SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E CIENTÍFICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICAS

NÚMEROS PRIMOS E A CONSTITUIÇÃO DO MMC E MDC

ROBERTO DA SILVA NUNES

BELÉM/PA
2017

ROBERTO DA SILVA NUNES

NÚMEROS PRIMOS E A CONSTITUIÇÃO DO MMC E MDC

Texto dissertativo apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas, do Instituto de Educação Matemática e Científica, da Universidade Federal do Pará, como exigência para a obtenção do título de Mestre em Educação em Ciências e Matemáticas, área de concentração: Ensino, Aprendizagem e Formação de Professor de Ciências e Matemática – Linha de Pesquisa: Ensino e Aprendizagem de Ciências e Matemática para a Educação Cidadã, sob orientação do professor Dr. José Messildo Viana Nunes.

BELÉM/PA
2017

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP) – Biblioteca do IEMCI, UFPA

1970 Nunes, Roberto da Silva.

Números primos e a constituição do MMC e MDC / Roberto da Silva Nunes, orientador Prof. Dr. José Messildo Viana Nunes – 2017.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Pará, Instituto de Educação Matemática e Científica, Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas, Belém, 2017.

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Aritmética. 3. Didática – Matemática. 4. Prática de ensino. I. Nunes, José Messildo Viana, orient. II. Título.

CDD - 22. ed. 510.7

ROBERTO DA SILVA NUNES

Texto dissertativo apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas, do Instituto de Educação Matemática e Científica, da Universidade Federal do Pará, como exigência para a obtenção do título de Mestre em Educação em Ciências e Matemáticas.

NÚMEROS PRIMOS E A CONSTITUIÇÃO DO MMC E MDC

Data da aprovação: 30 de agosto de 2017

Banca examinadora:

Orientador: ____
Prof. Dr. José Messildo Viana Nunes (IEMCI/UFPA)

1º Examinador: ____
Prof. Dr. Gilberto Emanoel Reis Vogado (UEPA)

2º Examinador: ____
Prof. Dr. Arthur Gonçalves Machado Junior (UFPA)

BELÉM/PA
2017

DEDICATÓRIA

Ao meu pai, senhor Clodovil Alberto de Paula Nunes que não está mais conosco, homem de mente brilhante que desde cedo falava que os seus filhos deveriam estudar para poderem ter um futuro melhor, pois o mesmo queria ver os seus filhos formados, já que o mesmo não teve oportunidade de estudar e não mediu esforços em me proporcionar tempo para poder estudar e hoje estou aqui, concluindo mais um degrau da minha história como estudante que foi alicerçado por esse grande homem, obrigado, meu Pai.

AGRADECIMENTOS

A Deus por me proporcionar caminhos que me levaram a pessoas e situações que contribuíram para a minha vida pessoal e profissional.

A minha mãe, Inês Nunes, mulher que sempre se preocupou com o meu bem estar e procurou as melhores escolas para eu estudar.

A minha esposa, Rosemari Nunes que sempre esteve ao meu lado nas escolhas da minha vida pessoal e profissional, sempre me apoiando e incentivando.
Ao meu diretor, Adnelson Araújo, da Escola Estadual São Vicente, ao Mestre Alex Bruno e ao Prof. Doutor Reginaldo Silva que me orientaram nos primeiros passos do processo seletivo do Mestrado Profissional.

Ao Prof Dr. José Messildo por ter aceitado ser meu orientador no Mestrado Profissional e pelas contribuições, pois sem as quais não teria chegado até aqui e que me convidou para participar do GEDIM, grupo de pesquisa em Didática da Matemática.

Aos membros da banca por aceitarem participar desse momento especial de minha vida e pelas contribuições que proporcionaram a melhoria da escrita da proposta da nossa pesquisa.

Aos membros do GEDIM que me aceitaram sem indiferenças no grupo e pelas contribuições nas discussões realizadas.

A prof. Dra. Terezinha Oliver, aos profs. Doutores Reginaldo Silva, Denivaldo Pantoja ,Elielson Sales, Jesus Brabo, Renato Guerra, Osvaldo Barros, Arthur Gonçalves, Gilberto Vogado, Hermes Silva e José Carlos que contribuíram para a escrita da minha dissertação de Mestrado.

Aos meus colegas da primeira turma do Mestrado Profissional que nos dois anos de convivência contribuíram de alguma forma na minha caminhada.

Aos funcionários da secretaria que sempre foram muito corteses em nossas solicitações.

RESUMO

Nesta pesquisa temos como objetivo elaborar uma Sequência Didática baseada em Rickenmann e sempre recorrendo a conhecimentos prévios que favoreçam a compreensão das noções de Mínimo Múltiplo Comum (MMC) e do Máximo Divisor Comum (MDC) inspirados no Crivo de Eratóstenes. Para alcançar o objetivo, assumiremos como suporte teórico a Teoria das Situações Didáticas fazendo uso de aspectos da Engenharia Didática como metodologia de pesquisa. Para elaboração da Sequência realizamos um estudo histórico com viés epistemológico abarcando as definições matemáticas à luz da Teoria dos Números, bem como a extensão dos mesmos, o conhecimento das origens e como os objetos vêm sendo pesquisados e apresentados em livros didáticos.

Palavras-chave: MMC. MDC. Engenharia Didática. Teoria das Situações Didáticas. Sequência Didática.

ABSTRACT

In this research we aim to elaborate a Didactic Sequence based on Rickenmann and always resorting to previous knowledge that favors the understanding of the notions of Minimum Common Multiple (CMM) and Maximum Common Divisor (MDC) inspired by the Sieve of Eratosthenes. In order to reach the objective, we will assume as theoretical support the Theory of Didactic Situations making use of Didactic Engineering aspects as research methodology. For the elaboration of the Sequence we carry out a historical study with epistemological bias covering the mathematical definitions in the light of Number Theory, as well as the extension of the same ones, the knowledge of the origins and how the objects have been researched and presented in didactic books.

Keywords: MMC. MDC. Didactic Engineering. Theory of Didactic Situations. Following teaching.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Minhas inquietações em relação às ações didáticas em ambientes escolares começaram logo que obtive o título de Licenciado Pleno em Matemática no início dos anos de 1999. Gradativamente foram aumentando e muitas das vezes ficaram sem respostas, em especial diante de indagações de alguns alunos durante as aulas ministradas por mim, para tentar dar respostas plausíveis procurava livros e até outros professores mais experientes, contudo muitas vezes não conseguia preencher certas lacunas.

Procurando cada vez mais aprender participava de congressos, oficinas e minicursos, mas foi com a minha primeira especialização realizada no período de 2003 a 2004 em Metodologia do Ensino da Matemática realizada no Instituto Brasileiro de Pós-Graduação e Extensão (IBPEX) foi que algumas questões começaram a ser elucidadas, mas ainda não foi o bastante, em 2010 participei do Plano de Ações Articuladas (PAR) no Instituto de Educação Matemática e Científica (IEMCI) da Universidade Federal do Pará (UFPA), porém foi em 2013 ao cursar a Especialização em Didática da Matemática no mesmo instituto que percebi que teria que estudar de forma mais específica e contundente as teorias e os assuntos que permeiam o processo de ensino e de aprendizagem da Matemática.

Em 2014 ingressei na primeira turma do Programa de Pós-graduação em Educação em Ciências e Matemáticas do Instituto de Educação Matemática e Científica – IEMCI. Entretanto, na trajetória do Mestrado, vivenciei momentos de (re)construção de minhas práticas, tudo isso graças ao convívio com os colegas da turma, os professores que conduziram com maestria as disciplinas, os seminários e as oficinas ofertados.

Percebi que é preciso ser vigilante e *Mathemátikós,* termo grego que significa estar disposto a aprender e a disposição diante do processo foi alimentada pelas praxeologias (modo de fazer e pensar) presentes no corpo docente do IEMCI que participaram como meus professores no Mestrado Profissional e do meu orientador Prof. Dr. José Messildo Viana Nunes que no momento certo direcionou minhas ações na elaboração da nossa dissertação. Assim, espero me constituir pesquisador da minha própria prática para que possa contribuir na formação de alunos e outros professores mais críticos e construtores de uma sociedade mais justa.

Ao estudarmos um objeto matemático partimos da premissa que é preciso conhecer a epistemologia do objeto olhando a gênese e como o mesmo vem sendo apresentado historicamente. Buscando compreender suas aplicações em diversos contextos, isso nos permite conhecer os obstáculos epistemológicos e eventualmente os didáticos que permeiam o processo de ensino e aprendizagem da Matemática.

Assim poderemos fazer escolhas apropriadas para nossas ações em sala de aula. Margolinas (2005 apud Iranete Lima, 211), afirma que o ato de decidir, quer seja no nível das micro decisões[1] ou das macro decisões[2], representa um momento muito significativo da ação do professor.

O desenvolvimento do nosso trabalho tem como escopo principal caracterizar e quantificar por meio de "realizações didáticas" (ARTIGUE, 1996). Nessa perspectiva, realizamos um estudo sobre os temas Mínimo Múltiplo Comum (MMC) e Máximo Divisor Comum (MDC), mostrando a definição e as características dos mesmos pela Teoria dos números, enfocando suas origens histórico-epistemológicas; as orientações vigentes, nesse caso, o que os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN[3]) indicam como necessário a aprendizagem do aluno para que o mesmo possa estudar e apreender o assunto em questão é: para o estudo dos conteúdos apresentados no bloco Números e Operações, é fundamental a proposição de situações-problema que possibilitem o desenvolvimento do sentido numérico e os significados das operações. Nos conteúdos propostos para o terceiro ciclo[4] (6º e 7º anos), destaca-se que:

---

[1] São os procedimentos de ensino usados pelos professores em sala de aula para desenvolver determinado conteúdo escolar.

[2] É todo o contexto que cerca o aluno, nele incluídos o professor e o sistema educacional; é um dispositivo criado por alguém que queira ensinar um conhecimento ou controlar sua aquisição. Esse dispositivo abrange um meio material- as peças do jogo, um desafio, um problema, inclusive um exercício, fichas etc. – e as regras de interação com esse dispositivo, ou seja, o jogo propriamente dito (BROUSSEAU, 2008).

[3] Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) são a referência básica para a elaboração das matrizes de referência. Os PCN foram elaborados para difundir os princípios da reforma curricular e orientar os professores na busca de novas abordagens e metodologias. Eles traçam um novo perfil para o currículo, apoiado em competências básicas para a inserção dos jovens na vida adulta; orientam os professores quanto ao significado do conhecimento escolar quando contextualizado e quanto à interdisciplinaridade, incentivando o raciocínio e a capacidade de aprender.

[4] O terceiro ciclo corresponde aos 5º e 6º anos do ensino fundamental onde no caso da Matemática, há uma forte tendência em fazer do primeiro ano deste ciclo um ano de revisão dos conteúdos estudados em anos anteriores. De modo geral, os professores avaliam que os alunos vêm do ciclo anterior com um domínio de conhecimentos muito aquém do desejável e acreditam que, para resolver o problema, é necessário fazer uma retomada dos conteúdos.

> Conceitos como os de “múltiplo” e “divisor” de um número natural ou o conceito de “número primo” podem ser abordados neste ciclo como uma ampliação do campo multiplicativo, que já vinha sendo construído nos ciclos anteriores, e não como assunto novo, desvinculado dos demais. Além disso, é importante que tal trabalho não se resuma à apresentação de diferentes técnicas ou de dispositivos práticos que permitem ao aluno encontrar, mecanicamente, o mínimo múltiplo comum e máximo divisor comum sem compreender as situações-problema que esses conceitos permitem resolver. (BRASIL, 1998, p.66).

Os PCN destacam ainda no item Conceitos e Procedimentos - Números e Operações, a necessidade de estabelecer relações entre números naturais, relacionadas às noções de múltiplo e divisores de um número. No item organizações didáticas, é citado que alguns aspectos do tratamento habitualmente dado ao estudo dos naturais nos ciclos finais do ensino fundamental comprometem sua aprendizagem, isso porque:

> (...) o trabalho centrado nos algoritmos, como o cálculo do mmc e do mdc sem a compreensão dos conceitos e das relações envolvidas e da identificação de regularidades que possibilitem ampliar a compreensão acerca dos números. (BRASIL, 1998, p. 97).

O que revelam as pesquisas sobre o **MMC** e o **MDC**, o olhar e o manejo que alguns profissionais tiveram referente a essas duas noções matemáticas, bem como mostrar a importância desse estudo no processo de ensino e de aprendizagem e tem como metodologia de pesquisa pressupostos da Engenharia Didática que vai nortear e estruturar uma sequência didática, todas essas considerações irão ser mostradas no desenvolvimento do nosso trabalho.

O que foi exposto anteriormente pode ser verificado e concretizado pelas micro e macro escolhas feitas pelo professor como mediador do processo de ensino e aprendizagem de um objeto a ser ensinado.

Essa pesquisa vem favorecer o aprendizado do máximo divisor comum e do mínimo múltiplo comum a partir de uma sequência didática, amparada na Teoria das Situações Didáticas e de pressupostos da Engenharia Didática. Assim buscamos responder nossa questão de investigação: **“Uma sequência didática definida a partir de noções de teoria dos números e estudos da área da educação matemática favorece a compreensão e cálculo do MMC e do MDC?”.**

Para alçar esse objetivo utilizamos como metodologia pressupostos da Engenharia Didática que no que se denomina de 1ª geração é suscetível de fazer aparecer fenômenos didáticos em condições mais próximas possíveis do funcionamento de uma sala de aula. No que se refere à denominação de 2ª geração tem por primeiro objetivo o desenvolvimento de recursos (ou objeto de aprendizagem) para o ensino regular, ou a formação de professores.

O desenvolvimento da nossa pesquisa foi no ambiente de sala de aula, envolvendo alunos de uma escola da Secretaria municipal de educação de Belém do 7º ano, devido após sondagem foi verificado que a turma no 6º ano não teve acesso aprofundado sobre o **MMC** e o **MDC,** pois os alunos só estudaram o **MMC** para calcular a soma e a subtração de frações com denominadores diferentes.

E o embasamento teórico que estamos propondo em nossa pesquisa é o da Teoria das Situações Didáticas (TSD) que foi idealizada por Guy Brousseau (1986), pesquisador francês da Universidade de Bordeaux. Essa teoria busca criar um modelo da interação entre o aprendiz, o saber e o *milieu* (ou meio) no qual a aprendizagem deve se desenvolver (AUMOULOUD, 2010).

A pesquisa está organizada em 6 capítulos, no primeiro capítulo será abordada o aporte teórico da nossa proposta que é a Teoria das Situações Didáticas (TSD) com suas particularidades e a apresentação da Engenharia Didática que vai servir como a nossa metodologia de pesquisa.

No segundo serão abordados aspectos da Engenharia Didática como metodologia bem como as características e ações de cada fase da Engenharia Didática.

No terceiro abordaremos a definição matemática do conceito pela Teoria dos Números e as extensões do cálculo do **MMC** e do **MDC**.

No quarto serão abordados os aspectos histórico-epistemológicos onde mostraremos a gênese do **MMC** e do **MDC** bem como estudos relacionados a esses dois objetos.

No quinto apresentaremos a nossa Sequência Didática, a análise à priori e a posteriori das atividades.

No sexto e último capítulo apresentaremos as considerações finais da constituição do nosso produto que é uma sequência didática.

A seguir vamos postular sobre o aporte teórico que será o alicerce da construção da nossa seuquência didática.

Capítulo 1
APORTE TEÓRICO

O presente capítulo tem como objetivo apresentar o que é a Teoria das Situações Didáticas e os elementos que servirão para propor e analisar uma situação de ensino.

1.1 Teoria das Situações Didáticas (TSD)

Segundo *Brousseau* (1996) o aluno aprende sobre um ou mais objetos adaptando-se a um *milleu* (ou meio) fator de contradições, de dificuldades, de desequilíbrios. Assim o aluno poderá ir avançando por meio de atividades.

Este saber, fruto da adaptação do aluno, manifesta-se através de respostas novas, que são prova da aprendizagem. O saber constituído, de acordo com esse autor apresenta-se sob formas diversas, por exemplo, sob a forma de questões e respostas.

Para o autor, o trabalho intelectual do aluno deve ser, por momentos, comparável a uma atividade científica, ou seja, o aluno deve agir como um investigador sobre o problema que o professor lhe propõe que solucione. Pois bem sabemos que para se apropriar de conhecimentos, em particular matemáticos, não basta aprender definições e teoremas; e sim resolver problemas dos quais ele possa "*agir, formular, provar, construir modelos, linguagens, conceitos, teorias, os troque com outros, reconheça aquelas que são mais conformes à cultura, retire desta, aqueles que lhe são úteis, etc*" (BROUSSEAU, 1996).

Nesse sentido, cabe ao professor encontrar boas questões, recon-textualizando o saber científico, como propõe Brousseau simulando uma micro sociedade científica. Consabido que o saber escolar atinja o *status* que nos postula *Brousseau*, além disso, deve também proceder de maneira que não forneça a resposta aos discentes levando o aluno a aprender, adaptando-se ao *milieu* .Mas tem também de dar aos seus alunos meios para descobrirem, nessa história particular que os fez viver, aquilo que é o saber cultural e comunicável que se pretendeu ensinar-lhes. Trata-se evidentemente, de uma simulação, que não é a verdadeira atividade científica, da mesma maneira que o saber apresentado de forma axiomática não é o verdadeiro saber.

> A concepção moderna do ensino solicita, pois, ao professor que provoque no aluno as adaptações desejadas, através de uma escolha judiciosa dos problemas que lhes propõe. Estes problemas, escolhidos de forma que o aluno possa aceitá-los, devem levá-lo a agir, a falar, a refletir, a evoluir por si próprio. Entre o momento em que o aluno aceita o problema como seu e o momento que produz a sua resposta, o professor recusa-se a intervir como proponente dos conhecimentos que pretende fazer surgir. O aluno sabe perfeitamente que o problema foi escolhido para levá-lo a adquirir um conhecimento novo, mas tem que saber que esse conhecimento é inteiramente justificado pela lógica interna da situação e que pode construí-la sem fazer apelo a razões didáticas. Não somente pode como deve fazê-lo, porque só terá verdadeiramente adquirido esse conhecimento quando for capaz de aplicá-lo por si próprio a situações com que depara fora do contexto do ensino, e na ausência de qualquer indicação intencional. (BROUSSEAU, 1996, pp. 49-50)

A Teoria das situações didáticas busca criar um modelo da interação entre o aprendiz, o saber e o *milieu* (ou meio) no qual a aprendizagem deve se desenrolar. A **TSD** foi desenvolvida no intuito de modelar o processo de ensino e aprendizagem dos conceitos matemáticos (ALMOULOUD, 2010, p. 31).

E o processo de ensino e aprendizagem se dá através de situações de ensino que podem ser de três tipos: didática, adidática ou fundamental.

1.2 Situação Didática

Almouloud (2010, p. 33) escreve que o objeto central da **TSD** é a situação didática definida como

> o conjunto de relações estabelecidas explicitamente e/ou implicitamente entre um aluno ou grupo de alunos, um certo milieu (contendo eventualmente instrumentos ou objetos) e um sistema educativo (o professor) para que esses alunos adquiram um saber constituído ou em constituição (BROUSSEAU, 1978, tradução de Almouloud).

Almouloud (2010, p.p. 34 – 35) também escreve que uma *situação didática* se caracteriza pelo jogo de interações do aluno com os problemas colocados pelo professor. A forma de propor esses problemas ao aluno é chamada de *devolução* (que vai ser mais detalhada em um subitem posterior), e deve ter por objetivo provocar uma interação suficientemente rica e que permita ao aluno desenvolvimento autônomo.

Pais (2011, p.p. 65 – 66) em relação a uma situação didática frisou que ela é formada pelas múltiplas relações pedagógicas estabelecidas entre o professor, os alunos e o saber, com a finalidade de desenvolver atividades voltadas para o ensino e para a aprendizagem de um conteúdo específico. Outra análise feita por Pais é que sem a presença de um professor pode até ocorrer uma *situação de estudo*, envolvendo somente alunos e o saber ou, ainda, sem a valorização de um conteúdo, podemos ter uma reunião entre professor e alunos, mas não como estamos denominando de situação didática. Essa análise de Pais reforça a definição de Brousseau que mostra as relações que devem ter entre os quatro elementos que fazem parte de uma sequência didática, elementos esses que serão explicitados mais a frente.

Com o que foi exposto anteriormente sobre uma situação didática por Almouloud e Pais nos faz refletir sobre a sua importância no processo de ensino e aprendizagem, com isso ela deve ser o elemento gerador das ações e deve levar em consideração as variáveis e seus valores que irão se apresentar durante o processo e o professor como mediador desse processo deve fazer as escolhas certas e ter a habilidade de reconstruir muitas vezes as suas ações a fim de desenvolver a autonomia no aluno.

1.3 Situação Adidática

Almouloud (2010, p. 33) afirma que a *situação adidática,* como parte essencial da *situação didática*, é uma situação na qual a intenção de ensinar não é revelada ao aprendiz, mas foi imaginada, planejada e construída pelo professor para proporcionar a esses, condições favoráveis para a apropriação do novo saber que deseja ensinar. Após mostrar a definição Almouloud lista as características de uma situação adidática postuladas por Brousseau (1986):

- o problema matemático é escolhido de modo que possa fazer o aluno agir, falar, refletir e evoluir por iniciativa própria;
- o problema é escolhido para que o aluno adquira novos conhecimentos que sejam inteiramente justificados pela lógica interna da situação e que possam ser construídos sem apelo às *razões didáticas*;
- o professor, assumindo o papel de mediador, cria condições para o aluno ser o principal ator da construção de seus conhecimentos a partir da(s) atividade(s) propostas.

Essas características devem possibilitar ao aluno sair da sua inércia e fazer com que ele assuma o problema como seu e com isso possa manipulá-lo a fim de evoluir em conhecimentos, Almouloud em nota afirma que o aluno aprende por uma necessidade própria e não por uma necessidade aparente do professor ou da escola, porém o professor deve saber conduzir com escolhas apropriadas o processo de ensino e aprendizagem.

Pais (2011, p. 68) afirma que uma situação adidática se caracteriza pela existência de determinados aspectos do fenômeno de aprendizagem, nos quais não tem uma intencionalidade pedagógica direta ou um controle didático por parte do professor e que em torno de uma s*ituação didática*, pode haver uma diversidade de *situações adidáticas*.

Percebemos pelo exposto, anteriormente, por Pais que as situações propostas pelo professor para a aprendizagem de um saber constituído ou em constituição ao se interagirem formam uma *sequência didática*.

1.4 Situação Fundamental

Almouloud ainda no estudo das situações escreve:

> Ainda segundo Brousseau (1986, p. 49), cada conhecimento pode ser caracterizado por, pelo menos, uma situação adidática que preserva seu sentido e que é chamada de *situação fundamental*. Ela determina o conhecimento ensinado a um dado momento e o significado particular que esse conhecimento vai tomar do fato tendo em vista as escolhas das variáveis didáticas e as restrições e reformulações sofridas em seu processo de organização e reorganização. (ALMOULOUD, 2010, p. 34).

Almouloud (2010, p. 34) ao analisar o exposto anteriormente conclui que uma *situação fundamental* constitui um grupo restrito de situações adidáticas cuja noção a ensinar é a resposta considerada a mais adequada/indicada essas situações permitem introduzir os conhecimentos em sala de aula numa epistemologia propriamente científica.

Outra definição sobre a *situação fundamental* é de Perrin-Glorian (1999) que afirmou que:

> A situação fundamental é uma situação adidática característica de um *saber* (saber correspondendo às situações de validação) ou de um *conhecimento*

> (conhecimento correspondente às situações de ação). Os diferentes valores dados às variáveis didáticas da situação devem permitir gerar todas as situações representativas dos diferentes sentidos ou diferentes ocasiões de emprego do saber em jogo. (ALMOULOUD, 2010, p. 34).

As situações de *ação* e *validação* que estão sendo citadas na definição sobre *situação fundamental* de Perrin-Glorian serão vislumbradas em um capítulo posterior.

Legrand (1993, p. 124) registrou o seguinte:

Uma situação será fundamental se ela:

– tiver por sua consistência epistemológica e sua adaptação ao campo conceitual do aluno, o poder de modificar o conformismo escolar;

– permitir uma desestabilização e justificar a aceitação de uma mudança de ponto de vista, que deve então favorecer os conflitos da racionalidade;

– permitir a devolução do projeto global do saber.

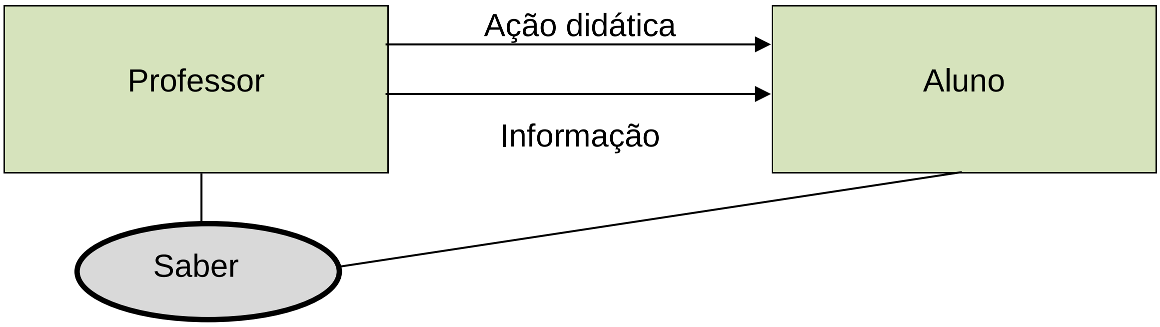
Podemos afirmar que ao conhecer cada tipo de situação de ensino é possível intervir da melhor forma possível no processo de ensino e aprendizagem de uma sequência, através de escolhas cada vez mais pertinentes, analisando as variáveis que vão se apresentando, sejam as que temos ciência ou as que não, isso gera momentos de equilíbrio e desequilíbrio, construção e desconstrução nos pares envolvidos no processo, as ações e as interações entre os pares diante de uma situação são analisadas em um ambiente chamado de milieu ou meio.

