



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ  
INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM GEOFÍSICA**

**TESE DE DOUTORADO**

**Estimativa de Parâmetros em Meios VTI  
usando aproximações de sobretempo não  
hiperbólicas**

**RUBENVALDO MONTEIRO PEREIRA**

BELÉM

2015

**RUBENVALDO MONTEIRO PEREIRA**

**Estimativa de Parâmetros em Meios VTI usando aproximações de sobretempo não hiperbólicas**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Geofísica da Universidade Federal do Pará como requisito parcial a obtenção do título de Doutor em Geofísica.

Orientador João Carlos Ribeiro Cruz

BELÉM

2015

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)  
Biblioteca do Instituto de Geociências/SIBI/UFPA

---

Pereira, Rubenvaldo Monteiro, 1972-

Estimativa de parâmetros em meios VTI usando aproximações de sobretempo não hiperbólicas / Rubenvaldo Monteiro Pereira. – 2015  
91 f. : il. ; 29 cm

Inclui bibliografias

Orientador: João Carlos Ribeiro Cruz

Tese (Doutorado) – Universidade Federal do Pará, Instituto de Geociências, Programa de Pós-Graduação em Geofísica, Belém, 2015.

1. Inversão (Geofísica). 2. Anisotropia. 3. Velocidade. I. Título.

CDD 22. ed. 550

---

# RUNBELVADO MONTEIRO PEREIRA

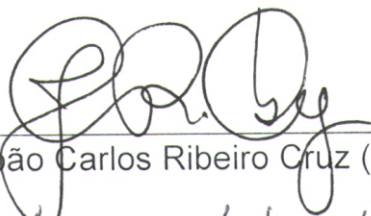
## Estimava de Parâmetros em Meios VTI Usando Aproximações de Sobretempo Não Hiperbólicas

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Geofísica do Instituto de Geociências da Universidade Federal do Pará – UFPA, em cumprimento às exigências para obtenção do grau de Doutor em Geofísica.

Data de aprovação: 30/09/2015

Conceito: Excelente

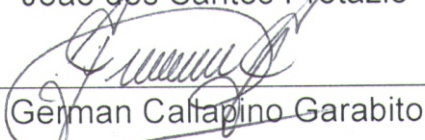
Banca examinadora:



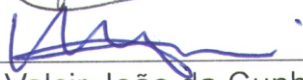
João Carlos Ribeiro Cruz (Orientador)



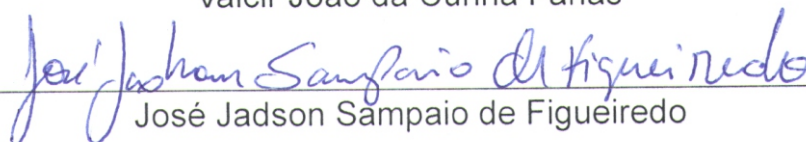
João dos Santos Protázio



German Callapino Garabito



Valcir João da Cunha Farias



José Jadson Sampaio de Figueiredo

*Dedico à minha família,  
uma benção de Deus para minha vida.*

## AGRADECIMENTOS

A Deus, por intermédio de Jesus Cristo, pelo dom da vida.

Ao meu orientador, Prof. Dr. João Carlos Ribeiro Cruz, pela sugestão do tema de pesquisa, pela dedicação e paciência nas orientações para elaboração e conclusão deste trabalho.

Ao meu co-orientador Prof. Dr. João dos Santos Protázio, por sua imensurável contribuição à minha formação durante mais esta etapa de minha vida acadêmica, o qual tem sido para mim "...amigo mais chegado que um irmão".

Ao Prof. Dr. Doriedson Rodrigues, coordenador do campus Tocantins/Cametá-UFPa, por todo o apoio e incentivo para realização deste curso.

Ao corpo docente, técnicos e administrativos do CPGf/IG/UFPa por terem propiciado os meios para a realização deste trabalho, em especial às secretárias do curso, Benildes Lopes Rodrigues de Souza e Lucibela Cardias Soares.

Aos colegas Prof. Dr. Francisco de Souza Oliveira, Dr. Wildney Wallacy da Silva Vieira e Doutorando Andrei Gomes de Oliveira, pelo companheirismo durante o curso. A todos os colegas do curso que direta e indiretamente contribuíram para a elaboração deste.

Aos membros da banca examinadora: Prof. Dr. João Carlos Ribeiro Cruz, Prof. Dr. João dos Santos Protázio, Prof. Dr. German Garabito, Prof. Dr. Valcir João da Cunha Farias e Prof. Dr. José Jadson Sampaio de Figueiredo, pelas considerações e sugestões para o enriquecimento deste.

A minha querida e amada mãe, Maria do Carmo Monteiro Pereira, maior exemplo de amor e fé, pelos sábios conselhos e principalmente pelas orações.

À minha amada esposa Aida e aos meus filhos Letícia e Daniel, motivos de minha insistência, pelo amor e carinho dispensado nos momentos mais difíceis desta trajetória.

A todos os meus familiares, pois propiciaram as condições necessárias para que pudesse estudar e chegar até aqui.

*O temor do Senhor é limpo, e permanece para sempre;  
os juízos do Senhor são verdadeiros e inteiramente justos.*

*Mais desejáveis são do que o ouro, sim, do que  
muito ouro fino; e mais doces do que o mel e o que  
goteja dos favos. (Salmos 19.9-10)*

# RESUMO

Meios transversalmente isotrópicos (TI) representam um modelo mais realístico para processamento de dados sísmicos, por exemplo, em meios fraturados com direção de fratura preferencial ou meios composto de finas camadas. Em especial, os meios TI com eixo de simetria vertical (VTI) são amplamente usados como modelos para propagação de ondas  $qP$  em folhelhos, rocha abundante em reservatórios de hidrocarbonetos. Contudo, a propagação de onda  $qP$ , em meios homogêneos VTI, tem como características, depender de quatro parâmetros de rigidez e, também, por possuir: equação de velocidade de fase algebricamente complicada, equação de velocidade de grupo difícil de explicitar, e equação *moveout* não hiperbólica. Por isso, vários autores tem apresentado reparametrizações e obtido aproximações para estas equações dependendo somente de três parâmetros. Dentre estas, as aproximações de sobretempo têm sido amplamente usadas em métodos inversos para estimar parâmetros litológicos em meios homogêneos VTI. Tais métodos têm, em geral, obtido sucesso na estimativa da velocidade de empilhamento *normal moveout*  $v_n$  e do parâmetro de anelipticidade  $\eta$ , pois somente estes são necessários para se gerar modelos iniciais, para realizar as fases do processamento no domínio do tempo. Um dos métodos mais utilizados para se estimar parâmetros é a análise de velocidade baseada em semblance, porém, devido este método ser limitado a seções com pequena razão *offset*-profundidade, adaptações para meios anisotrópicos, considerando aproximações de sobretempo não hiperbólicas, são necessárias. Outra limitação da medida semblance é sua perda de precisão sob grandes variações na amplitude com o afastamento e sob inversão de fase. Devido a isto, vários autores têm modificado a medida semblance como formas de compensar estas variações. Neste trabalho, baseado na aproximação anelíptica *shifted-hyperbola*, apresento aproximações anelípticas racionais para as velocidades de fase e grupo, bem como aproximações de sobretempo não hiperbólicas, em meios homogêneos VTI, horizontalmente estratificados. A validade destas aproximações é feita comparando os respectivos erros relativos destas aproximações aos erros relativos de outras aproximações conhecidas da literatura. Análise de velocidades baseada em semblance é realizada para aferir a precisão das aproximações racionais de sobretempo na estimativa de parâmetros em meios VTI. Os resultados obtidos demonstram o grande potencial das aproximações racionais em problemas inversos. Visando adaptar para meios VTI, nós modificamos duas medidas de coerência por semblance, as quais são sensíveis à variações de amplitude e fase. A precisão e robustez das medidas de coerência adaptadas são validadas estimando parâmetros anisotrópicos em meios VTI.

**Palavras-chave:** Anisotropia. Análise de velocidades. Inversão.



# ABSTRACT

Transversely isotropic (TI) media is a more realistic model for processing seismic data, for example, fractured media with preferred fracture direction, or composite by periodic thin layers. In particular, TI media with vertical symmetry axis (VTI) are widely used as models for P-wave propagation in shales, abundant rock in hydrocarbon reservoirs. However, the P-wave propagation in homogeneous media VTI have as their main characteristics, depend on four parameters of rigidity and also to possess: complicated algebraically phase velocity equation, difficult group velocity equation to explain and moveout equation nonhyperbolic. Therefore, several authors have presented parameterization and obtained approximations to these equations depending on three parameters only. Among these, the moveout approximations have been widely used in inverse methods to estimate lithological parameters in homogeneous media VTI. Such methods have generally been successful in estimated stacking velocity  $v_n$  and the anellipticity parameter  $\eta$ , since these are the only ones required for generating initial models for the steps of seismic processing in the time domain. One of the most used methods for estimating parameters is the based-semblance velocity analysis, though, because this method is limited to sections with small offset-depth ratio, adaptations for anisotropic media, considering nonhyperbolic moveout approximations are required. In this paper, based on anelliptical approximation shifted hyperbola, anelliptical rational approximations are presented for: phase velocity, group velocity and moveout nonhyperbolic in homogeneous VTI horizontally layered media. The validity of these approximations is made by calculating their relative errors by comparing with other known approximations in the literature. To semblance-based velocity analysis is performed to measure the accuracy of the rational moveout approximations to estimate parameters in VTI media. The results demonstrate the great potential of rational approximations in inverse problems. In order to adapt to VTI media, we modify two coherence measurements by semblance which are sensitive to amplitude and phase variations. The accuracy and robustness of the adapted coherence measurements are validated by estimation of in anisotropic parameters in VTI media.

**Keywords:** Anisotropy. Velocity analysis. Inversion.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 2.1 – Dois sistemas de fraturas verticais paralelas, com vetores normais formando ângulos $\phi_1$ e $\phi_2$ com o eixo $x_1$ , respectivamente, gerando um meio monoclinico efetivo. . . . .	27
Figura 2.2 – Modelo ortorrômbico causado pela combinação de fraturas verticais paralelas com isotropia transversa vertical. . . . .	29
Figura 2.3 – Modelo VTI causado por finas camadas. . . . .	30
Figura 2.4 – Modelo HTI causado por finas camadas. . . . .	30
Figura 3.1 – Velocidade de fase das ondas: P (curva azul), SV (tracejado vermelho) e SH (ponto-tracejado verde), no plano de simetria $xz$ , obtida no folhelho VTI Greenhorn. . . . .	34
Figura 3.2 – Vagariosidade das ondas: P (curva azul), SV (tracejado vermelho) e SH (ponto-tracejado verde), no plano de simetria $xz$ , obtida no folhelho VTI Greenhorn. . . . .	34
Figura 3.3 – Erro relativo das aproximações de velocidade de fase: Ponto Azul - anisotropia fraca, Ponto verde - anelítica de Muir, Linha vermelha - <i>shifted-hyperbola</i> , Ponto preto - Padé [1/1], Ponto-traço preto - Padé [2/1], Tracejado preto - Padé [2/2]. . . . .	39
Figura 3.4 – Velocidade de grupo das ondas: P (curva azul), SV (tracejado vermelho) e SH (ponto-tracejado verde), no plano de simetria $xz$ , obtida no folhelho VTI Greenhorn. . . . .	39
Figura 3.5 – Erro relativo das aproximações de velocidade de fase: Ponto Azul - anisotropia fraca, Ponto verde - anelítica de Muir, Linha vermelha - <i>shifted-hyperbola</i> , Ponto preto - Padé [1/1], Ponto-traço preto - Padé [2/1], Tracejado preto - Padé [2/2]. . . . .	42
Figura 4.1 – Modelo de subsuperfície em camadas horizontais. . . . .	44
Figura 4.2 – Geometria da aproximação de sobretempo, com a curva contínua representando a exata e as tracejadas a de Dix e suas assíntotas. . . . .	44
Figura 4.3 – Geometria da aproximação de sobretempo, com a curva contínua representando a exata e as tracejadas a <i>shifted hyperbola</i> e suas assíntotas. . . . .	46
Figura 4.4 – Erro relativo das aproximações de sobretempo: linha vermelha - <i>shifted-hyperbola</i> e tracejado preto - Expansão de Taylor da <i>shifted-hyperbola</i> . . . . .	49
Figura 4.5 – Erro relativo das aproximações de sobretempo: Ponto azul - Alkhalifah-Tsvankin-Thomsen, ponto verde - Muir, linha vermelha - <i>shifted-hyperbola</i> , Ponto preto - Padé [1/1], Ponto-traço preto - Padé [2/1], Tracejado preto - Padé [2/2]. . . . .	50

Figura 4.6	– Erro absoluto das aproximações de sobretempo: Ponto azul - Alkhalifah-Tsvankin-Thomsen, linha vermelha - <i>shifted-hyperbola</i> , Ponto preto - Padé [1/1], Ponto-traço preto - Padé [2/1], Tracejado preto - Padé [2/2].	53
Figura 5.1	– Ilustração da janela de dados do funcional semblance. . . . .	55
Figura 5.2	– CMP sintético obtido do folhelho VTI Greenhorn. . . . .	56
Figura 5.3	– Mapa semblance $v_{P_n}$ versus $v_{P_x}$ , usando as curvas de sobretempo: (a) <i>Shifted hyperbola</i> 4.23, (b) Padé [1/1] 4.25, (c) Padé [2/1] 4.26 e (d) Padé [2/2] 4.27, para estimar estas velocidades e o parâmetros $\eta$ no folhelho VTI Greenhorn para $x/z = 1, 5$ . Círculo amarelo - valor exato e círculo branco - valor aproximado. . . . .	57
Figura 5.4	– Mapa semblance $v_{P_n}$ versus $v_{P_x}$ , usando as curvas de sobretempo: (a) <i>Shifted hyperbola</i> 4.23, (b) Padé [1/1] 4.25, (c) Padé [2/1] 4.26 e (d) Padé [2/2] 4.27, para estimar estas velocidades e o parâmetros $\eta$ no folhelho VTI Greenhorn para $x/z = 4, 0$ . Círculo amarelo - valor exato e círculo branco - valor aproximado. . . . .	58
Figura 5.5	– Valores estimados da velocidade $v_{P_n}$ , como função da razão $x/z$ , obtidos de análise de velocidades com as curvas de sobretempo: Tsvankin-Thomsen (4.20) - Asterisco azul, <i>shifted hyperbola</i> (4.23) - Ponto vermelho, Padé [1/1] (4.25) - círculo magenta, Padé [2/1] (4.26) - losango ciano e Padé [2/2] (4.27) - cruz preta. . . . .	59
Figura 5.6	– Valores estimados da velocidade $v_{P_x}$ , como função da razão $x/z$ , obtidos de análise de velocidades com as curvas de sobretempo: Tsvankin-Thomsen (4.20) - Asterisco azul, <i>shifted hyperbola</i> (4.23) - Ponto vermelho, Padé [1/1] (4.25) - círculo magenta, Padé [2/1] (4.26) - losango ciano e Padé [2/2] (4.27) - cruz preta. . . . .	59
Figura 5.7	– Valores estimados da velocidade $\eta$ , como função da razão $x/z$ , obtidos de análise de velocidades com as curvas de sobretempo: Tsvankin-Thomsen (4.20) - Asterisco azul, <i>shifted hyperbola</i> (4.23) - Ponto vermelho, Padé [1/1] (4.25) - círculo magenta, Padé [2/1] (4.26) - losango ciano e Padé [2/2] (4.27) - cruz preta. . . . .	60
Figura 5.8	– Valores de máximo semblance, como função da razão $x/z$ , obtidos de análise de velocidades com as curvas de sobretempo: Tsvankin-Thomsen (4.20) - Asterisco azul, <i>shifted hyperbola</i> (4.23) - Ponto vermelho, Padé [1/1] (4.25) - círculo magenta, Padé [2/1] (4.26) - losango ciano e Padé [2/2] (4.27) - cruz preta. . . . .	60
Figura 5.9	– Sismograma sintético de ondas refletidas P gerados por traçamento de raio com o modelo de subsuperfície dados na tabela 5.3. . . . .	62

Figura 5.10 – Mapa semblance $v_{Pn}$ versus $v_{Px}$ , usando a curva de sobretempo Padé [2/1] (4.35), para estimar as velocidades $v_{Pn}$ e $v_{Px}$ , e o parâmetro $\eta$ nas camadas do modelo VTI da Tabela 5.3 para $x/z = 2, 0$ . Círculo amarelo - valor exato e círculo branco - valor aproximado. . . . .	63
Figura 5.11 – Erro relativo dos valores estimados de: (a) $v_{Pn}$ , (b) $v_{Px}$ , bem como o erro absoluto dos valores estimados de (c) $\eta$ , e (d) valor de máximo semblance, em função da razão $x/z$ para a primeira camada, do experimento em camadas VTI, obtido com as aproximações: Tsvankin-Thomsen (4.20) - Asterisco azul, <i>shifted hyperbola</i> (4.23) - Ponto vermelho, Padé [1/1] (4.25) - círculo magenta e Padé [2/1] (4.26) - losango ciano. . . . .	65
Figura 5.12 – Erro relativo dos valores estimados de: (a) $v_{Pn}$ , (b) $v_{Px}$ , bem como o erro absoluto dos valores estimados de (c) $\eta$ , e (d) valor de máximo semblance, em função da razão $x/z$ para a segunda camada, do experimento em camadas VTI, obtido com as aproximações: Tsvankin-Thomsen (4.20) - Asterisco azul, <i>shifted hyperbola</i> (4.23) - Ponto vermelho, Padé [1/1] (4.25) - círculo magenta e Padé [2/1] (4.26) - losango ciano. . . . .	66
Figura 5.13 – Erro relativo dos valores estimados de: (a) $v_{Pn}$ , (b) $v_{Px}$ , bem como o erro absoluto dos valores estimados de (c) $\eta$ , e (d) valor de máximo semblance, em função da razão $x/z$ para a terceira camada, do experimento em camadas VTI, obtido com as aproximações: Tsvankin-Thomsen (4.20) - Asterisco azul, <i>shifted hyperbola</i> (4.23) - Ponto vermelho, Padé [1/1] (4.25) - círculo magenta e Padé [2/1] (4.26) - losango ciano. . . . .	67
Figura 5.14 – Erro relativo dos valores estimados de: (a) $v_{Pn}$ , (b) $v_{Px}$ , bem como o erro absoluto dos valores estimados de (c) $\eta$ , e (d) valor de máximo semblance, em função da razão $x/z$ para a quarta camada, do experimento em camadas VTI, obtido com as aproximações: Tsvankin-Thomsen (4.20) - Asterisco azul, <i>shifted hyperbola</i> (4.23) - Ponto vermelho, Padé [1/1] (4.25) - círculo magenta e Padé [2/1] (4.26) - losango ciano. . . . .	68
Figura 5.15 – CMP sintético (a) sem ruído, (b) com razão sinal-ruído igual a 15 e (c) com razão sinal-ruído igual a 5, obtido no folhelho VTI Greenhorn para $x/z = 4, 0$ . . . . .	70

- Figura 5.16 – Mapa semblance  $v_{P_n}$  versus  $v_{P_x}$ , usando as curvas de sobretempo: (a) *Shifted hyperbola* (4.23), (b) Padé [1, 1] (4.25), (c) Padé [2, 1] (4.26) e (d) Padé [2, 2] (4.27), para estimar estas velocidades e o parâmetros  $\eta$  em dados com variação AVO e sem ruído, obtidos no folhelho VTI Greenhorn para  $x/z = 4, 0$ . Círculo vermelho - valor exato e losango branco - valor aproximado. . . . . 71
- Figura 5.17 – Mapa AK-semblance  $v_{P_n}$  versus  $v_{P_x}$ , usando as curvas de sobretempo: (a) *Shifted hyperbola* (4.23), (b) Padé [1, 1] (4.25), (c) Padé [2, 1] (4.26) e (d) Padé [2, 2] (4.27), para estimar estas velocidades e o parâmetro  $\eta$  em dados com variação AVO e sem ruído, obtidos no folhelho VTI Greenhorn, para  $x/z = 1, 5$ . Círculo amarelo - valor exato e losango branco - valor aproximado. . . . . 72
- Figura 5.18 – Mapa AK-semblance  $v_{P_n}$  versus  $v_{P_x}$ , usando as curvas de sobretempo: (a) *Shifted hyperbola* (4.23), (b) Padé [1, 1] (4.25), (c) Padé [2, 1] (4.26) e (d) Padé [2, 2] (4.27), para estimar estas velocidades e o parâmetro  $\eta$  em dados com variação AVO e sem ruído, obtidos no folhelho VTI Greenhorn, para  $x/z = 4, 0$ . Círculo amarelo - valor exato e losango branco - valor aproximado. . . . . 73
- Figura 5.19 – Mapa AK-semblance  $v_{P_n}$  versus  $v_{P_x}$ , usando as curvas de sobretempo: (a) *Shifted hyperbola* (4.23), (b) Padé [1, 1] (4.25), (c) Padé [2, 1] (4.26) e (d) Padé [2, 2] (4.27), para estimar estas velocidades e o parâmetros  $\eta$  em dados com variação AVO e  $s/n = 15$ , obtidos no folhelho VTI Greenhorn para  $x/z = 1, 5$ . Círculo amarelo - valor exato e losango branco - valor aproximado. . . . . 74
- Figura 5.20 – Mapa AK-semblance  $v_{P_n}$  versus  $v_{P_x}$ , usando as curvas de sobretempo: (a) *Shifted hyperbola* (4.23), (b) Padé [1, 1] (4.25), (c) Padé [2, 1] (4.26) e (d) Padé [2, 2] (4.27), para estimar estas velocidades e o parâmetros  $\eta$  em dados com variação AVO e  $s/n = 5$ , obtidos no folhelho VTI Greenhorn para  $x/z = 1, 5$ . Círculo amarelo - valor exato e losango branco - valor aproximado. . . . . 75
- Figura 5.21 – Mapa AK-semblance  $v_{P_n}$  versus  $v_{P_x}$ , usando as curvas de sobretempo: (a) *Shifted hyperbola* (4.23), (b) Padé [1, 1] (4.25), (c) Padé [2, 1] (4.26) e (d) Padé [2, 2] (4.27), para estimar estas velocidades e o parâmetros  $\eta$  em dados com variação AVO e  $s/n = 15$ , obtidos no folhelho VTI Greenhorn para  $x/z = 4, 0$ . Círculo amarelo - valor exato e losango branco - valor aproximado. . . . . 76

Figura 5.22 – Mapa AK-semblance $v_{P_n}$ versus $v_{P_x}$ , usando as curvas de sobretempo: (a) <i>Shifted hyperbola</i> (4.23), (b) Padé [1, 1] (4.25), (c) Padé [2, 1] (4.26) e (d) Padé [2, 2] (4.27), para estimar estas velocidades e o parâmetros $\eta$ em dados com variação AVO e $s/n = 5$ , obtidos no folhelho VTI Greenhorn para $x/z = 4, 0$ . Círculo amarelo - valor exato e losango branco - valor aproximado. . . . .	77
Figura 5.23 – Mapa semblance SVD $v_{P_n}$ versus $v_{P_x}$ , usando as curvas de sobretempo: (a) <i>Shifted hyperbola</i> (4.23), (b) Padé [1, 1] (4.25), (c) Padé [2, 1] (4.26) e (d) Padé [2, 2] (4.27), para estimar estas velocidades e o parâmetro $\eta$ em dados com variação AVO e sem ruído, obtidos no folhelho VTI Greenhorn, para $x/z = 1, 5$ . Círculo amarelo - valor exato e losango branco - valor aproximado. . . . .	80
Figura 5.24 – Mapa semblance SVD $v_{P_n}$ versus $v_{P_x}$ , usando as curvas de sobretempo: (a) <i>Shifted hyperbola</i> (4.23), (b) Padé [1, 1] (4.25), (c) Padé [2, 1] (4.26) e (d) Padé [2, 2] (4.27), para estimar estas velocidades e o parâmetro $\eta$ em dados com variação AVO e sem ruído, obtidos no folhelho VTI Greenhorn, para $x/z = 4, 0$ . Círculo amarelo - valor exato e losango branco - valor aproximado. . . . .	81
Figura 5.25 – Mapa semblance SVD $v_{P_n}$ versus $v_{P_x}$ , usando as curvas de sobretempo: (a) <i>Shifted hyperbola</i> (4.23), (b) Padé [1, 1] (4.25), (c) Padé [2, 1] (4.26) e (d) Padé [2, 2] (4.27), para estimar estas velocidades e o parâmetro $\eta$ em dados com variação AVO e com $s/n = 15$ , obtidos no folhelho VTI Greenhorn, para $x/z = 1, 5$ . Círculo amarelo - valor exato e losango branco - valor aproximado. . . . .	82
Figura 5.26 – Mapa semblance SVD $v_{P_n}$ versus $v_{P_x}$ , usando as curvas de sobretempo: (a) <i>Shifted hyperbola</i> (4.23), (b) Padé [1, 1] (4.25), (c) Padé [2, 1] (4.26) e (d) Padé [2, 2] (4.27), para estimar estas velocidades e o parâmetro $\eta$ em dados com variação AVO e com $s/n = 15$ , obtidos no folhelho VTI Greenhorn, para $x/z = 4, 0$ . Círculo amarelo - valor exato e losango branco - valor aproximado. . . . .	83
Figura 5.27 – Mapa semblance SVD $v_{P_n}$ versus $v_{P_x}$ , usando as curvas de sobretempo: (a) <i>Shifted hyperbola</i> (4.23), (b) Padé [1, 1] (4.25), (c) Padé [2, 1] (4.26) e (d) Padé [2, 2] (4.27), para estimar estas velocidades e o parâmetro $\eta$ em dados com variação AVO e com $s/n = 5$ , obtidos no folhelho VTI Greenhorn, para $x/z = 1, 5$ . Círculo amarelo - valor exato e losango branco - valor aproximado. . . . .	85

Figura 5.28 – Mapa semblance SVD  $v_{Pn}$  versus  $v_{Px}$ , usando as curvas de sobretempo:
   
 (a) *Shifted hyperbola* (4.23), (b) Padé [1, 1] (4.25), (c) Padé [2, 1] (4.26)
   
 e (d) Padé [2, 2] (4.27), para estimar estas velocidades e o parâmetro  $\eta$ 
  
 em dados com variação AVO e com  $s/n = 5$ , obtidos no folhelho VTI
   
 Greenhorn, para  $x/z = 4, 0$ . Círculo amarelo - valor exato e losango
   
 branco - valor aproximado. . . . . 86

## LISTA DE TABELAS

Tabela 4.1 – Modelo de subsuperfície com quatro camadas homogêneas VTI (GRECHKA; TSVANKIN, 1998). . . . .	52
Tabela 5.1 – Valores do erro relativo nas estimativas das velocidades $v_{Pn}$ , $v_{Px}$ e do parâmetro $\eta$ , e o valor de máximo semblance, obtidos na análise de velocidades no folhelho VTI Greenhorn para $x/z = 1, 5$ . . . . .	57
Tabela 5.2 – Valores do erro relativo nas estimativas das velocidades $v_{Pn}$ , $v_{Px}$ e do parâmetro $\eta$ , e o valor de máximo semblance, obtidos na análise de velocidades no folhelho VTI Greenhorn para $x/z = 4, 0$ . . . . .	58
Tabela 5.3 – Velocidades e parâmetros intervalares exatos do modelo em camadas usado na análise de velocidades. . . . .	62
Tabela 5.4 – Valores do erro relativo nas estimativas das velocidades $v_{Pn}$ e $v_{Px}$ , do erro absoluto do parâmetro $\eta$ , e do valor de máximo semblance, obtidos na análise de velocidades por semblance usando a aproximação não hiperbólicas Padé [2/1], no modelo VTI em camadas para $x/z = 2, 0$ . . . . .	64
Tabela 5.5 – Valores do erro relativo nas estimativas das velocidades $v_{Pn}$ , $v_{Px}$ e do parâmetro $\eta$ estimados e do valor de máximo semblance; obtidos na análise de velocidades, em dados com espalhamento e sem ruído, para o folhelho VTI Greenhorn para $x/z = 4, 0$ . . . . .	69
Tabela 5.6 – Valores do erro relativo nas estimativas das velocidades $v_{Pn}$ , $v_{Px}$ e do parâmetro $\eta$ estimados e do valor de máximo AK-semblance; obtidos na análise de velocidades, em dados com espalhamento e sem ruído, para o folhelho VTI Greenhorn para $x/z = 1, 5$ . . . . .	72
Tabela 5.7 – Valores do erro relativo nas estimativas das velocidades $v_{Pn}$ , $v_{Px}$ e do parâmetro $\eta$ estimados e do valor de máximo AK-semblance; obtidos na análise de velocidades, em dados com variação AVO e sem ruído, para o folhelho VTI Greenhorn para $x/z = 4, 0$ . . . . .	73
Tabela 5.8 – Valores do erro relativo nas estimativas das velocidades $v_{Pn}$ , $v_{Px}$ e do parâmetro $\eta$ estimados, e do valor de máximo AK-semblance; obtidos na análise de velocidades, em dados com variação AVO e $s/n = 15$ , no folhelho VTI Greenhorn para $x/z = 1, 5$ . . . . .	75
Tabela 5.9 – Valores do erro relativo nas estimativas das velocidades $v_{Pn}$ , $v_{Px}$ e do parâmetro $\eta$ estimados, e do valor de máximo AK-semblance; obtidos na análise de velocidades, em dados com variação AVO e $s/n = 5$ , no folhelho VTI Greenhorn para $x/z = 1, 5$ . . . . .	76



Tabela 5.10 – Valores do erro relativo nas estimativas das velocidades $v_{P_n}, v_{P_x}$ e do parâmetro $\eta$ estimados, e do valor de máximo AK-semblance; obtidos na análise de velocidades, em dados com variação AVO e $s/n = 15$ , no folhelho VTI Greenhorn para $x/z = 4, 0$ . . . . .	77
Tabela 5.11 – Valores do erro relativo nas estimativas das velocidades $v_{P_n}, v_{P_x}$ e do parâmetro $\eta$ estimados, e do valor de máximo AK-semblance; obtidos na análise de velocidades, em dados com variação AVO e $s/n = 5$ , no folhelho VTI Greenhorn para $x/z = 4, 0$ . . . . .	78
Tabela 5.12 – Valores do erro relativo nas estimativas das velocidades $v_{P_n}, v_{P_x}$ e do parâmetro $\eta$ estimados e do valor de máximo semblance SVD; obtidos na análise de velocidades, em dados com espalhamento e sem ruído, para o folhelho VTI Greenhorn para $x/z = 1, 5$ . . . . .	80
Tabela 5.13 – Valores do erro relativo nas estimativas das velocidades $v_{P_n}, v_{P_x}$ e do parâmetro $\eta$ estimados e do valor de máximo semblance SVD; obtidos na análise de velocidades, em dados com variação AVO e sem ruído, para o folhelho VTI Greenhorn para $x/z = 4, 0$ . . . . .	81
Tabela 5.14 – Valores do erro relativo nas estimativas das velocidades $v_{P_n}, v_{P_x}$ e do parâmetro $\eta$ estimados e do valor de máximo semblance SVD; obtidos na análise de velocidades, em dados com variação AVO e com $s/n = 15$ , para o folhelho VTI Greenhorn para $x/z = 1, 5$ . . . . .	83
Tabela 5.15 – Valores do erro relativo nas estimativas das velocidades $v_{P_n}, v_{P_x}$ e do parâmetro $\eta$ estimados e do valor de máximo semblance SVD; obtidos na análise de velocidades, em dados com variação AVO e com $s/n = 15$ , para o folhelho VTI Greenhorn para $x/z = 4, 0$ . . . . .	84
Tabela 5.16 – Valores do erro relativo nas estimativas das velocidades $v_{P_n}, v_{P_x}$ e do parâmetro $\eta$ estimados e do valor de máximo semblance SVD; obtidos na análise de velocidades, em dados com variação AVO e com $s/n = 5$ , para o folhelho VTI Greenhorn para $x/z = 1, 5$ . . . . .	84
Tabela 5.17 – Valores do erro relativo nas estimativas das velocidades $v_{P_n}, v_{P_x}$ e do parâmetro $\eta$ estimados e do valor de máximo semblance SVD; obtidos na análise de velocidades, em dados com variação AVO e com ruído, para o folhelho VTI Greenhorn para $x/z = 4, 0$ . . . . .	85

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

**AVO** *Amplitude versus offset*

**CMP** *common mid-point*

**NMO** *normal moveout*

**RMS** *root mean square*

**SVD** *singular value decomposition*

**VTI** *vertical transversely isotropic*

# LISTA DE SÍMBOLOS

## SÍMBOLOS GREGOS DESCRIÇÃO

$\rho_b$	Densidade
$\delta$	Parâmetro anisotrópico de Thomsen
$\delta_{ij}$	delta de Kronecker
$\epsilon$	Parâmetro anisotrópico de Thomsen
$\eta$	Parâmetro de Anelipticidade
$\gamma$	Parâmetro anisotrópico de Thomsen
$\omega$	frequência angular
$\mu_{2j}$	momento ponderado pelo tempo da distribuição de velocidades
$\tau_{ij}$	tensor tensão
$\tau$	tempo de trânsito duplo vertical em uma janela temporal $T$
$\theta$	ângulo de fase
$\Gamma_{ik}$	matriz de Christoffel
$\Theta$	ângulo de grupo

## OPERADORES MATEMÁTICOS DESCRIÇÃO

$\partial_{tt}$	segunda derivada no tempo
$\partial_j$	$j$ -ésima derivada espacial
$[L/M]$	aproximante de Padé

## SÍMBOLOS LATINOS DESCRIÇÃO

$A$	amplitude da onda
$A_{2k}$	coeficientes da expansão, em série de Taylor, do sobretempo
$D$	dado amostrado em uma janela temporal
$N$	número total de traços sísmicos em um agrupamento CMP
$T$	janela temporal centrada em um dado $t_z$
$a_{ijkl}$	tensores de rigidez normalizado pela densidade
$c_{ijkl}$	tensores de rigidez ou parâmetros elásticos
$m_i$	vetor unitário na direção da onda normal
$n_i$	vetor de polarização unitário da onda plana
$s_k$	vetor vagarosidade
$t$	tempo de trânsito duplo
$t_P$	tempo de trânsito duplo da onda P
$t_{P,[M,N]}$	aproximação racional do tempo de trânsito duplo
$t_z$	tempo de trânsito duplo vertical no afastamento nulo
$u_i$	campo de onda

SÍMB. LATINOS	DESCRIÇÃO
$v_P$	velocidade de fase da onda compressional
$v_{P,[M,N]}$	aproximação racional da velocidades de fase da onda P
$v_{Pe}$	contribuição elíptica da velocidade de fase da onda P
$v_{Pn}$	velocidade <i>normal moveout</i> da onda P
$v_{Pz}$	velocidade de fase da onda P na direção $z$
$V_{Px}$	velocidade de fase da onda P na direção $x$
$v_{rms}$	velocidade de fase de empilhamento
$v_{SV}$	velocidade de fase da onda cisalhante vertical
$v_{SVz}$	velocidade de fase da onda SV na direção $z$
$V_{SVx}$	velocidade de fase da onda SV na direção $x$
$v_{SH}$	velocidade de fase da onda cisalhante horizontal
$x_k$	coordenada espacial
$x/z$	razão afastamento-profundidade
$S_j$	parâmetros de heterogeneidade
$S$	semblance
$S_{AB}$	AB-semblance
$S_{AK}$	AK-semblance
$s/n$	razão sinal-ruído
$\mathbf{V}$	vetor velocidade de grupo
$V_P$	velocidades de grupo da onda P
$V_{Pe}$	contribuição elíptica da velocidade de grupo da onda P
$v_{P,[M,N]}$	aproximação racional da velocidades de grupo da onda P

# SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>22</b>
<b>2</b>	<b>ONDAS PLANAS EM MEIOS ANISOTRÓPICOS HOMOGENEOS</b>	<b>24</b>
2.1	Velocidade de fase em meios anisotrópicos	24
2.2	Velocidade de grupo em meios anisotrópicos	25
2.3	Simetrias em meios anisotrópicos	26
<b>3</b>	<b>ONDAS PLANAS EM MEIOS ANISOTRÓPICOS VTI</b>	<b>32</b>
3.1	Velocidade de fase em meios VTI	32
3.2	Aproximações de velocidade de fase em meios VTI	34
3.2.1	Parâmetros de Thomsen	34
3.2.2	Aproximações de velocidade de fase da onda P	35
3.2.3	Aproximações de Padé para velocidade de fase da onda P	37
3.3	Aproximações de velocidade de grupo da onda P em meios VTI	38
3.3.1	Aproximações de Padé para velocidade de grupo da onda P	40
<b>4</b>	<b>APROXIMAÇÕES DE SOBRETENPO</b>	<b>43</b>
4.1	Tempos de trânsito de reflexões em geometria CMP	43
4.2	Sobretampo não hiperbólico	44
4.2.1	Heterogeneidade e o sobretampo não hiperbólico	44
4.2.2	Anisotropia e sobretampo não hiperbólico	46
4.2.3	Aproximações de sobretampo não-hiperbólicas para propagação de ondas P em meios homogêneos VTI	47
4.3	Aproximações de sobretampo não-hiperbólicas para propagação de ondas P em meios VTI verticalmente heterogêneos	50
<b>5</b>	<b>ESTIMATIVA DE PARÂMETROS EM MEIOS VTI</b>	<b>54</b>
5.1	Análise de velocidades baseada em semblance	54
5.1.1	Análise de velocidades por semblance em meios homogêneos VTI	55
5.1.2	Análise de velocidades por semblance em meios VTI $v(z)$	57
5.2	Análise de velocidades baseada em semblance modificado	65
5.2.1	AK-semblance em meios homogêneos VTI	66
5.2.2	Análise de velocidades sensível ao AVO usando semblance e AK-semblance	69
5.2.3	Seamlance SVD em meios homogêneos VTI	78
5.2.4	Análise de velocidades sensível ao AVO usando semblance SVD	79
<b>6</b>	<b>CONCLUSÃO</b>	<b>87</b>

REFERÊNCIAS . . . . .	89
APÊNDICE A – APROXIMAÇÃO RACIONAL PADÉ $[2/2]$ DA FUNÇÃO <i>SHIFTED HYPERBOLA</i> . . . . .	92

# 1 INTRODUÇÃO

A prospecção geofísica durante anos tem trabalhado com modelos simplificados para obter informações litológicas da subsuperfície através de dados sísmicos. Considerar que a terra é formada por estratificações isotrópicas até hoje é amplamente usado no processamento de dados sísmicos. Contudo, devido à evolução das técnicas de aquisição e a necessidade de se caracterizar com maior precisão os reservatórios de hidrocarbonetos, a hipótese de isotropia tem se mostrado insuficiente para modelar fielmente o comportamento do campo elástico, como por exemplo, em levantamentos com grandes afastamentos entre fonte e receptor. Isto tem levado vários autores a considerar a anisotropia como modelo de subsuperfície para processamento sísmico.

