar a razão de semelhança entre os pares de triângulos. E na operação procederam a conversão do Registro Simbólico para o registro Fracionário e deste para o Registro dos números decimais.

Tabela 2 – Atividades cognitivas do item V da atividade BIAIV

	Registro Simbólico	Registro Representação Fracionária	Registro Representação Decimal
Dupla A	$\frac{X_1Y_1}{XY}; \frac{Y_1Z_1}{YZ}; \frac{X_1Z_1}{XZ}$	$\frac{2,94}{4,48}; \frac{5,88}{8,97}; \frac{7,78}{11,87}$	0,65; 0,65; 0,65
Dupla B		$\frac{10,21}{8,31}; \frac{7,72}{6,28}; \frac{3,86}{3,14}$	1,22; 1,22; 122
Dupla C	$\frac{XY}{X_1Y_1}; \frac{YZ}{Y_1Z_1}; \frac{XZ}{X_1Z_1}$	$\frac{2,74}{5,43}; \frac{5,49}{10,86}; \frac{7,26}{14,37}$	0,504; 0,504; 0,504
Dupla D	$\frac{YZ}{Y_1Z_1}; \frac{XZ}{X_1Z_1}; \frac{XY}{X_1Y_1};$	$\frac{10,21}{8,19}; \frac{13,5}{10,83}; \frac{5,1}{4,09}$	1,24; 1,24; 1,24

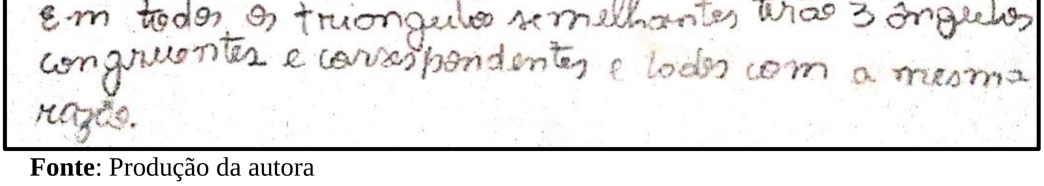
Fonte: Produção da autora

O objetivo principal do item V era que os sujeitos alcançassem o entendimento de que ainda que dois triângulos sejam semelhantes pelos casos AA; LAL ou LLL é possível observar neles a correspondência de três pares de ângulos correspondentes congruentes e lados correspondentes proporcionais. A dupla C teve dificuldade para entender a questão.

> (...) Jane: *não entendemos o que é para fazer.*
> Prof.ª: *Já calcularam a razão de semelhança?*
> Jane*: Já, tá aqui, ó*. (mostra no Figura a resolução)
> Prof.ª: *se já calcularam a razão, e já conhecem todos os ângulos dos triângulos, devem refletir sobre as condições de semelhança entre eles*.
> Luke: *aquilo que vimos na aula passada?*
> Prof.ª: *sim, além disso, devem analisar as respostas de vocês nos itens anteriores da questão.*
> Luke*: esse negócio de LAL e AA? L é lado e A é ângulo né.*
> Prof.ª*: isso mesmo*
> Jane: *mas não escrevemos quase nada nos outros itens*
> Prof.ª*: vamos analisar juntos. Para serem semelhantes pelo caso AA o que é necessário?*
> Luke: (*sic) perai.*. (olha o enunciado do item III)
> Luke: *dois ângulos iguais*
> Jane: *tem três ângulos iguais*
> Prof.ª.: *mas satisfaz a condição AA*?
> Jane: *não sei*
> Luke: *eu acho que sim tem dois aqui, (*aponta para os ângulos dos triângulos no monitor*)*
> Prof.ª: *agora vejam se os lados correspondentes são proporcionais*.
> Jane: *proporcional é quando tem a mesma razão né?*
> Prof.ª.: *isso*
> Jane: *quando a gente dividiu, os lados todos deram o mesmo valor*
> Prof.ª: *então gente, releiam o enunciado. Tentem encontrar a relação entre esses casos de semelhança.*

A transcrição do diálogo entre os sujeitos da dupla C e a professora evidenciou uma situação onde os alunos tinham subsídios suficientes para associar os casos de semelhança AA; LAL e LLL e verificar que qualquer que fosse o caso de semelhança é válida a relação entre os três ângulos congruentes e três lados homólogos proporcionais. Neste episódio os sujeitos mostraram-se reticentes em apresentar suas conjecturas à professora, pois temeram algum tipo de julgamento em relação ao erro, quando o objetivo da tarefa não foi identificar quem errou ou acertou mais. Apesar da dificuldade em entender a questão e expressar oralmente suas ideias, os sujeitos apresentaram a reposta contida no Figura nº 27.

Figura 27 - Respostas da dupla C para o item V da atividade BIAIV

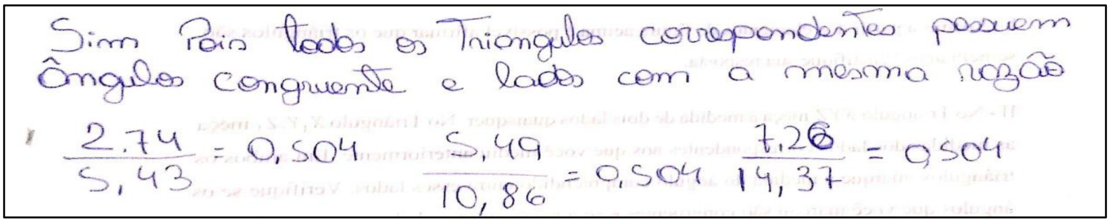

em todos os triangulos semelhantes terão 3 angulos congruentes e correspondentes e lados com a mesma razão.

Fonte: Produção da autora

A respostas dos sujeitos da dupla C demonstra a importância do registro de representação da língua natural, pois somente quando a professora os instigou a explicitarem suas ideias eles se dispuseram a registrar suas conjecturas, e embora não a fizeram oralmente, estabeleceram um consenso entre a dupla quanto à verificação de que em todo triângulo é válida a regra geral da correspondência entre lados e ângulos e expuseram-na por meio da escrita suas conclusões.

Conforme já foi dito o objetivo principal da questão foi mostrar que independente do caso, a definição de semelhança sempre será válida, e que para saber se dois ou mais triângulos são semelhantes é suficiente que eles dominem a propriedade dos lados homólogos proporcionais e ângulos congruentes. As quatro duplas conseguiram identificar essa propriedade, consoante com os Figuras de respostas apresentados. Nas respostas as duplas procederam a conversão do registro figural para o registro da língua natural. As respostas estão destacadas nas Figuras nº 28; 29 e 30.

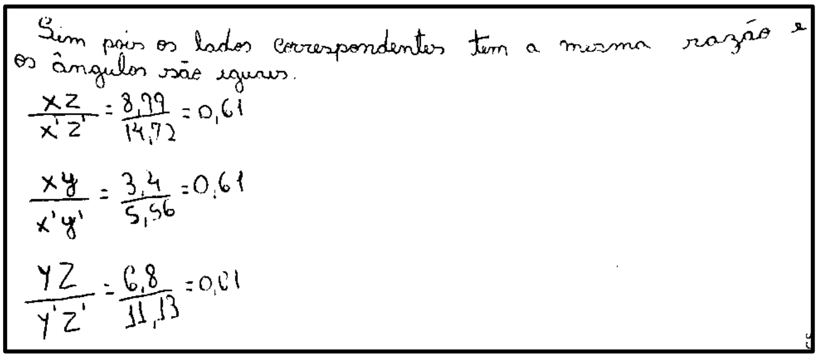
Figura 28 - Resposta das duplas A item V da atividade BIAIV


Sim Pois todos os Triangulos correspondentes possuem Ângulos congruente e lados com a mesma razão

$\frac{2,74}{5,43} = 0,504$ $\frac{5,49}{10,86} = 0,504$ $\frac{7,26}{14,37} = 0504$

Fonte: Produção da autora

Figura nº 29 – Resposta da dupla B item V da atividade BIAIV


Sim pois os lados correspondentes tem a mesma razão e os ângulos são iguais.

$\frac{XZ}{X'Z'} = \frac{8,99}{14,72} = 0,61$

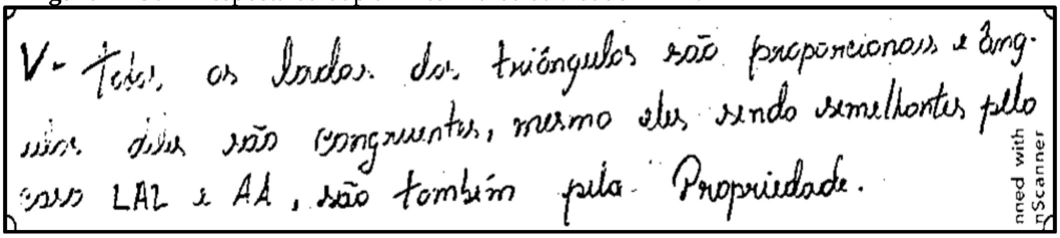
$\frac{XY}{X'Y'} = \frac{3,4}{5,56} = 0,61$

$\frac{YZ}{Y'Z'} = \frac{6,8}{11,13} = 0,61$

Fonte: Produção da autora

As duplas A; B e D, apresentaram respostas parecidas para o item V, justificando sua afirmativa com o cálculo da razão entre os lados correspondentes. Nas respostas das duplas A e B percebemos a conversão do registro Simbólico para o Registro Fracionário e deste para o Registro dos números decimais.

Figura nº 30 – Resposta da dupla D item V da atividade BIAIV


V- Todos os lados dos triângulos são proporcionais e âng-
ulos deles são congruentes, mesmo eles sendo semelhantes pelo
caso LAL e AA, são também pela Propriedade.

Fonte: Produção da autora

No que concerne as atividades cognitivas mobilizadas na tarefa BIAIV, pode-se destacar que ao considerarmos ângulos e os lados dos triângulos para identificar as condições de semelhança pelos casos AA; LAL e LLL os sujeitos analisaram as características observadas nos segmentos em ambos os triângulos, e de acordo com Duval (2011), compreenderam, assim como na atividade anterior, uma desconstrução dimensional de 2D-1D, pois dos triângulos (2D) a atenção se volta para os lados (1D), da mesma forma acontece com os pontos (2D-0D) onde estão localizados os ângulos.

Os sujeitos procederam o tratamento dentro do registro figural por meio das apreensões perceptiva e discursiva para interpretação dos polígonos. As figuras receberam uma designação por meio de letras maiúsculas para os vértices, e, por meio dos enunciados nos itens, eram fornecidos os comandos para serem considerados sobre as figuras. A apreensão sequencial que implicava o seguimento correto das instruções para a obtenção das medidas dos lados e dos ângulos também foi mobilizada.

e) Fechamento da atividade e encaminhamentos

Nessa atividade BIAIV apresentamos os casos de semelhança aos sujeitos já no enunciado dos itens da tarefa, considerou-se que uma atividade apenas era suficiente para mostrar que qualquer que seja o caso de semelhança, é válida a propriedade para os lados homólogos proporcionais e ângulos correspondentes congruentes.

O fechamento da tarefa ocorreu no encontro seguinte, onde foram discutidos alguns pontos baseados nas respostas dos grupos. Novamente as duplas receberam cópias de suas respostas para acompanhar a discussão. Destacaremos alguns dos tópicos esclarecidos.

- Caso sejam conhecidos dois dos ângulos de um triângulo estes serão semelhantes pelo caso AA, e ainda é possível identificar o terceiro ângulo pela soma dos ângulos internos de um triângulo;
- A condição da congruência dos ângulos é suficiente para que os triângulos tenham os lados proporcionais e sejam semelhantes;

- A proporcionalidade dos lados correspondentes é uma condição necessária e suficiente para a semelhança entre os triângulos;
- Discutiu-se sobre as respostas que diziam que os triângulos são semelhantes devido à congruência do ângulo e à proporcionalidade dos lados, porém não explicitaram o fato de que o ângulo apresentado deve ser o compreendido entre os dois lados proporcionais (caso LAL);
- A congruência dos ângulos e a proporcionalidade dos lados correspondentes, compreendidos entre esses ângulos, são condições suficientes para a semelhança entre os triângulos.

No fechamento da atividade chama-nos atenção um questionamento de um dos sujeitos, acerca da utilidade em se estudar casos de semelhança.

> Aleph: (...) *então mesmo que seja nesses casos vale a primeira regra? (*se refere à propriedade de lados homólogos congruentes e lados correspondentes proporcionais.*)*
> Professora: *é isso mesmo*
> Aleph: *então porque a gente estuda isso, se basta saber a regra.*
> Professora: *então, se você conhecer os casos não é necessário conferir se todos os ângulos de dois triângulos são congruentes e se todos os lados são proporcionais para saber se ambos são semelhantes, basta que eles apresentem algumas dessas condições enumeradas nos casos, nem sempre você terá condições de identificar estes elementos. Mas concordo com você, que é suficiente saber a definição de semelhança.*

O questionamento do sujeito nos coloca refletir a real necessidade de se estudar casos de semelhança. Quando questionada pelo aluno a professora deu a resposta padrão que encontramos nos livros didáticos, contudo, reconhece que saber a definição seria suficiente para determinar a semelhança, principalmente utilizando algum software de construção como o GeoGebra, onde é possível identificar os ângulos e lados dos triângulos.

Com relação aos recursos utilizados podemos considerar que o GeoGebra apresentou dinamismo nas atividades, principalmente ao proporcionar aos alunos a possibilidade de verificar que ao identificar dois ângulos que não são congruentes entre si, a razão entre os lados que compreendem eles, não será a mesma, e dessa forma não haveria o caso LAL. Além disso, os sujeitos puderam movimentar os pontos $A\ e\ A_1$

Em relação ao objetivo inicial da atividade, pode-se dizer que a atividade BIAIV atendeu à nossas expectativas iniciais, posto que almejou-se, para além de apresentar casos de semelhança, mostrar aos sujeitos que para qualquer que seja a circunstância em se tratando de triângulos com ângulos congruentes e lados homólogos proporcionais, sempre é válida a definição e que é suficiente que eles conheçam essa regra.

CONSIDERAÇÕES SOBRE O BLOCO I

O bloco I teve como objetivo promover condições para que os participantes do estudo pudessem constatar por si próprios a propriedade de semelhança dos triângulos. Podemos afirmar, com base nas respostas escritas utilizando o registro da língua natural, e nas construções feitas no registro figural dinâmico, que os sujeitos promoveram conjecturas a respeito das condições de semelhança entre triângulos.

A primeira atividade apresentou a semelhança entre polígonos com uma atividade "arranque" cujo principal intento foi o de apresentar a noção de semelhança entre polígonos, utilizando uma figura lúdica, um barquinho, que deveria ser ampliado na razão 1:2. Na tarefa, eles fizeram uso de apreensões figurais além da desconstrução dimensional proposta por Duval (2011), e desta forma calcularam a razão entre os lados homólogos, bem como a área e perímetro das figuras.

A segunda atividade do bloco propôs a construção de triângulos ampliados por homotetia. O objetivo da tarefa foi que os sujeitos observassem quais elementos dos triângulos se alteram e quais permanecem inalterados quando estes são ampliados, na análise das respostas dos sujeitos identificamos que este apresentaram dúvidas em relação a função da ferramentas de construção "círculo definido por dois pontos", sendo que uma das duplas não conseguiu construir três triângulos semelhantes. No fechamento da tarefa, os sujeitos analisaram suas construções e responderam aos questionamentos relacionados ao comportamento dos ângulos em situações de ampliação de triângulos.

A terceira atividade trouxe uma situação também de ampliação de triângulos. Dessa vez, os sujeitos deveriam escolher as medidas do primeiro e na sequência multiplicar os seus lados por dois e por três para criar o segundo e o terceiro respectivamente. Nessa tarefa, utilizando as regras de conversão e tratamento da TRRS, os sujeitos responderam aos questionamentos propostos na atividade e conjecturaram acerca da proporcionalidade dos lados correspondentes dos triângulos construídos. Na oportunidade do fechamento da atividade foi formalizada a propriedade de semelhança entre triângulos.

A quarta e última tarefa do Bloco consistiu em abordar em uma mesma tarefa os casos de semelhança entre triângulos, com o objetivo de que eles constatassem que para qualquer caso, vale a propriedade dos ângulos congruentes e lados correspondentes proporcionais.

Finalizado o primeiro bloco, avaliamos que as considerações feitas pelos sujeitos, seja pelos registros escritos de suas concepções, sejam pelas gravações em áudio de suas conjecturas reforçam que o objetivo proposto para este bloco foi alcançado. Naturalmente, houve pontos que consideramos negativos, os quais citaremos a seguir.

- As construções no registro figural quase sempre eram conduzidas por um mesmo membro das duplas, e o outro era responsável pelas anotações das respostas, quando a orientação dada foi que todos deveriam manusear o software em momentos alternados;
- Algumas das duplas necessitaram constantemente de leitura conjunta com a professora, ainda que em todas as atividades, uma introdução oral tenha sido feita. Constantemente eles perguntavam “o que é para fazer”. Isso em função, principalmente, da dificuldade em interpretação de texto.
- Como tínhamos apenas um encontro semanal, e os sujeitos ocupavam todos os minutos do encontro para a realização da tarefa, o fechamento das atividades sempre era feito uma semana depois. Em algumas situações os sujeitos alegavam não lembrar porque haviam dado determinada resposta, ou como tinham procedido para chegar à construção;
- Em pelo menos duas oportunidades precisamos reorganizar o cronograma da atividade, em função da indisponibilidade do laboratório, em uma delas, inclusive, utilizamos o aplicativo GeoGebra na versão Smartphone para as construções.

