



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS
FACULDADE DE GEOFÍSICA

LUIZ ANDRÉ VELOSO MELO

REGULARIZAÇÃO EM ESTEREOTOMOGRAFIA

BELÉM
2009

LUIZ ANDRÉ VELOSO MELO

REGULARIZAÇÃO EM ESTEREOTOMOGRAFIA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Geofísica do Instituto de Geociências da Universidade Federal do Pará, em cumprimento às exigências para obtenção do grau de mestre em Ciências na área de Geofísica.

Área de Concentração: Métodos Sísmicos

Orientador: Jessé Carvalho Costa

BELÉM
2009

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação(CIP)
Biblioteca Geól. Rdº Montenegro G. de Montalvão

Melo, Luiz André Veloso

M528r Regularização em Estereotomografia / Luiz André Veloso Melo. – 2009
89 f. : il.

Dissertação (Mestrado em Geofísica) – Programa de Pós-Graduação
em Geofísica, Universidade Federal do Pará, Belém, 2009.

Orientador, Jessé Carvalho Costa.

1. Inversão. 2. Estereotomografia. 3. Modelo de velocidade.
4. Regularização. 5. Tomografia sísmica. I. Universidade Federal do Pará II.
Costa, Jessé Carvalho, Orient. III. Título.

CDD 20º ed.: 511.33

LUIZ ANDRÉ VELOSO MELO

REGULARIZAÇÃO EM ESTEREOTOMOGRAFIA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Geofísica do Instituto de Geociências da Universidade Federal do Pará, em cumprimento às exigências para obtenção do grau de mestre em Ciências na área de Geofísica.

Área de Concentração: Métodos Sísmicos

Data de Aprovação: ____/____/____

Banca Examinadora:

Prof. Jessé Carvalho Costa - Orientador

Doutor em Geofísica

Universidade Federal do Pará - UFPA

Prof. - Amin Bassrei

Doutor em Geofísica

Universidade Federal da Bahia - UFBA

Prof. - Maria Amélia Novais Schleicher

Doutora em Matemática Aplicada

Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP

BELÉM
2009

Dedico as pessoas que
mais amo Sérgio, Rosa, Alexandre e Jussara.

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos meus pais Rosa e Sérgio por me apoiarem incondicionalmente. A minha noiva Jussara por estar presente ao meu lado nos grandes e maus momentos com palavras certas nas horas certas.

Agradeço ao professor Jessé Costa pela orientação e compreensão. A todos os mestres que contribuíram com minha contínua formação. Ao professor Gilles Lambaré por disponibilizar o conjunto de dados do Marmousoft. A todos os amigos de curso, principalmente a Lígia Naia companheira nas disciplinas, pelos conselhos e conversas sempre produtivas. Aos membros da secretaria por facilitar o trabalho dos estudantes.

Agradeço aos financiadores desta pesquisa: Agência Nacional do Petróleo (ANP), a PETROBRAS com a “Rede Cooperativa de Pesquisa em Geofísica de Exploração” e consórcio WIT (Wave Inversion Technology).

“Não importa se a estação do ano muda, se o século vira e se o milênio é outro, se a idade aumenta; conserve a vontade de viver, não se chega à parte alguma sem ela.”

(Fernando Pessoa)

RESUMO

A obtenção de um modelo de velocidade é uma parte essencial do imageamento de estruturas complexas. Em um ambiente complexo, métodos convencionais não alcançam resultados satisfatórios. A estereotomografia é uma ferramenta efetiva para a melhora da estimativa da velocidade. Este método usa componentes de vagarosidade e tempo de trânsito selecionados nos eventos de reflexão ou difração na construção do modelo de velocidade. Por outro lado, devido as informações dos dados não serem completas é necessário informações adicionais para assegurar a estabilidade da inversão. Um vínculo natural da tomografia é o modelo de velocidade suave. Este estudo propõe avaliar os regularizadores de suavização para a estereotomografia os quais requerem a o cálculo das derivadas parciais do modelo de velocidade em relação as coordenadas espaciais. Um dos regularizadores avaliados é um novo tipo de vínculo de suavização baseado no ângulo de reflexão. Eu avaliei os resultados com ajuste dos dados, modelos de velocidade resultantes e recuperação dos pontos espalhadores após a inversão nos dados sintéticos. Nos testes numéricos, o novo vínculo conduz a modelos geologicamente consistentes.

Palavras-Chave: Inversão. Estereotomografia. Modelo de velocidade. Regularização. Tomografia Sísmica. Suavização.

ABSTRACT

Obtaining an accurate velocity model is an essential part of imaging complex structures. In complex environments, conventional methods do not produce satisfactory results. Slope tomography is an effective tool for improving the velocity estimate. This method uses the slowness components and traveltimes of picked reflection or diffraction events for velocity model building. On the other hand, the unavoidable data incompleteness requires additional information to assure stability of inversion. One natural constraint for raybased tomography is a smooth velocity model. This study proposes to evaluate smoothness regularizations to slope tomography that require the evaluation of partial derivatives of the velocity model with respect to the spatial coordinates. One of evaluated regularizations is a new kind of smoothness constraint based on the reflection angle. I evaluate results measuring data misfit, velocity model results and scattering points recovered after inversion on synthetic data. In numerical tests the new constraint leads to geologically consistent models.

keywords: Inverse. Slope tomography. Velocity Model. Regularization. Seismic Tomography. smoothing.

LISTA DE ILUSTRAÇÃO

Figura 2.1 As Figuras mostram os espaços de dados e parâmetros da estereotomografia. A Figura (a) mostra os dados, (b) os parâmetros e (c) suas relações.	20
Figura 2.2 As Figuras representam as geometrias das famílias Fonte Comum (a) e Receptor Comum (b).	22
Figura 2.3 Esquema de seleção da vagarosidade s . Com um traço de referência é feito um empilhamento local. Em cada tempo é calculado o empilhamento com diferentes valores de s , que gera o painel de coerência do tipo Semblance. No painel são selecionados os eventos de maior coerência.	22
Figura 2.4 Perturbação na direção da vagarosidade	26
Figura 2.5 Perturbação no ponto espalhador.	27
Figura 2.6 Perturbação no modelo	28
Figura 2.7 Fluxograma que representa o algoritmo da resolução do problema inverso desenvolvido neste trabalho.	32
Figura 2.8 Caso o gradiente de velocidade seja perpendicular ao refletor em potencial, será suavizado a região tangente ao mesmo.	35
Figura 3.1 O modelo Marmousi em (a) e a versão suavizada na Figura (b).	37
Figura 3.2 Para as inversões com modelos esparsos, os ajustes não foram satisfatórios. Os modelos selecionados para esta Figura tem o peso λ_{lap} valendo: 0.005 em (a), 0.050 em (b) e 0.120 em (c). Observou-se a tendência de concentrar zona de alta velocidade no centro do modelo.	42
Figura 3.3 Os mesmos modelos da Figura (3.2) com seus respectivos pontos espalhadores. Na parte inferior do modelo a recuperação dos refletores aparecem acima da posição real e mais curvados. Tal característica é acentuada com o aumento do referido	

peso.	43
Figura 3.4 Os modelos são resultantes das inversões com modelos densos. Os valores do peso λ_{lap} que geraram os modelos são: 0.005 em (a), 0.20 em (b) e 0.80 em (c). Apesar do peso de (c) ser 160 vezes o de (a) os modelos possuem semelhanças.	44
Figura 3.5 Os modelos são os resultados da diferença entre o modelo Marmousi suavizado e os refinados da Figura 3.4. Foi observada grande dificuldade em recuperar a parte inferior e principalmente o canto direito do modelo.	45
Figura 3.6 Os modelos da Figura (3.4) com seus respectivos pontos espalhadores. Nos casos refinados, como nos esparsos, os refletores recuperados na parte inferior do modelo apresentam posição e curvatura acima do real. No canto inferior direito existem poucos pontos e não é delineado nenhum refletor.	46
Figura 3.7 São mostradas as seções migradas com o modelo Marmousoft e os modelos de velocidade da Figura (3.4). Na parte superior, os refletores são recuperados de forma satisfatória. Na parte inferior do modelo foi observado que assim como na recuperação dos pontos espalhadores, os refletores estão curvados e fora da posição original. ..	47
Figura 3.8 Os modelos de velocidade gerados com $\lambda_{C1} = 0.05$, sendo que os valores de λ_{C3} variam em cada um dos modelos de cima para baixo: 0.005, 0.055 e 0.10, respectivamente. Observa-se que os regularizadores de curvatura direcional tendem a concentrar velocidade no centro do modelo.	51
Figura 3.9 Os modelos das Figuras 3.8(a), 3.8(b) e 3.8(c) com seus respectivos pontos espalhadores. Com o aumento de λ_{C3} existe a tendência dos refletores serem menos curvados e deslocados para cima. Os pontos espalhadores se dispersam com o aumento do peso λ_{C3}	52
Figura 3.10 Em mais três testes, o peso de λ_{C1} permaneceu fixo nos valores de 0.01, 0.05 e 0.1, enquanto o valor de λ_{C3} variou de forma decrescente. Observou-se, nos três casos, que o melhor ajuste dos dados acontecia quando $\lambda_{C3} = 0.04$. Assim, os modelos selecionados tem pesos: $\lambda_{C3} = 0.04$ e λ_{C1} vale 0.01, 0.05 e 0.10 respectivamente. Percebe-se o surgimento de zona de baixa velocidade quando se decresce o peso de curvatura horizontal λ_{C1}	53
Figura 3.11 Os dois modelos mais acima são resultantes das inversões em que λ_{C3} é 0.01	

e λ_{C1} vale respectivamente 0.01 e 0.05. Os dois modelos do fundo são resultantes das inversões em que λ_{C3} é 0.10 e λ_{C1} vale respectivamente 0.01 e 0.05. 54

Figura 3.12 Os modelos resultantes das inversões no caso denso, nos quais os valores de λ_{C3} são 0.01 0.05 e 0.10 respectivamente. O peso de curvatura horizontal λ_{C1} é o mesmo para os três modelo, com o valor de 0.01. 55

Figura 3.13 Os modelos são os resultados da diferença entre o Marmousi suavizado e os modelos refinados da Figura (3.12). O modelo que menos difere do Marmousoft foi o (c), em que os valores dos pesos na inversão foram de $\lambda_{C3} = 0.01$ e $\lambda_{C3} = 0.1$. A referida inversão tem melhoras sensíveis na região das anticlinais. 56

Figura 3.14 Modelos da Figura (3.12) com seus respectivos pontos espalhadores. Com o decréscimo de λ_{C3} os refletores do fundo do modelo são deslocados para cima, é aumentada a curvatura dos mesmos e a “resolução” também melhora. 57

Figura 3.15 Seções migradas do Marmousoft e dos modelos da Figura (3.12). Observou-se na parte inferior do modelo que os refletores estão mais acima que o real e com curvaturas mais acentuadas, por exemplo, a anomalia de velocidade à esquerda, a qual foi recuperada em forma sinclinal. 58

Figura 3.16 Os dois modelos mais acima da Figura são resultantes de inversões em que a razão dos pesos vale 0.5. Os dois modelos mais abaixo são resultantes de inversões em que a razão dos pesos vale 0.1. 62

Figura 3.17 Os modelos da primeira coluna da Figura (3.16) com seus pontos espalhadores. Os refletores são recuperados mais curvados e posicionados acima do real, por exemplo, a anomalia de velocidade do Marmousi à esquerda na profundidade 2.5km. A medida que diminue o valor de λ_{G3} a anomalia é deslocada ainda mais para cima. 63

Figura 3.18 Os modelos refinados resultantes de inversões em que a razão entre os pesos vale 0.1. Os pesos usados nas inversões que geraram os referidos modelos são: $\lambda_{G1} = 0.005$ e $\lambda_{G3} = 0.0005$ em (a), $\lambda_{G1} = 0.01$ e $\lambda_{G3} = 0.001$ em (b), e $\lambda_{G1} = 0.03$ e $\lambda_{G3} = 0.003$ em (c). 64

Figura 3.19 O resultado da diferença entre os coeficientes de velocidade do Marmousi suavizado e os modelos da Figura (3.18). Com o aumento dos pesos melhora a recuperação da velocidade nas regiões das anticlinais e no fundo do modelo. 65

Figura 3.20 Os modelos da Figura (3.18) com seus respectivos pontos espalhadores. Na parte inferior do modelo o posicionamento dos pontos melhoram com o aumento dos pesos.	66
Figura 3.21 As seções migradas do modelo Marmousoft e dos modelos da Figura(3.18). A recuperação dos refletores no fundo do modelo melhora com o aumento dos pesos.	67
Figura 3.22 A faixa de λ_R em que ocorreram ajustes satisfatórios foi de 0.025 a 0.005. Os modelos esparsos representados na Figura tem o peso λ_R valendo 0.005 em (a), 0.010 em (b) e 0.025 em (c). Foi verificado que este regularizador tem a tendência de espalhar zona de alta velocidade pelo modelo. Outro ponto é que o gradiente de velocidade vertical tende a aumentar com o decréscimo do peso.	71
Figura 3.23 Os mesmos modelos da Figura (3.22) com seus respectivos pontos espalhadores. As maiores alterações ocorrem no fundo do modelo. Quanto maior o peso, menos curvados e mais profundas são as recuperações dos refletores desta região.	72
Figura 3.24 Na Figura são explicitados os modelos resultantes dos testes refinados, resultados em que o peso λ_R varia: 0.005 em (a), 0.025 em (b) e 0.50 em (c). O regularizador tem a capacidade de espalhar zona de alta velocidade pelo modelo. Quanto maior o valor do regularizador menores são os gradientes vertical e horizontal da velocidade. ...	73
Figura 3.25 São explicitados os modelos com o resultado da diferença entre os coeficientes de velocidade do Marmousoft com os respectivos modelos da Figura (3.24).	74
Figura 3.26 Os mesmos modelos da Figura (3.24) com seus respectivos pontos espalhadores. Existe maior nitidez dos refletores para os modelos mais densos. Verifica-se que com o aumento do peso λ_R os pontos ficam mais dispersos.	75
Figura 3.27 As seções migradas do modelo Marmousoft e dos modelos da Figura (3.24). Nas duas seções acima observa-se a boa recuperação dos refletores de um modo geral, com ligeiras diferenças nas posições das anticlinais e das anomalias de velocidade a esquerda e a direita. A terceira migração é feita a partir de um modelo excessivamente suavizado, por isso apresenta problemas no imageamento, principalmente na região das fraturas.	76

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	16
2	ESTEREOTOMOGRAFIA	19
2.1	SELEÇÃO DE DADOS	20
2.2	CONSTRUÇÃO DO MODELO	22
2.3	TRAÇAMENTO DE RAIO	23
2.3.1	Traçamento dos raios paraxiais	24
2.4	CONDIÇÕES INICIAIS	25
2.4.1	Perturbação na direção da vagarosidade	26
2.4.2	Perturbação no ponto espalhador	26
2.4.3	Perturbação nos parâmetros elásticos	27
2.4.4	Soluções do sistema de equações paraxiais	28
2.5	PROBLEMA INVERSO	29
2.6	REGULARIZADORES	33
3	TESTES NUMÉRICOS	36
3.1	CONJUNTO DE DADOS MARMOUSI	36
3.2	ESTRATÉGIAS DE INVERSÃO	37
3.3	AVALIAÇÃO	38
3.4	REGULARIZADOR DE CURVATURAS ISOTRÓPICAS	39
3.5	REGULARIZADOR DE CURVATURA DIRECIONAL	48
3.6	REGULARIZADOR DE GRADIENTE DIRECIONAL	59
3.7	REGULARIZADOR DOS REFLETORES	68
4	CONCLUSÃO	77

REFERÊNCIAS	79
APÊNDICE A - PROPAGADORES	82
A.1 Matriz \mathbf{A} constante	82
A.2 Sistemas em que $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\tau)$	85
A.3 Aplicação ao sistema Hamiltoniano	86
A.4 Sistema Hamiltoniano paraxial	87
A.5 Cálculo do inverso do propagador	89

1 INTRODUÇÃO

O imageamento sísmico é algo bastante utilizado na indústria do petróleo, devido a capacidade de mapear e caracterizar grandes estruturas geológicas. Foram desenvolvidas várias técnicas ao longo dos anos, aperfeiçoando cada vez mais a qualidade da imagem e o percentual de sucesso ao perfurar um poço exploratório. Uma dessas técnicas é a estereotomografia, a qual retira algumas instabilidades presentes na tomografia convencional, como por exemplo a eliminação de raios cáusticos. Porém, tais melhoras não tornaram o problema inverso totalmente estável e nem único. Uma forma de estabilizar e obter uma solução consistente é o uso de regularizadores, assunto tratado neste trabalho.

As instabilidades do problema inverso tomográfico sempre foram constantes no trabalho de pesquisadores que se dedicaram a este tipo de técnica. Na tomografia convencional, o objetivo é através dos tempos de trânsito selecionados encontrar o modelo de velocidade que melhor ajusta os dados, ou seja, aproximar os tempos calculados pelo traçamento de raio no modelo de velocidade estimado com os tempos medidos no campo. Esta técnica obtém relativo sucesso, mas esbarra em grandes limitações como: a indeterminação ligada ao problema da ambiguidade (BICKEL, 1990; TIEMAN, 1994), a forte não-linearidade ligada a relação do tempo de trânsito e a velocidade (FARRA; MADARIAGA, 1988; BERRYMAN, 1990). Outro fator de instabilidade que merece atenção foi estudado por Bube e Resnick (1984) e Bishop et al. (1985). Os estudos analisaram a matriz de sensibilidade do problema inverso (matriz composta das derivadas dos tempos de trânsito com as vagarosidades) e observaram que auto-valores iguais ou próximos de zero geram parâmetros mal-determinados, por exemplo, os parâmetros localizados em regiões de baixa cobertura de raios.

Um avanço foi o uso da tecnologia desenvolvida na antiga União Soviética denominada de Recepção Direcional Controlada CDR (Controlled Directional Reception), que possibilita a seleção do tempo de trânsito e as componentes de vagarosidade horizontais na fonte e no receptor. Sword (1987) usou como dado de entrada para tomografia a seleção do CDR. Este trabalho consistiu no traçamento de dois raios descendentes no modelo estimado de velocidade, com início na fonte e no receptor. De forma que, foram calculadas as distâncias entre os raios x_{err} , na profundidade z_e , em que a soma dos tempos dos raios foi igual ao tempo medido no CDR. A diferença x_{err} foi minimizada na função objetivo para atualização de novo modelo. As principais vantagens do método, apontadas pelo autor, foram de eliminar

os raios cáusticos e principalmente, o modelo ser descrito simplesmente pela velocidade, pois os parâmetros dos pares de raios (componentes de vagarosidade horizontal e posições da fonte e receptor) foram definidos e fixados na condição de contorno. As limitações estão ligadas aos raios rasos, que se tornam incalculáveis nos critérios deste estudo. Outra limitação são raios divergentes ocasionados por meios complexos, que impossibilitam a minimização da função objetivo.

Neste trabalho, usamos um algoritmo baseado na estereotomografia do estudo de Billette e Lambaré (1998), o qual usa os mesmos dados da tecnologia CDR. Este torna a tomografia mais estável ao proceder de forma inversa ao trabalho de Sword (1987). Relaxam-se os dados da superfície (componentes de vagarosidade horizontal e posições da fonte e receptor) e fixa o ponto de reflexão/difração. Apesar de melhor estabilidade em relação a tomografia convencional, o sistema da estereotomografia também é indeterminado (infinitas soluções). Uma alternativa é o uso de regularizadores que aplicam restrições a solução final, ou seja, introduzem características desejáveis ao resultado.

Neste trabalho é feita a avaliação da regularização na estereotomografia, com o objetivo de testar e analisar os resultados de diferentes regularizadores, observando de que forma cada um influencia o resultado final. Entre os regularizadores testados, é apresentado um novo regularizador de suavização baseado no ângulo de reflexão dos eventos selecionados. Em geral, os regularizadores de suavização tendem a aplicar suas restrições por todo o modelo. Entretanto, este novo aplica a suavização localmente respeitando a geometria do modelo.

Os testes foram feitos com um modelo de dados sintéticos (Marmousi) e cada regularizador foi testado separadamente para observações de suas influências no modelo de velocidade resultante, no ajuste de dados, na recuperação dos pontos espalhadores (pontos onde ocorreram as reflexões/difrações) e nos resultados das imagens migradas a partir dos modelos de velocidades adquiridos.

A divisão em 4 capítulos deste trabalho é feita para explicitação tanto teórica como prática que envolvem os regularizadores na estereotomografia. No Capítulo 2 é mostrado o que é a estereotomografia, seus dados, parâmetros e suas relações. Ainda no mesmo capítulo temos como os dados são selecionados, traçamento dos raios centrais e paraxiais, a formulação do problema direto e inverso, linearização do problema inverso e a formulação do sistema a ser resolvido.

O Capítulo 3 é reservado aos testes numéricos. Foram coletados vários modelos, todos resultantes de inversões de diversas formas de regularização. Para maior facilidade de avaliação o critério de análise foi testar cada regularizador (ou grupo de regularizadores) fixando

alguns e variando os que estamos avaliando, pois assim, pode-se verificar de que forma cada um influencia no resultado da inversão.

A conclusão está no Capítulo 4, e contém uma síntese das principais características encontradas no capítulo anterior, uma discussão sobre as limitações, dificuldades e novos desafios.

2 ESTEREOTOMOGRAFIA

A estereotomografia difere da tomografia convencional pelos dados e parâmetros que são usados na inversão (BILLETTE; LAMBARÉ, 1998). Os dados consistem nas posições de fonte e receptor (\mathbf{x}_f e \mathbf{x}_r), tempo de trânsito T_{fr} e as componentes de vagarosidade horizontais na fonte e no receptor (s_f e s_r). Assim, o espaço de dados é representado por

$$\mathbf{d} = \left[(\mathbf{x}_f, \mathbf{x}_r, s_f, s_r, T_{fr})_n \right] (n = 1, \dots, N), \quad (2.1)$$

em que n é o número de eventos selecionados. A Figura (2.1(a)) mostra os dados.

Em relação aos parâmetros representados na Figura (2.1(b)), a estereotomografia além de usar o modelo de velocidade \mathbf{p} , considera as coordenadas do ponto difrator \mathbf{X} , os ângulos de emergência θ_f e θ_r , e os tempos de trânsito único τ_f e τ_r dos raios que conectam a fonte e os receptores respectivamente. Então o vetor modelo é

$$\mathbf{m} = \left\{ \mathbf{p}, (\mathbf{X}, \theta_f, \theta_r, \tau_f, \tau_r)_n \right\} (n = 1, \dots, N). \quad (2.2)$$

Como em todo problema inverso, o objetivo é encontrar o vetor dos parâmetros \mathbf{m} que melhor explicam os dados selecionados (ou observados) \mathbf{d}^o , ver Figura (2.1c). Devido a não-linearidade (FARRA; MADARIAGA, 1988; BILLETTE; LAMBARÉ, 1998; COSTA et al., 2008), resolve-se o problema de forma iterativa com auxílio da teoria da perturbação, ou seja, estima-se um vetor de parâmetros iniciais e perturba-o com intuito de diminuir a diferença dos dados observados \mathbf{d}^o com os dados descritos pelo vetor de parâmetros, denominado de dados calculados \mathbf{d}^c . Cada perturbação do modelo de parâmetros chamamos de uma iteração.

O objetivo deste capítulo é explicar as bases teóricas implícitas da estereotomografia e as informações a priori implementadas. Portanto, dissertaremos sobre: seleção de dados, construção do modelo de velocidade, traçamento dos raios centrais e paraxiais, problema inverso e regularizadores.

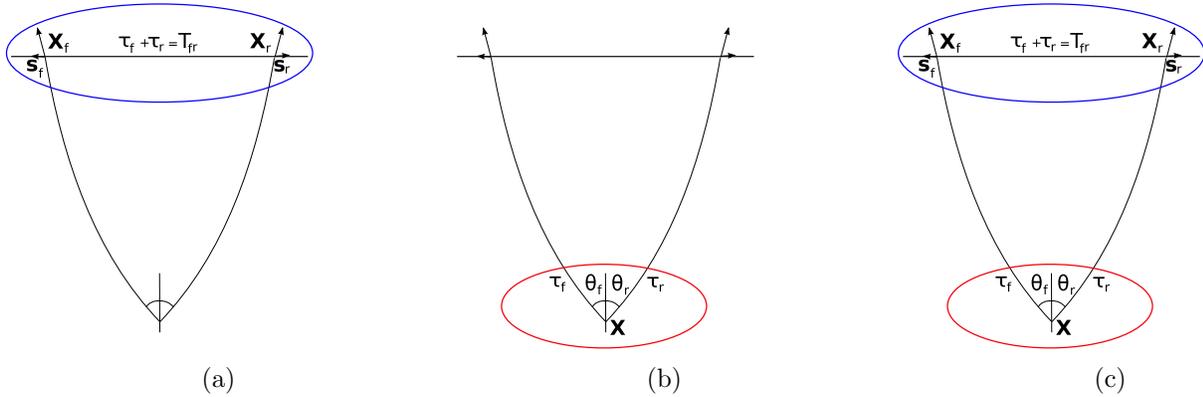


Figura 2.1: As Figuras mostram os espaços de dados e parâmetros da estereotomografia. A Figura (a) mostra os dados, (b) os parâmetros e (c) suas relações.

2.1 SELEÇÃO DE DADOS

A seleção de dados é feita pela tecnologia CDR, a qual tem a capacidade de retirar parâmetros de ondas refletidas a partir de dados pré-empilhados nas famílias fonte comum (FC) e receptor comum (RC). Tais parâmetros são: tempo de trânsito da fonte ao receptor (T_{fr}), a componente horizontal da vagarosidade na fonte (s_f) e componente horizontal da vagarosidade no receptor (s_r).

A família fonte comum (FC) consiste na própria geometria de aquisição dos dados sísmicos, ver Figura (2.2(a)). Na aquisição existe uma fonte que é disparada e uma série de receptores que gravam a energia refletida na subsuperfície, cada receptor gera um traço sísmico. Então as locações da fonte e dos receptores são alteradas a uma determinada distância e o processo se repete. Logo, a reunião dos traços sísmicos correspondentes a gravação da mesma fonte é chamada de família fonte comum (FC). É possível organizar os dados de forma a selecionar os traços sísmicos gravados em uma mesma locação, enquanto as fontes consideradas estejam em posições diferentes. Esta reunião de traços é denominada de família receptor comum (RC), ver Figura (2.2(b)).