Anisotropia, e em particular isotropia transversa com eixo de simetria vertical (VTI), representa um modelo mais preciso para propagação de ondas em folhelho, rocha esta presente na grande maioria dos reservatórios de hidrocarbonetos. Em meios VTI, as velocidades de fase e grupo possuem direções distintas. Na propagação de ondas em meios VTI, a velocidade de fase de ondas SH é elíptica e tem uma equação exata que depende somente de dois parâmetros elásticos, enquanto que a velocidade de fase das ondas propagação de onda P e SV tem como principais características: possuem frentes de ondas anelíticas, equações algebricamente complicadas, e dependerem de quatro parâmetros de rigidez. Já a velocidade de grupo, a pesar da propagação da onda P ter frente de onda anelítica e depender somente de quatro parâmetros de rigidez, sua equação é difícil de explicitar algebricamente. Uma outra característica marcante da propagação de ondas em meios VTI é o fato das curvas de sobretempo serem não hiperbólicas. Essas características das velocidades de fase e grupo (e conseqüentemente sobretempo) tornam o processamento sísmico inviável em meios VTI. Devido a isto, é de fundamental importância obter aproximações para as velocidades de fase e grupo, e conseqüentemente para curvas de sobretempo, que dependam de menos parâmetros, mas que contudo preservem a precisão e os principais aspectos para se realizar processamento de dados sísmicos.

Vários autores tem obtido aproximações para velocidades de fase e grupo e sobretempo, em meios homogêneos VTI com fórmulas matemáticas mais simples e dependendo somente de três parâmetros (MUIR; DELLINGER, 1985; THOMSEN, 1986; DELLINGER; MUIR; KARRENBACH, 1993; TSVANKIN; THOMSEN, 1994; ALKHALIFAH; TSVANKIN, 1995; ALKHALIFAH, 1998; FOMEL, 2004) entre outros. Anisotropia elíptica é caracterizada somente por duas velocidades, uma na direção horizontal e outra na direção vertical, com equações de velocidade de fase e grupo com forma algébrica idêntica. Baseado nas propriedades dos meios elípticos, (MUIR; DELLINGER, 1985) e (DELLINGER; MUIR; KARRENBACH, 1993) apresentaram a aproximação anelítica da velocidade de fase para

meios homogêneos TI. Por analogia na forma das equações de velocidades de fase e grupo, eles obtiveram aproximações anelípticas da velocidade de grupo e, conseqüentemente, aproximações de sobretempo. (FOWLER, 2003) definiu a componente elíptica da velocidade de fase da onda P e de forma sistemática apresentou como obter aproximações em meios VTI através de convenientes reparametrizações. A partir da aproximação anelíptica de Muir, Fomel (2004) adaptou a aproximação *shifted hyperbola* (MALOVICHKO, 1978; SWORD, 1987; DE BAZELAIRE, 1988; CASTLE, 1994) e a correção Stolt-stretch (STOLT, 1978) para obter uma aproximação de velocidade de fase da onda P em meios VTI equivalente a aproximação "acústica" de (ALKHALIFAH, 1998), uma aproximação de velocidade de grupo muito precisa e uma excelente aproximação de sobretempo não hiperbólica.

Neste trabalho, são apresentadas aproximações anelípticas para a velocidade de fase da onda P em meios VTI por meio de aproximações racionais da aproximação *shifted hyperbola* (FOMEL, 2004). Usando a técnica de conversão por similaridade de forma (DELLINGER; MUIR; KARRENBACH, 1993), são obtidas, a partir da aproximação de velocidade de fase, precisas aproximações anelípticas para a velocidade de grupo e, com estas, são deduzidas novas e precisas aproximações de sobretempo não hiperbólicas. Para testar a validade das aproximações de velocidade de fase e grupo e das aproximações de sobretempo, são comparados os erros relativos das aproximações anelípticas racionais com outras aproximações da literatura. Para testar a precisão das aproximações de sobretempo são realizadas análises de velocidade baseada em semblance. São também, apresentadas adaptações para meios VTI das medidas de coerência AK-semblance e semblance SVD, introduzindo no cálculo da medida de coerência as curvas de sobretempo não hiperbólicas, para aferir a precisão das aproximações racionais, sob condição de espalhamento.



## 2 ONDAS PLANAS EM MEIOS ANISOTRÓPICOS HOMOGÊNEOS

Neste capítulo é apresentado um resumo do desenvolvimento teórico da propagação de ondas planas em meios anisotrópicos, como suporte para o estudo de meios VTI. Para tanto, é realizado o desenvolvimento analítico da obtenção das velocidades de fase e grupo em meios anisotrópicos, culminando com os diversos tipos de simetrias materiais.

### 2.1 Velocidade de fase em meios anisotrópicos

Em um meio perfeitamente elástico, linear, homogêneo e anisotrópico, com densidade  $\rho$ , a equação geral da onda é dada por:

$$\rho \partial_{tt} u_i = \partial_j \tau_{ij} + f_i, \quad (2.1)$$

sendo  $u_i$  o campo de onda,  $\tau_{ij}$  a tensão,  $\partial_{tt}$  a segunda derivada no tempo;  $\partial_j$  a  $j$ -ésima derivada espacial e  $f_i$  uma fonte externa associada ao problema.

Em regime de deformação infinitesimal a tração e a deformação estão relacionadas pela Lei de Hooke generalizada:

$$\tau_{ij} = c_{ijkl} \partial_l u_k, \quad (2.2)$$

sendo  $c_{ijkl}$  os tensores de rigidez ou parâmetros elásticos. Assim, substituindo a equação 2.2 em 2.1 a equação 2.1 passa a ser representada como:

$$\rho \partial_{tt} u_i = \partial_j (c_{ijkl} \partial_l u_k) + f_i. \quad (2.3)$$

Seja agora uma onda harmônica plana (AKI; RICHARDS, 1980):

$$u_i = A n_i \exp[-i\omega(t - x_k s_k)], \quad (2.4)$$

sendo  $A$  a amplitude da onda,  $n_i$  sua polarização unitária,  $t$  o tempo,  $\omega$  a frequência angular,  $s_k$  o vetor de vagarosidade, que determina a direção normal da frente de onda e  $x_k$  a coordenada espacial. A substituição da equação 2.4 na equação 2.3 gera a conhecida equação de Christoffel:

$$(\Gamma_{ik} - \rho \delta_{ik}) n_k = 0, \quad (2.5)$$

no qual

$$\Gamma_{ik} = c_{ijkl} s_l s_j, \quad (2.6)$$

é conhecida como matriz de Christoffel, a qual é simétrica, positiva definida e o parâmetro  $\delta_{ij}$  é o conhecido delta de Kronecker, o qual é definido por:  $\delta_{ij} = 1$ , se  $i = j$  e  $\delta_{ij} = 0$ , se  $i \neq j$ . Para uma dada velocidade de fase  $v$ , a equação 2.5 pode ainda ser definida como:

$$\left(\tilde{\Gamma}_{ik} - v^2\delta_{ik}\right) m_k = 0, \quad (2.7)$$

sendo que

$$\tilde{\Gamma}_{ik} = a_{ijkl}m_l m_j, \quad (2.8)$$

com  $a_{ijkl} = c_{ijkl}/\rho$  e  $m_k = s_k v$ .

Para meios sem atenuação, os coeficientes da matriz de Christoffel são reais e o sistema linear homogêneo da equação 2.7 constitui um problema de autovalor real. Soluções não triviais de 2.7 exigem a condição:

$$\det\left(\tilde{\Gamma}_{ik} - v^2\delta_{ik}\right) = 0, \quad (2.9)$$

chamada de equação polinômial de Christoffel. Portanto, cada direção unitária  $m_i$  em 2.9 produz três velocidades de fase, em geral distintas, e que podem ser ordenadas tomando a velocidade da onda compressional,  $v_P$ , como a de maior velocidade e as demais,  $v_{SV}$  e  $v_{SH}$ , como as velocidades das ondas cisalhantes, vertical e horizontal, respectivamente. Assim, para cada velocidade  $v_Q$  com  $Q = P, SV$  ou  $SH$  em 2.9 haverá um correspondente autovetor real unitário  $n_{iQ}$ , conhecido como a polarização associada. Se todas as três velocidades são diferentes, as respectivas polarizações ficam determinadas ao longo de três direções mutuamente ortogonais. Assim, as três diferentes propagações de onda em um meio anisotrópico não diferem apenas pelas suas velocidades de fase, mas também pela orientação de suas polarizações.

## 2.2 Velocidade de grupo em meios anisotrópicos

Considere-se, então, a propagação de uma onda plana em um meio anisotrópico homogêneo como um vetor de deslocamento dado na forma 2.4. A velocidade do fluxo da energia  $\mathbf{V}$  ou velocidade de grupo é dada pela razão entre o vetor fluxo da energia elástica  $\mathbf{S}$  e a densidade da energia elástica  $E$  (MUSGRAVE, 1970). Assim, as componentes do vetor velocidade de grupo são dados, explicitamente, como:

$$V_i = \frac{S_i}{E} = v^{-1} a_{ijkl} n_i n_k m_l. \quad (2.10)$$

Como pode ser observado em 2.10, a direção do vetor velocidade de grupo em meios anisotrópicos homogêneos depende da direção do vetor  $m_l$  contudo, não coincide com a direção da velocidade de fase. Uma forma simples de se representar a velocidade de grupo é através da relação de Auld (1973),

$$\mathbf{V} = \frac{\nabla F(s_i)}{\mathbf{s} \cdot \nabla F(s_i)}, \quad (2.11)$$

sendo  $F(s_i) = \det(\Gamma_{ik} - \rho\delta_{ik})$  a superfície de vagarosidade e  $\nabla F(s_i)$  um vetor perpendicular a esta. A equação 2.11 determina uma importante relação entre os vetores de vagarosidade e de velocidade de grupo, conhecida como relação de reciprocidade polar dada (HELBIG, 1994) por:

$$\mathbf{s} \cdot \mathbf{V} = 1. \quad (2.12)$$

A velocidade de grupo é de fundamental importância, na prospecção sísmica, para a obtenção do tempo de trânsito da propagação de uma onda espalhada.

### 2.3 Simetrias em meios anisotrópicos

Os meios anisotrópicos são caracterizados por seus tensores de rigidez  $c_{ijkl}$ , ou seja, por um tensor de quarta ordem com 81 componentes. Contudo, devido a lei de Hooke e as simetrias dos tensores de tração e deformação, bem como de considerações termodinâmicas no processo de deformação, estas podem ser reduzidas para 21 componentes independentes, o que levou Voigt a definir a notação condensada, que consiste em relacionar os pares de índices  $ij$  ( $kl$ ) a um único índice  $p$  ( $q$ ), ou seja:

$$11 \leftrightarrow 1 \quad 22 \leftrightarrow 2 \quad 33 \leftrightarrow 3 \quad 23 \leftrightarrow 4 \quad 13 \leftrightarrow 5 \quad \text{e} \quad 12 \leftrightarrow 6.$$

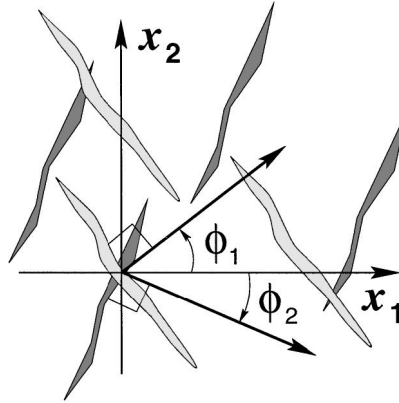
Com isto, o tensor de rigidez pode ser representado por uma matriz simétrica, positiva definida, de ordem  $6 \times 6$ . Doravante utilizaremos a notação de Voigt para expressar a matriz dos parâmetros elásticos.

Os meios anisotrópicos podem ter diferentes graus de simetria. Por simetria material entende-se que após transformação do sistema de coordenadas no qual o tensor  $c_{pq}$  está especificado, suas propriedades permanecem as mesmas. Uma consequência imediata da simetria material é o fato do número de parâmetros elásticos independentes diminuir. Em geral, as constantes elásticas não são afetadas pela reflexão em torno da origem, porém as propriedades de simetria com respeito à rotação sobre um eixo e a simetria especular, também conhecida por simetria plana, são os motivos mais comuns pela redução dos parâmetros elásticos independentes. Segue uma lista de matrizes elásticas para os sistemas de simetrias mais usuais.

#### Simetria triclínica

O material anisotrópico mais geral, caracterizado por 21 parâmetros elásticos independentes, é o triclínico. Este sistema não possui outra simetria que não a reflexão em torno da origem e, portanto, não possui plano de simetria. Sua matriz de parâmetros

Figura 2.1 – Dois sistemas de fraturas verticais paralelas, com vetores normais formando ângulos  $\phi_1$  e  $\phi_2$  com o eixo  $x_1$ , respectivamente, gerando um meio monoclinico efetivo.



Fonte: Adaptado de (BAKULIN; GRECHKA; TSVANKIN, 2000).

elásticos ou de rigidez tem a forma:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ c_{14} & c_{24} & c_{34} & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ c_{15} & c_{25} & c_{35} & c_{45} & c_{55} & c_{56} \\ c_{16} & c_{26} & c_{36} & c_{46} & c_{56} & c_{66} \end{bmatrix}. \quad (2.13)$$

### Simetria monoclinica

A simetria material monoclinica é a simetria material mais baixa identificada em medidas sísmicas (WINTERSTEIN; MEADOWS, 1991). A Figura 2.1 ilustra dois sistemas de fraturas paralelas verticais gerando um meio efetivamente monoclinico com um plano de simetria horizontal (BAKULIN; GRECHKA; TSVANKIN, 2000). A simetria monoclinica é caracterizada por 13 parâmetros elásticos independentes. Este sistema possui um eixo duplo e conseqüentemente um plano de simetria especular. O eixo de simetria é invariante por rotação de  $180^\circ$ . Se o plano de simetria for perpendicular ao eixo  $x_3$  a matriz de parâmetros elásticos tem a forma:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & c_{16} \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & c_{26} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & 0 & 0 & c_{36} \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & c_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{45} & c_{55} & 0 \\ c_{16} & c_{26} & c_{36} & 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix}. \quad (2.14)$$

### Simetria tetragonal

A simetria tetragonal é caracterizada por um eixo quádruplo, isto é, pela invariância diante de uma rotação de  $90^\circ$  sobre o eixo  $x_3$ . Este meio possui cinco planos de simetria, quatro dos quais intersectam o eixo quádruplo. A matriz dos parâmetros elásticos é caracterizada por no máximo sete parâmetros significantes e tem forma:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & c_{16} \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & -c_{16} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{55} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} & 0 \\ c_{16} & -c_{16} & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix}. \quad (2.15)$$

### Simetria ortorrômbica

A simetria material ortorrômbica é caracterizada por 9 parâmetros independentes. Possui três eixos duplos e três planos de simetria especular mutuamente perpendiculares. Rotações de  $180^\circ$  ao redor dos eixos de simetria não alteram o tensor de parâmetros elásticos. Em embasamentos sedimentares a simetria ortorrômbica está associada à combinações de fraturas paralelas verticais incorporadas em um meio finamente estratificado (TSVANKIN; HELBIG; TREITEL, 2001), como ilustrado na Figura 2.2. Se os planos de simetria coincidem com os planos coordenados a matriz de rigidez é dada por:

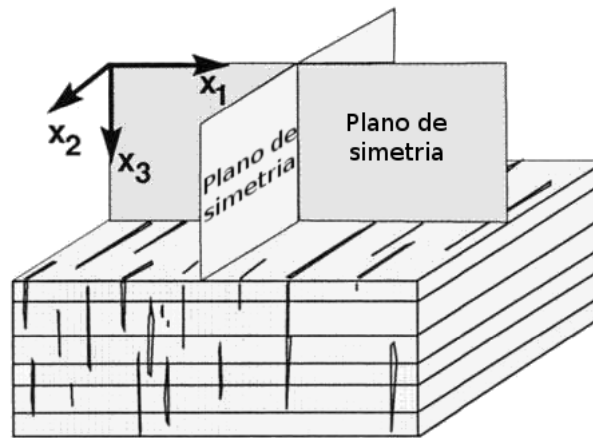
$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix}. \quad (2.16)$$

### Simetria cúbica

Um subsistema da simetria ortorrômbica é a simetria cúbica. Em tal sistema as três direções são intercambiáveis. O meio cúbico possui nove planos de simetria. Se três deles são paralelos aos planos coordenados, os outros passarão dois-a-dois através da diagonal de cada um dos três pares de faces opostas. A matriz de rigidez tem, no máximo, três parâmetros independentes e tem a forma:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{13} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{11} & c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{23} & c_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{55} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} \end{bmatrix}. \quad (2.17)$$

Figura 2.2 – Modelo ortorrômbico causado pela combinação de fraturas verticais paralelas com isotropia transversa vertical.



Fonte: Adaptado de (TSVANKIN, 1997).

### Simetria trigonal

O sistema trigonal é caracterizado por um eixo triplo, isto é, pela invariância diante de uma rotação de  $120^\circ$  sobre este eixo. Esse sistema possui três planos de simetria intersectando o eixo triplo. A matriz que caracteriza este meio possui no máximo sete parâmetros elásticos dada por:

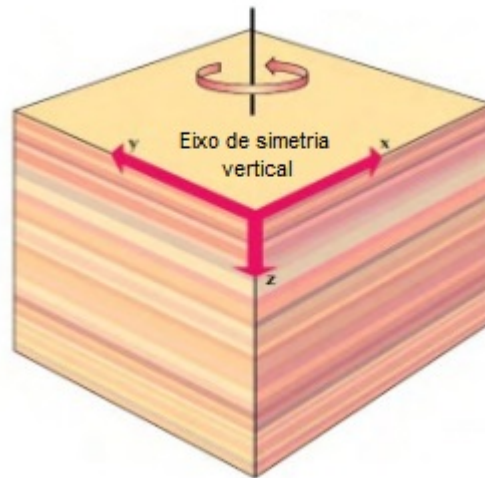
$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{13} & -c_{14} & -c_{15} & 0 \\ c_{13} & c_{13} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ c_{14} & -c_{14} & 0 & c_{55} & 0 & -c_{15} \\ c_{15} & -c_{15} & 0 & 0 & c_{55} & c_{14} \\ 0 & 0 & 0 & -c_{15} & c_{14} & c_{66} \end{bmatrix}. \quad (2.18)$$

com  $c_{66} = \frac{1}{2}(c_{11} - c_{12})$ . Um subsistema do sistema trigonal é o chamado trigonal forte. Neste sistema, é adicionado um eixo duplo  $x_2$  ao eixo triplo  $x_3$ , reduzindo assim o número de parâmetros elásticos para no máximo seis.

### Simetria hexagonal

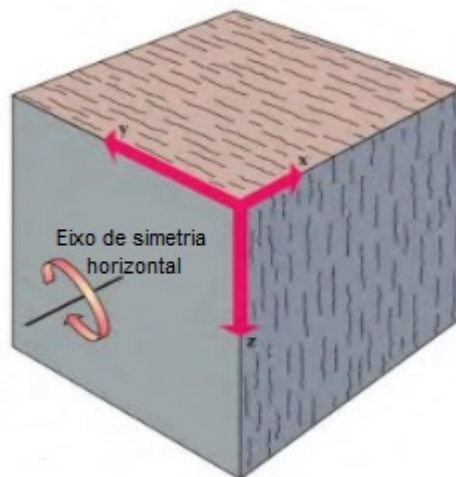
Há também a simetria hexagonal. Este sistema é caracterizado por 5 parâmetros independentes e por um eixo de simetria sêxtuplo, tal que uma rotação arbitrária por um ângulo arbitrário ao redor deste não altera o parâmetro elástico. Este sistema possui um plano de simetria perpendicular ao eixo de simetria onde o tensor comporta-se isotropicamente. Por isso, este sistema é também chamado transversalmente isotrópico (TI). A Figura 2.3 ilustra o caso em que o eixo de simetria é vertical ( $x_3$ ), nesse caso diz-se que o meio é VTI. Já a Figura 2.4 ilustra o caso em que o eixo de simetria é horizontal ( $x_1$ ), caso em que o meio é dito HTI. A grande maioria dos estudos existente sobre anisotropia sísmica foram realizados em tais meios, como por exemplo em folhelhos (TSVANKIN;

Figura 2.3 – Modelo VTI causado por finas camadas.



Fonte: Adaptado de (SCHLUMBERGER, 2015a).

Figura 2.4 – Modelo HTI causado por finas camadas.



Fonte: Adaptado de (SCHLUMBERGER, 2015b).

HELBIG; TREITEL, 2001). No caso em que  $x_3$  é o eixo de simetria e o plano  $x_1x_2$  coincide com o plano isotrópico tem-se:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{13} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{55} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix}. \quad (2.19)$$

com  $c_{66} = \frac{1}{2}(c_{11} - c_{12})$ .

### Isotropia

O meio em que os parâmetros elásticos são invariantes em relação a qualquer rotação sobre qualquer um dos eixos coordenados e, no qual, todo plano é um plano de simetria é chamado de isotrópico. Este é o meio com maior grau de simetria e possui apenas dois parâmetros elásticos independentes em uma matriz com a forma:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{11} - 2c_{44} & c_{11} - 2c_{44} & 0 & 0 & 0 \\ c_{11} - 2c_{44} & c_{11} & c_{11} - 2c_{44} & 0 & 0 & 0 \\ c_{11} - 2c_{44} & c_{11} - 2c_{44} & c_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} \end{bmatrix}. \quad (2.20)$$



## 3 ONDAS PLANAS EM MEIOS ANISOTRÓPICOS VTI

Com o advento de novas técnicas de prospecção sísmica, reservatórios antes economicamente inviáveis têm despertado o interesse da indústria de hidrocarbonetos. Um exemplo disto é o que ocorre com o chamado gás de folhelho nos Estados Unidos. Gás de folhelho se refere ao gás natural que está preso dentro de formações folhelho. Folhelho são rochas sedimentares refinadas que podem ser ricas fontes de petróleo e gás natural. A combinação de perfuração horizontal e fratura hidráulica tem permitido o acesso a grande volume de gás de folhelho em reservatórios antes economicamente inviáveis para produzir. Graças ao gás de folhelho, os Estados Unidos tem se tornado independente de gás natural externo e conta atualmente com uma reserva estimada em mais de 7 milhões de  $m^3$ , o que daria, no ritmo atual, para o consumo americano em 100 anos (EIA et al., 2011). Em geral, formações folhelho são horizontalmente acamadas, o que gera meios transversalmente anisotrópicos verticais (VTI). Uma lista de tais materiais pode ser encontrada na literatura, como em Thomsen (1986).

Neste capítulo é dada uma atenção maior a propagação de ondas em meios TI, em especial aos meios VTI, para melhor compreensão das propriedades desta propagação e de seu potencial para posterior uso em processos inversos.

### 3.1 Velocidade de fase em meios VTI

Como visto no capítulo anterior, no estudo da propagação de ondas, a velocidade de fase,  $v$ , e a polarização,  $n_k$ , podem ser obtidas explicitamente da equação de Christoffel 2.5, em função do ângulo  $\theta$  entre o vetor de vazarosidade  $s_k$  e o eixo de simetria ( $x_3$ ). No caso de meios VTI esta é dada explicitamente como:

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{11} &= c_{11}s_1^2 + c_{66}s_2^2 + c_{55}s_3^2; \\
 \Gamma_{22} &= c_{66}s_1^2 + c_{11}s_2^2 + c_{55}s_3^2; \\
 \Gamma_{33} &= c_{55}(s_1^2 + s_2^2) + c_{33}s_3^2; \\
 \Gamma_{12} &= (c_{11} - c_{66})s_1s_2; \\
 \Gamma_{13} &= (c_{13} + c_{55})s_1s_3; \\
 \Gamma_{23} &= (c_{13} + c_{55})s_2s_3.
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Devido ao eixo de simetria ser vertical, o estudo da propagação em tais meios é realizada em um simples plano de simetria vertical. Escolhendo-se o plano  $x_1x_3$  como tal

( $s_2 = 0$ ), a equação 2.6 pode ser explicitada como:

$$\begin{bmatrix} c_{11}s_1^2 + c_{55}s_3^2 - \rho v^2 & 0 & (c_{13} + c_{55})s_1s_3 \\ 0 & c_{66}s_1^2 + c_{55}s_3^2 - \rho v^2 & 0 \\ (c_{13} + c_{55})s_1s_3 & 0 & c_{55}s_1^2 + c_{33}s_3^2 - \rho v^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.2)$$

Fazendo o vetor  $s_k$  unitário e em função do ângulo de propagação têm-se  $s_1 = \sin\theta$  e  $s_2 = \cos\theta$  na equação 3.2. Para propagação puramente cisalhante ( $n_1 = 0, n_3 = 0$  e  $n_2 \neq 0$ ) obtém-se a chamada velocidade de fase cisalhante horizontal:

$$v_{SH}(\theta) = \sqrt{\frac{c_{66}\sin^2\theta + c_{55}\cos^2\theta}{\rho}}, \quad (3.3)$$

a qual está confinada ao plano horizontal e dependente explicitamente somente dos parâmetros elásticos  $c_{66}$  e  $c_{55}$  e do ângulo de propagação  $\theta$ . Observa-se que para propagação vertical  $v_{SH} = \sqrt{c_{55}/\rho}$ , enquanto que na horizontal  $v_{SH} = \sqrt{c_{66}/\rho}$ .

A propagação no plano de incidência ( $n_2 = 0$ ) na equação 3.2 determina, através do problema de autovalor, as velocidades de fase da onda compressional  $v_P$  (sinal + na raiz) e cisalhante vertical  $v_{SV}$  (sinal - na raiz) como:

$$2\rho v^2(\theta) = (c_{11} + c_{55})\sin^2\theta + (c_{33} + c_{55})\cos^2\theta \pm \sqrt{[(c_{11} - c_{55})\sin^2\theta - (c_{33} - c_{55})\cos^2\theta]^2 + (c_{13} + c_{55})^2\sin^2\theta\cos^2\theta}. \quad (3.4)$$

As equações 3.4 dependem somente de quatro parâmetros elásticos  $c_{11}, c_{13}, c_{33}$  e  $c_{55}$  e do ângulo  $\theta$ . Obtidas as velocidades nas equações 3.3 e 3.4 as componentes da polarização podem ser obtidas da equação 3.2.

As medidas da velocidade de fase  $v_P$  no plano isotrópico (regime de propagação vertical ( $\theta = 0^\circ$ ) e na direção horizontal ( $\theta = 90^\circ$ ) são dadas, respectivamente, por:

$$v_{Pz} = v_P(\theta = 0^\circ) = \sqrt{c_{33}/\rho} \quad \text{e} \quad v_{Px} = v_P(\theta = 90^\circ) = \sqrt{c_{11}/\rho}, \quad (3.5)$$

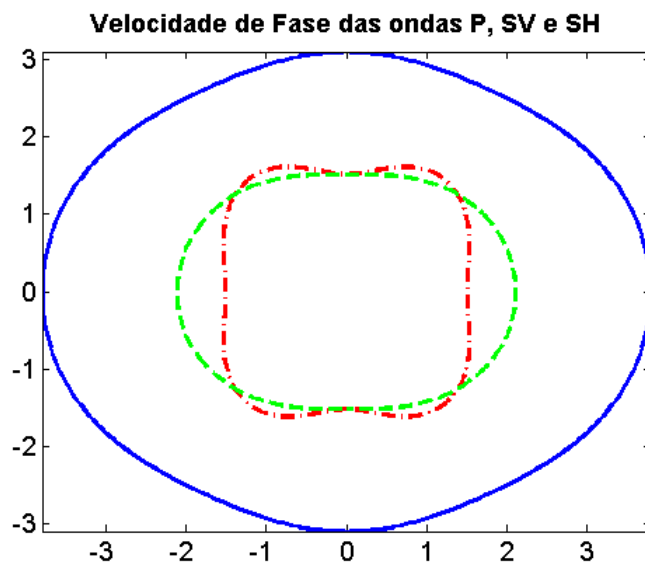
enquanto que as medida da velocidade de fase  $v_{SV}$ , no plano isotrópico e na direção horizontal, são dadas por:

$$v_{SVz} = v_{SV}(\theta = 0^\circ) = \sqrt{c_{55}/\rho} = v_{SV}(\theta = 90^\circ) = v_{SVx}. \quad (3.6)$$

Para ilustrar a propagação de ondas em meios VTI, no plano de simetria  $x_1x_3$ , nas Figuras 3.1 e 3.2 são traçadas as curvas de velocidade de fase e vagarosidade, respectivamente, no folhelho Greenhorn (JONES; WANG, 1981), o qual tem parâmetros elásticos normalizados pela densidade:  $a_{11} = 14.47\text{km}^2/\text{s}^2, a_{13} = 4.51\text{km}^2/\text{s}^2, a_{33} = 9.57\text{km}^2/\text{s}^2$  e  $a_{55} = 2.28\text{km}^2/\text{s}^2$ , e cujos parâmetros de Thomsen são:  $v_{Pz} = 3,094\text{km}/\text{s}, v_{SVz} = 1,510\text{km}/\text{s}, \epsilon = 0,256, \delta = -0,0505\text{km}/\text{s}$  e  $\gamma = 0,000\text{km}/\text{s}$ .

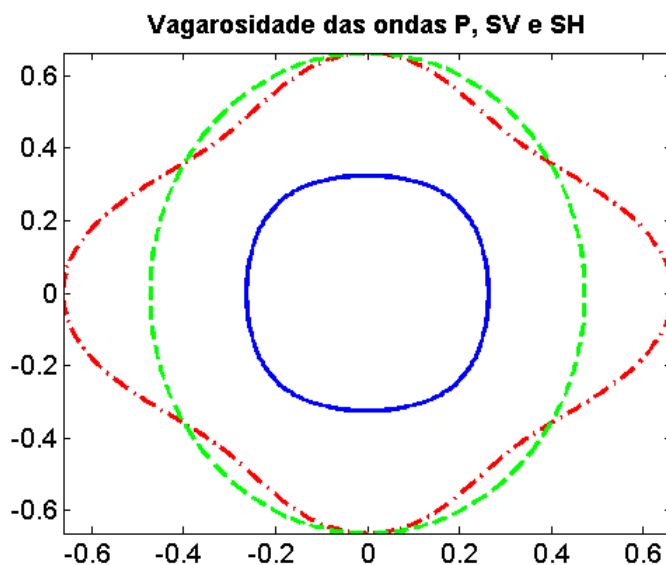
Devido a relativa complexidade algébrica da equação 3.4 e a necessidade de se compreender a relação entre as propriedades elásticas do meio e a velocidade de fase, parametrizações e aproximações que simplifique a equação 3.4 conservando-se, no entanto, a precisão são comuns na literatura e é o foco da próxima seção.

Figura 3.1 – Velocidade de fase das ondas: P (curva azul), SV (tracejado vermelho) e SH (ponto-tracejado verde), no plano de simetria  $xz$ , obtida no folhelho VTI Greenhorn.



Fonte: Autor

Figura 3.2 – Vagarosidade das ondas: P (curva azul), SV (tracejado vermelho) e SH (ponto-tracejado verde), no plano de simetria  $xz$ , obtida no folhelho VTI Greenhorn.