Levando em consideração que a proposta de investigação que aqui se apresenta está inserida dentro do contexto escolar, procurou-se pensar em atividades consoante às recomendações dos documentos oficiais. Em algumas situações elas tiveram a perspectiva investigativa mais explícita, enquanto outras se aproximaram mais de atividades exploratórias, por isso o que se levou em conta foram os objetivos de ensino, o tempo disponível, o interesse dos sujeitos e as dificuldades apontadas por eles.

Tendo em vista que esse primeiro bloco ofereceu oportunidades de construção de conceitos básicos de Semelhança de Triângulos e preparou os alunos para o desenvolvimento das atividades do bloco seguinte, apresentaremos na sequencia atividades que explorem a propriedade fundamental da semelhança de triângulos e sua relação com o Teorema de Tales.

4.3.2 Bloco II – Teorema Fundamental da semelhança e Teorema de Tales

O bloco dois contempla três atividades que tiveram como objetivo abordar construções que explorem segmentos de retas paralelos a um dos lados de um triângulo, obtendo assim dois ou mais triângulos semelhantes ao primeiro. O bloco II teve como objetivo geral o reconhecimento visual das retas paralelas e o estudo das propriedades necessárias para a compreensão do Teorema Fundamental da semelhança e sua relação com o Teorema de Tales.

Ressaltamos que a aplicação da sequência de atividades foi interrompida por um período de duas semanas, por motivos de doença da professora pesquisadora. Seguindo a programação do semestre letivo, os sujeitos iniciaram em sua turma regular o estudo do Teorema de Tales, e de acordo com o planejamento do professor titular da turma antecedeu ao estudo de Semelhança de triângulos. Por conta disso, adaptamos uma das atividades visando que os sujeitos pudessem relacionar o Teorema Fundamental da Semelhança ao Teorema de Tales.

A aplicação das atividades ocorreu em quatro encontros com 1h30m cada, já incluído os momentos para o fechamento das tarefas que neste bloco ocorreram no mesmo dia da aplicação, nos últimos 20 minutos de cada encontro. As duplas foram mantidas e os instrumentos de coleta de dados também foram os mesmos do bloco I: fichas com respostas dos sujeitos e gravação do áudio da aplicação.

Na sequência apresentamos as atividades designadas por BIIAV; BIIAVI e BIIAVII seus respectivos objetivos, conhecimentos mobilizáveis, análise preliminar e análise das respostas dos sujeitos e os principais pontos discutidos na oportunidade do fechamento de cada uma das atividades.

Atividade 5

BIIAV - Construir um triângulo qualquer ABC, em seguida, construir um ponto D no segmento AB. Construir a paralela partindo do ponto D e cortando o segmento BC. Crie e meça os segmentos AB; BC; AC; BD; BE; DE. Desloque os pontos A; B ou C preencha a tabela e verifique se afigura que você construiu permanece com as características do enunciado.

Movimente ponto A		Movimente ponto B		Movimente ponto C	
$\boldsymbol{AB}$		AB		AB	
$\boldsymbol{BC}$		BC		BC	
$\boldsymbol{AC}$		AC		AC	
$\boldsymbol{AE}$		AE		AE	
$\boldsymbol{AD}$		AD		AD	
$\boldsymbol{DE}$		DE		DE	
$\frac{\boldsymbol{AB}}{\boldsymbol{AD}} =$		$\frac{AB}{AD} =$		$\frac{AB}{AD} =$	
$\frac{\boldsymbol{AC}}{\boldsymbol{AE}} =$		$\frac{AC}{AE} =$		$\frac{AC}{AE} =$	
$\frac{\boldsymbol{BC}}{\boldsymbol{DE}} =$		$\frac{BC}{DE} =$		$\frac{BC}{DE} =$	

I - Ao traçar a paralela, quantos e quais triângulos foram formados?

II - Em cada posição, as razões entre si têm o mesmo valor?

III – Esses triângulos são semelhantes?

IV - Ao observar a figura resultante da construção e analisando os dados da tabela, tente enunciar alguma relação sobre o que acontece quando se constrói uma reta paralela a um dos lados do triângulo.

a) Objetivos

Mostrar aos sujeitos que "toda paralela a um dos lados de um triângulo, não passando por um dos seus vértices, divide os outros dois lados em segmentos proporcionais";

- Identificar as condições de semelhança nos triângulos formados na construção;
- Conversão do registro discursivo para o registro figural;
- Tratamento na unidade figural
- Tratamento no registro numérico

b) Conhecimentos mobilizáveis

- Retas paralelas;
- Segmentos proporcionais;
- Razão;
- Propriedade de semelhança entre triângulos;
- Leitura e interpretação;

c) Análise preliminar

São várias as soluções possíveis de serem encontradas, tornando difícil descreve-las, no entanto, se realizadas adequadamente os sujeitos deverão chegar a conclusões equivalentes. É importante que marquem os pontos e acordo com o que pede o texto do enunciado da atividade para facilitar a identificação.

Além disso, devem estar atentos sobre a construção do ponto D, o ideal é que utilizem a ferramenta "ponto sobre objeto", e ao criar a reta paralela fazer a construção utilizando a ferramenta "reta paralela" e não simplesmente construir uma reta que corte o triângulo ABC.

No item IV os sujeitos poderiam identificar como relação o fato de que a reta traçada paralelamente a um dos lados dos triângulos, resultou em um segmento proporcional aos lados do triângulo, e por meio dos dados da tabela poderão comprovar essa argumentação. Já no item IV conseguiriam identificar a semelhança entre os triângulos, caso executassem a construção corretamente, pelo caso LLL. Ou ainda, se achassem necessário, poderiam marcar os ângulos na construção para comprovar a correspondência entre os lados correspondentes proporcionais e ângulos congruentes.

Ao construir a situação proposta os sujeitos teriam executado a conversão do registro da língua natural para o registro figural. Cada vez que um dos vértices A; B ou C é movimentado, utilizando o recurso arrastar/mover do GeoGebra as dimensões dos lados do triângulo maior sofrem alterações e consequentemente essa mudança é notada nos lados do triângulo menor formado pela reta paralela.

A respeito das atividades cognitivas mobilizadas, além da conversão do registro da língua natural para o registro figural, os sujeitos, ao analisarem a figura construída, devem operar a desconstrução figural, Duval (2011), do polígono (2D) para as retas paralelas e segmentos (1D) além dos pontos dos vértices dos triângulos (0D).

Com relação as apreensões, devem ser mobilizadas as apreensões perceptiva e discursiva para a interpretação dos triângulos, a apreensão sequencial, caso eles sigam corretamente as instruções de construção. A apreensão operatória com modificação mereologia pode ser estabelecida por meio da desconstrução da figura (triângulo ABC) em subfiguras (triângulo ADE e quadrilátero BDEC) e ainda a operatória posicional (movimento dos polígonos).

d) Análise das respostas dos sujeitos

Para fazer a construção referente à atividade BIIAV era suficiente utilizar uma combinação das ferramentas: “polígono”; “reta paralela”; “ponto em objeto”; “segmento” e ângulos. As quatro duplas conseguiram concluir suas construções, fazendo, portanto, a conversão do registro da língua natural para o registro figural.

Abriremos essa sessão de análise com as impressões da dupla C. Para a construção, os sujeitos não utilizaram a ferramenta reta paralela, na análise preliminar antecipamos essa possibilidade, os sujeitos fizeram a construção utilizando a ferramenta reta, com pontos em D e em uma posição aleatória do segmento AC, naturalmente, os ângulos do triângulo ABC e do triângulo formado após a construção da reta não eram congruentes. Transcrevemos parte do diálogo da dupla no momento da construção.

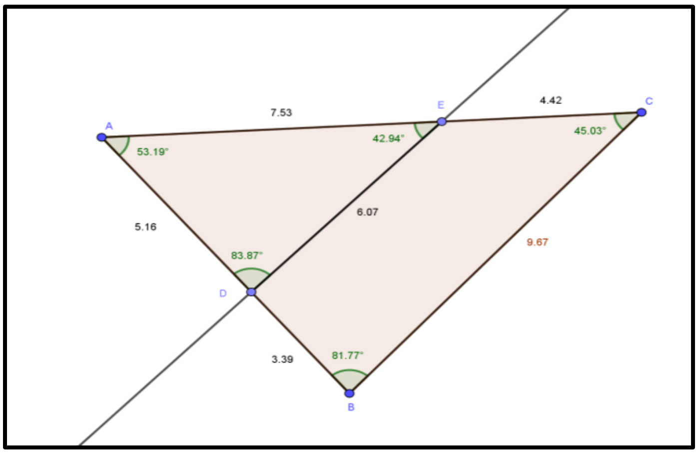
> Jane: (...) *tu achas que tem que aparecer os ângulos?*
> Luke: *não sei, não diz nada para marcar ângulos.*
> Jane: *mas diz para ver se é semelhante, será que é preciso?*

> Luke: *humm...não é preciso não, lembra aquilo que a professora falou dos lados.*
> Jane: *não me lembro, eu acho que foi o dia que eu faltei.*
> Jane: *mas acho que se fosse para marcar "tava" escrito no comando.*
> Luke*: melhor perguntar...*
> Jane: *deixa assim mesmo.*
> Luke: *Vou perguntar* (vai até a professora questionar sobre marcar os ângulos)
> (...)
> Luke: *professora disse que fica a nosso critério*
> Jane: *então vou marcar (...)*
> Jane: (...) *será que tinha que ser igual? Nenhum ficou igual.*
> Luke: *acho que tinha, senão eles não serão semelhantes*
> Jane*: Mas ainda tem que olhar esse negócio dos lados... pode ser que dê certo, aí vai ser semelhante.*
> Jane: *além que não "tá" escrito que tem que ser, "tá" só perguntando se são semelhantes. Se não for a gente responde que não. (...)*

Pelo dialogo da dupla, percebemos que eles tiveram dúvidas em relação a marcar ou não os ângulos nos triângulos. Na elaboração da questão, no item IV, é pedida a verificação da semelhança entre os triângulos. Contudo, não é exigida a marcação dos ângulos justamente para que os sujeitos a identifique da forma que julgarem mais conveniente. Seja pela propriedade da semelhança ou por um dos casos LLL; LAL ou AA.

A dupla decidiu marcar os ângulos antes de responder as perguntas da atividade, o que não teria nenhum problema, contudo, verificou que os ângulos não estavam congruentes. Esse fato já os colocou em alerta de que algo deveria estar errado na construção, ainda assim, não a refizeram e nem solicitaram o auxílio da professora no sentido de esclarecer possíveis erros. Apresentamos na Figura nª 31 a construção da dupla.

Figura nº 31 - Construção dupla C para atividade BIIAV



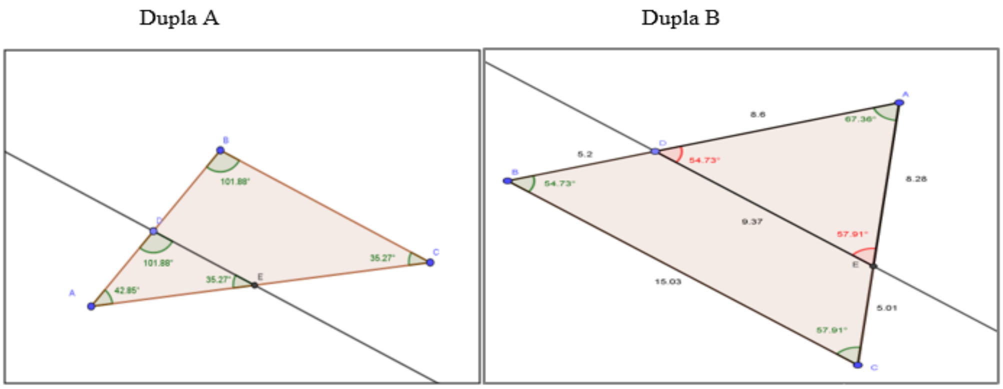
Fonte: Produção da autora

Da construção dos sujeitos podemos inferir que eles fizeram a conversão do registro escrito para o registro figural, e ao seguir as instruções utilizaram a apreensão sequencial, cujo objetivo é a “reprodução de uma dada figura” (DUVAL, 2012a, p. 120). Já a apreensão discursiva não foi empregada de forma abrangente pois, uma vez que ela consiste na interpretação dos elementos da figura apresentada pelo enunciado, (DUVAL, 2012a, p. 122), e como houve um equívoco na construção da reta paralela, podemos afirmar que os sujeitos não interpretaram geometricamente o comando da atividade. Além disso, na fala deles podemos identificar que tiveram dúvidas em determinar quais pressupostos teóricos já discutidos nas atividades anteriores, seriam úteis para a resolução do questionamento proposto no item IV.

Conforme adiantaram na transcrição do áudio, os sujeitos da dupla C deram como resposta para o item IV que os triângulos formados “*não eram semelhantes porque não tinha ângulos congruentes*”, curiosamente, no item III afirmam que “*ao traçar uma reta paralela ao lado do triângulo é formado outro triângulo semelhante*”. A ambiguidade das respostas dos sujeitos foi registrada pela professora pesquisadora e discutida posteriormente no fechamento da atividade.

As duplas A; B e D completaram as construções de forma inequívoca, e chegaram a resultados próximos do triângulo ABC cortado por uma reta paralela a um dos lados, formando, portanto, dois triângulos semelhantes.

Figura nº 32 - Construção das duplas A e B para a atividade BIIAV



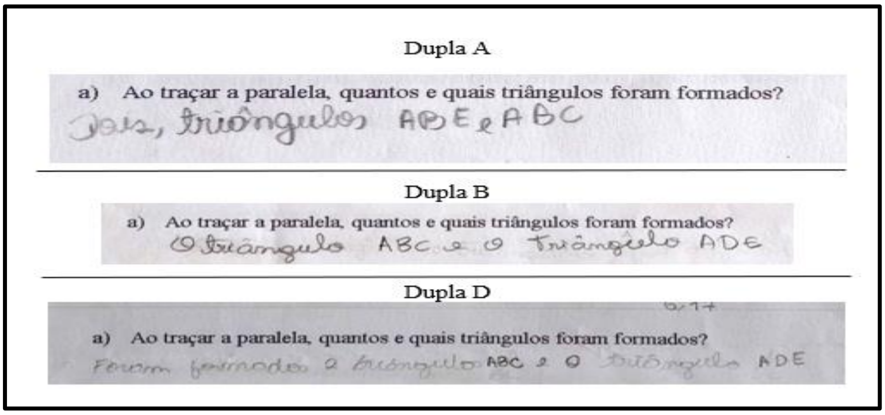
Fonte: Produção da autora

Os sujeitos fizeram uso das apreensões sequencial, quando seguiram os comandos de construção e discursiva, ao compreenderem os elementos da construção geométrica em que o enunciado propõem. Quando realizaram a construção os alunos promoveram a conversão do registro escrito para o registro figural, e na medida em que foram respondendo os itens da atividade, realizaram as apreensões perceptivas e operatória do tipo mereológica e ótica.

Nas respostas dos sujeitos para o item I (Figura nº 16) há unanimidade dos sujeitos na observação de que são formados dois triângulos (ABC e ADE). Podemos inferir que eles fizeram uso da apreensão perceptiva, uma vez que ela trata do reconhecimento de formas. Ao traçar a reta paralela a um dos lados do triângulo ABC, cria-se um novo triângulo com vértices em ADE conforme vemos na construção das duplas A e B na figura nº 18. A percepção dos dois triângulos é imediata e automática, tal qual, a descrição de Duval (2012a) para esse tipo de apreensão.

A tomada de consciência de operações figurais como essa, Duval (2011), reconhece como "a maneira matemática de ver em Geometria", (DUVAL, 2011, p. 85) que consiste em transformar uma figura unitária (triângulo ABC) em duas figuras (triângulo ABC e triângulo ADE) com o objetivo de fazer aparecer uma operação matemática, ou modelar uma situação, nesse caso, o teorema fundamental da Semelhança. Apresentaremos as respostas das duplas A; B e D para o item I.

Figura nº 33 - Respostas das duplas A; B e D para item I da atividade BIIAV


Dupla A

a) Ao traçar a paralela, quantos e quais triângulos foram formados?

Dois, triângulos ADE e ABC

Dupla B

a) Ao traçar a paralela, quantos e quais triângulos foram formados?