Para o cálculo de s_f e s_r , faz-se o empilhamento oblíquo local nos traços das famílias RC

e FC com o objetivo de calcular eventos localmente coerentes (SCHULTZ; CLEARBOUT, 1978; BILLETTE et al., 2003). Tal empilhamento é feito em cada traço das referidas famílias. Este consiste no somatório dos traços mais próximos seguindo um mergulho (slope) s , para cada passo de tempo são feitos empilhamentos para vários valores de s , ver Figura (2.3). Os empilhamentos são representados pelas fórmulas

$$\Psi_r(t) = \sum_{k=nt} u_{i(j+k)}(t + sf) \quad \text{e} \quad \Psi_f(t) = \sum_{k=nt} u_{(i+k)j}(t + sf), \quad (2.3)$$

sendo que Ψ é o resultado do empilhamento, i é o índice do tiro, j é o índice do receptor, nt é o número de traços usados no empilhamento, u são os valores dos traços (amplitude) somados e f é a distância entre o traço de referência e o vizinho a ser somado. Depois é feito um painel estilo semblance com coordenadas s e t para serem selecionados os pontos de maior coerência, veja a Figura (2.3). A função do tipo semblance é feita da seguinte forma

$$\begin{aligned} \Gamma_m^r(t) &= \frac{\left[\sum_{k=nt} u_{i(j+k)}(t + sf) \right]^2}{\sum_{k=nt} u_{i(j+k)}^2(t + sf)} \\ \Gamma_m^f(t) &= \frac{\left[\sum_{k=nt} u_{(i+k)j}(t + sf) \right]^2}{\sum_{k=nt} u_{(i+k)j}^2(t + sf)}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

No painel de coerência, o valor 1 significa coerência máxima e o valor zero nenhuma coerência. Assim, são selecionados de forma automática os maiores valores de cada traço das famílias FC e RC. Na seleção obtém-se os valores de tempo de trânsito e os slopes que são as respectivas componentes de vagarosidade horizontais. Nas famílias de fonte comum são selecionadas as componentes de vagarosidade horizontais dos receptores e nas famílias receptor comum são selecionadas as componentes de vagarosidade horizontais da fonte. Devido a reciprocidade, os eventos mais coerentes são similares nas famílias FC e RC (SWORD, 1987).

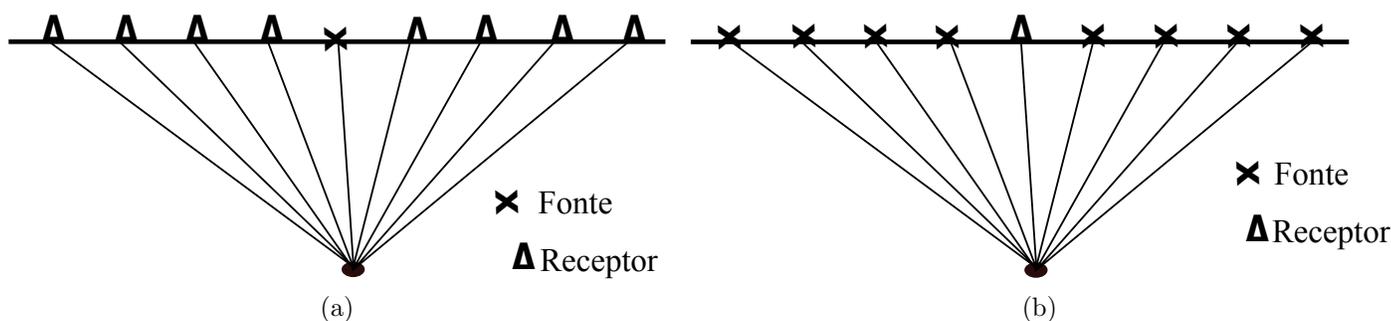


Figura 2.2: As Figuras representam as geometrias das famílias Fonte Comum (a) e Receptor Comum (b).

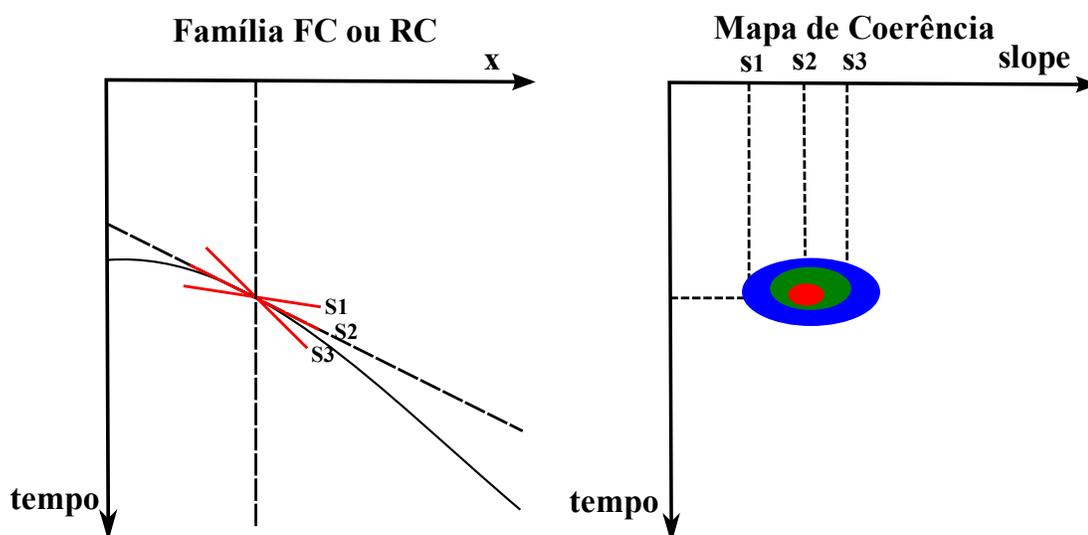


Figura 2.3: Esquema de seleção da vagarosidade s . Com um traço de referência é feito um empilhamento local. Em cada tempo é calculado o empilhamento com diferentes valores de s , que gera o painel de coerência do tipo Semblance. No painel são selecionados os eventos de maior coerência.

2.2 CONSTRUÇÃO DO MODELO

Em estruturas geológicas complexas, como por exemplo, as que apresentam variação de velocidade lateral, o processamento convencional não produz boa imagem na migração. É necessário, portanto, a construção de um bom modelo de velocidade com dados pré-empilhados que respeitem cinematicamente os dados observados. Apesar da geologia ser estratificada, isto é, as velocidades do modelo estão dispostas em blocos de camadas, nesta pesquisa o modelo é considerado de forma suave devido as conveniências numéricas e a conservação de grande parte da qualidade da imagem (BILLETTE; LAMBARÉ, 1998).

Embora o problema exija um modelo suave devido o traçamento adotado ser do caso assintótico, ver Seção (2.3), existe a vantagem da maior facilidade no ajuste dos dados tomográficos, haja vista que os modelos em blocos são mais sensíveis a alterações nas interfaces, pois qualquer mudança na profundidade, provoca grandes alterações no tempo de trânsito calculado devido a forte não-linearidade. Portanto, o uso do modelo de bloco pode não convergir no processo iterativo tomográfico e quando o modelo é errôneo pode trazer grandes dificuldades para a migração (LAILLY; SINOQUET, 1996).

Apesar da suavização do modelo de velocidade provocar a degradação de informação (VERSTEEG, 1993), estudos anteriores comprovaram que a qualidade da imagem não se altera significativamente, o que permite bons resultados na migração (LAILLY; SINOQUET, 1996; VERSTEEG, 1993; MISPEL; HANITZSCH, 1996).

Então, o modelo suave de velocidade é construído com o quadrado da velocidade do meio e é representado por produto tensorial B-splines de terceira ordem da seguinte forma

$$p(x_1, x_3) = \sum_{k=1}^{N_1} \sum_{l=1}^{N_3} p^{kl} B_k(x_1) B_l(x_3), \quad (2.5)$$

em que $B_k(x_j)$ são as funções bases do interpolador ao longo de x_j , N_j indica o número de nós B-splines na direção j e p^{kl} são os coeficientes de interpolação. Nas iterações, os valores dos coeficientes p^{kl} são atualizados, portanto, o objetivo da inversão é encontrar os coeficientes que ajustam os dados.

2.3 TRAÇAMENTO DE RAIOS

Em uma aproximação assintótica o traçamento de raio em meios isotrópicos suavemente não-homogêneos pode ser descrito na forma hamiltoniana (GOLDSTEIN, 1980; ČERVENÝ, 2001)

$$\mathcal{H}(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = \frac{1}{2} (p(\mathbf{x}) \mathbf{s} \cdot \mathbf{s} - 1) = 0 \quad (2.6)$$

sendo que \mathbf{x} é a posição ao longo do raio, \mathbf{s} é o vetor vazarosidade associado com o raio e $p(\mathbf{x})$ é o quadrado da velocidade na posição \mathbf{x} . Segundo o formalismo Hamiltoniano, a trajetória do raio surge das equações diferenciais canônicas. Essas são parametrizadas de acordo com a forma da função hamiltoniana. O parâmetro pode ser, por exemplo, o tempo de trânsito, o comprimento do arco ao longo do raio, a coordenada em z , etc. Neste estudo usamos como parâmetro o tempo de trânsito τ . Portanto, a equação do raio tem a forma

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{x}}{d\tau} &= \nabla_{\mathbf{s}}\mathcal{H} \\ \frac{d\mathbf{s}}{d\tau} &= -\nabla_{\mathbf{x}}\mathcal{H}\end{aligned}\quad (2.7)$$

em que $\nabla_{\mathbf{x}}$ e $\nabla_{\mathbf{s}}$ representam o gradiente em relação aos vetores de posição \mathbf{x} e de vagarosidade \mathbf{s} , respectivamente. O traçamento do raio é feito a partir da resolução do sistema (2.7) especificada as condições iniciais ($\mathbf{x}(\tau_0)$ e $\mathbf{s}(\tau_0)$) ou condições de fronteiras ($\mathbf{x}(\tau_0)$ e $\mathbf{s}(\tau_1)$) para cada raio. Assim o raio é calculado numericamente pelo método Runge-Kutta.

2.3.1 Traçamento dos raios paraxiais

Na tomografia sísmica necessitamos de aproximações lineares dos dados e parâmetros, tal objetivo é alcançado através do uso da teoria da perturbação. Uma aplicação particular da teoria usada na sísmica é denominada de raios paraxiais, eles são os que se propagam na vizinhança de um raio de referência. Diferem do raio central por pequenas perturbações na posição e vagarosidade (FARRA; MADARIAGA, 1987).

Assim o programa desenvolvido nesta dissertação traça os raios em um meio de referência \mathbf{p} seguindo a Hamiltoniana $\mathcal{H}(\mathbf{x}, \mathbf{s}; \mathbf{p}) = 0$, depois são calculados os raios paraxiais com nova forma da hamiltoniana $\mathcal{H}(\mathbf{x}', \mathbf{s}'; \mathbf{p} + \Delta\mathbf{p}) = 0$, em que os valores \mathbf{x}' e \mathbf{s}' representam os raios vizinhos ao raio central no modelo com perturbação $\Delta\mathbf{p}$. Os raios paraxiais são representados na forma

$$\begin{aligned}\mathbf{x}'(\tau) &= \mathbf{x}(\tau) + \Delta\mathbf{x}(\tau) \\ \mathbf{s}'(\tau) &= \mathbf{s}(\tau) + \Delta\mathbf{s}(\tau)\end{aligned}\quad (2.8)$$

e o sistema canônico que deve ser calculado para gerar as trajetórias no modelo e $\mathbf{p} + \Delta\mathbf{p}$ é

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{x}'}{d\tau} &= \nabla'_{\mathbf{s}'}\mathcal{H}' \\ \frac{d\mathbf{s}'}{d\tau} &= -\nabla'_{\mathbf{x}'}\mathcal{H}'\end{aligned}\quad (2.9)$$

Ao expandir a hamiltoniana \mathcal{H}' em torno da trajetória no meio de referência, temos

$$\begin{aligned}\mathcal{H}'(\mathbf{x}', \mathbf{s}'; \mathbf{p} + \Delta\mathbf{p}) &= \mathcal{H}(\mathbf{x}, \mathbf{s}; \mathbf{p}) \\ &+ \nabla_{\mathbf{x}}^T\mathcal{H}\Delta\mathbf{x} + \nabla_{\mathbf{s}}^T\mathcal{H}\Delta\mathbf{s} + \nabla_{\mathbf{p}}^T\mathcal{H}\Delta\mathbf{p}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2}[\Delta\mathbf{x}^T\nabla_{\mathbf{x}}\nabla_{\mathbf{x}}^T\mathcal{H}\Delta\mathbf{x} + 2\Delta\mathbf{x}^T\nabla_{\mathbf{x}}\nabla_{\mathbf{s}}^T\mathcal{H}\Delta\mathbf{s} + \Delta\mathbf{s}^T\nabla_{\mathbf{s}}\nabla_{\mathbf{s}}^T\mathcal{H}\Delta\mathbf{s} \\
& + \Delta\mathbf{x}^T\nabla_{\mathbf{x}}\nabla_{\mathbf{p}}^T\mathcal{H}\Delta\mathbf{p}\Delta\mathbf{s}^T\nabla_{\mathbf{s}}\nabla_{\mathbf{p}}^T\mathcal{H}\Delta\mathbf{p}] + \mathcal{O}(\Delta^3). \tag{2.10}
\end{aligned}$$

Aplicando as equações de Hamilton na expressão acima apenas nos termos de aproximação de primeira ordem, obtém-se

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathbf{x}'}{d\tau} &= \nabla_{\mathbf{s}}\mathcal{H} + \nabla_{\mathbf{s}}\nabla_{\mathbf{x}}^T\mathcal{H}\Delta\mathbf{x} + \nabla_{\mathbf{s}}\nabla_{\mathbf{s}}^T\mathcal{H}\Delta\mathbf{s} + \nabla_{\mathbf{s}}\nabla_{\mathbf{p}}^T\mathcal{H}\Delta\mathbf{p} + \mathcal{O}(\Delta^2), \\
\frac{d\mathbf{s}'}{d\tau} &= -\nabla_{\mathbf{x}}\mathcal{H} - \nabla_{\mathbf{x}}\nabla_{\mathbf{x}}^T\mathcal{H}\Delta\mathbf{x} - \nabla_{\mathbf{x}}\nabla_{\mathbf{s}}^T\mathcal{H}\Delta\mathbf{s} - \nabla_{\mathbf{x}}\nabla_{\mathbf{p}}^T\mathcal{H}\Delta\mathbf{p} - \mathcal{O}(\Delta^2).
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Usando as equações (2.7), considerando apenas as perturbações em primeira ordem, indicada pela notação $\delta\mathbf{x}$, $\delta\mathbf{s}$ e $\delta\mathbf{p}$, chegamos ao sistema de equações dos raios paraxiais

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\tau} \begin{bmatrix} \delta\mathbf{x} \\ \delta\mathbf{s} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \nabla_{\mathbf{s}}\nabla_{\mathbf{x}}^T\mathcal{H} & \nabla_{\mathbf{s}}\nabla_{\mathbf{s}}^T\mathcal{H} \\ -\nabla_{\mathbf{x}}\nabla_{\mathbf{x}}^T\mathcal{H} & -\nabla_{\mathbf{x}}\nabla_{\mathbf{s}}^T\mathcal{H} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta\mathbf{x} \\ \delta\mathbf{s} \end{bmatrix} \\
&+ \begin{bmatrix} \nabla_{\mathbf{s}}\nabla_{\mathbf{p}}^T\mathcal{H}\delta\mathbf{p} \\ -\nabla_{\mathbf{x}}(\nabla_{\mathbf{p}}^T\mathcal{H}\delta\mathbf{p}) \end{bmatrix}. \tag{2.12}
\end{aligned}$$

As soluções dos sistemas (2.7) e (2.12) nos possibilita a obtenção de aproximações lineares para estereotomografia em meios isotrópicos.

2.4 CONDIÇÕES INICIAIS

Ao integrar o sistema de equações diferenciais (2.12) é necessário o estabelecimento de condições iniciais para $\delta\mathbf{x}$ e $\delta\mathbf{s}$. Para a determinação das condições iniciais em um instante τ_0 , considera-se a perturbação da hamiltoniana em primeira ordem igual a zero. Tal procedimento garante que os raios paraxiais satisfaçam as equações de Hamilton. A integração de (2.12) é feita para cada condição inicial associada a perturbação de cada parâmetro. As condições iniciais podem ser reduzidas em três casos.

2.4.1 Perturbação na direção da vagarosidade

Neste caso, não há deslocamento do ponto espalhador, $\delta\mathbf{x}$. A condição para $d\mathcal{H} = 0$, para hamiltonianas arbitrárias é

$$\nabla_{\mathbf{s}}^T \mathcal{H} \delta\mathbf{s} = 0. \quad (2.13)$$

Sendo $\mathbf{s} = s\mathbf{n}$, em que \mathbf{n} é o vetor unitário na direção da vagarosidade, escreve-se

$$\delta\mathbf{s} = \left(\frac{ds}{d\theta} \mathbf{n} + s \frac{d\mathbf{n}}{d\theta} \right) \delta\theta. \quad (2.14)$$

Substituindo na equação (2.13), obtém-se

$$\delta\mathbf{s} = s \left(\mathbf{I} - \frac{\mathbf{n} \nabla_{\mathbf{s}}^T \mathcal{H}}{\nabla_{\mathbf{s}}^T \mathcal{H} \mathbf{n}} \right) \frac{d\mathbf{n}}{d\theta} \delta\theta. \quad (2.15)$$

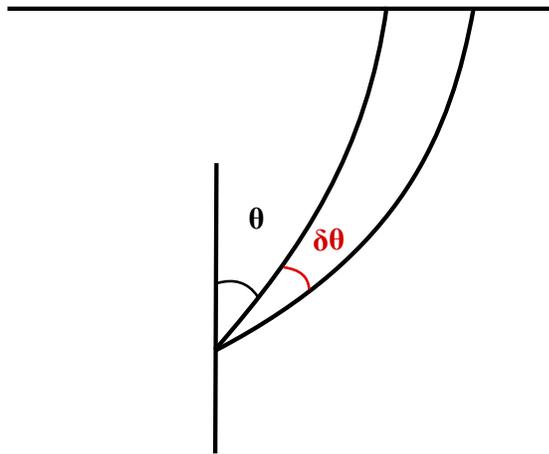


Figura 2.4: Perturbação na direção da vagarosidade

2.4.2 Perturbação no ponto espalhador

A perturbação da hamiltoniana $d\mathcal{H}$ neste caso é

$$\nabla_{\mathbf{x}}^T \mathcal{H} \delta\mathbf{X} + \nabla_{\mathbf{s}}^T \mathcal{H} \delta\mathbf{s} = 0. \quad (2.16)$$

Este caso restringe apenas a perturbação no vetor vagarosidade ao longo do raio, $\nabla_{\mathbf{s}} \mathcal{H}$,

$$\nabla_{\mathbf{s}}^T \mathcal{H} \delta\mathbf{s} = -\nabla_{\mathbf{x}}^T \mathcal{H} \delta\mathbf{X}. \quad (2.17)$$

Assim temos,

$$\delta \mathbf{s} = -\hat{\nu} \frac{\nabla_{\mathbf{x}}^T \mathcal{H}}{\|\nabla_{\mathbf{s}} \mathcal{H}\|}, \quad (2.18)$$

em que $\hat{\nu}$ é o vetor unitário ao longo do raio,

$$\hat{\nu} = \frac{\nabla_{\mathbf{s}} \mathcal{H}}{\|\nabla_{\mathbf{s}} \mathcal{H}\|}. \quad (2.19)$$

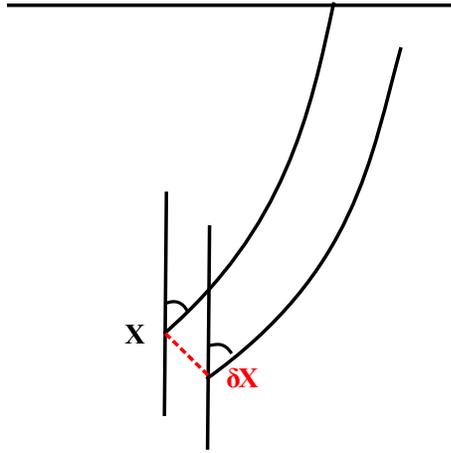


Figura 2.5: Perturbação no ponto espalhador.

2.4.3 Perturbação nos parâmetros elásticos

Com a perturbação nos parâmetros elásticos $\mathbf{p}(\mathbf{x}) + \delta \mathbf{p}$ e a condição de $d\mathcal{H}$ exige-se

$$\nabla_{\mathbf{s}}^T \mathcal{H} \delta \mathbf{s} + \nabla_{\mathbf{p}}^T \mathcal{H} \delta \mathbf{p} = 0. \quad (2.20)$$

A sentença vincula a perturbação da vagarosidade ao longo do raio aos dos parâmetros do meio. Neste caso toma-se

$$\delta \mathbf{s} = -\hat{\nu} \frac{\nabla_{\mathbf{p}}^T \mathcal{H} \delta \mathbf{p}}{\|\nabla_{\mathbf{s}} \mathcal{H}\|}, \quad (2.21)$$

sendo que $\hat{\nu}$ está definido em (2.19).

Com as condições iniciais mostradas acima, o sistema dos raios paraxiais (2.12) pode ser integrado ao longo de um raio no meio de referência e as derivadas de Fréchet em relação as perturbações no ângulo inicial do raio, na posição inicial do raio e nos parâmetros elásticos do meio, podem ser avaliadas numericamente.

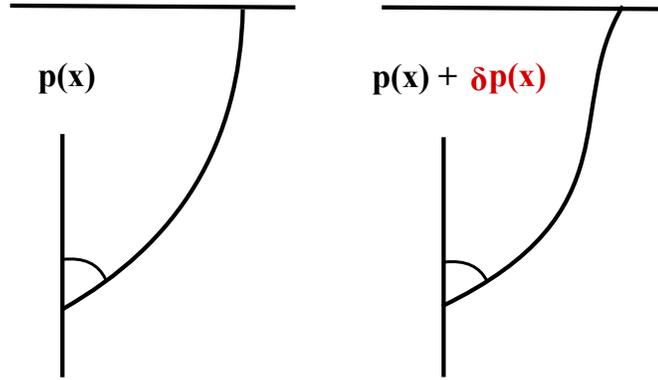


Figura 2.6: Perturbação no modelo

2.4.4 Soluções do sistema de equações paraxiais

O traçamento dos raios paraxiais requer a resolução do sistema de equações diferenciais (2.12) a partir das condições iniciais acima listadas. Para a resolução do sistema foi usado o método dos propagadores (AKI; RICHARDS, 1980; ČERVENÝ, 2001). Por uma questão de melhor notação será representado o referido sistema na forma

$$\frac{d\mathbf{y}(\tau)}{d\tau} = \mathbf{A}(\tau)\mathbf{y}(\tau) + \mathbf{f}(\tau) \quad (2.22)$$

em que,

$$\mathbf{y}(\tau) = \begin{bmatrix} \delta\mathbf{x} \\ \delta\mathbf{s} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{f}(\tau) = \begin{bmatrix} \nabla_{\mathbf{s}} (\nabla_{\mathbf{p}}^T \mathcal{H} \delta\mathbf{p}) \\ -\nabla_{\mathbf{x}} (\nabla_{\mathbf{p}}^T \mathcal{H} \delta\mathbf{p}) \end{bmatrix}.$$

Como o sistema (2.22) é constituído de equações diferenciais ordinárias lineares em $\delta\mathbf{x}$ e $\delta\mathbf{s}$, o método dos propagadores tem a solução no intervalo (τ_0, τ) com a condição inicial $\mathbf{y}(\tau_0) = \mathbf{y}_0$ na forma

$$\mathbf{y}(\tau) = \mathbf{P}(\tau, \tau_0)\mathbf{y}_0 + \int_{\tau_0}^{\tau} \mathbf{P}(\tau, \xi)\mathbf{f}(\xi)d\xi. \quad (2.23)$$

A matriz propagadora $\mathbf{P}(\tau, \tau_0)$, satisfaz (2.22) com a condição inicial

$$\mathbf{P}(\tau_0, \tau_0) = \mathbf{I} \quad (2.24)$$

em que \mathbf{I} indica a matriz identidade de ordem 4, no caso 2D, e de ordem 6, no caso 3D. A matriz de propagação possui as seguintes propriedades

1. $\mathbf{P}(\tau, \tau_0) = \mathbf{P}(\tau, \xi)\mathbf{P}(\xi, \tau_0)$
2. $\mathbf{P}(\tau_0, \tau) = \mathbf{P}^{-1}(\tau, \tau_0)$.

As propriedades possibilitam reescrever a equação (2.23)

$$\begin{aligned}
 \mathbf{y}(\tau) &= \mathbf{P}(\tau, \tau_0)\mathbf{y}_0 + \int_{\tau_0}^{\tau} \mathbf{P}(\tau, \xi)\mathbf{f}(\xi)d\xi \\
 &= \mathbf{P}(\tau, \tau_0)\mathbf{y}_0 + \int_{\tau_0}^{\tau} \mathbf{P}(\tau, \tau_0)\mathbf{P}(\tau_0, \xi)\mathbf{f}(\xi)d\xi \\
 &= \mathbf{P}(\tau, \tau_0)\mathbf{y}_0 + \mathbf{P}(\tau, \tau_0) \int_{\tau_0}^{\tau} \mathbf{P}^{-1}(\xi, \tau_0)\mathbf{f}(\xi)d\xi \\
 &= \mathbf{P}(\tau, \tau_0) \left[\mathbf{y}_0 + \int_{\tau_0}^{\tau} \mathbf{P}^{-1}(\xi, \tau_0)\mathbf{f}(\xi)d\xi \right].
 \end{aligned} \tag{2.25}$$

A equação (2.25) mostra que é possível encontrar o resultado final dos raios paraxiais em $\mathbf{y}(\tau)$ com a multiplicação da matriz propagadora e o termo dentro dos colchetes que depende da condição inicial \mathbf{y}_0 e da perturbação da velocidade ao longo do raio central. Esta técnica é bastante útil para sistemas de equações diferenciais resolvidos repetidamente e sujeitos a condições iniciais diferentes. Quando a matriz propagadora $\mathbf{P}(\tau, \tau_0)$ é determinada, então a solução para cada conjunto de condições iniciais pode ser encontrada, simplesmente através de multiplicações de matrizes. Assim, $\mathbf{P}(\tau, \tau_0)$ representa uma transformação das condições iniciais \mathbf{y}_0 na solução $\mathbf{y}(\tau)$ em um instante arbitrário τ .

2.5 PROBLEMA INVERSO

A relação de parâmetros e dados observada na Figura (2.1c), é modelada na forma

$$\mathbf{F}(\mathbf{m}) = \mathbf{d}, \tag{2.26}$$

onde \mathbf{F} é o operador que liga o vetor parâmetro \mathbf{m} ao vetor dado \mathbf{d} . É chamado de problema direto quando dado um vetor de parâmetros \mathbf{m} encontram-se os dados. Já o problema inverso acontece quando através dos dados calcula-se os parâmetros (ASTER et al., 2005).

A relação (2.26), como na tomografia convencional, é não linear devido a relação da trajetória do raio com a velocidade (FARRA; MADARIAGA, 1988; BERRYMAN, 1990; SCALE et al., 2001). Por isso, a resolução do problema inverso é feita com iterações lineares, para isso é necessário sair de um ponto de partida denominado de modelo de referência inicial

\mathbf{m}_0 . Tal modelo inicial, no programa proposto neste trabalho, pode ser obtido de duas formas: (1) como dado de entrada pelo o usuário ou, (2) desenvolvido pelo próprio programa com a criação de um modelo de velocidade homogêneo.

No primeiro caso em que o usuário fornece o modelo inicial, este é feito com três arquivos de entrada: um tem as dimensões do modelo de velocidade, outro com os valores da velocidade e o último fornece os parâmetros dos raios (coordenadas dos pontos espalhadores e ângulos de emergência).