Fonte: Autor

## 3.2 Aproximações de velocidade de fase em meios VTI

### 3.2.1 Parâmetros de Thomsen

Com o objetivo de simplificar a apresentação e diminuir a quantidade de parâmetros na equação 3.4, melhorando assim o estudo da dependência da velocidade de fase em

relação as propriedades elásticas do meio, em ângulos oblíquos de propagação, Thomsen (1986) apresentou as parametrizações caracterizadoras de meios anisotrópicos em meios TI como:

$$\epsilon = \frac{c_{11} - c_{33}}{2c_{33}}, \quad \delta = \frac{(c_{13} + c_{55})^2 - (c_{33} - c_{55})^2}{2c_{33}(c_{33} - c_{55})} \quad \text{e} \quad \gamma = \frac{(c_{66} - c_{55})}{2c_{55}}. \quad (3.7)$$

Os parâmetros  $\epsilon$ ,  $\delta$  e  $\gamma$  são adimensionais e se anulam no caso de propagação em meios isotrópicos, com isso são indicadores de anisotropia. Por simples substituição, as equações 3.3 e 3.4 podem ser reescritas, respectivamente, em função dos parâmetros de Thomsen como:

$$v_{SH}^2(\theta) = v_{SVz}^2(1 + 2\gamma \sin^2\theta) \quad (3.8)$$

e

$$\frac{v^2(\theta)}{v_{Pz}^2} = 1 + \epsilon \sin^2\theta \pm \sqrt{1 + \frac{4\sin^2\theta}{f} (2\delta \cos^2\theta - \epsilon \cos 2\theta) + \frac{4\epsilon^2 \sin^4\theta}{f^2}}, \quad (3.9)$$

sendo  $f \equiv 1 - \frac{v_{SVz}^2}{v_{Pz}^2} = 1 - \frac{c_{55}}{c_{33}}$  um parâmetro que depende explicitamente de  $v_{SVz}$ . Assim, na notação de Thomsen, as assinaturas das ondas P e SV são caracterizadas pelos parâmetros  $v_{Pz}$ ,  $v_{SVz}$ ,  $\epsilon$  e  $\delta$ , enquanto que a assinatura da onda SH somente por  $v_{SVz}$  e  $\gamma$ .

Pode-se verificar, por simples substituição em 3.9, que o parâmetro  $\epsilon$  relaciona as velocidades  $v_{Pz}$  e  $v_{Px}$  como:

$$v_{Px}^2 = v_{Pz}^2(1 + 2\epsilon). \quad (3.10)$$

Por outro lado, o parâmetro  $\delta$  relaciona a velocidade  $v_{Pz}$  com a curvatura paraxial da frente de onda P às proximidades do eixo vertical,  $v_{Pn}$  (velocidade *normal moveout* da onda P para interface refletora sem mergulho), como (THOMSEN, 1986):

$$v_{Pn}^2 = v_{Pz}^2(1 + 2\delta). \quad (3.11)$$

Alkhalifah e Tsvankin (1995) mostraram que somente os parâmetros  $\epsilon$  e  $\delta$  influenciam na propagação de ondas P em meios VTI. Combinando as equações 3.13 e 3.11 definiram um parâmetro adimensional ao qual chamaram de parâmetro de anelipticidade:

$$\eta = \frac{\epsilon - \delta}{1 + 2\delta}, \quad (3.12)$$

e com este, reescreveram a equação 3.13 como:

$$v_{Px}^2 = v_{Pn}^2(1 + 2\eta). \quad (3.13)$$

### 3.2.2 Aproximações de velocidade de fase da onda P

Com o objetivo de simplificar a equação 3.9, e melhor entender a física da propagação de ondas em meios VTI e sobre a hipótese de fraca anisotropia ( $|\epsilon| \ll 1$  e  $|\delta| \ll 1$ ), Thomsen (1986) fez a expansão de Taylor de 3.9 em relação a direção de propagação

vertical, e apresentou a aproximação *fracamente anisotrópica* para velocidade de fase de ondas P, a qual depende somente de três parâmetros:  $v_{Pz}$ ,  $\delta$  e  $\epsilon$ , dada por:

$$v_P \approx v_{Pz} \left( 1 + \delta \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \epsilon \sin^4 \theta \right). \quad (3.14)$$

Contudo, devido a aproximação fracamente anisotrópica ser obtida em torno da velocidade  $v_{Pz}$ , esta perde precisão em medidas próximas da direção horizontal, ou seja, é imprecisa na obtenção da velocidade  $v_{Px}$ .

Uma outra metodologia para obtenção de aproximações para velocidade de fase, foi proposta por Muir e Dellinger (1985) e Dellinger, Muir e Karrenbach (1993). Eles observaram que as velocidades de fase e grupo possuem forma polinomial similar na presença de anisotropia elíptica. Baseados neste fato, deduziram uma aproximação da velocidade de fase da onda P em meios homogêneos VTI dependente, somente dos parâmetros  $v_{Pz}$ ,  $v_{Px}$  e  $\eta$ , que chamaram de *aproximação anelítica*:

$$v_P^2(\theta) \approx v_{Pe}^2(\theta) + \frac{a}{v_{Pe}^2(\theta)}, \quad (3.15)$$

sendo  $a = [q - 1]v_{Px}^2 v_{Pz}^2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta$ , com  $q = 1/(1 + 2\eta)$  e:

$$v_{Pe}^2(\theta) \equiv v_{Px}^2(\theta) \sin^2 \theta + v_{Pz}^2(\theta) \cos^2 \theta, \quad (3.16)$$

a contribuição elíptica da velocidade de fase da onda P.

Alkhalifah (1998) observou que devido a propagação de ondas P em meios VTI ser independente da velocidades  $v_{SVz}$ , em processamentos relacionado ao tempo, fez  $v_{SVz} = 0$  na equação exata de velocidade de fase 3.4, e apresentou uma aproximação bastante precisa e dependente somente de  $v_{Pn}$  e  $v_{Px}$  ( $\eta$ ) como:

$$v_P^2(\theta) \approx v_{Pe}^2(\theta) + \sqrt{v_{Pe}^4(\theta) + v_{Pz}^2(v_{Pn}^2 - v_{Px}^2) \sin^2 2\theta}, \quad (3.17)$$

a qual chamou de aproximação "acústica".

Por outro lado, Fomel (2004) interpretou a velocidade de fase anelítica de Muir em 3.15, como uma linearização da aproximação *shifted-hyperbola* (MALOVICHKO, 1978; DE BAZELAIRE, 1988; CASTLE, 1994), para pequenos valores do parâmetro  $a$ :

$$v_P^2(\theta) \approx v_{Pe}^2(\theta)(1 - s) + s \sqrt{v_{Pe}^4(\theta) + \frac{2a}{s}}. \quad (3.18)$$

Fomel (2004) mostrou que o parâmetro  $s \approx \frac{1}{2}$ , obtendo assim uma aproximação anelítica para velocidade de fase da onda P em meios homogêneos VTI dependente somente de três parâmetros:

$$v_P(\theta)^2 \approx \frac{1}{2} v_{Pe}^2(\theta) + \frac{1}{2} \sqrt{v_{Pe}^4(\theta) + 4a}, \quad (3.19)$$

ao qual provou ser equivalente a aproximação "acústica" 3.17 de Alkhalifah (1998).

### 3.2.3 Aproximações de Padé para velocidade de fase da onda P

Uma forma alternativa para lidar com funções algebricamente complicadas é usar aproximações polinomiais, como série de Taylor. Desvantagens inerentes das aproximações por série de Taylor, tal como convergência lenta e raio de convergência limitada em regiões de pouco interesse, tem guiado para se obter aproximações que possa dar mais informações da função em questão, como, por exemplo, aproximações racionais ou por frações continuadas.

Seja uma aproximação em série de potências de uma função  $f$ , dada por:

$$f(x) \approx \sum_{j=0}^{\infty} f_j x^j. \quad (3.20)$$

Os aproximantes de Padé  $[L/M]$ , denotado por:

$$f_{[L/M]}(x) = \frac{P_L(x)}{Q_M(x)}, \quad (3.21)$$

são aproximantes racionais da função  $f$ , sendo  $P_L(x)$  e  $Q_M(x)$  polinômios de grau no máximo  $L$  e  $M$ , respectivamente. Os coeficientes desses polinômios são determinados como:

$$f(x) \approx \sum_{j=0}^{L+M} f_j x^j = \frac{P_L(x)}{Q_M(x)}, \quad (3.22)$$

sendo  $Q_M(0) = 1$ . Aproximantes de Padé convergem mais rapidamente e tem raio de convergência maior que as séries de Taylor, e para tanto usam somente os coeficientes da própria série de Taylor (BAKER JR, 1975).

Expandindo a função *shifted-hyperbola* (3.18) em série de Taylor até a quarta ordem, obtém-se aproximações racionais de Padé:  $[1/1]$ ,  $[2/1]$  e  $[2/2]$ , para velocidade de fase da onda  $P$  como:

$$v_{P,[1,1]}^2(\theta) \approx v_{Pe}^2(\theta) \left( 1 + \frac{2sa}{2v_{Pe}^4(\theta) + a} \right), \quad (3.23)$$

$$v_{P,[2,1]}^2(\theta) \approx v_{Pe}^2(\theta) \left[ 1 + \frac{sav_{Pe}^4(\theta) + \frac{a^2}{2}}{v_{Pe}^4(\theta) (sv_{Pe}^4(\theta) + a)} \right] \quad (3.24)$$

e

$$v_{P,[2,2]}^2(\theta) \approx v_{Pe}^2(\theta) \left( 1 + \frac{4sav_{Pe}^4(\theta) + a}{a^2 + 6sav_{Pe}^4(\theta) + 4s^2v_{Pe}^8(\theta)} \right), \quad (3.25)$$

respectivamente. Atribuindo  $s \approx \frac{1}{2}$  (FOMEL, 2004) nas aproximações racionais 3.23, 3.24 e 3.25 obtém-se aproximações para a velocidade de fase como:

$$v_{P,[1,1]}^2(\theta) \approx v_{Pe}^2(\theta) \left( 1 + \frac{a}{v_{Pe}^4(\theta) + a} \right), \quad (3.26)$$

$$v_{P,[2,1]}^2(\theta) \approx v_{Pe}^2(\theta) \left[ 1 + \frac{av_{Pe}^4(\theta) + a^2}{v_{Pe}^4(\theta) (v_{Pe}^4(\theta) + 2a)} \right] \quad (3.27)$$

e

$$v_{P,[2,2]}^2(\theta) \approx v_{Pe}^2(\theta) \left( 1 + \frac{av_{Pe}^4(\theta) + a^2}{a^2 + 3av_{Pe}^4(\theta) + v_{Pe}^8(\theta)} \right). \quad (3.28)$$

Estas aproximações de velocidade de fase têm forma simples e termos elíptico e anelítico bem definidos, sendo que para cada direção de propagação, dependem explicitamente somente das velocidades  $v_{Px}$  e  $v_{Pz}$  e do parâmetro  $\eta$ . Se comparado a aproximação *shifted-hyperbola* elas têm um número menor de operações aritméticas e não possuem operação de radiciação.

Para validar os aproximantes propostos foram realizados experimentos numéricos tomando como modelo litológico o folhelho VTI Greenhorn (JONES; WANG, 1981), no qual os parâmetros elásticos normalizados pela densidade são:  $a_{11} = 14.47km^2/s^2$ ,  $a_{13} = 4.51km^2/s^2$ ,  $a_{33} = 9.57km^2/s^2$  e  $a_{55} = 2.28km^2/s^2$ , e cujos parâmetros de Thomsen são:  $v_{Pz} = 3,094km/s$ ,  $v_{SVz} = 1,510km/s$ ,  $\epsilon = 0,256$ ,  $\delta = -0,0505km/s$  e  $\gamma = 0,000km/s$ . Na Figura 3.3, estão ilustrados os erros relativos das aproximações 3.9, 3.15, 3.19, 3.26, 3.27 e 3.28. Nesta, pode-se verificar que as aproximações apresentadas aqui são bem precisas, com erro relativo máximo de 0,3%. Observa-se também que, todas as aproximações apresentam baixo erro para valores de ângulo de fase até  $10^\circ$ . De  $10^\circ$  até  $30^\circ$ , só a aproximação 3.15 apresenta altos valores para o erro, enquanto que diminui para a aproximação 3.26. Para medidas de ângulo de fase maiores que  $50^\circ$ , somente a aproximação 3.14 continua a apresentar altos desvios do valor exato, enquanto que 3.15 apresenta um aperfeiçoamento considerável. A aproximação 3.26 é bastante precisa para ângulos de fase até  $35^\circ$ , mantendo-se com erro relativo máximo de 0.3% para medidas de ângulo maiores.

### 3.3 Aproximações de velocidade de grupo da onda P em meios VTI

A velocidade de grupo  $V$  e o ângulo de grupo  $\Theta$  estão relacionados a velocidade de fase e ao ângulo de fase (BERRYMAN, 1979) por:

$$V^2(\Theta) = v^2(\theta) + \left[ \frac{dv(\theta)}{d\theta} \right]^2 \quad (3.29)$$

e

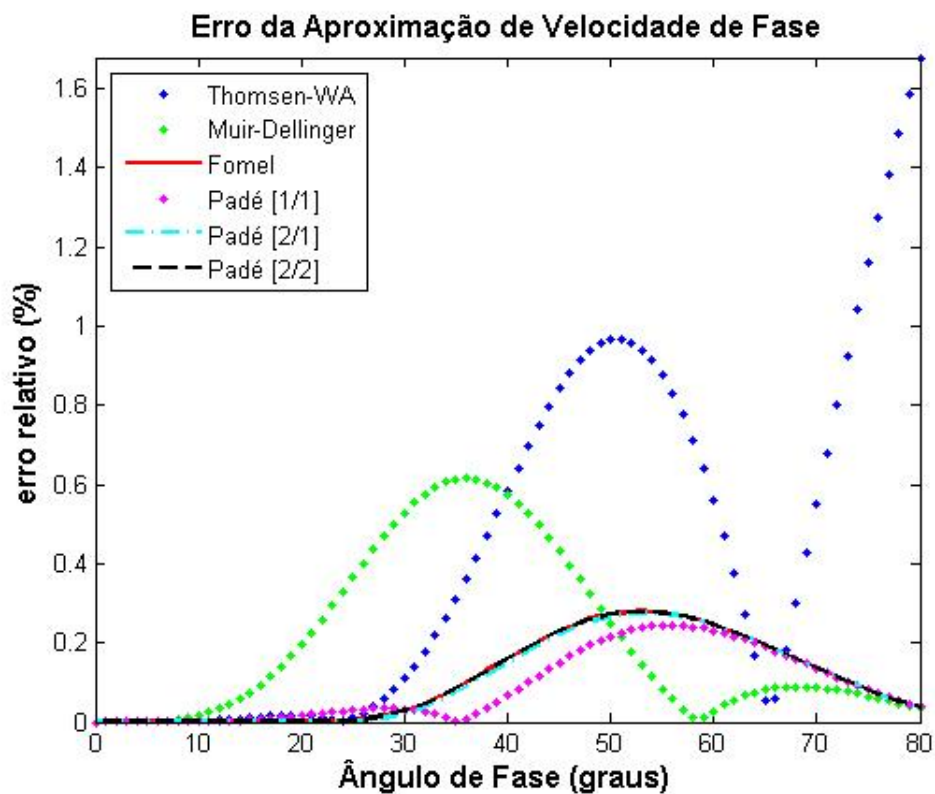
$$\tan(\Theta) = \frac{\tan(\theta) + \frac{1}{v(\theta)} \frac{dv(\theta)}{d\theta}}{1 - \frac{\tan(\theta)}{v(\theta)} \frac{dv(\theta)}{d\theta}}, \quad (3.30)$$

respectivamente. A Figura 3.4 ilustra a propagação da velocidade de grupo no meio VTI Greenhorn, usado na seção 3.1.

Thomsen (1986) usou a aproximação de velocidade de fase 3.14 para obter uma aproximação para velocidade de grupo da onda P em meios VTI fracamente anisotrópicos, dependente somente de três parâmetros:

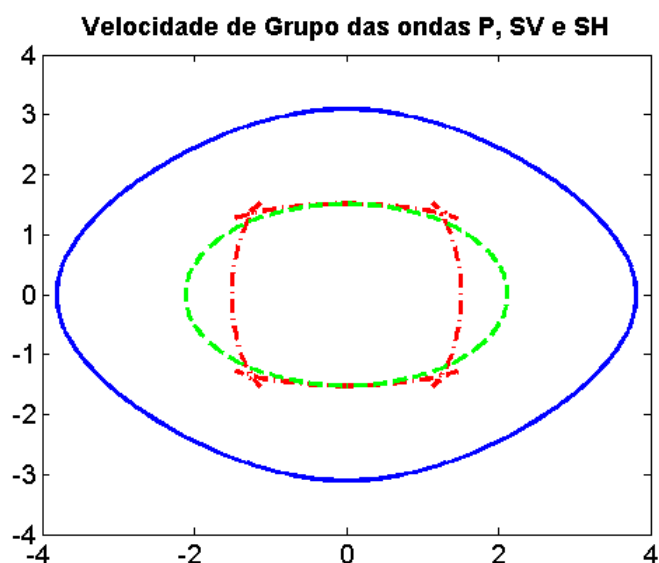
$$V_P(\Theta) \approx v_{Pz} \left( 1 + \delta \sin^2 \Theta \cos^2 \Theta + \epsilon \sin^4 \Theta \right). \quad (3.31)$$

Figura 3.3 – Erro relativo das aproximações de velocidade de fase: Ponto Azul - anisotropia fraca, Ponto verde - anelítica de Muir, Linha vermelha - *shifted-hyperbola*, Ponto preto - Padé [1/1], Ponto-traço preto - Padé [2/1], Tracejado preto - Padé [2/2].



Fonte: Autor.

Figura 3.4 – Velocidade de grupo das ondas: P (curva azul), SV (tracejado vermelho) e SH (ponto-traçado verde), no plano de simetria  $xz$ , obtida no folhelho VTI Greenhorn.



Fonte: Autor.



Com a substituição da linearização da equação 3.9 na equação 3.31, é possível obter a aproximação fracamente anisotrópica do ângulo de grupo:

$$\tan \Theta_P \approx \tan \theta_P \left[ 1 + 2\delta + 4(\epsilon - \delta)\text{sen}^2\theta \right]. \quad (3.32)$$

Por outro lado, Muir e Dellinger (1985) e Dellinger, Muir e Karrenbach (1993), baseados no fato de que a frente de onda da velocidade de grupo em meios VTI pode ser obtida como uma perturbação da frente de onda em meios elípticos, e que esta tem forma algébrica similar a aproximação de velocidade de fase, deduziram uma aproximação anelítica para a velocidade de grupo da onda  $P$ , precisa para a anisotropia elíptica, e bastante consistente em meios homogêneos VTI mais gerais:

$$V_P^{-2}(\Theta) \approx V_{Pe}^{-2}(\Theta) + \frac{A}{V_{Pe}^{-2}(\Theta)}, \quad (3.33)$$

sendo  $A = (Q-1)v_{Px}^{-2}v_{Pz}^{-2}\text{sen}^2\Theta \cos^2\Theta$ , com  $Q = (1+2\eta)$  e  $V_{Pe}^{-2}(\Theta) \equiv v_{Px}^{-2}\text{sen}^2\Theta + v_{Pz}^{-2}\cos^2\Theta$ . Pode-se observar, que para uma dada direção a equação 3.33 depende somente dos parâmetros  $v_{Pz}$ ,  $v_{Px}$  e  $\eta$ .

Contudo, em seus trabalhos Muir e Dellinger (1985) e Dellinger, Muir e Karrenbach (1993) não explicitaram o ângulo de grupo, o que foi deduzido, a partir da equação 3.33 posteriormente por Fomel (2004):

$$\tan \Theta \approx \tan \theta \left( \frac{v_{Px}}{v_{Pz}} \right)^2 \left[ 1 + \left( \frac{2\eta}{1+2\eta} \right) \frac{v_{Px}^2 \text{sen}^2\theta - v_{Pz}^2 \cos^2\theta}{v_{Pe}^2(\theta)} \right]. \quad (3.34)$$

Seguindo a mesma estratégia que utilizou para obter a aproximação de velocidade de fase, Fomel (2004) também interpretou a aproximação anelítica de velocidade de grupo na equação 3.33 como uma forma linear (na variável  $A$ ) da função *shifted-hyperbola*:

$$f(A) = V_{Pe}^{-2}(\Theta)(1 - S) + S\sqrt{V_{Pe}^{-4}(\Theta) + \frac{2A}{S}}. \quad (3.35)$$

Fomel (2004) mostrou que fazendo  $S \approx \frac{1}{4(1+\eta)}$  em 3.35, é possível obter uma aproximação anelítica de velocidade de grupo em meios VTI altamente precisa, mesmo para grandes ângulos em relação a vertical:

$$V_P^{-2}(\Theta) \approx \frac{1+2Q}{2(1+Q)}V_{Pe}^{-2}(\Theta) + \frac{1}{2(1+Q)}\sqrt{V_{Pe}^{-4}(\Theta) + 4A}. \quad (3.36)$$

### 3.3.1 Aproximações de Padé para velocidade de grupo da onda P

Seguindo novamente o método de Muir (Muir e Dellinger (1985) e Dellinger, Muir e Karrenbach (1993)) pode-se obter novas aproximações para velocidade de grupo com forma similar as aproximações anelíticas de velocidade de fase 3.23, 3.23 e 3.23 como:

$$V_{P,[1,1]}^{-2}(\Theta) \approx V_{Pe}^{-2}(\Theta) \left( 1 + \frac{2SA}{2V_{Pe}^{-4}(\Theta) + A} \right), \quad (3.37)$$

$$V_{P,[2,1]}^{-2}(\Theta) \approx V_{Pe}^{-2}(\Theta) \left[ 1 + \frac{SAV_{Pe}^{-4}(\Theta) + \frac{A^2}{2}}{V_{Pe}^{-4}(\Theta) (SV_{Pe}^{-4}(\Theta) + A)} \right] \quad (3.38)$$

e

$$V_{P,[2,2]}^{-2}(\Theta) \approx V_{Pe}^{-2}(\Theta) \left( 1 + \frac{4SAV_{Pe}^{-4}(\Theta) + A}{A^2 + 6SAV_{Pe}^{-4}(\Theta) + 4S^2V_{Pe}^{-8}(\Theta)} \right). \quad (3.39)$$

Fazendo  $S = \frac{1}{4(1+\eta)}$  em nas aproximações 3.37, 3.38 e 3.39, respectivamente, obtém-se:

$$V_{P,[1,1]}^{-2}(\Theta) \approx V_{Pe}^{-2}(\Theta) \left( 1 + \frac{A}{V_{Pe}^{-4}(\Theta) + 2(1+\eta)A} \right), \quad (3.40)$$

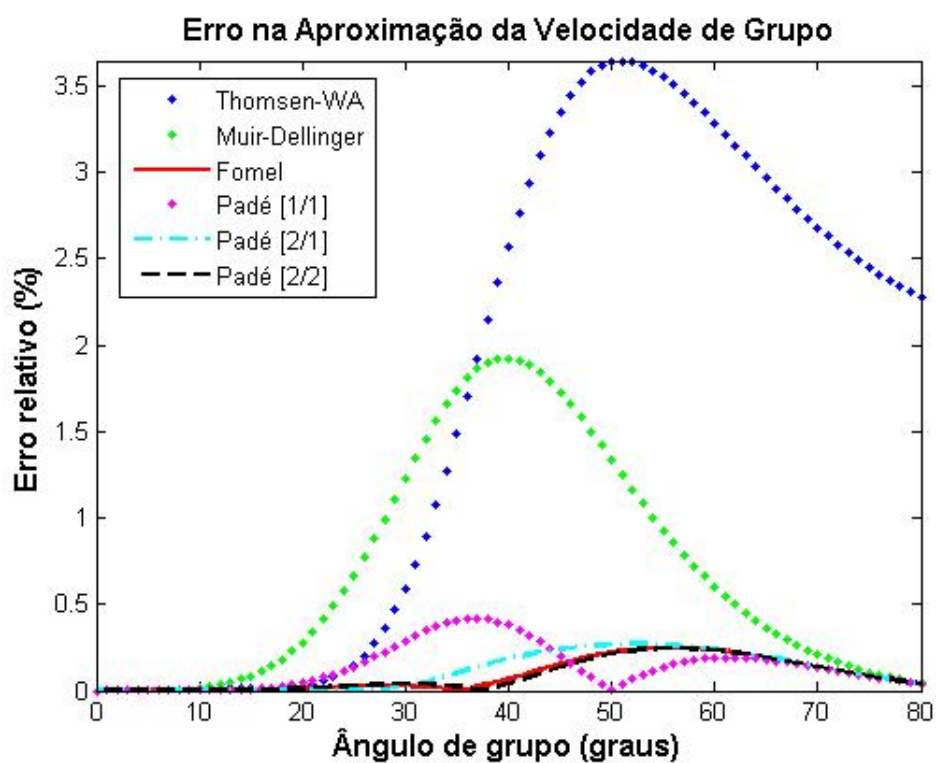
$$V_{P,[2,1]}^{-2}(\Theta) \approx V_{Pe}^{-2}(\Theta) \left[ 1 + \frac{AV_{Pe}^{-4}(\Theta) + 2(1+\eta)A^2}{V_{Pe}^{-4}(\Theta) (V_{Pe}^{-4}(\Theta) + 4(1+\eta)A)} \right] \quad (3.41)$$

e

$$V_{P,[2,2]}^{-2}(\Theta) \approx V_{Pe}^{-2}(\Theta) \left[ 1 + \frac{AV_{Pe}^{-4}(\Theta) + 4(1+\eta)A}{4(1+\eta)^2A^2 + 6(1+\eta)AV_{Pe}^{-4}(\Theta) + \frac{1}{4}V_{Pe}^{-8}(\Theta)} \right]. \quad (3.42)$$

Como nas aproximações de velocidade de fase 3.26, 3.27 e 3.28, pode-se observar nas aproximações 3.40, 3.41 e 3.42, que o termo elípticos e a contribuição para anelipticidade estão bem definidas e, para cada direção de propagação, as aproximações dependem somente das velocidades  $v_{Px}$  e  $v_{Pz}$  e do parâmetro  $\eta$ . Além disso, essas aproximações possuem menos operações aritméticas que a aproximação de velocidade de grupo *shifted hyperbola* e não possuem a operação de radiciação. Na Figura 3.5 a precisão das aproximações proposta: 3.40, 3.41 e 3.42, são comparadas a precisão das aproximações 3.31, 3.33 e 3.35, através dos erros relativos obtidos usando como modelo de subsuperfície o folhelho Greenhorn, usado no experimento anterior. Neste experimento fica bem claro que as aproximações 3.40, 3.41 e 3.42 são bem precisas, pois o erro relativo máximo não excede 0,5% para todos os ângulos de incidência.

Figura 3.5 – Erro relativo das aproximações de velocidade de fase: Ponto Azul - anisotropia fraca, Ponto verde - anelítica de Muir, Linha vermelha - *shifted-hyperbola*, Ponto preto - Padé [1/1], Ponto-traço preto - Padé [2/1], Tracejado preto - Padé [2/2].



Fonte: Autor

## 4 APROXIMAÇÕES DE SOBRETENPO

Aproximação hiperbólica para a curva de sobretempo de reflexão de ondas em camadas homogêneas é uma das assertivas fundamentais no processamento e interpretação convencional de dados sísmicos. Contudo, desvios deste modelo simples tem levado à se considerar as causas da não hiperbolicidade da curva de sobretempo. Dentre as possíveis razões destes desvios estão: heterogeneidade vertical ou lateral, anisotropia e curvatura do refletor.

Neste capítulo é apresentado um resumo da obtenção de aproximações de sobretempo para meios isotrópicos e VTI, tanto para o caso homogêneos quanto para o caso verticalmente heterogêneo. É dada ênfase nas aproximações em meios VTI, com o objetivo de realizar estimativa de parâmetros.

### 4.1 Tempos de trânsito de reflexões em geometria CMP

Considere  $V(\theta)$  a medida da velocidade de grupo e  $z$  a profundidade de uma interface refletora plana-horizontal. Os tempos de trânsito exatos de reflexões em geometria CMP (*common midpoint*), ou simplesmente sobretempo (*moveout*) em uma simples camada homogênea, como função do afastamento  $x$ , podem ser obtidos (teorema de Pitágoras) como:

$$t^2(x) = \frac{4z^2 + x^2}{V^2(\Theta)}, \quad (4.1)$$

sendo  $\Theta = \tan^{(-1)}\left(\frac{x}{t_z v_z}\right)$ , com  $t_z = \frac{2z}{v_z}$  o tempo de trânsito duplo na direção vertical.

Para o caso de um refletor simples, curtos afastamentos e camada isotrópica, a curva de sobretempo normal NMO (*normal moveout*), descreve uma hipérbole simétrica em relação ao eixo  $t$  e tem assíntotas que intersectam a origem do sistema de coordenadas, e tem a forma: (DIX, 1955):

$$t^2(x) \approx t_z^2 + \frac{x^2}{v_n^2}. \quad (4.2)$$

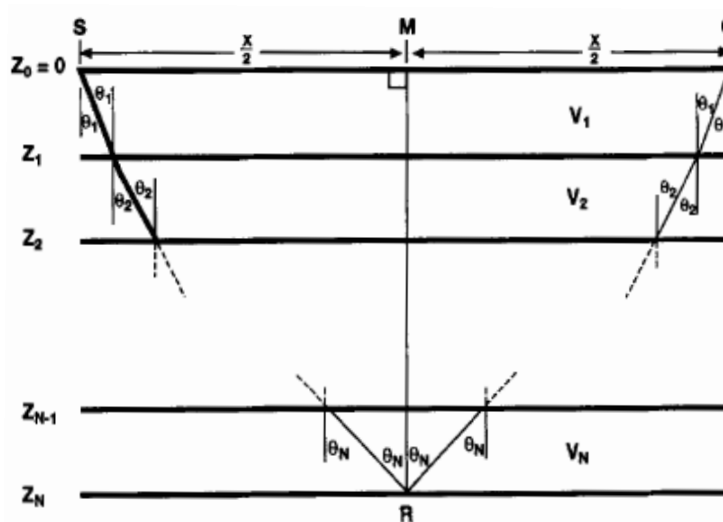
No caso de  $N$  camadas homogêneas planas e horizontais (Figura 4.1) e meios isotrópicos, a curva possui a mesma forma da aproximação 4.2, ou seja,

$$t^2(x) \approx t^2(0) + \frac{x^2}{v_{rms}^2}. \quad (4.3)$$

Contudo, têm-se a chamada velocidade RMS (*root mean square*) a qual pode ser obtida explicitamente como  $v_{rms} = \frac{1}{t_z(N)} \sum_{i=1}^N (v_n^i)^2 \Delta t_z^i$  (DIX, 1955), sendo  $t_z(N)$  o tempo de trânsito duplo total no afastamento nulo,  $v_n^i$  a velocidade NMO na  $i$ -ésima camada e  $\Delta t_z^i$  o tempo de trânsito duplo vertical em cada camada. A Figura 4.2 apresenta a geometria

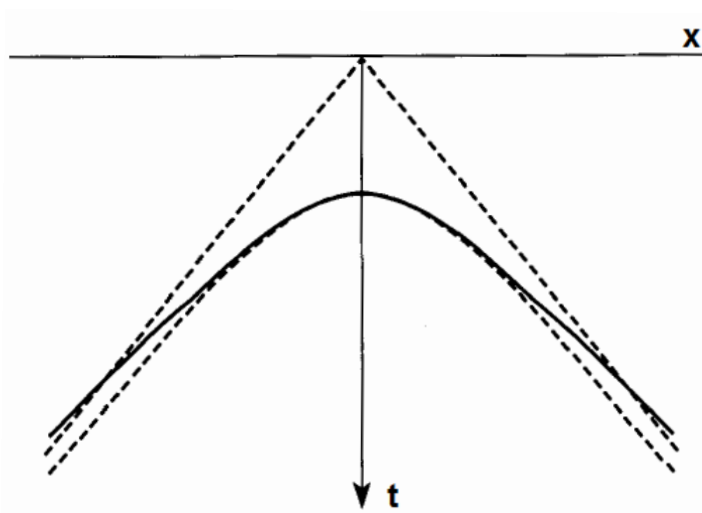
da equação NMO de Dix, nela pode-se observar a simetria em relação ao eixo  $t$  e sua assíntota intersectando a origem do sistema de coordenadas.

Figura 4.1 – Modelo de subsuperfície em camadas horizontais.



Fonte: Adaptado de Castle (1994)

Figura 4.2 – Geometria da aproximação de sobretempo, com a curva contínua representando a exata e as tracejadas a de Dix e suas assíntotas.



Fonte: Adaptado de Castle (1994)

## 4.2 Sobretempo não hiperbólico

### 4.2.1 Heterogeneidade e o sobretempo não hiperbólico

Para o caso de heterogeneidade vertical em um meio composto de  $N$  camadas homogêneas horizontais, ilustrado na Figura 4.1, o sobretempo normal pode ser aproximado

analiticamente por uma série de Taylor infinita, tomada no afastamento nulo, dada por Taner e Koehler (1969) e Hubral e Krey (1980) como:

$$t^2(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \sum_k A_{2k} x^{2k}, \quad (4.4)$$

sendo  $A_{2k} = \frac{1}{k!} \frac{d^k(t^2)}{(d(x^2))^k}$ .

Os coeficientes  $A_{2k}$  foram dados explicitamente por Castle (1994), até a sexta ordem, como:

$$A_0 = t_z^2, \quad (4.5)$$

$$A_2 = \frac{1}{\mu_2}, \quad (4.6)$$

$$A_4 = \frac{1}{4} \frac{\mu_2^2 - \mu_4}{t_z^2 \mu_2^4}, \quad \text{e} \quad (4.7)$$

$$A_6 = \frac{2\mu_4^2 - \mu_2\mu_6 - \mu_2^2 - \mu_4}{t_z^2 \mu_2^7}, \quad (4.8)$$

sendo,

$$\mu_{2j} = \frac{\sum_{i=1}^N t_z^{(i)} (v_z^{(i)})^{2j}}{\sum_{i=1}^N t_z^{(i)}} \quad (4.9)$$

o momento ponderado pelo tempo da distribuição de velocidades.