1.5 O Milieu

Aumouloud (2010, p. 42) afirma que um elemento fundamental que dá suporte a **TSD** é a noção de *milieu* (meio), que foi introduzida por *Brousseau* (1986) para analisar, de um lado, as relações entre os alunos, os conhecimentos ou saberes e as situações e, por outro lado, as relações entre os próprios conhecimentos e entre as situações.

Explicitando o milieu (meio), destacamos o seguinte: Brousseau (2008, p. 54) afirma que muitas obras representam a situação de ensino com o “triângulo” da figura 1, que considera tão – somente as relações entre os sistemas “professor” e “aluno” e esse esquema tem o inconveniente de reduzir o entorno didático à ação do professor e omite completamente as relações do sujeito com o *meio adidático*.

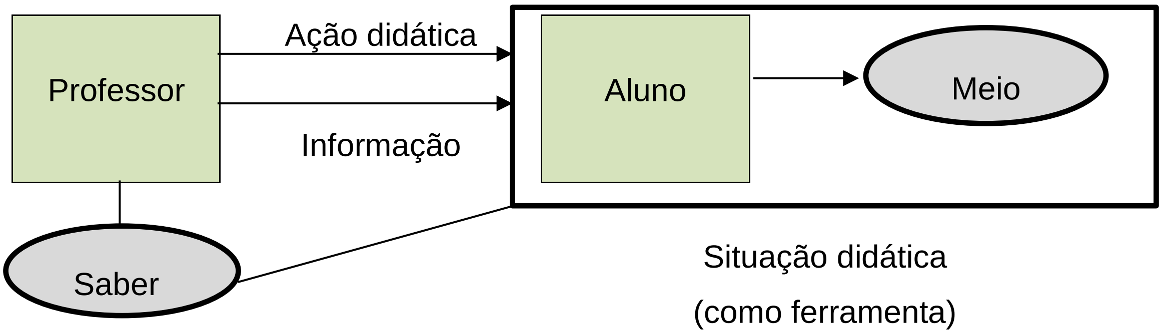
Figura 1: Triângulo didático



Fonte: Brousseau (2008, p. 54)

Logo após justificar e mostrar esse esquema, Brousseau mostra outro esquema e escreve que é criado de forma fictícia ou efetivamente outro “meio”, em que o aluno atua de forma autônoma, o que nos leva a um esquema como o da figura 2.

Figura 2 – Esquema didático



Fonte: Brousseau (2008, p. 54)

Esse esquema é mais completo, pois o *milieu* ou meio como falamos anteriormente é essencial para o desenvolvimento do processo de ensino e aprendizagem.

1.5.1 AS ESTRUTURAS DO *MILIEU*

Brousseau em 1986 introduziu uma nova noção na **TSD** *a estruturação do meio* que foi aprofundada por Margolinas e Steimberg (1994), Fergona e Orús (2005). Nessa estrutura, segundo *Brousseau*, pode-se identificar o sujeito professor com duas posições: o que prepara a aula e o que leciona. Já o aluno tem a escolha de adotar cinco posições diferentes, desse modo podem-se identificar cinco meios diversos de interação, conforme o quadro a seguir (Brousseau, 2008. p.p. 55 – 58):

Quadro 1: Tipos de meios (*milieus*) didáticos

MEIOS(*milieus*):	CARACTERÍSTICAS
Material	É quando o professor prepara a sua aula, organiza um meio – que inclui as regras que determinam o sucesso ou o fracasso.
Objetivo	É quando o sujeito fica posicionado como aluno na situação objetiva, na posição de sujeito que atua.
De referência	É quando o sujeito aprende corrigindo suas ações e antecipando seus efeitos diante das situações que se envolve.
Situações didáticas	É quando o professor começa a atuar, é quando professor e aluno interagem conjuntamente em situações de aprendizagem.
Didáticos	É quando o professor reflete sobre as situações didáticas e revisa as decisões tomadas, analisa suas aulas, estuda o comportamento dos alunos por meio de ações, conhecimentos e saberes específicos.

Fonte: Brousseau (2008)

A interação com os diferentes meios (*milieus*) possibilita mobilizar ações diferentes por parte do professor diante de ações e respostas diferentes dos alunos nas fases (estas fases serão mostradas em um subitem posterior) de *ação, de formulação, de validação e de institucionalização*, em uma situação de ensino para a aprendizagem de objetos de ensino.

1.5.2 OUTRAS CONSIDERAÇÕES SOBRE O MILIEU

Em relação ao *milieu* ou meio, Freitas afirma o seguinte:

> O meio é onde ocorrem às interações do sujeito, é o sistema antagonista no qual ele age. É no meio que se provocam mudanças visando desestabilizar o sistema didático e o surgimento de conflitos, contradições e possibilidades de aprendizagem de novos conhecimentos. (FREITAS, 2012, p. 79)

O exposto anteriormente por Freitas mostra o momento das interações com o objeto a ensinar, entre os seus pares e do desequilíbrio que o *milieu* deve causar diante, pois com isso há a possibilidade do avanço no processo de ensino e aprendizagem.

Percebemos que o *milieu* é de grande importância para o processo de ensino e aprendizagem, pois ele vai possibilitar conhecer as relações e possibilitar a percepção dos momentos apropriados para direcionarmos as nossas ações que são as nossas micro e macro decisões e assim poderemos fazer as intervenções e os ajustes necessários.

1.6 A modelagem das situações na Didática

Para Brousseau (2008, p. 21) “uma ‘situação’ é um modelo de interação de um sujeito com um meio determinado” para o sujeito que aprende enfrentar uma dada situação requer conhecimentos já apropriados, pelo menos para iniciar a resolução e outros conhecimentos devem ser mobilizados para aquisição de novos conhecimentos.

No começo da década de 70, as situações didáticas eram “aquelas que serviam para ensinar sem que fosse levado em conta o papel do professor”, ou seja, para transmitir um determinado conhecimento utilizavam-se “meios” (textos, material etc.). Em relação à postura/prática, Brousseau afirma que:

> A situação era, portanto, o contexto que cercava o aluno, projetado e manipulado pelo professor, que a considerava uma ferramenta. Posteriormente, identificamos como situações matemáticas todas àquelas que levam o aluno a uma atividade matemática sem a intervenção do professor. Reservamos o termo situações didáticas para os modelos que descrevem as atividades do professor e do aluno (BROUSSEAU, 2008, p. 21).

Segundo Almouloud (2010, p. 36) para analisar o processo da aprendizagem, a **TSD** observa e decompõe esse processo em quatro fases diferentes, nas quais o saber tem funções diferentes e o aprendiz não tem a mesma relação com o saber. Nessas fases interligadas, podem-se observar tempos dominantes de *ação, de formulação, de validação e de institucionalização.*

Essas fases são vivenciadas através de uma dialética envolvendo os elementos envolvidos no processo e cada uma delas é caracterizada segundo Almouloud (2010) de acordo com o quadro 2:

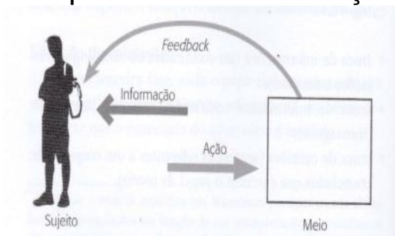
Quadro 2 : As fases de uma sequência didática e as sua características.

Ação (figura 3) Aluno como ator principal	- O professor coloca um problema para o aluno cuja melhor solução, nas condições propostas, é o conhecimento a ensinar. - O aluno passa a agir sobre essa situação e que ela lhe retorne informações sobre sua ação. - Uma boa situação de ação não é somente uma situação de manipulação livre ou que exija uma lista de instruções para seu desenvolvimento. Ela deve permitir ao aluno julgar o resultado de sua ação e ajudá-lo, se necessário, sem a intervenção do mestre, graças à retroação do milieu.
Formulação **(**figura 4) Aluno como ator principal	- O aluno troca informações com uma ou várias pessoas, que serão os emissores e receptores, trocando mensagens escritas ou orais. Estas mensagens podem estar redigidas em língua natural ou matemática, segundo cada emissor. Como resultado, essa dialética permite criar um modelo explícito que pode ser formulado com sinais e regras comuns, já conhecidas ou novas. - É o momento em que o aluno ou grupo de alunos explicita por escrito ou oralmente as ferramentas que utilizou e a solução encontrada.
Validação (figura 5) Aluno como ator principal	- É a etapa na qual o aprendiz deve mostrar a validade do modelo por ele criado, submetendo a mensagem matemática (modelo da situação) ao julgamento de um interlocutor. - De um lado, o emissor deve justificar a exatidão e a pertinência de seu modelo e fornecer, se possível, uma validação semântica e sintática. - Estabelece provas ou refutações do que é discutido. - Busca o debate sobre a certeza das asserções, o que permite organizar as interações com o milieu.
Institucionalização Professor como ator principal	- O professor fixa convencionalmente e explicitamente o estatuto cognitivo do saber. - Uma vez constituído e validado, o novo conhecimento vai

	fazer parte do patrimônio matemático da classe. - Depois da institucionalização, feita pelo professor, o saber torna-se oficial e os alunos devem incorporá-lo a seus esquemas mentais, tornando-o assim disponível para utilização na resolução de problemas matemáticos.

Fonte: Aumouloud (2010)

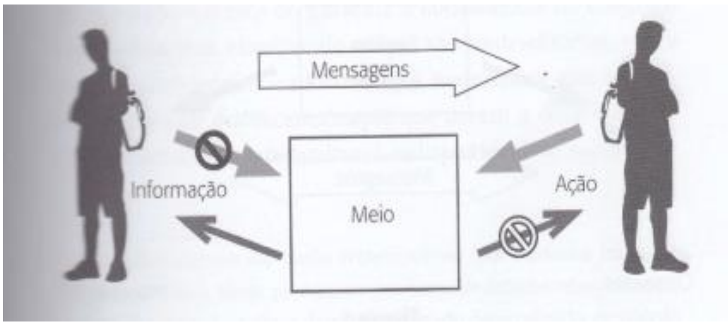
Figura 3: Esquema de uma situação de ação



Fonte: Brousseau (2008, p. 28)

A figura 3 representa um momento de ação diante um *milieu* antagonista onde, podemos constatar que ocorre a interação inicial entre o sujeito e o meio, provocando o encontro do aluno com a situação que deve provocar a devolução e o estabelecimento do contrato didático, configurando-se o momento de ação.

Figura 4: Esquema de uma situação de formulação



Fonte: Brousseau (2008, p. 29)

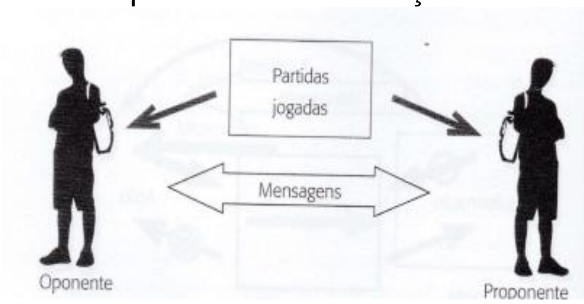
Brousseau explica o esquema da figura 4 da seguinte forma:

> O repertório dos modelos implícitos de ação e o modo como se estabelecem são muito complexos. Podemos supor, com base nas ideias de Bateson, que a formulação de um conhecimento implícito muda, ao mesmo tempo, suas possibilidades de tratamento, aprendizagem e aquisição. A formulação de um conhecimento corresponderia a uma capacidade do sujeito de retomá-lo (reconhecê-lo, identificá-lo, decompô-lo e reconstruí-lo em um sistema linguístico). O meio que exigirá do sujeito o uso de uma formulação deve, então, envolver (efetivamente ou de maneira fictícia) um

> outro sujeito, a quem o primeiro deverá comunicar uma informação. Dessa forma, pode-se descrever a situação usando o esquema de Osgood (1957). (BROUSSEAU, 2008, p. 29).

Assim os alunos trocam ideias entre si e com o professor. Há uma intensa comunicação que possibilita o uso de argumentos e contra argumentos, com a mediação mínima do professor o meio deve provocar as ações.

Figura 5: Esquema de uma situação de validação



Fonte: Brousseau (2008, p. 30)

A figura 5 representa que a troca de ideias do momento anterior deve levar a uma solução coletiva aceita pela comunidade de estudo estabelecida para o enfrentamento da situação. O que leva a comunicação à turma de uma resposta acolhida por um grupo ou mesmo por um único sujeito.

1.7 Contrato Didático

No dicionário Houaiss há uma afirmação sobre a palavra contrato: substantivo masculino. **1** acordo legal entre pessoas, com delimitação de seus direitos e deveres. Essa afirmação acima condiz com as obrigações ou atribuições que o professor e um aluno ou grupo de alunos devem ter diante do processo de ensino e de aprendizagem. E que nos chama a atenção é que os elementos envolvidos muitas vezes tem que fazer ajustes, tanto o professor como a outra parte envolvida, no processo, eles devem fazer as suas escolhas de forma bem adequada diante de uma sequência didática proposta que é regida por um determinado tipo de acordo que chamamos de contrato didático que foi definido por Brousseau da seguinte forma:

> Chama-se contrato didático o conjunto de comportamentos do professor que são esperados pelos alunos e o conjunto de comportamentos do aluno que são esperados pelo professor [...] Esse contrato é o conjunto de regras

> que determinam uma pequena parte explicitamente, mas sobretudo implicitamente, do que cada parceiro da relação didática deverá gerir e daquilo que, de uma maneira ou de outra, ele terá de prestar conta perante o outro. (BROUSSEAU, 2008, p. 21).

A definição apresenta por Brousseau anteriormente norteou as análises de alguns autores que estamos mostrando a seguir, veja:

Almouloud (2010, p. 89) afirma que a noção de contrato didático permite distinguir a situação didática da situação – problema: na primeira, manifesta-se o desejo de ensinar que envolve, pelo menos, uma situação – problema e um contrato didático. A significação do problema e do conceito para o aluno depende do contrato didático estabelecido; é o que permitirá a negociação do sentido das atividades em jogo.

Silva em relação ao contrato didático escreveu o seguinte:

> Devemos notar que o contrato didático depende da estratégia de ensino adotada, adaptando-se a diversos contextos, tais como: as escolhas pedagógicas, o tipo de trabalho solicitado aos alunos, os objetivos do curso, as condições de avaliação, etc. Se a relação didática desenvolve-se num ambiente em que o professor dá aulas expositivas, em que predominam as definições, os exemplos e as listas de exercícios para os alunos resolverem, aí o conjunto de regras, explícitas ou implícitas, que regem o gerenciamento da atividade será muito diferente daquele que direciona uma prática pedagógica em que os alunos trabalham realizando atividades propostas e, no final, o professor, em uma sessão coletiva, procura institucionalizar o conceito trabalhado e propões exercícios de fixação e/ou verificação do aprendizado. (SILVA, 2012, p.p. 51 – 52)

Pais também escreveu sobre contrato didático o que está exposto a seguir:

> No nível de sala de aula, o contrato didático diz respeito às obrigações mais imediatas e recíprocas que se estabelecem entre o professor e alunos. Por certo, as ramificações dessas obrigações se estendem e se multiplicam para fora do espaço físico da sala de aula, revelando a multiplicidade de influências inerentes ao contexto escolar. Uma das características do contrato didático é o fato de suas regras nem sempre estarem explicitadas claramente na relação pedagógica. Desse modo, devemos estar atentos para que o sentido da noção não seja interpretado de uma forma inadequada, ou seja, como se todas as regras e condições preexistam em relação às atividades construídas, conjuntamente, por professor e alunos. (PAIS, 2011, p. 77).

Percebemos que as análises feitas pelos três autores anteriormente sobre contrato didático mostram os caminhos pelos quais os alunos e os professores têm que trilhar para que o processo possa transcorrer de forma bem satisfatória para ambas as partes, pois é preciso que cada parte envolvida no processo possa estar ciente de suas atribuições e agir com comprometimento em cada momento de realização das atividades propostas no que diz respeito às etapas de uma relação didática, dessa forma acreditamos que as dificuldades e os obstáculos que surgirem serão superados por meio de uma dialética e cooperação entre os pares que estão participando do processo de ensino e de aprendizagem.

1.7.1 A DEVOLUÇÃO: ELEMENTO ESSENCIAL DO CONTRATO DIDÁTICO

Brousseau (2008, p. 91) define que *devolução* é o ato pelo qual o professor faz com que o aluno aceite a responsabilidade de uma situação de aprendizagem (adidática) ou de um problema e assume ele mesmo as consequências dessa transferência. E esse ato apresenta grandes dificuldades que são analisadas tradicionalmente no que se refere à motivação do aluno.

Almouloud (2010) escreve o seguinte sobre a dialética da devolução:

> Na fase de devolução, o professor tem por estratégia dar ao aluno a responsabilidade da fase adidática da situação didática, de modo que aceite esta incumbência regulada pelo contrato didático; o aluno está ciente de que o professor lhe repassa uma atividade que tem por objetivo a construção de algum conhecimento. Nesse início de jogo se definem os papéis dos atores para as próximas fases das situações adidáticas e didáticas. (ALMOULOUD, 2010, p. 200).

As considerações em relação à devolução por Freitas (2012) foram:

> A devolução de uma situação consiste no conjunto de condições que permitem que o aluno se aproprie da situação. Quando os alunos se apropriam da situação, o professor pode deixá-los com a responsabilidade da pesquisa e, a partir daí, fica caracterizada a situação adidática. Desse modo, o professor prepara, organiza a situação e tem controle sobre o andamento dela, não sobre o saber, para que o aluno possa vivenciá-la como se fosse um pesquisador que busca encontrar a solução sem a ajuda do mestre. (FREITAS, 2012, p. 85).

O que foi posto anteriormente sobre a *devolução* nos remete ao termo grego *Mathemathikós* e a nota feita por Almouloud sobre a questão do aluno sentir a necessidade de querer aprender por livre e espontânea vontade e não porque alguém ou algo queira.

1.8 Obstáculos

Para que um objeto matemático possa ser compreendido é preciso superar obstáculos que possam aparecer durante o processo de ensino e de aprendizagem no momento da aplicação de uma sequência didática. Segundo o dicionário HOUAISS o verbete **obstáculo** mostra como primeiro significado: substantivo masculino que impede ou atrapalha o movimento de algo ou alguém.

O significado mencionado nos remete o que Almouloud (2010, p. 136) postula sobre a atitude do professor para possibilitar a evolução do aluno:

> Organizar a superação de um obstáculo consistirá em propor uma situação suscetível de evoluir e de fazer evoluir o aluno, segundo uma dialética conveniente. Não se trata de comunicar as informações que se quer ensinar, mas em encontrar uma situação em que somente elas satisfaçam ou atinjam a obtenção de um resultado satisfatório –[...] –no qual o aluno se investiu.

O professor, identificando o erro que é a parte visível da ação do aluno, propõe situações de ensino convenientes para possibilitar a evolução do aluno para que o mesmo se sinta cada vez mais confiante em um processo de descoberta diante da dialética equilíbrio-desequilíbrio, com essa atitude o professor pode possibilitar ao aluno a superação de obstáculos que podem ser de origem **epistemológica**, **didática, psicológica ou ontogênica** que segundo Brousseau eles são definidos de acordo com o quadro 3 :

Quadro 3: Tipos de obstáculos

Epistemológicos	São aqueles que tiveram um papel importante no desenvolvimento histórico dos conhecimentos e têm sua rejeição integrada explicitamente no saber ensinado/aprendido.
Didáticos	São aqueles que parecem depender apenas de uma escolha ou de um projeto do sistema educativo e provocados por uma transposição didática, que o professor dificilmente pode renegociar no quadro restrito da classe.
Psicológicos	São os obstáculos que aparecem quando a aprendizagem contradiz as representações profundas do sujeito, ou quando induz uma desestabilização inaceitável.

Ontogênicos	São os obstáculos que aparecem pelas limitações (neurofisiológicas entre outras) do sujeito em certo momento de seu desenvolvimento.

Fonte: Almouloud (2010)

Outro obstáculo que consideramos importante ressaltar é o **obstáculo linguístico**, sobre o qual Almouloud (S/D) escreveu o seguinte:

> Geralmente a maioria dos alunos lê pouco e tem dificuldades em decompor as definições e propriedades matemáticas. A dificuldade dos alunos de interpretarem corretamente um problema e a incapacidade em produzir a explicação de sua solução com um mínimo de vocabulário apropriado mostram sua dificuldade em entender os textos mais simples.As informações contidas no enunciado obedecem a regras matemáticas precisas. Ao compreender seu senso global, o aluno estará capaz de selecionar as informações principais e de revelar as relações entre elas. Uma má leitura pode conduzir a não respeitar as relações das instruções e consequentemente cometer erros.

Ao reconhecermos qual tipo de obstáculo que pode se apresentar no momento da aplicação de uma tarefa, saberemos a melhor forma de intervir para que o aluno possa avançar no processo de ensino e de aprendizagem que está vivenciando.

1.9 Apresentando a Engenharia Didática (ED)

Machado (2012, p. 233) afirma que a Engenharia Didática como metodologia se constitui com a finalidade de analisar as situações didáticas objeto de estudo da Didática da Matemática. Com isso percebemos nesse pequeno trecho que a finalidade da ED como metodologia se caracteriza como a relação existente com a Teoria das Situações Didáticas.

Nesses termos a nossa Sequência Didática a ser proposta possui etapas que vão possibilitar o seu desenvolvimento que acontecerá primeiramente por investigações de **micro engenharia** que é responsável pela análise de aspectos pontuais e consideram de forma mais específica a complexidade do ambiente da sala de aula e de forma mais ampla as investigações de **macro engenharia** que consideram os resultados observados na **micro engenharia**. Os resultados observados na Sequência Didática proposta serão confrontados no âmbito das análises *a priori e a posteriori* dos objetos matemáticos em questão a fim de que as sequências de ensino e de aprendizagem propostas possam ser validadas com segurança e tendo como metodologia de pesquisa aspectos da **ED**.

Almouloud e Silva (2008) asseveram que a noção de Engenharia Didática clássica ou de 1ª geração emergiu na Didática da Matemática no início dos anos 1980, primeiramente por Chevallard e Brousseau (1982) e depois por Artigue (1989). Para esses autores a **ED**, na época, foi apresentada como uma metodologia de pesquisa suscetível de fazer aparecer fenômenos didáticos em condições mais próximas possíveis do funcionamento de uma sala de aula. No que se refere à Engenharia didática de 2ª geração, segundo Perrin-Glorian (2009), tem por primeiro objetivo o desenvolvimento de recursos (ou objeto de aprendizagem) para o ensino regular, ou a formação de professores.

Vistas nesses termos, percebemos que existe uma articulação entre as duas gerações da Engenharia Didática, pois acreditamos que a preocupação com a formação do professor é elemento primordial para o aprimoramento de suas práticas que possibilitarão propor aos alunos tarefas que possam levar os mesmos a dominar a manipulação dos objetos matemáticos propostos no processo de ensino e de aprendizagem. O quadro 4, mostra as particularidades da Engenharia de 1ª geração e de 2ª geração:

Quadro 4 – Engenharias de 1ª e 2ª gerações, objetivos e aspectos centrais.

	Objetivo(s)	**Aspectos centrais**
ED 1ª geração	Elaborar e estudar propostas de transposição didática para o ensino.	Metodologia de pesquisa e produto.
ED 2ª geração	Determinar os princípios que comandam a engenharia que se quer transformar em recurso para o ensino regular e estudar as condições de sua divulgação.	Três funções não independentes: a investigação, o desenvolvimento e a formação de professores por meio da análise. Necessita de vários níveis de construção.

Fonte: Almouloud e Silva (2008, p. 46)

O que se espera do professor diante de uma situação de ensino são ações pautadas nos objetivos e aspectos gerais como indicadas no Quadro 4 e isso será possível desde que haja a presença de atitudes ergonômicas, já que a **Ergonomia**

cognitiva (engenharia psicológica) segundo Fonseca é o ato de conhecer ou de captar, interagir, elaborar e exprimir informações, para a resolução de problemas, ou seja, o professor deve fazer um levantamento de dados e socializá-las para que o aluno possa disponibilizar ações que possam levá-lo a resolução de problemas.

A seguir iremos dissertar sobre os aspectos da Engenharia Didática que consideramos pertinentes para formular a metodologia da nossa pesquisa.

CAPÍTULO 2
ASPECTOS DA ENGENHARIA DIDÁTICA COMO METODOLOGIA

Segundo o dicionário Houaiss o vocábulo **metodologia** é um conjunto de métodos, princípios e regras empregados por uma atividade ou disciplina, e é no contexto de uma atividade que abordaremos alguns aspectos da Engenharia Didática na concepção de alguns autores.

Segundo Pais (2001), a Engenharia Didática caracteriza uma forma particular de organização dos procedimentos metodológicos da pesquisa em Didática Da Matemática. O interesse pelo seu estudo justifica-se pelo fato de se tratar de uma concepção que contempla a dimensão teórica como experimental da pesquisa em didática.