No segundo caso é estimado um modelo de velocidade homogêneo com as informações das componentes de vagarosidade horizontais, tempo de trânsito e offset (BILLETTE et al., 2003; FOMEL, 2007). Esta construção é baseada no estudo de Billette et al. (2003), o qual demonstra que para cada dado selecionado para estereotomografia é possível encontrar um modelo homogêneo (p_h) e as coordenadas do ponto espalhador (x_M, z_M) que ajustam os dados. O programa desenvolvido neste trabalho calcula as velocidades p_h para cada evento selecionado com a relação

$$p_h = \frac{4h}{T_{fr}} \frac{T_{fr} - h(s_r - s_f)}{T_{fr}(s_r - s_f) + 4hs_f s_r} \quad (2.27)$$

em que $2h = (x_r - x_f)$, T_{fr} é o tempo de trânsito da fonte ao receptor, s_f é a componente de vagarosidade horizontal da fonte e s_r é a componente de vagarosidade horizontal do receptor. Após ser verificada a velocidade de cada evento calcula-se a média aritmética a qual corresponderá ao valor da velocidade do modelo homogêneo. A coordenada x dos pontos espalhadores é exatamente a metade da distância entre fonte e receptor. Devido a velocidade ser homogênea os raios são retos, então a profundidade z dos pontos espalhadores juntamente com o restante dos parâmetros são calculados por simples trigonometria.

O modelo de referência tem a função de uma primeira aproximação da solução. O próximo passo é verificar o quão este modelo consegue se aproximar (ou explicar) os dados observados \mathbf{d}^o e a partir dele calcular qual perturbação a ser somada ao modelo de referência para obter melhores ajustes. Para isso, são traçados os raios do ponto espalhador obtendo os dados sintéticos ou calculados \mathbf{d}^c . Verifica-se o ajuste entre os dados observados no campo e os dados calculados

$$\delta \mathbf{d} = \mathbf{d}^o - \mathbf{d}^c. \quad (2.28)$$

O ajuste nos dados em cada iteração é modelado na forma

$$\delta \mathbf{d}_k = \mathcal{DF}(\mathbf{m}_k) \delta \mathbf{m}_k \quad (2.29)$$

em que k representa o número de iterações e \mathcal{DF} representa a aproximação para o problema direto em torno do modelo \mathbf{m}_k . O operador $\mathcal{DF}(\mathbf{m}_k)$ é conhecido como derivadas de Fréchet (MENKE, 1989) e consiste em uma matriz com as diferenciações dos dados em relação aos parâmetros. Na prática, obter a perturbação dos parâmetros $\delta \mathbf{m}_k$ em relação aos dados $\delta \mathbf{d}_k$ não é uma tarefa simples, porque a matriz $\mathcal{DF}(\mathbf{m}_k)$ geralmente não é inversível. Então, recorre-se a algoritmos matemáticos que calculam o inverso generalizado $\mathcal{DF}(\mathbf{m}_k)^\dagger$ os quais possibilitam encontrar a perturbação dos parâmetros na equação

$$\delta \mathbf{m}_k = \mathcal{DF}(\mathbf{m}_k)^\dagger \delta \mathbf{d}_k. \quad (2.30)$$

O algoritmo usado neste trabalho foi o LSQR (PAIGE et al., 1982), tal escolha se deve a sua consistência ao trabalhar com matrizes esparsas (matrizes com grande quantidade de zero). Este é o caso da tomografia, pelo fato de cada raio passar apenas em algumas regiões do modelo e certos parâmetros estarem relacionados com apenas um evento.

Depois de calculada a perturbação dos parâmetros é atualizado o modelo de referência

$$\mathbf{m}_{k+1} = \mathbf{m}_k + \delta \mathbf{m}_k. \quad (2.31)$$

Depois de cada atualização dos parâmetros, estima-se novo dado calculado \mathbf{d}^c para \mathbf{m}_{k+1} , avalia-se o ajuste (2.28), verifica-se a norma do ajuste $\|\delta \mathbf{d}_k\|^1$ e caso não seja menor que um valor pré-determinado é novamente resolvido o sistema (2.30) para calcular a nova atualização dos parâmetros (2.31). Este processo continua até que a norma $\|\delta \mathbf{d}_k\|$, seja menor que o valor pré-estabelecido ou até chegar ao número máximo de iteração. Na Figura (2.7) é representado um fluxograma da resolução do problema inverso.

¹Neste trabalho usamos a norma L2

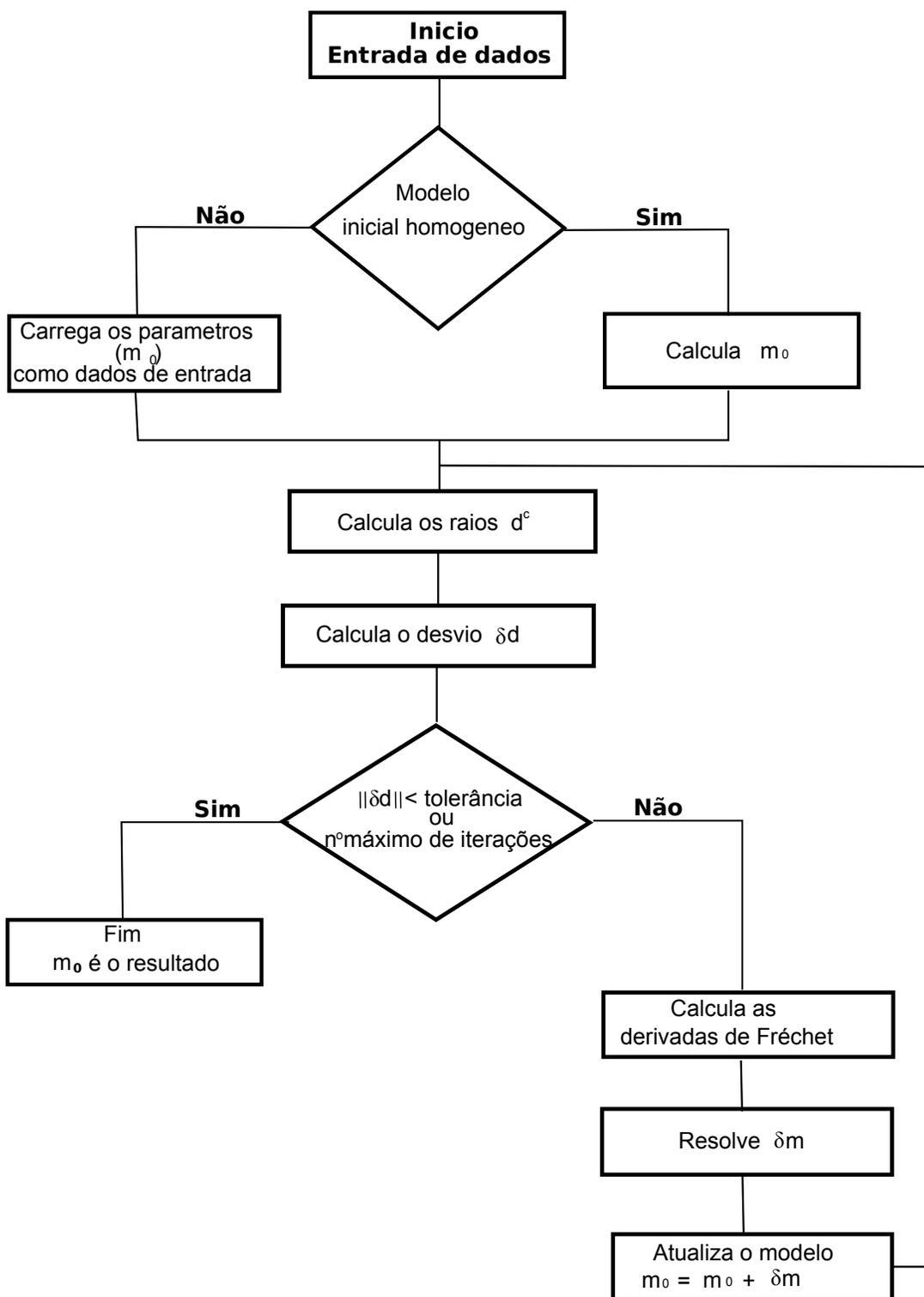


Figura 2.7: Fluxograma que representa o algoritmo da resolução do problema inverso desenvolvido neste trabalho.

2.6 REGULARIZADORES

Devido os dados na tomografia não serem completos existe a necessidade de incorporar novas informações ao processo de inversão (BUBE; RESNICK, 1984; BICKEL, 1990; TIEMAN, 1994; BILLETTE; LAMBARÉ, 1998; COSTA et al., 2008). Assim são adicionadas propriedades desejadas a solução colocando novos vínculos ao sistema linearizado (2.29). Usamos dois tipos de vínculos, um atua em todos os parâmetros do modelo com a função de regular o módulo da perturbação dos parâmetros $\delta\mathbf{m}$ em cada iteração linear, os outros atuam na suavização do modelo de velocidade, os quais usam operadores de diferenciação espacial da velocidade.

O primeiro tipo de vínculo citado acima ajuda a assegurar a estabilidade do processo de inversão, pois ao forçar o sistema (2.29) a encontrar pequenas perturbações em cada iteração linear, nos assegura de encontrar um mínimo da função objetivo. Entretanto, essa escolha pode aumentar o tempo computacional. Mas se relaxarmos tal vínculo permitindo que na atualização (2.31) o modelo de parâmetros dê "grandes saltos" $\delta\mathbf{m}$ pode ocasionar instabilidade na inversão.

O segundo tipo de vínculo é usado para forçar a suavização na solução e atua diretamente no modelo de velocidade, aplicado no sentido dos quadrados mínimos em cada nó da malha B-spline. Existem vários tipos de suavização que forcem a homogeneidade lateral, homogeneidade vertical, curvatura mínima ao longo das coordenadas cartesianas e as que minimizam a curvatura isotrópica do modelo de velocidade.

A avaliação destes vínculos requer o cálculo das diferenciações parciais de primeira e segunda ordem do modelo de velocidade em relação as coordenadas espaciais. Essas diferenciações são calculadas na forma

$$\begin{aligned}\frac{\partial^n}{\partial x_1^n} p(x_1, x_3) &= \sum_{k=1}^{N_1} \sum_{l=1}^{N_3} p^{kl} \frac{\partial^n B_k(x_1)}{\partial x_1^n} B_l(x_3), \\ \frac{\partial^n}{\partial x_3^n} p(x_1, x_3) &= \sum_{k=1}^{N_1} \sum_{l=1}^{N_3} p^{kl} B_k(x_1) \frac{\partial^n B_l(x_3)}{\partial x_3^n}.\end{aligned}\tag{2.32}$$

A regularização proposta neste trabalho também utiliza o operador de derivada espacial no modelo de velocidade. Entretanto, ao contrário dos demais regularizadores que aplicam a suavização em todo o modelo, esta suaviza localmente respeitando a geometria do modelo. Sua implementação consiste primeiramente em assumir que todos os eventos usados na in-

versão tomográfica sejam reflexões. Posteriormente, infere-se sobre a inclinação do refletor em potencial com o cálculo do ângulo entre a normal do refletor em potencial e a direção vertical do seguinte modo

$$\alpha = \frac{\theta_f + \theta_r}{2}, \quad (2.33)$$

em que α também é o ângulo de mergulho do refletor em potencial, ver Figura (2.8). Depois é verificado se o gradiente de velocidade no ponto espalhador é perpendicular ao refletor em potencial. Assim, deve acontecer a condição

$$\mathbf{n}(\alpha; \mathbf{x}) \times \nabla p(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad (2.34)$$

em que $\mathbf{n}(\alpha; \mathbf{x})$ é um vetor unitário, que tem o ângulo α com a vertical. Portanto, caso o gradiente de velocidade $\nabla p(\mathbf{x})$ seja perpendicular ao refletor em potencial, será suavizada a região tangente ao refletor. Desta forma, pretendemos fazer a regularização gerar dados mais consistentes. O fato do ângulo de mergulho α ser determinado pelos ângulos θ_r e θ_f tem uma consequência importante, pois, devido aos raios serem traçados em um modelo de velocidade suave, a direção dos raios associados com eventos sísmicos contínuos são parâmetros do campo suave. Portanto, o mergulho correspondente ao campo também será suave.

Combinando as regularizações obtemos a função objetivo

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{m}; \lambda_i) &= \|\mathbf{d} - \mathbf{F}(\mathbf{m})\|_2^2 + \lambda_D^2 \|\mathbf{m} - \mathbf{m}_0\|_2^2 + \lambda_{Lap}^2 \|(\mathbf{D}_1^2 + \mathbf{D}_3^2)(\mathbf{p})\|_2^2 \\ &+ \lambda_{C1}^2 \|\mathbf{D}_1^2(\mathbf{p})\|_2^2 + \lambda_{C3}^2 \|\mathbf{D}_3^2(\mathbf{p})\|_2^2 + \lambda_{G1}^2 \|\mathbf{D}_1^2(\mathbf{p})\|_2^2 \\ &+ \lambda_{G3}^2 \|\mathbf{D}_3^2(\mathbf{p})\|_2^2 + \lambda_R^2 \|\mathbf{D}_R^2(\mathbf{p})\|_2^2, \end{aligned} \quad (2.35)$$

onde os fatores λ funcionam como multiplicadores de Lagrange, que ponderam as contribuições das regularizações na função objetivo. O peso λ_D atua em todos os parâmetros e tem como objetivo ponderar a atualização destes. Já os pesos $\lambda_{Lap}, \lambda_{C1}, \lambda_{C2}, \lambda_{G1}$ e λ_{G2} determinam a suavização das curvaturas isotrópicas, curvaturas e o gradiente em relação as direções x_1 e x_3 , respectivamente. O valor λ_R determina o grau de suavização da velocidade ao longo do refletor em potencial. A função objetivo (2.35) nos dá a possibilidade de avaliar diferentes vínculos para o modelo de velocidade. Então, em cada iteração é preciso resolver o sistema

linear

$$\begin{bmatrix} \mathcal{DF}(\mathbf{m}_k) \\ \lambda_D \mathbf{I} \\ \lambda_{Lap} (\mathbf{D}_1^2 + \mathbf{D}_3^2) \\ \lambda_{C1}^2 \mathbf{D}_1^2 \\ \lambda_{C3}^2 \mathbf{D}_3^2 \\ \lambda_{G1}^2 \mathbf{D}_1 \\ \lambda_{G3}^2 \mathbf{D}_3 \\ \lambda_R^2 \mathbf{D}_3 \end{bmatrix} \delta \mathbf{m}_k = \begin{bmatrix} \delta \mathbf{d}_k \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.36)$$

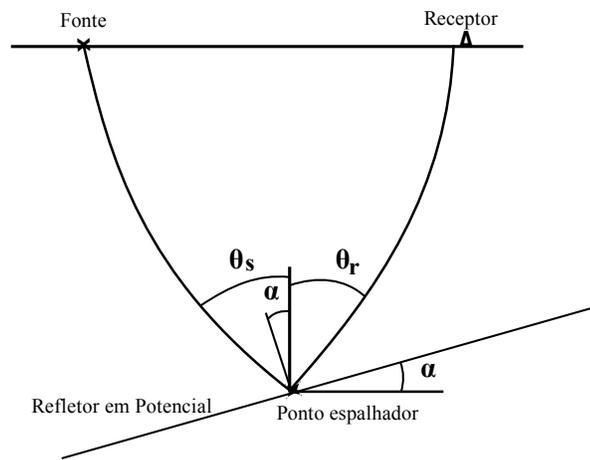


Figura 2.8: Caso o gradiente de velocidade seja perpendicular ao refletor em potencial, será suavizado a região tangente ao mesmo.

3 TESTES NUMÉRICOS

O uso de modelos sintéticos é importante para a tomografia, pois possibilita avaliar com mais precisão a eficiência da técnica usada na recuperação do referido modelo. Neste capítulo são explicitados os resultados dos testes numéricos feitos em um conjunto de dados sintéticos (Marmousi). O objetivo principal dos testes, conseqüentemente deste capítulo, é verificar como cada regularizador influencia o resultado na estereotomografia.

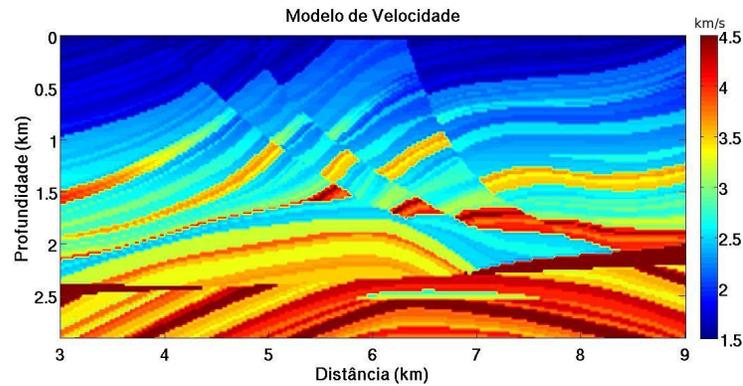
3.1 CONJUNTO DE DADOS MARMOUSI

O instituto de petróleo da França fez o modelo Marmousi (VERSTEEG, 1993) para ser usado no workshop de aspectos práticos de inversão de dados sísmicos, no encontro do EAEG em Copenhague no ano de 1990. Diferentes grupos de pesquisa, como universidades e empresas de óleo, tentaram obter a correta imagem do conjunto de dados.

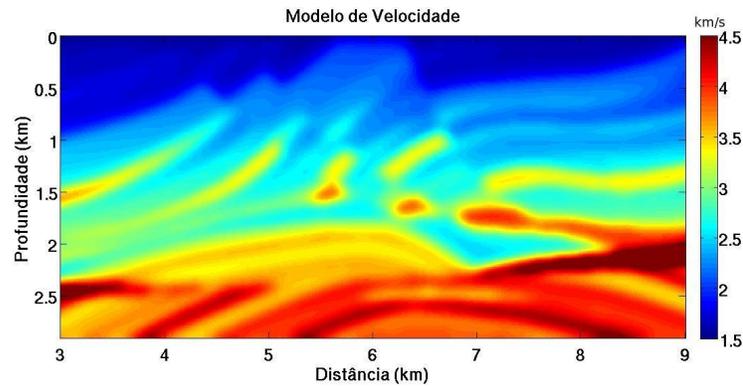
A geometria do modelo Marmousi é baseada na bacia de Cuanza em Angola, ela possui forte variação de velocidade tanto lateral quanto horizontal, com velocidade máxima de 5.5km/s e velocidade mínima de 1.5km/s. Billette et al. (2003) suavizou o modelo Marmousi e simulou a aquisição de dados marinhos 2D por aproximações de Bor (BILLETTE et al., 2003). Tal modelagem dos raios garante os dados livre de múltiplas. O conjunto de dados consistiu em 240 tiros com 96 traços por tiro. O offset inicial foi de 0.2km, os espaçamentos de tiros e receptores foram de 0.25km. O primeiro tiro está localizado na posição de $x=3\text{km}$, o último em $x=9.075\text{km}$, o tempo de registro foi de 2.9s e com intervalo de amostragem de 0.004s. O modelo Marmousi e sua versão suavizada são mostrados na Figura (3.1).

Geometria e distribuição de velocidade foram criadas com o objetivo de produzir dados sísmicos complexos que apenas poderiam ser imageados corretamente usando técnicas de processamento avançadas. Os grupos de pesquisa presentes no workshop de Copenhague concluíram que obter uma imagem correta, da terra para o conjunto de dados do Marmousi, é muito difícil. Assim, pelo menos para o modelo de velocidade, o problema da determinação com o conjunto de dados do Marmousi é comparável a dados reais complexos (VERSTEEG, 1993). Nos dados sintéticos foram selecionados 5490 eventos em um código de seleção automatizado (BILLETTE et al., 2003), a qual em cada seleção eram estimados os tempos de

trânsito e as componentes de vagarosidade horizontais (ver Seção 2.1).



(a)



(b)

Figura 3.1: O modelo Marmousi em (a) e a versão suavizada na Figura (b).

3.2 ESTRATÉGIAS DE INVERSÃO

Todas as implementações deste trabalho levam em consideração as observações de Billette et al. (2003), que afirmam que grides de velocidade muito esparsos causam ambiguidade na velocidade e erro na posição. Portanto, as inversões foram realizadas com base no conceito de multigrades, inicialmente os testes foram feitos com uma malha B-spline esparsa com dimensões 11×11 . Os nós foram esparsados em 1km lateralmente e 0.5km verticalmente. Depois de todas as inversões serem avaliadas, ver Seção (3.3), foi selecionado um modelo que servia de partida inicial para os testes finais. Nestes, as inversões usavam uma malha B-spline mais densa, com dimensões 61×51 , os nós foram esparsados em 0.2km lateralmente e 0.1km verticalmente. Os modelos de velocidade são apresentados depois de alcançar a

tolerância ou o número máximo de 30 iterações. Tais procedimentos são possíveis devido aos dispositivos de saída do programa, pois em cada iteração são criados arquivos com os valores da velocidade, com valores de cada parâmetro do raio e também existe a opção de saída de um modelo mais denso com o usuário estipulando suas dimensões.

3.3 AVALIAÇÃO

Neste capítulo, serão avaliados os testes numéricos com o objetivo de verificar as influências dos regularizadores na estereotomografia. Foram testados todos os regularizadores descritos na Seção (2.6): (1) regularizador de curvatura isotrópica, que consiste na suavização do laplaciano, (2) regularizador em relação a posição do refletor em potencial, (3) gradiente em relação as direções do modelo x_1 e x_3 , e (4) curvatura em relação as direções x_1 e x_3 . Em cada seção foi analisada uma regularização, isto é, nos testes que seguem não foram realizadas inversões com mais de um regularizador. Tal procedimento possibilita avaliar a eficiência de cada um. Assim, para cada tipo foi adotada uma série de valores dos pesos para ser avaliada sua influência na obtenção dos parâmetros.

Os resultados das inversões são avaliados com o modelo de velocidade, a recuperação dos pontos espalhadores, as seções migradas e o desvio padrão de cada dado (posição de fontes e receptores, componentes de vagarosidade horizontais e o tempo de trânsito). Os desvios padrão do ajuste dos dados são impressos na tela em cada iteração da inversão, assim o usuário pode avaliar o quanto a inversão consegue ajustá-los. Os pontos espalhadores tem como objetivo recuperar os refletores, suas coordenadas foram guardadas em um arquivo de saída, depois foram plotados juntamente com os modelos de velocidade. Caso a inversão tenha obtido sucesso, os pontos foram posicionados de forma a recuperar os refletores. Já os modelos de velocidade foram avaliados fazendo a comparação com a versão suavizada do modelo Marmousi, a partir do modelo de saída da inversão era avaliada a diferença de seus coeficientes de velocidade com os do Marmousi. Os resultados foram plotados, tais Figuras possibilitaram verificar as regiões onde a estereotomografia era mais ou menos eficiente na recuperação da velocidade. Com relação as migrações, foi necessário usar um algoritmo que fosse eficiente em meios complexos, por exemplo com forte variação de velocidade lateral. As migrações que melhor trabalham em tais condições são as que se baseiam na equação da onda. Portanto, neste trabalho foi usado o algoritmo de migração por Diferenças Finitas em profundidade que usam dados pré-empilhados (AMAZONAS et al., 2007). Esta técnica trabalha com a equação da onda unidirecional e sua principal característica é conseguir bons resultados com modelos que possuem variação de velocidade arbitrária.

Devido os testes seguirem o conceito multigrades (BILLETTE et al., 2003; COSTA et al., 2008), com cada regularizador foram feitas duas seções de testes, uma com os modelos mais esparsos e outra com os modelos mais densos, ver Seção (3.2). Adotou-se como valores de desvio padrão satisfatórios, no caso das inversões com modelos esparsos, valores menores que: 4m para a posição, 0.024s/km na vagarosidade e 0.003s no tempo de trânsito. No caso das inversões com os refinados, os valores aceitos deveriam ser menores que: 2m para a posição, 0.022s/km na vagarosidade e 0.001s no tempo de trânsito.

Nos resultados explicitados neste capítulo foi utilizado o peso λ_D , que pondera atualizações dos parâmetros, um valor fixo. Este regularizador tem a mesma importância dos demais, devido a escolha de seu valor ser determinante no resultado final, pois ao atribuir valores pequenos, possibilita a inversão a dar grandes passos $\delta\mathbf{m}$. Tal fato pode atribuir instabilidade ao problema como não convergir para um mínimo da função objetivo ou levar a um mínimo que não tem significado geológico. No caso da escolha de um valor muito grande obtém-se passos muito pequenos dos parâmetros nas iterações e ao convergir produz resultados muito próximos do modelo inicial. Portanto, o ideal é encontrar um valor que não restrinja demais os passos e ao mesmo tempo não deixa o passo muito grande. Assim foram feitos vários testes com valores de λ_D para cada regularizador, variava-se o peso de λ_D enquanto os demais foram fixos. Usando como critério o desvio padrão dos dados e os modelos de velocidade resultantes das inversões, optou-se pelo valor de 0.025.

3.4 REGULARIZADOR DE CURVATURAS ISOTRÓPICAS

Para o teste deste regularizador foram avaliados os resultados de várias inversões com os valores do peso λ_{lap} variando de forma decrescente, valores de 0.80 a 0.0001. Em cada inversão foram guardados os desvios padrão de cada dado, os arquivos de saídas contendo as dimensões do modelo resultante, os valores da velocidade, os valores dos parâmetros dos raios e as coordenadas dos pontos espalhadores. Os resultados foram analisados de acordo com os critérios de avaliação da Seção (3.3).

Com relação aos ajustes de dados produzidos pela variação de λ_{lap} , nas inversões que utilizavam os modelos esparsos, foi observado que não existe um intervalo de pesos com ajustes satisfatórios. Em todos os testes o menor desvio padrão da posição foi de 8m quando o valor do peso avaliado é de 0.001, estimativa considerada alta em relação aos demais regularizadores e o critério de avaliação. Tanto na vagarosidade quanto no tempo de trânsito, o desvio padrão diminui com decrescimento dos valores de λ_{lap} . Apenas com os regularizadores no intervalo de 0.03 a 0.001 o desvio padrão da vagarosidade fica abaixo de 0.025s/km. Os tempos de

trânsito também não conseguem bons ajustes, pois a menor estimativa do desvio padrão é de 0.001s, tal valor é alcançado apenas quando λ_{lap} está entre 0.001 e 0.005.

A influência de λ_{lap} nos modelos pode ser notada na Figura (3.2). Os três exemplos são resultados das inversões em que o regularizador de curvatura isotrópica tem como valores 0.005 na Figura 3.2(a), 0.050 em 3.2(b) e 0.12 em 3.2(c). Percebe-se a tendência de concentrar a zona de alta velocidade no centro do modelo com o aumento do regularizador. Outro aspecto observado é de que há similaridades nas partes superiores dos modelos, acima de 1.5km na profundidade. Já nas partes inferiores ocorrem as maiores diferenças, o que indica maiores influências do regularizador nestas regiões.

Na Figura (3.3) são apresentados os modelos esparsos da Figura (3.2) com os seus respectivos pontos espalhadores. Tais pontos tem por finalidade delinear os refletores com seus posicionamentos. Na parte superior do modelo nota-se que são posicionados de forma similar nos três modelos. Na parte inferior, abaixo de 2.0km, as alterações são mais significativas. Com a recuperação dos pontos espalhadores, os refletores posicionados na parte inferior a esquerda até o centro do modelo aparecem mais curvados e posicionados mais acima que o real. Por exemplo, na anomalia de velocidade à esquerda do Marmousi na profundidade de 2.5km. Para os valores mais altos do regularizador, Figuras 3.3(c) e 3.3(b), a tendência é que os pontos que recuperam a anomalia se posicionem de forma menos curvada, porém com um mergulho e deslocados para cima. Por outro lado, os pontos espalhadores localizados na parte inferior à direita não conseguem delinear os refletores. Outra tendência observada com os valores mais altos de λ_{lap} é o espalhamento dos pontos diminuindo a nitidez dos refletores.