Os coeficientes  $A_{2k}$  também podem ser expressos em termos dos parâmetros de heterogeneidade (URSIN; STOVAS, 2006):

$$S_j = \frac{\mu_{2j}}{\mu_2^j} = \frac{\mu_{2j}}{v_{rms}^j}, \quad (4.10)$$

como:

$$A_0 = t_z^2, \quad (4.11)$$

$$A_2 = \frac{1}{v_{rms}^2}, \quad (4.12)$$

$$A_4 = \frac{1 - S_2}{4t_z^2 v_{rms}^4}, \quad \text{e} \quad (4.13)$$

$$A_6 = \frac{2S_2^2 - S_2 - S_3}{8t_z^4 v_{rms}^6}. \quad (4.14)$$

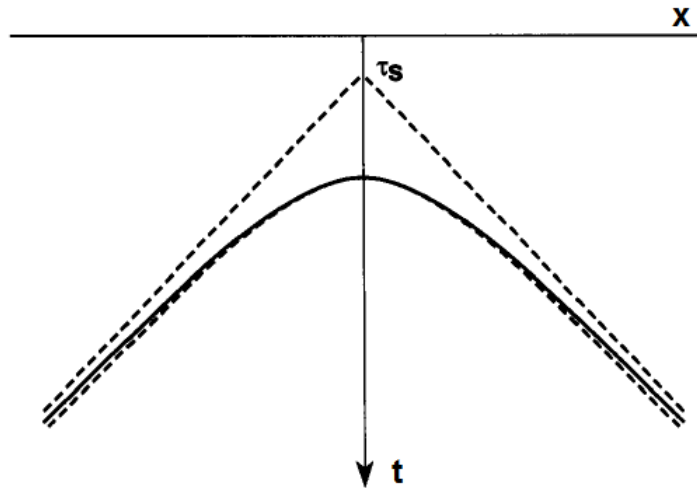
Malovichko (1978) usou a série hipergeométrica de Gauss para obter a equação NMO chamada de *shifted hyperbola* (curva NMO de Dix deslocada no tempo de intersecção com o eixo  $t$ ) e dada por:

$$t = \tau_S + \sqrt{\tau_z^2 + \frac{x^2}{v^2}}, \quad (4.15)$$

sendo  $\tau_z = t_z/S$ ,  $\tau_S = \tau_z(S - 1)$ ,  $v^2 = S v_{rms}^2$  e  $S = S_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2}$  uma medida de heterogeneidade. A equação *shifted hyperbola* 4.15 é mais precisa que a equação NMO de Dix (DE

BAZELAIRE, 1988) e quando representada como uma série em  $t^2$  é exata até a quarta ordem em relação ao afastamento (CASTLE, 1994). A Figura 4.3 apresenta a geometria da aproximação NMO shifted hyperbola, nela pode-se observar a simetria em relação ao eixo  $t$  e sua assíntota intersectando o eixo  $t$  em  $\tau_S$ .

Figura 4.3 – Geometria da aproximação de sobretempo, com a curva contínua representando a exata e as tracejadas a shifted hyperbola e suas assíntotas.



Fonte: Adaptado de Castle (1994)

## 4.2.2 Anisotropia e sobretempo não hiperbólico

Em meios anisotrópicos, mesmo no caso em que se tenha uma simples camada, a velocidade  $v_n$  difere da velocidade vertical  $v_z$  ou, no caso de camadas, da velocidade  $v_{rms}$  de velocidades vertical intervalares. Outro fato marcante em meios anisotrópicos é que a curva de sobretempo deixa de ser hiperbólica e passa a ser não hiperbólica. Considerando isto, Hake, Helbig e Mesdag (1984) obtiveram aproximações não hiperbólicas para sobretempo de reflexões de ondas P, SV e SH em camadas homogêneas plana horizontais VTI, explicitando até a quarta ordem os coeficientes 4.16 da expansão em série de Taylor 4.2.2 como função dos parâmetros elásticos. Assim, dado N camadas homogêneas planas horizontais acima de um refletor, os coeficientes  $A_k$  para  $k = 0, 2$  e  $4$  são dados explicitamente como:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} A_0 &= \left( \sum_{i=1}^N t_z^{(i)} \right)^2, \\ \lim_{x \rightarrow 0} A_2 &= \frac{\sum_{i=1}^N t_z^{(i)}}{\sum_{i=1}^N (v_n^{(i)})^2 t_z^{(i)}}, \\ \lim_{x \rightarrow 0} A_4 &= \frac{\left[ \sum_{i=1}^N (v_n^{(i)})^2 t_z^{(i)} \right]^2 - \sum_{i=1}^N t_z^{(i)} \times \sum_{i=1}^N [(v_n^{(i)})^4 + H^{(i)}] t_z^{(i)}}{4 \left[ \sum_{i=1}^N (v_n^{(i)})^2 t_z^{(i)} \right]^4}, \end{aligned} \quad (4.16)$$

sendo  $v_n^{(i)}$  a velocidade de empilhamento (NMO) na  $i$ -ésima camada,  $t_z^{(i)}$  o tempo de trânsito vertical duplo na  $i$ -ésima camada e  $H^{(i)} = \left(\frac{1}{s_1} \times \frac{d(v_n^2)}{d(s_1)}\right)$ , com  $s_1$  a componente horizontal do vetor vagarosidade (parâmetro do raio  $p$ ).

Hake, Helbig e Mesdag (1984) também observaram que a expressão para  $A_4$  pode ser dividida em uma parte devido a heterogeneidade  $A_4(H)$  e outra devido a isotropia transversa  $A_4(I)$  tal que:

$$\begin{aligned} A_4 &= A_{4H} + A_{4TI} \\ &= \frac{\left(\sum_{i=1}^N (v_n^{(i)})^2 \Delta t^{(i)}\right)^2 - \sum_{i=1}^N \Delta t^{(i)} \times \sum_{i=1}^N (v_n^{(i)})^4 \Delta t^{(i)}}{4 \left[\sum_{i=1}^N (v_n^{(i)})^2 \Delta t^{(i)}\right]^4} \\ &\quad - \frac{\sum_{i=1}^N \Delta t^{(i)} \times \sum_{i=1}^N H^{(i)} \times \Delta t^{(i)}}{4 \left[\sum_{i=1}^N (v_n^{(i)})^2 \Delta t^{(i)}\right]^4}. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Posteriormente, estes coeficientes foram explicitados até a oitava ordem, em função do parâmetro de heterogeneidade  $S_j$  4.10, por Ursin e Stovas (2006), o qual constatou que a série é exatamente a obtida por Hubral e Krey (1980), porém com o momento da distribuição de velocidades dado explicitamente em função dos parâmetros elásticos combinado aos parâmetros de Thomsen.

No entanto, devido a expansão desviar-se rapidamente da curva de tempo exata para valores da razão afastamento-profundidade  $x/z$  moderada ( $x/z > 1,5$ ), Tsvankin e Thomsen (1994), usando uma aproximação racional no terceiro termo, apresentaram uma aproximação não hiperbólica mais precisa em afastamentos maiores ( $x/z$  até 2,0) como função dos parâmetros de Thomsen, válida para meios com camada simples ou multicamada, dada por:

$$t^2(x) \equiv t_z^2 + \frac{x^2}{V_n^2} + \frac{A_4 x^4}{1 + Ax^2} \quad (4.18)$$

sendo que, no caso de camadas simples, o coeficiente  $A_4$  para ondas P, SV e SH, são dados em função dos parâmetros de Thomsen, respectivamente, como:

$$\begin{aligned} A_{4,P} &= -\frac{2(\epsilon - \delta)(1 + 2\delta/f)}{t_{Pz}^2 v_{Pz}^4 (1 + 2\delta)^4}, \\ A_{4,SV} &= \frac{2\sigma(1 + 2\delta/f)}{t_{SVz}^2 V_{SVz}^4 (1 + 2\sigma)^4}, \\ A_{4,SH} &= 0, \end{aligned} \quad (4.19)$$

$$\text{com } f \equiv 1 - \frac{V_{SVz}^2}{V_{Pz}^2} = 1 - \frac{c_{55}}{c_{33}} \text{ e } A = \frac{A_{4,Q}}{\frac{1}{V_z^2} - \frac{1}{V_n^2}}.$$

### 4.2.3 Aproximações de sobretempo não-hiperbólicas para propagação de ondas P em meios homogêneos VTI

Visando o possesamento em meios homogêneos VTI, Alkhalifah e Tsvankin (1995) mostraram que a assinatura da propagação de ondas  $P$  é totalmente caracterizada pela



velocidade  $v_{P_n}$  e pelo parâmetro  $\eta$ . Esta constatação tem levado muitos autores a obterem aproximações de sobretempo não hiperbólicas que sejam parametrizadas por  $t_z, v_{P_n}$  e  $\eta$  para fins de processamento sísmico como: análise de velocidades, correção NMO e migração no domínio do tempo.

Alkhalifah e Tsvankin (1995) reescreveu a aproximação 4.18 como:

$$t_P^2(x) \approx t_{Pz}^2 + \frac{x^2}{v_{P_n}^2} - \frac{2\eta x^4}{v_{P_n}^4 (v_{P_n}^4 t_{Pz}^2 + (1 + 2\eta)x^2)}. \quad (4.20)$$

Esta aproximação mostra que para pequenos afastamentos ( $x \ll z$ ), a influência do parâmetro  $\eta$  é desprezível, o que torna a curva aproximadamente hiperbólica. Contudo, para grandes valores de afastamento ( $x \gg z$ ), o terceiro termo em 4.20 tem uma influência considerável no sobretempo. A expansão em série de Taylor da aproximação 4.20 na vizinhança do raio vertical no afastamento nulo tem a forma:

$$t_P^2(x) \approx t_{Pz}^2 + \frac{x^2}{v_{P_n}^2} - \frac{2\eta x^4}{v_{P_n}^4 t_{Pz}^2} + \frac{2\eta x^6}{v_{P_n}^6 t_{Pz}^4} - \dots \quad (4.21)$$

A aproximação de sobretempo não hiperbólica baseada na aproximação de velocidade de grupo 3.33 em função dos parâmetros  $v_{P_n}$  e  $\eta$  é dada por:

$$t_P^2(x) \approx t_{Ph}^2 + \frac{(v_{Px}^2 - v_{Pn}^2) t_{Pz}^2 x^2}{v_{Pn}^2 v_{Px}^2 t_{Ph}^2}. \quad (4.22)$$

sendo  $t_{Ph}^2(x) = t_{Pz}^2 + \frac{x^2}{(1 + 2\eta)v_{Pn}^2}$  a contribuição hiperbólica.

Fomel (2004) apresentou a aproximação de sobretempo não hiperbólica *shifted-hyperbola*, bastante precisa para grandes valores da razão  $x/z$ , baseada na aproximação de velocidade de grupo 3.35 como:

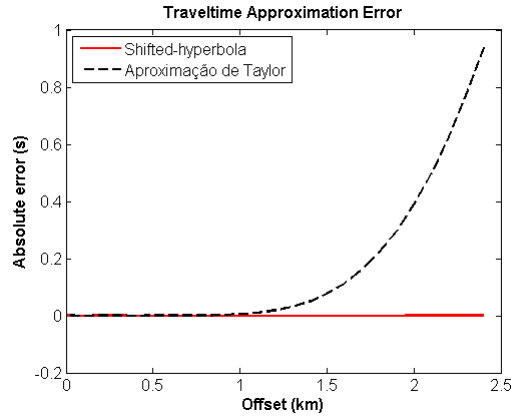
$$t_P^2(x) \approx \frac{3 + 4\eta}{4(1 + \eta)} t_{Ph}^2(x) + \frac{1}{4(1 + \eta)} \sqrt{t_{Ph}^4(x) + \frac{16\eta(1 + \eta)}{(1 + 2\eta)} \frac{t_{Pz}^2 x^2}{v_{Pn}^2}}. \quad (4.23)$$

Contudo, para aproximar sobretempo em pequenos afastamentos ( $x \ll z$ ) ele sugeriu utilizar uma expansão série de Taylor até a sexta ordem:

$$t_P^2(x) \approx t_{Pz}^2 + \frac{x^2}{v_{P_n}^2} - \frac{2\eta x^4}{v_{P_n}^4 t_{Pz}^2} + \frac{2\eta(1 + 8\eta + 8\eta^2)x^6}{(1 + 2\eta)v_{P_n}^6 t_{Pz}^4} - \dots \quad (4.24)$$

No entanto, apesar da aproximação 4.23 ser válida em grandes afastamentos (FOMEL, 2004) ela possui uma forma algébrica em que o termo não hiperbólico é um radical, e sua expansão em série de Taylor 4.24 diverge a partir dos afastamentos intermediários. Estes fatos podem ser observado no experimento na Figura 4.4, no qual estão apresentados os erros relativos das curvas *shifted-hyperbola* 4.23 e sua expansão em série de Taylor 4.24, no folheto Greenhorn usado em experimentos anteriores.

Figura 4.4 – Erro relativo das aproximações de sobretempo: linha vermelha - *shifted-hyperbola* e tracejado preto - Expansão de Taylor da *shifted-hyperbola*.



Fonte: Autor

Assim, devido ao fato da aproximação na forma da expansão em série de Taylor divergir rapidamente, proponho neste trabalho aproximações de sobretempo não hiperbólicas racionais, como uma alternativa a aproximação 4.23 ou sua expansão em série de Taylor 4.24, baseadas nas aproximações anelíticas racionais (aproximante de Padé) de velocidade de grupo 3.40, 3.41 e 3.42. Estas aproximações não hiperbólicas são dadas explicitamente como:

$$t_{P,[1,1]}^2(x) \approx t_{Ph}^2(x) \left[ 1 + \frac{1}{B(x)/C(x) + 2(1 + \eta)} \right], \quad (4.25)$$

$$t_{P,[2,1]}^2(x) \approx t_{Ph}^2(x) \left\{ 1 + \frac{B(x) + 2(1 + \eta)C(x)}{B(x) [B(x)/C(x) + 4(1 + \eta)]} \right\} \quad (4.26)$$

e

$$t_{P,[2,2]}^2(x) \approx t_{Ph}^2(x) \left\{ 1 + \frac{B(x) + 4(1 + \eta)C(x)}{B(x) [B(x)/C(x) + 6(1 + \eta)] + 4(1 + \eta)^2 C(x)} \right\}. \quad (4.27)$$

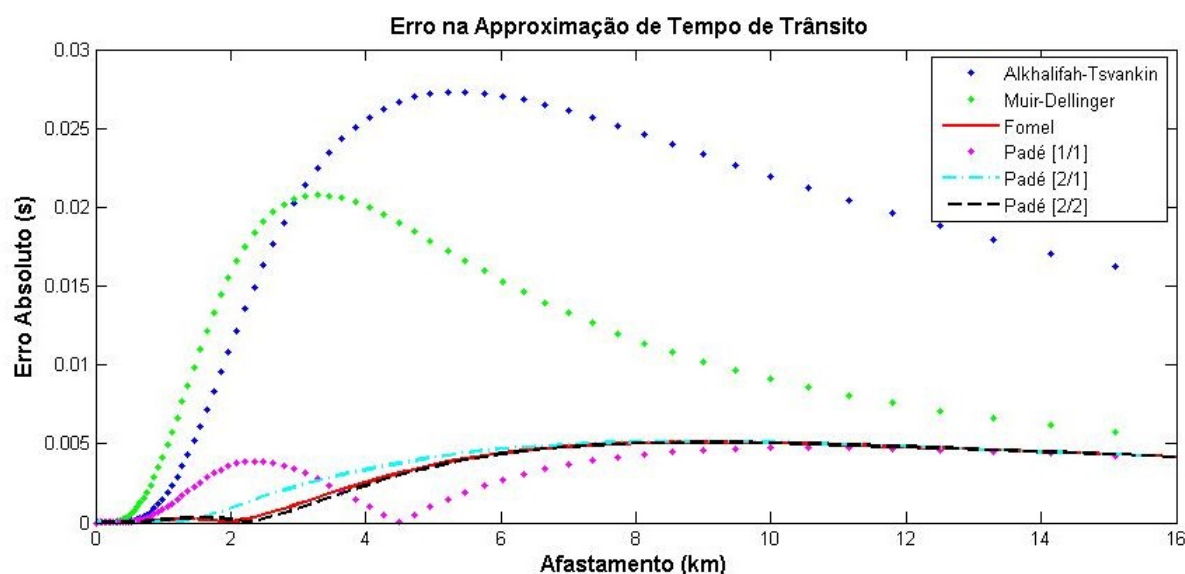
sendo  $B(x) = (1 + 2\eta)v_{Pn}^2 t_{Ph}^4(x)$  e  $C(x) = 2\eta t_{Pz}^2 x^2$ .

As aproximações 4.25, 4.26 e 4.27 possuem uma formulação simples com as contribuições hiperbólica e não hiperbólica bem explicitadas. Nestas a quantidade de operações aritméticas é menor e não há operação aritmética de raiz quadrada como na função original 4.23. Para cada afastamento em uma geometria CMP, essas aproximações dependem somente de  $t_z$ ,  $v_{Pn}$  e  $\eta$  o que as capacita para problemas inversos.

Para aferir a validade das aproximações racionais, aqui apresentadas, foi realizado experimento numérico de tempo de propagação de uma onda P refletida na base do folhelho Greenhorn. Na Figura 4.5 estão apresentados os resultados na forma de erro absoluto para cada uma das aproximações: 4.20, 4.22, 4.23, 4.25, 4.26 e 4.27. Como era de se esperar, devido aos resultados dos experimentos com as respectivas aproximações de velocidade

de grupo, as aproximações racionais 4.25, 4.26 e 4.27 têm nível de precisão na ordem dos milisegundos, são relativamente equivalentes à aproximação *shifted-hyperbola* 4.23 e possuem menor erro que as aproximações 4.20, 4.22. Para este modelo de subsuperfície, a aproximação 4.26 apresenta um erro absoluto menor nos afastamentos intermediários e grandes.

Figura 4.5 – Erro relativo das aproximações de sobretempo: Ponto azul - Alkhalifah-Tsvankin-Thomsen, ponto verde - Muir, linha vermelha - *shifted-hyperbola*, Ponto preto - Padé [1/1], Ponto-traço preto - Padé [2/1], Tracejado preto - Padé [2/2].



Fonte: Autor

### 4.3 Aproximações de sobretempo não-hiperbólicas para propagação de ondas P em meios VTI verticalmente heterogêneos

Devido a precisão das aproximações não hiperbólicas de sobretempo em meios homogêneos VTI obtidas aqui, uma consequência imediata à discussão é a possibilidade de se estender estas para o caso de meios VTI horizontalmente acamados. Uma das formas de se fazer isto, é atribuir valores efetivos aos parâmetros litológicos. Tsvankin e Thomsen (1994) mostraram que a aproximação 4.18 permanece válida em meios homogêneos VTI, horizontalmente acamados, desde que os coeficientes na aproximação de sobretempo sejam substituídos por valores efetivos que incluam a influência da heterogeneidade vertical acima do refletor. Eles, também, desenvolveram um procedimento de diferenciação, tipo Dix, para estimar os valores intervalares do coeficiente  $A_4$  nas curvas de sobretempo. Grechka e Tsvankin (1998) modificaram a aproximação de Tsvankin e Thomsen (1994) introduzindo os valores efetivos e intervalares do parâmetro  $\eta$  (ou  $v_{Px}$ ) e, seguindo Alkhalifah e Tsvankin (1995), ignoraram a contribuição de  $v_{SVz}$  em sua aproximação. Assim, para o caso de reflexão de ondas P em um meio horizontalmente estratificado VTI, formado por  $N$

camadas homogêneas, o tempo de trânsito aproximado na base da  $N$ -ésima interface pode ser calculado com a aproximação 4.20, porém reescrita como:

$$(t_P)_N^2(x) \approx (t_{Pz})_N^2 + \frac{x^2}{(v_{Pn})_N^2} - \frac{[(v_{Px})_N^2 - (v_{Pn})_N^2] x^4}{(v_{Pn})_N^2 [(t_{Pz})_N^2 (v_{Pn})_N^4 + C(v_{Px})_N^2 x^2]}, \quad (4.28)$$

sendo  $C$  um fator de peso usado em processos inversos e o subscrito  $N$  caracterizando valores efetivos das grandezas.

A velocidade  $(v_{Pn})_N$  é calculada a partir dos seus valores intervalares  $v_{Pn}^{(i)}$  e do tempo no afastamento nulo intervalar  $t_{Pz}^{(i)}$  usando a equação de Dix (DIX, 1955):

$$(v_{Pn})_N^2 = \frac{1}{(t_{Pz})_N} \sum_{i=1}^N (v_{Pn}^{(i)})^2 (t_{Pz}^{(i)})^2. \quad (4.29)$$

Já a velocidade horizontal efetiva  $(v_{Px})_N$  é calculada usando a definição 3.13:

$$(v_{Px})_N^2 = (v_{Pn})_N^2 (1 + 2\eta_N), \quad (4.30)$$

sendo

$$\eta_N = \frac{1}{8} \left\{ \frac{1}{(v_{Pn})_N^4 (t_{Pz})_N} \left[ \sum_{i=1}^N (v_{Pn}^{(i)})^4 (1 + 8\eta^{(i)}) t_{Pz}^{(i)} \right] - 1 \right\}, \quad (4.31)$$

em que os parâmetros intervalares  $\eta^{(i)}$  são obtidos a partir dos valores intervalares da velocidade de fase horizontal  $v_{Px}^{(i)}$  pela equação 4.30. A equação 4.31 é obtida combinando o coeficiente  $A_4$  na série 4.21 com o respectivo coeficiente exato 4.16, ou seja, baseada no fato de que o parâmetro de heterogeneidade vertical  $S_2$  no coeficiente  $A_4$  na série de Taylor seja:

$$S_2 = 1 + 8\eta. \quad (4.32)$$

Considerando meios VTI horizontalmente estratificados e seguindo a mesma metodologia de Grechka e Tsvankin (1998), ou seja, de se adaptar as aproximações para meios  $v(z)$  utilizando-se valores efetivos de  $(v_{Pn})_N$  e  $\eta_N$ , é possível reescrever a aproximação não-hiperbólica *shifeted hyperbola* 4.23 (FOMEL, 2004), bem como as aproximações: 4.25, 4.26 e 4.27, para aproximar sobretempo em meios  $v(z)$  como:

$$(t_P)_N^2(x) \approx \frac{3 + 4\eta_N}{4(1 + \eta_N)} (t_{Ph})_N^2(x) + \frac{1}{4(1 + \eta_N)} \sqrt{(t_{Ph})_N^2(x) + \frac{16\eta_N(1 + \eta_N)}{(1 + 2\eta_N)} \frac{(t_{Pz})_N^2 x^2}{(v_{Pn})_N^2}}, \quad (4.33)$$

$$(t_{P,[1,1]})_N^2(x) \approx (t_{Ph})_N^2(x) \left[ 1 + \frac{1}{B_N(x)/C_N(x) + 2(1 + \eta_N)} \right], \quad (4.34)$$

$$(t_{P,[2,1]})_N^2(x) \approx (t_{Ph})_N^2(x) \left\{ 1 + \frac{B_N(x) + 2(1 + \eta_N)C_N(x)}{B_N(x) [B_N(x)/C_N(x) + 4(1 + \eta_N)]} \right\} \quad (4.35)$$

e

$$(t_{P,[2,2]}^2)_N(x) \approx (t_{Ph})_N^2(x) \left\{ 1 + \frac{B_N(x) + 4(1 + \eta_N)C_N(x)}{B_N(x) [B_N(x)/C_N(x) + 6(1 + \eta_N)] + 4(1 + \eta_N)^2 C_N(x)} \right\}. \quad (4.36)$$

sendo  $(v_{Pn})_N$  obtidos como em 4.29.

Contudo, baseado em experimentos numéricos, pôde-se verificar, que no caso das aproximações 4.33, 4.34, 4.35 e 4.36, a contribuição da heterogeneidade é obtida como:

$$S_2 = 1 + (14/5)\eta. \quad (4.37)$$

Assim, o valor efetivo do parâmetro  $\eta$  para o caso de N camadas, pode ser calculado como:

$$\eta_N = \frac{5}{14} \left\{ \frac{1}{(v_{Pn})_N^4 (t_{Pz})_N} \left[ \sum_{i=1}^N (v_{Pn}^{(i)})^4 \left( 1 + \frac{14}{5} \eta^i \right) t_{Pz}^{(i)} \right] - 1 \right\}. \quad (4.38)$$

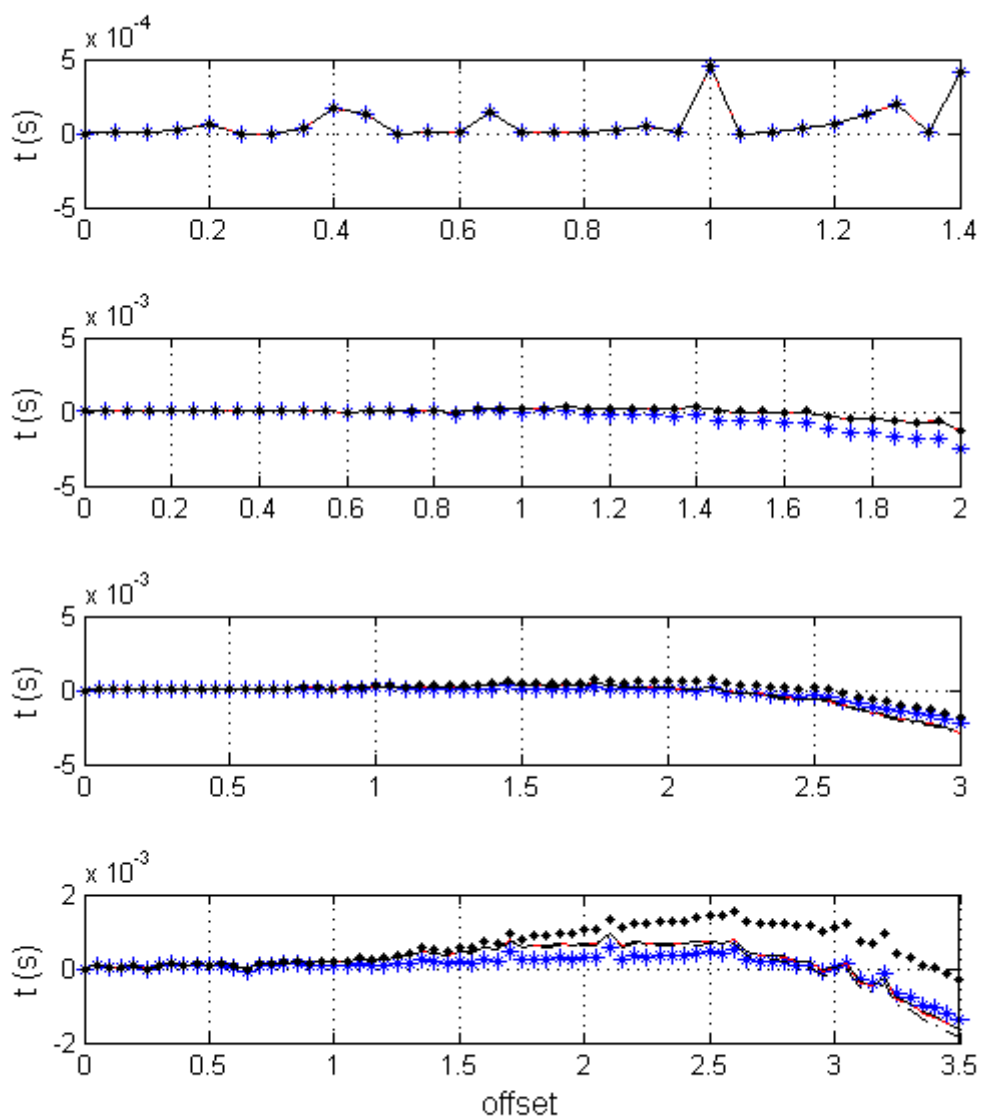
Para aferir a validade destas aproximações em meios estratificados VTI, é usado um modelo de subsuperfície (GRECHKA; TSVANKIN, 1998), com profundidades  $z$ , velocidades  $v_{Pz}$  e  $v_{SVz}$  e parâmetros de Thomsen:  $\epsilon$ ,  $\delta$  e  $\eta$ , em cada camada, apresentados na Tabela 4.1. O modelo é composto de quatro camadas homogêneas com velocidade  $v_{Pz}$  aumentando com a profundidade a um gradiente médio de aproximadamente  $0.6s^{-1}$  e valores de  $\eta$  variando de zero na superfície à um máximo de 0.2 na terceira camada. A Figura 4.6 apresenta os erros absolutos dos tempos obtidos com as curvas de sobretempo: 4.28, 4.33, 4.34, 4.35 e 4.36, em relação aos tempos obtidos por traçamento de raio. Observa-se que as aproximações são válidas para experimentos em camadas, pois possuem precisão, na escala do tempo, na ordem de  $10^{-3}s$ .

Tabela 4.1 – Modelo de subsuperfície com quatro camadas homogêneas VTI (GRECHKA; TSVANKIN, 1998).

Camada	$z(km)$	$v_{Pz}(km/s)$	$v_{SVz}(km/s)$	$\epsilon$	$\delta$	$\eta$
1	0.7	2.0	0.3	0.05	0.0500	0.00
2	1.0	2.42	0.3	0.15	0.0417	0.10
3	1.5	2.60	0.3	0.30	0.0714	0.20
4	1.7	2.90	0.3	0.20	0.0469	0.14

Fonte: Adaptado de Grechka e Tsvankin (1998).

Figura 4.6 – Erro absoluto das aproximações de sobretempo: Ponto azul - Alkhalifah-Tsvankin-Thomsen, linha vermelha - *shifted-hyperbola*, Ponto preto - Padé [1/1], Ponto-traço preto - Padé [2/1], Tracejado preto - Padé [2/2].



Fonte: Autor

## 5 ESTIMATIVA DE PARÂMETROS EM MEIOS VTI

Um dos maiores objetivos do processamento sísmico é, a partir dos dados obtidos em campo, estimar os parâmetros litológicos para obtenção de modelos iniciais que venham a produzir uma imagem da subsuperfície. Para tanto é necessário que se tenha modelos matemáticos e algoritmos que sejam eficazes no cumprimento destas metas. Neste capítulo é aferida a precisão e robustez das aproximações de sobretempo sugeridas na literatura e obtidas aqui, através da estimativa de parâmetros anisotrópicos de reflexões de onda P em meios VTI. Para tanto, análise de velocidades usando semblance tradicional, porém adaptado com curvas de sobretempo não hiperbólicas, é realizada. É desenvolvida, também, uma discussão na adaptação do funcional semblance, para que se possa considerar dados com variações da amplitude com o afastamento (AVO) com e sem ruídos.

### 5.1 Análise de velocidades baseada em semblance

Análise de velocidades baseada em semblance em conjuntos CMP, tradicionalmente é realizada para estimar o tempo vertical  $t_z$  e a velocidade de empilhamento  $v_n$ , maximizando o funcional (TANER; KOEHLER, 1969):

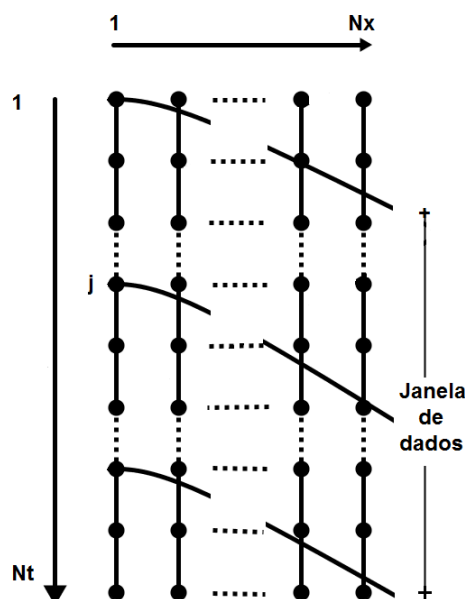
$$S(t_z, v) = \frac{\sum_{\tau=t_z-T/2}^{t_z+T/2} [\sum_x \mathbf{D}(\tau, x)]^2}{N \sum_{\tau=t_z-T/2}^{t_z+T/2} \sum_x \mathbf{D}^2(\tau, x)}, \quad (5.1)$$

sendo  $N$  o número total de traços sísmicos em um conjunto CMP,  $\tau$  o tempo de trânsito duplo vertical em uma janela temporal  $T$  centrada em um dado  $t_z$  e  $\mathbf{D}(\tau, x)$  o dado amostrado corrigido por uma curva de sobretempo  $t(\tau, v_n)$ . A Figura 5.1 ilustra uma janela de dados utilizada na análise de velocidades.

No semblance tradicional a curva de sobretempo é hiperbólica, o que limita a precisão das estimativas a valores da razão afastamento-profundidade no máximo 1 ( $x/z \leq 1$ ). Uma outra limitação do semblance tradicional é que, por ser uma medida de correlação entre as amplitudes dos traços sísmicos, ele não estima bem os parâmetros na presença de forte variação de amplitude com o afastamento e/ou polaridade reversa.

Como os efeitos da anisotropia em CMP's são mais proeminentes à grandes valores de  $x/z$ , Alkhalifah (1997) adaptou a análise de velocidades por semblance em meios VTI, para o caso de propagação de ondas P, introduzindo a curva não hiperbólica 4.20 com o objetivo de estimar os parâmetros  $v_{Pn}$  e  $\eta$ , dado o tempo  $t_{Pz}$ . Contudo Grechka e Tsvankin (1998) observaram instabilidades numéricas no referido método, na estimativa direta do parâmetro  $\eta$  assim, reescreveram a aproximação 4.20 em função das velocidades  $v_{Pn}$  e  $v_{Px}$  para com estes obter  $\eta$ .

Figura 5.1 – Ilustração da janela de dados do funcional semblance.



Fonte: Adaptado de (URSIN; SILVA; PORSANI, 2014).

### 5.1.1 Análise de velocidades por semblance em meios homogêneos VTI

Neste experimento é realizada análise de velocidades, baseado em semblance tradicional, com a aproximação não hiperbólica *shifted hyperbola* 4.23 e com as aproximações racionais 4.25, 4.26 e 4.27. Para tanto, foi confeccionada uma seção CMP sintética, apresentada na Figura 5.2, com tempos de trânsito obtidos por traçamento de raio usando o software ANRAY (GAJEWSKI; PŠENCÍK, 1987). O modelo de subsuperfície é o folhelho VTI Greenhorn, usado em experimentos na seção 3.1, com interface refletora localizada a uma profundidade  $z = 1,0 \text{ km}$ , com tempo vertical  $t_z = 0,6464 \text{ s}$ , e cujos parâmetros exatos a serem estimados são:  $v_{P_n} = 2,9336 \text{ km/s}$ ,  $v_{P_x} = 3,8045 \text{ km/s}$  e  $\eta = 0,3409$ . O tempo de transito foi amostrado à  $\Delta t = 2 \text{ ms}$  e a assinatura da fonte usada foi um pulso Ricker com frequência dominante  $f = 20 \text{ Hz}$ . Observa-se neste sismograma sintético, a ausência de variação na amplitude e fase, bem como eventos livres de ruído.

Para ilustrar a análise de velocidades, as Figuras 5.3 (a)-(d) e 5.4 (a)-(d) apresentam para  $x/z = 1,5$  e  $x/z = 4,0$ , respectivamente, os mapas semblance  $v_{P_n}$  versus  $v_{P_x}$  obtidos usando as aproximações não hiperbólicas supra citadas. Os valores dos erro relativo das velocidades  $v_{P_n}$  e  $v_{P_x}$  e do parâmetro  $\eta$ , estão apresentados nas Tabelas 5.1 e 5.2.

Quanto ao experimento para  $x/z = 1,5$ , os resultados apresentados na Figura 5.3 e Tabela 5.1 mostram que: (a) Os valores de máximo semblance coincidem até aos milésimos para todas as aproximações de sobretempo comparadas. Assim, esta condição é



necessária, mas não suficiente para determinar a curva de sobretempo que melhor estima os parâmetros, (b) A aproximação racional de sobretempo, Padé [1/1], é mais precisa que as demais na estimativa das velocidades  $v_{Pn}$  e  $v_{Px}$  e do parâmetro  $\eta$  para moderados valores de  $x/z$ , pois o erro relativo, na faixa de 1%, é menor que nas demais.