O trecho anterior faz com que possamos identificar a nossa ação didática de um objeto a ser ensinado, pois torna a aprendizagem significativa fazendo com que o interesse do aluno no processo de ensino e de aprendizagem seja despertado e com isso a ação docente passa a ser bem mais efetiva.

Para Artigue (1989) há uma semelhança entre o trabalho didático do professor e o trabalho do engenheiro, pois uma das características dessa ação é o fato de que o engenheiro para realizar um projeto preciso, apoia-se em conhecimentos científicos do seu domínio, aceita submeter-se a um controle científico, posturas como a sujeição a uma teoria que vai servir como suporte e alicerce para o desenvolvimento do trabalho do professor.

Artigue (1988) caracteriza a Engenharia Didática como um esquema experimental baseado em “realizações didáticas“ na sala de aula, isto é, na concepção, na realização, na observação e na análise de sequências de ensino.

2.1 As Características e Ações de cada Fase da Engenharia Didática

2.1.1 PRIMEIRA FASE: AS ANÁLISES PRELIMINARES

Essas análises são as primeiras ações metodológicas que são um modelo de referência e sobre como devem ser as mesmas Artigue (1988) postula**:**

- a análise epistemológica dos conteúdos visados pelo ensino;
- a análise do ensino habitual e dos seus efeitos;

- a análise das concepções dos alunos, das dificuldades e obstáculos que marcam a sua evolução;

- a análise do campo de sujeição no qual virá a situar-se a realização didática efetiva;

- deve ser levado em consideração os objetivos específicos da investigação.

Ao considerarmos todos os aspectos explicitados nessa primeira fase é possível conhecer os objetos a serem estudados desde a sua origem, bem como a sua trajetória, como os mesmos estão sendo abordados atualmente, qual a sua importância para o estudo de outros objetos de ensino e identificar possíveis restrições de apropriação por parte do aluno.

Segundo Almouloud (p. 174, 2007), com a finalidade de responder à(s) questão(ões) e validar as hipóteses levantadas na 1ª fase, o pesquisador deve elaborar e analisar uma sequência de situações-problema. A partir dos resultados do modelo de referência (1ª fase), iniciaremos a 2ª fase que tem como subsídio de ação o que foi verificado na 1ª fase.

2.1.2 ANÁLISES DOS LIVROS DIDÁTICOS

Almouloud (2015) abordou sobre a metodologia de análise de materiais didáticos, de onde ressaltamos a parte referente ao livro didático que Freitas e Rodrigues (2008, p.1) escreveram:

> "O livro didático faz parte da cultura e da memória visual de muitas gerações e, ao longo de tantas transformações na sociedade, ele ainda possui uma função relevante para a criança, na missão de atuar como mediador na construção do conhecimento".

Em relação ao instrumento que retrata um dos aspectos oficializadores do livro didático, Almouloud (2015) postula:

> A partir de 1998, foi criado o Guia de Livros Didáticos por meio do PNLD (Plano Nacional do Livro Didático) que traz sugestões de livros para todos os anos, aprovando ou não as obras selecionadas. De acordo com o PNLD 2016, O livro didático de Matemática, instrumento de trabalho do professor e de aprendizagem do aluno, é adequado na medida em que favorece a aquisição, pelo aluno, de um saber matemático autônomo e significativo. Para a realização desse processo, alguns princípios gerais precisam ser considerados para que esse livro didático favoreça a aquisição, pelo aluno, de níveis gradativamente mais elevados e complexos de autonomia no pensar. (BRASIL, 2015, p.21).

A escolha de um livro didático é um momento onde deve ser feita uma análise criteriosa na qual devemos estar atentos como os objetos matemáticos estão sendo introduzidos e como estão dispostas as tarefas propostas, tarefas estas que devem fornecer ao aluno os momentos de **Ação, Formulação, Validação e Institucionalização** momentos que analisaremos, em um capítulo posterior com o propósito de vislumbrar aspectos epistemológicos do **MMC** e do **MDC**, focos de interesse desta investigação.

2.1.3 SEGUNDA FASE: CONCEPÇÃO E ANÁLISE A PRIORI

Nesta segunda fase, o investigador toma a decisão de agir sobre um determinado número de variáveis do sistema não fixadas pelas restrições que são as *variáveis de comando,* que ele supõe serem variáveis pertinentes para o problema estudado. Pais (2001, p. 101), afirma que essas variáveis serão articuladas e devidamente analisadas no transcorrer da sequência didática.

> - as *variáveis macro didáticas ou globais,* que dizem respeito à organização global da engenharia;
>
> - e as *variáveis micro didáticas ou locais,* que dizem respeito à organização local da engenharia, isto é, à organização de uma sessão ou de uma fase, podendo uma e outra ser, por sua vez, variáveis de ordem geral ou variáveis dependentes do conteúdo didático cujo ensino é visado.

Segundo Almouloud (2008) as variáveis são as dimensões, os fatores que têm influência sobre o que estamos estudando. A análise das restrições dos dados da pesquisa pode perante um objeto de estudo ser feita pelo estudo das dimensões: epistemológica, cognitiva e didática (ARTIGUE, 1988), que são variáveis de suma importância para o entendimento e que servirão para analisar o saber em jogo, como um objeto pode ser concebido e como ele pode ser ensinado. Além de identificarmos os elementos que concorrem para alcançarmos os resultados que queremos obter em nossa ação didática no trabalho que estamos propondo a desenvolver. Sem deixar de grifar que segundo Artigue (1989), o objetivo da análise a priori, é, pois, determinar de que forma as escolhas efetuadas permitem controlar os comportamentos dos alunos e o sentido desses comportamentos.

Podemos afirmar que o controle desejado por nós será feito através de atividades propostas que possam formar competências prévias para que possibilitem aos alunos avançarem nas tarefas com o intuito de apreenderem conhecimentos e saberes relativos aos objetos matemáticos que estamos propondo em nossa ação didática e fazer com que os alunos possam se sentir motivados em desenvolver as atarefas propostas.

2.1.4 TERCEIRA FASE: EXPERIMENTAÇÃO

Nesta fase será colocada a prova à *Sequência Didática*, que foi oriunda das 1ª e 2 ª fases, é o momento dos ajustes, pois perceberemos se as nossas escolhas foram pertinentes ou não e conseguiremos identificar as restrições que impossibilitam a apropriação de um objeto matemático mediante a análise dos obstáculos que irão surgir.

Segundo Pais (2001, pág. 102) a aplicação da *sequência didática* é também uma etapa de suma importância para garantir a proximidade dos resultados práticos com a análise teórica.

Sobre essa fase Silvia Machado (2012, pág. 244-245) escreve que ela é a fase da realização da engenharia com certa população de alunos. Se inicia no momento em que se dá o contato pesquisador/professor/observador (es) com a população de alunos sujeitos colaboradores da investigação. E que a *experimentação* supõe:

- A explicitação dos objetos e condições de realização da pesquisa à população de alunos que participará da experimentação;
- O estabelecimento do contrato didático;
- Aplicação dos instrumentos de pesquisa;
- Registro das observações feitas durante a experimentação (observação cuidadosa descrita em relatório, transcrição dos registros audiovisuais, etc.).

Essas conjecturas irão possibilitar que o aluno possa conhecer o que está sendo estudado, aceitar um contrato didático que vai possibilitar uma sintonia entre o professor, o aluno e o conhecimento em jogo para que não haja uma ruptura do contrato e depois teremos como consequência a aplicação da sequência e o registro das ações do professor e do aluno no processo de ensino e de aprendizagem.

2.1.5 – QUARTA FASE: ANÁLISE A POSTERIORI E VALIDAÇÃO

Nesta fase será verificado se a nossa proposta de intervenção, no caso uma *Sequência Didática* no processo de ensino e aprendizagem do **MMC** e do **MDC** funcionou. Sobre esta fase estamos mostrando a seguir as palavras de:

Segundo Almouloud (2010, pág. 177), esta fase é o conjunto de resultados que se pode tirar da exploração dos dados recolhidos e que contribui para a melhoria dos conhecimentos didáticos que se têm sobre as condições da transmissão do saber em jogo. Ela não é a crônica da classe, mas uma análise feita à luz da análise *à priori*, dos fundamentos teóricos, das hipóteses e da problemática da pesquisa.

Para Pais (2011, pág. 103), esta fase refere-se ao tratamento das informações obtidas por ocasião da aplicação da sequência didática, que é a parte efetivamente experimental da pesquisa.

Para Silvia Machado (2012, pág. 246), esta fase se apoia sobre todos os dados colhidos durante a experimentação constante das observações realizadas durante cada sessão de ensino, bem como das produções dos alunos em classe ou fora dela.

Os três autores mencionados anteriormente comungam que os dados para uma melhor compreensão são, ás vezes, complementados por outros dados que são obtidos através de técnicas como questionários, entrevistas, gravações, diálogos ou outra forma de registro conveniente e no que tange a *validação* dos resultados, podemos afirmar que os autores têm um denominador comum, pois afirmam que é o momento em que é obtida pela confrontação entre as informações obtidas na análise *a priori* e *posteriori*, ou seja, que se confirmam ou se refutam as hipóteses construídas no início de uma pesquisa, de uma engenharia como os autores denominam e em nosso caso a nossa *Sequência Didática*.

CAPÍTULO 3
TÓPICOS IMPORTANTES RELACIONADOS AO ESTUDO DO MMC E DO MDC

Segundo Pais (2013), em seu *Prospecto dos Conceitos*, afirma que: o ensino e a aprendizagem de definições, propriedades e conceitos matemáticos, de forma articulada, é uma estratégia didática pela qual o professor pode buscar expandir o significado da educação escolar e, assim, melhor dinamizar os vínculos entre a subjetividade e a objetividade no desenvolvimento do saber escolar.

Baseado no exposto anteriormente, mostraremos a seguir o que Filho (1989), Maier (2005) e Dante (2016) escreveram sobre tópicos importantes que podem ser relacionados no estudo do **MMC** e do **MDC** em seus livros, os dois primeiros usando elementos da Teoria dos Números e o terceiro em um livro para ser usado no 6º ano do Ensino Fundamental.

3.1 Números Primos e Compostos

Filho (1989, p. 116) define número primo e composto da seguinte forma: Diz-se que um inteiro positivo p > 1 é um *número primo* ou apenas um primo se e somente se 1 e p são os seus únicos divisores positivos. Um inteiro positivo maior que 1 e que não é primo diz – se *composto*.

Podemos verificar o exposto acima através da escrita dos divisores (D) de cada número abaixo:

D(2) = {1; 2} ;D(3) = {1; 3}; D(5) = {1 ;5}; D(4) = {1;2;4}; D(6) = {1; 2; 3; 6}; D(9) = {1;3;9}, então é possível afirmar que os números 2; 3 e 5 são primos e os números 4; 6 e 9 são compostos.

3.2 Teorema Fundamental da Aritmética

Filho (1989, p. 119,120), enuncia o Teorema Fundamental da Aritmética (TFA) da seguinte forma: Todo número inteiro positivo n > 1 é igual a um produto de fatores *primos* e que a decomposição de um número inteiro positivo n > 1 como produto de fatores primos é única, a menos da ordem dos fatores. Veja:

Figura 6: Decomposição em fatores primos do número 4.

$$\begin{array}{r|l} 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ \hline 1 & 2 \times 2 \end{array}$$

Fonte: Filho (1989, p. 119)

Figura 7: Decomposição em fatores primos do número 6.

$$\begin{array}{r|l} 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ \hline 1 & 2 \times 3 \end{array}$$

Fonte: Filho (1989, p. 119)

Figura 8: Decomposição em fatores primos do número 9.

$$\begin{array}{r|l} 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ \hline 1 & 3 \times 3 \end{array}$$

Fonte: Filho (1989, p. 120)

Figura 9: Decomposição em fatores primos do número 20.

$$\begin{array}{r|l} 20 & 2 \\ 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ \hline 1 & 2 \times 2 \times 5 \end{array}$$

Fonte: Filho (1989, p. 120)

3.3. Números Especiais

Além de muitos grupos quem eram fascinados pelos números e disponibilizavam um tratamento especial para os números destacamos os **Pitagóricos,** pois foram eles que criaram os **números perfeitos, imperfeitos (defectivos)** e **os abundantes** que estão sendo discriminados e definidos no quadro a seguir:

Quadro 5: Números perfeitos, imperfeitos e abundantes

Números perfeitos	Um número natural n, $n > 1$, chama-se ***perfeito*** se for igual à soma de seus divisores naturais próprios. *Divisores naturais próprios* de um número natural n são todos os divisores naturais de n, exceto o próprio n. Ex: $6 = 1 + 2 + 3$ $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$

Números imperfeitos (defectivos)	Um número natural n, n > 1, é dito **imperfeito (defectivo)** se a soma de seus divisores próprios é inferior a ele. Ex: 8 é deficiente, já que 1 + 2 + 4 = 7 < 8. 15 é deficiente, já que 1 + 3 + 5 = 9 < 15.
Números abundantes	Um número natural n, n > 1, é dito ***abundante*** se a soma de seus divisores próprios é superior a ele. Ex: 12 é abundante, já 1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 12 = 28 > 24. 18 é abundante, já 1 + 2 + 3 + 6 + 9 + 18 = 39 > 36.

Fonte: Clubes de Matemática da OBMEP (2017).

3.4 Abordagem do MMC e do MDC Pela Teoria dos Números

3.4.1 MMC

3.4.2 DEFINIÇÃO

Sejam a, b dois inteiros diferentes de zero (a ≠ 0 e b ≠ 0). Chama-se *mínimo múltiplo comum* de a e b o inteiro positivo m > 0 que satisfaz as condições:

(1) $a|m$ e $b|m$

(2) Se $a|c$ e $se\ b|c, com\ c > 0, então\ m \leq c$.

Observa-se que, pela condição (1), m é um múltiplo comum de a e b, e pela condição (2), m é o *menor* dentre todos os múltiplos comuns *positivos* de a e b.

O *mínimo múltiplo comum* de a e b indica-se pela notação mmc (a,b).

Colocamos como exemplo**:**

$a = 6$ e $b = -8$.

Os múltiplos comuns destes a e b são $\{\pm 24, \pm 48, \pm 72, \ldots\}$. Entretanto

$$m = mmc\ (6, -8) = 24.$$

3.5. MDC

3.5.1. Definição

Sejam a e b dois inteiros não conjuntamente nulos (a ≠ 0 ou b ≠ 0). Chama-se *máximo divisor comum* de a e b o inteiro *positivo* d (d > 0) que satisfaz as condições:

(1) $d|a$ e $d|b$

(2) Se $c|a$ e $se\ c|b, então\ c \leq d$.

Observa-se que, pela condição (1), d é um *divisor comum* de a e b, e pela condição (2), d é o *maior* dentre todos os divisores comuns de a e b.

O *máximo divisor comum* de a e b indica-se pela notação mdc (a,b).

Colocamos como exemplo:

$a = 9$ e $b = -12$.

Os divisores comuns destes a e b são $\{\pm 1, \pm 3\}$. Entretanto

$$m = mdc\ (9, -12) = 3.$$

3.5.2 ABORDAGEM DO MMC E DO MDC POR DANTE:

3.5.3 MMC

3.5.4 DEFINIÇÃO

O **Mínimo Múltiplo Comum (MMC)** de dois números naturais é o menor número, diferente de zero, que é múltiplo comum desses números.

3.6 MDC

3.6.1 DEFINIÇÃO.

O **Máximo Divisor Comum (MDC)** de dois ou mais números naturais é o maior dos divisores comuns desses números.

Analisando as definições apresentadas por Filho e Dante, percebemos que os dois autores apresentam de forma diferente as definições, contudo é preciso recorrer às definições do **MMC** e do **MDC** de Euclides na sua obra Os Elementos, pois lá são citadas as operações do **MMC** e do **MDC** entre números e não restringe como naturais ou inteiros e isso nos permite mostrar as extensões dos mesmos.

3.7 Extensões do Cálculo do MMC e do MDC.

Pelas definições relatadas anteriormente sobre **MMC** e **MDC**, percebemos que a operacionalização dos mesmos é para números inteiros, porém é percebido que é válido também para outros números reais e para os polinômios, como apresentaremos a seguir:

3.7.1. CÁLCULO DO MMC COM RADICAIS E O PI

(A) MMC $(4\sqrt{3}; 2\sqrt{3}) = ?$

Para calcular o MMC entre os dois números reais citados acima, podemos utilizar o método do múltiplo comum como foi citado anteriormente, veja:

Múltiplos de $4\sqrt{3}$: $\{4\sqrt{3}, 8\sqrt{3},\ 12\sqrt{3}, ...\}$

Múltiplos de $2\sqrt{3}$: $\{2\sqrt{3}, 4\sqrt{3}, 8\sqrt{3}, ...\}$

Menor múltiplo comum entre $4\sqrt{3}$ e $2\sqrt{3}$ = $4\sqrt{3}$

Com o mesmo processo será encontrado o MMC entre os números:

(B) $(8\sqrt{5}, 16\sqrt{5}) = ?$

Múltiplos de $8\sqrt{5}$: $\{8\sqrt{5}, 16\sqrt{5},\ 24\sqrt{5}, ...\}$

Múltiplos de $16\sqrt{5}$: $\{16\sqrt{5}, 32\sqrt{5}, 48\sqrt{5}, ...\}$

Menor múltiplo comum entre $8\sqrt{5}$ e $16\sqrt{5}$ = $16\sqrt{5}$

(C) $(2\pi, 6\pi) = ?$

Múltiplos de 2π: $\{2\pi, 4\pi, 6\pi, ...\}$

Múltiplos de 6π: $\{6\pi, 12\pi, 18\pi, ...\}$

Menor múltiplo comum entre 2π e 6π = 6π

3.7.2. CÁLCULO DO MMC COM POLINÔMIOS

(A) MMC $(2xy, 4xy) = ?$

Para calcular o MMC entre os dois polinômios citados acima, o método mais recomendado é a decomposição simultânea, veja:

Figura 10: Cálculo do MMC entre 2xy e 4xy.

2xy,	4xy	2xy	x
1,	2	2	
1,	1	4xy	

Fonte: os autores

Logo o MMC entre 2xy e 4xy é 4xy.

Com o mesmo processo encontramos :

(B) MMC entre $(4x^3y^4 e\ 2x^3y^4)$.

$$\begin{array}{rr|l} 4x^3y^4, & 2x^3y^4 & 2x^3y^4 \\ 2, & 1 & 2 \\ \cline{3-3} 1, & 1 & 4x^3y^4 \end{array} \quad \text{x}$$

Para o cálculo do $MMC\ (x^2 - y^2 e\ x + y)$, utilizamos o caso da fatoração conhecida como diferença entre dois quadrados,veja :

Para $x^2 - y^2$

$x^2 - y^2$= (x + y)(x – y)

E para x + y o caso de fatorcomum em evidência, veja:

x + y = 1.(x + y) = (x + y)

Logo o MMC será os fatores comuns e os não comuns, cada um com seu maior expoente, com isso o MMC $(x^2 - y^2 e\ x + y)$ = (x + y)(x – y)

Usando fatoração também é possível calcular o MMC entre:

(A) $(x^2 - y^2, x + y) = (x + y)(x - y)$

(B) $(a - b, a + b) = (a + b)(a - b)$

3.7.3. CÁLCULO DO MDC PARA SIMPLIFICAR FRAÇÕES:

(A) Simplifique as frações:

a) $\frac{30}{20}$, para simplificar essa fração podemos usar o MDC (30, 20) = 10 para dividir o numerador e denominador simultaneamente e teremos como resultado $\frac{3}{2}$.

b) $\frac{23}{230}$, para simplificar essa fração podemos usar o MDC (23, 230) = 23 para dividir o numerador e denominador simultaneamente e teremos como resultado $\frac{1}{10}$.

3.7.4. CÁLCULO DO MDC COM RADICAIS E O PI:

(A) MDC $(4\sqrt{3}, 2\sqrt{3}) = ?$

Para calcular o MDC entre os dois números reais citados acima, podemos utilizar o processo da decomposição simultânea cujo MDC é o produto entre os fatores comuns, cada um com o seu menor expoente, porém quando não visualizarmos fatores comuns diferentes de 1 o MDC será igual a 1, veja:

Figura 11: Cálculo do MDC entre $4\sqrt{3}, 2\sqrt{3}$.

$4\sqrt{3}$,	$2\sqrt{3}$	$2\sqrt{3}$
2,	1	2
1,	1	

Fonte: os autores

Logo o MDC entre $4\sqrt{3}$ e $2\sqrt{3}$ é $2\sqrt{3}$.

(B)MDC $\left(3\sqrt{2}, 2\sqrt{3}\right) = ?$

Figura 12: Cálculo do MDC entre $3\sqrt{2}, 2\sqrt{3}$.

$3\sqrt{2}$,	$2\sqrt{3}$	2
$3\sqrt{2}$,	$\sqrt{3}$	3
$\sqrt{2}$,	$\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$
1,	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$
1,	1	

Fonte: os autores

Logo o MDC entre $3\sqrt{2}, 2\sqrt{3}$ é 1.

Com o mesmo processo citado anteriormente será encontrado o MDC entre os números:

(C) $(8\sqrt{5}, 6\sqrt{5}) = 2\sqrt{5}$

(D) $(4\sqrt{5}, 5\sqrt{3}) = 1$

(E) $(2\pi, 6\pi) = 2\pi$

3.7.5. CÁLCULO DO MDC COM POLINÔMIOS:

(A) MDC $(2xy, 4xy) = ?$

Para calcular o MDC entre os dois polinômios citados anteriormente, podemos utilizar o processo da decomposição simultânea, veja:

Figura 13: Cálculo do MDC entre $2xy\ e\ 4xy$.

2xy,	4xy	2xy
1,	2	2
1,	1	

Fonte: os autores

Logo o MDC entre 2xy e 4xy é 2xy.

Com o mesmo processo será encontrado o MDC entre:

(B) $(4x^2y^4, 2x^3y^2) = 2x^2y^2$

(C) $(x, y) = 1$

Para calcular o MDC entre $(x^2 - y^2 e\ x + y)$, utilizamos o caso da fatoração conhecida como diferença entre dois quadrados para $x^2 - y^2, veja$:

$x^2 - y^2$= (x + y)(x – y)

E para x + y o caso de fator em evidência, veja:

x + y = 1.(x + y) = (x + y)

MDC $(x^2 - y^2, x + y) = (x + y)$

Usando o caso de fatoração conveniente encontramos o MDC entre:

(D) $(a - b, a + b) = 1$

(E) $(a^2 – 2ab + b^2, a^2 – b^2) = a - b$

Ressaltamos aqui que na construção da nossa Sequência Didática nós não iremos abordar tarefas com radicais, o pi e nem polinômios, contudo desenvolvemos essa parte para mostrar algumas extensões do uso do **MDC** e do **MMC**.

CAPÍTULO 4
Análise de Obras

O presente capítulo tem como objetivo mostrar como o **MMC** e o **MDC** vêm sendo apresentados no contexto histórico, em livros didáticos, artigos, outros trabalhos e teses, mostrando diferentes abordagens que irão nos dar subsídios e inspiração para a formação da nossa *Sequência Didática.*

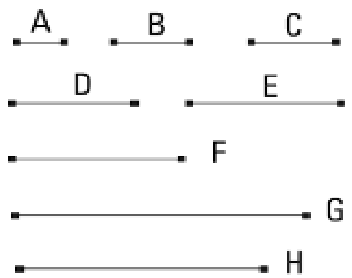
4.1 Contexto histórico

MMC

Em Boyer (1974, p. 84) é relatado que o livro VII dos **Elementos** da autoria de Euclides termina com a proposição 39 que é como calcular o **MMC**:

> *Achar um número que é o menor dos que terão as partes dadas.*
> Sejam as partes dadas A, B, C; é preciso, então, achar

Figura 14: Apresentação geométrica do MMC



Fonte: Os Elementos de Euclides (2009)

> um número, que é o menor dos que terão as partes A, B, C.
> Sejam, pois, os números D, E, F, homônimos[5] com as partes A, B, C, e fique tomado o menor número G, medido pelos D, E, F.
> Portanto, o G tem partes homônimas com os D, E, F. E as partes A, B, C são homônimas com os D, E, F. E as partes A, B, C são homônimas com os D, E, F; portanto, o G tem partes A, B, C. Digo, então, que é o menor. Pois, se não, existirá algum número menor do que G, que terá as partes A, B, C. Seja o H. Como o H tem as partes A, B, C, portanto o H será medido por números homônimos com as partes A, B, C; portanto, o H é medido pelos D, E, F. E é menor do que G; o que é impossível. Portanto, não existirá algum número menor do que G, que terá as partes A, B, C; o que era preciso provar.

[5] São números do mesmo tipo, o que hoje dizemos pertencente a um mesmo conjunto.

A proposição relatada anteriormente mostra de forma geométrica a técnica para calcular o **MMC** que serviu como base para mostrar uma das formas de como deve ser calculado aritmeticamente o **MMC** entre dois ou mais números, mostrando que podem ser encontrados números comuns entre dois ou mais números e entre eles o **MMC** será o menor diferente de zero.

Podemos dar como exemplo para a proposição mencionada anteriormente o seguinte exemplo:

Suponhamos que queremos encontrar o menor número que tenha umas partes dadas, por exemplo, uma quarta parte e uma sexta parte. Então tomemos o MMC (2;4;10) = 20. 20 tem uma metade (10), uma quarta parte (5) e uma décima parte (2).

MDC

O método aparece pela primeira vez no Livro VII da obra **Os Elementos** da autoria de Euclides, cerca de 300 a. C., e tem sua origem geométrica, como a determinação da maior medida comum entre dois segmentos **comensuráveis,** definidos assim, quando ambos podem ser obtidos de um número inteiro de emendas de um mesmo segmento de reta. (KILHIAN, 2012).