O triângulo ABC e o triângulo ADE

Dupla D

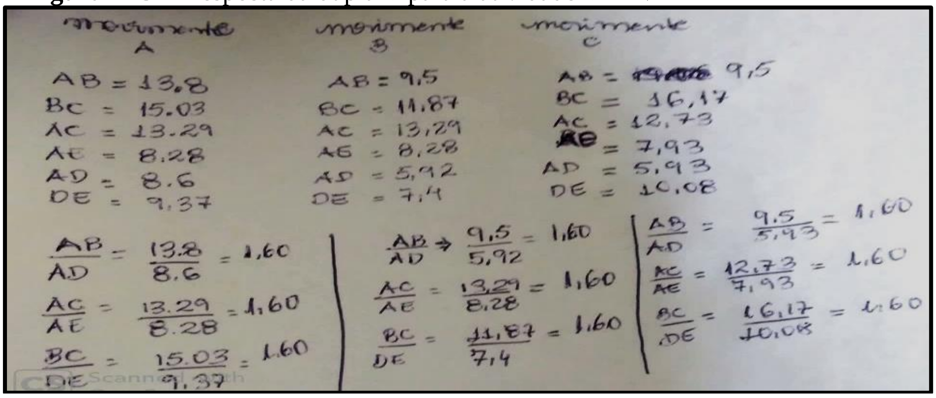
a) Ao traçar a paralela, quantos e quais triângulos foram formados?

Foram formados o triângulo ABC e o triângulo ADE

Fonte: Produção da autora

No segundo questionamento da atividade BIIAV: **"**Em cada posição, as razões entre si têm o mesmo valor?", as respostas dos sujeitos dependeriam do preenchimento correto dos valores na tabela. Conforme já foi antecipado, a dupla C não conseguiu encontrar lados correspondentes proporcionais em sua construção, as demais duplas, embora tenham chegado à construção esperada no registro figural, tiveram dificuldades no preenchimento da tabela, principalmente no cálculo da razão. Alguns optaram por preencher a tabela em uma folha a parte, pois de tanto apagar, a folha de resposta se desgastou. Trazemos no Figura nº 34 a tabela da dupla B apresentando os valores para os lados dos triângulos de acordo com o movimento dos vértices A; B e C. A

Figura nº 34- Resposta da dupla B para a atividade BIIAV

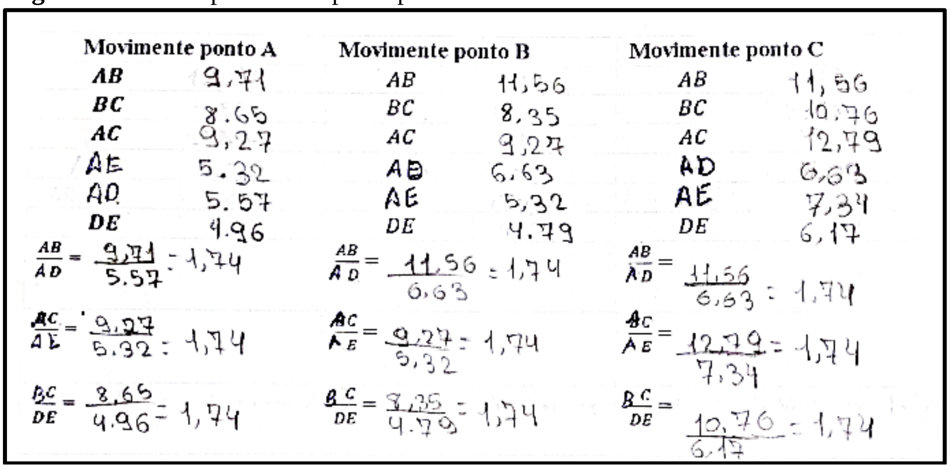


Fonte: Produção da autora

A apreensão operatória com modificação ótica foi estabelecida por meio do movimento dos vértices do triângulo ABC, pois a cada vez que se movimentava um desses pontos haveria alteração em dois dos lados do triângulo ABC e também no triângulo ADE. Também percebemos nesse item a desconstrução dimensional $2D \rightarrow 1D$ e $2D \rightarrow 0D$, pois no triângulo (2D) houve o deslocamento de olhar para o lado (segmento) 1D que sofreria alteração de tamanho com o deslocamento, e do triângulo para o ponto que seria movimentado (0D).

As respostas para o item II foram as seguintes: dupla A respondeu que "*a razão era a mesma 1,96*"; a dupla B afirmou que "*por causa dos movimentos a razão era a mesma 1,60*"; a dupla C afirmou que "*a razão não é a mesma"*, e a dupla D afirmou que "*o ponto A é 1,74; o ponto B é 1,74 e o ponto C igual a 1,74.*"

Figura nº 35 - Resposta da dupla D para a atividade BIIAV



Fonte: Produção da autora

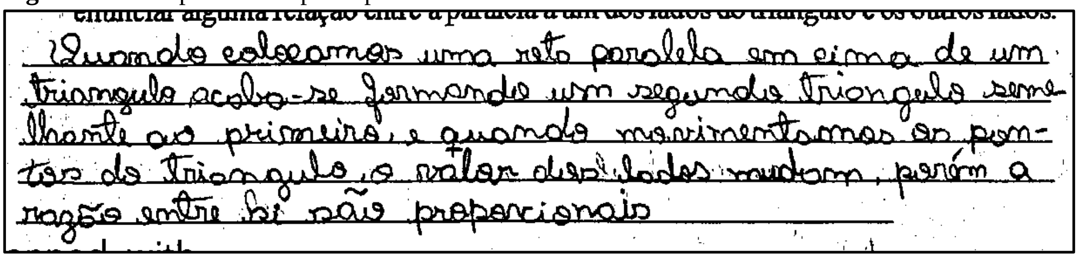
O item quatro pedia que os sujeitos tentassem construir com suas palavras a propriedade do teorema fundamental da semelhança. Houve dúvidas por parte de todas equipes, principalmente por não "enxergarem", a princípio, qualquer relação entre a reta paralela e o surgimento do segundo triângulo. Transcrevemos o áudio da equipe B com a professora.

> Mérida: *a gente não entendeu o que é "pra" fazer*.
> Professora: *vamos ler novamente o enunciado.*
> (as alunas leem novamente o item III)
> Prof.ª: *e aí*?
> (as alunas riem....)
> Léia: *ainda não sei*.
> Prof.ª: *olhem para a sua construção, veja o que havia antes de vocês construírem a reta paralela. O que aconteceu depois dela?*
> Mérida: *apareceu mais um triângulo.*
> Prof.ª: *você concorda?* (se dirige ao outro membro da dupla)
> Léia: *sim*
> Prof.ª: *E os triângulos*. O que vocês podem dizer sobre eles?
> Mérida*: é pra ver se é semelhante?*
> Prof.ª: *Vocês já não verificaram no item anterior?*
> Leia: *sim*
> Prof.ª: *Então pronto, pensem no que vocês tinham antes na tela do seu computador, depois que traçaram a reta paralela o que aconteceu? Elaborem a resposta de vocês a partir daí.*

As demais duplas também apresentaram dúvidas dessa natureza, e a professora pesquisadora precisou intervir, fazendo questionamentos, de forma a instiga-los a raciocinar acerca do papel da reta paralela na formação do segundo triângulo semelhante ao primeiro. Nas respostas apresentadas, os sujeitos relacionam a construção da reta paralela a um dos lados com o surgimento do segundo triângulo, contudo, apenas a dupla B identifica a semelhança entre eles.

A dupla A deu a seguinte resposta: "*depois que foi traçada a reta paralela surgiram dois triângulos*"; a dupla C concluiu que a reta paralela "*dividiu o triângulo ABC em dois triângulos*" e a dupla D indicou que a "*reta paralela forma dois triângulos com ângulos iguais"*. Apresentamos a resposta da dupla B no Figura nº 36, a mais próxima de nossas análises prévias.

Figura 36 – Resposta da dupla B para o item III da atividade BIIAV


Quando colocamos uma reta paralela em cima de um
triangulo acaba-se formando um segundo triangulo seme-
lhante ao primeiro, e quando movimentamos os pon-
tos do triangulo, o valor dos lados mudam, porém a
razão entre si são proporcionais

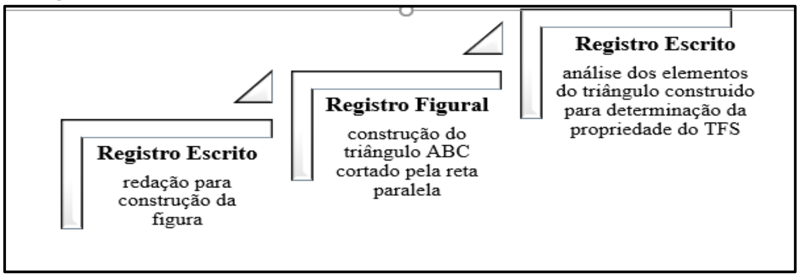
Fonte: Produção da autora

Percebemos nas respostas das duplas que ficou claro que os sujeitos compreenderam que ao traçar uma reta paralela a um dos lados de um triângulo, será formado outro triângulo. Causa nos surpresa que os sujeitos das duplas A e D não tenham incluído em suas respostas que esses triângulos eram semelhantes entre si, haja vista que, no item III fazem essa afirmação, o que leva a crer que eles não compreenderam em totalidade a proposição do item em questão.

Ainda sobre as atividades cognitivas desenvolvidas pelos sujeitos na elaboração de suas respostas, nota-se, além da desconstrução dimensional, já comentada, a conversão do registro figural para o registro numérico na ocasião do preenchimento da tabela. E ainda a conversão do registro da escrita fracionária para o da escrita decimal.

Na elaboração da resposta do item IV, os sujeitos precisavam analisar a figura construída por eles no GeoGebra para tentar desenvolver a propriedade da semelhança entre triângulos obtidos com o traçado da reta paralela, utilizando o registro escrito da língua natural. Elaboramos um esquema para ilustrar esse processo de conversão observado na atividade BIIAV.

Figura nº 37 – Processo de conversão observado na atividade BIIAV



Fonte: Produção da autora

Duval comenta que “as regras de conversão não são as mesmas segundo o sentido no qual a mudança de registro é efetuada” (DUVAL, 2009, p. 61). Cada vez que é executado um processo de conversão as regras são aplicadas em sentido único, portanto, os procedimentos observados no registro escrito para a construção dos triângulos, no sentido de partida, não foram os mesmos observados para a elaboração da resposta do item IV.

Do ponto de partida observou-se a apreensão sequencial observada no seguimento das instruções para a construção da figura e no ponto de chegada, a produção discursiva apresentada pelos alunos não mais exigiu a utilização dessa mesma apreensão, em seu lugar, foi necessária a apreensão discursiva, consistindo em identificar elementos da figura geométrica seriam úteis para a resolução do problema proposto, no caso a construção da definição do Teorema Fundamental da Semelhança.

e) **Fechamento da atividade e encaminhamentos**

Esta tarefa, primeira do segundo bloco, foi executada com cerca de três semanas após a aplicação das atividades do bloco anterior. Esse hiato na aplicação da sequência de atividades se deu em função de feriados sucessivos na quinta feira e por motivos de doença da professora pesquisadora. Conforme já relatado, os sujeitos alegaram não lembrar de algumas das propriedades, o que, provavelmente influenciou nos resultados.

Retomando o objetivo da atividade que foi mostrar aos sujeitos que “toda paralela a um dos lados de um triângulo, não passando por um dos seus vértices, divide os outros dois lados em segmentos proporcionais”. A tarefa mobilizava conhecimentos de proporcionalidade, e condições de semelhança entre triângulos, além de conhecimentos sobre paralelismo. O fechamento da atividade ocorreu nas mesmas conjunturas da atividade anterior, com o diferencial de ter sido realizado no mesmo dia da aplicação. A seguir destacaremos alguns pontos importantes da aplicação que foram discutidos.

- A função da reta paralela na construção dos dois triângulos;
- Foi discutido os episódios em que duplas A e B fizeram a construção corretamente, mas necessitaram a intervenção da professora por achar que havia algum erro, pois (para eles) as retas inclinadas não estavam paralelas, só seriam paralelas se tivessem na horizontal;
- O fato de que para verificar se os triângulos eram semelhantes três duplas marcaram os ângulos, mesmo tendo encontrado antes a razão de proporcionalidade entre os lados, o que nos leva a crer que os sujeitos ainda necessitam da confirmação da congruência dos ângulos correspondentes, mesmo que os lados homólogos sejam proporcionais;
- A questão da movimentação dos pontos e o fato de ao ser movimentado um vértice, apenas a medida do lado oposto a este vértice não era alterada, e como a razão de semelhança não sofreu alteração na movimentação desses vértices;

Nesta atividade, também percebemos que os sujeitos estavam tendo a errônea ideia de que a “resposta correta” seria aquilo que a professora queria ouvir/ler. A dupla C, por exemplo, que não conseguiu construir triângulos semelhantes, não queria responder os itens III e IV pois estaria, segundo eles, de “qualquer forma errado”. Ponte et al (2016) orienta, que nesses casos, “o professor deve assumir uma postura interrogativa, apoiando os trabalhos dos alunos, e não simplesmente validá-los.” (PONTE et al, 2016, p. 52). Ainda de acordo com o autor, as concepções e atitudes dos sujeitos serão sempre válidas, pois fazem parte das conjecturas levantadas por eles no processo de investigação, serão posteriormente testadas, no momento da discussão dos resultados. Destacaremos os pontos negativos na aplicação da tarefa.

- Como o fechamento se deu no mesmo dia de aplicação, restou pouco tempo para o fechamento da tarefa;

- Sujeitos tiveram dificuldades em lembrar das ferramentas de construção, ainda que nesta, especificamente, foi exigida uma combinação de poucas ferramentas;
- A professora sendo a única aplicadora da sequência teve dificuldade em se desdobrar em atender os alunos gravar e anotar as observações;
- Alguns dos sujeitos pareciam não ter paciência e boa vontade em registrar suas impressões, preferindo trabalhar exclusivamente com o computador.

Nesta tarefa os sujeitos trabalharam apenas com uma reta paralela cortando o triângulo e não passando por um de seus vértices, na próxima atividade teremos um par de retas concorrentes interceptadas por paralelas obtendo segmentos proporcionais.

Atividade 6

BIIAVI - Traçar duas retas AC e AB concorrentes em A. Criar o segmento BC. Construir um ponto D sobre a reta f e uma reta passando por D e paralela à BC. Nomear o ponto de interseção desta reta com AC de E. Criar os segmentos, AD, AE, DE, AB, AC, BC. Desloque o ponto D e represente na tabela abaixo as possíveis configurações dos triângulos formados ADE e ABC.

	Configuração 1	**Configuração 2**	**Configuração 3**
ΔABC	AB = AC = BC =	AB = AC = BC =	AB = AC = BC =
ΔADE	AD = AE = DE =	AD = AE = DE =	AD = AE = DE =
	Razão	**Razão**	**Razão**
	$\frac{AB}{AD} =$	$\frac{AB}{AD} =$	$\frac{AB}{AD} =$
	$\frac{AC}{AE} =$	$\frac{AC}{AE} =$	$\frac{AC}{AE} =$
	$\frac{BC}{DE} =$	$\frac{BC}{DE} =$	$\frac{BC}{DE} =$

I - Calcule a razão entre a medida dos segmentos correspondentes e verifique se as proporções são válidas para todas as configurações.

____

II - Marque os ângulos nos triângulos ABC e DEF e discuta com sua dupla se para este caso vale as relações de semelhança entre triângulos vistas nas atividades anteriores. Tente escrever uma relação entre as retas paralelas e a formação de triângulos semelhantes.

____

a) Objetivos

- Por meio desta atividade o aluno deverá perceber diversas maneiras de representar um par de retas concorrentes interceptadas por paralelas que, em qualquer uma das configurações podemos obter triângulos semelhantes.
- Conversão do registro discursivo para o registro figural;
- Tratamento na unidade figural
- Tratamento no registro numérico

b) Conhecimentos mobilizáveis

- Retas paralelas;
- Retas concorrentes;
- Segmentos proporcionais;
- Razão;
- Propriedade de semelhança entre triângulos;
- Leitura e interpretação

c) Análise preliminar

As configurações possíveis de serem encontradas pelos sujeitos são diversas, contudo, as conclusões devem ser equivalentes. Todas essas configurações surgirão a partir do deslocamento do ponto D, destacaremos três possíveis:

1ª) Estando o ponto D entre A e B aparecerão dois triângulos sobrepostos: ADE e ABC o triângulo ADE será uma redução de ABC

2ª) Se o ponto D estiver oposto a B em relação a A, então surgirão dois triângulos opostos pelo vértice: ADE e ABC

3ª) Se o ponto B estiver entre A e D os triângulos ficarão sobrepostos: ADE e ABC o triângulo ADE será uma ampliação de ABC

Os sujeitos podem ter problemas na construção caso aconteça uma ou mais de uma das possibilidades a seguir:

- Deixarem de nomear os pontos, pois ficará difícil de identificar os segmentos;
- Não usarem a ferramenta "*ponto em objeto'* para identificar o ponto D;
- Caso construam a paralela sem usar a ferramenta "*reta paralela"*;
- Se não utilizarem a opção "intersecção de dois objetos" para marcar o ponto E.