Já no experimento para  $x/z = 4,0$ , os resultados apresentados na Figura 5.4 e Tabela 5.2 mostram que: (a) O valor de máximo semblance é aproximadamente 1 para todas as aproximações comparadas, contudo a diferença nas estimativas é sensível, particularmente a estimativa do parâmetro  $\eta$ , (b) A aproximação racional de sobretempo, Padé [2/1], mostra-se mais eficiente e precisa que as demais na estimativa das velocidades  $v_{Pn}$  e  $v_{Px}$  e do parâmetro  $\eta$  para grandes valores de  $x/z$ , pois o erro relativo, na faixa de 1%, é menor que nas demais.

Para aferir a sensibilidade das aproximações racionais de sobretempo, da aproximação Alkhalifah-Tsvankin (4.20) e da aproximação *shifted hyperbola* (4.23), em relação à razão  $x/z$ , nas Figuras 5.5 à 5.5 são apresentados os valores estimados das velocidades  $v_{Pn}$  e  $v_{Px}$ , e do parâmetro  $\eta$ , bem como o valor de máximo semblance, como função de  $x/z$ . O que se pode observar é que a aproximação racional de Padé [1/1] estima melhor os parâmetros, que as demais aproximações, principalmente o parâmetro  $\eta$ , para valores da razão  $x/z$  até 3. já a aproximação racional de Padé [2/1] estima melhor os parâmetros para grandes valores da razão  $x/z$ . Pode-se notar, ainda, que o valor de máximo semblance é sempre próximo a unidade para todas as aproximações.

Figura 5.2 – CMP sintético obtido do folhelho VTI Greenhorn.

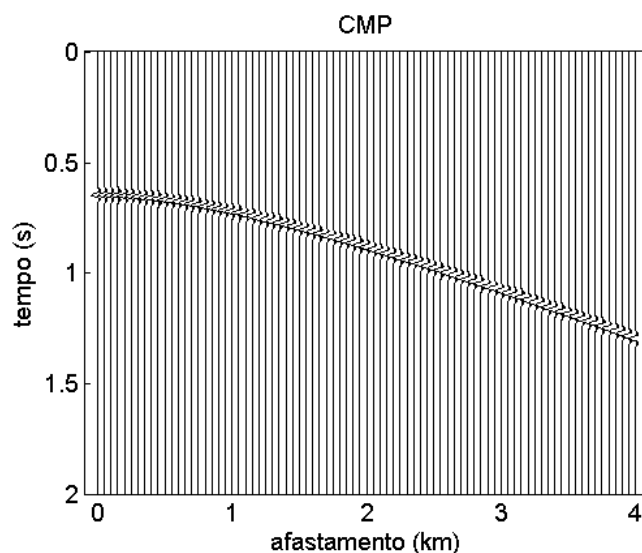
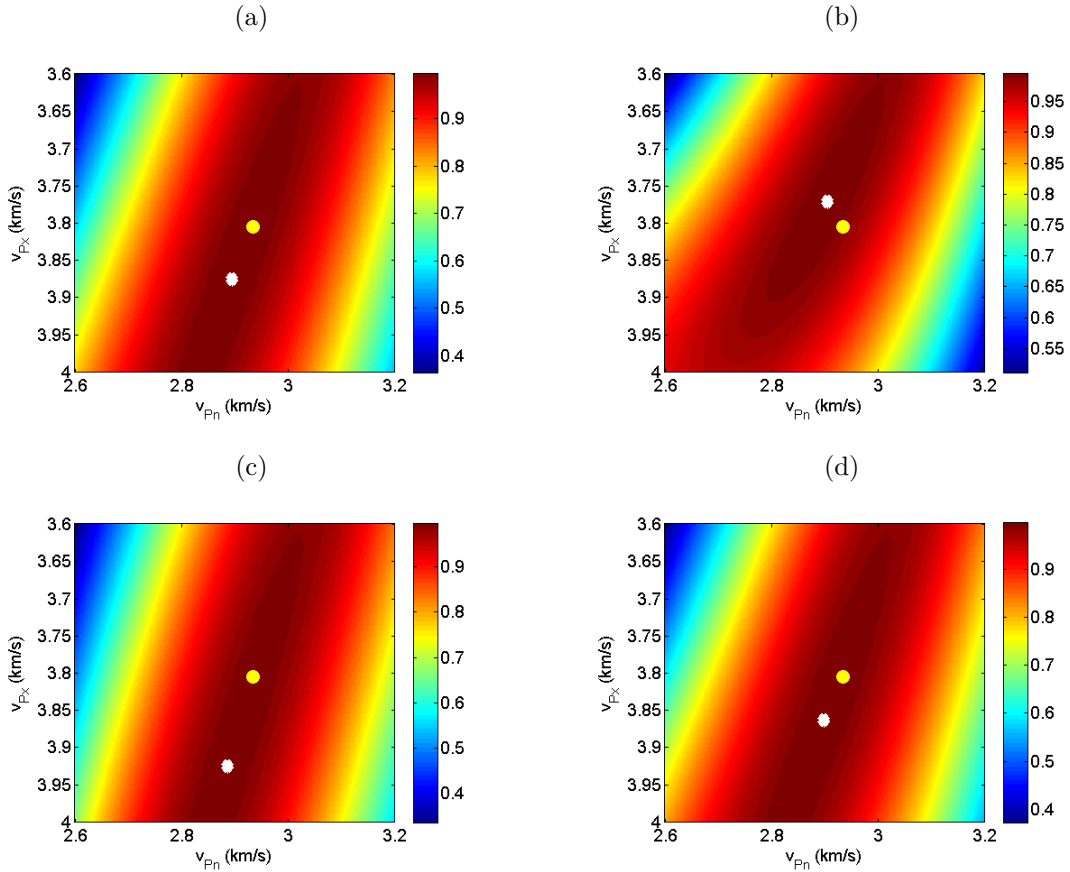


Figura 5.3 – Mapa semblance  $v_{Pn}$  versus  $v_{Px}$ , usando as curvas de sobretempo: (a) *Shifted hyperbola* 4.23, (b) Padé [1/1] 4.25, (c) Padé [2/1] 4.26 e (d) Padé [2/2] 4.27, para estimar estas velocidades e o parâmetros  $\eta$  no folhelho VTI Greenhorn para  $x/z = 1,5$ . Círculo amarelo - valor exato e círculo branco - valor aproximado.



Fonte: Autor.

Tabela 5.1 – Valores do erro relativo nas estimativas das velocidades  $v_{Pn}$ ,  $v_{Px}$  e do parâmetro  $\eta$ , e o valor de máximo semblance, obtidos na análise de velocidades no folhelho VTI Greenhorn para  $x/z = 1,5$ .

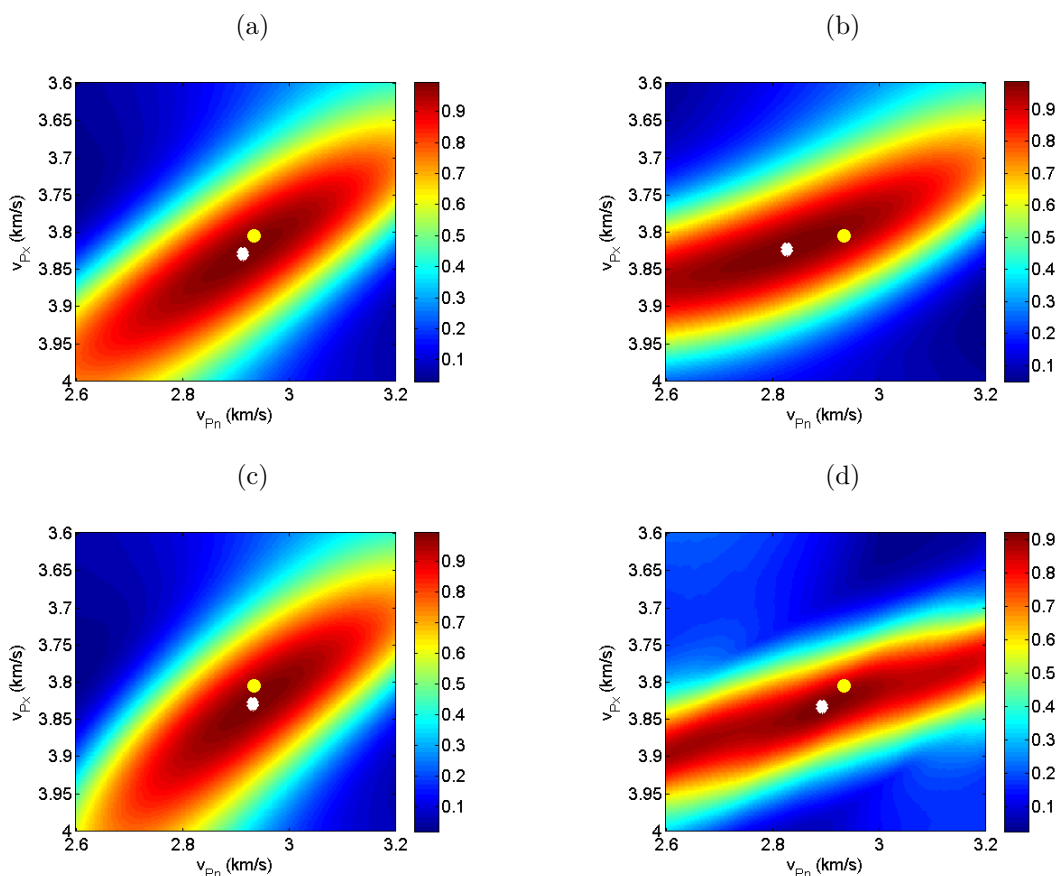
	Erro $v_{Pn}$ (%)	Erro $v_{Px}$ (%)	Erro $\eta$ (%)	$S_{max}$
<b>Shifted hyperbola</b>	1.3165	1.8633	16.1516	0.9965
<b>Padé [1/1]</b>	0.9912	0.8344	0.5434	0.9965
<b>Padé [2/1]</b>	1.6078	3.1838	24.6224	0.9965
<b>Padé [2/2]</b>	1.1967	1.5460	13.8963	0.9965

Fonte: Autor.

### 5.1.2 Análise de velocidades por semblance em meios VTI $v(z)$

Na seção 4.3 foi desenvolvido o suporte teórico para utilização das aproximações não hiperbólicas em função dos valores efetivos da velocidade  $v_{Pn}$  e do parâmetro  $v_{Px}$  ( $\eta$ ), em modelos de subsuperfície composto de  $N$  camadas homogêneas VTI. Nesta seção são feitas adaptações, no algoritmo de análise de velocidades em meios VTI (GRECHKA;

Figura 5.4 – Mapa semblance  $v_{Pn}$  versus  $v_{Px}$ , usando as curvas de sobretempo: (a) *Shifted hyperbola* 4.23, (b) Padé [1/1] 4.25, (c) Padé [2/1] 4.26 e (d) Padé [2/2] 4.27, para estimar estas velocidades e o parâmetros  $\eta$  no folhelho VTI Greenhorn para  $x/z = 4, 0$ . Círculo amarelo - valor exato e círculo branco - valor aproximado.



Fonte: Autor.

Tabela 5.2 – Valores do erro relativo nas estimativas das velocidades  $v_{Pn}$ ,  $v_{Px}$  e do parâmetro  $\eta$ , e o valor de máximo semblance, obtidos na análise de velocidades no folhelho VTI Greenhorn para  $x/z = 4, 0$ .

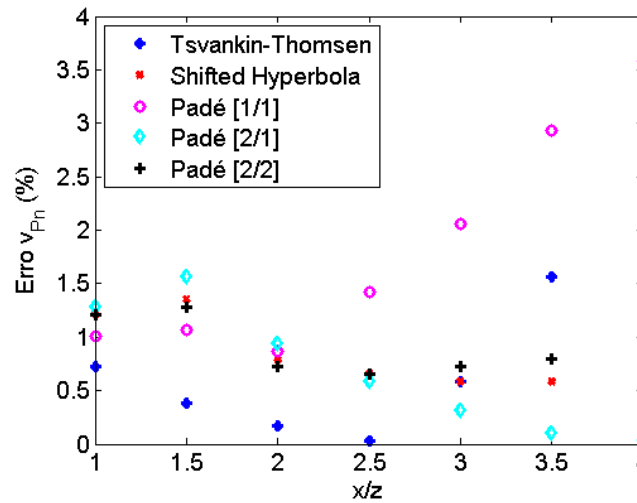
	Erro $v_{Pn}$ (%)	Erro $v_{Px}$ (%)	Erro $\eta$ (%)	$S_{max}$
<b>Shifted hyperbola</b>	0.6313	0.6481	6.3925	0.9942
<b>Padé [1/1]</b>	3.6634	0.4893	21.7361	0.9846
<b>Padé [2/1]</b>	0.0662	0.6478	3.5483	0.9945
<b>Padé [2/2]</b>	0.9912	0.7006	8.5132	0.9948

Fonte: Autor.

TSVANKIN, 1998), para aferir a precisão das aproximações: *shifted hyperbola*, Padé [1/1], Padé [2/1] e Padé [2/2] na estimativa dos valores dos parâmetros efetivos e intervalares das velocidades  $v_{Pn}$  e  $v_{Px}$ , e conseqüentemente  $\eta$ .

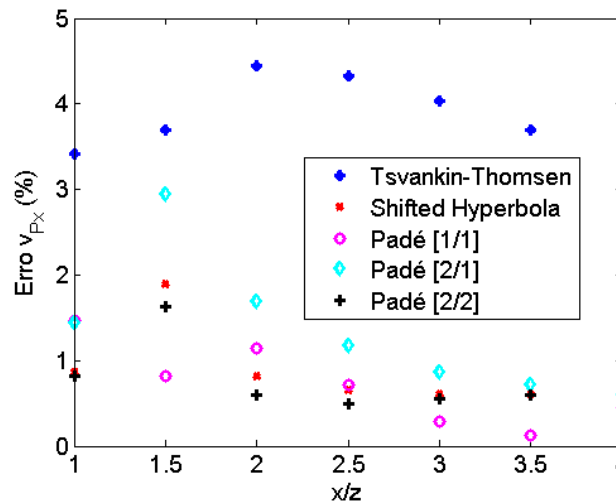
A aproximação de sobretempo 4.28 foi adaptada para meios em camadas, para se estimar os valores intervalares dos parâmetros em cada camada, a partir dos respectivos

Figura 5.5 – Valores estimados da velocidade  $v_{Pn}$ , como função da razão  $x/z$ , obtidos de análise de velocidades com as curvas de sobretempo: Tsvankin-Thomsen (4.20) - Asterisco azul, *shifted hyperbola* (4.23) - Ponto vermelho, Padé [1/1] (4.25) - círculo magenta, Padé [2/1] (4.26) - losango ciano e Padé [2/2] (4.27) - cruz preta.



Fonte: Autor.

Figura 5.6 – Valores estimados da velocidade  $v_{Px}$ , como função da razão  $x/z$ , obtidos de análise de velocidades com as curvas de sobretempo: Tsvankin-Thomsen (4.20) - Asterisco azul, *shifted hyperbola* (4.23) - Ponto vermelho, Padé [1/1] (4.25) - círculo magenta, Padé [2/1] (4.26) - losango ciano e Padé [2/2] (4.27) - cruz preta.

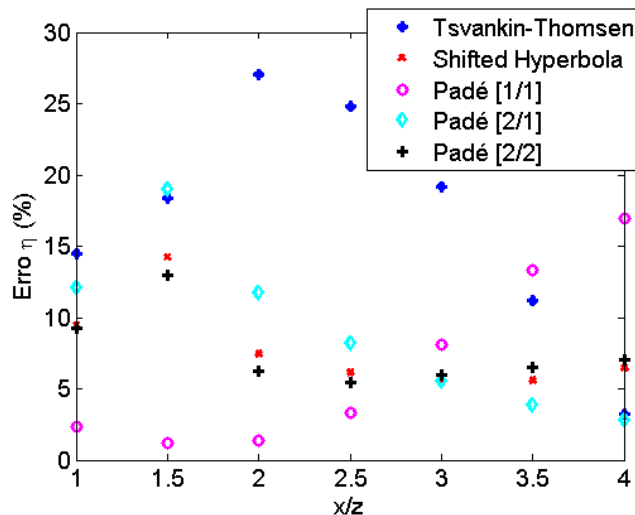


Fonte: Autor.

valores efetivos, utilizando-se o algoritmo (tipo *layer-stripping*) de Grechka e Tsvankin (1998), cujos passos são os seguintes:

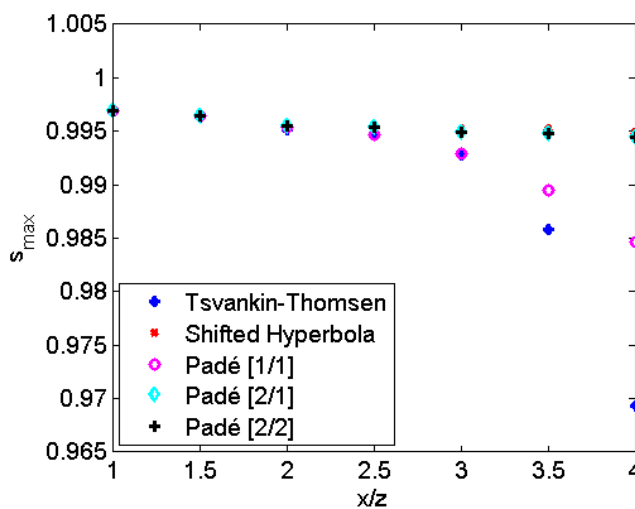
1. Considerando um conjunto de dados de onda P refletida e agrupados em uma geometria CMP, a análise de velocidades baseada em semblance, com curvas de sobretempo não hiperbólica, é realizada no topo e na base da  $i$ -ésima camada para

Figura 5.7 – Valores estimados da velocidade  $\eta$ , como função da razão  $x/z$ , obtidos de análise de velocidades com as curvas de sobretempo: Tsvankin-Thomsen (4.20) - Asterisco azul, *shifted hyperbola* (4.23) - Ponto vermelho, Padé [1/1] (4.25) - círculo magenta, Padé [2/1] (4.26) - losango ciano e Padé [2/2] (4.27) - cruz preta.



Fonte: Autor.

Figura 5.8 – Valores de máximo semblance, como função da razão  $x/z$ , obtidos de análise de velocidades com as curvas de sobretempo: Tsvankin-Thomsen (4.20) - Asterisco azul, *shifted hyperbola* (4.23) - Ponto vermelho, Padé [1/1] (4.25) - círculo magenta, Padé [2/1] (4.26) - losango ciano e Padé [2/2] (4.27) - cruz preta.



Fonte: Autor.

se estimar os valores das velocidades NMO efetivas,  $(v_{Pn})_i$  e  $(v_{Px})_i$ , e com estas os parâmetros efetivos  $\eta_i$ , fixado o tempo de trânsito efetivo vertical  $(t_{Pz})_i$ , com  $i = 1, 2, \dots, N$ .

2. A seguir, o valor da velocidade NMO intervalar na  $i$ -ésima camada é calculado com a equação de Dix, utilizando-se os valores efetivos no topo e na base da  $i$ -ésima

camada, usando:

$$(v_{Pn}^{(i)})^2 = \frac{(v_{Pn})_i^2(t_{Pz})_i - (v_{Pn})_{i-1}^2(t_{Pz})_{i-1}}{(t_{Pz})_i - (t_{Pz})_{i-1}}. \quad (5.2)$$

3. Finalmente, o valor intervalar do parâmetro  $\eta^{(i)}$  na  $i$ -ésima camada é calculado usando as equações:

$$(v_{Px}^{(i)}) = (v_{Pn}^{(i)}) \sqrt{\frac{1}{4(v_{Pn}^{(i)})^4} \frac{f_i(t_{Pz})_i - f_{i-1}(t_{Pz})_{i-1}}{(t_{Pz})_i - (t_{Pz})_{i-1}} + \frac{3}{4}} \quad (5.3)$$

e

$$\eta^{(i)} = \frac{1}{4(v_{Pn}^{(i)})^4} \left[ \frac{f_i(t_{Pz})_i - f_{i-1}(t_{Pz})_{i-1}}{(t_{Pz})_i - (t_{Pz})_{i-1}} - (v_{Pn}^{(i)})^4 \right], \quad (5.4)$$

sendo

$$f_i = (v_{Pn})_i^4(1 + 8\eta_i), \quad (5.5)$$

um parâmetro efetivo obtido do termo quártico exato, na expansão em série de Taylor da curva de sobretempo, combinado com a equação de Dix.

Contudo, como visto na seção 4.3, o parâmetro de heterogeneidade  $S_2$  nas aproximações *shifted hyperbola* (4.33), Padé [1/1] (4.34), Padé [2/1] (4.35) e Padé [2/2] (4.36) difere do parâmetro  $S_2$  na aproximação 4.28, o que leva a necessidade de se adaptar o terceiro passo do algoritmo Grecka-Tsvankin para essas curva. Assim, para se calcular o valor intervalar do parâmetro  $\eta^{(i)}$  na  $i$ -ésima camada usando as aproximações *shifted hyperbola* (4.33), Padé [1/1] (4.34), Padé [2/1] (4.35) e Padé [2/2] (4.36), as equações 5.3, 5.4 e 5.5 são reescritas como:

$$(v_{Px}^{(i)}) = (v_{Pn}^{(i)}) \sqrt{\frac{5}{7(v_{Pn}^{(i)})^4} \frac{f_i(t_{Pz})_i - f_{i-1}(t_{Pz})_{i-1}}{(t_{Pz})_i - (t_{Pz})_{i-1}} + \frac{2}{5}}, \quad (5.6)$$

$$\eta^{(i)} = \frac{5}{14(v_{Pn}^{(i)})^4} \left[ \frac{f_i(t_{Pz})_i - f_{i-1}(t_{Pz})_{i-1}}{(t_{Pz})_i - (t_{Pz})_{i-1}} - (v_{Pn}^{(i)})^4 \right] \quad (5.7)$$

e

$$f_i = (v_{Pn})_i^4 \left(1 + \frac{14}{5}\eta_i\right). \quad (5.8)$$

Para aferir a precisão das aproximações em meios VTI verticalmente heterogêneos, nesta seção é realizada análise de velocidades, baseada em semblance tradicional, com as aproximações não hiperbólicas: Tsvankin-Thomsen (4.28), *shifted hyperbola* (4.33) e Padé [1/1] (4.34), Padé [2/1] (4.35) e Padé [2/2] (4.36), adaptadas para experimentos em camadas. Para tanto, foi usada uma seção CMP sintética (GRECHKA; TSVANKIN, 1998), apresentada na Figura 5.9, com tempos de trânsito obtidos por traçamento de raio usando o software ANRAY (GAJEWSKI; PŠENCÍK, 1987). O modelo de subsuperfície está descrito na Tabela 4.1. As quatro interfaces refletoras estão localizadas à profundidades:

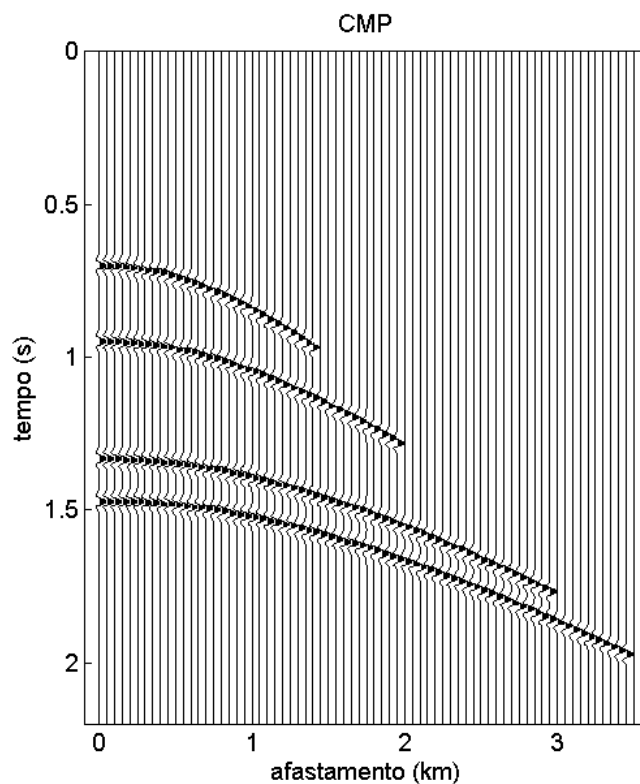
Tabela 5.3 – Velocidades e parâmetros intervalares exatos do modelo em camadas usado na análise de velocidades.

Camada	$v_{P_n}$	$v_{P_x}$	$\eta$
1	2.0976	2.0976	0.0000
2	2.5189	2.7593	0.1000
3	2.7794	3.2886	0.2000
4	3.0330	3.4314	0.1400

Fonte: Autor.

$z_1 = 0,7 \text{ km}$ ;  $z_2 = 1,0 \text{ km}$ ;  $z_3 = 1,5 \text{ km}$ ; e  $z_4 = 1,7 \text{ km}$ , com, respectivos, tempos vertical:  $(t_z)_1 = 0,7000 \text{ s}$ ;  $(t_z)_2 = 0,9479 \text{ s}$ ;  $(t_z)_3 = 1,3325 \text{ s}$ ;  $(t_z)_4 = 1,4704 \text{ s}$ , e cujos parâmetros intervalares exatos, a serem estimados, estão descritos na Tabela 5.3. O tempo de trânsito foi amostrado como  $\Delta t = 4 \text{ ms}$  e como assinatura da fonte foi usado um pulso Ricker com frequência dominante  $f = 20 \text{ Hz}$ . Ressaltando-se neste sismograma sintético a total ausência de variação na amplitude e fase, bem como a ausência de ruídos nos eventos. Observa-se, também, que os traços sofreram *mute* a fim de preservar a razão  $x/z = 2,0$ .

Figura 5.9 – Sismograma sintético de ondas refletidas P gerados por traçamento de raio com o modelo de subsuperfície dados na tabela 5.3.

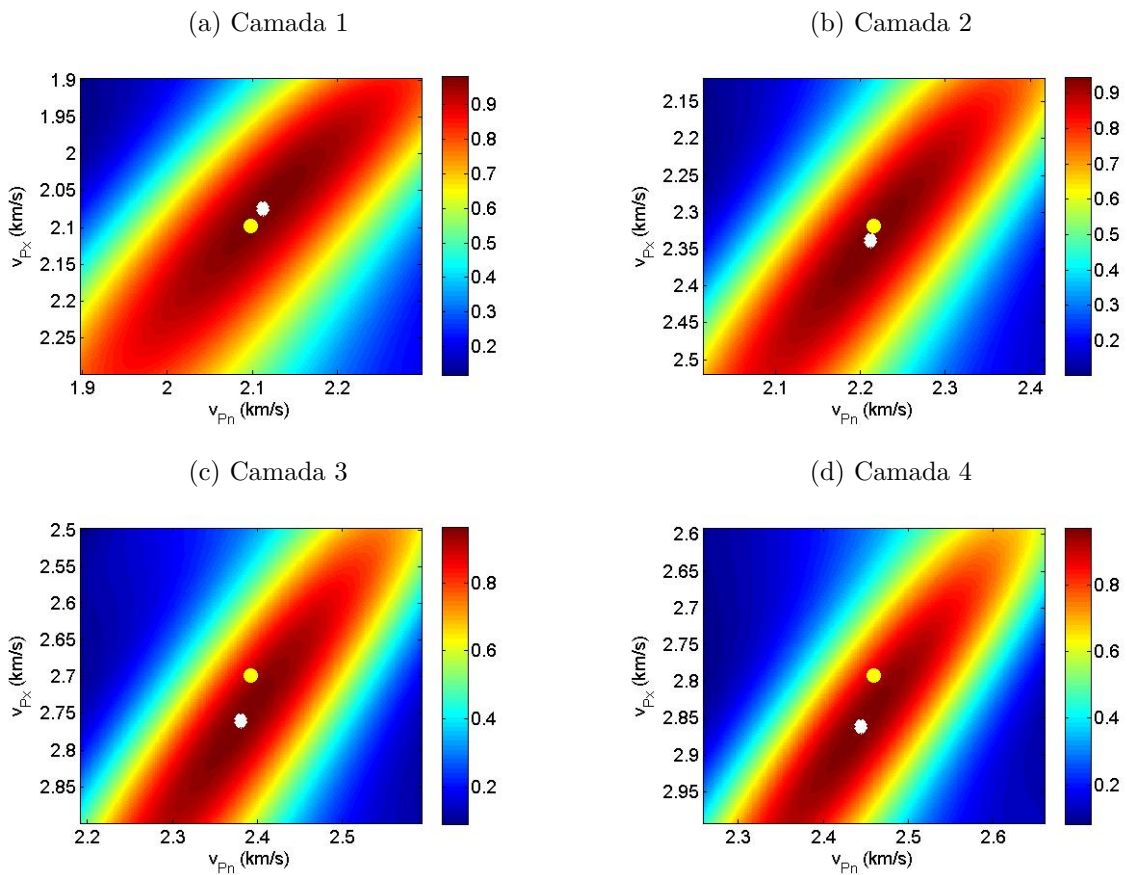


Fonte: Adaptado de (GRECHKA; TSVANKIN, 1998)

Para ilustrar a validade e precisão das aproximações na estimativa de parâmetros,

as Figuras 5.10 (a)-(d) apresentam o mapa semblance com os valores efetivos  $v_{P_n}$  versus  $v_{P_x}$  para as quatro camadas do modelo de subsuperfície VTI da Tabela 5.3, obtidos usando a aproximação não hiperbólicas 4.35 para  $x/z = 2,0$ . Observa-se que o mapa semblance tem máximo bem definido e que as velocidades estimadas estão bem próximas dos valores exatos.

Figura 5.10 – Mapa semblance  $v_{P_n}$  versus  $v_{P_x}$ , usando a curva de sobretempo Padé [2/1] (4.35), para estimar as velocidades  $v_{P_n}$  e  $v_{P_x}$ , e o parâmetro  $\eta$  nas camadas do modelo VTI da Tabela 5.3 para  $x/z = 2,0$ . Círculo amarelo - valor exato e círculo branco - valor aproximado.



Fonte: Autor.

A Tabela 5.4 apresenta os valores efetivos e intervalares, obtidos na análise de velocidades por semblance com a aproximação de sobretempo Padé [2/1] (4.35), do erro relativo das velocidades  $v_{P_n}$  e  $v_{P_x}$ , respectivamente; do erro absoluto do parâmetro  $\eta$ ; e do máximo semblance  $s_{max}$ , para o modelo em camadas VTI considerando valores de  $x/z$  no máximo 2,0. Observa-se que o menor valor de máximo semblance ocorre na segunda camada e mesmo assim é grande,  $s_{max} = 0,9464$ . Observa-se, também, que os valores máximos dos erros relativos cometidos na estimativa das velocidades NMO e horizontal é relativamente pequeno, ou seja, 1,6335 % (segunda camada) e 2,3902 % (terceira camada), respectivamente. Contudo, devido os valores de  $\eta$  serem na casa dos décimos, a estimativa



deste se torna muito sensível a pequenas variações nas estimativas das velocidades, o que faz com que o erro na sua obtenção seja considerável, mesmo com erros tão baixos nas medidas estimadas das velocidades.

Tabela 5.4 – Valores do erro relativo nas estimativas das velocidades  $v_{Pn}$  e  $v_{Px}$ , do erro absoluto do parâmetro  $\eta$ , e do valor de máximo semblance, obtidos na análise de velocidades por semblance usando a aproximação não hiperbólicas Padé [2/1], no modelo VTI em camadas para  $x/z = 2, 0$ .

Camada	Erro $v_{Pn}$ (%)	Erro $v_{Px}$ (%)	Erro abs. $\eta$	$s_{max}$
1	0.6695	1.0705	0.0171	0.9800
2	1.6335	1.8290	0.0431	0.9464
3	1.3931	2.3902	0.0554	0.9640
4	0.4803	0.4034	0.0010	0.9569

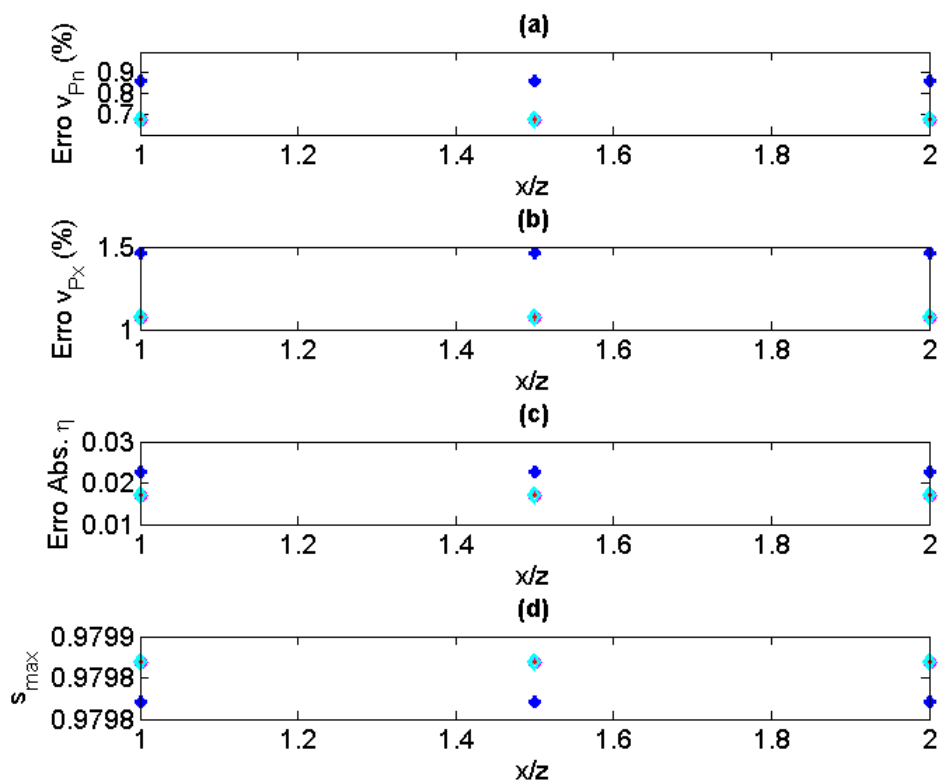
Fonte: Autor.

Em geral, a estimativa de parâmetros é sensível à razão  $x/z$ . Devido a isto, nas Figuras 5.11 à 5.14 são apresentados os valores intervalares estimados das velocidades  $v_{Pn}$  e  $v_{Px}$  e do parâmetro  $\eta$ , para valores da razão  $x/z$  iguais a 1, 0; 1, 5 e 2, 0, usando as aproximações racionais de sobretempo Padé [1/1] (4.34) e Padé [2/1] (4.35), comparado as aproximações de Tsvankin-Thomsen (4.28) e *shifted hyperbola* (4.33). Os resultados apresentados sugerem que a aproximação *shifted hyperbola* (4.33) e as aproximações racional de Padé [1, 1] (4.34) e [2, 1] (4.35) são bastante precisas para estimar os parâmetros para valores da razão  $x/z$  de no máximo 2, e que o valor de semblance máximo é sempre igual para todas às aproximações e muito próximo da unidade.