Proposição II do Livro VII: *Sendo dados dois números não primos entre si, achar a maior medida comum entre eles*.

Sejam AB, CD os dois números dados não primos entre si. É preciso, então, achar a maior medida comum dos AB, CD.

Podemos dar como exemplo para a proposição mencionada anteriormente o seguinte exemplo:

Sendo dois segmentos de reta AB e CD representados respectivamente por 30 cm e 20 cm, é possível afirmar que nos dois segmentos é possível dividi-los em outros segmentos de 10 cm, veja:

Figura 15: segmentos de reta

A________E________F________B

Fonte: o autor

AE = 10 cm

EF = 10 cm

FB = 10 cm

Figura 16: segmentos de reta

C________E________D

Fonte: o autor

CE = 10 cm

ED = 10 cm

Logo podemos concluir que a maior medida comum entre os segmentos AB e CD é 10 cm e relacionando com a aritmética, é possível afirmar que o Maior Divisor Comum entre 30 e 20 é 10.

No livro **A Rainha das ciências,** é relatado o seguinte sobre o ***MDC*** do livro VII dos **Elementos de Euclides**:

> ”A proposição VII - 2 é uma das mais famosas dos Elementos porque apresenta o método para se encontrar o *Máximo Divisor Comum* entre dois números, através de uma sequência de operações que, merecidamente, consagrou-se sob o nome de *Algoritmo de Euclides*. O procedimento é....: divide-se o maior pelo menor, o menor pelo primeiro resto, o primeiro resto pelo segundo, etc. Se se chegar a algum resto que divida o anterior, ele será o *MDC*; se se chegar a um resto igual a 1, os números serão primos entre si. Vale a pena conhecer este clássico. Sejam os números a e b, com a > b. Ao se dividir a por b, encontra-se um quociente q_1 e um resto r_1. Ao se dividir b pelo primeiro resto r_1 obtém-se um quociente q_2 e um segundo resto r_2, e assim sucessivamente, conforme as igualdades abaixo: (GARBI, 2006, p.55)
>
> $a = q_1b + r_1$ ou $r_1 = a – q_1b$
> $b = q_2 r_1 + r_2$ ou $r_2 = b – q_2 r_1$
> $r_1 = q_3r_2 + r_3$ ou $r_3 = r_1 – q_3r_2$
> ....
> $r_{n-3}= q_{n-1} r_{n-2} + r_{n-1}$ ou $r_{n-1} = r_{n-3} – q_{n-1} r_{n-2}$
> $r_{n-2}= q_n r_{n-1} + r_n$ ou $r_n= r_{n-2} – q_nr_{n-1}$

A proposição relatada acima mostra o Algoritmo de Euclides, o qual possibilita por divisões sucessivas encontrar o MDC entre dois números bem como verificar se esses números são primos entre si, pois saindo da generalidade que possui uma demonstração algébrica, a seguir estamos mostrando esse algoritmo utilizando números inteiros:

- Cálculo do MDC entre 75 e 20:

75 ÷ 20 = 3 e resto = 15

20 ÷ 15 = 1 e resto = 5

15 ÷ 5 = 3 e resto = 0

MDC (75,20) = 5.

Por um dispositivo prático:

Figura 17: Dispositivo do Algoritmo de Euclides.

	3	1	3
75	20	15	5
15	5	0	

Fonte: o autor

O MDC é igual a 5 e os números não são primos entre si.

- Cálculo do MDC entre 25 e 13:

25 ÷ 13 = 1 e resto = 12

13 ÷ 12 = 1 e resto = 1

12 ÷ 1 = 12 e resto = 0

Por um dispositivo prático:

Figura 18: Dispositivo do Algoritmo de Euclides.

	1	1	12
25	13	12	1
12	1	0	

Fonte: o autor

O MDC (25, 13) é igual a 1 e por isso os números são primos entre si.

4.2- Estudo temático

4.2.1-ESTUDO DO MMC E DO MDC NOS LIVROS DIDÁTICOS

O estudo didático que apresentaremos sobre o **MDC** e o **MMC** a seguir foi realizado com o objetivo de evidenciarmos como a definição, as tarefas, às técnicas, às tecnologias e as teorias vêm se apresentando ao decorrer de algumas décadas e também se foram contempladas as tipologias de situações desenvolvidas por *Brousseau* que são as situações de ***Ação, Formulação, Validação e Institucionalização***.

Em relação ao livro didático Luiz Carlos Pais escreveu com o título Prospecto do Livro Didático o seguinte:

> O livro didático é uma das fontes de informação mais utilizadas na condução do ensino da Matemática. Assim, esse recurso deve zelar pela apresentação de definições, propriedades e conceitos de forma correta, do ponto de vista científico e pedagógico. A diversificação de representações, a articulação de linguagens e o tratamento da argumentação são elementos que favorecem a aprendizagem, portanto, devem ser contemplados no livro didático. (PAIS, 2009, p. 47)

Nesses termos, Trajano (1928), em seu livro intitulado Arithmetica Progressiva, introduz o estudo do **MDC** com as seguintes definições:

> Divisor comum é o número que divide dois ou mais números diversos sem deixar resto e Máximo divisor comum é o maior número que divide dois ou mais números diversos sem deixar resto. (TRAJANO, 1928, p. 61)

Verificamos que nas duas definições mencionadas anteriormente por Trajano, o mesmo não se refere a um tipo específico de número, pois quando ele se refere a números diversos deixa em aberto o uso para qualquer tipo de número e isso justifica o cálculo do MDC para os radicais e os polinômios como vimos anteriormente.

Continuando com o estudo do MDC, Trajano (1928, p. 62, 63) lista dois processos para o cálculo desse objeto que são o processo da decomposição e o processo da divisão, no caso do último, mostra o processo inglês e o francês, veja:

Processo da decomposição:

Regra: Decompõe-se cada um dos números dados em seus fatores; depois se multiplicam entre si todos os fatores comuns, e o produto será o máximo divisor comum.

Exemplos: Achar o máximo divisor comum:

1. De 30 e 42.

30 = 2 x 3 x 5

42 = 2 x 3 x 7

MDC = 2 x 3 = 6

2. De 63 e 105.

63 = 3 x 3 x 7

105 = 3 x 5 x 7

MDC = 3 x 7 = 21

O processo da divisão: Consiste em uma série de divisões até se achar um divisor exato.

Exemplos: Qual é o máximo divisor comum de 44 e 16?

Figura 19: Cálculo do MDC pelo processo inglês.

Processo inglês

$$\begin{array}{r|l} 44 & \underline{\;16\;} \\ \underline{\;32\;} & 2 \\ 12 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 16 & \underline{\;12\;} \\ \underline{\;12\;} & 1 \\ 4 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 12 & \underline{\;4\;} \\ \underline{\;12\;} & 3 \\ 0 & \end{array}$$

Fonte: Trajano (1928)

Figura 20: Cálculo do MDC pelo processo francês.

Processo francês

	2	1	3	Quocientes
44	16	12	4	Divisores
12	4	0		Restos

Fonte: Trajano (1928)

No caso do **MMC**, Trajano afirma:

> Múltiplos de um número são o seu duplo, triplo, quádruplo, quíntuplo, etc. desse número e múltiplo comum é um número múltiplo de dois ou mais números; MMC é o menor número que se divide por esses números sem deixar resto. (TRAJANO, 1928, p. 64)

Mais uma vez percebemos que as definições acima não se restringem aos números inteiros e servem para o cálculo do **MMC** para radicais e polinômios como vimos anteriormente.

Trajano (1928, p. 65 – 67) para o cálculo do **MMC** lista os seguintes processos:

O **primeiro processo** consiste em fatorar os números dados, e depois separar e multiplicar entre si os fatores que formam o **MMC.**

Regra: Decompõe-se cada um dos números dados em seus fatores primos; separam-se todos os fatores primos do maior número dado, e juntam-se a eles os fatores dos outros números, que não estiverem neles incluídos e rejeitam-se os que já estiverem incluídos, e o produto continuado desses fatores separados será o **MMC.**

Exemplo:

Qual é o mínimo múltiplo comum de 18, 21 e 66?

18 = 2 x 3 x 3

21 = 3 x7

66 = 2 x 3 x 11

MMC = 2 x 3 x 3 x7 x 11 = 1386

O **segundo processo** possui a seguinte regra:

Escrevem-se todos os números em linha, separados por vírgulas, e sublinham-se; acha-se o menor divisor que divida exatamente ao menos dois dos números, e escreve-se esse número à direita e divide-se por ele todos os números que forem divisíveis, e escrevem-se debaixo os quocientes e os números que não forem exatamente divisíveis por ele.

Divide-se ainda essa nova linha de números pelo menor divisor que ao menos divida dois números, e assim se procede até que não haja nos quocientes senão o algarismo 1. O continuado produto de todos os divisores será a resposta.

Qual o mínimo múltiplo comum entre 4; 6; 8 e 12

Figura 21: Processo para calcular o mínimo múltiplo comum

Processo

4,	6,	8,	12	2
2,	3,	4,	6	2
1,	3,	2,	3	3
1,	1,	2,	1	2
1,	1,	1,	1	

Fonte: Trajano (1928).

O mínimo múltiplo comum é igual 2 x 2 x 3 x 2 = 24

Trajano, disponibiliza apenas 1 (um) exercício proposto para calcular o **MDC** e 2 (dois) para calcular o **MMC** e afirma que os mesmos irão possibilitar ao leitor resolver os exercícios do mais fácil ao mais difícil, com isso o autor afirma que o aluno conseguirá resolver os exercícios com destreza e exatidão, nos tempos atuais tais exercícios só possibilitariam perceber, em um momento solitário, a fase da **Ação**.

Dalmau (1946, p. 65), em seu livro Aritmética Razonada, define o **MDC** de dois ou mais números, como o maior número que divide exatamente a todos. O autor disserta também sobre as regras para calcular o **MDC** entre dois números que se fundamentam em princípios e mostra o processo das divisões sucessivas que se assemelha ao Algoritmo de Euclides, porém em nenhum momento esse algoritmo é citado, a regra desse processo é a seguinte:

Regra para encontrar o m.d.c de dois números – Para encontrar o m.d.c de dois números, se divide o maior pelo menor, e se a divisão é exata, o menor é o m.d.c de ambos. Se tiver resíduo, se divide o divisor pelo resíduo e continua sempre dividindo o divisor pelo resíduo, para obter divisão exata. O último divisor é o m.d.c dos dois números.

Na prática, dispõem-se os números como indicado a seguir:

Exemplo: Encontrar o máximo divisor comum dos números 426 e 96.

Disposição:

Figura 22: Processo para calcular o máximo divisor comum

	426	96	42	12	6
Quocientes		4	2	3	2
Resíduos	42	12	6	0	

Fonte: Dalmau (1946)

O último divisor, 6, é o m.d.c de 426 e 96.

Para três ou mais números o autor cita a seguinte regra:

Para encontrar o m.d.c de três ou mais números, se encontra o m.d.c dos dois primeiros; depois se encontra o m.d.c do m.d.c encontrando e do terceiro número; depois se encontra o m.d.c do último m.d.c e do quarto número, e assim sucessivamente; o último m.d.c é o dos números propostos. Para maior brevidade, se consideram os primeiros números os menores.

Exemplo: Encontrar o m.d.c de 120, 615 e 36.

Encontramos primeiro, o m.d.c. de 120 e 36.

Figura 23: Processo para calcular o máximo divisor comum

	120	36	12
C.		3	3
R.	12	0	

Fonte: Dalmau (1946)

Encontramos agora o m.d.c de 615 e 12.

Figura 24: Processo para calcular o máximo divisor comum

	615	12	3
C.		51	4
R.	3	0	

Fonte: Dalmau (1946)

O último divisor, 3, é o m.d.c. de 120, 615 e 36.

Para o **MMC**, Dalmau, escreve o seguinte:

> é o múltiplo mais simples de dois ou mais números, é o menor número divisível por todos eles; para calcular o MMC entre dois números, encontra-se o MDC entre esses números, divide-se um desses números por esse MDC e multiplica-se esse quociente pelo outro número; para calcular o MMC entre três ou mais números, calcula-se o menor múltiplo entre os dois primeiros números, em seguida calcula-se o menor múltiplo desse menor múltiplo e do terceiro número, em seguida, o menor múltiplo desse menor múltiplo e do quarto número, e assim sucessivamente, até chegar ao último número; para calcular o menor múltiplo de dois ou mais números, se decompõe em seus fatores simples, e se multiplicam as maiores potências de todos estes fatores simples. (Dalmau, 1946, p.p. 72 a 74)

As regras descritas anteriormente para calcular o MMC podem ser vislumbradas a seguir:

MMC de dois números

Figura 25: Processo para calcular o mínimo múltiplo comum

	45	30	15
C.		1	2
R.	15	0	

Fonte : Dalmau (1946)

O m.d.c. desses números é 15; seu múltiplo mais simples será:

$$\frac{45}{15} \times 30 = \frac{45 \times 30}{15} = \frac{1350}{15} = \frac{270}{3} = 90.$$

MMC de vários números

Achar o múltiplo mais simples de 162, 39, 26 e 21.

Tomamos os menores números, 26 e 21. Como são primos entre si, seu menor múltiplo é 26 x 21 = 546.

Encontramos, agora, o menor múltiplo de 546 e 39.

Figura 26: Processo para calcular o menor múltiplo

	546	39
C.		14
R.	0	

Fonte : Dalmau (1946)

Seu m.d.c é 39, logo seu menor múltiplo será: $\frac{546}{39}$ x 39 = $\frac{546 \text{ x } 39}{39}$ = 546.

Encontramos, agora, o menor múltiplo de 546 e 162.

Figura 27: Processo para calcular o menor múltiplo

	546	162	60	42	18	6
C.		3	2	1	2	3
R.	60	41	18	06	0	

Fonte: Dalmau (1946)

Seu m.d.c. é 6; Logo, o menor múltiplo será: $\frac{546}{6}$ x 162 = $\frac{546 \text{ x } 162}{6}$ = $\frac{88452}{6}$ = 14742, menor múltiplos dos quatro números propostos.

MMC por fatores primos

14 = 2 x 7

36 = 22 x 32

20 = 22 x 5

MMC = 22 x 32 x 7 x 5 = 1260

Verificamos que Dalmau neste seu livro não disponibiliza nenhuma atividade proposta em relação ao **MDC** e o **MMC**, as atividades que foram citadas anteriormente foram exemplos de aplicação desses dois objetos de ensino.

Filho (1968), no seu livro, Curso de Aritmética Moderna, escreveu o seguinte sobre o **MDC**:

> Dados dois números, achar os seus divisores comuns. Os divisores que pertencem aos dois números, ao maior destes chamaremos maior divisor comum e a operação se representa por M.D.C ou D; dados 2 ou mais números, teremos 2 conjuntos de divisores e entre eles os comuns; dos divisores comuns de dois ou mais números o mais importante é o maior deles; a este daremos o nome de maior divisor comum. (FILHO, 1968, p.p. 132 e 134)

Em relação à definição apresentada por Filho, nos chama a atenção que o autor afirma que entre os divisores comuns, o maior é o **mais importante** e com isso esse número é o **MDC.**

Filho logo após definir o **MDC** mostra o processo da determinação dos divisores e mostra quando dois números são primos entre si, veja:

Determinar o m.d.c de 28 e 36

Divisores de 28 1, 2, 4, 7, 14 e 28

Divisores de 36 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18 e 36

Divisores comuns de 28 e 36 1, 2 e 4

m.d.c = 4

Determinar os divisores de 7 e 11

Divisores de 7 1 e 7

Divisores de 11 1 e 11

m.d.c = 1

Se 1 é o único divisor comum (maior); esta é outra forma de exprimir que dois números são primos entre si.

Logo após, o autor mostra o processo da decomposição em fatores primos para a determinação do M.D.C., veja:

Dados 3 números fatoramos esses números, achamos os divisores comuns e escolhemos o maior, veja :

Figura 28: Fatoração de números

240	2	120	2	80	2
120	2	60	2	40	2
60	2	30	2	20	2
30	2	15	3	10	2
15	3	5	5	5	5
5	5	1		1	

Fonte: Filho (1968)

$240 = 2^4 \times 3 \times 5$ $120 = 2^3 \times 3 \times 5$ $80 = 2^4 \times 5$

Divisor comum

240, 120 e 80 $1, 2, 2^2, 2^3, 2^3 \times 5$

1, 2, 4, 8, 40

m.d.c. de 240, 120 e 80 é 40

indica-se 240 D 120 D 80 = 40

Para o **MMC**, Filho no mesmo ano, escreveu:

> Dados 2 ou mais números por definição de múltiplos teremos tantos múltiplos quantos quisermos para cada número (infinitos múltiplos); com os múltiplos desses números, sempre será possível ter um conjunto infinito de múltiplos comuns; dados 2 ou mais números interessa-nos encontrar o menor múltiplo comum a esses números. (FILHO, 1968, p. 137)

A escrita feita por Filho sobre o **MMC** está se referindo ao cálculo desse objeto pela identificação do menor múltiplo comum entre a escrita dos múltiplos de cada número dado, contudo o autor não exclui o zero, esse fato pode levar o aluno a afirmar ou registrar que o **MMC** é zero.

Logo após mostrar essas considerações, Filho mostra:

A saber:

M.M.C. (8, 6) = 24

8 M 6 = 24

Múltiplos sucessivos de um número se obtêm conforme definição.

6 1 x 6, 2 x 6, 3 x 6, 4 x 6........ 6n

7 1 x 7, 2 x 7, 3 x 7, 4 x 7........ 7n

donde

múltiplos de 6 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42 ...

múltiplos de 7 7, 14, 21, 28, 35, 42 ....

Múltiplos comuns 42, 84, 126........... 42n

Menor 42

Observe que quando 2 números ou mais são primos entre si o M é o produto deles.

Depois dessa demonstração, Filho cita algumas observações:

> O maior divisor de um número é o próprio número; o menor múltiplo de um número é o próprio número; donde o máximo divisor e o mínimo múltiplo de um mesmo número é ele próprio e o quociente é a unidade. (FILHO, 1968, p. 138)

Logo após mostrar a determinação do **MMC** utilizando o processo dos múltiplos sucessivos de 3, 8, 4 e 5 e cita um exemplo do processo da decomposição em fatores primos, veja:

Exemplo:

Figura 29: Fatoração de números

24	2	12	2	36	2
12	2	6	2	18	2
6	2	3	3	9	3
3	3	1		3	3
1				1	

Fonte: Filho (1968)

$24 = 2^3 \times 3$

$12 = 2^2 \times 3$

$36 = 2^2 \times 3^2$

De acordo com a regra tomamos $2^3 \times 3^2$ = é o m.m.c.

$$2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 72$$

Para finalizar a parte teórica do **MMC** são citados:

1º Propriedade da multiplicidade:

Dados dois números, se um é múltiplo do outro o **MDC** é o menor deles e o **MMC** e o maior deles.

2º Por simplificação eliminamos no conjunto dos números estudados os múltiplos entre si.

3º Distributividade do **MMC**:

8 **M** 3 **M** 5 = (8 **M** 3) **M** 5 = 8 **M(**3 **M** 5) = 3 **M (**8 **M** 5)

4º Elementos neutros:

No **MDC** o 0 é o elemento neutro pois qualquer número divide 0.

4 D 0 = 4

10 D 0 = 10

n D 0 = n

No **MMC** 1 é neutro pois qualquer número é múltiplo de 1.

4 M 1 = 4

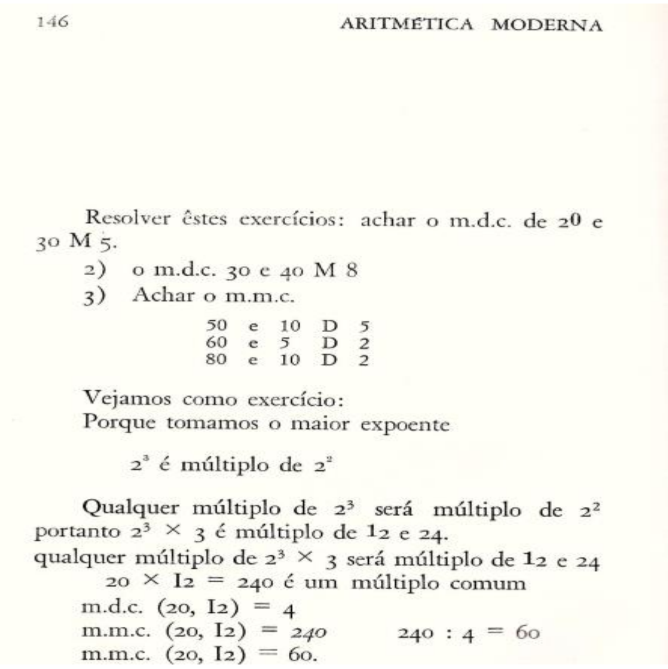
15 M 3 M 1 = 15 M 3

Nas atividades propostas, percebemos a apresentação de algumas técnicas para o cálculo do **MDC** e do **MMC**, exercícios somente de leitura e nos exercícios propostos enunciam “O produto de dois números é igual ao produto do seu maior divisor comum pelo menor múltiplo comum.”, mas não demonstra, veja:

m.d.c. (20,12)
m.m.c. (20,12)
20 x 12 = m.d.c. (20,12) x m.m.c. (20,12)

Além de ser uma obra que não mostra em nenhum momento a aplicação do **MDC** ou do **MMC** em outros contextos, é uma obra que contém muitos erros de digitação como é mostrado na Figura 30:

Figura 30: Erros de digitação


146 ARITMÉTICA MODERNA

Resolver êstes exercícios: achar o m.d.c. de 20 e 30 M 5.

2) o m.d.c. 30 e 40 M 8
3) Achar o m.m.c.

50	e	10	D	5
60	e	5	D	2
80	e	10	D	2

Vejamos como exercício:
Porque tomamos o maior expoente

2^3 é múltiplo de 2^2

Qualquer múltiplo de 2^3 será múltiplo de 2^2 portanto $2^3 \times 3$ é múltiplo de 12 e 24.
qualquer múltiplo de $2^3 \times 3$ será múltiplo de 12 e 24
20 × I2 = 240 é um múltiplo comum
m.d.c. (20, I2) = 4
m.m.c. (20, I2) = *240*   240 : 4 = 60
m.m.c. (20, I2) = 60.

Fonte: Filho (1968)

Andrini (1989, p. 122), começa o estudo do **MDC** definindo-o e apresenta um exemplo listando os divisores de dois números e representando a intersecção dos divisores desses números em diagramas e logo em seguida anuncia que há um maior divisor comum entre eles que é chamado de **Máximo Divisor Comum**. Essa atitude não contextualizada inviabiliza a construção do conceito desse objeto pelo aluno, bem como não dá significado para o estudo do mesmo.

Após a apresentação do **MDC** o autor dispõe de três exercícios onde no 1º o aluno tem que listar os divisores de alguns números, no 2º tem que encontrar os divisores comuns entre dois desses números e o 3º culmina com o cálculo do **MDC**. Depois da realização desses exercícios, o autor apresenta dois processos práticos para calcular o **MDC**, sendo **por decomposição em fatores primos** (fatoração completa) e o **Algoritmo de Euclides**, logo após são propostas 6 atividades.

Finalizando o estudo do **MDC** é apresentado um tópico intitulado **Números primos entre si**, onde Andrini também começa com uma definição e logo em seguida disponibiliza dois exercícios, onde no 1º é solicitado o cálculo do **MDC** entre dois números e no 2º pergunta quais desses pares de números são primos entre si, por último disponibiliza 8 exercícios intitulados Complementares e 8 Testes.

Andrini (p. 129, 1989), inicia o estudo do **MMC** definindo-o e apresentando um exemplo de como calculá-lo, essa atitude inviabiliza a construção do conceito desse objeto pelo aluno, pois o autor não apresenta as ideias de múltiplos de um número e múltiplos comuns. Logo em seguida o autor apresenta três exercícios, o 1º tem como objetivo escrever os múltiplos de seis números, o 2º escrever os múltiplos comuns entre dois números e finaliza com o cálculo do **MMC** entre dois números. Após essas atitudes são apresentados dois processos práticos para a determinação do **MMC**, sendo **por decomposição em fatores primos** (fatoração completa) e **decomposição simultânea**, logo após são propostas atividades intituladas de **Exercícios, Exercícios Complementares** e **Testes**.

Percebemos que Andrini teve a preocupação de apresentar o **MMC** e o **MDC** em diferentes contextos, porém não há a presença do contexto geométrico e esse estudo ficaria muito mais significativo se os objetos estudados, em questão, fossem introduzidos por situações problemas relacionadas ao cotidiano.

Netto (1998, p. 78), inicia o estudo do **MDC** apresentando os divisores de dois e três números e os representa em um diagrama dando ênfase aos divisores comuns desses números, ou seja, a interseção, destacando que há um maior número comum que divide esses números e logo em seguida apresenta o conceito de **MDC**.

Logo em seguida o autor disponibiliza 10 exercícios para o aprimoramento do cálculo do **MDC**, sendo os três últimos para reflexão. Após esses exercícios é apresentado o cálculo do **MDC** pelo método da **Decomposição em fatores primos**, como é mostrada como é realizada a **Identificação de números primos entre si** e por último o cálculo do **MDC** por **Divisões sucessivas**, finalizando o estudo desse objeto são apresentados 10 exercícios.