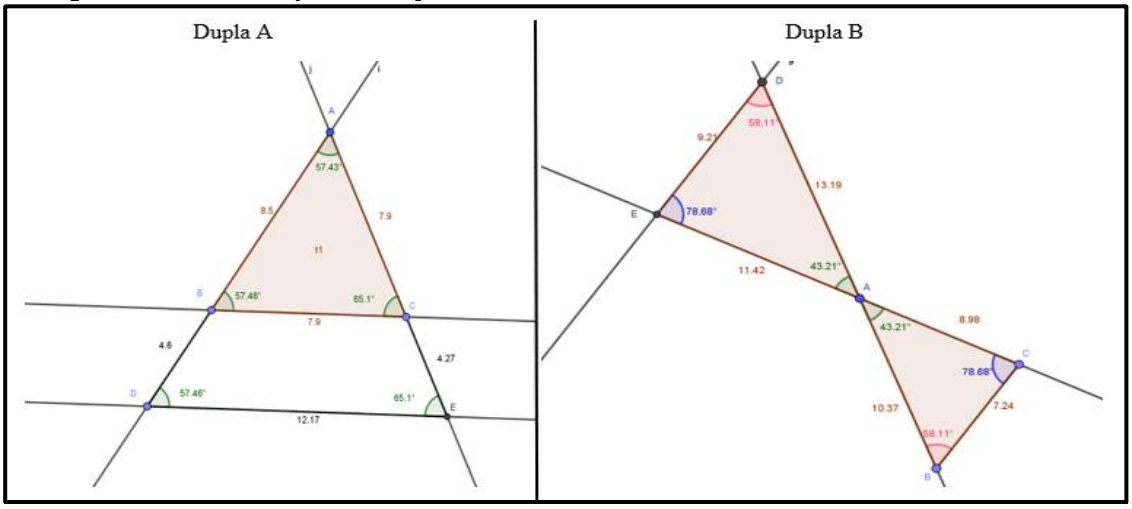
Fazendo a conversão do registro da língua natural para o registro figural, os sujeitos poderão executar a apreensão sequencial e discursiva. No momento de deslocamento do ponto D eles poderão mobilizar as apreensões perceptivas e operatória do tipo mereológica e ótica, além disso a desconstrução dimensional está intrinsecamente associada à figura, pois no enunciado já se depreende a utilização de elementos ID (retas concorrentes; retas paralelas e segmentos) e 2D quando menciona os triângulos ABC e DEF.

d) Análise das respostas dos sujeitos

Iniciamos a aplicação, como em todas as anteriores, fazendo uma leitura coletiva do enunciado da atividade. As quatro duplas relataram não ter dúvidas em relação ao enunciado ou aos termos geométricos utilizados. Ressaltamos que entre as atividades de familiarização com o software eles fizeram construções utilizando retas paralelas; retas perpendiculares e retas concorrentes, portanto esses termos não lhe eram estranhos.

Ainda assim, todas duplas manifestaram dúvidas quanto ao termo "concorrente", um dos sujeitos da equipe C, inclusive, afirmou que não havia a opção "reta concorrente" no GeoGebra, "*então não daria para fazer a atividade". Após o esclarecimento coletivo as equipes começaram suas construções no software, fazendo a conversão do Registro escrito para o Registro figural. Apresentaremos duas configurações de construções executadas pelos sujeitos.

Figura nº 38 - Construções das duplas A e B: atividade BIIAVI



Fonte: Produção da autora

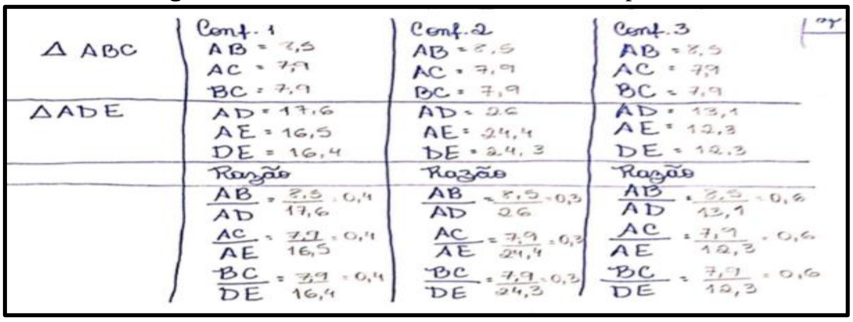
Conforme adiantado na análise preliminar as construções poderiam variar entre as duplas, pois dependiam de onde seria posicionado o ponto D ao longo da reta AB. As duplas A e D apresentaram construções similares à terceira e a primeira configuração respectivamente, citadas na análise preliminar. A dupla C não conseguiu construir triângulos com segmentos correspondentes proporcionais. A dupla B foi a única a posicionar o ponto D oposto a B em relação a A (antecipado na segunda configuração) obtendo, portanto, dois triângulos opostos pelo vértice: ADE e ABC. Os sujeitos acharam que sua construção estava errada e chamaram a professora. Parte do diálogo foi transcrito.

> (...) Prof.ª: *porque vocês acham que a construção de vocês está errada?*
> Léia: *esta estranha*
> Mérida: *não está igual ao do pessoa*l (se refere aos outros sujeitos)
> Léia: *sempre as figuras ficam iguais professora, quando a senhora mostra no projetor, por isso achamos estranho. Só que a gente não consegue ver onde errou.* (a aluna se refere ao momento de fechamento da atividade quando são apresentadas as construções de todas as equipes)
> Prof.ª: *vocês querem refazê-la, para ver se há algum erro*?
> Mérida: *sim*
> Prof.ª: *vamos lá então, salvem essa e vamos fazer outra.* (as alunas refazem a tarefa novamente e dessa vez posicionam o ponto D entre A e B, conseguem uma construção similar à da figura nº 20)
> (...)Professora: *e então?*
> Léia: *eu acho que agora ficou certo*.
> Professora: *e o que foi feito de diferente nesta construção em relação a primeira.*
> (As alunas analisam as figuras e demoram a responder)
> Léia: *acho que foi aqui* (aponta para o ponto D no monitor) *na primeira ficou depois do A.*
> Professora: *e onde deveria ficar? Leiam novamente no comando da atividade.*
> Mérida: *só diz que é para construir um ponto D sobre a reta f, não diz onde.*
> Professora: *então como é que a primeira construção pode estar errada?*
> Léia: então não "tá" né? (...)

Essa interação das alunas com a professora pesquisadora durou cerca de quinze minutos, desse episódio foram transcritas apenas as partes onde as dúvidas foram apresentadas com mais contundência e que transparecem as elucidações da pesquisadora aos questionamentos das alunas. Naturalmente, seria mais fácil esclarecer que a posição do ponto D determinaria o posicionamento dos triângulos, todavia, mais uma vez a professora assumiu a postura interrogativa, devolvendo às alunas os questionamentos de forma que elas alcançassem sozinhas esse entendimento.

De volta à análise das construções, uma vez que as duplas A e B conseguiram conclui-las seguindo as instruções contidas no enunciado, pode-se afirmar que elas executaram a apreensão sequencial e ao analisar sobre os elementos dessas instruções (retas paralelas, retas concorrentes, ponto de intersecção etc.) a fim conferir se o que se parecia na tela estaria de acordo com o enunciado, eles fizeram uso da apreensão discursiva. Apresentaremos nos Figuras nº 39 e 40 a tabela da dupla A e na sequência suas respostas para os itens I.

Figura 39 - Tabela da atividade BIIAVI - dupla A

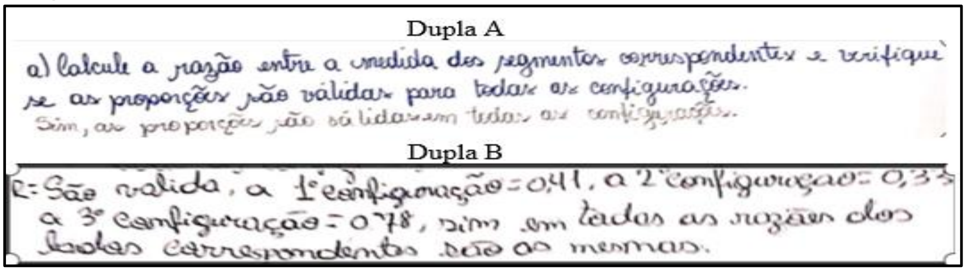


Δ ABC	Conf. 1 AB = 7,5 AC = 7,9 BC = 7,9	Conf. 2 AB = 7,5 AC = 7,9 BC = 7,9	Conf. 3 AB = 7,5 AC = 7,9 BC = 7,9
Δ ADE	AD = 17,6 AE = 16,5 DE = 16,4	AD = 26 AE = 24,4 DE = 24,3	AD = 13,1 AE = 12,3 DE = 12,3
	Razão	Razão	Razão
	AB/AD = 7,5/17,6 = 0,4 AC/AE = 7,9/16,5 = 0,4 BC/DE = 7,9/16,4 = 0,4	AB/AD = 7,5/26 = 0,3 AC/AE = 7,9/24,4 = 0,3 BC/DE = 7,9/24,3 = 0,3	AB/AD = 7,5/13,1 = 0,6 AC/AE = 7,9/12,3 = 0,6 BC/DE = 7,9/12,3 = 0,6

Fonte: Produção da autora

Para o preenchimento da tabela a dupla A efetuou a conversão do registro figural para o registro numérico, percebemos ainda na tabela a conversão do registro simbólico (segmentos dos triângulos) para o registro da escritura fracionária e deste para o registro da escrita dos números decimais. Também conseguiram preencher a tabela sem problemas os sujeitos da dupla B, apresentando as razões 0,41 para a config. 1; 0,33 para a config. 2 e 0,78 para a config. 3. Em sua tabela foram observadas as mesmas conversões de registros notadas na da dupla A.

Figura nº 40 - Respostas das duplas A e B para item da I atividade BIIAVI



Dupla A

a) Calcule a razão entre a medida dos segmentos correspondentes e verifique se as proporções são válidas para todas as configurações.

Sim, as proporções são válidas em todas as configurações.

Dupla B

R: São valida, a 1ª configuração = 0,41, a 2ª configuração = 0,33 a 3ª configuração = 0,78, sim em todas as razões dos lados correspondentes são as mesmas.

Fonte: Produção da autora

A dupla C não encontrou proporcionalidade entre os segmentos correspondentes, em função de que a construção realizada por eles no GeoGebra apresentava erros, o que nos leva a crer que eles não interpretaram corretamente as instruções da sequência de comando, configurando, nesse caso, a não observação da apreensão discursiva. Para o item I apresentaram resposta diferente das demais duplas, pois não alcançaram indícios de que os triângulos formados por retas concorrentes interceptados por retas paralelas formam triângulos cujos segmentos correspondentes sejam proporcionais. Na Figura nº 41 apresentamos a tabela da dupla preenchida com os valores dos segmentos dos triângulos ABC e ADE.

Figura 41 - Tabela da atividade BIIAVI – dupla C

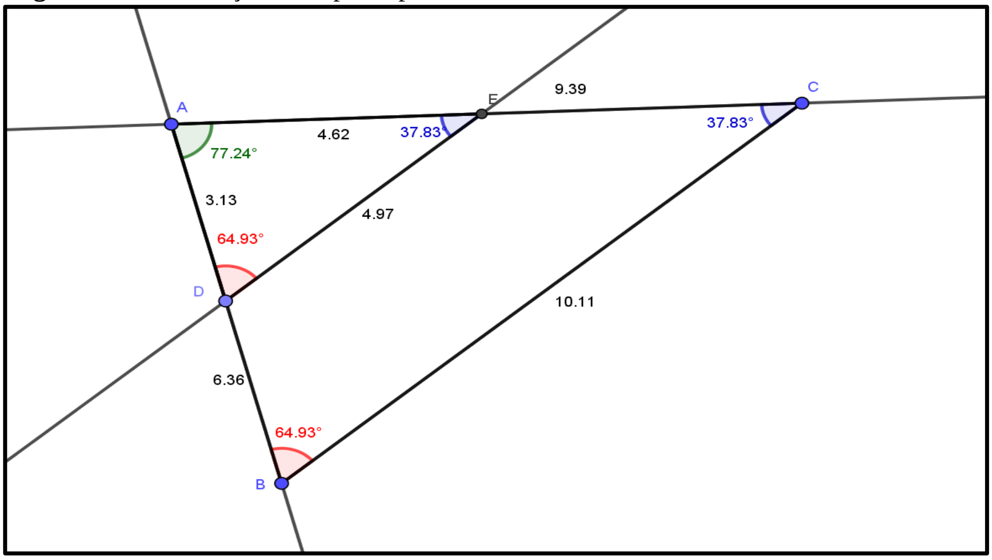
	Config 1	Config 2	Config 3
ΔABC	AB = 0,87 AC = 0,83 BC = 1,[illegible]	AB = 0,87 AC = 0,89 BC = 1,01	AB = 0,87 AC = 0,89 BC = 1,01
ΔADE	AD = 10,94 AE 10,26 DE 10,72	AD = 9,39 AE = 8,26 DE = 7,8	AD = 11,24 AE = 9,89 DE = 11,28
	Razão	Razão	Razão
	$\frac{AB}{AC}$ = 0,97	$\frac{AB}{AD}$ = 0,09	$\frac{AB}{AD}$ = 0,07
	$\frac{AC}{AE}$ = 0,08	$\frac{AC}{AE}$ = 0,10	$\frac{AC}{AE}$ = 0,08
	$\frac{BC}{DE}$ = 0,09	$\frac{BC}{DE}$ = 0,12	$\frac{BC}{DE}$ = 0,08

Fonte: Produção da autora

Percebemos que os sujeitos ao preencherem a tabela indicaram os segmentos $AB; AC; BC\ ; AD; AE\ e\ DE$ por seus respectivos valores e desta forma promoveram uma conversão do registro figural (construção no GeoGebra) para o registro da escrita simbólica, e logo em seguida, realizaram a conversão desse registro para o registro numérico. Em relação ao item I a equipe respondeu utilizando o registro escrito que a "*proporção não era válida para todos os segmentos quando movimentava o ponto D*".

A dupla D construí uma figura de acordo com a configuração 1 apresentada na análise preliminar, onde o ponto D localiza-se entre os pontos A e B originando dois triângulos sobrepostos: ADE e ABC o triângulo ADE sendo uma redução de ABC.

Figura 42 – Construção da dupla D para a atividade BIIAVI



Fonte: Produção da autora

A dupla D foi a única que não utilizou a ferramenta polígono para construir o triângulo ABC, ressalta-se que no comando não foi solicitado que os sujeitos a utilizassem, contudo, acredita-se que por associação as demais atividades, os outros sujeitos fizeram uso dessa ferramenta, principalmente porque no item II é solicitado que sejam marcados os ângulos em ambos os triângulos. A dupla D realizou as conversões do registro figural para o registro Simbólico e do registro simbólico para o registro da escrita fracionária, ao dividir o numerador pelo denominador faz a conversão do registro fracionário para o registro da escrita decimal. Deste modo os sujeitos constatam no item I que existe a proporcionalidade entre os segmentos correspondentes dos triângulos ABC e DEF.

Figura 43 - Tabela da atividade BIIAVI – dupla D

razão 1	razão 2	razão 3
$\frac{AB}{AD} = \frac{6,36}{3,42} = 1,85$	$\frac{AB}{AD} = \frac{6,36}{4,58} = 1,38$	$\frac{AB}{AD} = \frac{6,36}{9,81} = 0,64$
$\frac{AC}{AE} = \frac{9,39}{5,06} = 1,85$	$\frac{AC}{AE} = \frac{9,39}{6,77} = 1,38$	$\frac{AC}{AE} = \frac{9,39}{14,49} = 0,64$
$\frac{BC}{DE} = \frac{10,11}{5,44} = 1,85$	$\frac{BC}{DE} = \frac{10,11}{7,28} = 1,38$	$\frac{BC}{DE} = \frac{10,11}{15,6} = 0,64$

Fonte: Produção da autora

O segundo item da atividade teve como objetivo que os sujeitos analisassem as construções e identificassem que podemos obter triângulos semelhantes quando se tem retas paralelas interceptadas por retas concorrentes, de forma a prepara-los para que na próxima atividade seja relacionado o teorema de tales à semelhança de triângulos. Apresentaremos as respostas das duplas na sequência.

Figura 44 - Respostas das duplas A; B e C para o item II atividade BIIAVI

O ângulo AD̂E possui a mesma medida de AÊC, assim como DÊA possui a mesma medida de BĈA, provando que neste caso também há a relação de semelhança entre os triângulos ABC e ADE.

Dupla A

O dois Δ triangulos são congruente o valor dos lados tem a mesma razão assim como os ângulos

Dupla B

tividade.
Os dois triângulos não são congruente.

Scanned with

Dupla C

Fonte: Produção da autora

Pelas respostas das duplas A e B percebemos que eles identificam que os triângulos são semelhantes, a dupla A justifica a semelhança pela congruência entre os ângulos correspondentes, já a dupla B justifica pela congruência e pela proporcionalidade entre os lados correspondentes. A dupla C apresenta um esboço de sua construção do GeoGebra para mostrar que, em sua construção, os triângulos não possuem ângulos correspondentes portanto não são semelhantes, podemos afirmar que para a sua resposta esses sujeitos fizeram uso dos registros discursivo e figural, no caso da dupla C. A dupla D foi a única que relacionou às retas paralelas à formação dos triângulos semelhantes, apresentaram como resposta ao item II a seguinte justificativa: "*se tivermos duas retas concorrentes e um par de retas paralelas podemos formar triângulos semelhantes*"

De volta às atividades cognitivas mobilizadas na atividade, desta vez fazendo uma abrangência total relacionada à todas as duplas, podemos afirmar, baseando nos em Duval (2012a), que a apreensão perceptiva foi requerida no momento em que houve a visualização dos triângulos formados pelas retas concorrentes interceptadas por retas paralelas, pois houve a percepção imediata da formação dos triângulos quando traçados os segmentos proporcionais.