Em relação aos experimento na primeira e segunda camadas, apresentados nas Figuras 5.11 e 5.12, pode-se observar que a aproximação *shifted hyperbola* (4.33) e as aproximações racional de Padé [1/1] (4.34) e Padé [2/1] (4.35) têm estimativas dos parâmetros iguais entre si, contudo melhores que os valores estimados com a aproximação Tsvankin-Thomsen (4.28). Em relação aos experimento na terceira (maior valor de  $\eta$ ) e quarta camadas, apresentados nas Figuras 5.13 e 5.14, pode-se observar que a aproximação Padé [2/1] (4.35) tem estimativas mais precisa na terceira e quarta camadas.

Assim, este experimento sugere que as aproximações racionais não hiperbólicas de sobretempo, além de serem computacionalmente mais eficazes que a aproximação *shifted hyperbola*, são tão precisas quanto esta, e mais precisa que a aproximação de Tsvankin-Thomsen (4.28) na estimativa de parâmetros em meios VTI acamados, verticalmente heterogêneos.

Figura 5.11 – Erro relativo dos valores estimados de: (a)  $v_{Pn}$ , (b)  $v_{Px}$ , bem como o erro absoluto dos valores estimados de (c)  $\eta$ , e (d) valor de máximo semblance, em função da razão  $x/z$  para a primeira camada, do experimento em camadas VTI, obtido com as aproximações: Tsvankin-Thomsen (4.20) - Asterisco azul, *shifted hyperbola* (4.23) - Ponto vermelho, Padé [1/1] (4.25) - círculo magenta e Padé [2/1] (4.26) - losango ciano.

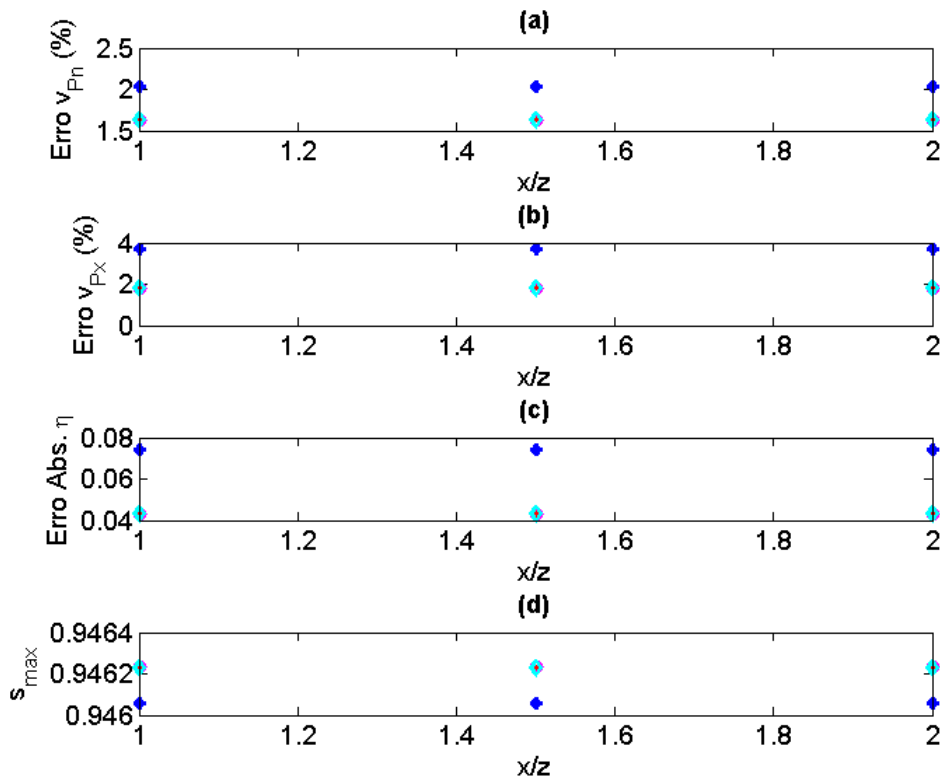


Fonte: Autor.

## 5.2 Análise de velocidades baseada em semblance modificado

Análise de velocidades com medida semblance tradicional é instável na presença de forte variação de amplitude com o afastamento, principalmente quando esta variação é acompanhada de reversões de polaridade e ocorre em grandes afastamentos (comuns em reflexões no topo de alguns arenitos Classe 1 e Classe 2). Outro fato marcante é que o semblance tradicional torna-se impreciso com o aumento da razão  $x/z$ . Por isso, muitos autores tem modificado a medida semblance para incorporar esses fatores, e com isto obter melhores estimativas de parâmetros. Nesta seção, é feita uma adaptação para meios VTI dos operadores AK-semblance (SARKAR; CASTAGNA; LAMB, 2001) e semblance SVD (URSIN; SILVA; PORSANI, 2014) para estimar parâmetros em modelo com variação da amplitude como afastamento e reversão de polaridade com e sem ruído e para variação da razão afastamento-profundidade.

Figura 5.12 – Erro relativo dos valores estimados de: (a)  $v_{Pn}$ , (b)  $v_{Px}$ , bem como o erro absoluto dos valores estimados de (c)  $\eta$ , e (d) valor de máximo semblance, em função da razão  $x/z$  para a segunda camada, do experimento em camadas VTI, obtido com as aproximações: Tsvankin-Thomsen (4.20) - Asterisco azul, *shifted hyperbola* (4.23) - Ponto vermelho, Padé [1/1] (4.25) - círculo magenta e Padé [2/1] (4.26) - losango ciano.



Fonte: Autor.

### 5.2.1 AK-semblance em meios homogêneos VTI

Sarkar, Castagna e Lamb (2001) apresentaram as medidas de coerência AB- e AK-semblance, a fim de adicionar ao semblance tradicional 5.1, a variação da amplitude com o afastamento (AVO - *amplitude versus offset*). AB-semblance é definido como:

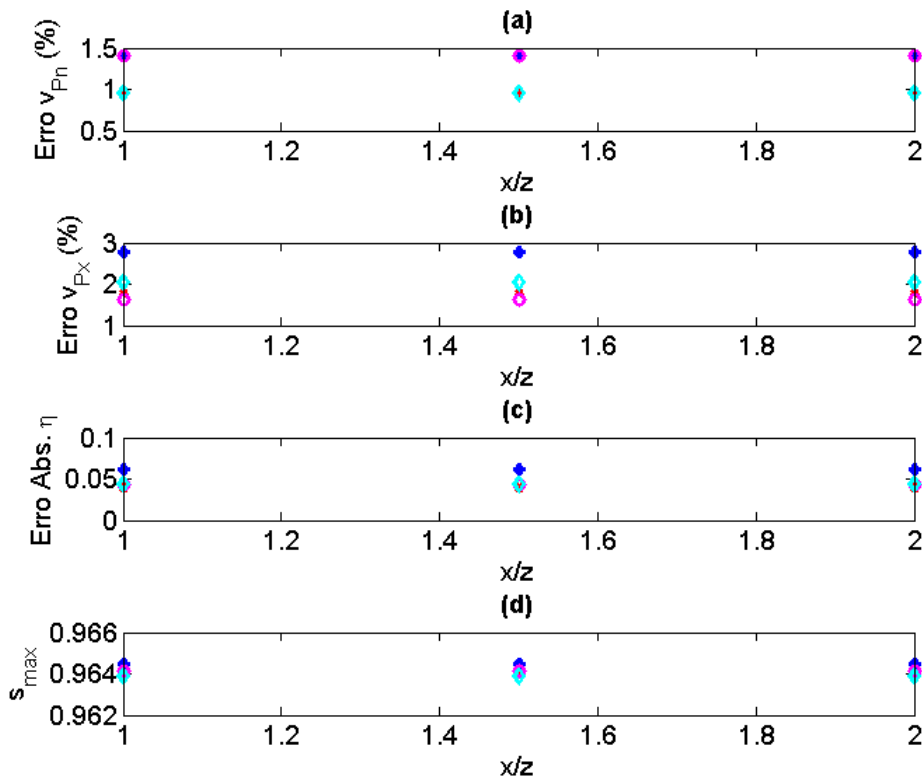
$$S_{AB}(t_z, v) = 1 - \frac{1}{\|\mathbf{M}(\tau, x) - \mathbf{D}(\tau, x)\|^2} \|\mathbf{D}(\tau, x)\|^2, \quad (5.9)$$

sendo  $\mathbf{M}(\tau, x)$  um modelo parametrizado para variação da amplitude com o afastamento que, no caso em questão, é a linearização da equação de Zoeppritz para o coeficiente de reflexão obtida por Shuey (1985) como:

$$\mathbf{M}(\tau, x) = A(\tau) + B(\tau)\text{sen}^2\theta_x, \quad (5.10)$$

com  $A(\tau)$  e  $B(\tau)$  os chamados intercepto e gradiente AVO para eventos de reflexão no tempo vertical  $\tau$  e  $\theta_x$  o ângulo de phase de incidência no refletor, o qual em problemas

Figura 5.13 – Erro relativo dos valores estimados de: (a)  $v_{Pn}$ , (b)  $v_{Px}$ , bem como o erro absoluto dos valores estimados de (c)  $\eta$ , e (d) valor de máximo semblance, em função da razão  $x/z$  para a terceira camada, do experimento em camadas VTI, obtido com as aproximações: Tsvankin-Thomsen (4.20) - Asterisco azul, *shifted hyperbola* (4.23) - Ponto vermelho, Padé [1/1] (4.25) - círculo magenta e Padé [2/1] (4.26) - losango ciano.



Fonte: Autor.

inversos em meios isotrópicos e homogêneos pode ser estimado como:

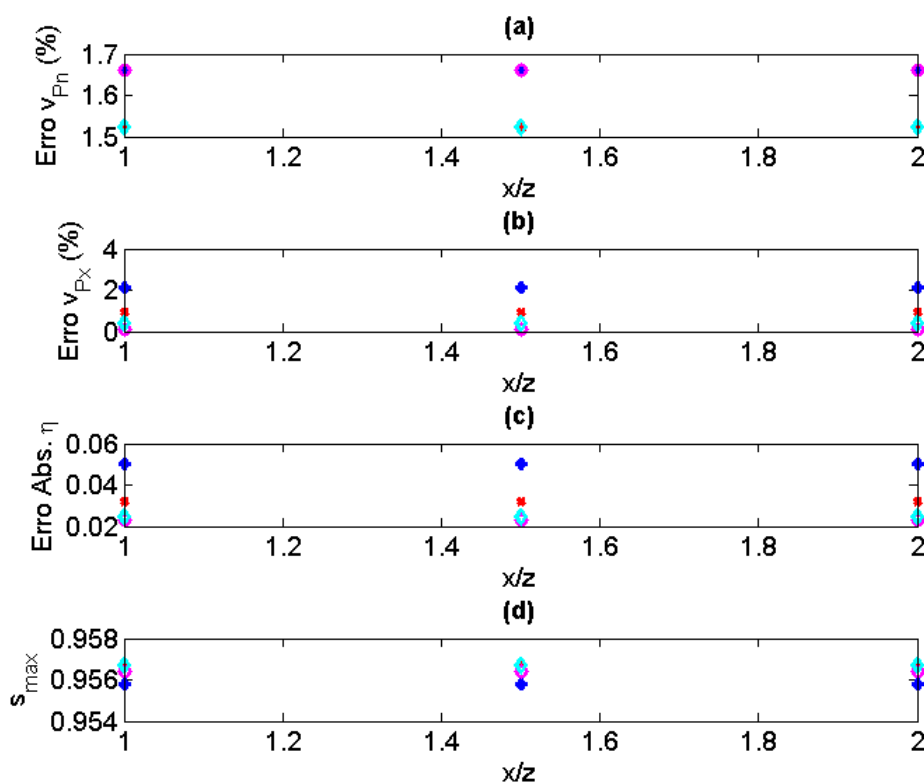
$$\theta_x \approx \frac{x^2}{x^2 + v_n^2 t_z^2}. \quad (5.11)$$

No entanto, Sarkar, Castagna e Lamb (2001) observaram que devido a equação de Shuey (5.10) ser dependente de dois parâmetros, isto acaba por dar muita liberdade para se ajustar eventos com a combinação de velocidade incorreta e incorreto AVO, resultando em uma pobre resolução de velocidade. Para reduzir esses efeitos, a relação entre o intercepto e gradiente AVO foram restringidas, tornando a equação de Shuey (5.10) como:

$$\mathbf{M}(\tau, x) = A(\tau) \left( 1 + K \text{sen}^2 \theta_x \right), \quad (5.12)$$

sendo  $K = B(\tau)/A(\tau)$  fixo dentro de cada janela semblance, o que significa que a forma do pulso não muda com o afastamento, ou seja, a variação da amplitude ao longo de qualquer

Figura 5.14 – Erro relativo dos valores estimados de: (a)  $v_{Pn}$ , (b)  $v_{Px}$ , bem como o erro absoluto dos valores estimados de (c)  $\eta$ , e (d) valor de máximo semblance, em função da razão  $x/z$  para a quarta camada, do experimento em camadas VTI, obtido com as aproximações: Tsvankin-Thomsen (4.20) - Asterisco azul, *shifted hyperbola* (4.23) - Ponto vermelho, Padé [1/1] (4.25) - círculo magenta e Padé [2/1] (4.26) - losango ciano.



Fonte: Autor.

curva de sobretempo com tempo vertical  $\tau$ , dentro de um pulso, é uma versão em escala do AVO ao longo da trajetória de sobretempo traçada pelo centro do pulso. Além disso, supõem-se que a janela semblance contém ou um evento simples ou vários eventos com comportamento AVO idênticos.

Em seus experimentos, restritos a meios isotrópicos, Sarkar, Castagna e Lamb (2001) mostraram que as medidas AB- e AK-semblance são precisas para estimar parâmetros em dados com anomalias AVO e reversões de polaridade. Contudo, também concluíram que na ausência de reversões de polaridade o semblance tradicional é mais preciso. Eles verificaram também que os operadores AB- e AK-semblance são sensíveis ao ruído, o que foi demonstrado por Fomel (2009).

Recentemente Yan e Tsvankin (2008) modificaram o AK-semblance usando aproximação de sobretempo não hiperbólica para eventos de ondas P, objetivando acrescentar os

efeitos da anisotropia e estimar os parâmetros em meios homogêneos VTI. Neste trabalho, devido utilizarem a aproximação 4.20, restringiram seu modelo a razão  $x/z$  de no máximo 2,0.

## 5.2.2 Análise de velocidades sensível ao AVO usando semblance e AK-semblance

Neste experimento é realizada análise de velocidades, baseada em semblance tradicional e AK-semblance, com a aproximação não hiperbólica *shifted hyperbola* (4.23) e com as aproximações racionais Padé [1/1] (4.25), Padé [2/1] (4.26) e Padé [2/2] (4.27). Para tanto, a Figura 5.15 apresenta uma seção CMP sintética: (a) sem ruídos, (b) com razão sinal-ruído ( $s/n$ ) igual a 15 e (c) com  $s/n = 5$ , confeccionada (tempos de trânsito e variações de amplitudes e fase), usando traçamento de raio, com o software ANRAY (GAJEWSKI; PŠENCÍK, 1987). O modelo de subsuperfície é o folhelho VTI Greenhorn (JONES; WANG, 1981), usado em experimentos anteriores, com interface refletora localizada a uma profundidade  $z = 1,0 \text{ km}$  e tempo duplo vertical  $t_z = 0,6464 \text{ s}$ , cujos parâmetros exatos a serem estimados são:  $v_{Pn} = 2,9336 \text{ km/s}$ ,  $v_{Px} = 3,8045 \text{ km/s}$  e  $\eta = 0,3409$ . O tempo de trânsito foi amostrado à  $\Delta t = 4 \text{ ms}$  e a assinatura da fonte usada foi um pulso Gabor com frequência dominante  $f = 40 \text{ Hz}$ .

Para ilustrar a análise de velocidades com semblance tradicional, em dados com variação AVO e sem ruídos, a Figura 5.16 apresenta o mapa semblance  $v_{Pn}$  versus  $v_{Px}$  obtidos usando aproximações não hiperbólicas para  $x/z = 4,0$ . Os resultados apresentados mostram, como era de se esperar, o quanto o semblance tradicional é sensível à variação da amplitude com o afastamento e polarização reversa. Observa-se nitidamente, para todas as curvas de sobretempo, duas regiões com valor de máximo semblance local, bem como um valor de máximo semblance relativamente baixo (pouco mais de 0,7). Os resultados obtidos estão na Tabela 5.5.

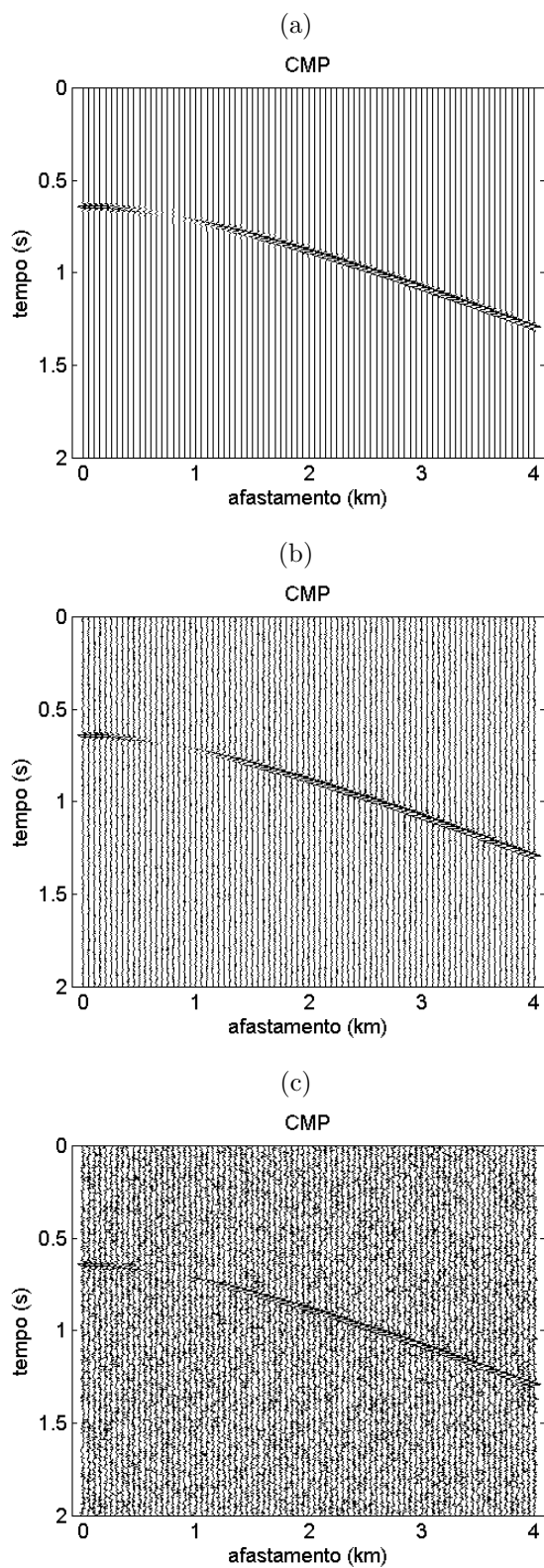
Tabela 5.5 – Valores do erro relativo nas estimativas das velocidades  $v_{Pn}$ ,  $v_{Px}$  e do parâmetro  $\eta$  estimados e do valor de máximo semblance; obtidos na análise de velocidades, em dados com espalhamento e sem ruído, para o folhelho VTI Greenhorn para  $x/z = 4,0$ .

	Erro $v_{Pn}$ (%)	Erro $v_{Px}$ (%)	Erro $\eta$ (%)	$S_{max}$
<b>Shifted hyperbola</b>	9.6245	2.2328	68.9864	0.7596
<b>Padé [1/1]</b>	7.1282	0.7259	34.8341	0.7232
<b>Padé [2/1]</b>	7.9504	0.7259	38.0487	0.7439
<b>Padé [2/2]</b>	10.7550	2.2856	77.3691	0.7799

Fonte: Autor.

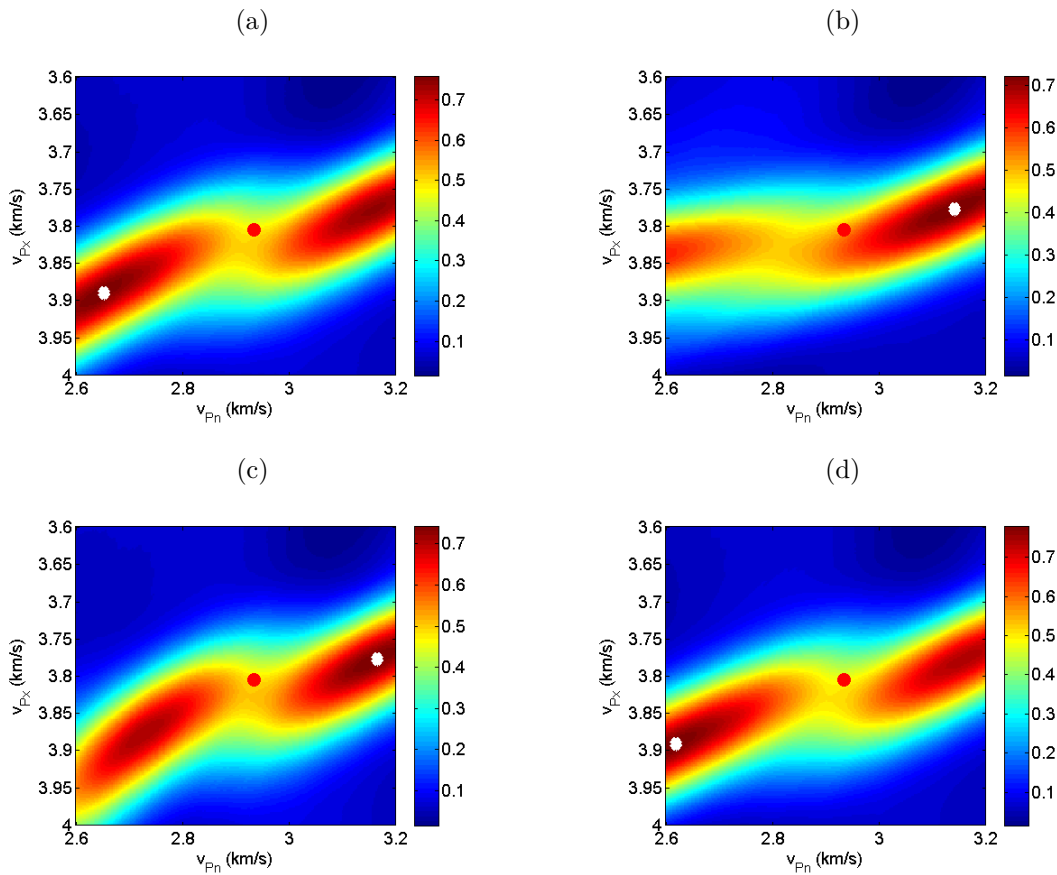
Por outro lado, as Figuras 5.17 e 5.18, ilustram os mapas AK-semblance  $v_{Pn}$  versus  $v_{Px}$ , em dados com variação AVO e sem ruídos (Figura 5.15 (a)), obtidos usando as mesmas aproximações não hiperbólicas do experimento anterior para  $x/z = 1,5$  e

Figura 5.15 – CMP sintético (a) sem ruído, (b) com razão sinal-ruído igual a 15 e (c) com razão sinal-ruído igual a 5, obtido no folhelho VTI Greenhorn para  $x/z = 4, 0$ .



Fonte: Autor.

Figura 5.16 – Mapa semblance  $v_{Pn}$  versus  $v_{Px}$ , usando as curvas de sobretempo: (a) *Shifted hyperbola* (4.23), (b) Padé [1, 1] (4.25), (c) Padé [2, 1] (4.26) e (d) Padé [2, 2] (4.27), para estimar estas velocidades e o parâmetros  $\eta$  em dados com variação AVO e sem ruído, obtidos no folhelho VTI Greenhorn para  $x/z = 4, 0$ . Círculo vermelho - valor exato e losango branco - valor aproximado.



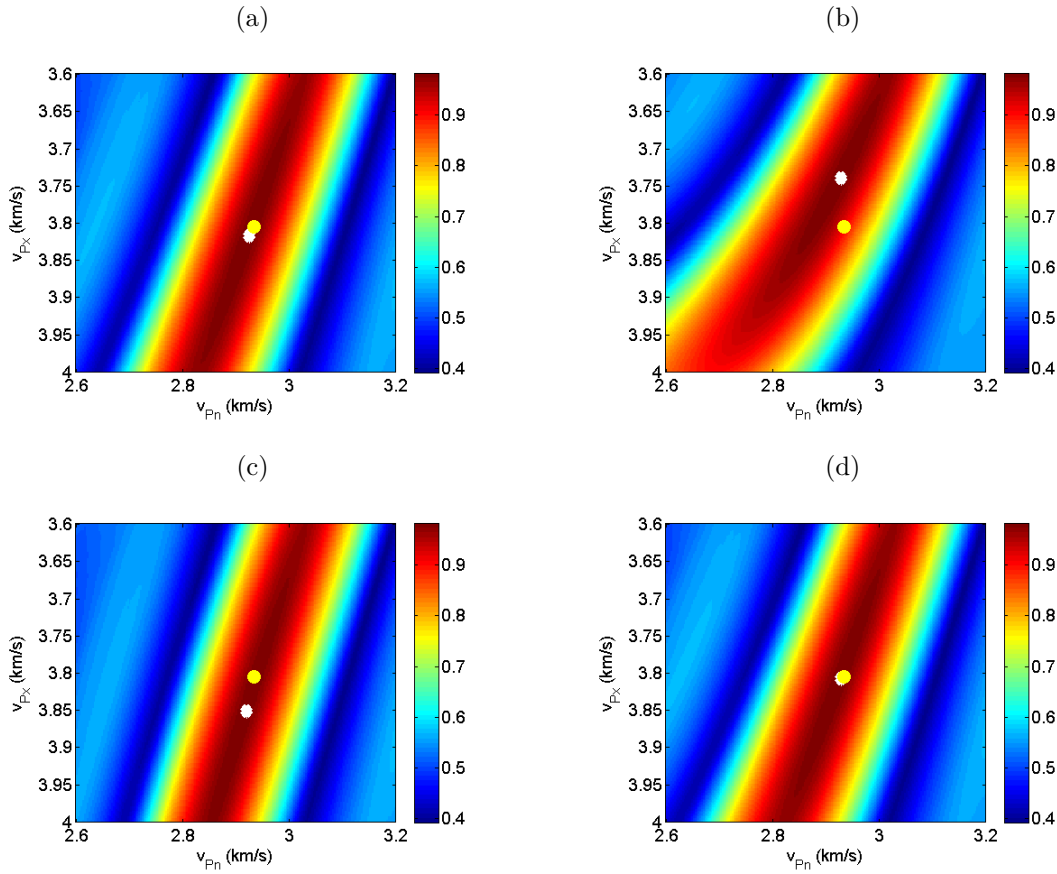
Fonte: Autor.

$x/z = 4, 0$ , respectivamente. No resultado das ilustrações é visível que o AK-semblance mitiga consideravelmente a influência da variação AVO se comparado ao experimento com o semblance tradicional (Figura 5.16). Os resultados das estimativas apresentados na Tabela 5.6, mostram que para  $x/z = 1, 5$  os valores de máximo AK-semblance são iguais e muito próximos a unidade, contudo os valores dos parâmetros estimados divergem bastante. Neste caso, as aproximações *shifted hyperbola* e Padé [2, 2] obtiveram os melhores resultados. Já os resultados das estimativas apresentados na Tabela 5.7, mostram que para  $x/z = 4, 0$  os valores de máximo AK-semblance têm pequenas variações de uma aproximação para outra, no entanto os valores dos parâmetros estimados divergem grandemente. Neste caso, a aproximação Padé [2, 1] obteve os melhores resultados.

Para aferir a robustez da medida AK-semblance, foi realizada análise de velocidades com AK-semblance para estimar as velocidades  $v_{Pn}$  e  $v_{Px}$  (e conseqüentemente  $\eta$ ), em dados com variação AVO considerando a variação da razão  $s/n$  com valores iguais a 15 e 5



Figura 5.17 – Mapa AK-semblance  $v_{P_n}$  versus  $v_{P_x}$ , usando as curvas de sobretempo: (a) *Shifted hyperbola* (4.23), (b) Padé [1, 1] (4.25), (c) Padé [2, 1] (4.26) e (d) Padé [2, 2] (4.27), para estimar estas velocidades e o parâmetro  $\eta$  em dados com variação AVO e sem ruído, obtidos no folhelho VTI Greenhorn, para  $x/z = 1,5$ . Círculo amarelo - valor exato e losango branco - valor aproximado.



Fonte: Autor.

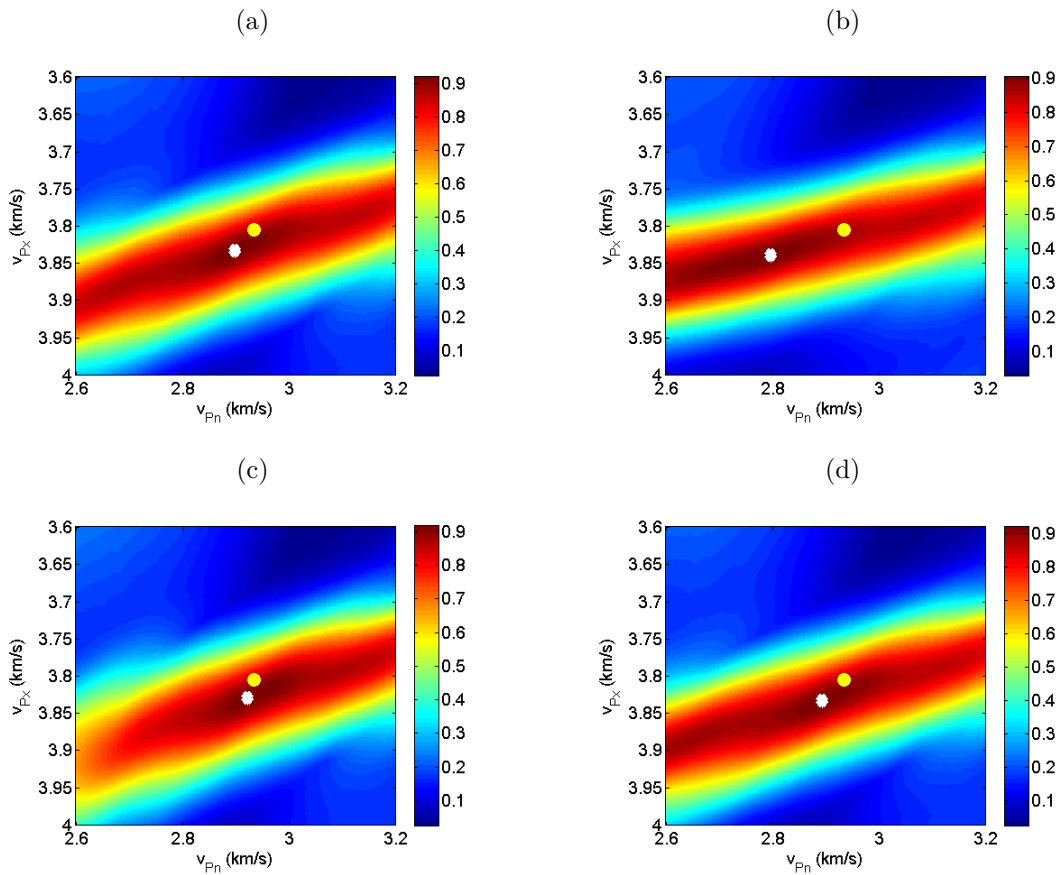
Tabela 5.6 – Valores do erro relativo nas estimativas das velocidades  $v_{P_n}$ ,  $v_{P_x}$  e do parâmetro  $\eta$  estimados e do valor de máximo AK-semblance; obtidos na análise de velocidades, em dados com espalhamento e sem ruído, para o folhelho VTI Greenhorn para  $x/z = 1,5$ .

	Erro $v_{P_n}$ (%)	Erro $v_{P_x}$ (%)	Erro $\eta$ (%)	$S_{max}$
<b>Shifted hyperbola</b>	0.2717	0.3308	0.2717	0.9833
<b>Padé [1/1]</b>	0.1690	1.7297	7.6420	0.9832
<b>Padé [2/1]</b>	0.4773	1.2290	8.5418	0.9833
<b>Padé [2/2]</b>	0.2717	0.2251	2.4750	0.9833

Fonte: Autor.

(Figura 5.15 (b) e (c), respectivamente), e considerando, também, a variação da razão  $x/z$  para valores de 1,5 e 4,0. Os resultados obtidos estão ilustrados nas Figuras 5.19, 5.20, 5.21 e 5.22 e apresentados nas Tabelas 5.8, 5.9, 5.10 e 5.11.

Figura 5.18 – Mapa AK-semblance  $v_{Pn}$  versus  $v_{Px}$ , usando as curvas de sobretempo: (a) *Shifted hyperbola* (4.23), (b) Padé [1, 1] (4.25), (c) Padé [2, 1] (4.26) e (d) Padé [2, 2] (4.27), para estimar estas velocidades e o parâmetro  $\eta$  em dados com variação AVO e sem ruído, obtidos no folhelho VTI Greenhorn, para  $x/z = 4, 0$ . Círculo amarelo - valor exato e losango branco - valor aproximado.



Fonte: Autor.

Tabela 5.7 – Valores do erro relativo nas estimativas das velocidades  $v_{Pn}$ ,  $v_{Px}$  e do parâmetro  $\eta$  estimados e do valor de máximo AK-semblance; obtidos na análise de velocidades, em dados com variação AVO e sem ruído, para o folhelho VTI Greenhorn para  $x/z = 4, 0$ .