Netto (1998, p.p. 83-84), inicia o estudo do **MMC** apresentando os múltiplos de três números, na intersecção entre os múltiplos desses números, apresenta o menor múltiplo comum entre esses números é o chama de **Mínimo Múltiplo Comum** dos mesmos e logo em seguida fornece o conceito de **MMC**.

Após a apresentação do conceito, o autor disponibiliza 10 exercícios para o aprimoramento do cálculo do **MMC**. Em seguida é apresentado o cálculo do **MMC** por **Decomposição em Fatores Primos** e por **Decomposição Simultânea em Fatores Primos** com 10 exercícios e os dois últimos possibilitam a reflexão sobre a relação entre o **MDC** e o **MMC**.

O autor ainda apresenta a seção intitulada FALAR, PENSAR e FAZER MATEMÁTICA, onde é apresentada a relação existente entre o produto de dois números e o produto do **MDC** e o **MMC** entre os mesmos com algumas atividades.

Neto (1998, p.p. 88-90), com os **Exercícios Complementares**, propõe 24 questões sobre **MDC** e **MMC** o que nos chamou a atenção foram as questões que utilizaram figuras geométricas para que os alunos percebessem geometricamente que um número é divisível por outro como é mostrado nas cinco questões a seguir :

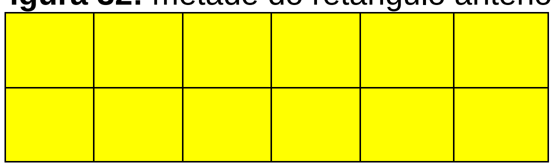
Questão 1: Nestas figuras, queremos indicar que 24 é divisível por 12 e que 12 é divisível por 6. Observe e confirme.

Figura 31: retângulo dividido em 24 partes iguais

(4 x 6)

Fonte: Neto (1998)

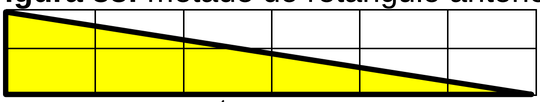
Figura 32: metade do retângulo anterior



(2 x 6)

Fonte: Neto (1998)

Figura 33: metade do retângulo anterior



$\frac{1}{2}(2 \times 6)$

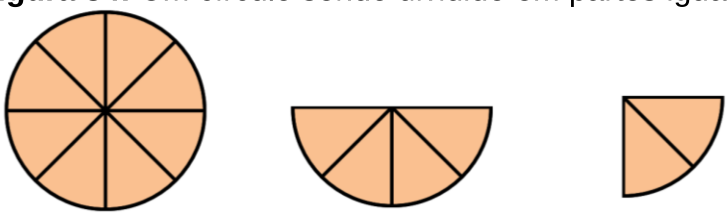
Fonte: Neto (1998)

Nessa questão o autor mostrou geometricamente que 24 é divisível por 12 e 12 é divisível por 6, mostrando de uma figura para outra a metade da figura anterior.

Agora, nos seguintes exercícios, faça uma interpretação no seu caderno, explicando o que as figuras podem indicar.

Questão 2:

Figura 34: Um círculo sendo dividido em partes iguais.

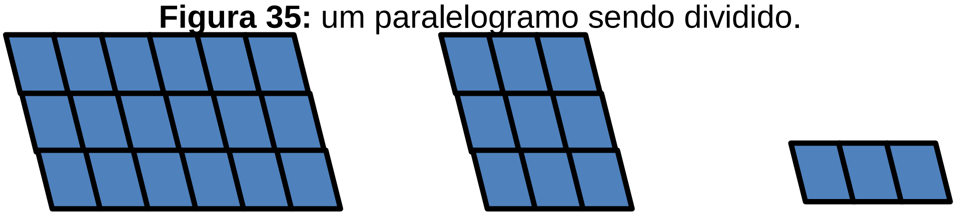


Fonte: Neto (1998)

Essas figuras representam que 8 é divisível por 4 e 4 é divisível por 2.

Questão 3:

Figura 35: um paralelogramo sendo dividido.

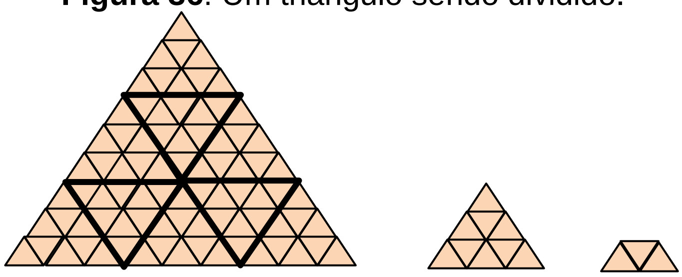


Fonte: Neto (1998)

Essas figuras representam que 18 é divisível por 9 e 9 é divisível por 3.

Questão 4:

Figura 36: Um triângulo sendo dividido.

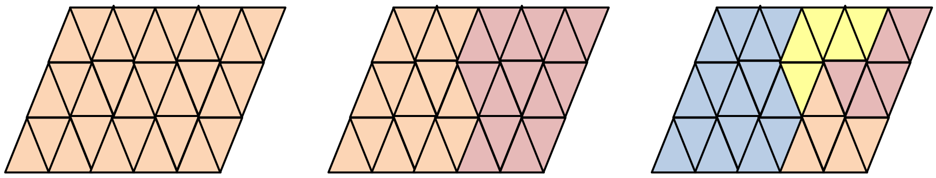


Fonte: Neto (1998)

Essas figuras representam que 81 é divisível por 9 e 9 é divisível por 3.

Questão 5:

Figura 37: um paralelogramo sendo dividido.



Fonte: Neto (1998)

Essas figuras representam que 30 é divisível por 15 e 15 é divisível por 5.

E finalizando com os exercícios intitulados de **Aprofundamento** o autor possibilita aos alunos questões que os levam a refletir sobre os estudos realizados sobre o **MDC** e o **MMC**, inclusive de cunho geométrico.

A nosso ver o autor possibilita nas últimas atividades a verificação das fases de **Ação, Formulação, Validação e Institucionalização**.

Iezzi, Dolce e Machado (2009) na parte da Apresentação afirmam que por se tratar de uma obra com finalidade didática, o livro procura apresentar a teoria de maneira lógica e em linguagem acessível ao aluno, nas séries de exercícios e na introdução de alguns capítulos aparecem também situações-problema, ligadas quase sempre à realidade cotidiana, porém o capítulo que introduz o **MDC** (capítulo 11) coloca uma situação cotidiana de divisores de um número e não propriamente relacionada diretamente com **MDC**, no que se refere ao **MMC** (capítulo 12) é apresentada uma situação cotidiana que se remete ao cálculo do **MMC** para ser solucionada, para finalizar o conceito de **MDC** e **MMC**, no capítulo 13, estão sendo mencionadas as técnicas mais usuais para o cálculo dos dois objetos matemáticos mencionados acima que são a **Decomposição simultânea**, onde nos possibilita calcular o **MDC** e o **MMC** ao mesmo tempo, o cálculo do **MMC** pela decomposição simultânea, mostra o cálculo dos dois objetos pela regra da **Fatoração** e finaliza com atividades direcionadas com a utilização das técnicas mencionadas anteriormente.

O capítulo 11 é iniciado com a seguinte situação:

Os pacotes de bombons (Iezzi, Dolce e Machado, 2009, p. 138)

Dona Claudete participa de um bazar beneficente com o fim de arrecadar fundos para uma creche. Ela fez, para vender no bazar, 840 bombons de leite e 900 bombons de fruta. Agora ela precisa empacotá-los.

Quatro condições devem ser seguidas no empacotamento. Veja:

- Cada pacote deve ter apenas bombons de um mesmo sabor.
- Todos os pacotes devem ter o mesmo número de bombons.
- Os pacotes devem conter o maior número possível de bombons.
- Não deve sobrar nenhum bombom fora dos pacotes.

Quantos bombons dona Claudete deve colocar em cada pacote?

Percebemos que é uma situação adidática que vai proporcionar conclusões que possibilitaram apropriação por parte dos alunos ao conceito do **MDC**.

Em seguida são propostas algumas questões para os alunos aprimorarem o cálculo e a identificação do **MDC**, uma das atividades que queremos destacar é a seguir:

Descubra as estações em que o trem vai parar, calculando o **MDC** dos números pintados em cada vagão. Cada **MDC** é o número de uma estação em que vai haver parada.

Estações	
1 serra das Onças	7 Muriri
2 Poço de Cobras	8 Vale do Perigo
3 Caxinguelê	9 Cidade Feliz
4 Pico do Gaviões	10 Encruzilhada
5 Pererê	11 Porto dos Sonhos
6 Eldorado	12 Praia do Sol

Figura 38: trem com números em vagões.

Fonte: Iezzi, Dolce e Machado (2009)

a) Quantas serão as paradas?

b) Em quais estações serão as paradas?

Essa atitude tem o intuito de instigar o interesse e a curiosidade do estudante perante o objeto a ser estudado, logo em seguida os autores mostram a regra da decomposição simultânea para o cálculo do **MDC** e propõem alguns exercícios contextualizados.

O estudo do **MMC** foi iniciado também com uma situação problema intitulada:

As coincidências

Raul costuma cortar o cabelo de 20 em 20 dias, e Artur, de 25 em 25 dias. Certo dia coincidiu de ambos cortarem o cabelo. Daí a quantos dias a coincidência ocorrerá novamente?

Percebemos que é uma situação adidática que vai proporcionar conclusões que possibilitaram apropriação por parte dos alunos ao conceito do **MMC**.

Outra situação muito interessante é a mostrada a seguir:

O alinhamento dos planetas

No ano de 2006 ocorreu um raro fenômeno: o alinhamento dos planetas Mercúrio, Vênus e Saturno.

Assim como a Terra, esses planetas também giram em torno do Sol. Mercúrio leva aproximadamente 87 dias para completar uma volta em torno do Sol; Vênus leva aproximadamente 225 dias; e Saturno, 28 anos.

a) Considerando o momento em que os três planetas se alinham, depois de quantos dias Mercúrio e Vênus estarão ambos novamente nessa mesma posição?
b) Depois de quantos anos, aproximadamente, essa posição dos três planetas se repetirá?

Ao fim de cada unidade existe uma série de testes em que o aluno pode verificar o aproveitamento que teve. Ao longo do livro são propostos problemas-desafios. O objetivo desses problemas é colocar o aluno diante de situações novas, inesperadas, que o levem a analisar, pensar e desenvolver a iniciativa, de forma leve, divertida e espontânea.

Existe ainda no livro a seção de leitura “Matemática em notícia”, em que a reprodução de um texto de jornal ou revista, ligado à Matemática, procura mostrar que a aplicação do conhecimento adquirido é essencial para o acesso aos meios de comunicação.

Finalizando a análise do livro, percebemos que os autores verificaram em suas sequências de atividades, com exceção do **MDC**, as etapas que representam uma sequência didática propriamente dita que são: **ação, formulação, validação e institucionalização,** excluíram o **MDC**, porque não foi dirigida aos alunos nenhuma atividade em grupo, diante da verificação da ação que denominamos incompleta, o professor deve disponibilizar aos alunos atividades que promovam a contemplação de todas as etapas que necessitam ter uma sequência didática, no que diz respeito ao **MMC,** os autores conduziram as atividades dentro dos padrões que exigem a qualificação de uma sequência de ensino completa.

Para finalizar os autores orientam como deve ser calculado o **MDC** e o **MMC** pela decomposição simultânea, o cálculo do **MMC** pela decomposição simultânea, mostra o cálculo dos dois objetos pela regra da fatoração e finaliza com atividades direcionadas com a utilização das técnicas mencionadas anteriormente.

Escolhemos analisar esse livro porque ele foi escolhido para ser usado pela maioria dos professores de Matemática de uma escola da rede estadual de ensino, pois os mesmos acreditaram que o mesmo pudesse contribuir com o estudo do **MDC** e **MMC** através de situações de ensino bem preparadas, porém ressalvamos que as fases denominadas de Formulação, Validação e Institucionalização não estão sendo propostas nos comandos das atividades.

Imenes e Lellis (2011) no livro **Matemática do 6º ano** os autores afirmam que o mesmo traz como objetivo o de "educar pela matemática", e não o de apenas expor conteúdos matemáticos, conectando a Matemática ao dia a dia e a outros conhecimentos como História e Artes. Também há abordagens inovadoras de conteúdos, apresentação em ordem diferente da habitual e retomada com novo enfoque de conteúdos já apresentados. As atividades estimulam habilidades e competências variadas, envolvendo investigações próprias, problemas originais, análise e interpretação de textos, atividades práticas e jogos, além de exercícios no padrão habitual.

Percebemos que a estrutura do livro contempla os quatro tipos de situações didáticas de uma boa sequência didática para trabalhar um objeto de estudo que são a **ação, formulação, validação e institucionalização,** pois a estrutura que é apresentada no livro para o desenvolvimento de um conceito possui as seguintes seções:

- **Texto de abertura** onde o tema do item é apresentado em contexto significativo, estimulando a formação de conceitos e o domínio de técnicas.
- **Conversar para aprender** é um trabalho oral onde há questões que propiciam o diálogo entre professor e alunos, levando à troca de ideias e à reflexão.
- **Ação** é uma proposta de aprendizado mais ativo e lúdico: jogos, experimentos e construções, em relação a essa seção há ainda a **Ação-Investigação,** que propõe pesquisas de natureza especificamente matemática.
- **Problemas e exercícios** é o momento de trabalho cooperativo, proposto para a sala de aula, com a troca de informações sob supervisão do professor. Também aqui ocorrem descobertas e novas aprendizagens.
- **Problemas e exercícios para casa** é uma proposta de trabalho individual que além de reforçar o aprendizado de conceitos e técnicas, traz alguns desafios.
- **Para não esquecer:** ao final do capítulo, uma síntese dos principais tópicos possibilita consulta rápida ou estudo para provas. Organiza e sistematiza a informação e o conhecimento.

O início do estudo sobre **MMC** é realizado através de atividades que estimulam os estudantes à percepção de **padrões** e das possíveis **generalizações,** as atividades propostas inicialmente são baseadas em **sequências e sequências de múltiplos** até chegar aos múltiplos comuns e o **MMC,** o qual começou a ser estudado pela seguinte situação problema:

O prefeito de uma cidade vai mandar construir uma grande avenida, na qual haverá iluminação a cada 24 m e um cesto de lixo a cada 30 m.

Veja um diagrama (figura 39) mostrando o trecho inicial da avenida (nele, cada 1 cm representa 10 m):

Figura 39: Espaçamento da iluminação e do cesto de lixo

Fonte: Imenes e Lellis (2011)

Temos, então, iluminação nos “pontos” 0, 24, 48, 72...e cestos de lixo nos “pontos” 0, 30, 60, 90, ...

Vamos analisar essa situação usando o conceito de múltiplo.

- Há iluminação nos “pontos” correspondentes a múltiplos de 24:

0**,** 24, 48, 72, 96, 120, ...

- Há cestos de lixos nos “pontos” correspondentes a múltiplos de 30:
- Há iluminação e cestos de lixo nos “pontos” correspondentes aos múltiplos comuns de 24 e 30.Por exemplo **0** e **120.**

Agora podemos explicar o que significa a sigla **MMC,** que aparece no título deste item. Ela é a abreviatura da expressão **Menor Múltiplo Comum.**

O menor múltiplo comum de 24 e 30 é o menor número, exceto o zero, que é múltiplo tanto de 24 quanto de 30. Você notou que esse número é 120. Representamos isso assim:

MMC (24; 30) = **120**

Logo em seguida os autores propõem alguns exercícios contextualizados para a fixação do objeto de estudo.

Em relação ao **MDC** os autores afirmam que decidiram não abordar esse objeto de ensino porque é um conceito de pouco uso no ensino fundamental, porém discordamos dessa afirmação, pois no primeiro livro analisado aqui neste trabalho e em outros livros do ensino fundamental o **MDC** é bem abordado.

Percebemos depois da análise da estrutura didática do livro que as atividades como estão dispostas possibilitam a vivência dos alunos nas fases de **Ação, Formulação, Validação e Institucionalização** no processo de ensino e aprendizagem do estudo do **MMC**.

Percebendo que alguns autores possibilitaram a concretização da Tipologia das situações anunciada por *Brousseau* mediante a intervenção do professor no processo de aprendizagem, percebemos que nenhum dos livros estudados foi apresentada uma **Sequência Didática** nos moldes definidos por *Rickenmann*(1998), moldes esses que explicitaremos em um capítulo posterior e por esse motivo, formulamos **uma sequência** que será apresentada mais adiante.

4.2.2 ESTUDO DO MDC E DO MMC EM ARTIGOS

Oliveira (1995) publicou em um artigo para a Revista do professor de Matemática uma interpretação geométrica para o **MDC**. A ideia surgiu a partir do seguinte problema proposto em um concurso:

Um terreno retangular de 221 m por 117 m será cercado. Em toda a volta desse cercado, serão plantadas árvores igualmente espaçadas. Qual o maior espaço possível?

O autor logo identificou como um problema de **MDC** e o calculou através das divisões sucessivas.

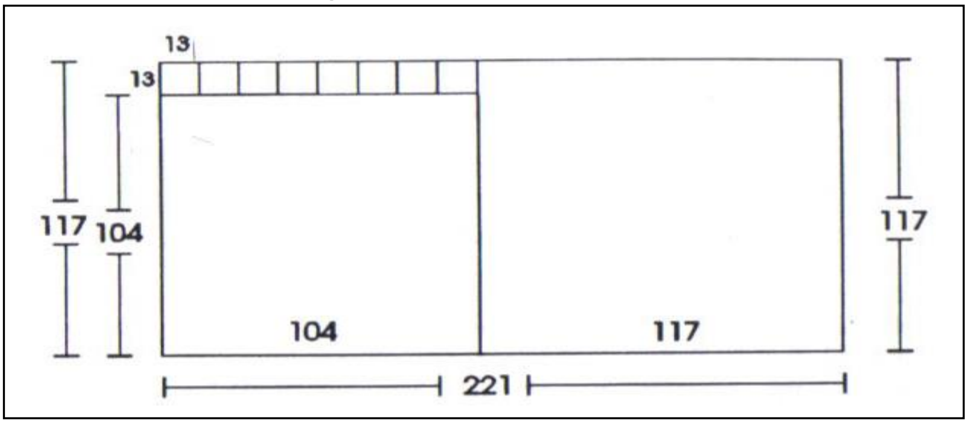
Figura 40: Divisões sucessivas

	1	1	8
221	117	104	13
104	13	0	

Fonte: o autor

Porém, por se tratar de um problema de área, ele o fez também geometricamente:

Figura 41: Área do terreno



Fonte: (OLIVEIRA, 1995,p. 25)

Observando sua figura, Oliveira conclui que:

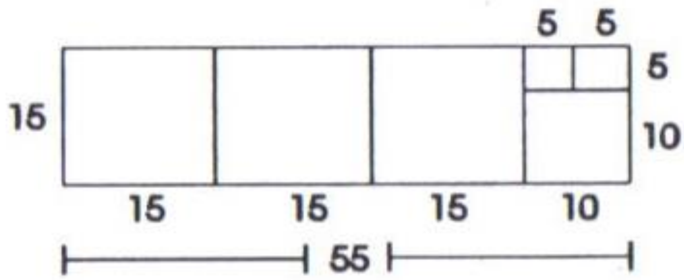
> [...] ali estava o princípio das divisões sucessivas, visto através de uma imagem geométrica. Procurei então enunciar o método de encontrar o MDC de dois números que a figura me sugeria e, depois de algumas tentativas, o enunciado que mais me agradou foi o seguinte: “Dados dois números naturais a e b, construímos um retângulo com essas dimensões. Cobrindo esse retângulo com os maiores quadrados possíveis, o lado do menor

quadrado será o MDC entre a e b. (OLIVEIRA, Z. C. Uma Interpretação geométrica do MDC. Revista do Professor de Matemática, São Paulo, nº29, p.25, 1995)”.

Para a melhor compreensão, foi sugerido outro exemplo:

> Observe, na figura abaixo, o retângulo de dimensões 55 e 15. Vamos cobrir esse retângulo com os maiores quadrados possíveis. São três quadrados de lado 15, um quadrado de lado 10 e dois quadrados de lado 5. Isso quer dizer que o MDC entre 5 e 15 é 5. (OLIVEIRA, Z. C. “Uma Interpretação geométrica do MDC”. Revista do Professor de Matemática, São Paulo, nº29, p.25, 1995)”.

Figura 42: Área do retângulo



Fonte: Oliveira (1995)

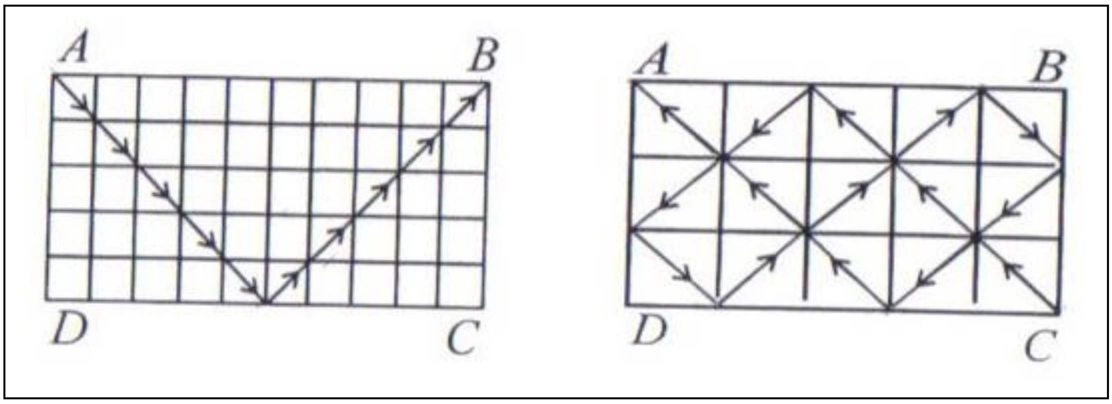
A partir dos estudos feitos por Oliveira (1995), Cardoso e Gonçalves (1996), fizeram uma interpretação geométrica do MMC. Para os autores:

> O método se baseia nos fatos: ao partimos de um vértice do retângulo e chegarmos a um outro vértice desse mesmo retângulo, traçamos diagonais de um numero de quadrados que corresponde a um múltiplo tanto m quanto n; parando no primeiro outro vértice do retângulo ABCD, estamos determinando o mínimo dentre os múltiplos comuns m e n. (CARDOSO, M.L.; GONÇALVES, O. A. Uma Interpretação geométrica do MMC. Revista do Professor de Matemática, São Paulo, nº32, p.27-28, 1996)”.

Eles utilizaram os seguintes exemplos:

- MMC de 5 e 10 . Observe que 10 quadrados tiveram suas diagonais traçadas.
- MMC de 3 e 5. Observe que 15 quadrados tiveram suas diagonais traçadas.

Figura 43: MMC Geométrico



Fonte: Cardoso e Gonçalves (1996)

Para chegar a essas figuras Cardoso e Gonçalves (1996) seguiram os seguintes passos:

1) Tomemos um retângulo ABCD de lados m e n. O retângulo deverá ser subdividido em quadrados unitários.

2) Partindo de um dos vértices do retângulo, traçamos as diagonais dos quadrados unitários observando a seguinte ordem:
   a) Traçamos a diagonal do quadrado que tem o vértice coincidente com os vértices escolhido do retângulo.
   b) Traçamos, a partir do vértice no qual paramos, as diagonais dos quadrados que têm um ângulo oposto pelo vértice com o quadrado anterior ou, na ausência desse quadrado, traçamos a diagonal do quadrado ao lado e a partir do vértice onde paramos.
   c) As diagonais dos quadrados unitários devem ser traçadas até que se chegue a um dos vértices do retângulo ABCD.
   d) Contamos quantos quadrados tiveram suas diagonais traçadas. O número encontrado é o MMC de m e n.

Ao analisar esses dois artigos citados anteriormente, Pollezzi (2003) desenvolveu um método onde se pudesse verificar geometricamente o cálculo do **MDC** e do **MMC** através de uma única contagem. Seu método foi o seguinte:

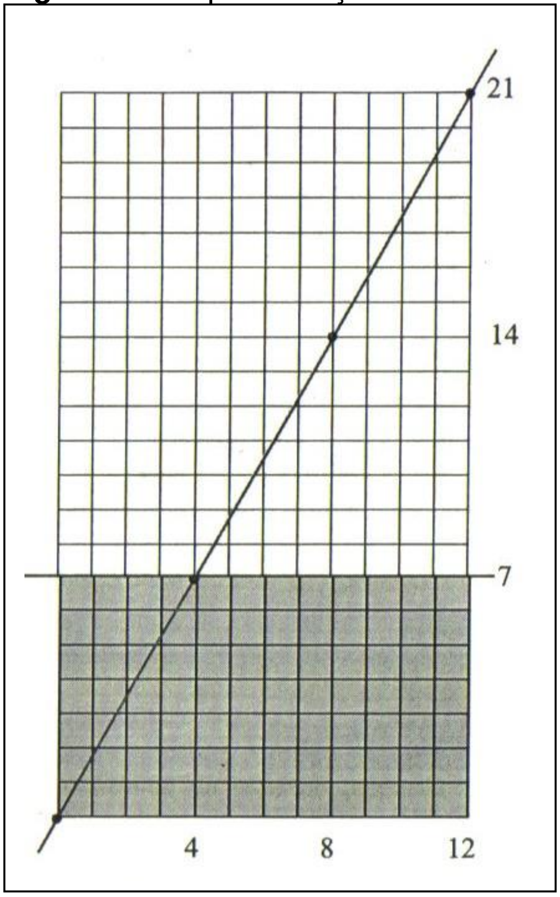
1.Considere um retângulo de lados com medidas inteiras a e b, dividido em quadradinhos unitários.