O modelo selecionado como dado de entrada para os testes mais refinados foi o da Figura 3.2(a), sendo que as velocidades máxima e mínima são: 4.39 e 1.58km/s. Os desvios padrão dos dados na inversão foi de 12m na posição, 0.022s/km na vagarosidade e 0.001s no tempo.

As inversões com os modelos refinados tiveram melhores ajustes nos dados. Com o regularizador no intervalo de 0.001 a 0.400, o desvio padrão da vagarosidade não ultrapassa 0.01s/km. No mesmo intervalo, o desvio padrão do tempo de trânsito não ultrapassa 0.0009s, porém a posição oscila de forma instável. Portanto, o intervalo com os bons ajustes nos três dados foi de 0.001 a 0.01.

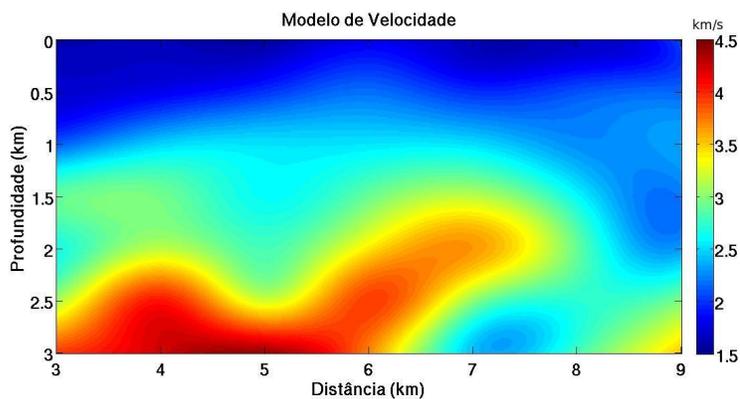
São mostrados na Figura (3.4) três exemplos dos modelos refinados encontrados nas inversões. Com os testes percebeu-se que os resultados pouco se alteraram em relação ao modelo esparsa usado como ponto de partida nas inversões. Um exemplo é a comparação das Figuras 3.4(a) e 3.4(b) com o modelo esparsa que serviu como modelo de partida, representado na Figura 3.2(a). O modelo da Figura 3.4(c) foi calculado com regularizador bem elevado,

0.80, mas ele ainda possui características dos demais modelos. Nele encontram-se várias feições circulares por todo o modelo, característica peculiar deste regularizador.

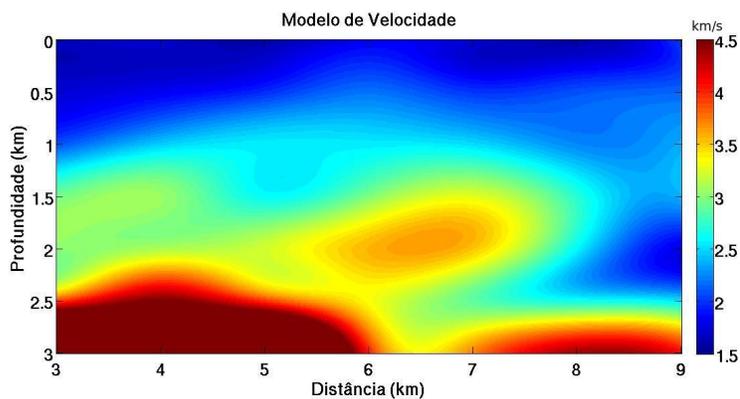
Na Figura (3.5) são apresentados os modelos resultantes da diferença entre os coeficientes de velocidade do Marmousi suavizado com os modelos da Figura (3.4). Os três modelos mostram que a recuperação da velocidade na parte superior é razoável. Entretanto na parte inferior a recuperação não é satisfatória. Nos cantos tanto direito quanto esquerdo, onde são pobres de cobertura de raios, são as regiões mais críticas. No direito percebe-se uma região de baixa velocidade em relação ao Marmousi. Já na esquerda existem regiões tanto de maior quanto menor velocidade. Tais características afetaram as seções migradas comentadas adiante.

Os modelos densos com seus respectivos pontos espalhadores são mostrados na Figura (3.6), nela percebe-se que os refletores são mais nítidos que nos modelos esparsos. Porém os refletores continuam com maior curvatura que o real na parte inferior do modelo e posicionados mais acima. Acontecem poucas mudanças no posicionamento dos pontos espalhadores com relação ao λ_{lap} no caso denso, basta comparar as Figuras 3.6(a) e 3.6(c). A primeira Figura tem os refletores ligeiramente mais “nítidos” que os da segunda.

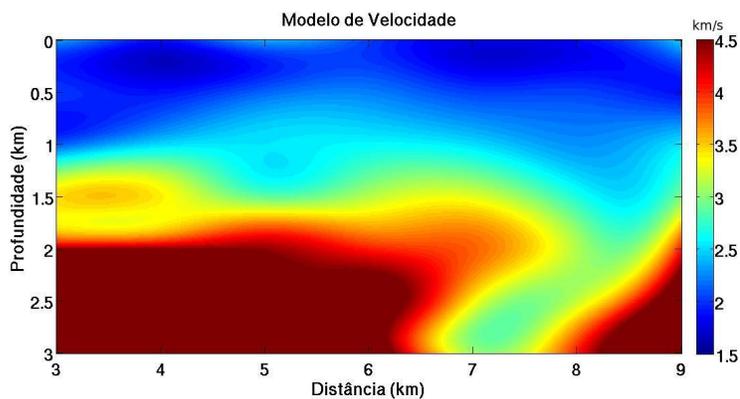
A Figura (3.7) mostra as seções migradas a partir dos modelos da Figura (3.4). A seção 3.7(a) foi obtida do Marmousoft exato. Fazendo as comparações foi percebido o bom posicionamento dos refletores na parte superior do modelo, mas na parte inferior não acontece o mesmo. Com os problemas nos cantos do modelo já mencionados e mais a característica de concentração de alta velocidade no centro fizeram com que os refletores de tal região aparecessem de forma mais curvada, similarmente aos pontos espalhadores. O reservatório aparece curvado em forma sinclinal, a intrusão de sal a esquerda aparece acima da posição original e curvada. No canto inferior direito a ausência de refletores ocorre pela falta de raios nessa área.



(a)

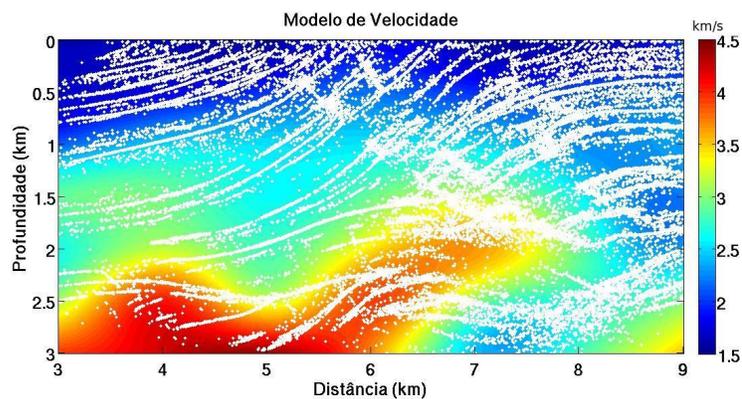


(b)

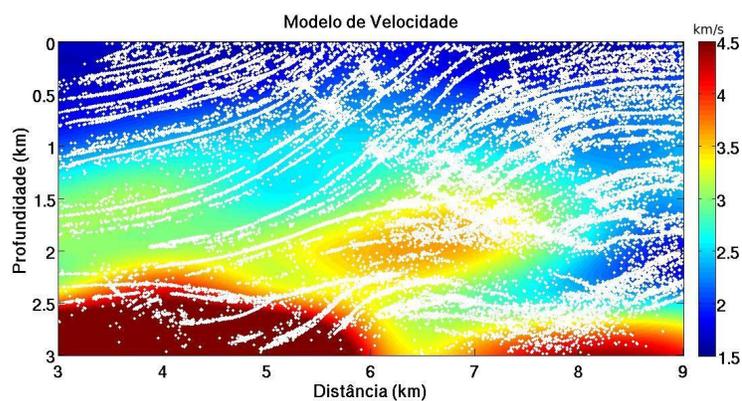


(c)

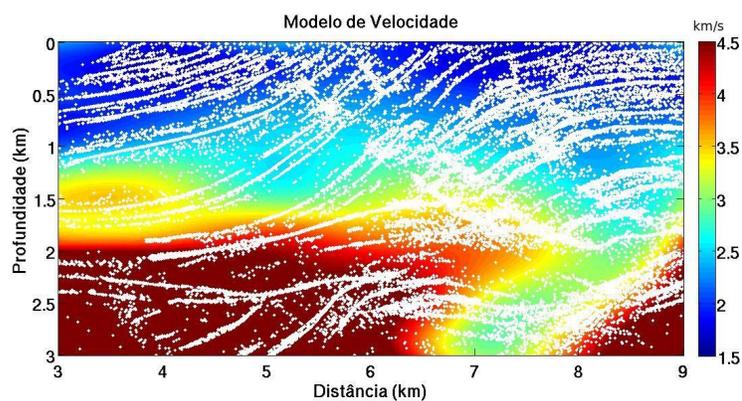
Figura 3.2: Para as inversões com modelos esparsos, os ajustes não foram satisfatórios. Os modelos seleccionados para esta Figura tem o peso λ_{lap} valendo: 0.005 em (a), 0.050 em (b) e 0.120 em (c). Observou-se a tendência de concentrar zona de alta velocidade no centro do modelo.



(a)

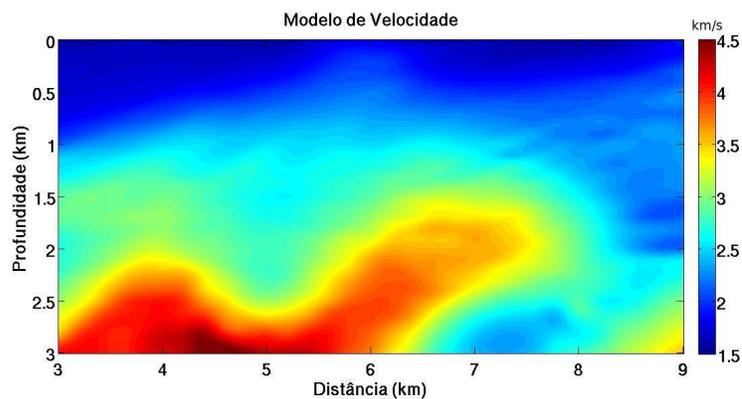


(b)

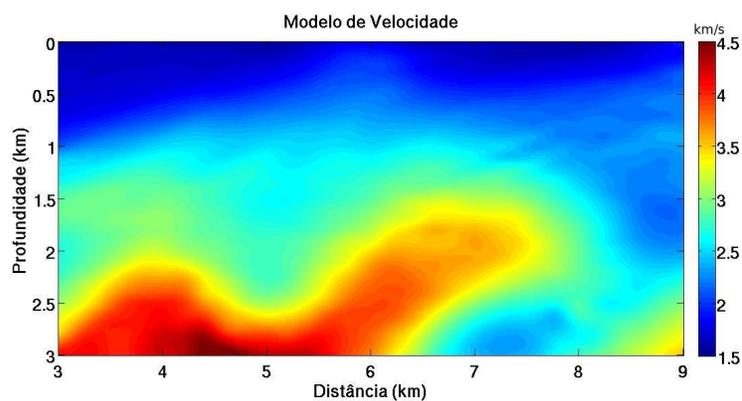


(c)

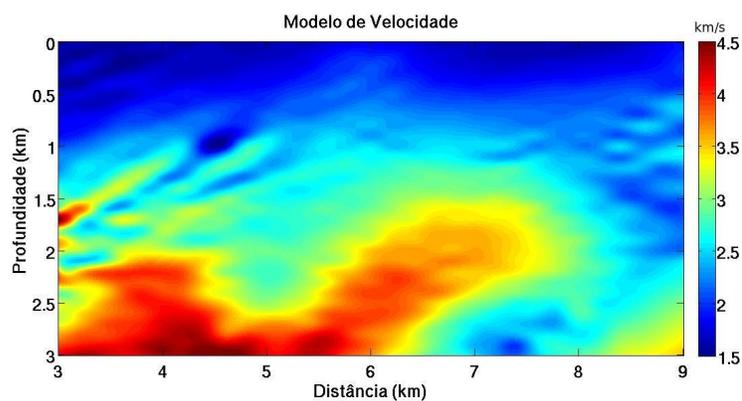
Figura 3.3: Os mesmos modelos da Figura (3.2) com seus respectivos pontos espalhadores. Na parte inferior do modelo a recuperação dos refletos aparecem acima da posição real e mais curvados. Tal característica é acentuada com o aumento do referido peso.



(a)

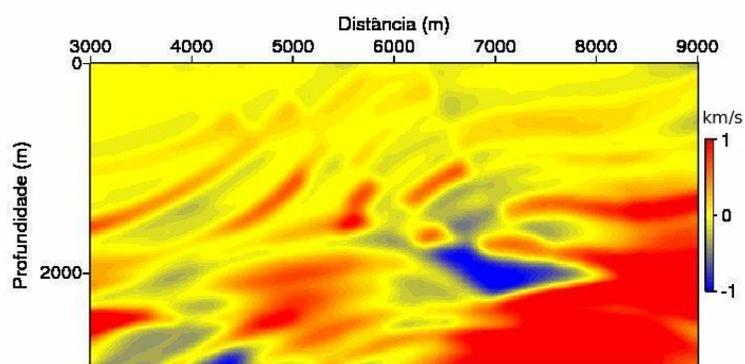


(b)

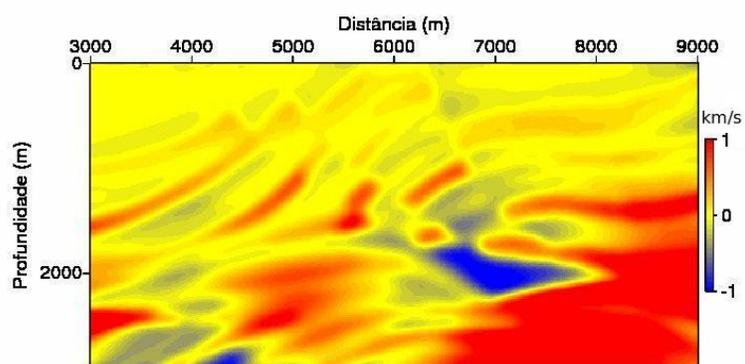


(c)

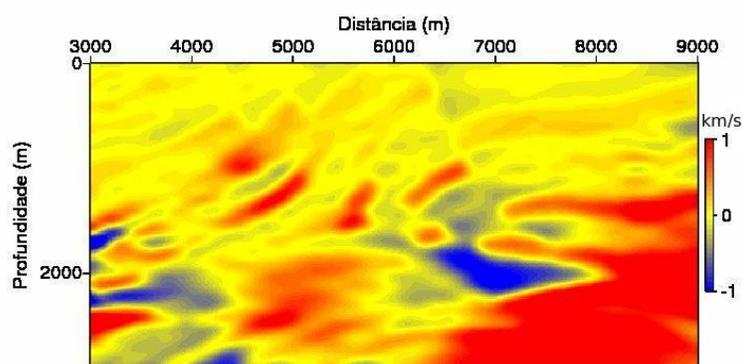
Figura 3.4: Os modelos são resultantes das inversões com modelos densos. Os valores do peso λ_{lap} que geraram os modelos são: 0.005 em (a), 0.20 em (b) e 0.80 em (c). Apesar do peso de (c) ser 160 vezes o de (a) os modelos possuem semelhanças.



(a)

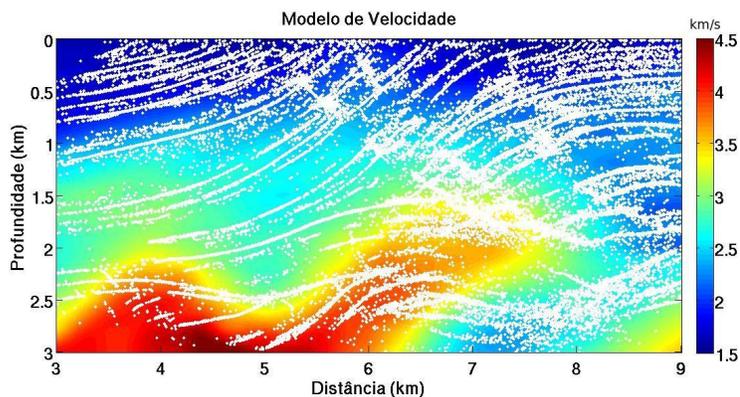


(b)

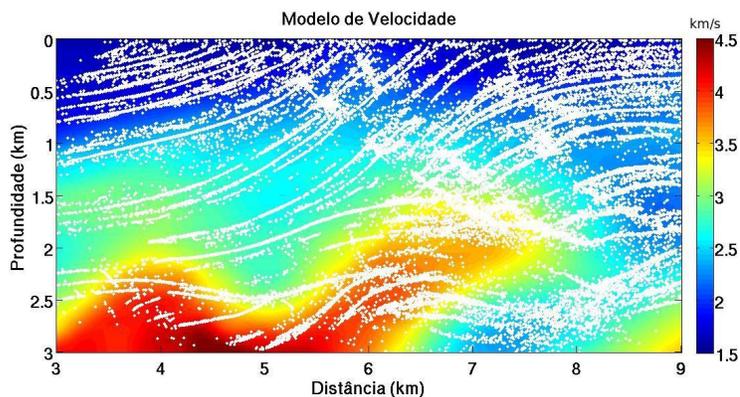


(c)

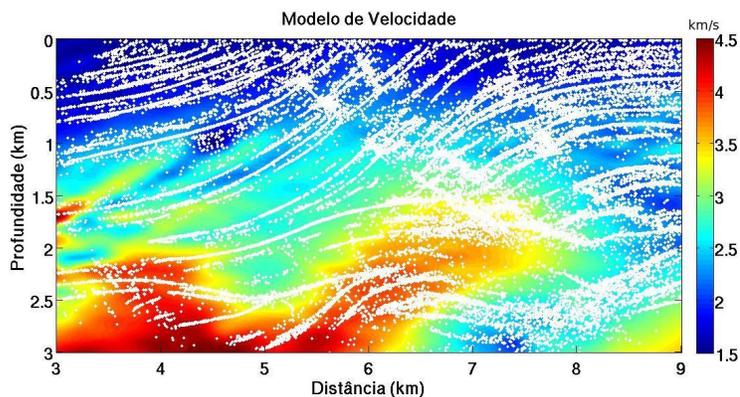
Figura 3.5: Os modelos são os resultados da diferença entre o modelo Marmousi suavizado e os refinados da Figura 3.4. Foi observada grande dificuldade em recuperar a parte inferior e principalmente o canto direito do modelo.



(a)

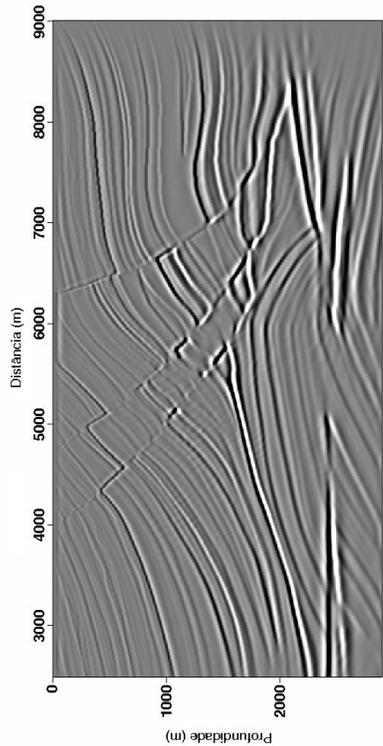
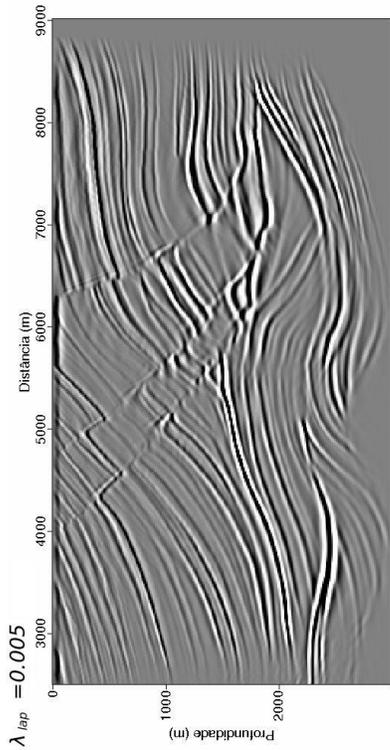


(b)



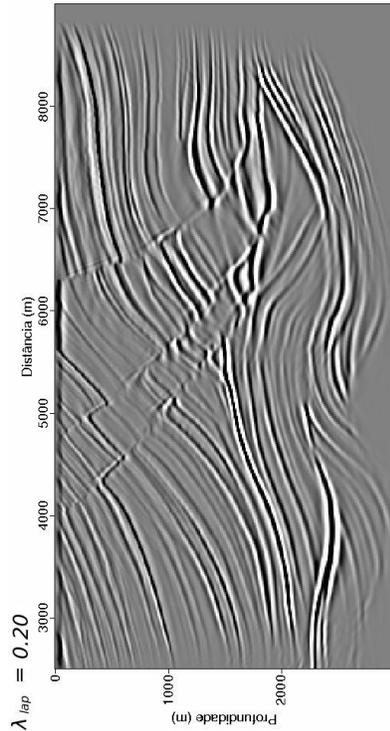
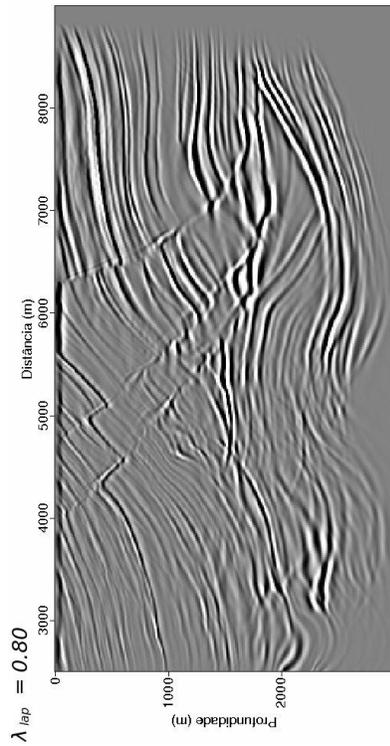
(c)

Figura 3.6: Os modelos da Figura (3.4) com seus respectivos pontos espalhadores. Nos casos refinados, como nos esparsos, os refletores recuperados na parte inferior do modelo apresentam posição e curvatura acima do real. No canto inferior direito existem poucos pontos e não é delineado nenhum refletor.



(a)

(b)



(c)

(d)

Figura 3.7: São mostradas as seções migradas com o modelo Marmousoft e os modelos de velocidade da Figura (3.4). Na parte superior, os refletores são recuperados de forma satisfatória. Na parte inferior do modelo foi observado que assim como na recuperação dos pontos espalhadores, os refletores estão curvados e fora da posição original.

3.5 REGULARIZADOR DE CURVATURA DIRECIONAL

Como no regularizador do gradiente, existem dois pesos, um para cada direção, λ_{C1} na horizontal e λ_{C3} na vertical. Neste caso não existe a imposição de um ser maior que outro, pois tal regularizador não trata da variação dos parâmetros elásticos, mas da curvatura da variação. Portanto, primeiramente foram feitas duas seções de testes com a idéia de rodar o programa com o valor de λ_{C1} decrescente e o valor λ_{C3} é alterado de tal forma que a razão entre os pesos seja constante¹. Na primeira seção, testou-se $\lambda_{C1} < \lambda_{C3}$ com as razões entre eles de 0.5, 0.25 e 0.1, para cada valor de λ_{C1} . Na segunda seção, foi testado de forma que $\lambda_{C1} > \lambda_{C3}$, as razões entre os pesos eram de 1.1, 1.5 e 2.0, para cada valor de λ_{C1} .

Na primeira seção de testes, percebe-se que o desvio padrão dos ajustes dos dados para as inversões em que a razão é 0.5 tende a decrescer à medida que os valores dos pesos diminuem. O intervalo de valores dos pesos λ_{C1} em que os ajustes são satisfatórios na razão de 0.5 é de 0.08 a 0.02. Os ajustes nas razões 0.25 e 0.1 não possuem um comportamento uniforme de crescimento ou decrescimento.

Já na segunda seção de testes, todas as razões propostas possuem o mesmo comportamento de decrescimento do desvio padrão juntamente com os valores dos pesos. Os valores de λ_{C1} em que todas as inversões são satisfatórias são do intervalo de 0.08 a 0.01.

Na Figura (3.8) são mostrados os modelos de velocidade em que $\lambda_{C1} = 0.05$, tal escolha ocorreu devido ser um valor para o qual os ajustes dos dados são satisfatórios nas duas seções de testes. Os modelos resultantes estão dispostos de tal forma que os valores de λ_{C3} usados nas inversões correspondem de cima a baixo 0.005, 0.055 e 0.100, respectivamente. Percebeu-se com a Figura (3.8), que para os valores de λ_{C3} menores há uma tendência de concentração de alta velocidade em dois pontos do modelo e entre eles surge uma zona de baixa velocidade, veja por exemplo (3.8(a)). A medida que é aumentado o referido peso, a zona de baixa velocidade tende a desaparecer, porém com a tendência de concentrar zona de alta velocidade no centro do modelo. Outro ponto é o gradiente de velocidade vertical diminui com o aumento do peso, veja (3.8(c)).

A recuperação dos pontos espalhadores também possui suas peculiaridades nos regularizadores de curvatura. A Figura (3.9) mostra os modelos anteriormente representados nas Figuras (3.8(a)), (3.8(b)) e (3.8(c)) com seus respectivos pontos espalhadores. Percebe-se que na parte superior, os pontos são posicionados com mais sucesso, mesmo com o aumento do peso há a tendência dos pontos se dispersarem na região mais rasa. Com relação ao fundo do

¹ $\lambda_{C1}/\lambda_{C3}$

modelo, no canto esquerdo até o centro, percebe-se que os refletores recuperados tem feições mais curvadas. Com o aumento do regularizador, os mesmos refletores tendem a ser menos curvados e com deslocamento para cima. No canto inferior à direita os pontos não são bem localizados. Nesta região nem ao menos existe um esboço dos refletores.

Depois foram feitos mais três testes com o λ_{C1} fixo em 0.01, 0.05 e 0.10, e λ_{C3} variando de 0.6 a 0.001, em cada teste. Verificou-se que nos três testes os desvios padrão tem o mesmo comportamento com valores similares. Nos três casos constaram com melhor ajuste quando $\lambda_{C3} = 0.04$, os modelos de velocidade resultantes são mostrados na Figura (3.10). O modelo esparso escolhido como dado de entrada para os refinados é o da Figura (3.10(b)), cujo os valores mínimo e máximo de velocidade são 0.1 e 4.5km/s respectivamente. O desvio padrão dos dados na inversão foram de 1.9m na posição, 0.0022s/km na vagarosidade e 0.0009s no tempo de trânsito.