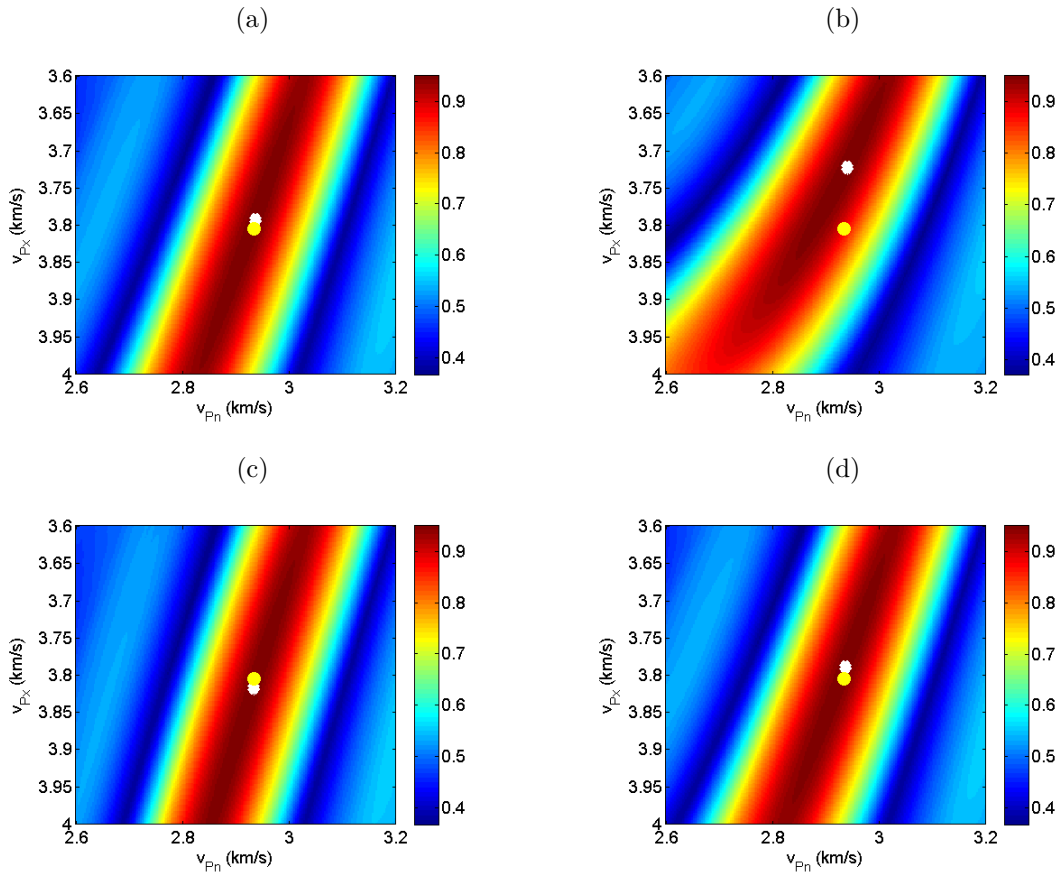
	Erro $v_{Pn}$ (%)	Erro $v_{Px}$ (%)	Erro $\eta$ (%)	$S_{max}$
<b>Shifted hyperbola</b>	1.1967	0.7535	9.8451	0.9217
<b>Padé [1/1]</b>	4.6912	0.9120	29.8678	0.9072
<b>Padé [2/1]</b>	0.3745	0.6478	5.0995	0.9176
<b>Padé [2/2]</b>	1.4023	0.7535	10.9157	0.9228

Fonte: Autor.

Quanto ao experimento ilustrado nos mapas AK-semblance da Figura 5.19, considerando  $s/n = 15$  e  $x/z = 1, 5$ , o que se pode observar é que altos valores da razão  $s/n$  não afetam substancialmente a precisão das estimativas, sendo que as aproximações Padé [2/1], Padé [2/2] e *shifted hyperbola*, permaneceram bem precisas na estimativa dos

parâmetros se comparado ao experimento sem ruído. Isto pode ser confirmado com os dados estimados na Tabela 5.8. Observa-se, também, que o valor de máximo AK-semblance é alto e praticamente o mesmo para todas as aproximações. Já no experimento ilustrado nos mapas AK-semblance da Figura 5.20, considerando  $s/n = 5$  e  $x/z = 1,5$ , observa-se que baixo valor da razão  $s/n$  afeta grandemente a precisão das estimativas, pois todas as aproximações foram imprecisas nas estimativas, principalmente na estimativa do parâmetro  $\eta$ . Isto pode ser confirmado com os dados estimados na Tabela 5.9. Observa-se, também, que o valor de máximo AK-semblance é relativamente baixo, porém praticamente o mesmo para todas as aproximações.

Figura 5.19 – Mapa AK-semblance  $v_{Pn}$  versus  $v_{Px}$ , usando as curvas de sobretempo: (a) *Shifted hyperbola* (4.23), (b) Padé [1, 1] (4.25), (c) Padé [2, 1] (4.26) e (d) Padé [2, 2] (4.27), para estimar estas velocidades e o parâmetros  $\eta$  em dados com variação AVO e  $s/n = 15$ , obtidos no folhelho VTI Greenhorn para  $x/z = 1,5$ . Círculo amarelo - valor exato e losango branco - valor aproximado.



Fonte: Autor.

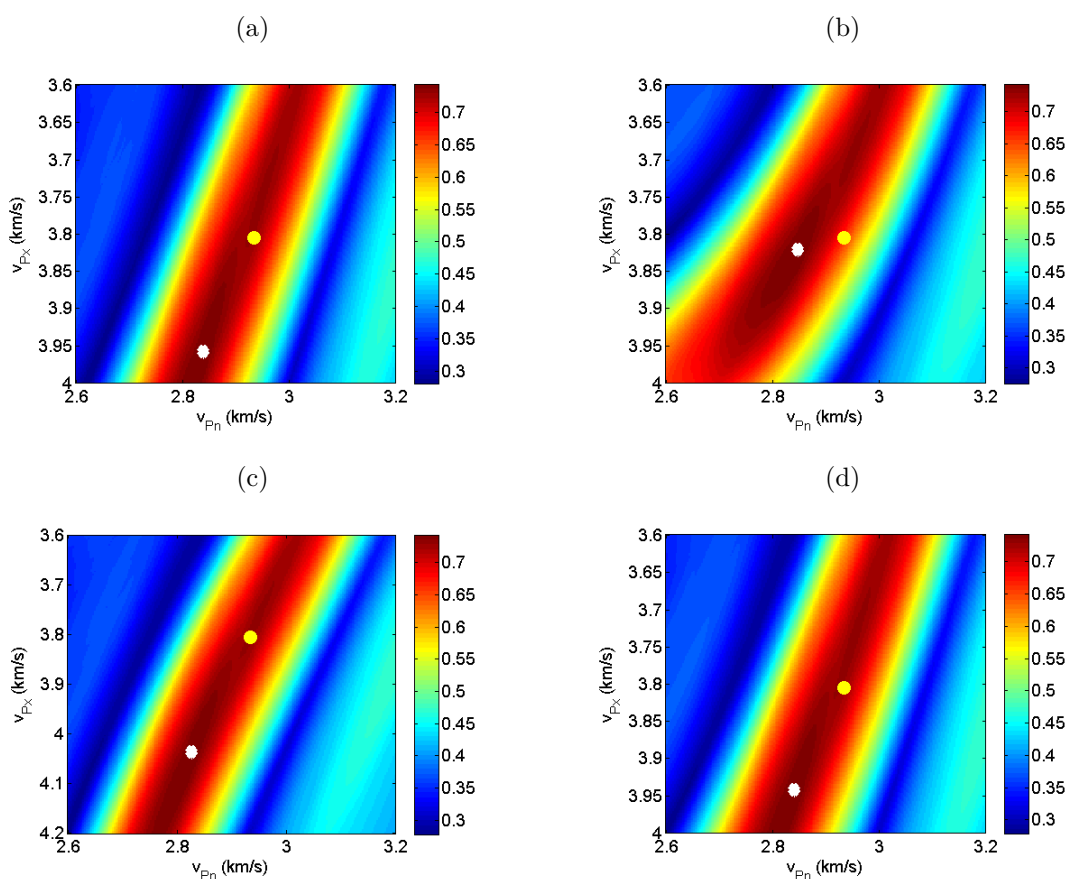
Quanto ao experimento ilustrado nos mapas AK-semblance da Figura 5.21, considerando  $s/n = 15$  e  $x/z = 4,0$ , o que se pode observar é que grandes valores de  $x/z$ , quando aliados a altos valores de  $s/n$ , continuam a não afetar a precisão das estimativas, se comparado ao experimento sem ruído, sendo que a aproximações Padé [2/1] se destaca na estimativa dos parâmetros. Isto pode ser confirmado com os dados estimados apresentados

Tabela 5.8 – Valores do erro relativo nas estimativas das velocidades  $v_{Pn}$ ,  $v_{Px}$  e do parâmetro  $\eta$  estimados, e do valor de máximo AK-semblance; obtidos na análise de velocidades, em dados com variação AVO e  $s/n = 15$ , no folhelho VTI Greenhorn para  $x/z = 1, 5$ .

	Erro $v_{Pn}$ (%)	Erro $v_{Px}$ (%)	Erro $\eta$ (%)	$S_{max}$
<b>Shifted hyperbola</b>	0.1394	0.3032	2.1648	0.9516
<b>Padé [1, 1]</b>	0.2421	2.1524	11.6335	0.9515
<b>Padé [2, 1]</b>	0.0366	0.3308	1.4640	0.9516
<b>Padé [2, 2]</b>	0.1394	0.4089	2.6828	0.9517

Fonte: Autor.

Figura 5.20 – Mapa AK-semblance  $v_{Pn}$  versus  $v_{Px}$ , usando as curvas de sobretempo: (a) *Shifted hyperbola* (4.23), (b) Padé [1, 1] (4.25), (c) Padé [2, 1] (4.26) e (d) Padé [2, 2] (4.27), para estimar estas velocidades e o parâmetros  $\eta$  em dados com variação AVO e  $s/n = 5$ , obtidos no folhelho VTI Greenhorn para  $x/z = 1, 5$ . Círculo amarelo - valor exato e losango branco - valor aproximado.



Fonte: Autor.

na Tabela 5.10. Nesta observa-se, também, que o valor de máximo AK-semblance é alto e praticamente o mesmo para todas as aproximações. já no experimento ilustrado nos mapas AK-semblance da Figura 5.22, considerando  $s/n = 5$  e  $x/z = 4, 0$ , observa-se que o baixo valor da razão  $s/n$  não afeta a precisão das estimativas, tanto quanto no experimento para  $s/n = 15$ . Isto pode ser confirmado com os dados estimados na Tabela 5.11. Observa-se,

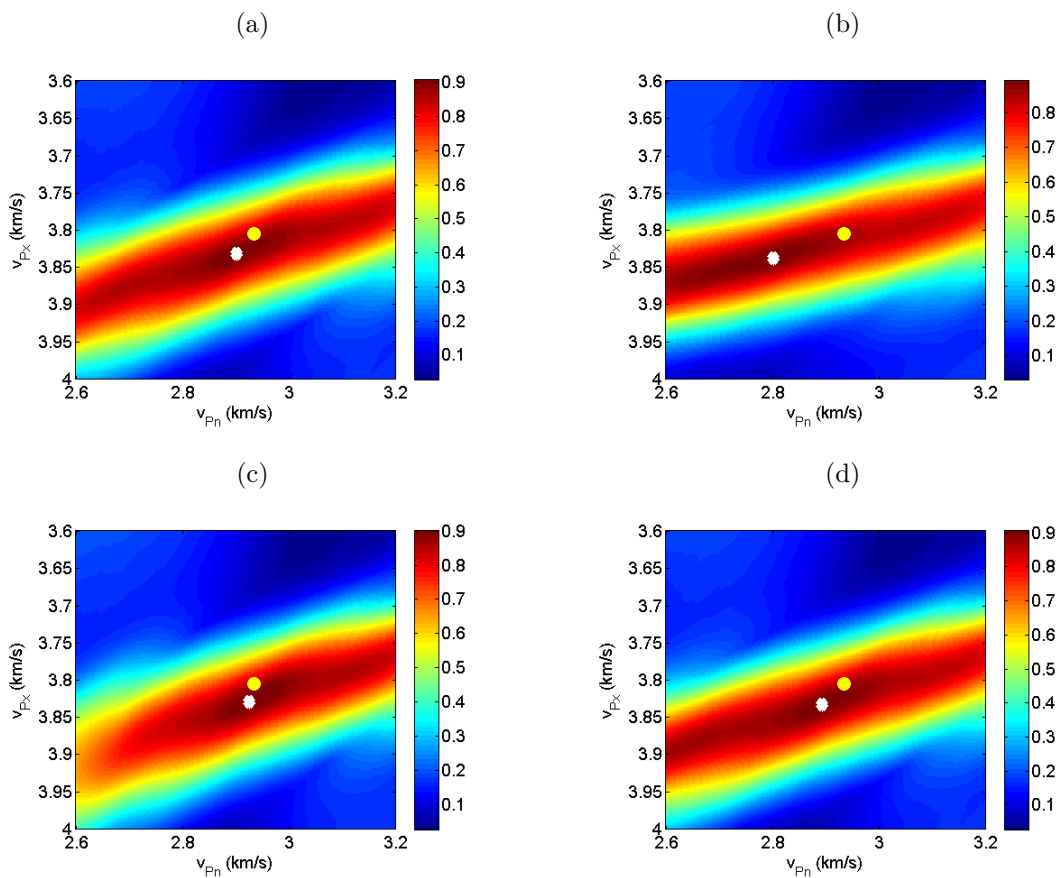
Tabela 5.9 – Valores do erro relativo nas estimativas das velocidades  $v_{Pn}$ ,  $v_{Px}$  e do parâmetro  $\eta$  estimados, e do valor de máximo AK-semblance; obtidos na análise de velocidades, em dados com variação AVO e  $s/n = 5$ , no folhelho VTI Greenhorn para  $x/z = 1,5$ .

	Erro $v_{Pn}$ (%)	Erro $v_{Px}$ (%)	Erro $\eta$ (%)	$S_{max}$
<b>Shifted hyperbola</b>	3.2523	4.0291	38.5396	0.7433
<b>Padé [1, 1]</b>	2.9440	0.4365	17.4937	0.7434
<b>Padé [2, 1]</b>	3.6634	6.1161	52.6358	0.7434
<b>Padé [2, 2]</b>	3.1495	3.6065	35.6266	0.7432

Fonte: Autor.

também, que o valor de máximo AK-semblance é aproximadamente 0,9 para todas as aproximações.

Figura 5.21 – Mapa AK-semblance  $v_{Pn}$  versus  $v_{Px}$ , usando as curvas de sobretempo: (a) *Shifted hyperbola* (4.23), (b) Padé [1, 1] (4.25), (c) Padé [2, 1] (4.26) e (d) Padé [2, 2] (4.27), para estimar estas velocidades e o parâmetros  $\eta$  em dados com variação AVO e  $s/n = 15$ , obtidos no folhelho VTI Greenhorn para  $x/z = 4,0$ . Círculo amarelo - valor exato e losango branco - valor aproximado.



Fonte: Autor.

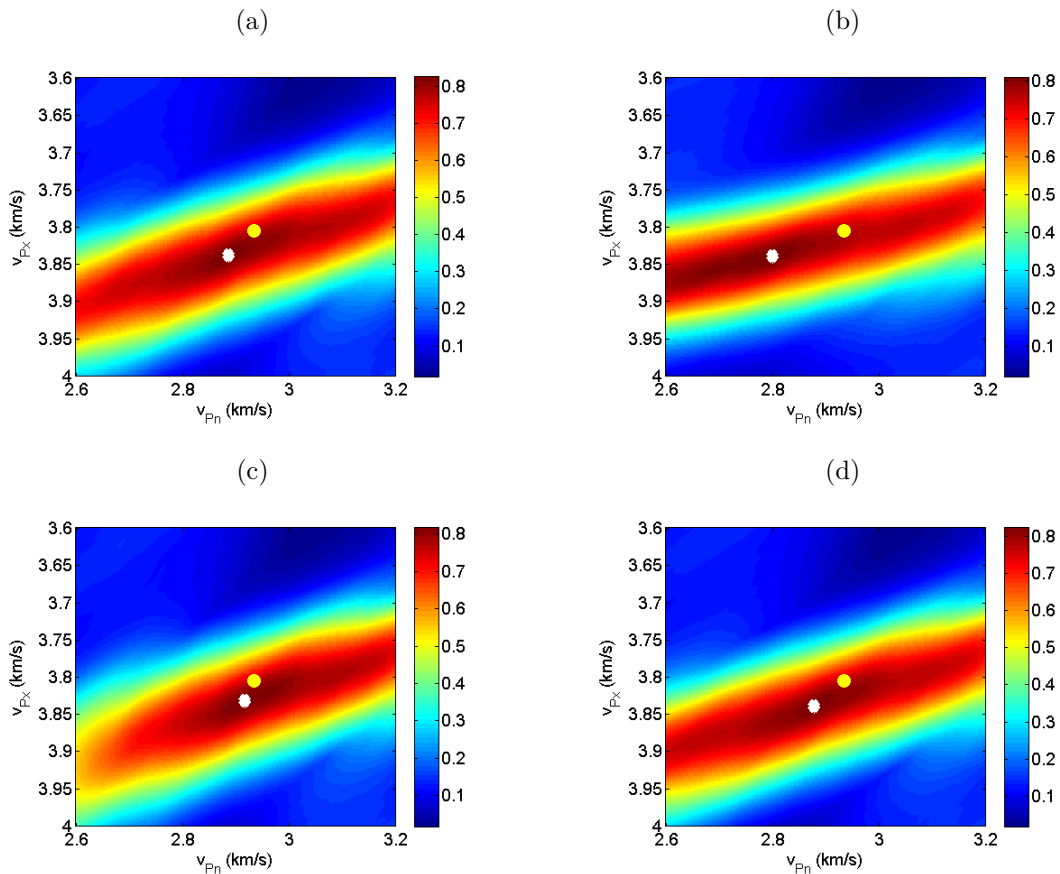
Assim, de acordo com os experimentos apresentados podemos sugerir que a medida AK-semblance, com as aproximações não hiperbólicas *Shifted hyperbola* (4.23) e suas

Tabela 5.10 – Valores do erro relativo nas estimativas das velocidades  $v_{Pn}$ ,  $v_{Px}$  e do parâmetro  $\eta$  estimados, e do valor de máximo AK-semblance; obtidos na análise de velocidades, em dados com variação AVO e  $s/n = 15$ , no folhelho VTI Greenhorn para  $x/z = 4, 0$ .

	Erro $v_{Pn}$ (%)	Erro $v_{Px}$ (%)	Erro $\eta$ (%)	$S_{max}$
<b>Shifted hyperbola</b>	1.0940	0.7006	9.0438	0.9075
<b>Padé [1, 1]</b>	4.4856	0.8591	28.3906	0.8943
<b>Padé [2, 1]</b>	0.2717	0.6478	4.5809	0.9030
<b>Padé [2, 2]</b>	1.4023	0.7535	10.9157	0.9086

Fonte: Autor.

Figura 5.22 – Mapa AK-semblance  $v_{Pn}$  versus  $v_{Px}$ , usando as curvas de sobretempo: (a) *Shifted hyperbola* (4.23), (b) Padé [1, 1] (4.25), (c) Padé [2, 1] (4.26) e (d) Padé [2, 2] (4.27), para estimar estas velocidades e o parâmetros  $\eta$  em dados com variação AVO e  $s/n = 5$ , obtidos no folhelho VTI Greenhorn para  $x/z = 4, 0$ . Círculo amarelo - valor exato e losango branco - valor aproximado.



Fonte: Autor.

aproximações racionais Padé [2, 1] (4.26) e Padé [2, 2] (4.27), é muito eficaz em mitigar os efeitos da variação AVO e reversão de polaridade em meios VTI, especialmente em experimentos sem ruídos, tanto para valores baixo quanto altos de  $x/z$ . No caso da presença de ruídos, a medida AK-semblance também é eficaz se a razão  $s/n$  é alta, tanto

Tabela 5.11 – Valores do erro relativo nas estimativas das velocidades  $v_{Pn}$ ,  $v_{Px}$  e do parâmetro  $\eta$  estimados, e do valor de máximo AK-semblance; obtidos na análise de velocidades, em dados com variação AVO e  $s/n = 5$ , no folhelho VTI Greenhorn para  $x/z = 4, 0$ .

	Erro $v_{Pn}$ (%)	Erro $v_{Px}$ (%)	Erro $\eta$ (%)	$S_{max}$
<b>Shifted hyperbola</b>	1.6078	0.8591	12.5360	0.8249
<b>Padé [1, 1]</b>	4.5884	0.9120	29.2724	0.8978
<b>Padé [2, 1]</b>	0.5801	0.7006	6.4072	0.8187
<b>Padé [2, 2]</b>	1.9162	0.9120	14.4415	0.8261

Fonte: Autor.

para valores baixo quanto para valores alto de  $x/z$ , contudo se  $s/n$  é baixa a medida AK-semblance sofre perdas consideráveis na precisão das estimativas.

### 5.2.3 Semblance SVD em meios homogêneos VTI

Considere-se, agora, a matriz de dados  $\mathbf{D}(\tau, x)$ , de ordem  $N_t \times N_x$ , reescrita como:

$$\mathbf{D} = \mathbf{W} + \mathbf{N}, \quad (5.13)$$

sendo  $\mathbf{W}$  a matriz sinal e  $\mathbf{N}$  a matriz ruído, ambas tendo ordem  $N_t \times N_x$ . Dessa forma, a medida semblance 5.1 pode ser reescrita como:

$$S = \frac{\|\mathbf{W}\|_F^2}{\|\mathbf{D}\|_F^2}, \quad (5.14)$$

sendo  $\|\mathbf{D}\|_F$  a norma matricial de Frobenius, definida como:

$$\|\mathbf{D}\|_F = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \|\mathbf{D}\|^2, \quad (5.15)$$

e  $\mathbf{W}$  a matriz sinal:

$$\mathbf{W} = \mathbf{s}\mathbf{e}^T, \quad (5.16)$$

a qual é o produto entre o vetor sinal  $\mathbf{s}$ , o qual por hipótese é o mesmo em todos os canais, e a transposta do vetor de empilhamento:  $\mathbf{e}^T = [1, 1, \dots, 1]$ , de ordem  $N_x \times 1$ .

Uma estimativa ótima para o sinal pode ser obtida como (URSIN, 1979):

$$\hat{\mathbf{s}} = \frac{1}{N_x} \mathbf{D}\mathbf{e}. \quad (5.17)$$

Calculando a decomposição em valores singulares SVD (*singular value decomposition*) da matriz de dados como (GOLUB; LOAN, 1996):

$$\mathbf{D} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T = \sum_{i=1}^{N_t} \mathbf{u}_i \sigma_i \mathbf{v}_i^T, \quad (5.18)$$

com  $\mathbf{u}_k$  e  $\mathbf{v}_k$  vetores ortonormais de ordem  $N_t \times 1$  e  $N_x \times 1$ , respectivamente, e  $\sigma$  os valores singulares escolhidos tal que:  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_{N_t}$ , para  $N_t \leq N_x$ . A medida semblance pode então ser reescrita como (URSIN; SILVA; PORSANI, 2014):

$$S = \frac{\sum_{k=1}^{N_t} \sigma_k^2 \|\mathbf{D}\mathbf{v}_k\|^2}{N_x \sum_{k=1}^{N_t} \sigma_k^2}. \quad (5.19)$$

Contudo supondo-se que a forma do sinal permanece a mesma em todos os traços, porém com a amplitude variando com o afastamento, a matriz sinal pode tomar a forma:

$$\mathbf{W} = \mathbf{sa}^T, \quad (5.20)$$

sendo  $\mathbf{a}^T = [a_1, a_2, \dots, a_{N_x}]$ , com  $\mathbf{a}$  um vetor com as amplitudes em cada canal. Golub e Loan (1996) mostraram que uma estimativa de mínimos quadrados de uma matriz é a sua primeira auto-imagem. Assim, a matriz sinal pode ser decomposta como  $\mathbf{W} = \mathbf{u}_1 \sigma_1 \mathbf{v}_1^t$ , e o operador semblance modificado como (GERSZTENKORN; MARFURT, 1999; URSIN; SILVA; PORSANI, 2014):

$$S_{SVD} = \frac{\sigma_1^2}{\sum_{k=1}^{N_t} \sigma_k^2}, \quad (5.21)$$

doravante chamada de semblance SVD.

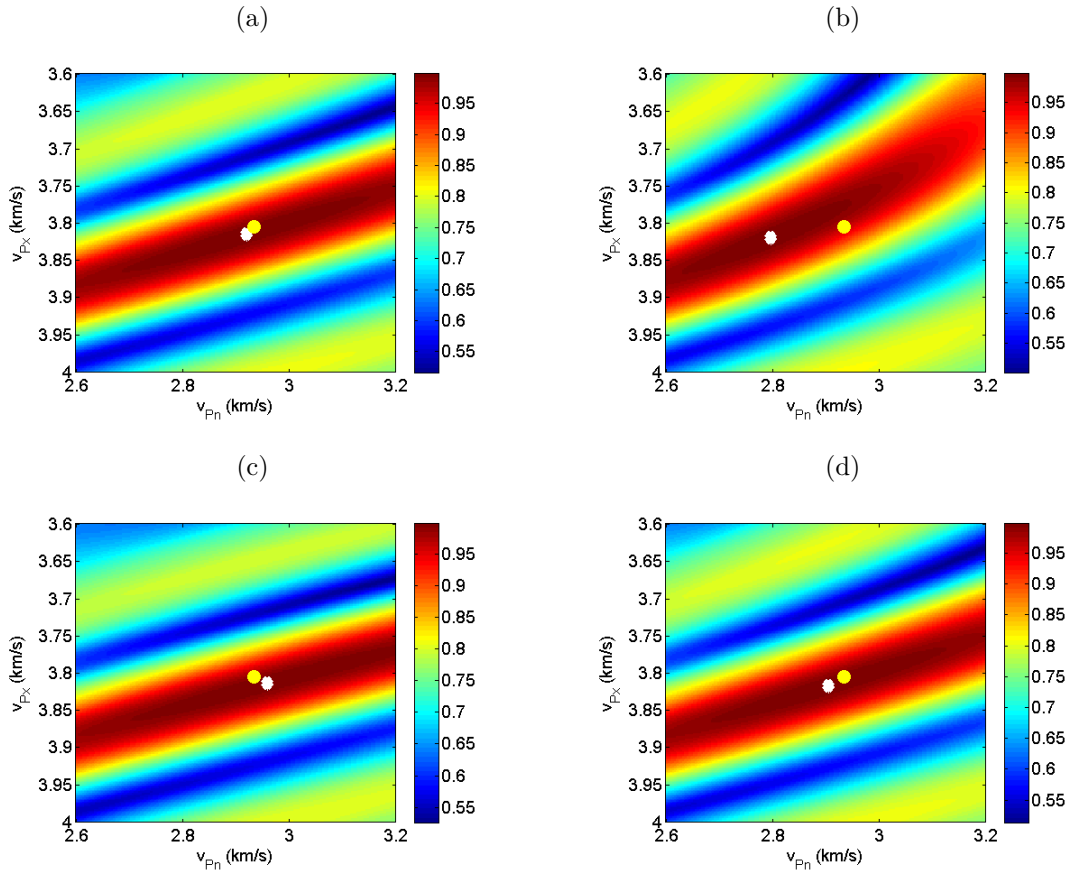
#### 5.2.4 Análise de velocidades sensível ao AVO usando semblance SVD

Neste experimento são realizadas análise de velocidades, baseada em semblance SVD, com a aproximação não hiperbólica *shifted hyperbola* (4.23) e com as aproximações racionais Padé [1/1] (4.25), Padé [2/1] (4.26) e Padé [2/2] (4.27), considerando as mesmas seções sísmicas da Figura 5.15 usadas na subseção 5.2.2, ou seja, foram usados dados com variação AVO sem ruídos (Figura 5.15 (a)) e com ruídos (Figura 5.15 (b) e (c)) obtidas no meio VTI Greenhorn.

Primeiramente, é realizada a análise de velocidades em dados com variação AVO e sem ruídos (Figura 5.15 (a)). As Figuras 5.23 e 5.24 ilustram os mapas semblance SVD  $v_{P_n}$  versus  $v_{P_x}$ , obtidos usando as aproximações não hiperbólicas *supra citadas*, para valores de  $x/z$  iguais a 1,5 e 4,0, respectivamente, cujos resultados estão apresentados nas Tabelas 5.12 e 5.13. Quanto ao experimento para  $x/z = 1,5$ , o que se verifica é que as aproximações *shifted hyperbola* (4.23), Padé [2/1] (4.26) e Padé [2/2] (4.27) têm boa precisão nas estimativas dos parâmetros, pois o erro relativo na estimativa da velocidade  $v_{P_n}$  não ultrapassa 1,0% e o erro relativo do parâmetro  $\eta$  não ultrapassa 7,0%. Observa-se também que o valor de máximo semblance SVD é aproximadamente 1, e é o mesmo para todas as aproximações de sobretempo usadas aqui. Já o experimento para  $x/z = 4,0$  verifica-se novamente que, exceto a aproximação Padé [1/1], todas as outras aproximações são bastante precisas nas estimativas dos parâmetros, pois o erro relativo na estimativa da



Figura 5.23 – Mapa semblance SVD  $v_{Pn}$  versus  $v_{Px}$ , usando as curvas de sobretempo: (a) *Shifted hyperbola* (4.23), (b) Padé [1, 1] (4.25), (c) Padé [2, 1] (4.26) e (d) Padé [2, 2] (4.27), para estimar estas velocidades e o parâmetro  $\eta$  em dados com variação AVO e sem ruído, obtidos no folhelho VTI Greenhorn, para  $x/z = 1,5$ . Círculo amarelo - valor exato e losango branco - valor aproximado.



Fonte: Autor.

Tabela 5.12 – Valores do erro relativo nas estimativas das velocidades  $v_{Pn}$ ,  $v_{Px}$  e do parâmetro  $\eta$  estimados e do valor de máximo semblance SVD; obtidos na análise de velocidades, em dados com espalhamento e sem ruído, para o folhelho VTI Greenhorn para  $x/z = 1,5$ .

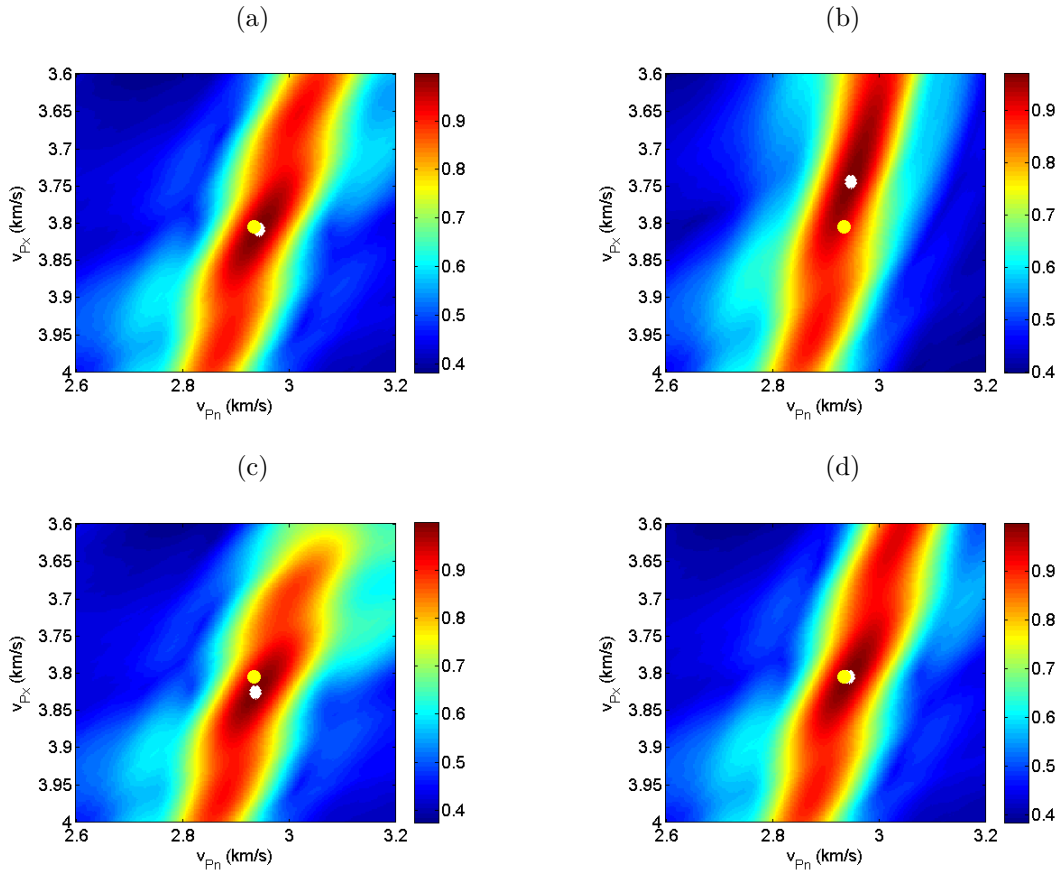
	Erro $v_{Pn}$ (%)	Erro $v_{Px}$ (%)	Erro $\eta$ (%)	$S_{max}$
<b>Shifted hyperbola</b>	0.4773	0.2780	3.7691	0.9991
<b>Padé [1, 1]</b>	4.6912	0.3836	26.9797	0.9991
<b>Padé [2, 1]</b>	0.8588	0.2251	3.0791	0.9991
<b>Padé [2, 2]</b>	0.9912	0.3308	6.6423	0.9991

Fonte: Autor.

velocidade  $v_{Pn}$  não ultrapassa 0.4% e o erro relativo do parâmetro  $\eta$  não ultrapassa 2%. Observa-se, também, que o valor de máximo semblance SVD é aproximadamente 1.

A seguir, são realizados experimentos em dados com variação AVO e com valores

Figura 5.24 – Mapa semblance SVD  $v_{Pn}$  versus  $v_{Px}$ , usando as curvas de sobretempo: (a) *Shifted hyperbola* (4.23), (b) Padé [1, 1] (4.25), (c) Padé [2, 1] (4.26) e (d) Padé [2, 2] (4.27), para estimar estas velocidades e o parâmetro  $\eta$  em dados com variação AVO e sem ruído, obtidos no folhelho VTI Greenhorn, para  $x/z = 4, 0$ . Círculo amarelo - valor exato e losango branco - valor aproximado.



Fonte: Autor.

Tabela 5.13 – Valores do erro relativo nas estimativas das velocidades  $v_{Pn}$ ,  $v_{Px}$  e do parâmetro  $\eta$  estimados e do valor de máximo semblance SVD; obtidos na análise de velocidades, em dados com variação AVO e sem ruído, para o folhelho VTI Greenhorn para  $x/z = 4, 0$ .