2.Trace uma das diagonais do retângulo marcando-a nos pontos que são vértices de algum quadradinho unitário.

3. Conte em quantas partes esses pontos dividem a diagonal: esse número **d** é o MDC(a, b).

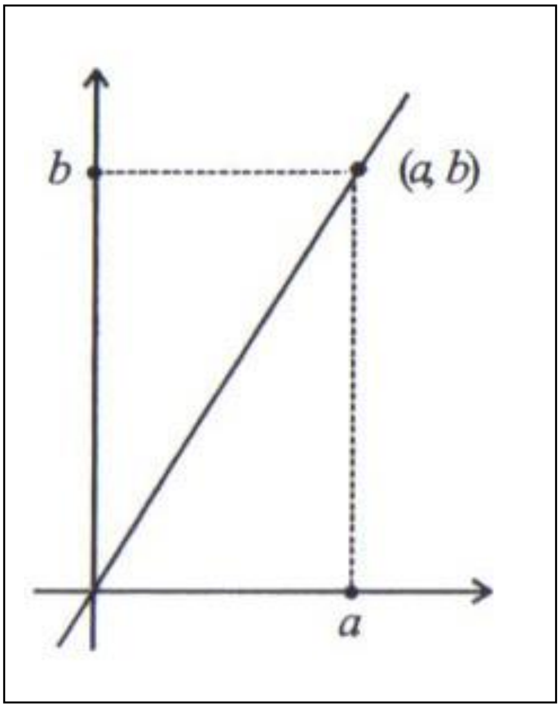
4.Trace linhas verticais (horizontais) passando por cada um dos pontos que você marcou, unindo dois lados opostos do retângulo. Conte p números de quadradinhos unitários existentes em qualquer um dos **d** retângulos determinados por essas linhas verticais (horizontais): esse número **m** é o MMC (a, b).

Figura 44: Representação do MMC e MDC



Fonte: Pollezzi (2003)

Figura 45: Justificativa matemática



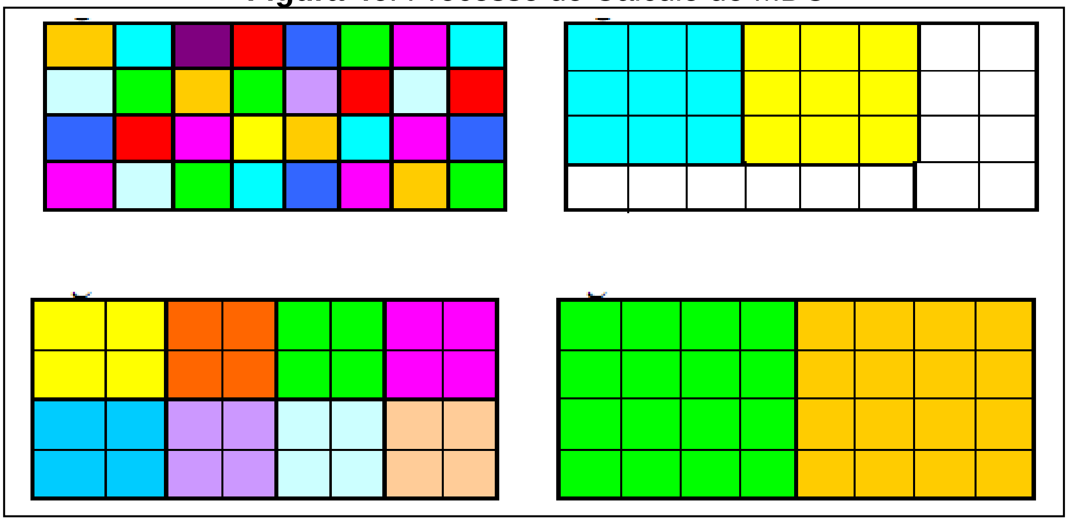
Pollezzi (2003) utilizou a figura 43 para se justificar matematicamente.

> "Se d= MDC (a,b), existem inteiros u e v tais que a=du e b= dv, com u e v primos entre si" (POLLEZZI, M. Como obter o MDC e o MMC sem fazer contas?. Revista do Professor de Matemática, São Paulo, nº51, p.30, 2003)".

Encontramos no artigo de Jardim e Portanova (s.d), também uma abordagem geométrica, porém com a utilização de madeiras coloridas, fazendo com que os alunos do experimento construíssem retângulos e a partir desses retângulos encontrassem seu Máximo Divisor Comum (MDC) e seu Mínimo Múltiplo Comum (MMC).

As atividades do MDC propõem que os alunos construam um retângulo com medidas estipuladas por seu professor, com o objetivo de que após a construção do retângulo, ele seja completo com quadrados de madeira de mesma medida. O lado do maior quadrado que pode ser construído é conhecido como o MDC dos lados do retângulo.

Figura 46: Processo do Cálculo do MDC

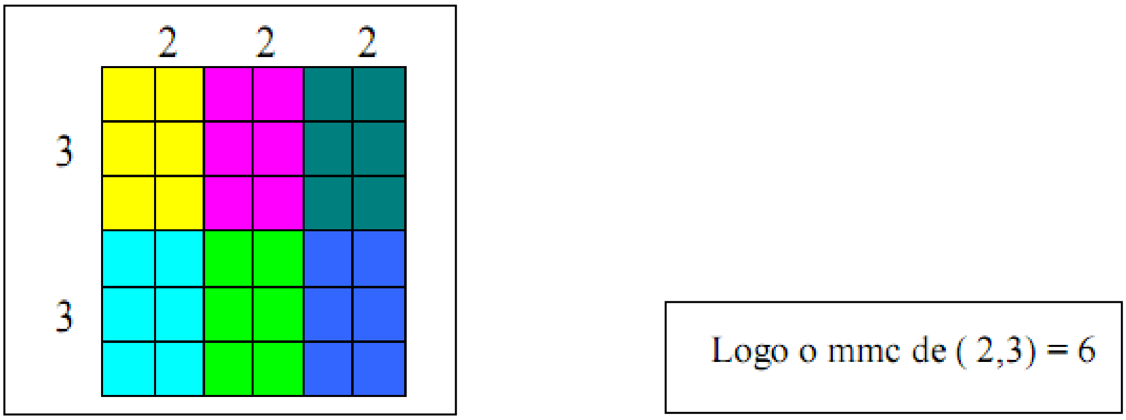


Fonte: Jardim e Portanova (s/d)

As Atividades do MMC serão feitas também com pecinhas de madeira assim como foi feito anteriormente. O objetivo da atividade é encontrar o MMC do retângulo com dimensões sugeridas, ou seja:

> ...." A partir desses retângulos, acrescenta-se retângulos iguais a esse até encontrar o menor quadrado possível. A medida do lado do quadrado encontrado será o menor múltiplo comum das dimensões do retângulo inicial." (JARDIM, R.L; PORTANOVA, R. Divisores e Múltiplos de Números Naturais. IV Encontro Ibero-Americano de Coletivos Escolares que Fazem Investigação na sua Escola.(S.n.t).

Figura 47: Processo de calculo do MMC.



Fonte: Jardim e Portanova (s/d)

Guerra e Silva (2008) no artigo **As Operações com Frações e o Princípio da Contagem** estão em consonância com o que Flores (2013) dissertou, e isso é comprovado quando eles escrevem: Destacamos aqui a “nova unidade” que é comum e pode ser considerada a partir da unidade referencial utilizada inicialmente nos levando a buscar mais uma motivação na matemática grega que, embora não medisse magnitudes, por não fixar uma unidade, as comparava. No livro X, teorema 5, Euclides explicita que se dois segmentos são comensuráveis, ou seja, têm uma medida comum, a razão entre eles é igual à razão que guardam entre si dois números.

Vilhena, Silva e Lucena (2010) alertam baseados em Wittgenstein (1988) que afirma o seguinte: o matemático é um inventor; ele inventa novas formas de descrição por vários motivos, como necessidades práticas ou estéticas. O matemático (professor) em sua ação procura, mobilizado pelas suas micro escolhas mais adequadas, no seu ponto de vista, levar ao aluno a mensagem do texto matemático que pode ser um conceito ou uma definição, contudo é necessária a contextualização dos termos matemáticos utilizados no processo a fim de não gerar obstáculos[6].

Os autores afirmam que no ensino do MDC o aluno pode ter um obstáculo de linguagem ao se deparar com o termo maior (máximo) e ter como resultado um valor menor, como por exemplo:

[6] Aprofundaremos essa noção em um capítulo posterior.

O MDC (20;24) tem como resultado 4, acreditamos que esse obstáculo pode ser evitado ou eliminado se o professor agregar o significado de divisor e comum no momento em que tiver explicando as atividades e as situações-problemas.

No ensino do MMC pode ocorrer um obstáculo segundo os autores com o termo mínimo (menor), pois quando o aluno calcula o MMC (10;12), obtém como resultado 60 que é um valor maior que 10 e 12, acreditamos que o obstáculo pode ser evitado ou eliminado se o professor agregar o significado de múltiplo e comum no momento da explicação das atividades e as situações-problemas.

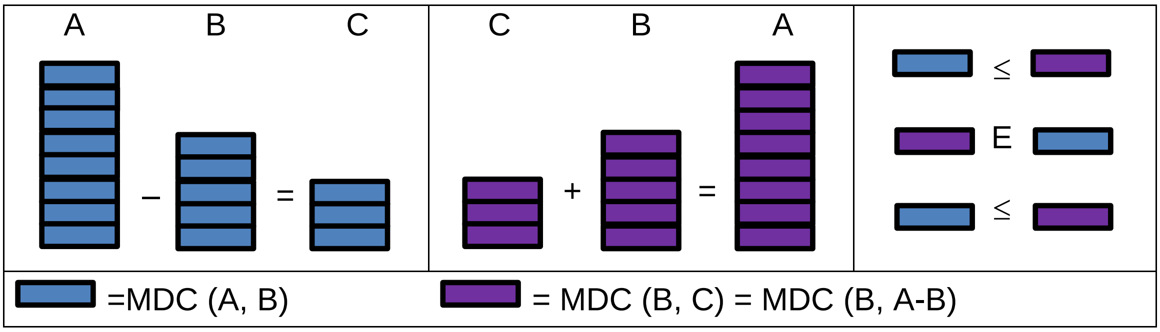
As ações de intervenção em relação a evitar ou eliminar o obstáculo gerado pela linguagem citadas anteriormente são justificadas pelo que os autores escreveram "o significado ultrapassa a linguagem; porque o que uma proposição significa é revelado por outra proposição" (Wittgenstein, GF & 03), ou seja, o professor deve utilizar outros exemplos em diferentes contextos dos termos utilizados no ensino de um objeto matemático.

4.2.3 OUTROS ESTUDOS DO MDC E DO MMC

O khanacademy[7] apresenta uma demonstração geométrica (figura 48) sobre o MDC intitulada Compreendendo o algoritmo de Euclides em relação a dois pares de números genéricos da seguinte forma:

"Para provar que o máximo divisor comum de (A, B) é igual máximo divisor de (B, C), precisamos mostrar que o máximo divisor comum de (A, B) é igual ao máximo divisor comum de (B, A – B)".

Figura 48: Prova geométrica do MDC



Fonte: khanacademy (2016)

[7]https://pt.khanacademy.org/coach/dashboard

Atribuindo valores para A, B e C, respectivamente como 80, 50 e 30, temos: MDC (80;50) = 10; MDC (50;30) = MDC (50; 80 – 50) = 10, logo MDC (80;50) = MDC (50;30).

Zumpano (2008) em seu livro intitulado Matemática elementar (uma proposta pedagógica), no capítulo 3, trata sobre a caracterização do **MMC** e do **MDC**, onde o autor afirma que qualquer pessoa é capaz de resolver dois problemas que foram citados utilizando apenas raciocínio de contagem, e a partir de sua afirmação o autor levanta o seguinte questionamento: *O que eles têm de notável, o MMC e o MDC?*

Para responder o questionamento citado anteriormente o autor inicia com a seguinte afirmação: O que caracteriza o **MMC** não é ser o menor múltiplo comum e o que caracteriza o **MDC** não é ser o maior divisor comum! Apesar do nome! Zumpano (2008) através de algumas demonstrações conclui:

> Se **m** for o MMC de a e b, denotado por **m** = MMC (a,b), então, todo múltiplo comum de a e b é também múltiplo de m e reciprocamente. Ou seja, os múltiplos comuns de dois números a e b formam uma progressão aritmética cuja razão é exatamente o mínimo múltiplo comum de a e b, a saber, m = MMC (a,b). Dizemos que m gera a sequência dos múltiplos comuns. (ZUMPANO, 2008).

Para chegar à caracterização do **MDC** o autor mostra os divisores de dois números inteiros e nota que o maior divisor comum entre esses dois números é múltiplo de todos os divisores comuns dos dois números utilizados e ele afirma que isso é algo notável e a intrigante pergunta deve ser:

Será que o maior divisor comum de dois números é sempre múltiplo de todos os outros divisores comuns?

Zumpano (2008), depois de fazer demonstrações algébricas partindo da igualdade $c = \frac{\mathrm{ab}}{\mathrm{d}}\cdot$, onde chamou **d** de o maior divisor comum de dois números **a** e **b** e **c** o múltiplo deles para responder a pergunta citada anteriormente, chega a conclusão que qualquer divisor comum de **a** e **b** é divisor de **d,** tal afirmação caracteriza o **MDC**.

Com o exposto feito anteriormente, podemos afirmar que o autor descreveu com propriedade os dois objetos matemáticos que se propôs justificar matematicamente, mostrando peculiaridades as quais foram comprovadas através de demonstrações.

Flores (2013, p. 52), em sua tese, quando escreve sobre **as frações no contexto de medição,** afirma que este significado está associado com a ideia de comensuração de unidade, é caracterizada pela escolha de uma unidade arbitrária e suas subdivisões que um produto que não pode ser medido com precisão com a unidade seleccionada. Em situações de medição você tem uma quantidade mensurável e uma unidade e quer determinar quantas vezes é que a unidade da quantidade a ser medida, a fração aparece no momento em que não se "encaixa" a unidade um número exato de vezes em seguida, a interpretação da extensão da parte em falta é necessária.

Para obter uma medição precisa deveria:

- Medir usando múltiplos e submúltiplos da unidade;
- Fazer comparações com a unidade.

Aqui é importante mencionar que os contextos mensuráveis devem ser diversificados, a fim de não gerar a imagem própria do uso de modelos longitudinais (obviamente sem descartar), ou seja, você pode usar modelos de 1, 2 ou 3 dimensões. O foco está na unidade arbitrária e sua subdivisão em vez de relacionamentos parte-todo. Flores ainda disserta sobre comensuração de unidade e isso nos remete ao cálculo do **MMC** e do **MDC** demonstrando uma transposição desses dois objetos matemáticos e uma mudança de quadro, quando ele afirma que para se obter uma medida precisa é necessário usar múltiplos e submúltiplos, pois assim será possível fazer comparações e poder aferir também as medidas fracionadas que aparecem na ora de realizar certas medidas independente da dimensão proposta.

Fonseca (2015, p. 29), em sua tese, ecreve que os conceitos do **MDC** e do **MMC** devem estar bem estabelecidos para que o Crivo de Eratosthenes e o Algoritmo de Euclides possam ser compreendidos e acoselha que os futuros professores necessitam conhecer o Algoritmo de Euclides. Além da importância imediata para o cálculo do **MDC**, ele é o método mais usual para determinar uma solução inteira da equação diofantina linear ax+by=c, onde mdc(a,b) divide **c** e **a**, **b** e **c** são inteiros.

Nessa abordagem Fonseca mostra a importância de se conhecer bem objetos matemáticos a serem ensinados para poderem ser aplicados isoladamente e por,ás vezes, servirem de suporte na aplicação de outros objetos matemáticos.

CAPÍTULO 5
A SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Uma Sequência Didática é uma atividade estruturada em torno de diferentes momentos, com o objetivo que o aluno mobilize uma série de conhecimentos para atender os objetivos da atividade. Durante a atividade, os estudantes vão interagir com um *milieu* que eles conhecem como parte do contrato didático concebido por um milieu adidático, estruturado para o aluno construir os conhecimentos e os mobilizar.

O aluno não distingue o conjunto de situações vivenciadas, pois elas têm essência adidática, mesmo tendo origem didática. A situação adidática deve caracterizar um saber, esse saber tanto para o professor quanto para o aluno é uma espécie de ideal para o qual eles estão convergindo. É essencial que nesse processo o professor auxilie, com todos os seus recursos didáticos, o aluno a tornar seus conhecimentos pessoais - oriundos da situação - objetivos. (BROUSSEAU, 1996).

Nessa perspectiva, a devolução é uma noção essencial para a sequência didática, pois ela é responsável pelo convencimento do aluno em aceitar um dado problema como um desafio a encarar, para isso o modelo de uma sequência deve contemplar (adaptado de René Rickenmann, 1998):

Um tema que indique aos alunos um domínio de aplicação dos conhecimentos pesquisados, assim como disponibilize sistemas simbólicos que permita o trabalho nesse domínio, a partir de procedimentos conhecidos que possam ser mobilizados pelos alunos na atividade; **um objetivo bem definido para atividade** o contrato didático deve possibilitar ao aluno ter a expectativa que a situação a-didática o possibilitará vislumbrar um novo conhecimento; o objetivo traz consigo **o saber a ensinar** esse não deve ser revelado ao aluno no tramite da situação a-didática, pois é precisamente o conhecimento que deve ser mobilizado para solucionar a questão posta aos alunos, vale ressaltar que para facilitar o trabalho do professor é necessário que esse estruture o *milieu* (materiais, instrumentos, procedimentos, recursos, etc.); **as variáveis didáticas** possibilitam a análise do *milieu* em particular sua dimensão material, para identificar os elementos que irão incentivar o aluno a mobilizar os saberes a ensinar. A idenficicação das variáveis durante o enfrentamento da atividade permite inventariar as estratégias de ação do estudante, ou seja, a forma ou formas de resolver a atividade; **O Milieu**: constitui uma parte importante do meio a-didático, o *milieu* é identificado pelos alunos não só como material, instrumento ou procedimento, mas também como uma *prática social de referência*[8]; **Instruções**: trata-se da definição do quadro e das regras da atividade. Para o professor, contribui para a objetivação da estruturação da sequência (tempos, procedimentos, limites, etc.). Para o aluno, a instrução indica que o quadro geral da atividade (objetivos, meios) e as regras de interação com o *milieu*. **Avaliação**: Para o professor, a identificação dos saberes a ensinar e suas articulações com os objetivos da atividade (especialmente durante o desenvolvimento da atividade) ajudam a identificar indícios, para determinar no curso da atividade o estado de progresso do aluno em relação aos seus próprios objetivos.

Considerando o exposto anteriormente, elaboramos uma Sequência Didática que vem possibilitar uma intervenção didática no processo de ensino e aprendizagem do **MDC** e do **MMC** diferente das atividades que são apresentadas nos livros didáticos a nossa sequência será composta por uma atividade com 15 tarefas, onde a primeira tarefa foi inspirada no ***Crivo de Eratóstenes*** e foram realizadas as análises prévias de todas, nas 15 tarefas exploramos a ideia de divisores, divisores comuns, números primos e compostos, números primos entre si, números abundantes, defectivos e perfeitos, múltiplos, múltiplos comuns, e chegamos, no momento apropriado, ao cálculo do **MDC** e do **MMC**, o conjunto dessas questões compõem a nossa **Sequência Didática**. Nosso objetivo é que o aluno construa o conceito gradativamente do **MDC** e do **MMC** e aplique o conhecimento apreendido na resolução de situações-problema.

5.1. Análise a priori da Sequência Didática

Visando fazer uma previsão do que é esperado que os alunos respondam na sequência proposta, faremos uma análise a priori das tarefas que compõem a

[8] Segundo Rickenmann (1998) a prática social de referência é um elemento fundamental na estruturação de sequências didáticas. Esta noção é assumida pelo autor tal como definida por Geertz (1986). Considera-se nessa perpectiva que todo saber é parte de um sistema semiótico-pragmático, ou seja, o significado ou significados que pode transportar um objeto de saber estão intimamente ligados ao uso cultural do mesmo objeto. Por conseguinte, a sensação de um objeto de saber depende fundamentalmente da área de cooperação social em que os atores procuram entender e usar. Um ambiente educacional é nessa área cooperação social específica em uma situação de ensino.

sequência. Exploraremos inicialmente a ideia de divisores, divisores comuns, as sequências numéricas, para que os alunos percebam os padrões, múltiplos, números primos, números compostos, números primos entre si e cálculos com **MDC**, **MMC** e a valorização do contexto histórico.

5.2. Introdução da Sequência didática

Levando em consideração as análises preliminares que foram realizadas através de um diálogo com os alunos, Iniciaremos a aplicação da nossa sequência didática com a construção das ideias de conjunto dos divisores naturais, posteriormente elencaremos tarefas para encontrar divisores e múltiplos comuns entre dois e três números; e tarefas sobre Mínimo Múltiplo Comum e Máximo Divisor Comum de dois e três números. Para avaliação do momento inicial da sequência os alunos irão enfrentar problemas inspirados em questões constantes em livros didáticos de uso comum nas escolas públicas e indicados pelo PLND e também temos como referência outras atividades, essas duas referências remetem a formação de sequências através da multiplicação, a ideia de múltiplos, números primos, números compostos, cálculo de MMCs, divisores comuns, cálculo de MDCs, identificação de números primos entre si, números perfeitos, defectivos e abundantes.

5.3 . Tarefas que compõe a Sequência didática com suas análises a priori

A aplicação da nossa sequência didática aconteceu em três momentos que ocorreram em três dias, onde foram utilizados 5(cinco) tempos de 50 minutos e teve a participação de 10 alunos de uma turma de 25 alunos.

A nossa sequência didática é composta de 15 tarefas, dividida em dois blocos, onde um bloco é sobre divisores, divisores comuns, **MDC**, números perfeitos, defectivos e abundantes,finalizando o primeiro bloco foi passada uma tarefa para casa para que o aluno pudesse rever e aprimorar os conhecimentos trabalhados nas tarefas anteriores e o outro bloco trata sobre sequências numéricas, múltiplos, múltiplos comus e **MMC**, ao final da aplicação desse segundo bloco solicitamos que cada aluno refizesse todas as atividades para que no dia sequinte pudessemos dialogar sobre o que foi realizado nos dois blocos da nossa sequência.

Quadro 6: Quadro demonstrativo de acertos das 15 tarefas da Sequência Didática

Tarefas	Quantidade de alunos que acertaram	Porcentagem de alunos que acertaram
1	8	80 %
2	10	100 %
3	9	90 %
4	8	80 %
5	8	80 %
6	9	90 %
7	8	80 %
8	8	80 %
9	9	90 %
10	8	80 %
11	8	80 %
12	10	100 %
13	8	80 %
14	8	80 %
15	7	70 %

Fonte: Os autores

5.4. Início da nossa sequência didática

1) O quadro a seguir representa os números naturais de 1 até 100.

Quadro 7: Quadro dos números naturais de 1 a 100

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Fonte: Os autores

Quais os números da tabela que:

a) dividem 5?

D (5) =

b) dividem 9?

D (9) =

c) dividem 12?

D (12) =

d) dividem 13?

D (13) =

e) dividem 24?

D (24) =

f) dividem 36?

D (36) =

g) dividem 75?

D (75) =

h) dividem 100?

D (100) =

I) dividem o 1?

D (1) =

O objetivo da tarefa 1 é que os alunos possam encontrar todos os números naturais que dividem os números propostos através da divisão exata pela sequência dos números naturais maiores que 0.

Os conhecimentos prévios necessários para o desenvolvimento dessa tarefa são a habilidade em realizar divisões e saber que as respostas estarão em função das divisões exatas.

Esperamos que os alunos entendam o significado da palavra “dividem”, realizem divisões pela sequência dos números inteiros positivos e coloquem como resposta para cada item os números cuja divisão tem o resultado um número inteiro positivo e resto zero.

2) Os números que dividem outro número são chamados divisores dele e são representados por D (**n**) sendo *n um número Natural* (representamos: **n** $\in \mathbb{N}$), assim quais os divisores de:

D (7) = D (2) =

D (18) = D (3) =

D (27) = D (17) =

D (54) = D (23) =

D (72) = D (29) =

O objetivo da tarefa 2 é que os alunos percebam que é o mesmo objetivo da tarefa 1 , conhecimento que já foi institucionalizado, e com isso encontrem todos os divisores naturais dos números em questão, tendo como conhecimentos prévios o reconhecimento de uma divisão exata.

Esperamos que os alunos possam encontrar todos os divisores naturais dos números propostos através da divisão exata pela sequência dos números naturais maiores que 0.

3) Das tarefas anteriores quais os números que apresentam como divisores o 1 e ele próprio?

Um número natural maior que 1, que tem exatamente dois divisores, o 1 e ele mesmo é um número ...., assim destaque dez números .... na tabela:

O objetivo da tarefa 3 é inserir a ideia de números primos que configura um momento de institucionalização, tendo como conhecimento prévio a identificação de divisores naturais de um número.

Esperamos que os alunos a partir da informação sobre número primo, consigam destacar dez números primos na tabela.

4) Destaque também sete números maiores que 1 que apresentem mais de dois divisores naturais distintos:

O objetivo da tarefa 4 é destacar números na tabela tendo como conhecimento prévio a identificação de números que possuem mais de dois divisores naturais, tendo como conhecimento prévio a identificação dos divisores naturais de um número.