Os testes dos modelos refinados foram feitos com três valores de λ_{C1} : 0.01, 0.05 e 0.10. Para cada peso de curvatura horizontal, os pesos verticais λ_{C3} variavam de 0.60 a 0.0001. Nos testes foi verificado, assim como no esparso, que os desvios padrão dos dados tem o mesmo comportamento e valores similares. Estes tendem a decrescer juntamente com os pesos verticais até $\lambda_{C3} = 0.001$ quando os ajustes voltam a crescer de forma instável. O intervalo em que os ajustes são aceitos nos três testes é de 0.14 a 0.001.

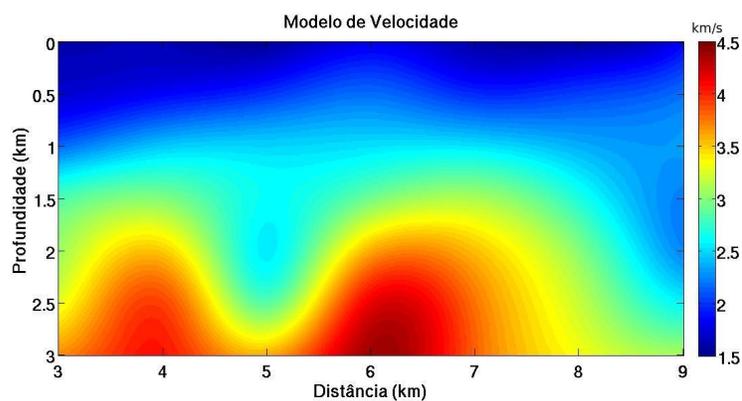
Na Figura (3.11) os dois primeiros modelos tem em comum o fato de serem resultantes de inversões nas quais foram usados valores de peso $\lambda_{C3} = 0.01$. O que diferencia os dois modelos é que os valores de peso λ_{C1} são respectivamente 0.01 e 0.05. O mesmo acontece nos dois modelos do fundo da Figura, o peso λ_{C3} usado é 0.1 para os dois modelos e λ_{C1} vale respectivamente 0.01 e 0.05. Percebe-se que os modelos resultantes de inversões com mesmo peso vertical (os dois do topo e os dois do fundo) tem praticamente o mesmo resultado. Ao comparar os valores mínimo e máximo de velocidade em cada modelo é necessário recorrer a mais casas decimais, por exemplo, nos dois modelos do topo da Figura os valores mínimos são 1.5427 e 1.5421km/s, respectivamente. Os máximos são 4.4921 e 4.4917km/s. Assim, verifica-se mais influência do peso de curvatura vertical λ_{C3} na alteração dos modelos. Outro ponto é que o regularizador tem a tendência de produzir modelos com concentração de velocidade no centro do modelo e com o decaimento do peso forma-se uma zona de baixa velocidade no fundo, em torno da distância de 5km, como foi verificado nas inversões dos modelos esparsos.

Foram selecionados os modelos da Figura (3.12) os quais são resultantes das inversões em que o peso λ_{C1} é 0.01 para todos os modelos e os valores de λ_{C3} são respectivamente 0.01, 0.05 e 0.10. Com esses modelos são explicitadas as avaliações propostas no trabalho.

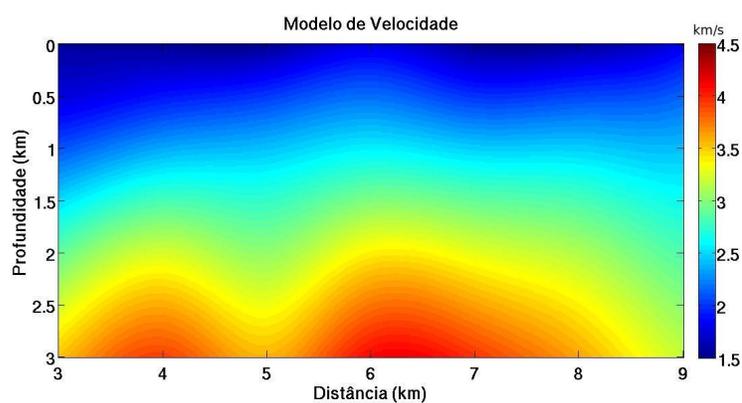
Assim, com os modelos da Figura (3.12), foram feitas as diferenças em relação ao modelo Marmousi gerando a Figura (3.13). Na parte superior dos modelos, verifica-se recuperação razoável da velocidade, porém na parte inferior existem regiões onde a recuperação não é boa como na região das anticlinais e no canto inferior esquerdo. Outro ponto observado foi que com o aumento do peso vertical λ_{C3} há uma melhora sensível na diferença entre os modelos, por exemplo, no centro com profundidade de 2km, nas regiões das anticlinais.

Os modelos da Figura (3.12) com seus respectivos pontos espalhadores são mostrados na Figura (3.14). Na comparação entre as recuperações dos pontos espalhadores nos casos esparsos e refinados obtemos similaridades e uma diferença. A diferença ocorre no posicionamento dos refletores do fundo do modelo, pois ao contrário dos esparsos, os referidos refletores recuperados por pesos λ_{C3} maiores tendem a ser mais profundos. As similaridades ocorrem por conta do aumento tanto da curvatura dos refletores mais profundos quanto da “nitidez” de todos os refletores com o decréscimo de λ_{C3} . Outro aspecto observado é que o canto inferior esquerdo não apresenta feições dos refletores, pois os poucos pontos estão dispersos.

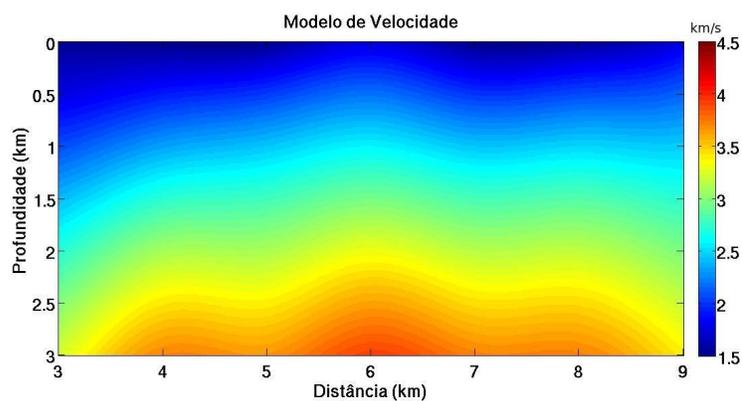
As seções migradas dos modelos da Figura (3.12) são apresentadas na Figura (3.15). A seção feita a partir do Marmousoft exato é mostrada em 3.15(a). Na parte superior os refletores são recuperados satisfatoriamente. Na parte inferior do modelo, observou-se que os refletores estão mais acima que o real e com curvaturas mais acentuadas. A anomalia à esquerda também está posicionada acima do real e com curvatura em forma sinclinal. O reservatório tem uma feição contínua, como um refletor se alongando até 8km. Existem também diferenças no posicionamento dos refletores na região das anticlinais.



(a)

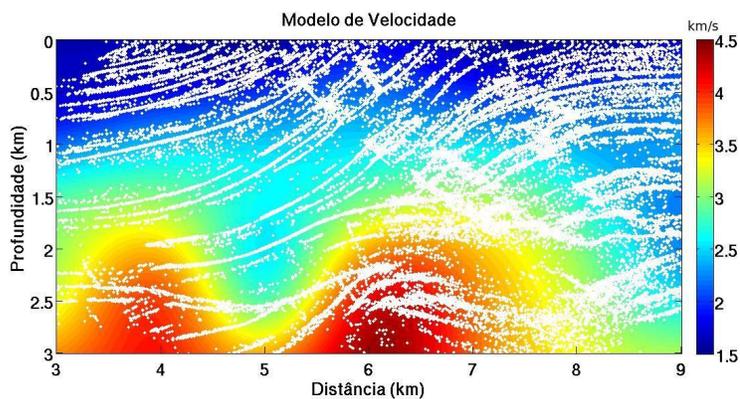


(b)

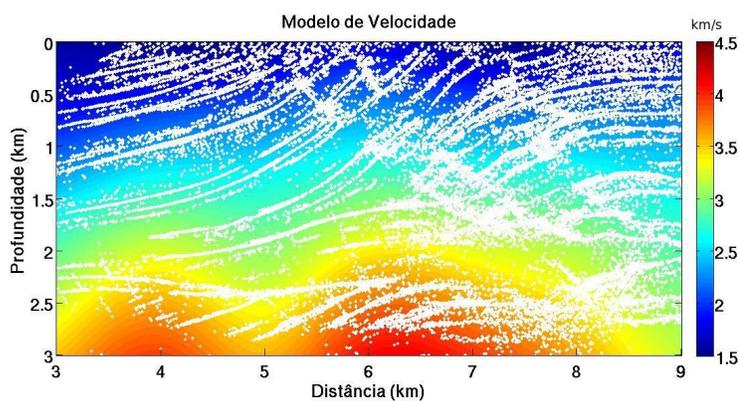


(c)

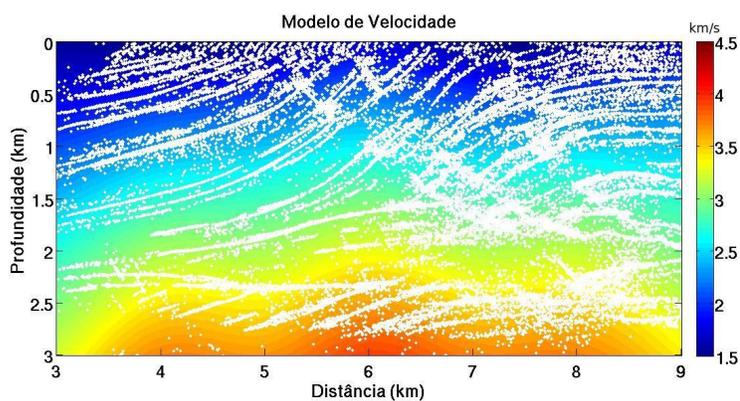
Figura 3.8: Os modelos de velocidade gerados com $\lambda_{C1} = 0.05$, sendo que os valores de λ_{C3} variam em cada um dos modelos de cima para baixo: 0.005, 0.055 e 0.10, respectivamente. Observa-se que os regularizadores de curvatura direcional tendem a concentrar velocidade no centro do modelo.



(a)

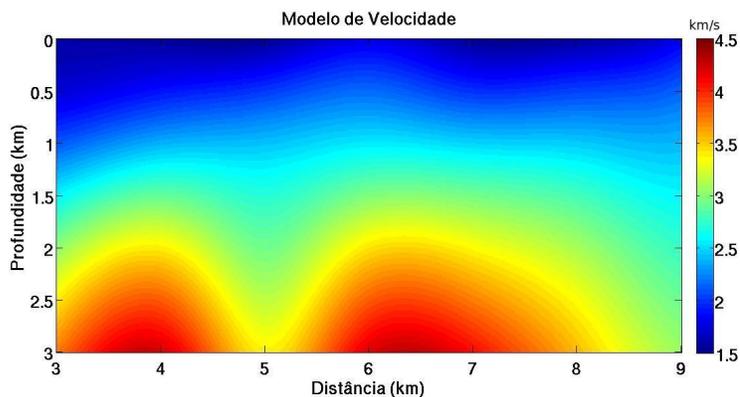


(b)

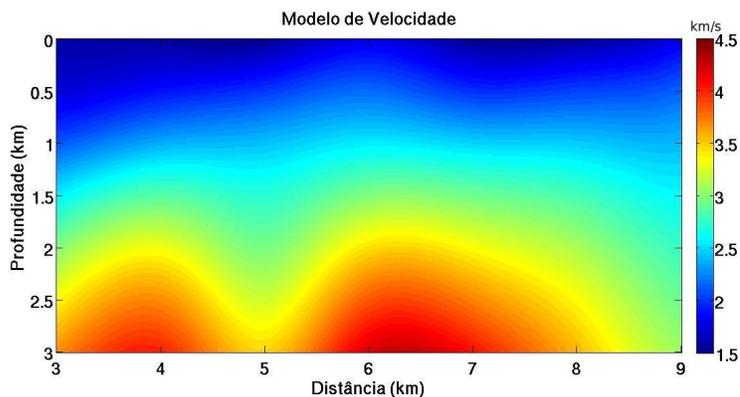


(c)

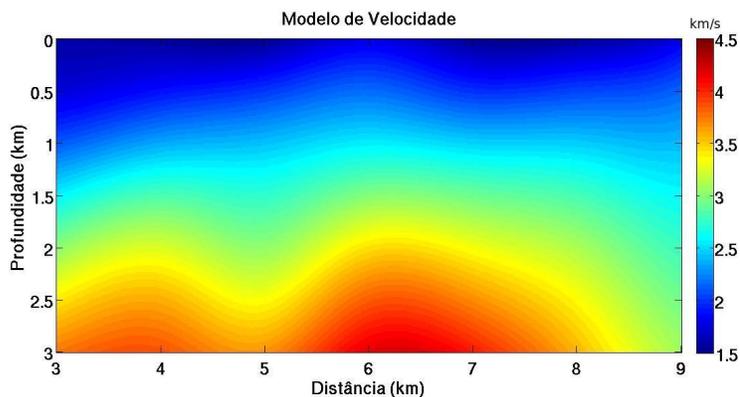
Figura 3.9: Os modelos das Figuras 3.8(a), 3.8(b) e 3.8(c) com seus respectivos pontos espalhadores. Com o aumento de λ_{C3} existe a tendência dos refletos serem menos curvados e deslocados para cima. Os pontos espalhadores se dispersam com o aumento do peso λ_{C3} .



(a)

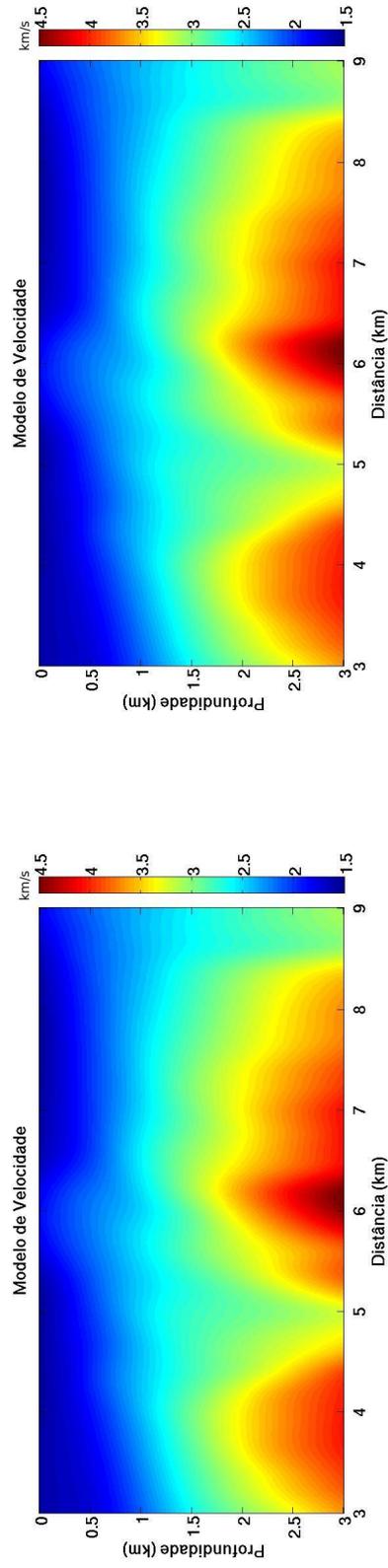


(b)

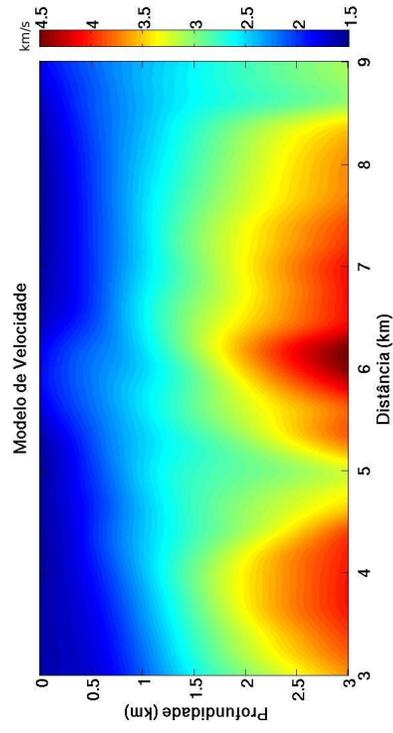


(c)

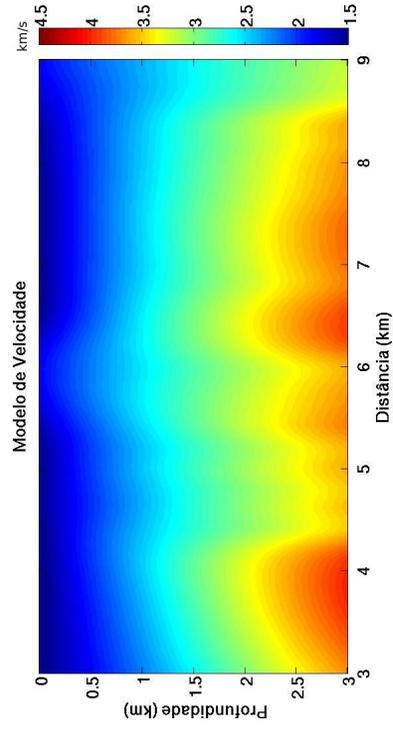
Figura 3.10: Em mais três testes, o peso de λ_{C1} permaneceu fixo nos valores de 0.01, 0.05 e 0.1, enquanto o valor de λ_{C3} variou de forma decrescente. Observou-se, nos três casos, que o melhor ajuste dos dados acontecia quando $\lambda_{C3} = 0.04$. Assim, os modelos selecionados tem pesos: $\lambda_{C3} = 0.04$ e λ_{C1} vale 0.01, 0.05 e 0.10 respectivamente. Percebe-se o surgimento de zona de baixa velocidade quando se decresce o peso de curvatura horizontal λ_{C1} .



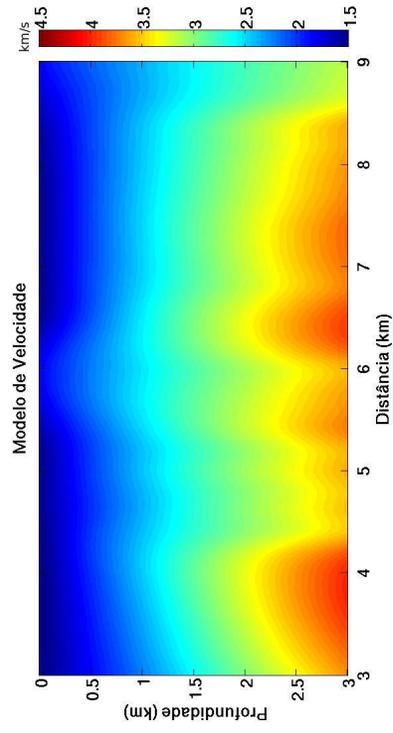
(a)



(b)

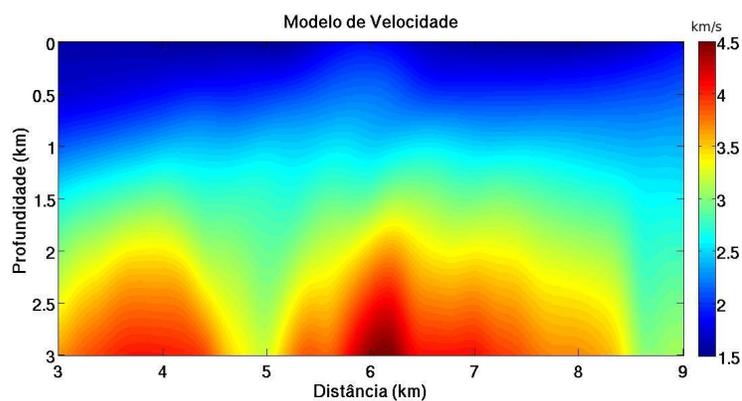


(c)

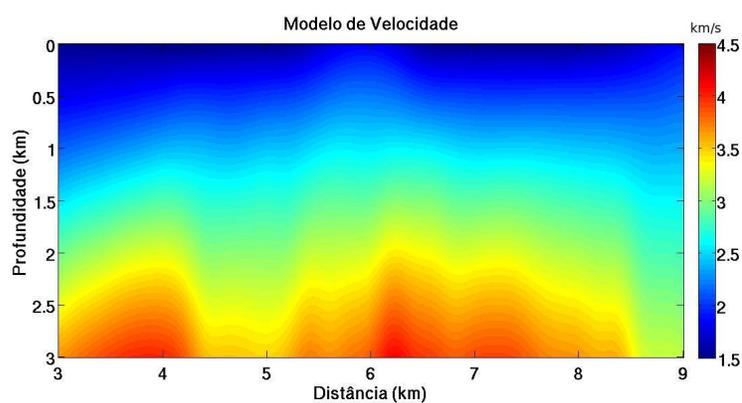


(d)

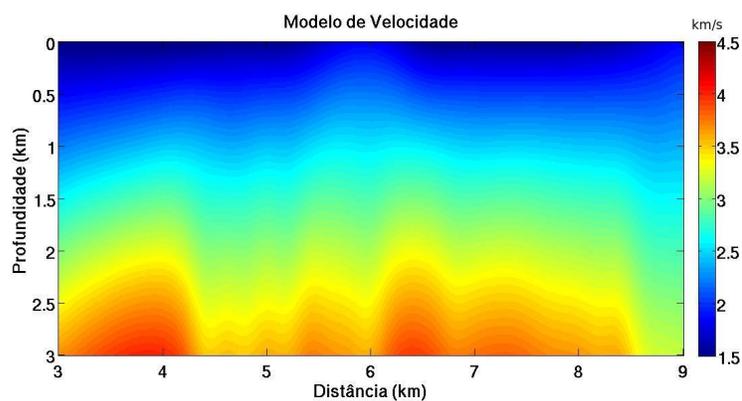
Figura 3.11: Os dois modelos mais acima são resultantes das inversões em que λ_{C3} é 0.01 e λ_{C1} vale respectivamente 0.01 e 0.05. Os dois modelos do fundo são resultantes das inversões em que λ_{C3} é 0.10 e λ_{C1} vale respectivamente 0.01 e 0.05.



(a)

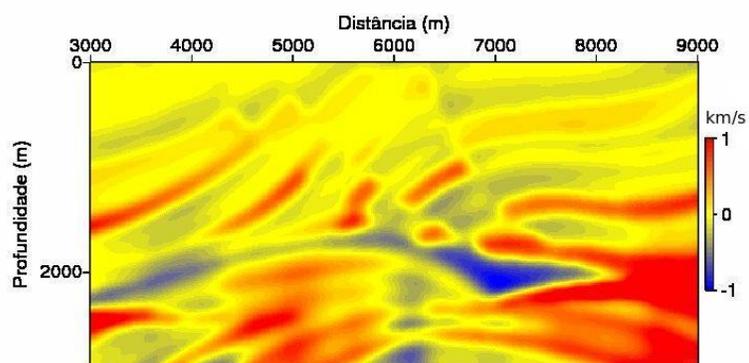


(b)

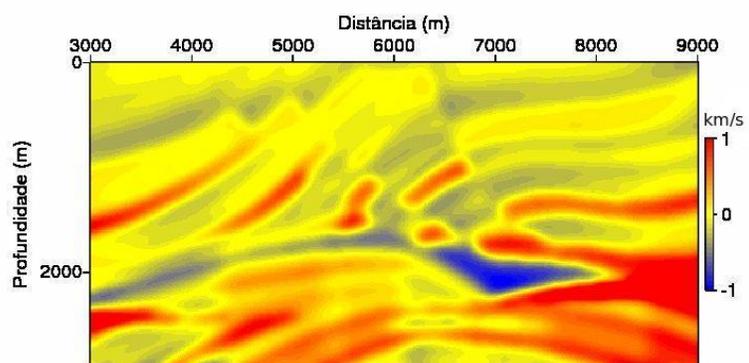


(c)

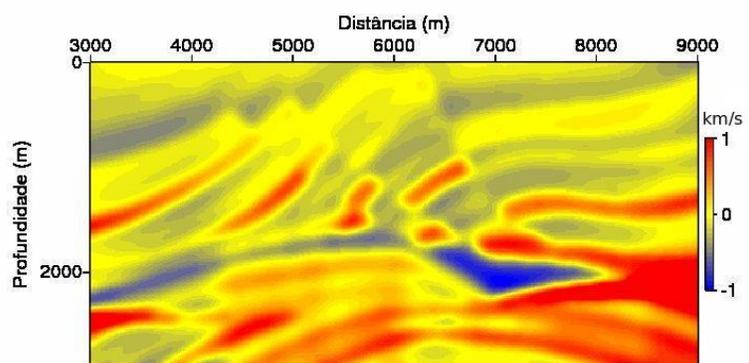
Figura 3.12: Os modelos resultantes das inversões no caso denso, nos quais os valores de λ_{C3} são 0.01, 0.05 e 0.10 respectivamente. O peso de curvatura horizontal λ_{C1} é o mesmo para os três modelos, com o valor de 0.01.



(a)

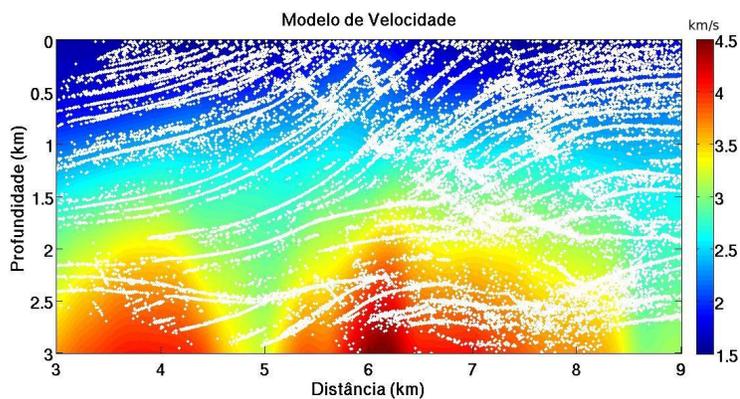


(b)

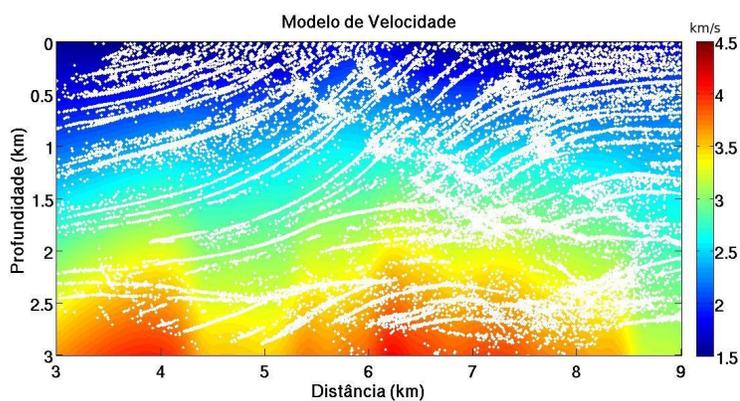


(c)

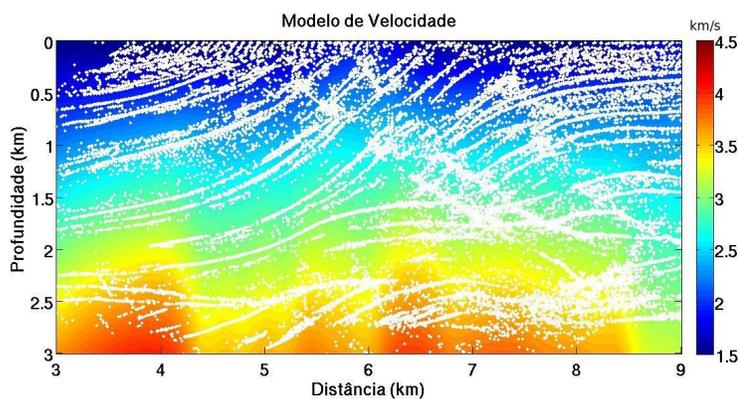
Figura 3.13: Os modelos são os resultados da diferença entre o Marmousi suavizado e os modelos refinados da Figura (3.12). O modelo que menos difere do Marmousoft foi o (c), em que os valores dos pesos na inversão foram de $\lambda_{C3} = 0.01$ e $\lambda_{C3} = 0.1$. A referida inversão tem melhoras sensíveis na região das anticlinais.