Ao movimentar o ponto D para obter as três configurações, dependendo de onde estava posicionado esse ponto, o triângulo ADE poderia sofrer uma redução ou ampliação em seus lados. Para verificar a proporcionalidade entre os segmentos correspondentes, os sujeitos precisaram executar esse tratamento no registro figural, caracterizando, portanto, a presença da apreensão operatória do tipo ótica.

A dupla C ao representar sua justificativa para triângulos não congruentes (Figura nº 25) fraciona a figura obtida no GeoGebra e apresenta um esboço dos triângulos ABC e DEF em seu registro escrito, nesse caso os sujeitos fizeram uso da apreensão operatória com modificação mereológica. O ganho em se fracionar uma figura está ligado à operação de reconfiguração intermediaria, segundo Almouloud (2007) essa estratégia permite de forma mais prática engrenar os tratamentos, tais como a medida de áreas, ou, nesse caso, o cálculo da razão entre os segmentos proporcionais.

Um dos episódios interessantes da aplicação ocorreu com a equipe A, quando identificaram que os lados do triangulo ABC não sofriam qualquer mudança na movimentação do ponto D. A seguir a transcrição de parte desse diálogo.

> Ariel: *por que não muda as medidas do primeiro triângulo?*
> Alice: *porquê "tá" mexendo só na reta*
> Ariel: *eu acho que não vai dar a mesma razão.*

> Alice: *é porque o ponto D tá em cima da reta, eu marquei com o "ponto em objeto"* (se refere a ferramenta "ponto em objeto")
> Ariel: *então só vai mudar as medias do lado do triangulo ADE?*
> Alice: *vamos tentar primeiro assim, se não der a gente pergunta para a professora Clara, eu acho que "tá" tudo certo na figura, porque a gente seguiu direitinho o comando.*

Ressalta-se que as alunas não solicitaram intervenção da professora para solucionar essa dúvida, e levando em consideração que a dupla encontrou a proporcionalidade entre os lados dos triângulos, conforme constatado no Figura nº 44, elas conseguiram compreender que o ponto D é que determinava a mudança no tamanho dos segmentos. E consequentemente só influenciaria o triângulo ADE, e de nenhuma forma o triângulo ABC.

Durante a aplicação da atividade esperava-se que os alunos tecessem mais comentários ou mais questionamentos sobre os triângulos formados com as retas paralelas, contudo, houve pouco espaço para o levantamento de conjecturas, nesse sentido. Mesmo quando a professora fez uma tentativa de desencadear a reflexão sobre esse aspecto, os sujeitos mostraram-se reticentes em aprofundar à reflexão, em vista disso o objetivo principal da atividade foi alcançado apenas parcialmente, uma vez que apenas uma dupla conseguiu estabelecer a associação que era pedida no item II.

e) **Fechamento da atividade e encaminhamentos**

Excepcionalmente nesta atividade não foi entregue cópia impressa aos sujeitos, sendo disponibilizada em pdf no computador de onde eles poderiam copiar as respostas para uma folha entregue pela professora, nesta tarefa, em função do tempo, o fechamento ocorreu no dia seguinte e não no mesmo dia da etapa de construção.

Retomando o objetivo principal que era possibilitar que, por meio desta atividade, o aluno percebesse diversas maneiras de representar um par de retas concorrentes interceptadas por paralelas que, em qualquer uma das configurações, poderiam ser obtidos triângulos semelhantes, faremos algumas considerações acerca da aplicação da tarefa.

- Todos as equipes conseguiram identificar os triângulos formados por retas concorrentes interceptadas por retas paralelas;
- Apenas a equipe C por equívocos na construção não identificou triângulos semelhantes;
- A equipe A foi a única a manifestar oralmente a ciência de que o ponto D em nada alteraria as dimensões do triângulo ABC;

- Percebemos a utilização das apreensões sequencial; discursiva; perceptiva e operatória do tipo ótica e mereológica;
- As condições de semelhança entre triângulos já estão estabelecidas, posto que não houve dúvidas em identificar a semelhança pelos segmentos correspondentes proporcionais. A dupla D, por exemplo, questionou a necessidade em se marcar os ângulos se “pelos lados já dava para perceber que eram semelhantes”

Ainda no fechamento da tarefa a professora discutiu com os sujeitos sobre a formação dos triângulos em retas paralelas cortadas por transversais, de forma a prepara-los para a atividade 7 BIIAVII que encerrará o segundo bloco.

A atividade contribuiu para a visualização de posições relativas de retas paralelas, retas transversais, formação de segmentos, observação de propriedades de triângulos congruentes e triângulos semelhantes, podemos dizer que o programa de geometria dinâmica levou uma compreensão empírica de tais propriedades por meio da medição, já que os estudantes realizaram as medidas dos lados e dos ângulos internos, e a verificação da congruência de triângulos por meio do programa Geogebra.

Atividade 7

BIIAVII - Construir uma reta paralela f com pontos A e B. Traçar uma reta g partindo de a e perpendicular a f. Em g marcar um ponto C com a ferramenta “ponto em objeto”. Construir um triangulo unindo os pontos A, B e C. No segmento AC do triângulo marcar um ponto D em seguida uma reta paralela a BC. Marque a intersecção da reta paralela com o segmento AB, criando o ponto E. Repita esse processo até conseguir duas retas paralelas dentro do triângulo. Por fim, marque todos os segmentos. Analise a figura obtida na construção e responda as perguntas abaixo.

I - Quais retas são paralelas nesta figura.

____

II - Quantos e quais triângulos você observa nesta construção? Utilizando a propriedade da proporcionalidade entre lados correspondentes, verifique se esses triângulos são semelhantes.

____

III - Você já estudou anteriormente que se um feixe de retas paralelas é cortado por duas retas transversais, então os segmentos determinados pelas paralelas são proporcionais. Você consegue relacionar esta propriedade com o teorema fundamental da semelhança?

---

a) Objetivos

- O objetivo principal da atividade é que os sujeitos identifiquem a relação entre o teorema de tales e o teorema fundamental da semelhança, associando os dois por meio das retas paralelas que formam triângulos semelhantes entre si.

b) Conhecimentos mobilizáveis

- Retas paralelas;
- Retas perpendicular;
- Segmentos proporcionais;
- Razão;
- Propriedade de semelhança entre triângulos;
- Leitura e interpretação;

c) Análise preliminar

Os comandos de execução da tarefa são fechados e, portanto, não há margens para grande variedade de configurações, o que pode mudar de uma construção para outra é se os sujeitos optarem por usar ou não a ferramenta polígono, esperamos que os alunos apresentem figuras próximas uma da outra que representem um triângulo ABC cortado por retas paralelas, formando os segmentos DE e FG.

O item I foi incluído com o intuito que os sujeitos refletissem qual a função das retas paralelas nesse processo de construção de triângulos semelhantes pelo teorema de tales, não esperamos justificativas conceituais acerca do paralelismo e sim baseadas no que eles conseguem visualizar sobre elas, haja vista que as formalizações foram feitas tomando como ponto de partida as conjecturas dos sujeitos.

Ao responderem ao questionamento de quantos e quais triângulos são observados na construção, espera-se que os alunos façam uso da apreensão perceptiva da figura e da desconstrução dimensional. É esperado que eles deem como respostas, se nomearem os pontos conforme o comando da atividade: triângulo ABC; triângulo ADE e triângulo AFG.

Para o questionamento de que eles são semelhantes, os sujeitos podem identificar a proporcionalidade entre os segmentos correspondentes determinados pelas paralelas, usando o caso de semelhança LLL, no entanto, também poderiam comprovar a semelhança entre os três triângulos, simplesmente marcando os ângulos. Essa ferramenta não foi desabilitada no momento da aplicação, os sujeitos poderiam utiliza-la se assim quisessem. Contudo, essa possibilidade não foi indicada no comando em função do objetivo de a atividade ser justamente mostrar a proporcionalidade entre os segmentos determinados pelas paralelas.

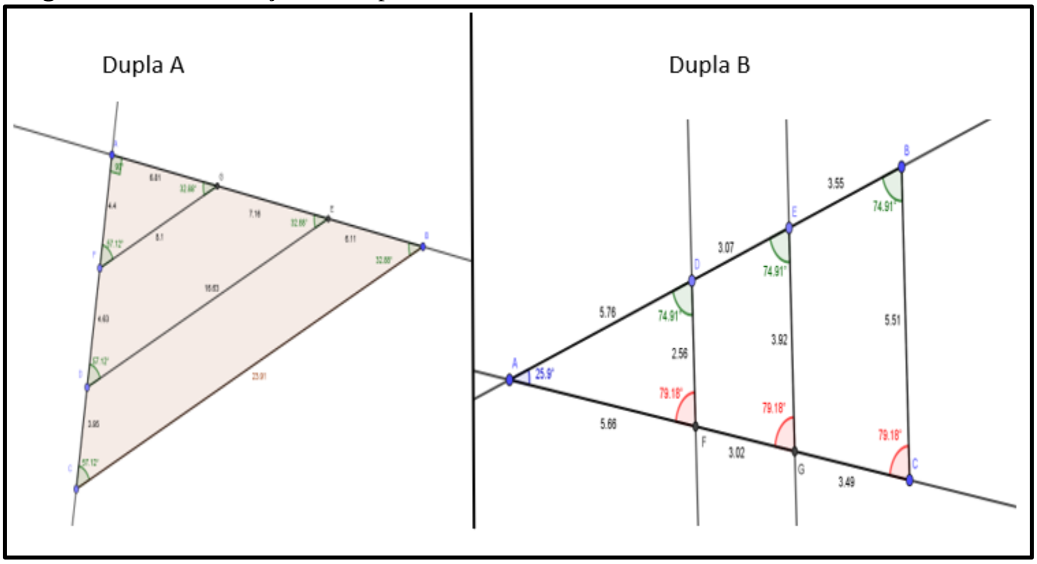
Reiteramos que o escopo principal do estudo é o ensino de semelhança de triângulos, e ao abordamos o Teorema de Tales procuramos relaciona-lo ao Teorema Fundamental da semelhança, de forma que os sujeitos identifiquem a relação entre os dois teoremas e que o TFS usa o Teorema de Tales para o cálculo de segmentos de um mesmo triângulo cortado por reta paralela.

Com relação às atividades cognitivas mobilizadas espera-se que os sujeitos façam usa das apreensões sequencial, discursiva, perceptiva e operatória do tipo ótica e mereológica. Além da desconstrução dimensional passando da dimensão do polígono (2d) para as retas e segmentos (1D) ao analisar a proporcionalidade dos segmentos formados na interseção entre as retas paralelas e transversais

d) Análise das respostas dos sujeitos

Nas atividades BIIAVI e BIIAVII podemos perceber algumas relações entre retas paralelas e segmentos proporcionais, esperava-se, conforme adiantado nas análises preliminares das atividades, que os sujeitos constatassem a semelhança de triângulos nessa configuração. Apresentamos as construções dos sujeitos das duplas A e B na Figura nº 45

Figura nº 45 - Construção das duplas A e B da atividade BIIAVII



Fonte: Produção da autora

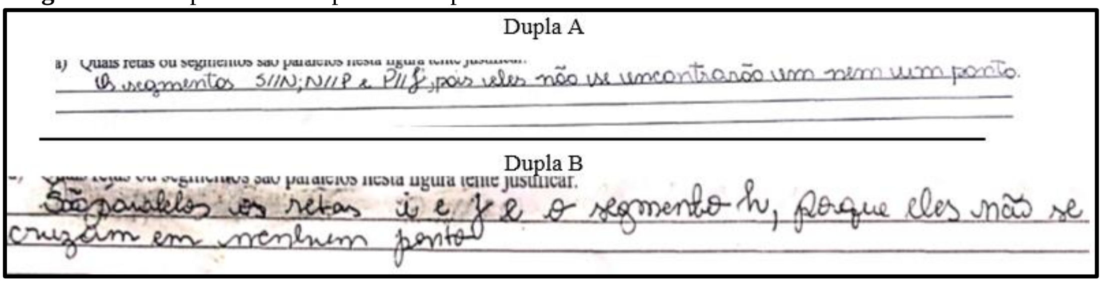
Analisaremos conjuntamente as construções das duplas A e B e posteriormente das duplas C e D. Nas duas construções retratadas na Figura nº 45 podemos perceber que os sujeitos fizeram a conversão do registro da língua natural para a o registro figural, nesse processo fizeram uso da apreensão sequencial e discursiva. Percebemos que na construção da dupla A eles utilizaram a ferramenta polígono para construir o triângulo ABC em seguida marcaram os pontos D e F e suas respectivas interseções, já a dupla B não fez uso dessa ferramenta, marcando os ângulos diretamente nos pontos de interseção das paralelas com as transversais, que seriam os vértices dos triângulos.

No primeiro questionamento os sujeitos identificaram quais retas ou segmentos são paralelos em sua construção. Nesse caso, os sujeitos deveriam reconhecer a unidade figural 1D (as retas paralelas) independentes das unidades figurais 2D (triângulos). Duval (2011) esclarece que esse tipo de reconhecimento costuma se constituir, geralmente, em um problema cognitivo, pois de acordo com o autor, “a percepção visual impõe sistematicamente o reconhecimento das unidades figurais em 2D, deixando as unidades 1D em segundo plano” (DUVAL, 2011, p. 94).

Na figura construída pela dupla A esse reconhecimento estaria ainda mais comprometido, haja vista que os sujeitos ocultaram as retas paralelas. Geralmente há uma tendência em conceber o segmento como um elemento dissociado da reta, quando na verdade é uma parte dela que possui um ponto final e um ponto inicial. No caso específico da dupla, as retas ficaram ocultas após a conclusão da atividade, mas em um caso genérico, tomando essa figura como apoio visual os sujeitos provavelmente perguntariam “que reta paralela?”.

Observemos as respostas dos sujeitos das duplas A e B para o item I da atividade BIIAVII.

Figura 46 - Respostas das duplas A e B para o item I da atividade BIIAVII.


Dupla A

Os segmentos S//N; N//P e P//J, pois eles não se encontrarão em nem um ponto.

Dupla B

São paralelos as retas i e j e o segmento h, porque eles não se cruzam em nenhum ponto

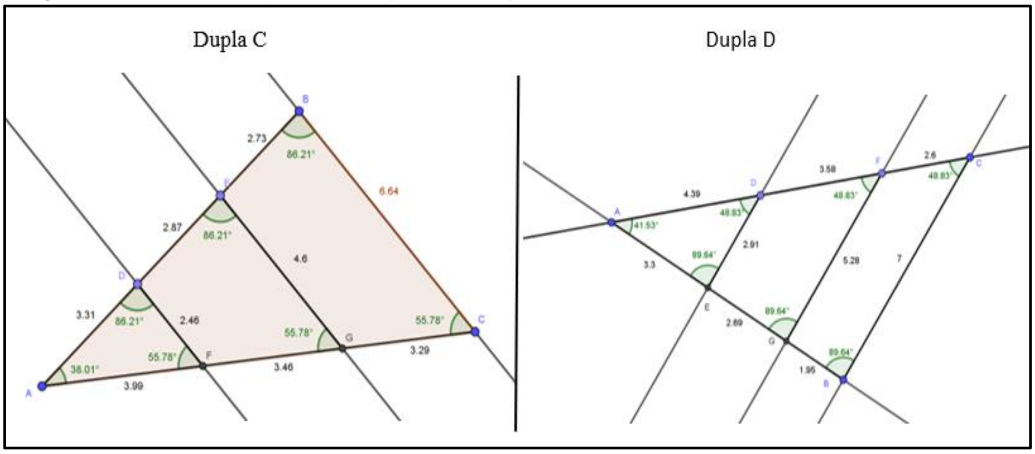
Fonte: Produção da autora

As duplas A e B identificaram as retas e segmentos de retas paralelas em suas construções, e de acordo com suas justificativas são paralelas pois não se encontram em nenhum ponto. As duplas C e D também identificaram as retas paralelas na construção, contudo, não conseguiram justificar. Podemos afirmar que houve desconstrução dimensional do tipo $(nD \rightarrow$

$(n-1)D$ pois do triângulo ABC (2D) voltou-se o olhar para a unidade figural de dimensão inferior, a reta paralela ou segmento de reta (1D).

Observa-se que os sujeitos marcaram os ângulos em suas construções, mesmo que isso não tenha sido exigido na sequência de comandos da atividade, o que nos leva a constatar que, ainda que eles possam ter detectado a semelhança pela proporcionalidade dos lados, há ainda uma necessidade de "confirmação" da visualização dos ângulos congruentes. Todas as equipes procederam dessa forma, conforme também podemos constatar nas construções das dupla C e D na Figura nº 47.