Esperamos que os alunos destaquem na tabela sete números que apresentem mais de dois divisores naturais

5) Um número natural maior que 1 não primo que apresenta mais de dois divisores naturais distintos é dito número ...., assim são ....: ..., ..., ..., ..., ..., ..., ..., ...

O objetivo da tarefa 5 é inserir a ideia de números compostos que configura um momento de institucionalização, tendo como conhecimento prévio a identificação de divisores naturais de um número.

Esperamos que os alunos a partir da informação sobre número composto, eles consigam escrever 8 números compostos.

6) Destaque os divisores dos números a seguir com exceção dele próprio:

D (6) =

D (8) =

D (12) =

D (18) =

D (24) =

D (28) =

D (36) =

Divisores próprios de um número são todos os divisores dele exceto ele próprio.

O objetivo da tarefa 6 é a retomada da ideia de divisores, conhecimento que já foi institucionalizado nas tarefas 1 e 2 e com isso devem encontrar todos os divisores naturais dos números em questão, tendo como conhecimento prévio o reconhecimento de uma divisão exata.

Esperamos que os alunos possam encontrar todos os divisores naturais dos números propostos, com exceção de cada número em questão, através da divisão exata pela sequência dos números naturais maiores que 0.

7) Leia as definições e complete corretamente utilizando números da tabela

NÚMERO PERFEITO

Todo número natural é perfeito, se a soma de seus divisores próprios (todos seus divisores, exceto o mesmo número) é igual ao próprio número. Por exemplo, o número .... é perfeito uma vez que seus divisores próprios são ..., ... e .... e a soma deles é igual ao mesmo número.

NÚMERO DEFECTIVO

Também chamado de deficiente é o número cuja soma de seus divisores próprios é menor que esse número. Por exemplo, ... é um número defectivo uma vez que seus divisores próprios são ..., ... e ..., e a sua soma é de ... + ... + ... = ...

Os números primos são defectivos? Justifique.

NÚMERO ABUNDANTE

O número natural é abundante, se a soma de seus divisores próprios é maior do que o próprio número. Também chamado excessivo.

Os primeiros números abundantes são: ..., ..., ..., .., .., .., ..., .., ...

O objetivo da tarefa 7 é que os alunos conheçam as características dos números que possibilite estabelecer relações de tal sorte que compreendem que os números apresentam certas especificidades que lhes garantam uma denominação: como perfeitos, defectivos e abundantes, tendo como conhecimento prévio a determinação dos divisores naturais de um número.

Esperamos que os alunos a partir da informação sobre número perfeito, defectivo e abundante, eles consigam completar corretamente as lacunas.

8) Nas tarefas 2 e 6 , encontramos os divisores naturais de alguns números, utilize esses resultados e determine os divisores comuns **(DC)** de :

a) DC (2;3) = _________________
b) DC (2;6) = _________________
c) DC (6;8) = _________________
d) DC (18;27) = _________________
e) DC (17;23) = _______________
f) DC (2;6;9) = ________________
g) DC (2;17;29) = ________________

Os objetivos da tarefa 8 são aprimorar os conhecimentos sobre divisores e identificar divisores comuns, tendo como conhecimentos prévios a ideia de divisores e o entendimento do significado da palavra “comum”.

Esperamos que os alunos visualizem e listem os divisores comuns de cada par e trio de números propostos observando os resultados das atividades 2 e 6.

9) Na tarefa 8, encontramos os divisores comuns de alguns números, utilize esses resultados e determine o Máximo Divisor Comum (**MDC**) entre :

a) MDC (2;3) = ___

b) MDC (2;6) = ___

c) MDC (6;8) = ___

d) MDC (18;27) = ___

e) MDC (17;23) = ___

f) MDC (2;6;9) = ___

g) MDC (2;17;29) = ___

O objetivo da tarefa 9 é que os alunos calculem o **MDC** dos números em questão, tendo como conhecimentos prévios a ideia de divisores comuns e o entendimento do significado da palavra “máximo” no contexto do **MDC**.

Esperamos que os alunos calculem o **MDC** entre os números propostos observando os resultados da tarefa 7.

Tarefa de casa

10) O trecho a seguir é um clássico da História da Matemática:

> “A proposição VII - 2 é uma das mais famosas dos Elementos porque apresenta o método para se encontrar o ***Máximo Divisor Comum*** entre dois números, através de uma sequência de operações que, merecidamente, consagrou-se sob o nome de *Algoritmo de Euclides*. O procedimento é....: divide-se o maior pelo menor, o menor pelo primeiro resto, o primeiro resto pelo segundo, etc. Se se chegar a algum resto que divida o anterior, ele será o *MDC*; se se chegar a um resto igual a 1, os números serão primos entre si. Vale a pena conhecer este clássico.

Considerando o trecho acima, liste um par de números da atividade 9 que são primos entre si e escolha dois pares de números da tabela e verifique se eles são primos entre si.

Passamos a tarefa de casa para que os alunos pudessem refletir sozinhos e pela necessidade de estudo fora da sala em decorrência do tempo didático ser diferente do tempo de aprendizagem.

Os objetivos da tarefa 10 são que o aluno possa perceber que o cálculo do **MDC** pode ser realizado pelo Algoritmo de Euclides e que o resultado do **MDC** sirva para afirmar se os números são primos entre si ou não, tendo como conhecimento prévio o processo da divisão entre números naturais.

Esperamos que o aluno demonstre competência leitora ao ler o fragmento citado, calculem o **MDC** entre os números em questão pelo algoritmo de Euclides e saibam dizer se os pares de números em questão são ou não primos entre si.

11) Quais os números da tabela da tarefa 1 que:

a) Representam a sequência dos cinco primeiros números pares?

.....,.....,.....,.....,.....

b) Representam os cinco primeiros números da sequência do número 3, a partir dele, que são formados da contagem de 3 em 3 ?

.....,.....,.....,.....,.....

c) Representam os cinco primeiros números da sequência do número 5, a partir dele, que são formados da contagem de 5 em 5?

.....,.....,.....,.....,.....

d) Representam os cinco primeiros números da sequência do número 7, a partir dele, que são formados da contagem de 7 em 7?

.....,.....,.....,.....,.....

O objetivo da tarefa 11 foi aprimorar o aluno na identificação de sequências numéricas a partir da ideia da contagem de dois em dois seguindo o dois, de três em três (na sequência de partida) seguindo o três, de cinco em cinco seguindo o cinco e assim por diante; a ideia de múltiplos e perceber a extensão de determinados padrões.

Esperamos que o aluno forme as sequências solicitadas a partir do processo de contagem, tendo como conhecimento prévio a adição de dois em dois, de três em três e assim por diante.

12) Retire da tabela da tarefa 1 os cinco primeiros múltiplos **(M)** naturais :

a) M(1) ___________________________.
b) M(2) ___________________________.
c) M(3) ___________________________.
d) M(5) ___________________________.
e) M(7) ___________________________.

O objetivo da tarefa 12 é que os alunos escrevam a sequência dos múltiplos naturais de cada número.

Esperamos que o aluno descubra que para formar os múltiplos de um número é só ir multiplicando (conhecimento prévio) pela sequência dos números inteiros naturais não nulos ou ir somando pelo mesmo valor do número em questão.

13) Retire da tabela da tarefa 1 os dois primeiros múltiplos comuns **(MC)** :

a) MC (2;3) ______________________.
b) MC (2;5) ______________________.
c) MC (3;5) ______________________.
d) MC (2;7) ______________________.
e) MC (1;3;5) ______________________.

O objetivo da tarefa 13 é que o aluno identifique os múltiplos comuns entre os números em questão observando os resultados da tarefa 12.

Esperamos que o aluno liste os dois primeiros múltiplos comuns entre os números apresentados na tarefa 12, tendo como conhecimento prévio o entendimento do significado da palavra “comum”.

14) A partir dos resultados da tarefa 13, determine o Mínimo Múltiplo Comum **(MMC):**

a) MMC (2;3) = ______.
b) MMC (2;5) = ______.
c) MMC (2;7) = ______.

d) MMC (1;3;5) = _____.

A tarefa 14 tem como objetivo reunir os conhecimentos aprimorados na tarefa 13 e identificar o Menor Múltiplo Comum entre os números propostos.

Esperamos que os alunos calculem o **MMC** entre os números em questão, tendo como conhecimento prévio o entendimento da palavra “mínimo” no contexto do **MMC**.

15) Dona Dica levou seu filho no dia 22 de dezembro de 2016 em um consultório popular no Guamá, durante a consulta o médico receitou dois medicamentos (**A** e **B**). O medicamento **A** tem que ser ministrado de 8 em 8 h e o **B** de 12 em 12 h. Os dois medicamentos foram administrados às 7 h da manhã do dia seguinte. Depois de quantas horas os dois medicamentos serão administrados juntos novamente? Em que dia isso ocorrerá?

O objetivo da tarefa 15 é que o aluno perceba a ideia de múltiplos, múltiplos comuns e calcule o **MMC**.

Na tarefa 15, esperamos que os alunos associem os trechos “de 8 em 8 horas e de 12 em 12 horas” com a ideia de **múltiplo** (conhecimento prévio) e a pergunta “Depois de quantas horas os dois medicamentos serão administrados juntos novamente?” com a ideia de **comum** (conhecimento prévio) e com isso percebam as características do cálculo do **MMC** e após realizarem esse cálculo que será a resposta da primeira pergunta e em seguida realizaram uma soma para solucionar a outra o pergunta.

5.5. Análise a posteriori da sequência didática

Nas tarefas percebemos inicialmente uma fala comum que relatava o seguinte:

- Professor, eu não lembro como se faz!

- Professor, nós não estudamos isso!

Foi quando, fizemos algumas perguntas para perceber se eles tinham conhecimentos prévios necessários para iniciar as tarefas e explicando algumas ideias relacionadas ao que iriamos estudar e até explicar o significado de algumas palavras quando eles sinalizassem que não sabiam o significado, esse momento de resgate de memórias antigas fez parte do ***Contrato diático*** firmado com a turma. Contrato esse que postulado por Brousseuau(2008) é o conjunto de regras que determinam uma pequena parte explicitamente, mas sobretudo implicitamente, do que cada parceiro da relação didática deverá gerir e daquilo que, de uma maneira ou de outra, ele terá de prestar conta perante o outro.

Passado algum tempo uma aluna afirmou que o professor do ano anterior tinha ministrado o assunto, mas não haviam aprendido. Assim buscamos informes com o professor do ano anterior que trabalhou com a turma, o mesmo nos relatou que ministrou **divisores**, porém não contemplou o estudo dos números primos, compostos e **MDC**.

Antes de iniciarmos a primeirra atividade, fizemos perguntas em relação a palavra "*dividem*" que é a palavra que solicita indiretamente os divisores de um número:

- Quais os números naturais que dividem 10?

Todos os alunos queriam responder ao mesmo tempo, contudo optamos por um aluno que representasse a fala da turma. Esse aluno respondeu 10, 20, 30, essa resposta mostrou que os alunos não sabiam o significado da palavra "dividem" mostrando com isso um **obstáculo linguístico** que Almouloud(S/D) postula que tem como uma das características mostrar que os alunos geralmente pouco leem e por isso há a dificuldade em entender os textos mais simples. Contudo outro aluno respondeu 1, 2, 5 e 10. Perguntamos para o outro aluno que respondeu primeiro como ele chegou ao resultado, o aluno disse que pensou nos números pelos quais era possível dividir o 10 e realizou divisões. Nessa ocasião, mesmo com nossa intervenção percebemos um momento de ***formulação*** de acordo com Brousseau(2008) é o momento em que o sujeito tem a capacidade de retomar o conhecimento.

Fizemos outra pergunta similar a primeira, no caso, perguntamos:

Quais os números naturais que dividem o 20?

Em seguida solicitamos que os alunos discutissem em dupla e o resultado foi satisfatório, pois nos diálogos constatamos comunicação de ideias, refutações e isso fez com que o outro interlocutor em um jogo semântico validasse as suas explicações, após esse momento de ***validação***, momento este que segundo Almouloud(2010) é a etapa na qual o aprendiz deve mostrar a validade do modelo por ele criado, submetendo a mensagem matemática ao julgamento de um interlocutor.

Propomos a primeira tarefa de forma individual e a maioria respondeu corretamente conforme figura 49:

Figura 49: Tarefa 1.

O quadro a seguir representa os números naturais de 1 até 100.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

1) Quais os números da tabela que:

a) dividem 5?

D (5) = 1, 5

b) dividem 9?

D (9) = 1, 3, 9

c) dividem 12?

D (12) = 1, 2, 3, 6, 12

d) dividem 13?

D (13) = 1, 13

e) dividem 24?

D (24) = 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24

Fonte: dados da pesquisa

A maioria dos alunos respondeu a tarefa 1 de acordo com as nossas previsões da análise a priori e encontraram todos os números naturais que dividiam cada número em questão mostrando que tinham um conhecimento prévio necessário, conhecimento esse que Ausubel(1976) define como “conceito subsunçor” ou simplesmente “subsunçor” , para resolver essa tarefa, os alunos realizando divisões encontraram as respostas dos itens das questões. Contudo dois alunos tiveram a seguinte fala no momento inicial dessa tarefa e fala foi a seguinte:

Professor eu não consigo aprender matemática!

Essa fala foi percebida em aulas anteriores e constatamos que se tratava de **obstáculos psicológicos** que Almouloud(2010) postulou da seguinte forma: São os obstáculos que aparecem quando a aprendizagem contradiz as representações profundas do sujeito, ou quando induz uma desestabilização inaceitável. A nossa intervenção consistiu em encorajá-los e solicitamos que procurassem não repetir tal fala.

Na tarefa 2, anunciamos a definição de divisores, com essa ação validamos um conhecimento e com isso vivenciamos o momento de **institucionalização**, momento este que segundo Almouloud(2010) é quando o professor fixa convencionalmente e explicitamente o estatuto cognitivo do saber. Vale ressaltar que essa atitude do professor chama-se o **Efeito "Topaze"**, que é um efeito do **contrato didático**, efeito este que Almouloud(2010) afirmou o seguinte:

> Quando um aluno encontra uma dificuldade, o professor pode criar condições para que o aluno supere essa dificuldade sem um verdadeiro engajamento pessoal do discente. Tal procedimento docente é chamado de efeito "Topaze".(Almouloud,2010,pág. 94)

Os alunos apropriados desse conhecimento e ancorados com o que foi discutido na tarefa 1 resolveram a tarefa 2 como mostra a figura a seguir:

Figura 50: Tarefa 2

2) Os números que dividem outro número são chamados divisores dele e são representados por D (**n**) sendo *n um número Natural* (representamos: **n** $\in \mathbb{N}$), assim quais os divisores de:

D (7) = 7 , 1 ,	D (2) = 1, 2
D (18) = 1, 18, 2, 9	D (3) = 1, 3
D (27) = 1, 27, 3, 9	D (17) = 1, 17,
D (54) = 1, 54, 6, 9, 27	D (23) = 1, 23,
D (72) = 1, 72, 36, 6, 9,	D (29) = 1, 29

Fonte: dados da pesquisa

Todos os alunos responderam corretamente a tarefa 2, correspondendo totalmente nossas previsões da análise a priori dessa atividade, isso foi possível devido a nossa mediação ,no processo, com os alunos que não responderam corretamente a tarefa 1 e o reforço nas ideias de divisores de um número natural, os alunos encontraram os resultados realizando divisões. Ao finalizar essa tarefa um aluno que podemos afirmar que foi a fala de todos:

Professor com certeza nós agora sabemos calcular os divisores de um número!

A realização da tarefa 3 foi em dupla e dependeu dos conhecimentos adquiridos nas atividades 1 e 2, foi preciso que informássemos o que era número **primo**, fizemos isso porque os alunos tiveram uma fala unânime:

Professor nós não sabemos como completar isso, nós não estamos entendendo!

E quando completamos dois alunos falaram e o restante concordou com a seguinte fala:

Nós nunca ouvimos falar desse tal de primo!

E isso foi confirmado com uma conversa que tivemos com o professor deles no ano anterior, com isso realizamos mais uma vez um momento de **institucionalização** que foi novamente a ocorrência **Efeito "Topaze"**, com isso a maioria dos alunos respondeu corretamente conforme as figuras a seguir:

Figura 51: Tarefa 3

3) Das tarefas anteriores quais os números que apresentam como divisores o 1 e ele próprio?

5, 13, 7, 2, 3, 17, 23 e 29

Um número natural maior que 1, que tem exatamente dois divisores, 1 e ele mesmo é um número ...primo......., assim destaque dez números ...primos........... na tabela:

Fonte: dados da pesquisa

Figura 52: Tarefa 3

O quadro a seguir representa os números naturais de 1 até 100.

1	~~2~~	~~3~~	4	~~5~~	6	~~7~~	8	9	10
~~11~~	12	~~13~~	14	15	16	~~17~~	18	~~19~~	20
21	22	~~23~~	24	25	26	27	28	~~29~~	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Fonte: dados da pesquisa

Quase todos os alunos responderam a tarefa 3 de acordo com as nossas previsões da análise a priori, percebemos que os alunos **institucionalizaram** a ideia de número primo e mostraram saber encontrar os divisores naturais de um número (conhecimento prévio), os alunos encontraram os resultados realizando divisões.

A tarefa 4 ,que foi realizada em dupla, só poderia ser resolvida se o aluno retomasse os conhecimentos adquiridos nas atividades 1 e 2, pois mais uma vez era preciso saber o que são divisores de um número e além disso foi preciso explicar para todos o que significava a palavra “distintos”, pois um dos alunos de uma equipe perguntou logo o que significava essa palavra e a fala foi:

Tio , a gente não sabe o que é distintos!

E mais uma vez percebemos **um obstáculo linguístico** e para sanarmos esse obstáculo nos remetemos a seguinte analogia:

Aqui na sala há pares de quantos sapatos distintos, ou seja, diferentes?

Após isso a maioria respondeu corretamente conforme a figura 53:

Figura 53: Tarefa 4

4) Destaque também sete números maiores que 1 que apresentem mais de dois divisores naturais distintos:

Fonte: dados da pesquisa

Figura 54: Tarefa 4

O quadro a seguir representa os números naturais de 1 até 100.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Fonte: dados da pesquisa

A maioria dos alunos respondeu a tarefa 4 depois da nossa intervenção, comprovando as nossas previsões da análise a priori, mostrando saber encontrar os divisores naturais de um número (conhecimento prévio), os alunos encontraram os resultados solicitados realizando divisões.

Na tarefa 5 foi preciso anunciar para os alunos o que era número **composto**, mais uma vez tivemos que **institucionalizar** um conhecimento, pois os mesmos não sabiam, porque não tiveram acesso a essa informação no ano anterior, o resultado foi muito satisfatório, pois a maioria respondeu corretamente, como mostra a figura a seguir:

Figura 55: Tarefa 5

5) Um número natural maior que 1 não primo que apresenta mais de dois divisores naturais distintos é dito número composto, assim são 4, 8, 10, 15, 20, 25, 30, 18, 16, 14, 12, 22

Fonte: dados da pesquisa

Quase todos os alunos responderam a tarefa 5 de acordo com as nossas previsões da análise a priori, percebemos que os alunos institucionalizaram a ideia de número composto e mostraram saber encontrar os divisores naturais de um número (conhecimento prévio), os alunos encontraram os resultados realizando divisões.

Para a realização da tarefa 6 os alunos mais uma vez tiveram que mobilizar os conhecimentos institucionalizados nas atividades 1 e 2, percebemos que a maioria respondeu corretamente conforme a figura a seguir:

Figura 56: Tarefa 6

6) Destaque os divisores dos números a seguir com exceção dele próprio:

D (6) = 1, 2, 3

D (8) = 1, 2, 4

D (12) = 1, 2, 4, 6

D (18) = 1, 2, 6, 9

D (24) = 1, 2, 4, 6, 8

D (28) = 1, 2, 4

D (36) = 1

Divisores próprios de um número são todos os divisores dele exceto ele próprio.

Fonte: dados da pesquisa

Quase todos os alunos responderam a tarefa 6 de acordo com as nossas previsões da análise a priori, e retomaram sem dificuldades a ideia de divisores de um número , os alunos encontraram os resultados realizando divisões (conhecimento prévio).

Na tarefa 7, tivemos que incentivar e encorajá-los, pois a fala de todos foi a mesma:

Professor, nós nunca estudamos isso, nós não sabemos fazer!

Com isso falamos que eles teriam condições de resolver as tarefas e para que isso fosse possível era só preciso fazer a leitura e a compreensão sobre as definições de números **perfeitos**, **defectivos** e **abundantes** que estavam contidas no início dessas atividades, o resultado foi satisfatório conforme a figura a seguir:

Figura 57 : Tarefa 7

NÚMERO PERFEITO

Todo número natural é perfeito, se a soma de seus divisores próprios (todos seus divisores, exceto o mesmo número) é igual ao próprio número. Por exemplo, o número ...6... é perfeito uma vez que seus divisores próprios são .1., 2. e .3. e a soma deles é igual ao mesmo número.

NÚMERO DEFECTIVO

Também chamado de deficiente é o número cuja soma de seus divisores próprios é menor que esse número. Por exemplo, .8. é um número defectivo uma vez que seus divisores próprios são 4., 2 e 1., e a sua soma é de 4. + 2 + 1. = 7.

Os números primos são defectivos? Justifique.

NÚMERO ABUNDANTE

O número natural é abundante, se a soma de seus divisores próprios é maior do que o próprio número. Também chamado excessivo.

Os primeiros números abundantes são: 12 18 20 24 30 36 40 42 50

Fonte: dados da pesquisa

A maioria dos alunos respondeu a tarefa 7 de acordo com as nossas previsões da análise a priori e conseguiram reconhecer certas características dos números que possibilitou denominá-los em perfeitos, defectivos ou abundantes, essas denominações foram possíveis através da determinação dos divisores (conhecimento prévio).

Na tarefa 8, os alunos precisaram mobilizar ao conhecimentos institucionalizados nas atividades 2 e 6 para resolver tal atividade, o resultado foi satisfatório, como é verificado na figura a seguir:

Figura 58: tarefa 8

8) Nas tarefas 2 e 6 , encontramos os divisores naturais de alguns números, utilize esses resultados e determine os divisores comuns **(DC)** de :

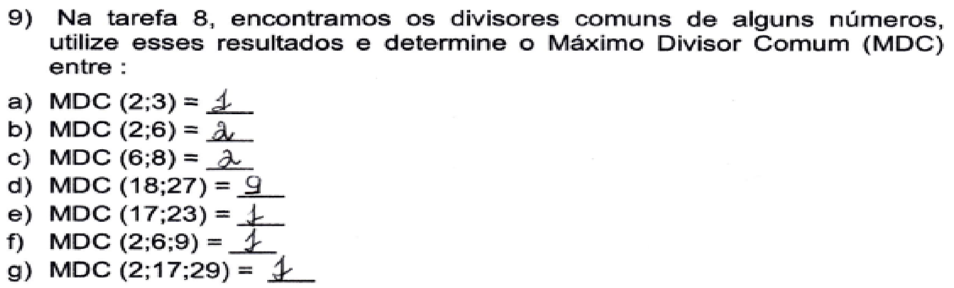
a) DC (2;3) = 1
b) DC (2;6) = 1 e 2
c) DC (6;8) = 1 e 2
d) DC (18;27) = 1, 3, 9
e) DC (17;23) = 1
f) DC (2;6;9) = 1
g) DC (2;17;29) = 1

Fonte: dados da pesquisa

A maioria dos alunos respondeu corretamente a tarefa 8 de acordo com as nossas expectativas da análise a priori e conseguiram aprimorar os conhecimentos sobre divisores e identificar divisores comuns, tendo como conhecimentos prévios a ideia de divisores e o entendimento do significado da palavra “comum”, para realizar a tarefa não foi preciso realizar divisões, foi preciso apenas observar os resultados das tarefas 2 e 6 e identificar os divisores comuns.

Na tarefa 9,a partir dos resultados da tarefa 8, os alunos calcularam o **MDC** de um grupo de números, tivemos que intermediar apenas com um aluno, pois o mesmo não conseguiu associar a palavra máximo com o significado de maior, no geral o resultado foi muito satisfatório como mostra a figura a seguir:

Figura 59: Tarefa 9


9) Na tarefa 8, encontramos os divisores comuns de alguns números, utilize esses resultados e determine o Máximo Divisor Comum (MDC) entre :

a) MDC (2;3) = 1
b) MDC (2;6) = 2
c) MDC (6;8) = 2
d) MDC (18;27) = 9
e) MDC (17;23) = 1
f) MDC (2;6;9) = 1
g) MDC (2;17;29) = 1

Fonte: dados da pesquisa

A maioria dos alunos resolveu corretamente a tarefa 9 de acordo com as nossas expectativas da análise a priori e eles calcularam o **MDC** dos números em questão, tendo como conhecimentos prévios a ideia de divisores comuns e entenderam o significado da palavra “máximo” no contexto do **MDC**.

Na tarefa 10, que foi passada para casa, os alunos precisaram demonstrar competência leitora para poder perceber a ação que deveriam desenvolver a tarefa e tal ação consistiu em fazer divisões sucessivas e tirar conclusões do resultado da última divisão com o texto do enunciado da tarefa, o resultado foi muito satisfatório, pois a maioria trouxe a tarefa resolvida de casa como é mostrada na figura abaixo:

Figura 60: Tarefa 10

10) O trecho a seguir é um clássico da História da Matemática:

> "A proposição VII - 2 é uma das mais famosas dos Elementos porque apresenta o método para se encontrar o ***Máximo Divisor Comum*** entre dois números, através de uma sequência de operações que, merecidamente, consagrou-se sob o nome de *Algoritmo de Euclides*. O procedimento é....: divide-se o maior pelo menor, o menor pelo primeiro resto, o primeiro resto pelo segundo, etc. Se se chegar a algum resto que divida o anterior, ele será o *MDC*; se se chegar a um resto igual a 1, os números serão primos entre si. Vale a pena conhecer este clássico.