(a)



(b)



(c)

Figura 3.14: Modelos da Figura (3.12) com seus respectivos pontos espalhadores. Com o decréscimo de λ_{C3} os refletores do fundo do modelo são deslocados para cima, é aumentada a curvatura dos mesmos e a “resolução” também melhora.

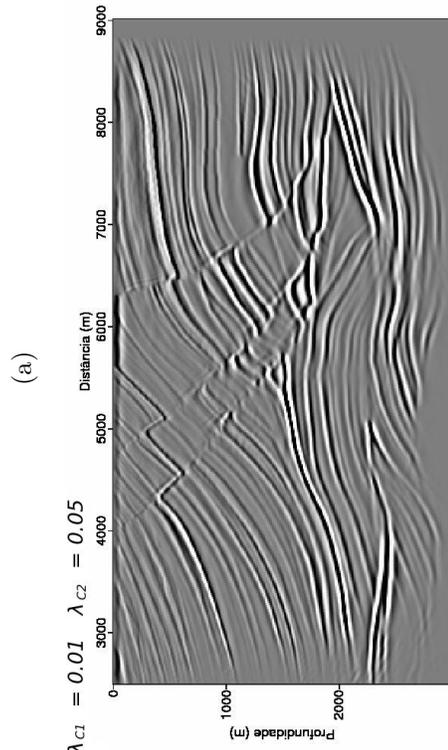
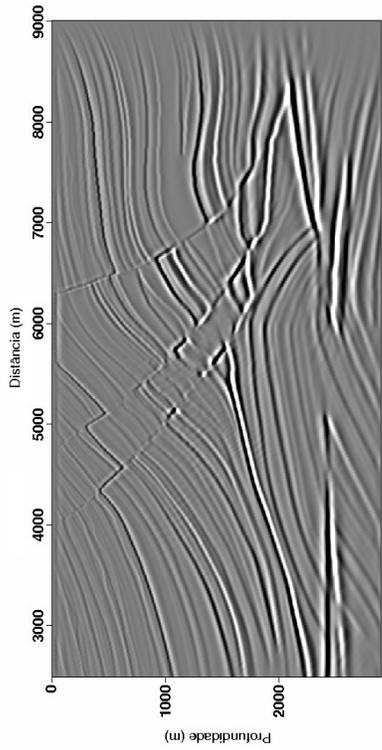
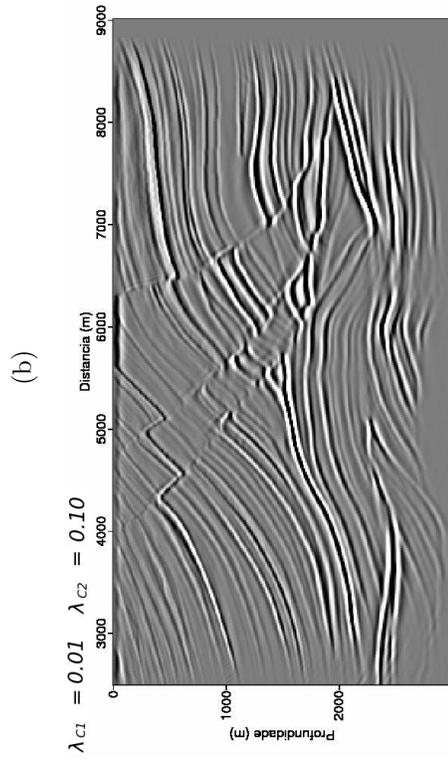
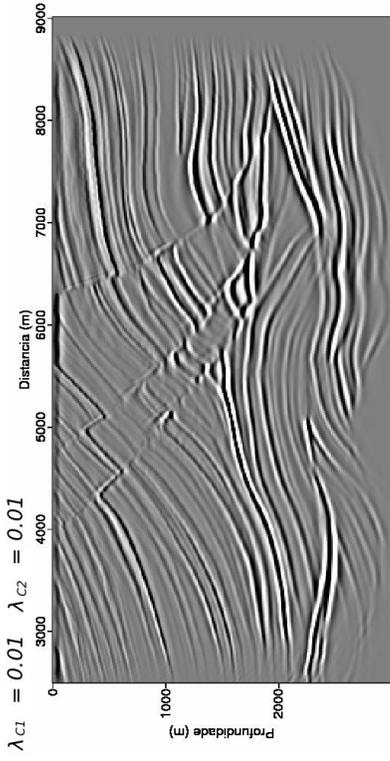


Figura 3.15: Seções migradas do Marmousoft e dos modelos da Figura (3.12). Observou-se na parte inferior do modelo que os refletos estão mais acima que o real e com curvaturas mais acentuadas, por exemplo, a anomalia de velocidade à esquerda, a qual foi recuperada em forma sinclinal.

3.6 REGULARIZADOR DE GRADIENTE DIRECIONAL

O regularizador do gradiente direcional é responsável por introduzir uma suavização nos parâmetros do modelo em cada direção, λ_{G1} na horizontal e λ_{G3} na vertical. Devido o gradiente de velocidade acontecer com mais intensidade na vertical nos modelos geológicos, foram testados os regularizadores com a suavização menor na direção x_3 , ou seja, a condição é que $\lambda_{G3} < \lambda_{G1}$. Tal condição permite maior variação de velocidade vertical que lateral. Então, nos testes propostos, em cada valor de λ_{G1} testado foram avaliadas as inversões com três valores de λ_{G3} , em que a razão entre os regularizadores² fossem 0.5, 0.25 e 0.1.

Com relação ao critério adotado de ajustes satisfatórios nas inversões dos caso esparsos, ver seção (3.3), foi verificado que para cada razão há uma faixa de valores de λ_{G1} em que os desvios são satisfatórios. Para a razão 0.5, o intervalo é de 0.14 a 0.02, já na razão 0.25 os bons ajustes ocorrem dentro do intervalo 0.30 a 0.03. Por último, para a razão 0.1, encontrou-se a faixa 0.70 a 0.02.

Na Figura (3.16) são mostrados quatro modelos resultantes das inversões nos casos esparsos. Observou-se nos testes que para as razões maiores, 0.5 e 0.25, são gerados modelos com pouca variação de velocidade. Os dois modelos mais acima da referida Figura são resultantes das inversões em que seguem a razão 0.5. No modelo referente a (3.16(a)), os pesos usados na inversão são $\lambda_{G1} = 0.03$ e $\lambda_{G3} = 0.015$. Na inversão do modelo referente a (3.16(b)), foram usados os pesos $\lambda_{G1} = 0.10$ e $\lambda_{G3} = 0.05$. Percebe-se que os referidos modelos apresentam pouca variação da velocidade vertical. Já os dois últimos modelos da Figura, são resultantes das inversões em que a razão dos pesos vale 0.1. Na inversão do modelo referente a (3.16(c)) foram usados os pesos $\lambda_{G1} = 0.03$ e $\lambda_{G3} = 0.003$. Na inversão do modelo referente a (3.16(d)) foram usados os pesos $\lambda_{G1} = 0.10$ e $\lambda_{G3} = 0.01$. Neles observa-se maior variação de velocidade vertical. Assim, os modelos gerados pela razão 0.1 produzem maior liberdade na variação de velocidade vertical produzindo modelos mais razoáveis.

Na Figura (3.17) são apresentados os modelos com os pontos espalhadores, que são resultantes das três inversões em que o peso λ_{G1} vale 0.03. O que difere nas inversões são os valores do peso λ_{G3} , que seguem as razões testadas (0.5, 0.25 e 0.1), portanto os valores são respectivamente 0.015, 0.0075 e 0.003. Nos três modelos os refletores na parte superior são recuperados de forma satisfatória. Na parte inferior do modelo, do canto esquerdo até o centro, os refletores recuperados pelos pontos espalhadores aparecem posicionados mais acima e com maior curvatura que o real. Já no canto inferior direito não há recuperação dos

² $\lambda_{G1}/\lambda_{G3}$

refletores, pois os poucos pontos estão dispersos.

O modelo escolhido para servir de ponto de partida nos testes dos refinados foi o da Figura 3.16(c). A inversão que gerou tal modelo tem como desvios padrão dos dados: 2m na posição, 0.022s/km na vagarosidade e 0.001s no tempo de trânsito. As velocidades mínima e máxima do modelo são respectivamente 1.6 e 4.06km/s.

As inversões dos testes refinados foram semelhantes aos testes dos esparsos, pois ambas apresentavam uma sequência de λ_{G1} decrescendo e em cada valor eram avaliadas as inversões cujas as razões com o regularizador vertical eram 0.5, 0.25 e 0.1. O intervalo em que as três razões obtiveram ajustes satisfatórios foi quando λ_{G1} estava entre 0.03 a 0.005. Para valores maiores que o limite superior 0.03, é possível encontrar bons ajustes, principalmente na razão 0.1, no entanto o ajuste na posição se comportou de forma instável.

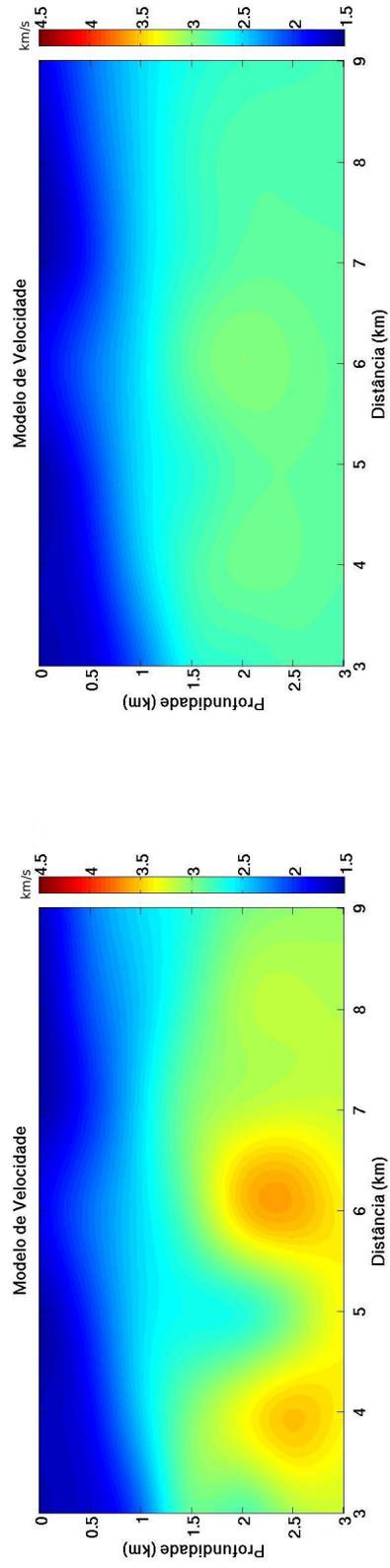
Os modelos refinados selecionados para os testes explicitados neste trabalho são apresentados na Figura (3.18). Os três são resultantes de inversões em que a razão entre os pesos é 0.1. Os pesos usados foram: $\lambda_{G1} = 0.005$ e $\lambda_{G3} = 0.0005$ em (3.18(a)), $\lambda_{G1} = 0.01$ e $\lambda_{G3} = 0.001$ em (3.18(b)), e $\lambda_{G1} = 0.03$ e $\lambda_{G3} = 0.003$ em (3.18(c)). Tal escolha se deve ao fato dos modelos resultantes das inversões, em que os pesos seguem a razão 0.1, alcançam melhores resultados que as demais razões, principalmente na recuperação do fundo do modelo.

Os modelos da Figura (3.19) são os resultados da diferença entre os coeficientes de velocidade do Marmousi suavizado e os modelos da Figura (3.18). Foi notado que na parte superior dos modelos, onde tem maior cobertura de raios, a recuperação da velocidade é melhor. Os locais onde ocorrem as maiores diferenças são nas anticlinais e cantos dos modelos. Outro ponto a ser destacado é que quanto maior o aumento dos pesos, melhor é a recuperação da velocidade, principalmente nas regiões de maiores diferenças descritas acima.

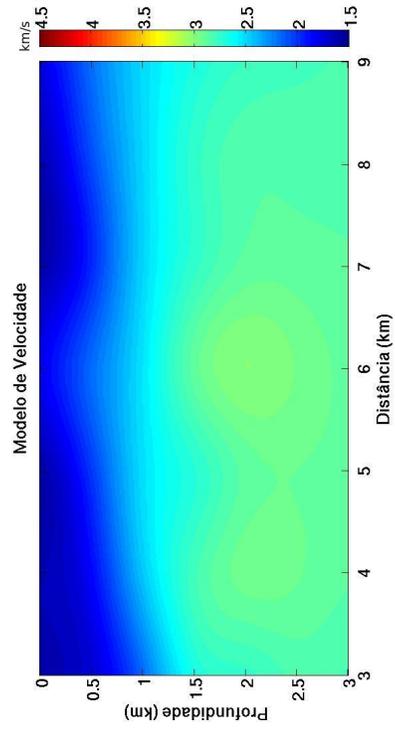
Os modelos da Figura (3.18) com os respectivos pontos espalhadores são mostrados na Figura (3.20). Na parte superior os pontos espalhadores alcançam posicionamentos satisfatórios. Na parte inferior dos modelos, os posicionamentos dos pontos melhoram de acordo com o aumento dos pesos. No modelo referente a (3.20(a)), os pontos na parte inferior estão mais curvados e acima do real. No modelo referente a (3.20(c)), os pontos tem posicionamentos mais razoáveis, por delinearem de forma similar os refletores do Marmousi nesta região. No canto inferior esquerdo os pontos não são bem posicionados em nenhum dos modelos.

As seções migradas a partir dos modelos da Figura (3.18) são mostradas em (3.21). A seção obtida a partir do Marmousoft é apresentada em 3.21(a). Observou-se que na parte superior, os refletores são bem posicionados. Na parte inferior, os refletores são recuperados

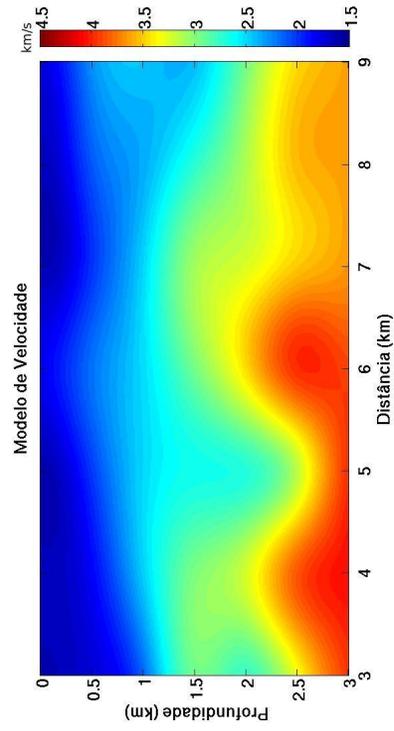
de forma curvada, porém com o aumento dos pesos eles tendem a diminuir a curvatura, por exemplo, a anomalia de velocidade a esquerda do Marmousi. O reservatório também possui posicionamento ligeiramente diferente do real juntamente com os refletores anticlinais no centro do modelo.



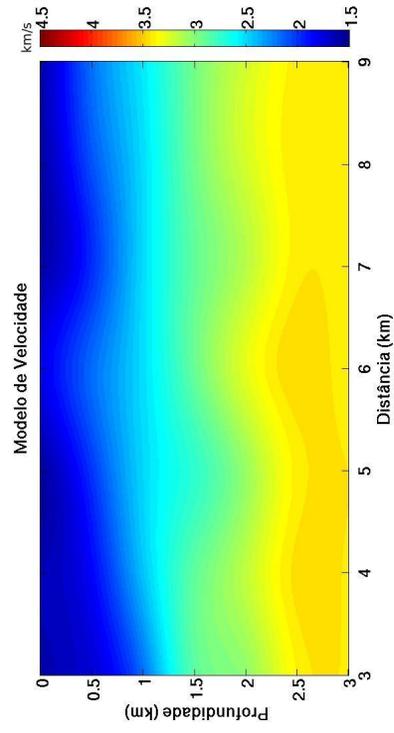
(a)



(b)

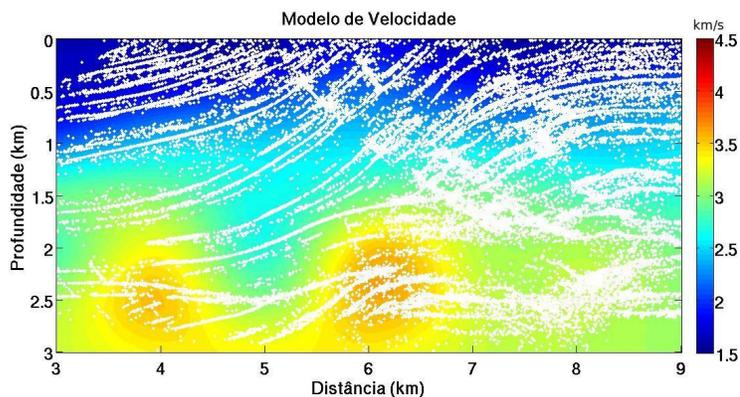


(c)

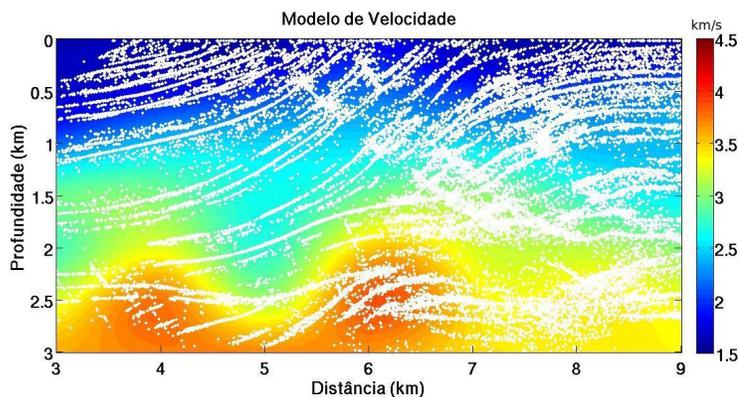


(d)

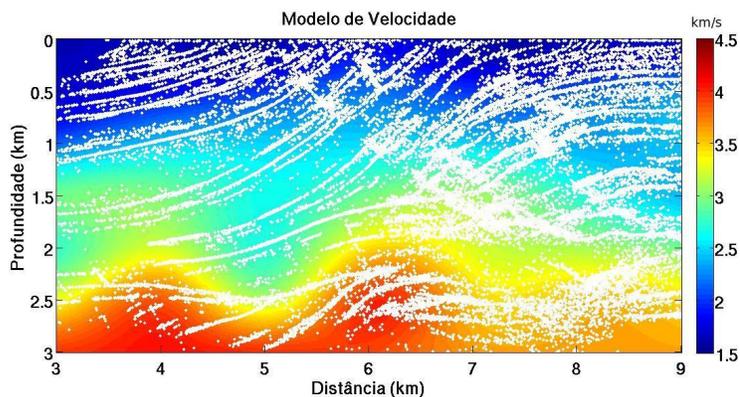
Figura 3.16: Os dois modelos mais acima da Figura são resultantes de inversões em que a razão dos pesos vale 0.5. Os dois modelos mais abaixo são resultantes de inversões em que a razão dos pesos vale 0.1.



(a)

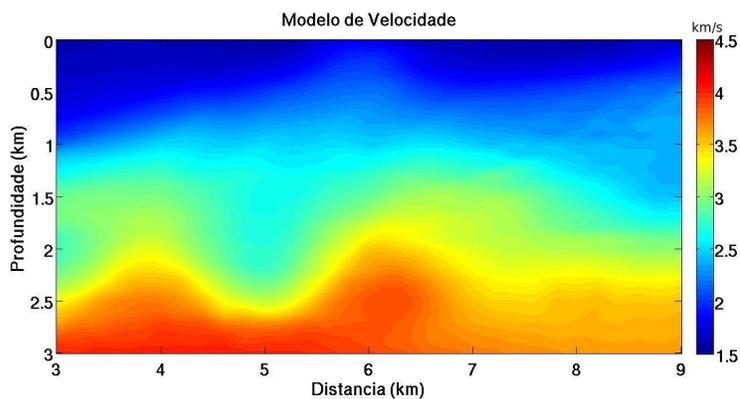


(b)

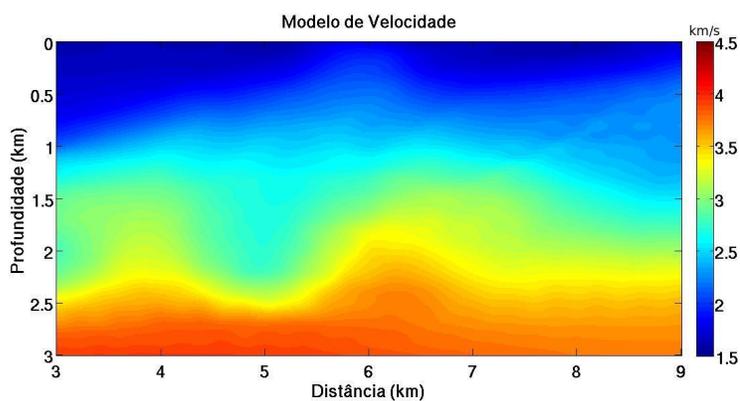


(c)

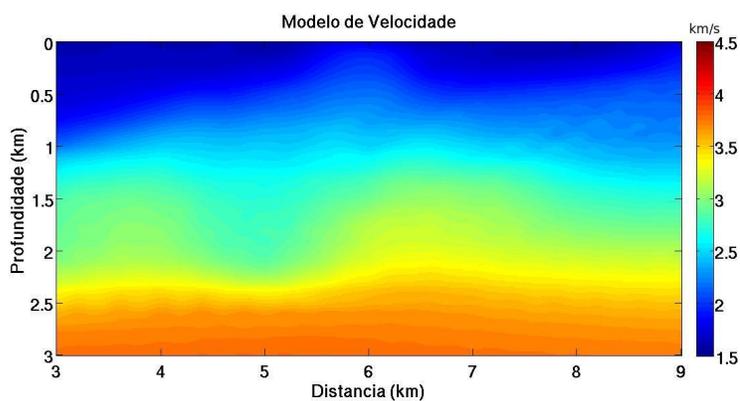
Figura 3.17: Os modelos da primeira coluna da Figura (3.16) com seus pontos espalhadores. Os refletos são recuperados mais curvados e posicionados acima do real, por exemplo, a anomalia de velocidade do Marmousi à esquerda na profundidade 2.5km. A medida que diminui o valor de λ_{G3} a anomalia é deslocada ainda mais para cima.



(a)

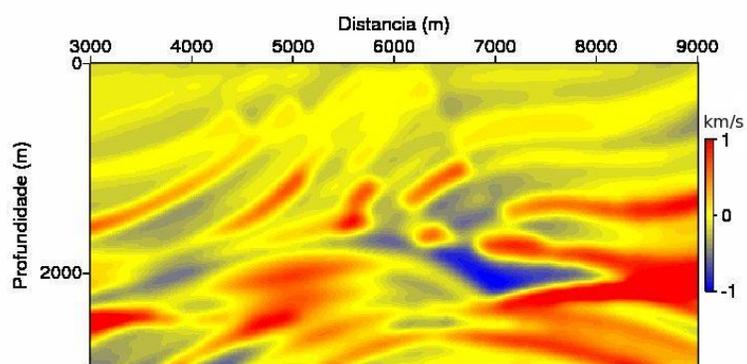


(b)

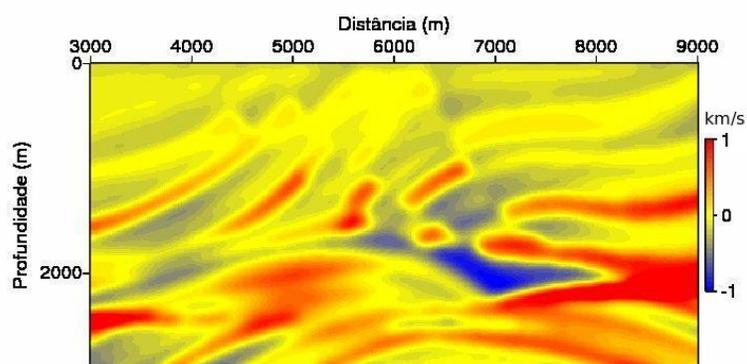


(c)

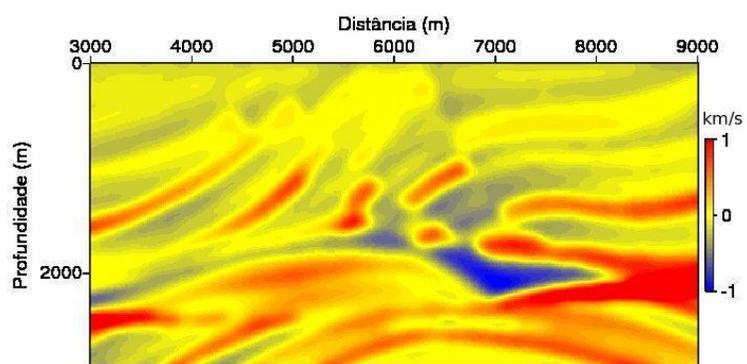
Figura 3.18: Os modelos refinados resultantes de inversões em que a razão entre os pesos vale 0.1. Os pesos usados nas inversões que geraram os referidos modelos são: $\lambda_{G1} = 0.005$ e $\lambda_{G3} = 0.0005$ em (a), $\lambda_{G1} = 0.01$ e $\lambda_{G3} = 0.001$ em (b), e $\lambda_{G1} = 0.03$ e $\lambda_{G3} = 0.003$ em (c).