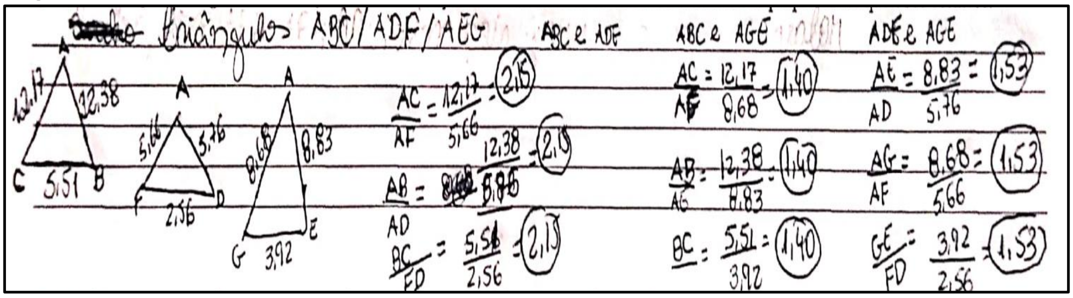
Figura nº 47 - Construções das duplas C e D para a atividade BIIAVII



Fonte: Produção da autora

No item dois pedimos que fosse verificada a semelhança entre os triângulos construídos, essa etapa foi essencial para o desenvolvimento da resposta do item III. A verificação, nesse caso, foi estabelecida que acontecesse pela propriedade da proporcionalidade dos lados correspondentes. Iniciaremos a análise das respostas deste item pela dupla A.

Figura nº 48 - respostas da dupla A para o item II da atividade BIIAVII.



Fonte: Produção da autora

Na resposta dos sujeitos percebemos a utilização da apreensão perceptiva ao destacar os triângulos ABC; ADF e AGE, pois, a superposição dos triângulos é visível e independente do enunciado, ou de aspectos métricos, a esse respeito Duval (2011) ressalta que para aprender a "ver" uma figura, os alunos "devem aprender a trabalhar sem recorrer primeiramente a aspetos métrico" (DUVAL, 2011, p. 92). Em uma situação concreta de aplicação, antes de qualquer aplicação de propriedades de cálculo, a percepção da presença de três triângulos na figura é imprescindível.

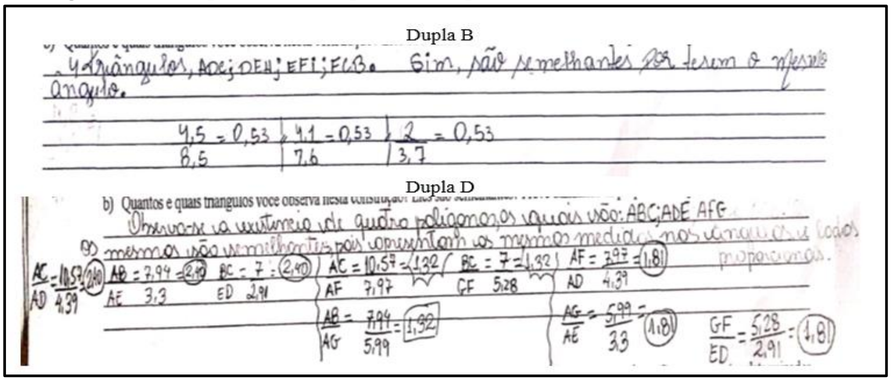
Ainda da resposta dos sujeitos constata-se a conversão do registro figural para o registro simbólico e do registro simbólico para o registro da representação fracionária e deste para o da representação decimal. Percebe-se então que eles identificam a semelhança entre os triângulos pelo caso LLL e após a verificação por essa propriedade eles resolvem marcar os ângulos, a professora acompanhou essa etapa, na sequência a transcrição de parte do diálogo.

> (...) prof.ª: *então já comprovaram a semelhança entre os triângulos?*
> Alice: *são semelhantes, deu o mesmo valor da razão.*
> Prof.ª: *então por que marcar os ângulos?*
> Alice: *para ter mais certeza.*
> Ariel: *100% de certeza (a aluna rir)*
> Prof.ª: *mas os lados correspondentes são proporcionais*?
> Ariel: *são*?
> Prof.ª: *me diga você, o que significa esse valor da razão?*
> Ariel: *significa que são iguais os triângulos*
> Alice: *não é isso não, eles não são iguais. Já esqueceu tudo? (a aluna rir)*
> Ariel*: eu sei, eu sei, me confundi. Eu sei que não são iguais, me esqueci o nome que dá para o valor que a gente encontra.*
> Prof.ª*: constante de proporcionalidade*
> Prof.ª: *quero saber se vocês acham necessário marcar os ângulos dos triângulos para terem certeza se são semelhantes.*
> Alice: *hum....acho que não, por causa daquele caso dos lados mas achamos melhor, vai que fizemos alguma conta errada. E também fica mais completo, triângulo tem que ter ângulo né. (...).*

Essa questão levantada pela aluna suscitou a reflexão de que os sujeitos ainda poderiam ter dúvidas em relação as condições de semelhança entre triângulos, quando pensávamos já ter esclarecido isso nas atividades do primeiro bloco. Percebemos no diálogo que a aluna Ariel não estava segura sobre a significado da constante de proporcionalidade entre os triângulos, o que foi reforçado novamente no fechamento da tarefa.

As duplas B; C e D justificaram a semelhança entre os triângulos pela proporcionalidade entre os lados homólogos e também pela congruência dos ângulos, todos encontraram a razão de proporcionalidade entre os triângulos, no Figura nº 49 as respostas da dupla B e D.

Figura 49- Respostas das dupla B e D para o item II da atividade BIIAVII.



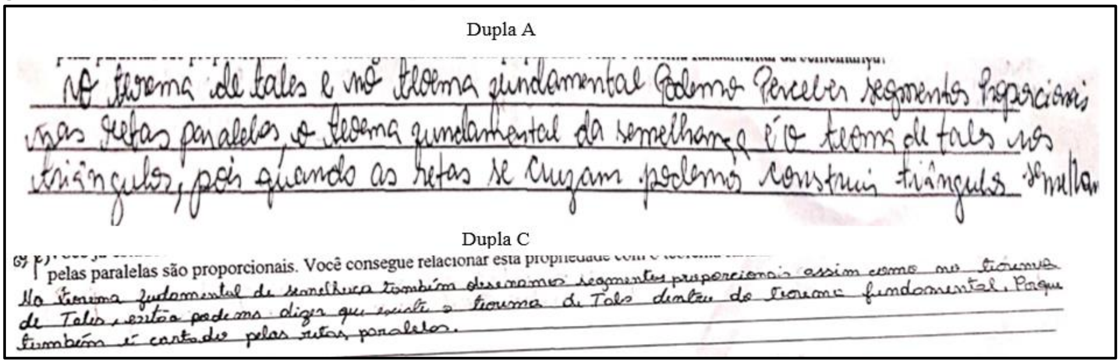
Fonte: Produção da autora

Curiosamente, as duplas B e D identificaram quatro triângulos em suas respostas, quando em suas construções podemos observar apenas três. No entanto, verificaram a proporcionalidade em três pares de triângulos, a dupla B foi econômica em sua resposta, mas justifica dizendo que os triângulos "*são semelhantes pois têm o mesmo ângulo*", acredita-se que eles marcaram primeiro os ângulos nos triângulos e uma vez que perceberam a congruência, observaram que não havia a necessidade da verificação da proporcionalidade entre os lados homólogos. A dupla C justificou usando a proporcionalidade dos segmentos correspondentes e ângulos congruentes, segundo eles são semelhantes "*pois os segmentos correspondentes são proporcionais e os ângulos também são iguais".*

O primeiro e o segundo item foram necessários, no sentido de fornecer elementos que pudessem auxiliar os sujeitos na reflexão para responder o item III. O item I no sentido de suscitar a atenção para a retas paralelas nos triângulos e o item II para que eles observassem a possibilidade de formar triângulos em retas paralelas cortadas por transversais.

Conforme adiantado nas análises preliminares, o objetivo principal das atividades 5; 6 e 7 era que os sujeitos percebessem a relação entre o teorema de tales e a semelhança de triângulos de forma gradativa. Considerando que eles na atividade 7 já estejam prontos para desenvolver alguma associação entre esses dois saberes, o item III pedia que eles relacionassem o teorema de Tales com o teorema fundamental da semelhança. Apresentamos as respostas das duplas A e C no Figura nº 50.

Figura 50 - Respostas das dupla A e C para o item III da atividade BIIAVII.


Dupla A

No teorema de tales e no teorema fundamental podemos perceber segmentos proporcionais nas retas paralelas, o teorema fundamental da semelhança é o teorema de tales nos triângulos, pois quando as retas se cruzam podemos construir triângulos semelhan

Dupla C

pelas paralelas são proporcionais. Você consegue relacionar esta propriedade com o teorema

No teorema fundamental de semelhança também observamos segmentos proporcionais assim como no teorema de Tales, então podemos dizer que existe o teorema de Tales dentro do teorema fundamental. Porque também é cortado pelas retas paralelas.

Fonte: Produção da autora

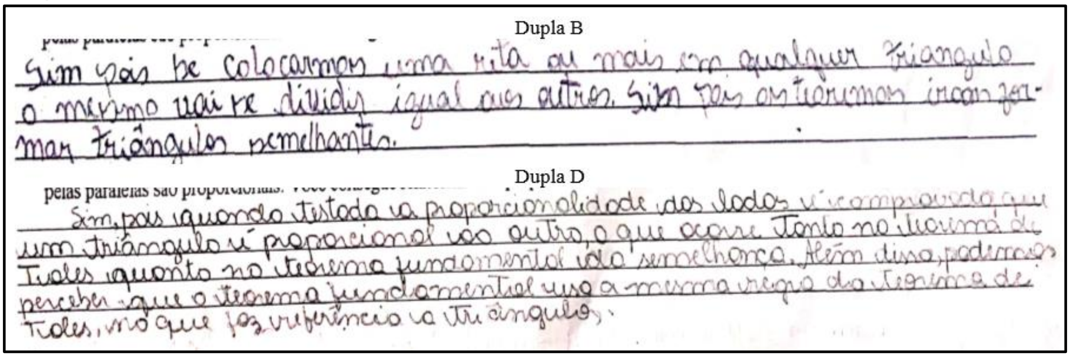
As duplas A e C apresentaram respostas aproximadas para o item III. Podemos observar, a partir das respostas dos alunos que eles conseguiram formular conjecturas com relação a ocorrência do feixe de retas paralelas cortadas por transversais. A dupla C não entendeu no primeiro momento o que era para ser feito, e solicitou a intervenção da professora.

> (...) Jane: *não sabemos direito o que é para fazer.*
> Prof.ª: *vamos ler novamente o enunciado.*
> Luke: *sempre senhora fala isso..já li umas 5 vezes.*
> Prof.ª: *e o que você entendeu? Não é possível que não tenha entendido nada.*
> Luke: (o aluno rir) *entendi mais ou menos..tem a ver com o teorema de Tales né? Que a senhora falou na semana passada*?
> Prof.ª: *exatamente, estamos chegando lá*.
> Jane: *o que tem a ver com esse outro teorema?*
> Prof.ª: *essa é a pergunta da atividade.*
> Prof.ª: *podem analisar as construções da atividade 5 onde discutimos sobre o teorema fundamental da semelhança*.
> Luke: *vou olhar o livro.* (o aluno consulta o seu livro sobre a definição do teorema de Tales)
> Luke: *é como se as retas aqui...* (mostra no seu livro para um exemplo clássico do feixe de três retas paralelas cortadas por duas transversais, nesse caso o aluno aponta as retas transversais) ...*se fechassem e formassem um triângulo.*
> Prof.ª: *ficando igual a esse aqui que vocês construíram?*
> Jane: *é igual mesmo, só que o nosso tem três retas paralelas.*
> Jane*: então o teorema de Tales está no teorema fundamental no triângulo?*
> Profª: *se vocês acham isso, elaborem a resposta com base nesse pensamento. Depois nós vamos analisar a resposta de todos.*

Ponte et al (2016), dizem que uma das etapas fundamentais de uma investigação matemática é o processo de formulação de conjecturas, onde, de acordo com os autores, “elas podem surgir por manipulação dos dados ou por analogia com outras conjecturas” (PONTE et al, 2016, p. 32). Na fala dos sujeitos percebemos que eles tomam um exemplo análogo no livro didático e percebem que as retas concorrentes representadas em sua construção, são na verdade, as mesmas retas transversais representadas nos exemplos dos livros didáticos, antecipando a verificação sistemática realizada no fechamento.

Constatação parecida teve a dupla A ao afirmar que o "*o teorema fundamental da semelhança é o teorema de tales nos triângulos*". Em comum com a dupla B podemos observar que os sujeitos reconhecem a presença dos segmentos proporcionais nas retas paralelas em ambos os teoremas. A dupla A não solicitou auxilio para resolver a questão, o que nos leva a acreditar que os sujeitos compreenderam a relação existente entre os dois saberes matemáticos. Na sequência apresentamos as respostas das duplas B e D.

Figura 51 - respostas das dupla B e D para o item III da atividade BIIAVII.



Dupla B

Sim pois se colocarmos uma reta ou mais em qualquer triângulo o mesmo vai se dividir igual aos outros. Sim pois os teoremas irão formar triângulos semelhantes.

Dupla D

Sim, pois quando testado a proporcionalidade dos lados é comprovado que um triângulo é proporcional ao outro, o que ocorre tanto no teorema de Tales quanto no teorema fundamental da semelhança. Além disso, podemos perceber que o teorema fundamental usa a mesma regra do teorema de Tales, no que faz referência a triângulos.

Fonte: Produção da autora

A dupla B provavelmente tentou enunciar o teorema fundamental da semelhança ao mencionar "*ao traçar retas em qualquer triângulo, ele se divide em triângulos iguais".* E diz ainda que ambos os teoremas "formam triângulos semelhantes". A dupla D observou que *"tanto no TFS e no Teorema de Tales é válida a proporcionalidade dos lados*". Quando os alunos mencionam que os teoremas usam as mesmas regeras, acredita-se que estejam se referindo a proporcionalidade dos lados e às retas paralelas cortadas por transversais.

Para responderem aos questionamentos do item III os sujeitos fizeram uso prioritariamente do registro da língua natural. Duval (2011) aponta que os alunos normalmente concebem o processo de utilizar a linguagem em matemática como "desconcertante", principalmente pelo fato de que, segundo o autor, "a linguagem utilizada em matemática não tem, quase sempre, muito a ver com aquela praticada de forma espontânea fora da matemática"(DUVAL, 2011, p.125).

Parte da dificuldade sentida pelos sujeitos em elaborar de forma escrita suas conjecturas pode muito bem advir dessa observação destacada pelo autor. Enquanto os sujeitos analisavam suas construções observou-se que eles alcançaram o entendimento de que os segmentos proporcionais formados pelas retas paralelas é a principal relação entre os teoremas, contudo, na formalização das respostas, houve certa confusão em algumas das respostas que serão destacadas para a análise no fechamento da atividade.

Com relação as atividades cognitivas mobilizadas na atividade destacamos a utilização das apreensões sequencial na sequência dos comandos para construção. Ao responderem o item II e identificarem três triângulos em uma mesma figura podemos afirmar que eles fizeram uso da apreensão perceptiva e discursiva foram necessárias, pois, pela apreensão perceptiva, o reconhecimento das figuras era imediato e a presença de um discurso guiava o olhar sobre as figuras, principalmente no item III onde os sujeitos buscavam elementos que associassem a figura no monitor a elementos presentes no enunciado da questão. Também no item III houve a conversão dos registros discursivo, figural, simbólico e discursivo nessa ordem.

Ao realizar a atividade marcou-se um período de 50 minutos para a execução da atividade, reservando os 40 minutos finais para a discussão final, contudo, foi necessário dar mais um tempo extra para os sujeitos terminarem a tarefa. Na sessão seguinte destacamos os principais pontos discutidos no fechamento.

e) **Fechamento da atividade**

A professora digitalizou as respostas dos sujeitos utilizando um aplicativo de digitalização de documentos, esse processo aconteceu em todas as atividades do Bloco II, haja vista que o fechamento ocorreu no mesmo dia de aplicação, sem tempo para tirar copias das tarefas. A princípio foi apresentada a construção de cada dupla no projetor e os sujeitos puderam identificar similaridades em suas figuras. Os alunos observaram que a dupla A ocultou as retas paralelas na figura, também foi comentado que as duplas B e D realizaram as construções dos triângulos sem utilizar a ferramenta polígono. Os pontos principais discutidos foram os seguintes:

- O fato de que a maioria traçou retas começando da esquerda para a direita, como normalmente escrevemos;
- Todas as equipes marcaram ângulos em suas construções, mesmo quando já haviam constatado a semelhança pelos lados correspondentes proporcionais;
- A proporcionalidade dos segmentos do Teorema de Tales é notada no Teorema fundamental da semelhança;
- O Teorema de Tales aplica o conceito de proporcionalidade entre segmentos de retas paralelas e perpendiculares. Já a semelhança entre triângulos aplica a proporcionalidade nos lados correspondentes, então aqui o ponto comum entre os dois temas é a proporção.
- Que o teorema fundamental da semelhança é a aplicação do Teorema de Tales nos triângulos.