Considerando o trecho acima, escolha dois pares de números da tabela e verifique se eles são primos entre si.

6 e 4

$$\begin{array}{r|l} 6 & 4 \\ \hline -2- & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 4 & 2 \\ \hline -0- & 2 \end{array}$$

Não são primos entre si

3 e 2

$$\begin{array}{r|l} 3 & 2 \\ \hline -1- & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 2 & 1 \\ \hline -0- & 2 \end{array}$$

São primos entre si

Fonte: dados da pesquisa

A maioria dos alunos resolveu corretamente a tarefa 10 de acordo com as nossas expectativas da análise a priori, eles após entenderem o trecho, calcularam o **MDC** pelo Algoritmo de Euclides e utilizaram o resultado do **MDC** para afirmar se os números são primos entre si ou não, tendo como conhecimento prévio o processo da divisão entre números naturais.

No segundo dia de aplicação, apresentamos a tarefa 11 de caráter **adidático**, caráter esse devido ser uma **situação adidática** que segundo Almouloud(2010) é uma situação na qual a intenção de ensinar não é revelada ao aprendiz, mas foi imaginada, planejada e construída pelo professor para proporcionar a esses, condições favoráveis para a apropriação do novo saber que deseja ensinar. Solicitamos que os alunos, em dupla, escrevessem sequências numéricas a partir do processo de contagem, quando todas as duplas terminaram, perguntamos:

Além da contagem de 2 em 2, como poderiamos escrever a sequêcia do item?

Dois grupos levantaram a mão e responderam:

Pela multiplicação!

Foi neste momento que explicamos que se tratava de **múltiplos**, foi a partir daí que conversamos sobre múltiplos e a devolutiva dos grupos foi muito positiva conforme estamos mostrando a seguir :

Figura 61: Tarefa 11

11) Quais os números da tabela que:

a) Representam a sequência dos cinco primeiros números pares?
2, 4, 6, 8, 10

b) Representam a sequência do número 3, a partir dele, que são formados da contagem de 3 em 3 ?
3, 6, 9, 12, 15

c) Representam a sequência do número 5, a partir dele, que são formados da contagem de 5 em 5?
5, 10, 15, 20, 25

d) Representam a sequência do número 7, a partir dele, que são formados da contagem de 7 em 7?
7, 14, 21, 28, 35

Fonte: dados da pesquisa

A maioria dos alunos resolveu corretamente a tarefa 11 de acordo com as nossas expectativas da análise a priori e formaram as sequências solicitadas a partir do processo de contagem, tendo como conhecimento prévio realizar a adição de dois em dois, de três em três e assim por diante. Poucos erraram, e o erro se deu por terem realizados somas indevidas.

Ao questionarmos como eles fizeram essa tarefa um aluno respondeu:

Tio a gente foi somando mais dois, depois mais três, depois mais cinco e por último mais sete.

A maioria reafirmou essa colocação e para finalizar nós os parabenizamos.

A tarefa 12 solicitou a escrita dos múltiplos de alguns números e ao término dessa tarefa perguntamos aos alunos como eles realizaram essa tarefa, tivemos como resposta:

Eu fui somando como lá na tarefa 11!

Eu fui multiplicando!

Os outros alunos ao ouvirem, falaram que fizeram por uma dessas formas. Analisando as respostas, percebemos que todos os alunos realizaram corretamente essa tarefa e mostramos esse resultado na figura a seguir:

Figura 62: Atividade 12

12) Retire da tabela os cinco primeiros múltiplos **(M)** de:

a) M(1) 1, 2, 3, 4 e 5.
b) M(2) 2, 4, 6, 8 e 10.
c) M(3) 3, 6, 9, 12 e 15.
d) M(5) 5, 10, 15, 20 e 25.
e) M(7) 7, 14, 21, 28 e 35.

Fonte: dados da pesquisa

Todos os alunos resolveram corretamente a tarefa 12 de acordo com as nossas expectativas da análise a priori e escreveram a sequência dos múltiplos naturais de cada número, a escrita das sequências se deu pela multiplicação do número de cada item pela sequência dos números inteiros naturais não nulo (conhecimento prévio).

Na tarefa 13**,** todos a realizaram e a maioria acertou e o resultado correto está sendo apresentado na figura a seguir:

Figura 63: Tarefa 13

13) Retire da tabela os dois primeiros múltiplos comuns **(MC)** de:

a) MC (2;3) 6 e 12.
b) MC (2;5) 10 e 20.
c) MC (3;5) 15 e 30.
d) MC (2;7) 14 e 28.
e) MC (1;3;5) 15 e 30.

Fonte: dados da pesquisa

A maioria dos alunos resolveu corretamente a tarefa 13 de acordo com as nossas expectativas da análise a priori e listaram os múltiplos comuns entre os números em questão observando os resultados da tarefa 12 e entenderam o significado da palavra “comum”.

A tarefa 14 solicitou aos alunos o cálculo do **MMC**, a dificuldade que todos encontraram foi sobre o que significava a palavra **mínimo**, caracterizando um **obstáculo linguístico,** como mediadores do processo, explicamos que **mínimo** significava menor, logo após os alunos realizaram essa atividade a partir dos resultados observados na atividade anterior, a figura a seguir mostra o resultado que a maioria dos alunos registrou, veja:

Figura 64: Tarefa 14

14) A partir dos resultados da questão 12, determine o Mínimo Múltiplo Comum **(MMC)** entre:

a) MMC (2;3) = 6.
b) MMC (2;5) = 10.
c) MMC (2;7) = 14.
d) MMC (1;3;5) = 15.

Fonte: dados da pesquisa

A maioria dos alunos resolveu corretamente a tarefa 14 de acordo com as nossas expectativas da análise a priori e os alunos reuniram os conhecimentos aprimorados na tarefa 13 e identificaram o Menor Múltiplo Comum entre os números propostos e entenderam o significado da palavra “mínimo” no contexto do **MMC** (conhecimento prévio).

A última tarefa do segundo momento foi sobre **MMC**, contudo não os informamos do que se tratava e a maioria dos alunos acertou essa questão, como mostra a imagem a seguir:

Figura 65: Tarefa 15

15) Dona Dica levou seu filho no dia 22 de dezembro de 2016 em um consultório popular no Guamá, durante a consulta o médico receitou dois medicamentos (**A** e **B**). O medicamento **A** tem que ser ministrado de 8 em 8 h e o **B** de 12 em 12 h. Os dois medicamentos foram administrados às 7 h da manhã do dia seguinte. Depois de quantas horas os dois medicamentos serão administrados juntos novamente? Em que dia isso ocorrerá?

8 16 24
12 24

Depois de 24 horas e acontecerá no dia 24 te dezembro.

Fonte: dados da pesquisa

A maioria dos alunos resolveu corretamente a tarefa 15 de acordo com as nossas expectativas da análise a priori e eles associaram os trechos “de 8 em 8 horas e de 12 em 12 horas” com a ideia de **múltiplo** (conhecimento prévio) e a pergunta “Depois de quantas horas os dois medicamentos serão administrados juntos novamente?” com a ideia de **comum** (conhecimento prévio) e com isso perceberam as características do cálculo do **MMC.**

Com a análise a posteriori da última tarefa da nossa sequência didática encerramos esse capíltulo que foi de fundamental imporância para análisarmos os momentos de **Ação**, **formulação**, **validação** e **institucionalização** do processo de ensino e aprendizagem que vivenciamos com os alunos e para concluir o nosso trabalho de pesquisa apresentaremos a seguir as considerações finais.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O início da constituição do nosso produto, no caso, uma sequência didática, surgiu ao percebermos que muitos livros didáticos de Matemática utilizados e analisados por nós e outros professores tratam as noções do **MDC** e do **MMC** sem uma abordagem construtiva e histórica que possa favorecer uma articulação entre as noções. Os livros didáticos apresentam um conjunto de atividades, muitas vezes, isoladas e pontuais e sem apresentar razões de ser para o estudo dessas noções.

A organização dos procedimentos metodológicos da nossa pesquisa teve como alicerce aspectos da Engenharia Didática de 1ª geração com olhos nas características da micro e macro engenharias com o intuito de realizar um estudo do **MDC** e do **MMC** mostrando a definição, extensões, contextos históricos, epistemológicos, parte temática a qual abrange como se apresenta o estudo desses dois objetos nos livros didáticos em diferentes épocas e países, artigos, dissertações, teses e outros trabalhos, esse estudo nos possibilitou conhecer a gênese, as formas de apresentação da definição e as diferentes formas de trabalhar o **MDC** e o **MMC**, todo esse estudo nos possibilitou formular a nossa Sequência Didática para o cálculo do **MDC** e do **MMC** com o objetivo de que o aluno construa o conceito gradativamente desses dois objetos através de atividades articuladas e consiga aplicar o conhecimento apreendido em diversos contextos que vislumbrem situações-problema, pensamos assim contribuir de forma significativa no processo de ensino e de aprendizagem no âmbito da Educação Matemática alicerçados na Didática da Matemática. Assim a nossa Sequência Didática é a resposta positiva e significativa para a nossa questão de investigação: **"Uma sequência didática definida a partir de noções de teoria dos números e estudos da área da educação matemática favorece a compreensão e cálculo do MDC e do MMC?".**

Construímos uma Sequência Didática levando em consideração as afirmações apresentadas por René Rickenmann (1998), este afirma que o modelo de uma sequência deve contemplar um tema, um objetivo bem definido para a atividade, o objetivo traz consigo o saber a ensinar. Para começarmos a produzir a nossa Sequência Didática adotamos como referencial teórico a Teoria das situações didáticas (TSD) que busca criar um modelo da interação entre o aprendiz, o saber e o *milieu* (ou meio) no qual a aprendizagem deve se desenrolar (ALMOULOUD, 2010, p. 31). Com isso procuramos modelar uma situação que interagisse com o aprendiz, onde pudessem ser mobilizadas competências prévias a fim de adquirir novos conhecimentos.

Realizamos *as análises a priori* de cada atividade da nossa sequência destacando os objetivos, os conhecimentos prévios e as nossas expectativas para podermos confrontar com os resultados obtidos de cada atividade, ou seja, *as análises a posteriori* , ao realizarmos tal confronto à luz da **TSD** percebemos a falta de conhecimentos prévios e o surgimento de obstáculos linguísticos e psicológicos que foram percebidos aos analisarmos as falas dos alunos durante a aplicação da nossa sequência devido a isso tivemos que fornecer alguns conhecimentos e isso proporcionou um dos efeitos do contrato didádico chamdo de Efeito “Topaze”, e tivemos que conversar com alguns alunos a fim de que podessem acreditar que teriam condições de resover as tarefas propostas, pois sem a nossa intervenção durante a aplicação ficaria inviável o avanço do aluno na construção do conceito do **MDC** e do **MMC**.

O processo de aprendizagem em nossa Sequência Didática foi analisado pelas quatro diferentes fases anunciadas por Brousseau que são *a **ação**, a **formulação**, a **validação** e a **institucionalização*** , fases essas que foram vivenciadas por uma dialética entre os componentes envolvidos nesse processo, onde o elemento regulador foi o ***contrato didático*** que teve a função de evitar e sanar possíveis obstáculos didáticos e epistemológicos.

Consideramos que a nossa **Sequência didática** é uma resposta positiva para a questão de investigação mencionada anteriormente porque ela possibilita a propriação de conhecimentos necessários para que ocorra a construção gradativa do aprendizado do cálculo do **MDC** e do **MMC.**

Para finalizar as considerações finais deixamos aqui as palavras de Luiz Carlos Pais intitulado Prospecto da Multiplicidade:

> Ensinar e aprender Matemática são atos entrelaçados por uma multiplicidade não ordenada de filamentos, os quais não cabem na singularidade de qualquer modelo e de qualquer outra abstração. Todo recorte feito pela pesquisa funciona como uma parada de imagem para compreender uma parte da questão. Por isso, devemos lançar todas as articulações possíveis para realizar os valores potenciais da educação matemática (PAIS, 2009, p. 7).

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALMOULOUD; SILVA. **Engenharia didática: evolução e diversidade.** REVISTA ELETRÔNICA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. v. 7, n. 2 (2012).

ALMOULOUD, A. S. **Fundamentos da didática da matemática**. Curitiba: Ed. UFPR, 2007.

ALMOULOUD, **Teoria Antropológica do Didático: Metodologia de análise de materiais didáticos.** REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. n 42. Novembro de 2015.

AMARAL, Heloisa. **Sequência didática e ensino de gêneros textuais**. Disponível em: <https://www.escrevendoofuturo.org.br/conteudo/biblioteca/nossas-publicacoes/revista/artigos/artigo/1539/sequencia-didatica-e-ensino-de-generos-textuais>. Acesso em:

ANDRINI, Á. **Praticando Matemática.** São Paulo: Editora do Brasil S/A,1989.
AUSUBEL, D.P. **Psicologia educativa** : um punto de vista cognoscitivo. México : Ed. Trillas, 1976.

BOYER, C. B. **História da matemática.**2. ed. trad. Elza F. Gomide. São Paulo: Edgar Blücher,2003.

BROUSSEAU, G. Fundamentos e métodos da didática da matemática In: **Didáctica das matemáticas**, Direção: Jean Brun. Coleção horizontes pedagógicos; Instituto Piaget, Lisboa, 1996.

BRUN, Jean (direção). Didácticas das Matemáticas. Coleção Horizontes Pedagógicos. Lisboa: Instituto Piaget, 1996, pp. 193-217.

CARDOSO, M.L.; GONÇALVES, O. A. **Uma Interpretação geométrica do MMC**. Revista do Professor de Matemática, São Paulo, nº32, p.27-28, 1996.

CLUBES DE MATEMÁTICA DA OBMEP. Disponível em <http://clubes.obmep.org.br/blog/numeros-especiais-numeros-perfeitos>. Acesso em 14 de março de 2017.

DAMM, R. F. Registros de Representação. In: MACHADO, S. D. A. et al. **Educação Matemática: uma introdução** São Paulo: Educ,1999. Edição, 2009.
EUCLIDES. **Os Elementos.**Tra. eintrod. Irineu Bicudo. São Paulo, 2009, pp. 271, 297 e 298.

FILHO. E.A. **Teoria Elementar dos Números.** São Paulo, 1989. 3ª edição. 3ª impressão, pp . 84, 110, 119.

FLORES. Transposición y destransposición del saber matemático y didáctico: representaciones y prácticas en la formación inicial de docentes.Julio de 2013,pág 52.

FONSECA, R. F. **Números primos e o Teorema fundamental da arimética:** Uma Investigação entre estudantes de licenciatura em Matemática. São Paulo, 2015, p.29.

FREITAS. J.L.M. Teoria das Situações Didáticas. In: MACHADO, S. D. A. 3ª edição revisada. **Educação Matemática: uma (nova) introdução** São Paulo: Educ,1999. Edição, 2012.

GRASSESCHI, ANDRETTA, SILVA. **PROMAT-PROJETO OFICINA DE MATEMÁTICA.** São Paulo, 1999, pp 120,121 e 122.

GUERRA; SILVA. **As operações com frações e o Princípio da Contagem.** Bolema, Rio Claro (SP), Ano 21, nº 31, 2008, p. 41 a 54.

HOUAISS. **Minidicionário da língua portuguesa.** Rio de Janeiro, 2010, p.p.197 e 555.

IEZZI; DOLCE; MACHADO**. Matemática e realidade.** São Paulo. Editora Atual. 6ª
IMENES; LELLIS. **Matemática Imenes & Lellis.** São Paulo. Editora Moderna Ltda. 1ª edição, 2011.

KHANACADEMY. **Máximo divisor comum de monômios.** Disponível em: <https://pt.khanacademy.org/math/algebra/polynomial-factorization/common-monomial-factors/a/greatest-common-factor-of-monomials>. Acesso em: 09 set. 2016.

KILHIAN, Kleber. **O Algoritmo de Euclides para Determinação do MDC**. Disponível em: <http://obaricentrodamente.blogspot.com.br/2012/08/o-algoritmo-de-euclides-para.html>. Acesso em: 10 nov. 2016.

LAKATOS, I. **A Lógica do Descobrimento Matemático:** Provas e Refutações. Trad. Nathanael C. Caixeiro, Zahar Editores, Rio de Janeiro, 1978.

MACHADO,S. D. A. **Educação Matemática ; Uma (nova) introdução.** 3. Ed. EDUC- Editora da PUC-SP,2012.

MAIER, R. R. **Teoria dos Números; Texto de aula.** Versão atualizada – Universidade de Brasília – UNB, 2005, pp 24-25 ; 29-30. <http://miltonborba.org/cd/interdisciplinariedade/anais_vii_epem/mesas_redondas/mr21-saddo.doc.

NETTO, P. N. **Matemática Conceitos e Histórias.** São Paulo: Editora Scipione Ltda.6ª edição, 1998.

OLIVEIRA, Z. C. **Uma Interpretação geométrica do MDC**. Revista do Professor de Matemática, São Paulo, nº29, p.25, 1995.

PAIS, L. C. **Didática da Matemática; uma análise da influência francesa.** 3. ed. Coleção Tendências em Educação Matemática, Belo Horizonte - MG:Ed. Autêntica,2011.

PAIS, L. C. **Ensinar e aprender Matemática.** São Paulo. Editora Autêntica.2ª edição,2009.

POLLEZZI, M. **Como obter o MDC e o MMC sem fazer contas?** Revista do Professor de Matemática, São Paulo, nº51, p.30, 2003.

RICKENMANN, R. **Modèle de structure de la séquence didactique.** **<**http://www.unige.ch/fapse/SSE/teaching/uf713/mise-oeuvre.html>. Acesso em março de 2016.

SILVA, A. S. Contrato didático. In: MACHADO, S. D. A. 3ª edição revisada. **Educação Matemática: uma (nova) introdução** São Paulo: Educ,1999. Edição, 2012.

VILHENA, SILVA e LUCENA. **Os obstáculos linguísticos no ensino-aprendizagem da matemática. X Encontro Nacional de Educação Matemática Educação Matemática, Cultura e Diversidade Salvador** – BA, 7 a 9 de Julho de 2010.

ZUMPANO, Antônio. **Matemática Elementar**. Disponível em: <http://www.mat.ufmg.br/~espec/calculo/Matematica-Elementar.pdf>. Acesso em 02 de junho de 2016.

ANEXO

Carro professor a **Sequência didática** a seguir é composta por 15 tarefas que foram inspiradas nas pesquisas que efetuamos no decorrer do desenvolvimento da nossa dissertação cujo título é NÚMEROS PRIMOS E A CONSTITUIÇÃO DO MMC E MDC, cada tarefa da Sequência está ancorada em conhecimentos prévios e tem como objetivo a construção gradativa das ideias de conjunto de divisores naturais, da determinação de divisores, divisores comuns e o aprimoramento desses objetos leva ao cálculo do Máximo Divisor Comum **(MDC)** entre dois e três números, podendo ser extendido para o cáculo de mais de três números, ainda na linha do estudo dos divisores abordamos a identificação de números primos, números compostos, números primos entre si, números perfeitos, defectivos e abundantes.

Continuando a formação gradativa há o segundo momento que é a formação de sequências através do processo de contagem ou multiplicação, a ideia de múltiplos, múltiplos comuns e o aprimoramento desses objetos leva ao cálculo do Mínimo Múltiplo Comum **(MMC)** entre dois e três números, podendo ser extendido para o cáculo de mais de três números.

Esperamos que o nosso produto possa contribuir em sua ação didática no processo de ensino e aprendizagem, atenciosamente os autores.

A SEQUÊNCIA DIDÁTICA:

1) O quadro a seguir representa os números naturais de 1 até 100.

Quadro dos números naturais de 1 a 100

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Fonte: Os autores

Quais os números da tabela que:

a) dividem 5?

D (5) =

b) dividem 9?

D (9) =

c) dividem 12?

D (12) =

d) dividem 13?

D (13) =

e) dividem 24?

D (24) =

f) dividem 36?

D (36) =

g) dividem 75?

D (75) =

h) dividem 100?

D (100) =

i) dividem o 1?

D (1) =

2) Os números que dividem outro número são chamados divisores dele e são representados por D (**n**) sendo *n um número Natural* (representamos: **n** $\in \mathbb{N}$), assim quais os divisores de:

D (7) =	D (2) =
D (18) =	D (3) =
D (27) =	D (17) =
D (54) =	D (23) =
D (72) =	D (29) =

3) Das tarefas anteriores quais os números que apresentam como divisores o 1 e ele próprio?

Um número natural maior que 1, que tem exatamente dois divisores, o 1 e ele mesmo é um número ...., assim destaque dez números .... na tabela:

4) Destaque também sete números maiores que 1 que apresentem mais de dois divisores naturais distintos:

5) Um número natural maior que 1 não primo que apresenta mais de dois divisores naturais distintos é dito número ...., assim são ....: ..., ..., ..., ..., ..., ..., ..., ...

6) Destaque os divisores dos números a seguir com exceção dele próprio:

D (6) =

D (8) =

D (12) =

D (18) =

D (24) =

D (28) =

D (36) =

Divisores próprios de um número são todos os divisores dele exceto ele próprio.

7) Leia as definições e complete corretamente utilizando números da tabela

NÚMERO PERFEITO

Todo número natural é perfeito, se a soma de seus divisores próprios (todos seus divisores, exceto o mesmo número) é igual ao próprio número. Por exemplo, o número .... é perfeito uma vez que seus divisores próprios são ..., ... e .... e a soma deles é igual ao mesmo número.

NÚMERO DEFECTIVO

Também chamado de deficiente é o número cuja soma de seus divisores próprios é menor que esse número. Por exemplo, ... é um número defectivo uma vez que seus divisores próprios são ..., ... e ..., e a sua soma é de ... + ... + ... = ...

Os números primos são defectivos? Justifique.

NÚMERO ABUNDANTE

O número natural é abundante, se a soma de seus divisores próprios é maior do que o próprio número. Também chamado excessivo.

Os primeiros números abundantes são: ..., ..., ..., .., .., .., ..., .., ...

8) Nas tarefas 2 e 6, encontramos os divisores naturais de alguns números, utilize esses resultados e determine os divisores comuns **(DC)** de :

a) DC (2;3) = ________________
b) DC (2;6) = ________________
c) DC (6;8) = ________________
d) DC (18;27) = ________________
e) DC (17;23) = ______________
f) DC (2;6;9) = _______________
g) DC (2;17;29) = _______________

9) Na tarefa 8, encontramos os divisores comuns de alguns números, utilize esses resultados e determine o Máximo Divisor Comum (MDC) entre :

a) MDC (2;3) = ___
b) MDC (2;6) = ___
c) MDC (6;8) = ___
d) MDC (18;27) = ___
e) MDC (17;23) = ___
f) MDC (2;6;9) = ___
g) MDC (2;17;29) = ___

Tarefa de casa

10) O trecho a seguir é um clássico da História da Matemática:

> "A proposição VII - 2 é uma das mais famosas dos Elementos porque apresenta o método para se encontrar o ***Máximo Divisor Comum*** entre dois números, através de uma sequência de operações que, merecidamente, consagrou-se sob o nome de *Algoritmo de Euclides*. O procedimento é....: divide-se o maior pelo menor, o menor pelo primeiro resto, o primeiro resto pelo segundo, etc. Se se chegar a algum resto que divida o anterior, ele será o *MDC*; se se chegar a um resto igual a 1, os números serão primos entre si. Vale a pena conhecer este clássico.

Considerando o trecho acima, liste um par de números da atividade 9 que são primos entre si e escolha dois pares de números da tabela e verifique se eles são primos entre si.

11) Quais os números da tabela da tarefa 1 que:

a) Representam a sequência dos cinco primeiros números pares?

.....,.....,.....,.....,.....

b) Representam a sequência do número 3, a partir dele, que são formados da contagem de 3 em 3 ?

.....,.....,.....,.....,.....

c) Representam a sequência do número 5, a partir dele, que são formados da contagem de 5 em 5?

.....,.....,.....,.....,.....

d) Representam a sequência do número 7, a partir dele, que são formados da contagem de 7 em 7?

.....,.....,.....,.....,.....

12) Retire da tabela da tarefa 1 os cinco primeiros múltiplos **(M)** naturais de:

a) M(1) ______________________________.
b) M(2) ______________________________.
c) M(3) ______________________________.
d) M(5) ______________________________.
e) M(7) ______________________________.

13) Retire da tabela da tarefa 1 os dois primeiros múltiplos comuns **(MC)** de:

a) MC (2;3) _________________________.
b) MC (2;5) _________________________.
c) MC (3;5) _________________________.
d) MC (2;7) _________________________.
e) MC (1;3;5) ________________________.

14) A partir dos resultados da tarefa 13, determine o Mínimo Múltiplo Comum **(MMC)** entre:

a) MMC (2;3) = ______.

b) MMC (2;5) = ______.

c) MMC (2;7) = ______.

d) MMC (1;3;5) = _____.

15) Dona Dica levou seu filho no dia 22 de dezembro de 2016 em um consultório popular no Guamá, durante a consulta o médico receitou dois medicamentos (**A** e **B**). O medicamento **A** tem que ser ministrado de 8 em 8 h e o **B** de 12 em 12 h. Os dois medicamentos foram administrados às 7 h da manhã do dia seguinte. Depois de quantas horas os dois medicamentos serão administrados juntos novamente? Em que dia isso ocorrerá?