(a)

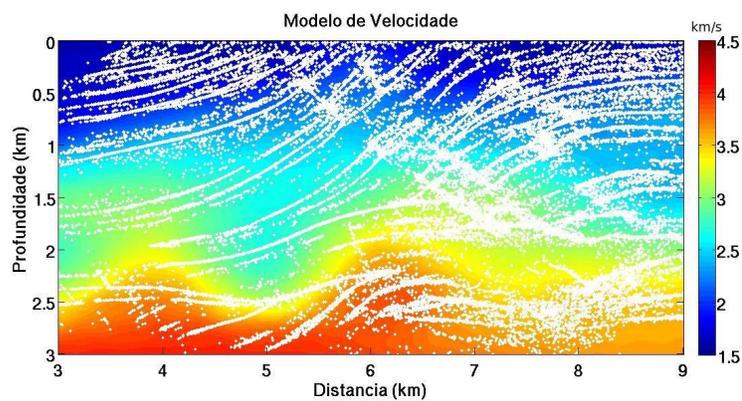


(b)

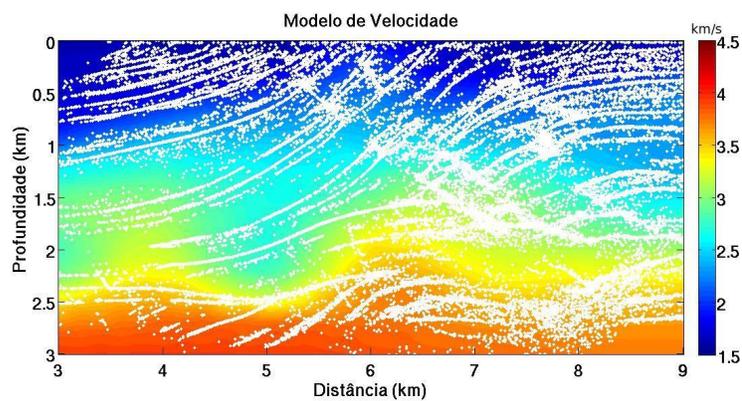


(c)

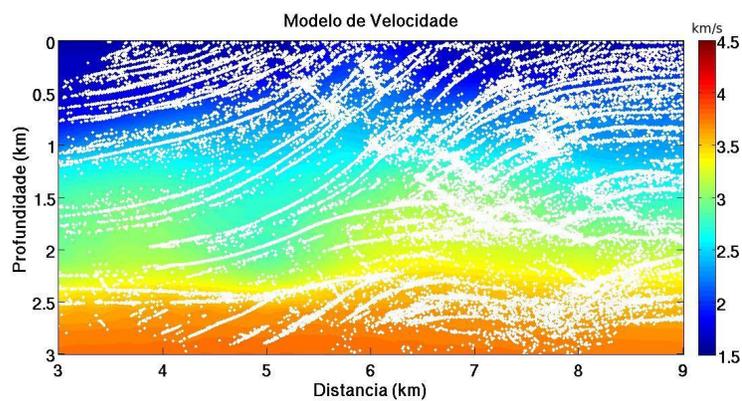
Figura 3.19: O resultado da diferença entre os coeficientes de velocidade do Marmousi suavizado e os modelos da Figura (3.18). Com o aumento dos pesos melhora a recuperação da velocidade nas regiões das anticlinais e no fundo do modelo.



(a)

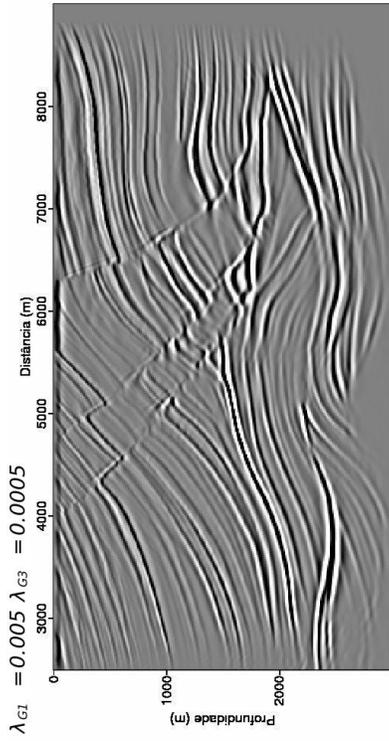


(b)

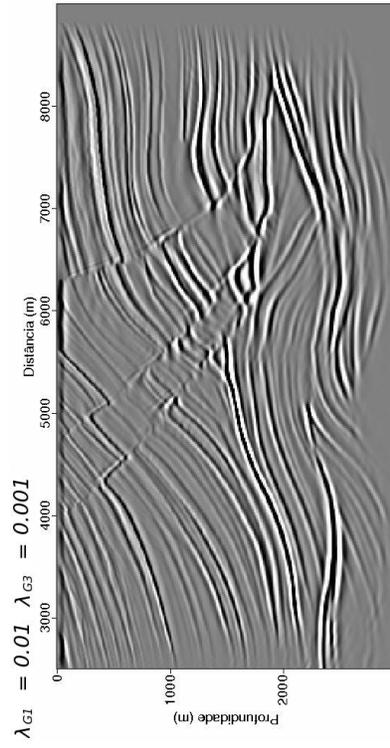


(c)

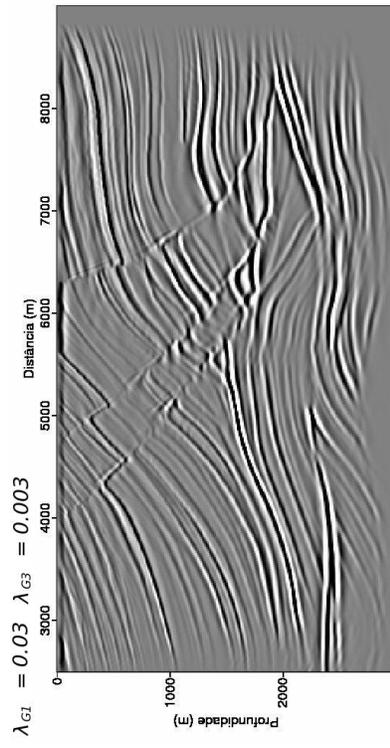
Figura 3.20: Os modelos da Figura (3.18) com seus respectivos pontos espalhadores. Na parte inferior do modelo o posicionamento dos pontos melhoram com o aumento dos pesos.



(a)



(b)



(c)

(d)

Figura 3.21: As seções migradas do modelo Marmousoft e dos modelos da Figura(3.18). A recuperação dos refletores no fundo do modelo melhora com o aumento dos pesos.

3.7 REGULARIZADOR DOS REFLETORES

Para o teste deste regularizador foram avaliados os resultados de várias inversões com os valores do peso λ_R variando de forma decrescente, de 0.90 a 0.0001. Em cada inversão eram guardados os desvios padrão de cada dado, os arquivos de saída contendo as dimensões do modelo resultante, os valores da velocidade, os valores dos parâmetros dos raios e as coordenadas dos pontos espalhadores. Os resultados foram analisados de acordo com os critérios de avaliação da seção (3.3).

Através dos testes verificou-se que nas inversões dos modelos esparsos os valores de λ_R produzem bons ajustes dos dados no intervalo de 0.025 a 0.005. Neste intervalo o maior desvio padrão do ajuste na posição é de 3.8 metros, nas componentes de vagarosidade é de 0.024 s/km e no tempo de trânsito é 0.001 s. Na Figura (3.22) temos três modelos de velocidade resultantes com λ_R sendo 0.005, 0.010 e 0.025 respectivamente. Nota-se que as partes superiores dos modelos, acima de 1.5km de profundidade, são bastante similares, já as partes inferiores sofrem as alterações mais significativas. Os modelos mostram que este regularizador influencia de forma a espalhar a zona de alta velocidade em todo o modelo. Outro ponto, é que o gradiente de velocidade tende a aumentar com o decréscimo do peso testado, pois os valores máximos e mínimos da velocidade em cada modelo são: 3.60 e 1.59km/s em 3.22(c), 3.98 e 1.57km/s em 3.22(b), e 4.26 e 1.58km/s em 3.22(a).

Outra análise é feita na Figura (3.23), na qual são representados os mesmos modelos esparsos da Figura (3.22) com seus respectivos pontos espalhadores. Na parte superior do modelo as localizações dos pontos espalhadores são boas nos três modelos, mas no modelo da Figura (3.23(c)) percebe-se que alguns pontos tendem a se dispersar, diminuindo a “nitidez” dos refletores menos profundos. Na parte inferior dos modelos aconteceram maiores alterações nas localizações dos referidos pontos. No modelo mais acima da Figura, observa-se que na região inferior, os pontos espalhadores dão um aspecto mais curvado aos refletores e com o posicionamento mais acima. Já os dois últimos modelos tendem a aumentar a profundidade dos refletores e posicionar de forma razoável os pontos espalhadores em relação aos refletores do Marmousi.

O modelo escolhido para servir de entrada para as inversões com os modelos mais densos foi o da Figura 3.22(b), cujo o peso λ_R vale 0.01 e os desvios padrão ao final da iteração 30 são: 3.2 m na posição, 0.022 s/km na vagarosidade e 0.0009s no tempo de trânsito.

Foi realizado o mesmo processo com as inversões dos modelos mais densos, ou seja, foram feitos diversos testes variando de forma decrescente o λ_R , de 0.90 a 0.0001. O intervalo de

valores em que o peso produziu ajuste satisfatório foi o mesmo do caso esparsos, 0.025 a 0.005, porém com melhores resultados. No referido intervalo observou-se como pior desvio padrão: 1.9m na posição, 0.019s/km nas componentes de vagarosidade e 0.0009s no tempo de trânsito.

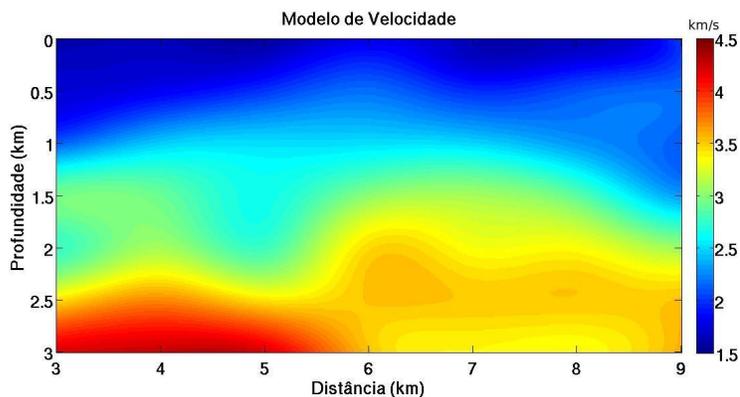
Os modelos da Figura (3.24) são resultantes das inversões nas quais os valores de λ_R são: 0.005 em 3.24(a), 0.025 em 3.24(b) e 0.50 em 3.24(c) respectivamente. Os dois primeiros modelos são similares, suas diferenças estão na suavização lateral, pois a do segundo modelo é maior que a do primeiro. Seus valores de velocidades máxima e mínima são respectivamente: 4.16 e 1.56km/s em (a) e 4.17 e 1.55km/s em (b). Já o modelo da Figura 3.24(c) foi selecionado devido ele possuir a característica do uso excessivo do peso λ_R . Na parte inferior do modelo, a velocidade tem uma configuração “estratificada”, com variação basicamente na vertical. Portanto, este regularizador tem a tendência de espalhar a zona de alta velocidade e para valores excessivamente altos os modelos de velocidade resultantes tendem a diminuir os gradientes de velocidade vertical e principalmente o lateral.

A Figura (3.25) mostra o resultado da diferença entre os coeficientes de velocidade do Marmousi suavizado e os modelos da Figura (3.24). Através das Figuras foi observado que na parte superior do modelo a recuperação da velocidade é melhor que na parte inferior. Entre os dois modelos superiores a recuperação do mais suavizado 3.24(b) obteve melhor resultado especialmente na parte inferior do modelo e na região das anticlinais. No terceiro modelo, da Figura 3.24(c), verificou-se uma grande região ao centro com valores de velocidade maior que do Marmousi. Ainda no mesmo modelo verificou-se também que nas demais regiões os valores são menores, caracterizando problemas na recuperação da velocidade na referida inversão. Percebe-se que no canto inferior esquerdo, também não há boa recuperação da velocidade nos três modelos.

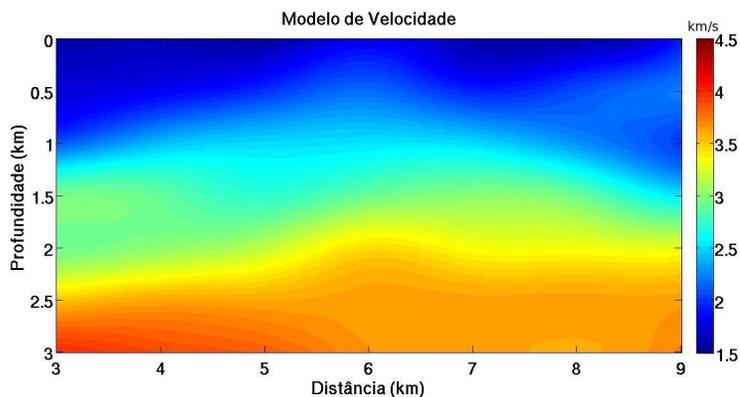
Com relação a recuperação dos pontos espalhadores nos modelos mais densos, representados na Figura (3.26), foi observado que os refletores foram recuperados com mais “nitidez” do que nos modelos esparsos. Entretanto, outro ponto observado é que ao aumentar o peso os refletores tendem a diminuir a “nitidez”, pois há maior dispersão dos pontos pelo modelo. Na parte superior dos modelos a recuperação é satisfatória. Na parte inferior da esquerda até o centro, os refletores recuperados pelos pontos aparecem de forma similar ao Marmousi. Porém no canto inferior direito não recuperam-se os refletores.

Na Figura (3.27) são apresentadas as seções migradas. A seção obtida a partir do Marmousi exato é apresentada em 3.27(a). Nas seções 3.27(b) e 3.27(c) observa-se a boa recuperação dos refletores de um modo geral. Na parte superior, observa-se bom posicio-

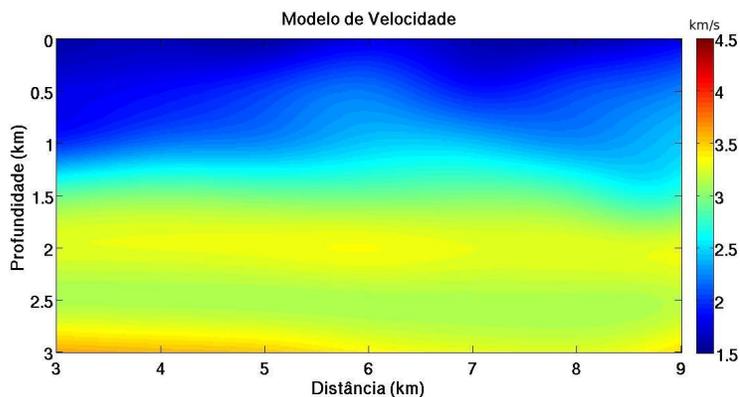
namento dos refletores. Na parte inferior das referidas seções foi notado que os refletores tem feições similares ao do Marmousi, porém apresentam ligeiras diferenças na posição. As anomalias tanto a esquerda quanto a direita aparecem ligeiramente acima, outra diferença aparece nas regiões anticlinais. A dificuldade ocorre nas regiões de canto do modelo, pois existe pouca cobertura dos raios dificultando a recuperação da velocidade nesta região. Na terceira migração não aparece com clareza a região das três fraturas. As anticlinais estão praticamente retas e o reservatório aparece curvado para cima. Tais mudanças acontecem depois de excessiva suavização, pois o peso usado em 3.24(c) é maior cem vezes que o de 3.24(a).



(a)

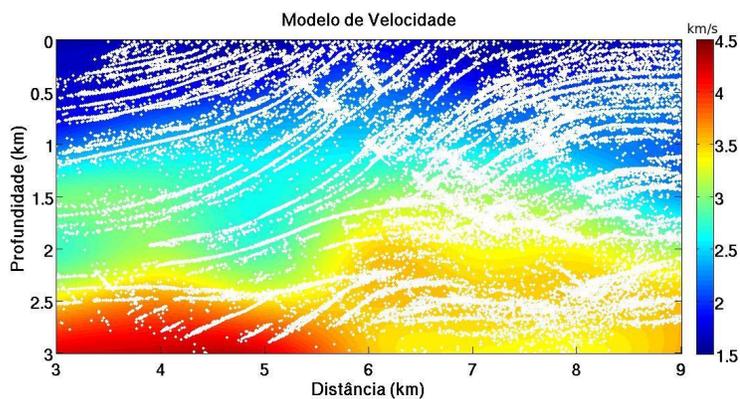


(b)

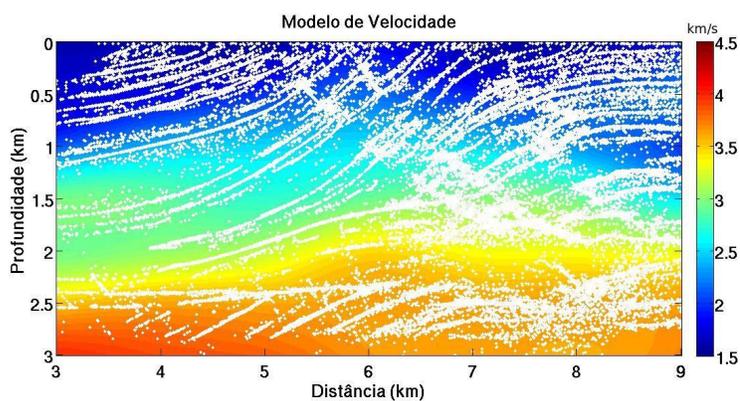


(c)

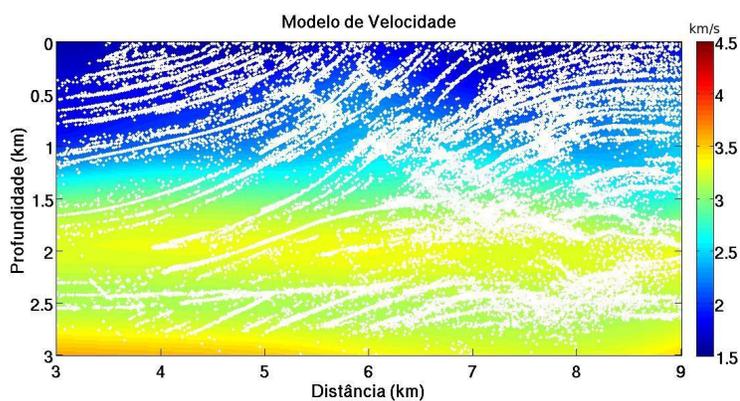
Figura 3.22: A faixa de λ_R em que ocorreram ajustes satisfatórios foi de 0.025 a 0.005. Os modelos esparsos representados na Figura tem o peso λ_R valendo 0.005 em (a), 0.010 em (b) e 0.025 em (c). Foi verificado que este regularizador tem a tendência de espalhar zona de alta velocidade pelo modelo. Outro ponto é que o gradiente de velocidade vertical tende a aumentar com o decréscimo do peso.



(a)

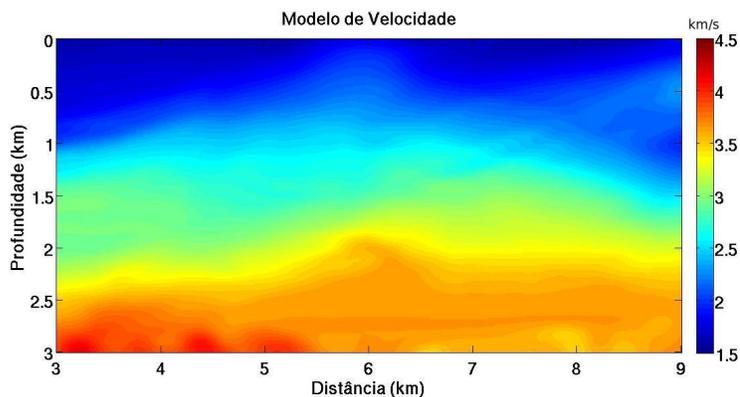


(b)

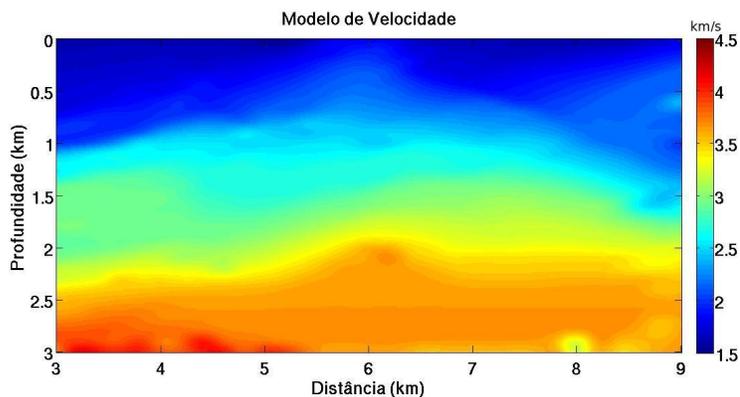


(c)

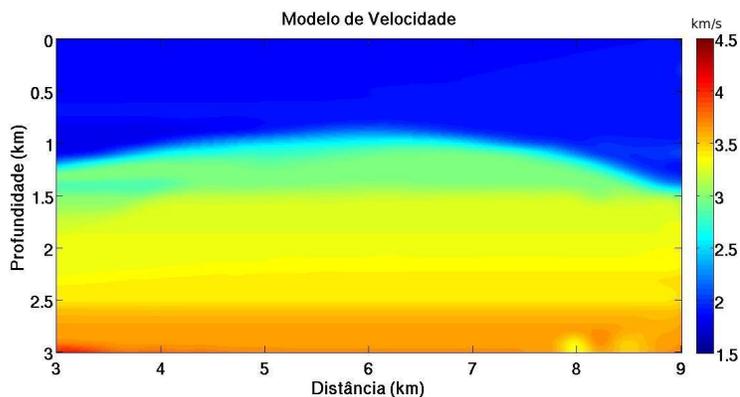
Figura 3.23: Os mesmos modelos da Figura (3.22) com seus respectivos pontos espalhadores. As maiores alterações ocorrem no fundo do modelo. Quanto maior o peso, menos curvados e mais profundas são as recuperações dos refletores desta região.



(a)

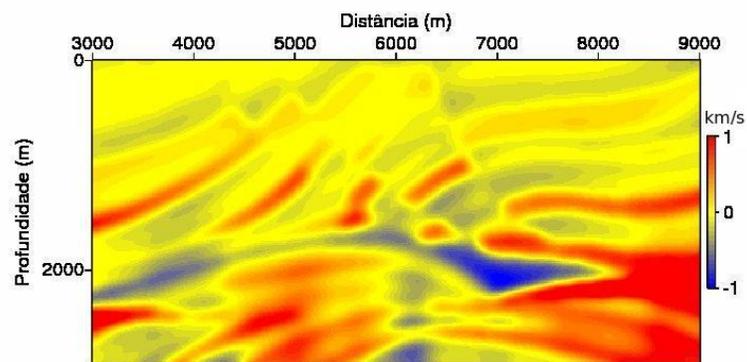


(b)

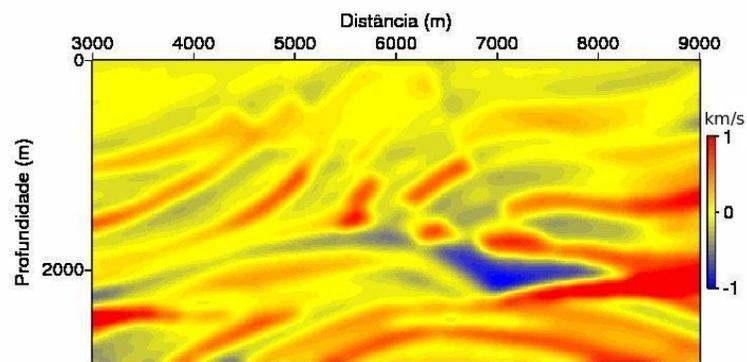


(c)

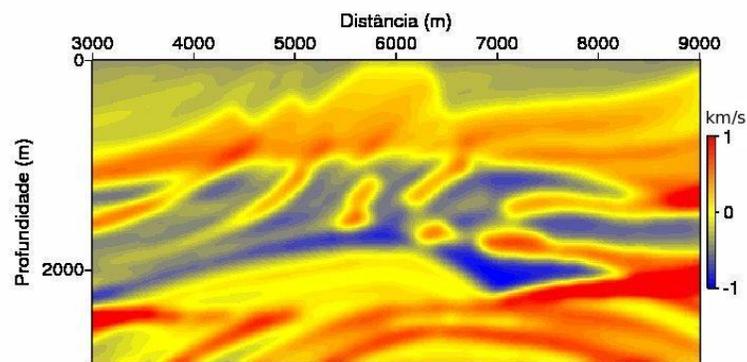
Figura 3.24: Na Figura são explicitados os modelos resultantes dos testes refinados, resultados em que o peso λ_R varia: 0.005 em (a), 0.025 em (b) e 0.50 em (c). O regularizador tem a capacidade de espalhar zona de alta velocidade pelo modelo. Quanto maior o valor do regularizador menores são os gradientes vertical e horizontal da velocidade.



(a)



(b)



(c)

Figura 3.25: São explicitados os modelos com o resultado da diferença entre os coeficientes de velocidade do Marmousi com os respectivos modelos da Figura (3.24).