Os sujeitos leram suas respostas e após a socialização eles puderam identificar alguns equívocos em suas justificativas, como por exemplo a dupla B que em sua resposta afirmou que a reta paralela "*divide o triângulo em dois triângulos iguais*", a dupla afirmou que confundiu as palavras e que na verdade queria dizer "semelhantes". De qualquer forma, foi feito o esclarecimento de que a reta paralela forma dois triângulos semelhantes. Reiteramos que ao abordar o Teorema de Tales no conjunto de atividades o fizemos com o objetivo de explorar a sua relação com a semelhança de triângulos que é o foco principal do estudo, portanto não aprofundamos as discussões em torno deste saber.

Consideramos que as respostas dos sujeitos para esta atividade estiveram em conformidade com o que foi previsto na análise preliminar, além disso eles executaram as atividades cognitivas esperadas. Houve poucas ocorrências de intervenção da professora, apenas a equipe C para o item III. Percebe-se também que os sujeitos já começam a demonstrar desânimo em concluir as atividades, principalmente ao ter que desenvolver as respostas no registro escrito.

CONSIDERAÇÕES SOBRE O BLOCO II

O bloco II teve como objetivo geral o reconhecimento visual das retas paralelas e o estudo das propriedades necessárias para a compreensão do Teorema Fundamental da semelhança e sua relação com o Teorema de Tales. Destacaremos alguns pontos que julgamos importantes a considerar em relação ao bloco II.

- Os sujeitos já possuíam alguma noção ainda que elementar sobre o teorema de Tales;
- Inicialmente houve dificuldades em entender a função das retas paralelas na construção dos triângulos;
- Pensamos ter esclarecido as condições de semelhança no primeiro bloco, contudo, ainda houve questionamentos de como verificar a semelhança entre os triângulos em pelo menos uma ocasião;
- Houve dúvidas relacionadas aos termos geométricos: paralela; perpendicular; e concorrentes, ainda que tenham sidos abordados na etapa de familiarização do software;
- Os sujeitos mobilizaram a linguagem e a visualização para a desconstrução dimensional nas figuras, em seguida, houve a necessidade de mais um registro para calcular a proporcionalidade entre os lados correspondentes.

Podemos afirmar baseado nas respostas e atitudes dos sujeitos que eles corresponderam ao objetivo principal do bloco II, pois, ainda que de forma assistemática conseguiram perceber que o triângulo cortado por reta paralela origina outro triângulo semelhante ao primeiro, e que o teorema fundamental da semelhança é uma aplicação do teorema de Tales em triângulos.

Ainda assim, alguns pontos desfavoráveis foram observados que podem, de certa forma, podem ter influenciado no desempenho dos sujeitos, tais como:

- No final da atividade 7 notou-se que os alunos perderam um pouco do interesse para resolver as tarefas, o que nos levar a crer que sequencias de atividades longas podem prejudicar o rendimento dos sujeitos no processo de investigação;
- Uma vez que o fechamento das atividades passou a ser no mesmo dia de aplicação, o tempo de fechamento das tarefas foi reduzido, o que de certa forma foi prejudicial pois alguns dos tópicos de menor impacto observados na aplicação deixaram de ser comentados, como por exemplo, o fato de que os sujeitos sempre construíam retas na horizontal da direita para a esquerda.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A questão problematizadora deste trabalho se refere à aprendizagem de geometria, mais especificamente o conceito de semelhança por meio de uma sequência de atividades com enfoque em representações, e para alcançar o objetivo proposto, o estudo percorreu várias etapas. Desde a escolha da problemática, o referencial adotado e a elaboração e aplicação da sequência de atividades.

Neste trabalho procurou-se produzir atividades que buscassem explorar a produção do pensamento geométrico pela perspectiva de Duval (2008) contemplando os processos de visualização, construção e raciocínio em ambientes de representação dinâmica. As atividades foram desenvolvidas utilizando o *software* GeoGebra, com o intuito de incitar no aluno uma atitude de observação e investigação das propriedades de semelhança de modo a criar um ambiente de descoberta das propriedades de semelhança, utilizando diferentes registros de representação.

Constatamos em nossos estudos que uma das razões evidenciadas pelas pesquisas para a dificuldade do ensino da geometria, é a valorização quase que excessiva da representação algébrica em seu estudo, associada à execução de procedimentos desprovidos de significado. A aprendizagem de semelhança nesses moldes, com figuras estáticas contidas nas ilustrações do livro didático ou no quadro do professor em sala de aula pode dificultar o entendimento por parte dos alunos.

Coerente com estas proposições investigativas se tem os preceitos dos PCN para o ensino de geometria, que defendem estratégias para aprendizagem eficaz pelas mídias. O uso da informática educativa por meio de *software* dinâmico permite explorar e formalizar diferentes conceitos geométricos. Neste trabalho foi proposta uma sequência de atividades para o ensino de semelhança, onde os conceitos e propriedades foram explorados em mais de um registro de representação, haja vista, que de acordo com Duval (2012), uma única representação não garante a compreensão, ou seja, a aprendizagem em matemática de um objeto matemático.

O objetivo principal do estudo foi responder ao questionamento: **Uma sequência de atividades com enfoque em representações dinâmicas pode contribuir para o desenvolvimento de conhecimentos de alunos do 9º ano acerca de Semelhança de Triângulos?** Para responder à questão de pesquisa analisamos as atitudes e concepções de um grupo de alunos do 9º ano do ensino fundamental por meio da aplicação da sequência de atividades.

Podemos afirmar com base nas percepções dos sujeitos, registradas nos áudios e nos Figuras de respostas, e ainda no desempenho deles no teste de aplicação que houve a compreensão da propriedade de semelhança de triângulos, principalmente ao reconhecerem as condições para que dois triângulos possam ser considerados semelhantes. Além disso, foi comprovado que os sujeitos alcançaram o entendimento de que se dois triângulos são semelhantes pelos casos AA; LAL; LLL é válida a propriedade dos ângulos congruentes e lados homólogos proporcionais.

Consideramos ainda que os sujeitos foram capazes de criar conjecturas no sentido de observar, levantar hipóteses e justificar, ainda que, em algumas ocasiões houvesse o medo de errar. Com relação aos registros de representação, notamos que eles demonstraram compreender:

- A importância do registro da língua natural;
- A importância da conversão do registro da língua escrita para o registro figural, principalmente nas questões aplicadas pós-sequência, uma vez que na maioria dos itens não havia figuras que ilustrassem as situações propostas;
- A conversão do registro figural para o registro simbólico na determinação da medida dos segmentos dos triângulos: observamos que essa atividade semiótica esteve presente quase que em todos os Figuras de respostas;
- O tratamento no registro figural dinâmico, na oportunidade que os sujeitos precisaram executar a desconstrução dimensional passando da dimensão 2D (polígonos) para a dimensão 1D (retas e segmentos de reta), e ainda quando fizeram uso das apreensões típicas desse registro como a perceptiva e operatória do tipo posicional.

Durante o processo de investigação, surgiu a necessidade de se abordar de forma mais profunda assuntos como operações com números Racionais, e a propriedade fundamental da proporção, ‘o produto dos meios é igual ao produto dos extremos’, foram ocorrências que não esperávamos mas que se fizeram necessárias, para o andamento da sequência.

Um ponto negativo foi o tempo utilizado no laboratório de informática, posto que só para concluir a construção os sujeitos levavam praticamente uma aula de 40 minutos e, na maioria das vezes, os alunos não haviam concluído a atividade no mesmo encontro, sendo obrigados a deixar para a semana seguinte, perdendo o ‘calor’ das discussões. No segundo Bloco ajustamos as atividades com menos itens a serem respondidos, para que as discussões ocorressem no mesmo dia, ainda assim, houve situações em que elas foram prejudicadas pelo tempo limitado.

Identificamos ainda que parte das dificuldades dos sujeitos na aplicação da sequência eram advindas, principalmente, de interpretação de texto. Em mais de uma ocasião, houve a necessidade de que a pelo menos uma das duplas fosse feita uma explicação detalhada acerca do que foi proposto em determinada atividade.

Outro ponto que vale a pena ressaltar é o trabalho em dupla. Ele pode facilitar a discussão e levantamento de hipóteses, mas também pode trazer pequenos desafios. Neste caso deixamos que eles próprios definissem as duplas e em algumas situações, ainda no início da aplicação, foi necessária a intervenção da professora para que o grupo entendesse o sentido do trabalho em parceria, pois houve quem tentou se acomodar às custas do parceiro. Naturalmente, pode ser que surja um líder, isso é perfeitamente natural, mas esse tipo de investigação onde as respostas devem representar o consenso da equipe e não o posicionamento de apenas um deles, o professor precisa está atento a também esse detalhe.

O uso do *GeoGebra* trouxe possibilidades de criação de experiências que fez o conhecimento geométrico acontecer na evolução de um nível básico da intuição e das conjecturas, propiciando condições do "fazer Matemática" usando estratégias do trabalho com as figuras planas, pela geometria dinâmica, num processo ativo e interativo de discussão e argumentação. Os estudantes conseguiram pensar geometricamente, pelo papel heurístico da manipulação do *software* e descoberta das propriedades das figuras geométricas.

No atual contexto, no qual as tecnologias digitais são extremamente frequentes no cotidiano de nossos alunos, não há como negar a influência delas no processo educacional, e coerente com os preceitos da BNCC para o ensino de geometria, que defendem estratégias para aprendizagem eficaz pelas mídias. O uso da tecnologia educativa, seja por meio de software, ou aplicativos dinâmicos permite explorar e formalizar diferentes conceitos geométricos.

Consoante aos ganhos que se obtém ao fazer uso de estratégias metodológicas que utilizem tecnologias, o uso do GeoGebra trouxe nesta tarefa a criação de experiências que fazem o conhecimento geométrico acontecer na evolução de um nível básico da intuição e das conjecturas. No entanto, ainda de acordo com Duval (2011), o computador não constitui um novo registro, pois as representações que vemos na tela são as mesmas que veríamos se produzidas com lápis e papel, com a diferença que o software dinâmico propicia condições para a construção, que dificilmente os alunos teriam utilizando esses instrumentos, como por exemplo, o recurso de mover as figuras.

Podemos afirmar ainda, com base em nossos estudos preliminares e ainda no que recomendam os documentos oficiais, que a diversificação de instrumentos, além do lápis e papel é extremamente importante, no entanto, não deve ser tomada como uma espécie de panaceia para todos os males da aprendizagem. Uma vez que o sucesso de qualquer material depende muito da postura do professor e da forma como é utilizado, não como um fim, mas um meio para alcançar determinados objetivos, considerando que apenas a utilização do recurso pelo recurso não é garantia de sucesso nas aprendizagens.

Portanto, não advogamos neste estudo que sejam abolidos definitivamente o tradicional papel e lápis ou quadro e livro didático, até porque acreditamos que as tecnologias utilizadas de modo inapropriado não melhoram significativamente as aprendizagens. Ou seja, o computador por si só não faz coisa alguma.

Para finalizar, consideramos que a relevância desse estudo se encontra na utilização das representações dinâmicas como instrumento facilitador de ações que modificaram o foco dos conteúdos e ofereceram oportunidades ao aluno de descobrir propriedades, formular conjecturas e confirmar resultados de forma rápida e precisa. De outra forma, o tempo para desenvolver tais atividades seria dispendioso e as possibilidades de exploração e investigação nos parâmetros da TRRS apresentados não seriam possíveis.

Como pesquisa futura, considerando a importância do saber Semelhança de triângulos para outros conteúdos geométricos, acreditamos na possibilidade de elaborar uma sequência didática, apoiada nos preceitos da engenharia didática e nos referenciais da TRRS para que as aplicações de Semelhança de Triângulos sejam exploradas, como por exemplo nas relações métricas no Triângulo Retângulo e nas razões trigonométricas Seno; cosseno e Tangente, em ambiente de representação dinâmica utilizando o software GeoGebra.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, C.S. T. **A base de Conhecimentos para o Ensino de Sólidos Arquimedianos.** 2015. 180 f. Tese. Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2015.

ALMOULOUD, S. A. Registros de representação Semiótica e Compreensão de Conceitos Geométricos in: MACHADO, S.D.A (org.) **Aprendizagem Matemática: Registros de Representação Semiótica**. São Paulo: Papirus, 2008.

_____________. **Fundamentos da Didática da Matemática**. Curitiba: Ed. UFPR, 2007

ANDRÉ, M. E. D. A. **Etnografia da prática escolar.** 18. ed. Campinas, SP: Papirus, 2012. (Série Prática Pedagógica).

ANDRINI. A; VASCONCELLOS, M.J. **Praticando Matemática**. 9º Ano. 4ª ed. São Paulo: Editora do Brasil, 2015. PNLD 2017.

BIANCHINI, Edwaldo. **Matemática Bianchini**. 9º Ano. 8ª ed. São Paulo: Moderna, 2015. PNLD 2017.

BORBA, M.C; PENTEADO, M.G. **Informática e educação matemática** – 4ª.ed. Belo Horizonte –Autêntica, 2007. (Coleção tendências em educação matemática).

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática.** (3º e 4º ciclos do ensino fundamental). Brasília: MEC, 1998.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/wp-content/uploads/2018/02/bncc-20dez-site.pdf>. acesso em 23 de jul. 2019.

BOYER, C. B. **História da matemática.** Tradução Elza F. Gomide. 2 ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1996.

CAJORI, F. **História da matemática.** São Paulo: Ciência Moderna, 2007.

CHEVALLARD, Yves: **La transposición didáctica**: del saber sábio ao saber enseñado. Tradução Claudia Gilman. Buenos Aires: Aique Grupo, 1991

CRUZ, Josinaldo dos Santos. **O uso de investigações matemáticas na abordagem da semelhança de triângulos e aplicações.** Dissertação (Mestrado). Universidade Federal de Sergipe (PROFMAT). Itabaiana, 2015.

DUVAL, R. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento: **Revista Eletrônica de Educação Matemática**, v. 7, n. 2, p. 266-297, 2012b. Trad. Méricles Thadeu Moretti.

DUVAL, R. Diferenças semânticas e coerência matemática: introdução aos problemas de congruência . **Revista Eletrônica de Educação Matemática**, v. 7, n. 1, p. 97-117, 2012a. Trad. Méricles Thadeu Moretti

__________. **Ver e ensinar a matemática de outra forma - entrar no modo matemático de pensar:** os registros de representações semióticas**.** 1ª ed. São Paulo: PROEM, 2011.

___________. **Semiósis e Pensamento Humano**: Registros Semióticos e aprendizagens Intelectuais. 1ª ed. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

___________. Registros de Representações Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática. In MACHADO, S.D.A (org.) **Aprendizagem Matemática:** Registros de Representação Semiótica. São Paulo, Papirus, 2008.

EUCLIDES. **Os Elementos/Euclides;** Tradução e introdução de Irineu Bicudo, São Paulo: Editora UNESP, 2009

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Campinas: Ed. Unicamp, 2004.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em educação matemática:** percursos teóricos e metodológicos. 3. Ed. rev. Campinas, SP: Autores Associados, 2009. (Coleção formação de professores).

GIMENES, S. S. **Possíveis contribuições de atividades de investigação e exploração com o computador na produção de conhecimento acerca do assunto semelhança**. Dissertação (Mestrado) – Instituto Federal do Espírito Santo, 2014.

GODOY, A. S. Introdução à pesquisa qualitativa e suas possibilidades. **Revista de Administração**, São Paulo, V. 35, n. 2, p. 57-64, mar./abr. 1995

GRAVINA, M. A. **Os ambientes de geometria dinâmica e o pensamento hipotético-dedutivo**. Tese (Doutorado) – Universidade federal do rio Grande do Sul, 2001.

HARUNA, N. C. A. **Teorema de Thales: uma abordagem do processo ensino-aprendizagem.** Dissertação (Mestrado em Educação matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, 2000

LAJOLO, Marisa. **Livro didático: um (quase) manual de usuário**. Em Aberto, Brasília, n. 69, v. 16, jan./mar. 1996.

LIMA, Elon Lages**. Medida e Forma em Geometria:** Comprimento área, volume e semelhança – 1ª ed. São Paulo: SBN, 1991.

LINDQUIST, M. M.; SHULTE, A. P. **Aprendendo e ensinando geometria**. São Paulo: Atual, 1994

LORENZATO, S. Por que não ensinar geometria? In: **Educação Matemática em Revista.** SBEM. n.4, 3-13. 1995

LÜDKE, M; ANDRE, M. **Pesquisa em educação**: abordagens qualitativas. 2 ed. Rio de Janeiro: E.P.U., 2013.

MACIEL, A.C. **O conceito de semelhança: Uma proposta de ensino.** Dissertação (Mestrado) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2004

MAZZIEIRO, A. S; MACHADO, P. A. F. **Descobrindo e aplicando a matemática**. 9º ano. São Paulo: Dimensão, 2ª ed. 2015. PNLD 2017.

PASSOS, C. L. B. Materiais manipuláveis como recursos didáticos na formação de professores de matemática. In: LORENZATO, Sérgio. **Laboratório de Ensino de Matemática na formação de professores**. Campinas: Autores Associados, 2006. p. 77-92.