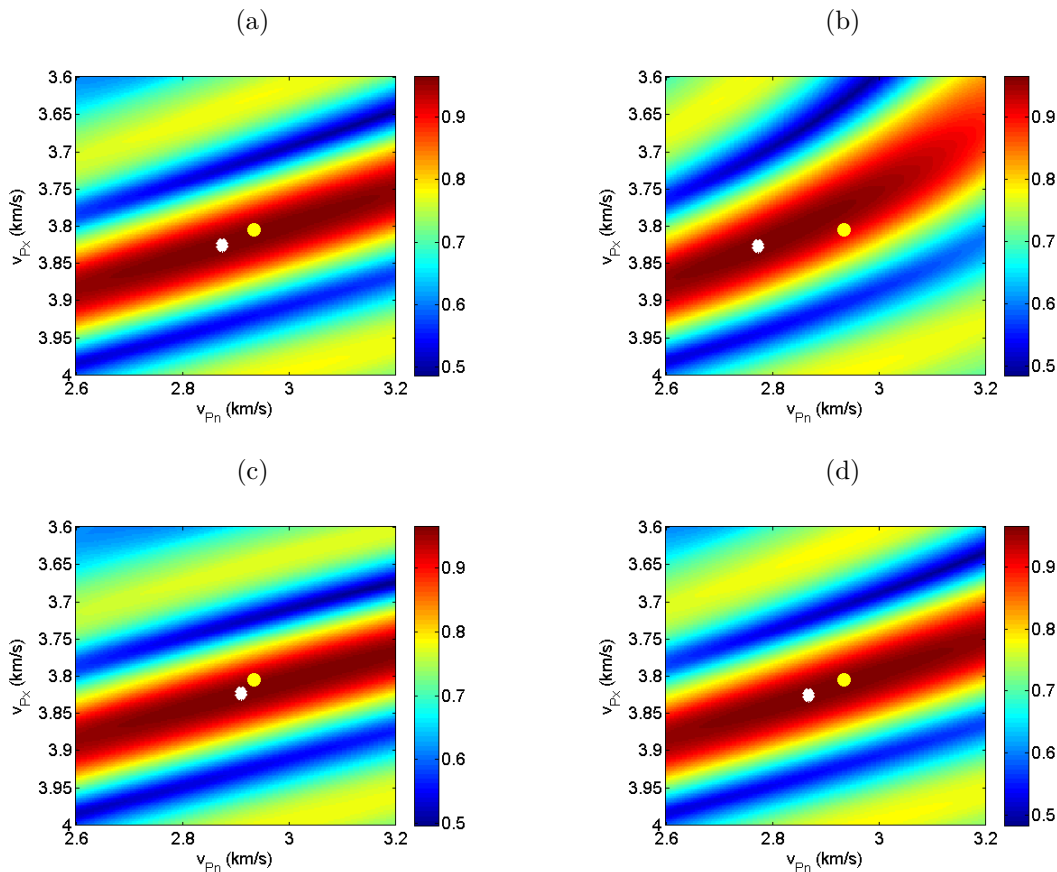
	Erro $v_{Pn}$ (%)	Erro $v_{Px}$ (%)	Erro $\eta$ (%)	$S_{max}$
<b>Shifted hyperbola</b>	0.3449	0.1195	1.0964	0.9984
<b>Padé [1, 1]</b>	0.4477	1.5712	9.8056	0.9711
<b>Padé [2, 1]</b>	0.1394	0.5421	1.9992	0.9976
<b>Padé [2, 2]</b>	0.3449	0.0138	1.6145	0.9982

Fonte: Autor.

de  $s/n$  iguais a 15 e 5. As Figuras ?? e ?? ilustram os mapas semblance SVD  $v_{Pn}$  versus  $v_{Px}$ , obtidos usando as mesmas aproximações não hiperbólicas, do experimento anterior, para valores de  $x/z$  iguais a 1,5 e 4,0, respectivamente e  $s/n = 15$  fixo. Os resultados estão apresentados nas Tabelas ?? e ??, respectivamente. Quanto aos resultados ilustrados

na Figura 5.25 e apresentados na Tabela 5.14 o que se verifica é que para  $x/z = 1,5$  e alto valor de  $s/n$ , há uma grande perda de precisão nas estimativas, se comparado ao experimento sem ruídos. Somente a aproximação Padé  $[2, 1]$  mantém-se com boa precisão, mesmo o valor de máximo semblance SVD sendo praticamente o mesmo para todas as aproximações. Já o experimento para  $x/z = 4,0$  e alto valor de  $s/n$ , com resultados ilustrado na Figura ?? e apresentado Tabela ??, na mostra uma boa precisão da estimativa dos parâmetros, pois os valores do erro relativo na estimativa da velocidade  $v_{Pn}, v_{Px}$  e do parâmetro  $\eta$  são até melhores do que no experimento sem ruídos, sendo que o semblance SVD com as aproximações *shifted hyperbola* (4.23), Padé  $[2/1]$  (4.26) e Padé  $[2/2]$  (4.27) possuem erro relativo de  $v_{Pn}$  menor que 0,4% e erro relativo de  $\eta$  menor que 2,0%, e, também, valor de máximo semblance SVD aproximadamente igual a 1.

Figura 5.25 – Mapa semblance SVD  $v_{Pn}$  versus  $v_{Px}$ , usando as curvas de sobretempo: (a) *Shifted hyperbola* (4.23), (b) Padé  $[1, 1]$  (4.25), (c) Padé  $[2, 1]$  (4.26) e (d) Padé  $[2, 2]$  (4.27), para estimar estas velocidades e o parâmetro  $\eta$  em dados com variação AVO e com  $s/n = 15$ , obtidos no folhelho VTI Greenhorn, para  $x/z = 1,5$ . Círculo amarelo - valor exato e losango branco - valor aproximado.



Fonte: Autor.

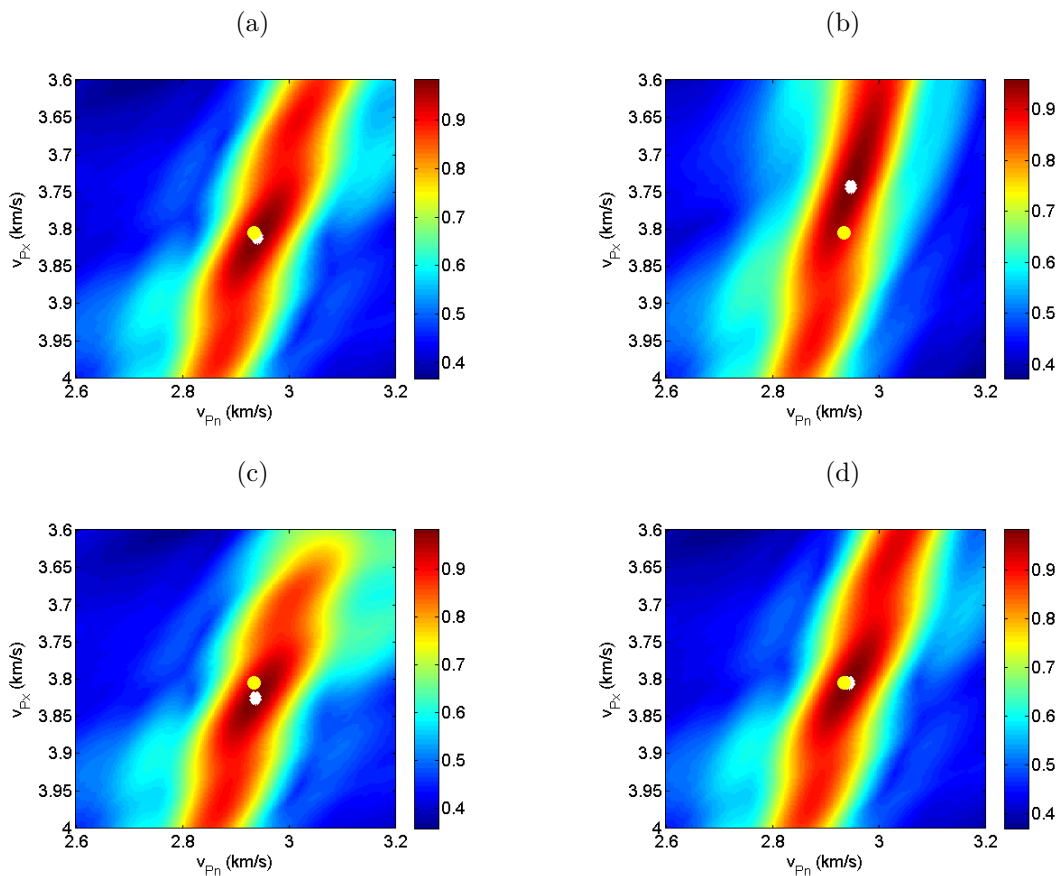
Finalmente, é realizada análise de velocidades com semblance SVD, obtidos usando as aproximações não hiperbólicas do experimento anterior, em dados com variação AVO e com  $s/n = 5$ , sendo  $x/z$  igual a 1,5 e 4,0. Os resultados estão ilustrados nos mapas

Tabela 5.14 – Valores do erro relativo nas estimativas das velocidades  $v_{Pn}$ ,  $v_{Px}$  e do parâmetro  $\eta$  estimados e do valor de máximo semblance SVD; obtidos na análise de velocidades, em dados com variação AVO e com  $s/n = 15$ , para o folhelho VTI Greenhorn para  $x/z = 1,5$ .

	Erro $v_{Pn}$ (%)	Erro $v_{Px}$ (%)	Erro $\eta$ (%)	$S_{max}$
<b>Shifted hyperbola</b>	2.0190	0.5421	13.0752	0.9659
<b>Padé [1, 1]</b>	5.5134	0.5950	32.9366	0.9658
<b>Padé [2, 1]</b>	0.7856	0.4893	6.3914	0.9659
<b>Padé [2, 2]</b>	2.2245	0.5421	14.1685	0.9659

Fonte: Autor.

Figura 5.26 – Mapa semblance SVD  $v_{Pn}$  versus  $v_{Px}$ , usando as curvas de sobretempo: (a) *Shifted hyperbola* (4.23), (b) Padé [1, 1] (4.25), (c) Padé [2, 1] (4.26) e (d) Padé [2, 2] (4.27), para estimar estas velocidades e o parâmetro  $\eta$  em dados com variação AVO e com  $s/n = 15$ , obtidos no folhelho VTI Greenhorn, para  $x/z = 4,0$ . Círculo amarelo - valor exato e losango branco - valor aproximado.



Fonte: Autor.

semblance SVD  $v_{Pn}$  versus  $v_{Px}$  nas Figuras ?? e ??, e apresentados nas Tabelas ?? e ??. Quanto aos resultados na Figura 5.27 e Tabela 5.16 para  $s/n = 5$  e  $x/z = 1,5$  o que se observa é que, a pesar de o valor de máximo semblance ser praticamente igual para todas as aproximações, ele é relativamente baixo, 0,79. Observa-se também que as estimativas

Tabela 5.15 – Valores do erro relativo nas estimativas das velocidades  $v_{Pn}$ ,  $v_{Px}$  e do parâmetro  $\eta$  estimados e do valor de máximo semblance SVD; obtidos na análise de velocidades, em dados com variação AVO e com  $s/n = 15$ , para o folhelho VTI Greenhorn para  $x/z = 4,0$ .

	Erro $v_{Pn}$ (%)	Erro $v_{Px}$ (%)	Erro $\eta$ (%)	$S_{max}$
<b>Shifted hyperbola</b>	0.2421	0.1723	0.3328	0.9855
<b>Padé [1, 1]</b>	0.4477	1.6240	10.0599	0.9598
<b>Padé [2, 1]</b>	0.1394	0.5421	1.9992	0.9847
<b>Padé [2, 2]</b>	0.3449	0.0138	1.6145	0.9853

Fonte: Autor.

dos parâmetros é imprecisa com erro relativo alto, exceto para a aproximação Padé [1/1]. Já no experimento para  $s/n = 5$  e  $x/z = 4,0$  cujos resultados estão ilustrados na Figura 5.28 e apresentados na Tabela 5.17 mostram que, com exceção dos resultados obtidos com a aproximação Padé [1/1], os valores do erro relativo na estimativa das velocidades  $v_{Pn}$  e  $v_{Px}$  e do parâmetro  $\eta$  são baixos, mesmo na presença de baixa razão sinal-ruído, ou seja, os valores dos parâmetros são bem estimados. Há de se salientar as boas estimativas obtidas com o semblance SVD usando a aproximação Padé [2/1]. Observa-se também, valores de máximo semblance SVD aproximadamente 0,9.

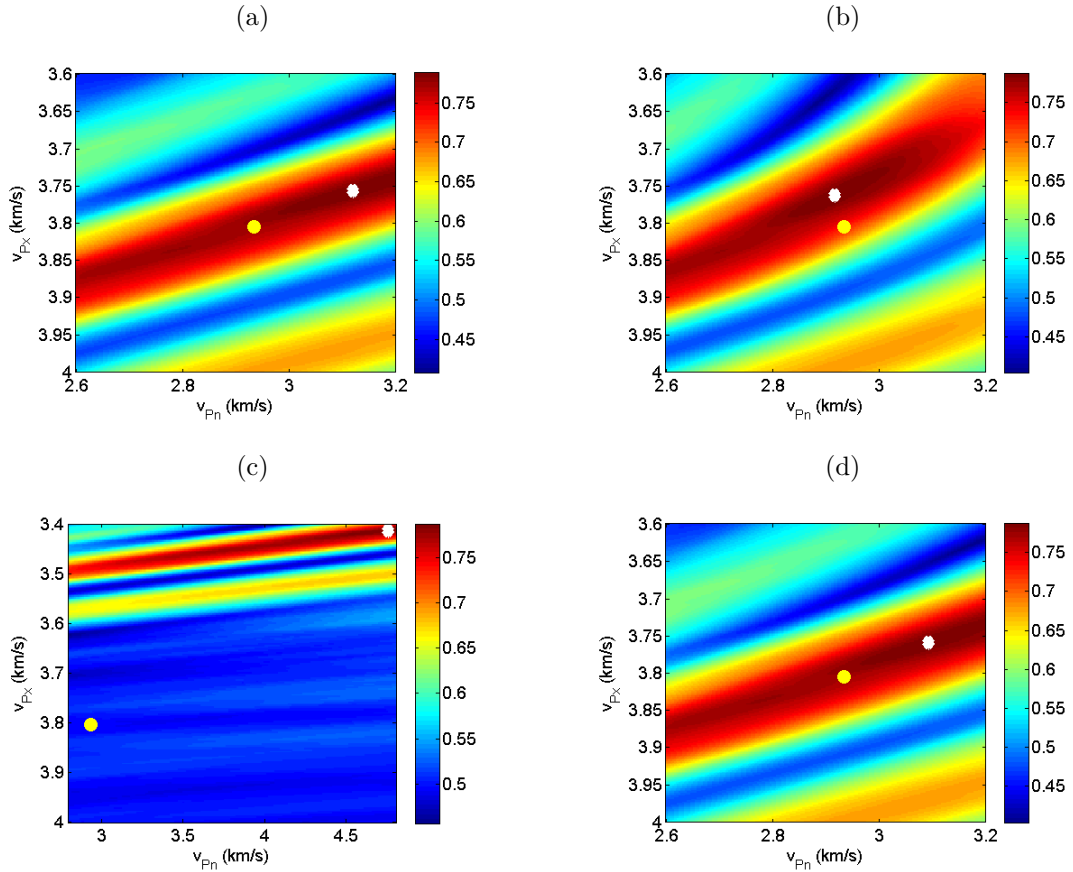
Assim, de forma geral, pode-se sugerir que o semblance SVD, com as aproximações não hiperbólicas *Shifted hyperbola* (4.23) e suas aproximações racionais Padé [2, 1] (4.26) e Padé [2, 2] (4.27), é uma boa opção na análise de velocidades para estimar as velocidades  $v_{Pn}$  e  $v_{Px}$  e o parâmetro  $\eta$ , em dados VTI com variação AVO e inversões de polaridade. Em experimentos com ausência de ruídos e  $x/z$  igual à 1,5 e 4,0, o semblance SVD com estas aproximações se mostrou bastante preciso nas estimativas dos parâmetros. Já em experimentos com adição de ruídos, tanto para  $s/n = 15$  quanto para  $s/n = 5$  o que se percebe é a imprecisão nas estimativas para  $x/z = 1,5$ , contudo para  $x/z = 4,0$  estas estimativas são muito boas. O que sugere que o semblance SVD além de mitigar os efeitos da variação AVO também funciona como um filtro de ruídos.

Tabela 5.16 – Valores do erro relativo nas estimativas das velocidades  $v_{Pn}$ ,  $v_{Px}$  e do parâmetro  $\eta$  estimados e do valor de máximo semblance SVD; obtidos na análise de velocidades, em dados com variação AVO e com  $s/n = 5$ , para o folhelho VTI Greenhorn para  $x/z = 1,5$ .

	Erro $v_{Pn}$ (%)	Erro $v_{Px}$ (%)	Erro $\eta$ (%)	$S_{max}$
<b>Shifted hyperbola</b>	6.4088	1.2542	34.2392	0.7879
<b>Padé [1, 1]</b>	0.5801	1.0957	2.5413	0.7880
<b>Padé [2, 1]</b>	62.2511	10.3151	171.3005	0.7872
<b>Padé [2, 2]</b>	5.4838	1.2014	30.2658	0.7880

Fonte: Autor.

Figura 5.27 – Mapa semblance SVD  $v_{Pn}$  versus  $v_{Px}$ , usando as curvas de sobretempo: (a) *Shifted hyperbola* (4.23), (b) Padé [1, 1] (4.25), (c) Padé [2, 1] (4.26) e (d) Padé [2, 2] (4.27), para estimar estas velocidades e o parâmetro  $\eta$  em dados com variação AVO e com  $s/n = 5$ , obtidos no folhelho VTI Greenhorn, para  $x/z = 1,5$ . Círculo amarelo - valor exato e losango branco - valor aproximado.



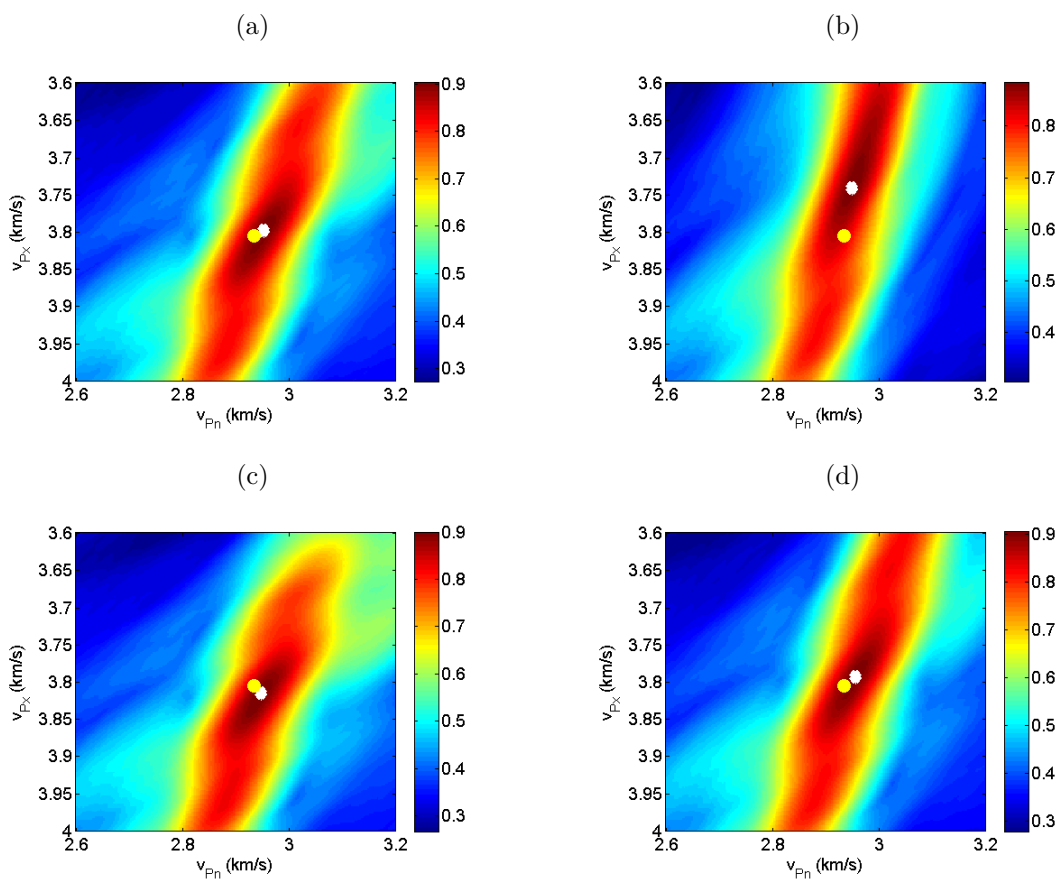
Fonte: Autor.

Tabela 5.17 – Valores do erro relativo nas estimativas das velocidades  $v_{Pn}$ ,  $v_{Px}$  e do parâmetro  $\eta$  estimados e do valor de máximo semblance SVD; obtidos na análise de velocidades, em dados com variação AVO e com ruído, para o folhelho VTI Greenhorn para  $x/z = 4,0$ .

	Erro $v_{Pn}$ (%)	Erro $v_{Px}$ (%)	Erro $\eta$ (%)	$S_{max}$
<b>Shifted hyperbola</b>	0.6533	0.1975	4.1418	0.9041
<b>Padé [1, 1]</b>	0.5505	1.6769	10.7969	0.8852
<b>Padé [2, 1]</b>	0.4477	0.2780	0.8221	0.9003
<b>Padé [2, 2]</b>	0.7560	0.3032	5.1486	0.9051

Fonte: Autor.

Figura 5.28 – Mapa semblance SVD  $v_{Pn}$  versus  $v_{Px}$ , usando as curvas de sobretempo: (a) *Shifted hyperbola* (4.23), (b) Padé [1, 1] (4.25), (c) Padé [2, 1] (4.26) e (d) Padé [2, 2] (4.27), para estimar estas velocidades e o parâmetro  $\eta$  em dados com variação AVO e com  $s/n = 5$ , obtidos no folhelho VTI Greenhorn, para  $x/z = 4, 0$ . Círculo amarelo - valor exato e losango branco - valor aproximado.



Fonte: Autor.

## 6 CONCLUSÃO

Considerando meios anisotrópicos homogêneos VTI, foram deduzidas aproximações anelíticas para a velocidade de fase e grupo da onda P, para com estas, se obter aproximações não hiperbólicas de sobretempo. Experimentos numéricos verificaram que as aproximações anelíticas racionais de velocidade de fase e grupo, bem como as aproximações de sobretempo, são validadas. Análise de velocidades, usando as aproximações não hiperbólicas de sobretempo, foram realizadas e sugerem que estas têm boa precisão e robustez na estimativa de parâmetros. Além disso, experimentos verificaram que estas aproximações permanecem válidas, precisas e robustas, para o caso de meios VTI verticalmente heterogêneos.

A propagação da onda P em meios VTI homogêneos tem frente de onda anelítica. Aproximações anelíticas de velocidade de fase e grupo, utilizando a aproximação *shifted hyperbola*, têm sido apresentadas e validadas na literatura. Tenho desenvolvido aproximações anelíticas racionais baseadas na *shifted hyperbola* para a velocidade de fase e grupo da onda P. Com as aproximações de velocidade de grupo, foram deduzidas aproximações não hiperbólicas de sobretempo. Para aferir a validade dessas aproximações racionais de velocidade de fase, grupo e de sobretempo, principalmente para grandes valores da razão afastamento-profundidade, foram comparados os erros relativos destas com os erros relativos de algumas aproximações conhecidas da literatura. Os resultados obtidos nos experimentos sugerem que as aproximações racionais são tão válidas quanto a aproximação *shifted hyperbola* para modelar propagação de ondas em meios VTI homogêneos. No caso das aproximações racionais não-hiperbólicas, a validade destas também foi confirmada para meios VTI verticalmente heterogêneos.

A precisão das aproximações racionais de sobretempo foram avaliadas por meio de análise de velocidades baseada em semblance, AK-semblance e semblance SVD, adaptados com as aproximações não hiperbólicas para se considerar meios VTI. Em dados sem espalhamento e sem ruídos a medida semblance tradicional foi utilizada e os resultados obtidos mostraram que a aproximação racional de sobretempo Padé [1, 1] é excelentes para estimar os parâmetros em afastamentos moderados, enquanto que a aproximação racional de sobretempo Padé [2, 1] é excelente para estimar parâmetros em grandes afastamentos. Devido a pouca precisão da medida semblance tradicional para estimar parâmetros em dados com grande variação de amplitude com o afastamento e com inversão de polaridade, foram, também, apresentadas adaptações para meios VTI das medidas de coerência AK-semblance e semblance SVD, introduzindo nestas as curvas de sobretempo não hiperbólicas. As medidas AK-semblance e semblance SVD, adaptadas para anisotropia, foram usadas para para aferir a precisão e robustês das aproximações



de sobretempo racionais, em estimar parâmetros anisotrópicos. Quanto a medida AK-semblance, os experimentos mostraram que esta é excelente para mitigar a influência do espalhamento, mesmo na presença de ruídos, e que as aproximações de sobretempo *shifted hyperbola*, Padé [2, 1] e Padé [2, 2] são as melhores para se estimar parâmetros anisotrópicos tanto em moderados quanto em longos afastamentos. Quanto a medida semblance SVD, os experimentos mostraram que, como a medida AK-semblance, esta é excelente para minimizar a influência do espalhamento. Notou-se, também, que as aproximações de sobretempo *shifted hyperbola*, Padé [2, 1] e Padé [2, 2] são mais precisas e robustas para se estimar parâmetros anisotrópicos, tanto em moderados quanto em longos afastamentos. Assim, este trabalho tem mostrado que os aproximantes racionais constituem uma ferramenta matemática com grande potencial na obtenção de aproximações válidas em meios anisotrópicos. Temos mostrado também a possibilidade de se aperfeiçoar a estimativa de parâmetros cinemáticos em meios anisotrópicos VTI por meio de adaptações para meios anisotrópicos de algumas medidas de coerência. Estas discussões nos abre caminhos para se buscar aproximações e medidas de coerência que venham a estimar parâmetros em simetrias anisotrópicas mais complexas.

## REFERÊNCIAS

- AKI, K.; RICHARDS, P. Quantitative seismology. *Theory and*, 1980.
- ALKHALIFAH, T. Velocity analysis using nonhyperbolic moveout in transversely isotropic media. *Geophysics*, Society of Exploration Geophysicists, v. 62, n. 6, p. 1839–1854, 1997.
- ALKHALIFAH, T. Acoustic approximations for processing in transversely isotropic media. *Geophysics*, Society of Exploration Geophysicists, v. 63, n. 2, p. 623–631, 1998.
- ALKHALIFAH, T.; TSVANKIN, I. Velocity analysis for transversely isotropic media. *Geophysics*, Society of Exploration Geophysicists, v. 60, n. 5, p. 1550–1566, 1995.
- AULD, B. A. *Acoustic fields and waves in solids*. [S.l.]: John Wiley and Sons, 1973.
- BAKER JR, G. A. Essentials of padé approximations. *Academic, New York*, 1975.
- BAKULIN, A.; GRECHKA, V.; TSVANKIN, I. Estimation of fracture parameters from reflection seismic data-part iii: Fractured models with monoclinic symmetry. *Geophysics*, Society of Exploration Geophysicists, v. 65, n. 6, p. 1818–1830, 2000.
- BERRYMAN, J. G. Long-wave elastic anisotropy in transversely isotropic media. *Geophysics*, Society of Exploration Geophysicists, v. 44, n. 5, p. 896–917, 1979.
- CASTLE, R. J. A theory of normal moveout. *Geophysics*, Society of Exploration Geophysicists, v. 59, n. 6, p. 983–999, 1994.
- DE BAZELAIRE, E. Normal moveout revisited: Inhomogeneous media and curved interfaces. *Geophysics*, Society of Exploration Geophysicists, v. 53, n. 2, p. 143–157, 1988.
- DELLINGER, J.; MUIR, F.; KARRENBACH, M. Anelliptic approximations for ti media. *Journal of Seismic Exploration*, v. 2, n. 1, p. 23–40, 1993.
- DIX, C. H. Seismic velocities from surface measurements. *Geophysics*, Society of Exploration Geophysicists, v. 20, n. 1, p. 68–86, 1955.
- EIA, U. et al. International energy outlook. *US Energy Information Administration, Washington, DC*, 2011.
- FOMEL, S. On anelliptic approximations for qp velocities in vti media. *Geophysical Prospecting*, Wiley Online Library, v. 52, n. 3, p. 247–259, 2004.
- FOMEL, S. Velocity analysis using ab semblance. *Geophysical Prospecting*, Wiley Online Library, v. 57, n. 3, p. 311–321, 2009.
- FOWLER, P. J. Practical vti approximations: a systematic anatomy. *Journal of Applied Geophysics*, Elsevier, v. 54, n. 3, p. 347–367, 2003.
- GAJEWSKI, D.; PŠENCÍK, I. Computation of high-frequency seismic wavefields in 3-d laterally inhomogeneous anisotropic media. *Geophysical Journal International*, Oxford University Press, v. 91, n. 2, p. 383–411, 1987.

- GERSZTENKORN, A.; MARFURT, K. J. Eigenstructure-based coherence computations as an aid to 3-d structural and stratigraphic mapping. *Geophysics*, Society of Exploration Geophysicists, v. 64, n. 5, p. 1468–1479, 1999.
- GOLUB, G. H.; LOAN, C. F. V. Matrix computations. 1996. *Johns Hopkins University, Press, Baltimore, MD, USA*, p. 374–426, 1996.
- GRECHKA, V.; TSVANKIN, I. Feasibility of nonhyperbolic moveout inversion in transversely isotropic media. *Geophysics*, Society of Exploration Geophysicists, v. 63, n. 3, p. 957–969, 1998.
- HAKE, H.; HELBIG, K.; MESDAG, C. S. Three-term Taylor series for the 2-D curves of P- and S-waves over layered transversely isotropic ground. *Geophysical Prospecting*, v. 32, n. 5, p. 828–850, 1984.
- HELBIG, K. *Foundations of anisotropy for exploration seismics*. [S.l.]: Pergamon Press, 1994. v. 22.
- HUBRAL, P.; KREY, T. *Interval Velocities from Seismic Reflection Time Measurements*. [S.l.]: Society of Exploration Geophysicists, 1980.
- JONES, L. E.; WANG, H. F. Ultrasonic velocities in Cretaceous shales from the Williston basin. *Geophysics*, Society of Exploration Geophysicists, v. 46, n. 3, p. 288–297, 1981.
- MALOVICHKO, A. A. A new representation of the traveltime curve of reflected waves in horizontally layered media. *Applied Geophysics*, v. 91, n. 1, p. 47–53, 1978.
- MUIR, F.; DELLINGER, J. A practical anisotropic system. *SEP-44*, v. 55, p. 58, 1985.
- MUSGRAVE, M. J. P. *Crystal acoustics*. [S.l.]: Holden-Day, San Francisco, 1970.
- SARKAR, D.; CASTAGNA, J. P.; LAMB, W. J. AVO and velocity analysis. *Geophysics*, Society of Exploration Geophysicists, v. 66, n. 4, p. 1284–1293, 2001.
- SCHLUMBERGER. Oilfield glossary. In: \_\_\_\_\_. Schlumberger, 2015. Disponível em: <<http://www.glossary.oilfield.slb.com/Terms/v/vti.aspx>>. Acesso em: 30 out. 2015.
- SCHLUMBERGER. Oilfield glossary. In: \_\_\_\_\_. Schlumberger, 2015. Disponível em: <<http://www.glossary.oilfield.slb.com/Terms/h/hti.aspx>>. Acesso em: 30 out. 2015.
- SHUEY, R. T. A simplification of the Zoeppritz equations. *Geophysics*, Society of Exploration Geophysicists, v. 50, n. 4, p. 609–614, 1985.
- STOLT, R. Migration by Fourier transform. *Geophysics*, Society of Exploration Geophysicists, v. 43, n. 1, p. 23–48, 1978.
- SWORD, C. H. A Soviet look at datum shift. *SEP-51: Stanford Exploration Project*, v. 313, p. 316, 1987.
- TANER, M. T.; KOEHLER, F. Velocity spectra-digital computer derivation applications of velocity functions. *Geophysics*, Society of Exploration Geophysicists, v. 34, n. 6, p. 859–881, 1969.
- THOMSEN, L. Weak elastic anisotropy. *Geophysics*, Society of Exploration Geophysicists, v. 51, n. 10, p. 1954–1966, 1986.

- TSVANKIN, I. Anisotropic parameters and p-wave velocity for orthorhombic media. *Geophysics*, Society of Exploration Geophysicists, v. 62, n. 4, p. 1292–1309, 1997.
- TSVANKIN, I.; HELBIG, K.; TREITEL, S. Seismic signatures and analysis of reflection data in anisotropic media. Pergamon Amsterdam, 2001.
- TSVANKIN, I.; THOMSEN, L. Nonhyperbolic reflection moveout in anisotropic media. *Geophysics*, Society of Exploration Geophysicists, v. 59, n. 8, p. 1290–1304, 1994.
- URSIN, B. Seismic signal detection and parameter estimation\*. *Geophysical Prospecting*, Wiley Online Library, v. 27, n. 1, p. 1–15, 1979.
- URSIN, B.; SILVA, M. G.; PORSANI, M. J. Signal and traveltime parameter estimation using singular value decomposition. *Geophysics*, Society of Exploration Geophysicists, v. 79, n. 5, p. U1–U14, 2014.
- URSIN, B.; STOVAS, A. Traveltime approximations for a layered transversely isotropic medium. *Geophysics*, Society of Exploration Geophysicists, v. 71, n. 2, p. D23–D33, 2006.
- WINTERSTEIN, D. F.; MEADOWS, M. A. Shear-wave polarizations and subsurface stress directions at lost hills field. *Geophysics*, Society of Exploration Geophysicists, v. 56, n. 9, p. 1331–1348, 1991.
- YAN, J.; TSVANKIN, I. Avo-sensitive semblance analysis for wide-azimuth data. *Geophysics*, Society of Exploration Geophysicists, v. 73, n. 2, p. U1–U11, 2008.

## APÊNDICE A – APROXIMAÇÃO RACIONAL PADÉ [2/2] DA FUNÇÃO *SHIFTED HYPERBOLA*

Seja  $f$  a função *shifted hyperbola* dada por:

$$f(\alpha) = x(1 - s) + s \left( x^2 + \frac{2\alpha}{s} \right)^{1/2}. \quad (\text{A.1})$$

A expansão em série de Taylor, até a quarta ordem, da função  $f$ , em torno de  $\alpha$ , é:

$$f(\alpha) \approx a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + a_4\alpha^4, \quad (\text{A.2})$$

sendo

$$\begin{aligned} a_0 &= x; \\ a_1 &= \frac{1}{x}; \\ a_2 &= \frac{1}{2sx^3}; \\ a_3 &= \frac{1}{2s^2x^5}; \\ a_4 &= -\frac{5}{8s^3x^7}. \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Seja agora a aproximação racional de Padé [2/2], na variável  $\alpha$ , dada por:

$$f(\alpha) \approx \frac{a + b\alpha + c\alpha^2}{1 + d\alpha + e\alpha^2}. \quad (\text{A.4})$$

Comparando as aproximações de Taylor A.2 e Padé A.4, obtém-se os coeficientes:

$$\begin{aligned} d &= \frac{a_1a_4 - a_2a_3}{a_2^2 - a_1a_3} = \frac{3}{2sx^2}; \\ e &= \frac{a_3^2 - a_2a_4}{a_2^2 - a_1a_3} = \frac{1}{4s^2x^4}; \\ a &= a_0 = x; \\ b &= a_1 + a_0 \frac{a_1a_4 - a_2a_3}{a_2^2 - a_1a_3} = \frac{2s + 3}{2sx^2}; \\ c &= a_2 + a_1 \frac{a_1a_4 - a_2a_3}{a_2^2 - a_1a_3} + a_0 \frac{a_3^2 - a_2a_4}{a_2^2 - a_1a_3} = \frac{4s + 1}{4s^2x^3}, \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

e com isso:

$$f(\alpha) \approx x \left( 1 + \frac{\alpha}{x^2} \frac{1 + \frac{\alpha}{x^2}}{1 + \frac{3\alpha}{2sx^2} + \frac{\alpha^2}{4s^2x^4}} \right). \quad (\text{A.6})$$

Pode-se observar que a expressão A.6 pode ser reescrita na forma:

$$f(\alpha) \approx x \left( x + \frac{\alpha}{x} \right) - \frac{\alpha^2}{2sx^3} \frac{1 + \frac{\alpha}{2sx^3}}{1 + \frac{3\alpha}{2sx^2} + \frac{\alpha^2}{4s^2x^4}} \equiv \left( x + \frac{\alpha}{x} - g(x) \right), \quad (\text{A.7})$$

sendo que  $g(x)$  explicita a contribuição do Padé [2, 2] na anelpticidade, no caso das curvas de velocidade, e da não hiperbolicidade nas curvas de sobretempo.