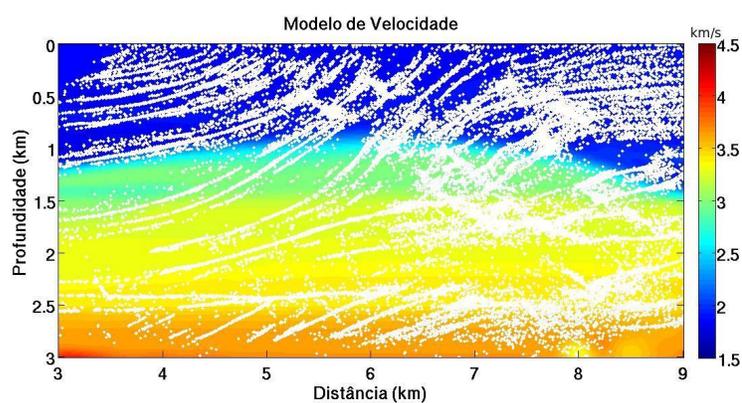
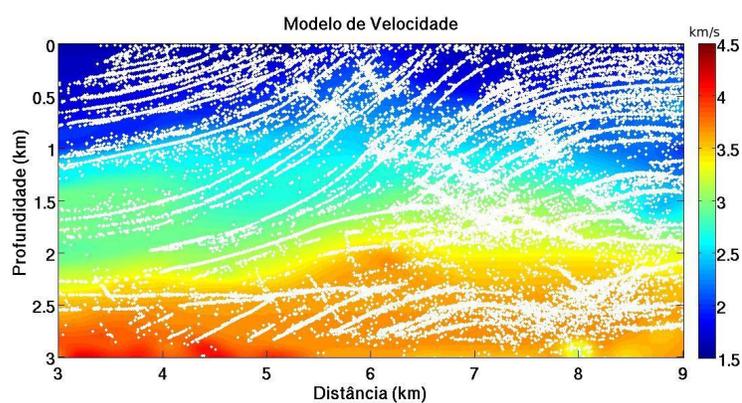
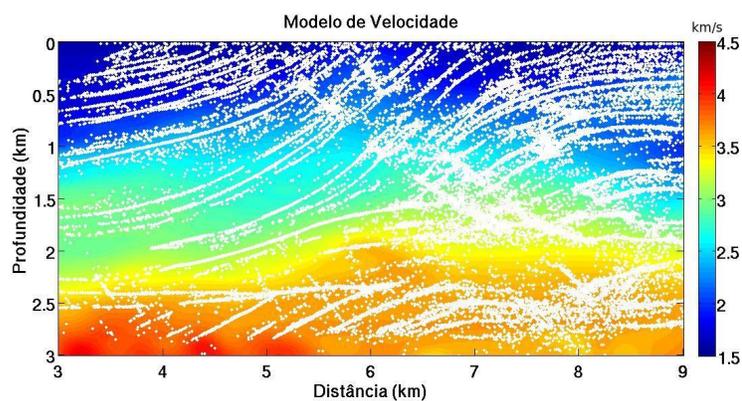
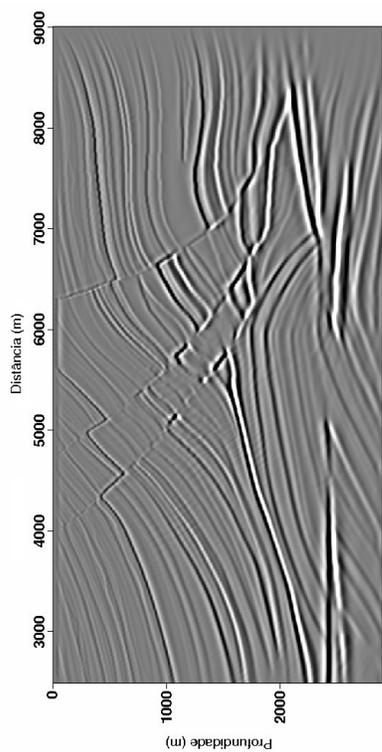
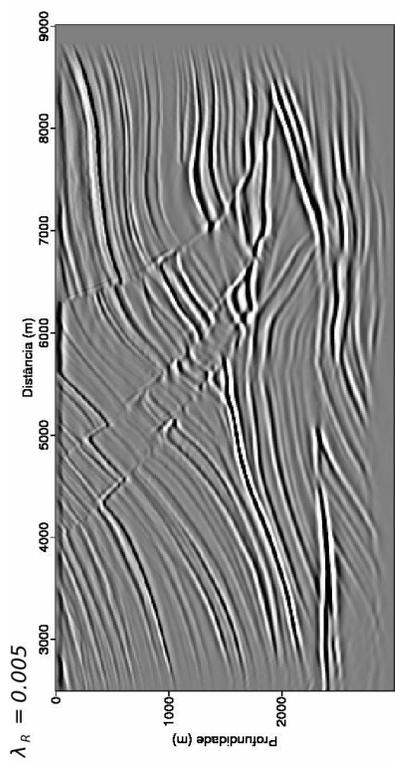
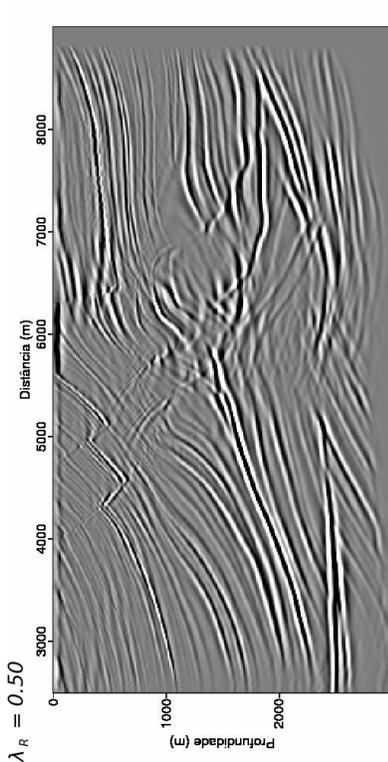


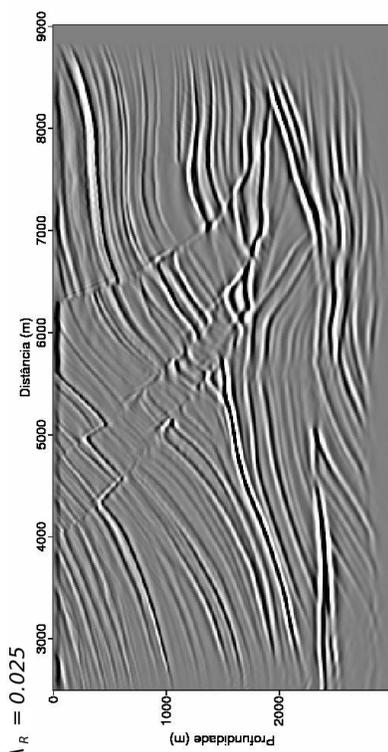
Figura 3.26: Os mesmos modelos da Figura (3.24) com seus respectivos pontos espalhadores. Existe maior nitidez dos refletos para os modelos mais densos. Verifica-se que com o aumento do peso λ_R os pontos ficam mais dispersos.



(a)



(b)



(c)

(d)

Figura 3.27: As seções migradas do modelo Marmousoft e dos modelos da Figura (3.24). Nas duas seções acima observa-se a boa recuperação dos refletores de um modo geral, com ligeiras diferenças nas posições das anticlinais e das anomalias de velocidade a esquerda e a direita. A terceira migração é feita a partir de um modelo excessivamente suavizado, por isso apresenta problemas no imageamento, principalmente na região das fraturas.

4 CONCLUSÃO

Neste trabalho foi proposta a avaliação de regularizadores na estereotomografia, portanto, o objetivo foi verificar as influências destes nos resultados das inversões. Todos os regularizadores testados foram baseados em operadores diferenciais espaciais de primeira e segunda ordem. Entre eles existe um novo regularizador que minimiza o gradiente de velocidade na direção de mergulho dos potenciais refletores em cada ponto espalhador.

Nos testes foi observado que a parte inferior dos modelos de velocidade sofre maior influência dos regularizadores. A explicação deste fato está na cobertura dos raios, pois com a profundidade existe maior dificuldade de selecionar os dados, proporcionando baixa cobertura e exigindo da informação a priori. Ao contrário da parte superior, cuja quantidade de raios é bem maior, a influência dos regularizadores são menores. Também foi observado que para os regularizadores que avaliam a diferenciação espacial de segunda ordem (curvatura isotrópica e curvatura direcional) existe a tendência de concentrar zona de alta velocidade no centro do modelo. Já os regularizadores que avaliam a diferenciação espacial de primeira ordem (gradiente direcional e refletores em potencial) tem a tendência de espalhar zona de alta velocidade pelo modelo.

Nos testes da recuperação dos pontos espalhadores, observou-se que na parte superior do modelo tais pontos são bem posicionados. A explicação também está na maior cobertura de raios, pois são mais informações no problema tomográfico. Na parte inferior do modelo, onde ocorre menor cobertura de raio, acontecem as maiores dificuldades no posicionamento dos pontos. Porém com certos pesos, os regularizadores que trabalham com diferenciação de primeira ordem conseguiram posicionamentos razoáveis nessa região. Todos os regularizadores apresentaram problemas no canto inferior esquerdo não só com o posicionamento dos pontos espalhadores mas também com a recuperação da velocidade. Tal problema nessa região acontece devido a pobre iluminação, pelo fato deste local ter offset limitado, consequentemente poucos eventos localmente coerentes são selecionados (BILLETTE et al., 2003).

Nas seções migradas, na parte superior que possui boa cobertura de raios, a recuperação dos refletores independe dos regularizadores. Entretanto, as regiões com baixa cobertura de raios, a partir de 2km de profundidade, sentem maior influência do tipo do regularizador. Os que trabalham com operadores diferenciais espaciais de primeira ordem tiveram resultados

razoáveis. Por exemplo, a anomalia de velocidade a esquerda do Marmousi, o reservatório e as regiões das anticlinais que geralmente apresentam dificuldades no imageamento, com tais regularizadores foram bem recuperadas, apenas com ligeiras diferenças na posição. Já os regularizadores que avaliavam os operadores de diferenciação espacial de segunda ordem tiveram mais dificuldades em recuperar os refletores citados acima. Na região do fundo e principalmente nos cantos inferiores, as migrações não recuperaram os refletores, tal fato ocorre pela dificuldade na seleção de eventos localmente coerentes nessa região. Notou-se também que os modelos de velocidade são mais sensíveis aos regularizadores que as imagens migradas, pois é possível verificar modelos com vários níveis de suavização produzirem resultados de migrações semelhantes.

REFERÊNCIAS

- AKI, K.; RICHARDS, P. *Quantitative seismology: theory and methods*. [S.l.]: Freeman, W. H. and Company, 1980.
- AMAZONAS, D. R. et al. Wide-angle FD and FFD migration using complex Padé approximations. *Geophysics*, v. 72, n. 6, p. PS215–PS220, 2007.
- ASTER, R.; BORCHERS, B.; THURBER, C. *Parameter Estimation and Inverse Problems*. [S.l.]: Elsevier Academic Press, 2005.
- BARBOSA, B. S. *Análise de sensibilidade para a estereotomografia em meios elípticos e anelípticos*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Pará, Belém, 2005.
- BERRYMAN, J. G. *Lecture Notes on Nonlinear Inversion and Tomography*. [S.l.]: Lawrence Livermore National Laboratory, 1990.
- BICKEL, S. H. Velocity-depth ambiguity of reflection traveltimes. *Geophysics*, v. 55, n. 3, p. 266–276, march 1990.
- BILLETTE, F.; BÉGAT, L.; LAMBARÉ, G. Practical aspects and applications of 2d stereotomography. *Gephysics*, n. 3, p. 1008–1021, 2003.
- BILLETTE, F.; LAMBARÉ, G. Velocity macro-model estimation from seismic reflection data by stereotomography. *Gephysical Journal International*, n. 135, p. 671–690, 1998.
- BISHOP, T. N. et al. Tomographic determination of velocity and depth in laterally varying media. *Geophysics*, v. 50, n. 6, p. 903–923, june 1985.
- BUBE, K. P.; RESNICK, J. R. Well-determined and poorly determined features in seismic tomography. *54th Ann. Internat. Mtg., Soc. Expl. Geophys*, p. 717–719, 1984.
- ČERVENÝ, V. *Seismic Ray Theory*. [S.l.]: Cambridge: Cambridge University Press, 2001.
- COSTA, J. C. et al. Slope tomography. *Geophysics*, v. 73, n. 5, p. VE39–VE47, 2008.
- FARRA, V.; MADARIAGA, R. Seismic waveform modeling in heterogeneous media by ray perturbation theory. *J. Geophys. Res.*, n. 92, p. 2697–2712, 1987.
- FARRA, V.; MADARIAGA, R. Non-linear reflection tomography. *Geophysical Journal International*, n. 95, p. 135–147, 1988.
- FOMEL, S. Velocity-independent time-domain seismic imaging using local event slopes. *Geophysics*, v. 72, n. 3, p. S139–S147, 2007.

- GOLDSTEIN, H. *Classical mechanics*. 2nd. ed. [S.l.]: Addison Wesley series in physics, 1980.
- LAILLY, P.; SINOQUET, D. Smooth velocity models in reflection tomography for imaging complex geological structures. *Geophysical Journal International*, n. 124, p. 349–362, 1996.
- MENKE, W. *Geophysical data analysis: discrete inverse theory*. [S.l.]: Academic Press(International Geophysics), 1989.
- MISPEL, J.; HANITZSCH, C. The use of layered or smoothed velocity models for prestack kirchhoff depth migration. *66th Annual SEG Meeting and Exposition, Soc. Expl. Geophys., Expanded Abstracts*, p. 519–521, 1996.
- PAIGE, C. C.; DA; SAUNDERS, M. A. Lsq: An algorithm for sparse linear equations and sparse least squares. *ACM Transactions on Mathematical Software*, v. 8, n. 3, p. 43–71, 1982.
- SCALE, J. A.; SMITH, M. L.; TREITEL, S. *Introductory geophysical inverse theory*. [S.l.]: Samizdat Press, 2001.
- SCHULTZ, P. P.; CLEARBOUT, J. F. Velocity estimation and downward continuation by wavefront synthesis. *Geophysics*, n. 4, p. 691–714, 1978.
- SILVA, J. B. C.; MEDEIROS, W. E.; BARBOSA, V. C. F. Pitfalls in nonlinear inversion. *Pure and Applied Geophysics*, v. 158, p. 945–964, 2001.
- SWORD, C. H. *Tomographic determination of interval velocities from reflection seismic data: the method of controlled directional reception*. Tese (Doutorado) — Stanford University, 1987.
- TIEMAN, J. H. Investigating the velocity-depth ambiguity of reflection travel time. *Geophysics*, v. 59, n. 11, p. 1763–1773, 1994.
- VERSTEEG, J. R. Sensitivity of prestack depth migration to the velocity model. *Geophysics*, v. 58, n. 6, p. 873–882, 1993.

APÊNDICE

APÊNDICE A – PROPAGADORES

A.1 Matriz \mathbf{A} constante

Neste momento, o objetivo é encontrar uma expressão para os propagadores que resolvam os sistemas de equações diferenciais. Primeiramente é considerado o sistema homogêneo em que a matriz dos coeficientes \mathbf{A} seja constante, assim, pode ser representado por

$$\frac{d\mathbf{y}}{d\tau} = \mathbf{A}\mathbf{y}. \quad (\text{A.1})$$

Expandindo $\mathbf{y}(\tau + \Delta\tau)$ em série de Taylor e usando (A.1), temos

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(\tau + \Delta\tau) &= \mathbf{y}(\tau) + \Delta\tau\mathbf{A}\mathbf{y}(\tau) + \mathcal{O}(\Delta^2), \\ \mathbf{y}(\tau + \Delta\tau) &= (\mathbf{I} + \Delta\tau\mathbf{A})\mathbf{y}(\tau) + \mathcal{O}(\Delta^2). \end{aligned}$$

Considerando o intervalo $\tau - \tau_0$, a solução de (A.1) tem a forma

$$\mathbf{y}(\tau) = \left[\prod_{i=1}^N (\mathbf{I} + \Delta\tau\mathbf{A}) \right] \mathbf{y}(\tau_0) + \mathcal{O}(\Delta^2). \quad (\text{A.2})$$

Fazendo a igualdade $\Delta\tau = (\tau - \tau_0)/N$, temos

$$\mathbf{y}(\tau) = \left[\left(\mathbf{I} + \frac{(\tau - \tau_0)}{N}\mathbf{A} \right) \right]^N \mathbf{y}(\tau_0) + \mathcal{O}(\Delta^2). \quad (\text{A.3})$$

Considerando $N \rightarrow \infty$ e utilizando a identidade matemática do exponencial, temos

$$\mathbf{y}(\tau) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\left(\mathbf{I} + \frac{(\tau - \tau_0)}{N}\mathbf{A} \right) \right]^N \mathbf{y}(\tau_0) = e^{\mathbf{A}(\tau - \tau_0)} \mathbf{y}(\tau_0). \quad (\text{A.4})$$

O propagador tem a forma exponencial representada em (A.4), desta forma a notação utilizada é

$$\mathbf{P}(\tau, \tau_0) = e^{\mathbf{A}(\tau - \tau_0)}. \quad (\text{A.5})$$

Portanto, substituindo a notação em (A.4), temos

$$\mathbf{y}(\tau) = \mathbf{P}(\tau, \tau_0)\mathbf{y}(\tau_0), \quad (\text{A.6})$$

que representa a grande potencialidade dos propagadores em transformar condições iniciais $\mathbf{y}(\tau_0)$ em soluções $\mathbf{y}(\tau)$ num tempo arbitrário τ . Devido a forma exponencial o propagador satisfaz a equação

$$\frac{d\mathbf{P}}{d\tau} = \mathbf{A}\mathbf{P}, \quad (\text{A.7})$$

com a condição inicial $\mathbf{P}(\tau_0, \tau_0) = \mathbf{I}$. As propriedades dos propagadores que seguem a sua definição

1. $\mathbf{P}(\tau, \tau_0) = \mathbf{P}(\tau, \xi)\mathbf{P}(\xi, \tau_0)$
2. $\mathbf{P}(\tau_0, \tau) = \mathbf{P}^{-1}(\tau, \tau_0) = e^{-\mathbf{A}(\tau-\tau_0)}$.

Depois da definição do propagador será explorado a solução do caso em que o sistema de equações diferenciais não seja homogêneo, o qual tem a forma

$$\frac{d\mathbf{y}}{d\tau} = \mathbf{A}\mathbf{y}(\tau) + \mathbf{f}(\tau). \quad (\text{A.8})$$

A solução tem a forma

$$\mathbf{y}(\tau) = \mathbf{P}(\tau, \tau_0)\mathbf{y}_0 + \int_{\tau_0}^{\tau} \mathbf{P}(\tau, \xi)\mathbf{f}(\xi)d\xi, \quad (\text{A.9})$$

que será verificada operando matematicamente até ser alcançado (A.8). Portanto, ao diferenciar a solução por τ , temos

$$\frac{d\mathbf{y}(\tau)}{d\tau} = \frac{d\mathbf{P}(\tau, \tau_0)}{d\tau}\mathbf{y}_0 + \frac{d}{d\tau} \int_{\tau_0}^{\tau} \mathbf{P}(\tau, \xi)\mathbf{f}(\xi)d\xi. \quad (\text{A.10})$$

Usando a regra da integral de Leibniz, a definição do propagador e $\mathbf{P}(\tau, \tau) = \mathbf{I}$, temos as igualdades

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{y}(\tau)}{d\tau} &= \mathbf{A}(\tau)\mathbf{P}(\tau, \tau_0)\mathbf{y}_0 + \mathbf{P}(\tau, \tau)\mathbf{f}(\tau) + \int_{\tau_0}^{\tau} \frac{d\mathbf{P}(\tau, \xi)}{d\tau}\mathbf{f}(\xi)d\xi \\ &= \mathbf{A}(\tau)\mathbf{P}(\tau, \tau_0)\mathbf{y}_0 + \mathbf{P}(\tau, \tau)\mathbf{f}(\tau) + \mathbf{A}(\tau) \int_{\tau_0}^{\tau} \mathbf{P}(\tau, \xi)\mathbf{f}(\xi)d\xi \\ &= \mathbf{A}(\tau) \left[\mathbf{P}(\tau, \tau_0)\mathbf{y}_0 + \int_{\tau_0}^{\tau} \mathbf{P}(\tau, \xi)\mathbf{f}(\xi)d\xi \right] + \mathbf{f}(\tau) \\ &= \mathbf{A}\mathbf{y}(\tau) + \mathbf{f}(\tau). \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Na implementação, a solução (A.9) não é conveniente, então, é necessário promover algumas alterações. Usando a primeira propriedade dos propagadores pode ser utilizada a

identidade $\mathbf{P}(\tau, \xi) = \mathbf{P}(\tau, \tau_0)\mathbf{P}(\tau_0, \xi)$ e substituindo na solução, temos

$$\begin{aligned}\mathbf{y}(\tau) &= \mathbf{P}(\tau, \tau_0)\mathbf{y}_0 + \int_{\tau_0}^{\tau} \mathbf{P}(\tau, \tau_0)\mathbf{P}(\tau_0, \xi)\mathbf{f}(\xi)d\xi, \\ \mathbf{y}(\tau) &= \mathbf{P}(\tau, \tau_0)\mathbf{y}_0 + \mathbf{P}(\tau, \tau_0) \int_{\tau_0}^{\tau} \mathbf{P}(\tau_0, \xi)\mathbf{f}(\xi)d\xi.\end{aligned}$$

Usando a segunda propriedade temos

$$\mathbf{y}(\tau) = \mathbf{P}(\tau, \tau_0) \left[\mathbf{y}_0 + \int_{\tau_0}^{\tau} \mathbf{P}^{-1}(\xi, \tau_0)\mathbf{f}(\xi)d\xi \right]. \quad (\text{A.12})$$

A.2 Sistemas em que $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\tau)$

Neste caso, a matriz dos coeficientes $\mathbf{A}(\tau)$ não é constante, assim o sistema de equação tem a forma

$$\frac{d\mathbf{y}}{d\tau} = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{f}. \quad (\text{A.13})$$

Com a definição do propagador, temos

$$\frac{d\mathbf{P}}{d\tau} = \mathbf{A}(\tau)\mathbf{P}, \quad (\text{A.14})$$

com a condição inicial $\mathbf{P}(\tau_0, \tau_0) = \mathbf{I}$. O procedimento para encontrar a expressão do propagador neste caso, é de particionar o intervalo (τ, τ_0) em N intervalos de medida $\Delta\tau = (\tau - \tau_0)/N$ e posteriormente analisar apenas uma partição para depois alcançar uma expressão mais geral. Assim, linearizando o i -ésimo intervalo

$$\mathbf{y}(\tau_i + \Delta\tau) = (\mathbf{I} + \Delta\tau\mathbf{A}(\tau_i))\mathbf{y}(\tau) + \mathcal{O}(\Delta^2). \quad (\text{A.15})$$

O operador $(\mathbf{I} + \Delta\tau\mathbf{A}(\tau_i))$ é o gerador de transformações infinitesimais. A aproximação para o propagador em um intervalo (τ, τ_0) pode ser construída a partir de transformações infinitesimais na forma

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(\tau) &= \left[\prod_{i=1}^{N-1} (\mathbf{I} + \Delta\tau\mathbf{A}(\tau_i)) \right] \mathbf{y}(\tau_0) + \mathcal{O}(\Delta^2), \\ \mathbf{y}(\tau) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\prod_{i=1}^{N-1} \left(\mathbf{I} + \frac{(\tau - \tau_0)}{N} \mathbf{A}(\tau_i) \right) \right] \mathbf{y}(\tau_0), \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

então

$$\mathbf{y}(\tau) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\prod_{i=1}^{N-1} e^{\mathbf{A}(\tau_i)(\tau - \tau_0)} \right] \mathbf{y}(\tau_0). \quad (\text{A.17})$$

Portanto o propagador (A.14) é a sucessão de propagadores.

A.3 Aplicação ao sistema Hamiltoniano

O sistema de equações que governa a trajetória do raio de acordo com o formalismo hamiltoniano pode ser representado

$$\frac{d\mathbf{w}}{d\tau} = \mathbf{J}\nabla_{\mathbf{w}}\mathcal{H}, \quad (\text{A.18})$$

em que

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{s} \end{bmatrix}$$

e $\mathcal{H}(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = 0$. No sistema \mathbf{x} é a posição e \mathbf{s} é a vagarosidade. A matriz \mathbf{J} é denominada de simplética, sua definição parte da identidade \mathbf{I} de ordem n . É representada como

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.19})$$

Assim a matriz simplética é de ordem $2n$. Suas propriedades, algumas necessárias para o cálculo do propagador inverso, são listadas abaixo.

1. $\mathbf{J}^T \mathbf{J} = \mathbf{I}$;
2. $\mathbf{J}^{-1} = \mathbf{J}^T$;
3. $\mathbf{J} \mathbf{J} = -\mathbf{I}$;
4. $|\mathbf{J}| = +1$.

A.4 Sistema Hamiltoniano paraxial

O sistema paraxial é responsável por determinar a perturbação do sistema hamiltoniano em torno de uma trajetória de referência $\mathbf{w}(\tau)$. Aplicando a relação (A.18) na hamiltoniana desenvolvida em série de Taylor, temos

$$\frac{d(\mathbf{w} + \Delta\mathbf{w})}{d\tau} = \mathbf{J}\nabla_{\mathbf{w}} \left(\mathcal{H} + \nabla_{\mathbf{w}}^T \mathcal{H} \Delta\mathbf{w} + \mathcal{O}(\Delta^2) \right). \quad (\text{A.20})$$

Ao considerar apenas as perturbações de primeira ordem e promover a alteração de $\Delta\mathbf{w}$ por $\delta\mathbf{w}$, temos o sistema de equações que regem as perturbações dos raios,

$$\frac{d\delta\mathbf{w}}{d\tau} = \mathbf{J}\nabla_{\mathbf{w}} \nabla_{\mathbf{w}}^T \mathcal{H} \delta\mathbf{w} + \mathcal{O}(\Delta^2), \quad (\text{A.21})$$

o qual tem a mesma forma de

$$\frac{d\mathbf{y}}{d\tau} = \mathbf{A}(\tau) \mathbf{y}, \quad (\text{A.22})$$

onde

$$\mathbf{A}(\tau) = \mathbf{J}\nabla_{\mathbf{w}} \nabla_{\mathbf{w}}^T \mathcal{H} \quad (\text{A.23})$$

e $\mathbf{y} = \delta\mathbf{w}$. Devido ao objetivo de calcular o propagador inverso, algumas propriedades das matrizes Hessiana $\nabla_{\mathbf{w}} \nabla_{\mathbf{w}}^T \mathcal{H}$ e simplética serão explicitadas abaixo

1.

$$\left(\nabla_{\mathbf{w}} \nabla_{\mathbf{w}}^T \mathcal{H} \right)^T = \nabla_{\mathbf{w}} \nabla_{\mathbf{w}}^T \mathcal{H};$$

2.

$$\mathbf{J}\mathbf{A} = -\nabla_{\mathbf{w}} \nabla_{\mathbf{w}}^T \mathcal{H};$$

3.

$$\mathbf{A}^T \mathbf{J}^T = -\nabla_{\mathbf{w}} \nabla_{\mathbf{w}}^T \mathcal{H} = \mathbf{J}\mathbf{A};$$

4. pós-multiplicando a expressão acima por $\mathbf{J}^T \mathbf{J} = \mathbf{I}$

$$-\mathbf{A}^T \mathbf{J} = -\nabla_{\mathbf{w}} \nabla_{\mathbf{w}}^T \mathcal{H} = \mathbf{J}\mathbf{A};$$

5.

$$\mathbf{J}^T \mathbf{A}^T \mathbf{J} = \mathbf{J} \mathbf{A}^T \mathbf{J}^T = -\mathbf{J} \nabla_{\mathbf{w}} \nabla_{\mathbf{w}}^T \mathcal{H} = -\mathbf{A}.$$

A.5 Cálculo do inverso do propagador

Considerando translações infinitesimais, temos a representação

$$\mathbf{P}(\tau + \delta\tau, \tau) = \mathbf{I} + \delta\tau \mathbf{A}(\tau) \quad (\text{A.24})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^{-1}(\tau + \delta\tau, \tau) &= \mathbf{I} - \delta\tau \mathbf{A}(\tau) \\ &= \mathbf{I} + \delta\tau \mathbf{J} \mathbf{A}^T(\tau) \mathbf{J}^T \\ &= \mathbf{J} \left[\mathbf{I} + \delta\tau \mathbf{A}^T(\tau) \right] \mathbf{J}^T \\ &= \mathbf{J} \mathbf{P}^T(\tau + \delta\tau, \tau) \mathbf{J}^T. \end{aligned}$$

Com as considerações feitas para a representação de (A.16), esta relação é válida para qualquer propagador em um intervalo (τ, τ_0) , assim a representação do propagador inverso pode ser feita na forma

$$\mathbf{P}^{-1}(\tau, \tau_0) = \mathbf{J} \mathbf{P}^T(\tau, \tau_0) \mathbf{J}^T. \quad (\text{A.25})$$

Alternativamente pode ser representado

$$\mathbf{P}^{-1}(\tau + \delta\tau, \tau) = e^{\mathbf{A}(\tau)\delta\tau}. \quad (\text{A.26})$$

Da mesma forma

$$\mathbf{P}(\tau, \tau + \delta\tau) = e^{-\mathbf{A}(\tau)\delta\tau} = e^{\mathbf{J} \mathbf{A}^T(\tau) \mathbf{J}^T \delta\tau} = \mathbf{J} e^{\mathbf{A}^T(\tau)\delta\tau} \mathbf{J} = \mathbf{J} \mathbf{P}^T(\tau + \delta\tau, \tau) \mathbf{J}^T. \quad (\text{A.27})$$

Portanto, a propriedade (A.25) é utilizada na avaliação de (A.12).