PENTEADO, M. G. Novos atores, novos cenários: discutindo a inserção dos computadores na profissão docente. In: BICUDO, M. A. V. (Org.). **Pesquisa em Educação Matemática:** Concepções e Perspectivas. São Paulo: Editora UNESP,1999. p. 297-313.

PEREIRA, S. R. F; PEREIRA, M. F. F. O ensino de semelhança de triângulos na opinião de alunos. In: **XII Encontro Nacional de Educação Matemática**, n.º 12, 2016, São Paulo: SBM Disponível em:< http://www.sbem.com.br/enem2016/anais/pdf/7486_3464_ID.pdf >

PONTE, J.P; BROCARDO, J; OLIVEIRA, H. **Investigações Matemáticas na Sala de aula** – 3ª ed. Belo Horizonte, MG: Autêntica, 2016. (Coleção tendências em educação matemática).

ROMANATTO, M. **O livro didático: alcances e limites**. São Paulo, 2004. Disponível em: <http:// www.sbempaulista.org.br/cpem/anais/mesas-redondasmr19-mauro.doc>. acesso em 19 jun. 2018

SANTOS, M. T. **Semelhança de Triângulos e Geometria Dinâmica - O trabalho em grupo na aprendizagem de conceitos.** Dissertação (Mestrado Profissional) – Pontifícia Universidade Católica. São Paulo, 2012.

THIOLENT, M. **Metodologia da pesquisa-ação.** 18. ed. São Paulo: Cortez, 2011.

USISKIN, Z. Resolvendo os Dilemas Permanentes da Geometria Escolar. In LINDQUIST, M. M.; SHULTE, A. P. **Aprendendo e ensinando geometria**. São Paulo: Atual, 1994.

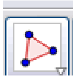
ZABALA, A. **A prática educativa**: como ensinar. Porto Alegre: ArtMed, 1998.

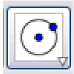
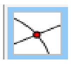
ANEXOS

ANEXO A

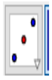
ATIVIDADES DE FAMILIARIZAÇÃO E REVISÃO DE CONTEÚDOS GEOMÉTRICOS

ATIVIDADES DE FAMILIARIZAÇÃO COM O GEOGEBRA

A1 - Abra um arquivo novo. Construa um triângulo retângulo ABC, com a ferramenta  que possa ser movimentado pela tela sem perder suas propriedades. Marque os ângulos internos do triângulo e observe suas medidas. Movimente um dos vértices e confira sua construção. Salve a construção feita.

A2 – Com a ferramenta círculo dados centro e um de seus pontos construa duas circunferências, em seguida marque a intersecção entre elas, usando a ferramenta intersecção de dois objetos. Utilizando a ferramenta polígono construa um triângulo, tendo como vértices o centro das circunferências e a intersecção entre elas. Salve a construção feitas.

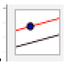
A3 – Com a ferramenta círculo dados centro e raio,  construa uma circunferência com raio de medida de sua escolha. Com a mesma ferramenta, marque um ponto fora da primeira circunferência e defina a medida do raio. Marque as intersecções e construa um triângulo com vértices nos centros das circunferências e na intersecção entre elas. Salve a construção feita.

A4 - Abra um arquivo novo. Construa um triângulo ABC. Com a ferramenta  marque os pontos médios dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ de modo que o ponto médio de $\overline{AB}$ seja E, e o ponto médio de $\overline{AC}$ seja D. Com a ferramenta Segmento  trace um segmento ligando os pontos E e D. Salve a construção feita.

A5 - Abra um arquivo novo. Construa um triângulo ABC. Utilizando a ferramenta Mediatriz (no menu que contém Reta Perpendicular) construa a mediatriz do lado $\overline{AB}$ e do lado $\overline{AC}$. Marque o ponto D, interseção das duas retas. Trace a mediatriz do lado $\overline{BC}$, movimente um dos vértices e verifique que ela também passa por D. Trace a circunferência de centro D que passa por A. Observe as posições dos pontos B e C em relação à circunferência. Salve a construção feita.

A6 – Com a ferramenta reta,  construa um polígono de três lados selecionando dois pontos ou duas posições. Marque os ângulos e salve as construções feitas.

A7 - Construa um triângulo equilátero ABC que possa ser deslocado pela tela sem perder suas propriedades. Movimente um dos vértices e confira sua construção. Marque os ângulos internos do triângulo e suas medidas. Movimente, novamente, um dos vértices e descreva o que você observou quanto à medida dos ângulos internos.

A8 - Construa duas retas paralelas entre si.  . Construa uma concorrente a essas duas retas. Meça o ângulo formado na intersecção delas.

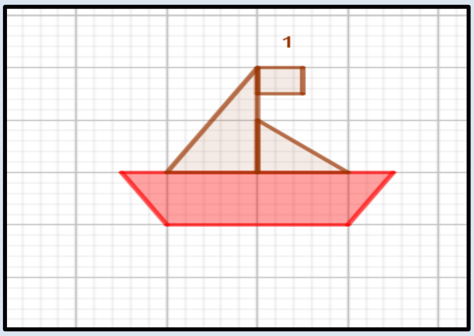
A9 – Marque dois pontos **A** e **B** no plano. Construa uma reta **f** passando por esses dois pontos. Com a ferramenta reta perpendicular construa uma segunda reta **g** passando por um dos pontos e pela reta **f**. Com a ferramenta "ponto em objeto" marque um ponto **C** na reta **g**. Com a ferramenta polígono construa um triângulo passando pelos pontos A, B e C. Na reta f marque um ponto D. Crie uma reta **h** dessa vez passando por **D** e paralela ao ponto **A**. Marque a intersecção **E** das retas **h** e **g.** Construa um segundo Triângulo com vértices em A, D e E. Marque os Ângulos dos triângulos.

ANEXO B

PRODUTO EDUCACIONAL ORIUNDO DA DISSERTAÇÃO
SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES PARA O ENSINO DE SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS

ATIVIDADE 1

Observe a imagem da figura, deixe a malha do GeoGebra ativa e amplie a imagem, na razão 2:1. Marque os ângulos em ambas as construções e após, responda os itens que seguem.



1) Calcule a área da figura já construída, depois calcule a área da figura ampliada que você construiu, em seguida determine a razão entre essas áreas.

____

____

2) Calcule o perímetro da figura já construída, depois calcule o perímetro da figura ampliada que você construiu e em seguida determine a razão entre essas áreas.

____

3) Observe as razões encontradas entre as medidas dos lados da imagem, das áreas e do perímetro e estabeleça uma relação entre elas.

____

4) Essas figuras são semelhantes ou são iguais? Reflita sobre o significado dessas duas palavras relacionando os elementos que você analisou nos itens anteriores.

Fonte: geogebra.org (2019) adaptado

ATIVIDADE 2

Construa um triangulo ABC, assinale um ponto D fora do triângulo e trace as semirretas AD, AB, AC. Em seguida utilize a ferramenta: *'Círculo Definido pelo Centro e um de seus Pontos'*, marque o primeiro ponto (centro do círculo) no vértice B e o outro ponto D, marque a interseção do círculo com a semirreta e assinale E, realize a mesma construção para encontrar os pontos F e G. Após concluir a construção, preencha a tabela, levando em consideração os lados e ângulos correspondentes em cada triângulo, e responda as perguntas.

		Lado I	**Lado II**	**Lado III**	**Ângulo I**	**Ângulo II**	**Ângulo III**
$\Delta t1$	Valor:						
	Rótulo:						
$\Delta t2$	Valor:						
	Rótulo:						
$\Delta t3$	Valor:						
	Rótulo:						

1ª) Movimentando o Ponto D os triângulos $t2$ e $t3$ mantém a mesma forma, ou seja, a mesma aparência em relação ao triângulo t1 ou ele se deforma? Descreva o que você percebeu.

2ª) O que você observa com relação aos ângulos internos desses triângulos, e em relação aos lados?

3ª) Deslocando os pontos A; B; C ou D o que você observou no item anterior continua válido?

4ª) Analisando a figura que você construiu no GeoGebra o que você pode afirmar com relação aos triângulos construídos. Consegue perceber similaridades entre eles? Em caso afirmativo, identifique o motivo dessa possível similaridade.

Fonte: geogebra.org (2019) adaptado

ATIVIDADE 3

Construa, no software GeoGebra três triângulos, utilizando as ferramentas de sua preferência. O primeiro com vértices nos pontos A, B e C e medidas de sua escolha, multiplique por 2 os lados do ΔABC e crie o segundo triângulo com vértices nos pontos D, E e F, em seguida multiplique por três os lados ΔABC e crie o último triângulo com vértices nos pontos G, H e I, após, preencha a tabela.

Triângulo	Lado I		Lado II		Lado III		Ângulo I		Ângulo II		Ângulo III		Razão entre os lados	
ΔABC	AB		BC		AC		$\hat{A}$		$\hat{B}$		$\hat{C}$		$\frac{AB}{DE}$	
													$\frac{BC}{EF}$	
													$\frac{AC}{DF}$	
ΔDEF	DE		EF		DF		$\hat{D}$		$\hat{E}$		$\hat{F}$		$\frac{AB}{GH}$	
													$\frac{BC}{HI}$	
													$\frac{AC}{GI}$	
ΔGHI	GH		HI		GI		$\hat{G}$		$\hat{H}$		$\hat{I}$		$\frac{DE}{GH}$	
													$\frac{DF}{GI}$	
													$\frac{EF}{HI}$	

Elementos em comum entre os três triângulos	Elementos diferentes entre os três triângulos

1ª) Ao construir os triângulos o que você percebeu com relação aos ângulos dos triângulos?

____

2ª) Encontre a razão entre os lados correspondentes dos triângulos. vocês conseguem perceber alguma relação entre eles? Se sim, descrevam os procedimentos numéricos que realizaram para verificar tal relação.

____

3ª) Abrir o arquivo do GeoGebra referente a atividade II. Verificar se a mesma relação observada entre os lados correspondentes dos triângulos desta construção pode ser notada entre os lados correspondentes dos três triângulos, daquela atividade.

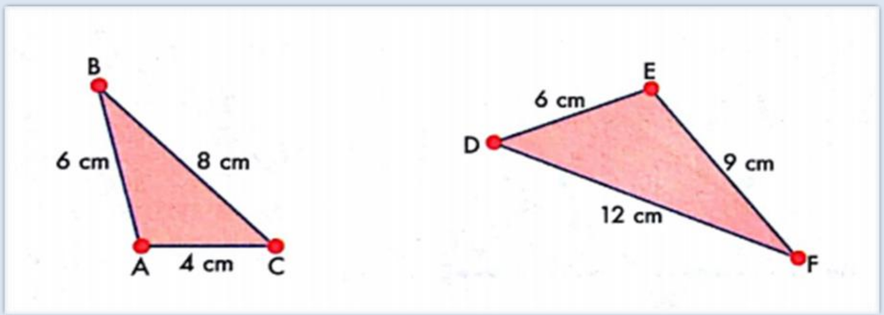
4ª) Analisando a construção e de acordo com as suas respostas, complete a frase.

Os triângulos ΔABC e ΔDEF possuem ângulos ________________ e a medida dos lados são _________________, pois a ____________ entre eles é ________________ a mesma independente da _______________ em que estejam.

Fonte: Produção da autora

ATIVIDADE 4

Você já sabe que dois triângulos são semelhantes se existe uma correspondência entre seus lados e entre seus ângulos e as razões entre os lados homólogos devem ser iguais entre si. Na imagem a seguir você tem dois triângulos ABC e DEF, analise essa imagem e responda as perguntas que seguem.



1) Apenas a partir dos elementos da figura acima é possível afirmar que os triângulos são semelhantes? Justifique sua resposta.

▪ ____

2) Reproduza esta construção no GeoGebra e identifique se as medidas dos pares de ângulos $\hat{A} e \hat{E}$ são iguais. Se isto acontecer e os lados correspondentes entre eles forem proporcionais, temos dois triângulos semelhantes pelo caso LAL. Verifique se essa propriedade é válida para estes triângulos e com suas palavras escreva as condições para que dois triângulos sejam semelhantes pelo caso LAL.

▪ ____

3) Agora oculte os valores dos lados, no menu exibir rótulos. Marque mais um par de ângulos correspondentes congruentes, verifique se existe a correspondência AA. Se isto ocorrer os triângulos também serão semelhantes pelo caso AA. Com suas palavras escreva as condições para que dois triângulos sejam semelhantes pelo caso AA.

▪ ____

4) Baseando-se em seus conhecimentos sobre triângulos, tente determinar o valor do terceiro par de ângulos. Registre suas respostas antes de marca-los na construção, utilizando a ferramenta ângulo do GeoGebra.

▪ ____

5) Calcule a razão de semelhança entre os triângulos. Analise a sua construção, reflita e comente sobre a seguinte questão. Ainda que dois triângulos sejam semelhantes pelos casos AA; LAL ou LLL é possível observar neles a correspondência de três pares de ângulos correspondentes congruentes e lados correspondentes proporcionais?

▪ ____

Fonte: Machado e Mazzieiro (2015, p.149) adaptado

ATIVIDADE 5

Construir um triângulo qualquer ABC, em seguida, construir um ponto D no segmento AB. Construir a paralela partindo do ponto D e cortando o segmento BC. Crie e meça os segmentos AB; BC; AC; BD; BE; DE. Desloque os pontos A; B ou C preencha a tabela e verifique se afigura que você construiu permanece com as características do enunciado.

Movimente ponto A		Movimente ponto B		Movimente ponto C	
$\boldsymbol{AB}$		AB		AB	
$\boldsymbol{BC}$		BC		BC	
$\boldsymbol{AC}$		AC		AC	
$\boldsymbol{AE}$		AE		AE	
$\boldsymbol{AD}$		AD		AD	
$\boldsymbol{DE}$		DE		DE	
$\frac{\boldsymbol{AB}}{\boldsymbol{AD}} =$		$\frac{AB}{AD} =$		$\frac{AB}{AD} =$	
$\frac{\boldsymbol{AC}}{\boldsymbol{AE}} =$		$\frac{AC}{AE} =$		$\frac{AC}{AE} =$	
$\frac{\boldsymbol{BC}}{\boldsymbol{DE}} =$		$\frac{BC}{DE} =$		$\frac{BC}{DE} =$	

1) Ao traçar a paralela, quantos e quais triângulos foram formados?

____

2) Em cada posição, as razões entre si têm o mesmo valor?

____

3) Esses triângulos são semelhantes?

____

4) Ao observar a figura resultante da construção e analisando os dados da tabela, tente enunciar alguma relação sobre o que acontece quando se constrói uma reta paralela a um dos lados do triângulo.

Fonte: Produção da autora

ATIVIDADE 6

Traçar duas retas AC e AB concorrentes em A. Criar o segmento BC. Construir um ponto D sobre a reta f e uma reta passando por D e paralela à BC. Nomear o ponto de interseção desta reta com AC de E. Criar os segmentos, AD, AE, DE, AB, AC, BC. Desloque o ponto D e represente na tabela abaixo as possíveis configurações dos triângulos formados ADE e ABC.

	Configuração 1	**Configuração 2**	**Configuração 3**
$\Delta \boldsymbol{ABC}$	AB = AC = BC =	AB = AC = BC =	AB = AC = BC =
$\Delta \boldsymbol{ADE}$	AD = AE = DE =	AD = AE = DE =	AD = AE = DE =
	Razão	**Razão**	**Razão**
	$\frac{AB}{AD} =$	$\frac{AB}{AD} =$	$\frac{AB}{AD} =$
	$\frac{AC}{AE} =$	$\frac{AC}{AE} =$	$\frac{AC}{AE} =$
	$\frac{BC}{DE} =$	$\frac{BC}{DE} =$	$\frac{BC}{DE} =$

1) Calcule a razão entre a medida dos segmentos correspondentes e verifique se as proporções são válidas para todas as configurações.

____

2) Marque os ângulos nos triângulos ABC e DEF e discuta com seu grupo se para este caso vale as relações de semelhança entre triângulos vistas nas atividades anteriores. Tente escrever uma relação entre as retas paralelas e a formação de triângulos semelhantes.

____

Fonte: Produção da autora

ATIVIDADE 7

Construir uma reta paralela f com pontos A e B. Traçar uma reta g partindo de a e perpendicular a f. Em g marcar um ponto C com a ferramenta “ponto em objeto”. Construir um triangulo unindo os pontos A, B e C. No segmento AC do triângulo marcar um ponto D em seguida uma reta paralela a BC. Marque a intersecção da reta paralela com o segmento AB, criando o ponto E. Repita esse processo até conseguir duas retas paralelas dentro do triângulo. Por fim, marque todos os segmentos. Analise a figura obtida na construção e responda as perguntas abaixo.

1) Quais retas são paralelas nesta figura.

____

2) Quantos e quais triângulos você observa nesta construção? Utilizando a propriedade da proporcionalidade entre lados correspondentes, verifique se esses triângulos são semelhantes.

____

3) Você já estudou anteriormente que se um feixe de retas paralelas é cortado por duas retas transversais, então os segmentos determinados pelas paralelas são proporcionais. Você consegue relacionar esta propriedade com o teorema fundamental da semelhança?

____

Fonte: Produção da autora